高等代数学（第四版）习题解答
第一章　行列式

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）:　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

1.1　二阶行列式

1. (1) -2. (2) 1.

2. (1) $3, 12$. 可见用常数 c 乘以行列式的某一行, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

(2) $3, 9$. 可见用常数 c 乘以行列式的某一列, 得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

3. $1; -3, 4$. 可见若行列式中某行 (列) 元素均为两项之和, 则行列式可表示为两个行列式之和.

4. $9, -9$.

5. $11, 11$. 可见行列式和其转置具有相同的值.

6.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

1.2　三阶行列式

1. (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times (-2) = -8.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

2. (1) 0, 因为行列式的前两行成比例.

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 22.$$

3. (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} &= x \begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} y & z \\ x & y \end{vmatrix} \\ &= x(x^2 - yz) - z(yx - z^2) + y(y^2 - xz) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & x^2+1 & -1 \\ 0 & -x & e^x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= x \times \begin{vmatrix} -x & e^x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} x^2+1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x^2+1 & -1 \\ -x & e^x \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)e^x - x. \end{aligned}$$

4. (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & x & 3\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix} &= 1\times\begin{vmatrix}x & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix}2 & 3\\ x & 3\end{vmatrix}\\ &= (-2x-15)-(-4-15)+(-3x+6)\\ &= -5x+10,\end{aligned}$$

因此解为 $x=2$.

(2)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix} &= (x-2)\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= (x-2)-2\times 3+(-1)\times 5\\ &= x-13,\end{aligned}$$

因此解为 $x=13$.

5. (1)

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-13}{-5}=\frac{13}{5},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{4}{-5}=-\frac{4}{5},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}.$$

(2)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{68}{34} = 2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{34} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-68}{34} = -2.$$

1.3　n 阶行列式

1. (1) 第 $(1,2)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-1&-1&0\\1&2&-1\\1&0&-2\end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&-1&0\\1&2&-1\\1&0&-2\end{vmatrix}=-3.$$

第 $(3,1)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-1&0\\-1&0&-2\end{vmatrix}=1,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-1&0\\-1&0&-2\end{vmatrix}=1.$$

第 $(3,3)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-3.$$

(2) 第 $(1,2)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\0&5&1\end{vmatrix}=-17,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&1&2\\0&5&1\end{vmatrix}=17.$$

第 $(3,1)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\6&5&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\6&5&1\end{vmatrix}=2.$$

第 $(3,3)$ 元素的余子式和代数余子式分别是:

$$M_{33}=\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&1&0\\0&6&1\end{vmatrix}=-11,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&1&0\\0&6&1\end{vmatrix}=-11.$$

2. (1) 60, 用性质 1 即得结论. (2) -6, 用性质 1 即得结论.

3. (1) 0, 因为行列式的第一行和第三行成比例.

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

4. (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & g & c & 0 \\ h & 0 & 0 & d \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} b & f & 0 \\ g & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} 0 & b & f \\ 0 & g & c \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= ad(bc - gf) - eh(bc - gf) \\ &= (ad - eh)(bc - gf). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} -a & d & e \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -a & 0 & e \\ -b & 0 & f \\ -c & -e & 0 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix} \\ &= -a(bfe - af^2 - cdf) + b(-aef + be^2 - cde) - c(-adf \\ &\quad + bde - cd^2) \\ &= a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + 2acdf - 2abef - 2bcde \\ &= (af - be + cd)^2. \end{aligned}$$

1.4 行列式的展开和转置

1. (1) 将行列式按第一行展开可得:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

将行列式按第一列展开可得:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 3\\ 5 & 2 & 2\end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix}0 & 0\\ 7 & 3\end{vmatrix} = 8.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

(2) 将行列式按第一行展开可得:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\ 6 & 2 & -1\\ 5 & -11 & 6\end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix}2 & -1\\ -11 & 6\end{vmatrix} + (-5) \times \begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & -11\end{vmatrix} = 381.$$

将行列式按第一列展开可得:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\ 6 & 2 & -1\\ 5 & -11 & 6\end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix}2 & -1\\ -11 & 6\end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix}0 & -5\\ -11 & 6\end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix}0 & -5\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 381.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

2. (1) 将行列式按第二行展开可得:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 8\end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & 8\end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & 8\end{vmatrix} = 23.$$

将行列式按第三列展开可得:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 8\end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 23.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

(2) 将行列式按第二行展开可得:

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 9 & 6 & -7\end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix}2 & -2\\ 6 & -7\end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix}3 & -2\\ 9 & -7\end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix}3 & 2\\ 9 & 6\end{vmatrix} = 7.$$

将行列式按第三列展开可得:

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 9 & 6 & -7\end{vmatrix} = -2\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ 9 & 6\end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix}3 & 2\\ 9 & 6\end{vmatrix} + (-7)\times\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 7.$$

可见两种展开方式求得的结果一致.

3. 证法 1　由反对称行列式的定义可知, $|\boldsymbol{A}|$ 的转置 $|\boldsymbol{A}'|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 的每个元素都相差一个符号, 将 $|\boldsymbol{A}'|$ 的每一行都提出公因子 -1 可得

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'| = (-1)^n|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|,$$

其中最后一步用到了 n 为奇数, 因此 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

证法 2　还可以用行列式的组合定义来证明, 参考例 1.43.

4. 证法 1　将第 n 列与第 $n-1$ 列对换, 再与第 $n-2$ 列对换, $\cdots$, 最后与第 1 列对换, 此时 b_1 就移至第 $(1,1)$ 位置, 共对换了 $n-1$ 次. 类似地, 经过 $n-i$ 次列对换可将 b_i 移至第 (i,i) 位置 $(i=2,\cdots,n-1)$, 故共对换了 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 次. 由行列式的性质 4, 结论得证.

证法 2　由行列式的组合定义可知,

$$左边 = (-1)^{N(n,n-1,\cdots,2,1)}b_1b_2\cdots b_n = 右边.$$

5. -1. 参考基础训练单选题 2.

6. 这个方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -1 & 4\\ 3 & 6 & 1 & 10\\ -1 & -2 & 0 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故该方程组有且仅有一组解, 经计算得,

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -1 & 4\\ 3 & 6 & 1 & 10\\ 4 & -2 & 0 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -10 & 0 & -14\end{vmatrix} = -24,$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 10 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$|\boldsymbol{A}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

其中 $|\boldsymbol{A}_i|$ 的定义参考高代教材定理 1.4.3 (Cramer 法则). 由 Cramer 法则可知, 方程组的解为 $x_1 = -24$, $x_2 = 5$, $x_3 = -5$, $x_4 = 5$.

1.5　行列式的计算

1. (1) 将第一行乘以 $-3, -1, 2$ 后分别加到第二、三、四行, 不改变行列式的值, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 90.$$

(2) 将第一行乘以 $3, -2, 2$ 后分别加到第二、三、四行, 不改变行列式的值, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & -7 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -3 & -7 & 10 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 154.$$

(3) 将第二、三、四、五行乘以 1 加到第一行上, 提出因子 4 后将第一行乘以 -1 加到第二、三、四、五行上得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

(4) 将第一行乘以 $-2, -3, -2, -1$ 后分别加到第二、三、四、五行上, 不改变行列式的值, 然后重复类似的消去步骤, 得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -23 & -41 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} \\ &= 52. \end{aligned}$$

2. (1) 例 1.1. (2) 例 1.2. (3) 例 1.3. (4) 例 1.6.
3. 例 1.9.
4. 例 1.26.
5. 例 1.24.
6. 例 1.22.

1.6　行列式的等价定义

1. 由行列式的性质 8 及高代教材定理 1.6.1 可得

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'| = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

2. 参考高等代数博客中的博文《行列式的组合定义及其应用—反对称阵的 Pfaffian》, 网址: https://www.cnblogs.com/torsor/p/3554028.html.

3. $(-1)^{N(n,n-1,n-2,\cdots,1)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

4. 例 1.39.

5. 例 1.21.

6. 例 1.40.

1.7 Laplace 定理

1. (1) 包含于第一、第三行的所有 2 阶子式为:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

对应的代数余子式为:

$$(-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(-1)^{1+3+1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad (-1)^{1+3+2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad (-1)^{1+3+3+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

由 Laplace 定理可得行列式的值为 0.

(2) 包含于第一、第三行的所有 2 阶子式为:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

对应的代数余子式为:

$$(-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -25, \quad (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$(-1)^{1+3+1+4}\begin{vmatrix}2&7\\-1&2\end{vmatrix}=-11,\quad(-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix}0&-2\\1&3\end{vmatrix}=-2,$$

$$(-1)^{1+3+2+4}\begin{vmatrix}0&7\\1&2\end{vmatrix}=-7,\quad(-1)^{1+3+3+4}\begin{vmatrix}0&2\\1&-1\end{vmatrix}=2,$$

由 Laplace 定理可得行列式的值为 -276.

2. 对第 $1,2,6$ 行进行 Laplace 展开, 可得行列式的值为

$$(-1)^{1+2+6+1+2+5}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\omega\\1&\omega&\omega^2\end{vmatrix}.$$

注意到 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, 由 Vandermonde 行列式可得

$$\begin{aligned}&-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\omega\\1&\omega&\omega^2\end{vmatrix}\\&=(\omega-1)^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-\omega)^2\\&=(\omega^2-2\omega+1)(\omega^4-2\omega^2+1)(\omega^4-2\omega^3+\omega^2)\\&=(-3\omega)\cdot(-3\omega^2)\cdot(-1-2)\\&=-27.\end{aligned}$$

也可以利用矩阵乘法直接计算如下:

$$-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\omega\\1&\omega&\omega^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{vmatrix}=-27.$$

3. 子式的行和列的指标和与对应余子式的行和列的指标和之和为所有行和列的指标和 $2(1+2+\cdots+n)$, 这是一个偶数, 因此子式的指标和与对应余子式的指标和具有相同的奇偶性.

4. 例 1.44.

5. 例 1.45.

复习题一

1. 例 1.4.

2. 例 1.5.

3. 例 1.7.

4. 例 1.11.

5. 例 1.12.

6. 例 1.14.

7. 例 1.15.

8. 例 1.16.

9. 例 1.17.

10. 例 1.18.

11. 例 1.19.

12. 例 1.20.

13. 例 1.23.

14. 左边为 Vandermonde 行列式, 其值为 $12(x-1)(x-2)(x+2)$, 因此方程的解为 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

15. 例 1.27.

16. 例 1.28.

17. 例 1.29.

18. 例 1.31.

19. 例 1.32.

20. 例 1.35.

21. 本题是例 1.36 的特例. 设 $|\boldsymbol{A}|=f(x)$, 将所有行加到第一行可以提出因子 $x+y+z$. 第二行乘以 1, 第三、四行乘以 -1 加到第一行上可以提出因子 $x-y-z$. 同理可知 $|\boldsymbol{A}|$ 有因子 $x-y+z, x+y-z$. 又 $|\boldsymbol{A}|$ 视作 x 的多项式是四次的, 首项系数为 1, 故 $|\boldsymbol{A}|=(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$.

22. 例 1.37.

23. 例 1.38.

24. 例 1.48.

25. 例 1.49.

高等代数学（第四版）习题解答
第二章　矩阵

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）：　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

2.1　矩阵的概念

无习题.

2.2　矩阵的运算

1. (1) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

(3) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(4) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(4) 直接计算可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -1 & 9 & 0 \\ -9 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 直接计算可得, 答案为:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

从中可见 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 一般不相等, 即矩阵乘法一般不可交换.

4. (1) 归纳可证

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

(2) 归纳证明

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}.$$

当 $k=1$ 时, 根据条件即得. 假设当 k 时结论成立, 则当 $k+1$ 时,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这就证明了结论.

(3) 参考例 2.12 (1), 答案为:

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} a^k & \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} & \mathrm{C}_k^2 a^{k-2} \\ 0 & a^k & \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}.$$

(4) 参考例 2.12 (2), 答案为:

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 17^{k-1} & 2\cdot 17^{k-1} & 4\cdot 17^{k-1} \\ 2\cdot 17^{k-1} & 4\cdot 17^{k-1} & 8\cdot 17^{k-1} \\ 3\cdot 17^{k-1} & 6\cdot 17^{k-1} & 12\cdot 17^{k-1} \end{pmatrix}.$$

5. 直接计算可得:

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j.$$

6. 例 2.8.

7. 直接将左边式子展开, 可得

$$\text{左边} = (\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{n-1}) - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^n) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{I}_n.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 故 $a_{ij}=a_{ji}$ 且 $a_{ij}\in\mathbb{R}\,(1\le i,j\le n)$. 考虑 $\boldsymbol{A}^2$ 的第 (i,i) 元素, 它为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0,$$

故 $a_{ik}=0\,(1\le i,k\le n)$, 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 更一般的结论可以参考例 2.9.

9. 例 2.10.

10. 类比第 9 题, $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}'$ 是 Hermite 阵, $\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}'$ 是斜 Hermite 阵, 并且

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}').$$

11. 例 1.41.

12. (1) 当 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵时, $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵.

当 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵时, $\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB})'=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵时, $\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB})'=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称阵.

当 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵时, $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{BA}$, 即 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$. 反过来, 当 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$ 时, $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{AB})'$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵.

13. (1) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}.$$

因此 $c=0$, $a=d$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}.$$

(2) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}.$$

因此 $a=d$, $b=c$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(3) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} a & b+c & c \\ d & e+f & f \\ g+3i & h+i & i \end{pmatrix}.$$

因此 $c=0$, $f=0$, $3a+d=3i$, $3b+e=i$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 3i-3a & i-3b & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

(4) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换. 经计算得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} c & a+c & b \\ f & d+f & e \\ i & g+i & h \end{pmatrix}.$$

因此 $c=d$, $a+c=e$, $b=f=g$, $d+f=h$, $e=i$, $a+d=i$, 即 $\boldsymbol{B}$ 形如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a+c & b \\ b & b+c & a+c \end{pmatrix}.$$

14. (1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与所有 n 阶对角阵乘法可交换. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 与基础矩阵 $\boldsymbol{E}_{ii}\,(1\le i\le n)$ 乘法可交换, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ii}=\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{A}$. 注意到 $\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{A}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的除第 i 行外的其他行全部变为零, 而保持第 i 行不变的 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ii}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的除第 i 列外的其他列全部变为零, 而保持第 i 列不变的 n 阶矩阵, 它们相等导致 $a_{ij}=0\,(i\ne j)$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对角阵. 也可以参考例 2.11 的证法 2.

(2) 例 2.11.

2.3 方阵的逆阵

1. (1) 经过计算, $|\boldsymbol{A}|$ 中第 (i,j) 元素的代数余子式 A_{ij} 分别为:

$$\begin{aligned}
&A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-3\\1&1\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}=-1,\\
&A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2,\\
&A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1,\\
&A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-3\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\1&-3\end{vmatrix}=2,\\
&A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,
\end{aligned}$$

而 $|\boldsymbol{A}|=3$, 因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-1&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(2) 注意到 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为

$$A_{ij}=\begin{cases}0, & i\ne j,\\ a_1\cdots\widehat{a}_i\cdots a_n, & i=j,\end{cases}$$

而 $|\boldsymbol{A}|=a_1a_2\cdots a_n$, 因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. 将该线性方程组写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵, $\boldsymbol{\beta}=(8,11,-11)'$. 经计算得 $\boldsymbol{A}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

因此原线性方程组的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 有一行元素全为零, 则它与任意一个同阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也会有一行元素全为零, 不可能是单位阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 必为奇异阵. 同理, 如果 $\boldsymbol{A}$ 有一列元素全为零, 则任意一个同阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 与它的乘积 $\boldsymbol{BA}$ 也会有一列元素全为零, 不可能是单位阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 必为奇异阵.

4. 证法 1　直接验证. 注意到对任一正整数 k, 有

$$\boldsymbol{A}^k(\boldsymbol{A}^{-1})^k=\boldsymbol{A}^{k-1}\cdot\boldsymbol{I}\cdot(\boldsymbol{A}^{-1})^{k-1}=\cdots=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I},$$
$$(\boldsymbol{A}^{-1})^k\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{A}^{-1})^{k-1}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^{k-1}=\cdots=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

根据逆阵的定义即得结论.

证法 2　在等式 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\boldsymbol{A}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$ 中令 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\cdots=\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}$ 即得结论.

5. 在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$; 在 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$ 两边同时右乘矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

6. 注意到 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 又 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 故由非异阵的乘法消去律可得 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$.

7. 例 2.17.

8. 注意到

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1},$$

故由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 非异知 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也非异.

9. 根据高代教材 § 2.2 的习题 7 可得,

$$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{I}_n,$$

因此 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 非异.

10. 由已知可得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n=-2\boldsymbol{I}_n$, 因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 是非异阵.

11. 由已知可得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_n$, 因此 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 是非异阵.

12. 例 2.21.

2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. (1) 先将第一行乘以 -1, 再将第一行乘以 -3 加到第二行上, 以及用第 $(1,1)$ 元素消去同行其他元素:

$$\text{原矩阵}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\3&1&0&-1\\0&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&3&5\\0&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&5\\0&2&1&4\end{pmatrix}.$$

然后, 将第二行乘以 -2 加到第三行上, 再用第 $(2,2)$ 元素消去同行其他元素:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&5\\0&2&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&5\\0&0&-5&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-5&-6\end{pmatrix}.$$

最后, 将第三行乘以 $-\dfrac{1}{5}$, 再用第 $(3,3)$ 元素消去同行其他元素即得相抵标准型:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-5&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\dfrac{6}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 先将第一行乘以 -1、-2 分别加到第三、四行上, 然后用第 $(1,1)$ 元素消去同行其他元素:

$$\text{原矩阵} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以 -1, 以及第二行乘以 1、2 分别加到第三、四行上, 然后用第 $(2,2)$ 元素消去同行其他元素, 这就得到了相抵标准型:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 先将第一行乘以 1、-2 分别加到第二、四行上, 然后将第二行与第三行对调:

$$\text{原矩阵} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以 -2、2 分别加到第三、四行上, 最后将第三行与第四行对调即得阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 先将第一行乘以 -2、-3、-1 分别加到第二、三、四行上:

$$\text{原矩阵} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

再将第二行乘以 -2、-1 分别加到第三、四行上:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&2&3&-1&2\\0&4&7&-1&2\\0&2&5&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&2&3&-1&2\\0&0&1&1&-2\\0&0&2&2&-4\end{pmatrix}.$$

最后将第三行乘以 -2 加到第四行上, 即得阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&2&3&-1&2\\0&0&1&1&-2\\0&0&2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&2&3&-1&2\\0&0&1&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. (1) 通过以下步骤将两个矩阵化为相抵标准型:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&3\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因此它们有相同的相抵标准型.

(2) 通过以下步骤将两个矩阵化为相抵标准型:

$$\begin{pmatrix}-1&0&4\\3&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&0&11\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&5\\-1&4&-2\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因此它们没有相同的相抵标准型.

4. 设 n 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 的前 r 行及前 r 列交点处有 r 个 1, 其余元素皆为零. 若 $r<n$, 则由高代教材 § 2.3 的习题 3 可知 $\boldsymbol{B}$ 是奇异阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 相抵于一个奇异阵, 这与高代教材的推论 2.4.2 矛盾. 因此必须有 $r=n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 相抵于 $\boldsymbol{I}_n$. 反过来, 若 $\boldsymbol{A}$ 相抵于 $\boldsymbol{I}_n$, 则由高代教材的推论 2.4.2 可知 $\boldsymbol{A}$ 非异.

5. 由高代教材的定理 2.4.1 可知, $\boldsymbol{A}$ 可以通过有限次初等行变换和初等列变换变成其相抵标准型 $\boldsymbol{B}$. 再由高代教材的定理 2.4.3 可知, 存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots\boldsymbol{P}_r$, n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots\boldsymbol{Q}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s=\boldsymbol{B}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s$, 则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆阵, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$ 是相抵标准型.

2.5　矩阵乘积的行列式与初等变换法求逆阵

1. (1)

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\ 2&3&1&2&0&1&0&0\\ 1&1&-1&-1&0&0&1&0\\ 1&0&-6&-6&0&0&0&1\end{array}\right)$$

对 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_4)$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\ 2&3&1&2&0&1&0&0\\ 1&1&-1&-1&0&0&1&0\\ 1&0&-6&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\ 0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\\ 0&-1&-4&-5&-1&0&1&0\\ 0&-2&-9&-10&-1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -7 & -8 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 & 1 \\ -5 & 5 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

对 $(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3)$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

对 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}_3)$ 进行初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 13 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & 8 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -8 & 5 \end{array}\right).$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -11 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. 基础训练填空题 8, 答案为:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们用初等变换与求逆阵类似的方式求 $\boldsymbol{X}$:

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 2 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 \end{array}\right).$$

因此,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -9 & -6 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. 在上一题中已经求得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

我们用初等变换与求逆阵类似的方式求 $\boldsymbol{X}$ (本题中采用初等列变换):

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ \hdashline 1 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 \\ -4 & 23 & 15 \end{array}\right).$$

因此,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -4 & 23 & 15 \end{pmatrix}.$$

5. 例 2.54.

6. 例 2.56.

7. 在本题中, $a_i = i\,(1 \le i \le n)$, 因此 $f(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$. 设 1 的 n 次单位根全体为 $\varepsilon_k = \omega^{k-1}\,(1 \le k \le n)$, 这里 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. 当 $k \ne 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_k) &= \frac{n\varepsilon_k^n - \varepsilon_k^{n-1} - \cdots - 1}{\varepsilon_k - 1} \\ &= \frac{n - (\varepsilon_k^n - 1)/(\varepsilon_k - 1)}{\varepsilon_k - 1} \\ &= \frac{n}{\varepsilon_k - 1}, \end{aligned}$$

而 $f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 又注意到如下等式:

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\varepsilon_i - 1} &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_n)} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(x^{n-1} + \cdots + x + 1)\mid_{x=1}} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

因此该行列式值为

$$\prod_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{i=2}^{n} f(\varepsilon_i) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{i=2}^{n} \frac{n}{\varepsilon_i - 1} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

2.6 分块矩阵

1. (1) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \\ \hdashline -2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

(2) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

2. (1) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

(2) 直接用分块矩阵乘法法则可得, 答案为:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{13}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{23}+\boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{B}_{33} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{23}+\boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{B}_{33} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{33}\boldsymbol{B}_{33} \end{pmatrix}.$$

3. 例 2.1.

4. 例 2.2.

5. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$ 是两个分块矩阵且它们符合相乘的条件: $\boldsymbol{A}$ 的第 (i,j) 块 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的行数为 m_i, 列数为 n_j, $\boldsymbol{B}$ 的第 (i,j) 块 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数为 n_i, 列数为 l_j, 记 $N=n_1+n_2+\cdots+n_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数. 记 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{r\times t}$, 其中 $\boldsymbol{C}_{ij}$ 是一个 $m_i\times l_j$ 矩阵, 且

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{is}\boldsymbol{B}_{sj}.$$

为了叙述方便, 仅证明 $\boldsymbol{C}_{11}$ 的第 (p,q) 元素 a 在分块矩阵乘法下的结果与在普通

矩阵乘法下的结果一致, 其余情况类似可证. 在分块矩阵乘法下,

$$\begin{aligned}a &= \sum_{k=1}^{s}(\boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{k1})(p,q)\\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1}\boldsymbol{A}_{11}(p,k_1)\boldsymbol{B}_{11}(k_1,q)+\cdots+\sum_{k_s=1}^{n_s}\boldsymbol{A}_{1s}(p,k_s)\boldsymbol{B}_{s1}(k_s,q).\end{aligned}$$

在普通矩阵乘法下,

$$\begin{aligned}a &= (\boldsymbol{AB})(p,q)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}(p,k)\boldsymbol{B}(k,q)\\ &= \sum_{k=1}^{n_1}\boldsymbol{A}(p,k)\boldsymbol{B}(k,q)+\cdots+\sum_{k=N-n_s+1}^{N}\boldsymbol{A}(p,k)\boldsymbol{B}(k,q)\\ &= \sum_{k_1=1}^{n_1}\boldsymbol{A}_{11}(p,k_1)\boldsymbol{B}_{11}(k_1,q)+\cdots+\sum_{k_s=1}^{n_s}\boldsymbol{A}_{1s}(p,k_s)\boldsymbol{B}_{s1}(k_s,q).\end{aligned}$$

这里采用 MATLAB 中的记号, 用 $\boldsymbol{M}(x,y)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第 (x,y) 元素. 这就证明了分块矩阵的乘法所得的结果与作为普通矩阵的乘法所得的结果一致.

6. 只要证明第三类分块初等矩阵可以表示为若干个第三类初等矩阵的乘积即可. 为了方便叙述, 仅考虑如下分块的情况:

$$\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline a & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right).$$

注意到它可以表示为以下第三类初等矩阵的乘积:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\a&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&b&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&d&0&1\end{pmatrix}.$$

其余情况类似可证.

7. 基础训练填空题 9, 答案为:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

8. 例 2.69.

9. 例 2.71.

10. 例 2.72. 注意本题条件中要求 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 乘法可交换.

11. 例 1.5.10 的分块矩阵方法参考高代白皮书 (第四版) 第 99 页例 1.36 的解法 2. 例 2.5.2 的分块矩阵方法参考高代白皮书 (第四版) 第 100 页例 2.55 的解法 2.

12. (1) 例 2.68. (2) 基础训练解答题 8.

2.7 Cauchy-Binet 公式

1. 例 2.52.

2. 例 2.60.

3. 例 2.61.

4. 例 2.64.

5. 类比高代教材的推论 2.7.1. 若 $r \leq n$, 则由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n}\left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right|^2 \geq 0;$$

若 $r > n$, 则 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'$ 的任一 r 阶主子式都等于零, 结论也成立.

6. 类比高代教材的例 2.7.1. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}\right|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}|a_ib_j - a_jb_i|^2.$$

证明　左边的式子等于

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n |a_i|^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i\overline{b_i} \\ \sum\limits_{i=1}^n \overline{a_i}b_i & \sum\limits_{i=1}^n |b_i|^2 \end{vmatrix},$$

这个行列式对应的矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{b_n} \end{pmatrix}.$$

由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n |a_i|^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i\overline{b_i} \\ \sum\limits_{i=1}^n \overline{a_i}b_i & \sum\limits_{i=1}^n |b_i|^2 \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a_i} & \overline{b_i} \\ \overline{a_j} & \overline{b_j} \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} |a_ib_j - a_jb_i|^2.$$

上述恒等式右边总非负, 这就得到了复数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式.

7. 习题 4 的复数形式为: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 复矩阵, 则

$$|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'||\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}'| \ge |\det(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}')|^2.$$

证明　若 $m>n$, 则 $|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'| = |\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}'| = |\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}'| = 0$, 结论显然成立.

若 $m\le n$, 则由 Cauchy-Binet 公式可得

$$|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}\right|^2;$$

$$|\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}'| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \left|\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}\right|^2;$$

$$|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}'| = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \overline{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},$$

再由习题 6 复数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式即得结论.

复习题二

1. (1) 根据定义直接计算可得.

(2) 经计算,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})'$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量;

$$\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量.

(3) 根据 (1), (2), $\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量的第 j 个列向量, 即为 a_{ij}.

(4) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时, 显然有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i\,(1\le i\le n)$, 也有 $\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{B}\,(1\le i\le m)$. 反过来, 当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i\,(1\le i\le n)$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都和 $\boldsymbol{B}$ 对应的列向量相同, 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 同理可证 $\boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}_i'\boldsymbol{B}\,(1\le i\le m)$ 的情形.

2. (1) 根据定义直接计算可得.

(2) 根据定义直接计算可得.

(3) 根据定义直接可得.

(4) 经计算可得

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i, \\ \\ \\ \end{array}$$

即 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行变为第 i 行, 将其他元素全变为 0.

(5) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列变为第 j 列, 将其他元素全变为 0.

(6) 由 (1), (2) 和 (3) 可得

$$\text{左边}=\sum_{1\le p,q\le n} a_{pq}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{pq}\boldsymbol{E}_{kl}=a_{jk}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{jk}\boldsymbol{E}_{kl}=a_{jk}\boldsymbol{E}_{il}=\text{右边}.$$

3. 例 2.5.

4. 例 2.6.

5. 例 2.7.

6. 例 2.13.

7. 例 2.14.

8. 例 2.15.

9. 例 2.18.

10. 例 2.19.

11. 例 2.22.

12. 例 2.23.

13. 例 2.26.
14. 例 2.27.
15. 例 2.29.
16. 例 2.30.
17. 例 2.31.
18. 例 2.32.
19. 例 2.33.
20. 例 2.36.
21. 例 2.38.
22. 例 2.39.
23. 例 2.40.
24. 例 2.41.
25. 例 2.42.
26. 例 2.43.
27. 例 2.44.
28. 例 2.46.
29. 例 2.47.
30. 例 2.48.
31. 例 2.49.
32. 例 2.50.
33. 例 2.51.
34. 例 2.57.
35. 基础训练解答题 13 的特例, 取 $b=-1$ 即可.
36. 基础训练解答题 9.
37. 例 2.58.
38. 高代白皮书 (第四版) 第 97 页例 1.33 的解法 3.
39. 例 2.70.

40. 例 1.46. 也可以这样考虑: 左右两边都可以用行列式的组合定义展开成关于 $c_{k_1 1}c_{k_2 2}\cdots c_{k_n n}$ 的代数式, 这里 c 为 a 或 b, $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n$, 因此只需证明左右两边这些单项式前的系数相同. 以 $a_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$ 为例, 其余证明完全类似. 对于左边, 该项仅存在于

$$(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}(a_{k_1 1}+b_{k_1 1})\cdots(a_{k_n n}+b_{k_n n})$$

中, 且系数为 $(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$. 对于右边, 该项仅存在于

$$\sum_{1\le j_1\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} k_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} k_1 \\ j_1 \end{pmatrix}$$

中, 更精确地, 存在于

$$a_{k_1 1} \cdot \hat{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

中, 于是 $a_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$ 前系数为 $(-1)^{N(k_2,\cdots,k_n)}\cdot(-1)^{k_1+1}$, 这里 $(-1)^{N(k_2,\cdots,k_n)}$ 这一项是 $b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$ 在 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 中的系数, $(-1)^{k_1+1}$ 是由于 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} k_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与其对应的代数余子式之间相差了系数 $(-1)^{k_1+1}$. 利用逆序数的定义不难证明

$$(-1)^{N(k_2,\cdots,k_n)}\cdot(-1)^{k_1+1} = (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},$$

这就证完了结论.

41. 例 1.50.

42. 例 2.75.

43. 例 2.76.

高等代数学（第四版）习题解答
第三章　线性空间

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

3.1　数域

1. (1) 不是. 任何数域都包含 1, 但 1 是奇数, 不属于偶数全体构成的集合.

(2) 是. 先证该集合中的元素 $a+b\sqrt{3}=0$ 当且仅当 $a=b=0$. 充分性显然成立, 下证必要性. 若 a, b 不全为零, 则在 $a+b\sqrt{3}=0$ 两边同时乘以 a, b 的公分母, 可将 a, b 化为整数; 又可将 a, b 的最大公因数从该式提出, 因此不妨设 a, b 是互素的整数; 将 $b\sqrt{3}$ 移到等式右边后两边平方得 $a^2=3b^2$, 于是 a 是 3 的倍数, 可设 $a=3a_1$, 代入得 $3a_1^2=b^2$, 因此 b 也是 3 的倍数, 这与 a, b 互素矛盾, 因此 $a=b=0$. 以下假设 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$.

加减法封闭:

$$(a+b\sqrt{3})\pm(c+d\sqrt{3})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}.$$

乘法封闭:

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}.$$

除法封闭 (此时假设 c, d 不同时为零):

$$\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3}.$$

(3) 是. 先证该集合中的元素 $a+b\sqrt{-1}=0$ 当且仅当 $a=b=0$. 充分性显然成立, 下证必要性. 将 $b\sqrt{-1}$ 移到等式右边后两边平方得 $a^2+b^2=0$, 于是 $a=b=0$. 以下假设 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$.

加减法封闭:

$$(a+b\sqrt{-1})\pm(c+d\sqrt{-1})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{-1}.$$

乘法封闭:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

除法封闭 (此时假设 c, d 不同时为零):

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

(4) 不是. 因为 $\sqrt[3]{2}$ 不是有理数, 所以 $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$ 不在该集合中, 于是该集合对乘法不封闭.

2. 形如 (3.1.1) 式所示的数可以表示为 $\dfrac{f(\pi)}{g(\pi)}$, 这里 f,g 是有理系数多项式, 并且 $g\neq 0$. 以下假设 f_1,f_2,g_1,g_2 都是有理系数多项式, 其中 $g_1\neq 0$, $g_2\neq 0$.

加减法封闭:

$$\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)}\pm\frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)}=\frac{f_1(\pi)g_2(\pi)\pm f_2(\pi)g_1(\pi)}{g_1(\pi)g_2(\pi)}.$$

乘法封闭:

$$\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)}\cdot\frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)}=\frac{f_1(\pi)f_2(\pi)}{g_1(\pi)g_2(\pi)}.$$

除法封闭 (此时假设 $f_2\neq 0$):

$$\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)}\bigg/\frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)}=\frac{f_1(\pi)g_2(\pi)}{f_2(\pi)g_1(\pi)}.$$

3. 例 3.31.

4. 基础训练解答题 4.

3.2 行向量和列向量

1. 直接计算可得:

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=(1,1,0,-1)+(-2,1,0,0)+(-1,-2,0,1)=(-2,0,0,0);$$
$$3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+5\boldsymbol{\gamma}=3(1,1,0,-1)-(-2,1,0,0)+5(-1,-2,0,1)=(0,-8,0,2).$$

2. 该向量方程可化为

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{3}((1, 1, -1) - (1, 0, 1)) = (0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$$

3.3　线性空间

1. (1) 不是. 因为 $x^n + (-x^n) = 0$ 不在 V 中, 故加法在 V 中不封闭.

(2) 是. 容易验证加法封闭性和数乘封闭性, 且加法和数乘满足线性空间要求的八条运算规则.

(3) 是. 容易验证加法封闭性和数乘封闭性, 且加法和数乘满足线性空间要求的八条运算规则.

(4) 不是. 因为对一般的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 来说,

$$\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B},$$

故加法不满足交换律.

(5) 不是. 因为对一般的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 来说,

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}) \oplus \boldsymbol{C} = \boldsymbol{ABC} + \boldsymbol{CAB} + \boldsymbol{BAC} + \boldsymbol{CBA} \\ \neq\ & \boldsymbol{ABC} + \boldsymbol{ACB} + \boldsymbol{BCA} + \boldsymbol{CBA} = \boldsymbol{A} \oplus (\boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CB}) = \boldsymbol{A} \oplus (\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}), \end{aligned}$$

故加法不满足结合律.

(6) 是. 容易验证加法封闭性和数乘封闭性, 且加法和数乘满足线性空间要求的八条运算规则. 这里会用到, 如果数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 极限存在, k 是有限数, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(7) 是. 下面只验证加法结合律以及加法和数乘的分配律, 其他几条留给读者验证. 设 $a, b, c, k, l \in V$, 则

$$\begin{aligned} & (a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = abc = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c), \\ & k \circ (a \oplus b) = k \circ (ab) = (ab)^k = a^k b^k = (a^k) \oplus (b^k) = k \circ a \oplus k \circ b, \\ & (k + l) \circ a = a^{k+l} = a^k a^l = (a^k) \oplus (a^l) = k \circ a \oplus l \circ a. \end{aligned}$$

注意 V 上的加法和数乘与数的普通加法和数乘的区别.

(8) 是. 下面只验证加法和数乘的分配律, 其他几条留给读者验证. 设 (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in V$, $k, l \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}
&k \circ ((a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)) = k \circ (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) \\
=&(k(a_1 + b_1), k(b_1 + b_2 + a_1 a_2) + \frac{k(k-1)}{2}(a_1 + a_2)^2) \\
=&k \circ (a_1, b_1) \oplus k \circ (a_2, b_2), \\
&(k + l) \circ (a_1, b_1) = ((k + l)a_1, (k + l)b_1 + \frac{(k + l)(k + l - 1)}{2} a_1^2) \\
=&(ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2) \oplus (la_1, lb_1 + \frac{l(l-1)}{2} a_1^2) \\
=&k \circ (a_1, b_1) \oplus l \circ (a_1, b_1).
\end{aligned}$$

(9) 不是. 因为对一般的 (a_1, b_1), (a_2, b_2) 来说,

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 - b_2) \neq (a_2 + a_1, b_2 - b_1) = (a_2, b_2) \oplus (a_1, b_1),$$

故加法不满足交换律. 也可以说明加法不满足结合律, 或者数的加法与数乘不满足分配律.

(10) 不是. 因为 V 中没有零元, 也没有数乘单位元.

2. (1)

$$-(-\boldsymbol{\alpha}) = (-1) \cdot ((-1) \cdot \boldsymbol{\alpha}) = ((-1) \cdot (-1))\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
-(k\boldsymbol{\alpha}) &= (-1) \cdot (k\boldsymbol{\alpha}) = ((-1) \cdot k)\boldsymbol{\alpha} = (-k)\boldsymbol{\alpha} \\
&= (k \cdot (-1))\boldsymbol{\alpha} = k \cdot ((-1)\boldsymbol{\alpha}) = k(-\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

(3)

$$k(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})) = k\boldsymbol{\alpha} + k(-\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} - k\boldsymbol{\beta}.$$

3.4 向量的线性关系

1. (1) 容易验证

$$(-1, 3, 1) + (2, 1, 0) - (1, 4, 1) = (0, 0, 0),$$

故这三个向量线性相关.

(2) 设实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1(2,3,0)+k_2(-1,4,0)+k_3(0,0,2)=(0,0,0),$$

这等价于 (k_1, k_2, k_3) 是下列齐次线性方程组的解:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证上述线性方程组的系数行列式非零, 故由 Cramer 法则知该方程组只有零解, 即有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 因此这三个向量线性无关. § 3.6 之后, 也可以通过计算秩的方法进行判定, 参考例 3.4.

2. 设存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$k_1(a,1,1)+k_2(1,a,1)+k_3(1,1,a)=(0,0,0),$$

这等价于 (k_1, k_2, k_3) 是下列齐次线性方程组的非零解:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是上述线性方程组的系数行列式等于零, 否则由 Cramer 法则知该方程组只有零解, 矛盾. 经计算, 系数行列式等于 $(a-1)^2(a+2)$, 解得 $a=1$ 或 $a=-2$. 经检验, 此时这三个实向量线性相关.

3. 是. 若 $\mathbb{K}$ 中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1 c\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 c\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m c\boldsymbol{\alpha}_m = 0,$$

由 c 为非零常数可得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\alpha}_m = 0,$$

再由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性无关性可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 因此 $c\boldsymbol{\alpha}_1, c\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, c\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

4. 否. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 = -\boldsymbol{\beta}_1$, 容易验证 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. 参考例 3.7.

5. 否. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$, 容易验证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 参考例 3.7.

6. 否. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, $\boldsymbol{\gamma}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$, 容易验证 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 但 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关. 参考例 3.7.

7. 例 3.8.

8. 例 3.9.

9. 例 3.10.

10. 例 3.11.

11. 例 3.12.

12. 例 3.13.

3.5 向量组的秩

1. 由高代教材的定理 3.4.3 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 又 V 中任一向量均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合, 因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基.

2. 因为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基, 故 $\dim V=n$. 由条件以及线性组合的传递性可知, V 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示, 故由高代教材的定理 3.5.3 即得结论.

3. 例 3.26.

4. 例 3.27.

5. 例 3.28.

6. 容易验证 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\,(1\le i\le j\le n)\}$ 是 V 的一组基, 因此 $\dim V=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 参考例 3.29.

7. 容易验证 $\{\boldsymbol{E}_{ii}\,(1\le i\le n);\ \boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}\,(1\le i<j\le n)\}$ 是 V 的一组基, 因此 $\dim V=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 参考例 3.29.

8. 容易验证 $\{\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}\,(1\le i<j\le n)\}$ 是 V 的一组基, 因此 $\dim V=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 参考例 3.29.

9. 例 3.30.

10. 例 3.31.

11. 基础训练解答题 4.

3.6 矩阵的秩

1. (1) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 3.

(2) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 2.

(3) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 4.

(4) 通过初等行变换可将该矩阵化为如下阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此矩阵的秩为 2.

2. (1) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 2, 因此向量组的秩也等于 2.

(2) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 3, 因此向量组的秩也等于 3.

3. (1) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -24 & -43 \\ 0 & -8 & -15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 3, 等于向量组中向量的个数, 因此向量组线性无关.

(2) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 2, 小于向量组中向量的个数, 因此向量组线性相关.

(3) 将这些向量按行分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 3, 等于向量组中向量的个数, 因此向量组线性无关.

4. 将这些向量按列分块的方式拼成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

对上述矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到矩阵的秩为 2, 因此向量组的秩也等于 2. 根据阶梯点所在的位置可知向量组的一个极大无关组为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$.

5. (1) 例 3.58.

(2) 例 3.62.

(3) 例 3.63.

(4) 例 3.64.

(5) 例 3.65.

6. 设原矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 添加的一列为 $\boldsymbol{\alpha}$, 则由习题 5 (3) 可知

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\alpha}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + 1,$$

于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + 1$. 同理可证添加一行的情况.

7. 例 3.66.

8. 例 3.71.

9. 例 3.72.

10. 例 3.91.

11. 例 3.92.

3.7 坐标向量

1. 解法 1　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的坐标为 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)'$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_n = a_1, \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1 = a_n. \end{cases}$$

从最后一个方程出发解得 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)' = (a_n, a_{n-1} - a_n, \cdots, a_1 - a_2)'$.

解法 2　也可用基变换与过渡矩阵来做. 参考例 3.44, 令 $a = 1$, 则答案为:

$$(a_n, a_{n-1} - a_n, \cdots, a_1 - a_2)'$$

2. 是. 参考例 3.38.

3. 当 s 为偶数时线性相关, 当 s 为奇数时线性无关. 参考例 3.39.

4. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组. 参考例 3.40.

5. 例 3.41.

3.8　基变换与过渡矩阵

1. (1) 解法 1　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(k_1,k_2,k_3,k_4)'$, 则

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_4=1, \\ k_3=2, \\ k_2+k_4=1, \\ -k_3+k_4=3. \end{cases}$$

用 Gauss 消去法可解得 $(k_1,k_2,k_3,k_4)'=(0,-4,2,5)'$.

解法 2　从 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 的过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2) 解法 1　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(k_1,k_2,k_3,k_4)'$, 则

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=1, \\ k_1+k_2+k_3+k_4=0, \\ 3k_2-2k_4=0, \\ k_1+k_2-k_4=0. \end{cases}$$

用 Gauss 消去法可解得 $(k_1,k_2,k_3,k_4)'=(-1,-2,6,-3)'$.

解法 2　从 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 的

过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 3 & 0 & -2\\1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 3 & 0 & -2\\1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\6\\-3\end{pmatrix}.$$

2. (1) 注意到 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 就是该向量空间的标准基, 故 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 可用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 的下列线性组合表示:

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4,\\ \boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4,\\ \boldsymbol{f}_3=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_4,\\ \boldsymbol{f}_4=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4.\end{cases}$$

于是从基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

注意上述过渡矩阵就是 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 的转置按列分块方式拼成的矩阵.

(2) 参考例 3.43. 答案为:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 5\\-1 & 1 & -1 & 2\\4 & -2 & 3 & -10\\-2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

3. (1) $\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (1) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(1,0,0,1)'$, 在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$

下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (2) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix},$$

在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 5\\-1 & 1 & -1 & 2\\4 & -2 & 3 & -10\\-2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (1) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为 $(3,-1,0,2)'$, 在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在习题 2 (2) 中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4\\17\\-8\end{pmatrix},$$

在 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\boldsymbol{f}_4$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 5\\-1 & 1 & -1 & 2\\4 & -2 & 3 & -10\\-2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-6\\-4\\17\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

4. 例 3.44. 答案为:

$$(a_n, a_{n-1} - aa_n, \cdots, a_2 - aa_3, a_1 - aa_2).$$

5. 例 3.45.

3.9 子空间

1. (1) 是. 显然 $(0, 0, \cdots, 0) \in S$. 任取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

因此 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in S$ 且 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \in S$.

(2) 否. 因为 $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, \cdots, 0) \in S$, 但是

$$(1, 0, \cdots, 0) + (0, 1, \cdots, 0) = (1, 1, \cdots, 0) \notin S.$$

(3) 是. 显然 $(0, 0, \cdots, 0) \in S$. 任取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $a_1 = b_1 = 0$, 于是 $a_1 + b_1 = 0$ 且 $ka_1 = 0$, 因此 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in S$ 且 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (0, ka_2, \cdots, ka_n) \in S$.

