§1.1 域

线性代数的基本研究对象是线性空间和其间的线性映射. 线性空间的概念需要以域的概念为基础来建立. 本节讨论域的基本概念. 粗略地说, 域是一个这样的集合, 其中的元素可以做加法、减法、乘法和除法运算, 并且这些运算满足预期的性质. 严格定义如下.

定义 1.1. 设集合F上给定了两个运算, 称为**加法**和**乘法**, 分别对F中任意两个元素x,y给出F中的元素$x+y$和xy, 并且满足下列性质:

(1) 对任意$x,y,z\in F$有

$$x+y=y+x,\quad xy=yx,\quad (x+y)+z=x+(y+z),\quad x(yz)=(xy)z,\quad x(y+z)=xy+xz.$$

(2) 存在两个不同的元素$0_F,1_F\in F$满足对任意$x\in F$有$0_F+x=x, 1_Fx=x$.

(3) 对任意$x\in F$, 存在$y\in F$满足$x+y=0_F$, 并且当$x\neq 0_F$时, 存在$z\in F$满足$xz=1_F$.

则称集合F(连同它上面的加法和乘法运算)为一个**域**(field).

注 1.1.

- 加法和乘法运算指两个映射$\alpha,\mu: F\times F\to F$, $\alpha(x,y)=x+y$, $\mu(x,y)=xy$. 这里$F\times F$指F中元素的有序对构成的集合, 即

$$F\times F=\{(x,y)\mid x,y\in F\}.$$

  从集合论的角度, 有序对(x,y)可以定义为$\{\{x\},\{x,y\}\}$(Kuratowski, 1921), 而映射可以定义为其图像.

- 性质(1)中的前两个式子分别称为加法和乘法的交换率, 接下来的两个式子分别称为加法和乘法的结合率, 最后一个式子称为乘法对加法的分配律. 由交换率和结合律, 对任意有限个$x_1,\dots,x_n\in F$, 表达式$\sum_{i=1}^n x_i$和$\prod_{i=1}^n x_i$有意义. 由分配律, $(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{j=1}^m y_j)=\sum_{i,j}x_iy_j$.

例 1.1.

- 有理数集$\mathbb{Q}$、实数集$\mathbb{R}$和复数集$\mathbb{C}$在数的加法和乘法下是域, 分别称为有理数域、实数域和复数域.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}):=\{x+\sqrt{2}y\mid x,y\in\mathbb{Q}\}$在数的加法和乘法下是域.
- 整数集$\mathbb{Z}$和正整数集$\mathbb{N}$在数的加法和乘法下不是域.
- 设p是素数. 对$x\in\mathbb{Z}$, 记

$$\bar{x}=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\equiv x \mod p\},$$
$$\mathbb{F}_p:=\{\bar{x}\mid x\in\mathbb{Z}\}.$$

  容易看出, $\mathbb{F}_p=\{\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{p-1}\}$. 因此$|\mathbb{F}_p|=p$. 定义

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y},\qquad \bar{x}\bar{y}=\overline{xy}.$$

  容易证明该定义良定, 并且$\mathbb{F}_p$是域(主要是$\bar{x}^{-1}$存在).

- 有理函数域$f/g:\mathbb{C}\smallsetminus\{\text{有限个点}\}\to\mathbb{C}$. □

引理 1.1. 满足性质(2)的元素0_F和1_F是唯一的.

证明. 设$0_F,0_F'\in F$满足对任意$x\in F$有$0_F+x=x$, $0_F'+x=x$. 在第一个式子中取$x=0_F'$, 得$0_F+0_F'=0_F'$. 在第二个式子中取$x=0_F$, 得$0_F'+0_F=0_F$. 但$0_F+0_F'=0_F'+0_F$. 所以$0_F'=0_F$.

类似地, 设$1_F,1_F'\in F$满足对任意$x\in F$有$1_Fx=x$, $1_F'x=x$. 在第一个式子中取$x=1_F'$, 得$1_F1_F'=1_F'$. 在第二个式子中取$x=1_F$, 得$1_F'1_F=1_F$. 但$1_F1_F'=1_F'1_F$. 所以$1_F'=1_F$. □

满足性质(2)的唯一元素0_F和1_F分别称为F中的**零元素**和**壹元素**. 当无歧义时, 分别记为0和1.

此时需要注意, 它们一般并不是真正的数, 只是F中的两个特殊元素, 分别用"0"和"1"这两个记号来表示.

引理 1.2. (1) 对任意$x \in F$, 满足性质(3)的元素y是唯一的.

(2) 对任意$x \in F \setminus \{0\}$, 满足性质(3)的元素z是唯一的.

证明. (1) 设$y, y' \in F$满足$x + y = x + y' = 0$. 则

$$y' = 0 + y' = (y + x) + y' = y + (x + y') = y + 0 = y.$$

(2) 设$z, z' \in F$满足$xz = xz' = 1$. 则

$$z' = 1z' = (zx)z' = z(xz') = z1 = z.$$

□

对$x \in F$, 满足$x + y = 0$的唯一元素$y \in F$称为x在F中的**负元素**, 记为$-x$. 当$x \neq 0$时, 满足$xz = 1$的唯一元素$z \in F$称为x在F中的**逆元素**, 记为x^{-1}. 我们可以把这里的负号视为取负元素的操作, 把取逆符号视为取逆元素的操作, 即考虑映射

$$F \to F, x \mapsto -x, \qquad F \setminus \{0\} \to F, x \mapsto x^{-1}.$$

于是, 形如$-(-x)$ 和$-x^{-1}$的表达式有意义. 我们定义减法和除法运算为

$$x - y = x + (-y), \qquad x/y = xy^{-1} \ (y \neq 0).$$

命题 1.3. 给定域F.

(1) (加法消去律)设$x, y, z \in F$. 如果$x + z = y + z$, 则$x = y$.

(2) 对任意$x \in F$有$0x = 0$.

(3) 设$x, y \in F$满足$xy = 0$. 则$x = 0$或$y = 0$.

证明. (1) 两边同时加上$-z$, 得

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z).$$

而

$$(x + z) + (-z) = x + (z + (-z)) = x + 0 = x.$$

类似地,

$$(y + z) + (-z) = y.$$

因此$x = y$.

(2) 注意到$0 + 0 = 0$. 因此$(0 + 0)x = 0x$. 这推出$0x + 0x = 0x + 0$. 由(1)得$0x = 0$.

(3) 若$x \neq 0$, 则$x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1y = y$. 另一方面, 由(2)有$x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$. 因此$y = 0$. □

注 1.2. 在域的定义中, 我们要求$1 \neq 0$. 从而域中至少有两个元素. 如果不做此要求, 当$1 = 0$时, 由上面命题中的(2)(其证明没有用到$1 \neq 0$), 对任意$x \in F$有$x = 1x = 0x = 0$. 因此$F = \{0\}$. 定义中的要求即是为了排除掉这种情况.

定义 1.2. 域F的子集F'称为F的**子域**(subfield), 如果

(1) $0_F, 1_F \in F'$,

(2) $x, y \in F' \Longrightarrow x + y, -x, xy, x^{-1}$(当$x \neq 0$时) $\in F'$.

注意到子域是域.

例 1.2. $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Q}(\sqrt{2})$都是$\mathbb{C}$的子域.

对$n\in\mathbb{N}$, 记$n_F=\overbrace{1_F+\cdots+1_F}^{n个}$. 容易看出, 对任意$m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$有

$$(m+n)_F=m_F+n_F,\qquad (mn)_F=m_Fn_F.$$

定义 1.3. 对于域F, 其**特征**(characteristic) $\mathrm{char}(F)$ 定义如下: 如果对任意$n\in\mathbb{N}$有$n_F\neq 0_F$, 则定义$\mathrm{char}(F)=0$; 否则, 定义

$$\mathrm{char}(F)=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n_F=0_F\}.$$

命题 1.4. 假设$p=\mathrm{char}(F)\neq 0$. 则

(1) p为素数.

(2) 对$n\in\mathbb{N}$有$n_F=0_F\iff p\mid n$.

证明. (1) 假设p不是素数. 注意到$p\geq 2$. 于是存在$r,s\in\{2,\ldots,n-1\}$满足$n=rs$. 这推出$r_Fs_F=n_F=0_F$. 另一方面, 由特征定义知$r_F,s_F\neq 0_F$, 从而$r_Fs_F\neq 0_F$. 矛盾.

(2) "$\Longleftarrow$". 设$n=pq$. 则$n_F=p_Fq_F=0_Fq_F=0_F$.

"$\Longrightarrow$". 设$n=dp+r$, $0\leq r<p$. 则$0_F=n_F=d_Fp_F+r_F=d_F0_F+r_F=r_F$. 这推出$r=0$, 即$p\mid n$. □

命题 1.5. 设F'是域F的子域. 则$\mathrm{char}(F')=\mathrm{char}(F)$.

证明. 注意到对任意$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$有$n_F=n_{F'}$. 因此$n_F=0_F\iff n_{F'}=0_{F'}$. □

例 1.3. $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Q}$的特征为0, $\mathbb{F}_p$的特征为p.

对$n\in\mathbb{N}$和$x\in F$, 定义

$$nx:=\overbrace{x+\cdots+x}^{n个}=\overbrace{1_Fx+\cdots+1_Fx}^{n个}=(\overbrace{1_F+\cdots+1_F}^{n个})x=n_Fx.$$

注意$n1_F=n_F$. 由于下面的命题, 有时我们需要把特征为0的域与特征非零的域区别对待.

命题 1.6. (1) 如果$\mathrm{char}(F)=0$, 则$nx=0_F\Longrightarrow x=0_F$.

(2) 如果$\mathrm{char}(F)=p>0$并且$p\nmid n$, 则$nx=0_F\Longrightarrow x=0_F$.

(3) 如果$\mathrm{char}(F)=p>0$并且$p\mid n$, 则对任意$x\in F$有$nx=0_F$.

证明. (1)+(2) $nx=0_F\iff n_Fx=0_F$. 在(1)和(2)的条件下有$n_F\neq 0_F$. 因此$x=0_F$.

(3) 此时总有$n_F=0$. 因此$nx=n_Fx=0$. □

对于$n\in\mathbb{N}$, $a\in F$, 如果$n_F\neq 0_F$, 定义$\frac{1}{n}a:=n_F^{-1}a$. 当$\mathrm{char}(F)=0$时, $\frac{1}{n}a$总是有定义的. 当$\mathrm{char}(F)=p>0$ 时, $\frac{1}{n}a$有定义的充要条件是$p\nmid n$. 容易看出, 对这两种情况, 关于$x\in F$的方程$nx=a$有唯一解$x=\frac{1}{n}a$.

习题 1.1. 设F是域.

1. (乘法消去律)设$x,y,z\in F$并且$z\neq 0$. 假设$xz=yz$. 证明$x=y$.
2. 证明映射$\varphi:F\to F$, $\varphi(x)=-x$既单又满, 并且$\varphi^{-1}=\varphi$.
3. 证明对任意$x\in F\setminus\{0\}$有$x^{-1}\neq 0$, 映射$\psi:F\setminus\{0\}\to F\setminus\{0\}$, $\psi(x)=x^{-1}$既单又满, 并且$\psi^{-1}=\psi$.

4. 证明对任意$x \in F$有$(-1)x = -x$.
5. 证明对任意$x \in F \smallsetminus \{0\}$有$(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.
6. 证明对任意$x, y \in F$有$(-x)y = x(-y) = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$.
7. 验证$\mathbb{F}_p$在课上定义的加法和乘法运算下是域.
8. 对$x \in F$和$n \in \mathbb{N}$, 定义$0x = 0_F$, $(-n)x = n(-x)$. 证明对任意$x \in F$和$m, n \in \mathbb{Z}$有
$$(m+n)x = mx + nx, \quad n(x+y) = nx + ny, \quad m(nx) = (mn)x, \quad (mx)(ny) = (mn)(xy).$$
9. 对$x \in F$和$n \in \mathbb{N}$, 定义$x^n = \overbrace{x \cdots x}^{n\text{个}}$. 对$x \neq 0_F$和$n \in \mathbb{N}$, 进一步定义$x^0 = 1_F$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$. 证明对任意$x \in F \smallsetminus \{0_F\}$和$m, n \in \mathbb{Z}$有
$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}, \quad (xy)^n = x^n y^n.$$
10. 证明对任意$n \in \mathbb{Z}$有$(-1_F)^{2n} = 1_F$, $(-1_F)^{2n+1} = -1_F$.
11. 设$\mathrm{char}(F) = p \neq 0$. 证明$(x+y)^p = x^p + y^p, \forall x, y \in F$.
12. 设F是有限域, $|F| = q$. 证明对任意$x \in F$有$x^q = x$. (提示: 对$x \in F \smallsetminus \{0\}$, 映射$F \smallsetminus \{0\} \to F \smallsetminus \{0\}$, $y \mapsto xy$即单又满, 所以$\prod_{y \in F \smallsetminus \{0\}} xy = \prod_{y \in F \smallsetminus \{0\}} y$, 因此$x^{q-1} = 1$.)

§1.2 线性方程组

§1.3 矩阵和初等行变换

§1.4 行简化阶梯矩阵

定义 1.1. 取定域F.

(1) 关于**未知量**$x_1,\dots,x_n\in F$的方程组

$$\begin{cases} A_{11}x_1+\cdots+A_{1n}x_n=y_1 \\ \qquad\quad\cdots\cdots \\ A_{m1}x_1+\cdots+A_{mn}x_n=y_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称为**线性方程组**. 其中给定的$A_{ij},y_i\in F$分别称为方程组的**系数**和**常数项**. 使得方程组成立的$x_1,\dots,x_n$构成的向量$(x_1,\dots,x_n)\in F^n$称为**方程组的解**. 方程组的所有解构成的F^n的子集称为**解空间**.

(2) 在方程组(1.1)中, 如果常数项$y_1=\cdots=y_m=0$, 则称该方程组为**齐次的**; 否则, 称该方程组为**非齐次的**. 零向量$(0,\dots,0)$总是齐次线性方程组的解, 称为**平凡解**.

可以从下面两个角度理解线性方程组:

- 考虑F^m中的向量

$$\alpha_j=(A_{1j},\dots,A_{mj}),\qquad 1\le j\le n,$$
$$\beta=(y_1,\dots,y_m).$$

则$(x_1,\dots,x_n)$是解$\iff \beta=\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j$. 所以方程组有解$\iff \beta\in\operatorname{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. 特别地, 如果$\operatorname{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}=F^m$, 则方程组总有解. 另一方面, 齐次线性方程组只有平凡解$\iff \alpha_1,\dots,\alpha_n$线性无关.

- 考虑映射$T:F^n\to F^m$,

$$T(x_1,\dots,x_n)=(A_{11}x_1+\cdots+A_{1n}x_n,\dots,A_{m1}x_1+\cdots+A_{mn}x_n)=\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j.$$

则解空间为

$$T^{-1}(\beta):=\{\gamma\in F^n\mid T(\gamma)=\beta\}.$$

注意到T线性:

$$T(\gamma_1+\gamma_2)=T(\gamma_1)+T(\gamma_2),\qquad T(c\gamma)=cT(\gamma).$$

这推出对于齐次线性方程组, 解空间$T^{-1}(0)$是F^n的(线性)子空间: $0\in T^{-1}(0)$, 并且如果$\gamma_1,\gamma_2\in T^{-1}(0)$, $c\in F$, 则$T(c\gamma_1+\gamma_2)=cT(\gamma_1)+T(\gamma_2)=0$, 因此$c\gamma_1+\gamma_2\in T^{-1}(0)$. 我们将考察解空间$T^{-1}(0)$的基和维数. 对于非齐次线性方程组, 如果解空间非空, 则它只是"仿射子空间". 具体地说, 如果$T^{-1}(\beta)\neq\varnothing$, 取$\gamma_0\in T^{-1}(\beta)$, 则

$$T^{-1}(\beta)=\gamma_0+T^{-1}(0):=\{\gamma_0+\gamma:\gamma\in T^{-1}(0)\}.$$

下面介绍解线性方程组的Gauss消元法. 先看一个例子.

