范畴论思想简介

零基础跨学科讨论班

王进一

清华大学求真书院

2023 年 9 月

第 1 节

范畴的基本概念

不妨说, 对象是无色的.

— Ludwig Wittgenstein

目录

定义

定义 (范畴, 不完整定义)

一个**范畴** (category) C 由如下资料构成:

- 一些**对象** (object) $X, Y, Z, \cdots$;
- 每两个对象之间的一些**态射** (morphism) $f\colon X \to Y$.

上述资料须满足 $\cdots$ (待续)

在陈述完整的定义之前, 让我们观察生活中的几个例子.

例

语言范畴

- 对象：语言
- 态射：翻译

$$
\begin{tikzcd}
\text{中文} \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, shift left] & \text{日文} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
\text{英文} \arrow[r, shift left] \arrow[u, shift left] \arrow[ur, shift left] & \text{法文} \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift left] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}
$$

例

机场范畴

- 对象：机场
- 态射：航线

$$\begin{tikzcd}
\text{北京首都} \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, shift left] & \text{上海虹桥} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
\text{广州白云} \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[ur, shift left] & \text{深圳宝安} \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift left] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

例

C++ 数据类型范畴

- 对象：C++ 数据类型
- 态射：C++ 函数

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{int} \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[dr, shift left] & \mathrm{bool} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[dl, shift left] \\
\mathrm{char} \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift left] \arrow[ur, shift left] & \mathrm{float} \arrow[u, shift right] \arrow[l, shift left] \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}
$$

例

命题范畴

- 对象：命题
- 态射：蕴含

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left] \arrow[d] \arrow[dr] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d] \arrow[dl] \\
C \arrow[r, shift left] & D \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

例

劳动对象范畴

- 对象: “劳动对象” (subject of labour, Arbeitsgegenstand)
- 态射: “劳动资料” (means of labour, Arbeitsmittel)

$$\text{树} \xrightarrow{\text{锯}} \text{木头} \xrightarrow{\text{锤}} \text{椅子}$$

$$\text{小麦} \xrightarrow{\text{碾}} \text{宽面} \xrightarrow{\text{锅}} \text{千层面}$$

定义

定义 (范畴, 续)

范畴中的态射需满足如下条件:

- 每个对象 X 到自身有恒等 (identity) 态射 $\mathrm{id}\colon X \to X$;
- 每个态射 $f\colon X \to Y$ 与 $g\colon Y \to Z$ 可作复合 (composition) $g \circ f\colon X \to Z$;
- 任何态射 $f\colon X \to Y$ 与恒等态射的复合满足 $\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$;
- 任何态射 f, g, h 的复合满足结合律 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\text{上海虹桥} \xrightarrow{\text{原地不动}} \text{上海虹桥}$$

定义

定义 (范畴, 续)

范畴中的态射需满足如下条件:

- 每个对象 X 到自身有恒等 (identity) 态射 $\mathrm{id}\colon X \to X$;
- 每个态射 $f\colon X \to Y$ 与 $g\colon Y \to Z$ 可作复合 (composition) $g \circ f\colon X \to Z$;
- 任何态射 $f\colon X \to Y$ 与恒等态射的复合满足 $\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$;
- 任何态射 f, g, h 的复合满足结合律 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\text{北京首都} \xrightarrow{\text{MU5114}} \text{上海虹桥} \xrightarrow{\text{MU5313}} \text{广州白云}$$

定义

定义 (范畴, 续)

范畴中的态射需满足如下条件:

- 每个对象 X 到自身有**恒等** (identity) 态射 $\mathrm{id}\colon X \to X$;
- 每个态射 $f\colon X \to Y$ 与 $g\colon Y \to Z$ 可作**复合** (composition) $g \circ f\colon X \to Z$;
- **任何态射 $f\colon X \to Y$ 与恒等态射的复合满足 $\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$;**
- 任何态射 f, g, h 的复合满足**结合律** (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\begin{tikzcd} \text{北京首都} \arrow[r, "\text{HU7601}"] \arrow[rr, bend right, "\text{HU7601}"'] & \text{上海虹桥} \arrow[r, "\text{原地不动}"] & \text{上海虹桥} \end{tikzcd}$$

定义

定义 (范畴, 续)

范畴中的态射需满足如下条件:

- 每个对象 X 到自身有恒等 (identity) 态射 $\mathrm{id}\colon X \to X$;
- 每个态射 $f\colon X \to Y$ 与 $g\colon Y \to Z$ 可作复合 (composition) $g \circ f\colon X \to Z$;
- 任何态射 $f\colon X \to Y$ 与恒等态射的复合满足 $\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$;
- 任何态射 f, g, h 的复合满足结合律 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{h} \bullet$$

集合范畴

集合范畴 Set 是数学上最重要的范畴.