(4) 否. 因为 $(1, 0, \cdots, 0) \in S$, 但是

$$(-1) \cdot (1, 0, \cdots, 0) = (-1, 0, \cdots, 0) \notin S.$$

(5) 是. 显然 $(0, 0, \cdots, 0) \in S$. 任取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in S$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, 于是

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \cdots = a_n + b_n,$$
$$ka_1 = ka_2 = \cdots = ka_n.$$

因此 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \in S$ 且 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \in S$.

2. (1) 维数为 2, 容易验证该子空间的一组基为 $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

(2) 维数为 2, 容易验证该子空间的一组基为 $\{(1,2,0),(0,0,1)\}$.

(3) 维数为 2, 因为 $(1,0,1)$ 与 $(1,2,3)$ 线性无关.

(4) 维数为 1, 因为 $(1,2,-1)$ 与 $(3,6,-3)$ 线性相关.

3. 必要性显然成立, 下证充分性. 设 $\dim V_1=\dim V_2=n$, 并取 V_1 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 则由 $V_1\subseteq V_2$ 可知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V_2 中 n 个线性无关的向量, 因此由高代教材的定理 3.5.3 可知 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 也是 V_2 的一组基, 于是 $V_1=V_2$.

4. 例 3.46.

5. 参考 § 2.2 习题 13 的解答.

(1) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A})=2$ 且一组基为:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(2) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A})=2$ 且一组基为:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(3) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 3i-3a & i-3b & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A})=5$ 且一组基为:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(4) 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a+c & b \\ b & b+c & a+c \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim C(\boldsymbol{A})=3$ 且一组基为:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

6. (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1)$, $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1)$, $V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_2)$, $V_3=L(\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则容易验证 $V_1\cap V_2=0$, $V_1\cap V_3=0$, 但 $V_1\cap(V_2+V_3)=V_1$, 因此 $V_1\cap(V_2+V_3)\neq V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$.

(2) 先证对任意的子空间 V_1,V_2,V_3, 有

$$V_1\cap V_2+V_1\cap V_3\subseteq V_1\cap(V_2+V_3).$$

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$, $\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_3$. 由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V_1$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V_1$, 又 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V_2+V_3$, 故 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap(V_2+V_3)$, 于是 $V_1\cap V_2+V_1\cap V_3\subseteq V_1\cap(V_2+V_3)$. 再证若 V_1 包含 V_2, 则有

$$V_1\cap(V_2+V_3)\subseteq V_1\cap V_2+V_1\cap V_3.$$

任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap(V_2+V_3)$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in V_2$, $\boldsymbol{\gamma}\in V_3$. 由 $V_2\subseteq V_1$ 可知 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\in V_1$, 故 $\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_3$. 又 $\boldsymbol{\beta}\in V_2=V_1\cap V_2$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$, 从而 $V_1\cap(V_2+V_3)\subseteq V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$. 同理可证 V_1 包含 V_3 的情形. 综上所述, 第一个结论得证. 进一步, 若 V_2+V_3 是直和, 即 $V_2\cap V_3=0$, 则显然 $(V_1\cap V_2)\cap(V_1\cap V_3)=0$, 于是第二个结论也得证.

7. 例 3.47. V_1+V_2 的基可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$, $V_1\cap V_2$ 的基可取为 $\boldsymbol{\beta}_2$.

8. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两线性无关但全体线性相关, 故存在全不为零的数 c_1,c_2,c_3, 使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+c_3\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_2=-\dfrac{1}{c_2}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_3\boldsymbol{\alpha}_3)$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_2\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 类似可得 $\boldsymbol{\alpha}_3\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, 从而 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 同理可证 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 于是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

9. 不一定. 例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)$, $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1)$, $V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_2)$, $V_3=L(\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $V_1\cap V_2=V_2\cap V_3=V_1\cap V_3=0$, 但是 $0\neq V_3=V_3\cap(V_1+V_2)$, 因此 $V_1+V_2+V_3$ 不是直和.

10. 例 3.48.

11. 例 3.50.

12. 例 3.51.

13. 例 3.52.

14. 例 3.53.

15. 例 3.54.

3.10 线性方程组的解

1. (1) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & -10 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

由于系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不同, 故原方程组无解.

(2) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -3 & -2 & -6 \\ -2 & -5 & 8 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1 为参数.

(3) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -17 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -11 & 4 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & 7 & -8 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 3 & 7 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -16 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1, k_2 为参数.

(4) 对增广矩阵进行如下初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 5 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1, k_2 为参数.

(5) 对增广矩阵进行如下初等行变换和列对换 (对换了第二列与第四列):

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由此可得原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1, k_2, k_3 为参数.

2. 例 3.96. 当 $\lambda = 5$ 时有无穷多组解; 否则无解.

3. 例 3.97. 当 $\lambda = -3$ 时, 方程组无解; 当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多组解; 当 $\lambda \neq -3, 1$ 时, 方程组有唯一一组解.

4. 对增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 进行如下初等行变换:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&2&3&3&7&b\\3&2&1&1&a-5&b+2\\0&1&2&2&3a&b\\5&4&3&3&1-a&-b\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&2&3&3&7&b\\0&-4&-8&-8&a-26&-2b+2\\0&1&2&2&3a&b\\0&-6&-12&-12&-34-a&-6b\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&2&3&3&7&b\\0&1&2&2&3a&b\\0&-4&-8&-8&a-26&-2b+2\\0&-6&-12&-12&-34-a&-6b\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&-1&-1&7-6a&-b\\0&1&2&2&3a&b\\0&0&0&0&a-2&0\\0&0&0&0&0&b+1\end{array}\right).$$

下面对 a,b 的不同取值分情况讨论:

(1) 若 $b\neq-1$, 则容易验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})$, 因此原方程组无解.

(2) 若 $a=2$ 且 $b=-1$, 则容易验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})=2$, 因此原方程组的特解和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1,k_2,k_3 为参数.

(3) 若 $a\neq2$ 且 $b=-1$, 则容易验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$, 因此原方程组的特解

和基础解系分别为:

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\gamma}$, 其中 k_1,k_2 为参数.

5. 例 3.5.

(1) 能, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2) 不能.

6. 是. 注意到

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是解空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 的一组基, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是这个齐次线性方程组的基础解系.

7. 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解等价于 $\boldsymbol{A}$ 非异, 这等价于 $\boldsymbol{A}^k$ 非异, 于是等价于线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解.

8. 例 3.98.

9. 例 3.99.

10. 例 3.100.

11. 例 3.104.

12. 例 3.83.

13. 例 3.80.

14. 例 3.81.

复习题三

1. 例 3.15.

2. 例 3.18.
3. 例 3.14.
4. 例 3.19.
5. 例 3.20.
6. 例 3.21. 秩相同但不等价的向量组的例子: $A = \{(1,0)\}$, $B = \{(0,1)\}$.
7. 例 3.32.
8. 例 3.37.
9. 例 3.49.
10. 例 3.55.
11. 例 3.56.
12. 例 3.57.
13. 例 3.59.
14. 例 3.68.
15. 例 3.69.
16. 例 3.73.
17. 例 3.74.
18. 例 3.75.
19. 例 3.76.
20. 例 3.77.
21. 例 3.78.
22. 例 3.79.
23. 例 3.82.
24. 例 3.84.
25. 例 3.85.
26. 例 3.86.
27. 例 3.87.
28. 例 3.88.
29. 例 3.89.
30. 例 3.93.
31. 例 3.94.
32. 例 3.95.
33. 例 3.101.
34. 例 3.102.

35. 例 3.103.
36. 例 3.105.
37. 例 3.106.
38. 例 3.107.
39. 例 3.108.
40. 例 3.109.
41. 例 3.110.
42. 例 3.111.
43. 例 3.112.
44. 例 3.113.
45. 例 3.114.

高等代数学（第四版）习题解答
第四章　线性映射

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

4.1　线性映射的概念

1. (1) 是. 显然 $\boldsymbol{\varphi}(x,y)=n(x,y)=(nx,ny)$. 对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 容易验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}((x_1,y_1)+(x_2,y_2))&=\boldsymbol{\varphi}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(n(x_1+x_2),n(y_1+y_2))\\&=(nx_1,ny_1)+(nx_2,ny_2)=\boldsymbol{\varphi}(x_1,y_1)+\boldsymbol{\varphi}(x_2,y_2),\\ \boldsymbol{\varphi}(k(x_1,y_1))&=\boldsymbol{\varphi}(kx_1,ky_1)=(nkx_1,nky_1)=k(nx_1,ny_1)=k\boldsymbol{\varphi}(x_1,y_1).\end{aligned}$$

(2) 是. 经计算可得 $\boldsymbol{\varphi}(x,y)=(x\cos\dfrac{\pi}{3}-y\sin\dfrac{\pi}{3},x\sin\dfrac{\pi}{3}+y\cos\dfrac{\pi}{3})=(x,y)\boldsymbol{A}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3}&\sin\dfrac{\pi}{3}\\-\sin\dfrac{\pi}{3}&\cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}.$$

由此定义式容易验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘.

(3) 是. 对任意的 $f,g\in C[0,1]$, $k\in\mathbb{K}$, 容易验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘:

$$\boldsymbol{\varphi}(f(x)+g(x))=\int_0^x(f(t)+g(t))\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{\varphi}(f(x))+\boldsymbol{\varphi}(g(x)),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(kf(x))=\int_0^x kf(t)\mathrm{d}t=k\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=k\boldsymbol{\varphi}(f(x)).$$

(4) 否. 对一般的 $(x, y) \in V$, $k \in \mathbb{K}$, 有

$$\boldsymbol{\varphi}(k(x, y)) = (2k^2x^2, ky) \neq (2kx^2, ky) = k\boldsymbol{\varphi}(x, y).$$

(5) 当 $(a, b) = (0, 0)$ 时, $\boldsymbol{\varphi}$ 是恒等变换, 因此是线性变换. 当 $(a, b) \neq (0, 0)$ 时, $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性变换. 因为 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = (a, b) \neq \mathbf{0}$, 故由高代教材的命题 4.1.2 (1) 可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性变换.

2. 先证充分性. 当 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时, 只需验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 保持加法和数乘. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}_n$, $k \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta}),\\ \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}k\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性变换. 再证必要性. 用反证法, 若 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 由高代教材的命题 4.1.2 (1) 可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性变换, 矛盾. 因此 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

3. 例 4.2.

4. 基础训练解答题 2.

4.2 线性映射的运算

1. 记数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵全体组成的线性空间为 $M_n(\mathbb{K})$. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵, 则由矩阵的运算规则可知

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$,

因此 $M_n(\mathbb{K})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的代数.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 则

$$(k\boldsymbol{I}_V)(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})) = k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{I}_V(\boldsymbol{\alpha})),$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知结论成立.

3. 例 4.17.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 经计算得

$$\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知 $\boldsymbol{\varphi}$ 是幂等变换.

5. 例 4.8.

6. 例 4.12.

7. 例 4.13.

4.3 线性映射与矩阵

1. 基础训练填空题 3. 根据求导运算法则可知, $\boldsymbol{\varphi}(1)=0$, $\boldsymbol{\varphi}(x^i)=ix^{i-1}\,(1\leq i\leq n-1)$. 因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 的基 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 下的表示矩阵为:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

2. (1) 从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&3&1\\2&1&5&-1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&2&1&1\\-1&5&1&2\\1&3&0&-1\\2&3&2&1\end{pmatrix}.$$

(2) 从 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 到 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

用初等变换法可求得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&3&1\\2&1&5&-1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&4&4&5\\-3&-4&-6&-4\\1&1&4&1\\1&2&4&6\end{pmatrix}.$$

3. 该线性变换将 $(1,0)$ 变为 $(\cos\theta,\sin\theta)$, 将 $(0,1)$ 变为 $(-\sin\theta,\cos\theta)$. 因此它在基 $\{(1,0),(0,1)\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

4. 基础训练填空题 5. 线性变换 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^{-2}+2\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{I}_V$ 在 V 的第一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-2}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$, 因此它在第二组基下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-2}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{I}.$$

5. 基础训练解答题 1. 事实上, 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m$ 分别是 V 和 U 的基, 定义 V 到 U 的线性映射 $\boldsymbol{\varphi}_{ij}\,(1\le i\le m,1\le j\le n)$:

$$\boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{f}_i,\ \ \boldsymbol{\varphi}_{ij}(\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{0}\ (k\ne j).$$

则 $\{\boldsymbol{\varphi}_{ij}\,(1\le i\le m,1\le j\le n)\}$ 组成向量空间 $\mathcal{L}(V,U)$ 的一组基.

6. 例 2.45 (相似矩阵有相同的迹). 由高代教材的定理 2.5.2 可知, 相似矩阵有相同的行列式.

7. 基础训练解答题 6.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 只与自己相似, 则对任意的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 都有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 也即 $\boldsymbol{A}$ 与任意可逆阵乘法可交换, 由例 2.11 的证法 2 可知 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$. 反之, 当 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$ 时, 显然它只与自己相似, 因此 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$.

9. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似可知, 存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$. 因此,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

10. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行相当于左乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列相当于右乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$. 注意到 $\boldsymbol{P}_{ij}^2 = \boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{P}_{ij}^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}$ 是相似变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零常数 c 相当于左乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(c)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以非零常数 c^{-1} 相当于右乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(c^{-1})$. 注意到

$$\boldsymbol{P}_i(c)\boldsymbol{P}_i(c^{-1}) = \boldsymbol{P}_i(c^{-1})\boldsymbol{P}_i(c) = \boldsymbol{I}_n,$$

故 $\boldsymbol{P}_i(c^{-1}) = \boldsymbol{P}_i(c)^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_i(c)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(c^{-1})$ 是相似变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以常数 c 加到第 j 行上相当于左乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(c)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列乘以常数 $-c$ 加到第 i 列上相当于右乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(-c)$. 注意到

$$\boldsymbol{T}_{ij}(c)\boldsymbol{T}_{ij}(-c) = \boldsymbol{T}_{ij}(-c)\boldsymbol{T}_{ij}(c) = \boldsymbol{I}_n,$$

故 $\boldsymbol{T}_{ij}(-c) = \boldsymbol{T}_{ij}(c)^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(c)\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ij}(-c)$ 是相似变换.

11. 设 $\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是相似变换. 由于 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵, 故它可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 记为 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_k$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_i : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{Q}_i^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_i\,(1 \leq i \leq k)$ 是相似初等变换, 从而 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_k \circ \boldsymbol{\varphi}_{k-1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\varphi}_1$ 是若干次相似初等变换的复合.

12. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行与第 j 分块行相当于左乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列与第 j 分块列相当于右乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}'_{ij}$. 注意到 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{P}'_{ij} = \boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{P}'_{ij} = \boldsymbol{P}_{ij}^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}'_{ij}$ 是相似变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于左乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列右乘非异阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 相当于右乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})$. 注意到

$$\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1}) = \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1}) = \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}^{-1})$ 是相似变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 加到第 j 分块行上相当于左乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 分块列右乘矩阵 $-\boldsymbol{M}$ 加到第 i 分块列上相当于右乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})$. 注意到

$$\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})^{-1}$, 于是题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ij}(-\boldsymbol{M})$ 是相似变换.

13. 例 4.28.

14. 例 4.21.

4.4　线性映射的像与核

1. 例 4.31. $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}=k_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4)+k_2(2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3-2\boldsymbol{e}_4)$, $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=k_1(-4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)+k_2(-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_4)$.

2. 任取 $\boldsymbol{v}\in V$, 由于 $V=V_1\oplus V_2$, 故可设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, 其中 $\boldsymbol{v}_1\in V_1$, $\boldsymbol{v}_2\in V_2$. 由 $\boldsymbol{\varphi}$ 的定义可知

$$\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),$$

再由 $\boldsymbol{v}$ 的任意性可知 $\boldsymbol{\varphi}^2=\boldsymbol{\varphi}$.

显然, 我们有

$$\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}=\{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_1\mid\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ \text{其中}\ \boldsymbol{v}_1\in V_1,\,\boldsymbol{v}_2\in V_2\}=V_1,$$

$$\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=\{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0},\ \text{其中}\ \boldsymbol{v}_1\in V_1,\,\boldsymbol{v}_2\in V_2\}=V_2.$$

由定义可知, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i\,(1\le i\le r)$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{0}\,(r+1\le j\le n)$, 因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

3. 基础训练填空题 10. 答案为: $\boldsymbol{\varphi}$ 的秩为 2, 零度也是 2.

4. 例 4.39. 答案为: $\dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=n^2-1$, 一组基为:

$$\boldsymbol{E}_{ij}\,(i\ne j),\ \boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22},\ \boldsymbol{E}_{22}-\boldsymbol{E}_{33},\ \cdots,\ \boldsymbol{E}_{n-1,n-1}-\boldsymbol{E}_{nn}.$$

5. 例 4.40.

6. 例 4.42.

7. 例 4.43.

8. 例 4.44.

9. 设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间, 这是一个无限维线性空间, 定义 V 上的变换 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{S}$ 如下:

$$\boldsymbol{D}(f(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\quad \boldsymbol{S}(f(x))=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

根据高代教材 § 4.2 习题 3 的结论, 它们都是 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{DS}=\boldsymbol{I}_V$. 因此 $\boldsymbol{D}$ 是满射且 $\boldsymbol{S}$ 是单射, 但是 $\boldsymbol{D}$ 不是单射, 因为 $\boldsymbol{D}(1)=\boldsymbol{D}(0)=0$; $\boldsymbol{S}$ 不是满射, 因为不存在 $f(x)\in V$, 使得 $\boldsymbol{S}(f(x))=1$. 因此 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{D}$ 都不是线性同构.

4.5 不变子空间

1. 例 4.45.

2. 例 4.46.

3. 例 4.48.

4. 例 4.50.

5. (1) 例 4.51.

(2) 先证 $\operatorname{Im}\boldsymbol{D} = L(1, x, \cdots, x^{n-2})$. 这是因为对任一 $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in V$, 有

$$\boldsymbol{D}f(x) = (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \in L(1, x, \cdots, x^{n-2});$$

反之, 对任一次数小于等于 $n-2$ 的实系数多项式 $g(x) = b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$, 有

$$g(x) = \boldsymbol{D}\left(\frac{b_{n-2}}{n-1}x^{n-1} + \cdots + \frac{b_1}{2}x^2 + b_0x\right) \in \operatorname{Im}\boldsymbol{D}.$$

再证 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{D} = L(1)$, 这是因为如果 $f(x)$ 是次数小于 n 的实系数多项式且 $\boldsymbol{D}f(x) = 0$, 必有 $f(x) = c$ 为常数; 反之, 常数多项式的导数为 0. 由于 $1 \in \operatorname{Im}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{D}$, 故 $\operatorname{Im}\boldsymbol{D} \cap \operatorname{Ker}\boldsymbol{D} \neq 0$. 注意到 $x^{n-1} \notin \operatorname{Im}\boldsymbol{D} + \operatorname{Ker}\boldsymbol{D}$, 故 $V \neq \operatorname{Im}\boldsymbol{D} + \operatorname{Ker}\boldsymbol{D}$.

6. 例 4.52.

复习题四

1. 例 4.3.

2. 例 4.4.

3. 例 4.5.

4. 例 4.6.

5. 例 4.7.

6. 例 4.9.

7. 例 4.10.

8. 例 4.14.

9. 例 4.15.

10. 例 4.16.

11. 因为 φ 是有限维线性空间 V 上的线性变换且 φ 是满射, 故 φ 是线性同构. 考虑限制映射 $\varphi|_U : U \to \varphi(U)$, 由 φ 是单射可知 $\varphi|_U$ 也是单射, 显然 $\varphi|_U$ 也是满射, 从而 $\varphi|_U$ 是线性同构, 于是 $\dim\varphi(U) = \dim U = r$.

设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间, 这是一个无限维线性空间, 定义 V 上的变换 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{S}$ 如下:

$$\boldsymbol{D}(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x), \quad \boldsymbol{S}(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

根据高代教材 § 4.2 习题 3 的结论, 它们都是 V 上的线性变换且 $\boldsymbol{DS} = \boldsymbol{I}_V$, 因此 $\boldsymbol{D}$ 是满射. 考虑 V 的子空间 $U = L(1)$, 容易知道 $\boldsymbol{D}(U) = 0$, 故 $\dim\boldsymbol{D}(U) = 0 \neq 1 = \dim U$, 即本题结论对无限维线性空间一般不成立.

12. 例 4.18.

13. 例 4.19.

14. 例 4.22.

15. 例 4.25.

16. 例 4.26.

17. 例 4.27.

18. 例 4.29. 答案为: 1 的个数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$, -1 的个数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$.

19. 例 4.30.

20. 例 4.32.

21. 例 4.33.

22. 例 4.34.

23. 例 4.35.

24. 例 4.36.

25. 例 4.37.

26. 例 4.38.

27. 例 4.41.

28. 例 4.47.

29. 例 4.49.

30. 例 4.53.

31. 例 4.54.

32. 例 4.55.

33. 例 4.56.

34. (1) (2) 例 4.57. (3) (4) 例 4.58.

35. 例 4.59.

36. 例 4.60.

高等代数学（第四版）习题解答
第五章　多项式

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）:　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

5.1　一元多项式代数

无习题.

5.2　整除

1. 我们有如下带余除法:

$$\begin{aligned}2x^5+x^4-x+1&=2x^2(x^3-x+2)+x^4+2x^3-4x^2-x+1\\&=(2x^2+x)(x^3-x+2)+2x^3-3x^2-3x+1\\&=(2x^2+x+2)(x^3-x+2)-3x^2-x-3.\end{aligned}$$

因此 $q(x)=2x^2+x+2$, $r(x)=-3x^2-x-3$.

2. 基础训练填空题 1. 我们有如下带余除法:

$$\begin{aligned}2x^4-3x^3+4x^2+ax+b&=2x^2(x^2-3x+1)+3x^3+2x^2+ax+b\\&=(2x^2+3x)(x^2-3x+1)+11x^2+(a-3)x+b\\&=(2x^2+3x+11)(x^2-3x+1)+(a+30)x+b-11.\end{aligned}$$

因此 $a+30=25$, $b-11=-5$, 故 $a=-5$, $b=6$.

3. 例 5.1.

4. 若 $g(x) \mid f(x)$, 则存在 a,b, 使得

$$(x^2+mx+1)(x^2+ax+b)=x^4+px^2+q.$$

经计算, 上式可化为:

$$x^4+(m+a)x^3+(ma+b+1)x^2+(a+mb)x+b=x^4+px^2+q.$$

因此 $m+a=0$, $ma+b+1=p$, $a+mb=0$, $b=q$. 于是 $a=-m$, $b=q$, 代入可得 $-m^2+q+1=p$ 且 $-m+mq=0$. 最后根据 m 的不同取值分成如下两种情况: 当 $m=0$ 时, $p=q+1$; 当 $m\neq 0$ 时, $q=1$ 且 $p=2-m^2$.