例 1.1.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

我们分别用①和②表示这两个方程. ① $+(-2)$② 得 $-7x_2-7x_3=0$, 从而 $x_2=-x_3$. 另一方面, ② $+3$① 得 $7x_1+7x_3=0$, 从而 $x_1=-x_3$. 因此, 如果 (x_1,x_2,x_3) 是解, 则 $x_1=x_2=-x_3$. 反过来, 这样的 (x_1,x_2,x_3) 也一定是解. □

我们把方程

$$(c_1A_{11}+\cdots+c_mA_{m1})x_1+\cdots+(c_1A_{1n}+\cdots+c_mA_{mn})x_n=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$$

称为方程组(1.1)中 m 个方程的**线性组合**. 如果把(1.1)中的 m 个方程依次记为①, ..., ⓜ, 则记这个线性组合为 $c_1$① $+\cdots+c_m$ⓜ. 假设方程组

$$\begin{cases} B_{11}x_1+\cdots+B_{1n}x_n=z_1 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ B_{k1}x_1+\cdots+B_{kn}x_n=z_k \end{cases} \tag{1.2}$$

中每个方程都是方程组(1.1)中 m 个方程的线性组合. 则(1.1)的解一定是(1.2)的解. 进一步地, 如果(1.1)中的 m 个方程都是(1.2)中 k 个方程的线性组合, 则这两个方程组有相同的解(此时称这两个方程组**同解**). 称两个方程组**等价**, 如果每个方程组中任何一个方程都是另一个方程组中方程的线性组合. 上面说明了等价的方程组是同解的. Gauss消元法指: 寻找与待解方程组等价的方程组, 使得后者的系数中有尽量多的零. 为了简化记号, 我们引入矩阵的概念.

定义 1.2. 由 F 中元素构成的 m 行 n 列的表 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}$ 称为 F 上的 $m\times n$ **矩阵**. A_{ij} 称为矩阵 A 的 (i,j)**-元**.

- 矩阵 A 可以视为映射
$$\{(i,j)\mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}\to F, \qquad (i,j)\mapsto A_{ij}.$$
- 我们把所有 $m\times n$ 矩阵构成的集合记为 $F^{m\times n}$.
- 我们称 $1\times n$ 矩阵为 n 维**行向量**, 称 $m\times 1$ 矩阵为 m 维**列向量**.
- 我们把 n 维行向量等同为 n 维向量, 并把 1×1 矩阵等同为 F 中的元素. 从而 $F^{1\times n}=F^n$, $F^{1\times 1}=F$.
- 矩阵的**行向量**和**列向量**的概念...

定义 1.3. 设 $A,B\in F^{m\times n}$. 如果每个矩阵的每个行向量是另一矩阵的行向量的线性组合, 则称 A 与 B **行等价**, 记为 $A\sim B$. (**注意与教材不同!**)

容易看出, 行等价为 $F^{m\times n}$ 上的等价关系: $A\sim A$; $A\sim B\implies B\sim A$; $A\sim B, B\sim C\implies C\sim A$.

对于方程组(1.1), 我们记

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \vdots & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}\in F^{m\times n}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in F^{n\times 1}, \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix}\in F^{m\times 1},$$

并把方程组简记为 $AX=Y$. A 称为方程组的**系数矩阵**, $(A,Y)\in F^{m\times(n+1)}$ 称为方程组的**增广矩阵**. 设 $(A,Y)=\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}$, 其中 $\alpha_i\in F^{n+1}$ 为增广矩阵的行向量. 则方程的线性组合 $c_1$① $+\cdots+$

$c_m m$对应行向量的线性组合$\sum_{i=1}^m c_i\alpha_i$. 这推出:

命题 1.1. 设$A, B \in F^{m\times n}$, $Y, Z \in F^{m\times 1}$. 则$(A, Y) \sim (B, Z) \iff$方程组$AX = Y$与$BX = Z$等价. 特别地, 如果$A \sim B$, 则$AX = 0$与$BX = 0$同解.

为了用矩阵来实现Gauss消元法, 我们需要寻找与增广矩阵行等价的"简单"的矩阵. 特别地, 如果"简单"矩阵的第j列有一个矩阵元是1, 其他矩阵元都是0, 我们就认为对未知量x_j完成了消元. 为此, 引入下面的定义.

定义 1.4. (1) 一个矩阵称为是**行简化**的, 如果
  - 每个非零行的第一个非零矩阵元(称为**主元**)都是1;
  - 每个主元所在列的其余矩阵元都是0.

(2) 一个矩阵称为是**行简化阶梯矩阵**, 如果
  - 它是行简化的;
  - 零行都在最下方;
  - 非零行主元的列指标随行指标的增大而增大.

例 1.2. 书上P8, 例5, 例6为行简化矩阵; $I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $0_{m\times n}$, P12的矩阵为行简化阶梯矩阵. 这里I_n称为n阶**单位矩阵**, 其中$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ 这里的δ_{ij}称为Kronecker记号.

我们将证明:

命题 1.2. 任意$A \in F^{m\times n}$行等价于某个行简化阶梯矩阵.

对矩阵的行向量做一般的线性组合比较复杂, 并且不容易判断行等价性. 我们只需下面几类操作, 称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 用某个非零元素$c \in F \setminus \{0\}$乘某行($\alpha_i \mapsto c\alpha_i$).

(2) 把一行的c倍加到另一行上($\alpha_i \mapsto \alpha_i + c\alpha_j, i \neq j$).

(3) 互换两行($\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j, i \neq j$).

初等行变换可以视为映射$e : F^{m\times n} \to F^{m\times n}$.

命题 1.3. 初等行变换可逆, 并且逆仍为初等行变换. 从而$e(A) \sim A$.

证明. 若e为$\alpha_i \mapsto c\alpha_i$, 则$e^{-1}$为$\alpha_i \mapsto c^{-1}\alpha_i$. 若$e$为$\alpha_i \mapsto \alpha_i + c\alpha_j$, 则$e^{-1}$为$\alpha_i \mapsto \alpha_i - c\alpha_j$. 若$e$为$\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$, 则$e^{-1} = e$. □

命题1.2的证明. 先利用前两类初等行变换化为行简化矩阵: 逐行做, 先把非零行的主元变为1, 然后把所在列的其余矩阵元变为0. 然后交换行. □

下面给出解方程组$AX = Y$的过程, 其中$A \in F^{m\times n}, X \in F^{n\times 1}, Y \in F^{m\times 1}$.

- 利用初等行变换, 将增广矩阵(A, Y)化为行简化阶梯矩阵(R, Z). 则R也是行简化阶梯矩阵. 此时, $AX = Y$与$RX = Z$同解.
- 设R的所有非零行为前r行($r \leq \min\{m, n\}$), 第i行($1 \leq i \leq r$)中的主元在第k_i列, $k_1 < \cdots <$

k_r. 记$J=\{1,\ldots,n\}\setminus\{k_1,\ldots,k_r\}$. 则方程组$RX=Z$为

$$\begin{cases} x_{k_1}+\sum_{j\in J}c_{1j}x_j=z_1\\ \qquad\vdots\\ x_{k_r}+\sum_{j\in J}c_{rj}x_j=z_r\\ 0=z_{r+1}\\ \quad\vdots\\ 0=z_m \end{cases}$$

- 若$r<m$且$z_{r+1},\ldots,z_m$不全为0, 则方程组无解.
- 否则, 若$r=n$, 则$J=\varnothing$, $k_i=i$, 从而方程组有唯一解

$$(x_1,\ldots,x_n)=(z_1,\ldots,z_r).$$

- 否则, 解为

$$\begin{cases} x_{k_1}=z_1-\sum_{j\in J}c_{1j}x_j\\ \qquad\vdots\\ x_{k_r}=z_r-\sum_{j\in J}c_{rj}x_j \end{cases}$$

其中对$j\in J$, 未知量x_j在F中任意取值.

定理 1.4. 设$F\subset K$. 若F上的方程组$AX=Y$在K中有解, 则在F中也有解.

证明. 在K中有解 $\Longrightarrow$ "$z_{r+1}=\cdots=z_m=0$" $\Longrightarrow$ 在F中有解. □

下面讨论齐次线性方程组的解空间的基和维数.

- 对$j_0\in J$, 在解

$$\begin{cases} x_{k_1}=-\sum_{j\in J}c_{1j}x_j\\ \qquad\vdots\\ x_{k_r}=-\sum_{j\in J}c_{rj}x_j \end{cases} \tag{1.3}$$

中取$x_{j_0}=1$, $x_j=0$ $(j\in J\setminus\{j_0\})$, 得解

$$\alpha_{j_0}=(x_1,\ldots,x_n),$$

其中$x_{j_0}=1$, $x_j=0$ $(j\in J\setminus\{j_0\})$, $x_{k_i}=-c_{ij_0}$.

- 断言: $\{\alpha_j\mid j\in J\}$是解空间$T^{-1}(0)$的基, 从而$\dim T^{-1}(0)=|J|=n-r$. 事实上:
线性无关: 设$\sum_{j\in J}c_j\alpha_j=0$. 注意到$\sum_{j\in J}c_j\alpha_j$的第$j$个分量为$c_j(j\in J)$. 所以$c_j=0$.
生成解空间: 设$\alpha\in T^{-1}(0)$, $\alpha=(x_1,\ldots,x_n)$. 则(1.3)式成立. 这推出$\alpha=\sum_{j\in J}x_j\alpha_j$.

定理 1.5. 设$A\in F^{m\times n}, m<n$. 则齐次线性方程组$AX=0$有非平凡解.

证明. 解空间的维数$n-r=(n-m)+(m-r)>0$. □

注 1.1. 该定理等价于讲义中定理2.8.

最后, 我们证明上面给出的矩阵行等价的定义与教材的定义一致.

命题 1.6. 对$A,B\in F^{m\times n}$, TFAE:

(1) $A\sim B$.

(2) 存在有限个初等行变换$e_1,\ldots,e_k$使得$e_1\circ\cdots\circ e_k(A)=B$.

证明. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 由命题1.2的证明, 存在初等行变换$f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s$使得

$$f_1 \circ \cdots \circ f_r(A) = R, \qquad g_1 \circ \cdots \circ g_s(B) = S,$$

期中R, S为行简化阶梯矩阵. 则$R \sim S$. 记$W \subset F^n$为R的行空间(即行向量生成的子空间). 则W也等于S的行空间. 容易看出:

- R和S的主元的列指标集可以由子空间W识别出来. 事实上, 这两个列指标集均为

  $$\{1 \le k \le n : \text{存在}(x_1, \ldots, x_n) \in W\text{满足}x_k = 1\text{并且当}1 \le j < k\text{时有}x_j = 0\}.$$

  从而R与S主元的位置相同.
- 利用行简化阶梯矩阵主元所在列的其余矩阵元都是0, 进一步看出$R = S$.

这推出$g_s^{-1} \circ \cdots \circ g_1^{-1} \circ f_1 \circ \cdots \circ f_r(A) = B$.

"(2)$\Longrightarrow$(1)": 显然. □

§1.5 矩阵乘法

先考虑矩阵的加法和纯量乘法. 对$A, B \in F^{m\times n}$, $c \in F$, 定义$A + B, cA \in F^{m\times n}$为

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \qquad (cA)_{ij} = cA_{ij}.$$

与F^n类似, $F^{m\times n}$是线性空间. ($F^{1\times n} = F^n$, $F^{m\times 1} \cong F^m$.)

- $\dim F^{m\times n} = mn$: 对$1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, 记$E_{ij} \in F^{m\times n}$为(i, j)-元为1而其他矩阵元均为0的矩阵. 则$\{E_{ij}\}$是基.
- 称$A \in F^{n\times n}$**对称**, 如果对任意$i, j \in \{1, \ldots, n\}$有$A_{ij} = A_{ji}$. $\{A \in F^{n\times n} \mid A\text{对称}\}$是$F^{n\times n}$的子空间, $\dim = n(n + 1)/2$.
- 设$F = \mathbb{C}$. 称$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为**Hermite矩阵**或**自伴矩阵**, 如果对任意$i, j \in \{1, \ldots, n\}$有$A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A \text{ Hermite}\}$不是$\mathbb{C}^{n\times n}$的(复)子空间! (注意到$I_n$ Hermite, 而$\sqrt{-1}I_n$不Hermite.) 另一方面, 如果视$\mathbb{C}^{n\times n}$为实线性空间, 则Hermite矩阵构成实子空间. $\dim_{\mathbb{R}} = n^2$.

下面考虑矩阵乘法.

定义 1.5. 设$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$. 定义$AB \in F^{m\times p}$为

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \qquad 1 \le i \le m, 1 \le j \le p.$$

- 不是总能定义.
- 对$A, B \in F^{n\times n}$, 一般$AB \ne BA$.
- 方程组$AX = Y$中的"AX"可以理解为矩阵乘法.

命题 1.7. (1) 有定义时, $A(BC) = (AB)C$.

(2) 有定义时, $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.

(3) 有定义时, 对任意$c \in F$有$c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

(4) 设$A \in F^{m\times n}$. 则$I_mA = AI_n = A$.

(5) 记$0_{m\times n} \in F^{m\times n}$为零矩阵. 对$A \in F^{m\times n}$, 有$0_{k\times m}A = 0_{k\times n}$, $A0_{n\times p} = 0_{m\times p}$.

证明. (1)

$$(A(BC))_{ij} = \sum_k A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_k A_{ik}\left(\sum_l B_{kl}C_{lj}\right) = \sum_{k,l} A_{ik}B_{kl}C_{lj},$$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_l (AB)_{il} C_{lj} = \sum_l \left(\sum_k A_{ik} B_{kl} \right) C_{lj} = \sum_{k,l} A_{ik} B_{kl} C_{lj}.$$

(2), (3), (5)显然. (4)自己验证. □

- 乘法结合律 $\Longrightarrow ABC$有意义. 定义$A^k = A \cdots A$.
- 设$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$. 若$B = (B_1, \ldots, B_p)$, $B_i \in F^{n\times 1}$, 则$AB = (AB_1, \ldots, AB_p)$. 类似地, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B \end{pmatrix}$, 其中$\alpha_i \in F^n$.
- 若$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $\beta_i \in F^p$, 则$AB = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$, 其中$\gamma_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}\beta_k$为$\beta_i$的线性组合. 回忆初等行变换就是对行向量做线性组合. 因此, 对A做初等行变换可以通过左乘矩阵$A \mapsto EA$来实现.

注 1.2. 上面最后两条都是分块矩阵乘法的特殊情况.

命题 1.8. 设$e : F^{m\times\mathbb{N}} \to F^{m\times\mathbb{N}}$为初等行变换, 其中$F^{m\times\mathbb{N}} := \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{m\times n}$. 则对任意$A \in F^{m\times\mathbb{N}}$有$e(A) = e(I_m)A$.

证明. 由上面的讨论, 存在$P \in F^{m\times m}$满足对任意$A \in F^{m\times\mathbb{N}}$有$e(A) = PA$. 取$A = I_m$得$P = e(I_m)$. □

定义 1.6. $E \in F^{m\times m}$称为**初等矩阵**, 如果存在初等行变换$e : F^{m\times\mathbb{N}} \to F^{m\times\mathbb{N}}$使得$E = e(I_m)$.

初等矩阵有下面三种:

(1) e为$\alpha_i \mapsto c\alpha_i$, $c \neq 0$. 则$e(I_m) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, c, 1, \ldots, 1)$.

(2) e为$\alpha_i \mapsto \alpha_i + c\alpha_j$, $i \neq j$. 则$e(I_m) = I_m + cE_{ij}$.

(3) e为$\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$, $i \neq j$. 则$e(I_m) = I_m + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$.

推论 1.9. 设$A, B \in F^{m\times n}$. TFAE:

(1) 存在初等行变换$e_1, \ldots, e_k$使得$B = e_1 \circ \cdots \circ e_k(A)$.

(2) 存在k个$m \times m$初等矩阵的乘积$P = E_1 \ldots E_k$满足$B = PA$.