- 对象: 集合 $X, Y, Z, \cdots$
- 态射: 集合之间的映射 $f \colon X \to Y$

恒等态射 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ 将 $a \in X$ 映射到 a 自身. (名称 "恒等" 的来源)

线性空间范畴

线性代数关注线性空间范畴 Vect,

- 对象: 线性空间 $V, W, \cdots$
- 态射: 线性映射 $f\colon V \to W$

线性空间范畴

线性代数关注线性空间范畴 Vect，

- 对象：线性空间 $V, W, \cdots$
- 态射：线性映射 $f\colon V \to W$

它等价于如下的子范畴，

- 对象：$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots$
- 态射：$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射 ($m \times n$ 矩阵)

线性空间范畴

线性空间范畴中, 态射可视为矩阵, 态射的复合对应矩阵的乘积. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $\ell \times m$ 矩阵.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^\ell & \mathbb{R}^m \arrow[l, "B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "A"'] \arrow[ll, bend left, "BA"] \end{tikzcd}$$

$$BAx \longleftarrow\!\shortmid Ax \longleftarrow\!\shortmid x$$

这是矩阵乘法满足结合律的原因.

整数/实数范畴

整数范畴 $\mathbb{Z}$ 中的对象为整数, 态射 $n \to m$ 为序关系 $n \leq m$, 即

- 对于 $n \leq m$, 从 n 到 m 有唯一的态射 (当 $n = m$ 时这个态射是 id_n),
- 对于 $n < m$, 从 n 到 m 没有态射.

(思考: 态射的复合表达了什么?)

$$\cdots \longrightarrow -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots$$

类似地, 存在一个范畴 $\mathbb{R}$ 以全体实数为对象, 态射 $a \to b$ 是 $a \leq b$.

函子

函子 (functor) 是范畴之间的 “映射”.

定义 (函子)

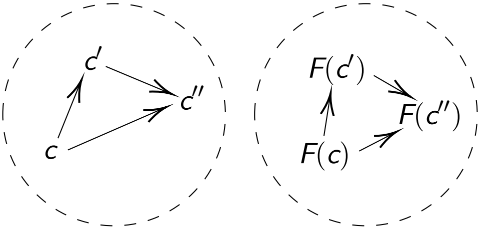
设 C, D 为范畴. 一个从 C 到 D 的**函子** $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是如下资料:

- 对 C 中的每个对象 c, 指定 D 的一个对象 $F(c)$,
- 对 C 中的每个态射 $f\colon c \to c'$, 指定 D 中的一个态射 $F(f)\colon F(c) \to F(c')$;

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"'] & F(c) \arrow[d, "F(f)"] \\ c' \arrow[r, dashed] & F(c') \end{tikzcd}$$

满足 $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

函子



函子是一种成体系的比喻，因为它不仅将一个范畴的对象“比作”另一个范畴的对象，而且系统性地保持了对象之间的“关系”.

函子

对于序关系构成的范畴 $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$, 向下 (向上) 取整

$$\mathrm{floor}, \mathrm{ceil} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

都构成函子. 这是因为, 当 $a \leq b$ 时, 有 $\mathrm{floor}(a) \leq \mathrm{floor}(b)$ 且 $\mathrm{ceil}(a) \leq \mathrm{ceil}(b)$.

另一方面, 将每个整数视为实数, 这给出一个函子

$$i \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad i(n) = n.$$

函子范畴

两个范畴之间的函子构成一个范畴.

定义 (函子范畴)

设 C, D 为范畴. 定义**函子范畴** $\mathsf{Func}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ 如下:

- 对象为 C 到 D 的函子;

函子范畴

两个范畴之间的函子构成一个范畴.