5. 例 5.2.

6. 例 5.3.

7. 例 5.4.

5.3 最大公因式

1. (1) 对 $f(x)=x^4-x^3-4x^2-x+1$, $g(x)=x^2-x-2$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2-x-2)(x^2-2)-3x-3\\ &:=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\ g(x)&=(-3x-3)(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})+0\\ &:=r_1(x)q_2(x)+r_2(x). \end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)=-\dfrac{1}{3}r_1(x)=x+1$.

(2) 对 $f(x)=x^4+3x^3-2x-2$, $g(x)=x^2+2x-3$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2+2x-3)(x^2+x+1)-x+1\\ &:=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\ g(x)&=(-x+1)(-x-3)+0\\ &:=r_1(x)q_2(x)+r_2(x). \end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)=-r_1(x)=x-1$.

(3) 对 $f(x)=x^5-2x^4-4x^3+2x^2+4x+6$, $g(x)=x^2+x+1$ 进行辗转相除:

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x^2+x+1)(x^3-3x^2-2x+7)-x-1\\
&:=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)&=(-x-1)(-x)+1\\
&:=r_1(x)q_2(x)+r_2(x),\\
r_1(x)&=1\cdot(-x-1)+0\\
&:=r_2(x)q_3(x)+r_3(x).
\end{aligned}
$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)=r_2(x)=1$.

2. (1) 对 $f(x),g(x)$ 进行辗转相除:

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x^4+x^3-x^2-2x-2)\cdot 1+x^3-2x\\
&:=g(x)q_1(x)+r_1(x).\\
g(x)&=(x^3-2x)(x+1)+x^2-2\\
&:=r_1(x)q_2(x)+r_2(x).\\
r_1(x)&=(x^2-2)x+0\\
&:=r_2(x)q_2(x)+r_3(x).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
(f(x),g(x))&=x^2-2\\
&=g(x)-r_1(x)q_2(x)\\
&=g(x)-(f(x)-g(x)q_1(x))q_2(x)\\
&=g(x)(x+2)-f(x)(x+1).
\end{aligned}
$$

从而 $u(x)=-x-1$, $v(x)=x+2$.

(2) 对 $f(x), g(x)$ 进行辗转相除:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x-1)(x^2-3)+x-2 \\ &:= g(x)q_1(x)+r_1(x). \\ g(x) &= (x-2)(x+1)+1 \\ &:= r_1(x)q_2(x)+r_2(x). \\ r_1(x) &= 1\cdot(x-2)+0 \\ &:= r_2(x)q_2(x)+r_3(x). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (f(x), g(x)) = 1 & \\ &= g(x)-r_1(x)q_2(x) \\ &= g(x)-(f(x)-g(x)q_1(x))q_2(x) \\ &= g(x)(x^3+x^2-3x-2)-f(x)(x+1). \end{aligned}$$

从而 $u(x)=-x-1$, $v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

3. 例如 $f(x)=x$, $g(x)=1$, $u(x)=v(x)=1$, 则 $d(x)=x+1$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 剩余部分参考例 5.5.

4. 例 5.8.

5. 例 5.9.

6. 例 5.10.

7. 例 5.7 及其推论.

8. 设 $m_1(x)=[f_1(x), f_2(x)]$, $m(x)=[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)]$, 则 $m_1(x) \mid m(x)$, $f_i(x) \mid m(x)\,(i>2)$. 另一方面, 若 $m_1(x) \mid l(x)$, $f_i(x) \mid l(x)\,(i>2)$, 则 $f_1(x) \mid l(x)$, $f_2(x) \mid l(x)$, 从而 $l(x)$ 是所有 $f_i(x)$ 的公倍式, 于是 $m(x) \mid l(x)$, 故

$$m(x)=[m_1(x), f_3(x), \cdots, f_m(x)]=[[f_1(x), f_2(x)], f_3(x), \cdots, f_m(x)].$$

最小公倍式的定义显然与多项式的排列顺序无关, 因此上述习题告诉我们, 求 m 个多项式的最小公倍式时可以先求其中任意两个的最小公倍式 (利用高代教材的推论 5.3.6), 从而把问题化为 $m-1$ 个多项式的情形. 不断这样做下去, 最后便可计算出 m 个多项式的最小公倍式.

5.4 因式分解

1. (1) $f'(x)=5x^4-30x^2-40x-15$, 利用辗转相除法作如下计算:

$$\begin{aligned}
&(f(x),f'(x))\\
=&(x^5-10x^3-20x^2-15x-4,5x^4-30x^2-40x-15)\\
=&(x^5-10x^3-20x^2-15x-4,x^4-6x^2-8x-3)\\
=&(x^5-10x^3-20x^2-15x-4-(x^4-6x^2-8x-3)x,x^4-6x^2-8x-3)\\
=&(-4x^3-12x^2-12x-4,x^4-6x^2-8x-3)\\
=&(x^3+3x^2+3x+1,x^4-6x^2-8x-3)\\
=&((x+1)^3,(x+1)^3(x-3))\\
=&(x+1)^3\\
\neq&1.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 有重因式.

(2) $f'(x)=12x^2-8x-7$, 利用辗转相除法作如下计算:

$$\begin{aligned}
&(f(x),f'(x))\\
=&(4x^3-4x^2-7x-2,12x^2-8x-7)\\
=&(36x^3-36x^2-63x-18,12x^2-8x-7)\\
=&(36x^3-36x^2-63x-18-(12x^2-8x-7)(3x-1),12x^2-8x-7)\\
=&(2x+1,12x^2-8x-7)\\
=&2x+1\\
\neq&1.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 有重因式.

(3) $f'(x)=3x^2+1$, 利用辗转相除法作如下计算:

$$\begin{aligned}
&(f(x),f'(x))\\
=&(x^3+x+1,3x^2+1)\\
=&(9x^3+9x+9-(3x^2+1)3x,3x^2+1)\\
=&(2x+3,12x^2+4)\\
=&(2x+3,12x^2+4-(2x+3)(6x-9))\\
=&(2x+3,31)\\
=&1.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 无重因式.

2. 用反证法, 假设 $p(x)$ 在 $\mathbb{K}_1$ 上可约, 则存在 $\mathbb{K}_1$ 上次数小于 $\deg p(x)$ 的多项式 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$, 使得 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$. 由于 $\mathbb{K}_1\subseteq\mathbb{K}_2$, 故 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 也是 $\mathbb{K}_2$ 上次数小于 $\deg p(x)$ 的多项式, 这与 $p(x)$ 在 $\mathbb{K}_2$ 上不可约矛盾.

3. 例 5.16.

4. 例 5.18.

5. 例 5.20.

6. 例 5.13.

5.5 多项式函数

1. (1) 记 $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$, 经计算可得:

$$\begin{aligned}
f(0)&=1-0-0-1=0,\\
f(-1)&=0-1+2-1=0,\\
f(-\frac{1}{2})&=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+1-1=0.
\end{aligned}$$

由余数定理即得 $x(x+1)(2x+1)\mid f(x)$.

(2) 记 $f(x)=x^5+x^{11}+x^{17}+x^{23}+x^{29}$, $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. 设 $\omega_i\,(1\le i\le 4)$ 是 $g(x)$ 的四个根, 则对任意的 $1\le i\le 4$, 均有

$$\omega_i^5-1=(\omega_i-1)(\omega_i^4+\omega_i^3+\omega_i^2+\omega_i+1)=0,$$

于是经计算可得:

$$
\begin{aligned}
f(\omega_i) &= \omega_i^5+\omega_i^{11}+\omega_i^{17}+\omega_i^{23}+\omega_i^{29} \\
&= 1+\omega_i+\omega_i^2+\omega_i^3+\omega_i^4 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

由余数定理即得 $g(x) \mid f(x)$.

2. 例 5.22.
3. 例 5.23.
4. 例 5.24.
5. 例 5.25.
6. 例 4.11. 对任意的 $1 \le i \le n$, 令

$$f_i(x)=\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}.$$

再令

$$f(x)=b_1f_1(x)+b_2f_2(x)+\cdots+b_nf_n(x),$$

则 $f(x)$ 即为所求.

7. 例 5.29. 当 n 是奇数时, $f(n+1)=1$; 当 n 是偶数时, $f(n+1)=\dfrac{n}{n+2}$.
8. 例 5.30.

5.6 复系数多项式

1. 例 5.31.
2. 例 5.32.
3. 例 5.33. $(m,n)=(3,1)$, $(2-\sqrt{3}\mathrm{i},-\sqrt{3}\mathrm{i})$, $(2+\sqrt{3}\mathrm{i},\sqrt{3}\mathrm{i})$.
4. 例 5.42 (2). $\Delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$ 称为三次方程 $x^3+px+q=0$ 的判别式.
5. 例 5.36.
6. 例 5.37. $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 即为所求.
7. 例 5.39.

5.7 实系数多项式和有理系数多项式

1. 例 5.40.

2. 例 5.41.

3. 基础训练解答题 16.

4. (1) 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 7,\ \pm 14,$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x = 2$.

(2) 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x = -\dfrac{1}{2}$.

(3) 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm 7,\ \pm\frac{7}{2},\ \pm\frac{7}{3},\ \pm\frac{7}{6},\ \pm 14,\ \pm\frac{14}{3},$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{7}{2}$.

(4) 将该多项式化为整系数多项式 $2x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x - 6$, 根据高代教材的定理 5.7.2, 该多项式的有理根只可能为:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm 6,$$

代入检验可知该多项式的有理根为 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

5. 例 5.46.

6. (1) 选取素数 p, 由 Eisenstein 判别法可知, 该多项式在有理数域上不可约.

(2) 记 $f(x) = x^6 + x^3 + 1$, 作变量代换 $x = y + 1$, 则

$$f(x) = (y+1)^6 + (y+1)^3 + 1 = y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 21y^3 + 18y^2 + 9y + 3.$$

选取素数 3, 由 Eisenstein 判别法可知, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(3) 选取素数 2, 由 Eisenstein 判别法可知, 该多项式在有理数域上不可约.

7. 例 5.52.

8. 例 5.53.

9. 基础训练解答题 20. $(x^2-2x-2)(x^2-6x+11) = x^4-8x^3+21x^2-10x-22$.

5.8　多元多项式

1. 例 5.58.

2. 设 f, g 的齐次分解分别为:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f_d(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + f_r(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\
g(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + g_s(x_1, x_2, \cdots, x_n),
\end{aligned}$$

其中 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,(r \leq i \leq d)$ 或者为 i 次齐次多项式或者为零多项式, 并且 $f_d(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, $f_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$; $g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,(s \leq j \leq m)$ 或者为 j 次齐次多项式或者为零多项式, 并且 $g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, $g_s(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$; 特别地, $\deg f = d$, $\deg g = m$. 由此可得 fg 的齐次分解为:

$$fg = f_d g_m + (f_d g_{m-1} + f_{d-1} g_m) + \cdots + (f_{r+1} g_s + f_r g_{s+1}) + f_r g_s,$$

其中 $f_d g_m \neq 0$, $f_r g_s \neq 0$ 且 $\deg fg = d + m$. 用反证法, 若 f, g 不都是齐次多项式, 比如假设 f 不是齐次多项式, 则必有 $d > r$, 于是 fg 的两个齐次分量满足

$$\deg f_d g_m = d + m > r + s = \deg f_r g_s,$$

这与 fg 是齐次多项式矛盾.

3. 注意到 $fg = 1$ 为齐次多项式, 故由习题 2 的结论, f, g 都是齐次多项式. 又 $\deg fg = \deg f + \deg g = 0$, 故 $\deg f = 0$, 即 f 恒等于 $\mathbb{K}$ 中非零元 c.

5.9　对称多项式

1. 先将未定元 x_1, x_2, x_3 的幂和 s_1, s_2, s_3 表示为初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的表达式. 由 Newton 公式可得

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \quad s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0,$$

从而可得

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

(1) 利用上述结果计算可得:

$$\begin{aligned}原式 &= \sigma_1^3 - (\sigma_1 - 2x_1)^3 - (\sigma_1 - 2x_2)^3 - (\sigma_1 - 2x_3)^3 \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1^3 + 6\sigma_1^2 s_1 - 12\sigma_1 s_2 + 8s_3 \\ &= -2\sigma_1^3 + 6\sigma_1^3 - 12\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 8(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \\ &= 24\sigma_3.\end{aligned}$$

(2) 利用上述结果计算可得:

$$原式 = s_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

2. 例 5.35. $x^3 + (p^3 - 3pq + 3r)x^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2)x + r^3 = 0$.

3. 例 5.61.

4. 设未定元个数为 n, 下面根据 n 的不同取值分情况讨论.

(1) 当 $n = 1$ 时, 显然有 $s_4 = \sigma_1^4$.

(2) 当 $n = 2$ 时, 由 Newton 公式可得:

$$\begin{cases} s_1 - \sigma_1 = 0, \\ s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0, \\ s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 = 0. \end{cases}$$

因此直接计算可得:

$$\begin{aligned}s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 \\ &= (s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2)\sigma_1 - (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_2 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2.\end{aligned}$$

(3) 当 $n = 3$ 时, 由 Newton 公式可得:

$$\begin{cases} s_1 - \sigma_1 = 0, \\ s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\ s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0, \\ s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 = 0. \end{cases}$$

因此直接计算可得:

$$\begin{aligned}
s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 \\
&= (s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 \\
&= (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_1^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_1 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2.
\end{aligned}$$

(4) 当 $n \geq 4$ 时, 由 Newton 公式可得:

$$\begin{cases}
s_1 - \sigma_1 = 0, \\
s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\
s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0, \\
s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 = 0.
\end{cases}$$

因此直接计算可得:

$$\begin{aligned}
s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&= (s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&= (s_1\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_1^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_1 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.
\end{aligned}$$

5. 例 5.63. 方程组的解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1, 1)$.

6. 例 5.64.

5.10 结式和判别式

1. (1) 根据结式的定义可得

$$R(f,g) = \begin{vmatrix}
1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\
1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\
0 & -5 & 0 & -4 & 0 \\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1
\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&3&-1&4\\-5&0&-4&0\\1&-2&-1&0\\0&1&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&-9&20\\-5&0&-4\\1&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-9&8\\0&-10&-9\\1&-2&-1\end{vmatrix}=161.$$

(2) 根据结式的定义可得

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&-1&0\\1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1&-1\\0&1&1&0&0&-1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&-1&-1\\1&1&0&0&-1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1.$$

2. 例 5.65 中令 $n=3$ (本题是例 5.65 的特例), 答案为:

$$\Delta=-4p^3-27q^2.$$

3. 例 5.68.
4. 例 5.69.
5. 例 5.70.
6. 例 5.71. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 则

$$\Delta(f(x^2))=(-4)^na_0a_n(\Delta(f(x)))^2.$$

7. 原参数方程可以化为:

$$\begin{cases} t^3 + 2t - 3 - x = 0, \\ t^2 - t + 1 - y = 0. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} f(t) = t^3 + 2t - 3 - x, \\ g(t) = t^2 - t + 1 - y, \end{cases}$$

由 t 决定的参数曲线上的一点相当于方程组有公共根, 因此

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3-x \\ 1 & -1 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-y \end{vmatrix} = 0.$$

求出行列式可得该曲线的直角坐标方程为

$$y^3 - x^2 + 3xy + y^2 - 6x + 10y - 12 = 0.$$

复习题五

1. 例 5.6.
2. 例 5.11.
3. 例 5.14.
4. 例 5.15.
5. 例 5.17.
6. 例 5.19.
7. 例 5.26.
8. 例 5.27.
9. 例 5.28.
10. 例 5.34. 答案为: $\dfrac{q^2 - 2pr}{r^2}$
11. 例 5.38.
12. 例 5.43.
13. 例 5.44.

14. 例 5.45.
15. 例 5.47.
16. 例 5.48.
17. 例 5.49.
18. 例 5.50. 答案为:

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

19. 例 5.51.
20. 例 5.54.
21. 例 5.55.
22. 例 5.56.
23. 例 5.57.
24. 例 5.65. 答案为:

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}((1-n)^{n-1}p^n + n^n q^{n-1}).$$

25. 例 5.66. 答案为:
(1) $\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(2^n(1-n)^{n-1} + n^n)$.
(2) $\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}2^{n-1}n^n$.
(3) $\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}n^{n-2}$.
26. 例 5.67.
27. 例 5.72.
28. 例 5.73.
29. 例 5.74.
30. 例 5.75. 答案为:

$$5x^2y^2 - 2x^2y - 12xy^2 + x^2 - 4x + 12y + 4 = 0.$$

31. 例 5.76.
32. 例 5.77.
33. 例 5.78.
34. 例 5.79. 答案为: 一组基为 1, $\sqrt[n]{2}, \cdots, \sqrt[n]{2^{n-1}}$.
35. 例 5.80.

高等代数学（第四版）习题解答
第六章　特征值

注　部分习题答案引用自**高代白皮书（第四版）**的例题和训练题.

高代白皮书（第四版）:　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

6.1　特征值和特征向量

1. (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 4 & 4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1. 设特征向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

将 $\lambda=1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-2x_3=0, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=0, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 1, 故有两个线性无关的解, 可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

故属于特征值 1 的特征向量为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$, 其中 c_1, c_2 为 $\mathbb{K}$ 中任意不全为零的数.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 -1. 设特征向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

将 $\lambda=-1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases}-3x_1+x_2-2x_3=0,\\ -5x_1+2x_2-3x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 2, 故只有一个线性无关的解, 可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

故属于特征值 -1 的特征向量为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c_1 为 $\mathbb{K}$ 中任意非零数.

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\ -7 & \lambda+2 & 3\\ -3 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0. 设特征向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

将 $\lambda = 0$ 代入 $(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

这个方程组系数矩阵的秩为 2, 故只有一个线性无关的解, 可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故属于特征值 0 的特征向量为 $c_1\boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c_1 为 $\mathbb{K}$ 中任意非零数.

2. 例 6.3.

3. 例 6.4.

4. (1) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值为 1 和 2, 对应的特征向量分别为 $(1,0)'$ 和 $(0,1)'$. 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

的特征值为 λ_1 和 λ_2, 即 λ_1 和 λ_2 是方程 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ 的两个根. 下面根据 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量的个数分情况进行讨论.

(Case 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

(Subcase 1.1) $b \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}.$$

(Subcase 1.2) $c \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - d \\ c \end{pmatrix}.$$

(Subcase 1.3) $b = c = 0$. 不妨设 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$, 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Case 2) $\lambda_1 = \lambda_2$, 即 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$, 且 $\mathrm{r}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 1$.

(Subcase 2.1) $b \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}.$$

(Subcase 2.2) $c \neq 0$. 此时可取 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix}.$$

(Case 3) $\lambda_1 = \lambda_2$, 即 $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$, 且 $\mathrm{r}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$, 即 $\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{I}$. 此时 $a = d = \lambda_1$, $b = c = 0$, $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量可取为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量为 $(x_1, y_1)'$, $(x_2, y_2)'$ 或 $(x, y)'$ (取决于 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量的个数). 由习题 3 的结论, 原矩阵的特征值为 1, 2, λ_1 和 λ_2, 对应的线性无关特征向量分别为 $(1,0,0,0)'$, $(0,1,0,0)'$, $(0,0,x_1,y_1)'$ 和 $(0,0,x_2,y_2)'$ 或 $(0,0,x,y)'$ (取决于 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量的个数).

(2) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值为 1 和 -1, 对应的特征向量分别为 $(1,1)'$ 和 $(1,-1)'$. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值为 i 和 $-\mathrm{i}$, 对应的特征向量分别为 $(\mathrm{i},1)'$ 和 $(\mathrm{i},-1)'$. 由习题 3 的结论, 该矩阵的特征值为 1, -1, i 和 $-\mathrm{i}$, 对应的线性无关特征向量分别为 $(1,1,0,0)'$, $(1,-1,0,0)'$, $(0,0,\mathrm{i},1)'$ 和 $(0,0,\mathrm{i},-1)'$.

(3) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值为 5 和 -2, 对应的特征向量分别为 $(3,4)'$ 和 $(-1,1)'$. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

的特征值为 6 和 1, 对应的特征向量分别为 $(1,3)'$ 和 $(-1,2)'$. 由习题 3 的结论, 该矩阵的特征值为 5, -2, 6 和 1, 对应的线性无关特征向量分别为 $(3,4,0,0)'$, $(-1,1,0,0)'$, $(0,0,1,3)'$ 和 $(0,0,-1,2)'$.

5. 例 6.2.

6. 基础训练单选题 5.

7. 由条件可知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 从而 $\lambda_0 \neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的关于特征值 $\lambda_1 = \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量. 由此可得

$$\begin{cases} b + 3 = \lambda_1, \\ 2b + 2 = \lambda_1 b, \\ a + b + 1 = \lambda_1. \end{cases}$$

由上述方程可解出 $a = 2$, $b = 1$ 或 -2, $\lambda_1 = 4$ 或 1. 经计算可知 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 于是 $\lambda_0 = \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1} = 1$ 或 4. 综上所述, $(a,b,\lambda_0) = (2,1,1)$ 或 $(2,-2,4)$.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (-1,-1,1)'$, 则由条件可知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 可得 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 代入条件 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a + c + 1) = 1, \\ \lambda_0(-b - 2) = 1, \\ \lambda_0(-a + c - 1) = -1. \end{cases}$$

由上述方程可解出 $\lambda_0 = 1$, $a = c$, $b = -3$. 最后由 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 可解出 $a = c = 2$. 综上所述, $(a,b,c,\lambda_0) = (2,-3,2,1)$.

9. (1) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^k, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 x^k, 即 $\lambda_0^k=0$, 因此 $\lambda_0=0$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

(2) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^2-1, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 x^2-1, 即 $\lambda_0^2-1=0$, 因此 $\lambda_0=1$ 或 -1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能为 1 或 -1.

(3) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^2-x, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 x^2-x, 即 $\lambda_0^2-\lambda_0=0$, 因此 $\lambda_0=0$ 或 1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能为 0 或 1.

10. 注意到 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\beta'\alpha\beta'}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$, 故由习题 9 (1) 的结论可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

11. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $(x+1)^m$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 也适合 $(x+1)^m$, 即 $(\lambda_0+1)^m=0$, 因此 $\lambda_0=-1$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 -1, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^n$.

12. 例 6.19.

13. 先求 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}'$ 的特征多项式. 由习题 12 的结论可知,

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}')|&=|(\lambda-1)\boldsymbol{I}_n-(-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}'|\\&=(\lambda-1)^{n-1}|(\lambda-1)\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{\beta}'(-\boldsymbol{\alpha})|\\&=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}'$ 的特征值为 $1-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$ 和 $(n-1)$ 个 1.