证明. 只需注意到

$$e_1 \circ \cdots \circ e_k(A) = e_1(I_m)e_2 \circ \cdots \circ e_k(A) = e_1(I_m)e_2(I_m)e_3 \circ \cdots \circ e_k(A) = \cdots = e_1(I_m) \cdots e_k(I_m)A.$$

□

§1.6 可逆矩阵

定义 1.7. 设$A \in F^{n\times n}$. 如果存在$B \in F^{n\times n}$使得$AB = BA = I_n$, 则称A**可逆**, 并称B为A的**逆矩阵**.

命题 1.10. 可逆矩阵的逆矩阵唯一.

证明. 设A可逆, B_1和B_2均为A的逆矩阵. 则$B_1 A = AB_2 = I_n$. 于是

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2.$$

□

若A可逆, 记A的逆为A^{-1}.

- A可逆$\Longrightarrow A^{-1}$可逆, 并且$(A^{-1})^{-1}=A$.
- A,B可逆$\Longrightarrow AB$可逆, 并且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 类似地, 若干个可逆矩阵的乘积可逆.
- 初等矩阵可逆: 对初等矩阵$e(I)$, 考虑$e^{-1}(I)$. 注意到有$e(A)=e(I)A$. 从而$e(I)e^{-1}(I)=e(e^{-1}(I))=I$, $e^{-1}(I)e(I)=e^{-1}(e(I))=I$. 因此$e(I)$可逆并且$e(I)^{-1}=e^{-1}(I)$.

引理 1.11. 设$R\in F^{n\times n}$是行简化阶梯矩阵. 若R可逆, 则$R=I_n$.

证明. 若不然, 则R的最后一行为0. 这推出RR^{-1}的(n,n)-元为0, 矛盾. □

定理 1.12. 设$A\in F^{n\times n}$. TFAE:

(1) A可逆.

(2) A与I_n行等价.

(3) A是若干个初等矩阵的乘积.

证明. "(2)$\Longrightarrow$(3)"和"(3)$\Longrightarrow$(1)"显然. "(1)$\Longrightarrow$(2)": 取与A行等价的行简化阶梯矩阵R. 则存在初等矩阵$E_1,\ldots,E_k$使得$R=E_1\cdots E_kA$. 由E_i和A可逆推出R可逆. 由引理, $R=I_n$. □

推论 1.13. 设$A,B\in F^{m\times n}$. 则A与B行等价$\Longleftrightarrow$存在可逆矩阵$P\in F^{m\times m}$使得$B=PA$. □

下面的结论可以帮助我们求矩阵的逆.

推论 1.14. 设$A\in F^{n\times n}$可逆, 初等行变换$e_1,\ldots,e_k: F^{n\times\mathbb{N}}\to F^{n\times\mathbb{N}}$满足$e_1\circ\cdots\circ e_k(A)=I_n$. 则$e_1\circ\cdots\circ e_k(I_n)=A^{-1}$.

证明. 记$E_i=e_i(I_n)$, $P=E_1\cdots E_k$. 则对任意$B\in F^{n\times n}$有$e_i(B)=E_iB$, 从而

$$e_1\circ\cdots e_k(B)=E_1\cdots E_kB=PB.$$

取$B=A$和$B=I_n$得

$$e_1\circ\cdots e_k(A)=PA,\qquad e_1\circ\cdots e_k(I_n)=P.$$

条件推出$PA=I_n$, 从而$A^{-1}=P=e_1\circ\cdots\circ e_k(I_n)$. □

推论 1.15. 设$A\in F^{n\times n}$, (A,I_n)与(R,B)行等价.

(1) 若存在非空列指标集$J\subset\{1,\ldots,n\}$使得对任意$i\geq|J|$和$j\in J$有$R_{ij}=0$, 则A不可逆.

(2) 若$R=I_n$, 则A可逆并且$A^{-1}=B$.

证明. 条件推出$A\sim R$. 因此A可逆$\Longleftrightarrow R$可逆.

(1) 只需证R不可逆. 通过对R右乘若干次形如$I_m+E_{ij}+E_{ji}-E_{ii}-E_{jj}$的初等矩阵(相当于交换$R$的列), 不妨设$J=\{1,\ldots,k\}$. 于是把$R$化为行简化阶梯矩阵后, 最后一行为0. 因此不可逆.

(2) 显然A可逆. 由$(A,I_n)\sim(R,B)$得存在可逆矩阵$P\in F^{n\times n}$满足$P(A,I_n)=(I_n,B)$, 即$PA=I_n, PI_n=B$. 这推出$A^{-1}=B$. □

注 1.3. 上面的结果给出了"判断矩阵是否可逆, 当可逆时求出逆矩阵"的算法: 对(A,I_n)进行初等行变换, 试图将它化为行简化阶梯矩阵. 如果在操作过程中出现了形如(R,B)的矩阵, 其中R满足(1), 则A不可逆. 否则, 最后得到的行简化阶梯矩阵将形如(I_n,B), 此时A可逆, 并且$A^{-1}=B$.

定理 1.16. 设$A\in F^{n\times n}$. TFAE:

(1) A可逆.

(2) 对任意$Y \in F^{n\times 1}$, 方程组$AX=Y$有唯一解.

(3) 齐次线性方程组$AX=0$只有平凡解.

(4) 存在$Y \in F^{n\times 1}$, 使得方程组$AX=Y$有唯一解.

(5) 对任意$Y \in F^{n\times 1}$, 方程组$AX=Y$有解.

证明. (1)$\Longrightarrow$(2): $AX=Y \Longleftrightarrow Y=A^{-1}X$.

(2)$\Longrightarrow$(3): 显然.

(3)$\Longrightarrow$(4): 显然.

(4)$\Longrightarrow$(1): (4)推出: 利用初等行变换将增广矩阵(A,Y)化为行简化阶梯矩阵(R,Z)后, R的每列均有主元. 从而只能有$R=I_n$. 所以$A\sim I_n$. 因此A可逆.

(2)$\Longrightarrow$(5): 显然.

(5)$\Longrightarrow$(1): 设A行等价于行简化阶梯矩阵R, 并记$Z=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. 则方程组$RX=Z$有解. 事实上, 设$R=PA$, P可逆, 取$AX=P^{-1}Z$的解X, 则$RX=(PA)X=P(AX)=P(P^{-1}Z)=Z$. 由$RX=Z$有解推出$R$的最后一行非零. 所以$R=I_n$, 从而$A$可逆. □

推论 1.17. 设$A,B\in F^{n\times n}$, $AB=I_n$. 则A,B可逆, 并且$A^{-1}=B$, $B^{-1}=A$.

证明. 设$BX=0$, 则$X=(AB)X=A(BX)=0$, 即方程组$BX=0$只有平凡解. 于是B可逆. 这推出$A=(AB)B^{-1}=B^{-1}$也可逆. 进而有$B=A^{-1}$. □

推论 1.18. 设$A=A_1\cdots A_k$, 其中$A_i\in F^{n\times n}$. 则A可逆$\Longleftrightarrow$每个A_i可逆.

证明. "$\Longleftarrow$": 显然.

"$\Longrightarrow$": 若存在不可逆的A_i, 取i_0为使得A_{i_0}不可逆的最大指标. 则$A_{i_0}X=0$有非平凡解$X\neq 0$. 若$i_0=k$, 则$AX=(A_1\cdots A_{k-1})A_kX=0\Longrightarrow AX=0$有非平凡解$\Longrightarrow A$不可逆. 矛盾. 若$i_0<k$, 则$A_{i_0+1}\cdots A_k$可逆, 于是$(A_{i_0+1}\cdots A_k)X'=X$有解$X'\neq 0$. 而$AX'=A_1\cdots A_{i_0}X=0$, 所以$AX'=0$有非平凡解$\Longrightarrow A$不可逆. 矛盾. □

定理 1.19. 设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(A_1,\dots,A_n)\in F^{n\times n}$, 其中$\alpha_i\in F^n$, $A_i\in F^{n\times 1}$. TFAE:

(1) A可逆.

(2) $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$是$F^n$的基.

(3) $\{A_1,\dots,A_n\}$是$F^{n\times 1}$的基.

证明. (1)$\Longleftrightarrow$(2): A可逆$\Longleftrightarrow$存在$B\in F^{n\times n}$使得$BA=I_n$. 注意到

$$BA=\begin{pmatrix}B_{11}\alpha_1+\cdots+B_{1n}\alpha_n\\ \vdots\\ B_{n1}\alpha_1+\cdots+B_{nn}\alpha_n\end{pmatrix},\qquad I_n=\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \vdots\\ \epsilon_n\end{pmatrix}.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\text{存在} B \in F^{n\times n} \text{使得} BA = I_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{存在} B_{ij} \in F \text{使得} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j = \epsilon_i \\
&\Longleftrightarrow \quad \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\} \subset \operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \\
&\Longleftrightarrow \quad F^n = \operatorname{span}\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\} \subset \operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{是} F^n \text{的基.}
\end{aligned}
$$

(1)$\Longleftrightarrow$(3): A可逆$\Longleftrightarrow AX = 0$只有平凡解. 记$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则$AX = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$. 于是$AX = 0$只有平凡解$\Longleftrightarrow \{A_1, \ldots, A_n\}$线性无关$\Longleftrightarrow \{A_1, \ldots, A_n\}$是基. □

§2.1　线性空间

取定域F和正整数n. 对于$x_1, \dots, x_n \in F$, 称n元有序组$(x_1, \dots, x_n)$为域F上的n**维向量**或n**维**F**-向量**, 并称每个x_i为该向量的一个**分量**.

注 2.1. 从集合论的角度, n元有序组$(x_1, \dots, x_n)$可以定义为映射$\{1, \dots, n\} \to F$, $i \mapsto x_i$.

考虑集合

$$F^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in F\},$$

并在它上面定义

- 向量加法: 对$\alpha = (x_1, \dots, x_n), \beta = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$, 定义
$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$
- 纯量乘法: 对$c \in F$, $\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$, 定义
$$c\alpha = (cx_1, \dots, cx_n).$$

例 2.1. 集合$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^3$中的向量可以理解为平面或空间中的点, 也可以理解为从原点出发指向该点的“箭头”. $\alpha + \beta$按照平行四边形法则. $c\alpha$与α方向相同或相反, 长度为α的长度的$|c|$倍. □

我们把F^n上的向量加法和纯量乘法的性质提炼出来, 引入下面的定义.

定义 2.1. 取定域F. 设集合V上给定了两个运算:

- 向量加法$V \times V \to V$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$;
- 纯量乘法$F \times V \to V$, $(c, \alpha) \mapsto c\alpha$,

并且满足下面的性质(称为**公理**):

(1) 对任意$\alpha, \beta \in V$有$\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(2) 对任意$\alpha, \beta, \gamma \in V$有$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(3) 存在$0_V \in V$满足对任意$\alpha \in V$有$\alpha + 0_V = \alpha$.

(4) 对任意$\alpha \in V$, 存在$\beta \in V$满足$\alpha + \beta = 0_V$.

(5) 对任意$\alpha \in V$有$1_F\alpha = \alpha$.

(6) 对任意$c_1, c_2 \in F$和$\alpha \in V$有$(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$.

(7) 对任意$c \in F$和$\alpha, \beta \in V$有$c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$.

(8) 对任意$c_1, c_2 \in F$和$\alpha \in V$有$(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

则称V为**域**F**上的线性空间**或**向量空间**, 简称为F**-线性空间**或F**-向量空间**. V中的元素称为**向量**. 性质(3)中的0_V称为**零向量**或**原点**(当无歧义时简记为0). 性质(4)中的β称为α的**负向量**, 记为$-\alpha$.

例 2.2. F^n是F-线性空间. 其中

$$0_{F^n} = (0_F, \dots, 0_F),$$

并且对$\alpha = (x_1, \dots, x_n)$有

$$-\alpha = (-x_1, \dots, -x_n).$$

□

线性空间中的元素不一定是真的“向量”. 例如下面的例子.

例 2.3. $\mathbb{C}$是$\mathbb{R}$上的线性空间. $\mathbb{C}^n$也是$\mathbb{R}$上的线性空间. 注意$\mathbb{C}^n$作为实线性空间和复线性空间是

不同的线性空间. 一般地, 若V是复线性空间, 则通过执行"忘掉复结构"的操作(即在做纯量乘法$(c,\alpha)\mapsto c\alpha$时只允许$c\in\mathbb{R}$), 可以把$V$视为实线性空间. 更一般地, 若$F'$是$F$的子域, 则$F$是$F'$-线性空间, F^n也是F'-线性空间, 任意F-线性空间被"忘掉F-结构"后为F'-线性空间. □

例 2.4. 给定集合S. 考虑映射(函数)的集合

$$F^S := \{f : S \to F\}.$$

定义

$$(f+g)(s) = f(s)+g(s), \qquad \forall f,g\in F^S, s\in S,$$
$$(cf)(s) = cf(s), \qquad \forall s\in S, c\in F, f\in F^S.$$

下面验证这样定义的"向量"加法和纯量乘法满足公理(1)–(8), 从而使F^S成为F-线性空间.

(1).

$$(f+g)(s) = f(s)+g(s) = g(s)+f(s) = (g+f)(s), \forall s\in S \quad\Longrightarrow\quad f+g = g+f.$$

(2).

$$((f+g)+h)(s) = (f+g)(s)+h(s) = (f(s)+g(s))+h(s),$$
$$(f+(g+h))(s) = f(s)+(g+h)(s) = f(s)+(g(s)+h(s)).$$

两式右边相等. 所以$(f+g)+h = f+(g+h)$.

(3). 取0_{F^S}为在S上恒等于0_F的函数.

(4). 对$f\in F^S$, 令$(-f)(s) = -f(s)$.

(5)–(8)显然.

注意到当$S=\{1,\dots,n\}$时, $f:\{1,\dots,n\}\to F$可以等同于$(f(1),\dots,f(n))\in F^n$. 反过来, $(x_1,\dots,x_n)\in F^n$可等同于由$f(i)=x_i$定义的$f:\{1,\dots,n\}\to F$. 这样$F^{\{1,\dots,n\}}\cong F^n$. □

引理 2.1. 在线性空间中, 零向量是唯一的, 任意向量的负向量也是唯一的.

证明. 与引理1.1和1.2的证明类似. 设$0_V, 0'_V\in V$满足对任意$\alpha\in V$有$0_V+\alpha=\alpha$, $0'_V+\alpha=\alpha$. 在第一个式子中取$\alpha=0'_V$, 得$0_V+0'_V=0'_V$. 在第二个式子中取$\alpha=0_V$, 得$0'_V+0_V=0_V$. 但$0_V+0'_V=0'_V+0_V$. 所以$0'_V=0_V$. 为证明负向量的唯一性, 设$\alpha\in V$, 并设$\beta,\beta'\in V$满足$\alpha+\beta=\alpha+\beta'=0_V$. 则

$$\beta' = 0_V+\beta' = (\beta+\alpha)+\beta' = \beta+(\alpha+\beta') = \beta+0_V = \beta.$$

□

注 2.2.
- 注意这里与教材的区别: 我们在线性空间的定义中不要求零向量和负向量的唯一性, 而是由定义推出它们的唯一性. 这样做的优点是简化了例子的验证.
- 类似的证明出现了三次(其他两次见引理1.1和1.2的证明), 原因是我们没有对研究对象进行充分的"公理化". 事实上, 引理1.1、1.2和2.1中的唯一性都可以归结为群中单位元和逆元的唯一性. 也许在以后的讲义中会先介绍群的概念.

由公理(1)和(2), 对任意有限个$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$, 表达式$\sum_{i=1}^n\alpha_i$有意义(与相加次序无关). 容易验证:

$$\sum c_i\alpha_i + \sum d_i\alpha_i = \sum (c_i+d_i)\alpha_i,$$
$$c\sum c_i\alpha_i = \sum (cc_i)\alpha_i.$$

命题 2.2. 设V是域F上的线性空间. 则

(1) (加法消去率) 设$\alpha, \beta, \gamma \in V$. 如果$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, 则$\alpha = \beta$.

(2) $c0_V = 0_V, \forall c \in F$.

(3) $0_F \alpha = 0_V, \forall \alpha \in V$.

(4) $c\alpha = 0_V \Longrightarrow c = 0_F$或$\alpha = 0_V$.