定义 (函子范畴)

设 C, D 为范畴. 定义**函子范畴** $\mathrm{Func}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ 如下:

- 对象为 C 到 D 的函子;
- 函子 $F, G \colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 之间的态射 $\alpha \colon F \to G$ 为所谓**自然变换**, 也即对 C 的每个对象 c 指定 D 的一个态射 $\alpha(c) \colon F(c) \to G(c)$, 且满足 "自然性条件": 对 C 的态射 $f \colon c \to c'$ 有右边的交换图.

$$
\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[r, "\alpha(c)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(c') \arrow[r, "\alpha(c')"'] & G(c')
\end{tikzcd}
$$

历史

范畴论起源于 Eilenberg 和 Mac Lane 1945 年的文章 General Theory of Natural Equivalences, 他们的目标是澄清 “自然同构” 的概念.

1945] GENERAL THEORY OF NATURAL EQUIVALENCES 237

which in its turn is more invariant than the concept of the automorphism group of a group, even though in the classical sense all three concepts are invariant.

The invariant character of a mathematical discipline can be formulated in these terms. Thus, in group theory all the basic constructions can be regarded as the definitions of co- or contravariant functors, so we may formulate the dictum: The subject of group theory is essentially the study of those constructions of groups which behave in a covariant or contravariant manner under induced homomorphisms. More precisely, group theory studies functors defined on well specified categories of groups, with values in another such category.

This may be regarded as a continuation of the Klein Erlanger Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformations is generalized to a category with its algebra of mappings.

第 2 节

群与 Erlangen 纲领

这 (范畴论) 可视为 Klein Erlangen 纲领的延续,
将几何空间与几何变换群推广为范畴中映射的代数.

— Eilenberg & Mac Lane

同构

定义 (对象之间的同构)

在一个范畴中, 对于两个对象 X, Y 与其间的两个态射 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, 若 $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, 则称 f, g 为 X 与 Y 之间的**同构**, 态射 f, g 互为**逆**.

特别地, 对象 X 与自身的同构称为**自同构**.

同构

例 (线性空间的同构)

$n \times n$ 矩阵 A 可视为线性空间范畴中 $\mathbb{R}^n$ 到自身的态射 $x \mapsto Ax$. 此时, A 作为矩阵可逆与 A 作为态射可逆是一回事.

群

群是一种代数结构. 群的传统定义是一个配有运算的集合.

定义 (群, 传统定义)

设 G 是一个集合, 其上有一种运算, 即对每两个元素 $a, b \in G$ 指定了一个元素 $ab \in G$, 满足

- 单位律, 即存在特定的元素 e, 使得 $\forall a \in G\, ae = ea = a$;
- 结合律, 即对任意 $a, b, c \in G$, $(ab)c = a(bc)$;
- 逆元的存在性, 即对任意 $a \in G$ 存在 $b \in G$ 使得 $ab = ba = e$, 此时记 $b = a^{-1}$;

则称 G 为群.

群

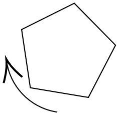
例 (整数加法群)

整数集合 $\mathbb{Z}$ 关于加法运算 $+$ 构成群:

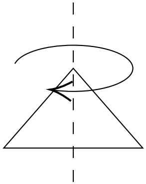
- 0 为单位元, 即 $\forall a \in \mathbb{Z}\ a + 0 = 0 + a = a$;
- 结合律即加法结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 元素 a 的逆元为 $-a$, 即 $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

对称性

对称性的例子:



正五边形
旋转 $1/5$ 圈



等腰三角形
绕中线翻转

$$\begin{array}{ccc} 2 & \longrightarrow & 9 \\ 1 & \longrightarrow & 8 \\ 0 & \longrightarrow & 7 \\ -1 & \longrightarrow & 6 \\ -2 & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

整数
$+7$

对称性

定义 (对称性)

对称性是自同构.

非平凡自同构 (的存在) 是一个数学对象非常重要的性质.

群

群描述了一个对象的对称性，这体现于如下使用范畴论的定义.

定义 (群, 范畴论视角)

群是满足如下条件的范畴:

- 仅有一个对象;
- 所有态射均为自同构.

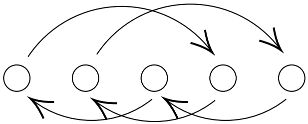
换言之,

$$\text{群} = \text{对称性} = \text{自同构}.$$

对称性

例 (集合范畴中的对称性)

集合范畴中, 对象 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的对称性是对称群 (置换群) S_n.

