高等代数的思维方法

孔祥智

曲阜师范大学数学科学学院

前言

.5

本书是作者多年从事高等代数教学的唯一习题课教材. 本人的习题课班异常火爆, 常常吸引众多省内外学生旁听, 并有多所高校的代数教师观摩学习, 究其原因有二: 一是本人的辅导讲义紧密围绕代数基本内容题展开, 介绍基本的代数思想, 总结解题方法. 二是本人的讲课方式非常适合学生的口味, 打通阻碍学生理解代数知识的的通道. 本书可作为高等代数习题课教程。

目　录

第 1 章　多项式

（一）带余除法与整除

基本知识

结果 1 带余除法：对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x) \neq 0$，一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x), r(x)$ 存在，使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立，其中 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 或 $r(x) = 0$，并且这样的 $q(x), r(x)$ 是唯一的。**（注意证明）**

结果 2 $f(x)|f(x),\ f(x)|0.$

结果 3 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x) \neq 0$，$g(x)|f(x)$ 的充要条件为 $g(x)$ 按带余除法除 $f(x)$ 所得的余式为零.

结果 4 如果 $f(x)|g(x),\ g(x)|f(x)$，那么 $f(x) = cg(x)$，其中 c 为非零常数，特别地，$f(x) = g(x)$ 的充要条件为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数相同，且 $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$.

结果 5 如果 $f(x)|g(x),\ g(x)|h(x)$，那么 $f(x)|h(x)$，即整除具有传递性。

结果 6 如果 $f(x)|g_i(x), i = 1, 2, \cdots, r,$ 那么

$$f(x)|[u_1(x)g_1(x) + \cdots + u_r(x)g_r(x)],$$

其中 $u_i(x)$ 为 $P[x]$ 中任意多项式.　**（引入组合概念）**

结果 7 带余除法、整除关系不随着所考虑的数域的改变而改变.

结果 8 $f(x)|g(x)$ 当且仅当 $f(x)$ 的根全是 $g(x)$ 的根（计算重数），最常用的是 $f(x)$ 的根全是单根，尤其是 n 次单位根时的情况.

结果 9 标准分解式 $f(x) = cp_1(x)^{r_1} \cdots p_s(x)^{r_s}$ 在讨论整除及没有关于 $f(x)$ 的更多具体信息时经常使用，特别是讨论幂的时候.

例题

例 1　假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式，假设 $x^4 + x^2 + 1$ 整除 $f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3)$. 试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

解　易知 $x^4 + x^2 + 1$ 的根为 $\pm\sqrt{\omega_1}, \pm\sqrt{\omega_2}$, 其中 ω_1, ω_2 为两个三次单位原根. 由 $x^4 + x^2 + 1$ 整除 $f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3)$, 有 $f_1(1) + \omega_1 f_2(1) = 0$, $f_1(1) + \omega_2 f_2(1) = 0$, $f_1(-1) + \omega_1 f_2(-1) = 0$, $f_1(-1) + \omega_2 f_2(-1) = 0$. 解之得 $f_1(1) = f_2(1) = 0, f_1(-1) = f_2(-1) = 0$. 又 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式，从而 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式为 $(x-1)(x+1)$.

同类的题有

例 2 证明 $x^2+x+1|x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, 其中 m,n,p 为任意正整数.

例 3 证明：如果 $(x-1)|f(x^n)$, 那么 $(x^n-1)|f(x^n)$.

例 4 证明: 如果 $(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 那么 $(x-1)|f_1(x),(x-1)|f_2(x)$.

例 5 证明： $x^2+x+1|x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$.

例 6 证明： $x^d-1|x^n-1 \Longleftrightarrow d|n$.

证 $\Longleftarrow$ 由 $d|n$, 可令 $n=kd$, 其中 k 为整数. 从而 $x^n-1=x^{kd}-1=(x^d-1)(x^{(k-1)d}+\cdots+1)$, 故 $(x^d-1)|(x^n-1)$.

或证 x^d-1 的根全为 x^n-1 的根.

$\Longrightarrow$ 设 $n=kd+r$, 其中 k,r 为整数且 $0\le r<d$. 则 $x^n-1=x^{kd+r}-1=[(x^d)^k-1]x^r+x^r-1$. 由 $x^d-1|[(x^d)^k-1]x^r$ 及 $x^d-1|x^n-1$ 有 $x^d-1|x^r-1$, 又 $0\le r<d$, 故 $r=0$, 即 $x^d-1|x^n-1$.

同样利用分解式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$, 特别地 $b=1$ 的题有

例 7 设 $g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$, $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$. 证明 $g(x)|f(x) \Longleftrightarrow n$ 为偶数.

$\Longrightarrow$ 若 n 为奇数，则

$$\begin{aligned}g(x)&=(1+x^2)+x^4(1+x^2)+\cdots+x^{2n-2}(1+x^2)\\&=(1+x^2)(1+x^4+\cdots+x^{2n-2}),\end{aligned}$$

故对 i 而言， $g(i)=0$, 其中 $i^2=-1$, 从而由 $g(x)|f(x)$ 有 $f(i)=0$. 显然 $f(i)=n+1\neq 0$ ，故 n 为偶数.

反证，也可直接将 i 代入 $g(x),f(x)$.

$\Longleftarrow$ 由 $(x^2-1)g(x)=x^{2n+2}-1$, $(x^4-1)f(x)=x^{4n+4}-1$ 有 $(x^2-1)g(x)|(x^4-1)f(x)$ ，进而 $g(x)|(x^2+1)f(x)$ ，又 $g(x)=(1+x^2)+x^4(1+x^2)+\cdots+x^{2n-3}(1+x^2)+x^{2n}$ 易知 $(g(x),x^2+1)=1$ ， 故 $g(x)|f(x)$.

例 8 令 $f(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}$. 证明 $f(x)|(f(x)+x^n)^2-x^n$.

证 由

$$\begin{aligned}(f(x)+x^n)^2-x^n&=f^2(x)+2f(x)x^n+x^{2n}-x^n\\&=f(x)[f(x)+2x^n]+x^n(x^n-1)\\&=f(x)[f(x)+2x^n]+x^n(x-1)f(x),\end{aligned}$$

有 $f(x)|(f(x)+x^n)-x^n$.

同样整理多项式的题有

例 9 设 $f(x)=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$. 证明 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$.

证 由

$$
\begin{aligned}
(x-1)f(x) &= (x-1)[(x+1)^k + 2x(x+1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k](x+1)^n \\
&= [(2x-(x+1)][(x+1)^k + 2x(x+1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k](x+1)^n \\
&= [(2x)^{k+1} - (x+1)^{k+1}](x+1)^n \\
&= 2^{k+1}x^{k+1}(x+1)^n - (x+1)^{n+k+1},
\end{aligned}
$$

有 $(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1} = 2^{k+1}x^{k+1}(x+1)^n$, 故 $x^{k+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$.

例 10 试求 7 次多项式 $f(x)$, 使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除，而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除.

解 显然 $1,-1$ 分别至少为 $f'(x)$ 的 3 重根及 $\partial f'(x)=6$ ，可令 $f'(x) = k(x+1)^3(x-1)^3 = kx^6-3kx^4+3kx^2-k$, 故 $f(x) = \frac{k}{7}x^7 - \frac{3k}{5}x^5 + \frac{3k}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 - kx + c$, 而由 $1,-1$ 分别为 $f(x)-1$ 与 $f(x)+1$ 的根, 可求 $f(x) = \frac{5}{16}x^7 - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$.

同样利用待定系数求多项式的有

例 11 用 $x-a, x-b, x-c$ 除 $f(x)$ 的余式依次为 r,s,t, 试求用 $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $f(x)$ 的余式.

解 设 $f(x) = p_1(x)(x-a)+r$, $f(x) = p_1(x)(x-a)+s$, $f(x) = p_1(x)(x-a)+t$, $f(x) = p(x)(x-a)(x-b)(x-c)+ux^2+vx+w$. 由 $f(a)=r, f(b)=s, f(c)=t$ 可求 u,v,w.

例 12 证明： $f^m(x)|g^m(x) \Longleftrightarrow f(x)|g(x)$.

证 $\Longleftarrow$ 显然成立.

$\Longrightarrow$ 设 $f(x) = cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$ 为标准分解式, 由 $f^m(x)|g^m(x)$, 有 $p_i(x)|g(x)$, $i=1,\cdots,s$. 从而可设 $g(x) = p_1^{t_1}(x)\cdots p_s^{t_s}(x)q_1^{k_1}(x)\cdots q_n^{k_n}(x)$ 为标准分解式, 再由 $f^m(x)|g^m(x)$, 有 $p_i^{mr_i}(x)|p_i^{mt_i}(x)$, 故 $mr_i \le mt_i$, 即 $r_i \le t_i$, $i=1,\cdots,s$. 这样

$$f(x) = cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)|p_1^{t_1}(x)\cdots p_s^{t_s}(x)|p_1^{t_1}(x)\cdots p_s^{t_s}(x)q_1^{k_1}(x)\cdots q_n^{k_n}(x) = g(x).$$

（二）最大公因式、互素与辗转相除

基本知识

结果 1 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x), g(x)$ ，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$ ，且存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

（注意证明）

结果 2 如果多项式等式 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立，那么 $f(x), g(x)$ 和 $g(x), r(x)$ 有相同的公因式，特别地有相同的最大公因式.

结果 3 两个多项式的最大公因式在可以相差一个非零倍数的情况下是唯一的.

结果 4 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$ 互素的充要条件为存在 $P[x]$ 中的多项式 $u(x),v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

结果 5 如果 $(f(x),g(x))=1$, 且 $f(x)|g(x)h(x)$, 那么 $f(x)|h(x)$.

结果 6 如果 $f_1(x)|g(x),f_2(x)|g(x)$, 且 $(f_1(x),f_2(x))=1$, 那么 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$.

结果 7 如果 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$, 那么 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

结果 8 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)\in P[x]$, 则其最大公因式 $d(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ 存在且唯一, 并且存在 $u_1(x),\cdots,u_n(x)\in P[x]$ 使

$$u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_n(x)f_n(x)=d(x).$$

结果 9 证明 $(f(x),g(x))=h(x)$ 办法有: (1) 定义; (2) 左右相互整除, 均首 1; (3) $h(x)|f(x),h(x)|g(x)$ 且 $h(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的组合.

结果 10 证明 $(f(x),g(x))=1$ 办法有: (1) 找 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$; (2) 证明 $f(x),g(x)$ 的任一公因式为非零常数; (3) 反证法, 存在不可约多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)|f(x),p(x)|g(x)$; (4) $f(x)$ 的根都不是 $g(x)$ 的根.

结果 11 最大公因式、互素与数域无关.

例题

例 1 设 $h(x)$ 的首项系数为 1, 证明 $(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$.

证 设 $d(x)=(f(x)h(x),g(x)h(x))$, 由 $(f(x),g(x))|f(x)$ 有 $(f(x),g(x))h(x)|f(x)h(x)$, 同理 $(f(x),g(x))h(x)|g(x)h(x)$, 故 $(f(x),g(x))h(x)|(f(x)h(x),g(x)h(x))$.

设 $d(x)=(f(x),g(x))$, 则存在 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$, 故 $u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=d(x)h(x)$, 从而 $d(x)h(x)|f(x)h(x),d(x)h(x)|g(x)h(x)$, 进而 $d(x)h(x)|(f(x)h(x),g(x)h(x))$, 故命题成立.

例 2 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),g_1(x)=cf(x)+dg(x)$ 且 $ad-bc\neq 0$. 证明: $(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

证 令 $d(x)=(f(x),g(x)),d_1(x)=(f_1(x),g_1(x))$. 由 $d(x)|f(x),d(x)|g(x)$, 有 $d(x)|f_1(x)$, $d(x)|g_1(x)$. 故 $d(x)|d_1(x)$.

据 $ad-bc\neq 0$, 可求 $f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{a}{ad-bc}g_1(x)$, $g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{b}{ad-bc}g_1(x)$, 同上可证 $d_1(x)|d(x)$, 从而由首项系数相同得 $d(x)=d_1(x)$.

例 3 证明: 只要 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数均大于零, 就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

的 $u(x),v(x)$ 使

$$\partial(u(x))<\partial(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}),$$
$$\partial(v(x))<\partial(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}).$$

且这样的 $u(x),v(x)$ 唯一.

证 由题设, $\partial(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))})>0,\partial(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))})>0$. 设 $u_1(x),v_1(x)$ 满足 $u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=(f(x),g(x))$. 由带余除法,

$$u_1(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}q(x)+u(x),v_1(x)=\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}p(x)+v(x).$$

如果 $u(x)=0$, 则

$$\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}q(x)f(x)+\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}p(x)g(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)),$$

即

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}(q(x)+p(x))+v(x)g(x)=(f(x),g(x))\cdots\cdots(*)$$

若 $q(x)+p(x)\neq 0$, 则 $\partial(\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}(q(x)+p(x)))\geq\partial(\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))})$. 而 $(f(x),g(x))-v(x)g(x)$ 的次数小于 $\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数, 这与多项式的相等矛盾, 故 $q(x)+p(x)=0$, 从而 $v(x)g(x)=(f(x),g(x))$, 这又与 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}>0$ 矛盾, 总之, $u(x)\neq 0$, 同样 $v(x)\neq 0$. 故

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}(q(x)+p(x))+u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

而 $(f(x),g(x))-u(x)f(x)-v(x)g(x)$ 的次数小于 $\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数, 故 $\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}(q(x)+p(x))=0$, 这样 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

下证唯一性.

设 $u^*(x),v^*(x)$ 也满足要求. 则 $(u(x)-u^*(x))\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}=(v^*(x)-v(x))\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$, 故 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}|(v^*(x)-v(x))\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$. 而 $(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))})=1$, 从而 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 整除 $(v^*(x)-v(x))$, 由 $v^*(x)-v(x)$ 的次数小于 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数, $v^*(x)-v(x)=0$, 即 $v(x)=v^*(x)$, 同理, $u(x)=u^*(x)$.

例 4 证明：关于任意正整数 n 都有 $(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$.

证 设 $(f(x),g(x))=d(x)$, 则存在 $f_1(x),g_1(x)$ 使 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$ 且 $(f_1(x),g_1(x))=1$. 从而

$$(f^n(x),g^n(x))=(d^n(x)f_1^n(x),d^n(x)g_1^n(x))=d^n(x)(f_1^n(x),g_1^n(x)).$$

只需证 $(f_1^n(x), g_1(^n(x)) = 1$ 即可. 设 $p(x)$ 为不可约多项式且 $p(x)|f_1^n(x), p(x)|g_1^n(x)$. 则 $p(x)|f_1(x), p(x)|g_1(x)$, 由 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$, 知 $p(x)$ 不存在, 故 $(f_1^n(x), g_1^n(x)) = 1$, 命题得证.

例 5 证明:

$$(f_1(x), g_1(x))(f_2(x), g_2(x)) = (f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x), g_1(x)f_2(x), g_1(x)g_2(x)).$$

证 设 $(f_1(x), g_1(x)) = d_1(x)$, $(f_2(x), g_2(x)) = d_2(x)$. 则 $d_1(x)d_2(x)|f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x)g_2(x)$, $g_1(x)f_2(x)$, $g_1(x)g_2(x)$, 即 $d_1(x)d_2(x)$ 为 $f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x)g_2(x)$, $g_1(x)f_2(x)$, $g_1(x)g_2(x)$ 的一公因式. 设 $k(x)$ 为 $f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x)g_2(x)$, $g_1(x)f_2(x)$, $g_1(x)g_2(x)$ 的任一公因式, 则 $k(x)|(f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x))$. 而 $f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x)g_2(x)$ 的最大公因式为 $f_1(x)d_2(x)$, 又 $g_1(x)f_2(x)$, $g_1(x)g_2(x)$ 的最大公因式为 $g_1(x)d_2(x)$, 从而 $k(x)|f_1(x)d_2(x)$, $g_1(x)d_2(x)$, 即 $k(x)|(f_1(x)d_2(x), g_1(x)d_2(x)) = (f_1(x), g_1(x))d_2(x)$, 故

$$(f_1(x), g_1(x))(f_2(x), g_2(x)) = (f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x), g_1(x)f_2(x), g_1(x)g_2(x)).$$

后半部分也可证 $d_1(x)d_2(x)$ 为 $f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x), g_1(x)f_2(x), g_1(x)g_2(x)$ 的组合.

例 6 设 $(f_i(x), g_j(x)) = 1, i, j = 1, 2$. 证明:

$$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x)).$$

证 因 $(f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x))|f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)$, 故 $(f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x))$ 为 $f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)$ 的公因式. 设 $k(x)$ 为 $f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)$ 的任一公因式, 可令 $k(x) = k_1(x)k_2(x)$ 使 $k_1(x)|f_1(x)$, $k_2(x)|g_1(x)$. 由 $(f_1(x), g_2(x)) = 1$, 可得 $(k_1(x), g_2(x)) = 1$. 又 $k_1(x)k_2(x)|f_2(x)g_2(x)$, 故 $k_1(x)|f_2(x)$. 同理 $k_2(x)|g_2(x)$. 那么 $k_1(x)|(f_1(x), f_2(x))$, $k_2(x)|(g_1(x), g_2(x))$, 进而

$$k(x) = k_1(x)k_2(x)|(f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x)),$$

命题得证.

例 7 设 $f(x), g(x)$ 为两个非零多项式. 证明: 存在自然数 N 使 $n_1, n_2 > N$ 时有 $(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x))$.

证 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 取 $N = 1$ 即可.

若 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$. 设 $d(x)$ 的标准分解式为 $d(x) = p_1^{k_1}(x) \cdots p_s^{k_s}(x)$, 而 $f(x) = d(x)f_1(x) = p_1^{l_1}(x) \cdots p_s^{l_s}(x)f_1(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x) = p_1^{t_1}(x) \cdots p_s^{t_s}(x)g_1(x)$, 其中 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$. 令 $N = max\{t_1, \cdots, t_s\}$, 则 $n_1, n_2 > N$ 时, $f^{n_1}(x) = p_1^{l_1n_1}(x) \cdots p_s^{l_sn_1}(x)f_1^{n_1}(x)$, $f^{n_2}(x) = p_1^{l_1n_2}(x) \cdots p_s^{l_sn_2}(x)f_1^{n_2}(x)$. 故

$$(f^{n_1}(x), g(x)) = p_1^{t_1}(x) \cdots p_s^{t_s}(x) = (f^{n_2}(x), g(x)).$$

例 8 设 $f_i=f_i(x), i=1,2,\cdots,s(s>1)$. 证明： $f_1,\cdots,f_s$ 的最大公因式存在且 $((f_1,\cdots,f_{s-1}),f_s)=(f_1,\cdots,f_s)=(f_1,(f_2,\cdots,f_s))=u_1f_1+\cdots+u_sf_s$, $u_i=u_i(x)\in P[x]$.

证 当 $s=2$ 时成立，设为 $s-1$ 时成立，则为 s 时,

令 $d_1=(f_1,\cdots,f_{s-1})$ 且 $d_1=v_1f_1+\cdots+v_{s-1}f_{s-1}$, 其中 $v_i=v_i(x)\in P[x]$, $i=1,\cdots,s-1$. 令 $d=d(x)=((f_1,\cdots,f_{s-1}),f_s)$, 则 $d|f_s$, $d|(f_1,\cdots,f_{s-1})$. 进而 $d|f_i, i=1,\cdots,s-1$. 故 d 为 $f_1,\cdots,f_s$ 的一个公因式. 设 $k=k(x)$ 为 $f_1,\cdots,f_s$ 的任一公因式，则 $k|f_i$, $i=1,\cdots,s-1$, 从而 $k|d_1$. 又 $k|f_s$, 故 $k|(d_1,f_s)=d$. 这样我们证明了 d 为 $f_1,\cdots,f_s$ 的最大公因式. 由假设,

$$\begin{aligned}d&=(f_1,\cdots,f_s)=((f_1,\cdots,f_{s-1}),f_s)\\&=ud_1+u_sf_s\\&=u_1f_1+\cdots+u_sf_s,\end{aligned}$$

其中 $u,u_s\in P[x]$, $u_i=uv_i$, $i=1,\cdots,s-1$.

同理可证 $(f_1,\cdots,f_s)=(f_1,(f_2,\cdots,f_s))$.

例 9 设 $f=f(x),g=g(x)$, $(f,g)=d$. 证明： $(f^n,f^{n-1}g,\cdots,fg^{n-1},g^n)=d^n$.

证 设 $u=u(x),v=v(x)$ 且 $d=uf+vg$. 则 $d^n=u^nf^n+u^{n-1}vf^{n-1}g+\cdots+uv^{n-1}fg^{n-1}+v^ng^n$, 故 d^n 为 $f^n,f^{n-1}g,\cdots,fg^{n-1},g^n$ 的一个组合，又 $d^n|f^n$, $f^{n-1}g$, $\cdots$, fg^{n-1}, g^n. 故 $d^n=(f^n,f^{n-1}g,\cdots,fg^{n-1},g^n)$.

例 10 设 $f=f(x),g=g(x)$ 为不全为 0 的多项式. $M=\{uf+vg(\neq 0)|u=u(x),v=v(x)\in P[x]\}$. 证明： M 中次数最低的多项式的全体恰为 $f(x),g(x)$ 的最大公因式的全体.

证 由 f,g 不全为零，故它们的任意最大公因式 d 不为零. 又存在 $u=u(x),v=v(x)\in P[x]$ 使 $d=uf+vg\in M$. 设 $k=k(x)=u_1f+v_1g$ 为 M 中任一次数最低的多项式. 由 $d|f,g$ ，有 $d|k$, 从而 $\partial d\le\partial k$, 又 k 为 M 中次数最低，故 $d=ak$ ，其中 $a\in P$. 故 k 为 f,g 的一最大公因式.

例 11 设 $\overline{f(x)}$ 表示多项式 $f(x)$ 的系数换成其共轭复数后所得多项式. 证明：（ 1 ）若 $g(x)|f(x)$, 则 $\overline{g(x)}|\overline{f(x)}$.

（ 2 ）若 $d(x)=(f(x),\overline{f(x)})$. 则 $d(x)$ 为实系数多项式，且 α 为 $f(x)$ 的实根当且仅当 α 为 $d(x)$ 的实根.

证 (1) 由 $g(x)|f(x)$ 知存在 $h(x)$ 使 $f(x)=g(x)h(x)$. 故 $\overline{f(x)}=\overline{g(x)h(x)}$, 即 $\overline{g(x)}|\overline{f(x)}$.

(2) 因 $d(x)|f(x)$, 由（ 1 ）， $\overline{d(x)}|\overline{f(x)}$, 同样由 $d(x)|\overline{f(x)}$, 有 $\overline{d(x)}|f(x)$. 故 $\overline{d(x)}$ 为 $f(x)$ 与 $\overline{f(x)}$ 的一个最大公因式，又由 $d(x),\overline{d(x)}$ 首项系数均为 1 有 $d(x)=\overline{d(x)}$ ，故 $d(x)$ 为实系数多项式.

由 $d(x)=(f(x),\overline{f(x)})$ 知存在 $u(x),v(x)$ 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)\overline{f(x)}$. 设 $f(x)$ 的有实根 α ，则 $d(\alpha)=u(\alpha)f(\alpha)+v(\alpha)\overline{f(\alpha)}=0$, 即 α 为 $d(x)$ 的根，反之，若 α 为 $d(x)$ 的实根，显然 α 为 $f(x)$ 的根.

例 12 设多项式 $f(x),g(x),h(x),k(x)$ 满足

$$\begin{cases}(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0\\(x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0\end{cases}$$

证明： x^2+1 是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

证 令 $F(x)=(x+1)f(x)+(x+2)g(x)$, $G(x)=(x-1)f(x)+(x-2)g(x)$. 由题设， $x^2+1|F(x)$, $x^2+1|G(x)$. 令

$$M(x)=(x-1)F(x)-(x+1)G(x)=[(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)]g(x)=2xg(x),$$

故 $x^2+1|F(x)$, 从而 $x^2+1|g(x)$. 又由 $x^2+1|F(x)$, $(x^2+1,x+1)=1$ 知 $x^2+1|f(x)$. 即 x^2+1 为 $f(x),g(x)$ 的公因式.

例 13 设 $f(x),g(x)$ 不全为零，且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$, 则

i) $(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))})=1$.

ii) $(u(x),v(x))=1$.

证 由 $f(x),g(x)$ 不全为零知， $(f(x),g(x))\neq 0$. 从而据 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$, 有 $u(x)fracf(x)(f(x),g(x))+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x)}=1$. 这意味着 i), ii) 均成立.

例 14 证明：$(f(x),g(x))=1$ 且 $(f(x),h(x))=1$ 充要条件为 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

证 法 1.$\Longrightarrow$ 由 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$, 存在 $u(x),v(x)$ 及 $s(x),t(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1...(1)$$

$$s(x)f(x)+t(x)h(x)=1...(2)$$

$(1)\times(2)$ 可得,

$$(u(x)s(x)f(x)+u(x)t(x)h(x)+v(x)g(x)s(x))f(x)+v(x)t(x)g(x)h(x)=1,$$

即命题成立.

$\Longleftarrow$ 假设 $(f(x),g(x))\neq 1$. 则存在不可约多项式 $p(x)$ 使 $p(x)|f(x)$, $p(x)|g(x)$. 故 $p(x)|f(x)h(x)$, 这样 $(f(x)h(x),g(x))\neq 1$, 这与题设矛盾. 故命题成立.

法 2.$\Longrightarrow$ 假设 $(f(x),g(x)h(x))\neq 1$, 则存在不可约多项式 $p(x)$ 使 $p(x)|f(x)$, $p(x)|g(x)h(x)$, 从而 $p(x)|g(x)$ 或 $p(x)|h(x)$. 这样 $(f(x),g(x))\neq 1$ 或 $(f(x),h(x))\neq 1$. 这与题设矛盾. 故命题成立.

$\Longleftarrow$ 同法 1.

利用法 2 的不可约多项式法完全类似可证

例 15 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x),\ g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 都是多项式，而且

$$(f_i(x),g_j(x))=1,\ \ (i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n).$$

求证：

$$(f_1(x)\cdots f_m(x),g_1(x)\cdots g_n(x))=1.$$

例 16 证明：如果 $(f(x),g(x))=1$, 那么 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

例 17 证明： $(f(x),g(x))=1\Longleftrightarrow(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

例 18 设 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素．证明：

$$(f_2(x)\cdots f_s(x),f_1(x)f_3(x)\cdots f_s(x),\cdots,f_1(x)\cdots f_{s-1}(x))=1.$$

例 19 设 $(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=1$. 证明： $(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),f_1(x)+2f_2(x)+3f_3(x),f_1(x)+4f_2(x)+9f_3(x))=1$.

事实上，上题可逐步加强为

例 20 证明： $(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=1\Longleftrightarrow(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),f_1(x)+2f_2(x)+3f_3(x),f_1(x)+4f_2(x)+9f_3(x))=1$.

例 21 证明： $(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),f_1(x)+2f_2(x)+3f_3(x),f_1(x)+4f_2(x)+9f_3(x))$.

证 令 $d(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))$, $d_1(x)=(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),f_1(x)+2f_2(x)+3f_3(x),f_1(x)+4f_2(x)+9f_3(x))$ 且令 $k(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, $s(x)=f_1(x)+2f_2(x)+3f_3(x)$, $t(x)=f_1(x)+4f_2(x)+9f_3(x)$, 由 $d(x)|f_1(x)$, $f_2(x),f_3(x)$, 有 $d(x)|k(x)$, $s(x),t(x)$, 从而 $d(x)|d_1(x)$. 又

$$\{k(x),s(x),t(x)\}=\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

即

$$\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}=\{k(x),s(x),t(x)\}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}^{-1},$$

这样 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 为 $k(x),s(x),t(x)$ 的组合，由 $d_1(x)|k(x)$, $s(x),t(x)$, 有 $d_1(x)|f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, 从而 $d_1(x)|d(x)$. 又 $d(x),d_1(x)$ 的首项系数均为 1, 我们有 $d(x)=d_1(x)$, 即命题成立.

例 22 若 $(f(x),g(x))=1$. 则 $(f(x)h(x),g(x))=(h(x),g(x))$.

证 令 $d(x)=(h(x),g(x))$, $d_1(x)=(f(x)h(x),g(x))$. 由 $d(x)|h(x)$, 有 $d(x)|f(x)h(x)$. 又 $d(x)|g(x)$, 故 $d(x)|d_1(x)$.

由 $d_1(x)|g(x)$ 及 $(f(x),g(x))=1$ 得, $(d_1(x),f(x))=1$. 再由 $d_1(x)|f(x)h(x)$, 有 $d_1(x)|h(x)$, 故 $d_1(x)|d(x)$. 考虑到 $d(x)$, $d_1(x)$ 的首项系数均为 1 有, $d(x)=d_1(x)$.

例 23 证明: $(f(x),g(x))=1 \Longleftrightarrow (f(x^m),g(x^m))=1$.

证 $\Longrightarrow$ 由 $(f(x),g(x))=1$ 知存在 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$, 从而 $u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1$, 即 $(f(x^m),g(x^m))=1$.

$\Longleftarrow$ 设 $d(x)=(f(x),g(x))$, 则存在 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$, 从而 $u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=d(x^m)$, 由题设, $d(x^m)=1$, 从而 $d(x)=1$, 故命题成立.

例 24 设 $f(x),g(x)$ 为两个非零多项式. 证明:

1) 对任意的多项式 $h(x)$, $f(x)|g(x)h(x) \Longrightarrow f(x)|h(x) \Longleftrightarrow (f(x),g(x))=1$.

2) 对任意的多项式 $h(x)$,

$$f(x)|h(x), g(x)|h(x) \Longrightarrow f(x)g(x)|h(x) \Longleftrightarrow (f(x),g(x))=1.$$

证 1) $\Longleftarrow$ 若 $(f(x),g(x))=1$, 则存在 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$, 从而 $u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x)$, 由 $f(x)|f(x)$, $f(x)|g(x)h(x)$, $f(x)$ 整除它们的组合 $h(x)$.

$\Longrightarrow$ 假设 $(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$, 可令 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$, 其中 $(f_1(x),g_1(x))=1$. 取 $h(x)=f_1(x)$, 则 $f(x)|g(x)f_1(x)$, 但 $f(x)\dagger f_1(x)$. 矛盾, 故 $(f(x),g(x))=1$.

2)$\Longleftarrow$ 由 $f(x)|h(x),g(x)|h(x)$, 可令 $h(x)=f(x)f_1(x)=g(x)g_1(x)$. 从而 $g(x)|f(x)f_1(x)$, 又 $(g(x),f(x))=1$, 故 $g(x)|f_1(x)$. 这样 $f_1(x)=g(x)f_2(x)$, 进而 $h(x)=f(x)f_1(x)=f(x)f_2(x)g(x)$, 故 $f(x)g(x)|h(x)$.

$\Longrightarrow$ 假设 $(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$. 令 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$. 则 $f(x)|f_1(x)g_1(x)d(x)$, $g(x)|f_1(x)g_1(x)d(x)$. 从而 $f(x)g(x)|f_1(x)g_1(x)d(x)$, 故 $g(x)|g_1(x)$, 矛盾. 从而 $(f(x),g(x))=1$.

例 25 设 m,n 为大于 1 的自然数. 则 m,n 互素当且仅当 $f(x)=x^{m-1}+\cdots+x+1$ 与 $g(x)=x^{n-1}+\cdots+x+1$ 互素.

证 $\Longrightarrow$ 显然 $f(x)$ 有 $m-1$ 个异于 1 的 m 次单位根. 设 α 为 $f(x)$ 的任一根, 则 $\alpha^m=1$. 由 $(m,n)=1$, 存在整数 k,l 使 $km+ln=1$, 故 $\alpha=\alpha^{km+ln}=\alpha^{ln}$. 又 $\alpha\neq 1$, 故 $\alpha^n\neq 1$. 即 α 不为 $g(x)$ 的根, 从而 $(f(x),g(x))=1$.

$\Longleftarrow$ 假设 $(m,n)=d>1$, 则 $x^d-1|x^m-1$, $x^d-1|x^n$, 故 $x^{d-1}+\cdots+1|f(x)$, $x^{d-1}+\cdots+1|g(x)$, 这与 $(f(x),g(x))=1$ 矛盾. 故 $(m,n)=1$.

例 26 设 $g(x)=x^n+\cdots+x+1$, $f(x)=g(x^s)$. 若 $(s,n+1)=1$. 则 $g(x)|f(x)$.

证 显然 $(x-1)g(x)=x^{n+1}-1$, $(x^s-1)f(x)=x^{s(n+1)}-1$. 故 $(x-1)g(x)|(x^s-1)f(x)$, 从而 $g(x)|(x^{s-1}+\cdots+1)f(x)$. 由 $(s,n+1)=1$ 知 $x^{s-1}+\cdots+1$ 与 $x^n+\cdots+1$ 互素. 故 $g(x)|f(x)$.

例 27 设 $f(x),g(x)$ 为非零多项式. 证明: $(f(x),g(x))\neq 1 \Longleftrightarrow$ 存在非零多项式 $s(x),t(x)$ 使 $s(x)f(x)+t(x)g(x)=0$, 其中, $\partial s(x)<\partial g(x)$, $\partial t(x)<\partial f(x)$.

证 $\Longrightarrow$ 设 $(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$, 其中 $\partial d(x)\geq 1$. 令 $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$. 则 $\partial f_1(x)<\partial f(x)$, $\partial g_1(x)<\partial g(x)$, 取 $s(x)=g_1(x)$, $t(x)=-f_1(x)$ 则满足要求.

假设 $(f(x),g(x))=1$. 由 $s(x)f(x)=-t(x)g(x)$ 知 $g(x)|s(x)$, 从而 $\partial g(x)<\partial s(x)$, 这与题设矛盾. 故命题成立.

（三）唯一分解定理与不可约多项式、重因式

基本知识

结果 1 不可约多项式的次数 ≥ 1.

结果 2 一次数 ≥ 1 的多项式为不可约多项式当且仅当它的因式只有非零常数与它自身的非零常数倍.

结果 3 一多项式是否为不可约多项式是依赖于系数域的, 从而一多项式的最终分解也是依赖于系数域的.

结果 4 一不可约多项式 $p(x)$ 与任一多项式 $f(x)$ 之间只可能有两种关系: $p(x)|f(x)$ 或 $(p(x),f(x))=1$.

结果 5 如果 $p(x)$ 为不可约多项式, 那么对任意的 $f(x)$, $g(x)$, 由 $p(x)|f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$. 进而若 $p(x)|f_1(x)\cdots f_s(x)$, 则存在 i 使 $p(x)|f_i(x)$.

结果 6因式分解及唯一性定理 数域 P 上每个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是说, 如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有 $s=t$, 并且适当排列因式的次序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x)$, $i=1,\cdots,s$, 其中 c_i, $i=1,\cdots,s$ 是一些非零常数. （ **注意证明** ）

结果 7 任一次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 有唯一标准分解式 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 为首 1 的不可约多项式, 而 r_i 为正整数, $i=1,\cdots,s$.

复系数多项式因式分解定理 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

因此，复系数多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=c(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_s)^{r_s},$$

其中 $a_1,\cdots,a_s$ 是不同的复数， $r_1,\cdots,r_s$ 是正整数．这也说明了每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根（重根按重数计算）.

实系数多项式因式分解定理 每个次数 ≥ 1 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

因此，实系数多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=c(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t},$$

其中 $c_1,\cdots,c_s,\ p_1,\cdots,p_t,\ q_1,\cdots,q_t$ 全是实数， $l_1,\cdots,l_s,\ k_1,\cdots,k_t$ 是正整数, 并且 $x^2+p_ix+q_i$ 是不可约多项式, 即满足条件 $p_i^2-4q_i<0, i=1,\cdots,t$.

结果 8 不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式当且仅当 $p^k(x)|f(x)$, 而 $p^{k+1}(x)\dagger f(x)$.

结果 9 如果不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式, 那么它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式．进而，它分别为 $f''(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的 $k_2,\cdots,1$ 重因式，而不为 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

结果 10 不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 $p(x)$ 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式．从而没有重因式的充要条件为 $(f(x),f'(x))=1$.

结果 11 设 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$, 利用 $\frac{f(x)}{(f(x),f'(x)}=p_1(x)\cdots p_s(x)$ 可去掉重数，而保留所有的不可约因式.

例题

例 1 设 $p(x)$ 为一次数大于零的多项式．则 $p(x)$ 不可约当且仅当对任意的 $f(x)$ 有 $p(x)|f(x)$ 或 $(p(x),f(x))=1$.

证 $\Longrightarrow$ 假设 $(p(x),f(x))=d(x)\neq 1$. 则 $d(x)|p(x)$. 而 $p(x)$ 为不可约多项式，故 $d(x)=kp(x)$, 其中 k 为非零常数．从而由 $d(x)|f(x)$ 知 $p(x)|f(x)$.

$\Longleftarrow$ 假设 $p(x)$ 可约, 则存在 $s(x),t(x)$ 使 $p(x)=s(x)t(x)$ 且 $\partial s(x),\partial t(x)<\partial p(x)$. 显然 $p(x)\dagger s(x)$ 且 $(p(x),s(x))=s(x)\neq 1$. 这与题设矛盾．故 $p(x)$ 不可约.

例 2 设 $p(x)$ 为一次数大于零的多项式．则 $p(x)$ 不可约当且仅当对任意的多项式 $f(x), g(x)$ 有 $p(x)|f(x)g(x)\Longrightarrow p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$.

证 $\Longrightarrow$ 若 $p(x)|f(x)$, 则命题成立．若 $p(x)\dagger f(x)$, 则 $(p(x),f(x))=1$, 从而存在 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)p(x)+v(x)f(x)=1$, 两边同乘 $g(x)$ 有 $u(x)p(x)g(x)+v(x)f(x)g(x)=g(x)$. 由 $p(x)|u(x)p(x)g(x)$, $p(x)|v(x)f(x)g(x)$ 知 $p(x)|g(x)$.

$\Longleftarrow$ 假设 $p(x)$ 可约，令 $p(x)=s(x)t(x)$, 其中 $\partial s(x)$, $\partial t(x)<\partial p(x)$. 显然 $p(x)|s(x)t(x)$, 但 $p(x)\dagger s(x)$, $p(x)\dagger t(x)$. 矛盾．故 $p(x)$ 不可约.

例 3 次数大于零的首 1 的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂当且仅当对任意的 $g(x)$ ，有 $(f(x),g(x))=1$ 或存在正整数 m 使 $f(x)|g^m(x)$.

证 $\Longrightarrow$ 设 $f(x)=p^m(x)$, 其中 $p(x)$ 为首 1 的不可约多项式， m 为一正整数. 则对任意的 $g(x)$, 若 $(p(x),g(x))=1$, 则 $(f(x),g(x))=1$. 若 $p(x)|g(x)$, 则 $f(x)|g^m(x)$.

$\Longleftarrow$ 设 $f(x)$ 的标准分解式 $f(x)=p_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 若 $s\geq 2$, 令 $g(x)=p_1(x)$. 则 $(f(x),g(x))=p_1(x)\neq 1$ 且对任意的正整数 m, $f(x)\dagger g^m(x)$. 这与题设矛盾，故 $s=1$, 即 $f(x)$ 为不可约多项式的方幂.

完全类似地可证

例 4 次数大于零的首 1 的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂当且仅当对任意的 $g(x),h(x)$ ，由 $f(x)|g(x)h(x)$ 可推出 $f(x)|g(x)$ 或存在正整数 m 使 $f(x)|h^m(x)$.

证 $\Longrightarrow$ 设 $f(x)=p^m(x)$, 其中 $p(x)$ 为首 1 的不可约多项式， m 为一正整数. 则对任意的 $g(x),h(x)$, 假设 $f(x)|g(x)h(x)$. 若 $f(x)\dagger g(x)$, 则 $p(x)|h(x)$. 从而 $f(x)|h^m(x)$.

$\Longleftarrow$ 设 $f(x)$ 的标准分解式 $f(x)=p_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 若 $s\geq 2$, 令 $g(x)=p_1(x)$, $h(x)=p_2(x)$. 则 $f(x)\dagger g(x)$ 且对任意的正整数 m, $f(x)\dagger h^m(x)$. 这与题设矛盾，故 $s=1$, 即 $f(x)$ 为不可约多项式的方幂.

例 5 证明：若 $f'(x)|f(x)$, 则 $f(x)$ 有 n 重根，其中 $n=\partial f(x)$.

证 设 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$ 为标准分解式,则 $\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=cp_1(x)\cdots p_s(x)$. 由 $\partial f'(x)=n-1$ 及 $f'(x)|f(x)$ 有 $\partial\frac{f(x)}{(f(x),f'(x)}=1$. 故

$$\partial cp_1(x)\cdots p_s(x)=\partial p_1(x)+\cdots+\partial p_s(x)=1,$$

从而 $s=1$ 且 $\partial p_1(x)=1$, 即 $f(x)$ 有 n 重因式，也就是说， $f(x)$ 有 n 重根.

（四）根与重根

基本知识

结果 1 余数定理 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$ ，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

结果 2 α 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-\alpha)|f(x)$.

结果 3 $P[x]$ 中 $n(n\geq 0)$ 次多项式在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算.

结果 4 如果多项式 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n ，而它们在 $n+1$ 个不同的数 $a_1,\cdots,a_{n+1}$ 上有相同的函数值，即 $f(a_i)=g(a_i)$, $i=1,\cdots,n+1$, 那么 $f(x)=g(x)$.

结果 5 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域中一定有一根.

结果 6 设 $f(x)\in F[x],c\in F$.

（1） c 为 $f(x)$ 的重根当且仅当 $f(c)=f'(c)=0$；

（2） c 为 $f(x)$ 的重根当且仅当 c 为 $(f(x),f'(x))$ 的根;

（3）若 $(f(x),f'(x))=1$, 则 $f(x)$ 无重根（在 F 或其任意扩域中）;

（4）若 $f(x)$ 在 F 上不可约，则 $f(x)$ 无重根（在 F 或其任意扩域中），特别地，在复数域 C 上也无重根.

例题

例 1 设 α 为 $f(x)$ 的 k 重根 $(k>1)$. 则 α 也为 $g(x)=f(x)+(\alpha-x)f'(x)$ 的 k 重根. 举例说明 $k=1$ 时不成立.

证 由题设可令 $f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$, 其中 $x-\alpha\dagger f_1(x)$. 故 $f'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}f_1(x)+(x-\alpha)f_1'(x)$. 这样 $g(x)=(x-\alpha)^k[(1-k)f_1(x)-(x-\alpha)f_1'(x)]$，显然， $(x-\alpha)|g(x)$, 由 $k\neq 1$ 及 $x-\alpha\dagger f_1(x)$ 知， $(x-\alpha)^{k+1}\dagger g(x)$. 从而 α 为 $g(x)$ 的 k 重根.

令 $f(x)=x(x-2)$. 则 2 为 $f(x)$ 的单根， $g(x)=-(x-2)^2$. 故 2 为 $g(x)$ 的 2 重根.

例 2 设 $f(x)$ 为 $n(n>0)$ 次多项式且 $f(0)=0$. $g(x)=xf(x)$ 且 $f'(x)|g'(x)$. 则 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根.

证 易知 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$. 由 $f'(x)|g'(x)$ 有 $f'(x)|f(x)$. 进而 $f(x)$ 有 n 重根. 又 $f(0)=0$，故 $f(x)=ax^n$. 从而 $g(x)=ax^{n+1}$. 即 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根.

例 3 证明： $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 无重根.

证 假设 α 为 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 的重根，则 α 也为 $f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 的根. 从而 $0=f'(\alpha)=f(\alpha)-\frac{\alpha^n}{n!}$, 故 $\alpha=0$. 显然 0 不为 $f(x)$ 的根，即 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 无重根.

例 4 如果 α 为 $f'''(x)$ 的 k 重根. 则 α 为 $g(x)=\frac{x-\alpha}{2}[f'(x)+f'(\alpha)]-f(x)+f(\alpha)$ 的 $k+3$ 重根.

证 首先， $g(\alpha)=\frac{\alpha-\alpha}{2}[f'(\alpha)+f'(\alpha)]-f(\alpha)+f(\alpha)=0$, 即 α 为 $g(x)$ 的根. 又

$$g'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)+f'(\alpha)]+\frac{x-\alpha}{2}f''(x)-f'(x)=\frac{1}{[}f'(x)-f'(\alpha)]+\frac{x-\alpha}{2}f''(x),$$

$$g''(x)=-\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{x-\alpha}{2}f'''(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)f'''(x).$$

显然 $g'(\alpha)=0$，由题设， α 为 $g''(x)$ 的 $k+1$ 重根，从而为 $g(x)$ 的 $k+3$ 重根.

例 5 证明： $x^n+ax^{n-m}+b$ 不能有不为零的重数大于 2 的根.

证 假设 α 为 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$ 的 $k(k>2)$ 重根．则 α 为 $f'(x)=nx^{n-1}+(n-m)ax^{n-m-1}=x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$ 的 $k-1$ 重根．又 $\alpha\neq 0$，故 α 为 $g(x)=nx^m+(n-m)a$ 的 $k-1>1$ 重根．若 $(n-m)a=0$，则 $g(x)$ 只有零根；若 $(n-m)a\neq 0$，则 $g(x)$ 只有单根，总之，$g(x)$ 不可能有非零重数大于 2 的重根．

例 6 证明：如果 $f(x)|f(x^n)$，那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根．

证 假设 $f(x)$ 有非零非单位根 α，即 $f(\alpha)=0.$ 由 $f(x)|f(x^n)$ 有 $f(\alpha^n)=0,$ 即 α^n 也为 $f(x)$ 的根．这样下去，$\alpha,\alpha^n,\cdots,\alpha^{kn},\cdots$，均为 $f(x)$ 的根．由 α 非零非单位根知，上述各根两两不同，即 $f(x)$ 有无穷多个两两不同的根，这是矛盾的．故 $f(x)$ 只能有零或单位根．

例 7 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个两两不同的数，而

$$F(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n).$$

证明：

1)

$$\sum_{i=1}^n\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1;$$

2) 任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^n\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

证 1) 令

$$g(x)=\sum_{i=1}^n\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)},$$

显然 $\partial g(x)\leq n-1$，又 $g(a_i)=1,\ i=1,\cdots,n.$ 由 $a_1,\cdots,a_n$ 两两不同知 $g(x)=1.$

2) 设按带余除法 $f(x)=F(x)q(x)+r(x)$，则 $r(a_i)=f(a_i),\ i=1,\cdots,n.$ 令

$$h(x)=\sum_{i=1}^n\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)},$$

则 $\partial h(x)\leq n-1$ 且 $h(a_i)=f(a_i),\ i=1,\cdots,n.$ 故 $h(x)=r(x)$，即命题成立．

例 8 证明： 1) 设 $f(x)$ 为首 1 的实系数多项式且 $f(x)$ 无实根．则存在实系数多项式 $g(x),h(x)$ 使 $f(x)=g^2(x)+h^2(x).$

2) 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 为实系数多项式．则存在实系数多项式 $g(x),h(x)$ 使 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)=g^2(x)+h^2(x).$

证 1) 由 $f(x)$ 无实根， $f(x)$ 只有虚根且成对出现，故可令 $f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)(x-\overline{\alpha_1})\cdots(x-\overline{\alpha_s})$. 设 $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)=g(x)+ih(x)$, 其中 $g(x),h(x)$ 为实系数多项式. 那么 $(x-\overline{\alpha_1})\cdots(x-\overline{\alpha_s})=g(x)-ih(x)$, 从而 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

2) 若 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)$ 无实根，则 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)=kf(x)$, 其中 $k>0$ 且 $f(x)$ 为首 1 的实系数多项式，由 1)， $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$ ，从而 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)=(\sqrt{k}g(x))^2+(\sqrt{k}h(x))^2$, 故命题成立.

若 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)$ 有实根, 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为其所有实根. 由 $f_1^2(\alpha_i)+\cdots+f_n^2(\alpha_i)=0$, 有 $f_j(\alpha_i)=0$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,n$. 故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 也为 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的实根. 令 $f_j(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)\phi_j(x)$, $j=1,\cdots,n$. 则 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)=(x-\alpha_1)^2\cdots(x-\alpha_s)^2[\phi_1^2(x)+\cdots+\phi_n^2(x)]$, 易知 $\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2(x)$ 无实根, 故由上证可令 $\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2(x)=g^2(x)+h^2(x)$, 从而 $f_1^2(x)+\cdots+f_n^2(x)=[(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)g(x)]^2+[(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)h(x)]^2$. 故命题成立.

例 9 设 α 为复数. 令 $P[\alpha]=\{f(\alpha)|f(x)\in P[x]\}$. 证明: $P[\alpha]$ 为数域 $\Longleftrightarrow$ α 是上 P 某不可约多项式的根.

证 $\Longrightarrow$ 设 $f(x)$ 为 $P[x]$ 中次数 ≥ 1 的多项式且标准分解式为 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 若 $f(\alpha)=0$, 则存在 i 使 $p_i(x)=0$, 即 α 为不可约多项式 $p_i(x)$ 的根. 若 $f(\alpha)\neq 0$, 由 $f(\alpha)\in P[\alpha]$ 及 $P[\alpha]$ 为数域有 $\frac{1}{f(\alpha)}\in P[\alpha]$, 故存在 $g(\alpha)\in P[\alpha]$ 使 $g(\alpha)=\frac{1}{f(\alpha)}$, 从而 $f(x)g(x)-1$ 以 α 为根，由上证知命题成立.

$\Longleftarrow$ 设 α 为不可约多项式 $p(x)$ 的根. 显然 $P[\alpha]$ 对加、减、乘封闭. 取 $f(x)=0,1$, 则 $f(\alpha)=0,1\in P[\alpha]$. 下证 $P[\alpha]$ 对除法封闭. 任取 $f(\alpha)\in P[\alpha]$, $f(\alpha)\neq 0$. 从而 $(p(x),f(x))=1$, 存在 $u(x),v(x)\in P[x]$ 使 $u(x)p(x)=v(x)f(x)=1$, 故 $v(\alpha)f(\alpha)=1$, 即每个非零 $f(\alpha)\in P[\alpha]$ 有倒数, 从而任取 $f(\alpha)\neq 0,g(\alpha)\neq 0$, 则 $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=f(\alpha)v(\alpha)\in P[\alpha]$, 故 $P[\alpha]$ 对除法也封闭，其中 $v(\alpha)=\frac{1}{g(\alpha)}$.

例 10 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个彼此不等的实数， $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 为 n 个次数 $\leq n-2$ 的实系数多项式.

证明:

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(\alpha_1) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(\alpha_1) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix}=0$$

证 法 1 令

$$g(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(x) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix},$$

则 $g(x)$ 有 $n-1$ 个两两不同的实根 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 且 $\partial g(x)\le n-2$, 故 $g(x)=0$, 特别地， $g(\alpha_1)=0$, 即命题成立.

法 2

因 $f_1(x),\cdots,f_n(x)\in P[x]_{n-1}$ ，而 $dimP[x]_{n-1}=n-1$ ，故 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 线性相关，存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$ 使得 $k_1f_1(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0$. 从而

$$\begin{cases} k_1f_1(\alpha_1)+\cdots+k_nf_n(\alpha_1)=0 \\ \qquad\vdots \\ k_1f_1(\alpha_n)+\cdots+k_nf_n(\alpha_n)=0 \end{cases}$$

即方程组 $\begin{cases} y_1f_1(\alpha_1)+\cdots+y_nf_n(\alpha_1)=0 \\ \qquad\vdots \\ y_1f_1(\alpha_n)+\cdots+y_nf_n(\alpha_n)=0 \end{cases}$ 有非零解，从而

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(\alpha_1) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(\alpha_1) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix}=0$$

例 11 设多项式 $f(x)$ 满足 $f(x^2+1)=f^2(x)+1$, $f(0)=0$. 则 $f(x)=x$.

证 因 $f(0)=0$, 分别取 $x=0,1,2,5,\cdots$, 由 $f(x^2+1)=f^2(x)+1$, 可得 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(5)=5$, $\cdots$, 故 $f(x)-x$ 有无穷多个根，而 $f(x)$ 为有限次多项式，故 $f(x)-x=0$, 即 $f(x)=x$.

例 12 设 $f(x)\in P[x]$ ，若关于任意的 $c\in P$ 有 $f(x)=f(x-c)$ ，则 $f(x)$ 为常数.

证 假设 $\partial f(x)\ge 1$, 则 $f(x)$ 有复根 α. 由 $f(x)=f(x-c)$ 知 $\alpha-c$ 也为 $f(x)$ 的根，从而 $f(x)$ 有无穷多个根，这与 $f(x)$ 为有限次矛盾. $f(x)$ 的次数不可能大于零，故 $f(x)$ 为常数.

例 13 设 a 为实数. 则 $f(x)=x^n+ax^{n-1}+\cdots+a^{n-1}x+a^n$ 至多有一实根 (不计重数).

证 若 $a=0$ ，则 $f(x)=x^n$. 故 $f(x)$ 只有实根 0 (不计重数).

若 $a\neq 0$，则 $f(x)=a^n((\frac{x}{a})^n+\cdots+\frac{x}{a}=a^n\frac{(\frac{x}{a})^{n+1}-1}{\frac{x}{a}-1}$, 故 $f(x)$ 的根全为 $(\frac{x}{a})^{n+1}-1$ 的根，而 $(\frac{x}{a})^{n+1}-1$ 至多有两个实根 $x=a$ 与 $x=-a$，而 a 显然不为 $f(x)$ 的根，故 $f(x)$ 至多有一实根 $-a$.

例 14 $f(x),g(x),h(x)$ 为多项式且 $f(x^5)+xg(x^5)+x^2h(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)k(x)$. 证明： $x-1$ 为 $f(x),g(x),h(x)$ 的公因式.

证 取三个不同的 5 此非 1 单位根 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 代入上式柯得 $f(1)=g(1)=h(1)=0$，命题成立.

例 15 设 $f(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式

1) $g(x)\in P[x]$ 与 $f(x)$ 有一公共根，则 $f(x)|g(x)$.

2) 若 c 及 c^{-1} 为 $f(x)$ 的根. b 为 $f(x)$ 的任一根，则 b^{-1} 也为 $f(x)$ 的根.