(5) $(-1_F)\alpha = -\alpha, \forall \alpha \in V$.

证明. (1) 两边同时加上$-\gamma$, 得

$$(\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma).$$

而

$$(\alpha + \gamma) + (-\gamma) = \alpha + (\gamma + (-\gamma)) = \alpha + 0 = \alpha.$$

类似地,

$$(\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta.$$

因此$\alpha = \beta$. (注意这里的证明与命题1.3(1)的证明类似, 两者都可以归结为群运算的消去律.)

(2). 注意到$0_V + 0_V = 0_V$. 因此$c(0_V + 0_V) = c0_V$. 这推出$c0_V + c0_V = c0_V + 0_V$. 由(1)得$c0_V = 0_V$.

(3). 注意到$0_F + 0_F = 0_F$. 因此$(0_F + 0_F)\alpha = 0_F \alpha$. 这推出$0_F \alpha + 0_F \alpha = 0_F \alpha + 0_V$. 由(1)得$0_F \alpha = 0_V$.

(4) 若$c \neq 0_F$, 则$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1_F \alpha = \alpha$. 另一方面, 由(2)有$c^{-1}(c\alpha) = c^{-1}0_V = 0_V$. 因此$\alpha = 0_V$.

(5) 由负向量的唯一性, 只需证明$\alpha + (-1_F)\alpha = 0_V$. 这可以利用(3)验证如下:

$$\alpha + (-1_F)\alpha = 1_F \alpha + (-1_F)\alpha = (1_F + (-1_F))\alpha = 0_F \alpha = 0_V.$$

□

习题 2.1. 设F是域.

1. (乘法消去率) 设F是域, V是F-线性空间. 证明:
   (1) 对于$c \in F \setminus \{0_F\}$, $\alpha, \beta \in V$, 如果$c\alpha = c\beta$, 则$\alpha = \beta$.
   (2) 对于$c_1, c_2 \in F$, $\alpha \in V \setminus \{0_V\}$, 如果$c_1 \alpha = c_2 \alpha$, 则$c_1 = c_2$.
2. 证明$\mathbb{C}^n$在向量加法

   $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

   和纯量乘法

   $$c(x_1, \ldots, x_n) = (\bar{c}x_1, \ldots, \bar{c}x_n)$$

   下构成线性空间. (这一线性空间称为$\mathbb{C}^n$的复共轭空间.)

§2.2 子空间

定义 2.2. 设V是域F上的线性空间, W是V的子集. 如果

(1) $0 \in W$;

(2) 对任意$\alpha, \beta \in W$总有$\alpha + \beta \in W$;

(3) 对任意$\alpha \in W$和$c \in F$总有$c\alpha \in W$.

则称W是V的**(线性)子空间**.

容易看出, 如果W是V的子空间, 则V上的向量加法和纯量乘法可以限制在W上, 从而使W成为F-线性空间.

例 2.5.

- $W = V$或$\{0\}$称为V的**平凡子空间**. 注意空集不是V的子空间.
- $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W =$过原点的直线.
- $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W =$过原点的直线或平面.
- $V = F^n$.

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = 0\}$$

和

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = 2x_2\}$$

是子空间. 而

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = 1 + x_2\}$$

不是子空间.

- $V = F^F = \{$任意函数$f : F \to F\}$, $W = \{$多项式函数$f : F \to F\}$. 这里多项式函数指形如$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n (c_i \in F)$的函数.

定义 2.3. $\beta \in V$称为$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$的**线性组合**, 如果存在$c_1, \ldots, c_n \in F$满足$\beta = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$.

命题 2.3. 对于V的子集W, TFAE:

(1) W是子空间.

(2) W非空, 并且W中任意有限个向量的线性组合仍在W中.

(3) $0 \in W$, 并且对任意$\alpha, \beta \in W$和$c \in F$总有$c\alpha + \beta \in W$.

证明. "(1)$\Longrightarrow$(2)". 显然W非空. 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$, $c_1, \ldots, c_n \in F$, 则$c_i \alpha_i \in W$, 从而$\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \in W$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)". 由于W非空, 所以可以取$\alpha \in W$. 而$0 = 0\alpha$是α的线性组合. 所以$0 \in W$. 另一结论显然.

"(3)$\Longrightarrow$(1)". 设$\alpha, \beta \in W$. 则$\alpha + \beta = 1\alpha + \beta \in W$. 另一方面, 设$\alpha \in W$, $c \in F$, 则$c\alpha = c\alpha + 0 \in W$. □

在验证V的子集是子空间时, 利用命题2.1(3)会比利用定义更为方便.

下面讨论子空间的交与和. 对于子集$S_1, \ldots, S_k \subset V$, 记

$$\sum_{i=1}^k S_i := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mid \alpha_i \in S_i \right\}.$$

命题 2.4. (1) 设$\{W_a \mid a \in A\}$是V的一族子空间. 则$\bigcap_{a \in A} W_a$也是V的子空间.

(2) 设$W_1,\dots,W_k$是V的子空间. 则$\sum_{i=1}^k W_i$也是V的子空间.

证明. (1). 首先, 对任意$a\in A$有$0\in W_a$, 所以$0\in\bigcap_{a\in A}W_a$. 另一方面, 设$\alpha,\beta\in\bigcap_{a\in A}W_a, c\in F$. 则对任意$a\in A$有$\alpha,\beta\in W_a$, 从而$c\alpha+\beta\in W_a$. 因此$c\alpha+\beta\in\bigcap_{a\in A}W_a$.

(2). 显然$0\in\sum_{i=1}^k W_i$. 设$\alpha,\beta\in\sum_{i=1}^k W_i, c\in F$. 则$\alpha=\sum_{i=1}^k\alpha_i$, $\beta=\sum_{i=1}^k\beta_i$, 其中$\alpha_i,\beta_i\in W_i$. 注意到$c\alpha_i+\beta_i\in W_i$. 于是

$$c\alpha+\beta=\sum_{i=1}^k(c\alpha_i+\beta_i)\in\sum_{i=1}^k W_i.$$

□

例 2.6. 设$V=F^4$,

$$W_1=\{(x,y,z,0)\mid x,y,z\in F\},$$
$$W_2=\{(x,0,0,y)\mid x,y\in F\}.$$

则

$$W_1+W_2=V,\qquad W_1\cap W_2=\{(x,0,0,0)\mid x\in F\}.$$

□

命题 2.5. 设$S\subset V$非空. 记

$$\mathrm{span}(S):=\{S\text{中任意有限个向量的线性组合}\}.$$

则$\mathrm{span}(S)$是子空间.

证明. 显然$0\in\mathrm{span}(S)$. 设$\alpha,\beta\in\mathrm{span}(S), c\in F$. 则$\alpha=\sum_{i=1}^m c_i\alpha_i$, $\beta=\sum_{j=1}^n d_j\beta_j$, 其中$\alpha_i,\beta_j\in S$. 从而

$$c\alpha+\beta=\sum_{i=1}^m(cc_i)\alpha_i+\sum_{j=1}^n d_j\beta_j\in\mathrm{span}(S).$$

□

定义 2.4. $\mathrm{span}(S)$称为**由S生成的子空间**. 如果$S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$有限, 也称$\mathrm{span}(S)$为由$\alpha_1,\dots,\alpha_n$生成的子空间, 记为$\mathrm{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. 我们约定$\mathrm{span}(\varnothing)=\{0\}$.

命题 2.6. 设$S\subset V$. 则

(1) 如果W是V的子空间并且包含S, 则W包含$\mathrm{span}(S)$. 从而$\mathrm{span}(S)$是包含S的最小子空间.

(2)

$$\mathrm{span}(S)=\bigcap_{\substack{W\text{是}V\text{的包含}\\ S\text{的子空间}}}W.$$

证明. (1) 若$S=\varnothing$则显然. 设$S\neq\varnothing$. 则对任意$\alpha\in\mathrm{span}(S)$有$\alpha=\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$, 其中$\alpha_i\in S\subset W$. 因此$\alpha\in W$. 这说明$\mathrm{span}(S)\subset W$.

(2) 记命题中的交集为W'. 它是V的子空间并且包含S. 由(1)即得$\mathrm{span}(S)\subset W'$. 另一方面, 由$W'$的定义, 它包含在每个包含$S$的子空间之中. 而$\mathrm{span}(S)$是包含$S$的子空间. 因此$W'\subset\mathrm{span}(S)$. 这就说明了$\mathrm{span}(S)=W'$. □

命题 2.7. 设$W_1,\dots,W_k$是V的子空间. 则$\sum_{i=1}^k W_i=\mathrm{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$.

证明. 注意到$\bigcup_{i=1}^k W_i\subset\sum_{i=1}^k W_i$. 由命题2.6(1)即得$\mathrm{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)\subset\sum_{i=1}^k W_i$. 另一方面, 对任意$\alpha\in\sum_{i=1}^k W_i$有$\alpha=\sum_{i=1}^k\alpha_i$, 其中$\alpha_i\in W_i\subset\bigcup_{i=1}^k W_i$. 所以$\alpha\in\mathrm{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$. 这说

明$\sum_{i=1}^k W_i \subset \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$. 因此有$\sum_{i=1}^k W_i = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^k W_i\right)$. □

例 2.7. 设$F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^5$, $\alpha_1=(1,2,0,3,0)$, $\alpha_2=(0,0,1,4,0)$, $\alpha_3=(0,0,0,0,1)$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} &= \{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3 \mid c_i\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(c_1,2c_1,c_2,3c_1+4c_2,c_3) \mid c_i\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x_1,\ldots,x_5) \mid x_2=2x_1, x_4=3x_1+4x_3\}.\end{aligned}$$

□

例 2.8. 设$V=\{f:F\to F$是多项式函数$\}$. 定义$f_n\in V$为$f_n(x)=x^n$, $n=0,1,\ldots$. 则

$$\operatorname{span}\{f_0,f_1,\ldots\}=V.$$

□

习题 2.2. 1. 设V为F-线性空间, $W_1,W_2\subset V$为真子空间. 证明$W_1\cup W_2\neq V$.

2. 设V为F-线性空间, $M,N\subset V$为子空间, $N\subset M$. 证明对任意子空间$W\subset V$有

$$M\cap(N+W)=N+(M\cap W).$$

§2.3 基和维数

给定域F和F-线性空间V.

定义 2.5. (1) 设$S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$为$V$的有限非空子集. 如果存在不全为零的$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i=0$, 则称$S$**线性相关**. 否则, 称$S$**线性无关**. 相应地, 我们也称向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性相关或线性无关.

(2) 设S为V的任意非空子集. 如果S具有有限非空线性相关子集, 则称S**线性相关**. 否则, 称S**线性无关**.

(3) 约定空集是线性无关的.

注 2.3.
- 容易看出, 如果(2)中的子集S有限, 则定义与(1)一致.
- $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$线性无关$\iff$如果$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i=0$, 则$c_1=\cdots=c_n=0$.
- $S\subset V$线性无关$\iff S$的任意有限子集线性无关.
- 若$S\subset T\subset V$, 则S线性相关$\Longrightarrow T$线性相关, T线性无关$\Longrightarrow S$线性无关.
- 若$0_V\in S$则S线性相关: $1_F 0_V=0_V$.

例 2.9. 设$F=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}^3$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_4$见P41. 则它们线性相关: $2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4=0$. □

定义 2.6. 设$S\subset V$. 如果S线性无关并且生成V, 则称S是V的**基**. 如果V存在有限基, 则称V是**有限维**的; 否则, 称V是**无穷维**的.

例 2.10. 空集是零线性空间$\{0\}$的基. □

例 2.11. 设$V=F^n$. 取$\epsilon_1=(1,0,\ldots,0),\ldots,\epsilon_n=(0,\ldots,0,1)$. 则$\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$是$F^n$的基, 称为$F^n$的**标准基**. 验证如下:

线性无关: 设$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i\epsilon_i=0$, 则$(c_1,\ldots,c_n)=0$, 即$c_1=\cdots=c_n=0$.

$\operatorname{span}\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}=V$: 对任意$\alpha=(x_1,\ldots,x_n)\in F^n$, 有$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\epsilon_i\in\operatorname{span}\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$.

这说明F^n是有限维的. □

例 2.12. 设F是$\mathbb{C}$的子域, $V=\{$多项式函数$f:F\to F\}$. 定义$f_k\in V$为$f_k(x)=x^k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. 则$S:=\{f_k\mid k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$是$V$的基:

$\mathrm{span}(S)=V$: 见上一节.

S线性无关: 对任意互不相同的$f_{k_1},\dots,f_{k_n}$, 如果$c_1,\dots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_i f_{k_i}=0$, 则

$$\sum_{i=1}^n c_i x^{k_i}=\sum_{i=1}^n c_i f_{k_i}(x)=\left(\sum_{i=1}^n c_i f_{k_i}\right)(x)=0,\qquad \forall x\in F.$$

由于$F\subset\mathbb{C}$, 所以含有无穷多个元素. 而非零复多项式只有有限多个根, 所以$c_i=0$. □

上一例子中的空间V是无穷维的: 对任意有限集$T=\{g_1,\dots,g_r\}\subset V$, 存在正整数$N$满足$\deg g_i<N$, 于是$f_N\notin\mathrm{span}(T)$, 从而$\mathrm{span}(T)\neq V$. 我们下面证明类似的现象在一般情况总成立, 即有限维线性空间的任意基有限.

定理 2.8. 设S,T为线性空间V的有限子集. 假设S线性无关, T生成V. 则$|S|\le|T|$.

证明. 设$S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $T=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$. 考虑$V$的子空间

$$M_i=\mathrm{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_i\},\qquad i=1,\dots,m,$$
$$N_k=\mathrm{span}\{\beta_1,\dots,\beta_k\},\qquad k=1,\dots,n,$$

并约定$M_0=N_0=\{0\}$. 则定理的条件推出$N_n=V$, 并且对每个$i\in\{1,\dots,m\}$有$M_i\smallsetminus M_{i-1}\neq\varnothing$. 记$k_i\in\{1,\dots,n\}$为使得$(M_i\smallsetminus M_{i-1})\cap N_{k_i}\neq\varnothing$的最小指标. 我们证明$k_1,\dots,k_m$互不相同. 假设存在$i,j\in\{1,\dots,m\}$, $i<j$, 满足$k_i=k_j=k$. 取

$$\gamma_i\in(M_i\smallsetminus M_{i-1})\cap N_k,\qquad \gamma_j\in(M_j\smallsetminus M_{j-1})\cap N_k.$$

我们断言存在$c\in F$使得$c\gamma_i+\gamma_j\in N_{k-1}$. 事实上, 设

$$\gamma_i=\sum_{r=1}^k a_r\beta_r,\qquad \gamma_j=\sum_{r=1}^k b_r\beta_r.$$

由于$(M_i\smallsetminus M_{i-1})\cap N_{k-1}=\varnothing$, 所以$a_k\neq 0$. 取$c=-a_k^{-1}b_k$即满足要求. 另一方面, 由于$i<j$, 我们有$M_i\subset M_{j-1}$. 这推出$c\gamma_i+\gamma_j\in M_j\smallsetminus M_{j-1}$. 结合起来有$c\gamma_i+\gamma_j\in(M_j\smallsetminus M_{j-1})\cap N_{k-1}$, 与$(M_j\smallsetminus M_{j-1})\cap N_{k-1}=\varnothing$矛盾. 这就证明了$k_1,\dots,k_m\in\{1,\dots,n\}$互不相同. 因此$m\le n$. □

在习题中将利用归纳法给出定理2.8的另一个更为直观的证明.

推论 2.9. 设V是有限维线性空间, 则V的任意基有限, 并且任意两组基含有相同的向量个数.

证明. 由于V存在有限基, 由定理2.8, V的任意基有限. 进一步, 定理2.8推出对V的任意两组基S_1,S_2有$|S_1|\le|S_2|$并且$|S_2|\le|S_1|$. 因此$|S_1|=|S_2|$. □

定义 2.7. 设V是有限维线性空间, V的基含有的共同向量个数称为V的**维数**, 记为$\dim V$.