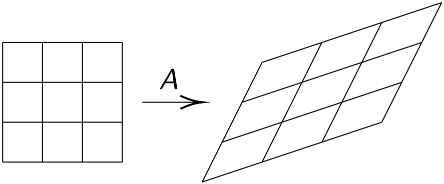
$\sigma =$  $= (14253)$

$$\begin{tikzcd} \{1,2,3,4,5\} \arrow[d, "\sigma"] \\ \{1,2,3,4,5\} \end{tikzcd}$$

对称性

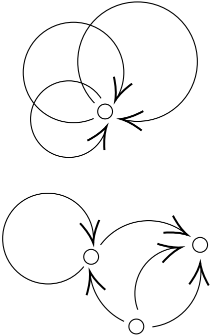
例 (线性空间范畴中的对称性)

线性空间范畴中，对象 $\mathbb{R}^n$ 的对称性是**一般线性群** GL_n.



$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "A"] \\ \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

群与范畴



$$\begin{tikzcd}
\text{置换 (双射)} \arrow[r, dashed] \arrow[d, squiggly] & \text{群} \arrow[d, squiggly] \\
\text{映射} \arrow[r, dashed] & \text{范畴}
\end{tikzcd}$$

Erlangen 纲领

Felix Klein (1849–1925), 德国数学家

Klein 1872 年提出的 Erlangen 纲领旨在以几何空间的变换群对所有几何理论作一分类.

欧氏几何

最早的几何理论是 Euclid 几何.
Euclid 平面几何的 Hilbert 公理体系包含两个基础概念, 点和直线, 以及一个基础关系 “点 P 在直线 ℓ 上”.

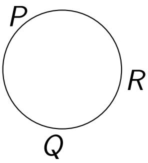
- 公理 1. 过两个不同的点 P, Q, 有唯一的直线 ℓ.
- 公理 2. 设点 P 不在直线 m 上, 那么存在唯一的直线 ℓ 经过点 P 且与 m 没有公共点.
- ...

两种本质相同的几何理论

理论 A. 平面上的圆的综合 (synthetic) 理论

这个理论由公理刻画, 其中包含两个基础概念, 点和圆 (我们想象直线为半径无穷大的圆), 以及一个基础关系 “点 P 在圆 c 上”.

- 公理 1. 过三个不同的点 P, Q, R, 有唯一的圆 c.
- 公理 2. 设点 P 在圆 c 上, 点 Q 不在 c 上, 那么存在唯一的圆 d 过 P, Q 且与 c 仅有一个公共点 P.
- …

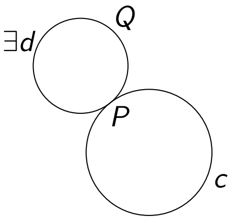


两种本质相同的几何理论

理论 A. 平面上的圆的综合 (synthetic) 理论

这个理论由公理刻画，其中包含两个基础概念，点和圆 (我们想象直线为半径无穷大的圆)，以及一个基础关系 “点 P 在圆 c 上”.

- 公理 1. 过三个不同的点 P, Q, R, 有唯一的圆 c.
- 公理 2. 设点 P 在圆 c 上，点 Q 不在 c 上，那么存在唯一的圆 d 过 P, Q 且与 c 仅有一个公共点 P.
- ...



两种本质相同的几何理论

理论 A. 平面上的圆的综合 (synthetic) 理论

这个理论由公理刻画, 其中包含两个基础概念, 点和圆 (我们想象直线为半径无穷大的圆), 以及一个基础关系 “点 P 在圆 c 上”.

- 公理 1. 过三个不同的点 P, Q, R, 有唯一的圆 c.
- 公理 2. 设点 P 在圆 c 上, 点 Q 不在 c 上, 那么存在唯一的圆 d 过 P, Q 且与 c 仅有一个公共点 P.
- ...

两种本质相同的几何理论

理论 B. 球面上的圆的分析 (analytic) 理论

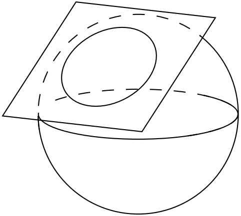
(这个理论建立在实数理论的基础上.)
定义球面为集合

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\};$$

球面上的圆为球面与平面

$$ax + by + cz + d = 0$$

的交集.