证 1) 已证

2) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 令 $g(x)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n$, 由 c， c^{-1} 为 $f(x)$ 的根， c^{-1} 为 $f(x),g(x)$ 的公共根，由 1)， $f(x)|g(x)$. 从而 b 为 $g(x)$ 的根，故 $a_n+a_{n-1}b+\cdots+a_1b^{n-1}+a_0b^n=0$, 即 $b^n(a_nb^{-n}+a_{n-1}b^{1-n}+\cdots+a_1b+a_0)=0$, 从而 $f(b^{-1})=0$.

（五）有理系数与整系数多项式

基本知识

结果 1 任一非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可表为一有理数 r 与一本原多项式 $g(x)$ 的乘积，且这种表示除相差一个正负号外是唯一的.

结果 2 高斯引理 两个本原多项式的乘积还是本原多项式 (**注意证明**).

结果 3 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

结果 4 设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式, 且 $g(x)$ 是本原的, 如果 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

结果 5 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 r,s 互素，那么必有 $s|a_n,r|a_0$. 特别地，如果的 $f(x)$ 首项系数 $a_n=1$, 那么 $f(x)$ 的有理根都是整根，而且是 a_0 的因子.

结果 6艾森斯坦因判别法 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 是一个整系数多

项式. 如果有一个素数 p 使得

1. $p\dagger a_n$;
2. $p|a_{n-1},\cdots,a_0$;
3. $p^2\dagger a_0$.

那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

结果 7 令 $f(x)\in Z[x],m,n\in Z$. 则 $(m-n)|(f(m)-f(n))$.

例题

例 1 证明: $f(x)=x^{p-1}+\cdots+x+1$ 在 $Z[x]$ 上不可约, 其中 p 为素数.

证 令 $x=y+1$, 则

$$\begin{aligned}f(x)=f(y+1)&=\frac{y+1)^p-1}{y}\\&=y^{p-1}+py^2+\cdots+\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}y^{p-k-1}+\cdots+p,\end{aligned}$$

由 Eisentein 判别法知 $g(y)=f(y+1)$ 在 $Z[y]$ 上不可约, 从而 $f(x)$ 在 $Z[x]$ 上不可约.

例 2 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 为整系数多项式, $a_0,a_0+\cdots+a_n$, $a_0-a_1+\cdots+(-1)^na_n$ 均非 3 的倍数. 则 $f(x)$ 无整数根.

证 设 k 为 $f(x)$ 的整数根, 则 $k+1,k,k-1$ 中至少有一能被 3 整除, 故 $a_0+\cdots+(-1)^na_n,a_0,a_0+\cdots+a_n$ 至少有一能被 3 整除, 这与题设矛盾, 故命题成立.

例 3 证明: $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1(a_1,\cdots,a_n\in Z$ 互异) 在 $Z[x]$ 上不可约.

证 假设 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)$ 的次数 $<n$. 则 $g(a_i)h(a_i)=-1$, 故 $g(a_i),h(a_i)=\stackrel{+}{-}1$, 从而 $g(a_i)+h(a_i)=0$, $I=1,\cdots,n$. 由 $g(x)+h(x)$ 的次数 $<n$ 知 $g(x)+h(x)=0$, 故 $f(x)=-g^2(x)$, 这与 $f(x)$ 的首项系数为 1 矛盾, 故命题成立.

类似可证

例 4 证明: $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1(a_1,\cdots,a_n\in Z$ 互异) 在 $Z[x]$ 上可约 $\Longleftrightarrow f(x)$ 是一整系数多项式的平方, 从而 n 一定为偶数.

例 5 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是互异的整数. 证明: $\prod_{i=1}^n(x-a_i)^2+1$ 在 Q 上不可约.

证 假设 $f(x)$ 可约, 设 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)$ 为首 1 的整系数多项式, $\partial g(x),\partial h(x)<2n$ 且至少有一个次数不大于 n. 假设 $\partial g(x)<$

n. 由 $f(x)>0$, 故 $f(x)$ 无实根，从而 $g(x),h(x)$ 均无实根，又 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1$, 故 $g(a_i),h(a_i)$ 同为 1 或同为 -1, 由 $g(x)$ 不变号，若存在 j 使 $g(a_j)=1$, 则关于任意的 i, $g(a_i)=1$, 由 $\partial g(x)<n$ 知 $g(x)=1$. 同样若存在 j 使 $g(a_j)=-1$, 则关于任意的 i 有 $g(a_i)=-1$, 从而 $g(x)=-1$, 这与 $g(x),h(x)$ 的次数均小于 $2n$ 矛盾. 故 $\partial g(x)=\partial h(x)=n$. 由 $g(a_i)=h(a_i)$ 及 $\partial g(x)=\partial h(x)=n$ 有 $g(x)-h(x)=b(x-a_1)\cdots(x-a_n)$. 再由 $g(x),h(x)$ 的首项系数均为 1 知 $\partial(g(x)-h(x))<n$, 故 $b=0$, 从而 $f(x)=g^2(x)$. 令 $k(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$, 则 $g^2(x)=k^2(x)+1$, 从而 $(g(x)+k(x))(g(x)-k(x))=1$, 进而 $g(x)-k(x)=g(x)+k(x)$, 故 $k(x)=0$, 矛盾. 故 $f(x)$ 不可约.

类似可证

例 6 设 $f(x)$ 为 n 次整系数多项式， $n=2m$ 或 $n=2m+1$. 若 $f(x)$ 在 $2m$ 个以上的整数上取值 $1,-1$. 则 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

例 7 设 $f(x)$ 为整系数多项式且 $f(x)$ 对于无穷多个整数取值为素数，则 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

例 8 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 为整系数多项式， $k<n$ 且对素数 p 满足 $p\dagger a_n$; $p\dagger a_k$; $p\alpha_0,\cdots,a_{k-1}$, $p^2\dagger a_0$. 证明 $f(x)$ 有一个次数至少为 k 的不可约因式.

证 设 $f(x)$ 在 $Z[x]$ 中具有分解式 $f(x)=g(x)h(x)\cdots u(x)$, 这里 $g(x)$, $h(x)$, $\cdots,u(x)$ 为不可约整系数多项式. 故 $a_0=g_0h_0\cdots u_0$, 这里 g_i,h_i,u_i 分别为 $g(x),h(x),u(x)$ 的第 i 次项的系数. 由 $p|g_0h_0\cdots u_0$ 及 $p^2\dagger a_0$ 知， p 能且只能整除 $g_0,\cdots,u_0$ 中的一个，不妨设 $p|g_0$, $p\dagger h_0,\cdots,u_0$. 由 $p\dagger a_n$ 知 $p\dagger g_s$, 其中 $s=\partial g(x)$. 设 $p|g_0,\cdots,g_{m-1}$, 而 $p\dagger g_m$ ，由 $a_m=g_mh_0\cdots u_0+\cdots$ 知 $p\dagger a_m$ ，故 $m\geq k$. 即 $f(x)$ 有一次数至少为 k 的不可约因式.

例 9 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 为整系数多项式. 证明：若 $ac+bc$ 为奇数，则 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

证 假设 $f(x)$ 可约. 令 $f(x)=(x+p)(x^2+qx+r)$, p,q,r 为整数. 由 $ac+bc=(a+b)c$ 为奇数知， $a+b,c$ 均为奇数，而由 $pr=c$ 知， p,r 均为奇数. 又 $f(1)=1+a+b+c$ 为奇数知 $(1+p)(1+q+r)$ 为奇数. 显然 $(1+p)(1+q+r)$ 为偶数，矛盾. 故 $f(x)$ 在 Q 不可约.

例 10 设 $f(x)$ 是一整系数多项式. $f(0),f(1)$ 均为奇数. 则 $f(x)$ 无整数根.

证 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, 由题设， $f(0)=a_0$, $f(1)=a_n+\cdots+a_0$ 均为奇数. 设 α 为 $f(x)$ 的整数根，则 $f(\alpha)=\alpha(a_n\alpha^{n-1}+\cdots+a_1)+a_0=0$ ，若 α 为偶数, 则 $\alpha(a_n\alpha^{n-1}+\cdots+a_1)$ 为偶数, 从而 $f(\alpha)=\alpha(a_n\alpha^{n-1}+\cdots+a_1)+a_0$ 为奇数, 不可能为零. 若 α 为奇数, 则 a_i 与 $\alpha_i\alpha^i$ 同奇偶性， $i=1,\cdots,n$. 故 $f(\alpha)=a_n\alpha^n+\cdots+a_0$ 与 $a_n+\cdots+a_0$ 同奇偶性，而 $f(1)$ 为奇数，故

$f(\alpha)$ 不为零，总之， $f(x)$ 不可能有整数根.

一般地，

例 11 设 $f(x)$ 为整系数多项式， a 为偶数， b 为奇数，而 $f(a), f(b)$ 均为奇数．则 $f(x)$ 无整数根.

例 12 设 $f(x)$ 为整系数多项式． k 为一正整数， $k \dagger f(i), i=1,\cdots,k$. 则 $f(x)$ 无整数根.

证 法 1. 设 $f(x)$ 有整数根 α，则 $f(x)=(x-\alpha)g(x)$, 其中， $g(x)\in Z[x]$. 故 $f(1)=(1-\alpha)g(1), \cdots, f(k)=(k-\alpha)g(k)$. 因 $k\dagger f(k)$, 故 $k\dagger\alpha$. 令 $\alpha=kq+r$, $0<r<k$, 则 $k|(r-\alpha)$, 从而 $k|f(r)$，矛盾．故 $f(x)$ 无整数根.

法 2. 设 α 为 $f(x)$ 的整数根．则 $1-\alpha, \cdots, k-\alpha$ 中必有一个能被 k 整除．不妨设 $k|i-\alpha$，从而 $k|f(i)-f(\alpha)$, 即 $k|f(i)$，矛盾．故命题成立.

例 13 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 为整系数多项式．证明：若 n 为偶数， $a_1,\cdots,a_n$ 为奇数．则 $f(x)$ 无有理根.

证 假设 $f(x)$ 有有理根 α. 则由 $f(x)$ 的首项系数为 1 知， α 为整数．令 $f(x)=(x-\alpha)g(x)$，其中 $g(x)\in Z[x]$. 由 $f(0)=(-\alpha)g(0)=a_n$ 为奇数， $f(1)=1+a_1+\cdots+a_n=(1-\alpha)g(1)$ 为奇数， $\alpha, 1-\alpha$ 均为奇数，矛盾．故命题成立.

例 14 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 为整系数多项式， a_n, a_0 为奇数， $f(1), f(-1)$ 至少有为奇数；或 $a_n, a_0, f(1), f(-1)$ 都不能被 3 整除，则 $f(x)$ 无有理根.

证 设 $f(x)$ 有有理根 $\frac{t}{s}$, 其中 $(s,t)=1$. 故 $f(x)=(x-\frac{t}{s})g(x)=(sx-t)h(x)$. 由 $(s,t)=1$, $sx-t$ 为本原多项式，故 $h(x)$ 为整系数多项式．由 $f(0)=a_0=(-t)h(0)$, $f(1)=(s-t)h(1)$, $f(-1)=(-s-t)h(-1)$ 知 $\frac{a_0}{t}$, $\frac{f(1)}{s-t}$, $\frac{f(-1)}{s+t}$, $\frac{a_n}{s}$ 均为整数，从而

1. 若 a_n, a_0 为奇数，则 s,t 为奇数，故 $s+t, s-t$ 为偶数，从而 $f(1), f(-1)$ 均为偶数.

2. 若 a_n, a_0 都不能被 3 整除，则 s,t 也不能被 3 整除，故 $s+t, s-t$ 有一能被 3 整除，从而 $f(1), f(-1)$ 有一能被 3 整除.

总之矛盾，故命题成立.

例 15 如果既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的根．证明：对任意的整数 k 有 $(pk-q)|f(k)$.

证 设 $f(x)=(x-\frac{q}{p})$，故 $f(x)=(px-q)h(x)$, 由 $px-q$ 为本原多项式知， $h(x)$ 为整系数多项式．故 $f(k)=(pk-q)h(k)$，从而 $(pk-q)|f(k)$.

例 16 设 $f(x)$ 为整系数多项式． a,b,c 为互异的整数．证明： $f(x)$ 不可能满足 $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$.

证 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, 则 $f(a)-f(b)=(a-b)k$, $f(b)-f(c)=(b-c)l$, $f(c)-f(a)=(c-a)m$. 若 $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$, 则 $b-c=(a-b)k$, $c-a=(b-c)l$, $a-b=(c-a)m$, 由 a,b,c 互异知 $klm=1$, 故 k,l,m 为 1 或 -1, 从而 $|a-b|=|b-c|=|c-a|$, 故 $a=b=c$ ，矛盾．故命题成立．

例 17 设整系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(2)=f(3)=p$ ， p 为素数．则不存在整数 m 使 $f(m)=2p$.

证 假设整数 m 满足 $f(m)=2p$. 则 $m\neq 1,2,3$ 且 $m-1|f(m)-f(1)$, $m-2|f(m)-f(2)$, $m-3|f(m)-f(3)$, 即 $m-1$, $m-2$, $m-3$ 均整除 p ，故 p 不为素数，矛盾．从而命题成立．

例 18 证明：整系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等 $\Longleftrightarrow$ 存在 c, c 大于的 $f(x),g(x)$ 所有系数绝对值的 2 倍，使得 $f(c)=g(c)$.

证 $\Longrightarrow$ 取 $c=1$ 即可．

$\Longleftarrow$ 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$. 由 $f(c)$, 即 $a_nc^n+\cdots+a_0=b_mc^m+\cdots+c_0$ 有 $c|(a+0-b_0)$. 而 $|a_0-b_0|\leq|a_0|+|b_0|<\frac{c}{2}+\frac{c}{2}$ $=c$. 故 $a_0-b_0=0$, 从而 $a_0=b_0$. 还有 $a_nc^n+\cdots+a_1c=b_mc^m+\cdots+b_1c$, 即 $a_nc^{n-1}+\cdots+a_2c+a_1=b_mc^{m-1}+\cdots+b_2c+b_1$, 重复上述过程得 $a_1=b_1$, 这样下去有 $m=n, a_i=b_i$, $i=0,\cdots,n$. 即 $f(x)=g(x)$.

例 19 若 $p_1,\cdots,p_s$ 为互异的素数， n 为非 1 正整数．则 $(p_1\cdots p_s)^{\frac{1}{n}}$ 为无理数．

证 $(p_1\cdots p_s)^{\frac{1}{n}}$ 为整系数多项式 $f(x)=x^n-p_1\cdots p_s$ 的根，取 $p=p_1$. 由艾森斯坦因判别法知 $f(x)$ 在 Q 上不可约, 从而无有理根．故 $(p_1\cdots p_s)^{\frac{1}{n}}$ 为无理数．

例 20 设 $f(x)$ 与 $p(x)$ 均为首 1 的整系数多项式， $p(x)$ 在有理数域 Q 上不可约．如果 $p(x)$ 与 $f(x)$ 有公共的复根 α ，证明：

(1) 在 $Q[x]$ 中， $p(x)|f(x)$;

(2) 存在首 1 的整系数多项式 $g(x)$, 使得 $f(x)=p(x)g(x)$.

证 (1) 若 $p(x)\dagger f(x)$ ，则 $(p(x),f(x))=1$, 故存在 $u(x),v(x)\in Q[x]$, 使得 $u(x)p(x)+v(x)f(x)=1$. 从而 $u(\alpha)p(\alpha)+v(\alpha)f(\alpha)=0=1$, 矛盾. 故 $p(x)|f(x)$.

(2) 由（ 1 ）， $f(x)=p(x)g(x)$ ，其中 $g(x)\in Q[x]$. 令 $g(x)=\frac{r}{s}h(x)$, 这里 $h(x)$ 为本原多项式， $(r,s)=1, s>0$. 由 $p(x)$ 为首的不可约多项式，$p(x)$ 为本原多项式，故 $p(x)h(x)$ 也为本原多项式．由 $f(x)$ 为整系数多项式及 $(r,s)=1$ ， s 整除 $p(x)h(x)$ 的所有系数，而 $p(x)h(x)$ 为本原多项式，故 $s=1$. 从而 $f(x)=p(x)[rh(x)]$ ，又 $f(x)$ 与 $p(x)$ 的首项系数均为 1 知， $rh(x)$ 的首项系数也为 1 ，即 $g(x)$ 的首项系数为 1.

第 2 章　行列式

基本知识

结果 1 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

结果 2 行列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

结果 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

结果 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

结果 5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

结果 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

结果 7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

结果 8

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

结果 9 行列式按一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

结果 10 令

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$a_{k1}A_{i1}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d,\, if\ k=i, \\ 0,\, if\ k\neq i. \end{cases}$$

结果 11 两个特殊行列式： **范德蒙行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

注意证明

结果 12 克兰姆法则 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式 $d=|A|\neq 0$, 那么线性方程组有解且唯一，解可通过系数表为

$$x_1=\frac{d_1}{d}, x_2=\frac{d_2}{d}, \cdots, x_n=\frac{d_n}{d},$$

其中 d_i 为 d 的第 i 列换成常数项 $b_1,\cdots,b_n$，而其余各列不动所得行列式. **注意证明**

结果 13 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

只有零解的充要条件为 $|A| \neq 0$, 而有非零解的充要条件为 $|A| = 0$.

结果 14 拉普拉斯定理 设在行列式 D 中任意取定了 k 个行. 由这 k 行元素所组成的一切 k 级子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

结果 15 $|AB| = |A||B|$.**注意证明**

结果 16 求行列式的总指导思想是消成上 (下) 三角. 常用的消法是: (1) 选定一行 (列), 分别乘一数加到另一行 (列); (2) 第 $n-1$ 行 (列) 乘一数加到第 n 行 (列), 依次类推; (3) 第一行 (列) 乘一数, 加到第二行 (列), 新第二行乘一数加到第三行, 依次类推.

行列式的计算方法

(一) 定义法

例 1 计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(n\cdots 1)} a_1\cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1\cdots a_n.$$

(二) 化三角法

例 1 一个 n 阶行列式 D 的元素由 $a_{ij} = max(i,j)$ 给定, 试计算此行列式.

解 $$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & n \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n.$$

例 2 一个 n 阶行列式 D 的元素由 $a_{ij} = |i-j|$ 给定, 试计算此行列式.

解

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

例 3 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

例 4 设 $x_i \neq a_i, i=1,2,\cdots,n$，计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x_1-\sum_{i=2}^{n}(a_1-x_1)\frac{a_i}{x_i-a_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$
$$=[x_1-\sum_{i=2}^{n}(a_1-x_1)\frac{a_i}{x_i-a_i}](x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)$$

例 5 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解 若 $x\neq a_i,\ i=1,\cdots,n.$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_1 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1+x\sum_{i=2}^{n}\frac{x-a_1}{x-a_i} & x & \cdots & x \\ 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$
$$=(a_2-x)\cdots(a_n-x)[a_1+x\sum_{i=2}^{n}\frac{x-a_1}{x-a_i}]$$

若存在 $x=a_i$，

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$=a_i\prod_{j\neq i}(a_j-a_i)$$

例 6 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}m^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)$$

例 7 设 $A=(a_{ij})$ 是 2004 阶方阵，且 $a_{ij}=ij, 1\le i,j\le 2004$. I 是 2004 阶单位矩阵，计算 $f(x)=det(I+Ax)$, 这里 $x\in R$.

解

$$det(I+Ax)=\begin{vmatrix}1+x & 2x & \cdots & nx\\ 2x & 1+4x & \cdots & 2nx\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ nx & 2nx & \cdots & 1+n^2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x & 2x & \cdots & nx\\ -2 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n} i^2x & 2x & \cdots & nx\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{2004} i^2x$$

例 8 求下面多项式的所有根：

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-3 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n\\ -a_2 & x-2-a_2^2 & -a_2a_3 & \cdots & -a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_3 & -a_3a_2 & x-2-a_3^2 & \cdots & -a_3a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_n & -a_na_2 & -a_na_3 & \cdots & x-2-a_n^2\end{vmatrix}$$

解

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-3 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ -a_2 & x-2-a_2^2 & -a_2a_3 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_3 & -a_3a_2 & x-2-a_3^2 & \cdots & -a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & -a_na_2 & -a_na_3 & \cdots & x-2-a_n^2 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x-3 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ -(x-2)a_2 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(x-2)a_3 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(x-2)a_n & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x-3-\sum_{i=2}^n a_i^2 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 0 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}=(x-2)^{n-1}(x-3-\sum_{i=2}^n a_i^2)$$

故 $f(x)$ 的根为 $2,(n-1$ 重$)$, $3+\sum_{i=2}^n a_i^2$.

(三) 降阶法（即按行或列展开法，或拉普拉斯定理)

例 1 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\1&3&\cdots&n&1\\1&4&\cdots&1&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\0&1&\cdots&1&1-n\\0&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1-n&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\1&1&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\0&0&\cdots&-n&n\\0&0&\cdots&0&n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&-n&0\\0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

例 2 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\x&1&2&\cdots&n-2&n-1\\x&x&1&\cdots&n-3&n-2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x&x&x&\cdots&x&1\end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^n$$

例 3 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$, 将 D 的第 i 行换成 $x_1, \cdots, x_{n-1}, 1$ 得 D_i, $i = 1, \cdots, n$. 证明: $D = D_1 + \cdots + D_n$.

证 将 D_i 按第 i 行展开,

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,,n-1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,,n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} = x_1A_{i1} + \cdots + x_{n-1}A_{i,n-1} + A_{in},$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 在 D 中的代数余子式．故

$$\begin{aligned}D_1+\cdots+D_n &= x_1(A_{11}+\cdots+A_{n1})+\cdots+x_{n-1}(A_{1,n-1}+\cdots+A_{n,n-1})\\ &\quad +(A_{n1}+\cdots+A_{nn})\\ &= x_1\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1\\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1\end{vmatrix}+\cdots\\ &\quad + x_{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 & 1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}\\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1\end{vmatrix} = D\end{aligned}$$

(四) 全行列式法，即所有的行或列的和均相等

例 1 1) 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{pmatrix}$ 为 n 阶方阵，计算 $|A|$

2) 令 $B=\begin{pmatrix} A & A\\ A & 2A\end{pmatrix}$, 求 $detB$.

解 1 ）

$$\begin{aligned} D_n &= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b\\ 1 & a & b & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}\\ &= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}\end{aligned}$$

2 ） $detB = det\begin{pmatrix} A & A\\ 0 & A\end{pmatrix} = (detA)^2 = (a+(n-1)b)(a-b)^{2n-2}.$

例 2 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$

解

$$D_{n+1} = (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

例 3 求 $f(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n + x \end{vmatrix}$ 的根.

解 由

$$f(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_2 + x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n + x \end{vmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} a_i + x) x^{n-1}$$

知 $f(x)$ 的根为 $0, -\sum_{i=1}^{n} a_i$.

例 4 $D = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & \lambda + 1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \lambda + 2 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \lambda + n - 1 \end{vmatrix}$

解

$$D=[\lambda+(n-1)(n+2)]\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & \lambda+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \lambda+2 & \cdots & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \lambda+n-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda+(n-1)(n+2)]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \lambda-1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda+(n-1)(n+2)](\lambda-1)^{n-1}.$$

(五) 拆（合）项法

例 1 计算 $D_n=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & \cdots & a\\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}$.

解

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-b & a & a & \cdots & a\\ 0 & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & a & a & \cdots & a\\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-b)\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta\\ \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0\\ \beta-\alpha & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+\begin{vmatrix}b & a & a & \cdots & a\\ 0 & \alpha-a & \beta-a & \cdots & \beta-a\\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(\lambda-b)\begin{vmatrix}\alpha+(n-2)\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+b\begin{vmatrix}\alpha+(n-2)\beta-(n-1)a & * & * & \cdots & *\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=(\lambda-b)(\alpha+(n-2)\beta)(\alpha-\beta)^{n-2}+b[\alpha+(n-2)\beta-(n-1)a](\alpha-\beta)^{n-2}$$

$$=[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab](\alpha-\beta)^{n-2}$$

例 2 设 $S=a_1\cdots a_n$. 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}+\frac{S}{a_1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}+\frac{S}{a_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}+\frac{S}{a_n}\end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & 1 \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)+(-1)^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

例 3 计算 $f(x+1)-f(x)$, 其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

解

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+1-x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^2-x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^3-x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & (x+1)^n-x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (x+1)^{n+1}-x^{n+1} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & C_{n+1}^n x^n \end{vmatrix}$$
$$=C_1^0\cdots C_{n+1}^n x^n$$

例 6 计算行列式 $d=\begin{vmatrix} a_1+b_1c_1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ a_1+b_2c_1 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+b_nc_1 & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{vmatrix}\ (n\ge 3)$

解

$$d=\begin{vmatrix} a_1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ a_1 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1c_1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ b_2c_1 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_nc_1 & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} 1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ 1 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_1c_2 & \cdots & a_n+b_1c_n \\ b_2 & a_2+b_2c_2 & \cdots & a_n+b_2c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_2+b_nc_2 & \cdots & a_n+b_nc_n \end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

(六) 加边法（升阶法）

例 1 计算 $D=\begin{vmatrix} 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 3^2-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 0 & 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 3^2-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 \\ 3 & 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^n & n^{n-1} & \cdots & n^3 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$=n!(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-2} & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)!$$

例 2 证明

$$1)\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 在 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的代数余子式.

$$2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

证 1)

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -x & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots \\
(-1)^n x & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}
\end{aligned}
$$

2) 在上式中令 $x=1$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\ a_{21}-a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21}-a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

例 3 计算 $D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$==\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{cases} 0 & if\ x=0 \\ x^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x}+1) & if\ x\neq 0 \end{cases}$$

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

例 5 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-2)^n}{4}a_1\cdots a_n[(n-1)^2-\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}]$$

例 6 计算 $D=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n\\ 0 & a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ -1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ -1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ -1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-a & a & a & \cdots & a\\ -1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ -1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=[(1+a)a_1\cdots x_n-a(x_1-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

例 7 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \cdots & x_n(x_n-1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1)\end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \cdots & x_n(x_n-1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}+x_1\cdots x_n\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=[x_1\cdots x_n-(x_1-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

例 8 设 a_{ij}, b_{ij} 分别为行列式 A, B 的元素且 $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} - a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots .n$. 证明： $B = (-1)^{n-1}(n-1)A$.

证 记 $s_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$B = \begin{vmatrix} s_1 - a_{11} & s_1 - a_{12} & \cdots & s_1 - a_{1n} \\ s_2 - a_{21} & s_2 - a_{22} & \cdots & s_2 - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n - a_{n1} & s_n - a_{n2} & \cdots & s_n - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_1 - a_{11} & s_1 - a_{12} & \cdots & s_1 - a_{1n} \\ s_2 & s_2 - a_{21} & s_2 - a_{22} & \cdots & s_2 - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_n - a_{n1} & s_n - a_{n2} & \cdots & s_n - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s_1 & -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ s_2 & -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (1-n)A$$

例 9 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

解 由

$$C=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}=(y-x_1)\cdots(y-x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i),$$

又 $C=A_{1,n+1}+A_{2,n+1}y+\cdots+(-1)^{n+n+1}Dy^{n-1}+A_{n+1,n+1}y^n$, 故 $D=\sum_{i=1}^n x_i\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

例 10 设 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=1$, 且满足 $a_{ij}=-a_{ji}$, $i,j=1,\cdots,n$. 对任意数 b, 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & \cdots & a_{2n}+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \cdots & a_{nn}+b \end{vmatrix}$=?

解 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 则 $A'=-A$, 从而 $(A^{-1})'=-A^{-1}$, $(A^*)'=-A^*$, 即 $A_{ij}=-A_{ji}$, 故 $\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12}+b & \cdots & a_{1n}+b \\ a_{21}+b & a_{22}+b & \cdots & a_{2n}+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b & a_{n2}+b & \cdots & a_{nn}+b \end{vmatrix}=|a_{ij}|+b\sum_{i,j}=1^nA_{ij}=|A|=1$.

(七) 乘积法 (利用 $|AB|=|A||B|$)

例 1 计算 $D=\left|\frac{1-\alpha_i^n\beta_j^n}{1-\alpha_i\beta_j}\right|$

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \cdots & \beta_1^{n-1} \\ 1 & \beta2 & \cdots & \beta_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \beta_n & \cdots & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)(\beta_j-\beta_i)$.

例 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为数域 P 上的可逆矩阵, $A^{-1}=B=(b_{ij})_{n\times n}$, $c_i\in P, i=1,\cdots,n$, $d_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}c_j, i=1,\cdots,n$. 令 $C=(a_ij+c_ic_j)_{n\times n}$. 证明:

$detC = detA(1+\sum_{i=1}^n c_id_i)$.

证 由

$$\begin{aligned} C &= (a_{ij})_{n\times n} + (c_ic_j)_{n\times n} \\ &= (a_{ij})_{n\times n} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + (c_1, \cdots, c_n) \\ &= A + A\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}(c_1, \cdots, c_n) \\ &= A(E + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}(c_1, \cdots, c_n)) \end{aligned}$$

故 $detC = detA(1+\sum_{i=1}^n c_id_i)$.

例 3 计算 $D_n = |sin(\alpha_i+\alpha_j)|$.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} sin\alpha_1 & cos\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ sin\alpha_2 & cos\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ sin\alpha_n & cos\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} cos\alpha_1 & cos\alpha_2 & \cdots & cos\alpha_n \\ sin\alpha_1 & sin\alpha_2 & \cdots & sin\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} sin2\alpha_1 & if\, n=1 \\ -sin^2(\alpha_1-\alpha_2) & if\, n=2 \\ 0 & if\, n\geq 3 \end{cases}$$

例 4 设 $s_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$, $k = 0, 1, \cdots$. 计算 $D = \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Phi_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)^2.$

(八) 递推与数学归纳法

例 1 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$

解 $D_n = xD_{n-1} + a_n = \cdots = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

例 2 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$

解 由 $D_n = (1-a_1)D_{n-1} + a_2D_{n-2}$, 知 $D_n + a_1D_{n-1} = D_{n-1} + a_2D_{n-2} = \cdots = D_2 + a_{n-1}D_1 = 1$, 故 $D_n = 1 - a_1D_{n-1} = \cdots = 1 - a_1 + a_1a_2 - \cdots + (-1)^n a_1 \cdots a_n$.

例 3 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$

解 法 1 由 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$, 有 $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^{n-1}(a+b)$, 故 $D_n = bD_{n-1} + a^{n-1}(a+b) = \cdots (a+b)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$.

法 2

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$
$$= aD_{n-1} + b^n = \cdots = b^n + ab^{n-1} + \cdots + a^{n-1}b + a^n$$

特别地,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2^{n+1}-1$$

例 4 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

解

$$D = \begin{vmatrix} x+a-a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a)D_{n-1} - a\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -a & \cdots & x & a \\ 1 & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}$$

同样令 $x = x-a+a$ 有 $D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}$, 故 $D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$ (易证 $a=0$ 时也成立).

例 5 证明: $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

证 当 $n=1,2$ 易证成立, 设阶数小于 n 时成立, 则阶数为 n 时,

$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$. 故命题成立.

类似可证

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2cos\alpha \end{vmatrix}=cosn\alpha.$$

例 6 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$ $(a,b,c\in R)$

解 按第一行展开得，$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$. 即 $D_n-aD_{n-1}+bcD_{n-2}=0$, 设 $x^2-ax+bc=0$ 的两个根为 α,β, 故 $\alpha+\beta=a,\alpha\beta=bc$, 从而 $D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0$, 进而 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n$. 这样 $D_n=\beta^n+\alpha D_{n-1}=\cdots=\beta^n+\alpha\beta^{n-1}+\cdots+\alpha^n$.

例 7 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)D_{n-1}+\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)D_{n-1}+2(x-2)^{n-1}=\cdots=(x+2^{n-1})(x-2)^{n-1}$$

另类题

例 1 设 n 阶方阵 A 的元素全为 1 或 -1，证明： $2^{n-1}||A|$.

证 由 $|A|=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=2^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \forall b_{22}2 & \cdots & \forall b_{2n}2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \forall b_{n2}2 & \cdots & \forall b_{nn}2 \end{vmatrix}$ 其中 $b_{ij}=0,2,-2$, 故 $\forall b_{ij}2$ 仍为整数，从而 $2^{n-1}||A|$.

例 2 求 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 的所有的代数余子式的和 $\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$.

解 由 $A_{i1}+\cdots+A_{in}=0,\ i=2,\cdots,n$. 有 $\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=A_{11}+\cdots+A_{1n}=\frac{1}{2}(2A_{11}+\cdots+2A_{1n})=\frac{1}{2}|A|=1$.

例 3 设 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$, 求 $A_{n1}+\cdots+A_{nn}$, 其中 $x\neq(1-n)a$. 进而求 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$. **解** 易求 $D_n[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$, 又 $D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=$ $[x+(n-1)a](A_{n1}+\cdots+A_{nn})$. 故 $A_{n1}+\cdots+A_{nn}=(x-a)^{n-1}$.

进而 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=n(x-a)^{n-1}$.

例 4 已知 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$, 求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 与 $A_{44}+A_{45}$.

解 注意二，四行的关系， $2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0$, $(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27$, 故 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=9$, $A_{44}+A_{45}=18$.

例 5 设 a,b,c,d 是互异的数, 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3+d^2x_4=0 \end{cases}$ 有非零解 (k_1,k_2,k_3,k_4). 证明 $k_1k_2k_3k_4\neq 0$.

证 假设 $k_4=0$, 则 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ ak_1+bk_2+ck_3=0 \\ a^2k_1+b^2k_2+c^2k_3=0 \end{cases}$ 而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\neq 0$, 故 $k_1=k_2=k_3=0$. 矛盾，从而 $k_4\neq 0$. 同样 $k_1\neq 0, k_2\neq 0, k_3\neq 0$.

例 6 证明整系数线性方程组 $\begin{cases} x_1=2a_{11}x_1+\cdots+2a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n=2a_{n1}x_1+\cdots+2a_{nn}x_n \end{cases}$ 只有零解.

证 方程组即为 $\begin{cases} (a_{11}-\frac{1}{2})x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+(a_{nn}-\frac{1}{2})x_n=0 \end{cases}$ 而行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

为首 $(-1)^n$ 的整系数多项式, 故 $f(x)$ 的有理根只有整数根, 从而 $f(\frac{1}{2})\neq$

0, 即方程组只有零解.

例 7 设 $D=|a_{ij}|$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，证明：

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 1 \end{vmatrix}=D-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j$$

证 法 1 令 $A=(a_{ij})$, $X=(x_1,\cdots,x_n)'$, $Y=(y_1,\cdots,y_n)'$. 若 A 可逆, $M=\begin{vmatrix} A & X \\ Y & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & 1-YA^{-1}X \end{vmatrix}=|A|(1-Y\frac{A^*}{|A|}X)=|A|-YA^*X=D-\sum_{i,j}^{n}A_{ij}x_iy_j$. 若 A 不可逆，令 $A_1=A+tE$, 则存在 $\delta>0$, 当 $t\in(0,\delta)$, A_1 可逆. $\begin{vmatrix} A_1 & X \\ Y & 1 \end{vmatrix}=|A_1|-\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}^{1}x_iy_j$, 令 $t=0$, $\begin{vmatrix} A & X \\ Y & 1 \end{vmatrix}=D-\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}x_iy_j$.

法 2

$$\begin{aligned} M&=y_1(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \end{vmatrix}+\cdots+y_n(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix}+D \\ &=D+y_1(-1)^{n+2}[x_1(-1)^{n+1}M_{11}+\cdots+x_n(-1)^{2n}M_{n1}]+\cdots \\ &+y_n(-1)^{2n+1}[x_1(-1)^{n+1}M_{1n}+\cdots+x_n(-1)^{2n}M_{nn}] \\ &=D-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

例 8 证明方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0 \\ \qquad\vdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=0 \end{cases}$ 在复数域中只有零解.

证 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为非零解. $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中的非零数为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中有 y_i 个 α_i, $i=1,\cdots,s$. 从而 $\begin{cases} y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_s\alpha_s=0 \\ y_1\alpha_1^2+y_2\alpha_2^2+\cdots+y_s\alpha_s^2=0 \\ \qquad\vdots \\ y_1\alpha_1^n+y_2\alpha_2^n+\cdots+y_s\alpha_s^n=0 \end{cases}$

由 $s\le n$ 及 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^s & \alpha_2^s & \cdots & \alpha_s^s \end{vmatrix}\neq 0$ 知 $y_1=\cdots=y_s=0$, 矛盾. 故命题成立.

第 3 章　线性方程组

（一）向量组

基本知识

结果 1 线性组合，线性表出 向量 α 称为向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合或向量 α 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出，如果存在数域 P 中的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s$.

结果 2 等价 两个向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 称为等价的，如果它们可以相互线性表出．等价具有自反性，对称性，传递性.

结果 3 线性相关 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 称为线性相关的，如果存在 P 中不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立，当 $s=1$ 时，α_1 线性相关的充要条件为 $\alpha_1=0$, 当 $s\geq 2$ 时， $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充要条件为其中有一个可由其余的线性表出，或其中有一个可其前面的线性表出.

结果 4 线性无关 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 称为线性无关的，如果不存在 P 中的不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立．当 $s=1$ 时， α_1 线性无关的充要条件为 $\alpha_1\neq 0$, 当 $s\geq 2$ 时， $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件为其中任一向量都不能由其余的线性表出.

结果 5 若一个向量组的部分组线性相关，则整个向量组线性相关，若一个向量组线性无关，则它的部分组也线性无关.

结果 6 一个行或列向量组线性相关（线性无关），则截短后（延长后）的向量组线性相关（线性无关）.

结果 7 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是两个向量组,如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出且 $r>s$, 则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关．或者说, 一个线性无关组不可能由比它含向量个数少的向量组线性表出．或者说，如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，那么 $r\leq s$. （**注意证明**）

结果 8 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

结果 9 两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量.

结果 10 极大线性无关组 一个向量组的一个部分组称为它的一个极大线性无关组，如果这个部分组线性无关，而再添加任意一个向量，则新的部分组线性相关．或者说，一个向量组的一个部分组称为它的一个极大线性无关组, 如果这个部分组线性无关, 而其余的向量均可由这个部分组线性表出（事实上，任意向量的表示法还是唯一的）.

结果 11 向量组任意一个极大线性无关组都与这个向量组本身等价．从而任意两个极大线性无关组都等价.

结果 12 一个向量组的极大线性无关组所含向量的个数是固定

的，这个个数是由向量组确定的，称为向量组的 **秩**.

结果 13 等价的向量组有相同的秩.

结果 14 证明向量组部分常用办法：（1）向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件为 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 只有零解, 而线性相关的充要条件为有非零解，特别是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中有一个是已知向量组的组合时使用此法；（2）证线性无关时可用反证法；（3）构造新的向量组, 即在一向量组上添加一个向量或一个向量组；（4）取极大线性无关组，尤其是讨论秩的问题时；（5）在证关于 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in P^n$, $i=1,\cdots,s$ 命题时，可将 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 转化为 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{s1}x_s=0 \\ a_{12}x_1+\cdots+a_{s2}x_s=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{1n}x_1+\cdots+a_{sn}x_s=0 \end{cases}$

(2) 例题

例 1 证明：如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关的充要条件为向量 β 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

证 $\Longleftarrow$ 显然.

$\Longrightarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关知，存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r,k$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0$ 成立．若 $k=0$, 则 $k_1,\cdots,k_r$ 不全为零且 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$, 故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，与题设矛盾．故 $k\neq 0$, 从而 $\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1+\cdots+\frac{k_r}{k}\alpha_r=0$, 即 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

例 2 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩 $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$, $\alpha_2=(1,0,2,3,-4)$, $\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$, $\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$.

解 法 1. 将行向量按行排成矩阵，只用矩阵的某行乘一数加到另一行，将矩阵消成阶梯形，当然这种阶梯形是实质上的阶梯形，非形式上的阶梯形. 则不为零的行（个数）所对应的原向量即为极大线性无关组（秩）.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\ 1&0&2&3&-4\\ 0&0&45&69&-98\\ 0&1&-14&-22&31\end{pmatrix}.$$

故向量组的秩为 3, α_1 可被 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 消去, 故极大线性无关组为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

法 2. 对 $\begin{pmatrix}6&4&1&-1&2&\alpha_1\\ 1&0&2&3&-4&\alpha_2\\ 1&4&-9&-16&22&\alpha_3\\ 7&1&0&-1&3&\alpha_4\end{pmatrix}$ 行变化阶梯形.

法 3. 将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_4$ 写成列向量行变化阶梯形，同一阶梯上取一个即是极大线性无关组.

例 3 设向量组为 $\alpha_1=(1,1,1,1,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,-1,-1,1)^T$, $\alpha_3=(1,-1,3,3,-1)^T$, $\alpha_4=(3,3,-2,-4,2)^T$, $\alpha_5=(5,2,1,1,1)^T$, $\alpha_6=(-4,-2,-1,1,-1)^T$

（1）求 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$ 的秩和一极大线性无关组.

(2) 将 α_6 用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 线性表出.

(3) 判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 是否等价，说明理由.

解 用法 2

例 4 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为一向量组，

(1)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关 $\Longrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

(2) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关（线性相关）$\Longleftrightarrow$ n 为奇数（偶数）.

证 (1) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩 $<n$，而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，故 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 的秩 $<n$，从而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关，矛盾. 故命题成立.

(2) 法 1. 设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_n(\alpha_1+\alpha_n)=0$, 证 $k_1=\cdots=k_n=0$.

法 2． 由 $(\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_n+\alpha_1)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A|=1+(-1)^{n+1}.$$

而 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 的秩 $=A$ 的秩，A 的秩 $=$ n 的充要条件为 n 奇数.

例 5 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，α_1 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表出. 则存在 $\beta_k(1\le k\le t)$ 使 $\beta_k,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证 假设对任意的 $\beta_i,\beta_i,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关知 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，故 β_i 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，$i=1,\cdots,t$. 从而由题设 α_1 可由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，与题设矛盾. 故命题成立.

例 6 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关. 那么 β,γ 至少有一个可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出或 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 等价.

证 假设 β,γ 均不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 则由题设，存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s,a,b$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+a\beta+b\gamma=0$ 成立，若 $a=0$, 则 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+b\gamma=0$, 而 γ 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，故 $b=0$, 从而 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关知 $k_1=\cdots=k_s=0$, 矛盾. 故 $a\neq0$. 同理 $b\neq0$. 从而 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 线性表出，γ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性表出，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 等价.

例 7 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m\geq2)$ 中 $\alpha_m\neq0$. 证明：对任意的数 $k_1,\cdots,k_{m-1}$，向量组 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m$ 线性无关的充要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证 $\Longrightarrow$ 取 $k_1=\cdots=k_{m-1}=0$ 知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性无关. 假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 则 α_m 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表出. 令 $\alpha_m=l_1\alpha_1+\cdots+l_{m-1}\alpha_{m-1}$. 由 $\alpha_m\neq0$, 有 $l_1,\cdots,l_{m-1}$ 不全为零，不妨设 $l_1\neq0$, 则 $\alpha_1+\frac{l_2}{l_1}\alpha_2+\cdots+\frac{l_{m-1}}{l_1}\alpha_{m-1}-\frac{1}{l_1}\alpha_m=0$, 取 $k_1=-\frac{1}{l_1}$, $k_2=\cdots=k_{m-1}=0$, 有 $\beta_1+\frac{l_2}{l_1}\beta_2+\cdots+\frac{l_{m-1}}{l_1}\beta_{m-1}=0$, 故 $\beta_1,\cdots,\beta_{m-1}$ 线性相关，矛盾. 从而有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

$\Longleftarrow$ 令 $l_1\beta_1+\cdots+l_{m-1}\beta_{m-1}=0$. 即 $l_1\alpha_1+\cdots+l_{m-1}\alpha_{m-1}+(l_1k_1+\cdots+l_{m-1}k_{m-1})\alpha_m=0$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关知，$l_1=\cdots=l_{m-1}=0$, 故 $\beta_1,\cdots,\beta_{m-1}$ 线性无关.

例 8 证明：向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geq2)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的数 $t_1,\cdots,t_s$ 使得对任意的 β，$\alpha_1+t_1\beta,\cdots,\alpha_s+t_s\beta$ 线性相关.

证 $\Longrightarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关知，存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立. 由 $s\geq2$ 知，方程 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s=0$ 有非零解 $t_1,\cdots,t_s$，故 $k_1t_1\beta+\cdots+k_st_s\beta=0$，从而 $k_1(\alpha_1+t_1\beta)+\cdots+k_s(\alpha_s+t_s\beta)=0$，故 $\alpha_1+t_1\beta,\cdots,\alpha_s+t_s\beta$ 线性无关.

$\Longleftarrow$ 取 $\beta=0$ 即可.

例 9 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 满足 $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_s(s\geq2)$. 则 $\beta-\alpha_1,\cdots,\beta-\alpha_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证 $\Longleftarrow$ 令 $k_1(\beta-\alpha_1)+\cdots+k_s(\beta-\alpha_s)=0$，即 $(k_2+\cdots+k_s)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots+k_s)\alpha_2+\cdots+(k_1+\cdots+k_{s-1})\alpha_s=0$，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关知，$\begin{cases}k_2+k_3+\cdots+k_s=0\\k_1+k_3+\cdots+k_s=0\\\qquad\vdots\\k_1+k_2+\cdots+k_{s-1}=0\end{cases}$ 而方程组的系数矩阵的行列式 $|A|=$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{s-1}(s-1) \neq 0$, 故 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 即 $\beta-\alpha_1, \cdots, \beta-\alpha_s$ 线性无关

$\Longrightarrow$ 假设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则它的秩 $< s$, 而向量组 $\beta-\alpha_1, \cdots, \beta-\alpha_s$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，故 $\beta-\alpha_1, \cdots, \beta-\alpha_s$ 的秩 $< s$ ，这与 $\beta-\alpha_1, \cdots, \beta-\alpha_s$ 线性无关矛盾．故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

例 10 设 $\beta_1 = \alpha_2+\alpha_3\cdots+\alpha_s, \beta_2 = \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s, \cdots, \beta_s = \alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}$. 证明： $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 等价.

证 由题设， $(s-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_s) = \beta_1+\cdots+\beta_s$, 即 $\alpha_1+\cdots+\alpha_s = \frac{1}{s-1}(\beta_1+\cdots+\beta_s)$, 从而 $\alpha_1 = \frac{1}{s-1}(\beta_1+\cdots+\beta_s)-\beta_1$, $\alpha_2 = \frac{1}{s-1}(\beta_1+\cdots+\beta_s)-\beta_2$, $\cdots$, $\alpha_s = \frac{1}{s-1}(\beta_1+\cdots+\beta_s)-\beta_s$, 即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性表出，又由题设， $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，故二者等价.

例 11 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 的秩为 4, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

证 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_3) = 0$. 若 $k_4 \neq 0$, $\alpha_5-\alpha_4$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 秩为 4 知， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，而再由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 秩为 3 知， α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，进而 α_5 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出．从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 的秩为 3, 这与题设矛盾．故 $k_4 = 0$, 进而 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

例 12 证明：向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 存在向量 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，但不能由其中任何少于 s 个向量线性表出.

证 $\Longrightarrow$ 令 $\beta = \alpha_1+\cdots+\alpha_s$, 显然 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，若 β 可由其中少于 s 个向量线性表出，不妨设 $\beta = k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r (r < s)$. 则 $\alpha_s = (k_1-1)\alpha_1+\cdots+(k_r-1)\alpha_r-\alpha_{r+1}-\cdots-\alpha_{s-1}$, 这与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关矛盾．故 β 不能由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的部分组线性表出.

$\Longleftarrow$ 假设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关．则其中有一向量可由其余的线性表出，不妨设 α_s 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，则由 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出知， β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，这与题设矛盾．故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

例 13 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$...(1) 线性无关，且可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$...(2) 线性表出．证明

(1) $r \leq s$

(2) 向量组 (2) 中存在 r 个向量被 (1) 替换后，所得向量组与 (2) 等价.

证 (1) 若 $r>s$，又 (1) 可由 (2) 线性表出，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，矛盾. 从而 $r\le s$.

(2) 设 $\alpha_1=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s$. 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关知，$\alpha_1\neq 0$，从而存在 $k_i\neq 0$, 不妨设 $k_1\neq 0$. 则 β_1 可由 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价, 由 α_2 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出, 必可由 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出, 设 $\alpha_2=l_1\alpha_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s$，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关知，$l_2,\cdots,l_s$ 中有非零数，不妨设 $l_2\neq 0$. 则 β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\cdots,\beta_s$ 线性表出，故 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\cdots,\beta_s$ 等价. 进而 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\cdots,\beta_s$ 等价，这样下去，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$ 等价.

例 14 设 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$, $i=1,\cdots,n$. 证明：$|a_{ij}|\neq 0\Longleftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证 $\Longrightarrow$ 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 则其中有一向量可由其余的线性表出，不妨设 $\alpha_n=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$, 则 $|a_{ij}|$ 的第 $1,\cdots,n-1$ 行分别乘 $-k_1,\cdots,-k_{n-1}$ 加到第 n 行得，$|a_{ij}|$ 可化成第 n 行为零的行列式，从而 $|a_{ij}|=0$，矛盾. 故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

$\Longleftarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关知，它的任一行均不能表成其余各行的线性组合，从而 $|a_{ij}|$ 利用行变化成上三角后，任一行均不为零，故 $|a_{ij}|\neq 0$.

例 15 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量. $\beta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j$, $i=1,\cdots,r$. 证明：$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关 $\Longleftrightarrow |a_{ij}|\neq 0$.

证 设 $(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)$, 其中，$g_i=(a_{i1},\cdots,a_{ir})'\in P^r$, $i=1,\cdots,r$.

$\Longrightarrow$ 假设 $|a_{ij}|=0$, 则 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$ 线性相关，其中有一可由其余的线性表出，不妨设 $\gamma_r=k_1\gamma_1+\cdots+k_{r-1}\gamma_{r-1}$, 故 $\beta_r=k_1\beta_1+\cdots+k_{r-1}\beta_{r-1}$，矛盾. 从而 $|a_{ij}|\neq 0$.

$\Longleftarrow$ 假设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性相关，不妨设 $\beta_r=k_1\beta_1+\cdots+k_{r-1}\beta_{r-1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(k_1\gamma_1+\cdots+k_{r-1}\gamma_{r-1})$, 即 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(\gamma_r-k_1\gamma_1-\cdots-k_{r-1}\gamma_{r-1})=0$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，$g_r-k_1\gamma_1-\cdots-k_{r-1}\gamma_{r-1}=0$, 故 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$ 线性相关，从而 $|a_{ij}|=0$，矛盾. 故 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

例 16 设 $t_1,\cdots,t_r$ 为互不相同的数，$r\le n$. 则 $\alpha_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{n-1})$，$i=1,\cdots,r$ 线性无关.

证 设 $x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r=0$, 则有 $\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +\cdots+ & x_r & =0\\ t_1x_1 & +\cdots+ & t_rx_r & =0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_1^{r-1}x_1 & +\cdots+ & t_r^{r-1}x_r & =0\end{array}\right.$ 其系数矩

阵的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{r-1} & t_2^{r-1} & \cdots & t_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le r}(t_j-t_i) \neq 0$，故 $x_1=\cdots=x_r=0$, 从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

例 17 证明： $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(\alpha_1\neq 0)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\alpha_i(1<i\le s)$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出.

证 $\Longrightarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，存在一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 设 $k_s,\cdots,k_1$ 中第一个不为零的数为 k_i, 由 $\alpha_1\neq 0$, $1<i\le s$, 即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_i\alpha_i=0$, 故 $\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}$, 即 α_i 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出.

$\Longleftarrow$ 显然.

例 18 若有序向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，在其前面添加一个向量 β，则在所得到的向量组中，能用其前面的向量线性表示的向量不多于一个.

证 假设 $\alpha_i=a\beta+a_1\alpha_1+\cdots+a_{i-1}\alpha_{i-1}$, $\alpha_j=b\beta+b_1\alpha_1+\cdots+b_{j-1}\alpha_{j-1}$, $i\neq j$. 则 $a\neq 0, b\neq 0$, 否则与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关矛盾．不妨设 $i<j$, 则 $a\alpha_j-b\alpha_i=a(b\beta+b_1\alpha_1+\cdots+b_{j-1}\alpha_{j-1})-b(a\beta+a_1\alpha_1+\cdots+a_{i-1}\alpha_{i-1})$, 故 α_j 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表出，矛盾．故命题成立.

例 19 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，而 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表出，则 α_1,α_2 仅差一数值因子.

证 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，存在不全为零的数 a_1,a_2,a_3 使得 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3=0$ 成立，由题设， $a_3=0$, 故 a_1,a_2 中有非零数，从而 α_1,α_2 仅差一数值因子

（二）线性方程组

基本知识

结果 1 线性方程组的同解变形——消元法： 1，交换两方程的位置； 2，某一方程乘一非零数； 3；某一方程乘一数加到另一方程—

一化成阶梯形方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + \ c_{1r} + \ \cdots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + \ c_{2r} + \ \cdots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 &= d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 &= 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots & \cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 &= 0 \end{cases}$$

方程组无解（有解） $\Longleftrightarrow 0 = d_{r+1} \neq 0$ 出现（不出现）；方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow r = n$ ；方程组有无穷多解 $\Longleftrightarrow r < n$, 此时有 $n-r$ 个自由未知量.

结果 2 解方程组 $AX = b$ 的消元法即是对增广矩阵 (A, b) 进行初等行变，化成阶梯形. $AX = b$ 有解的充要条件为 A 与 $\overline{A} = (A, b)$ 同秩.

结果 3 若齐次线性方程组 $A_{s\times n}X = 0$ 有非零解 $\Longleftrightarrow r(A) < n$ ， $(s = n$ 时， $|A| = 0)$ 特别地， $s < n$ 有非零解.

结果 4 令 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{si} \end{pmatrix}$, $i = 1, \cdots, n$. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则方程组 $AX = b$ 即为 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = b$, 从而 $AX = b$ 有解 $\Longleftrightarrow b$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出；有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 表示法唯一 $\Longleftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关；在有解的情况下， $AX = b$ 有无穷多解 $\Longleftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

结果 5 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的两个解的和仍是它的解；一个解的倍数仍是它的解，即解的线性组合仍是它的解.

结果 6 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 称为它的基础解系，若 (1) $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 线性无关； (2) 任一解为 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 的线性组合.

结果 7 齐次线性方程组 $AX = 0$ 有基础解系，且含 $n - r(A)$ 个解.
(注意证明)

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 为 $AX = 0$ 的基础解系, $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关. 则 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 也为 $AX = 0$ 的基础解系 $\Longleftrightarrow \beta_1, \cdots, \beta_s$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 C 使得 $(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)C$.