上面的例子已经说明, $\dim F^n=n$, $\dim\{0\}=0$.

推论 2.10. 设V是有限维线性空间, $S\subset V$.

(1) 如果S线性无关, 则$|S|\le\dim V$. 因此$\dim V$是V的线性无关子集中向量个数的最大值.

(2) 如果S生成V, 则$|S|\ge\dim V$. 因此$\dim V$是V的生成全空间的子集中向量个数的最小值.

证明. 由定理2.8显然. □

定理 2.11. 设V是有限维线性空间, $W\subset V$是子空间, $S_1\subset S_2\subset W$. 假设S_1线性无关, S_2生成W. 则存在W的基S_0满足$S_1\subset S_0\subset S_2$.

证明. 考虑V的子集族

$$\mathcal{F} = \{S \subset V \mid S_1 \subset S \subset S_2,\ S\text{线性无关}\}.$$

注意到$S_1 \in \mathcal{F}$. 所以$\mathcal{F}$非空. 由推论2.10(1), $\mathcal{F}$中的集合至多含有$\dim V$个向量. 于是, $\mathcal{F}$中的集合含有的向量个数存在最大值, 设为n. 取$S_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{F}$. 我们证明$S_2 \subset \mathrm{span}(S_0)$. 若不然, 则可以取$\beta \in S_2 \setminus \mathrm{span}(S_0)$. 我们验证$S_0 \cup \{\beta\}$线性无关. 假设$\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i + b\beta = 0$. 如果$b \neq 0$, 则

$$\beta = \sum_{i=1}^n (-b^{-1}a_i)\alpha_i \in \mathrm{span}(S_0),$$

矛盾. 因此$b = 0$. 这推出$\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = 0$. 由于$S_0$线性无关, 这推出$a_i = 0$. 这说明$S_0 \cup \{\beta\}$线性无关. 注意到$S_1 \subset S_0 \cup \{\beta\} \subset S_2$. 所以$S_0 \cup \{\beta\} \in \mathcal{F}$. 但是$|S_0 \cup \{\beta\}| = n + 1$, 与$n$的最大性矛盾. 这就证明了$S_2 \subset \mathrm{span}(S_0)$. 从而$\mathrm{span}(S_2) \subset \mathrm{span}(S_0)$. 另一方面, 显然有$\mathrm{span}(S_0) \subset \mathrm{span}(S_2)$. 所以$\mathrm{span}(S_0) = \mathrm{span}(S_2) = W$. 因此$S_0$是$W$的基. □

推论 2.12. 设V是有限维线性空间, $S \subset V$.

(1) 若S线性无关, 则S可以扩充为V的基.

(2) 若S生成V, 则S的某个子集为V的基.

证明. (1) 在定理2.11中取$W = V$, $S_1 = S$, $S_2 = V$.

(2) 在定理2.11中取$W = V$, $S_1 = \varnothing$, $S_2 = S$. □

推论 2.13. 设V是有限维线性空间, $S \subset V$满足$|S| = \dim V$. 假设S线性无关或者S生成V. 则S是V的基.

证明. 如果S线性无关, 则S可以扩充为V的基S_1. 但是$|S| = \dim V = |S_1|$. 因此$S = S_1$是基. 类似地, 如果S生成V, 则存在V的基$S_2 \subset S$. 但是$|S| = \dim V = |S_2|$. 因此$S = S_2$是基. □

接下来考虑子空间的维数性质.

推论 2.14. 设V是有限维线性空间, $W \subset V$是子空间. 则

(1) W是有限维线性空间, 并且$\dim W \leq \dim V$;

(2) 若W是真子空间, 则$\dim W < \dim V$.

证明. (1) 在定理2.11中取$S_1 = \varnothing$, $S_2 = W$, 可知W存在基S. 由于S线性无关, 由推论2.10(1), 有$|S| \leq \dim V$. 因此W是有限维的, 并且$\dim W \leq \dim V$.

(2) 取W的基S. 如果$\dim W = \dim V$, 则$|S| = \dim V$. 由于S线性无关, 由推论2.13, S是V的基, 从而$W = \mathrm{span}(S) = V$, 矛盾. □

定理 2.15. 设W_1, W_2是线性空间V的有限维子空间, 则$W_1 + W_2$是有限维的, 并且

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

证明. 因为W_1, W_2有限维, 所以$W_1 \cap W_2$有限维. 取$W_1 \cap W_2$的基$\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, 并分别扩充为$W_1$的基$\{\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_m\}$和$W_2$的基$\{\alpha_1, \dots, \alpha_d, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. 我们断言:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

是$W_1 + W_2$的基. 验证如下:

线性无关: 设$\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j + \sum z_k\gamma_k = 0$. 注意到$\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j \in W_1$, 所以$\sum z_k\gamma_k \in W_1$. 另一方面, 还有$\sum z_k\gamma_k \in W_2$. 所以$\sum z_k\gamma_k \in W_1 \cap W_2$. 于是存在$c_i$使$\sum z_k\gamma_k = \sum c_i\alpha_i$. 但是$\{\alpha_i, \gamma_k\}$线性无关. 所以$z_k = c_i = 0$. 这进一步推出$\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j = 0$. 由于$\{\alpha_i, \beta_j\}$线性无

关, 所以$x_i=y_j=0$. 因此$x_i=y_j=z_k=0$.

$\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}=W_1+W_2$: “$\subset$”: $\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$中的任意向量$\alpha$形如

$$\alpha=\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j+\sum z_k\gamma_k.$$

由于$\sum x_i\alpha_i+\sum y_j\beta_j\in W_1$, $\sum z_k\gamma_k\in W_2$, 所以$\alpha\in W_1+W_2$.

“$\supset$”: W_1+W_2中的任意向量α形如$\alpha=\beta+\gamma$, 其中$\beta\in W_1$, $\gamma\in W_2$. 而

$$W_1=\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j\}\subset\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\},\qquad W_2=\mathrm{span}\{\alpha_i,\gamma_k\}\subset\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}.$$

所以$\beta,\gamma\in\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$. 因此$\alpha=\beta+\gamma\in\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k\}$.

由断言即得W_1+W_2是有限维的, 并且

$$\dim(W_1+W_2)=d+m+n=(d+m)+(d+n)-d=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2).$$

□

习题 2.3. 1. 设V为F-线性空间, $S\subset V$线性无关, $\alpha\in V\setminus S$. 证明$S\cup\{\alpha\}$线性无关的充分必要条件是$\alpha\notin\mathrm{span}(S)$.

2. 设V为F-线性空间, S_1,S_2,S_3是V的子集, $W_i=\mathrm{span}(S_i)$ $(i=1,2,3)$. 假设$S_1\cup S_2\cup S_3$线性无关. 证明

$$W_1\cap(W_2+W_3)=(W_1\cap W_2)+(W_1\cap W_3).$$

3. (Steinitz替换引理) 在定理2.8的条件下, 用归纳法证明: 对任意$0\le k\le\min\{|S|,|T|\}$, 存在$S_k\subset S$和$T_k\subset T$使得$|S_k|=|T_k|=k$并且$(T\setminus T_k)\cup S_k$生成V.

4. 利用Steinitz替换引理给出定理2.8的另一个证明.

5. 设m,n为正整数, $a_{ij},b_i\in F$ $(1\le i\le m,1\le j\le n)$. 考虑关于未知量$x_1,\dots,x_n\in F$的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

(1) 假设$m<n$, 并且$b_1=\cdots=b_m=0$. 证明方程组有非零解(即$x_1,\dots,x_n$不全为零的解).

(2) 假设$m>n$. 证明存在$b_1,\dots,b_m\in F$使得方程组无解.

(提示: 分析F^m中的向量集$\{(a_{1j},\dots,a_{mj})\mid 1\le j\le n\}$是否线性无关, 是否生成全空间.)

6. 设V为有限维F-线性空间, $\dim V=n\ge 2$. 设V的$2n-2$个子空间$M_1,\dots,M_{n-1},N_1,\dots,N_{n-1}$满足

$$\dim M_i=\dim N_i=i,\qquad i=1,\dots,n-1,$$

并且

$$M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_{n-1},\qquad N_1\subset N_2\subset\cdots\subset N_{n-1}.$$

证明存在V的基S, 使得这$2n-2$个子空间中的每一个均由S的某个子集生成.

7. 设V为有限维F-线性空间, W_1,W_2,W_3是V的子空间. 证明

$$\begin{aligned}\dim(W_1+W_2+W_3)\le&\dim W_1+\dim W_2+\dim W_3\\&-\dim(W_1\cap W_2)-\dim(W_2\cap W_3)-\dim(W_3\cap W_1)\\&+\dim(W_1\cap W_2\cap W_3).\end{aligned}$$

§2.4 坐标

定义 2.1. 设V是有限维F-线性空间. 如果$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$互不相同, 并且集合$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$是$V$的基, 则称$n$元有序组$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$为$V$的**有序基**.

为了与教材记号一致, 当无歧义时, 我们对有序基也采用集合的记号, 即称$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$为有序基.

命题 2.1. 设V是有限维线性空间, $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$是$V$的有序基. 则任意$\alpha\in V$表为线性组合$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$的方式唯一, 即

$$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i'\alpha_i \qquad\Longrightarrow\qquad x_i=x_i'.$$

证明. 若$\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=\sum_{i=1}^n x_i'\alpha_i$, 则$\sum_{i=1}^n (x_i-x_i')\alpha_i=0$. 由于$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$线性无关, 所以$x_i-x_i'=0$. □

定义 2.2. 上面命题中的系数x_i称为向量α关于有序基$\mathcal{B}$的**第i个坐标**, n维列向量$[\alpha]_{\mathcal{B}}:=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$称为$\alpha$关于有序基$\mathcal{B}$的**坐标**.

我们可以利用最自然的方式定义"形式矩阵乘法". 此时有

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

坐标的概念给出了一个映射

$$\Gamma_{\mathcal{B}}:V\to F^{n\times 1},\qquad \Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

它有下面的性质:

- 单: 设$\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=\Gamma_{\mathcal{B}}(\beta)$. 如果$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, $\beta=\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$, 则
$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=\Gamma_{\mathcal{B}}(\beta)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$
这说明$x_i=y_i$. 因此$\alpha=\beta$.
- 满: 对任意$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in F^{n\times 1}$, 取$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, 则$\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.
- 保持线性结构: $\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)+\Gamma_{\mathcal{B}}(\beta)=\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha+\beta)$, $\Gamma_{\mathcal{B}}(c\alpha)=c\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)$.

这样的映射$\Gamma_{\mathcal{B}}$称为线性同构. 此时我们称V与$F^{n\times 1}$同构, 记为$V\cong F^{n\times 1}$. 同构的线性空间有很多相同的性质. 为什么不只研究$F^{n\times 1}$或F^n? 因为很多自然出现的线性空间没有占特殊地位的基, 不依赖于基的选取的性质更说明问题的本质.

例 2.1. $V=F^{n\times 1}$, $\mathcal{B}=\{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\}$. 则对$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$有$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\epsilon_i$, 即$\alpha$的第$i$个坐标为$x_i$. 这说明$\Gamma_{\mathcal{B}}(\alpha)=[\alpha]_{\mathcal{B}}=\alpha$, 即$\Gamma_{\mathcal{B}}=\mathrm{id}$. □

设$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$是$V$的另一组有序基. 设$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i$, 并记

$$P = (P_1, \ldots, P_n) = (P_{ij}) \in F^{n\times n},$$

其中$P_j \in F^{n\times 1}$. 则$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$. 在形式矩阵乘法下, 有

$$\begin{aligned}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) &= \big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\alpha'_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\alpha'_n]_{\mathcal{B}}\big)\\ &= \big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P_1, \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P_n\big)\\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P.\end{aligned}$$

引理 2.2. 设$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$V$的有序基, $P \in F^{n\times n}$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P$. 则$\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$是基$\Longleftrightarrow P$可逆.

证明.

$$\begin{aligned}\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}\text{是基} \quad &\Longleftrightarrow \quad \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}\text{线性无关}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{对}X \in F^{n\times 1}\text{有“}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)X = 0 \Longrightarrow X = 0\text{”}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{对}X \in F^{n\times 1}\text{有“}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)PX = 0 \Longrightarrow X = 0\text{”}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{对}X \in F^{n\times 1}\text{有“}PX = 0 \Longrightarrow X = 0\text{”}\\ &\Longleftrightarrow \quad P\text{可逆}.\end{aligned}$$

□

定理 2.3. 设$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$和$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$是$V$的有序基, $P \in F^{n\times n}$满足

$$(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P.$$

则P可逆, 并且

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}, \qquad [\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}, \qquad \forall\ \alpha \in V. \tag{2.1}$$

证明. 由引理, P可逆. 对$\alpha \in V$我们有

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[\alpha]_{\mathcal{B}} = \alpha = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P\big)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(P[\alpha]_{\mathcal{B}'}).$$

由于$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性无关, 这推出$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$. 进一步得$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$. □

命题 2.4. 设$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是$V$的有序基, $P \in F^{n\times n}$可逆. 则存在唯一有序基$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$满足(2.1)式.

证明. 存在性: 取$(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P$即可.

唯一性: 在(2.1)式中取$\alpha = \alpha'_j$得

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = P\epsilon_j = P_j,$$

即$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i$. □

例 2.2. 设$V = F^n$, $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. 若$\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$, 则$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 设$P \in F^{n\times n}$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)P$, 即

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\epsilon_i = (P_{1j}, \ldots, P_{nj}).$$

(注意$(P_{1j}, \ldots, P_{nj})$对应P的第j列.) 则

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}\text{是有序基} \Longleftrightarrow P\text{可逆}.$$

此时, 若$\alpha=(x_1,\dots,x_n)$, 则$[\alpha]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. 例如: $V=\mathbb{R}^2$, $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
则$P^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 此时, $\alpha_1'=(\cos\theta,\sin\theta)$和$\alpha_2'=(-\sin\theta,\cos\theta)$(分别对应$P$的两列)构成基, 就是标准基旋转$\theta$角. 若$\alpha=(x_1,x_2)$, 则

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\qquad [\alpha]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\ -x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{pmatrix}.$$

□

§2.5 矩阵的行空间

定义 2.3. 设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\in F^{m\times n}$. 则$\alpha_1,\dots,\alpha_m\in F^n$称为$A$的**行向量**,

$$\operatorname{row}(A):=\operatorname{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$$

称为A的**行空间**,

$$\operatorname{rowrank}(A):=\dim\operatorname{row}(A)$$

称为A的**行秩**.

我们可以对列做类似的定义.

命题 2.5. 设$A,B\in F^{m\times n}$.

(1) 若$B=PA$, 则$\operatorname{row}(B)\subset\operatorname{row}(A)$.

(2) 若$B=PA$并且P可逆, 则$\operatorname{row}(B)=\operatorname{row}(A)$.

(3) B与A行等价$\Longleftrightarrow\operatorname{row}(B)=\operatorname{row}(A)$.

证明. (1) 设$A\in F^{m\times n},B\in F^{k\times n},P\in F^{k\times m}$. 设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}$. 则

$$\beta_i=\sum_{j=1}^m P_{ij}\alpha_j\in\operatorname{row}(A)\qquad\Longrightarrow\qquad\operatorname{row}(B)\subset\operatorname{row}(A).$$

(2) 由(1)显然.

(3) 显然. □

命题中的(3)推出, 为了研究$\operatorname{row}(A)$, 只需研究与A行等价的行简化阶梯矩阵R的行空间$\operatorname{row}(R)$.

命题 2.6. 设$R\in F^{m\times n}$为行简化阶梯矩阵, 则R的非零行构成$\operatorname{row}(R)$的基.

证明. 设$R=\begin{pmatrix}\rho_1\\ \vdots\\ \rho_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, 其中$\rho_i\in F^n\setminus\{0\}$. 只需证$\rho_1,\ldots,\rho_r$线性无关. 设$\sum_{i=1}^r c_i\rho_i=0$. 假设$\rho_i$中主元在第$k_i$列. 则$\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$的第$k_i$个分量为$c_i$. 因此$c_i=0$. $\square$

对于$A\in F^{m\times n}$, 记

$$\operatorname{Ker}(A):=\{X\in F^{n\times 1}\mid AX=0\},$$

称为A的**核**. 它就是方程组$AX=0$的解空间.