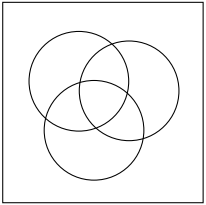


一个平面与球面相交于球面上的一个圆.

Erlangen 纲领

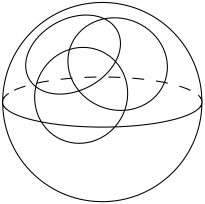
上述两种几何是本质相同的.

(哲学用语: 多重可实现性 multiple realizability)



平面上的圆

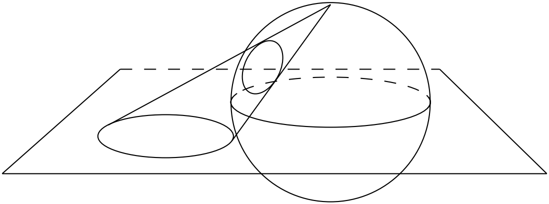
$\Longleftrightarrow$



球面上的圆

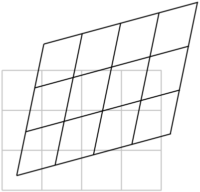
Erlangen 纲领

通过球极投影，球面上的圆变为平面上的圆，从而两种几何理论之间有一个对应.

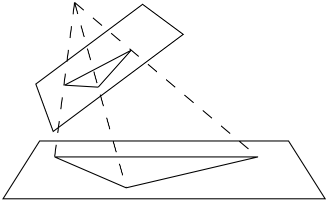


Erlangen 纲领

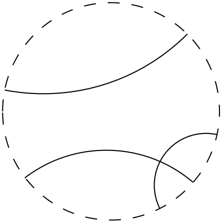
在 Klein 生活的年代, 几何学蓬勃发展, 产生了多个互不联系的分支.



仿射几何



射影几何



双曲几何

Erlangen 纲领

问题: 哪些几何是本质相同的, 哪些是本质不同的?

Erlangen 纲领

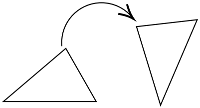
问题: 哪些几何是本质相同的, 哪些是本质不同的?

解决方案 (Klein, Erlangen 纲领):

考虑几何理论对应的空间的变换群.

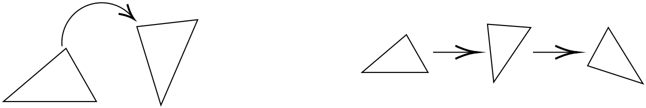
Erlangen 纲领

任何一类对象的系统理论都需要一种 "相等" 的概念，或相等的判据. 在任何一种几何理论中，称两个几何对象相等就是指存在一个几何变换将其中一个对象变为另一个对象.



Erlangen 纲领

任何一类对象的系统理论都需要一种 “相等” 的概念, 或相等的判据. 在任何一种几何理论中, 称两个几何对象相等就是指存在一个几何变换将其中一个对象变为另一个对象.



公理 “等同于同一对象的事物彼此相等” 要求几何变换满足如下条件: 两个接连进行的变换的复合仍是一个几何变换, 此所谓几何变换群.

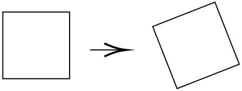
Erlangen 纲领

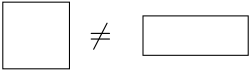
变换群同时决定了何种性质能称为几何性质.
几何对象的一种性质 (例. 一个三角形是等边三角形), 仅当它在所有几何变换下保持不变时, 才能称为一种几何性质; 这个性质可能随着变换群的扩张而破坏.

Erlangen 纲领

Klein 最重要的断言是, 通过考虑变换群, 底层几何对象的具体性质被隐去了; 我们可以把点, 线, 面换成任何形状, 只要几何理论基于同样的变换群, 它的实质内容不变: 使用一组特定几何元素证明的定理对于任何其它的选择同样成立.

几何变换



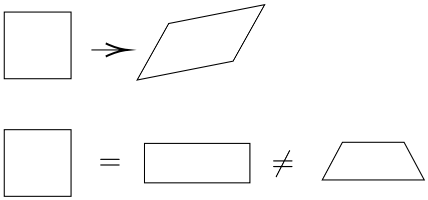


欧氏几何

平移, 旋转, 翻转 $\rightsquigarrow \mathrm{Eul}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$

方形是一种几何性质.