14. 注意到 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$ 而 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$, 故由习题 12 的结论可知, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

15. 例 6.26.

16. (1) 例 6.35 的代数版本.

(2) 例 6.37 的代数版本.

(3) 例 6.40.

6.2 对角化

1. 记各小问中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\4&4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 (3 重). 当 $\lambda=1$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组系数矩阵的秩为 1, 因此解空间的维数为 2, 即特征值 1 的几何重数为 2, 不等于其代数重数 3, 从而该矩阵不可对角化. 本题也可以直接用反证法来证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 将相似于 $\boldsymbol{I}_3$, 从而可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_3$, 矛盾.

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 (3 重). 当 $\lambda=-1$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-3x_1+x_2-2x_3=0,\\ -5x_1+2x_2-3x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组系数矩阵的秩为 2, 因此解空间的维数为 1, 即特征值 -1 的几何重数为 1, 不等于其代数重数 3, 从而该矩阵不可对角化. 本题也可以直接用反证法来证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 将相似于 $-\boldsymbol{I}_3$, 从而可得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_3$, 矛盾.

(3) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\ -7 & \lambda+2 & 3\\ -3 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (3 重). 当 $\lambda=0$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+x_3=0,\\ -7x_1+2x_2+3x_3=0,\\ -3x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

显然这个方程组系数矩阵的秩为 2, 因此解空间的维数为 1, 即特征值 0 的几何重数为 1, 不等于其代数重数 3, 从而该矩阵不可对角化. 本题也可以直接用反证法来证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 将相似于 $\boldsymbol{O}$, 从而可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 矛盾.

2. (1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2 和 3. 当 $\lambda=1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-3x_2=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=2$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}3x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-2x_2=0,\\ 3x_1-x_2-x_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=3$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}4x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-x_2=0,\\ 3x_1-x_2=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 4 & -4 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 1),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (2 重) 及 -1 (1 重). 当 $\lambda = 0$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = -1$ 时, $(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(3) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 (2 重) 及 -1 (1 重). 当 $\lambda=1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\ -x_1+x_2=0,\end{cases}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-1$ 时, $(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}-x_1-x_2=0,\\ -x_1-x_2=0,\\ -2x_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为 (只有一个向量)

$$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

3. 例 6.50. 答案为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&7&-3\\-3&6&-2\end{pmatrix}.$$

4. 由条件可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2 和 3, 相应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,1)'$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)'$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{1,2,3\}$, 则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-7&2&4\\-14&5&6\\-13&3&8\end{pmatrix}.$$

5. 例 6.51. 答案为 $(x,y,z)=(4,5,6)$, $\boldsymbol{P}$ 可取为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

6. 例 6.52. 答案为 $k=0$, $\boldsymbol{P}$ 和对角阵可取为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

7. 例 6.53. 答案为

$$\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\cdot 2^n-6^n&2^n-6^n&6^n-2^n\\2\cdot 6^n-2^{n+1}&2\cdot 6^n+2^{n+1}&2^{n+1}-2\cdot 6^n\\3\cdot 2^n-3\cdot 6^n&3\cdot 2^n-3\cdot 6^n&2^n+3\cdot 6^n\end{pmatrix}.$$

8. 例 6.46.

9. 例 6.48.

10. 例 6.59.

11. 例 6.61.

12. 例 6.67.

13. 例 6.68.

14. 例 6.69.

15. 例 6.73.

16. 例 6.74.

6.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

1. 例 6.75.

2. 例 6.76 (2).

3. 例如, 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的极小多项式和特征多项式都分别为 x^2 和 x^4, 但它们不相似. 证法 1: 假设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$, 将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表达式代入可得 $p_{21}=p_{31}=p_{41}=p_{23}=p_{33}=p_{43}=0$, 这意味着 $\boldsymbol{P}$ 的第一列和第三列线性相关, 即 $\boldsymbol{P}$ 为奇异阵, 矛盾. 证法 2: 注意相似的矩阵有相同的秩, 但 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$, 故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

4. 例 6.81.

5. 例 6.82.

6. 例 6.83.

7. 例 6.84.

8. 例 6.85.

9. 例 6.86.

10. 例 6.88.

11. 例 6.91.

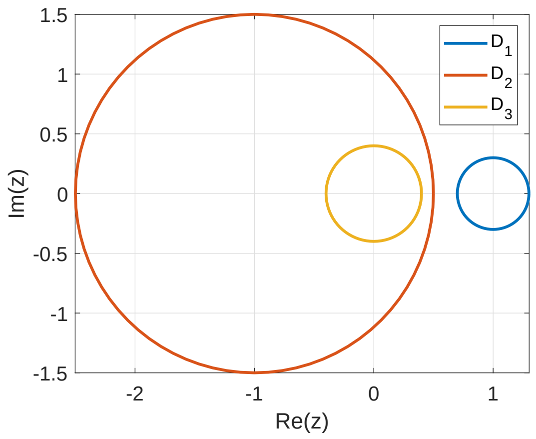
12. 例 6.94.

6.4 特征值的估计

1. (1) 由戈氏圆盘第一定理, 写出 3 个戈氏圆盘为

$$\begin{aligned}D_1&: |z-1|\le 0.1+0.2=0.3,\\D_2&: |z+1|\le 1.1+0.4=1.5,\\D_3&: |z|\le 0.3+0.1=0.4.\end{aligned}$$

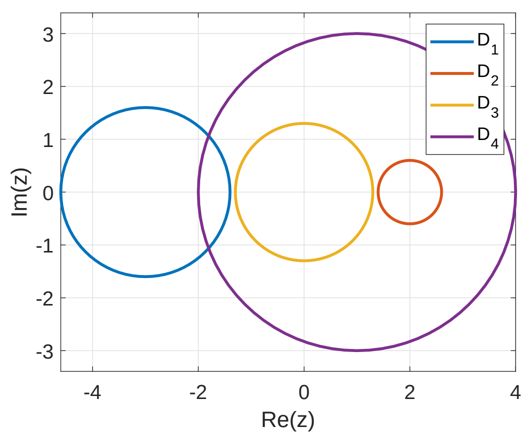
在复平面上图像如下:



(2) 由戈氏圆盘第一定理, 写出 4 个戈氏圆盘为

$$
\begin{aligned}
&D_1 : |z+3| \leq 1+0.1+0.5=1.6, \\
&D_2 : |z-2| \leq 0.1+0.4+0.1=0.6, \\
&D_3 : |z| \leq 1+0.3+0=1.3, \\
&D_4 : |z-1| \leq 0+2+1=3.
\end{aligned}
$$

在复平面上图像如下:



2. 例 3.83 证法 2 的第一个结论.

3. 例 3.83 证法 2 的第二个结论.

4. 例 6.33.

复习题六

1. 例 6.1.

2. 例 6.5.

3. 例 6.6. 若 $a=0$ 或 $b=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零. 以下假设 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$. 若 $a\neq b$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\dfrac{a\omega_i-b}{1-\omega_i}\,(1\leq i\leq n)$, 其中 $\omega_i\,(1\leq i\leq n)$ 是 $\dfrac{b}{a}$ 的 n 次方根. 若 $a=b$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $(n-1)a$ (1 重), $-a$ ($n-1$ 重).

4. 例 6.8. 所求矩阵的全体特征值为

$$\lambda_1+\lambda_1^2,\ \lambda_1-\lambda_1^2,\ \lambda_2+\lambda_2^2,\ \lambda_2-\lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n+\lambda_n^2,\ \lambda_n-\lambda_n^2.$$

5. 例 6.10.

6. 例 6.11. 第 (2) 问所求多项式为 $h(x)=|x\boldsymbol{I}_n-g(\boldsymbol{C})|$.

7. 例 6.13.

8. 例 6.14. 记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ $(1\leq i,j\leq n)$ 为 n 阶基础矩阵. $\boldsymbol{\eta}$ 的特征值为 1 ($\dfrac{n(n+1)}{2}$ 重), -1 ($\dfrac{n(n-1)}{2}$ 重). 特征值 1 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{ii}\,(1\leq i\leq n)$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji})\,(1\leq i<j\leq n)$; 特征值 -1 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji})\,(1\leq i<j\leq n)$.

9. 例 6.15.

10. 例 6.16.

11. 例 6.18.

12. 例 6.20. $\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ 的特征值为 1 ($n-1$ 重), -1 (1 重).

13. 例 6.21. 若 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的特征值为 0 ($n-1$ 重), $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ (1 重); 若 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的特征值为 0 (n 重).

14. 例 6.22. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 ($n-2$ 重), $n-1$, $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-1$.

15. 例 6.23.

16. 例 6.24.

17. 例 6.27.

18. 例 6.28.

19. 例 6.29.

20. 例 6.30. $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{24}$.

21. 例 6.31.

22. 例 6.32.

23. 例 6.45.

24. 例 6.54. 通项 a_n 的显式表达式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

25. 例 6.55. 设 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, $\omega_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(0 \leq k \leq n-1)$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{f(1), f(\omega_1), \cdots, f(\omega_{n-1})\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为过渡矩阵.

26. 例 6.56.

27. 例 6.60.

28. 例 6.62.

29. 例 6.63.

30. 例 6.65.

31. 例 6.70.

32. 例 6.71.

33. 例 6.72.

34. 例 6.87.

35. 例 6.89.

36. 例 6.90.

37. 例 6.92.

38. 例 6.93.

高等代数学（第四版）习题解答
第七章　相似标准型

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

7.1　多项式矩阵

1. 设 $\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{N}_n\lambda^n + \boldsymbol{N}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{N}_0$ 是可逆 λ-矩阵 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 的逆 λ-阵, 则由 $\boldsymbol{M}(\lambda)\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{I}$, 比较常数项系数可知 $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{M}_0$ 是非异阵.

2. 基础训练填空题 2.

3. 先证充分性. 不妨设 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{PQ})\boldsymbol{P} = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{QP}$, 即有 $\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P} = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$, 于是 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$ 相抵. 再证必要性. 由 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$ 相抵可知, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$. 令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PQ}$ 且 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{QP}$.

4. 例 7.1.

7.2　矩阵的法式

1. (1)

$$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & \lambda-1\\0 & \lambda-3 & \lambda-1\\0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda-3 & \lambda-1\\0 & 2(\lambda+2) & -(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & \lambda-1\\0 & (\lambda+2)(\lambda+1) & -(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -\dfrac{\lambda-1}{2}\\0 & (\lambda+2)(\lambda+1) & -(\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -\dfrac{\lambda-1}{2}\\0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2)\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & -1\\3 & \lambda & -2\\2 & -1 & \lambda\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \lambda+3 & -1\\-\lambda & 3 & -2\\1 & 2 & \lambda\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda+3 & -1\\0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2\\0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2\\0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -\lambda-1 & \lambda+1\\0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & -\lambda-1\\0 & \lambda^2+3\lambda+3 & -\lambda-2\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda+1 & -\lambda-1\\0 & 1 & \lambda^2+2\lambda\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & \lambda^2+2\lambda\\0 & \lambda+1 & -\lambda-1\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & \lambda^2+2\lambda\\0 & 0 & -(\lambda+1)^3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & (\lambda+1)^3\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1\\ -\lambda+1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda+1\\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda+1\\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}.$$

2. (1)

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ 0 & \lambda^2 & -\lambda\\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ 0 & \lambda^2 & -\lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & -\lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^3-\lambda\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda^2-\lambda&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}-\lambda&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\\lambda^2-\lambda&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\lambda&0&0&\lambda^2\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda^2-\lambda&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&\lambda^2-\lambda&0\\0&(\lambda-1)^2&0&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&\lambda^2-\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)^2&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&0&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)^2&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda(\lambda-1)&0&0\\0&0&\lambda(\lambda-1)&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda-1)^2\end{pmatrix},$$

最后一步用到第 3 题的结论.

3. 例 7.9.

4. 先证充分性. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*(\lambda)$ 满足 $\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{A}^*(\lambda)=\boldsymbol{A}^*(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|\boldsymbol{I}_n$. 若 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 为非零常数, 则 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|^{-1}\boldsymbol{A}^*(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 λ–矩阵. 再证必要性. 设 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 λ–矩阵, 则有 $\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{I}_n$, 两边同取行列式, 可得

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)||\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{I}_n|=1.$$

由于 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$, $|\boldsymbol{B}(\lambda)|$ 都是关于 λ 的多项式, 故 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 必为非零常数.

5. 由假设, 存在可逆 λ–矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$, $\boldsymbol{Q}(\lambda)$, 使得

$$\boldsymbol{P}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)\}.$$

等式两边同取行列式, 可得

$$|\boldsymbol{P}(\lambda)||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{Q}(\lambda)|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

由习题 4 可知, $|\boldsymbol{P}(\lambda)|=c_1$ 且 $|\boldsymbol{Q}(\lambda)|=c_2$, 其中 c_1, c_2 都是非零常数, 于是

$$c_1c_2|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

注意到 $d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)$ 与 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 均为首一多项式, 故比较首项系数可得 $c_1c_2=1$, 于是

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=d_1(\lambda)\cdots d_m(\lambda).$$

7.3 不变因子

1. 记题中矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的 k 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$.

(1)

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 2 & \lambda-1\end{pmatrix}.$$

显然 $D_1(\lambda)=1$. 再求 $D_2(\lambda)$, 考虑 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的后两行, 后两列构成的子式值为 $-2(\lambda-2)$; 其第一行和第三行, 第一列和第三列构成的子式值为 $(\lambda-1)^2$, 因此 $D_2(\lambda)=1$. 易求得 $D_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 因此该矩阵的行列式因子组为 $1,1,(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 于是不变因子组也为 $1,1,(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

(2)

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{pmatrix}.$$

显然 $D_1(\lambda)=1$. 再求 $D_2(\lambda)$, 考虑 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的后两行, 前两列构成的子式值为 $-\lambda$; 其第一行和第三行, 前两列构成的子式值为 $\lambda+1$, 因此 $D_2(\lambda)=1$. 易求得

$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$. 因此该矩阵的行列式因子组为 $1,1,(\lambda-1)^3$, 于是不变因子组也为 $1,1,(\lambda-1)^3$.

(3)

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ -2 & \lambda-2 & 1\\ -2 & -2 & \lambda\end{pmatrix}.$$

显然 $D_1(\lambda)=1$. 再求 $D_2(\lambda)$, 考虑 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的后两行, 前两列构成的子式值为 2λ; 其前两行, 后两列构成的子式值为 $-\lambda+1$, 因此 $D_2(\lambda)=1$. 易求得 $D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. 因此该矩阵的行列式因子组为 $1,1,(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 于是不变因子组也为 $1,1,(\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

2. 记题中第一个矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 第二个矩阵为 $\boldsymbol{B}$.

(1) 通过计算法式求得 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,(\lambda-1)^2(\lambda+1)$, $\boldsymbol{B}$ 的不变因子组为 $1,(\lambda-1),(\lambda-1)(\lambda+1)$, 两者不同, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(2) 通过计算法式求得 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$, $\boldsymbol{B}$ 的不变因子组为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 两者相同, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

(3) 通过计算法式求得 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,(\lambda+1)^3$, $\boldsymbol{B}$ 的不变因子组为 $1,1,(\lambda+1)^3$, 两者相同, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

3. 例 7.4. 记题中矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则特征矩阵

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-a & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda-a & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$, 显然 $D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$. 注意到 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行, 前 $n-1$ 列构成的子式值为 $(\lambda-a)^{n-1}$; 设 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行, 后 $n-1$ 列构成的子式值为 $g(\lambda)$, 注意到 $g(a)$ 是 $n-1$ 阶上三角行列式, 主对角元素全为 -1, 从而 $g(a)=(-1)^{n-1}\neq 0$, 因此 $(\lambda-a)^{n-1}$ 与 $g(\lambda)$ 没有公共根, 故 $((\lambda-a)^n,g(\lambda))=1$, 于是 $D_{n-1}(\lambda)=1$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-a)^n$, 它的不变因子组也为 $1,\cdots,1,(\lambda-a)^n$.

4. 例 7.3.

5. 例 7.6.

7.4 有理标准型

1. (1) 有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 有理标准型为

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & -1 & -2 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. 记题目中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 可以进行如下相抵变换:

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \lambda-2, (\lambda-2)^2$, 故其有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 可以进行如下相抵变换:

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -3 & -3\\ -3 & \lambda-1 & -3\\ 3 & 3 & \lambda+5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda+5\\ 0 & \lambda+2 & 3(\lambda+2)\\ \lambda-1 & -3 & -9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda+5\\ 0 & \lambda+2 & 3(\lambda+2)\\ 0 & -\lambda-2 & -\lambda^2-4\lambda-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-1)\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda+2,(\lambda+2)(\lambda-1)$, 故其有理标准型为

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

(3) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 可以进行如下相抵变换:

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\ -7 & \lambda+2 & 3\\ -3 & 1 & \lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda-3\\ \lambda+2 & 3 & -7\\ 1 & \lambda+1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda-3\\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+\lambda-1\\ 0 & \lambda & -\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,\lambda^3$, 故其有理标准型为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. 基础训练填空题 3 或例 6.46.

4. 不可能, 即特征多项式和极小多项式分别相等的阶数不超过 3 的两个矩阵一定相似. 设这两个矩阵的特征多项式, 极小多项式分别为 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, 下面根据矩阵的阶数进行分类讨论:

(1) 1 阶矩阵: 特征多项式相同表明两个矩阵相同, 当然它们相似.

(2) 2 阶矩阵: 两个矩阵的不变因子组均为 $\dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}, g(\lambda)$, 从而它们相似.

(3) 3 阶矩阵: 若 $\deg g(\lambda)=1$, 可设 $g(\lambda)=\lambda-a$, 则两个矩阵的不变因子组均为 $\lambda-a, \lambda-a, \lambda-a$; 若 $\deg g(\lambda)=2$, 则两个矩阵的不变因子组均为 $1, \dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}, g(\lambda)$; 若 $\deg g(\lambda)=3$, 则两个矩阵的不变因子组均为 $1, 1, g(\lambda)$.

综上所述, 无论何种情况, 两个矩阵都有相同的不变因子组, 从而它们相似.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式和极小多项式分别为 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, 显然 $f(\lambda)=D_n(\lambda)$. 先证充分性. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1, \cdots, 1, D_n(\lambda)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组也为 $1, \cdots, 1, D_n(\lambda)$. 由于极小多项式是最后一个不变因子, 故 $g(\lambda)=D_n(\lambda)=f(\lambda)$. 再证必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_n(\lambda)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda)/D_1(\lambda), \cdots, D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)$. 由于极小多项式是最后一个不变因子, 故 $g(\lambda)=D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)$. 由条件 $f(\lambda)=g(\lambda)$ 可得 $D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda)=D_n(\lambda)$, 于是 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 再由行列式因子的性质可得 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1, \cdots, 1, D_n(\lambda)$. 也可以这样来讨论. 设 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$. 由于极小多项式是最后一个不变因子, 故 $f(\lambda)=g(\lambda)=d_n(\lambda)$. 又由 § 7.2 习题 5 可知 $f(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$, 于是 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \cdots, 1, f(\lambda)=D_n(\lambda)$, 这也是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组.

6. 基础训练填空题 15. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 一定相似.

7. 基础训练填空题 12. $\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子为 λ^k. 所有 n 阶 n 次幂零阵的最后一个不变因子都是 λ^n, 因此它们的不变因子组都是 $1, \cdots, 1, \lambda^n$, 从而它们都相似.

8. 例 7.15.

9. 例 7.16.

10. 例 7.23.

11. 例 7.44.

12. 例 7.26 的充分性.

7.5 初等因子

1. (1) 它在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+1.$$

它在实数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+1.$$

它在复数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+1.$$

(2) 它在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2.$$

它在实数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2.$$

它在复数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda-\mathrm{i}, (\lambda-\mathrm{i})^2, (\lambda-\mathrm{i})^2, \lambda+\mathrm{i}, (\lambda+\mathrm{i})^2, (\lambda+\mathrm{i})^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2.$$

(3) 它在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^2+1, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, \lambda^2-2.$$

它在实数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^2+1, \lambda^2+1, (\lambda^2+1)^2, \lambda-\sqrt{2}, \lambda+\sqrt{2}.$$

它在复数域上的初等因子组为

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda-\mathrm{i}, \lambda-\mathrm{i}, (\lambda-\mathrm{i})^2, \lambda+\mathrm{i}, \lambda+\mathrm{i}, (\lambda+\mathrm{i})^2, \lambda-\sqrt{2}, \lambda+\sqrt{2}.$$

2. (1) 将这些多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} \lambda^2, & \lambda, & \lambda; \\ (\lambda+1)^2, & \lambda+1, & 1; \\ (\lambda-1)^2, & \lambda-1, & \lambda-1. \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2, \quad d_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1), \quad d_1(\lambda)=\lambda(\lambda-1).$$

从而不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda(\lambda-1),\lambda(\lambda^2-1),\lambda^2(\lambda^2-1)^2,$$

其中有 8 个 1.

(2) 将这些多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} \lambda^3, & \lambda^2, & \lambda; \\ (\lambda-\sqrt{2})^2, & \lambda-\sqrt{2}, & 1; \\ (\lambda+\sqrt{2})^2, & \lambda+\sqrt{2}, & 1. \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=\lambda^3(\lambda-\sqrt{2})^2(\lambda+\sqrt{2})^2, \quad d_2(\lambda)=\lambda^2(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}), \quad d_1(\lambda)=\lambda.$$

从而不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda,\lambda^2(\lambda^2-2),\lambda^3(\lambda^2-2)^2,$$

其中有 9 个 1.

(3) 将这些多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} (\lambda-1)^3, & \lambda-1, & 1; \\ (\lambda+1)^3, & \lambda+1, & \lambda+1; \\ (\lambda-2)^2, & \lambda-2, & 1. \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2,\quad d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),\quad d_1(\lambda)=\lambda+1.$$

从而不变因子组为

$$1,\cdots,1,\lambda+1,(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2,$$

其中有 9 个 1.