推论 2.7. 对$A\in F^{m\times n}$有

$$\dim\operatorname{Ker}(A)+\operatorname{rowrank}(A)=n.$$

证明. 由于行等价的矩阵具有相同的核和行空间, 不妨设A是行简化阶梯矩阵. 设A中有r个非零行. 则$\dim\operatorname{Ker}(A)=n-r$, $\operatorname{rowrank}(A)=r$. $\square$

命题 2.8. 取定正整数m,n. 设$W\subset F^n$是子空间, $\dim W\le m$. 则存在唯一的行简化阶梯矩阵$R\in F^{m\times n}$使得$\operatorname{row}(R)=W$.

证明. 存在性: 取$\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in W$使得$\operatorname{span}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}=W$. (例如, 可以取$W$的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\dim W}\}$, 并取$\alpha_{\dim W+1}=\cdots=\alpha_m=0$.) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\in F^{m\times n}$, R为与A行等价的行简化阶梯矩阵. 则$\operatorname{row}(R)=\operatorname{row}(A)=W$.

唯一性: 设$R,R'\in F^{m\times n}$为行简化阶梯矩阵, $\operatorname{row}(R)=\operatorname{row}(R')$. 我们需要证明$R=R'$. 设$R=\begin{pmatrix}\rho_1\\ \vdots\\ \rho_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, R'=\begin{pmatrix}\rho'_1\\ \vdots\\ \rho'_{r'}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, 其中$\rho_i,\rho'_{i'}\ne 0$. 设$\rho_i$中主元在第$k_i$列, $k_1<\cdots<k_r$. 则对任意$1\le i'\le r'$有$\rho'_{i'}\in\operatorname{span}\{\rho_1,\ldots,\rho_r\}$, 从而形如$\rho'_{i'}=\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$. 设$i_0$是使$c_{i_0}\ne 0$得最小指标. 则$\rho'_{i'}$的主元在第$k_{i_0}$列. 这说明$R'$的主元所在列必为$R$的主元所在列. 由对称性, 反过来也对. 因此$R$与$R'$的主元位置相同. 特别地, $r=r'$. 我们继续考察等式$\rho'_{i'}=\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$. 注意到$\rho'_{i'}$的第$k_{i'}$个分量为1, 当$i\ne i'$时第$k_i$个分量为0. 而$\sum_{i=1}^r c_i\rho_i$的第$k_i$列为$c_i$. 因此$c_i=\delta_{ii'}$. 这推出$\rho'_{i'}=\rho_{i'}$. $\square$

注 2.1. 从上面的证明容易看出, 主元所在列

$$\{k_1,\ldots,k_r\}=\{k\in\{1,\ldots,n\}\mid \text{存在}(a_1,\ldots,a_n)\in W\text{满足}a_k=1, \text{并且当}j<k\text{时有}a_j=0\}.$$

推论 2.9. 对任意$A\in F^{m\times n}$, 存在唯一的行简化阶梯矩阵$R\in F^{m\times n}$与A行等价.

证明. 存在性显然. 唯一性: 如果行简化阶梯矩阵$R,R'\in F^{m\times n}$都与A行等价, 则$\operatorname{row}(R)=\operatorname{row}(A)=\operatorname{row}(R')\Longrightarrow R=R'$. $\square$

推论 2.10. 设$A, B \in F^{m\times n}$. 则存在一系列初等行变换将A化为$B$$\iff \mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B)$.

证明. "$\Longrightarrow$"显然. "$\Longleftarrow$": 设一系列初等行变换将A化为行简化阶梯矩阵R, 另一系列初等行变换将B化为行简化阶梯矩阵R'. 则$\mathrm{row}(R) = \mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B) = \mathrm{row}(R') \Longrightarrow R = R'$. 注意到初等行变换可逆, 因此存在一系列初等行变换将R化为B. □

§2.6 涉及子空间的计算

很多时候会遇到下面的具体问题: 给定$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F^n$. 记$W = \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$是否线性无关? $\dim W = ?$
- 给定$\beta \in F^n$. 是否$\beta \in W$? 如果是, 将β表示为$\beta = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i$.
- 刻画W, 即将W表示为$W = \{(b_1, \ldots, b_n) \in F^n \mid b_1, \ldots, b_n$满足某些条件$\}$的形式.

方法一. 设$\alpha_i = (A_{i1}, \ldots, A_{in})$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$. 则:

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$线性无关$\iff$
$$\text{“}\left(\sum_{i=1}^m A_{i1}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^m A_{in}x_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_i = 0\text{”}$$
$$\iff A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0\text{只有平凡解.}$$
(这里$A^t \in F^{n\times m}$为A的**转置矩阵**, 即$(A^t)_{ij} = A_{ji}$.) 这可以通过对A^t做初等行变换来解决(相当于对A做初等列变换).
- 类似地, $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in W \iff A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$有解. 进一步可以给出子空间$W$的刻画.
- 利用上节的结果, 若$A \sim R$(行简化阶梯), 则R的非零行为$\mathrm{row}(A) = W$的基. 这也给出$\dim W$.

上述方法需要对A和A^t都做初等行变换. 下面的方法虽然本质相同, 但提供了理解问题的另一个角度.

方法二. 对A做初等行变换, 得$A \sim R$(行简化阶梯), 则$W = \mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(R)$. 这推出:

- $\dim W = R$的非零行的个数. 特别地, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$线性无关$\iff R$无零行.
- 若$R = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\rho_i \neq 0$, 则$\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$是$W$的基.

下面考虑“给定$\beta \in F^n$. 是否$\beta \in W$? 如果是, 将β表示为$\beta = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i$”的问题. 设$\rho_i$中主元在第$k_i$列, $k_1 < \cdots < k_r$. 记$J = \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\}$. 设$\beta = (b_1, \ldots, b_n)$. 则

$$\begin{aligned} b \in W \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \text{存在} c_1, \ldots, c_r \in F \text{使得} \beta = \sum_{i=1}^r c_i\rho_i \\ &\Longleftrightarrow \qquad \text{存在} c_1, \ldots, c_r \in F \text{使得对任意} 1 \le j \le n \text{有} b_j = \sum_{i=1}^r c_i R_{ij}. \end{aligned}$$

这推出对$1 \le i \le r$有$b_{k_i} = c_i$ (注意$R_{ik_i} = 1$, 当$i' \neq i$时$R_{i'k_i} = 0$). 所以

$$b_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} R_{ij} = \sum_{1 \le i \le r, k_i < j} b_{k_i} R_{ij}, \qquad \forall\ j \in J.$$

反过来, 如果上式成立, 则$c_i = b_{k_i}$满足对任意$1 \le j \le n$有$b_j = \sum_{i=1}^r c_i R_{ij}$. 这就证明了

$$W = \{(b_1, \ldots, b_n) : b_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} R_{ij}, \forall j \in J\}.$$

注意这里有$n - r$个式子. 当$\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in W$时, 有

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i}\rho_i = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-r\text{个}})R = \big((b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-r\text{个}})P\big)A,$$

其中$P \in F^{m\times m}$为使$PA = R$的可逆矩阵(一般不唯一). 设

$$(x_1, \ldots, x_n) = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-r\text{个}})P,$$

即$x_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} P_{ij}$. 则

$$\beta = (x_1, \ldots, x_n)A = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i.$$

求矩阵P的方法: 若$(A, I) \sim (R, P)$, 则$R = PA$. 原因:

$$\begin{aligned} (A, I) \sim (R, P) \qquad &\Longrightarrow \qquad \text{存在可逆} Q \in F^{m\times m} \text{使得} Q(A, I) = (R, P) \\ &\Longrightarrow \qquad QA = R, Q = P \\ &\Longrightarrow \qquad PA = R, P \text{可逆}. \end{aligned}$$

例 2.3. (P60例21) 考虑$\mathbb{R}^4$. 设

$$\alpha_1 = (1, 2, 2, 1), \qquad \alpha_1 = (0, 2, 0, 1), \qquad \alpha_1 = (-2, 0, -4, 3).$$

方法一.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

方程组$A^t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta^t=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$的增广矩阵

$$(A^t,\beta^t)\sim\begin{pmatrix}1&0&0&b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{2}{3}b_4\\0&1&0&-b_1+\frac{5}{6}b_2-\frac{2}{3}b_4\\0&0&1&-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_4\\0&0&0&-2b_1+b_3\end{pmatrix}.$$

有解的条件为$2b_1=b_3$. 因此

$$W=\{(b_1,b_2,b_3,b_4):2b_1=b_3\}.$$

当$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in W$时, 令

$$\begin{cases}x_1=b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{2}{3}b_4\\x_2=-b_1+\frac{5}{6}b_2-\frac{2}{3}b_4\\x_3=-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_4\end{cases},$$

则$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$. 另一方面, 由于$A^t\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 方程组$A^tX=0$只有平凡解, 这推出$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关, 从而$\dim W=3$.

方法二. 计算得$(A,I)\sim(R,P)$, 其中

$$R=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&0\\-2&5&-1\\4&-4&2\end{pmatrix}.$$

由R的形状得$k_1=1,k_2=2,k_3=4,r=3,J=\{3\}$. 由此得$\dim W=3$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关, 并且

$$W=\{(b_1,b_2,b_3,b_4):b_3=\sum_{i=1}^{3}b_{k_i}R_{i3}=2b_1\}.$$

当$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in W$时, 取

$$(x_1,x_2,x_3)=(b_1,b_2,b_4)P=\frac{1}{6}(b_1,b_2,b_4)\begin{pmatrix}6&-6&0\\-2&5&-1\\4&-4&2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}(6b_1-2b_2+4b_4,-6b_1+5b_2-4b_4,-b_2+2b_4).$$

则$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$. □

第五章　行列式

域F上方阵的行列式是F中的元素, 满足一些很好的性质. 例如, 方阵可逆的充分必要条件是它的行列式非零, 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积等. 在对矩阵的研究中, 行列式起到了非常重要的作用.

这里我们采用线性映射的观点. 通过与列向量或行向量做乘法, 可以把矩阵视为线性映射. 我们首先利用多重交错线性函数的性质, 对任意有限维线性空间到自身的线性映射定义它的行列式, 然后把方阵的行列式定义为相应的线性映射的行列式. 方阵行列式的一些基本性质也将由线性映射行列式的性质导出.

§5.1　对称群

集合$\{1,\ldots,n\}$到自身的可逆映射称为n**次置换**(permutation of degree n). 所有n次置换在映射复合下构成一个群, 称为n**次对称群**(symmetric group of degree n), 记为S_n. 容易看出, $|S_n| = n!$. 如果置换$\sigma \in S_n$互换$\{1,\ldots,n\}$中的某两个数字, 而保持其他数字不动, 则称σ为**对换**(transposition). 对于置换$\sigma \in S_n$, 我们记

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

如果σ是互换数字s和t的对换, 则记$\sigma = (s,t)$.

例 5.1. $S_1 = \{\mathrm{id}\}$, $S_2 = \{\mathrm{id}, (1,2)\}$,

$$S_3 = \left\{\mathrm{id}, (1,2), (2,3), (3,1), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\},$$

这里id是相应集合上的恒同置换.

我们称S_n中的$n-1$个对换

$$\{(i,i+1) \mid 1 \le i \le n-1\}$$

为**相邻数字的对换**(transposition of adjacent digits).

命题 5.1. 置换群S_n中相邻数字的对换生成S_n. 也就是说, 对任意$\sigma \in S_n$, 存在相邻数字的对换$\sigma_1,\ldots,\sigma_k$使得$\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_k$.

证明. 用归纳法. 命题在$n=1$时无需证明. 假设$n \ge 2$, 并且命题对$n-1$成立. 设$\sigma \in S_n$. 我们分两种情形证明σ可以表示为相邻数字对换的乘积.

情形1. 设$\sigma(n) = n$. 则σ限制在$\{1,\ldots,n-1\}$上是S_{n-1}中的元素, 从而归纳假设保证了σ可以表示为相邻数字对换的乘积.

情形2. 设$\sigma(n) < n$. 记$\tau_i = (i,i+1)$. 则$\tau_{n-1}\cdots\tau_{\sigma(n)}\sigma(n) = n$. 由情形1, 存在相邻数字的对换$\sigma_1,\ldots,\sigma_k$使得$\tau_{n-1}\cdots\tau_{\sigma(n)}\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_k$, 即$\sigma = \tau_{\sigma(n)}\cdots\tau_{n-1}\sigma_1\cdots\sigma_k$. □

对于$\sigma \in S_n$, 我们称

$$\ell(\sigma) = \#\{(i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,n\}, i<j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

为σ的**逆序数**(number of inversions), 并称$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$ 为σ的**符号**(sign). 如果$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 则

称σ为**偶置换**(even permutation); 如果$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$, 则称σ为**奇置换**(odd permutation).

例 5.2. 设$n\geq 2$, I是$\{1,\ldots,n\}$的子集, $1\leq |I|<n$. 我们定义置换$\sigma_I\in S_n$如下: 记$k=|I|$, $\Sigma_I=\sum_{i\in I} i$, $I^c=\{1,\ldots,n\}\setminus I$. 如果

$$I=\{i_1,\ldots,i_k\},\quad i_1<\cdots<i_k,$$
$$I^c=\{i'_1,\ldots,i'_{n-k}\},\quad i'_1<\cdots<i'_{n-k},$$

则定义

$$\sigma_I=\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n\\ i_1 & \cdots & i_k & i'_1 & \cdots & i'_{n-k}\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

置换σ_I的逆序数为

$$\begin{aligned}\ell(\sigma_I)&=\#\{(r,s)\mid i_r>i'_s\}=\sum_{r=1}^{k}\#\{s\mid i_r>i'_s\}\\ &=\sum_{r=1}^{k}\#(\{1,\ldots,i_r\}\cap I^c)=\sum_{r=1}^{k}(i_r-r)=\Sigma_I-\frac{k(k+1)}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{sgn}(\sigma_I)=(-1)^{\Sigma_I-\frac{k(k+1)}{2}}. \tag{5.2}$$

置换的符号可以用下面的表达式来表示.

命题 5.2. 对任意$\sigma\in S_n$, 有

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}. \tag{5.3}$$

更一般地, 如果$(d_1,\ldots,d_n)$是数字$\{1,\ldots,n\}$的排列, 则

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(d_j)-\sigma(d_i)}{d_j-d_i}. \tag{5.4}$$

证明. 容易看出, (5.3)式右边的乘积中有$\ell(\sigma)$项取负号. 因此该乘积与$\mathrm{sgn}(\sigma)$ 同号. 而该乘积的绝对值等于1. 因此(5.3)成立. 另一方面, 在不计次序的意义下, (5.4)式与(5.3)式右边乘积中的$\frac{n(n-1)}{2}$项相同. 因此(5.4) 也成立. □

我们会多次用到下面的性质.

命题 5.3. (1) 映射$\mathrm{sgn}: S_n\to\{1,-1\}$是群同态, 即对任意$\sigma,\tau\in S_n$有

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).$$

(2) 如果$\sigma\in S_n$是k个对换的乘积, 则$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^k$. 特别地, 对换是奇置换.

证明. (1) 由于$(\tau(1),\ldots,\tau(n))$是数字$\{1,\ldots,n\}$的排列, 由命题5.2,

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}.$$

因此

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).$$

(2) 首先证明如果$\sigma\in S_n$是对换, 则$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$. 设$\sigma=(s,t)$, $s<t$. 则

$$\begin{aligned}&\{(i,j)\mid i,j\in\{1,\ldots,n\},i<j,\sigma(i)>\sigma(j)\}\\ &=\{(s,t),(s,s+1),\ldots,(s,t-1),(s+1,t),\ldots,(t-1,t)\}.\end{aligned}$$

从而$\ell(\sigma)=2(t-s-1)+1$是奇数, 因此$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$. 现在设$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_k$, 其中$\sigma_i$是对换. 由(1), 有$\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma_1)\cdots\mathrm{sgn}(\sigma_k)=(-1)^k$. □

推论 5.4. 所有n次偶置换构成的集合A_n是S_n的子群, 并且当$n\geq 2$时有$|A_n|=\frac{1}{2}n!$.