结果 8 线性方程组 $AX = b$ 的两个解的差是其导出组 $AX = 0$ 的解； $AX = b$ 的一个解与其导出组 $AX = 0$ 的一个解的和是该方程组的解.

结果 9 在有解的情况下，设 γ_0 为 $AX=b$ 的一个特解，则 $AX=b$ 的任一解 γ 可表成

$$\gamma=\gamma_0+\eta$$

其中 η 为 $AX=b$ 的一个解. 因此，对方程组 $AX=b$ 的任一个特解 γ_0，当 η 取遍它的导出组的解时，(a) 给出了它的所有解. 特别地，$AX=b$ 有唯一解当且仅当 $AX=0$ 有唯一解. $AX=0$ 解的个数与 $AX=b$ 解的个数一样多.

结果 10 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解的充要条件为 A 与 B 的行向量组等价.

例题

例 1 齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(B)$ 且其中一个方程组的解是另一方程组的解.

证 ρ 显然.

$\longrightarrow$ 不妨设 $AX=0$ 的解为 $BX=0$ 的解. 则 $AX=0$ 与 $\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$ 同解. 设 $BX=0$ 的基础解系为 $\eta_1,\cdots,\eta_s$, 则 $A\eta_i=0,\ i=1,\cdots,s$. 又 $r(A)=r(B)$, 故 $AX=0$ 的基础解系中也含 s 个解, 故 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 为 $AX=0$ 的基础解系. 从而 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

作为应用有

例 2 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解 $\Longleftrightarrow r(AB)=r(B)$.

作为应用有

例 3 若 $r(AB)=r(B)$, 则关于任意可乘矩阵 C 有 $r(ABC)=r(BC)$.

证 $r(ABC)=r(BC)\Longleftrightarrow ABCX=0$ 与 $BCX=0$ 同解，显然若 $BCX=0$，则 $ABCX=0$. 反之，若 $ABCX_0=0$，即 CX_0 为 $ABX=0$ 的解，从而为 $BX=0$ 的解，故 $BCX_0=0$.

例 4 若存在正整数 $k>n$，使 n 阶方阵 A 满足 $A^k=0$, 则 $A^n=0$.

证 由 $A^k=0, |A|=0$, 从而 $r(A)<n$, 故 $0\le r(A^{n+1})\le\cdots\le r(A)\le n-1$. 但 $r(A^{n+1}),\cdots,r(A)$ 为 $n+1$ 个非负整数，且只能取值 $0,1,\cdots,n-1$, 故存在 $1\le r\le n$, 使 $r(A^r)=r(A^{r+1})$. 由 $A^rX=0$ 的解为 $A^{r+1}X=0$ 的解知，$A^rX=0$ 与 $A^{r+1}X=0$ 同解. 显然 $A^{r+1}X=0$ 的解为 $A^{r+2}X=0$ 的解，又若 $A^{r+2}X_0=0$, 即 $A^{r+1}AX_0=0$, 故 AX_0 为 $A^{r+1}X=0$ 的解, 从而为 $A^rX=0$ 的解，故 $A^rAX_0=0$，即 $A^{r+1}X_0=0$. 故 $A^{r+1}X=0$ 与 $A^{r+2}X=0$ 同解，进而 $r(A^{r+1})=r(A^{r+2})$，这样下去，$r(A^r)=\cdots=r(A^k)=0$, 即 $A^r=0$, 进而 $A^n=0$.

利用上题可证

例 5 对方阵 A，若存在正整数 s 使 $r(A^s)=r(A^{s+1})$，则对任意的正整数 k 有 $r(A^s)=r(A^{s+k})$.

例 6 设 C 为 $n\times r$ 列满秩矩阵，则存在列满秩矩阵 X 使 $C'X=0$ 且 X 的列数 $\le n-r$.

证 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $C'X=0$ 基础解系，令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})$, 则 A 满足要求.

例 7 若 C 列满秩矩阵， $CA=B$. 则 B 的第 $j_1,\cdots,j_s$ 列线性相关（无关）当且仅当 A 的第 $j_1,\cdots,j_s$ 列线性相关（无关），特别地， A 与 B 的列向量组的极大线性无关组相互对应， A 与 B 的秩相等.

证 将 A,B 按列分块， $A=(A_1,\cdots,A_s)$, $B=(B_1,\cdots,B_s)$. 则 $k_1B_1+\cdots+k_sB_s\Longleftrightarrow k_1CA_1+\cdots+k_sCA_s=0\Longleftrightarrow k_1A_1+\cdots+k_sA_s=0$，故命题成立.

例 8 设矩阵 $A_{n\times r}$ 的列向量为某齐次线性方程组的基础解系. 证明： $C_{n\times r}$ 也为该方程组的基础解系充要条件是 $C=AB$, 其中 B 为 r 阶可逆矩阵， $r=r(A)=r(C)$.

证 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 的列向量组为 $DX=0$ 的基础解系. 若 $C=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$ 也为 $DX=0$ 的基础解系，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价，故存在 r 阶可逆阵 B 使得 $C=AB$. 反之， C 的列向量组为 $DX=0$ 的解，且 $r(C)=r$, 故 C 的列向量组为 $DX=0$ 的基础解系.

例 9 设 $A=(a_{ij})$ 为实 n 阶方阵. 证明：

1) 若 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,\cdots,n$. 则 $|A|\neq 0$.

2) 若 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,\cdots,n$. 则 $|A|>0$.

证 (1) 若 $|A|=0$, 则方程组 $AX=0$ 有非零解 $\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ 令 $|b_i|=max\{|b_1|,\cdots,|b_n|\}$. 则 $|b_i|>0$. 由 $a_{i1}b_1+\cdots+a_{in}b_n=0$ 知， $0=|a_{i1}b_1+\cdots+a_{in}b_n|>|a_{ii}b_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|>0$, 矛盾，故 $|A|\neq 0$.

(2) 令 $f(t)=\begin{vmatrix}a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n}\\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 则 $f(0)=a_{11}\cdots a_{nn}>0$. 由 (1), $f(1)=|A|\neq 0$. 若 $f(1)<0$, 则由 $f(t)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数知，存在 $t_0\in[0,1]$ 使 $f(t_0)=0$, 但 $f(t_0)$ 所对应的矩阵满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|t_0a_{ij}|$, $i=1,\cdots,n$，再由 (1), $f(t_0)\neq 0$, 矛盾. 故 $|A|>0$.

例 10 设有 s 个行向量 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})(1\le i\le s, s\le n)$, 其分量满足

$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,\cdots,s$. 则这 s 个向量线性无关.

证 令 $\beta_i=(a_{i1},\cdots,a_{is})(1\le i\le s)$, 利用上题知 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 从而其延长组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

例 11 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，证明: β 不为 $AX=0$ 的解 $\Longleftrightarrow \beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性无关.

证 ρ 假设 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性相关. 则存在不全为零的数 $k,k_1,\cdots,k_s$ 使得 $k\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+\cdots+k(\beta+\alpha_s)=0$, 即 $(k+k_1+\cdots+k_s)\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$. 则 $k+k_1+\cdots+k_s\neq 0$, 否则，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关， $k_1=\cdots=k_s=0$. 又 β 不为 $AX=0$ 的解，故 $\beta\neq 0$ ，进而还有 $k=0$ ，矛盾．这样 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，从而为 $AX=0$ 的解，矛盾．故 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_s$ 线性无关.

$\longrightarrow$ 若 β 为 $AX=0$ 的解. 则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，进而 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，又 $s+1>s$ ，故 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性相关，矛盾．故 β 不为 $AX=0$ 的解.

例 12 设 A 为 $n\times s$ 矩阵， B 为 $n\times t$ 列满秩矩阵. $C=(A,B)$. $X^{(1)},\cdots,X^{(r)}$ 为 $CX=0$ 的任一基础解系．令 $X^{(i)}=\begin{pmatrix}X_1^{(i)}\\X_2^{(i)}\end{pmatrix}$ ，其中 $X_1^{(i)}$ 为的 $X^{(i)}$ 前 s 个分量， $X_2^{(i)}$ 为 $X^{(i)}$ 的后 t 个分量，证明： $X_1^{(1)},\cdots X_1^{(r)}$ 线性无关.

证 $CX^{(i)}=(A,B)\begin{pmatrix}X_1^{(i)}\\X_2^{(i)}\end{pmatrix}=AX_1^{(i)}+BX_2^{(i)}=0$. 设 $k_1X_1^{(1)}+\cdots+k_rX_1^{(r)}=0$, 则 $k_1AX_1^{(1)}+\cdots+k_rAX_1^{(r)}=0$. 又 $k_iAX_1^{(i)}+k_iBX_2^{(i)}=0$, $i=1,\cdots,r$. 从而 $k_1AX_1^{(1)}+\cdots+k_rAX_1^{(r)}+k_1BX_2^{(1)}+\cdots+k_rBX_2^{(r)}=0$, 故 $k_1BX_2^{(1)}+\cdots+k_rBX_2^{(r)}=0$, 即 $B(k_1X_2^{(1)}+\cdots+k_rX_2^{(r)})=0$. 因 B 为列满秩, 故 $k_1X_2^{(1)}+\cdots+k_rX_2^{(r)}=0$, 从而 $k_1\begin{pmatrix}X_1^{(1)}\\X_2^{(1)}\end{pmatrix}+\cdots+k_r\begin{pmatrix}X_1^{(r)}\\X_2^{(r)}\end{pmatrix}=0$, 即 $k_1X^{(1)}+\cdots+k_rX^{(r)}=0$, 由 $X^{(1)},\cdots,X^{(r)}$ 线性无关， $k_1=\cdots=k_r=0$, 即 $X_1^{(1)},\cdots X_1^{(r)}$ 线性无关.

例 13 若线性方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$.

证 法 1 由题意， $AX=0$ 与 $\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$ 同解，故 $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\ge r(B)$.

法 2 $AX=0$ 的基础解系中含 $n-r(A)$ 个解，这 $n-r(A)$ 个线性无关的向量全为 $BX=0$ 的解，故 $n-r(A)\le n-r(B)$, 即 $r(A)\ge r(B)$.

例 14 设 A 为实矩阵．证明： $AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解.

证 若 α 为的 $AX=0$ 解，即 $A\alpha=0$, 故 $A'A\alpha=0$. 即 α 为 $A'AX=0$ 的解．反之，若 α 为 $A'AX=0$ 的解，即 $A'A\alpha=0$, 故 $(A\alpha)'A\alpha=0$. 令

$A\alpha=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, 则 $b_1^2+\cdots+b_n^2=0$. 由 $b_1,\cdots,b_n$ 为实数，故 $b_1=\cdots=b_n=0$, 即 $A\alpha=0$, 故 α 为 $AX=0$ 的解，总之， $AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解.

类似可证矩阵方程

例 15 设 A 为 $n\times m$ 实矩阵， X 为 $m\times t$ 矩阵．证明： $AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解.

例 16 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维线性无关的向量组，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为某个含 n 个未知量的齐次线性方程组的基础解系.

证 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\ a_{2s}\\ \vdots\\ a_{ns}\end{pmatrix}$, 令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)_{n\times s}$, 则 $r(A)=s$.

设 $A'X=0$ 的基础解系为 $\beta_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{n1}\end{pmatrix},\cdots,\beta_{n-s}=\begin{pmatrix}b_{1,n-s}\\ b_{2,n-s}\\ \vdots\\ b_{n,n-s}\end{pmatrix}$, 令 $B'=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s})_{n\times(n-s)}$，则 $A'B'=0$，即 $BA=0$. 故 $B\alpha_1=0,\cdots,B\alpha_s=0$. 又 $r(B)=n-s$，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 $BX=0$ 的基础解系.

例 17 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $m<n$, $AX=0$ 的基础解系为 $\beta_i=\begin{pmatrix}b_{i1}\\ \vdots\\ b_{in}\end{pmatrix}$, $i=1,\cdots,n-m$. 求 $\sum_{j=1}^n b_{ij}y_j=0$, $i=1,\cdots,n-m$ 的一个基础解系.

解 由题意， $r(A)=m$, 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-m})$，则 $r(B)=n-m$, $\sum_{j=1}^n b_{ij}y_j=0$, $i=1,\cdots,n-m$ 即为方程组 $B'Y=0$, 由 $AB=0$, 即 $B'A'=0$， A' 的列向量组为 $B'Y=0$ 的解，从而也为 $B'Y=0$ 的基础解系.

例 18 设 (1) $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}A_{11}x_1+\cdots+A_{1n}x_n=0\\ A_{21}x_1+\cdots+A_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ A_{n1}x_1+\cdots+A_{nn}x_n=0\end{cases}$ 则 (1) 与 (2) 同解 $\Longleftrightarrow A=0$ 或 A 可逆，其中 $A=(a_{ij})$ 为实矩阵， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证 $\longrightarrow$ 若 $A=0$, (2) 的系数矩阵也为 0, 故同解．若 A 可逆，则 $|A^*|\neq 0$, 故 (2) 的系数矩阵 $(A^*)'$ 可逆，即 (1) 与 (2) 均只有 0 解，当然

同解.

ρ 由 (1) 与 (2) 同解, $r(A)=r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$ 若 $r(A)<n-1$, 则 $r(A)=r(A^*)=0$, 即 $A=0$. 若 $r(A)=n-1$, 则 $r(A)=r(A^*)=1$, 即 $r(A)=1$. 可令 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc \end{pmatrix}$, a,b 不全为零. $(A^*)'=\begin{pmatrix} bc & -ac \\ -b & a \end{pmatrix}$. 故 (1) 为 $ax_1+bx_2=0$, (2) 为 $-bx_1+ax_2=0$, 由 $(-b,a)$ 为 (1), 从而也为 (2) 的解, 故 $b^2+a^2=0$. 由 A 为实矩阵, $a=b=0$, 矛盾. 故 $A=0$ 或 A 可逆.

例 19 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 $r(A)=n-1$, 求 $AX=0$ 的通解.

解 $AX=0$ 的基础解系含 $n-(n-1)=1$ 个解, 而显然 $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的解, 故通解为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

例 20 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$, 且 A 有一代数余子式不为 0, 求 $AX=0$ 的通解.

解 由 A 有一代数余子式不为 0 知 $r(A)=n-1$, 故 $AX=0$ 的基础解系中含 $n-(n-1)=1$ 个解. 不妨设 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$, 则 $\sum_{k=1}^n a_{sk}A_{ik}=0$, $s=1,\cdots,n$. 即 $\begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的解, 从而 $k\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 为通解.

例 21 设 $A=(a_{ij})$ 可逆. 证明: 当 $r<n$ 时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的基础解系为 $\begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}$, $i=r+1,\cdots,n$.

证 因 A 可逆，故 A^* 可逆，从而 $\begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}, i=r+1,\cdots,n$ 线性无关，且易知为方程组的解．又由 A 可逆知，$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$ 的秩为 r，故方程组的基础解系含 $n-r$ 个解，从而 $\begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}, i=r+1,\cdots,n$ 为方程组的基础解系．

例 22 设 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,\cdots,n$ 为整系数线性方程组．证明：对任意的整数 $b_1,\cdots,b_n$ 方程组均有解 $\Longleftrightarrow |A|=1$.

证 ρ 分别取 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，设方程组的整数解分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=E$，故 $|A||\alpha_1,\cdots,\alpha_n|=1$, 又 $|A|$ 与 $|\alpha_1,\cdots,\alpha_n|$ 均为整数，故 $|A|=1$ 或 -1.

$\longrightarrow$ 由克莱姆法则易得.

例 23 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 $m\ (m<n)$， $n\times(n-m)$ 矩阵 B 的秩为 $n-m$, 且 $AB=0$， X_0 为 $AX=0$ 的解．则 $BX=X_0$ 有唯一解.

证 设 $B=(b_1,\cdots,b_{n-m})$，由 $AB=0$ 知 $b_1,\cdots,b_{n-m}$ 为 $AX=0$ 的解. 又 $r(B)=n-m$, 故 $b_1,\cdots,b_{n-m}$ 线性无关. 而 $r(A)=m$， $AX=0$ 的基础解系含 $n-m$ 个解. 从而 $b_1,\cdots,b_{n-m}$ 为 $AX=0$ 的基础解系．而 X_0 为 $AX=0$ 的解，故 X_0 可由 $b_1,\cdots,b_{n-m}$ 线性表出，设 $X_0=k_1b_1+\cdots+k_{n-m}b_{n-m}=B\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-m} \end{pmatrix}$, 即 $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-m} \end{pmatrix}$ 为 $BX=X_0$ 的解．而由 $r(B)=n-m$ 知 $BX=X_0$ 有唯一解，故 $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-m} \end{pmatrix}$ 为其唯一解.

例 24 设 $AX=b(b\neq 0)$ 有一非零解 β_0, $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系．令 $\gamma_1=\beta_0, \gamma_2=\alpha_1+\beta_0,\cdots,\gamma_{n-r+1}=\alpha_{n-r}+\beta_0$. 证明：

(1) $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r+1}$ 为 $AX=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解.

(2) $\beta = k_1\gamma_1 + \cdots + k_{n-r+1}\gamma_{n-r+1}$ 为 $AX = b$ 的解 $\Longleftrightarrow k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$.

证 (1) 显然 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r+1}$ 为 $AX = b$ 的解. 设 $l_1\gamma_1 + \cdots + l_{n-r+1}\gamma_{n-r+1} = 0$, 即 $(l_1 + \cdots + l_{n-r+1})\beta_0 + l_2\alpha_1 + \cdots + l_{n-r+1}\alpha_{n-r} = 0$, 若 $l_1 + \cdots + l_{n-r+1} \neq 0$, 则 β_0 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 线性表出，从而 β_0 为 $AX = 0$ 的解. 又 $A\beta_0 = b$, 故 $b = 0$，矛盾. 从而 $l_1 + \cdots + l_{n-r+1} = 0$，进而 $l_2\alpha_1 + \cdots + l_{n-r+1}\alpha_{n-r} = 0$, 由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 线性无关知，$l_2 = \cdots = l_{n-r+1} = 0$, 而且 $l_1 = 0$，故 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r+1}$ 线性无关.

(2) $\longrightarrow \beta = k_1\gamma_1 + \cdots + k_{n-r}\gamma_{n-r} + (1 - k_1 - \cdots - k_{n-r})\gamma_{n-r+1} = \gamma_{n-r+1} + k_1(\gamma_1 - \gamma_{n-r+1}) + \cdots + k_{n-r}(\gamma_{n-r} - \gamma_{n-r+1})$, 由 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r+1}$ 为 $AX = b$ 的解, $\gamma_i - \gamma_{n-r+1}$ 为 $AX = 0$ 的解， $i = 1, \cdots, n-r$, 故 β 为 $AX = b$ 的解.

ρ $\beta = k_1\gamma_1 + \cdots + k_{n-r+1}\gamma_{n-r+1} = k_1\beta_0 + k_2(\alpha_1 + \beta_0) + \cdots + k_{n-r+1}(\alpha_{n-r} + \beta_0) = (k_1 + \cdots + k_{n-r+1})\beta_0 + k_2\alpha_1 + \cdots + k_{n-r+1}\alpha_{n-r}$, 由 $A\beta = b, A\beta_0 = b, A\alpha_i = 0, i = 1, \cdots, n-r$ 知， $b = (k_1 + \cdots + k_{n-r+1})b$, 又 $b \neq 0$，故 $k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$.

例 25 设 A 为 $n \times s$ 矩阵. 证明： $AX = b$ 对任意的 b 有解 $\Longleftrightarrow r(A) = n$.

证 ρ 分别取 b 为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \eta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $AX = \eta_i$ 有解， $i = 1, \cdots, n$. 即线性无关组 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 可由 A 的列向量组线性表出，故 $r(A) \geq n$, 又 $r(A) \leq n$, 从而 $r(A) = n$.

$\longrightarrow$ 由 $n \geq r(A, b) \geq r(A) = n$ 知， $r(A, b) = r(A)$，故 $AX = b$ 有解.

例 26 证明：线性方程组 $AX = b$ 有解 $\Longleftrightarrow A'X = 0$ 的解是 $b'X = 0$ 的解.

证 $A'X = 0$ 的解是 $b'X = 0$ 的解 $\Longleftrightarrow A'X = 0$ 与 $\begin{cases} A'X = 0 \\ b'X = 0 \end{cases}$ 同解 $\Longleftrightarrow r(A') = r\begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow r(A) = r(A, b) \Longleftrightarrow AX = b$ 有解.

例 27 设 A 为 n 阶实方阵， b 为 n 维实列向量. 证明： $A'AX = A'b$ 有解.

证 由 $r(A'A) \leq r(A'A, A'b) = r(A'(A, b)) \leq r(A') = r(A'A)$ 知， $r(A'A) = r(A'A, A'b)$, 故 $A'AX = A'b$ 有解.

例 28 如果线性方程组 $AX = b$ 的系数矩阵 A 与 $\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$ 有相同的秩，那么 $AX = b$ 有解.

证 由 $r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\\ b' & 0\end{pmatrix}\geq r(A,b)\geq r(A)$ 有， $r(A)=r(A,b)$, 故 $AX=b$ 有解.

例 29 设 A 为 n 阶反对称矩阵， b 是 n 维列向量， $AX=b$ 有解. 证明： $r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\\ -b' & 0\end{pmatrix}$.

证 设 X_0 是 $AX=b$ 的解，即 $AX_0=b$. 故 $b'=-X_0A$ ，而 $b'X_0=-X_0AX_0=-X_0'b$, 故 $b'X_0=0$, 即 $\begin{pmatrix}A\\ -b'\end{pmatrix}X_0=\begin{pmatrix}b\\ 0\end{pmatrix}$, 从而 X_0 为 $\begin{pmatrix}A\\ -b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ 0\end{pmatrix}$ 的解，故 $r\begin{pmatrix}A\\ -b'\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & b\\ -b' & 0\end{pmatrix}$ ，这样 $r(A)=r(A,b)=r\begin{pmatrix}A\\ b'\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\ -b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & b\\ b' & 0\end{pmatrix}$.

例 30 证明：线性方程组 $AX=b$ 无解 $\Longleftrightarrow$ 存在行向量 c 使得 $cA=0$, $cb=1$.

证$\longrightarrow$ 假设 $AX=b$ 有解 X_0, 即 $AX_0=b$, 故 $cAX_0=cb$, 即 $0=1$ ，矛盾. 从而 $AX=b$ 无解.

ρ 设 A 的秩为 r ，由 $AX=b$ 无解知，增广矩阵 (A,b) 可行变为 $D=\begin{pmatrix}B & \alpha\\ 0 & d\end{pmatrix}$, 其中 $d=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}$, $r(B)=r(A)$ ，即存在可逆矩阵 P 使得 $PA=D$, 设 P 的第 $r+1$ 行为 c, 则 $cA=0,cb=1$.

例 31 设 A 为 $m\times s$ 矩阵， B 为 $m\times n$ 矩阵. 证明： $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow r(A,B)=r(A)$.

证 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$. 则 $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow AX_i=b_i$ ， $i=1,\cdots,n$ $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,b_i)$, $i=1,\cdots,n$. $\Longleftrightarrow b_i$ 可由 A 的列向量组线性表出 $\Longleftrightarrow$ A 的列向量组与 (A,B) 的列向量组等价 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)$.

例 32 证明： n 次多项式至多有 n 个不同的根.

证 假设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $c_1,\cdots,c_{n+1}$ ，即 $\begin{cases}c_1^na_n+\cdots+c_1a_1+a_0\\ \vdots\\ c_{n+1}^na_n+\cdots+c_{n+1}a_1+a_0\end{cases}$ 系数行列式 $\begin{vmatrix}1 & c_1 & \cdots & c_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & c_{n+1} & \cdots & c_{n+1}^n\end{vmatrix}\neq 0$, 故 $a_0=\cdots=a_n=0$, 矛盾，从而命题成立.

例 33 设 A 为 n 阶方阵. 证明存在 n 阶非零方阵 B 使得 $AB=0$

$\Longleftrightarrow |A|=0.$

证 $\longrightarrow$ 由 $|A|=0$, 方程 $AX=0$ 有非零解 α_1, 令 $B=(\alpha_1,0,\cdots,0)_{n\times n}$，则 $B\neq 0$ 且 $AB=0.$

ρ 设 $B=(b_1,\cdots,b_n)$， $b_1\neq 0$. 则 $Ab_1=0$，即 b_1 为 $AX=0$ 的非零解，故 $|A|=0.$

例 34 设实矩阵 $A_{n\times s}$ 列满秩， $s<n$. 证明：

（1）存在列满秩矩阵 $B_{n\times(n-s)}$ 使得 $P=(A,B)$ 可逆且 $B'A=0.$

（2）若 $X_0=C_{n\times m}$ 为矩阵方程 $A'X_{n\times m}=0$ 的解， $m>n-s$. 则 C 的列向量组线性相关.

证 （1）由 $r(A)=r(A')=s$ 知，齐次线性方程组 $A'X=0$ 有基础解系 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-s}$. 令 $B=(\eta_1,\cdots,\eta_{n-s})_{n\times(n-s)}$. 则 $A'B=0$, 即 $B'A=0$ 且 B 为列满秩. 令 $P=(A,B)$. 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$. 下证 P 可逆. 即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\eta_1,\cdots,\eta_{n-s}$ 线性无关. 若 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1\eta_1+\cdots+y_{n-s}\eta_{n-s}=0$,

即 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\eta_1,\cdots,\eta_{n-s})\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_s\\ y_1\\ \cdots\\ y_{n-s}\end{pmatrix}=0$, 即 $(A,B)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_s\\ y_1\\ \cdots\\ y_{n-s}\end{pmatrix}=0$, 故 $B'(A,B)\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_s\\ y_1\\ \cdots\\ y_{n-s}\end{pmatrix}$

$=0$, 从而 $B'B\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_{n-s}\end{pmatrix}=0$. 而 $r(B'B)=r(B)=n-s$, 即 $B'B$ 可逆，故

$y_1=\cdots=y_{n-s}=0$, 从而 $A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_s\end{pmatrix}=0$. 又 $r(A)=s$, 故 $x_1=\cdots=x_s=0$, 即

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\eta_1,\cdots,\eta_{n-s}$ 线性无关.

（2）由 $A'C=0$, 设 $C=(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$, 则 $A'\gamma_i=0$, $i=1,\cdots,m$. 即 $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 为 $A'X=0$ 的解，而 $A'X=0$ 的基础解系含 $n-s$ 个解. 由 $m>n-s$ 知， C 的列向量组线性相关.

例 35 设 $f(t),g(t)$ 为无公因子的多项式， M 为一 $n\times n$ 矩阵. 令 $A=f(M),B=g(M)$. 求证方程 $ABX=0$ 的解 X 一定可写成 $Y+Z$，其中 Y 和 Z 分别满足 $BY=0,AZ=0.$

证 由 $f(t),g(t)$ 无公因子, 存在多项式 $u(t),v(t)$ 使得 $u(t)f(t)+v(t)g(t)=1$，从而 $u(M)f(M)+v(M)g(M)=E$, 即 $u(M)A+v(M)B=E$, 故对 $ABX=0$ 的解 X 有 $X=EX=u(M)AX+v(M)BX$, 令 $u(M)AX=Y,v(M)BX=Z$, 由 $AB=BA$ 易知 $BY=0,AZ=0.$

例 36 已知非齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}\quad(II)\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=-5\\nx_2-x_3-2x_4=-11\\x_3-2x_4=-t+1\end{cases}$$

1) 求方程组 (I)，用其导出组的基础解系表示通解.

2) 当方程组 (II) 中的参数 m,n,t 为何值时，方程组 (I) 与 (II) 等价.

证 1) 对 (I) 的增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}$ 行变为

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-1&0&2&4\\0&0&-1&-1&5\end{pmatrix},$$

故导出组的基础解系为 $k\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\1\end{pmatrix}$，特解为 $\begin{pmatrix}-10\\6\\3\\1\end{pmatrix}$，故通解为 $k\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\6\\3\\1\end{pmatrix}$.

2) 将 $\begin{pmatrix}-10\\6\\3\\1\end{pmatrix}$ 代入 (II) 得 $m=\frac{3}{2},n=-1,t=0$，经验算知命题成立.

例 37 ω 为复数， $\omega^n=1$. 对任意的 $k\in N,0<k<n,\omega^k\neq 1$. 令 $A=\begin{pmatrix}1&\omega^t&\omega^{2t}&\cdots&\omega^{(n-1)t}\\1&\omega^{t+1}&\omega^{2(t+1)}&\cdots&\omega^{(n-1)(t+1)}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\1&\omega^{t+s-1}&\omega^{2(t+s-1)}&\cdots&\omega^{(n-1)(t+s-1)}\end{pmatrix}$, $s,t\in N^*,s<n$. 对任意的 $b\in C^{s\times 1},c\in C^{n\times 1}$, 分别讨论 $AX=b$ 与 $A^TY=c$ 的解的状况.

解 由 ω 的条件，ω 为 n 次单位原根. 由 $s<n$ 知，$\omega^t,\omega^{t+1},\cdots,\omega^{t+s-1}$

两两不同，从而 A 有 s 一级子式 $\begin{vmatrix} 1 & \omega^t & \omega^{2t} & \cdots & \omega^{(s-1)t} \\ 1 & \omega^{t+1} & \omega^{2(t+1)} & \cdots & \omega^{(s-1)(t+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & \omega^{t+s-1} & \omega^{2(t+s-1)} & \cdots & \omega^{(s-1)(t+s-1)} \end{vmatrix}$ 为范德蒙行列式，不为 0，故 $r(A)=s=r(A,b)$. $AX=b$ 有解且有 $n-s$ 个自由未知量，从而有无穷多解.

$A^TY=c$ 为 n 个方程， s 个未知数， $n>s$. 若 $r(A^T,c)=s+1$, 则方程组 $A^TY=c$ 无解. 若 $r(A^T,c)=s$，则方程组 $A^TY=c$ 有唯一解.

例 38 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 n 阶方阵，$r(A)=n-1$ 且 $\alpha_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}$, 若 $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. 求 $AX=\beta$ 的解.

解 $AX=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$, 即 $\beta=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$. 由题设知，$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $AX=\beta$ 的特解. 又 $r(A)=n-1$, 故 $AX=0$ 的基础解系中只有一解. 由 $\alpha_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的基础解系. 故 $AX=\beta$ 的通解为 $X=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

例 39 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

的行向量组是线性方程 $x_1+\cdots+x_n=0$ 的解，令 M_i 表示 A 中划掉第 i 列的 $n-1$ 阶行列式. 证明：

1) $\sum_{i=1}^n(-1)^iM_i=0 \Longleftrightarrow A$ 的行向量组不是 $x_1+\cdots+x_n=0$ 的基础解系.

2) 令 $\sum_{i=1}^n(-1)^iM_i=1$, 求 $M_i=$?

解 1) $\Longrightarrow$ 由题设，$(1,\cdots,1)^T$ 为 $AX=0$ 的解，$(-M_1,\cdots,(-1)^nM_n)^T$ 也为 $AX=0$ 的解，若 $r(A)=n-1$, 则 $(-M_1,\cdots,(-1)^nM_n)=k(1,\cdots,1)$, 由 $sum_{i=1}^n(-1)^iM_i=0$ 知 $k=0$, 故 $M_i=0, i=1,\cdots,n$, 这与 $r(A)=n-1$ 矛盾，故 A 的行向量组不是 $x_1+\cdots+x_n=0$ 的基础解系. $r(A)<n-1$ 显然不是.

$\Longleftarrow$ A 的行向量组线性相关,故 $M_i=0, i=1,\cdots,n$. 从而 $\sum_{i=1}^n(-1)^iM_i=0$.

2) 由 1), A 的行向量组是 $x_1+\cdots+x_n=0$ 的基础解系，易求 $M_i=(-1)^i\frac{1}{n}$.

例 40 设 A,B 分别为数域 P 上的 $m\times s$ 矩阵和 $s\times n$ 矩阵, 令 $AB=C$. 证明：如秩 $A=r$, 则数域 P 上存在一个秩为 $min\{s-r,n\}$ 的 $s\times n$ 矩阵 D, 满足对于数域 P 上的任何 n 阶方阵 Q, $A(DQ+B)=C$.

证 令 $min\{s-r,n\}=t$, 设 $AX=0$ 的基础解系为 $\eta_1,\cdots,\eta_{s-r}$, 令 $D=(\eta_1,\cdots,\eta_t,0,\cdots,0)$ 即可.

第 4 章　矩阵

基本知识

结果 1 矩阵的加、减、乘和数乘、转置、逆运算及运算规律.

结果 2 $AA^*=A^*A=dE$, $d=|A|\neq 0$ ρ $A^{-1}=d^{-1}A^*$.

结果 3 初等矩阵与初等变换的关系.

结果 4 矩阵的等价：称 A 与 B 等价，若 B 可经一系列的初等变换化为 A，即存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s,Q_1,\cdots,Q_t$ 使得 $A=P_s\cdots P_1BQ_1\cdots Q_t$. 两同阶矩阵等价当且仅当同秩. 任何一矩阵 A 与 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价，即存在可逆阵 P,Q 使得 $A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 特别地，矩阵 A 可逆当且仅当存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots,P_t$ 使得：　$A=P_1\cdots P_t$. 可逆矩阵总可以经过一系列的初等行变化成单位矩阵.

结果 5 分块矩阵及初等块阵．特别地，$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$.

结果 6 （1）$rank(A)+rank(B)-n\leq rank(AB)\leq rank(A)$、$rank(B)$, 其中 n 为 A 的列数.（2）$rank(A+B)\leq rank(A)+rank(B)$. (3) 若 P,Q 可逆，则 $rank(PA)=rank(A)=rank(AQ)$. (4) 若 $AB=0$，往往将 B 按列分块, 则列向量为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解且 $rank(A)+rank(B)\leq n$，其中 n 为 A 的列数.

结果 7 矩阵的秩即其最高阶非零子式的阶数.

结果 8 矩阵 M 的秩为 r 当且仅当 M 有 r 阶非零子式而无 $r+1$ 阶非零子式.

结果 9 矩阵 M 的秩 $\geq r \iff M$ 有一 r 阶子式不为零.

结果 10 矩阵 M 的秩 $\leq r \iff M$ 的所有 $r+1$ 阶子式为零.

结果 11 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

结果 12 由秩的定义，$n\times n$ 方阵 A 的秩为 n 充要条件为 $|A|\neq 0$.

结果 13 $|A|=0$ 当且仅当 A 的行向量组线性相关.

结果 13 常用分块法：（1）整体算一块；（2）每个元素算一块；（3）按行(列)分块；（4）$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中往往要求 A 与 D 有一可逆；（5）$(A,B),(A,B)^T$. 常用结果：　$rank\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\geq rank(A_i), i=1,2,3,4.$; $rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\geq rank(A)+rank(D)$, $rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=rank(A)+rank(B)$. 证秩时常用技巧: 将所证不等式或等式适当左右移项, 变为证只有加号的

不等式或等式，构造一准对角阵使其秩为较大一侧的数.

结果 14 与 $diag(\lambda_1 E_1, \cdots, \lambda_s E_s)$, 可交换的矩阵只能是 $diag(B_1, \cdots, B_s)$. 特别地，与 $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ，可交换的矩阵只能是 $diag(b_1, \cdots, b_n)$, 这里 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$.

(1) 矩阵的运算

例 1 A 为 n 阶方阵，n 是奇数，$|A| = 1$ ，$AA' = E$. 证明：$|E - A| = 0$.

证 由 $|E - A| = |AA' - A| = |A||A' - E| = |A - E| = (-1)^n |E - A|$, n 为奇数，故 $|E - A| = -|E - A|$, 即 $|E - A| = 0$.

例 2 设 A 是 n 阶方阵，$AA' = E, |A| < 0$. 求 $|A + E|$.

解 由 $AA' = E$ 及 $|A| < 0$ 知，$|A| = -1$, 故 $|A + E| = |A + AA'| = |A||A' + E| = -|A + E|$ ，从而 $|A + E| = 0$.

例 3 1) 设 $A^2 = B^2 = E$ 且 $|A| + |B| = 0$. 证明：$|A + B| = 0$.

2) 设 A, B 为正交阵，$|A| + |B| = 0$. 则 $|A + B| = 0$.

证 1) 由 $A^2 = B^2 = E$ 及 $|A| + |B| = 0$ 有，$|A|, |B|$ 一个为 1, 一个为 -1, 不妨设 $|A| = 1, |B| = -1$, 故 $|A + B| = |A + A^2 B| = |A||E + AB| = |B^2 + AB| = |A + B||B| = -|A + B|$, 从而 $|A + B| = 0$.

2) 由 $|A| + |B| = 0$, $|A|, |B|$ 一个为 1, 一个为 -1 ，故 $|A + B| = |A||A' + B'||B| = |A||B||A + B| = -|A + B|$ ，从而 $|A + B| = 0$.

例 4 设 n 阶非零实阵 A 满足 $A^* = A'$. 证明：$|A| \neq 0$.

证 由 $A^* = A'$ 知，$A_{ij} = a_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 由 $A \neq 0$ 知存在 $a_{st} \neq 0$, 将 $|A|$ 按第 s 行展开，$|A| = \sum_{i=1}^n a_{si} A_{si} = \sum_{i=1}^n a_{si}^2 > 0$, 故 $|A| > 0$.

例 5 设 $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ 为实方阵，$A_{ij} = -a_{ij}, i, j = 1, 2, 3, 4$, 且 $a_{11} \neq 0$. 求 $|A|$.

解 将 $|A|$ 按第一行展开，$|A| = -a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{14}^2 < 0$. $A^* = -A'$, 又 $AA^* = A(-A') = |A|E$, 故 $|A|| - A'| = |A|^4$, 从而 $|A|^2 = 1$, 即 $|A| = -1$.

例 6 A 为 n 阶实方阵，n 为奇数. 若 $a_{ij} = A_{ij}$ 且至少有一 $a_{ij} \neq 0$. 证明：$|E - A| = 0$.

证 设 $a_{st} \neq 0$, 将 $|A|$ 按第 s 行展开，$|A| = \sum_{j=1}^n a_{sj} A_{si} = \sum_{j=1}^n a_{sj}^2 > 0$, 又 $A' = A^*$, 故 $|A| = |A|^{n-1}$ ，即 $|A|_{n-2} = 1$, 从而 $|A| = 1$, 这样 $|E - A| = |AA^{-1} - A| = |A||A' - E| = (-1)^n |E - A| = -|E - A|$, 即 $|E - A| = 0$.

例 7 设 A 为 n 阶可逆阵，A 的各行元素之和为 a. 证明：1) $a \neq 0$;2)A^{-1} 的各行元素之和为 a^{-1} ; 3)A^* 的各行元素之和为 $a^{-1}|A|$; 4) 若 $a = |A|$, 则 $\sum_{i,j} A_{ij} = n$;5) 求 $2A^{-1} - 3A$ 的各行元素之和.

证 1) 由题设， $A\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}a=\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$, 若 $a=0$, 则 $\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$ $AX=0$ 的非零解，故 $|A|=0$ ，这与 A 可逆矛盾.

2) 由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$, 有 $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}=a^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$, 即 A^{-1} 的各行元素之和为 a^{-1}.

3), 4), 5) 类似可求.

例 8 证明： $|A^*|=|A|^{n-1}$, $n>1$.

证 由 $AA^*=|A|E$, 有 $|A||A^*|=|A|^n$. 若 A 可逆，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$. 若 A 不可逆，则 $|A|=0$, 若 $A=0$, 则 $A^*=0$, 若 $A\neq 0$, 由 $r(A)+r(A^*)\leq n$, $r(A^*)<n$, 有 $|A^*|=0$, 总之， $|A^*|=|A|^{n-1}$ 仍然成立.

例 9 A,B 为同阶方阵，证明： $(AB)^*=B^*A^*$.

证 由 $|A||B|B^*A^*=|AB|EB^*A^*=(AB)^*ABB^*A^*=(AB)^*A|B|EA^*=|B|(AB)^*AA^*=|A||B|(AB)^*$ 知，若 $|AB|\neq 0$, 即 A,B 均可逆时， $(AB)^*=B^*A^*$. 若 $|AB|=0$, 由 $f(t)=|tE+A|$, $g(t)=|tE+B|$ 至多有 $2n$ 个根，故存在 $\delta>0$ ，当 $0<t<\delta$ 时， $|tE+A|\neq 0, |tE+B|\neq 0$, 从而 $[(tE+A)(tE+B)]^*=(tE+B)^*(tE+A)^*$. 由多项式的性质令 $t=0$ 得 $(AB)^*=B^*A^*$.

例 10 证明： $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

证 若 $|A|\neq 0$, 则 $(A^*)^*=(|A|A^{-1})^*=|A|^{n-1}(A^{-1})^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$. 若 $|A|=0$, 则 $r(A^*)\leq 1$, 故 $(A^*)^*=0=|A|^{n-2}A$.

例 11 证明： $(A')^*=(A^*)'$.

证 若 A 可逆，由 $AA^*=|A|E$, $A^*=|A|A^{-1}$, 有 $(A^*)'=(|A|A^{-1})'=|A|(A^{-1})'=|A'|(A')^{-1}=(A')^*$. 若 A 不可逆， $f(t)=|tE+A|$ 至多有有限个根，从而有无穷多个 t, $f(t)\neq 0$, 故 $[(A+tE)']^*=[(A+tE)^*]'$, 由多项式的性质， $t=0$ 仍成立，即 $(A')^*=(A^*)'$.

例 12 设 A 为实方阵. 证明： $A^2=E\Longleftrightarrow (A^*)^2=E$.

证 ρ 由 $A^2=E$ ， $(A^*)^2=A^*A^*=(AA)^*=E^*=E$.

$\longrightarrow A^2=(|A|(A^*)^{-1})^2=|A|^2((A^*)^{-1})^2=|A|^2(A^*)^{-1}(A^*)^{-1}=|A|^2((A^*)^2)^{-1}=|A|^2E^{-1}=|A|^2E=\sqrt[n-1]{|A^*|^2}E=E$.

例 13 n 阶方阵 A,B 满足 $A+B=AB$. 证明： 1) $A-E$ 可逆. 2)

$AB=BA$. 3)$r(A)=r(B)$. 4) 已知 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求 A.

证 1) 由 $A=AB-B=(A-E)B$, 由 $E=A+(E-A)=(A-E)B+(E-A)=(A-E)(B-E)$，故 $A-E$ 可逆.

2) 由 1)，$(B-E)(A-E)=E$, 即 $BA-(B+A)+E=E$, 故 $BA=A+B=AB$.

3) 由 $A+B=AB$, 有 $A=(A-E)B$, $B=A(B-E)$, 从而 $r(A)\le r(B)$, $r(B)\le r(A)$, 故 $r(A)=r(B)$.

4) 据 $B-E=\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 由 1)，$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

例 14 $A,B,A+B$ 均为 n 阶可逆阵. 证明： $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆并求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$.

证 $A+B=A(A^{-1}+B^{-1})B$, 故 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$.

例 15 1) $A,E-A,E+A$ 均可逆. 求证： $(E-A^{-1})^{-1}+(E-A)^{-1}=E$.

2) A,B 为 n 阶方阵 $A,B,AB-I$ 均可逆. 证明： $A-B^{-1},(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆且 $((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}=ABA-A$.

证 1) 由 $E-A=A(A^{-1}-E)$ 及 A, $E-A$ 可逆知， $E-A^{-1}$ 可逆. $(E-A^{-1})^{-1}+(E-A)^{-1}=E\iff(E-A^{-1})(E-A)=(E-A^{-1})+(E-A)\iff 2E=2E$.

2) 类似可证.

例 16 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的所有顺序主子式不为 0. 则存在下三角矩阵 B 使得 BA 为上三角矩阵.

证 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时显然成立，设 $n-1$ 时成立，则为 n 时，设 $A=\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\beta&a_{nn}\end{pmatrix}$. 由假设， $|A_1|\ne 0$, 故

$$\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\-\beta A_1^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\beta&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\0&a_{nn}-\beta A_1^{-1}\alpha\end{pmatrix}.$$

由假设存在下三角矩阵 B_1 使得 B_1A_1 为上三角矩阵, 令 $B=\begin{pmatrix}B_1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\-\beta A_1^{-1}&1\end{pmatrix}$, 则 B 为下三角矩阵，且 BA 为上三角矩阵.

例 17 设 A 为 $n\times m$ 矩阵，对任意的 $B_{m\times n}$， $tr(AB)=0$. 则 $A=0$.

证 设 $A=(a_{ij})$, 取 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times n}$, 则 $AB=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\\alpha&0\end{pmatrix}$, 故 $a_{11}=0$. 再取 $B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\1&\cdots&0\\0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$, 则 $AB=\begin{pmatrix}a_{12}&0\\\alpha&0\end{pmatrix}$, 故 $a_{12}=0$. 这样取下去有, $a_{ij}=0, i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m$. 故 $A=0$.

特别地, 设 A 为 $n\times n$ 方阵. 若对任意的 X 由 $tr(AX)=0$, 则 $A=0$.

设 $A=(a_{ij})$, 取 $X=\overline{A}'$, 则 $0=tr(AX)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\overline{a_{ij}}$, 故 $a_{ij}=0$, $i,j=1,\cdots,n$. 即 $A=0$.

例 18 设 A 为数域 P 上 2 阶方阵, $A^5=0$. 则

1) $A^2=kA$, k 为一常数.

2) $(E-A)^{-1}=E+A$.

证 1) 由 $A^5=0$ 知, $|A|=0$, 故 $r(A)\leq 1$. 若 $r(A)=0$, 即 $A=0$, 结论成立. 若 $r(A)=1$, 令 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}(b_1,b_2)$, 故 $A^2=(a_1b_1+a_2b_2)A$.

2) 由 $A^2=kA$, $A^3=k^2A, A^4=k^3A, A^5=k^4A=0$, 故 $k^4=0$, 从而 $k=0$. 故 $A^2=0$, 从而 $E-A^2=E$, 即 $(E-A)(E+A)=E$, 故 $(E-A)^{-1}=(E+A)$.

例 19 设 $A=\begin{pmatrix}a_1E_1&0&\cdots&0\\0&a_2E_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_rE_r\end{pmatrix}$, 其中 $a_i\neq a_j(i\neq j), E_i$ 是 n_i 阶单位矩阵. 证明: 与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵 $B=\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_r\end{pmatrix}$, 其中 B_i 是 n_i 阶矩阵, $i=1,\cdots,r$.

证 令 $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1r}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\B_{r1}&B_{r2}&\cdots&B_{rr}\end{pmatrix}$, 则由 $AB=BA$ 得 $a_iB_{ij}=a_jB_{ij}$, 由

$a_i \neq a_j (i \neq j)$, 故 $B_{ij} = 0 (i \neq j)$, 即 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{rr} \end{pmatrix}$.

例 20 设 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1, 其余元素为 0 的 $n \times n$ 矩阵, $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 证明:

1) 若 $AE_{ij} = E_{ij}A$, 则 $k \neq i$ 时 $a_{ki} = 0$, $k \neq j$ 时 $a_{jk} = 0$ 且 $a_{ii} = a_{jj}$.

2) 若 A 与所有的 n 阶矩阵交换, 则 A 为数量矩阵, 即 $A = aE$.

证 1) 令 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $E_{ij} = (0, \cdots, 0, \eta_i, 0, \cdots, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta_j' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

则 $AE_{ij} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} (0, \cdots, 0, \eta_i, 0, \cdots, 0)$ 只有 A 的第 j 列不变, 其余的为 0, 而

$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta_j' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 只有的第 i 行不变, 其余的为 0. 由 $AE_{ij} = E_{ij}A$

知 $k \neq i$ 时 $a_{ki} = 0$, $k \neq j$ 时, $a_{jk} = 0$ 且 $a_{ii} = a_{jj}$.

2) 在 1) 中分别取所有的 i, j, 则知结论成立.

例 21 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 证明: $n \geq 3$ 有 $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ 并求 A^{100}.

证 对 n 归纳. $n = 3$ 时, 计算知 $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{3-2} + A^2 - E =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，故命题成立．设 $n-1$ 时成立，则为 n 时，$A^n = AA^{n-1} = A(A^{n-2}+A^2-E) = A^{n-1}+A^3-A = A^{n-1}+A^2-E$，由上公式 $A^{100} = A^2+49(A^2-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例 22 $A, B \in P^{n\times n}$, 若 $E-AB$ 可逆，则 $E-BA$ 可逆.

证 设 $E-AB$ 的逆为 X，故 $(E-AB)X = E$, 即 $X-ABX = E$, 从而 $BXA-BABXA = BA$, 故 $E = (E-BA)-(E-BA)BXA$, 即 $E = (E-BA)(E-BXA)$, 故 $E-BA$ 可逆.

例 23 A 为 n 阶可逆矩阵．对 A 作下述初等变换：首先把第一行的 $-k$ 倍加到第 n 行，然后交换 $1, n$ 行，得 B. 求 AB^{-1}.

解 由题设，$B = P(1,n)P(n,1(-k))A$. 故 $AB^{-1} = AA^{-1}P(n,1(-k))^{-1}P(1,n)^{-1}$
$= P(n,1(k))P(1,n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$.

例 24 A 为方阵，$A^3 = A$，$A \neq 0$. 则 $A^2 = E$. 对否？

解 不对（此题考查矩阵的削去律是否成立，只有可逆矩阵可削）

例如：$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 25 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB+BXA+E$. 求 X.

解 X 满足 $(A-B)X(A-B) = E$，故 $X = [(A-B)^{-1}]^2 =$.

(2) 矩阵的秩与矩阵的等价

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 求三阶可逆阵 P，四阶可逆阵 Q 使得

$A=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}Q.$

解 由 $P(3+1(3))P(1+2(-2))A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 及 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}P(2,4)=$ $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $P=P(1+2(-2))^{-1}P(3+1(3))^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$,

$Q=P(2,4)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$

例 2 设 A 为 n 阶方阵, $n>1$. 则 $r(A^*)=\begin{cases}n\ if & r(A)=n\\1\ if\ r(A)=n-1\\0\ if\ r(A)<n-1\end{cases}$

证 若 $r(A)=n$, 则 A 可逆, 故 A^* 可逆, 从而 $r(A^*)=n$. 若 $r(A)=n-1$, 由 $AA^*=|A|E=0$, 有 $r(A)+r(A^*)\le n$, 故 $r(A^*)\le 1$, 又由 $r(A)=n-1$, A 有 $n-1$ 代数余子式不为零, 故 $r(A^*)>0$, 从而 $r(A^*)=1$. 若 $r(A)<n-1$, 则 A 的所有代数余子式全为零, 故 $A^*=0$, 从而 $r(A^*)=0$.

应用: A 为 3 阶矩阵, $A^2=0$. 则 $r(A^*)=0$.

例 3 证明任一方阵均可表为一可逆阵与一幂等阵的积.

证 设 A 为 $n\times n$ 矩阵, $r(A)=r$. 则存在可逆阵 P,Q 使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$. PQ 为可逆阵, $Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$ 为幂等阵.

例 4 A 为 n 阶矩阵, $r(A)<n$. $A=B_1\cdots B_s$, $B_1,\cdots,B_s$ 为幂等阵. 证明: $r(E-A)\le s(n-r(A))$.

证 由 $E-A=(E-B_1)+(B_1-B_1B_2)+\cdots+(B_1\cdots B_{s-1}-B_1\cdots B_s)=(E-B_1)+B_1(E-B_2)+\cdots+B_1\cdots B_{s-1}(E-B_s)$ 有 $r(E-A)\le r(E-B_1)+\cdots+r(E-B_s)$ $\le sn-[r(B_1)+\cdots+r(B_s)]\le s(n-r(A))$.

例 5 设 A 为 n 阶方阵. 证明: $r(A)+r(A+E)\ge n$.

证 $r(A)+r(A+E)=r(-A)+r(A+E)\ge r(-A+E+A)=r(E)=n$.

例 6 设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵. 则 $|r(A)-r(B)|\le r(A+B)$.

证 不妨设 $r(A)\ge r(B)$. 由 $A=A+B-A$, 有 $r(A)\le r(A+B)+r(B)$, 即 $r(A)-r(B)\le r(A+B)$.

例 7 设 A,B 分别为 $n\times r,r\times n$ 矩阵. 证明: 1) 若 $r(A)=r$, 则 $r(AB)=r(B)$ 2) 若 $r(B)=r$, 则 $r(AB)=r(A)$.

证 1) 由 $r(AB)\le r(B)$, 及 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-r=r(B)$ 得结论, 2) 类似可证.

例 8 设 $A_{m\times n},B_{n\times p},C_{p\times s}$ 满足 $r(A)=n,r(C)=p,ABC=0$. 则 $B=0$.

证 由 $0=r(ABC)\ge r(AB)+r(C)-p=r(AB)\ge r(A)+r(B)-n=r(B)$, 有 $r(B)=0$, 即 $B=0$.

例 9 设 A,B,C 为 n 阶方阵, $r(C)=n$, $A(BA+C)=0$. 则 $r(A)+r(BA+C)=n$.

证 由 $A(BA+C)=0$, $r(A)+r(BA+C)\le n$. 又 $C=BA+C-BA$, 故 $n=r(C)\le r(BA+C)+r(BA)\le r(BA+C)+r(A)$, 从而命题成立.

例 10 设 $A_1,\cdots,A_s$ 为 n 阶方阵, $A_1\cdots A_s=0$. 则 $\sum_{i=1}^{s}r(A_i)\le(s-1)n$.

证 由 $0=r(A_1\cdots A_s)\ge r(A_1)+r(A_2\cdots A_s)-n\ge\cdots\ge\sum_{i=1}^{s}r(A_i)-(s-1)n$, 命题成立.

例 11 设 A,B,C 为同阶方阵, 若 $r(A)=r(BA)$. 则 $r(AC)=r(BAC)$.

证 由 $r(BAC)\ge r(BA)+r(AC)-r(A)=r(AC)$, 又 $r(BAC)\le r(AC)$, 故 $r(BAC)=r(AC)$.

例 12 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 $r(r\ge 1)\Longleftrightarrow A$ 可分解成 $A=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_i'$, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 均为线性无关的向量组.

证 ρ 由 $r(A)=r$, 存在可逆阵 $P_{m\times m},Q_{n\times n}$ 使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$. 令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),Q=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, 则 $A=P\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}(E_r,0)Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\beta_r\end{pmatrix}$ $=\alpha_1\beta_1'+\cdots+\alpha_r\beta_r'$, 故命题成立.