7.6 Jordan 标准型

1. (1)

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & & & & & & & \\ 0 & \sqrt{2} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1, \lambda-2, (\lambda-2)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda-2, (\lambda-2)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PJ}$ 可知

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2.$$

求解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ 得到两个线性无关的解 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 0)'$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 0, 1)'$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = (k_1, 2k_1, k_2)'$, 代入 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} \,\vdots\, \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})$ 可得 $k_1 = k_2$. 因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = (1, 2, 1)'$, 再将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入第三个方程解出 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, 0)'$. 于是 $\boldsymbol{P}$

可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 可知

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1&=\boldsymbol{0},\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2&=\boldsymbol{0},\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3&=\boldsymbol{\alpha}_2.\end{aligned}$$

求解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 得到两个线性无关的解 $\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)'$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=(5,0,1)'$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=(-2k_1+5k_2,k_1,k_2)'$, 代入 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$ 可得 $k_1=k_2$. 因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(3,1,1)'$, 再将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入第三个方程解出 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)'$. 于是 $\boldsymbol{P}$ 可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(3) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等

因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 可知

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

化成方程组为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1&=\mathbf{0},\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2&=\mathbf{0},\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3&=\boldsymbol{\alpha}_2.\end{aligned}$$

求解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ 得到两个线性无关的解 $\boldsymbol{\beta}_1=(5,1,0)'$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2=(-4,0,1)'$, 可设 $\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=(5k_1-4k_2,k_1,k_2)'$, 代入 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 利用 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\,¦\,\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$ 可得 $k_1=k_2$. 因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(5,1,0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,1)'$, 再将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入第三个方程解出 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)'$. 于是 $\boldsymbol{P}$ 可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(4) 例 7.61. $\boldsymbol{P}$ 可以取为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}.$$

3. 例 7.11.

4. 由条件可知, $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式整除 λ^2, 又极小多项式是最大的不变因子, 故 $\boldsymbol{A}$ 的任一不变因子都整除 λ^2. 设 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组中有 a 个 λ, b 个 λ^2, 则有

$a+2b=n$ 且 $b=r$, 解得 $a=n-2r$, $b=r$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0),\cdots,\boldsymbol{J}_2(0)\},$$

其中有 $n-2r$ 个 0, r 个 $\boldsymbol{J}_2(0)$.

5. 例 7.34 (1). $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$, 其中有 r 个 1.

6. 例 7.47. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\}$.

(2) 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0)\}$.

7. 例 7.48.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 互不相同, $n_i\geq 1\,(1\leq i\leq k)$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式次数为 n, 故 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于其特征多项式. 又特征多项式是所有不变因子的乘积, 并且极小多项式是最大的不变因子, 故 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,\cdots,1,g(\lambda)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1),\cdots,\boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\},$$

其中各个 Jordan 块的主对角元素彼此不同.

9. 例 7.34 (2).

10. 例 7.35.

11. 先证充分性. 设 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $g(\lambda)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 整除 $g(\lambda)$. 又 $g(\lambda)$ 无重根, 故 $m(\lambda)$ 也无重根, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 再证必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则由高代教材的例 6.3.2 可知 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式即为 $g(\lambda)$, 于是 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

12. 例 7.65.

7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用

1. 注意到 $\boldsymbol{J}=\lambda_0\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{J}_n(0)$ 且 $\lambda_0\boldsymbol{I}_n$ 与 $\boldsymbol{J}_n(0)$ 乘法可交换, 故

$$\boldsymbol{J}^k=(\lambda_0\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{J}_n(0))^k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(\lambda_0\boldsymbol{I}_n)^{k-i}\boldsymbol{J}_n(0)^i.$$

因此, 根据 k 和 n 的大小关系分为以下两种情况:

(1) 当 $k<n$ 时,

$$\boldsymbol{J}^k=\begin{pmatrix}\lambda_0^k & \mathrm{C}_k^1\lambda_0^{k-1} & \cdots & \mathrm{C}_k^k & 0 & \cdots & 0\\ & \lambda_0^k & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & 0\\ & & & \ddots & \ddots & & \mathrm{C}_k^k\\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & & & \ddots & \mathrm{C}_k^1\lambda_0^{k-1}\\ & & & & & & \lambda_0^k\end{pmatrix}.$$

(2) 当 $k\geq n$ 时,

$$\boldsymbol{J}^k=\begin{pmatrix}\lambda_0^k & \mathrm{C}_k^1\lambda_0^{k-1} & \cdots & \mathrm{C}_k^{n-1}\lambda_0^{k-n+1}\\ & \lambda_0^k & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \mathrm{C}_k^1\lambda_0^{k-1}\\ & & & \lambda_0^k\end{pmatrix}.$$

2. 记题目中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,1,(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2,(\lambda+1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

设过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为其列分块, 则由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2&=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3&=-\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4&=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4.\end{aligned}$$

通过计算特征向量与广义特征向量可得 (也可以参考例 7.63 中的计算):

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&2&4&1\\2&1&4&0\\2&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}.$$

由习题 1 可求出 $\boldsymbol{J}^k$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2&2&4&1\\2&1&4&0\\2&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k&0&0\\0&1&0&0\\0&0&(-1)^k&(-1)^{k-1}k\\0&0&0&(-1)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-\dfrac{1}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&\dfrac{1}{4}&0&-\dfrac{1}{4}\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(1-4k)(-1)^k&4k(-1)^k&2k+1+(4k-1)(-1)^k&-2k-4k(-1)^k\\-4k(-1)^k&(4k+1)(-1)^k&2k+4k(-1)^k&1-2k-(4k+1)(-1)^k\\0&0&2k+1&-2k\\0&0&2k&-2k+1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 通过计算法式得到 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为 $1,1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

设过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为其列分块, 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2&=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4&=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.\end{aligned}$$

通过计算特征向量与广义特征向量可得 (也可以参考例 7.59 中的计算):

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5 & \frac{7}{6} & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 6 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由习题 1 可求出 $\boldsymbol{J}^k$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}5 & \frac{7}{6} & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 6 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 3 & -1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3k+1 & -k & k & -7k\\ 9k & 1-3k & -7k & -k\\ 0 & 0 & 4k+1 & -8k\\ 0 & 0 & 2k & 1-4k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. 例 7.71. 答案为

$$\boldsymbol{B}=\pm\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4}\end{pmatrix}.$$

4. 例 7.73.

5. 由题意可知, $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 1 的几何重数为 1, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中属于特征值 1 的 Jordan 块只有一个. 又 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

6. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 0 的几何重数等于 $n-r$, 这当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中属于特征值 0 的 Jordan 块有 $n-r$ 个, 这也

当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的形如 λ^k 的初等因子有 $n-r$ 个. 本题的推广可参考例 7.44.

7. 设 $\boldsymbol{P}$ 为非异阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_0,\boldsymbol{J}_1\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $\boldsymbol{J}_0$ 是属于特征值 λ_0 的 Jordan 块拼成的分块对角阵, $\boldsymbol{J}_1$ 是其余 Jordan 块拼成的分块对角阵. 显然, $\boldsymbol{J}_0$ 的阶数等于特征值 λ_0 的代数重数 k, 于是 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{J}_0)^k=\boldsymbol{O}$. 又 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-k}-\boldsymbol{J}_1)^k$ 是主对角元全不为零的上三角阵, 从而为非异阵. 因此 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{J})^k=\mathrm{diag}\{(\lambda_0\boldsymbol{I}_k-\boldsymbol{J}_0)^k,(\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-k}-\boldsymbol{J}_1)^k\}$ 的秩为 $n-k$. 由于 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^k=\boldsymbol{P}(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{J})^k\boldsymbol{P}^{-1}$ 与 $(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{J})^k$ 相似, 故两者具有相同的秩 $n-k$. 本题的推广可参考例 7.66.

8. 用反证法, 假设存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子 λ^m 且 $m>k$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中有一个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_m(0)$ 且 $m>k$. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2\}$ 为 Jordan 标准型, 其中 $\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_m(0)$, 则由特征值 0 的 Jordan 块的性质以及 $m>k$ 可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^{k+1})+1$. 再由秩的不等式可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^k)\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^{k+1})$, 综合起来就有

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)&=\mathrm{r}((\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^k)+\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^k)\\&>\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_1^{k+1})+\mathrm{r}(\boldsymbol{J}_2^{k+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}^{k+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^{k+1}\boldsymbol{P}^{-1})=\mathrm{r}((\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^{k+1})\\&=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1}),\end{aligned}$$

这与假设矛盾. 本题的推广可参考例 7.66.

9. 本题有以下三种解法, 分别是计算行列式因子, 极小多项式和几何重数.

解法 1　采用与 § 7.3 习题 3 类似的方法可得 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^n$, 这也是 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

解法 2　显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式是 $\lambda-1$ 的某个幂次. 设 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}_n(0)$, 即特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块, 它满足 $\boldsymbol{N}^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{N}^n=\boldsymbol{O}$, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n+2\boldsymbol{N}+3\boldsymbol{N}^2+\cdots+n\boldsymbol{N}^{n-1}.$$

注意到

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)^{n-1}=(2\boldsymbol{N}+3\boldsymbol{N}^2+\cdots+n\boldsymbol{N}^{n-1})^{n-1}=2^{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1}\neq\boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不适合多项式 $(\lambda-1)^{n-1}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式只能是 $(\lambda-1)^n$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组是 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^n$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

解法 3　显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1, 我们来计算它的几何重数. 注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=n-1$, 故特征值 1 的几何重数为 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=1$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标

准型中属于特征值 1 的 Jordan 块只有一个, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(1)$.

10. 基础训练解答题 10. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $a \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_4(1)$.

(2) 当 $a = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, \boldsymbol{J}_3(1)\}$.

11. 例 7.7.

12. 例 7.8.

7.8 矩阵函数

1. 例 7.78.

2. 例 7.80.

3. 例 7.81.

4. 例 7.82.

5. 例 7.83. $\sin(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{I}}) = (\sin \mathrm{e}^c)\boldsymbol{I}$, $\cos(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{I}}) = (\cos \mathrm{e}^c)\boldsymbol{I}$.

6. 例 7.84. $|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}| = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}$.

7. 例 7.85.

8. 例 7.86. 设非异阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{A}^k$ 存在的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模长小于 1, 或者特征值等于 1 并且 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 1 的 Jordan 块都是一阶的. 此时, 极限矩阵

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中 1 的个数等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 的代数重数.

复习题七

1. 例 7.2.

2. 例 7.21.

3. 例 7.22.

4. 例 7.24.

5. 例 7.25.

6. 例 7.27.

7. 例 7.28. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于特征多项式时, $C(\boldsymbol{A}) = \mathbb{K}[\boldsymbol{A}]$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式不等于特征多项式时, $C(\boldsymbol{A}) = M_2(\mathbb{K})$.

8. 例 7.29.

9. 例 7.30.

10. 例 7.31.

11. 例 7.32.

12. 例 7.36.

13. 例 7.37.

14. 例 7.38.

15. 例 7.39.

16. 第 379 页例 6.57 的延拓.

17. 第 380 页例 6.58 的延拓.

18. 例 7.40.

19. 例 7.41.

20. 例 7.43.

21. 例 7.45.

22. 例 7.49. 答案分为以下几种情况:

(1) 当 $a+2 \neq 0$ 且 $b+4 \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\boldsymbol{J}_4(1)$.

(2) 当 $a+2=0$ 或 $b+4=0$, 且两者中只有一个成立时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{1, \boldsymbol{J}_3(1)\}$.

(3) 当 $a+2=0$ 且 $b+4=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_2(1), \boldsymbol{J}_2(1)\}$.

23. 例 7.50. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $n=2m$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(0), \boldsymbol{J}_m(0)\}$.

(2) 当 $n=2m+1$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(0), \boldsymbol{J}_{m+1}(0)\}$.

24. 例 7.51. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $n=2m$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(c), \boldsymbol{J}_m(c)\}$.

(2) 当 $n=2m+1$ 时, $\boldsymbol{J}^2$ 的 Jordan 标准型是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_m(c), \boldsymbol{J}_{m+1}(c)\}$.

25. 例 7.52.

26. 例 7.53.

27. 例 7.54. $\boldsymbol{J}^m$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(a^m)$.

28. 例 7.55. 作带余除法 $n = mq + r$, 其中 $0 \leq r < m$, 则 $\boldsymbol{J}^m$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_q(0), \cdots, \boldsymbol{J}_q(0), \boldsymbol{J}_{q+1}(0), \cdots, \boldsymbol{J}_{q+1}(0)\}$, 其中有 $m-r$ 个 $\boldsymbol{J}_q(0)$, r 个 $\boldsymbol{J}_{q+1}(0)$.

29. 例 7.56.

30. 例 7.57. 答案分为以下几种情况:

(1) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, a+1, \boldsymbol{J}_2(2)\}$.

(2) 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_2(1), 2, 2\}$.

(3) 当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, 1, 2, 2\}$.

(4) 当 $a = 1$ 且 $b \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, \boldsymbol{J}_3(2)\}$.

(5) 当 $a = 1$ 且 $b = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{1, 2, \boldsymbol{J}_2(2)\}$.

31. 例 7.64.

32. 例 7.66.

33. 例 7.67.

34. 例 7.68.

35. 例 7.69.

36. 例 7.70.

37. 例 7.72.

38. 例 7.74.

39. 例 7.75.

40. 例 7.76.

41. 例 7.77.

42. 例 7.87.

43. 例 7.90.

44. 例 7.91.

高等代数学（第四版）习题解答
第八章　二次型

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

8.1　二次型的化简与矩阵的合同

1. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行与第 j 分块行相当于左乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列与第 j 分块列相当于右乘第一类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}'$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}'$ 是合同变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于左乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列右乘非异阵 $\boldsymbol{M}'$ 相当于右乘第二类分块初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}')$. 注意到 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})' = \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}')$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{M}')$ 是合同变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 加到第 j 分块行上相当于左乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块列右乘矩阵 $\boldsymbol{M}'$ 加到第 j 分块列上相当于右乘第三类分块初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ji}(\boldsymbol{M}')$. 注意到 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})' = \boldsymbol{T}_{ji}(\boldsymbol{M}')$, 故题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ji}(\boldsymbol{M}')$ 是合同变换.

2. 例 8.1.

3. 基础训练填空题 1.

4. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 故存在非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 等式两边同时取伴随, 可得 $\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{C}')^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{C}^*)'$. 注意到 $\boldsymbol{C}^*$ 也是非异阵, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*$ 合同.

5. 例 8.5.

6. 例 8.19.
7. 例 8.20.
8. 例 8.16.
9. 例 8.17.
10. 基础训练解答题 1.

8.2　二次型的化简

1. (1) 先将含有 x_1 的项放在一起凑成完全平方再减去必要的项:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\&=\big((x_1+2x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2-4x_2x_3\big)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\&=(x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2.\end{aligned}$$

再对后面那些项配方:

$$\begin{aligned}-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2&=-\left(3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2-\frac{1}{3}x_3^2\right)+2x_3^2\\&=-3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2.\end{aligned}$$

于是

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2+\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2.$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+x_3,\\y_2=x_2+\dfrac{1}{3}x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\dfrac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

因此 $f=y_1^2-3y_2^2+\dfrac{7}{3}y_3^2$.

(2) 先作如下变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

代入原二次型得

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

这时 y_1^2 项不为零, 于是

$$\begin{aligned} f &= (y_1^2 + 2y_1y_3) - y_2^2 \\ &= \big((y_1 + y_3)^2 - y_3^2\big) - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

(3) 先将含有 x_1 的项放在一起凑成完全平方再减去必要的项:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ =& (x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ =& \big((x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3\big) + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ =& (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 6x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 4x_3^2. \end{aligned}$$

再对后面那些项配方:

$$
\begin{aligned}
& 6x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 4x_3^2 \\
=& -\left((2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - \frac{3}{2}x_2x_4\right) - 2x_2x_4 \\
=& -(2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{9}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_2x_4 \\
=& -(2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 + (\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_4)^2 + \frac{2}{9}x_4^2.
\end{aligned}
$$

于是

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4)^2 + (\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_4)^2 + \frac{2}{9}x_4^2.$$

令

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \\
y_2 = -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\
y_3 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_4, \\
y_4 = x_4,
\end{cases}
$$

则

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},
$$

因此 $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + \frac{2}{9}y_4^2$.

(4) 先作如下变换:

$$
\begin{cases}
x_1 = y_1 + y_2, \\
x_2 = y_1 - y_2, \\
x_3 = y_3 + y_4, \\
x_4 = y_3 - y_4,
\end{cases}
$$

代入原二次型得

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_1y_3 + y_1y_4 - y_2y_3 - y_2y_4.$$

这时 y_1^2 项不为零, 于是

$$\begin{aligned}
f &= (y_1^2 + y_1y_3 + y_1y_4) - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_2y_3 - y_2y_4 \\
&= \left((y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 - y_1y_3 - y_1y_4 - \frac{1}{2}y_3y_4\right) \\
&\quad - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_2y_3 - y_2y_4 \\
&= (y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - y_2^2 + \frac{3}{4}y_3^2 - \frac{5}{4}y_4^2 - y_2y_3 - y_2y_4 - \frac{1}{2}y_3y_4 \\
&= (y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - (y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 + y_3^2 - y_4^2.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}
z_1 = y_1 + \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\
z_2 = y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\
z_3 = y_3, \\
z_4 = y_4,
\end{cases}$$

则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

因此 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$.

2. (1) 记与 f 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

于是 f 可化简为

$$y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 记与 f 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

于是 f 可化简为

$$2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-2y_3^2,$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) 记与 f 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_4)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 9 & 2 & -3 & -3 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

于是 f 可化简为

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 8y_4^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 记与 f 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 写出 $(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_4)$ 并作对称初等变换:

$$(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{2} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{2} & -\dfrac{9}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 4 & -\dfrac{9}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

于是 f 可化简为

$$2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_4^2,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3\. 基础训练解答题 2. 答案为 $a = 2$, $\boldsymbol{C}$ 可取为 (选取不唯一):

$$\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8.3 惯性定理

1. 基础训练填空题 10. 答案为 $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

2. 基础训练填空题 2. 例如令 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{1,1,-1\}$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}\{-1,-1,1\}$, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 的正惯性指数不相同, 因此不合同.

3. 例 8.22.

4. 例 8.23.

5. 由例 3.76 可知, $\mathrm{r}(f)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$.

6. 例 8.35. 当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 1$ 时, f 的正惯性指数等于 n.

7. 例 8.31.

8. 例 8.37.

9. 例 8.6.

10. 例 8.10. $\boldsymbol{B}$ 的正负惯性指数都为 n.

8.4 正定型与正定矩阵

1. (1) 二次型 f 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&2&2\\-4&2&1\end{pmatrix},$$

对其进行如下合同变换:

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&10\\0&10&-15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&35\end{pmatrix}.$$

由此可得 f 是不定型.

(2) 二次型 f 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix},$$

对其进行如下合同变换:

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可得 f 是半正定型.

2. (1) 二次型 f 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = 5 > 0, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

要使 $\boldsymbol{A}$ 正定, 必须 $\lambda - 2 > 0$, 即得 $\lambda > 2$.

(2) 二次型 f 的相伴矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = 2 > 0, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2,$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2.$$

要使 $\boldsymbol{A}$ 正定, 必须 $2-\lambda^2>0$ 且 $5-3\lambda^2>0$, 即得 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<\lambda<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

3. 例 8.59.

4. 例 8.2.

5. 基础训练解答题 6.

6. 例 8.24.

7. 例 8.46 (1).

8. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆半正定阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于阶数 n, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数等于阶数 n, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵.

9. 例 8.3.

10. 基础训练解答题 12.

11. 例 8.63.

12. 例 8.64. 例如, $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{1,0,-1\}$ 的顺序主子式都非负, 但 $\boldsymbol{A}$ 不是半正定阵.

13. (1) 例 8.46 (1).

(2) 例 8.62 (1).

(3) 例 8.60.

14. 例 8.11.

8.5 Hermite 型

1. (1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行相当于左乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列相当于右乘第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$, 注意到 $\overline{\boldsymbol{P}_{ij}}'=\boldsymbol{P}_{ij}$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{ij}$ 是复相合变换.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零复数 k 相当于左乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(k)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以共轭复数 $\overline{k}$ 相当于右乘第二类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(\overline{k})$. 注意到 $\overline{\boldsymbol{P}_i(k)}'=\boldsymbol{P}_i(\overline{k})$, 故题述变换 $\boldsymbol{P}_i(k)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i(\overline{k})$ 是复相合变换.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以复数 k 加到第 j 行上相当于左乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij}(k)$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以共轭复数 $\overline{k}$ 加到第 j 列上相当于右乘第三类初等矩阵 $\boldsymbol{T}_{ji}(\overline{k})$. 注意到 $\overline{\boldsymbol{T}_{ij}(k)}'=\boldsymbol{T}_{ji}(\overline{k})$, 故题述变换 $\boldsymbol{T}_{ij}(k)\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ji}(\overline{k})$ 是复相合变换.

2. 首先我们证明: 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 则存在非异复方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的第 $(1,1)$ 元素不等于零. 不妨设 $a_{11}=0$, 若存在某个 $a_{ii}\neq 0$, 则将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第 i 行对换, 再将第一列与第 i 列对换, 根据习题 1 的结论, 得到的矩阵与原矩阵复相合,

且它的第 $(1,1)$ 元素不为零. 若所有的 $a_{ii}=0$, 则可取某个 $a_{ij}\neq 0\,(i\neq j)$. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以 a_{ij} 加到第 i 行上, 再将第 j 列乘以 $\overline{a_{ij}}$ 加到第 i 列上, 根据习题 1 的结论, 得到的矩阵与原矩阵复相合. 由 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵可知 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}\neq 0$, 于是得到矩阵的第 (i,i) 元素为 $2|a_{ij}|^2\neq 0$, 再用前面的办法使第 $(1,1)$ 元素不等于零即可.

接下去证明定理 8.5.1, 对阶数 n 进行归纳. $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶 Hermite 矩阵成立, 现考虑 n 阶的情形. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 结论显然成立, 下设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$. 由前面的讨论, 不妨设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中 $a_{11}\neq 0$ (注意 a_{11} 是实数). 若 $a_{i1}\neq 0$, 则可将第一行乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 行上, 再将第一列乘以 $-a_{11}^{-1}\overline{a_{i1}}$ 加到第 i 列上, 根据习题 1 的结论, 得到的矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 是复相合的. 由于 $\overline{a_{i1}}=a_{1i}$, 故得到矩阵的第 $(1,i)$ 元素及第 $(i,1)$ 元素均等于零. 依次这样做下去, 可把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第一列除 a_{11} 外的元素全部消去, 于是 $\boldsymbol{A}$ 复相合于下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式右下角是一个 $n-1$ 阶 Hermite 阵, 记为 $\boldsymbol{A}_1$. 因此由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶非异复方阵 $\boldsymbol{D}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{D}}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D}$ 为对角阵, 于是

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{D}}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{D}}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

是一个对角阵. 显然

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \overline{\boldsymbol{D}}' \end{pmatrix}=\overline{\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}}',$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 复相合于对角阵, 即存在非异复方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角阵. 注意到 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 仍是 Hermite 阵, 因此主对角线上的元素等于其共轭, 必为实数.