证明. 为了证明A_n是S_n的子群, 我们需要说明: (1)S_n中的恒同置换id是偶置换; (2) 如果$\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau)=1$, 则$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=1$; (3) 如果$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$, 则$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=1$. (1)是显然的, (2)和(3)是命题5.3(1)的直接推论.

假设$n\geq 2$. 由命题5.3(2), $A_n\neq S_n$. 取定$\tau\in S_n\smallsetminus A_n$. 由命题5.3(1), 可以定义映射

$$\rho_1: A_n\to S_n\smallsetminus A_n,\quad \rho_1(\sigma)=\sigma\tau,$$
$$\rho_2: S_n\smallsetminus A_n\to A_n,\quad \rho_2(\sigma)=\sigma\tau^{-1}.$$

注意到$\rho_1\circ\rho_2$和$\rho_2\circ\rho_1$是恒同映射. 因此ρ_1与ρ_2可逆. 由于集合A_n与$S_n\smallsetminus A_n$之间存在可逆映射, 所以$|A_n|=|S_n\smallsetminus A_n|=\frac{1}{2}|S_n|=\frac{1}{2}n!$. □

群A_n称为n**次交错群**(alternating group of degree n).

例 5.3. $A_1=\{\mathrm{id}\}$, $A_2=\{\mathrm{id}\}$,

$$A_3=\left\{\mathrm{id},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}.$$

习题 5.1.

1. 列出A_4中的所有元素.
2. 求所有正整数n, 使得置换$\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\n&\cdots&1\end{pmatrix}\in A_n$.
3. 设$\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$是$F^{n\times 1}$的标准基. 对$\sigma\in S_n$, 记$R(\sigma)\in F^{n\times n}$为第$j$列等于$\epsilon_{\sigma(j)}$ 的(可逆)矩阵. 证明映射$R: S_n\to \mathrm{GL}_n(F)$是群同态, 即对任意$\sigma,\tau\in S_n$有$R(\sigma\tau)=R(\sigma)R(\tau)$.
4. 设$\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$是$F^n$的标准基. 对$\sigma\in S_n$, 记$R'(\sigma)\in F^{n\times n}$为第$i$行等于$\delta_{\sigma(i)}$的矩阵. 等式$R'(\sigma\tau)=R'(\sigma)R'(\tau)$是否成立?

§5.2 多重线性函数

设V是域F上的线性空间, r是正整数.

定义 5.1. 映射$L: V^r\to F$称为V上的r**重线性函数**(r-linear function)或r**重线性形式**(r-linear form), 如果对任意指标$1\leq i\leq r$和任意给定的向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_r\in V$, 映射

$$V\to F,\quad \alpha_i\mapsto L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$$

是线性函数.

我们把V上的所有r重线性函数的集合记为$(V^*)^{\otimes r}$或$\bigotimes^r(V^*)$(书上记为$\mathrm{M}^r(V)$), 并在它上面定义加法和纯量乘法如下:

$$(L_1+L_2)(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=L_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)+L_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_r),\quad \forall L_1,L_2\in (V^*)^{\otimes r},$$
$$(cL)(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=cL(\alpha_1,\ldots,\alpha_r),\quad \forall c\in F, L\in (V^*)^{\otimes r}.$$

容易看出, $(V^*)^{\otimes r}$是线性空间. 注意$(V^*)^{\otimes 1}=V^*$.

例 5.4. 设$f_1,\dots,f_r\in V^*$, 并定义$f_1\otimes\cdots\otimes f_r: V^r\to F$为

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_r(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=f_1(\alpha_1)\cdots f_r(\alpha_r).$$

则$f_1\otimes\cdots\otimes f_r\in(V^*)^{\otimes r}$.

例 5.5. 线性空间上的2重线性函数称为**双线性函数**(bilinear function)或**双线性形式**(bilinear form). 设$A\in F^{n\times n}$. 则映射

$$L:(F^{n\times 1})^2\to F,\quad L(X,Y)=Y^tAX$$

是$F^{n\times 1}$上的双线性函数.

为了定义线性映射的行列式, 我们需要下面的概念.

定义 5.2. 多重线性函数$L\in(V^*)^{\otimes r}$称为**交错**(alternating)的, 如果某两个变量相同时L取值是0, 即对任意不同的$s,t\in\{1,\dots,r\}$, 有

$$\alpha_s=\alpha_t\quad\Longrightarrow\quad L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=0.$$

我们把V上的r重交错线性函数的集合记为$\Lambda^r(V^*)$(书上记为$\Lambda^r(V)$). 容易看出, 它是$(V^*)^{\otimes r}$的子空间. 我们约定$\Lambda^1(V^*)=V^*$.

例 5.6. 设$f_1,f_2\in V^*$. 定义

$$f_1\wedge f_2=f_1\otimes f_2-f_2\otimes f_1,$$

即

$$f_1\wedge f_2(\alpha_1,\alpha_2)=f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2)-f_1(\alpha_2)f_2(\alpha_1).$$

则$f_1\wedge f_2\in\Lambda^2(V^*)$. 注意到

$$f_1\wedge f_2=-f_2\wedge f_1.$$

例 5.7. 设$\{f_1,\dots,f_{2n}\}$是F^{2n}的标准基的对偶基. F^{2n}上的交错双线性函数

$$\omega_0=\sum_{i=1}^n f_i\wedge f_{n+i}$$

称为**标准辛形式**(standard symplectic form). 如果$\alpha=(x_1,\dots,x_{2n})$, $\beta=(y_1,\dots,y_{2n})$, 则

$$\omega_0(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n(x_iy_{n+i}-x_{n+i}y_i).$$

命题 5.5. 设$r\geq 2$.

(1) 设$L\in(V^*)^{\otimes r}$. 假设某两个相邻变量相同时L取值是0, 即对任意$1\leq i\leq r-1$有

$$\alpha_i=\alpha_{i+1}\quad\Longrightarrow\quad L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=0.$$

则$L\in\Lambda^r(V^*)$.

(2) 设$L\in\Lambda^r(V^*)$. 则对任意$\sigma\in S_r$, 有

$$L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})=\operatorname{sgn}(\sigma)L(\alpha_1,\dots,\alpha_r),\quad\forall\alpha_1,\dots,\alpha_r\in V.\tag{5.5}$$

证明. 我们把证明分为以下几步.

第一步. 假设$L\in(V^*)^{\otimes r}$满足(1)的条件, 即当某两个相邻变量相同时L取值是0. 我们证明(5.5)当σ是相邻数字的对换时成立. 设$\sigma=(i,i+1)$. 对于取定的$r-2$个向量α_j, $j\in\{1,\dots,r\}\setminus\{i,i+1\}$, 记

$$L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})=L(\alpha_1,\dots,\alpha_r).$$

则(1)的条件推出

$$\begin{aligned}0 &= L'(\alpha_i+\alpha_{i+1},\alpha_i+\alpha_{i+1})\\ &= L'(\alpha_i,\alpha_i)+L'(\alpha_{i+1},\alpha_{i+1})+L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})+L'(\alpha_{i+1},\alpha_i)\\ &= L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})+L'(\alpha_{i+1},\alpha_i),\end{aligned}$$

即$L'(\alpha_{i+1},\alpha_i)=-L'(\alpha_i,\alpha_{i+1})$. 由命题5.3(2), $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$. 因此(5.5)对$\sigma=(i,i+1)$成立.

第二步. 假设$L\in(V^*)^{\otimes r}$满足(1)的条件. 我们证明(5.5)对于一般的$\sigma\in S_n$也成立. 由命题5.1, σ可以表示为相邻数字的对换的乘积$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_k$. 对这些对换应用第一步的结果, 得到

$$\begin{aligned}L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)}) &= L(\alpha_{\sigma_1\cdots\sigma_k(1)},\ldots,\alpha_{\sigma_1\cdots\sigma_k(r)})\\ &= -L(\alpha_{\sigma_2\cdots\sigma_k(1)},\ldots,\alpha_{\sigma_2\cdots\sigma_k(r)})\\ &= \cdots\cdots\\ &= (-1)^kL(\alpha_1,\ldots,\alpha_r).\end{aligned}$$

由命题5.3(2), $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^k$. 因此(5.5)对一般的$\sigma\in S_n$也成立. 注意到如果$L\in\Lambda^r(V^*)$, 则(1)的条件成立. 因此我们已经完成了(2)的证明. □

第三步. 最后我们证明(1). 假设$L\in(V^*)^{\otimes r}$满足(1)的条件, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in V$. 我们需要证明: 对任意不同的$s,t\in\{1,\ldots,r\}$, 如果$\alpha_s=\alpha_t$, 则$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. 不妨设$s<t$. 如果$s+1=t$, 则(1)的条件已经保证$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. 假设$s+1<t$. 对于对换$\sigma=(s+1,t)$应用第二步的结果, 得到$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=-L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)})$. 另一方面, 在排列$(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$中, 数字$s$与$t$相邻. 所以(1)的条件推出$L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(r)})=0$. 因此$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. 这就完成了证明. □

现在设V是有限维的, $\dim V=n\geq 1$. 我们考察V上的n重交错线性函数的可能形式. 设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1,\ldots,f_n\}$是它在V^*中的对偶基. 则对任意的$L\in(V^*)^{\otimes n}$和$\beta_1,\ldots,\beta_n\in V$, 由于$\beta_i=\sum_{j=1}^n f_j(\beta_i)\alpha_j$, 所以

$$\begin{aligned}L(\beta_1,\ldots,\beta_n) &= L\left(\sum_{j_1=1}^n f_{j_1}(\beta_1)\alpha_{j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^n f_{j_n}(\beta_n)\alpha_{j_n}\right)\\ &= \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_n\leq n} f_{j_1}(\beta_1)\cdots f_{j_n}(\beta_n)L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})\\ &= \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_n\leq n} L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_n}(\beta_1,\ldots,\beta_n),\end{aligned}$$

即

$$L=\sum_{1\leq j_1,\ldots,j_n\leq n} L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_n}.$$

如果L是交错的, 则只有当$j_1,\ldots,j_n$互不相同时, $L(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})$才可能非零. 此时, 存在唯一的$\sigma\in S_n$使得$j_i=\sigma(i)$. 因此, 由命题5.5(2),

$$\begin{aligned}L &= \sum_{\sigma\in S_n} L(\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)})f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}\\ &= L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

如果我们定义n重线性函数

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}, \tag{5.6}$$

即

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}(\beta_1)\cdots f_{\sigma(n)}(\beta_n), \tag{5.7}$$

上面的讨论说明:

引理 5.6. 设$L\in\Lambda^n(V^*)$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1,\ldots,f_n\}$是它的对偶基. 则

$$L=L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)f_1\wedge\cdots\wedge f_n.$$

接下来我们证明:

引理 5.7. 设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1,\ldots,f_n\}$是其对偶基. 则

(1) $f_1\wedge\cdots\wedge f_n$是交错的.

(2) $f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$. 特别地, $f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0$.

证明. (1) 当$n=1$时无需证明. 假设$n\geq 2$. 设$\beta_1,\ldots,\beta_n\in V$, $\beta_s=\beta_t$, 这里$1\leq s<t\leq n$. 我们希望证明$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\beta_1,\ldots,\beta_n)=0$. 考虑对换$\tau=(s,t)$. 由推论5.4的证明可知

$$S_n\setminus A_n=\{\sigma\tau\mid\sigma\in A_n\}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\beta_1,\ldots,\beta_n)\\
=&\sum_{\sigma\in A_n}f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}(\beta_1,\ldots,\beta_n)-\sum_{\sigma\in A_n}f_{\sigma\tau(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma\tau(n)}(\beta_1,\ldots,\beta_n)\\
=&\sum_{\sigma\in A_n}\left(f_{\sigma(1)}(\beta_1)\cdots f_{\sigma(n)}(\beta_n)-f_{\sigma\tau(1)}(\beta_1)\cdots f_{\sigma\tau(n)}(\beta_n)\right)\\
=&\sum_{\sigma\in A_n}\left(\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{s,t\}}f_{\sigma(i)}(\beta_i)\right)\left(f_{\sigma(s)}(\beta_s)f_{\sigma(t)}(\beta_t)-f_{\sigma(t)}(\beta_s)f_{\sigma(s)}(\beta_t)\right)=0.
\end{aligned}$$

因此$f_1\wedge\cdots\wedge f_n$是交错的.

(2) 由(5.7)即得$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=f_1(\alpha_1)\cdots f_n(\alpha_n)=1$. □

由上面两个引理, 我们很容易得到:

定理 5.8. 设V是域F上的有限维线性空间, $\dim V=n\geq 1$. 则$\dim\Lambda^n(V^*)=1$.

证明. 取定V的一组基和它在V^*中的对偶基$\{f_1,\ldots,f_n\}$. 由引理5.7, $f_1\wedge\cdots\wedge f_n$是$\Lambda^n(V^*)$中的非零元素. 再由引理5.6, 可知$\{f_1\wedge\cdots\wedge f_n\}$是$\Lambda^n(V^*)$的基. 因此$\dim\Lambda^n(V^*)=1$. □

一个n维线性空间V上的非零n重交错线性函数可以用来判断V中的n个向量是否构成一组基.

推论 5.9. 设$\dim V=n\geq 1$, $L\in\Lambda^n(V^*)\setminus\{0\}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$. 则$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基的充分必要条件是$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq 0$.

证明. 设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是基, $\{f_1,\ldots,f_n\}$是其对偶基. 由引理5.7(2), $f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$. 再由定理5.8可知, 存在$c\in F\setminus\{0\}$使得$L=cf_1\wedge\cdots\wedge f_n$. 因此

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=cf_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=c\neq 0.$$

反过来, 假设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$不是基. 取$\operatorname{span}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$的基$\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}$, $r<n$, 并扩充为V的基$\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$. 设$\{g_1,\ldots,g_n\}$是$\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$在$V^*$中的对偶基. 由于$g_n(\beta_1)=\cdots=g_n(\beta_r)=0$,

所以$g_n(\alpha_1)=\cdots=g_n(\alpha_n)=0$. 由引理5.7(2)和定理5.8, 存在$c'\in F$使得$L=c'g_1\wedge\cdots\wedge g_n$. 因此

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=c'g_1\wedge\cdots\wedge g_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=c'\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)g_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots g_{\sigma(n)}(\alpha_n)=0.$$

□

注 5.1. 当V是n维实线性空间时, V上的非零n重交错线性函数可以视为广义平行多面体的有向体积函数. 对于向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$, 考虑$V$中的**广义平行多面体**(parallelotope)

$$P=P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\left\{\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i \mid 0\le c_i\le 1\right\}.$$

给定$L\in\Lambda^n(V^*)\smallsetminus\{0\}$, 我们把$|L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|$视为$P$的体积. 注意到$L$的交错性意味着, 如果$P$的某两个顶点$\alpha_s$和$\alpha_t$重合, 则$P$的体积是0. 这是对体积的定义的合理要求. 更一般地, 推论5.9表明, P的体积是0等价于$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$不是基, 即$P$落在$V$的某个真子空间中. 我们称这种情况是退化的. 当$P$非退化时, 在它上面有两个定向. 定向有几种等价的定义方式. 我们采用如下定义: P的顶点$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的两个排列$(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n})$和$(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_n})$称为是等价的, 如果满足$\sigma(i_k)=j_k$的置换$\sigma\in S_n$是偶置换. 于是, 这$n$个顶点的所有排列被划分为两个等价类. 每个等价类称为P 的一个**定向**(orientation), 每个排列所在的等价类称为由这个排列决定的定向. 这时, 我们把$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$视为在$P$上选取由排列$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$决定的定向后它的有向体积. 有向体积可以取负值, 改变P的定向导致它的有向体积反号. 需要指出的是, 有向体积依赖于L的选取. 如果在V上没有附加其他结构(例如内积和V自身的定向等), 则L没有占特殊地位的选取方式. 而定理5.8说明, 有向体积的赋予方式在差一个非零因子的意义下是唯一的.

习题 5.2.