$\longrightarrow A=\alpha_1\beta_1'+\cdots+\alpha_r\beta_r'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\beta_r\end{pmatrix}$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 与 $\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\beta_r\end{pmatrix}$ 的秩均为 r, 故 $r\ge r(A)\ge r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+r\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\beta_r\end{pmatrix})-r=r$, 即 $r(A)=r$.

例 13 A,B 分别为 $3\times2,2\times3$ 矩阵, $AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$. 求 $r(AB),(AB)^2,BA$.

证 易知 $|AB|=0,\begin{vmatrix}8&2\\2&5\end{vmatrix}\ne0$, 故 $r(AB)=2$. 易求 $(AB)^2=9\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}=9AB$. 进而 $(AB)^2-AB=0$, $A(BA-9E)B=0$. 又 $r(A)=r(B)=r(AB)=2$,

故 $BA-9E=0$, 即 $BA=9E$.

例 14 设 A,B 为 n 阶方阵，$r(A)<\frac{n}{2},r(B)<\frac{n}{2}$, a 为常数. 证明：1）$|A+aB|=0$. 2) $|A^*+aB^*|=0$. 3) $|A^2+AB+B^2|=0$. 4) $|(A^*)^2+A^*B^*+(B^*)^2|=0$.

证1）由 $r(A+aB)\le r(A)+r(aB)<n$, 故 $|A+aB|=0$.

2）$r(A^*)\le r(A)<\frac{n}{2},r(B^*)\le r(B)<\frac{n}{2}$, 故 $r(A^*+aB^*)<n$, 从而 $|A^*+aB^*|=0$.

3）$A^2+AB+B^2=A(A+B)+B^2$, $r(A^2+AB+B^2)\le r(A)+r(B)<n$, 故 $|A^2+AB+B^2|=0$.

4）同 3）.

例 15 设 A 为 n 阶方阵，证明存在 n 阶方阵 B 使得 $A=ABA,B=BAB$.

证 设 $r(A)=r$, 则存在可逆阵 P,Q 使得 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 故 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}PAQ\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 进而 $Q\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P=Q\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}PAQ\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P$, 令 $B=Q\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P$, 则 $A=ABA,B=BAB$.

例 16 1) 设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵且 $AB=0$. 则 $r(A)+r(B)\le n$.

2) A 为 $n\times n$ 矩阵，对任意的列向量 X, $AX=0$. 则 $A=0$.

证 1) 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, 由 $AB=0$, $A\beta_i=0$, $i=1,\cdots,n$. 即 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为方程组 $AX=0$ 的解，故 $\beta_1,\cdots,b_n$ 可由 $AX=0$ 的基础解系线性表出，而 $AX=0$ 的基础解系中含 $n-r(A)$ 个解，故 $r(\beta_1,\cdots,\beta_n)\le n-r(A)$, 即 $r(A)+r(B)\le n$.

2) 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为线性无关组，则 $A\eta_i=0$, $i=1,\cdots,n$. 故 $AX=0$ 的基础解系中含 n 个线性无关的解，故 $n-r(A)\ge n$, 即 $r(A)=0$, 故 $A=0$.

例 17 设 A 为 $m\times r$ 矩阵.

1) A 列满秩的充要条件为存在 $m\times m$ 可逆阵 P 使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$.

2) A 行满秩的充要条件为存在 $r\times r$ 可逆阵 Q 使得 $A=(E_m,0)Q$.

3) $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则存在 $m\times r$ 列满秩矩阵 P 及 $r\times n$ 行满秩矩阵 Q 使得 $A=PQ$.

证 1) ρ 由 $r(A)=r$, 存在可逆阵 P_1 使得 $P_1A=\begin{pmatrix}A_1\\0\end{pmatrix}$, 其中 A_1 为 r 阶可逆阵，故 $\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&E_{m-r}\end{pmatrix}P_1A=\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$, 令 $P=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&E_{m-r}\end{pmatrix}^{-1}P_1^{-1}$ 即可.

$\longrightarrow$ 由 P 可逆， $r(A)=r\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=r.$

2) 类似于 1).

3) 由 $r(A)=r$ ，存在可逆阵 P_1,Q_1 使得

$$A=P_1\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q_1=P_1\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}(E_r,0)Q_1,$$

令 $P=P_1\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$, $Q=(E_r,0)Q_1$ 即可.

例 18 设 A,B 为方阵，且 B 为满秩， s 为实数， $C=A+sB$. 证明：存在正数 a 使得 $0<s<a$ 时 C 满秩.

证 由 $|C|=|A+sB|=|B||sE+B^{-1}A|$, $f(s)=|sE+B^{-1}A|=s^n+d_1s^{n-1}+\cdots+d_n$ 至多有 n 个实根，从而存在正数 a 使得 $0<s<a$ 时， $f(s)\neq 0$ ，从而 C 满秩.

例 19 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶对称阵， $r(A)=n-1$. 则存在 $A_{ii}\neq 0$.

证 假设 $A_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$. 由 $r(A)=n-1$, 有 $r(A^*)=1$. 故存在 $A_{ij}\neq 0$, $i\neq j$. A^* 的二阶子式 $\begin{vmatrix}0 & A_{ij}\\A_{ij} & 0\end{vmatrix}-A_{ij}^2\neq 0$, 故 $r(A^*)\geq 2$ ，矛盾，故存在 $A_{ii}\neq 0$.

例 20 设 A 为 n 阶方阵， $r(A)=r$. 证明：存在秩为 r 的方阵 B,C 使得 $AB=CA$.

证 由 $r(A)=r$, 存在可逆阵 P,Q 使得 $A=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$, 故

$$AQ\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}PA,$$

令 $B=Q\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$,

$C=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}P$ 即满足要求.

例 21 设 $A,B\in P^{n\times n}$ 且 $r(A)+r(B)\leq n$. 证明：存在 n 阶可逆阵 M 使得 $AMB=0$.

证 存在可逆阵 P,Q,S,T ，使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}Q$, $B=S\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & E_s\end{pmatrix}T$, 这里 $r+s\leq n$. 取 $M=Q^{-1}S^{-1}$ 即可.

例 22 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ c & d & 1 \end{pmatrix}$

(i) 求 $det(A)$; (ii) 求 $tr(A)$; (iii) 证明 $rank(A) \geq 2$; (iv) 为使 $rank(A) = 2$，求 a, b, c, d 应满足的条件.

解 (i) $det(A) = 1 - ac - bd$. (ii) $tr(A) = 3$. (iii) 因 A 有一二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 故 $rank(A) geq 2$.(iii) $det(A) = 0$, 即 $ac + bd = 1$.

(3) 分块矩阵

例 1 设 α 为 n 维列向量， $\alpha'\alpha = 1$. 证明： $|E_n - 2\alpha\alpha'| = -1$.

证 由 $\begin{vmatrix} E_n & \alpha \\ 2\alpha' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & 0 \\ 2\alpha' & -1 \end{vmatrix} = -1$ 及 $\begin{vmatrix} E_n & \alpha \\ 2\alpha' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n - 2\alpha\alpha' & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |E_n - 2\alpha\alpha'|$, 故命题成立.

例 2 设 A 为 n 阶可逆反对称矩阵，α 是 n 维列向量. 证明：$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & k \end{pmatrix}$ 可逆 $\Longleftrightarrow k \neq 0$.

证 由 $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -\alpha' A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & k - \alpha' A^{-1}\alpha \end{pmatrix}$, 而 $\alpha' A^{-1}\alpha = (\alpha' A^{-1}\alpha)' = -\alpha' A^{-1}\alpha$, 故 $\alpha' A^{-1}\alpha = 0$, 从而 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & k \end{vmatrix}$ $|k||A|$, 故 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & k \end{pmatrix}$ 可逆 $\Longleftrightarrow k \neq 0$.

例 3 设 A, B 为同阶方阵， $A + B, A - B$ 均可逆. 则 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆.

证 由

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A + B & A + B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A + B & A + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B & B \\ 0 & A + B \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - B & B \\ 0 & A + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix}^{-1}$$

可逆，且 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - B & B \\ 0 & A + B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (A-B)^{-1}[E-B(A+B)^{-1}] & -B(A-B)^{-1}(A+B)^{-1} \\ (A-B)^{-1}[-E+(A+B)^{-1}]+(A+B)^{-1} & (A+B)^{-1}[B(A-B)^{-1}+E] \end{pmatrix}..$$

例 4 设 A 为 n 阶可逆阵， B,C 分别为 $n\times m, m\times n$ 矩阵. 证明：$E_m+CA^{-1}B$ 可逆 $\Longleftrightarrow A+BC$ 可逆，且 $(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$.

证 由 $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CA^{-1} & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -C & E_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_m+CA^{-1}B \end{pmatrix}$, 有 $\begin{vmatrix} A & B \\ -C & E_m \end{vmatrix}=|A||E_m+CA^{-1}B|$, 又 $\begin{vmatrix} A & B \\ -C & E_m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+BC & B \\ 0 & E_m \end{vmatrix}=|A+BC|$, 故 $A+BC$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 可逆 $E_m+CA^{-1}B$ ，由 $(A+BC)(A^{-1}-A^{-1}B(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1})=E_n-B(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}+BCA^{-1}-BCA^{-1}B(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}=E_n+BCA^{-1}-BCA^{-1}=E_n$ 有 $(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(E_m+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$.

例 5 设 A 为 n 阶可逆阵， α,β 为 n 维列向量．则

1)$|A+\alpha\beta'|=|A|(1+\beta'A^{-1}\alpha)=|A|+\beta'A^{*}\alpha$.

2) $A+\alpha\beta'$ 可逆 $\Longleftrightarrow \beta'A^{-1}\alpha\neq -1$.

证 由 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta'A^{-1}\alpha \end{vmatrix}=|A|(1+\beta'A^{-1}\alpha)=|A|+\beta'A^{*}\alpha$ 及 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+\alpha\beta' & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=|A+\alpha\beta'|$ 知命题成立.

2) 由 1) 易得.

例 6 设 A 为 n 阶阵， α,β 为 n 维列向量，则 $|A+\alpha\beta'|=|A|+\beta'A^{*}\alpha$.

证 若 A 可逆，由上题可得. 若 A 不可逆，令 $f(t)=|tE+A|=t^n+\cdots$, 则 $f(t)$ 至多有 n 个根，故存在无穷多个 t 使得 $f(t)\neq 0$, 即 $tE+A$ 可逆，故 $|tE+A+\alpha\beta'|=|tE+A|+\beta'(tE+A)^{*}\alpha$. 由多项式的性质， $t=0$ 时仍成立，即 $|A+\alpha\beta'|=|A|+\beta'A^{*}\alpha$.

例 7 设 A,B 分别为 $n\times m, m\times n$ 矩阵. 证明：1）$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|$.

2) $|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|$.($A,B$ 为列（行）向量时，可用来求 $|\lambda E_n-AB|$ 的根)

证 1）由 $\begin{vmatrix} E_m-BA & B \\ 0 & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & 0 \\ A & E_n-AB \end{vmatrix}$, 故 $|E_n-AB|=|E_m-BA|$.

2）由 $\begin{vmatrix} \lambda E_m-BA & B \\ 0 & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda E_m & 0 \\ A & E_n-\frac{1}{\lambda}AB \end{vmatrix}$, 故 $|\lambda E_m=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-AB|$.

例 8 设 A,B,C,D 为同阶方阵，$AC=CA$. 证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-BC|$.

证 若 A 可逆，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A(D-CA^{-1}B)|=|AD-BC|$.

若 A 不可逆，令 $f(t)=|tE+A|$. 则 $f(t)$ 至多有 n 个根，存在无穷多个 t 使得 $f(t)\neq 0$, 故由上证，$\begin{vmatrix} tE+A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|(tE+A)D-BC|$. 由多项式的性质，$t=0$ 仍成立，即 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-BC|$.

例 9 设 A,B 为同阶方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

证 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

例 10 设实数域上 n 阶方阵 A 的顺序主子式全为正数，而非对角线上的元素全为负数. 则 A^{-1} 的元素全为正数.

证 令 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}$, 其中 $A=(a_{ij})$, α,β 分别为列、行向量. 则由

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & a_{nn}-\beta A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix} \quad (*)$$

有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a=a_{nn}-\beta A_1^{-1}\alpha$, 对 $(*)$ 取行列式，$|A|=|A_1|a$, 又 $|A|>0, |A_1|>0$, 故 $a>0$. 而 α,β 的元素为负数，故 A^{-1} 的元素全为正数.

例 11 设 A 和 B 为满秩方阵，试求 $Q=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 由 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 知

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 12 1) 设向量组 (I) 与 (II) 的秩相等且 (II) 可由 (I) 线性表出. 则 (I) 与 (II) 等价.

2) A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为一矩阵， $r(A)=r(AB)$. 则存在 $s\times n$ 矩阵 C 使得 $A=ABC$.

证 1) 设 (I) 为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, (II) 为 $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$. 构造向量组 (III) $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 则 (I), (II), (III) 的秩全相等，故 (II) 的极大线性无关组也为 (III) 的极大线性无关组，从而 (I) 可由 (II) 线性表出. 故 (I) 与 (II) 等价.

2) 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 则 $AB=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(b_{ij})=(\beta_1,\cdots,\beta_t)$, 故 $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 可由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 线性表出，又 $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 与 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的秩相等，由 1)， 存在 C ，使得 $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}C$, 即 $A=ABC$.

例 13 1) $X=\begin{pmatrix}0&A\\C&0\end{pmatrix}$, 已知 A^{-1},C^{-1} 存在. 求 X^{-1}.

2) $X=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$, $a_i\neq 0, i=1,\cdots,n$. 求 X^{-1}.

证 1) 由

$$\begin{pmatrix}0&A\\C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&E_C\\E_A&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}0&A\\C&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&E_C\\E_A&0\end{pmatrix}^{-1},$$

故

$$\begin{pmatrix}0&A\\C&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&E_A\\E_C&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&C^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}.$$

2) 由 1), $X^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&a_n^{-1}\\a_1^{-1}&0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}^{-1}&0\end{pmatrix}$.

例 14 证明： $max(r(A),r(B))\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$.

证 将 A,B 按列分块 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ ，由向量组的性质， $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩不大于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 又不大于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩的和, 即 $max(r(A),r(B))\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$.

例 15 设 A 为可逆阵, $G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. 则 $r(G)=r(A)+r(D-CA^{-1}B)$.

证 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$, 故 $r(G)=r(A)+r(D-CA^{-1}B$.

例 16 A 为 $s\times n$ 矩阵. 证明: $r(E_n-A'A)-r(E_s-AA')=n-s$.（此类题通常将秩的减法变为加法, 若证不等式, 利用较大的一侧构造块阵再证）

证 由 $\begin{pmatrix} E_n-A'A & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n-A'A & A' \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & A' \\ A & E_s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & A' \\ 0 & E_s-AA' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_s-AA' \end{pmatrix}$ 知结论成立.

例 17 设 A 为 n 阶方阵. 则 $A^2=E \Longleftrightarrow r(A+E)+r(A-E)=n$.

证 由 $\begin{pmatrix} A-E & 0 \\ 0 & A+E \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A-E & 0 \\ E-A & A+E \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A-E & A-E \\ E-A & 2E \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A^2-E) & 0 \\ E-A & 2E \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A^2-E) & 0 \\ 0 & 2E \end{pmatrix}$, 知 $A^2=E \Longleftrightarrow r(A+E)+r(A-E)=n$.

例 18 A 为 n 阶可逆阵, α,β 为 n 维列向量. 则 $r(A+\alpha\beta')\geq n-1$.

证 由 $\begin{pmatrix} A+\alpha\beta' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+\alpha\beta' & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{pmatrix}$. 有 $r(A+\alpha\beta')+1\geq r(A)=n$, 即 $r(A+\alpha\beta')\geq n-1$.

例 19 设 A,B 为同阶方阵. 证明: $r(AB-E)\leq r(A-E)+r(B-E)$.

证 由 $\begin{pmatrix} A-E & 0 \\ 0 & B-E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A-E & 0 \\ A-E & B-E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A-E & AB-B \\ A-E & AB-E \end{pmatrix}$ 易得结论.

例 20 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}$. 证明: $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$.

证 由 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & E_n \end{pmatrix}$ 有 $r(A)+r(B)\leq r(AB)+n$.

例 21 设 A,B,C 为矩阵. 证明: $r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$.

证 由 $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$ 有 $r(AB)+r(BC)\leq r(ABC)+r(B)$.

第 5 章　二次型

基本知识

结果 1 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j=X'AX$, 其中 n 阶对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 与二次型相互唯一确定，二次型实质上就是一个 n 元二次齐次多项式函数，二次型 $X'BX$ 的矩阵为 $\frac{B+B'}{2}$.

结果 2 非退化线性替换 $X=PY$ 将关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次型 f 化成关于 $y_1,\cdots,y_n$ 的二次型 g, f 的矩阵 A 变成 g 的矩阵 $P'AP$，非退化线性替换就是函数论中的变量替换.

结果 3 合同是矩阵间的一种等价关系.

结果 4 数域 P 上任意一个二次型都可经非退化线性替换化成标准形，即平方和的形式（但标准形不唯一）. 也就是说，任意一个对称矩阵都合同于一个对角形矩阵. 方法有两种：配方法及对矩阵进行合同变换. 要计算二次型的函数的极值，就要先将它化成标准形，尤其是规范形.

结果 5 复二次型与实二次型有规范形，且规范形唯一.

结果 6 惯性定理：任一实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 一定可经一非退化线性替换 $X=PY$ 化成规范形 $g(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$, 也就是说 A 合同于 $\begin{pmatrix}E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0\end{pmatrix}$. 其中 p 为正惯性指数，q 为负惯性指数，$p+q$ 为二次型的秩，也就是 A 的秩.（**注意证明及证明方法，并注意合同变换不改变二次型的正、负惯性指数**）

结果 7 非退化线形替换不改变实二次型的正定性（负定性、不定性、半正定性、半负定性），即非退化线性替换不改变实二次型的正负惯性指数.

结果 8 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 正定的判定方法

1) 定义：即对任意一组不全为零的数 $c_1,\cdots,c_n$ 有 $f(c_1,\cdots,c_n)>0$.

2) 标准形为 $g(y_1,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中 $d_i>0$, 即规范形为 $h(z_1,\cdots,z_n)=z_1^2+\cdots+z_n^2$, 即正惯性指数为 n.

3) A 合同于 E.

4) A 的所有（顺序）主子式全大于零.

5) 存在可逆阵 P 使得 $A=P'P$(此处的 P 可为方阵，也可非方阵).

6) A 的特征值全大于零（一般用正交矩阵化成对角形，且对角线元素可按任意顺序排列）.

结果 9 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 半正定的判定方法

1) 定义：即对任意一组不全为零的数 $c_1,\cdots,c_n$ 有 $f(c_1,\cdots,c_n)\geq 0$.

2) 标准形为 $g(y_1,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中 $d_i\geq 0$, 即规范形为 $h(z_1,\cdots,z_n)=z_1^2+\cdots+z_p^2$, 即正惯性指数为秩.

3) A 合同于 $\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) A 的所有主子式全大于或等于零.

5) 存在矩阵 P 使得 $A=P'P$.

6) A 的特征值全大于或等于零.

结果 10 合同变换改变实二次型的特征值的大小, 但不改变正负.

例题

例 1 设 A 为 n 阶实可逆矩阵. 若 A 与 $-A$ 合同，则 n 为偶数. 进而若 A 为实对称矩阵，则 A 的正惯性指数为 $\frac{n}{2}$.

证 由 A 与 $-A$ 合同，存在可逆阵 P，使得 $-A=P'AP$, 故 $|-A|=|P'AP|$, 即 $(-1)^n|A|=|A||P|^2$, 又 $|A|\neq 0$, 故 $(-1)^2=|P|^2>0$, 从而 n 为偶数. 若 A 为对称矩阵，则存在实可逆阵 Q 使得 $Q'AQ=\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix}$, 故 $-Q'AQ=-\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix}$, 即 $Q'(-A)Q=\begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_{n-p} \end{pmatrix}$, 由 A 与 $-A$ 合同， A 与 $-A$ 有相同的正惯性指数，故 $p=n-p$, 即 A 的正惯性指数为 $\frac{n}{2}$.

例 2 设 A 为 n 阶实对称矩阵， A 的所有的顺序主子式 $D_1,\cdots,D_n$ 均不为零. 则 A 合同于对角阵 $\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{pmatrix}$.

证 对 n 归纳. n 为 1 时显然成立，设为 $n-1$ 时成立，则为 n 时，令 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$, 由 A_1 的所有顺序主子式全为 A 的顺序主子式，由假设，存在 $n-1$ 阶可逆阵 Q 使得 $Q'A_1Q=\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} \end{pmatrix}=B_1$, 故

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & Q'\alpha \\ \alpha'Q & a_{nn} \end{pmatrix},$$

由 B_1 可逆,

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & -B_1^{-1}Q'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} B_1 & Q'\alpha \\ \alpha'Q & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B_1^{-1}Q'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

取行列式有 $|B_1|* = |A_1||Q|^2* = |Q|^2|A|$, 即 $* = \frac{D_n}{D_{n-1}}$ ，故命题成立.

例 3 1) 证明实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2$ 的秩为矩阵 $A = (a_{ij})_{sn}$ 的秩.

2) 求 $f(x_1,\cdots,x_n) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ 的秩，正惯性指数、负惯性指数.

证 1) 由 $f(x_1,\cdots,x_n) = X'A'AX$ 及 $A'A$ 为对称阵知， $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 $A'A$, 又 A 为实矩阵，故 $r(A'A) = r(A)$, 从而命题成立.

2) 由 $f(x_1,\cdots,x_n) = (x_1-x_2)^2+\cdots+(x_1-x_n)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_2-x_n)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2$, 据 1)， A 的前 $n-1$ 行显然线性无关，即 $r(A) \geq n-1$. 又 $f(1,\cdots,1) = 0$ ，即 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 不正定．故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的秩与正惯性指数均为 $n-1$ ，而负惯性指数为 0.

例 4 n 元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n) = X'AX$ 当且仅当 $X = 0$ 时，$f(X) = 0$. 则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正定或负定.

证 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 经非退化线性替换 $X = PY$ 化成标准形 $f(x_1,\cdots,x_n) = d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2$. 若存在 $d_i = 0$, 不妨设 $d_n = 0$, 令 $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即 $X_0 = PY_0 \neq 0$, 则 $f(X_0) = d_10^2 + \cdots + d_{n-1}0^2 + 01^2 = 0$, 与题设矛盾，故所有的 $d_i \neq 0$. 即 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的秩为 n, 若符号差不为零或 n, 即存在 $d_i > 0$, 也存在 $d_j < 0$, 不妨设 $d_1 > 0, d_n < 0$. 令 $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|d_n|}} \end{pmatrix}$, 即 $X_1 = PY_1 \neq 0$, 则 $f(X_1) = d_1(\frac{1}{\sqrt{d_n}})^2 + 0 + \cdots + 0 + d_n(\frac{1}{\sqrt{|d_n|}})^2 = 0$, 矛盾，故命题成立.

例 5 n 阶实对称矩阵 A 可逆， A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式．则二次型 $g(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$ 与 $f(x_1,\cdots,x_n) = X'AX$ 合同.

证 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 $\frac{1}{|A|}(A^*)' = A^{-1}$, 而 $(A^{-1})'AA^{-1} = A^{-1}$, 故 A 与 A^{-1} 合同，从而 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 合同.

例 6 设 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$ 为 n 阶实可逆矩阵，A_1,A_2 分别为 $p\times n,(n-p)\times n$ 矩阵．证明： 1 ）$f(X)=X'(A_1'A_1-A_2'A_2)X$ 的正、负惯性指数分别为 $p,n-p$. 2 ） $A_1'A_1-A_2'A_2$ 可逆.

证 由 $A_1'A_1-A_2'A_2=A'\begin{pmatrix}E_p&\\&-E_{n-p}\end{pmatrix}A$, 故 $A_1'A_1-A_2'A_2$ 与 $\begin{pmatrix}E_p&\\&-E_{n-p}\end{pmatrix}$ 合同，从而 1 ）， 2 ）均成立.

例 7 证明：一个实二次型可分解为两个一次齐次因式的积 $\Longleftrightarrow$ 秩 2, 符号差为 0, 或秩为 1.

证 $\longrightarrow$ 若为前者，其规范形为 $y_1^2-y_2^2$ ，命题成立．若为后者，其规范形为 $y_1^2=y_1y_1$, 命题也成立.

ρ 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$. 令 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 若 α,β 线性相关,即存在实数 k, 使得 $\beta=k\alpha$, 故 $f(x_1,\cdots,x_n)=k(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2$, 不妨设 $a_1\neq 0$, 令 $\begin{cases}y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\\y_2=x_2\\\vdots\\y_n=x_n\end{cases}$, 则该替换为非退化线性替换且 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(y_1,\cdots,y_n)=ky_1^2$, 故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的秩为 1. 若 α,β 线性无关，不妨设 $\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\neq 0$. 令 $\begin{cases}y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\\y_2=b_1x_1+\cdots+b_nx_n\\y_3=x_3\\\vdots\\y_n=x_n\end{cases}$ 则该替换为非退化线性替换且 $f(x_1,\cdots,x_n)=h(y_1,\cdots,y_n)=y_1y_2$. 再令 $\begin{cases}y_1=z_1+z_2\\y_2=z_1-z_2\\y_3=z_3\\\vdots\\y_n=z_n\end{cases}$ 故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的规范形为 $z_1^2-z_2^2$, 从而秩为 2 ，符号差为 1.

例 8 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2+\cdots+l_{p+q}^2$, 其中 l_i 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的一次齐次式．则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数 $\leq p$, 负惯性指数 $\leq q$.

证 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 经非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形 $y_1^2+\cdots+$

$y_s^2-y_{s+1}^2-y_{s+t}^2$. 假设 $s>p$. 设

$$\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots \\ l_{p+q}\end{pmatrix}=X=DCY=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p+q,1} & \cdots & a_{p+q,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix},$$

令 $\begin{cases} a_{11}y_1+\cdots+a_{1n}y_n=0\\ \cdots\\ a_{p1}y_1+\cdots+a_{pn}y_n=0\\ y_{s+1}=0\\ \cdots\\ y_n=0\end{cases}$ 则方程组中方程的个数 $p+(n-s)<n$，故有非零解 $Y_0=\begin{pmatrix} y_1^0\\ \ddots\\ y_s^0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，设 $X_0=CY_0$，则 $f(X_0)=-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2\leq 0$, 又 $f(X_0)=(y_1^0)^2+\cdots+(y_s^0)^2>0$, 矛盾，故 $s\leq p$, 同理可证 $t\leq q$.

例 9 若实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 的矩阵 A 满足 $|A|\neq 0$, 当 $x_{k+1}=\cdots=x_n=0$ 时， $f(x_1,\cdots,x_n)=0$, 其中 $k\leq\frac{n}{2}$. 证明： $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的符号差 t 满足 $|t|\leq n-2k$.

证 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数为 p, 则符号差为 $t=2p-n$, 即证 $k\leq p\leq n-k$. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 经非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形 $g(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$, 设 $Y=C^{-1}X=(c_{ij})X$. 若 $k>p$, 令 $\begin{cases} c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n=0\\ \cdots\\ c_{p1}x_1+\cdots+c_{pn}x_n=0\\ x_{k+1}=0\\ \cdots\\ x_n=0\end{cases}$ 方程的个数 $p+n-k<n$, 故有非零解 X_0, 令 $Y_0=C^{-1}X_0=\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, 因 $a_1=\cdots=a_p=0$, 故 $a_{p+1},\cdots,a_n$ 不全为零，从而 $0=f(X_0)=a_{p+1}^2-\cdots-a_n^2<0$, 矛盾，故 $k\leq p$. 下证 $p\leq n-k$, 假设

$p > n-k$. 令 $\begin{cases} c_{p+1,1}x_1+\cdots+c_{p+1,n}x_n=0 \\ \cdots \\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n=0 \\ x_{k+1}=0 \\ \cdots \\ x_n=0 \end{cases}$ 方程的个数 $n-p+n-k<n$, 故有非零解 X_1, 令 $Y_1=C^{-1}X_1=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则 $b_{p+1}=\cdots=b_n=0$, 故 $b_1,\cdots,b_p$ 不全为零，从而 $0=f(X_1)=b_1^2+\cdots+b_p^2>0$, 矛盾．故 $p\le n-k$.

例 10 证明： $A=(\frac{1}{ij})_{n\times n}$ 半正定.

证 因 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{n}) \end{pmatrix}(1,\cdots,\frac{1}{n})=C'C$ 半正定，故 A 半正定.

按定义易证

例 11 1) 设 A,B 为同阶正定阵 $a>0,b>0$，则 $aA+bB$ 正定.

2) B 为实对称. 则 B 正定 $\Longleftrightarrow$ 对任意的正定阵 A 及实数 $\lambda\ge 0,\mu\ge 0$, $\lambda A+\mu B$ 正定.

3) A 正定， k 为实数． kA 正定 $\Longleftrightarrow k>0$.

4) 设 $A=S+K$, S 为实对称， K 为实反对称．则对任意的向量 $X\ne 0$, 恒有 $X'AX>0\Longleftrightarrow S$ 正定.

例 12 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维实非零列向量， $\alpha_i'A\alpha_j=0, i\ne j, i,j=1,\cdots,s$， A 正定．则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证 令 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 则 $0=(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)'A(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)$, 即 $k_1\alpha_1'A\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s'A\alpha_s=0$, 由 A 正定， $\alpha_i'A\alpha_i>0, i=1,\cdots,s$. 故 $k_1=\cdots=k_s=0$，从而命题成立.

例 13 设 A 是 n 阶正定阵， B 为 $n\times m$ 矩阵．证明： 1 ） $B'AB$ 半正定 2 ） $r(B)=m\Longleftrightarrow B'AB$ 正定.

证 1 ） $\forall X\ne 0$, 由 $X'B'ABX=(BX)'A(BX)\ge 0$, 故 $B'AB$ 半正定.

2 ） $r(B)=m\Longleftrightarrow(\forall X\ne 0)BX\ne 0\Longleftrightarrow(\forall X\ne 0)X'(B'AB)X=(BX)'A(BX)>0$, 故 $B'AB$ 正定.

例 14 A 为 n 阶实方阵．证明： $r(A)=n\Longleftrightarrow$ 存在实方阵 B 使得 $A'B+B'A$ 正定.

证 ρ 令 $B=A$，则 $A'B+B'A=2A'A$ 正定.

$\longrightarrow\forall X\ne 0$, 由 $X'(A'B+B'A)X=2(BX')AX>0$ 有 $AX\ne 0$, 故 $r(A)=n$.

例 15 设 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ 正定，其中 A,C 为方阵. 则 1) A,C 正定. 2) $C-B'A^{-1}B$ 正定.

证 1) A,C 均为 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ 的主子式，故正定.

2) 对 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ 进行合同变换,

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B'A^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ B' & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C-B'A^{-1}B \end{pmatrix},$$

故由 1), $C-B'A^{-1}B$ 正定.

例 16 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为实数. 证明: $f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$ 正定 $\Longleftrightarrow 1+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^n a_i\neq 0$.

证 令 $C=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\longrightarrow |C|=1+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^n a_i\neq 0$, 故线性替换 $Y=CX$ 为非退化的，且 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2+\cdots+y_n^2$ 正定.

ρ 假设 $1+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^n a_i=0$, 则 $|C|=0$, 方程组 $CX=0$ 有非零解 X_0, 从而 $f(X_0)=0$，即 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 不正定，矛盾. 故 $1+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^n a_i\neq 0$.

例 17 判断二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 是否正定.

证 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, k 阶顺序主子式为 $(\frac{1}{2})^k(k+1)>0$, $k=1,\cdots,n$. 故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正定. 或配方为 $f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}[(x_1+\cdots+x_n)^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2]>0$ 也可得正定.

例 18 t 取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2+x_1x_3$ 正定，并讨论 $t\geq 2$ 的情况.

证 二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & t & \frac{1}{2} \\ t & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 令所有顺序主子式 >0, $\begin{cases} 2-t^2>0 \\ -\frac{1}{2}+3(2-t^2)>0 \end{cases}$,

即 $|t| < \sqrt{\frac{11}{6}}$. $t > 2$, $\begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{7t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 故 A 不定.

例 19 设 $f(x_1,\cdots,x_n) = a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i x_{n-i+1}$, 其中 a, b 为实数, 问 a, b 为何值时 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正定.

证 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵为: n 为奇数时, $\begin{pmatrix} a & & & & & & b \\ & \ddots & & & & \vdots & \\ & & a & & b & & \\ & & & a & & & \\ & & b & & a & & \\ & \vdots & & & & \ddots & \\ b & & & & & & a \end{pmatrix}$; n 为偶数时, $\begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}$. 令所有顺序主子式大于零, $a > 0$, $a(a^2-b^2)^n > 0, (a^2-b^2)^n > 0$, 即 $a > 0, a^2 > b^2$.

例 20 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 正定, $b_1,\cdots,b_n$ 为非零的实数, 则 $B = (a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$ 正定.

证 由 $B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}' A \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$ 与 A 合同, 故 B 正定.

例 21 设 A 实对称矩阵. 则 1) 存在正实数 t 使得 $tE + A$ 正定.

2) 存在正实数 t 使得 $E + tA$ 正定.

3) 若 A 可逆, 则 A 与 A^{-1} 有相同的正、负惯性指数, 特别地, A 正定 $\Longleftrightarrow$ A^{-1} 正定.

证 设正交阵 T 使得 $T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

1) 令 $|\lambda_i| = max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|\}$, 则 $t > |\lambda_i|$ 时,

$$T'(tE+A)T = \begin{pmatrix} \lambda_1 + t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + t \end{pmatrix},$$

而 $t + \lambda_j > 0$, $j = 1, \cdots, n$. 故 $tE + A$ 正定.

2) 由 $T'(E+tA)T = \begin{pmatrix} 1+t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t\lambda_n \end{pmatrix}$, 令 $1 + t\lambda_k > 0$, 则存在 $t_k > 0$, 当 $0 < t < t_k$, $1 + t\lambda_k > 0$, $k = 1, \cdots, n$. 则 $0 < t < min\{t_1, \cdots, t_n\}$, $E + tA$ 正定.

3) 由 $T'A^{-1}T = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$, 而 λ_i^{-1} 与 λ_i 有相同的正、负号, $i = 1, \cdots, n$. 故 A 与 A^{-1} 的正、负惯性指数相同，进而， A 正定当且仅当 A^{-1} 正定.

例 22 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 正定. 证明： 1 ） A 的主对角线上的元素全大于零.

2 ） $|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

3) A 中各元素绝对值最大者一定在主对角线上.

证 1) 由 A 正定， A 的一阶主子式全大于零，即 A 的主对角线上的元素全大于零.

2) 由 A 正定，故任一二阶主子式 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0$, 即 $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$, 从而 $|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj})$.

3) 假设 $a_{ij}, i \neq j$ 为 A 中各元素绝对值最大者，则 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} < 0$, 这与 2 ）矛盾.

例 23 设 A 为 n 阶正定阵， B 为实对称矩阵且 $X'BX = X'AX + x_n^2$. 则 $|B| > |A|$.

证 由 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}+1 \end{pmatrix}$, $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = |A| + |A_1| > |A|$, 其中 $|A_1| > 0$ 为 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式.

例 24 证明： 1) 若 A 正定，则 A^* 正定.

2) 若 A^* 正定，则 $|A|>0$ 时， A 正定， $|A|<0$ 时， A 负定.

3) 若 A 半正定，则 A^* 半正定.

4) 若 $A_{n\times n}$ 半负定，则 n 为奇数时， A^* 半正定； n 为偶数时， A^* 半负定.

证 1), 2) 由 $A^*=|A|A^{-1}$, 及 A 与 A^{-1} 同正、负定性，易证.

3) 由 A 半正定，存在方阵 C 使得 $A=C'C$ ，故 $A^*=C^*(C^*)'$ ，即 A^* 半正定.

4) A 半负定 $\Longleftrightarrow -A$ 半正定. $(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$, 即 $A^*=(-1)^{n-1}(-A)^*$, 易知命题成立.

例 25 1) 设 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji}$ 正定. 则

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & y_n\\ y_1 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

负定且矩阵为 $-A^*$.

2) 若 $A=(a_{ij})$ 正定，则 $|A|\le a_{nn}|P_{n-1}|$, 其中 $|P_{n-1}|$ 为 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式.

3) 若 A 正定. $|A|\le a_{11}\cdots a_{nn}$.

4) 若 A 半正定，则 $|A|\le a_{11}\cdots a_{nn}$.

5) A 为方阵， $|A|\le\prod_{i=1}^n(a_{1i}^2+\cdots+a_{ni}^2)$.

6)设 A 为 n 阶实方阵且 A 的所有元素 $|a_{ij}|\le k$. 证明：$|A|^{2n}\le k^{2n}n^n$.

证 1) $f(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} A & Y\\ Y' & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & Y\\ 0 & -Y'A^{-1}Y\end{vmatrix}=-|A|(Y'A^{-1}Y)=Y'(-A^*)Y.$

由 A 正定， A^{-1} 也正定， $-A^*$ 为负定对称矩阵，即命题成立.

2) $A=\begin{vmatrix} P_{n-1} & \alpha\\ \alpha' & a_{nn}\end{vmatrix}$, 因 A 正定，故 P_{n-1} 正定，从而 $\alpha'P_{n-1}^{-1}\alpha\ge 0$, 故 $|A|=|P_{n-1}|(a_{nn}-\alpha'P_{n-1}^{-1}\alpha)\le a_{nn}|P_{n-1}|$.

3) 由 2 ）递推，可得 $|A|\le a_{11}\cdots a_{nn}$.

4) 若 $|A|\ne 0$, 则 A 正定，由 3) 命题成立. 若 $|A|=0$, A 半正定，$a_{ii}\ge 0, i=1,\cdots,n$. 故 $|A|\le a_{11}\cdots a_{nn}$.

5) $A'A$ 半正定，由 4) ， $|A|^2\le\prod_{i=1}^n(a_{1i}^2+\cdots+a_{ni}^2)$.

6 ）由 5 ）易得.

例 26 设 B 为 n 阶正定阵，N 为 $n\times k$ 列满秩实矩阵，$A=\begin{pmatrix} B & N\\ N' & 0\end{pmatrix}$. 则二次型 $f(X)=X'AX$ 的正、负惯性指数分别为 n,k.

证 1) 由 B 正定， B 可逆. 又 $\begin{pmatrix} E & N \\ -N'B^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & N \\ N' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B^{-1}N \\ 0 & E \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -N'B^{-1}N \end{pmatrix}$，即 A 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -N'B^{-1}N \end{pmatrix}$ 合同，由 B 正定， N 列满秩， $N'B^{-1}N$ 正定，故 A 的正、负惯性指数分别为 n, k.

完全类似地可证

例 27 B 为 n 阶正定阵，$a>0$，N 为 $n\times n$ 实矩阵. $A=\begin{pmatrix} B & N \\ N' & -aE_k \end{pmatrix}$. 则二次型 $f(X)=X'AX$ 的正、负惯性指数分别为 n， k.

例 28 证明： n 阶实方阵 A 正定 $\Longleftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使得 $A=\alpha_1\alpha_1'+\cdots+\alpha_n\alpha_n'$.

证 A 正定 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆阵 $C=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 使得 $A=CC'$, 即 $A=\alpha_1\alpha_1'+\cdots+\alpha_n\alpha_n'$.

例 29 设 A 为 n 阶正定阵， B 为 $n\times m$ 阵. 证明： $r(B'AB)=r(B)$.

证 由 A 正定，存在可逆阵 C 使得 $A=C'C$. 故 $B'AB=(CB)'(CB)$. 从而 $r(B'AB)=r((CB)'(CB))=r(CB)=r(B)$.

例 30 1) 设 $A_1,\cdots,A_s$ 为 n 阶实方阵， $\sum_{i=1}^s A_i'A_i=0$. 则 $A_i=0, i=1,\cdots.s$.

2) 若 A,B 为实对称矩阵， C 为实反对称矩阵， $A^2+B^2=C^2$. 则 $A=B=C=0$.

证 1 ）对任意的 n 维列向量 X, $0=X'(\sum_{i=1}^s A_i'A_i)X=\sum_{i=1}^s X'A_i'A_iX$, 因 $A_i'A_i$ 半正定，从而 $X'A_i'A_iX=0$, 故 $A_iX=0$, 由 X 的任意性， $A_i=0, i=1,\cdots,s$.

2 ）因由 $A^2+B^2=C^2$ 有 $A'A+B'B+C'C=0$, 故由 1 ），$A=B=C=0$.

例 31 设 A 为 n 阶实方阵. 则 A 半正定 $\Longleftrightarrow \forall B_{n\times m}$, $B'AB$ 半正定.

证 ρ $\forall X\neq 0$, 由 $X'(B'AB)X=(BX)'A(BX)\geq 0$, 故 $B'AB$ 半正定.

$\longrightarrow$ 对任意的列向量 X，令 $B=(X,0,\cdots,0)_{n\times m}$, 则

$$B'AB=\begin{pmatrix} X'AX & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\ A\#,$$

故 $X'AX\geq 0$，即 A 半正定.

例 32 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实方阵. $\begin{vmatrix} a_{mm} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nm} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$, $m=2,3,\cdots,n.B$ 为非零阵且 $AB=0$. 则 A 半正定.

证 令 $C=\begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$，则 C 是由 A 经行（列）交换的合同变换得到的，故 A 与 C 合同．又 $AB=0$, $B\neq 0$，故 $|A|=0$, 从而 $|C|=0$. 令 $C=\begin{pmatrix} C_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{11} \end{pmatrix}$， C_1 为 C 的 $n-1$ 阶顺序主子式所对应的矩阵， C_1 与 $\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 合同，故由条件， C_1 正定．又 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha' C_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & \alpha \\ \alpha' & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -C_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & a_{11}-\alpha' C_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$, 故 $|C|=|C_1|(a_{11}-\alpha' C_1^{-1}\alpha)$, 从而 $a_{11}-\alpha' C_1^{-1}\alpha=0$. 这样 C 与 $\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同，从而半正定.

例 33 A 为实方阵．则存在可逆阵 P 使得 $AP=(\Theta,0)$，其中 $r(\Theta)=r(A), \Theta'\Theta=E_r$.

证 由 $A'A$ 为半正定矩阵，存在可逆阵 P, 使得 $P'A'AP=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 令 $AP=\begin{pmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & \Theta_4 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} \Theta_1' & \Theta_3' \\ \Theta_2' & \Theta_4' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & \Theta_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $\Theta_2'\Theta_2+\Theta_4'\Theta_4=0$. 从而 $\Theta_2=0, \Theta_4=0$ 且 $AP=(\Theta,0), r(\Theta)=r(A), \Theta'\Theta=E_r$.

例 34 设 A 实对称矩阵， B 为半正定且 $|A+iB|=0$. 证明：

1) 方程组 $(A+iB)X=0$ 有非零实解.

2) $|A|=|B|=0$.

证 1) $(A+iB)X=0$ 有非零解 $\alpha+i\beta$, 其中 α,β 为 n 维列向量．下证 α,β 均为 $(A+iB)X=0$ 的解．由 $(\alpha'-i\beta')(A+iB)(\alpha+i\beta)=0$, 即 $(\alpha'A\alpha+\beta'B\alpha-\alpha'B\beta+\beta'B\beta)+i(\alpha'B\alpha-\beta'A\alpha+\alpha'A\beta+\beta'B\beta)=0$ 及 $\beta'B\alpha=\alpha'B\beta$， $\alpha'A\beta=\beta'A\alpha$ 有 $\alpha'A\alpha+\beta'B\beta=0, \alpha'B\alpha+\beta'B\beta=0$. 而 B 为半正定，故 $\alpha'B\alpha=0, \beta'B\beta=0$, 令 $B=C'C$, 则 $C\alpha=0, B\alpha=C'C\alpha=0$, 同理 $B\beta=0$. 又由 $(A+iB)(\alpha+i\beta)=0$, 即 $A\alpha+iB\alpha+iA\beta-B\beta=0$, 知 $A\alpha+iA\beta=0$, 从而 $A\alpha=0, A\beta=0$.

2) 由 1) 易得.

例 35 设 A 为 n 阶实可逆矩阵， S 为实反对称矩阵. 则 $|A'A+S|>0$.

证 设 λ 为 $A'A+S$ 的实特征值， α 为属于 λ 的特征向量，即 $(A'A+S)\alpha=\lambda\alpha$. 故 $\alpha'(A'A+S)\alpha=\alpha'A'A\alpha+\alpha'S\alpha$, 而 $A'A$ 为正定阵，故 $\alpha'AA\alpha>0$, S 为反对称阵，故 $\alpha'S\alpha=0$. 这样 $0<\alpha'(A'A+S)\alpha=\lambda\alpha'\alpha$, 故 $\lambda>0$. 而 $A'A+S$ 的虚特征值成对按共轭出现，故 $|A'A+S|>0$.

例 36 设 A 为 n 阶实对称矩阵. 证明：存在一正实数 c 使得对任意 n 维列向量 X 有 $|X'AX| \le cX'X$.

证 由 A 实为对称矩阵, 存在正交阵 T 使得 $A = T'\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} T$, 令 $TX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 取 $c \ge max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|\}$. 则

$$X'AX = |\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2| \le \sum_{i=1}^{n} c y_i^2 = cX'X$$

例 37 主对角线上元素全为 1 的上三角称为特殊上三角.

1) 设 A 为对称矩阵， T 为特殊上三角. 则 $B = T'AT$ 与 A 有相同的各级顺序主子式.

2) 若对称矩阵 A 的各级顺序主子式不为零, 则存在特殊上三角矩阵 T 使得 $T'AT$ 为对角形.

证 1) 设 A 的 k 级顺序主子式对应的矩阵为 A_k， 令 $A = \begin{pmatrix} A_k & C \\ C' & D \end{pmatrix}$. 对 T 相应的分块， $B = \begin{pmatrix} T_k & U \\ 0 & W \end{pmatrix}$, 其中 T_k 为特殊上三角. 故 $B = T'AT = \begin{pmatrix} T_k' A_k T_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$， 从而 B 的 k 级顺序主子式为 $|T_k' A_k T_k| = |A_k|$.

2) 对 n 归纳. $n = 1$ 时显然成立，设 $n-1$ 时成立，则为 n 时. 令 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \beta' & a_{nn} \end{pmatrix}$， 其中 A_1 为 A 的 $n-1$ 级顺序主子式对应的矩阵，则

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \beta' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_1^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & a_{nn} - \beta' A_1^{-1} \beta \end{pmatrix}$$

由假设存在特殊上三角 T_1 使得 $T_1' A_1 T_1$ 为对角形，令

$$T = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_1^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 T 为特殊上三角且 $T'AT$ 为对角形.

例 38 n 元实二次型 $f(X) = X'AX$ 的秩为 r， 正、负惯性指数分别为 p, q 且 $p \ge q > 0$.

1) 证明: 存在 q 维子空间 $W\subseteq R^n$ 使得对任意 $X\in W$ 有 $f(X)=0$. (或改为存在一 $\frac{1}{2}(r-|s|)$ 维的子空间 W 使得对任意的 $x\in W$ 有 $f(X)=0$).

2) 令 $T=\{X|X\in R^n, f(X)=0\}$. 问 T 是否与 W 相等.

证 1) 由题设, 存在可逆阵 P 使得 $A=P'\begin{pmatrix}E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0\end{pmatrix}P$. 令 $Y=PX=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. 则 $f(X)=X'P'APX=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$. 取

$$Y_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, Y_q=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots 0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},$$ 令 $X_i=PY_i$, 则 $f(X_i)=Y_i'P'APY_i=0$,

$i=1,\cdots,q$, 且 $X_iAX_j=0, i\neq j$. 故对任意的 $k_1X_1+\cdots+k_qX_q$, 有 $f(k_1X_1+\cdots+k_qX_q)=(k_1X_1+\cdots+k_qX_q)'A(k_1X_1+\cdots+k_qX_q)=\sum_{i=1}^q\sum_{j=1}^q k_ik_jX_iAX_j=0$. 令 $W=L(X_1,\cdots,X_q)$ 即满足要求.

2) 一般不等, 例如, 令 $A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}$, 则 $W=L(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$, 取

$X=\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $f(X)=0$ 但 $X\notin W$.

例 39 设 A 为正定阵. 证明: $A+A^{-1}-2E$ 半正定.

证 由 A 正定, 存在正交阵 T 使得 $T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_1>0,\cdots,\lambda_n>$

0. 故 $T'A^{-1}T = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$. 从而

$$T'(A+A^{-1}-2E)T = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_1^{-1}-2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+\lambda_n^{-1} \end{pmatrix},$$

而 $\lambda_i+\lambda_i^{-1}-2 \geq 0$, $i=1,\cdots,n$. 故 $A+A^{-1}-2E$ 半正定.

例 40 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(a_{ij}b_{ij})$.

1) 若 A,B 为半正定矩阵，则 C 为半正定矩阵.

2) 若 A,B 为正定阵，则 C 为正定阵.

证 1) 显然 $C'=C$. 由 B 为半正定矩阵，存在 n 阶方阵 $M=(m_{ij})$ 使得 $B=M'M$ ，故 $b_{ij}=\sum_{k=1}^n m_{ki}m_{kj}$ ，从而

$$\begin{aligned} f(X) = X'CX &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\sum_{k=1}^n m_{ki}m_{kj})x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^n[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}m_{ki}m_{kj}x_ix_j] = \sum_{k=1}^n(m_{k1}x_1,\cdots,m_{kn}x_n)A\begin{pmatrix} m_{k1}x_1 \\ \vdots \\ m_{kn}x_n \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

即 C 半正定.

2) 若 A,B 正定，则 M 可逆. 对 $X\neq 0$ ，则 $MX\neq 0$ ，即存在 k 使得 $\begin{pmatrix} m_{k1}x_1 \\ \vdots \\ m_{kn}x_n \end{pmatrix} X \neq 0$ ，故 $(m_{k1}x_1,\cdots,m_{kn}x_n)A\begin{pmatrix} m_{k1}x_1 \\ \vdots \\ m_{kn}x_n \end{pmatrix} > 0$, 这样

$$\begin{aligned} f(X) &= X'CX \\ &= \sum_{k=1}^n(m_{k1}x_1,\cdots,m_{kn}x_n)A\begin{pmatrix} m_{k1}x_1 \\ \vdots \\ m_{kn}x_n \end{pmatrix} \geq (m_{k1}x_1,\cdots,m_{kn}x_n)A\begin{pmatrix} m_{k1}x_1 \\ \vdots \\ m_{kn}x_n \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

故 C 正定.

例 41 若实对称矩阵 A 的所有一阶主子式之和与所有二阶主子式之和均为 0. 则 $A=0$.

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$, $\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_n=0$. 故 $0=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j=\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2$, 从而 $\lambda_i=0, i=1,\cdots,n$. 即 $A=0$.

例 42 设 A 为实对称矩阵, α,β 为列向量. $t_1=\alpha'A\alpha, t_2=\beta'A\beta$.

1) 若 $t_1>0, t_2<0$, 则 α,β 线性无关.

2) 若 $t_1>0, t_2<0$, 则存在 γ 使得 $\gamma'A\gamma=0$.

3) α,β 为单位向量, $t_1<t_2$. 则对任意的 $t\in[t_1,t_2]$, 存在单位向量 η 使得 $\eta'A\eta=t$.

4) 若 $t_1>0, t_2<0$, 则存在 η,θ, η,θ 线性无关, 而 η,θ 均与 α,β 线性相关且 $\eta'A\eta=0=\theta'A\theta$.

证 1) 假设 α,β 线性相关, 则存在实数 k 使得 $\beta=k\alpha$, 故 $\beta'A\beta=k^2\alpha'A\alpha>0$. 矛盾. 从而 α,β 线性无关.

2) 存在可逆阵 P 使得 $A=P'\begin{pmatrix}E_r & & \\ & -E_s & \\ & & 0\end{pmatrix}P$, 由条件, r,s 全不为零. 令 $P\gamma=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, 即 $\gamma=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, 则 $\gamma'A\gamma=0$.

3) 若 $t=t_1$ 或 $t=t_2$, 显然成立. 若 $t\in(t_1,t_2)$, 考虑 $A-tE$, 则 $\alpha'(A-tE)\alpha<0, \beta'(A-tE)\beta>0$, 由 2), 存在 γ 使得 $\gamma'(A-tE)\gamma=0$. 故 $\frac{\gamma'}{||\gamma||}A\frac{\gamma}{||\gamma||}=t$, 令 $\eta=\frac{\gamma}{||\gamma||}$ 即可.

4) 令 $\gamma=\alpha+k\beta$, $\gamma'A\gamma=0$, 即 $k^2\beta'A\beta+2k\alpha'A\beta+\alpha'A\alpha=0$, 由 $4(\alpha'A\beta)^2-4(\alpha'A\alpha)(\alpha'A\beta)>0$, k 有两个不同的根 k_1,k_2, 设 $\eta=\alpha+k_1\beta$, $\theta=\alpha+k_2\beta$, 则 η,θ 线性无关, $\eta'A\eta=0, \theta'A\theta=0$. 又都与 α,β 线性相关.

例 43 1) 设 A 为实对称矩阵. 证明：对任意的列向量 α， $\alpha'A\alpha=0$ $\Longleftrightarrow A=0$.

2) A 为反对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ 对任意的列向量 α， $\alpha'A\alpha=0$.

证 1) ρ 设 λ 为 A 的任一特征值, α 为相应的特征向量, 即 $A\alpha=\lambda\alpha$. 从而 $0=\alpha'A\alpha=\lambda\alpha'\alpha$, 故 $\lambda=0$， 进而 $A=0$.

$\longrightarrow$ 显然.

2) ρ 由 $\alpha'A\alpha=(\alpha'A\alpha)'=-\alpha'A\alpha$ 知 $\alpha'A\alpha=0$.

$\longrightarrow$ 由 $\alpha'A\alpha=(\alpha'A\alpha)'=\alpha'A'\alpha$, 知, $\alpha'(A+A')\alpha=0$, 而 $A+A'$ 为对称阵, 由 1)， $A+A'=0$， 即 $A=-A'$.