3. 由习题 2 的结论, 任意一个 Hermite 阵必复相合于一个实对角阵, 因此不妨设与 f 相伴的 Hermite 阵已是实对角阵

$$\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_p,d_{p+1},\cdots,d_r,0,\cdots,0\},$$

其中 $d_1>0,\cdots,d_p>0$ 而 $d_{p+1}<0,\cdots,d_r<0$, 即

$$f=d_1\overline{x}_1x_1+d_2\overline{x}_2x_2+\cdots+d_r\overline{x}_rx_r.$$

令

$$\begin{cases}y_1=\sqrt{d_1}x_1,\cdots,y_p=\sqrt{d_p}x_p;\\ y_{p+1}=\sqrt{-d_{p+1}}x_{p+1},\cdots,y_r=\sqrt{-d_r}x_r;\\ y_j=x_j\,(j=r+1,\cdots,n),\end{cases}$$

于是

$$f=\overline{y}_1y_1+\cdots+\overline{y}_py_p-\overline{y}_{p+1}y_{p+1}-\cdots-\overline{y}_ry_r,$$

这就是 Hermite 型的标准型.

再证 $p=k$. 用反证法, 设 $p>k$. 由条件可知

$$\overline{y}_1y_1+\cdots+\overline{y}_py_p-\overline{y}_{p+1}y_{p+1}-\cdots-\overline{y}_ry_r=\overline{z}_1z_1+\cdots+\overline{z}_kz_k-\overline{z}_{k+1}z_{k+1}-\cdots-\overline{z}_rz_r.$$

又设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z},$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$. 令

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ z_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

因为 $p > k$, 故齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{k1}y_1 + c_{k2}y_2 + \cdots + c_{kn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0 \end{cases}$$

必有非零解 (n 个未知数, $n-(p-k)$ 个方程式). 令其中一个非零解为 $y_1 = a_1, \cdots, y_p = a_p, y_{p+1} = 0, \cdots, y_n = 0$, 把这组解代入一开始的等式左边得到

$$|a_1|^2 + \cdots + |a_p|^2 > 0.$$

但这时 $z_1 = \cdots = z_k = 0$, 故等式右边将小于等于零, 引出了矛盾. 同理可证 $p < k$ 也不可能.

4. 设与 $\boldsymbol{A}$ 相伴的 Hermite 型为 $f(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(1) $\Rightarrow$ (2): 用反证法, 若 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $p < n$, 则 f 可化为如下标准型:

$$f = \overline{y}_1 y_1 + \cdots + \overline{y}_p y_p - c_{p+1}\overline{y}_{p+1}y_{p+1} - \cdots - c_n\overline{y}_n y_n,$$

其中 $c_j \geq 0\,(p+1 \leq j \leq n)$. 这时令 $b_1 = \cdots = b_p = 0, b_{p+1} = \cdots = b_n = 1$, 则 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零. 假设这时 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{C}$ 是非异阵, 则从 $y_i = b_i\,(1 \le i \le n)$ 可得 $x_i = a_i\,(1 \le i \le n)$ 是一组不全为零的复数. 于是

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \le 0,$$

这与 f 是正定 Hermite 型矛盾. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n, 即 $\boldsymbol{A}$ 复相合于 $\boldsymbol{I}_n$.

(2) $\Rightarrow$ (3): 因为 $\boldsymbol{A}$ 复相合于单位阵, 故由定义存在非异复方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 任取非零复列向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}'\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \overline{(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})}'(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) > 0,$$

这里用到 $\boldsymbol{B}$ 是非异复方阵, 从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定 Hermite 矩阵.

5. 先证必要性. 设 n 阶 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为正定阵, 则对应的 Hermite 型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i x_j$$

为正定型. 令

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\overline{x}_i x_j,$$

则对任意一组不全为零的复数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 有

$$f_k(c_1, c_2, \cdots, c_k) = f(c_1, c_2, \cdots, c_k, 0, \cdots, 0) > 0,$$

因此 f_k 是一个正定 Hermite 型, 从而它的相伴矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ (由 $\boldsymbol{A}$ 的前 k 行及前 k 列组成) 是一个正定 Hermite 矩阵. 由习题 4 可知, $\boldsymbol{A}_k$ 复相合于 $\boldsymbol{I}_k$, 故存在 k 阶非异阵 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_k,$$

于是

$$\det(\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}) = |\det(\boldsymbol{B})|^2\det(\boldsymbol{A}_k) = 1,$$

即有 $\det(\boldsymbol{A}_k) > 0\,(k = 1, 2, \cdots, n)$.

再证充分性. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数进行归纳. 当 $n = 1$ 时, $\boldsymbol{A} = (a)$, $a > 0$, 于是 $f = a|x_1|^2$ 是正定型, 从而 $\boldsymbol{A}$ 是正定 Hermite 矩阵. 设结论对 $n-1$ 阶 Hermite 矩阵成立, 现证明 n 阶的情形. 记 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可写

为
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}' & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
因为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零, 故 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的顺序主子式也全大于零, 由归纳假设, $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是正定 Hermite 矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 复相合于 $n-1$ 阶单位阵, 即存在 $n-1$ 阶非异阵 $\boldsymbol{B}$, 使得
$$\overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_{n-1}.$$
令 $\boldsymbol{C}$ 是下列分块矩阵:
$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix},$$
则
$$\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{B}}' & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \overline{\boldsymbol{B}}'\boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}'\boldsymbol{B} & a_{nn} \end{pmatrix},$$
这是一个 Hermite 矩阵, 其形式为
$$\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ \overline{c_1} & \cdots & \overline{c_{n-1}} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
用习题 1 中的第三类共轭对称初等变换可将上述矩阵化为对角阵, 这相当于对 $\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 右乘一个非异阵 $\boldsymbol{Q}$ 后, 再左乘 $\overline{\boldsymbol{Q}}'$ 得到一个对角阵, 即
$$\overline{\boldsymbol{Q}}'\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, c\}.$$
由于 $|\boldsymbol{A}| > 0$, 故 $c > 0$, 这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定 Hermite 矩阵.

复习题八

1. 例 8.12.

2. 先证必要性. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 为 LU 分解, 其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{L}_2\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2$ 分别为主对角元全为 1 的 $k,n-k$ 阶下三角阵, $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 分别为 $k,n-k$ 阶非异上三角阵, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}_2\end{pmatrix}.$$

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}_1|=|\boldsymbol{U}_1|\neq 0\,(1\leq k\leq n)$.

再证充分性 (LU 分解的存在性) 以及 LU 分解的唯一性. 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时, 设 $\boldsymbol{A}=(a)$, 其中 $a\neq 0$, 则 $\boldsymbol{L}=(1)$, $\boldsymbol{U}=(a)$, 即 LU 分解存在且唯一. 假设结论对 $n-1$ 阶非异阵成立, 现证明 n 阶的情形. 设 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 $n-1$ 阶顺序主子阵, 则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & a_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $n-1$ 维列向量. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式不等于零, 故 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的 $n-1$ 个顺序主子式也不等于零, 由归纳假设可知, $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 存在唯一的 LU 分解 $\boldsymbol{A}_{n-1}=\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{U}_{n-1}$, 其中 $\boldsymbol{L}_{n-1}$ 是主对角元全为 1 的 $n-1$ 阶下三角阵, $\boldsymbol{U}_{n-1}$ 是 $n-1$ 阶非异上三角阵. 令

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{y}' & 1\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{n-1} & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{O} & z\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是待定的 $n-1$ 维列向量, z 是待定元, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$. 经计算可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & a_{nn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{U}_{n-1} & \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}'\boldsymbol{U}_{n-1} & \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}+z\end{pmatrix},$$

由此可唯一地解出 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{U}_{n-1}^{-1}$, $z=a_{nn}-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{U}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=a_{nn}-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{A}_{n-1}|$. 因此, n 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LU 分解也是存在且唯一的.

3. 例 8.13.

4. 例 8.14.

5. 例 8.15.

6. 例 8.7.

7. 例 8.8. $\boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ 的正惯性指数等于 $n-1$, 负惯性指数等于 1.

8. 例 8.9. 答案分为以下几种情况:

(1) 当 $(-1)^n|\boldsymbol{A}| > 0$ 时, $p(\boldsymbol{A}) = 2$, $q(\boldsymbol{A}) = n-2$.

(2) 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时, $p(\boldsymbol{A}) = 1$, $q(\boldsymbol{A}) = n-2$.

(3) 当 $(-1)^n|\boldsymbol{A}| < 0$ 时, $p(\boldsymbol{A}) = 1$, $q(\boldsymbol{A}) = n-1$.

9. 例 8.21.

10. 例 8.27.

11. 例 8.28.

12. 例 8.29.

13. 例 8.30.

14. 例 8.32. 答案分为以下两种情况:

(1) 当 $n = 2k$ 时, f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$.

(2) 当 $n = 2k+1$ 时, f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$.

15. 例 8.33. f 的规范标准型为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.

16. 例 8.34. f 的标准型为 $2z_1^2 + \dfrac{3}{2}z_2^2 + \cdots + \dfrac{n}{n-1}z_{n-1}^2$.

17. 例 8.36. f 的正惯性指数为 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 负惯性指数为 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

18. 例 8.38.

19. 例 8.39.

20. 例 8.40.

21. (1) 例 8.42 (1). f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$.

(2) 例 8.42 (2). f 的规范标准型为 $y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$.

22. 例 8.43.

23. 例 8.44.

24. 例 8.45.

25. 例 8.46 (3).

26. 例 8.47.

27. 例 8.48 (1).

28. 例 8.49.

29. 例 8.50.

30. 例 8.51.
31. 例 8.52.
32. 例 8.53.
33. 例 8.54.
34. 例 8.55.

高等代数学（第四版）习题解答
第九章　内积空间

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版):　谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

9.1　内积空间的概念

1. 例 9.2 (1).

2. 例 9.2 (2).

3. 直接按照内积的定义验证即可. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ 以及任一常数 c, 有

(1) $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})_1 + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})_2 = \overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1} + \overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2} = \overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1 + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2} = \overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_1 + (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_2 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})_1 + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_1 + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})_2 + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})_2 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1 + c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2 = (c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1 + (c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2 = (c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_1 + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_2 \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_1 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})_2 = 0$, 这也当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

因此 $(-,-)$ 是 V 上的内积.

4. 显然, 标准单位行向量 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 任一行向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 均可表示为基向量的线性组合 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$. 由 $\mathbb{R}^n$ 标准内积的定义可得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i) = a_i\,(1\leq i\leq n)$, 于是

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n.$$

5. 例 9.10.

6. 基础训练解答题 1.

7. 例 9.8.

8. (1) 例 9.1 (7).

(2) 例 9.1 (8).

9.2 内积的表示和正交基

1. (1) 令

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1=(1,1,1),\\
&\boldsymbol{v}_2=(1,1,0)-\frac{(1\cdot 1+1\cdot 1+0)}{3}(1,1,1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),\\
&\boldsymbol{v}_3=(1,0,0)-\frac{(1\cdot 1+0+0)}{3}(1,1,1)-\frac{(1\cdot\dfrac{1}{3}+0+0)}{\dfrac{2}{3}}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),
\end{aligned}
$$

再令

$$
\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\quad \boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),\quad \boldsymbol{w}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),
$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ 是 V 的一组标准正交基.

(2) 令

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1=(1,2,2,-1),\\
&\boldsymbol{v}_2=(1,1,-5,3)-\frac{(1\cdot 1+1\cdot 2+(-5)\cdot 2+3\cdot(-1))}{10}(1,2,2,-1)=(2,3,-3,2),\\
&\boldsymbol{v}_3=(3,2,8,-7)-\frac{(3\cdot 1+2\cdot 2+8\cdot 2+(-7)\cdot(-1))}{10}(1,2,2,-1)\\
&\qquad -\frac{(3\cdot 2+2\cdot 3+8\cdot(-3)+(-7)\cdot 2)}{26}(2,3,-3,2)=(2,-1,-1,-2),
\end{aligned}
$$

再令

$$
\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1),\quad \boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\sqrt{26}}(2,3,-3,2),\quad \boldsymbol{w}_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2),
$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ 是 V 的一组标准正交基.

(3) 令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (1,1,-1,-2),\\
\boldsymbol{v}_2 &= (5,8,-2,-3) - \frac{(5\cdot 1+8\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2))}{7}(1,1,-1,-2)\\
&= (2,5,1,3),\\
\boldsymbol{v}_3 &= (3,9,3,8) - \frac{(3\cdot 1+9\cdot 1+3\cdot(-1)+8\cdot(-2))}{7}(1,1,-1,-2)\\
&\quad - \frac{(3\cdot 2+9\cdot 5+3\cdot 1+8\cdot 3)}{39}(2,5,1,3) = (0,0,0,0),
\end{aligned}$$

再令

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,-1,-2), \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(2,5,1,3),$$

则 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ 是 V 的一组标准正交基.

2. 基础训练解答题 2.

3. 记 $W = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$. 注意到 $\boldsymbol{u}_i \in U\,(1 \le i \le m)$, 故由正交补空间的定义可知 $U^\perp \subseteq W$. 另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{w} \in W$ 以及任意的 $\boldsymbol{u} \in U$, 若设

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{u}_m,$$

则有

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = k_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}) + k_2(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}) + \cdots + k_m(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}) = 0,$$

于是 $\boldsymbol{w} \in U^\perp$, 从而 $W \subseteq U^\perp$. 因此 $U^\perp = W$, 结论得证.

4. 例 9.18.

5. 例 9.19.

6. 记题述线性方程组为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 求解可得 U 的一组基为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -6\\ 9\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)$, 则由例 9.20 可知, $U^\perp$ 适合的线性方程组为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

7. 例 9.22.

8. 例 9.7.

9. 例 9.15.

10. 例 9.5 (2).

11. 例 9.16.

12. 例 9.17.

13. 例 9.11.

9.3 伴随

1. 由条件可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 在同一组标准正交基下的表示矩阵为其共轭转置, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\varphi}^*(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -\mathrm{i}x_1 - x_2)$.

2. 例 9.27.

3. 例 9.23 (5). 有限维内积空间中, 线性自同构等价于可逆线性变换.

4. 基础训练解答题 5. $\boldsymbol{\varphi}$ 的表示矩阵为 $\boldsymbol{E}_{21}$, 即是第 $(1,2)$ 元素为 1, 其余元素为零的基础矩阵, $\boldsymbol{\varphi}^*$ 的表示矩阵为 $\boldsymbol{E}_{12}$.

5. 基础训练填空题 17 或例 9.29 (1). $\boldsymbol{\varphi}$ 的伴随 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{B}$.

6. 由伴随的定义可知 $(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{x}))$, 将 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{x}) = \lambda_2\boldsymbol{x}$ 代入可得 $(\lambda_1\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda_2\boldsymbol{x})$, 从而 $(\lambda_1 - \overline{\lambda_2})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. 由于特征向量 $\boldsymbol{x}$ 是非零向量, 故 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$, 于是必有 $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

7. 例 9.25.

8. 因为 U 既是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不变子空间, 又是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 的不变子空间, 所以限制变换 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^*|_U$ 都是有意义的. 由限制变换的定义可知, 对任意的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, 有

$$(\boldsymbol{\varphi}|_U(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}^*|_U(\boldsymbol{v})),$$

因此由伴随的唯一性可得 $(\boldsymbol{\varphi}|_U)^* = \boldsymbol{\varphi}^*|_U$.

9.4 内积空间的同构, 正交变换和酉变换

1. 设 φ_1, φ_2 是两个正交 (酉) 变换, 则它们非异且 $\varphi_1^* = \varphi_1^{-1}$, $\varphi_2^* = \varphi_2^{-1}$, 于是 $\varphi_1\varphi_2$ 也非异且

$$(\varphi_1\varphi_2)^* = \varphi_2^*\varphi_1^* = \varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1} = (\varphi_1\varphi_2)^{-1}.$$

因此, 正交 (酉) 变换的积是正交 (酉) 变换. 注意到

$$(\varphi_1^{-1})^* = (\varphi_1^*)^{-1} = (\varphi_1^{-1})^{-1},$$

故正交 (酉) 变换的逆是正交 (酉) 变换. 因为正交 (酉) 变换在一组标准正交基下的表示矩阵为正交 (酉) 矩阵, 故由线性变换与表示矩阵之间的一一对应关系可得, 正交 (酉) 矩阵的积是正交 (酉) 矩阵, 正交 (酉) 矩阵的逆是正交 (酉) 矩阵.

2. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是二阶正交矩阵, 由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_2$ 可得如下关系式:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ ab + cd = 0, \\ b^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

由第一个关系式可设 $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, 由第二个关系式可设 $b = -k\sin\theta$, $d = k\cos\theta$, 将上述表达式代入第三个表达式可得 $1 = k^2\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta = k^2$, 于是 $k = \pm 1$. 当 $|\boldsymbol{A}| = k = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

当 $|\boldsymbol{A}| = k = -1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是上三角正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I}_n$, 即 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$. 注意到 $\boldsymbol{A}'$ 是下三角阵, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是上三角阵, 故 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$ 是对角阵, 从而 $\boldsymbol{A}$ 也是对角阵. 再由

$\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^2$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素为 1 或 -1. 同理可证下三角正交矩阵的情形.

若非异阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个满足条件的 QR 分解: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{R}_2$, 其中 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 是正交 (酉) 矩阵, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ 是主对角线上元素均大于零的上三角阵. 注意到 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^{-1}$, 等式左边为正交阵之积, 也为正交阵, 等式右边为主对角线上元素均大于零的上三角阵, 故由已证结论, $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^{-1}$ 必为主对角元素全为 1 的对角阵, 即单位阵. 于是 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_2$, 这就证明了非异阵 QR 分解的唯一性.

4. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列分块. 通过 Gram-Schmidt 方法得到的向量为 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$, 这里 $\boldsymbol{w}_k$ 或者是零向量或者是单位向量.

(1) 采用与高代教材的定理 9.4.8 证明中相同的记号, 经计算可得:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (3,0,4)', \quad \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{5}(3,0,4)';\\
&\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - 5\boldsymbol{w}_1 = (-4,0,3)', \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{5}(-4,0,3)';\\
&\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - 10\boldsymbol{w}_1 - 5\boldsymbol{w}_2 = (0,9,0)', \quad \boldsymbol{w}_3 = (0,1,0)',
\end{aligned}
$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.
$$

(2) 采用与高代教材的定理 9.4.8 证明中相同的记号, 经计算可得:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1,0,1,0)', \quad \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)';\\
&\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_1 = (0,1,0,1)', \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)';\\
&\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_1 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_2 = (-1,0,1,0)', \quad \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)';\\
&\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_4 - 3\sqrt{2}\boldsymbol{w}_1 - 2\sqrt{2}\boldsymbol{w}_2 - \sqrt{2}\boldsymbol{w}_3 = (0,-1,0,1)', \quad \boldsymbol{w}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)',
\end{aligned}
$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

(3) 采用与高代教材的定理 9.4.8 证明中相同的记号, 经计算可得:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1=(1,1,1,1)',\quad \boldsymbol{w}_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)';\\ &\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{w}_1=(1,-1,-1,1)',\quad \boldsymbol{w}_2=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)';\\ &\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{u}_3-2\boldsymbol{w}_1-2\boldsymbol{w}_2=(2,-2,2,-2)',\quad \boldsymbol{w}_3=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)';\\ &\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{u}_4-6\boldsymbol{w}_1-4\boldsymbol{w}_2-4\boldsymbol{w}_3=(0,0,0,0)',\quad \boldsymbol{w}_4=(0,0,0,0)',\end{aligned}$$

用 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_4=\dfrac{1}{2}(1,1,-1,-1)'$ 代替 $\boldsymbol{w}_4$ 可得 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. 因为正交阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行列式值为 1 或 -1, 且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 故 $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|$ 中一个为 1, 一个为 -1, 于是

$$\begin{aligned}-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{A}'||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}'|=|\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}'|=|\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}'|\\ &=|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,\end{aligned}$$

因此 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$. 本题也可以参考例 9.119. 由条件可知 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 为奇数, 因此不为 0, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})<n$, 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

6. 基础训练解答题 9.
7. 例 9.35.
8. 例 9.38.
9. 例 9.40.
10. 例 9.41.
11. 例 9.42.
12. 例 9.43.

9.5 自伴随算子

1. (1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-10)(\lambda-1)^2,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 当 $\lambda = 10$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, -2, 2)'.$$

当 $\lambda = 1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (有两个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (-2, 1, 0)', \quad \boldsymbol{\eta}_3 = (2, 0, 1)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要对上面两个向量正交化, 用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (-2, 1, 0)', \quad \boldsymbol{\xi}_3 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 化为单位向量得到

$$\boldsymbol{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)', \quad \boldsymbol{v}_3 = (\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3})'.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-4)\lambda,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=9$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=0$. 当 $\lambda=9$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1)'.$$

当 $\lambda=4$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0)'.$$

当 $\lambda=0$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_3=(-1,1,2)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面三个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})',\quad \boldsymbol{v}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)',\quad \boldsymbol{v}_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})'.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(3) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&3&-3&3\\3&\lambda+1&3&-3\\-3&3&\lambda+1&3\\3&-3&3&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+4)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-4$. 当 $\lambda=8$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1,-1)'.$$

当 $\lambda=-4$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (有三个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,1,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_4=(1,0,0,1)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要对上面三个向量正交化, 用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, $\boldsymbol{\eta}_4$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0)',\quad \boldsymbol{\xi}_4=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 化为单位向量得到

$$\boldsymbol{v}_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})',\quad \boldsymbol{v}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)',$$
$$\boldsymbol{v}_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)',\quad \boldsymbol{v}_4=(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2})'.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

(4) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda-3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=4$. 当 $\lambda=1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,0,1)'.$$

当 $\lambda=4$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (有三个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_3=(0,0,1,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_4=(-1,0,0,1)'.$$

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要对上面三个向量正交化, 用 Gram-Schmidt 方法将 $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, $\boldsymbol{\eta}_4$ 正交化得到

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 1, 0, 0)', \quad \boldsymbol{\xi}_3 = (0, 0, 1, 0)', \quad \boldsymbol{\xi}_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)'.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$ 化为单位向量得到

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)', \\
&\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 0)', \quad \boldsymbol{v}_4 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}})'.
\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 - 2\mathrm{i} \\ -2 + 2\mathrm{i} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. 当 $\lambda = -1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -1 + \mathrm{i})'.$$

当 $\lambda = 5$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向

量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (1 + \mathrm{i}, 1)'.$$

由于 Hermite 矩阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面两个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3}})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (\frac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

于是

$$\overline{\boldsymbol{P}}' \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2) 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 + \mathrm{i} \\ -2 - \mathrm{i} & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda - 2),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$. 当 $\lambda = 8$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 2 + \mathrm{i})'.$$

当 $\lambda = 2$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (-2 + \mathrm{i}, 1)'.$$

由于 Hermite 矩阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面两个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2 + \mathrm{i}}{\sqrt{6}})', \quad \boldsymbol{v}_2 = (\frac{-2 + \mathrm{i}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})'.$$

令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{2+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$
于是
$$\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

3. 基础训练解答题 10. 答案为 $a=0$ 且
$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

4. (1) 基础训练解答题 11 (1). 答案为: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征值 0 的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)'$ 是特征值 3 的特征向量.