几何变换

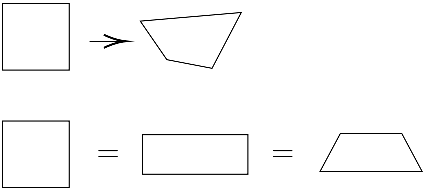


仿射几何

仿射变换 $\rightsquigarrow \mathrm{Aff}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}(n)$

方形不再是几何性质, 但平行四边形是几何性质.

几何变换



射影几何

射影变换 $\rightsquigarrow \mathrm{PGL}(n+1) \simeq \mathrm{GL}(n+1)/\mathbb{R}^{\times}$

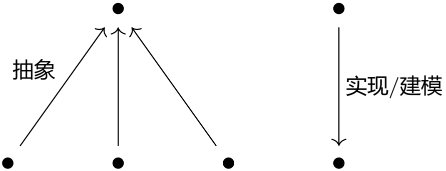
平行四边形不再是几何性质.

事实上, 这时所有四边形 (除去有三点共线的情形) 都是相同的.

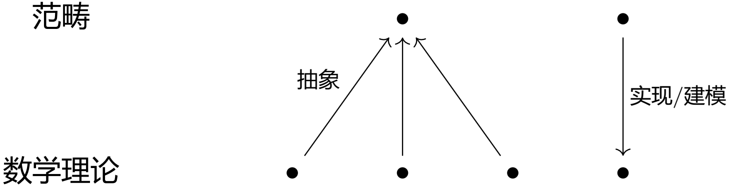
群与几何

群

几何理论



范畴与数学



第 3 节

万有结构与米田引理

人的本质并不是单个人所固有的抽象物. 在其现实性上, 它是一切社会关系的总和.

— Karl Marx

目录

万有结构

万有结构 (universal constructions) 是范畴论中以一个对象与其它对象的关系来定义一个对象的手段.

最小值

最小值

设 X 是由一些自然数组成的集合. 定义 X 的最小值是 X 的这样一个元素 m: 对任意 $n \in X$, 都有 $m \leq n$.

可以看到, 我们定义元素 m 的方式是规定它与其它元素的关系: 对任意 $n \in X$, 都有 $m \leq n$.

始对象

最小值在范畴中的类比是始对象.

定义 (始对象)

设 C 为范畴. 我们称对象 s 是 C 的**始对象**, 是指 s 到 C 的任意对象 c 有**唯一**的态射.

取整

取整是一种万有结构. 回忆一个实数向下取整的定义,

定义 (向下取整)

实数 a 的向下取整 $\operatorname{floor}(a)$ 是不超过 a 的最大整数.
换言之, 对任意整数 n, $n \leq \operatorname{floor}(a)$ 当且仅当, 作为实数有 $n \leq a$.

取整

取整是一种万有结构. 回忆一个实数向下取整的定义,

定义 (向下取整)

实数 a 的向下取整 $\mathrm{floor}(a)$ 是不超过 a 的最大整数.
换言之, 对任意整数 n, $n \leq \mathrm{floor}(a)$ 当且仅当, 作为实数有 $n \leq a$.

在前一种表述中, 最大是一种万有性质 (universal property).

取整

取整是一种万有结构. 回忆一个实数向下取整的定义,

定义 (向下取整)

实数 a 的向下取整 $\mathrm{floor}(a)$ 是不超过 a 的最大整数.
换言之, 对任意整数 n, $n \leq \mathrm{floor}(a)$ 当且仅当, 作为实数有 $n \leq a$.

在前一种表述中, 最大是一种万有性质 (universal property).

由后一种表述可以看到, 我们定义整数 $\mathrm{floor}(a)$ 的方式是规定它与其它整数的关系: 任一整数 n 满足关系 $n \leq \mathrm{floor}(a)$ 当且仅当 $n \leq a$.

取整

取整是一种万有结构. 回忆一个实数向下取整的定义,

定义 (向下取整)

实数 a 的向下取整 $\mathrm{floor}(a)$ 是不超过 a 的最大整数.
换言之, 对任意整数 n, $n \leq \mathrm{floor}(a)$ 当且仅当, 作为实数有 $n \leq a$.

在前一种表述中, 最大是一种万有性质 (universal property).