例 44 反对称矩阵 A 合同于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

证 归纳法. $n=1$ 时, $A=0$，命题成立. $n=2$ 时, $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. 若 $a=0$，显然成立. 若 $a\neq 0$，令 $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, 则 T 可逆, A 合同于 $T'AT=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，命题成立. 设小于 $n-1$ 时成立, 则为 n 时, 若 $A=(a_{ij})$， $a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$, 则 $a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$, 令 $T=P(1,n)$, 则 A 合同于 $T'AT=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 A_1 为 $n-1$ 的反对称矩阵, 由假设, 存在可逆阵 T_1 使得 $T_1'A_1T_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$, 令 $P=T\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P'AP$ 为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$. 若存在 $a_{1i}\neq 0$, 对 A 依次进行合同变换 $P(j+i(-\frac{a_{1j}}{a_{1i}}))'AP(j+i(-\frac{a_{1j}}{a_{1i}}))$, $j=2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$, 得矩阵 B，再进行

合同变换 $P(i(\frac{1}{a_{1i}})'BP(i(\frac{1}{a_{1i}})$ 得 C，对 C 进行合同变换 $P(2,i)'CP(2,i)$，知 A 合同于 $D=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&A_1\end{pmatrix}$, 其中 A_1 为 $n-2$ 阶反对称矩阵，由假设，

A_1 合同于 $\begin{pmatrix}0&1&&&&&&\\-1&0&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&0&1&&&\\&&&-1&0&&&\\&&&&&0&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&0\end{pmatrix}$，从而 A 合同于 $\begin{pmatrix}0&1&&&&&&\\-1&0&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&0&1&&&\\&&&-1&0&&&\\&&&&&0&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&0\end{pmatrix}$.

例 45 设 $\begin{pmatrix}1&5\\5&16\end{pmatrix}$, 求非零整数 x,y 使 $(x,y)\begin{pmatrix}1&5\\5&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0.$

证 A 经合同变换 $\begin{pmatrix}1&0\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\5&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-9\end{pmatrix}$, 显然使得

$$(u,v)\begin{pmatrix}1&0\\0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$$

的 $u=\pm 3v$，故 $x=-2v, y=v$ 或 $x=-8v, y=v,\ v\in Z.$

例 46 设 $f(X)=X'AX, g(X)=X'BX$ 为实二次型，B 可逆，$|A-\lambda B|=0$ 有 n 个互异的实根，则存在非退化线性替换 $X=PY$ 使得 $f(X),g(X)$ 同为标准形.

证 由 B 可逆及 $|A-\lambda B|=0\Longleftrightarrow|B^{-1}A-\lambda E|=0$ 知，$B^{-1}A$ 有互异的实特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为相应的特征向量, 即 $B^{-1}AX_i=\lambda_iX_i$, $i=1,\cdots,n$. 令 $P=(X_1,\cdots,X_n)$. 则 $B^{-1}AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$, 故 $P'AP=P'BP\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$, 由 $P'AP$ 为对称阵，$P'BP$ 与 $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 可交换，令 $P'BP=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$, 则 $P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\mu_n\end{pmatrix}$. 故非退化线性替换 $X=PY$ 将 $f(X),g(X)$ 同时化为标准形.

例 47 设 A,B 为半正定矩阵. 则 $tr(AB)=0 \Longleftrightarrow AB=0$.

证 $\longrightarrow$ 显然.

ρ 存在正交阵 T 使得 $T'AT=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$, 其中 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 均不为零. 设 $T'BT=(B_{ij})$, 则 $T'ABT=T'ATT'BT=\begin{pmatrix}b_{11}\mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{rr}\mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$,

由 $tr(AB)=0$ 及 $b_{ii}\geq 0, i=1,\cdots,n$ 知, $b_{11}=\cdots=b_{rr}=0$, 由 B 半正定, 从而 2 阶主子式 ≥ 0 得, $b_{ij}=0, i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,n$. 故 $T'BT=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$, 其中 B_2 为 $n-r$ 阶方阵, 故 $T'ABT=0$, 即 $AB=0$.

例 48 设 A 为正定阵, 构造方阵列

$$X_0=E, X_{k+1}=\frac{1}{2}(X_k+AX_k^{-1}), k=0,1,\cdots.$$

则 $lim_{n\longrightarrow\infty}X_k$ 存在.

证 首先用数学归纳法证 $AX_k=X_kA$, 再用数学归纳法证 X_k 正定. 存在正交阵 T 使得 $T'AT=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$, 再用数学归纳法证 $T'X_kT$ 对角化, 设 $T'X_kT=diag\{x_k^{(1)},\cdots,X_k^{(n)}\}$, 从而 $T'X_{k+1}T=\frac{1}{2}(T'X_kT+T'ATT'X_kT)$, 我们只需证明数列 $a>0, x_0=1, x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+ax_k^{-1}), k=0,1,\cdots$ 的极限存在, 由 $\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}(1+ax_k^{-2})<1$ 知 x_k 单调下降有下界, 故极限存在.

例 49 证明: 若 S 为 n 阶对称正定阵, 则 (i) 存在唯一的对称正定阵 S_1 使得 $S=S_1^2$. (ii) 若 A 是 n 阶实对称阵, 则 AS 的特征值是实数.

证 (i) 由 A 正定, 存在正交阵 T 使得 $A=T'diag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)T$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为两两不同的正实数. 取 $S_1=T'diag(\sqrt{\lambda_1}E_1,\cdots,\sqrt{\lambda_s}E_s)T$ 即满足要求. 若还有正定阵 S_2 满足 $S=S_2^2$, 则存在正交阵 Q 使得 $S_2=Q'diag(\sqrt{\lambda_1}E_1,\cdots,\sqrt{\lambda_s}E_s)Q$, 故 $diag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)=TQ'diag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)QT'$,

即 QT' 与 $diag(\lambda_1 E_1, \cdots, \lambda_s E_s)$ 可交换, 从而 QT' 为 $diag(P_1, \cdots, P_s)$, 故 QT' 与 $diag(\sqrt{\lambda_1}E_1, \cdots, \sqrt{\lambda_s}E_s)$ 可交换，即

$$diag(\sqrt{\lambda_1}E_1, \cdots, \sqrt{\lambda_s}E_s) = T'Qdiag(\sqrt{\lambda_1}E_1, \cdots, \sqrt{\lambda_s}E_s)QT',$$

即 $S_1 = S_2$.

(ii) 设 λ 为 AS 的特征值, α 为其特征向量, 即 $AS\alpha = \lambda\alpha$, 故 $\overline{\alpha}'SAS\alpha = \lambda\overline{\alpha}'S\alpha > 0$, 从而 λ 为实数.

例 50 设 A, B 为同阶实对称矩阵. 则 $(AB - BA)^2$ 半负定或负定.

证 因 $(AB - BA)' = -(AB - BA)$, 故 $AB - BA$ 为反对称，从而 $(AB - BA)^2 = -(AB - BA)'(AB - BA)$, 又 $(AB - BA)'(AB - BA)$ 半正定或正定, 从而 $(AB - BA)^2$ 半负定或负定.

第 6 章　线性空间

基本知识

结果 1 线性空间的定义及性质.

结果 2 基、维数、坐标. 在确定线性空间的基与维数时，通常是将线性空间中向量的通式表示成“最小”的向量的线性组合，这样所用的“最小”的向量就是基，个数为维数.

结果 3 基变换、坐标变换及公式

1) 过度矩阵： $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 n 维线性空间 V 的两组基，若 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A$, 称 A 为由基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基的过渡矩阵.

设 $\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X$, $\gamma=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y$, 则 $Y=AX$.

2) $[(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A]B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)AB$.

3) $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\cdots,\beta_n)A=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A$.

4) $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A+B)$.

5) 在 2), 3), 4) 中， $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 不是基，而是一般向量组仍成立.

结果 4 基扩充定理.

结果 5 子空间的判定及子空间的交仍是子空间.

1) $dimL(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=$ 秩 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$.

2) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\cdots,\beta_s)\Longleftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 等价.

结果 6 子空间的和仍是子空间及维数公式：

1) $dim(V_1+V_2)=dimV_1+dimV_2-dimV_1\bigcap V_2$ （**注意证明**）.

2) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

结果 7 如果 n 维线性空间 V 的两个子空间 V_1,V_2 维数的和大于 n，那么 V_1,V_2 必含有非零的公共向量.

结果 8 下列条件关于 **和** V_1+V_2 等价

1) $V_1+V_2=V_1\bigoplus V_2$.

2) $\alpha_1+\alpha_2=0,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\ \rho\ \alpha_1=\alpha_2=0$, 即零向量的分解唯一.

3) 存在一向量分解唯一.

4) $V_1\bigcap V_2=\{0\}$.

5) $dimV_1+dimV_2=dim(V_1+V_2)$.

上述定理可扩充为 s 个子空间 $V_1,\cdots,V_s$ 的情况，其中 4 ）改为

4) $V_i\bigcap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}$, $i=1,\cdots,s$ $V_i\bigcap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{0\}$, $i=2,\cdots,s$.

结果 9 V_1+V_2 为直和当且仅当 V_1 的基与 V_2 的基放在一起线性无关.

结果 10 直和补的存在性：U 为线性空间 V 的子空间, 则存在子空间 W 使得 $V=U\bigoplus W$. 但一般不唯一，例如： $V=L(\alpha_1,\alpha_2),\alpha_1,\alpha_2$ 线性

无关. $V_1 = L(\alpha_1), V_2 = L(\alpha_2), V_3 = L(\alpha_1 + \alpha_2)$，则 $V = V_1 \bigoplus V_2 = V_1 \bigoplus V_3$，但 $V_2 \neq V_3$. 唯一当且仅当 $U = \{0\}$ 或 $U = V$.

结果 11 设 σ 为数域 P 上线性空间 V 到线性空间 V' 映射，若

1) σ 为一一映射；

2) $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma\alpha + \sigma\beta$, 即保持加法；

3) $\sigma(k\alpha) = k\sigma\alpha$, 即保持数乘，

则称 σ 为 V 到 V' 的同构映射.

若 σ 为 V 到 V' 的同构映射，则 σ^{-1} 为 V' 到 V 的同构映射. 同构具有自反性、对称性、传递性，同构映射的乘积仍是同构映射. 我们有

1) $\sigma(0) = 0$.

2) $\sigma(-\alpha) = -\sigma\alpha$.

3) $\sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r) = k_1\sigma\alpha_1 + \cdots + k_r\sigma\alpha_r$.

4) 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，则 $\sigma\alpha_1, \cdots, \sigma\alpha_r$ 线性相关. 也就是说，若 $\sigma\alpha_1, \cdots, \sigma\alpha_r$ 线性无关，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 也线性无关.

5) 同构映射保持并反保持所有的线性关系.

6) $U \leq V \ \rho\, \sigma(U) \leq V'$ 且 $U \cong \sigma(U)$; $W \leq V' \ \rho\, \sigma^{-1}(W) \leq V$ 且 $\sigma^{-1}(W) \cong W$.

7) 任意两个 n 维子空间同构，均与 R^n 同构.

8) 定义两个空间间的同构映射，只需给定义域线性空间的一组基指定象，而象必须是值域线性空间中的基. 同时要求为线性映射.

例题

例 1 若 s 个向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，而其中任意 $s-1$ 个线性无关. 证明：

1 ）若 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$. 则 $k_1 = \cdots = k_s = 0$ 或 $k_1 \cdots k_s \neq 0$.

2 ）若 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0, l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s = 0$, 且 $l_1 \neq 0$. 则 $\frac{k_1}{l_1} = \cdots = \frac{k_s}{l_s}$.

证 1 ）若 $k_1, \cdots, k_s$ 不全为零，不妨设 $k_1 \neq 0$, 若 $k_2, \cdots, k_s$ 存在一数为零，不妨设 $k_s = 0$. 则 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} = 0$, 由 $k_1 \neq 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}$ 线性相关，矛盾. 故 $k_1 \cdots k_s \neq 0$.

2 ）由 1 ） $l_1 \cdots l_s \neq 0$, 故 $l_1(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s) - k_1(l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s) = 0$, 即 $(k_2l_1 - k_1l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_sl_1 - k_1l_s)\alpha_s = 0$, 由 $\alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关知，$k_2l_1 - k_1l_2 = \cdots = k_sl_1 - k_1l_s = 0$, 即 $\frac{k_1}{l_1} = \cdots = \frac{k_s}{l_s}$.

例 2 设 W 为 R^n 的一个非零子空间，W 中的每个向量 $(a_1, \cdots, a_n)$ 满足 $a_1 = \cdots = a_n = 0$ 或 $a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$. 证明： $dimW = 1$.

证 由 $W \neq \{0\}$, 存在 $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in W$, 则 $a_1, \cdots, a_n$ 均不为零. 设 $\beta = (b_1, \cdots, \beta_n) \in W$, 若 $b_1 = 0$, 则 $b_2 = \cdots = b_n = 0$, 故 $\beta = 0\alpha$. 若 $b_1 \neq 0$,

则 $b_2,\cdots,b_n$ 均不为零. 由 $b_1\alpha-a_1\beta=(0,a_2b_1-a_1b_2,\cdots,a_nb_1-a_1b_n)\in W$ 知, $a_ib_1-b_ia_1=0,i=2,\cdots,n$, 即 $\frac{b_1}{a_1}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$, 故 $\beta=\frac{b_1}{a_1}\alpha$, 从而 $dimW=1$.

例 3 设 W 为 P^n 的一子空间. W 中任一非零向量的为 0 的分量的个数 $\le r$. 则 $dimW\le r+1$.

证 假设 $dimW=s>r+1$, 设 W 的基为 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$, $i=1,\cdots,s$. 令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,r+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r+2,1} & \cdots & a_{r+2,r+1}\end{pmatrix}$, 则 $r(A)=t\le r+1$. 不妨设 A 的前 t 行线性无关. 则最后一行可由前 t 行线性表出, 设 $(a_{r+2,1},\cdots,a_{r+2,r+1})=k_1(a_{11},\cdots,a_{1,r+1}+\cdots+k_t(a_{t1},\cdots,a_{t,r+1})$. 则 $\beta=\alpha_{r+2}-k_1\alpha_1-k_t\alpha_t=(0,\cdots,0,*,\cdots,*)\in W$, 而由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, $\beta\ne0$, 但 β 至少有 $r+1$ 个分量为 0. 矛盾, 故 $dimW\le r+1$.

例 4 设 A 为 n 阶半正定或半负定. 证明: $W=\{X|X'AX=0\}$ 为的 R^n 子空间, 并求 W 的维数. 并举例说明为不定时, 不为线性空间.

证 设 A 为半正定, 则存在实方阵 C 使得 $A=C'C$. 故 $X'AX=0\Longleftrightarrow X'C'CX=0\Longleftrightarrow CX=0\,\rho\,AX=0$. 而 $AX=0$, 显然 $X'AX=0$. 故 $X'AX=0\Longleftrightarrow AX=0$, 从而 W 为 $AX=0$ 的解空间, $dimW=n-r(A)$.

当 A 半负定时, $-A$ 半正定, 又 $X'AX=0\Longleftrightarrow X'(-A)X=0$, 易证.

例如, $A=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$, 取 $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, 则 $f(X_1)=f(X_2)=0$, 但 $f(X_1+X_2)\ne0$. 故命题成立.

例 5 设 $A_{s\times n}X=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$, 并扩充为 P^n 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 令 $B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$. 证明 AB 列满秩.

证 由 $AB=(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r)$, 设 $k_1A\alpha_1+\cdots+k_rA\alpha_r=0$, 则 $A(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=0$, 故 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$ 为 $AX=0$ 的解, 从而可由 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 线性表出, 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关, $k_1=\cdots=k_n=0$, 故命题成立.

例 6 设 A,B 分别为 $n\times m,m\times p$ 矩阵, X 为 n 维行向量, $XAB=0$. 令 $V=\{\beta|\beta=XA,XAB=0\}$. 则 V 为一线性空间且 $dimV=r(A)-r(AB)$.

证 易证 V 为 P^n 的子空间. 令 W 为 $XAB=0$ 的解空间, 则 $dimW=n-r(AB)=s$. 令 W_0 为 $XA=0$ 的解空间, 则 $dimW_0=n-r(A)=t$, 易知 W_0 为 W 的子空间, 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 为 W_0 的一组基, 并扩充为 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, 则 $V=L(\alpha_1A,\cdots,\alpha_sA)=L(\alpha_{t+1}A,\alpha_sA)$. 下证 $\alpha_{t+1}A,\cdots,\alpha_sA$ 线性无关. 令 $k_{t+1}\alpha_{t+1}A+\cdots+k_s\alpha_sA=0$, 即 $(k_{t+1}\alpha_{t+1}+\cdots+k_s\alpha_s)A=0$, 故

$k_{t+1}\alpha_{t+1}+\cdots+k_s\alpha_s$ 为 $XA=0$ 的解，从而可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，设 $k_{t+1}\alpha_{t+1}+\cdots+k_s\alpha_s=k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关知， $k_1=\cdots=k_s=0$, 故 $\alpha_{t+1}A,\cdots,\alpha_sA$ 线性无关，从而 $dimV=s-t=r(A)-r(AB)$.

例 7 求由向量组 $\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(1,1,1,2),\alpha_3=(3,4,3,4),\alpha_4=(1,1,2,1),\alpha_5=(4,5,6,4)$ 生成的子空间的维数与基.

解 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&2\\3&4&3&4\\1&1&2&1\\4&5&6&4\end{pmatrix}$ 经矩阵的行的非交换两行的位置的初等变换化为阶梯形： $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ，故维数为 3 ，基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

例 8 设 V 为 $n(n>1)$ 维线性空间. 证明： V 的 $r(1\le r<n)$ 维子空间有无穷多个.

证 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\alpha_n$ 线性无关, 事实上，若 $k_1\alpha_1+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r(\alpha_r+k\alpha_n)=0$ ，即 $k_1\alpha_1+k_{r-1}\alpha_{r-1}+kk_r\alpha_r+k_r\alpha_r=0$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关知， $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r,\alpha_n$ 线性无关，故 $k_1=\cdots=k_{r-1}=kk_r=k_r=0$, 即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1},\alpha_r+k\alpha_n$ 线性无关. 则 $V_k=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1},\alpha_r+k\alpha_n)$ 的维数为 r, 当 $k\neq l$, $V_k\neq V_l$, 否则，若 $V_k=V_l$, 则存在 $l_1,\cdots,l_r$ 使得 $\alpha_r+k\alpha_n=l_1\alpha_1+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+l_r(\alpha_r+l\alpha_n)$, 即 $l_1\alpha_1+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+(l_r-1)\alpha_r+(l_rl-k)\alpha_n=0$, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_n$ 线性无关知， $l_1=\cdots=l_{r-1}=l_r-1=l_rl-k=0$, 故 $k=l$, 矛盾，从而 $V_k\neq V_l$. 而 k 有无穷多，故命题成立.

例 9 设 V 为 $n(n>1)$ 维线性空间. 证明： V 的任一 $r(1\le r\le n-1)$ 维子空间均为若干个 $n-1$ 子空间的交.

证 设 W 为 V 的一 r 维子空间. 对 $n-r$ 归纳. $n-r=1$ 时，W 为 $n-1$ 维的，故 $W=W\bigcap W$ ，命题成立. 设 $n-r=t-1\ge 1$ 时成立，则 $n-r=t$ 时，取 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ ，并扩充为 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 令 $W_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}+\alpha_n)$, $W_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}+2\alpha_n)$ ，则 W_1,W_2 均为 $r+1$ 维的且 $W_1\bigcap W_2=W$, 而 W_1,W_2 的维数满足 $n-(r+1)=t-1$ ，由假设， W_1,W_2 均为若干个 $n-1$ 维子空间的交，设 $W_1=\bigcap_{i\in A}W_{1i}$, $W_2=\bigcap_{i\in B}W_{2i}$, 则 W 为 $n-1$ 子空间 $W_{1i}(i\in A)$ 与 $W_{2i}(i\in B)$ 的交，故命题成立.

例 10 设 V_1, V_2, V_3 为有限维线性空间 V 的子空间，$V_2 \subseteq V_3, V_1 \bigcap V_2 = V_1 \bigcap V_3, V_1 + V_2 = V_1 + V_3$. 则 $V_2 = V_3$.

证 由 $dimV_1 + dimV_2 = dim(V_1 \bigcap V_2) + dim(V_1 + V_2) = dim(V_1 \bigcap V_3) + dim(V_1 + V_3) = dimV_1 + dimV_3$, 故 $dimV_2 = dimV_3$, 又 $V_2 \subseteq V_3$, 故 $V_2 = V_3$.

例 11 设 V 为有限维线性空间，V_1, V_2 为 V 的子空间且 $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1 \bigcap V_2)$ +1. 则 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

证 由 $dimV_1 + dimV_2 = dim(V_1 \bigcap V_2) + dim(V_1 + V_2) = 2dim(V_1 \bigcap V_2) + 1$, 故 $dimV_1 - dim(V_1 \bigcap V_2) + dimV_2 - dim(V_1 \bigcap V_2) = 1$, 从而 $dimV_1 - dim(V_1 \bigcap V_2) = 0$ 或 $dimV_2 - dim(V_1 \bigcap V_2) = 0$, 进而 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

例 12 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 均为 n 维列向量组. 则 $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \bigcap L(\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 的维数与 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s + x_{s+1}\beta_1 + \cdots + x_{s+t}\beta_t = 0$ 解空间的维数相等.

证 $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \bigcap L(\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 的维数为 $dimL(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + dimL(\beta_1, \cdots, \beta_t) - dimL(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t) = s + t - dimL(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$. 而 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s + x_{s+1}\beta_1 + \cdots + x_{s+t}\beta_t = 0$ 的解空间的维数为 $s + t - dimL(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$, 故二者相等，从而命题成立.

例 13 证明：和 $W = W_1 + W_2$ 为直和 $\Longleftrightarrow W$ 中存在一向量分解唯一.

证 ρ 显然.

$\longrightarrow$ 设 $\alpha \in W$ 分解唯一，令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$. 假设 $0 = \gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 \in W_1, \gamma_2 \in W_2$. 故 $\alpha = \alpha + 0 = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2)$, 由 α 分解唯一知， $\alpha_1 + \gamma_2 = \alpha_1, \alpha_2 + \gamma_2 = \alpha_2$. 从而 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$，即 0 分解唯一，命题成立.

例 14 设 $f(x), g(x)$ 为数域 P 上互素的多项式. $M \in P^{n\times n}$, $A = f(M)$, $B = g(M)$. 证明： $ABX = 0$ 的解空间是 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的解空间的直和.

证 令 $ABX = 0$, $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的解空间分别为 V, W, U. 由 $f(t), g(t)$ 互素，存在多项式 $u(t), v(t)$ 使得 $u(t)f(t) + v(t)g(t) = 1$，从而 $u(M)f(M) + v(M)g(M) = E$, 即 $u(M)A + v(M)B = E$, 故对 $ABX = 0$ 的解 X 有 $X = EX = u(M)AX + v(M)BX$, 令 $u(M)AX = Y, v(M)BX = Z$, 由 $AB = BA$ 易知 $BY = 0, AZ = 0$. 即 $V \subseteq W + U$. 设 α 为 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的解，则 $\alpha = E\alpha = u(M)A\alpha + v(M)B\alpha = 0$, 故 $V = W + U$. 令 $\alpha \in W \bigcap U$, 则 $\alpha = E\alpha = u(M)A\alpha + v(M)B\alpha = 0$. 故命题成立.

例 15 设 A 为数域 P 上的 n 阶方阵. V_1, V_2 分别为 $AX = 0, (A-E)X = 0$ 的解空间. 证明： $P^n = V_1 \bigoplus V_2$.

证 由 $A^2 = A$ 知， $r(A) + r(A - E) = n$, 从而 $dimV_1 + dimV_2 = n$. 设 $\alpha \in V_1 \bigcap V_2$, 则 $A\alpha = 0, (A - E)\alpha = 0$, 故 $\alpha = A\alpha = 0$. 即 $P^n = V_1 \bigoplus V_2$.

当然我们可用上题.

例 16 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维线性空间 V 的一组基， A 为 $n\times s$ 矩阵, $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$. 则 $r(A)=dimL(\beta_1,\cdots,\beta_s)$.

证 设 σ 为 V 到 P^n 的同构映射. $\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)=P$, 则 P 为可逆阵. 从而 $dimL(\beta_1,\cdots,\beta_s)=$ 秩 $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=$ 秩 $(\sigma\beta_1,\cdots,\sigma\beta_s)$ $=$ 秩 $PA=$ 秩 A.

例 17 设 $V_1,\cdots,V_s$ 为 V 的子空间， $W=\sum_{i=1}^n V_i$. 则下列条件等价.

1 ） $W=\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和.

2 ）零向量分解唯一.

3 ） $V_i\bigcap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}$, $j=1,\cdots,s$.

4 ） $dimW=\sum_{i=1}^n dimV_i$.

证 1)ρ2) 显然.

2)ρ3) 若存在 V_i 使得 $V_i\bigcap\sum_{j\neq i}V_j\neq\{0\}$, 不妨设 $V_1\bigcap\sum_{j\neq 1}V_j\neq\{0\}$. 取 $\alpha\in V_1\bigcap\sum_{j\neq1}V_j$, $\alpha\neq0$. 由 $\alpha\in\bigcap\sum_{j\neq1}V_j$, 令 $\alpha=\alpha_2+\cdots+\alpha_s$, 其中 $\alpha_i\in V_i, i=2,\cdots,s$. 故 $0=-\alpha+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$, 而这与零向量的分解唯一矛盾，故 $V_i\bigcap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}$, $j=1,\cdots,s$.

3)ρ4) 由维数公式, $dimW=dim(V_1+\bigcap\sum_{j\neq1}V_j)=dimV_1+dim\bigcap\sum_{j\neq1}V_j$. 而由 $V_2\bigcap\sum_{j\neq1,2}V_j\subseteq V_2\bigcap\bigcap\sum_{j\neq2}V_j=\{0\}$, 知 $V_2\bigcap\sum_{j\neq1,2}V_j=\{0\}$. 故 $dimW=dimV_1+dimp\sum_{j\neq1}V_j=dimV_1+dimV_2+dim\sum_{j\neq1,2}V_j=\cdots=\sum_{i=1}^n dimV_i$.

4)ρ1) 分别取 V_i 的基 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$, $i=1,\cdots,s$. 由 $dimW=\sum_{i=1}^n dimV_i$ 知， $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{sr_s}$ 线性无关, 从而为 W 的基, 故对 $\forall\alpha\in W,\alpha$ 可由 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{sr_s}$ 线性表出且表法唯一. 即 $W=\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和.

例 18 设 V_1,V_2 分别为齐次线性方程组 $x_1+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=\cdots=x_n$ 的解空间. 证明： $P^n=V_1\bigoplus V_2$.

证 显然 $dimV_1=n-1$, 而 $dimV_2=1$, 故 $dimV_1+dimV_2=n$. 设 $\alpha\in V_1\bigcap V_2$, 易知 $\alpha=0$, 故 $P^n=V_1\bigoplus V_2$.

例 19 1) 证明：在 $P[X]_n$ 中， $f_i=\prod_{j\neq i}(x-a_j)$, $i=1,\cdots,n$ 是一组基，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是两两不同的数.

2) 在 1) 中，取 $a_1,\cdots,a_n$ 为全体 n 次单位根. 求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到 $f_1,\cdots,f_n$ 的过度矩阵.

证 1) 令 $k_1f_1+\cdots+k_nf_n=0$, 分别取 $x=a_i$, $i=1,\cdots,n$ ， 得 $k_1f_1(a_i)+\cdots+k_nf_n(a_i)=k_i(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)=0$, 而 $a_1,\cdots,a_n$ 两两不同，故 $k_i=0$, $i=1,\cdots,n$ ， 即 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关，从而为 $P[x]_n$ 的一组基.

2) 由带余除法 $f_i=\prod_{j\neq i}(x-a_j)=\frac{x^n-1}{x-a_i}=x^{n-1}+a_ix^{n-2}+\cdots+a_i^{n-1}$, $i=1,\cdots,n$. 故由 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到 $f_1,\cdots,f_n$ 的过度矩阵为 $\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

例 20 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 为线性空间 V 的 s 个真非平凡子空间. 证明: 存在一个向量 α 使得 α 不属于 $V_1,\cdots,V_s$ 中任何一个.

证 对 s 归纳. $s=2$ 时, 由 V_1 为真非平凡子空间知存在 $\alpha\notin V_1$, 若 $\alpha\notin V_2$, 则命题成立. 若 $\alpha\in V_2$, 则存在 $\beta\notin V_2$, 若 $\beta\notin V_1$, 则命题成立. 若 $\beta\in V_1$, 则 $\alpha+\beta\notin V_1$, $\alpha+\beta\notin V_2$, 命题成立. 设 $s-1$ 时成立, 则为 s 时, 存在 $\alpha\notin V_1,\cdots,V_{s-1}$, 若 $\alpha\notin V_s$, 则命题成立. 若 $\alpha\in V_s$, 则存在 $\beta\notin V_s$, 令 $A=\{\beta+k\alpha|k\in P\}$. 对 $\forall k\in P$, $\beta+k\alpha\notin V_s$, 而 V_i 至多含 A 中一个元素, $i=1,\cdots,s-1$. 故存在 $\beta+k\alpha$ 不属于 $V_1,\cdots,V_s$ 中任何一个.

例 21 设 V 是定义域为实数集 R 的所有实值函数组成的集合, 对于 $f,g\in V$, $a\in R$, 分别用下列式子定义 $f+g$ 与 af:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \ (af)(x)=a(f(x)),\ \ \forall x\in R$$

则 V 成为实数域上的一个线性空间. 设

$$f_0(x)=1,\ \ f_1(x)=cosx,\ \ f_2(x)=cos2x,\ \ f_3(x)=cos3x$$

1) 判断 f_0,f_1,f_2,f_3 是否线性相关, 写出理由;

2) 用 $<f,g>$ 表示 f,g 生成的子空间, 判断 $<f_0,f_1>+<f_2,f_3>$ 是否为直和, 写出理由.

证 1) 设 $k_0f_1+k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0$, 分别取 $x=0,\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2},\pi$, 得

$$\begin{cases} k_0+k_1+k_2+k_3=0 \\ k_0+\frac{\sqrt{2}}{2}k_1+0k_2-\frac{\sqrt{2}}{2}k_3=0 \\ k_0+0k_1-k_2+0k_3=0 \\ k_0-k_1+k_2-k_3=0 \end{cases}$$

解得 $k_0=k_1=k_2=k_3=0$, 故 f_0,f_1,f_2,f_3 线性无关.

2) 由 1), $<f_0,f_1>+<f_2,f_3>$ 为直和.

例 22 设 K,F,E 都是数域, $K\subseteq F\subseteq E$. 则在通常运算下 F,E 都是 K 上的线性空间, E 是 F 上的线性空间. 假定作为 K 上的线性空间 F 是有限维的. 作为 F 上的线性空间 E 是有限维的. 那么作为 K 上的线性空间 E 是有限维的并确定维数.

证 设作为 F 上的线性空间 E 是 m 维的，$e_1,\cdots,e_m$ 为其一组基，作为 K 上的线性空间 F 是 n 维的，$f_1,\cdots,f_n$ 为其一组基．任取 $e\in E$，存在 $k_1,\cdots,k_m\in F$，使得 $e=k_1e_1+\cdots+k_me_m$．而 k_i 可由 $f_1,\cdots,f_n$ 线性表出，设 $k_i=l_{i1}f_1+\cdots+l_{in}f_n$, $i=1,\cdots,m$，其中 $l_{ij}\in K$．故 $e=\sum_{i=1}^m k_ie_i=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n l_{ij}f_je_i$，而 $f_je_i\in E$，故 E 的任意向量 e 可由 $\{f_je_i|i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\}$ 线性表出，从而 E 是有限维的．令 $\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n l_{ij}f_je_i=0$，由 $e_1,\cdots,e_m$ 线性无关，$\sum_{j=1}^n l_{ij}f_j=0, i=1,\cdots,m$．而 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关，故 $l_{ij}=0$, $i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$．从而 E 作为 K 上的线性空间是 mn 维的．

例 23 设 n 是一个自然数，V 是由所有 $n\times n$ 实矩阵构成的 n^2 维实线性空间，U 和 W 分别是由所有 $n\times n$ 实对称矩阵和实反对称矩阵构成的线性空间．证明：$V=U\bigoplus W$，即 V 是 U 和 W 的直和．

证 任取 $A\in V$，由 $A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}$, $\frac{A+A'}{2}\in U$, $\frac{A-A'}{2}\in W$，知 $V=U+W$．若 $B\in U\bigcap W$，则 $-B=B'=B$，故 $B=0$ 从而 $V=U\bigoplus W$．

例 24 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$．其中 λ 为实数．证明：$V=\{B\in M_{n\times n}|AB=BA\}$．

1) V 为线性空间．　2) $dimV=n$．

证 1) 由定义易证．

2) 显然 $A=\lambda E+C$，其中 $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$，$B$ 与 A 可交换当且仅当 B 与 C 可交换，令 $B=(b_{ij})$，由 $BC=CB$ 得，$b_{ij}=0,(i>j)$, $b_{ii}=b_{jj}$, $b_{ij}=b_{i+1,j+1}$, $i<j$，故 V 的基为 $E=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n),(0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}),\cdots,(0,\cdots,0,\varepsilon_n)$，从而 $dimV=n$．

例 25 V 是数域 P 上的 n 维线性空间．$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 V 的子空间．$\beta_1,\beta_2\in W$ 且 β_1,β_2 线性无关．证明：可用 β_1,β_2 替换 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中的两个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$ 使得 $W=L(\beta_1,\beta_2,\alpha_{i_3},\alpha_{i_4})$．

证 设 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\\ a_4 & b_4\end{pmatrix}$，由 β_1,β_2 线性无关，$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\\ a_4 & b_4\end{pmatrix}$

的秩为 2，存在一二级子式 $\begin{vmatrix} a_{i_1} & b_{i_1} \\ a_{i_2} & b_{i_2} \end{vmatrix} \neq 0$. 故

$$\beta_1 = a_{i_1}\alpha_{i_1} + a_{i_2}\alpha_{i_2} + a_{i_3}\alpha_{i_3} + a_{i_4}\alpha_{i_4}, \beta_2 = b_{i_1}\beta_{i_1} + b_{i_2}\beta_{i_2} + b_{i_3}\beta_{i_3} + b_{i_4}\beta_{i_4}$$

从而

$$(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \begin{pmatrix} a_{i_1} & b_{i_1} \\ a_{i_2} & b_{i_2} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -a_{i_3} & -b_{i_3} \\ -a_{i_4} & -b_{i_4} \end{pmatrix}$$

即

$$(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) = (\beta_1, \beta_2, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -a_{i_3} & -b_{i_3} \\ -a_{i_4} & -b_{i_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i_1} & b_{i_1} \\ a_{i_2} & b_{i_2} \end{pmatrix}^{-1}$$

故 $W = L(\beta_1, \beta_2, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4})$.

例 26 设 $A \in R^{n\times n}$, A 在 $R^{n\times n}$ 的中心化子 $C(A) = \{X \in R^{n\times n} | AX = XA\}$ 为子空间. 证明： A 为实对称时， $dimC(A) \geq n$, 且等号成立的充要条件为 A 有两两不同的特征值.

证 设 E_{ij} 为 (i,j) 处为 1 , 其余为 0 的 n 阶方阵. 由 A 为实对称矩阵, 存在正交阵 T 使得 $T'AT = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 由 $AX = XA$， $T'ATT'XT = T'XTT'AT$, 令 $T'XT = Y$, 则 $AX = XA$ 当且仅当 $diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}Y = Y diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 即 $C(A) \cong \{Y | Y = T'XT\}$. 显然 $Y_i = E_{ii}$, $i = 1, \cdots, n$ 与 $diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 可交换且线性无关，故 $dimC(A) \geq n$.

若等号成立且 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则 $Y = E_{12}$ 与 $diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 可交换且与 $Y_1, \cdots, Y_n$ 线性无关，故 $dimC(A) > n$ ，矛盾. 从而 A 有两两不同的特征值.

而与 $diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 可交换的都是 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的线性组合，命题成立.

例 27 W_1, W_2 为 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的解空间. 试构造两个元齐次线性方程组，使它们的解空间分别为 $W_1 \bigcap W_2$ 与 $W_1 + W_2$.

解 $W_1 \bigcap W_2$ 为 $\begin{cases} AX = 0 \\ BX = 0 \end{cases}$ 的解空间.

令 $W_1 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$, $W_2 = L(\beta_1, \cdots, \beta_s)$, $C = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s)$, $C'Y = 0$ 的基础解系 $Y_1, \cdots, Y_k$. 令 $D = (Y_1, \cdots, Y_k)'$, 则 $DX = 0$ 的解空间为 $W_1 + W_2$.

例 28 $W_0, W_1, \cdots, W_t$ 是 n 维线性空间的 $t+1$ 个字空间且 $W_0 \subseteq W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_t$. 证明：存在 $i = 1, \cdots, t$ 使得 $W_0 \subseteq W_i$.

证 对 t 归纳. $t = 1$ 时显然成立，设为 $t-1$ 时成立，则为 t 时，若 W_0 不包含于 W_t 且 W_0 不包含于 $W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_{t-1}$, 则存在 $\alpha, \beta \in W_0$, $\alpha \notin W_t, \beta \notin W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_{t-1}$. 由 $W_0 \subseteq W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_t$ 知，$\beta \in W_t, \alpha \in W_1 \bigcup \cdots W_{t-1}$. 则对任意的 $k \in P$, $\alpha + k\beta \notin W_t$, 而 $W_1, \cdots, W_{t-1}$ 中每一个子空间至多含一个 $\alpha + k\beta$，故存在 k_0 使得 $\alpha + k_0\beta \notin W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_{t-1}$. 这与 $\alpha + k_0\beta \in W_0 \subseteq W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_t$ 矛盾. 故 $W_0 \subseteq W_t$ 或 $W_0 \subseteq W_1 \bigcup \cdots \bigcup W_{t-1}$，若为后者，由假设，存在 $i = 1, \cdots, t-1$ 使得 $W_0 \subseteq W_i$，总之，命题成立.

例 29 $V = P^{n\times n}$, $A \in V$ 有特征值 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$, 但 $-\lambda_i$ 均不是 A 的特征值 $(i = 1, \cdots, n)$. 证明：变换 $\Psi : X \longrightarrow XA + A^T X$ 为同构.

证 对任意的 $X, Y \in V$, $k, l \in P$, 由 $\Psi(kX + lY) = k\Psi(X) + l\Psi(Y)$, 故 Ψ 为线性变换.

设可逆阵 P 满足 $P^{-1}AP$ 为对角线元素为 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ 的上三角. 若 $XA + A^T X = YA + A^T Y$, 即 $(X-Y)A = -A^T(X-Y)$, 故

$$P^{-1}(X-Y)PP^{-1}AP = -P^{-1}APP^{-1}(X-Y)P,$$

令 $P^{-1}(X-Y)P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 则 $P^{-1}A^T P\alpha_1 = -\lambda_1\alpha_1$, 由 $-\lambda_1$ 不为 A 的特征值知， $\alpha_1 = 0$. 故 $P^{-1}A^T P\alpha_2 = -\lambda_2\alpha_2$, 同样 $\alpha_2 = 0$，这样下去，有 $X = Y$, 故 Ψ 为单射，由 V 为有限维知， Ψ 为同构映射.

例 30 用 V_1, V_2 分别表示以下两个关于未知数 x, y, z 的方程组的解空间：

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} bx + y + z = 0 \\ x + by + z = 0 \\ x + y + bz = 0 \end{cases}$$

试确定 a, b 的值使得 $V_1 + V_2$ 为 V_1 与 V_2 的直和.

解 将两方程组合并，要求只有 0 解，即系数矩阵的秩为 3.

例 31 以 $P^{3\times 3}$ 表示数域 P 上所有 3×3 矩阵组成的线性空间，求与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵组成的线性子空间的维数与一组基.

例 32 给定 R 上的线性空间 V 的子空间 W_1, W_2. 证明：$dim(W_1 \bigcap W_2) \geq dim(W_1) + dim(W_2) - dim(V)$.

第 7 章　线性变换

（一）线性变换及矩阵表示

基本知识

结果 1 设 V 为数域 P 上的线性空间．变换 $\varphi: V \longrightarrow V$ 称为线性变换，若 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $\varphi(k\alpha)=k\varphi\alpha(\alpha,\beta\in V,k\in P)$. 则

1 ） $\varphi(0)=0,\varphi(-\alpha)=-\sigma\alpha,$

2 ） $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\rho\ \varphi\beta=k_1\varphi\alpha_1+\cdots+k_r\varphi\alpha_r,$

3 ）线性变换把线性相关组变成线性相关组，反之不成立，

4) $ker\varphi\le V$, $Im\varphi=\varphi V\le V$.

结果 2 维数定理 设 φ 是 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 $dimV=dim(ker\varphi)+dim(Im\varphi)$. φ 为单射当且仅当 $ker\varphi=\{0\}$；当且仅当 $Im\varphi=V$；当且仅当 φ 保持任意向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$ 的线性相关或线性无关性；当且仅当 φ 把基变为基.

结果 3 设 σ 为数域 P 上的线性空间 V 上的线性变换， $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，设

$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\sigma\alpha_1,\cdots,\sigma\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

则对 $\alpha,\beta\in V$, $\beta=\sigma\alpha$ 当且仅当 $Y=AX$, 其中 X,Y 分别为 α,β 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标， $n\times n$ 方阵 A 称为 σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵.

反之，对任意的 $n\times n$ 方阵 $A\in P^{n\times n}$， 在取定的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下我们可定义唯一线性变换 $\sigma:\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$.

总之，一线性变换如何作用完全由它在一组基上如何作用来确定, 即线性变换 $\sigma=\tau$ 当且仅当在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 上有 $\sigma\alpha_1=\tau\alpha_1,\cdots,\sigma\alpha_n=\tau\alpha_n$. 从而我们定义线性变换只需定义在一组基上如何作用，即对基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 及任意 n 个向量 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 存在唯一的线性变换 $\sigma\in L(V)$ 使得 $\sigma\alpha_i=\beta_i,i=1,\cdots,n$. 也就是说，只需给出线性变换在一组基下的矩阵.

结果 4 设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间， V 上的全体线性变换记为 $L(V)$, 则 $L(V)$ 对如下定义的加法和数乘构成一 $n\times n$ 维的线性空间, 并与 $P^{n\times n}$ 同构(同构映射如下建立: 取定 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 将线性变换 σ 映成它在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵).

$$(\sigma+\tau)\alpha=\sigma\alpha+\tau\alpha,\ \ (k\sigma)\alpha=k(\sigma\alpha).$$

我们还可在 $L(V)$ 上定义乘法 $(\sigma\tau)\alpha=\sigma(\tau\alpha)$ 及一一变换的逆变换. 他们都是线性变换且被上述同构映射保持.

结果 5 设线性变换 $\sigma,\tau\in L(V)$, $k\in F$, σ,τ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵分别为 A,B ，则

1) $\sigma+\tau$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $A+B$.

2) $k\sigma$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 kA.

3) $\sigma\tau$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 AB.

4) 设 $f(x)\in P[x]$ ，则 $f(\sigma)$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $f(A)$.

5) 若 σ 可逆，则 σ^{-1} 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A^{-1}.

通过上几条及同构的性质, 我们欲证明线性变换间的关系可转化为证明矩阵之间的关系，反之亦然.

结果 6 设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间. σ 为 V 的线性变换, σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵分别为 A,B ，且 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$, 则 $B=P^{-1}AP$, 即同一线性变换在不同基下的矩阵相似. 反之，若 $B=P^{-1}AP$, 则 A,B 可看作同一线性变换 σ 在不同基下的矩阵，即若 σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A ，则 σ 在基 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$ 下的矩阵为 B.

结果 7 特殊的线性变换

1) 零变换 0：即把任一向量映为 0 的变换，在任意一组基下的矩阵为 0，反之亦然.

2) 恒等变换 1_V：把任一向量映为它自身的变换，在任意一组基下的矩阵为单位矩阵 E，反之亦然.

3) 数乘变换 $k1_V$：把任一向量映为它自身的倍，在任意一组基下的矩阵为 kE, 反之亦然.

4) 仿射变换：即某组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

5) 投影变换：在某组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}A_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 相当于把 V 的向量 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$ 投影到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 生成的子空间上.

6) 线性变换 σ 的多项式: 设线性变换 σ 在某组基下的矩阵为 A， $f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m\in F[x]$, 则 $f(\sigma)=a_0\sigma^m+\cdots+a_m1_V\in L(V)$，且与 σ 可交换 (进而, 同一线性变换的多项式可交换, 更进一步, 若两线性变换可交换，则它们的多项式也可交换）$(B=P^{-1}AP\rho f(B)=P^{-1}f(A)P)$，在同一组基下的矩阵为 $f(A)=a_0A^m+\cdots+a_mE$.

例题

例 1 关于相似，有

1 ） $A\sim B\ \rho\ |A|=|B|,r(A)=r(B)$.

2 ） $A\sim B\ \rho\ A'\sim B'$.

3 ） $A\sim B$, A 可逆 $\rho\ A^{-1}\sim B^{-1}$.

4) $A \sim B$ ρ $aA \sim aB$, $A^k \sim B^k$, k 为自然数. 进而 A 的多项式与 B 的同一多项式相似.

5) $A \sim B$ ρ $A^* \sim B^*$.

6) $A^* \sim B^*$, $|A| = |B| \neq 0$ ρ $A \sim B$.

7) $A \sim A'$.

8) 矩阵的相似与数域无关.

例 2 求只与自身相似矩阵.

证 设 A 仅与自身相似, 则对任意的可逆阵 P 有 $P^{-1}AP = A$, 即 $AP = PA$, 易知 $A = aE$.

例 3 1)设 σ 为 n 维线性空间 V 的线性变换. $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 σV 的一组基, $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 在 σV 下的原象. 则 $V = L(\beta_1, \cdots, \beta_r) \bigoplus \sigma^{-1}(0)$.

2) 设 $\subseteq$ 为 n 维线性空间 V 的线性变换, W 为 V 的子空间. 证明: $dim \subseteq W + dim(\subseteq^{-1}(0) \bigcap W) = dimW$.

证 1) 由 $\sigma\beta_1, \cdots, \sigma\beta_r$ 线性无关知, $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关. 设 $\sigma^{-1}(0)$ 的基为 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$, 则 $r + s = n$. 下证 $\beta_1, \cdots, \beta_r, \gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 线性无关. 令 $k_1\beta_1 + \cdots + k_r\beta_r + t_1\gamma_1 + \cdots + t_s\gamma_s = 0$. 则 $\sigma(k_1\beta_1 + \cdots + k_r\beta_r + t_1\gamma_1 + \cdots + t_s\gamma_s) = 0$, 故 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$, 由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, $k_1 = \cdots = k_r = 0$, 从而 $t_1\gamma_1 + \cdots + t_s\gamma_s = 0$, 由 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 线性无关, $t_1 = \cdots = t_s = 0$, 故命题成立.

2) 设 $dim(\subseteq^{-1}(0) \bigcap W) = r$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 为 $\subseteq^{-1}(0) \bigcap W$ 的一组基, 扩充为 W 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s$, 这里设 $dimW = s$. 下证 $\subseteq \varepsilon_{r+1}, \cdots, \subseteq \varepsilon_s$ 线性无关. 设 $k_{r+1} \subseteq \varepsilon_{r+1} + \cdots + k_s \subseteq \varepsilon_s = 0$, 即 $\subseteq (k_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + k_s\varepsilon_s) = 0$, 故 $k_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + k_s\varepsilon_s \in \subseteq^{-1}(0) \bigcap W$, 从而可由 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 线性表出, 设 $k_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + k_s\varepsilon_s = k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_r\varepsilon_r$, 由 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s$ 线性无关得, $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 从而命题成立.

例 4 设 σ 为线性空间 V 上的线性变换. $\sigma^{n-1}(\alpha) \neq 0$, $\sigma^n(\alpha) = 0$. 则 $\alpha, \sigma\alpha, \cdots, \sigma^{n-1}(\alpha)$ 线性无关.

证 令 $k_0\alpha + \cdots + k_{k-1}\sigma^{n-1}(\alpha) = 0$, 则 $\sigma^{k-1}(k_0\alpha + \cdots + k_{k-1}\sigma^{n-1}(\alpha)) = 0$, 即 $k_0\sigma^{k-1}(\alpha) = 0$, 又 $\sigma^{k-1}(\alpha) \neq 0$, 故 $k_0 = 0$, 从而 $k_1\sigma\alpha + \cdots + k_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha) = 0$, σ^{k-2} 作用上式两端, $k_1\sigma^{k-1}(\alpha) = 0$, 又 $\sigma^{k-1}(\alpha) \neq 0$, 故 $k_1 = 0$, 这样下去, 有 $k_i = 0, i = 0, \cdots, k-1$, 即 $\alpha, \sigma\alpha, \cdots, \sigma^{k-1}(\alpha)$ 线性无关.

例 5 设 V 为 n 维线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基. $\sigma\alpha_i = \alpha_{i+1}, i = 1, \cdots, n-1, \sigma\alpha_n = 0$.

1) 求 σ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵.

2) 证明: $\subseteq^{n-1} \neq 0, \sigma^n = 0$.

3) 设 $\tau \in L(V)$, $\tau^n = 0, \tau^{n-1} \neq 0$. 则存在 V 的一组基, 使得 τ 在该基下的矩阵同 1) 中 $\subseteq$ 的矩阵.

4) τ 不能对角化.

5) 若 $\subseteq^{n-1}\alpha\neq 0$, 则 V 为包含 α 的最小 τ- 子空间.

6) τ 只有 $n+1$ 个不变子空间.

7) V 不能分解成两个真 τ- 子空间的直和.

8) 设 n 阶方阵 M,N 满足 $M^{n-1}\neq 0, N^{n-1}\neq 0, M^n=N^n=0$. 则 $M\sim N$.

9) $\subseteq$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的充要条件为存在向量 $\xi\in V$, 使得 $\subseteq^{n-1}\xi\neq 0, \subseteq^n\xi=0$.

证 1) 易求矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) 由 $\subseteq^{n-1}\alpha_1=\alpha_n\neq 0$, 知 $\sigma^{n-1}\neq 0$, 而由 $\subseteq^n(\alpha_i)=0, i=1,\cdots,n$ ，知 $\subseteq^n=0$.

3) 设 $\subseteq^{n-1}\xi\neq 0$, $\subseteq^n\xi=0$, 则 $\xi,\cdots,\subseteq^{n-1}\xi$ 线性无关，为 V 的基，易知 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4)， 5) 易证.

6) 显然 $\alpha,\tau\alpha,\cdots,\tau^{n-1}\alpha$ 为 V 的基， τ 有不变子空间 $V_0=0, V_1=L(\tau^{n-1}\alpha), V_2=L(\tau^{n-2}\alpha,\tau^{n-1}\alpha),\cdots,V_n=L(\alpha,\cdots,\tau^{n-1}\alpha)=V$. 设 τ 还有不变子空间 W， W 的基为 $\beta_1,\cdots,\beta_r$, 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 在用基 $\alpha,\tau\alpha,\cdots,\tau^{n-1}\alpha$ 的线性表出中用到的第一个基向量为 $\tau^j\alpha$, 设 $\beta_i=k_j\tau^j\alpha+k_{j+1}\tau^{j+1}\alpha+\cdots+k_{n-1}\tau^{n-1}\alpha$, 其中 $k_j\neq 0$, 令 τ^{n-1-j} 作用上式两端, 利用 $\tau^n=0$ 得 $\tau^{n-1-j}\beta_i=k_j\tau^{n-1}\alpha\in W$, 故 $\tau^{n-1}\alpha\in W$, 从而 $\beta_i-k_{n-1}\tau^{n-1}\alpha=k_j\tau^j\alpha+\cdots+k_{n-2}\tau^{n-2}\alpha$, 再令 τ^{n-2-j} 作用得 $\tau^{n-2}\alpha\in W$, 这样下去得， $\tau^j\alpha,\cdots,\tau^{n-1}\alpha\in W$. 由 $dimW=r$ 知 $n-j\leq r$. 又 W 的基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由 $\tau^j\alpha,\cdots,\tau^{n-1}\alpha$ 线性表出，故 $n-j\geq r$. 从而 $n-j=r$ ，故 $W=L(\tau^{n-r}\alpha,\cdots,\tau^{n-1}\alpha=V_{n-r}$ ，命题成立.

7) 易证)

8) 设 M,N 分别在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下定义线性变换 $\subseteq,\tau$, 则 $\subseteq^n=\tau^n=0$, $\subseteq^{n-1}\neq 0,\tau^{n-1}\neq 0$, 故 $\subseteq,\tau$ 均在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

故 $M,N\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9) $\longrightarrow$ 由 1), $\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$ 线性无关，从而为 V 的基，易知 σ 在基 $\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ρ 设 σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha_2=\sigma\alpha_1,\cdots$, $\sigma\alpha_3=\sigma\alpha_2=\sigma^2\alpha_1,\cdots,\alpha_n=\sigma\alpha_{n-2}=\cdots=\sigma^{n-1}\alpha_1\neq 0$, $\sigma\alpha_n=\sigma^n\alpha_1=0$, 故 α_1 即为所求向量.

例 6 1 ）如果 A 可逆. 则 $AB\sim BA$.

2 ）如果 $A\sim C,B\sim D$. 则 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} C & \\ & D \end{pmatrix}$.

证 1 ）由 A 可逆知， $AB=A(BA)A^{-1}$, 故 $AB\sim BA$.

2 ）由 $A\sim C,B\sim D$, 存在可逆阵 P_1,P_2 使得 $C=P_1^{-1}AP_1,D=P_2^{-1}BP_2$, 令 $P=\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}$, 则 P 可逆且 $P^{-1}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} C & \\ & D \end{pmatrix}$, 故 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} C & \\ & D \end{pmatrix}$.

例 7 设 σ,τ 为线性变换， $\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$. 证明：

1) 如果 $(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$, 则 $\sigma\tau=0$.

2) 如果 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则 $(\sigma+\tau-\subseteq\tau)^2=\subseteq+\tau-\subseteq\tau$.

证 1) 由 $(\subseteq +\tau)^2 =\subseteq +\tau$ 及 $\subseteq^2=\subseteq, \tau^2=\tau$，有 $\subseteq\tau=-\tau\subseteq$. 左乘 $\subseteq$ 得，$\subseteq^2\tau=-\subseteq\tau\subseteq=\subseteq\tau$, 右乘 $\subseteq$ 得， $\subseteq\tau\subseteq=-\tau\subseteq^2=-\tau\subseteq$, 故 $\subseteq\tau=\tau\subseteq$.

2) 利用 $\subseteq\tau=\tau\subseteq$, 直接计算得 $(\sigma+\tau-\subseteq\tau)^2=\subseteq+\tau-\subseteq\tau$.