(2) 基础训练解答题 11 (2). 答案为
$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

5. 例 9.50. 答案为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

6. 例 9.49. 答案分为以下两种情况:

(1) $a=2,\ b=-2,\ c=10$. 此时正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) $a=-2,\ b=2,\ c=10$. 此时正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

7. 例 9.48. 答案为 $a=3,\ b=1$, 正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

8. (1) 由条件 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^*,\ \boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}^*$ 可得如下等式:

$$(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi})^*=\boldsymbol{\varphi}^*+\boldsymbol{\psi}^*=\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}.$$
$$(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})^*=(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})^*+(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})^*=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\varphi}^*+\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\psi}^*=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}.$$
$$(\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}))^*=-\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})^*=-\mathrm{i}(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})=\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}).$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi},\ \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi},\ \mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi})$ 都是自伴随算子.

(2) 先证充分性. 此时, $(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})^*=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$ 是自伴随算子. 再证必要性, 此时 $(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})^*=\boldsymbol{\psi}^*\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 $\boldsymbol{\psi}$ 乘法可交换.

9. 基础训练选择题 20. $\boldsymbol{\varphi}$ 是自伴随算子的充要条件是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$.

10. 例 9.123.

9.6 复正规算子

1. 比如 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

2. 例 9.101.

3. 经计算, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1-\mathrm{i})(\lambda-1+\mathrm{i}),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+\mathrm{i}$, $\lambda_2=1-\mathrm{i}$. 当 $\lambda=1+\mathrm{i}$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1)'.$$

当 $\lambda=1-\mathrm{i}$ 时, 求解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得到基础解系 (只有一个向量):

$$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,1)'.$$

由于复正规矩阵属于不同特征值的特征向量必正交, 因此只要将上面两个向量化为单位向量即可:

$$\boldsymbol{v}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})',\quad \boldsymbol{v}_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

于是

$$\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 0\\ 0 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

4. 先证必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵, 则由高代教材的推论 9.5.1 可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数. 再证充分性. 若复正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数, 则由高代教材的定理 9.6.3 可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为实对角阵. 因此

$$\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\overline{\boldsymbol{\Lambda}}'=\overline{\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}'=\overline{\boldsymbol{P}}'\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{P},$$

从而 $\overline{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵.

5. 先证必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵, 则由高代教材的定理 9.4.7 可知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为模长等于 1 的复数. 再证充分性. 若复正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为模长等于 1 的复数, 则由高代教材的定理 9.6.3 可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\varLambda}$ 为对角阵且主对角元全为模长等于 1 的复数. 容易验证 $\boldsymbol{\varLambda}\overline{\boldsymbol{\varLambda}}' = \boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{\varLambda}$ 是酉矩阵, 因此 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\varLambda}\overline{\boldsymbol{P}}'$ 是三个酉矩阵的乘积, 仍为酉矩阵.

6. 充分性显然成立, 下证必要性. 由 § 6.1 习题 9 可知, 幂零阵的特征值全为零. 若复正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵, 则由高代教材的定理 9.6.3 可知, 存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\varLambda}$ 为对角阵且主对角元全为零, 即 $\boldsymbol{\varLambda} = \boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

7. 例 9.93.

8. 例 9.97.

9.7 实正规矩阵

1. 例 9.108.
2. 例 9.109.
3. 基础训练解答题 18.
4. 例 9.121.
5. 例 9.87.
6. 例 9.89.
7. 例 9.90.
8. 例 9.125.

9.8 谱分解与极分解

1. 例 9.94.
2. 例 9.96.
3. 基础训练解答题 20.
4. 基础训练解答题 22.
5. 基础训练解答题 23.
6. 基础训练解答题 24.
7. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}125 & -75\\ -75 & 125\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}50 & 0\\ 0 & 200\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. 令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}5\sqrt{2} & 0\\ 0 & 10\sqrt{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}\dfrac{15}{\sqrt{2}} & -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{5}{\sqrt{2}} & \dfrac{15}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{pmatrix}11 & -5\\ -2 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{15}{\sqrt{2}} & -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{5}{\sqrt{2}} & \dfrac{15}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{7}{5\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{5\sqrt{2}} & \dfrac{7}{5\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

(2) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. 令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

(3) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}416 & 160 & 0\\ 160 & 416 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 256 & 0\\ 0 & 0 & 576\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. 令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 24\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}20 & 4 & 0\\ 4 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正定阵且 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^2$. 再令

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 20 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}$ 即为所求的极分解.

9.9 奇异值分解

1. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 2 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 令

$$\sigma_1 = \sqrt{6}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

添加单位向量

$$\boldsymbol{\beta}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})'$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})',$$

使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 成为 $\mathbb{R}_3$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,

于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

(2) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 2 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 令

$$\sigma_1=\sqrt{5},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}})',$$
$$\sigma_2=1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)'.$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})'$ 与 $\boldsymbol{\beta}_4=(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})'$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 成为 $\mathbb{R}_4$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}}\\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

(3) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&6&0\\2&0&4\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 3 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令

$$\begin{aligned}
\sigma_1=\sqrt{6},\quad \boldsymbol{\beta}_1&=\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})',\\
\sigma_2=\sqrt{6},\quad \boldsymbol{\beta}_2&=\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})',\\
\sigma_3=\sqrt{2},\quad \boldsymbol{\beta}_3&=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,0,0)'.
\end{aligned}$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_4=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})'$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 成为 $\mathbb{R}_4$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&-1&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}&0&0\\0&\sqrt{6}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

2. 记题述矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 先求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解, 再求极分解.

(1) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\4&8\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}&-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\\dfrac{2}{\sqrt{5}}&\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 2 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 令

$$\sigma_1=\sqrt{10},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_2=(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 成为 $\mathbb{R}_2$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{10}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}&\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\-\dfrac{2}{\sqrt{5}}&\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的极分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{10}}&\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{10}}&\dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{10}}&\dfrac{4}{\sqrt{10}}\\\dfrac{4}{\sqrt{10}}&\dfrac{8}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}.$$

(2) 经计算可得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12&-4&-4&-4\\-4&12&-4&-4\\-4&-4&12&-4\\-4&-4&-4&12\end{pmatrix}.$$

可求得其正交相似标准型 $\boldsymbol{B}$ 和过渡矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 分别为:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}16&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&16&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. 设 $\boldsymbol{Q}$ 的 4 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$, 令

$$\begin{aligned}\sigma_1=4,\quad \boldsymbol{\beta}_1&=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)',\\ \sigma_2=4,\quad \boldsymbol{\beta}_2&=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0)',\\ \sigma_3=4,\quad \boldsymbol{\beta}_3&=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{3}}{2})'.\end{aligned}$$

添加单位向量 $\boldsymbol{\beta}_4=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$, 使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 成为 $\mathbb{R}_4$ 的一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的极分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

9.10 最小二乘解

1. 基础训练解答题 25.

复习题九

1. 例 9.3.

2. 例 9.4.

3. 例 9.6.

4. 例 9.9.

5. 例 9.14.

6. 例 9.20. 取 U 的一组基为 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 这里 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})$ 为 $n\times(n-r)$ 实矩阵, 则 $U^{\perp}$ 适合的线性方程组为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

7. 例 9.21.

8. 例 9.29. $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}'$.

9. 例 9.30. 记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 n 阶基础矩阵, 则下列矩阵构成了 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基:

$$\boldsymbol{E}_{ii}\,(1\leq i\leq n);\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji})\,(1\leq i<j\leq n).$$

10. 例 9.32.

11. 例 9.33.

12. 例 9.37. $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的极大无关组. 经 Gram-Schmidt 正交化方法从 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 得到的正交标准向量组 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_4\}$ 之间的

线性关系为

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P},$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&6&8\\0&\sqrt{30}&\sqrt{30}\\0&0&\sqrt{6}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

13. 例 9.39.
14. 例 9.44.
15. 例 9.45.
16. 例 9.46.
17. 例 9.47.
18. 例 9.51. 答案为: 取 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&0&1&0\\0&-\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准型

$$-12y_1^2+4y_2^2-6y_3^2-6y_4^2.$$

19. 例 9.52.
20. 例 9.53.
21. 例 9.54.
22. 例 9.55.
23. 例 9.59.
24. 例 9.60.
25. 例 9.61.
26. 例 9.62.

27. 例 9.63.
28. 例 9.64.
29. 例 9.65.
30. 例 9.66.
31. 例 9.67.
32. 例 9.68.
33. 例 9.69.
34. 例 9.70.
35. 例 9.71.
36. 例 9.72.
37. 例 9.73.
38. 例 9.75.
39. 例 9.76.
40. 例 9.77.
41. 例 9.78.
42. 例 9.79.
43. 例 9.80.
44. 例 9.81.
45. 例 9.82.
46. 例 9.84.
47. 例 9.86.
48. 例 9.100.
49. 例 9.105.
50. 例 9.106.
51. 例 9.107.
52. 例 9.110.
53. 例 9.112.
54. 例 9.114.
55. 例 9.115.
56. 例 9.117.
57. 例 9.118.
58. 例 9.119.
59. 例 9.122.

60. 例 9.128.

高等代数学（第四版）习题解答
第十章　双线性型

注　部分习题答案引用自**高代白皮书 (第四版)** 的例题和训练题.

高代白皮书 (第四版): 谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

10.1　对偶空间

1. 基础训练填空题 4. 这两组基的对偶基之间的过渡矩阵为 $(\boldsymbol{P}')^{-1}$.

2. 例 10.5.

3. 例 10.6.

4. 例 10.7.

5. 首先证明 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{\psi}^*$. 必要性显然成立, 下证充分性. 令 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}$, 则 $\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{0}$, 只要证明 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{0}$ 即可. 用反证法, 假设 $\boldsymbol{\tau} \neq \boldsymbol{0}$, 则存在 $\boldsymbol{v} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$. 将 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})$ 扩张成 U 的一组基 $\{\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, 并设这组基的对偶基为 $\{\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_2^*, \cdots, \boldsymbol{u}_m^*\}$. 由于 $\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{0}$, 故 $\langle \boldsymbol{\tau}^*(\boldsymbol{u}_1^*), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. 但由对偶映射的定义, 上式也等于 $\langle \boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 1$, 这就导出了矛盾. 若利用习题 6 的结论, 则证明更加简单. 由 $\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{\psi}^*$ 可推出 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^* = (\boldsymbol{\psi}^*)^*$, 于是 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$.

其次证明推论 10.1.1 (4) 中的: $\boldsymbol{\varphi}$ 是单映射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为满映射. 对于必要性, 由复习题四的第 3 题可知存在线性映射 $\boldsymbol{\psi} : U \to V$, 使得 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{I}_V$, 两边同时取对偶映射可得 $\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{I}_{V^*}$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是满映射. 对于充分性, 有以下三种证法:

证法 1　记 $\boldsymbol{i}:\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}\to V$ 为恒等映射诱导的嵌入, 则

$$\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{i}:\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}\to V\to U$$

为零线性映射, 于是两边同时取对偶映射, 可得

$$\boldsymbol{i}^*\circ\boldsymbol{\varphi}^*:U^*\to V^*\to(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi})^*$$

为零线性映射. 因为 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为满射, 故 $\boldsymbol{i}^*=\boldsymbol{0}^*:V^*\to(\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi})^*$, 于是由第一个结论可得 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$, 从而 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=0$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 是单映射.

证法 2　用反证法, 假设 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是单映射, 则存在非零向量 $\boldsymbol{v}\in V$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$. 将 $\boldsymbol{v}$ 扩张成 V 的一组基 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$, 并设其对偶基为 $\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\cdots,\boldsymbol{v}_n^*$. 因为 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是满映射, 故存在 $\boldsymbol{g}\in U^*$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{g})=\boldsymbol{v}_1^*$, 从而 $\langle\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{g}),\boldsymbol{v}_1\rangle=\langle\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_1\rangle=1$. 另一方面, 上式也等于 $\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_1)\rangle=\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{0}\rangle=0$, 矛盾.

证法 3　由复习题四的第 3 题可知, 存在线性映射 $\boldsymbol{\eta}:V^*\to U^*$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^*\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{I}_{V^*}$, 两边同时取对偶映射可得 $\boldsymbol{\eta}^*(\boldsymbol{\varphi}^*)^*=\boldsymbol{I}_{V^{**}}$. 由习题 6 的结论可知 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^*=\boldsymbol{\varphi}$, 因此 $\boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{I}_V$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 是单映射.

最后证明推论 10.1.1 (4) 中的: $\boldsymbol{\varphi}$ 是满映射的充分必要条件是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为单映射. 对于必要性, 由复习题四的第 3 题可知存在线性映射 $\boldsymbol{\eta}:U\to V$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{I}_U$. 两边同时取对偶映射可得 $\boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\varphi}^*=\boldsymbol{I}_{U^*}$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是单映射. 对于充分性, 有以下三种证法:

证法 1　记 $\boldsymbol{\pi}:U\to U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}+\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$ 为商空间诱导的自然线性映射, 则

$$\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{\varphi}:V\to U\to U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$$

为零线性映射. 两边同时取对偶映射, 可得

$$\boldsymbol{\varphi}^*\circ\boldsymbol{\pi}^*:(U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi})^*\to U^*\to V^*$$

为零线性映射. 因为 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 为单映射, 故 $\boldsymbol{\pi}^*=\boldsymbol{0}^*:(U/\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi})^*\to U^*$, 于是由第一个结论可得 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{0}$, 从而 $U=\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 为满映射.

证法 2　用反证法, 假设 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是满映射, 即 $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}\neq U$, 则可取 $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$ 的一组基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$, 并扩张为 U 的一组基 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_m$, 其中 $r<m$. 设这组基的对偶基为 $\boldsymbol{u}_1^*,\boldsymbol{u}_2^*,\cdots,\boldsymbol{u}_m^*$, 则对任意的 $\boldsymbol{v}\in V$, 注意到 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})$ 是 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$ 的线性组合, 故有 $\langle\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}_m^*),\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u}_m^*,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})\rangle=0$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{u}_m^*)=\boldsymbol{0}$, 这与 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 是单

映射矛盾.

证法 3　由复习题四的第 3 题可知存在线性映射 $\boldsymbol{\psi}: V^* \to U^*$, 使得 $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{I}_{U^*}$, 两边同时取对偶映射可得 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^*\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{I}_{U^{**}}$. 由习题 6 的结论可知 $(\boldsymbol{\varphi}^*)^* = \boldsymbol{\varphi}$, 因此 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}^* = \boldsymbol{I}_U$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 是满映射.

6. 例 10.11.

10.2　双线性型

1. 先证 g_1+g_2 是 U 和 V 上的双线性型. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$, $\boldsymbol{z}\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= g_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ &= g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ &= (g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(g_1+g_2)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\\ (g_1+g_2)(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) &= g_1(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_2(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &= kg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+kg_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &= k(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$, $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in V$, $k\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) &= g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w})\\ &= g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\\ &= (g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}),\\ (g_1+g_2)(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{z}) &= g_1(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{z})+g_2(\boldsymbol{x},k\boldsymbol{z})\\ &= kg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+kg_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &= k(g_1+g_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

因此 g_1+g_2 是 U 和 V 上的双线性型.

再证 kg_1 是 U 和 V 上的双线性型. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$, $\boldsymbol{z}\in V$,

$t \in \mathbb{K}$, 有

$$(kg_1)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = k(g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = (kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(kg_1)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$
$$(kg_1)(t\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = ktg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = t(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).$$

另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w} \in V$, $t \in \mathbb{K}$, 有

$$(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) = k(g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})) = (kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$$
$$(kg_1)(\boldsymbol{x},t\boldsymbol{z}) = ktg_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = t(kg_1)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).$$

因此 kg_1 是 U 和 V 上的双线性型.

容易验证上述加法和数乘运算满足线性空间的 8 条公理, 于是 U 和 V 上的双线性型全体构成了 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 记之为 G. 设 U 的一组基为 $\{\boldsymbol{u}_i, 1 \le i \le m\}$, V 的一组基为 $\{\boldsymbol{v}_j, 1 \le j \le n\}$, 下证

$$\{g_{ij} \in G \,|\, g_{ij}(\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_q) = \delta_{ip}\delta_{jq},\ 1 \le i,p \le m, 1 \le j,q \le n\}$$

构成 G 的一组基. 先证 $\{g_{ij}\}$ 线性无关. 若存在 $a_{ij} \in \mathbb{K}$, 使得

$$\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} a_{ij}g_{ij} = 0,$$

则对任意的 $1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$ 有

$$\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} a_{ij}g_{ij}(\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_q) = a_{pq} = 0.$$

再证任一 $g \in G$ 可表示为 $\{g_{ij}\}$ 的线性组合. 任取 $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{u}_m \in U$, $\boldsymbol{v} = t_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+t_m\boldsymbol{v}_m \in V$, 有

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = g(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{u}_i, \sum_{j=1}^n t_j\boldsymbol{v}_j) = \sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} g(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)k_it_j$$
$$= \sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} g(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j)g_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),$$

因此

$$g = \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} g(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j) g_{ij}$$

可表示为 $\{g_{ij}\,(1\le i\le m, 1\le j\le n)\}$ 的线性组合. 特别地, G 的维数为 mn.

2. 任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in U$, $k\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, -) = g(\boldsymbol{x}, -) + g(\boldsymbol{y}, -) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{x}) &= g(k\boldsymbol{x}, -) = kg(\boldsymbol{x}, -) = k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 是线性映射. 由定义可得

$$\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{x}\in U \mid \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}, -) = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x}\in U \mid g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ \forall\, \boldsymbol{y}\in V\} = L.$$

3. 例 10.13.

4. 例 10.14.

5. 首先证明 $S^\perp$ 是 V 的子空间. 任取 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\in S^\perp$, $k\in\mathbb{K}$, 有 $g(S, \boldsymbol{v}_1) = g(S, \boldsymbol{v}_2) = 0$. 设 $\boldsymbol{s}$ 是 S 中任一元素, 则

$$g(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = g(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}_1) + g(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}_2) = 0,\quad g(\boldsymbol{s}, k\boldsymbol{v}_1) = kg(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}_1) = 0,$$

于是 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\in S^\perp$, $k\boldsymbol{v}_1\in S^\perp$, 这就证明了 $S^\perp$ 是 V 的子空间.

然后证明 $T^\perp$ 是 U 的子空间. 任取 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in T^\perp$, $k\in\mathbb{K}$, 有 $g(\boldsymbol{u}_1, T) = g(\boldsymbol{u}_2, T) = 0$. 设 $\boldsymbol{t}$ 是 T 中任一元素, 则

$$g(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{t}) = g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{t}) + g(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{t}) = 0,\quad g(k\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{t}) = kg(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{t}) = 0,$$

于是 $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2\in T^\perp$, $k\boldsymbol{u}_1\in T^\perp$, 这就证明了 $T^\perp$ 是 U 的子空间.

6. § 10.1 习题 2 可以推广为: 设 g 是 U 和 V 上的非退化双线性型, S_1, S_2 是 U 的两个子空间, T_1, T_2 是 V 的两个子空间, 定义

$$S_i^\perp = \{\boldsymbol{v}\in V \,|\, g(S_i, \boldsymbol{v}) = 0\},\quad T_i^\perp = \{\boldsymbol{u}\in U \,|\, g(\boldsymbol{u}, T_i) = 0\},\ i = 1, 2,$$

则 $S_1^\perp\cap S_2^\perp = (S_1+S_2)^\perp$, $T_1^\perp\cap T_2^\perp = (T_1+T_2)^\perp$.

§ 10.1 习题 3 可以推广为: 设 U, V 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, g 是 U 和 V 上的非退化双线性型, S 是 U 的子空间, T 是 V 的子空间, $S^\perp$ 和 $T^\perp$ 定义同上,

则

$$\dim U = \dim S + \dim S^{\perp} = \dim V = \dim T + \dim T^{\perp}.$$

§ 10.1 习题 4 可以推广为: 设 U, V 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, g 是 U 和 V 上的非退化双线性型, S_1, S_2 是 U 的两个子空间, T_1, T_2 是 V 的两个子空间, $S_1^{\perp}, S_2^{\perp}$ 和 $T_1^{\perp}, T_2^{\perp}$ 的定义同上, 则

$$\begin{aligned}(S_1^{\perp})^{\perp} = S_1, \quad (S_1 \cap S_2)^{\perp} = S_1^{\perp} + S_2^{\perp};\\ (T_1^{\perp})^{\perp} = T_1, \quad (T_1 \cap T_2)^{\perp} = T_1^{\perp} + T_2^{\perp}.\end{aligned}$$

10.3 纯量积

1. 基础训练填空题 7. 先证明 $g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ 是 V 上的纯量积. 一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $k \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}),\\ g(\boldsymbol{\varphi}(k\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) = g(k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) = kg(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

另一方面, 对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $k \in \mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{w}),\\ g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), k\boldsymbol{z}) = kg(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

再证明 $g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$. 设

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{e}_i,$$

则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量为

$$\boldsymbol{B}(a_1, a_2, \cdots, a_n)',$$

于是

$$g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}(b_1, b_2, \cdots, b_n)'.$$

由上式可知, $g(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$.

2. 例 10.16.

3. 基础训练填空题 9.

4. 例 10.17.

10.4　交错型与辛几何

1. 例 10.21. 答案为: 要求的一组辛基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ 为

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{3} & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{12} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 例 10.22.

3. 例 10.22.

10.5　对称型与正交几何

1. 例 10.23.

2. 由定理 10.5.2 可知, φ 可表示为 k 个镜像变换之积, 其中 $k \le n$. 注意到镜像变换的行列式值为 -1, 故 $(-1)^k = 1$, 即 k 必为偶数.

3. 例 10.24.

4. 例 10.25.

5. 例 10.27.

6. 例 10.28.

复习题十

1. 例 10.1.

2. 例 10.3.

3. 例 10.4.

4. 例 10.9.

5. 例 10.12.
6. 例 10.15.
7. 例 10.20.
8. 例 10.26.
9. 例 10.30.