由后一种表述可以看到, 我们定义整数 $\mathrm{floor}(a)$ 的方式是规定它与其它整数的关系: 任一整数 n 满足关系 $n \leq \mathrm{floor}(a)$ 当且仅当 $n \leq a$. 使这个性质成为 $\mathrm{floor}(a)$ 的定义的一个重要的事实是, 只要给定了一个整数与所有整数 n 的关系, 就唯一确定了这个整数.

生成向量空间

集合生成的向量空间是一种万有结构.

定义 (集合生成的向量空间, 传统定义)

集合 X 生成的向量空间 V_X 是由形如

$$\sum_i a_i x_i$$

的形式和构成的空间, 其中 a_i 为实数, x_i 为 X 的元素.

注意 X 可视为 V_X 的一组基.

生成向量空间

集合生成的向量空间是一种万有结构.

定义 (集合生成的向量空间, 万有结构定义)

集合 X 生成的向量空间 V_X 是包含 X 的向量空间中的始对象, 即 "包含 X 的最小向量空间".
换言之, 对任意向量空间 W 以及集合映射 $X \to W$, 都存在唯一的线性映射 $V_X \subset W$ 使得右边交换图成立.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & \\ V_X \arrow[r, dashed, "\exists!"'] & W \end{tikzcd}$$

生成向量空间

集合生成的向量空间是一种万有结构.

定义 (集合生成的向量空间, 万有结构定义)

集合 X 生成的向量空间 V_X 是包含 X 的向量空间中的始对象, 即 "包含 X 的最小向量空间".

换言之, 对任意向量空间 W 以及集合映射 $X \to W$, 都存在唯一的线性映射 $V_X \subset W$ 使得右边交换图成立.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & \\ V_X \arrow[r, dashed, "\exists!"'] & W \end{tikzcd}$$

在前一种表述中, 始对象是一种万有性质.

生成向量空间

集合生成的向量空间是一种万有结构.

定义 (集合生成的向量空间, 万有结构定义)

集合 X 生成的向量空间 V_X 是包含 X 的向量空间中的始对象, 即 “包含 X 的最小向量空间”.
换言之, 对任意向量空间 W 以及集合映射 $X \to W$, 都存在唯一的线性映射 $V_X \subset W$ 使得右边交换图成立.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d] \arrow[dr] & \\
V_X \arrow[r, dashed, "\exists!"'] & W
\end{tikzcd}
$$

在前一种表述中, 始对象是一种万有性质.

由后一种表述可以看到, 我们定义向量空间 V_X 的方式是规定它与其它向量空间的关系: 对任何向量空间 W, 线性映射 $V_X \to W$ 等同于集合映射 $X \to W$.

无交并

集合的无交并 (disjoint union) 是一种万有结构.

定义 (无交并, 传统定义)

集合 X, Y 的无交并是

$$X + Y := \{(x, 0) \mid x \in X\} \cup \{(y, 1) \mid y \in Y\}.$$

这个定义表达了将两个集合放在一起而不重叠的直观.

和

集合的无交并是范畴论意义下的和.

定义 (范畴论和)

在一个范畴中, 对象 X, Y 的和是 "X, Y 到一个对象各有一个态射" 这种结构中的始对象, 即 "包含 X, Y 的最小集合".

换言之, 对任意对象 Z, 态射 $X+Y \to Z$ 等同于两个态射 $X \to Z$, $Y \to Z$ 的组合.

$$
\begin{tikzcd}
& Z & \\
& X+Y \arrow[u, dashed, "\exists!"] & \\
X \arrow[ur] \arrow[uur] & & Y \arrow[ul] \arrow[uul]
\end{tikzcd}
$$

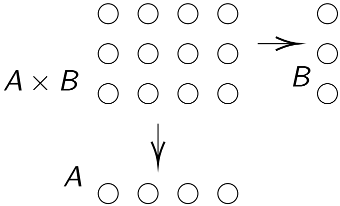
乘积

集合的乘积是一种万有结构. 回忆两个集合乘积的定义,

定义 (集合的乘积)

两个集合 A, B 的**乘积** $A \times B$ 是如下的集合,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$



乘积

集合的乘积是范畴论乘积的特例.

定义 (范畴论乘积)

在一个范畴中, 对象 X, Y 的乘积是 "一个对象到 X, Y 各有一个态射" 这种结构中的终对象.
换言之, 对任意对象 Z, 态射 $Z \to X \times Y$ 等同于两个态射 $Z \to X, Z \to Y$ 的组合.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[d, dashed, "\exists!"'] & \\
& X \times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

在范畴论的意义下, 乘积与和相对偶.