例 8 V 是数域 P 上 n 维线性空间， W_1, W_2 为 V 的子空间， $V=W_1\bigoplus W_2$ 且 $f: V\longrightarrow V$ 是线性变换．若 $dimW_i=dimf(W_i)$, $i=1,2$. 则 f 一定为满射，对否？

解 不对．例如： $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 V 的基．令 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $W_2=L(\alpha_3,\alpha_4)$, $f:\alpha_1,\alpha_3\longrightarrow\alpha_3$, $\alpha_2,\alpha_4\longrightarrow\alpha_4$. 则 $dimW_i=dimf(W_i)=2$, $i=1,2$. 但 f 不为满射.

例 10 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ 为数域 P 上二阶方阵，定义 $P^{2\times 2}$ 的变换 σ :

$$\sigma(X)=AX-XA, X\in P^{2\times 2}.$$

1) 证明 σ 为线性变换.

2) 求 σ 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

3) 证明 0 是 σ 的特征值，并求其重数.

证 按定义易求.

(二) 特征值、特征向量、三个多项式及对角化

基本知识

结果 1 1) 设 $A\in P^{n\times n}$, $X\in P^n$, $X\neq 0$, $AX=\lambda X$, 称 X 为 A 的特征值 λ 的特征向量，称 $V_\lambda^A=\{X\in P^n|AX=\lambda X\}\leq P^n$ 为 A 的特征值 λ 的特征子空间.

2) 设 V 为数域 P 上线性空间，$\subseteq\in L(V), \xi\neq 0, \subseteq\xi=\lambda\xi$，则称 λ 为 $\subseteq$ 的特征值，ξ 称为属于特征值 λ 的特征向量. 称 $V_\lambda^\sigma=\{\xi\in V|\sigma\xi=\lambda\xi\}\leq V$ 为 σ 的特征值 λ 的特征子空间．设 $\subseteq$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A，则 $\subseteq$ 与 A 有相同的特征值 (包括重数)，且 $V_\lambda^\subseteq$ 同构与 V_λ^A.

结果 2 特征多项式： A 为数域 P 上的方阵． λ_0 为 A 的特征值的充要条件为 λ_0 为 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n a_n$ 在 P 上的根，通过解方程组 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 可求 $V_{\lambda_0}^A$.

求一线性变换 $\subseteq$ 的特征值与特征向量的步骤：

1) 在线性空间 V 中取一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，写出线性变换 $\subseteq$ 在这组基下的矩阵 A.

2) 求矩阵 A 的特征多项式在数域 P 中的所有解 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，它们就是线性变换 $\subseteq$ 的所有特征值.

3）把所求得的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 逐个代入方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$, $i = 1, \cdots, s$, 求它的基础解系 $\eta_{i1}, \cdots, \eta_{ij_i}$, 则他们为矩阵 A 属于特征值 λ_i 的“所有”线性无关的特征向量，而为线性变换 $\subseteq$ 的特征值 λ_i 的“所有”线性无关特征向量在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

a) 这里 a_i 为 A 的 $i(i = 1, \cdots, n)$ 阶主子式之和，特别地， $a_1 = tr(A), a_n = detA$.

事实上，由 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -an1 & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$, 求 $f'(\lambda), \cdots, f^{(n-1)}(\lambda)$（逐列求导再求和），令 $\lambda = 0$ 得 $a_i(i = n-1, \cdots, 1)$.

b) $detA \neq 0$ 当且仅当 A 的特征根（复根）不为 0.

事实上，由 $detA = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ 可得.

结果 3 相似的矩阵有相同的特征多项式 (即线性变换的特征多项式不随基的选取而改变).

结果 4 Hamilton-Caylay 定理：设 A 是数域 P 上的 $n \times n$ 矩阵，$f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 为 A 的特征多项式，则 $f(A) = A^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})A^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| E = 0$,

设线性变换 $\subseteq$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n$ ，则 $f(\subseteq) = \subseteq^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn}) \subseteq^{n-1} + \cdots + (-1)|A| 1_V = 0$.

结果 5 最小多项式：设 A 为数域上 P 一方阵 (或 $\subseteq \in L(V)$), 称以 A(或 $\subseteq$) 为根的首 1 的次数最低的多项式 $g(x)$ 为 A(或 $\subseteq$) 的最小多项式.

若数域 P 上的多项式 $h(x)$ 以 A(或 $\subseteq$) 为根，称 A(或 $\subseteq$) 为的零化多项式.

1) 矩阵 A(或 $\subseteq \in L(V)$) 的最小多项式存在且唯一.

2) 设 $g(x)$ 为矩阵 A(或 $\subseteq$) 的最小多项式，则 $h(x)$ 以 A(或 $\subseteq$) 为根的充要条件为 $g(x)|h(x)$. 据此，一关于 A(或 $\subseteq$) 的多项式等式提供了 A(或 $\subseteq$) 的最小多项式的可能情况（为该多项式的因式），特别地，$g(x)|f(x)$, 这里 $f(x)$ 为 A(或 $\subseteq$) 的特征多项式.

3）特征多项式 $f(x)$ 的在 P 中的根恰为 A(或 $\subseteq$) 的所有特征值 (包括重数)；最小多项式 $g(x)$ 的在 P 中的根恰为 A(或 $\subseteq$) 的所有特征值 (不计重数)，将 $f(x)$ 在 P 中分解，则 $f(x)$ 的所有不可约因式均在最小多项式 $g(x)$ 中出现，且重数不超过超过它在特征多项式中的重数；零化多项式的根提供了特征值的所有可能性，但不一定都是.

4）相似的矩阵有相同的三个多项式.

5) A(或 $\subseteq$) 在 P 上可对角化当且仅当它的最小多项式在上 P 为互素的一次因式的乘积.

5) 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, 则对 $h(x)\in P[x]$ 有 $h(A)=\begin{pmatrix} h(A_1) & \\ & h(A_2) \end{pmatrix}$.

6) $J=\begin{pmatrix} a & & \\ 1 & \ddots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1 & a \end{pmatrix}_k$ 的最小多项式为 $(x-a)^k$.

结果 7 属于不同特征值的特征向量线性无关, 进而, 如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是线性变换 $\subseteq$ 的不同特征值, 而 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量, $i=1,\cdots,s$, 那么向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2r_2},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}$ 线性无关，即和 $V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_s}$ 为直和 (**注意证明**).

结果 8 线性变换在某组基下的矩阵为对角阵，称为可对角化：设 $\subseteq$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换

1 ） $\subseteq$ 可对角化的充要条件为 $\subseteq$ 有 n 个线性无关的特征向量.

2 ）$\subseteq$ 可对角化的充要条件为的 $\subseteq$ 最小多项式为互素的一次因式的积（在 P 上).

3 ）设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为的 $\subseteq$ 所有两两不同特征值（在 P 上)，则 $\subseteq$ 可对角化的充要条件为 $dimV_{\lambda_1}+\cdots+dimV_{\lambda_s}=n$.

4 ）在复数域上，如果线性变换 $\subseteq$ 的特征多项式没有重根，则 $\subseteq$ 可对角化.

结果 9 相似的矩阵有相同的特征值, 但不一定有相同的特征向量（属于同一特征值)，从而无相同的特征子空间，例如，$A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 令 $P=\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&1&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$, 显然 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 分别为 A 的特征值 $1,2$ 的特征向量，而分别为 $P^{-1}AP$ 的特征值 $2,1$ 的特征向量.

(2) **例题**

例 1 设 λ 为数域 F 上 n 阶方阵 A 的 k 重特征值，相应的特征子空间为 V_λ^A. 则

1) $k\lambda$ 为 $kA(k\in F)$ 的至少 k 重特征值， $V_\lambda^A\le V_{k\lambda}^{kA}$.

2) λ^m 为 A^m 的至少 k 重特征值， $V_\lambda^A\le V_{\lambda^m}^{A^m}$.

3) 设 $g(x)\in F[x]$, 则 $g(\lambda)$ 为 $g(A)$ 的至少 k 重特征值， $V_\lambda^A\le V_{g(\lambda)}^{g(A)}$.

4) 若 A 可逆， λ^{-1} 为 A^{-1} 的 k 重特征值， $V_\lambda^A=V_{\lambda^{-1}}^{A^{-1}}$.

5) λ 为 $P^{-1}AP$ 的 k 重特征值， $P^{-1}V_\lambda^A=V_\lambda^{P^{-1}AP}$.

例 2 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵. （ 1 ）若 A 在 F 中有 n 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则 A 在 F 上相似于上三角方阵 B, B 的对角线元素为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

（ 2 ）若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 A 在 F 中的特征值，则 A 在 F 上相似于 $B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&B_3\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&*\\&\ddots&\\&&\lambda_r\end{pmatrix}$ 为上三角方阵.

证明 (2) 对 r 归纳. $r=1$ 时，设 $\alpha_1\in F^n$ 为 A 属于 λ_1 的特征向量，扩充为 F^n 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&B_2\\0&B_3\end{pmatrix}$ 命题成立. 设为 $r-1$ 时成立，则 r 为时，由 λ_1 为 A 的特征值，存在 λ_1 的特征向量 $\alpha_1\in F^n$ ，扩充为 F^n 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&B_2\\0&B_3\end{pmatrix}$, 则 $\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为 B_3 的特征值，由假设，存在可逆阵 Q 使得 $Q^{-1}B_3Q=\begin{pmatrix}C_1&C_2\\0&C_3\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&*\\&\ddots&\\&&\lambda_r\end{pmatrix}$, 令 $P=P_1\begin{pmatrix}1&0\\0&Q\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&B_3\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&*\\&\ddots&\\&&\lambda_r\end{pmatrix}$ 为上三角方阵.

例 3 设 λ 为 $A\in P^{n\times n}$ 的 k 重特征值，则 $dimV_\lambda\le k$.

证 取 V_λ 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$, 扩充为 P^n 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&B_3\end{pmatrix}$, $B_1=diag(\lambda,\cdots,\lambda)$ l 阶对角阵，故 $|xE-A|=(x-\lambda)^l|xE-B_3|$, 命题成立.

例 4 设 $AB=BA$, k 为自然数， $A^k=0$. 证明： $|A+B|=|B|$.

证 若 B 可逆，由 $AB=BA$ ， $AB^{-1}=B^{-1}A$, 故 $(AB^{-1})^k=A^kB^{-k}=0$, AB^{-1} 的特征值全为 0, 故存在可逆阵 P ， $P^{-1}AB^{-1}P=\begin{pmatrix}0&&*\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}$. 从而 $|A+B|=|AB^{-1}+E||B|=|P^{-1}(AB^{-1}+E)P||B|=|E+P^{-1}AB^{-1}P||B|=|B|$.

若 B 不可逆，则对 $B_1=tE+B$，存在 $\delta>0$，当 $0<t<\delta$ 时，B_1 可逆．又 $AB_1=B_1A$，故 $|A+B_1|=|B_1|$, 由多项式的性质，$t=0$ 仍成立，即 $|A+B|=|B|$.

例 5 四阶方阵 A 满足：$|3E+A|=0, A'A=2E, |A|<0$. 求 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

解 由 $|A|^2=|A'A|=|2E|=2^4$, 又 $|A|<0$, 故 $|A|=-4$. 由 $|3E+A|=0$ 知，-3 为 A 的特征值，故 $\frac{4}{3}$ 为 A^* 的一个特征值.

例 6 设 $A=(a_ib_j)_{n\times n}$, 求 $E+A$ 的特征值.

证 由 $|\lambda E-A|=\lambda^n-(\sum_{i=1}^n a_ib_i)\lambda^{n-1}$, 知 A 的特征值为 0（$n-1$ 重），$\sum_{i=1}^n a_ib_i$. 从而 $E+A$ 的特征值为 $1,1+\sum_{i=1}^n a_ib_i$.

例 7 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量．求 a,b 应满足的条件.

解 易求 A 的特征值为 1（2 重），-1. 则属于 1 的特征向量应有两个，即 $E-A$ 的秩应为 1, 故 $a+b=0$. 同样 $-E-A$ 的秩为 1，对 a,b 无要求．总之，$a+b=0$.

例 8 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，相应的特征向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 求 $B=\begin{pmatrix}0&A\\A&0\end{pmatrix}$ 的特征值及相应的特征向量.

解 由 $|\lambda E-B|=|\lambda E-A||\lambda E+A|$, 得 B 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$. 依次解 $(\lambda E-B)X=0$, 得相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_n\\\alpha_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_1\\-\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_n\\-\alpha_n\end{pmatrix}$.

例 9 设 A 为 n 阶实方阵．B,C 为 n 阶正定阵且 $AB+BA'=-C$. 则 A 的特征值的实部都小于 0.

证 设 λ 为 A 的任一特征值，则 λ 也为 A' 的特征值，相应的特征向量为 α，即 $A'\alpha=\lambda\alpha$. 故 $\overline{A}'\overline{\alpha}=\overline{\lambda}\overline{\alpha}$, 进而 $\overline{\alpha}'A=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'$. 由 $AB+BA'=-C$ 得 $\overline{\alpha}'(AB+BA')\alpha=-\overline{\alpha}'C\alpha$, 即 $(\lambda+\overline{\lambda})\overline{\alpha}'B\alpha=-\overline{\alpha}'C\alpha<0$, 故 $\overline{\lambda}+\lambda<0$, 从而命题成立.

例 10 设 A,M,N 均为 n 阶实方阵，M,N 正定．λ 为 $H=\begin{pmatrix}A&M\\N&-A'\end{pmatrix}$ 的特征值，$u=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ 为相应的特征向量，这里 α,β 均为 n 维向量．则 λ 的特征值的实部不为零且 $\overline{\alpha}'\beta$ 为非零实数.

证 由 $\begin{pmatrix} A & M \\ N & -A' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, 得 $\begin{cases} A\alpha + M\beta = \lambda\alpha \ (1) \\ N\alpha - A'\beta = \lambda\beta \ (2) \end{cases}$ 对 (1) 取共轭, $A\overline{\alpha}+M\overline{\beta}=\overline{\lambda}\overline{\alpha}$, 进而转置, $\overline{\alpha}'A'+\overline{\beta}'M=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'$, 左乘 β, $\overline{\alpha}'A'\beta+\overline{\beta}'M\beta=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'\beta$. 对 (2) 左乘 $\overline{\alpha}'$, $\overline{\alpha}'N\alpha-\overline{\alpha}'A'\beta=\lambda\overline{\alpha}'\beta$, 再相加, $0<\overline{\alpha}'N\alpha+\overline{\beta}'M\beta=(\overline{\lambda}+\lambda)\overline{\alpha}'\beta$, 故 λ 的实部不为零且 $\overline{\alpha}'\beta$ 为非零的实数.

例 11 1) 设 A 为 n 阶实方阵, 且对任意的 n 维实列向量 α 有 $\alpha'A\alpha<0$. 证明: A 的特征值的实部小于 0.

2) 设 A 为 n 阶实方阵. 若对任意的非零实列向量 $\alpha, \alpha'A\alpha>0$. 则 $|A|>0$.

证 1)设 $\lambda=a+bi$ 为 A 的任一特征值, 其中 $a,b\in R$. $u=\alpha+i\beta$ 为 λ 的特征向量, 其中 $\alpha,\beta\in R^n$. 则 $A(\alpha+i\beta)=\lambda(\alpha+i\beta)$, 即 $\begin{cases} A\alpha=a\alpha-b\beta \\ A\beta=b\alpha+a\beta \end{cases}$ 从而 $\begin{cases} 0>\alpha'A\alpha=a\alpha'\alpha-b\alpha'\beta \\ 0>\beta'A\beta=b\beta'\alpha+a\beta'\beta \end{cases}$ 故 $a\alpha'\alpha+a\beta'\beta=a(\alpha'\alpha+\beta'\beta)<0$, 而 $\alpha'\alpha+\beta'\beta>0$, 故 $a<0$.

2) 设 λ 为 A 的实特征值, α 为相应的特征向量, 即 $A\alpha=\lambda\alpha$, 则 $0<\alpha'A\alpha=\lambda\alpha'\alpha$. 又 $\alpha'\alpha>0$, 故 $\lambda>0$. 而 A 的虚特征值按共轭成对出现, 故由 $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$ 知 $|A|>0$.

例 12 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复方阵. $s_i=\sum_{j=1}^n|a_{ij}|, t_i=\sum_{j=1}^n|a_{ji}|$, $i=1,\cdots,n$. λ 为 A 的特征值, 则 $|\lambda|\leq min\{maxs_i, maxt_i\}$.

证 设 $\alpha=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 为 A 的属于 λ 的特征向量, 即 $A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 令 $|b_i|=max|b_j|$, 则 $a_{i1}b_1+\cdots+a_{in}b_n=\lambda b_i$ $|\lambda||B_i|=|a_{i1}b_1+\cdots+a_{in}b_n|\leq(|a_{i1}|+\cdots+|a_{in}|)|b_i|$, 而 $|b_i|>0$, 故 $|\lambda|\leq s_i\leq maxs_i$. 同理 $|\lambda|\leq maxt_i$.

例 13 设 n 阶方阵 $E-A$ 的特征值的模小于 1. 证明: $0<||A||<2^n$.

证 若 $|A|=0$, 则 0 为 A 的特征值, 从而 $E-A$ 有特征值 1, 而其模不小于 1, 矛盾. 故 $|A|\neq 0$. 设 λ_i 为 A 的特征值 $i=1,\cdots,n$, 则 $1-\lambda_i$ 为 $E-A$ 的特征值, 故 $|1-\lambda_i|<1$, 从而 $|\lambda_i|<2$. 故 $0<||A||<2^n$.

例 14 设 V 为实数域 R 上的 n 维线性空间, $\subseteq\in L(V)$, $\subseteq^3+\subseteq=0$. 则 $tr\subseteq=0$.

证 设 λ 为 $\subseteq$ 的特征值, 则 $\lambda^3+\lambda=0$. 故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\pm i$, 而 $\pm i$ 成对出现, 故 $tr\subseteq=0$.

例 15 1) 设 λ_1,λ_2 为线性变换 $\subseteq$ 的特征值, $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 分别为属于 λ_1,λ_2 的特征向量. 则 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不为 $\subseteq$ 的特征向量.

2) 若线性变换 $\subseteq$ 以 V 的每个非零向量为特征向量. 则 $\subseteq$ 为数乘变换.

证 1) 假设 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 为 $\subseteq$ 的特征向量, 设 $\subseteq(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2$. 又 $\subseteq(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\subseteq\varepsilon_1+\subseteq\varepsilon_2=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2$, 故 $(\lambda-\lambda_1)\varepsilon_1+(\lambda-\lambda_2)\varepsilon_2=0$ ，而由属于不同特征值的特征向量线性无关知， $\lambda-\lambda_1=0,\lambda-\lambda_2=0$ ，矛盾. 故 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不为 $\subseteq$ 的特征向量.

2) 取 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ ，则 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 若存在 $\lambda_i\neq\lambda_j$ ，由 1) ， $\varepsilon_i+\varepsilon_j$ 不为 $\subseteq$ 的特征向量，矛盾. 古 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$ ，即 $\subseteq$ 为数乘变换.

例 16 已知 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

证 由 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$ 有 $f(A)=A^3-4A^2+5A-2E=0$, 即 $A(\frac{1}{2}-2A+\frac{5}{2}E)=E$, 故 $A^{-1}=\frac{1}{2}-2A+\frac{5}{2}E$.

事实上, 若存在多项式 $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_0(a_0\neq 0)$ 使得 $f(A)=0$ ，则 A 一定可逆且可用 A 的多项式表示.

例 17 n 阶实方阵 A 的元素均为 a ， $a\neq 0$. 则存在多项式 $f(x)$ 使得 $f(A)=(A+naE)^{-1}$.

证 显然 A 的特征值为 na 及 $0(n-1$ 重) ，故 $B=A+naE$ 的特征值为 $2na$ 及 na ，故 B 可逆. 设 $g(\lambda)=|\lambda E-B|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$, $a_n=(-1)^n|B|\neq 0$. 则 $B^n+a_1B^{n-1}+\cdots+a_nE=0$, 即 $B[-\frac{1}{a_n}(B^{n-1}+a_1B^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E)]=E$ ，故 $B^{-1}=-\frac{1}{a_n}(B^{n-1}+a_1B^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E)=-\frac{1}{a_n}((A+naE)^{n-1}+a_1(A+naE)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E)=-\frac{1}{a_n}A^{n-1}+\cdots$ ，从而命题成立.

例 18 设 A 为 n 阶方阵. 证明： 1 ） $A^n=0\Longleftrightarrow A$ 的特征值全为零. 进而，若 $A\neq 0$. 则不能对角化.

2 ）若 $A^n=0$. 则 $|A+E|=1$.

证 1 ） ρ 设 λ 为的 A 特征值， α 为属于 λ 的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 从而 $0=A^n\alpha=\lambda^n\alpha$, 故 $\lambda^n=0$, 即 $\lambda=0$.

$\longrightarrow$ 由 A 的特征值全为零知 A 的特征多项式为 λ^n, 从而 $A^n=0$.

例如，若 A 能对角化，则 A 相似于 0, 从而 $A=0$, 矛盾.

2 ）由 1) 知， A 的特征值全为零，故 $A+E$ 的特征值全为 1 ，从而 $|A+E|=1$.

例 19 设 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似．求 a,b 的值.

解 B 的特征值为 $-1,2,b$. A 的特征多项式为 $(\lambda+2)(\lambda^2-(a+1)\lambda+a-2)$，易知 $b=-2,\ a=0$.

例 20 设 A,B 为 n 阶方阵， A 的特征值互异．证明： A 的特征向量均为 B 的特征向量 $\Longleftrightarrow AB=BA$.

证 ρ 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 分别为属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 P^n 的列向量. 则 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 也为 B 的特征向量得, $B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$,

令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP,\ P^{-1}BP$ 均为对角形，故 $P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP$, 即 $AB=BA$.

$\longrightarrow$ 由 A 有互异的特征值, 存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,

由 $AB=BA$， $P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP$, 而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异，故 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$, 令 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 则 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,

$B(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$, 即 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,\ B\alpha_i=\mu_i\alpha_i,\ i=1,\cdots,n$. 而 A 的特征向量全为 $k_i\alpha_i(k_i\neq 0)$， $i=1,\cdots,n$，显然它们均为 B 的特征向量.

例 21 1 ）设 A 为 n 阶幂等阵．则 $r[A^m]+r[(A-E)^k]=n$.

2 ）设 A 为 n 阶对合阵．则 $r[(A+E)^m]+r[(A-E)^k]=n$.

证 1 ）由 $A^2=A$ 知， A 的特征值只能为 $1,0$, 且 A 的最小多项式为 x^2-x 的因式，从而为互素的一次因式的积，故 A 可对角化，即存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 故 $P^{-1}A^mP=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, $P^{-1}(A-E)^kP=$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k E_{n-r} \end{pmatrix}$, 易知命题成立.

2) 类似 1).

例 22 设 V 为复数域上的线性空间. $\subseteq, \tau$ 为 V 的线性变换, $\subseteq \tau = \tau \subseteq$

1) λ 为 A 的一个特征值. 则 V_λ 为 τ 的不变子空间.

2) $\subseteq, \tau$ 至少有一公共的特征向量.

证 1) 任取 $\alpha \in V_\lambda$, 则 $\subseteq \alpha = \lambda\alpha$, 故 $\tau \subseteq \alpha = \tau\lambda\alpha$, 即 $\subseteq (\tau\alpha) = \lambda(\tau\alpha)$ ，从而 $\tau\alpha \in V_\lambda$ ， 命题成立.

2) $\tau|_{V_\lambda}$ 为 V_λ 上的线性变换，设 μ 为它的特征值， $\beta \in V_\lambda$ 为属于它的特征向量，故 $\tau\beta = \mu\beta$ ， 又 $\subseteq \beta = \lambda\beta$, 即 β 为 $\subseteq, \tau$ 的公共特征向量.

例 23 设 A, B 为 n 阶方阵， $C = AB - BA$. C 与 A ， B 可交换. 则 C 的特征值为 0.

证 设 λ 为 C 的任一特征值，则 $V_\lambda \in P^n$ 为 A, B 的不变子空间，设 V_λ 的基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, C, A, B 在该基下的矩阵分别为 $\lambda E_s, A_1, B_1$ ，则 $\lambda E_s = A_1 B_1 - B_1 A_1$, 而 $A_1 B_1 - B_1 A_1$ 的迹为 0 ，故 $s\lambda = 0$ ，即 $\lambda = 0$.

例 24 若存在自然数 m 使得 $A^m = E$. 则 A 可对角化.

证 由 $A^m = E$ 知， A 的最小多项式为 $f(x) = x^m - 1$ 的因式. 而 $f(x)$ 满足 $(f(x), f'(x)) = 1$ ，即 $f(x)$ 无重因式，故 A 的最小多项式为互素的一次因式的积，从而 A 可对角化.

同样利用最小多项式我们可证

例 25 (1) 设 A 为秩 r 的 n 阶方阵， $A^2 = kA (k \neq 0)$. 则 A 相似于 $\begin{pmatrix} kE_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 设 A 的元素全为 1 ， B 除第一行第一列的元素为 n, 其余为 0 ，则 A 相似于 B.

例 26 设 A, B 为 n 阶方阵. $A + B + AB = 0$. 证明： 1 ） A, B 有公共的特征向量.

2 ） A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ B 可对角化.

证 1 ）设 λ 为 B 的特征值， α 为属于 λ 的特征向量，即 $B\alpha = \lambda\alpha$. 由 $(A + B + AB)\alpha = 0$, 得 $(\lambda + 1)A\alpha = -\lambda\alpha$. 而若 $\lambda + 1 = 0$, 则 $\alpha = 0$ 矛盾. 故 $\lambda + 1 \neq 0$, 则 $A\alpha = -\frac{\lambda}{\lambda+1}\alpha$, 从而 $-\frac{\lambda}{\lambda+1}$ 为 A 的特征值，而 α 也为属于 $-\frac{\lambda}{\lambda+1}$ 的特征向量.

2 ）由 1)， A, B 有相同的特征向量，故若 B 可对角化，则 B 有 n 个线性无关的特征向量，从而 A 也有 n 个线性无关的特征向量，即

A 也可对角化，由 $A+B+AB=0$, 知 $A+B+BA=0$, 同上可证 A 的特征向量全为 B 的特征向量，命题成立.

例 27 设 V 是数域上的所有 2×2 矩阵组成的线性空间. 对于 V 中的任一矩阵 A ，定义线性变换 $\subseteq_A(B)=AB-BA$. 证明： a) 如果 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\subseteq_A$ 的所有特征值均为 0.

b) 如果 A 的所有特征值为 0 ，则 $\subseteq_A$ 的所有特征值均为 0.

证 a) 设 λ 为的 $\subseteq_A$ 特征值， $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 为属于 λ 的特征向量，即 $\subseteq_A(B)=\lambda B$, 故 $AB-BA=\lambda B$, 即 $\begin{pmatrix}c & d-a\\ 0 & -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d\end{pmatrix}$. 若 $\lambda\neq 0$, 则 $c=0, d=0, a=0, b=0$, 即 $B=0$, 这与 B 为特征向量矛盾，故 $\lambda=0$.

b) 若 $A=0$, 则 $\subseteq_A=0$ ，显然命题成立. 若 $A\neq 0$, 则 A 相似于 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ，设 A 在基 α_1,α_2 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 即 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=\alpha_1$. 设 λ 为 $\subseteq_A$ 的特征值， B 为属于 λ 的特征向量，即 $\subseteq(B)=AB-BA=\lambda B$, 若 $B\alpha_1\neq 0$, 则 $(AB-BA)\alpha_1=\lambda B\alpha_1$, 故 $AB\alpha_1=\lambda B\alpha_1$, 即 λ 为 A 的特征向量，从而 $\lambda=0$, 若 $B\alpha_1=0$, 由 $B\neq 0$, $B\alpha_2\neq 0$, 故 $(AB-BA)\alpha_2=\lambda B\alpha_2$, 即 $AB\alpha_2=\lambda B\alpha_2$, 故 λ 为 A 的特征值，从而 $\lambda=0$, 总之， $\subseteq_A$ 的特征值为 0.

例 28 用 J 表示元素全为 1 的 n 级矩阵， $n\geq 2$. 设 $f(x)=a+bx$ 是有理数域上的一元多项式，令 $A=f(J)$.

1 求 J 的全部特征值和特征向量；

2 求 A 的所有特征子空间；

3 A 是否可对角化？如果可对角化，求出有理数域上的一个可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出这个对角矩阵.

证 1) 由 $r(J)=1$, J 的非零的特征值至多一个, 由 $J\begin{pmatrix}1\\ \ddots\\ 1\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\ \ddots\\ 1\end{pmatrix}$, J 的特征值为 n 及 $0(n-1$ 重). 由 $J^2=nJ$ 知， J 的最小多项式为互素的一次因式的乘积，从而 J 可对角化. 由 $JX=0$ 可求 0 的特征向量

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \ddots\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ \ddots\\ 0\end{pmatrix}, n \text{ 的特征向量为 } \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ \ddots\\ 1\end{pmatrix}.$$

2) 由 $A=aE+bJ$ 知 A 的特征值为 $a+nb$ 及 $a(n-1$ 重)，$V_{a+nb}=L(\alpha_1)$, $V_a=L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

3) 由 2)， A 有 n 个线性无关的特征向量， A 可对角化，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

例 29 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为 n 个实数，方阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, 试求 A 的所有特征值.

证 考虑 A', 易知 A' 的特征值为 $\sum_{i=1}^n a_i, 0(n-1$ 重)， 而 A 与 A' 有相同的特征值，故的 A 特征值为 $\sum_{i=1}^n a_i, 0(n-1$ 重).

例 30 设实数域上的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 ）求 A 的特征多项式 $f(\lambda)$.

2 ） $f(\lambda)$ 是否为实数域上的不可约多项式.

3 ）求 A 的最小多项式，写出理由.

4 ）实数域上的矩阵 A 是否可对角化，写出理由.

证 1 ） $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-\lambda^2+\lambda+3$.

2) 由 $f(u)=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+3)$， $f(\lambda)$ 不为实数域上的不可约多项式. .

3) 因最小多项式一定包含所有特征值，故最小多项式 $g(\lambda)=f(\lambda)$.

4) 因 A 的最小多项式不为互素的一次因式的乘积，故 A 不可对角化.

例 31 设 V 为数域 K 上的 n 维线性空间， $\subseteq$ 是 V 上的线性变换且 $\subseteq^3-7\subseteq=61_V$, 判断 $\subseteq$ 是否可对角化，写出理由.

证 由 $x^3-7x-6=(x+1)(x-3)(x+2)$ 及 $\subseteq$ 的最小多项式整除 x^3-7x-6，故 $\subseteq$ 的最小多项式一定为互素的一次因式的积，从而 $\subseteq$ 可对角化.

例 32 设 $g(\lambda)$ 为数域 K 上的线性空间 V 的线性变换 $\subseteq$ 的最小多项式， $g(\lambda)=p(\lambda)q(\lambda)$, $p(\lambda),q(\lambda)$ 为 K 上的不可约多项式且 $(p(\lambda),q(\lambda))=1$. 求证存在 $\subseteq$ 的不变子空间 V_1,V_2 使得 $V=V_1\bigoplus V_2$ 且 $\subseteq|_{V_1}$ 的最小多项式为 $p(\lambda)$， $\subseteq|_{V_2}$ 的最小多项式为 $q(\lambda)$.

证 令 $V_1 = Kerp(\subseteq), V_2 = Kerq(\subseteq)$, 由 $\subseteq$ 与 $p(\subseteq), q(\subseteq)$ 可交换知 V_1, V_2 为 $\subseteq$ 的不变子空间，由 $(p(\lambda), q(\lambda)) = 1$ 知存在 K 上的最小多项式 $u(\lambda), v(\lambda)$ 使得 $u(\lambda)p(\lambda) + v(\lambda)q(\lambda) = 1$, 故 $u(\subseteq)p(\subseteq) + v(\subseteq)q(\subseteq) = 1_V$. 任取 $\alpha \in V$, $\alpha = 1_V\alpha = u(\subseteq)p(\subseteq)\alpha + v(\subseteq)q(\subseteq)\alpha$, 再考虑到 $0 = g(\subseteq) = p(\subseteq)q(\subseteq)$ 知，$u(\subseteq)p(\subseteq)\alpha \in V_2, v(\subseteq)q(\subseteq)\alpha \in V_1$, 故 $V = V_1 + V_2$, 任取 $\alpha \in V_1 \bigcap V_2$, 由 $\alpha = 1_V\alpha = u(\subseteq)p(\subseteq)\alpha + v(\subseteq)q(\subseteq)\alpha = 0$, 故 $V = V_1 \bigoplus V_2$. 而对 $\alpha \in V_1$, $p(\subseteq)\alpha = 0$, 故 $\subseteq |_{V_1}$ 的最小多项式为 $p(\lambda)$ 的因式，但 $p(\lambda)$ 不可约，故 $\subseteq |_{V_1}$ 的最小多项式为 $p(\lambda)$, 类似地， $\subseteq |_{V_2}$ 的最小多项式为 $q(\lambda)$.

例 33 已知 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 7 \\ 0 & \frac{1}{3} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, 求 $\lim_{k\to\infty} A^k$.

解 A 有三个不同的特征值 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, 故存在可逆阵 P 使得 $^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, 从而 $P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5^k} \end{pmatrix} \to 0(k \to \infty)$, 故 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

例 34 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \omega & c \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, a, b, c 为实数， $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, 求 A^{100}.

解 显然 $\omega^3 = 1$, A 的三个特征值为 $1, \omega, \omega^2$, 存在可逆阵 P 使得 $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}P^{-1}$, 从而 $A^{100} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}^{100}P^{-1} =$

$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{100} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{200} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}P^{-1} = A.$

例 35 证明： $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}$.

证 令 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 由 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2$ 知 A 的特征值为 $1(2$ 重).

设 λ^{100} 被 $f(\lambda)$ 按带余除法除为 $\lambda^{100} = g(\lambda)f(\lambda) + a\lambda + b$. 将 1 代入得 $1 = a + b$, 又 1 为 $f(\lambda)$ 的重根求导后将 1 代入有 $100 = a$. 则由哈密尔顿 - 凯莱定理， $A^{100} = 100A - 99E = \begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}$.

例 36 已知 A_1, A_2, A_3 是三个非零的三阶方阵且 $A_i^2 = A_i(i \neq j)$, $i =$

$1,2,3$, $A_iA_j=0$. 证明：

1 ） A_i 的特征值只有 1 和 0.

2 ） A_i 的属于特征值 1 的特征向量是 $A_j(i\neq j)$ 的属于特征值 0 的特征向量.

3 ）若 X_1,X_2,X_3 分别是 A_1,A_2,A_3 的属于特征值 1 的特征向量，则 X_1,X_2,X_3 线性无关.

4) $r(A_i)=1$, $i=1,2,3$.

5) 存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}A_iP$ 同时为对角阵， $i=1,2,3$, $\sum P^{-1}A_iP=E$.

6) A_i 与 A_j 相似.

证 1 ）由 $A_i^2=A_i$ 知， A_i 的最小多项式为 $x^2-x=x(x-1)$ 的因式，即 A_i 的最小多项式可能为 $x,x-1,x^2-x$, 总之， A_i 能对角化. 由 A_i 非零知， A_i 的最小多项式不为 0 ，否则 $A_i=0$. 又 $A_iA_j=0$, 也不为 $x-1$, 否则 A_i 可逆，从而 $A_j=0$. 故 A_i 的最小多项式为 x^2-x ，从而 A_i 的特征值为 1 和 0.

2 ）设 α 为 A_i 的属于特征值 1 的特征向量，即 $A_i\alpha=\alpha$, 则 $A_j\alpha=A_jA_i\alpha=0$, 故 α 为 A_j 的属于特征值 0 的特征向量.

3 ）设 $k_1X_1+k_2X_2k_3X_3=0$, 则 $k_1A_1X_1+k_2A_1X_2+k_3A_1X_3=0$, 由 2 ）知 $k_1X_1=0$, 故 $k_1=0$, 同样 $k_2=k_3=0$, 从而 X_1,X_2,X_3 线性无关.

4 ）由 2 ）， 3 ）， A_i 的特征值 0 有两个线性无关的特征向量，故 $r(A_i)=1$.

5) 令 $P=(X_1,X_2,X_3)$ ，则 $P^{-1}A_1P=diag(1,0,0)$, $P^{-1}A_2P=diag(0,1,0)$, $P^{-1}A_3P=diag(0,0,1)$ 且 $\sum P^{-1}A_iP=E$.

6) 由 $diag(1,0,0),diag(0,1,0),diag(0,0,1)$ 两两相似及 5) 易知.

例 37 设 $\subseteq$ 为数域 F 上的线性空间 V 的线性变换. 试给出 $\subseteq$ 的零化多项式与最小多项式的定义及二者的关系，并加以证明.

证 设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，若 $f(\subseteq)=0$, 称 $f(x)$ 为 $\subseteq$ 的零化多项式. $\subseteq$ 的首项系数为 1 的次数最低的零化多项式称为最小多项式. 设 $g(x)$ 为 $\subseteq$ 的最小多项式，则 $f(x)$ 为 σ 的最小多项式当且仅当 $g(x)|f(x)$. 由 $f(x)$ 为 $\subseteq$ 的零化多项式, 即 $f(\subseteq)=0$, 设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, 其中 $r(x)=0$ 或 $\partial r(x)<\partial g(x)$. 若 $r(x)\neq 0$, 则 $r(\subseteq)=f(\subseteq)-q(\subseteq)g(\subseteq)=0$, 这于 $g(\subseteq)$ 的定义矛盾，故 $r(x)=0$, 即 $g(x)|f(x)$ ，反之易证.

例 38 1) 设 A 的最小多项式为 $m(\lambda)$, $g(\lambda)$ 为任意多项式. 则 $g(A)$ 可逆 $\Longleftrightarrow (g(\lambda),m(\lambda))=1$.

2) A,B 为 n 阶方阵， $f(\lambda)=|\lambda E-B|$. 则 $f(A)$ 可逆 $\Longleftrightarrow A,B$ 无公共的特征值.

证 1) $\longrightarrow$ 由题设，存在多项式 $u(\lambda), v(\lambda)$ 使得 $u(\lambda)g(\lambda)+v(\lambda)m(\lambda)=1$，故 $g(A)u(A)=E$，即 $g(A)$ 可逆.

ρ 假设 $(g(\lambda),m(\lambda))=d(\lambda)\neq 1$，令 $g(\lambda)=g_1(\lambda)d(\lambda), m(\lambda)=m_1(\lambda)d(\lambda)$，则由 $g(A)=g_1(A)d(A)$ 知 $d(A)$ 可逆，再由 $m(A)=d(A)m_1(A)=0$，知 $m_1(A)=0$，这与 $m(A)$ 为最小多项式矛盾.

2) 利用 B 的特征值全在它的最小多项式中出现.

例 39 设 $B=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$ 为实方阵，其中 $a_i\neq 0$.

1) 对任意的自然数 k，存在 m 使得 $B^k=mB$.

2) 对任意的自然数 s，存在方阵 X 使得 $B=X^s$.

证 1) 令 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$，则 $B=\alpha'\alpha$，记 $b=a_1^2+\cdots+a_n^2$，则 $B^k=b^{k-1}B$.

2) 由 1)，$B^2=bB$，又 $b\neq 0$，故 B 的最小多项式为互素的一次因式的积，从而 B 可对角化，B 的特征值可能为 0 和 b，而 $B\neq 0, r(B)\leq 1$，故 B 的特征值为 $0(n-1$ 重$)$ 和 b，故存在可逆阵 T 使得 $B=T\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & b \end{pmatrix}T^{-1}$，

取 $X=B=T\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \sqrt[s]{b} \end{pmatrix}T^{-1}$ 即可.

例 40 已知 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+13\lambda-6$，求 A^3 的特征多项式.

解 由 $f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-\frac{5+\sqrt{13}}{2})(\lambda-\frac{5-\sqrt{13}}{2)})$，知 A 的特征值为 $2,\frac{5+\sqrt{13}}{2},\frac{5-\sqrt{13}}{2}$，从而 A^3 的特征值为 $2^3=8,(\frac{5+\sqrt{13}}{2})^3=40+11\sqrt{13},(\frac{5-\sqrt{13}}{2})^3=40-11\sqrt{13}$，故 A^3 的特征多项式为 $g(\lambda)=(\lambda-8)(\lambda-40-11\sqrt{13})(\lambda-40+11\sqrt{13})=\lambda^3-88\lambda^2+667\lambda+216$.

例 41 A,B 为方阵，λ 为 BA 的非零特征值，V_λ^{BA} 为 BA 的属于 λ 的特征子空间.

1) λ 也为 AB 的特征值.

2) $dim(V_\lambda^{BA})=dim(V_\lambda^{AB})$.

证 1) 设 α 为 BA 的属于 λ 的特征向量，即 $BA\alpha=\lambda\alpha$，故 $AB(A\alpha)=\lambda(A\alpha)$. 若 $A\alpha=0$，则 $BA\alpha=0$，这与 $\lambda\neq 0$ 矛盾. 故 $A\alpha\neq 0$，从而 λ 为

AB 的特征值， $A\alpha$ 为特征向量.

2) 由 1) ，设 $V_\lambda^{BA}=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$. 则 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r$ 为 AB 的特征向量，下证 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r$ 线性无关. 设 $k_1A\alpha_1+\cdots+k_rA\alpha_r=0$, 即 $A(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=0$, 故 $BA(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=0$, 又 $BA(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=\lambda(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)$, 故 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$, 从而 $k_i=0, i=1,\cdots,r$. 故 $dim(V_\lambda^{BA})\leq dim(V_\lambda^{AB})$. 同理 $dim(V_\lambda^{AB})\leq dim(V_\lambda^{BA})$, 故 $dim(V_\lambda^{BA})=dim(V_\lambda^{AB})$.

也可直证为单射.

例 42 σ 为 n 维线性空间 V 的线性变换， $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为 σ 的不同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 的特征向量. 若 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k\in W$, W 为 σ- 子空间. 则 $dimW\geq k$.

证 设 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=\beta_0\in W$ ，则 $\sigma(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k=\beta_1\in W$, 这样下去有 $\begin{cases}\alpha_1+\cdots+\alpha_k=\beta_0\in W\\ \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k=\beta_1\in W\\ \ddots\\ \lambda_1^{k-1}\alpha_1+\cdots+\lambda_k^{k-1}\alpha_k=\beta_{k-1}\in W\end{cases}$ 由 $\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{k-1}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 1&\lambda_k&\cdots&\lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}$ $=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ 可逆知， $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 线性无关，故 $dimW\geq k$.

例 43 域 F 上的 n 维线性空间 V 的一个线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-a_1&1&0&\cdots&0&0\\ -a_2&0&1&\cdots&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ -a_{n-1}&0&0&\cdots&0&1\\ -a_n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

1) 求 σ 的特征多项式.

2) n 维线性空间 V 有循环基吗？若有，试求之.

3) 求 A 的最小多项式，并说明理由.

解 1) $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$.

2) 由 $\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$ 知， $\alpha_n,\sigma\alpha_n,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha_n$ 为循环基.

3) σ 在 $\alpha_n,\sigma\alpha_n,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha_n$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_1\\ 1&0&0&\cdots&0&-a_2\\ 0&1&0&\cdots&0&-a_3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\ 0&0&0&\cdots&1&-a_n\end{pmatrix},$$

而 $\lambda E-B$ 有一 $n-1$ 级子式为 $(-1)^{n-1}$，故 $n-1$ 级不变因子 $d_{n-1}(\lambda)=1$, 从而 σ 的最小多项式为 $f(\lambda)$.

例 44 设 A 为 3 阶矩阵，E 为 3 阶单位矩阵，$|E-A|=0, |2E-A|=0, |3E-A|=0$. 则 $|4E-A|=\underline{6}$.

把 E 换成任意的 B 同样可求.

例 45 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，$AC=CB, r(C)=r$. 证明：A,B 的特征多项式有 r 次公因子，进而，若 A,B 无相同的特征根，则 $C=0$.

证 存在可逆阵 P,Q 使得 $PCQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 由 $AC=CB$ 知，$PACQ=PCBQ$, 即 $PAP^{-1}PCQ=PCQQ^{-1}BQ$. 令 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中 A_{11},B_{11} 为 r 阶方阵，则 $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $A_{21}=0, B_{12}=0, A_{11}=B_{11}$. 从而 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 故 $|\lambda E-A|=|\lambda E_r-A_{11}||\lambda E_{n-r}-A_{22}|$, $|\lambda E-B|=|\lambda E_r-B_{11}||\lambda E_{n-r}-B_{22}|$, 故 A,B 的特征多项式中有 r 次公因子 $|\lambda E_r-A_{11}|$.

例 46 设 $A_{n\times n}, B_{m\times m}$，$X_{n\times m}$ 为非零矩阵，$AX=XB$, 则 A,B 有公共特征根.

证 假设 $n\geq m$, 令 $X_1=(X,0), B_1=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$, 则可用上题.

例 47 设 A,B 均为 n 阶矩阵，$AB=BA$. A 有两两不同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则

1) 存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 同为对角形.

2) 存在多项式 $f(x)$, $(f(x))$ 的次数 $\leq n-1$ 使得 $f(A)=B$.

证 1) 存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. 由 $AB=BA$, 有 $P^{-1}ABP=P^{-1}BAP$, 即 $P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP$. 令 $P^{-1}BP=(b_{ij})$, 由

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}(b_{ij})=(b_{ij})\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

及 $i\neq j$ 时， $\lambda_i\neq\lambda_j$, 得 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$.

2) 假设 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 满足 $f(A)=B$. 则 $a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_0E=B$, 从而 $a_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1}+\cdots+a_0E=P^{-1}BP$, 即 $\begin{cases}a_{n-1}\lambda_1^{n-1}+\cdots+a_0=\mu_1\\ \ddots\\ a_{n-1}\lambda_n^{n-1}+\cdots+a_0=\mu_n\end{cases}$

方程组的系数行列式为范德蒙行列式，且 $i\neq j$ 时， $\lambda_i\neq\lambda_j$, 从而不为 0, 故 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 有唯一解，从而 $f(x)$ 存在.

例 48 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. 1 ）求 A 的特征多项式.

2 ）证明： $n\geq 3$ 时， $A^n=A^{n-2}+A^2-E$.

3 ）求 A^{100}.

证 1 ） $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

2 ）对 n 归纳. $n=3$ 时， $A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $A^{3-2}+A^2-E=A^2$. 设 $A^{n-1}=A^{n-3}+A^2-E$, 则为 n 时， $A^n=AA^{n-1}=A(A^{n-3}+A^2-E)=A^{n-1}+A^2-E$.

3 ） $A^{100}=\cdots=50A^2-49E=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$.

例 49 设 A,B 为 n 阶实方阵， $A^2=A,B^2=B,AB=BA$. 证明：存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 同时为对角形.

证 由 $A^2=A$ 知， A 的最小多项式为互素的一次因式的积，从而 A 可对角化，故存在可逆阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$. 由 $AB=BA$ 有， $Q^{-1}ABQ=Q^{-1}BAQ$, 即 $Q^{-1}AQQ^{-1}BQ=Q^{-1}BQQ^{-1}AQ$. 令 $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$, 其中 B_{11} 为 r 阶方阵. 故可得 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 从而 $B_{12}=0,B_{21}=0,Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}B_{11}&0\\0&B_{22}\end{pmatrix}$. 又 B 可对角化，存在可逆阵 S,T 使得 $S^{-1}B_{11}S,T^{-1}B_{22}T$ 为对角形，令 $P=Q\begin{pmatrix}S&0\\0&T\end{pmatrix}$ 即可.

例 50 设矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$. 求 $aE+bA$ 与

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的特征根.

证 $aE+bA$ 的特征根为 $a+b\lambda_1,\cdots,a+b\lambda_n$. 由

$$|\lambda E_{2n}-\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}|=\begin{vmatrix} \lambda E & -A \\ -A & \lambda E \end{vmatrix}$$
$$=|\lambda^2E-A^2|=|\lambda E-A||\lambda E+A|,$$

故 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$.

例 51 关于迹，有 1) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B), tr(kA)=ktr(A), tr(AB)=tr(BA)$, $tr(A)=tr(A')$.

2) $tr(P^{-1}AP)=tr(A)$.

3) 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则 $tr(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

利用迹，易证

例 52 证明 1) $tr(A\overline{A}')=0 \Longleftrightarrow A=0$.

2) 不存在方阵 A,B 使得 $AB-BA=E$.

3) A,B 同阶实方阵，若 $AB=(B-A')A$, 则 $A=0$.

例 53 设 A 为 2 阶方阵，存在 B 使得 $AB-BA=A$. 则 $A^2=0$.

证 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^2+c_1\lambda+c_2$, 则 $c_1=\lambda_1+\lambda_2=0$, $c_2=|A|$. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 则 A 可对角化，设可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2)$, 故 $P^{-1}APP^{-1}BP-P^{-1}BPP^{-1}AP=P^{-1}AP$, 计算知 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 矛盾. 故 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 从而 A 的特征多项式为 λ^2, 故 $A^2=0$.

例 53 设 A,B,C 为 n 阶复方阵， $AC=CA, BC=CB$， $C=AB-BA$. 则 $C^n=0$.

证 对任意的正整数 k， $C^k=C^{k-1}(AB-BA)=A(C^{k-1}B)-(C^{k-1}B)A$, 故 $tr(C^k)=0$, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为 C 的所有两两不同的特征值，重数分别为 $x_1,\cdots,x_r$, 则 $\lambda_1^k,\cdots,\lambda_r^k$ 为 C^k 的所有不为 0 的特征值，重数分别为 $x_1,\cdots,x_r$, 故 $\begin{cases} x_1\lambda_1+\cdots+x_r\lambda_r=0 \\ x_1\lambda_1^2+\cdots+x_r\lambda_r^2=0 \\ \qquad\vdots \\ x_1\lambda_1^r+\cdots+x_r\lambda_r^r=0 \end{cases}$, 从而 $x_1=\cdots=x_r=0$, 即 C 的特征多项式为 λ^n， 故 $C^n=0$.

例 54 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=tr(A)=1$. 则 $A^2=A$.

证 由 $r(A)=1$ 知， $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)$. 故 $A^2=(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)A$.

由 $tr(A)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=1$ 知， $A^2=A$.

例 55 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$，试确定使得 $kE+A$ 可逆的数 k 的取值范围.

证 由 $A^3-6A^2+11A-6E=0$ 知， A 的特征值只可能为 $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的根，即 $1,2,3$，从而 $kE+A$ 的特征值只可能为 $k+1,k+2,k+3$. 故 $kE+A$ 可逆的充要条件为 $k\neq-1,-2,-3$.

例 56 对于数域 P 上的 n 维线性空间 V，假设存在 V 上的线性变换 σ,δ,τ 满足 (1) $\tau\delta=0$; (2) σ 的秩小于 δ 的秩. 试证明 τ 与 σ 至少有一个公共的特征向量.

证 由（2） $Im\delta\bigcap\ker\sigma\neq0$, 取 $\delta\alpha\in Im\delta\bigcap ker\sigma,\delta\alpha\neq0$, 则由（1), $\tau\delta\alpha=0$, $\sigma\delta\alpha=0$, 即 $\delta\alpha$ 为 τ,σ 的公共特征向量.

例 57 $\begin{cases}x_{n+1}=x_n+4y_n\\ y_{n+1}=2x_n+y_n\end{cases}$, 已知 $x_0=1,y_0=0$，求 x_{100},y_{100}.

解 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}1&4\\2&1\end{pmatrix}^{n+1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, 令 $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&1\end{pmatrix}$, 易求 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1+2\sqrt{2})(\lambda-1-2\sqrt{2})$, 可求 $T=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1&1\end{pmatrix}$, 使得 $A=Tdiag(1+2\sqrt{2},1-2\sqrt{2})T^{-1}$, 故 $A^{100}=Tdiag(1+2\sqrt{2},1-2\sqrt{2})^{100}T^{-1}$. 故 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^{100}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

例 58 设 V 为 n 维向量空间， f,g 是 V 上的线性变换. f 有 n 个不同特征值且 $fg=gf$. 则 g 为 $f^0=I,f,\cdots,f^{n-1}$ 的线性组合.

证 $\Longleftarrow$ 显然.

$\Longrightarrow$ 设 f 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$ 设 g 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的矩阵为 B，由 $fg=gf$ 知 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)B=Bdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 故 $B=diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$, 从而与 f 可交换的子空间 W 为 n 维的. $f^0,f,\cdots,f^{n-1}$ 显然与 f 可交换. 设 $k_0f^0+\cdots+k_{n-1}f^{n-1}=0$, 故 $k_0diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)+\cdots+k_{n-1}diag(\lambda_1^{n-1},\cdots,\lambda_n^{n-1})=0$, 由 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两不同， $k_0=\cdots=k_n=0$, 故 $f^0,\cdots,f^{n-1}$ 为 W 的基，从而 g 为 $f^0,\cdots,f^{n-1}$ 的线性组合.

例 59 在实 n 维线性空间 R^n 中是否可能存在线性变换 σ 满足 $\sigma^2+I=0$?

证 n 是偶数时可能. 例如 σ 在某基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&E_{\frac{n}{2}}\\-E_{\frac{n}{2}}&0\end{pmatrix}$.

n 是奇数时不可能. 因由 $\sigma^2+I=0$ 知， σ 无实特征值，但 σ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 为奇数次实系数多项式，必有实根，故不可能.

例 60 设 $A\in P^{n\times n}$, $f(x)\in P[x]$. 已知 $f(A)$ 可逆，证明存在 $g(x)\in P[x]$ 使得 $(f(A))^{-1}=g(A)$.

证 设 $h(x)=|xE-f(A)|=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 由 $f(A)$ 可逆， $a_n\neq 0$. 故 $0=h(f(A))=f^n(A)+a_1f^{n-1}(A)+\cdots+a_{n-1}f(A)+a_nE$, 即 $f(A)[f^{n-1}(A)+a_1f^{n-2}(A)+\cdots+a_{n-1}E]=-a_nE$, 令 $g(x)=-\frac{1}{a_n}(f(x)^{n-1}+a_1f(x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1})$ 即可.

例 61 σ 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换. $\sigma^2=\sigma$. A 为 σ 在 V 的基下的矩阵. $rank(A)=r$.

1) 证明 $\sigma+1_V$ 可逆.

2) $rank(A)=tr(A)$.

3) 求 $|2E-A|$.

证 1) 由 $\sigma^2=\sigma$ 知， σ 的特征值只可能为 $0,1$, 故 $\sigma+1_V$ 的特征值只可能为 $1,2$, 故 $\sigma+1_V$ 可逆.

2) 由 $\sigma^2=\sigma$ 知， σ 的最小多项式为 $x(x-1)$ 的因式，为互素的一次因式的乘积，故 σ 可对角化，设可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=diag(E_r,0)$, 故 $tr(A)=r=rank(A)$.

3) 由 2), $|2E-A|=|P^{-1}||2E-A||P|=2^{n-r}$.

例 62 设 A,B 为 n 阶方阵， $rank(A)=n-1$， $AB=BA=0$. 证明存在多项式 $g(x)$ 使得 $B=g(A)$.

证 由 $AB=0$， $rank(B)\leq 1$, 若 $rank(B)=0$，取 $g(x)=0$ 即可. 若 $rank(B)=1$，设 $B=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P$, 其中 $\lambda\neq 0$. 由 $AB=0$ 知, $P^{-1}APP^{-1}BP=0$. 故 $P^{-1}AP$ 的第一列为 0. 由 $BA=0$ 知 $P^{-1}AP$ 的第一行为 0. 故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$, A_1 为 $n-1$ 阶可逆阵. 设 A_1 的特征多项式为 $h(x)=x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}$, $a_{n-1}\neq 0$. 令 $f(x)=\frac{\lambda}{a_{n-1}}(x^{n-2}+\cdots+a_{n-2})$，则 $f(A_1)=-\lambda E_n-1$，故 $f(A)=\begin{pmatrix}0 & \\ 0 & -\lambda E_{n-1}\end{pmatrix}$, 令 $g(x)=f(x)+\lambda$，则 $B=g(A)$.

（三）不变子空间、值域、核

基本知识

结果 1 设 V 为 n 维线性空间， $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的基. 线性变换 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为 A. 称 $\subseteq V=Im\subseteq=\{\subseteq\alpha|\alpha\in V\}=L(\subseteq\varepsilon_1,\cdots,\subseteq\varepsilon_n)\leq V$ 为 $\subseteq$ 的值域， $\subseteq^{-1}(0)=ker\subseteq=\{\alpha\in V|\subseteq\alpha=0\}\leq V$ 为 $\subseteq$ 的核. $dim\subseteq V=r(A)$ 称为 $\subseteq$ 的秩， $dim\subseteq^{-1}(0)$ 称为 $\subseteq$ 的零度.

结果 2 设 $\subseteq$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换. 则 $\subseteq$ 的秩 $+$ $\subseteq$ 的零度 $=n$.

结果 3 一有限维线性空间上的线性变换是单射的充要条件为它是满射.

结果 4 若线性变换 $\subseteq, \tau$ 满足 $\subseteq \tau = \tau \subseteq$. 则 τ 的核、值域、特征子空间均为 $\subseteq$ 的不变子空间.

结果 5 设 $\subseteq \in L(V)$， $W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \leq V$. 则 W 为 $\subseteq$- 子空间的充要条件为 $\subseteq \alpha_1, \cdots, \subseteq \alpha_s \in W$.

结果 6 设 W 为 $\subseteq$- 子空间， W 的基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$， 扩充为 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 则 $\subseteq$ 在该基下的矩阵具有形式 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$. 进而若 $V = W_1 \bigoplus \cdots \bigoplus W_s$, 而 W_i 均为 $\subseteq$- 子空间， $i = 1, \cdots, \subseteq$. 则 $W_1, \cdots, W_s$ 的基放在一起构成 V 的基， $\subseteq$ 在该基下的矩阵具有形式 $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$. 反之，若 $\subseteq$ 在某基下的矩阵具有如上形式，则 $V = W_1 \bigoplus \cdots \bigoplus W_s$， W_i 为 $\subseteq$- 子空间， $i = 1, \cdots, s$.

结果 7 设线性变换 $\subseteq$ 的零化 $f(\lambda)$ 可分解成互素的一次因式的乘积 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$， 则 V 可分解成不变子空间的直和 $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_s$， 其中 $V_i = \{\alpha | (\subseteq - \lambda_i 1_V)^{r_i} \alpha = 0, \alpha \in V\}$.**(注意证明)**

结果 8 当 $r_i = 1$ 时， $i = 1, \cdots, s$. 则 $\subseteq$ 可对角化. 从而若 $\subseteq$ 的最小多项式为互素的一次因式的乘积时， $\subseteq$ 可对角化.

例题

例 1 设 V_1, V_2 为 n 维线性空间 V 的子空间. 则 $dinV_1 + dimV_2 = n \Longleftrightarrow$ 存在 V 的线性变换 $\subseteq$ 使得 $V_1 = \subseteq^{-1}(0), V_2 = \subseteq V$.

证 $\longrightarrow$ 显然.

ρ 设 $s = dimV_1$， 则 $dimV_2 = n - s$. 取 V_1 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 并扩充为 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 设 V_2 的基为 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-s}$， 定义线性变换 $\subseteq$， $\subseteq \alpha_i = 0, i = 1, \cdots, s, \subseteq \alpha_{i+1} = \beta_1, \cdots, \subseteq \alpha_n = \beta_{n-s}$, 显然 $\subseteq V = L(\subseteq \alpha_1, \cdots, \subseteq \alpha_n) = L(\beta_1, \cdots, \beta_{n-s}) = V_2$， $V_1 \subseteq \subseteq^{-1}(0)$, 又 $dim \subseteq^{-1}(0) = n - (n-s) = s$, $dimV_1 = s$， 故 $V_1 = \delta^{-1}(0)$.

例 2 设 $V = P[x]_n, \subseteq: V \longrightarrow V, f(x) \mapsto xf'(x) - f(x)$.

1 ）求 $\subseteq^{-1}(0), Im \subseteq$.

2 ）证明： $V = Ker \subseteq \bigoplus Im \subseteq$.

证 1 ）取 V 的基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$, 则 $\subseteq 1 = -1, \subseteq x = 0, \subseteq x^2 = x^2, \cdots, \subseteq x^{n-1} = (n-2)x^{n-1}$. 故 $Im \subseteq = L(1, x^2, \cdots, x^{n-1})$， 从而 $dimIm \subseteq = n - 1$, 故 $dimKer \subseteq = 1$, 又 $x \in Ker \subseteq$, 故 $Ker \subseteq = L(x)$.

2 ）易知 $Im \subseteq \bigcap Ker \subseteq = \{0\}$, 故 $V = Ker \subseteq \bigoplus Im \subseteq$.

例 3 设 $\subseteq$ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列条件等价. 1) $V = Ker \subseteq \bigoplus Im \subseteq$. 2) $V = Ker \subseteq + Im \subseteq$. 3) $Ker \subseteq \bigcap Im \subseteq = \{0\}$. 4) 若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 为 $Im \subseteq$ 的基，则 $\subseteq \varepsilon_1, \cdots, \subseteq \varepsilon_r$ 为 $Im \subseteq^2$ 的基. 5) $r(\subseteq) = r(\subseteq^2)$.

证 1) $\Rightarrow$ 2) 显然.

2) $\Rightarrow$ 3) 由 $n = dimKer \subseteq + dimIm \subseteq - dimKer \subseteq \bigcap Im \subseteq$ 知， $dimKer \subseteq \bigcap Im \subseteq = 0$, 故 $dimKer \subseteq \bigcap Im \subseteq = \{0\}$.

3) $\Rightarrow$ 4) 由 $Im \subseteq = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ 知， $Im \subseteq^2 = L(\subseteq \varepsilon_1, \cdots, \subseteq \varepsilon_r)$. 设 $k_1 \subseteq \varepsilon_1 + \cdots + k_r \subseteq \varepsilon_r = 0$, 即 $\subseteq (k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_r\varepsilon_r) = 0$, 故 $k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_r\varepsilon_r \in dimKer \subseteq \bigcap Im \subseteq = \{0\}$, 从而 $k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_r\varepsilon_r = 0$, 故 $k_1 = \cdots = k_r = 0$, 即 $\subseteq \varepsilon_1, \cdots, \subseteq \varepsilon_r$ 为 $Im \subseteq^2$ 的基. 4) $\Rightarrow$ 5) 显然.

5) $\Rightarrow$ 1) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 为 $Ker \subseteq$ 的基，扩充为 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 故 $Im \subseteq = L(\subseteq \alpha_{s+1}, \cdots, \subseteq \alpha_n)$, 从而 $Im \subseteq^2 = L(\subseteq^2 \alpha_{s+1}, \cdots, \subseteq^2 \alpha_n)$. 由 $r(\subseteq) = r(\subseteq^2)$, $\subseteq^2 \alpha_{s+1}, \cdots, \subseteq^2 \alpha_n$ 线性无关. 设 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + k_{s+1} \subseteq \alpha_{s+1} + \cdots + k_n \subseteq \alpha_n = 0$, 则 $k_{s+1} \subseteq^2 \alpha_{s+1} + \cdots + k_n \subseteq^2 \alpha_n = 0$, 故 $k_{s+1} = \cdots = k_n = 0$, 进而 $k_1 = \cdots = k_s = 0$. 故 $V = Ker \subseteq \bigoplus Im \subseteq$.

例 4 设 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式. $\subseteq$ 为线性空间 V 的线性变换. 则 $Kerd(\subseteq) = Kerf(\subseteq) \bigcap Kerg(\subseteq)$. 特别地，当 $(f(x), g(x)) = 1$ 时， $Kerf(\subseteq) + Kerg(\subseteq)$ 为直和.

证 由 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式，存在 $f_1(x), g_1(x)$ 使得 $f(x) = f_1(x)d(x)$, $g(x) = g_1(x)d(x)$, 故 $f(\subseteq) = f_1(\subseteq)d(\subseteq), g(\subseteq) = g_1(\subseteq)d(\subseteq)$. 同样存在 $u(x), v(x)$ 使得 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, 故 $d(\subseteq) = u(\subseteq)f(\subseteq) + v(\subseteq)g(\subseteq)$ ，任取 $\alpha \in Kerd(\subseteq)$, 则 $f(\subseteq)\alpha = f_1(\subseteq)\delta(\subseteq)\alpha = 0, g(\subseteq)\alpha = g_1(\subseteq)d(\subseteq)\alpha = 0$, 即 $Kerd(\subseteq) \subseteq Kerf(\subseteq) \bigcap Kerg(\subseteq)$. 任取 $\alpha \in Kerf(\subseteq) \bigcap Kerg(\subseteq)$, 则 $d(\subseteq)\alpha = u(\subseteq)f(\subseteq)\alpha + v(\subseteq)g(\subseteq)\alpha = 0$ ，即 $Kerf(\subseteq) \bigcap Kerg(\subseteq) \subseteq Kerd(\subseteq)$. 故 $Kerd(\subseteq) = Kerf(\subseteq) \bigcap Kerg(\subseteq)$.

例 5 设 $f(x) \in P[x]$, $f(x) = f_1(x)f_2(x), (f_1(x), f_2(x)) = 1, \subseteq \in L(V)$. 证明: $Kerf(\subseteq) = Kerf_1(\subseteq) \bigoplus Kerf_2(\subseteq)$.

证 由 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 存在 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f_1(x) + v(x)f_2(x) = 1$, 故 $u(\subseteq)f_1(\subseteq) + v(\subseteq)f_2(\subseteq) = 1_V$. 任取 $\alpha \in Kerf(\subseteq)$, 即 $f(\subseteq)\alpha = 0$. 则 $\alpha = 1_V\alpha = u(\subseteq)f_1(\subseteq)\alpha + v(\subseteq)f_2(\subseteq)\alpha$, 而 $u(\subseteq)f_1(\subseteq)\alpha \in Kerf_2(\subseteq)\alpha, v(\subseteq)f_2(\subseteq) \in Kerf_1(\subseteq)\alpha$, 故 $Kerf(\subseteq) \subseteq Kerf_1(\subseteq) + Kerf_2(\subseteq)$. 显然 $Kerf_1(\subseteq) \bigoplus Kerf_2(\subseteq) \subseteq Kerf(\subseteq)$. 故 $Kerf(\subseteq) = Kerf_1(\subseteq) + Kerf_2(\subseteq)$. 设 $\alpha \in Kerf_1(\subseteq) \bigcap Kerf_2(\subseteq)$, 则 $\alpha = 1_V\alpha = u(\subseteq)f_1(\subseteq)\alpha + v(\subseteq)f_2(\subseteq)\alpha = 0$, 故 $Kerf(\subseteq) = Kerf_1(\subseteq) \bigoplus Kerf_2(\subseteq)$.

例 6 设 $(f(x), g(x)) = 1$, $\subseteq \in L(V), f(\subseteq)g(\subseteq) = 0$. 证明： 1)$V = Kerf(\subseteq) \bigoplus Kerg(\subseteq)$. 2) 存在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 使得 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为

$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

证 1) 由 $(f(x), g(x)) = 1$，存在 $u(x), v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x) = 1$，故 $u(\subseteq)f(\subseteq)+v(\subseteq)g(\subseteq) = 1_V$. 任取 $\alpha \in V$, 则 $\alpha = 1_V\alpha = u(\subseteq)f(\subseteq)\alpha+v(\subseteq)g(\subseteq)\alpha$, 而由 $f(\subseteq)g(\subseteq) = 0$ 知， $u(\subseteq)f(\subseteq)\alpha \in Kerg(\subseteq)$, $v(\subseteq)g(\subseteq)\alpha \in Kerf(\subseteq)$. 故 $V = Kerf(\subseteq) + Kerg(\subseteq)$. 设 $\alpha \in Kerf(\subseteq)\bigcap Kerg(\subseteq)$, 则 $\alpha = 1_V\alpha = u(\subseteq)f(\subseteq)\alpha + v(\subseteq)g(\subseteq)\alpha = 0$, 故 $V = Kerf(\subseteq)\bigoplus Kerg(\subseteq)$.

2) 取 $Kerf(\subseteq)$ 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s$，由 1)， $Kerg(\subseteq)$ 为 $n-s$ 维的，设基为 $\varepsilon_{s+1}, \cdots, \varepsilon_n$，则 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的基．由 $\subseteq$ 与 $f(\subseteq), g(\subseteq)$ 可交换， $Kerf(\subseteq), Kerg(\subseteq)$ 为 $\subseteq$ 的不变子空间，故 $\subseteq$ 在上述基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

作为应用，我们有（当然，我们可直接证明）

1) $\subseteq \in L(V), \subseteq^2 = 1_V$， $V_1 = \{\alpha \in V | \subseteq \alpha = \alpha\}$, $V_2 = \{\alpha \in V | \subseteq \alpha = -\alpha\}$. 则 $V = V_1 \bigoplus V_2$.

2) $\subseteq \in L(V), \subseteq^2 = \subseteq$， $V_1 = \{\alpha \in V | \subseteq \alpha = 0\}$, $V_2 = \{\alpha \in V | \subseteq \alpha = \alpha\}$. 则 $V = V_1 \bigoplus V_2$.

例 7 设 $\subseteq, \tau$ 为线性空间 V 的线性变换． $\subseteq^2 = \subseteq, \tau^2 = \tau, \subseteq \tau = \tau \subseteq = 0$. 则 $(\subseteq +\tau)V = \subseteq V \bigoplus \tau V$.

证 首先证明 $\subseteq V$ 为 $(\subseteq +\tau)V$ 的子空间．任取 $\subseteq \alpha \in \subseteq V, \alpha \in V$. 则 $\subseteq \alpha = (\subseteq +\tau) \subseteq \alpha$, 故 $\subseteq V$ 为 $(\subseteq +\tau)V$ 的子空间．同理 τV 也为 $(\subseteq +\tau)V$ 的子空间．设 $\alpha \in V$, 有 $(\subseteq +\tau)\alpha = \subseteq \alpha + \tau\alpha$ 知， $(\subseteq +\tau)V \subseteq \subseteq V + \tau V$， 故 $(\subseteq +\tau)V = \subseteq V + \tau V$. 任取 $\alpha \in \subseteq V \bigcap \tau V$, 存在 α_1, α_2 使得 $\alpha = \subseteq \alpha_1 = \tau\alpha_2$, 故由 $\subseteq^2 = \subseteq$, $\subseteq \alpha = \subseteq^2 \alpha_1 = \subseteq \alpha_1 = \alpha$, 又 $\subseteq \alpha = \subseteq \tau\alpha_2 = 0$, 故 $\alpha = 0$, 即 $\subseteq V \bigcap \tau V = \{0\}$. 从而 $(\subseteq +\tau)V = \subseteq V \bigoplus \tau V$.

例 8 设 $\subseteq_1, \cdots, \subseteq_s$ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，$\subseteq_i^2 = \subseteq_i, i = 1, \cdots, s$, $\subseteq_i \subseteq_j = 0, i \neq j$. 证明： $V = Im \subseteq_1 \bigoplus \cdots \bigoplus Im \subseteq_s \bigoplus \bigcap_{i=1}^n Ker \subseteq_i$.

证 任取 $\alpha \in V$， $\alpha = \subseteq_1 \alpha + \cdots + \subseteq_s \alpha + (\alpha - \subseteq_1 \alpha - \cdots - \subseteq_s \alpha)$. 而 $\subseteq_i \alpha \in Im \subseteq_i, i = 1, \cdots, s$. 又 $\subseteq_i (\alpha - \subseteq_1 \alpha - \cdots - \subseteq_s \alpha) = \subseteq_i \alpha - \subseteq_i^2 \alpha = 0$, $i = 1, \cdots, s$, 即 $\alpha - \subseteq_1 \alpha - \cdots - \subseteq_s \alpha \in \bigcap_{i=1}^n Ker \subseteq_i$, 故 $V = Im \subseteq_1 + \cdots + Im \subseteq_s + \bigcap_{i=1}^n Ker \subseteq_i$. 设 $0 = \subseteq_1 \alpha_1 + \cdots + \subseteq_s \alpha_s + \beta$, 其中 $\subseteq_i \alpha_i \in Im \subseteq_i$ $, i = 1, \cdots, s, \beta \in \bigcap_{i=1}^n Ker \subseteq_i$, 故 $0 = \subseteq_i 0 = \subseteq_i \alpha_i, i = 1, \cdots, s$, 即 $\subseteq_i \alpha_i = 0$, $i = 1, \cdots, s$, 从而 $\beta = 0$, 即 0 的分解唯一，故 $V = Im \subseteq_1 \bigoplus \cdots \bigoplus Im \subseteq_s \bigoplus \bigcap_{i=1}^n Ker \subseteq_i$.

例 9 设 $\subseteq$ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换， $\subseteq^2 = \subseteq, \subseteq = \subseteq_1 + \cdots + \subseteq_s$, 其中 $\subseteq_i$ 为 V 的线性变换， $i = 1, \cdots, s$. $dim \subseteq = \sum_{i=1}^s dim \subseteq_i$. 证明： $\subseteq_i^2 = \subseteq_i$, $i = 1, \cdots, s$, $\subseteq_i \subseteq_j = 0 (i \neq j)$

证 首先证明 $Im \subseteq = Im \subseteq_1 \bigoplus \cdots \bigoplus Im \subseteq_s$. 显然 $Im \subseteq \subseteq Im \subseteq_1 + \cdots + Im \subseteq_s$，但 $dimIm \subseteq \leq dim(Im \subseteq_1 + \cdots + Im \subseteq_s) \leq \sum_{i=1}^{s}(dim \subseteq_i) = Im \subseteq$，故 $Im \subseteq = \sum_{i=1}^{s} Im \subseteq_i$，再由题设，$Im \subseteq = Im \subseteq_1 \bigoplus \cdots \bigoplus Im \subseteq_s$. 其次，对任意的 $\alpha \in V, \subseteq_i \alpha \in Im \subseteq_i$
$inIm \subseteq$, 故存在 $\beta \in V, \subseteq_i \alpha = \subseteq \beta$. 由 $\subseteq^2 = \subseteq$ 及 $\subseteq = \subseteq_1 + \cdots + \subseteq_s$，$\subseteq_i \alpha = \subseteq \beta = \subseteq\subseteq \beta = (\subseteq_1 + \cdots + \subseteq_s) \subseteq_i \alpha = \subseteq_1\subseteq_i \alpha + \cdots + \subseteq_s\subseteq_i \alpha$, 即 $\subseteq_1\subseteq_i \alpha + \cdots + \subseteq_{i-1}\subseteq_i \alpha + (\subseteq_i^2 - \subseteq_i)\alpha + \subseteq_{i+1}\subseteq_i \alpha + \cdots + \subseteq_s\subseteq_i \alpha = 0$，由 $\subseteq_j\subseteq_i \alpha \in Im \subseteq_j$，$(\subseteq_i^2 - \subseteq_i)\alpha \in Im \subseteq_i$ 得 $\subseteq_1\subseteq_i \alpha = 0, \cdots, \subseteq_{i-1}\subseteq_i \alpha = 0, \subseteq_{i+1}\subseteq_i \alpha = 0, (\subseteq_i^2 - \subseteq_i)\alpha = 0$, 即 $\subseteq_1\subseteq_i = 0, \cdots, \subseteq_{i-1}\subseteq_i = 0, \subseteq_{i+1}\subseteq_i = 0, \subseteq_i^2 - \subseteq_i = 0$，故命题成立.

例 10 设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间. $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的基. V_1 为 $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ 生成的子空间，$V_2 = \{\sum_{i=1}^{n} k_i\varepsilon_i | \sum_{i=1}^{n} k_i = 0, k_i \in P\}$. 证明：

1) V_2 为 V 的子空间.

2) $V = V_1 \bigoplus V_2$.

3) V 的线性变换 $\subseteq$ 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为置换矩阵 A，即 A 的各行、各列有且只有一个数为 1，其余的为 0. 则 V_1，V_2 均为 $\subseteq$ 的不变子空间.

证 1) 显然 $0 \in V_2$，故 V_2 非空. 设 $\sum_{i=1}^{n} k_i\varepsilon_i, \sum_{i=1}^{n} l_i\varepsilon_i \in V_2$，则 $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0, \sum_{i=1}^{n} k_i = 0$. 故 $\sum_{i=1}^{n}(k_i + l_i) = 0$, 从而 $\sum_{i=1}^{n} k_i\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n} l_i\varepsilon_i \in V_2$，对 $k \in P$, 有 $k\sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} kk_i = 0$, 故 $\sum_{i=1}^{n} kk_i\varepsilon_i \in V_2$，故 V_2 为 V 的子空间.

2) 设 $\alpha \in V_1 \bigcap V_2$, 则 $\alpha = k\varepsilon_1 + \cdots + k\varepsilon_n$, 由 $\alpha \in V_2$ 知，$nk = 0$，即 $k = 0$, 故 $\alpha = 0$, 从而 $V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$. 显然 $dimV_1 = 1$, 从而 $dimV_2 \leq n - 1$. 又线性无关组 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_1 - \varepsilon_n \in V_2$，故 $dimV_2 \geq n - 1$, 这样 $dimV_2 = n - 1$. 从而 $V = V_1 \bigoplus V_2$.

3) 由 A 的特性，线性变换 $\subseteq$ 把基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 变为基 $\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_n}$，$i_1, \cdots, i_n$ 为 $1, \cdots, n$ 的一个排列. 令 $\alpha = k(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) \in V_1$, 则 $\subseteq \alpha = \subseteq (k(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)) = k \subseteq (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) = k(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) \in V_1$，故 V_1 为 $\subseteq$ 的不变子空间.

设 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\varepsilon_i \in V_2$，则 $\subseteq \alpha = k_1\varepsilon_{i_1} + \cdots + k_n\varepsilon_{i_n}$ 的系数仍满足 $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$，故 $\subseteq \alpha \in V_2$，即 V_2 为 $\subseteq$ 的不变子空间.

例 11 设 $\subseteq$ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，$\subseteq V = \subseteq^{-1}(0)$. 证明：

1 ）n 为偶数.

2 ）存在 V 的基使 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & E_{\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

证 1 ）由 $dim \subseteq V + dim \subseteq^{-1}(0) = n$ 及 $\subseteq V = \subseteq^{-1}(0)$ 知，$2dim \subseteq V = n$, 故 n 为偶数.

2 ）设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{\frac{n}{2}}$ 为 $\subseteq^{-1}(0)$ 的基，从而也为 $\subseteq V$ 的基，扩充为 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 则 $\subseteq V=L(\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\subseteq\varepsilon_n)$. 则 $\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\subseteq\varepsilon_n$ 也为 $\subseteq V$ 的基. 下证 $\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\subseteq\varepsilon_n,\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的基. 令 $k_1\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1}+\cdots+k_{\frac{n}{2}}\subseteq\varepsilon_n+l_1\varepsilon_{\frac{n}{2}+1}+\cdots+l_{\frac{n}{2}}\varepsilon_n=0$, $\subseteq$ 作用两端得， $l_1\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1}+\cdots+l_{\frac{n}{2}}\subseteq\varepsilon_n=0$, 由 $\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\subseteq\varepsilon_n$ 线性无关知， $l_1=\cdots=l_{\frac{n}{2}}=0$, 进而 $k_1=\cdots=k_{\frac{n}{2}}=0$, 故 $\subseteq\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\subseteq\varepsilon_n,\varepsilon_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\varepsilon_n$ 为的基, 显然 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & E_{\frac{n}{2}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

例 12 n 维线性空间 V 的线性变换 $\subseteq$ 的特征多项式无重根. 求 $\subseteq$-子空间的个数.

解 由题设， $\subseteq$ 有 n 个两两不同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ ，设相应的特征向量为 $e_1,\cdots,e_n$ ，即 $\subseteq e_i=\lambda_i e_i$, $i=1,\cdots,n$. 在 V 的基 $e_1,\cdots,e_n$ 中任取 i 个向量生成的子空间均为 $\subseteq$- 子空间， $i=0,\cdots,n$. 故 V 至少有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个 $\subseteq$- 子空间. 设 W 为 $\subseteq$- 子空间， $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 为 W 的基，扩充为 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ ，则 $\subseteq$ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$, 则 A_1 的特征值均为 $\subseteq$ 的特征值，设 A_1 的特征值为 $\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_r}$, 这里 $i_1,\cdots,i_r$ 为 $1,\cdots,n$ 中的 r 个数. $\subseteq|_W$ 有相应的特征向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ ，即 $\subseteq\alpha_j=\subseteq|_W\alpha_j=\lambda_{i_j}\alpha_j$, 故 $\alpha_j=k_je_{i_j}$, 其中 $k_j\neq 0, j=1,\cdots,r$. 故 $e_{i_1},\cdots,e_{i_r}\in W$, 即 $W=L(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})$, 从而 W 共有 2^n 个 $\subseteq$- 子空间.

例 13 设 $\subseteq$ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换， $\subseteq^2=\subseteq$. 证明：

1) $\subseteq^{-1}(0)=\{\alpha-\subseteq\alpha|\alpha\in V\}$.

2) $\subseteq^{-1}(0)\bigoplus\subseteq V=V$.

3) 若 $\tau\in L(V)$, 则 $\subseteq^{-1}(0),\subseteq V$ 为 τ- 子空间 $\Longleftrightarrow\subseteq\tau=\tau\subseteq$.

证 1) 由 $\subseteq(\alpha-\subseteq\alpha)=\subseteq\alpha-\subseteq^2\alpha=0$ 知， $\{\alpha-\subseteq\alpha|\alpha\in V\}\subseteq\subseteq^{-1}(0)$. 反之，若 $\beta\in\subseteq^{-1}(0)$, 则 $\subseteq\beta=0$, 故 $\beta=\beta-\subseteq\beta\in\{\alpha-\subseteq\alpha|\alpha\in V\}$, 总之，$\subseteq^{-1}(0)=\{\alpha-\subseteq\alpha|\alpha\in V\}$.

2) 设 $\alpha\in\subseteq^{-1}(0)\bigcap\subseteq V$, 则存在 $\beta\in V$, 使得 $\alpha=\subseteq\beta$, 故 $0=\subseteq\alpha=\subseteq^2\beta=\subseteq\beta=\alpha$, 即 $\subseteq^{-1}(0)\bigcap\subseteq V=\{0\}$, 又 $dim\subseteq^{-1}(0)+dim\subseteq V=n$, 故 $V=\subseteq^{-1}(0)\bigoplus\subseteq V$.

3) ρ 由 $V=\subseteq^{-1}(0)\bigoplus\subseteq V$, 对 $\alpha\in V$, 有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1\in\subseteq^{-1}(0),\alpha_2\in\subseteq V$, 从而存在 $\beta\in V$, 使得 $\alpha_2=\subseteq\beta$. 由 $\tau\alpha_1\in\subseteq^{-1}(0)$, $\subseteq\tau\alpha=\subseteq\tau(\alpha_1+\alpha_2)=\subseteq(\tau\alpha_1+\tau\alpha_2)=\subseteq(\tau\alpha_1)+\subseteq(\tau\alpha_2)=\subseteq(\tau\alpha_2)$, 由 $\tau\alpha_2\in\subseteq V$, 存在 $\gamma\in V$, 使得 $\tau\alpha_2=\subseteq\gamma$, 故 $\subseteq\tau\alpha=\subseteq\subseteq\gamma=\subseteq\gamma=\tau\alpha_2$, 而 $\tau\subseteq\alpha=\tau\subseteq\alpha_2=\tau\subseteq\subseteq\beta=\tau\subseteq\beta=\tau\alpha_2$, 故 $\subseteq\tau\alpha=\tau\subseteq\alpha$, 即 $\subseteq\tau=\tau\subseteq$.

$\longrightarrow$ 设 $\alpha \in \subseteq^{-1}(0)$, 则 $\subseteq \tau\alpha = \tau \subseteq \alpha = 0$, 即 $\tau\alpha \in \subseteq^{-1}(0)$, 故 $\subseteq^{-1}(0)$ 为 τ-子空间. 若 $\alpha \in \subseteq V$, 则 $\alpha = \subseteq \beta$, 这里 $\beta \in V$. 故 $\tau\alpha = \tau \subseteq \beta = \subseteq \tau\beta \in \subseteq V$，故 $\subseteq V$ 为 $\subseteq$- 子空间.

例 14 设 $\subseteq$ 为有限维线性空间 V 的线性变换. $V_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Ker \subseteq^i$, $V_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \subseteq^i (V)$. 则 V_0, V_1 为 $\subseteq$- 子空间且 $V = V_0 \bigoplus V_1$.

证 显然 $Ker \subseteq \subseteq Ker \subseteq^2 \subseteq \cdots$，故存在 j 使得 $Ker \subseteq^j = Ker \subseteq^{j+1} = \cdots$, 从而 $V_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Ker \subseteq^i = Ker \subseteq^j = Ker \subseteq^{j+1} = \cdots$ 为 V 的子空间，又 $\subseteq$ 与 $\subseteq^j$ 可交换，故 V_0 为 $\subseteq$- 子空间. 由 $V \supseteq \subseteq (V) \subseteq \subseteq^2 (V) \supseteq \cdots$，存在 l 使得 $\subseteq^l V = \subseteq^{l+1} V = \cdots$, 故 $V_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \subseteq^i (V) = \subseteq^l V = \subseteq^{l+1} V = \cdots$ 为 V 的子空间. 又 $\subseteq$ 与 $\subseteq^l$ 可交换，故 V_1 为 $\subseteq$- 子空间. 设 j, l 中较大者为 j，则 V_0， V_1 分别为 $\subseteq^j$ 的核与值域. 设 $\alpha \in V_0 \bigcap V_1$, 则存在 $\beta \in V$ 使得 $\alpha = \subseteq^j \beta$, 故 $0 = \subseteq^j \alpha = \subseteq^{2j} \beta$, 从而 $\beta \in Ker \subseteq^{2j} = Ker \subseteq^j$，故 $\alpha = \subseteq^j \beta = 0$, 又 $dim \subseteq^j V + dimKer \subseteq^j = dimV$, 故 $V = V_0 \bigoplus V_1$.

例 15 设 $\subseteq, \tau$ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，$\subseteq^2 = \subseteq, \tau^2 = \tau$. 证明：

1 ） $\subseteq, \tau$ 有相同的值域 $\Longleftrightarrow \subseteq \tau = \tau, \tau \subseteq = \subseteq$.

2 ） $\subseteq, \tau$ 有相同的核 $\Longleftrightarrow \subseteq \tau = \subseteq, \tau \subseteq = \tau$.

证 1 ） ρ 题设即为 $\subseteq V = \tau V$. 任取 $\alpha \in V$, $\tau\alpha \in \tau V = \subseteq V$, 故存在 $\beta \in V$, 使得 $\tau\alpha = \subseteq \beta$, 从而 $\subseteq \tau\alpha = \subseteq \subseteq \beta = \subseteq \beta = \tau\alpha$, 故 $\subseteq \tau = \tau$, 同理 $\tau \subseteq = \subseteq$.

$\longrightarrow$ 由 $\subseteq \tau = \tau$, $\tau V = \subseteq \tau V \subseteq \subseteq V$, 同理 $\subseteq V \subseteq \tau V$, 故 $\subseteq V = \tau V$.

2) ρ 题设为 $Ker \subseteq = Ker\tau$. 任取 $\alpha \in V$, 由 $\subseteq^2 = \subseteq$, $\subseteq (\subseteq \alpha - \alpha) = 0$, 故 $\subseteq \alpha - \alpha \in Ker \subseteq$, 从而 $\tau(\subseteq \alpha - \alpha) = 0$, 即 $\tau \subseteq \alpha = \tau\alpha$, 故 $\tau \subseteq = \tau$, 同理 $\subseteq \tau = \subseteq$.

$\longrightarrow$ 由 $\subseteq \tau = \subseteq$， $Ker\tau \subseteq Ker \subseteq$, 类似地， $Ker \subseteq \subseteq Ker\tau$, 故 $Ker \subseteq = Ker\tau$.

例 16 给定 R 上二维线性空间 V 的线性变换 σ， σ 在一组基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. 求 σ 的不变子空间.

解 0 维不变子空间为 0，二维不变子空间为 V. 一维不变子空间为特征子空间，实际上是求特征值与特征向量. $\subseteq \alpha_1, \alpha_2$ A $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^2 + a - 1$.

当 $a > 1$ 时， A 无特征值，从而 $\subseteq$ 的不变子空间只有平凡子空间 0 和 V.

当 $a = 1$ 时， A 只有特征值 0, 从而 $\subseteq$ 有不变子空间 0, $V_0 = L(\alpha_1)$ 和 V.

当 $a < 1$ 时， A 有特征值 $\pm\sqrt{1-a}$, 从而 $\subseteq$ 有不变子空间 0, $V_{\sqrt{1-a}} = L(\alpha_1 + \sqrt{1-a}\alpha_2)$, $V_{\sqrt{1-a}} = L(\alpha_1 - \sqrt{1-a}\alpha_2)$ 和 V.

第 8 章　若当标准形

基本知识

结果 1 λ- 矩阵的秩，可逆的 λ- 矩阵的定义与通常的矩阵的定义一样，注意 λ- 矩阵的每个元素都是关于 λ 的多项式，从而在讨论 λ-矩阵时，要注意多项式的性质. 数字矩阵 $A \in P^{n\times n}$ 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的秩一定为 n.

结果 2 $n \times n$ λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件为 $|A(\lambda)| \neq 0$, 且 $A(\lambda)^{-1} = \frac{1}{|A(\lambda)|}A^*(\lambda)$.

结果 3 λ- 矩阵的初等变换

1) 矩阵的两行（列）互换位置.

2) 矩阵的某一行（列）乘一非零常数.

3) 矩阵的某一行（列）乘一 $\varphi(\lambda)$ 加到另一行（列），$\varphi(\lambda)$ 为关于 λ 的多项式.

结果 4 初等 λ- 矩阵: 单位矩阵 E 经一次初等变换所得矩阵称为初等 λ- 矩阵，共三个，分别是 $P(i,j)$, $P(i(c))$, $P(i+j(\varphi(\lambda)))$, 初等矩阵均可逆且 $P^{-1}(i,j) = P(i,j)$, $P^{-1}(i(c)) = P(i(c^{-1}))$, $P^{-1}(i,j(\varphi(\lambda))) = P(i,j(-\varphi(\lambda)))$.

结果 5 一 λ- 矩阵左（右）乘一初等矩阵等价于对该 λ- 矩阵进行相应的初等变换.

结果 6 λ- 矩阵的等价：若 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 经一系列的初等变换可 λ-矩阵 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，等价具有自反性、对称性、传递性.

结果 7 任意一个非零的 $s \times n$ 的 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于下面形式的矩阵,

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r \geq 1, d_i(\lambda)(i = 1, \cdots, r)$ 是首项系数为 1 的多项式, 且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), i = 1, \cdots, r-1$. 该形式称为 $A(\lambda)$ 的标准形. 数字矩阵 $A \in P^{n\times n}$ 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

结果 8 设 $A(\lambda)$ 的秩为 r，则它的所有 k 级子式的最大公因式称为它的 k 级行列式因子， $k=1,\cdots,r$. 在 $A(\lambda)$ 的标准形中，它的 k 级行列式因子 $D_k(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$, 不变因子 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 与行列式因子 $D_1(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$ 相互唯一确定.

结果 9 初等变换不改变 λ- 矩阵的行列式因子及不变因子，两 λ- 矩阵等价的充要条件为它们有相同的行列式因子或不变因子，从而 λ- 矩阵的标准形是唯一的.

结果 10 λ- 矩阵可逆的充要条件为它与 E 等价，或它能表成一些初等矩阵的乘积.

结果 11 求行列式因子一般从最大的开始，这样较小的就有了一定范围，特别是求方阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的行列式因子时，首先求 $D_n(\lambda)=|\lambda E-A|$, 其次看是否有一 $n-1$ 级子式为非零常数，这样 $D_{n-1}=\cdots=D_1=1$. 若不可，看是否有两个 $n-1$ 级子式互素 (办法是其中一个的根不为另外一个的根), 这样 $D_{n-1}=\cdots=D_1=1$.

结果 12 $A\in P^{n\times n}$ 与 $B\in P^{n\times n}$ 相似的充要条件为特征矩阵 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价，或 A,B 有相同的行列式因子 (不变因子)，或初等因子组 (此时要求特征多项式 $|\lambda E-A|$ 与 $|\lambda E-B|$ 在 P 中均能分解成互素的一次因式方幂的乘积).

结果 13

初等因子的求法较简单：将特征矩阵 $\lambda E-A$ 化成对角形，再将对角线上次数大于 0 的元素分解成一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式方幂就是 A 的初等因子组，则各个一次因式方幂的最高次的乘积就是 A 的不变因子 $d_n(\lambda)$，则各个一次因式方幂的次高次的乘积就是 A 的不变因子 $d_{n-1}(\lambda)$， 不足的补 1，即得的所有不变因子，从而可得行列式因子.

结果 14 若当块和初等因子相互唯一确定.

结果 15 若数域 P 上 n 阶矩阵 A 在 P 上有 n 个特征值，则在 P 上 A 与一个若当形矩阵相似，这个若当形矩阵除去其中若当块的次序外时被矩阵 A 唯一确定的.

结果 16 若数域 P 上 n 阶矩阵 A 在 P 上有 n 个特征值，则在 P 上方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是， A 的初等因子在 P 上全为一次的.

结果 17 矩阵 A 的最小多项式就是 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$，从而矩阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是， A 的不变因子在 P 上无重根.

结果 18 λ 为矩阵 A 的特征值， A 在 P 上的若当标准形为 J，则

特征值为 λ 的若当块数为 $J-\lambda E$ 的零度，也为 V_λ 的维数.

例题

例 1 A 为数域 P 上 $n\times n$ 方阵. 证明： A 与 A' 相似.

证 显然 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-A'$ 有相同的各级行列式因子 (不变因子), 故二者相似.

例 2 在 $G[x]_n$ 中，证明： 1) $\mathcal{D}f(x)=f'(x)$ 为线性变换.

2) 求 $\mathcal{D}$ 在基 $1,1+x,\cdots,1+x+\cdots+x^{n-1}$ 下的矩阵 A.

3) 求 A 的若当标准形.

证 1) 按定义易证.

2) 易知 $\mathcal{D}$ 在基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

而 $1,1+x,\cdots,1+x+\cdots+x^{n-1}$ 到 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 的过度矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

易求 $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $A=P^{-1}BP$.

3) 由 $|\lambda E-B|=\lambda^n$, $\lambda E-A$ 有一 $n-1$ 级子式为非零常数，故 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 从而 A 的初等因子组为 λ^n, 故 A 的若当标准形为 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 3 证明： n 阶方阵 A 为一个数量矩阵的充要条件为 A 的 $n-1$ 级行列式因子为 $n-1$ 次的,

证 ρ 显然.

$\longrightarrow$ 由 n 级行列式因子 $D_n(\lambda)$ 为 n 次的，故 A 的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$ 为一次因式，即 A 的最小多项式为一次因式，故 A 可对角化且只有一个特征值（不记重数），即 A 相似于一数量矩阵，从而 A 为数量矩阵.

例 4 求 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$ 的若当标准形和全体特征子空间.

解 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&0&0\\1&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda+1&-1\\0&0&1&\lambda\end{pmatrix}$, 故 $\lambda E-A$ 有一 3 级子式为 -1, 从而 A 的 3 级行列式因子，即 $D_3(\lambda)=1$, 而

$$D_4(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda^2+\lambda+1)^2=(\lambda-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^2(\lambda-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^2,$$

故 A 的若当标准形为 $\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}&1&0&0\\0&\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}&0&0\\0&0&\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}&1\\0&0&0&\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}$.

将 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 求得 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 的特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,

将 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 求得 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 的特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,

故 A 的特征子空间为 $V_{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}=L(\alpha_1)$, $V_{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}=L(\alpha_2)$.

例 5 设 A 为 $n\times n$ 方阵， E 为 $n\times n$ 单位矩阵， $A^k=0$. 证明：

a) $E+A+\cdots+\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ 可逆.

b) $E+A$ 于 $E+A+\cdots+\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ 相似.

证 a) 由 $A^k=0$ 知， A 的特征值全为 0, 故 $E+A+\cdots+\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ 的特征值全为 1, 从而 $E+A+\cdots+\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ 可逆.

b) 由 $A^k=0$ 知, A 的特征值全为零, 存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_s\end{pmatrix}=J$, 其中 J_i 为对角线元素为 0 的 l_i 级若当块, $i=1,\cdots,s$. 欲证 $E+A$ 于 $E+A+\cdots+\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ 相似, 即证 $E+P^{-1}AP$ 与 $E+P^{-1}AP+\cdots+\frac{(P^{-1}AP)^{k-1}}{(k-1)!}$ 相似, 即 $E+J$ 与 $E+J+\cdots+\frac{J^{k-1}}{(k-1)!}$ 相似, 证 E_i+J_i 与 $E_i+J_i+\cdots+\frac{J_i^{k-1}}{(k-1)!}$ 相似即可, 这里 E_i 为与 J_i 同阶的单位矩阵, $i=1,\cdots,s$. 事实上, $\lambda E_i-(E_i+J_i)$ 有一 l_i-1 级子式为 $(-1)^{l_i-1}$, 故 $\lambda E_i-(E_i+J_i)$ 的初等因子组为 $(\lambda-1)^{l_i}$, 而 $\lambda E_i-(E_i+J_i+\cdots+\frac{{J_i}^{k-1}}{(k-1)!})$ 有两个 l_i-1 级子式互素, 故 $E_i+J_i+\cdots+\frac{J_i}{(k-1)!}$ 的初等因子组也为 $(\lambda-1)^{l_i}$, 从而 E_i+J_i 与 $E_i+J_i+\cdots+\frac{J_i}{(k-1)!}$ 相似, $i=1,\cdots,s$, 故命题成立.

例 6 设 V 为复数域上的 n 维线性空间, $\subseteq$ 为 V 的线性变换. i 为小于 n 的证整数. 则有 i 维 $\subseteq$- 子空间.

证 首先我们证明 $\subseteq$ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为若当块 $J=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0&0\\1&\lambda&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$ 时命题成立. 由 $\subseteq\varepsilon_j=\lambda\varepsilon_j+\varepsilon_{j+1}, j=1,\cdots,n-1, \subseteq\varepsilon_n=\lambda\varepsilon_n$, 知 $L(\varepsilon_{n-i+1},\cdots,\varepsilon_n)$ 为 i 维 $\subseteq$- 子空间.

一般地, 设 $\subseteq$ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的若当标准形为 $J=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_s\end{pmatrix}$, 其中 J_i 为对角线元素为 λ_i 的 l_i 级若当块, $i=1,\cdots,s$, $l_1+\cdots+l_s=n$. 若 $i\le l_1$, 由上证有 i 维 $\subseteq$- 子空间 $L(\varepsilon_{l_1-i+1},\cdots,\varepsilon_{l_1})$. 若 $l_1<i$, 则存在 j 使得 $l_1+\cdots+l_j<i\le l_1+\cdots+l_{j+1}$, 则有 i 维 $\subseteq$- 子空间 $L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{l_1+\cdots+l_j},\varepsilon_{2l_1+\cdots+2l_j+l_{j+1}-i+1},\cdots,\varepsilon_{l_1+\cdots+l_{j+1}})$.

例 7 问下两矩阵是否相似, 说明理由. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\-1&1&1&-1\\-1&0&0&0\\-1&0&1&0\end{pmatrix}$.

证 设上两矩阵分别为 A 与 B，则 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0&0\\0&\lambda+1&0&0\\0&0&\lambda&-1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow$ $\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0&0\\0&\lambda+1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$, 即 A 的不变因子为 $1,1,1,(\lambda+1)(\lambda-1)\lambda^2$.

而 $\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda+1&0&0&0\\1&\lambda-1&-1&1\\1&0&\lambda&0\\1&0&-1&\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda-1&0\\0&0&0&\lambda^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$，故 B 的不变因子为 $1,1,1,(\lambda+1)(\lambda-1)\lambda^2$, 从而 A 与 B 相似.

例 8 求矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的若当标准形.

解 设上矩阵为 A，则 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\1&\lambda-2&0\\1&1&\lambda+1\end{pmatrix}$, 它有一二阶子式为 $\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$, 一二阶子式为 $\begin{vmatrix}\lambda-2&0\\1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)$, 但 $((\lambda-1)^2,(\lambda-2)(\lambda+1))=1$, 故 A 的二阶行列式因子为 $D_2(\lambda)=1$, 三阶行列式因子为 $D_3(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$, 故 A 的初等因子组为 $\lambda+1,(\lambda-1)^2$, 从而 A 的若当标准形为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

例 9 A 可对角化的充要条件为对 A 的任意特征值 λ， $r(\lambda E-A)=r(\lambda E-A)^2$.

证 ρ 因 A 可对角化, 存在可逆阵 T 使得 $A=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1E_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_sE_s\end{pmatrix}T$, 这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 两两不同. 故 $\lambda E-A=T^{-1}\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1)E_1&&\\&\ddots&\\&&(\lambda-\lambda_s)E_s\end{pmatrix}T$,

$$(\lambda E-A)^2=T^{-1}\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1)^2E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_s)^2E_s\end{pmatrix}T,$$ 易知 $r(\lambda E-A)=r(\lambda E-A)^2$.

$\longrightarrow$ 设 $A=T^{-1}\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$ 为若当标准形，其中 $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$

为 n_i 级若当块， $i=1,\cdots,s$. 若存在 $n_i>1$, 不妨设 $n_1>1$，取 $\lambda=\lambda_1$，则 $r(\lambda_1E-J_1)>r(\lambda_1E-J_1)^2$, 而 $r(\lambda_1E-J_i)\geq r(\lambda_1E-J_i)^2(i\neq 1)$, 故 $r(\lambda_1E-A)>r(\lambda_1E-A)^2$，矛盾. 从而 $n_i=1, i=1,\cdots,s$. 即 A 可对角化.

例 10 V 是复数域上 n 维线性空间. $\sigma:V\longrightarrow V$ 是线性变换. 则 V 中存在唯一基（次序除外）使得 σ 在该基下的矩阵为若当标准形，对否？

解 不对. 例如： $\sigma(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 但 $\sigma(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

例 11 V 是数域 P 上 3 维线性空间. 线性变换 $\sigma:V\longrightarrow V$ 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}4&6&-15\\1&3&-5\\1&2&-4\end{pmatrix}$, 问可否在某基下的矩阵为 $\sigma\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$

解 比较 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 是否等价.

例 12 A 为 n 阶复矩阵，若存在 m 使得 $A^m=0$，称 A 为幂零阵.

1) A 为幂零阵当且仅当 A 的特征值全为 0.

2) A 不可逆, 也不幂零. 则存在 n 阶可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$, 其中 B 为幂零阵， C 可逆.

解 1) 由哈密而顿 - 凯莱定理易知.

2) 由条件， A 的特征值有 0 ，也有非 0. 设可逆阵 P 满足

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_r & & & \\ & & & J_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_s \end{pmatrix}$$

其中 $J_1,\cdots,J_r$ 为对角线为 0 的若当块，$J_{r+1},\cdots,J_s$ 为对角线非 0 的若当块. 设 $J_1,\cdots,J_r$ 中阶数最大为 m. 令 $B=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} J_{r+1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$,

则 $B^m=0$, C 可逆.

例 13 设 A 为 2003 阶实方阵， $A^r=0$ ， r 为自然数. 求 A 的秩 $rank(A)$ 最大为多少？

解 A 在实数上可若当化，要使阶数最大，若当块块数尽量少，若当块对角线元素为 0. .

1) $r<2003$ ，设 $2003=qr+t, 0\le t\le r$, 此时最大阶数为 $q(r-1)+t-1$.

2) $r\ge 2003$ 时，最大阶数为 2002.

例 14 设 V 为 n 维复线性空间. M 是 V 上一些线性变换组成的非空集合. 已知 M 中的元素没有非平凡的公共不变子空间，又线性变换 σ 满足 $\sigma\tau=\tau\sigma, \forall\tau\in M$. 证明：必存在复数 λ 使得 $\sigma=\lambda I$.

证 σ 的特征子空间为 M 的公共不变子空间，故 σ 只有一个特征值 λ 且 $V_\lambda^\sigma=V$, 故 $\sigma=\lambda I$.

第 9 章　欧氏空间

基本知识

结果 1 设 V 是实数域 R 上的一线性空间，在 V 上定义了一个二元实函数，称为内积，记作 (α,β) ，它具有如下性质：

1 ） $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha);$

2 ） $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta);$

3 ） $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma);$

4 ） $(\alpha,\alpha)\geq 0,(\alpha,\alpha)=0\Longleftrightarrow\alpha=0.$

这里 α,β 是 V 中任意的向量， k 是任意的实数，这样的线性空间称为欧几里得空间，简称欧氏空间，常用 4) 的后半部分证明向量相等.

结果 2 V 为欧氏空间， $\alpha\in V$, 定义长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$, 显然 $|\alpha|\geq 0$, $|\alpha|=0\Longleftrightarrow\alpha=0$, $|k\alpha|=|k||\alpha|$, 长度为 1 的向量称为单位向量，若 $\alpha\neq 0$, $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 为单位向量，这一过程称为单位化. 关于长度，我们有 $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ ，当且仅当 α,β 线性相关时，等号成立.

结果 3 V 为欧氏空间， $\alpha,\beta\in V$, $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|$, 当且仅当 α,β 线性相关时, 等号成立. 这一不等式称为柯西－布涅柯夫斯基不等式（**注意证明**）, 若 α,β 不为零, 定义夹角 $<\alpha,\beta>=arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$, $0\leq<\alpha,\beta>\leq\pi$.

结果 4 若 $(\alpha,\beta)=0$, 称 α,β 正交或互相垂直，记作 $\alpha\perp\beta$. α,β 正交当且仅当它们的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, $\alpha\perp\beta\Longleftrightarrow|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$（勾股定理）. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 两两正交, 则 $|\alpha_1+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_m|^2$, 反之不成立.

结果 5 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为欧氏空间 V 的基，令 $a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，则 A 为实对称矩阵. 对任意 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$, $(\alpha,\beta)=X'AY$, 称 A 为基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵.

1 ）度量矩阵是正定的.

2 ）设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的另一组基且 $(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P$, 则 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的度量矩阵 $B=P'AP$ ，即不同基的度量矩阵是合同的.

3 ）若 D 与 A 合同，设 $D=T'AT$ ，则 D 是基 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)T$ 的度量矩阵，即合同的正定矩阵可看作同一内积空间的不同基的度量矩阵.

结果 6 设 V 为 n 维实线性空间，A 为一正定矩阵，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基，对任意的 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$, 定义 $(\alpha,\beta)=X'AY$, 则 V 关于上二元实函数为欧氏空间.

结果 7 1) 正交向量组、标准正交向量组、正交基、标准正交基. 正交向量组线性无关，从而在 n 维欧氏空间 V 中，一正交向量组至多含 n 个向量.

2) 一基为标准正交基的充要条件为它的度量矩阵为单位矩阵, 即

$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1,\ if i=j;\\0,\ if i\neq j\end{cases}$ 因所有的正定阵均合同于单位矩阵，故标准正交基是存在的，但不唯一（将标准正交基调整次序即可）. 在标准正交基下，两向量的内积表达形式是简单的.

结果 8 n 维欧氏空间中的任一正交组均可扩充为一正交基（**注意证明**）.

结果 9 对于 n 维欧氏空间任意一组线性无关的向量（特别为基时）$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$，都可以找到一标准正交组（标准正交基）$\eta_1,\cdots,\eta_m$ 使得 $L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\cdots,\eta_i), i=1,\cdots,m.$（**注意证明及施密特正交化过程**）.

结果 10 标准正交基到标准正交基的过度矩阵—正交矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{1i}a_{1j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}1,\ if i=j;\\0,\ if i\neq j\end{cases}$ 即 A 的各列为 R^n 的标准正交基，或 $a_{i1}a_{j1}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1,\ if i=j;\\0,\ if i\neq j\end{cases}$ 即 A 的各行为 R^n 的标准正交基，或 $A'A=E$, 或 $AA'=E$, 或 $A^{-1}=A'$. 反之，若两基之间的过度矩阵为正交矩阵 A 且有一基为标准正交基，则另一基也为标准正交基.

结果 11 欧氏空间的同构是在线性空间同构的基础上加上保持内积. n 维欧氏空间均与 R^n 同构，同构具有自反性、对称性、传递性. 两欧氏空间间的线性映射为同构映射充要条件是把标准正交基映成标准正交基（从而可定义同构映射）.

结果 12 设 $\subseteq$ 为 n 维欧氏空间 V 的线性变换. 则下列条件等价.

1) $\subseteq$ 为正交变换，即 $(\subseteq\alpha,\subseteq\beta)=(\alpha,\beta)$.