其它万有结构

- 集合生成的自由群
- 度量空间的完备化
- 拓扑空间子集的闭包
- 拓扑空间的 Stone–Čech 紧化

态射函子

定义 (态射函子)

设 C 为范畴. 以 $\mathsf{C}(c, c')$ 表示 c 到 c' 的态射的集合, 定义态射函子

$$\mathsf{C}(c, -)\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set},$$

将对象 c' 对应到集合 $\mathsf{C}(c, c')$, 将态射 $f\colon c' \to c''$ 对应到映射 $\mathsf{C}(c, c') \to \mathsf{C}(c, c'')$, $g \mapsto f \circ g$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ c' \arrow[r, "f"'] & c'' \end{tikzcd}$$

函子 $\mathsf{C}(c, -)\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ 记录了一个对象 c 与所有对象的 “关系” 的全体.

态射函子

定义 (态射函子)

设 C 为范畴. 以 $\mathrm{C}(c, c')$ 表示 c 到 c' 的态射的集合, 定义态射函子

$$\mathrm{C}(c, -) \colon \mathrm{C} \to \mathrm{Set},$$

将对象 c' 对应到集合 $\mathrm{C}(c, c')$, 将态射 $f \colon c' \to c''$ 对应到映射 $\mathrm{C}(c, c') \to \mathrm{C}(c, c'')$, $g \mapsto f \circ g$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ c' \arrow[r, "f"'] & c'' \end{tikzcd}$$

函子 $\mathrm{C}(c, -) \colon \mathrm{C} \to \mathrm{Set}$ 记录了一个对象 c 与所有对象的 “关系” 的全体.
前面我们看到, 规定了一个对象与其它对象的关系, 就完全定义了这个对象.

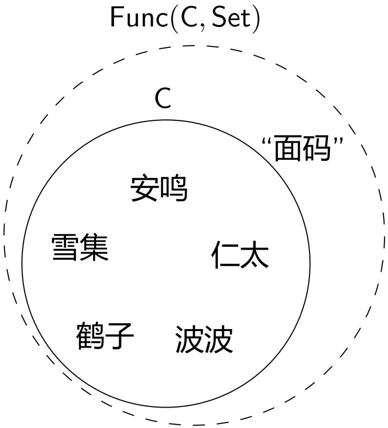
广义对象

定义 (广义对象, 可表函子)

对范畴 C, 定义 C 的广义对象为函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$.
形如 $\mathsf{C}(c, -)$ 的函子称为可表函子.

我们可将 $F(c)$ 想象为 $\mathsf{C}(F, c)$, 也即从 “广义对象” F 到对象 c 的态射集合.

广义对象



未闻花名主角团的广义对象“面码”

米田嵌入

定义 (米田嵌入)

范畴 C 的米田嵌入[a] (Yoneda embedding) 是函子[b]

$$h\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Func}(\mathsf{C}, \mathsf{Set}), \quad h(c) = \mathsf{C}(c, -).$$

我们常常将 C 的对象 c 与可表函子 $\mathsf{C}(c, -)$ 等同起来, 也即视 C^{op} 为 $\mathrm{Func}(\mathsf{C}, \mathsf{Set})$ 的子范畴.

[a] 米田信夫 (1930–1996, 日本数学家和计算机科学家)
[b] op 表示这个函子是反变函子, 即反转箭头的方向.

米田引理

引理 (米田引理)

$$\mathrm{Func}(\mathsf{C},\mathsf{Set})\big(F,\underbrace{\mathsf{C}(c,-)}_{c\text{ 在 }\mathrm{Func}(\mathsf{C},\mathsf{Set})\text{ 中的化身}}\big)\simeq\underbrace{F(c)}_{\text{想象为 }\mathsf{C}(F,c)}.$$

推论 (“人是社会关系的总和” [1])

米田嵌入

$$h\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}}\to \mathrm{Func}(\mathsf{C},\mathsf{Set})$$

是全忠实 (fully faithful) 函子, 也即 h 作用在 C 的两个对象之间的态射集合上是双射. 这是这个函子得名嵌入的原因.

[1]这是 Marx 原话的一个不太合适的缩句, 但在此处获得了某种解释.