2) $\subseteq$ 保持向量的长度不变，即 $|\subseteq\alpha|=|\alpha|$.

3) $\subseteq$ 把标准正交基变成标准正交基，即若 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基，则 $\subseteq\varepsilon_1,\cdots,\subseteq\varepsilon_n$ 也为标准正交基（用来定义正交变换）.

4) $\subseteq$ 在标准正交基下的矩阵为正交阵（用来定义正交变换）.（注意证明）.

结果 13 1. 因正交矩阵是可逆的，故正交变换是可逆的.

2. 正交变换是欧氏空间到自身的同构映射，因而正交变换的乘积与正交变换的逆仍是正交变换. 进而，正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆仍是正交矩阵.

3.A 为正交矩阵，则 $|A|=1$（旋转或第一类的）或 $|A|=-1$（第二类的）.

结果 14 欧氏空间 V 的子空间 $V_1,\cdots,V_s$ 两两正交，即 $V_i\perp V_j(i\neq j)$,

则 $V_1+\cdots+V_s=V_1\bigoplus\cdots\bigoplus V_s$, 反之不然.

结果 15 欧氏空间的每个子空间都有唯一的正交补，但直和补很多（正交补是其中之一）.

结果 16 $V_1^{\perp}=\{\alpha|\alpha\perp V_1\}$, $V=V_1\bigoplus V_1^{\perp}$, 若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$, 称 α_1 为 α 在 V_1 的内射影.

结果 17 实对称矩阵 A 的特征值均为实数. （**注意证明**）

结果 18 对称变换的不变子空间的正交补仍是不变子空间.

结果 19 A 为实对称矩阵 ($\subseteq$ 为对称变换), 则 $A(\subseteq)$ 的不同特征值的特征向量正交.

结果 20 A 为实对称矩阵，则存在正交阵 T 使得 $T'AT$ 为对角形.

结果 21 A 为正定阵，B 为实对称. 则存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E$, $P'BP$ 为对角形.

例题

例 1 1) A 为正定阵，B 为实对称. 则存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E$, $P'BP$ 为对角形.

2) A,B 为实对称矩阵， A 与 B 相似. 则 A 正定 $\Longleftrightarrow B$ 正定.

3) A,B 为 n 阶正定阵. 证明： AB 正定 $\Longleftrightarrow AB=BA$.

证 1) 由 A 正定，存在可逆阵 C 使得 $C'AC=E$，而 $C'BC$ 为实对称，存在正交阵 T 使得 $T'C'BCT$ 为对角形，令 $P=CT$，则 P 可逆且 $P'AP=E$, $P'BP$ 为对角形.

2) 由 A,B 为实对称矩阵及 A,B 相似，存在正交阵 T_1,T_2 使得

$$T_1'AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=T_2'BT_2,$$

即 A 与 B 合同，故 A 正定 $\Longleftrightarrow B$ 正定.

3) ρ 由 AB 正定， $(AB)'=AB$, 即 $AB=BA$.

$\longrightarrow$ 由条件， AB 为实对称矩阵矩阵. 由 A 正定，存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E$，故 $P'(AB)P=P'APP^{-1}BP=P^{-1}BP$. $P^{-1}BP$ 与 B 相似，从而 $P^{-1}BP$ 的特征值全大于 0，又 $P'(AB)P$ 与 AB 合同，故 AB 正定.

例 2 1）设 A 为 n 阶半正定阵. 证明：对任意自然数 m, 存在唯一的 n 阶实对称半正定矩阵 B 使得 $A=B^m$.

2）A,C 均为 n 阶实对称矩阵矩阵且 A 正定. 证明：若 $AC+CA=0$，则 $C=0$.

证 1) 因 A 半正定，存在正交阵 T 使得 $A=T'\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}T$，

其中 $\lambda_i\geq 0, i=1,\cdots,n, \lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$. 令 $B=T'\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_s}E_s\end{pmatrix}T$, 则

B 为半正定矩阵且 $A=B^m$.

若还有半正定矩阵 C 使得 $A=C^m$, 则存在正交阵 Q 使得

$$Q'CQ=\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_s}E_s\end{pmatrix}.$$

则

$$Q'\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_s}E_s\end{pmatrix}^m Q=T'\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_s}E_s\end{pmatrix}^m T,$$

故 TQ' 与 $\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_s}E_s\end{pmatrix}$ 可交换. 故

$$TQ'=\begin{pmatrix}P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_s\end{pmatrix},$$

从而 TQ' 与 $\begin{pmatrix}\sqrt[m]{\lambda_1}E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_s}E_s\end{pmatrix}$ 可交换. 即 $B=C$.

2) 设 λ 为 C 的任一特征根， α 为 λ 的特征向量，即 $C\alpha=\lambda\alpha$, 故

$$0=\alpha'(AC+CA)\alpha=\alpha'AC\alpha+\alpha'CA\alpha=\lambda\alpha'A\alpha+\lambda\alpha'A\alpha=2\lambda\alpha'A\alpha,$$

由 A 正定， $\alpha'A\alpha>0$, 故 $\lambda=0$, 又 C 为实对称矩阵，故 $C=0$.

例 3 1) 设 A 为实对称矩阵. 则 $A=A^2\Longleftrightarrow$ 存在列满秩矩阵 $P_{n\times r}$ 使得 $A=P(P'P)^{-1}P'$.

2) A 为 n 阶实矩阵， $A^2=A$. 则 A 可表为实对称矩阵之积.

证 1) ρ 由 $A^2=A$ 及 A 为实对称矩阵，存在正交阵 T 使得 $A=T'\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}T$. 故 $A=T'\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}(E_r,0)=T'\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}E_r(E_r,0)T$, 令 $P=T'\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$, 则 $r(P)=r$ 且 $A=P(P'P)^{-1}P'$.

$\longrightarrow$ 计算得 $A^2=P(P'P)^{-1}P'P(P'P)^{-1}P'=P(P'P)^{-1}P'=A$.

2) 由 $A^2=A$ 知，存在可逆阵 P 使得

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}(P^{-1})'P'\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P,$$

而 $P^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}(P^{-1})'$ 与 $P'\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P$ 均为实对称矩阵.

例 4 1) 设 A 为一个 n 阶可逆实方阵. 证明：存在一个正交阵 U, 一个正定阵 S 使得 $A=US$ 且分解唯一.

2) 设 A,B 为 n 阶可逆实方阵， $A'A=B'B$. 则存在正交阵 T 使得 $A=TB$.

证 1) 考虑实对称矩阵 $A'A$, 由 A 可逆知， $A'A$ 正定，存在正交阵 T 使得 $T'A'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_i>0, i=1,\cdots,n$. 故

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}T'A'AT\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}=E.$$

令 $\widehat{U}=AT\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}$, 则 $\widehat{U}'\widehat{U}=E$, 即 $\widehat{U}$ 为正交阵，而 $U=\widehat{U}T'$ 也为正交阵，令 $S=T\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}T'$, 则 S 为正定阵且 $A=US$.

若还有 $A=U_1S_1$, 这里 U_1,S_1 分别为正交阵和正定阵. 则 $S^2=S'S=A'A=S_1'S_1=S_1^2$. 易知 $S=S_1$, 从而 $U=U_1$, 故分解唯一.

2) 由 1), 设 $A=US, B=U_1S_1$, 这里 U,U_1 为正交阵， S,S_1 为正定阵. 由 $A'A=B'B$ 知， $S^2=S_1^2$, 故 $S=S_1$. 从而 $A=UU_1'B$. 而 UU_1' 为正交阵.

例 5 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵， A 的特征值为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，$B$ 的特征值为 $\mu_1\le\mu_2\le\cdots\le\mu_n$. 证明： $A+B$ 的特征值 δ 满足 $\lambda_1+\mu_1\le\delta\le\lambda_n+\mu_n$.

证 由 A,B 为实对称矩阵，故存在正交阵 T_1,T_2 使得

$$T_1'AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

$$T_2'BT_2=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix},$$

从而

$$T_1'(A-\lambda_1E)T_1=\begin{pmatrix}0&&&\\&\lambda_2-\lambda_1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n-\lambda_1\end{pmatrix},$$

$$T_1'(B-\lambda_1E)T_1=\begin{pmatrix}0&&&\\&\mu_2-\mu_1&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n-\mu_1\end{pmatrix},$$

故 $A-\lambda_1E$ 半正定， $B-\mu_1E$ 半正定, 从而 $(A+B)-(\lambda_1+\mu_1)E=(A-\lambda_1E)+(B-\mu_1E)$ 半正定. 而 $A+B$ 为实对称矩阵, 存在正交阵 T 使得 $T'(A+B)T=\begin{pmatrix}\delta_1&&\\&\ddots&\\&&\delta_n\end{pmatrix}$, 故 $T'(A+B-(\lambda_1+\mu_1)E)T=\begin{pmatrix}\delta_1-\lambda_1-\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\delta_n-\lambda_1-\mu_1\end{pmatrix}$, 从而 $\delta_i-\lambda_1-\mu_1\ge0, i=1,\cdots,n$. 即 $\delta_i\ge\lambda_1+\mu_1$, $i=1,\cdots,n$. 同理 $\delta_i\le\lambda_n+\mu_n$.

例 6 已知正定三阶阵 A 的三个特征值为 6, 3, 3. 又已知 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 6 的特征向量.

1 ）求 3 的两个特征向量.

2 ）求 A.

证 1）由实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交及 6 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 知，3 的两个正交的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$.

2）单位化三个特征向量得 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. 令

$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 则 $A=T\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}T'$.

例 7 设 $f(X)=X'AX$ 为半正定二次型. 证明：$(X'AY)^2\leq(X'AX)(Y'AY)$. 特别地，若 $f(X)$ 正定，$(X'Y)^2\leq(X'AX)(X'A^{-1}X)$.

证 由 A 半正定，存在正交阵 T 使得 $A=T'\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i\geq 0, i=1,\cdots,n$. 令 $TX=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $TY=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}(X'AY)^2&=[X'T'diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)TY]^2\\&=[\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_nx_ny_n]^2\\&=[(\sqrt{\lambda_1}x_1)(\sqrt{\lambda_1}y_1)+\cdots+(\sqrt{\lambda_n}x_n)(\sqrt{\lambda_n}y_n)]^2\\&\leq(\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2)(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)=(X'AX)(Y'AY).\end{aligned}$$

若 A 正定，令 $\alpha=TX=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\beta=TY=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}(X'Y)^2&=(\alpha'\beta)^2=(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2\\&=(\lambda_1x_1\lambda_1^{-1}y_1+\cdots+\lambda_nx_n\lambda_n^{-1}y_n)^2\\&\leq(\lambda_1^2x_1^2+\cdots+\lambda_n^2x_n^2)(\lambda_1^{-2}y_1^2+\cdots+\lambda_n^{-2}y_n^2)=(X'AX)(Y'A^{-1}Y).\end{aligned}$$

例 8 设 A,B 为 n 阶正定阵.
1) 则 $|\lambda A-B|$ 的根全为正数.
2) $|\lambda A-B|$ 的根全为 1 $\Longleftrightarrow A=B$.

证 由 A,B 正定，存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E,P'BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,
由 B 正定， $\lambda_1>0,\cdots,\lambda_n>0$.

1) $|\lambda A-B|=0$ 的充要条件为 $|P'||\lambda A-B||P|=0$，即 $|\lambda E-P'BP|=0$, 故 $|\lambda A-B|$ 的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 即 $|\lambda A-B|=0$ 的根全为正数.

2) $\longrightarrow$ 显然.

ρ 由 1)，即 $P'BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=E=P'AP$, 故 $A=B$.

例 9 设 A 为 n 阶正定阵， B 为 n 阶非零半正定阵， $n>1$. 证明： $|A+B|>|A|+|B|$ (或证 $\geq 2|A|^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}$).

证 由 A 正定， B 半正定，存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E,P'BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_1\geq 0,\cdots,\lambda_n\geq 0$ 且存在 $\lambda_i>0$. 从而

$$\begin{aligned}|P'(A+B)P|&=|P'AP+P'BP|=(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n)\\&=1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_n>1+\lambda_1\cdots\lambda_n,\end{aligned}$$

而 $|P'|(|A|+|B|)|P|=1+\lambda_1\cdots\lambda_n$, 故 $|A+B|>|A|+|B|$.

例 10 设 A 正定， B 为实对称矩阵. 证明： $A+iB$ 可逆.

证 由 A 正定， B 为实对称矩阵，存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E,P'BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 则 $1+\lambda_j i\neq 0,j=1,\cdots,n$. 而 $|P'(A+iB)P|=(1+\lambda_1 i)\cdots(1+\lambda_n i)\neq 0$, 故 $A+iB$ 可逆.

例 11 设 A 正定， B 半正定，若 $|(1-\lambda)A+B|=0$ 的根全大于 1. 则 B 正定.

证 由 A 正定， B 半正定，存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E,P'BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i\geq 0,i=1,\cdots,n$. 又 $|(1-\lambda)A+B|=0\Longleftrightarrow|P'(1-\lambda)A+B)P|=0$, 而 $|P'(1-\lambda)A+B)P|=(1+\lambda_1-\lambda)\cdots(1+\lambda_n-\lambda)$. 由条件 $1+\lambda_i>1$, 即 $\lambda_i>0$, $i=1,\cdots,n$. 故 B 正定.

例 12 设 A,C 为 n 阶方阵， C 正定， A 的特征值全为负数，$AX+XA=-C$ 有唯一解 $X=B$. 则 B 正定.

证 由 $AB+BA=-C$ 知 $(AB+BA)'=(-C)'$，即 $AB'+B'A=-C$，由解的唯一性， $B=B'$. 设 λ 为 B 的任一特征值， α 为相应的特征向量，即 $B\alpha=\lambda\alpha$. 由 $\alpha'(AB+BA)\alpha=-\alpha'C\alpha$, 即 $2\lambda\alpha'A\alpha=-\alpha'C\alpha$, 而 A 负定， C 正定，故 $\alpha'A\alpha<0,\alpha'C\alpha>0$. 从而 $\lambda>0$，即 B 正定.

例 13 设 A 为实对称矩阵， λ 为 A 的最大特征值. 证明： $\lambda=max_{||u||=1}\{(Au,u)\}$.

证 由 A 为实对称矩阵，存在正交阵 T 使得 $A=T'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}T$.

故 $(Au,u)=u'Au=u'T'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Tu$, 令 $Tu=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, 故 $u'Au=\lambda_1a_1^2+\cdots+\lambda_na_n^2\le\lambda(a_1^2+\cdots+a_n^2)=\lambda$. 不妨设 $\lambda=\lambda_1$, 令 $Tu=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, 则 $u'u=1$, 且 $(Au,u)=\lambda$. 故 $\lambda=max_{||u||=1}\{(Au,u)\}$.

例 14 设 A,B 为实对称矩阵， B 正定.

1) $|\lambda B-A|=0$ 根全为实数.

2) 设 $|\lambda B-A|=0$ 的根为 $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n$，则 $f(X)=X'AX,\ X\in\{X|X'BX=1\}$ 的最小值、最大值分别为 λ_1,λ_n.

证 1) 由 B 正定， A 为实对称矩阵，存在可逆阵 P 使得 $P'BP=E,P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. $|\lambda B-A|=0\Longleftrightarrow|P'(\lambda B-A)P|=0$，即 $|\lambda B-A|=0$ 的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，故命题成立.

2) $X'BX=1$, 即 $X'(P')^{-1}P'BPP^{-1}X=1$, 故 $(P^{-1}X)'(P^{-1}X)=1$, 令 $P^{-1}X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 则 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$, 从而 $f(X)=X'AX=(P^{-1}X)'P'AP(P^{-1}X)=$

$\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_n x_n^2 \geq \lambda_1(x_1^2+\cdots+x_n^2)=\lambda_1$, 取 $P^{-1}X=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, 显然 $X'BX=1$, $f(X)=\lambda_1$, 故 λ_1 为 $f(X)=X'AX,\ X\in\{X|X'BX=1\}$ 的最小值. 类似地, λ_n 为 $f(X)=X'AX, X\in\{X|X'BX=1\}$ 的最大值.

例 15 1) 设 A 为实反对称矩阵. 则 A 的特征值的实部为 0.

2) 设 A,B 为实对称矩阵, 则 $AB-BA$ 的特征值的实部为 0.

证 1) 设 λ 为 A 的特征值, α 为相应的特征向量, 即 $A\alpha=\lambda\alpha$. 故 $\overline{\alpha}'A\alpha=\lambda\overline{\alpha}'\alpha$, 从而 $(\overline{\overline{\alpha}'A\alpha})'=(\overline{\lambda}\overline{\alpha}'\alpha)'$, 即 $-\overline{\alpha}'A\alpha=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'\alpha$, 故 $(\lambda+\overline{\lambda})\overline{\alpha}'\alpha=0$, 即 $\lambda+\overline{\lambda}=0$, 故 λ 的实部为 0.

2) 由 $(AB-BA)'=-(AB-BA)$ 知, $AB-BA$ 为实反对称, 由 1) 命题成立.

例 16 若 B 半正定, m 为一自然数, $AB^m=B^mA$. 则 $AB=BA$.

证 由 B 半正定, 存在正交阵 T, 使得 $T'BT=\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$. 则 $T'B^mT=\begin{pmatrix}\lambda_1^mE_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s^mE_s\end{pmatrix}$. 由 $AB^m=B^mA$ 有, $T'ATT'B^mT=T'B^mTT'AT$, 据 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$, 我们有 $T'AT=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s\end{pmatrix}$, 故 $T'ATT'BT=T'BTT'AT$, 从而 $AB=BA$.

例 17 设 A 为实对称矩阵, S 为实反对称矩阵, $AS=SA$, A 可逆. 则 $(A+S)(A-S)^{-1}$ 为正交阵.

证 首先由 $A-S=A(E-A^{-1}S)$, 而由 $AS=SA$ 有 $A^{-1}S=SA^{-1}$, 又 $(A^{-1}S)'=-SA^{-1}$. 即 $A^{-1}S$ 为反对称矩阵, 故 $A^{-1}S$ 的特征值为 0 或纯虚数, 故 $|E-A^{-1}S|\neq 0$, 从而 $A^{-1}S$ 可逆, 进而 $A-S$ 可逆. 其次由 $(A-S)'=A+S$, 故 $A+S$ 也可逆. 显然 $(A-S)(A+S)=(A+S)(A-S)$, 从而 $(A+S)^{-1}(A-S)=(A-S)(A+S)^{-1}$, 计算知 $(A+S)(A-S)^{-1}[(A+S)(A-S)^{-1}]'=E$. 即 $(A+S)(A-S)^{-1}$ 为正交阵.

例 18 设 A,B 为实对称矩阵. 证明: 存在正交阵 T 使得 $T'AT,T'BT$ 同为对角阵 $\Longleftrightarrow AB=BA$.

证 ρ 显然.

$\longrightarrow$ 由 A 为实对称矩阵,存在正交阵 T_1 使得 $T_1'AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_s \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$. 由 $AB = BA$, 有 $T_1'AT_1T_1'BT_1 = T_1'BT_1T_1'AT_1$, 即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_s \end{pmatrix} T_1'BT_1 = T_1'AT_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_s \end{pmatrix},$$

由 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 两两不同, $T_1'BT_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$, 其中 $B_1, \cdots, B_s$ 仍为对称阵, 故存在正交阵 U_i 使得 $U_i'B_iU_i$ 为对角阵, $i = 1, \cdots, s$. 令 $T = T_1 \begin{pmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_s \end{pmatrix}$, 则 T 为正交阵, 且 $T'AT, T'BT$ 均为对角阵.

例 19 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, A 正定. 则 $A - B$ 半正定 $\Longleftrightarrow$ BA^{-1} 的特征值 ≤ 1.

证 由 A 正定, B 实对称矩阵, 存在可逆阵 P 使得

$$P'AP = E, P'BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

故 $P'(A-B)P = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_n \end{pmatrix}$, 又 $|\lambda E - BA^{-1}| = 0 \Longleftrightarrow |\lambda A - B| = 0 \Longleftrightarrow$ $|P'(\lambda A - B)P| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_n \end{vmatrix} = 0$, 即 BA^{-1} 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 故 $A - B$ 半正定 $\Longleftrightarrow 1 - \lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, n \Longleftrightarrow \lambda_i \leq 1, i = 1, \cdots, n$, 即 BA^{-1} 的特征值 ≤ 1.

例 20 设 A, B 为实对称矩阵. 证明: $tr(ABAB) \leq tr(AABB)$.

证 即证 $tr(AABB - ABAB) \geq 0$. 由 A 为实对称矩阵, 存在正交阵 T

使得 $T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 令 $T'BT=(b_{ij})$ ，则

$$\begin{aligned}T'(AB-BA)T&=T'ATT'BT-T'BTT'AT)\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n}\\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n}\\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_1 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & (\lambda_1-\lambda_2)b_{12} & \cdots & (\lambda_1-\lambda_n)b_{1n}\\ (\lambda_2-\lambda_1)b_{21} & 0 & \cdots & (\lambda_2-\lambda_n)b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\lambda_n-\lambda_1)b_{n1} & (\lambda_n-\lambda_2)b_{n2} & \cdots & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & \lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)b_{12} & \cdots & \lambda_1(\lambda_1-\lambda_n)b_{1n}\\ \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)b_{21} & 0 & \cdots & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_n)b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1)b_{n1} & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_2)b_{n2} & \cdots & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&T'AT(T'ATT'BT-T'BTT'AT)T'BT\\=&\begin{pmatrix}\sum_{i\neq 1}\lambda_1(\lambda_1-\lambda_i)b_{1i}^2 & & & *\\ & \sum_{i\neq 2}\lambda_2(\lambda_2-\lambda_i)b_{2i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{i\neq n}\lambda_n(\lambda_n-\lambda_i)b_{ni}^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}tr(AABB-ABAB)&=trT'(AABB-ABAB)T\\&=\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)b_{12}^2+\lambda_1(\lambda_1-\lambda_3)b_{13}^2+\cdots+\lambda_1(\lambda_1-\lambda_n)b_{1n}^2\\&+\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)b_{21}^2+\lambda_2(\lambda_2-\lambda_3)b_{23}^2+\cdots+\lambda_2(\lambda_2-\lambda_n)b_{2n}^2\\&+\cdots\\&+\lambda_n(\lambda_n-\lambda_1)b_{n1}^2+\lambda_n(\lambda_n-\lambda_2)b_{n2}^2+\cdots+\lambda_n(\lambda_n-\lambda_{n-1})b_{n,n-1}^2\\&=(\lambda_2-\lambda_1)^2b_{12}^2+(\lambda_3-\lambda_1)^2b_{13}^2+\cdots+(\lambda_n-\lambda_1)^2b_{1n}^2+\cdots\\&+(\lambda_n-\lambda_{n-1})^2b_{n-1,n}^2\\&=\sum_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)^2b_{ij}^2\ge 0\end{aligned}$$

即命题成立.

例 21 设 A_1, A_2 为 n 阶正定阵，B_1, B_2 为 n 阶实对称矩阵. 证明: 存在可逆阵 C 使得 $C'A_1C = A_2, C'B_1C = B_2 \Longleftrightarrow |\lambda A_1 - B_1| = 0$ 与 $|\lambda A_2 - B_2| = 0$ 同解.

证 ρ 显然.

$\longrightarrow$ 由 A_1 正定， B_1 为实对称矩阵，存在可逆阵 P_1 使得 $P_1'AP_1 = E, P_1'B_1P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 同样存在可逆阵 P_2 使得 $P_2'A_2P_2 = E, P_2'B_2P_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$. 故 $|\lambda A_1 - B_1| = 0$ ，即 $|\lambda P_1'A_1P_1 - P_1'B_1P_1| = 0$ 有根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 同样 $|\lambda A_2 - B_2| = 0$ 有根 $\mu_1, \cdots, \mu_n$, 由题设，不妨设 $\lambda_i = \mu_i, i = 1, \cdots, n$. 令 $C = P_1P_2^{-1}$ 即可.

例 22 A 为 n 阶实方阵， $n \geq 3$ ，若 A 的每个元素 $a_{ij} = A_{ij}$ ，且存在 $A_{ij} \neq 0$. 则 A 为正交阵.

证 由 $AA' = AA^* = |A|E$ ，又存在 $A_{ij} \neq 0$, 故 $|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 > 0$, 另一方面 $|AA'| = ||A|E|$, 故 $|A|^{n-2} = 1$, 从而 $|A| = 1$, 故 $AA' = E$ ，即 A 为正交阵.

例 23 设 3 阶正交阵 A 的行列式为 -1. 证明： $trA^2 = 2trA + (trA)^2$.

证 由题设，A 有特征值 -1 ，设 A 的另两特征值为 $a+bi$ ， $a-bi$ ，其中 $a, b \in R$. 由 $|A| = (-1)(a+bi)(a-bi)$, 知 $a^2 + b^2 = 1$. $1, (a+bi)^2, (a-bi)^2$ 为 A^2 的特征值，故 $trA^2 = 1 + (a+bi)^2 + (a-bi)^2 = 1 + 2a^2 - 2b^2 = 4a^2 - 1$, 而 $2trA + tr(a)^2 = 4a^2 - 1$. 从而命题成立.

例 24 设 $\subseteq$ 为欧氏空间 V 的线性变换. 则 $\subseteq$ 为正交变换 $\Longleftrightarrow \subseteq$ 保持向量的距离不变.

证 ρ 任取 $\alpha, \beta \in V$,

$$|\subseteq \alpha - \subseteq \beta| = |\subseteq (\alpha - \beta)| = \sqrt{(\subseteq (\alpha - \beta), \subseteq (\alpha - \beta))} = \sqrt{((\alpha - \beta), (\alpha - \beta))} = |\alpha - \beta|.$$

$\longrightarrow$ 对任意的 $\alpha \in V, |\subseteq \alpha| = |\subseteq \alpha - \subseteq 0| = |\alpha - 0| = |\alpha|, \subseteq$ 保持向量的长度不变，从而为正交变换.

例 25 $\subseteq$ 为欧氏空间 V 的变换， $\subseteq$ 保持距离不变， $\subseteq 0 = 0$. 则 $\subseteq$ 为正交变换.

证 任取 $\alpha, \beta \in V$, 由题设， $|\subseteq \alpha - \subseteq \beta| = |\alpha - \beta|$, 即 $(\subseteq \alpha - \subseteq \beta, \subseteq \alpha - \subseteq \beta) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta)$, 故 $(\subseteq \alpha, \subseteq \alpha) - 2(\subseteq \alpha, \subseteq \beta) + (\subseteq \beta, \subseteq \beta) = (\alpha, \alpha) -$

$2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$. 而 $|\subseteq\alpha|=|\subseteq\alpha-\subseteq 0|=|\alpha|$, 同样， $|\subseteq\beta|=|\beta|$, 从而 $(\subseteq\alpha,\subseteq\beta)=(\alpha,\beta)$，故 $\subseteq$ 保持内积不变.

下证 $\subseteq$ 为线性变换. 任取 $\alpha,\beta\in V$, $k,l\in R$, $(\subseteq(k\alpha+l\beta)-k\subseteq\alpha-l\subseteq\beta,\subseteq(k\alpha+l\beta)-k\subseteq\alpha-l\subseteq\beta)=(\subseteq(k\alpha+l\beta),\subseteq(k\alpha+l\beta))-2k(\subseteq(k\alpha+l\beta),\subseteq\alpha)-2l(\subseteq(k\alpha+l\beta),\subseteq\beta)+k^2(\subseteq\alpha,\subseteq\alpha)+l^2(\subseteq\beta,\subseteq\beta)-kl(\subseteq\alpha,\subseteq\beta)$ $=(k\alpha+l\beta,k\alpha+l\beta)-2k(k\alpha+l\beta,\alpha)-2l(k\alpha+l\beta,\beta)+k^2(\alpha,\alpha)+l^2(\beta,\beta)-kl(\alpha,\beta)=0$, 故 $\subseteq(k\alpha+l\beta)=k\subseteq\alpha+l\subseteq\beta$, 即 $\subseteq$ 为线性变换，总之， $\subseteq$ 为正交变换.

例 26 若实对称矩阵 A 的特征值的绝对值为 1，则它为实正交阵.

证 由 A 为实对称矩阵，存在正交阵 T 使得 $T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 λ_i 为 A 的特征值，故 $\lambda_i^2=1$, $i=1,\cdots,n$. 从而 $(T'AT)^2=E$, 故 $A'A=A^2=E$, 即 A 为正交阵.

例 27 设 A 为 3 阶实对称矩阵，满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$. 证明 A 正定.

证 由 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ 的根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 得 A 的特征值只可能为 $1,2,3$(可以有重根)，故 A 的特征值全为正数，故正定.

例 28 正定阵 A 为正交阵 $\Longleftrightarrow A=E$.

证 $\longrightarrow$ 显然.

ρ 由 A 正定，存在正交阵 T 使得 $T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 由 A 正定， $\lambda_i>0$, $i=1,\cdots,n$. 而 A 为正交阵，故 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 也为正交阵，从而 $\lambda_i^2=1$, $i=1,\cdots,n$, 故 $\lambda_i=1,i=1,\cdots,n$，即 $A=E$.

例 29 设 A 为 n 阶正定阵 $(n\geq 3)$. 则 $A=A^*\Longleftrightarrow A=E$.

证 ρ 由 $A=A^*$， $|A|=|A^*|=|A|^{n-1}$, 而 $|A|>0$, 故 $|A|=1$, 从而 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=A^*=A$, 故 $A'A=E$, 从而 $A=E$.

$\longrightarrow$ 显然.

例 30 设 A 为正定阵， B 为实对称矩阵. AB 为实对称矩阵. 则 AB 正定 $\Longleftrightarrow B$ 正定.

证 由 A 正定,存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E$,故 $P'ABP=P'APP^{-1}BP=P^{-1}BP$,

ρ 由 AB 正定， $P^{-1}BP$ 正定，故 B 正定.

$\longrightarrow$ 由 B 正定, $P^{-1}BP$ 正定, 故 AB 正定.

例 31 设 A 为正定阵, B 为实对称矩阵. 则 B 正定 $\Longleftrightarrow$ AB 的特征值全大于 0.

证 因 A 正定, 存在可逆阵 C 使得 $A = C'C$, 故 $AB = C'CB$, 从而 $(C')^{-1}ABC' = CBC'$.

ρ 由 B 正定, CBC' 正定, 即 $(C')^{-1}ABC'$ 正定, 故 AB 的特征值全大于 0.

$\longrightarrow$ 由 $(C')^{-1}ABC'$ 的特征值全大于 0, 即 CBC' 的特征值全大于 0 知, B 正定.

例 32 设 A 为实对称矩阵, B 为实方阵, 若 $AB' + BA$ 的特征值全大于 0, 则 A 可逆.

证 由题设, $AB' + BA$ 正定. 设 λ 为 A 的任一特征值, α 为属于 λ 的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda\alpha$, 故 $0 < \alpha'(AB' + BA)\alpha = \alpha'AB'\alpha + \alpha'BA\alpha = (A\alpha)'B'\alpha + \alpha'BA\alpha = \lambda(\alpha'B\alpha + \alpha'B'\alpha)$, 从而 $\lambda \neq 0$, 故 A 可逆.

例 33 设 $\subseteq$ 为 n 维欧氏空间 V 的线性变换, $\subseteq$ 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A, G 为 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵. 则 $\subseteq$ 为对称变换 $\Longleftrightarrow$ $A'G = GA$.

证 ρ 任取 $X, Y \in R^n$, 令 $\alpha = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)X, \beta = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)Y$, 则

$$\subseteq \alpha = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)AX, \$ \subseteq \beta = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)AY,$$

故由 $(\subseteq \alpha, \beta) = (\alpha, \subseteq \beta)$, 得 $(AX)'GY = X'G(AY)$, 由 X, Y 的任意性, $A'G = GA$.

$\longrightarrow$ 任取 $\alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = (v_1, \cdots, \varphi_n)X, \beta = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)Y$, 则 $(\subseteq \alpha, \beta) = X'A'GY = X'GAY = (\alpha, \subseteq \beta)$, 即 $\subseteq$ 为对称变换.

例 34 欧氏空间 V 的对称变换 $\subseteq$ 称为正定的, 若 $\subseteq$ 满足对任意的 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, $(\subseteq \alpha, \alpha) > 0$. 证明: $\subseteq$ 正定 $\Longleftrightarrow$ $\subseteq$ 在标准正交基下的矩阵为正定阵.

证 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为 V 的标准正交基, $\subseteq$ 在 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 下的矩阵为对称矩阵 A.

ρ 对任意的 $X \in R^n$, $X \neq 0$, 令 $\alpha = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)X$, 则 $\subseteq \alpha = (v_1, \cdots, \varphi_n)AX$, 故 $0 < (\subseteq \alpha, \alpha) = X'AX$, 即 A 正定.

$\longrightarrow$ 任取 $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, 设 $\alpha = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)X$, 则 $X \neq 0$, 故 $0 < X'AX = (\subseteq \alpha, \alpha)$, 即 $\subseteq$ 为正定变换.

例 35 设 V 为 n 维欧氏空间, $\subseteq, \tau$ 为 V 的线性变换. 称 τ 为 $\subseteq$ 的共轭, 若对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $(\subseteq \alpha, \beta) = (\alpha, \tau\beta)$.

1) τ 为 $\subseteq$ 的共轭 $\Longleftrightarrow$ $\subseteq, \tau$ 在同一标准正交基下的矩阵互为转置.

2) $\tau^{-1}(0)$ 的正交补为 σV.

3) $\subseteq'$ 为 $\subseteq$ 的共轭且 $\subseteq\subseteq'=\subseteq'\subseteq$， α 为 $\subseteq$ 的特征向量，则 α 也为 $\subseteq'$ 的特征向量．并证明 $\subseteq$ 的不同特征值的特征向量两两正交.

证 1) 设 $\subseteq,\tau$ 在标准正交基 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 下的矩阵分别为 A,B.

ρ 任取 $X,Y\in R^n$, 令 $\alpha=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)X,\beta=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)Y$, 则 $X'A'Y=(\subseteq\alpha,\beta)=(\alpha,\tau\beta)=X'BY$, 由 X,Y 的任意性， $A'=B$.

$\longrightarrow$ 设 $\subseteq$ 在标准正交基 $\varphi_1,\cdots,v_n$ 下的矩阵为 A, 则 τ 在该基下的矩阵为 A', 取 $\alpha=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)X,\beta=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)Y$, 则 $X,Y\in R^n$, 故 $(\subseteq\alpha,\beta)=X'A'Y=X'BY=(\alpha,\subseteq\beta)$, 从而命题成立.

2) 任取 $\alpha\in\tau^{-1}(0),\subseteq\beta\in\subseteq V$. $(\alpha,\subseteq\beta)=(\tau\alpha,\beta)=0$, 故 $\subseteq V\subseteq\tau^{-1}(0)$. 由 1), $dim\subseteq V=dimIm\tau V=n-dim\tau^{-1}(0)$, 故 $\tau^{-1}(0)$ 的正交补为 $\subseteq V$.

3) 设 α 为属于 $\subseteq$ 的特征值 λ 的特征向量，即 $\subseteq\alpha=\lambda\alpha$, 计算 $(\subseteq'\alpha-\lambda\alpha,\subseteq'\alpha-\lambda\alpha)=(\subseteq'\alpha,\subseteq'\alpha)-2\lambda(\subseteq'\alpha,\alpha)+\lambda^2(\alpha,\alpha)=(\alpha,\subseteq\subseteq'\alpha)-2(\alpha,\subseteq\alpha)+\lambda^2(\alpha,\alpha)=0$, 故 $\subseteq'\alpha=\lambda\alpha$.

设 λ,μ 为 $\subseteq$ 的两个不同特征向量， α,β 分别为属于 λ,μ 的特征向量，则 $\lambda(\alpha,\beta)=(\lambda\alpha,\beta)=(\subseteq\alpha,\beta)=(\alpha,\subseteq\beta)=\mu(\alpha,\beta)$, 由 λ,μ 不同知，$(\alpha,\beta)=0$, 即 α,β 正交.

例 36 证明： 1) 正交阵的特征值的模为 1. 从而实特征值只有 1 或 -1.

2) 奇数维的欧氏空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特征值.

证 1) 设正交阵 A 的特征值为 λ， α 为属于 λ 的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha$, 故 $\overline{\alpha}'A'=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'$, 从而 $\overline{\alpha}'A'A\alpha=\overline{\lambda}\lambda\overline{\alpha}'\alpha$, 即 $\overline{\lambda}\lambda=1$.

2) 设 A 为奇数维欧氏空间的正交阵且 $|A|=1$，则 A 的实特征值为 1 或 -1，而虚根成对出现，故 A 一定以 1 作为特征值.

例 37 设 V_1,V_2 为欧氏空间 V 的子空间， $dimV_1<dimV_2$. 则 V_2 中存在与 V_1 正交的非零向量， V_2 中这样向量的全体构成子空间.

证 若 $dimV_1=0$, 即 $V_1=0$，命题成立. 设 $1\le s=dimV_1, dimV_2=t$, 分别取 V_1,V_2 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$, 设 $\beta=k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t$，令 $(\beta,\alpha_i)=0$, $i=1,\cdots,s$. 则 $\begin{cases}k_1(\beta_1,\alpha_1)+\cdots+k_t(\beta_t,\alpha_1)=0\\ \qquad\vdots\\ k_1(\beta_1,\alpha_s)+\cdots+k_t(\beta_t,\alpha_s)=0\end{cases}$ 方程组的个数 $s<$ 未知量的个数 r，从而有非零解 $(k_1,\cdots,k_t)$，即存在非零向量 $\beta=k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t$ 满足要求.

第二问按定义易证.

例 38 设 A 是 n 阶实方阵，b 是 n 维实列向量. 证明：方程组 $AX=b$ 有解 $\Longleftrightarrow b$ 与方程组 $A'X=0$ 的解空间正交.

证 ρ 设 X_0 为 $AX=b$ 的解，即 $AX_0=b$， X_1 为 $A'X=0$ 的任意解，

即 $A'X_1=0$. 故 $(b,X_1)=b'X_1=(AX_0)'X_1=X_0'A'X_1=0$, 命题成立.

$\longrightarrow$ 由 b 与 $A'X=0$ 的任意解正交知，方程组 $A'X=0$ 与 $\begin{cases}A'X=0\\ b'X=0\end{cases}$ 同解，故 $r(A')=r\begin{pmatrix}A'\\ b'\end{pmatrix}$, 即 $r(A)=r(A,b)$, 从而 $AX=b$ 有解.

例 39 设实方阵 A 的特征值全为实数， $A'A=AA'$. 证明存在正交阵 T 使得 $T'AT$ 为对角形.

证 对 A 的阶数 n 归纳． $n=1$ 时显然成立．设为 $n-1$ 时成立，则为 n 时，设 λ 为 A 的一特征值，相应的单位特征向量为 α, 即 $A\alpha=\lambda\alpha$. 将 α 扩充为 R^n 的标准正交基 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 令 $T_1=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $T_1'AT_1=\begin{pmatrix}\lambda & \beta\\ 0 & B\end{pmatrix}$, 由 $A'A=AA'$ 知， $\lambda^2+\beta\beta'=\lambda^2$, $BB'=B'B$, 故 $\beta=0$, 从而 $T_1'AT_1=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$, 又 B 的特征值全为 A 的特征值，从而也为实数，由假设，存在正交阵 Q 使得 $Q'BQ$ 为对角形，令 $T=T_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$ 即可.

例 40 求出一个二元二次多项式 $f(x,y)$ 满足条件：$f(x,y)=f(-x,x+y)=f(x+y,-y)$.

解 设 $f(x,y)=X'AX+BX+d$, 其中 $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$, $B=(e,f)$, $d\in P$. 显然 $\begin{pmatrix}-x\\ x+y\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x+y\\ -y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, 这里 $S=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. 由题设， $S'AS=A=T'AT$, $B=BS=BT$, 解之得，$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=0$, 故可取 $f(x,y)=2x^2+2xy+2y^2$.

例 41 已知二次曲面 $x^2+y^2+kz^2+2xy+2yz+2xz=4$ 通过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ 化为二次曲面 $y'^2+4z'^2=4$, 求 k 值及正交阵 P.

证 二次曲面 $x^2+y^2+kz^2+2xy+2yz+2xz=4$ 为 $X'\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}X=4$, 其

中 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, 由 $y'^2+4z'^2=4$ 知, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&k\end{pmatrix}$ 的特征值 $0,1,4$. 故 $tr(A)=1+1+k=0+1+4$ 得 $k=3$. 将 $\lambda=0,1,4$ 分别代入 $(\lambda E-A)X=0$ 求得相应的单位特征向量 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\2\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$, 令 $P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{3}&2\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$ 即可, 由 $0,1,4$ 两两不同知, P 为正交阵.

例 42 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $X=PY$ 化为标准形 $f=6y_1^2$. 则 $a=\underline{2}$.

例 43 V 是欧氏空间, $\eta\neq 0,\eta\in V$. 定义 $\sigma\alpha=\alpha-\frac{2(\alpha,\eta)}{(\eta,\eta)}\eta$, $(\alpha\in V)$.

1) σ 为正交变换且 $\sigma^2=1_V$.

2) V 为 n 维时, 存在 V 的标准正交基使得 σ 在该基下的矩阵为 $diag(-1,1,\cdots,1)$.

证 由 $\sigma\alpha=\alpha-\frac{2(\alpha,\eta)}{(\eta,\eta)}\eta=\alpha-2(\alpha,\frac{\eta}{\sqrt{(\eta,\eta)}})\frac{\eta}{\sqrt{(\eta,\eta)}}$, 而 $\frac{\eta}{\sqrt{(\eta,\eta)}}$ 为单位向量, 故不妨设 η 为单位向量, 从而 $\sigma\alpha=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$.

1) 易证 σ 为线性变换, 对 $\alpha,\beta\in V$

$$\begin{aligned}(\sigma\alpha,\sigma\beta)&=(\alpha-2(\alpha,\eta)\eta,\beta-2(\beta,\eta)\eta)\\&=(\alpha,\beta)-2(\alpha,\eta)(\beta,\eta)-2(\alpha,\eta)(\beta,\eta)+4(\alpha,\eta)(\beta,\eta)\\&=(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

故 σ 为正交变换.

由 $\sigma^2\alpha=\sigma(\alpha-2(\alpha,\eta)\eta)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta-2(\alpha-2(\alpha,\eta)\eta,\eta)\eta=\alpha$, 有 $\sigma^2=1_V$.

2) 将 η 扩充为标准正交基 $\eta,\eta_2,\cdots,\eta_n$, 则 σ 在该基下的矩阵为 $diag(-1,1,\cdots,1)$.

例 44 设 f 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换. 证明: Imf 是 $Kerf$ 的正交补.

证 任取 $f(\alpha)\in Imf,\beta\in Kerf$, $(f(\alpha),\beta)=(\alpha,f(\beta))=(\alpha,0)=0$. 故 $Imf\subseteq(Kerf)^{\perp}$, 又 $dimImf=n-dimKerf=dim(Kerf)^{\perp}$, 故 $Imf=(Kerf)^{\perp}$.

例 46 V 为 R 上 n 维线性空间, $W_1,W_2\leq V$ 且 $W_1\bigcap W_2=\{0\}$.

1) 如果 $(,)_1,(,)_2$ 分别为 W_1,W_2 上的内积. 则存在 V 上的内积 $(,)$ 满足 $(,)|_{W_i}=(,)_i$, $i=1,2$.

2) 满足 1) 的内积是否唯一, 为什么?

解 1) 取 W_1 的标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ (对 $(,)_1$ 而言), 取 W_2 的标准正交基 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$(对 $(,)_2$ 而言). 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 扩充为 V 的

基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 定义内积：对 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n,\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$, 令 $(\alpha,\beta)=k_1l_1+\cdots+k_nl_n$. 则 $(,)$ 为内积且 $(,)|_{W_i}=(,)_i$, $i=1,2$.

$$2\text{)不唯一, 因为 }(\alpha,\beta)=(k_1,\cdots,k_r,k_{r+1},\cdots,k_s,\cdots,k_n)\begin{pmatrix}E_1&&\\&E_2&\\&&A_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\\vdots\\l_r\\\vdots\\l_s\\\vdots\\l_n\end{pmatrix},$$

只需 A_3 正定即可. 但若 $dimW_1+dimW_2=n$, 则唯一.

例 47 V 为 n 维欧氏空间. 证明：对 V 中给定的向量 α， V 上的函数 $f(\beta)=(\alpha,\beta)$ 连续.

证 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的标准正交基，设

$$\alpha=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\gamma=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

则 $\forall\varepsilon>0$, 当 $|\beta-\gamma|<\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$, $|f(\gamma)-f(\beta)|<\varepsilon$, 即 $f(\beta)$ 连续.

例 48 1) A 为 n 阶实矩阵. 证明存在正交阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为上三角当且仅当 A 的特征值全为实数.

2) A 为正交阵，特征值全为实数. 则 A 为对称阵.

证 1) $\Longleftarrow$ 显然.

$\Longrightarrow$ 对 n 归纳. $n=1$ 时显然成立，设为 $n-1$ 时成立. 则为 n 时，设 λ_1 为 A 的特征值， α 相应的特征向量. 将 α 单位化并扩充为标准正交基 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$， 令 $T_1=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， 则 T_1 为正交阵且 $T_1'AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta\\0&A_1\end{pmatrix}$, 这里 A_1 为 $n-1$ 实矩阵, 特征值全为实数. 由假设, 存在正交阵 Q 使得 $Q'A_1Q$ 为上三角，令 $T=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q\end{pmatrix}T_1$, 则 T 为正交阵且 $T'AT$ 为上三角矩阵.

2) 因 A 的特征值全为 $1,-1$, 由 1)， 存在正交阵 T 使得 $T^{-1}AT=(a_{ij})_{n\times n}$, 对角线上前 s 个为 1 , 后 $n-s$ 个为 -1 , 令 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 由 $A\alpha_i=a_{1i}\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1,i}\alpha_{i-1}+\lambda\alpha_i$, 这里 λ 为 1 或 -1 ， $0=(\alpha_i,\alpha_j)=(A\alpha_i,A\alpha_j)=0$, 可算出 $a_{ij}=0(i\neq j)$. 故 $T'AT$ 为对角阵，从而 A 为对角阵.

例 49 对于阶数分别为 n,m 的实对称矩阵方阵 A 与 B，假设 m 阶矩阵 B 是正定矩阵. 试证存在非零矩阵 H，使得 $B-HAH^T$ 成为正定矩阵.

证 设可逆阵 P 满足 $PBP^T=E$，正交阵 T 满足 $T^TAT=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda)$, 其中 $\lambda_i>0, i=1,\cdots,r. \lambda_j\le 0, j=r+1,\cdots,n$. 取 $H=P^{-1}diag(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}},0,\cdots,0)T^{-1}$, 则 $P(B-HAT^T)P^T=diag(1+\lambda_1,1,\cdots,1)$ 正定.

例 50 证明：若 S 为 n 阶正定阵. 则 (i) 存在唯一的正定阵 S_1 使得 $S=S_1^2$; (ii) 若 A 为 n 阶实对称矩阵阵，则 AS 的特征值是实数.

证 (i) 设正交阵 T 使得 $S=T^Tdiag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)T$, 这里 $\lambda_i\ne\lambda_j(i\ne j)$. 令 $S_1=T^Tdiag(\sqrt{\lambda_1}E_1,\cdots,\sqrt{\lambda_s}E_s)T$ 即可. 若还有正定阵 S_2 满足要求，则 S_2 的特征值也为 $\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_s},\cdots,\sqrt{\lambda_s}$, 设正交阵 Q 满足 $S_2=Q^Tdiag(\sqrt{\lambda_1}E_1,\cdots,\sqrt{\lambda_s}E_s)Q$. 则

$$T^Tdiag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)T=Q^Tdiag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)Q,$$

即 QT^T 与 $diag(\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s)$ 可交换，故 $QT^T=diag(P_1,\cdots,P_s)$, P_i 为正交阵，从而 $diag(\sqrt{\lambda_1}E_1,\cdots,\sqrt{\lambda_s}E_s)QT^T=QT^Tdiag(\sqrt{\lambda_1}E_1,\cdots,\sqrt{\lambda_s}E_s)$, 即 $S_1=S_2$.

(ii) 设 λ 为 AS 的特征值，α 为相应的特征向量，即 $AS\alpha=\lambda\alpha$, 故 $SAS=\lambda S\alpha$, 从而 $\bar{\alpha}^TSAS\alpha=\lambda\bar{\alpha}^TS\alpha$，易知 λ 为实数.

例 51 令 $f(x,y)=2x^2-7xy+y^2$, 求 $f(x,y)$ 在 R^2 中单位圆上的极大值与极小值点.

提示 $f(x,y)=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, 将 $A=\begin{pmatrix}2&-\frac{7}{2}\\-\frac{7}{2}&1\end{pmatrix}$ 用正交阵对角化.

例 52 设 A 为 n 阶实对称矩阵，而 b 是 $n\times 1$ 维实向量. 证明：$A-bb^T>0$ 的充要条件是 $A>0, b^TA^{-1}b<1$.

证 $\Longleftarrow$ 由 $A>0, bb^T$ 为实对称矩阵知，存在可逆阵 P 使得 $PAP^T=E$，$Pbb^TP^T=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}$. 故 $A=P^{-1}(P^{-1})^T$, $A^{-1}=P^TP$, $Pb=(\sqrt{\lambda},0,\cdots,0)^T$, 这里 $\lambda<1$, 从而 $P(A-bb^T)P^T=diag(1-\lambda,1,\cdots,1)$ 正定.

$\Longrightarrow$ 由 $A-bb^T$ 正定知，$A>0$. 故存在可逆阵 P 使得 $PAP^T=E$，$Pbb^TP^T=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}$, 易知 $A^{-1}=P^TP$, $Pb=(\sqrt{\lambda},0,\cdots,0)^T$, 从而由 $P(A-BB^T)P^T=diag(1-\lambda,1,\cdots,1)$ 正定知，$\lambda<1$, 故 $b^TA^{-1}b<1$.

例 53 若 Q 为 n 阶对称正定方阵，x 为 n 维实列向量. 证明：

$$0\le x^T(Q+xx^T)^{-1}x<1.$$

证 由 Q 正定，xx^T 为实对称矩阵，存在可逆阵 P 使得 $P^TQP=E$, $P^Txx^TP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 故 $P^Tx=(\sqrt{\lambda},0,\cdots,0)^T$, 从而 $Q+xx^T=(P^T)^{-1}(P^TQP+P^Txx^TP)P^{-1}=(P^{-1})^Tdiag(1+\lambda,1,\cdots,1)P^{-1}$, 这样 $(Q+xx^T)^{-1}=Pdiag(1+\lambda,1,\cdots,1)P^T$, 故 $x^T(Q+xx^T)^{-1}x=x^TPdiag(\frac{1}{1+\lambda},1,\cdots,1)P^Tx=\frac{\lambda}{1+\lambda}<1$. 因 $Q+xx^T$ 正定，故 $0\leq x^T(Q+xx^T)x$.

例 54 设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X'AX$ 为实二次型，A 的特征值为 $\lambda_1=1$（二重）和 $\lambda_2=-1$（二重）. 且知 $\varepsilon_1=(1,1,0,0)$ 和 $\varepsilon_2=(1,1,0,1)$ 是属于 λ_1 的特征向量，求二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

解 利用不同特征值的特征向量正交，求 λ_2 的特征向量，施米特正交化，可求正交阵 T 使得 $T^TAT=diag(1,1,-1,-1)$, 从而可得 A.

例 55 给定 R^2 的标准度量. 求出 R^2 中所有保持正方形 $A=(1,1),B=(-1,1),C=(-1,-1),D=(1,-1)$ 整体不变的正交变换.

解 σ 为正交变换的充要条件为将标准正交基变为标准正交基, 而标准正交基 $\varepsilon_1=(1,0),\varepsilon_2=(0,1)$ 在正方形上，故 σ 可将其变为 (1) $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, (2) $\varepsilon_1,-\varepsilon_2$, (3) $\varepsilon_2,\varepsilon_1$, (4) $-\varepsilon_2,\varepsilon_1$, (5) $-\varepsilon_1,\varepsilon_2$, (6) $\varepsilon_2,-\varepsilon_1$, (7) $-\varepsilon_1,-\varepsilon_2$, (8) $-\varepsilon_2,-\varepsilon_1$, 即 σ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的矩阵可为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

例 56 设 $2n$ 阶实对称矩阵方阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$, 1 ）试求正交阵 T 使得 T^TAT 为对角阵并求对角阵. 2 ）求 A 的最小多项式.

解 1) 易知 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^n$. 故 A 的特征值为 1 和 -1. 易求 $V_1=L(\varepsilon_1+\varepsilon_{2n},\cdots,\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1})$, $V_{-1}=L(\varepsilon_1-\varepsilon_n,\cdots,\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1})$, 这里 ε_i 为 $2n$ 维单位向量. 令

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}(varepsilon_1+\varepsilon_{2n},\cdots,\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1},\varepsilon_1-\varepsilon_n,\cdots,\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}),$$

则 $T^TAT=diag(E,-E)$.

2) 由 $A^2=E$ 及 $A\neq E,A\neq -E$ 知 A 的最小多项式为 x^2-1.

例 56 A， B， $A-B$ 均正定. 则 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定.

证 存在可逆阵 P 使得 $P'AP=E, P'BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. 由 B 正定, $\lambda_i>0,\ i=1,\cdots,n$. 又 $P'(A-B)P=\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_n\end{pmatrix}$, 据 $A-B$ 正定, $\lambda_i<1,\ i=1,\cdots,n$. 从而 $P^{-1}A^{-1}(P^{-1})'=E,\ P^{-1}B^{-1}(P^{-1})'\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$,
$P^{-1}(B^{-1}-A^{-1})(P^{-1})'=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1}-1\end{pmatrix}$. 由条件, $\lambda_i^{-1}-1>0$, $i=1,\cdots,n$. 即 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定.

例 57 A 为 n 阶实矩阵, C 为正交阵.

1) 证明: $tr(C'AC)=tr(A)$.

2) $\sigma(A)$ 表示 A 的所有元素的平方和. 则 $\sigma(C'AC)=\sigma(A)$.

证 1) 令 $C=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 则

$$C'AC=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(a_{ij})(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j'$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两正交知 $tr(C'AC)=tr(A)$.

2) $\sigma(A)=tr(AA')=tr(C'A'AC)=\sigma(C'AC)$.