1. 集合$\{f_1\otimes f_2\mid f_1,f_2\in V^*\}$是否为$(V^*)^{\otimes 2}$的子空间? 试对$V=F^2$刻画这个集合.
2. 设$\dim V=n$. 证明$\dim(V^*)^{\otimes 2}=n^2$.
3. 证明$F^{n\times 1}$上的双线性函数总是例5.5的形式.
4. 线性空间V上的双线性函数L称为**非退化的**(nondegenerate), 如果对任意$\alpha\in V\smallsetminus\{0\}$, 存在$\beta\in V$使得$L(\alpha,\beta)\neq 0$. 证明例5.5中的双线性函数非退化的充分必要条件是矩阵A可逆.
5. 证明F^{2n}上的标准辛形式是非退化的.
6. 设V是有限维的, L是V上的非退化双线性函数. 对于子空间$W\subset V$, 定义
$$W^\perp=\{\alpha\in V\mid L(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}.$$
证明$W^\perp$是V的子空间, 并且$\dim W+\dim W^\perp=\dim V$.
7. 多重线性函数$L\in(V^*)^{\otimes r}$称为是**反对称**(anti-symmetric)或**斜对称**(skew-symmetric)的, 如果交换两个变量使L的取值反号, 即(5.5)式对任意S_n中的对换σ成立. 证明: 如果$\mathrm{char}F\neq 2$, 则L反对称的充分必要条件是它是交错的.
8. 设$\mathrm{char}F=2$. 说明在F^n上存在反对称但不交错的双线性函数.
9. 设$\dim V=n$.
   (1) 证明$\dim\Lambda^2(V^*)=\frac{1}{2}n(n-1)$.
   (2) 设$r>n$. 证明$\Lambda^r(V^*)=\{0\}$.

§5.3 线性映射的行列式

设V和W是域F上的线性空间, $T \in \mathrm{L}(V,W)$, r是正整数. 与转置映射$T^t: W^* \to V^*$类似, 我们定义映射$\Lambda^r(T^t): \Lambda^r(W^*) \to \Lambda^r(V^*)$为

$$\Lambda^r(T^t)(L)(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) = L(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_r), \quad \forall L \in \Lambda^r(W^*), \alpha_1,\ldots,\alpha_r \in V.$$

容易看出, $\Lambda^r(T^t)(L)$确实属于$\Lambda^r(V^*)$, 并且$\Lambda^r(T^t)$是线性映射. 注意$\Lambda^1(T^t) = T^t$.

命题 5.10. 设$T \in \mathrm{L}(V,W)$, $U \in \mathrm{L}(W,Z)$. 则

$$\Lambda^r(T^t) \circ \Lambda^r(U^t) = \Lambda^r((UT)^t).$$

证明. 对任意$L \in \Lambda^r(Z^*)$和$\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in V$, 有

$$\begin{aligned}\Lambda^r(T^t)(\Lambda^r(U^t)(L))(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) &= \Lambda^r(U^t)(L)(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_r)\\ &= L(UT\alpha_1,\ldots,UT\alpha_r) = \Lambda^r((UT)^t)(L)(\alpha_1,\ldots,\alpha_r),\end{aligned}$$

即

$$\Lambda^r(T^t)(\Lambda^r(U^t)(L)) = \Lambda^r((UT)^t)(L), \quad \forall L \in \Lambda^r(Z^*).$$

因此命题成立. □

下面假设V是有限维的, $\dim V = n \geq 1$. 对于$T \in \mathrm{L}(V,V)$, 由定理5.8, $\Lambda^n(T^t)$是一维线性空间$\Lambda^n(V^*)$到自身的线性映射, 从而是恒同映射的常数倍(这里的“常数”指域F中的元素). 我们把这个常数定义为T的行列式.

定义 5.3. 设n是正整数, V是域F上的n维线性空间, $T \in \mathrm{L}(V,V)$. 满足

$$\Lambda^n(T^t) = \det(T)\,\mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)} \tag{5.8}$$

的域F中的元素$\det(T)$称为T的**行列式**(determinant).

把行列式的定义式(5.8)写得具体一些, 即

$$\Lambda^n(T^t)(L) = \det(T)L, \quad \forall L \in \Lambda^n(V^*),$$

或者

$$L(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n) = \det(T)L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \quad \forall L \in \Lambda^n(V^*), \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in V. \tag{5.9}$$

线性映射的行列式满足下面的基本性质.

命题 5.11. 设V是域F上的n维线性空间.

(1) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(2) 对任意$T, U \in \mathrm{L}(V,V)$, 有$\det(TU) = \det(T)\det(U)$.

(3) $T \in \mathrm{L}(V,V)$可逆的充分必要条件是$\det(T) \neq 0$. 此时, $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$.

(4) 设W是另一个n维线性空间, $\Phi: V \to W$是线性同构. 如果$T \in \mathrm{L}(V,V)$和$U \in \mathrm{L}(W,W)$满足$\Phi \circ T = U \circ \Phi$, 则$\det(T) = \det(U)$.

(5) 设$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基, $\{f_1,\ldots,f_n\}$是它在V^* 中的对偶基, $T \in \mathrm{L}(V,V)$. 则

$$\det(T) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n).$$

证明. (1) 容易看出$\Lambda^n(\mathrm{id}_V^t) = \mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)}$. 因此$\det(\mathrm{id}_V) = 1$.

(2) 由命题5.10,

$$\det(TU)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)} = \Lambda^n((TU)^t) = \Lambda^n(U^t)\circ\Lambda^n(T^t)$$
$$= (\det(U)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)})\circ(\det(T)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)}) = \det(T)\det(U)\mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)}.$$

因此$\det(TU) = \det(T)\det(U)$.

(3) 假设T可逆. 由(1)和(2),

$$\det(T)\det(T^{-1}) = \det(\mathrm{id}_V) = 1.$$

因此$\det(T)\neq 0$, 并且$\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$. 反过来, 假设$\det(T)\neq 0$. 取$L\in\Lambda^n(V^*)\setminus\{0\}$ 和V的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. 由推论5.9, $L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq 0$. 因此(5.9)推出

$$L(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n) = \det(T)L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq 0.$$

再次利用推论5.9, 即知$\{T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n\}$是$V$的基. 这说明$T$把$V$的基映为基. 因此$T$可逆.

(4) 由命题5.10,

$$\Lambda^n((\Phi\circ T)^t) = \Lambda^n(T^t)\circ\Lambda^n(\Phi^t) = \det(T)\Lambda^n(\Phi^t),$$
$$\Lambda^n((U\circ\Phi)^t) = \Lambda^n(\Phi^t)\circ\Lambda^n(U^t) = \det(U)\Lambda^n(\Phi^t).$$

上面两个等式最左边的表达式相等. 所以

$$\det(T)\Lambda^n(\Phi^t) = \det(U)\Lambda^n(\Phi^t).$$

另一方面,

$$\Lambda^n(\Phi^t)\circ\Lambda^n((\Phi^{-1})^t) = \Lambda^n((\Phi^{-1}\circ\Phi)^t) = \Lambda^n(\mathrm{id}_V^t) = \mathrm{id}_{\Lambda^n(V^*)}.$$

特别地, $\Lambda^n(\Phi^t)\neq 0$. 因此$\det(T) = \det(U)$.

(5) 由(5.9), 有

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n) = \det(T)f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

另一方面, 由引理5.7(2), $f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 1$. 所以结论成立. □

注 5.2. 当V是n维实线性空间时, 线性映射$T\in\mathrm{L}(V,V)$的行列式可以视为T把广义平行多面体的有向体积扩大的倍数. 设$P = P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$是$V$中非退化的广义平行多面体(见注5.1). 容易看出, P在映射T下的像$T(P)$即为广义平行多面体$P(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n)$, 并且$T(P)$非退化意味着$T$可逆. 另一方面, 通过选取$L\in\Lambda^n(V^*)\setminus\{0\}$并应用(5.9), 可以看出$T(P)$非退化等价于$\det(T)\neq 0$. 此时, 在$P$和$T(P)$上面分别选取由顶点的排列$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$和$(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n)$决定的定向, 则它们的有向体积分别是$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$和$L(T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n)$. 因此, $\det(T)$即为$T(P)$ 与P的有向体积的比值. 值得注意的是, 这一比值不仅与P的定向的选择无关, 也与P自身无关, 即T把所有广义平行多面体的有向体积扩大了相同的倍数. 另外, 虽然有向体积函数L不唯一, 但T把有向体积扩大的倍数不依赖于L的选取.

行列式是1的线性映射经常有特殊的重要性. 对于有限维线性空间V, 我们记

$$\mathrm{SL}(V) = \{T\in\mathrm{L}(V,V)\mid\det(T) = 1\}.$$

由命题5.11(1)–(3)容易看出, $\mathrm{SL}(V)$是一般线性群$\mathrm{GL}(V)$的子群, 称为V **的特殊线性群**(special linear group of V).

习题 5.3.

1. 设$B\in F^{n\times n}$. 考虑线性映射$T_B: F^{n\times n}\to F^{n\times n}$, $T_B(A) = AB - BA$. 证明$\det(T_B) = 0$.

2. 设V是n维实线性空间, $n \geq 1$. 集合$\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$的非空子集$\mathcal{O}$称为一个**连通分支**(connected component), 如果对任意$L \in \mathcal{O}$有$\mathcal{O} = \{cL \mid c > 0\}$.
   (1) 证明$\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$恰好有两个连通分支. 每个连通分支称为$V$的一个**定向**(orientation).
   (2) 假设取定了V的一个定向$\mathcal{O}^+$, 并记V的另一个定向为$\mathcal{O}^-$. 设$T \in \mathrm{L}(V, V)$可逆. 如果$\Lambda^n(T^t)(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+$, 则称$T$是**保定向的**(orientation-preserving); 如果$\Lambda^n(T^t)(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^-$, 则称$T$是**反定向的**(orientation-reversing). 证明T保定向的充分必要条件是$\det(T) > 0$, T反定向的充分必要条件是$\det(T) < 0$.

§5.4 方阵的行列式

现在我们利用线性映射的行列式来定义方阵的行列式. 设$A \in F^{n\times n}$. 它诱导了两个线性映射

$$L_A : F^{n\times 1} \to F^{n\times 1}, \quad L_A(X) = AX,$$
$$R_A : F^n \to F^n, \quad R_A(\alpha) = \alpha A.$$

引理 5.12. $\det(L_A) = \det(R_A)$.

证明. 设$\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$是$F^{n\times 1}$的标准基, $\{f_1, \dots, f_n\}$是它在$(F^{n\times 1})^*$中的对偶基, A的第j个列向量为A_j. 由命题5.11(5),

$$\begin{aligned}\det(L_A) &= f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(A\epsilon_1, \dots, A\epsilon_n)\\ &= f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(A_1, \dots, A_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{\sigma(1)}(A_1)\cdots f_{\sigma(n)}(A_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$

另一方面, 设$\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$是$F^n$的标准基, $\{g_1, \dots, g_n\}$是其对偶基, A的第i个行向量为α_i. 类似地有

$$\begin{aligned}\det(R_A) &= g_1 \wedge \cdots \wedge g_n(\delta_1 A, \dots, \delta_n A)\\ &= g_1 \wedge \cdots \wedge g_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) g_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots g_{\sigma(n)}(\alpha_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

对于$\sigma \in S_n$, 数对的集合$\{(\sigma(1), 1), \dots, (\sigma(n), n)\}$与$\{(1, \sigma^{-1}(1)), \dots, (n, \sigma^{-1}(n))\}$相等. 所以

$$A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n} = A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

另外, $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n} &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

这就证明了$\det(L_A) = \det(R_A)$. □

定义 5.4. 设$A \in F^{n\times n}$. 我们定义A的**行列式**为

$$\det(A) = \det(L_A) = \det(R_A).$$

在引理5.12的证明中, 我们已经得到了行列式的表达式.

推论 5.13. 设$A \in F^{n\times n}$. 则

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}. \tag{5.10}$$

如果$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, 我们也记$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

例 5.8. 由(5.10), 我们有

$$\det[a] = a, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

下面给出方阵行列式的几个基本性质.

命题 5.14. (1) $\det(I_n) = 1$.

(2) 设$A, B \in F^{n\times n}$. 则$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3) 方阵A可逆的充分必要条件是$\det(A) \neq 0$. 此时, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

(4) 相似的方阵行列式相等.

(5) $\det(A^t) = \det(A)$.

(6) 映射$(F^{n\times 1})^n \to F$, $(A_1, \ldots, A_n) \mapsto \det[A_1, \ldots, A_n]$是$n$ 重交错线性函数.

(7) 映射$(F^n)^n \to F$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$是$n$重交错线性函数.

证明. (1) 由命题5.11(1), 有

$$\det(I_n) = \det(L_{I_n}) = \det(\mathrm{id}_{F^{n\times 1}}) = 1.$$

(2) 由命题5.11(2), 有

$$\det(AB) = \det(L_{AB}) = \det(L_A L_B) = \det(L_A)\det(L_B) = \det(A)\det(B).$$

(3) 由命题5.11(3),

$$A\text{可逆} \iff L_A\text{可逆} \iff \det(A) = \det(L_A) \neq 0.$$

此时,

$$\det(A^{-1}) = \det(L_{A^{-1}}) = \det(L_A^{-1}) = \det(L_A)^{-1} = \det(A)^{-1}.$$

(4) 设$A, B \in F^{n\times n}$相似, 即存在可逆矩阵$P \in F^{n\times n}$使得$A = PBP^{-1}$. 则由(3)和(4),

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P)^{-1} = \det(B).$$

(5) 考虑线性同构$\Phi: F^{n\times 1}\to F^n$, $\Phi(X)=X^t$. 则对$X\in F^{n\times 1}$有

$$\Phi(L_A(X))=\Phi(AX)=(AX)^t=X^tA^t=R_{A^t}(X^t)=R_{A^t}(\Phi(X)).$$

即$\Phi\circ L_A=R_{A^t}\circ\Phi$. 由命题5.11(4), $\det(L_A)=\det(R_{A^t})$. 因此$\det(A)=\det(A^t)$.

(6)+(7) 在引理5.12的证明中, 我们已经得到

$$\det[A_1,\dots,A_n]=f_1\wedge\cdots\wedge f_n(A_1,\dots,A_n),$$

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=g_1\wedge\cdots\wedge g_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

因此(6)和(7)中的映射是n重交错线性函数. □

与线性映射的情况类似, 行列式是1的方阵也是很重要的. 命题5.14(1)–(3)表明, 集合

$$\mathrm{SL}_n(F)=\{A\in F^{n\times n}\mid \det(A)=1\}$$

是$\mathrm{GL}_n(F)$的子群, 称为**F上的n次特殊线性群**(special linear group of degree n over F).

命题5.14的(6)和(7)提供了计算行列式的有效工具:

推论 5.15. (1) 若方阵有零行或零列, 则行列式为0.

(2) 若方阵有两行(或两列)相同或成比例, 则行列式为0.

(3) 互换两行或两列, 方阵的行列式反号.

(4) 把某行(或列)的倍数加到另一行(或列)上, 方阵的行列式不变.

(5) 某行(或列)乘以某个常数, 导致方阵的行列式也乘以相同的常数.

证明. 这些都是命题5.14(6)和(7)的明显推论. 例如, 对于(4)中列的情况, 可以验证如下:

$$\begin{aligned}&\det[A_1,\dots,A_s,\dots,cA_s+A_t,\dots,A_n]\\ =\ &c\det[A_1,\dots,A_s,\dots,A_s,\dots,A_n]+\det[A_1,\dots,A_s,\dots,A_t,\dots,A_n]\\ =\ &\det[A_1,\dots,A_n].\end{aligned}$$

□

推论5.15(3)–(5)给出了方阵在初等行(列)变换下, 行列式的改变方式. 利用初等行(列)变换, 我们总是可以把方阵化为上三角或下三角的形式. 这里矩阵$A\in F^{n\times n}$称为**上三角的**(upper triangular), 如果当$i>j$时有$A_{ij}=0$; 矩阵A称为**下三角的**(lower triangular), 如果当$i<j$时有$A_{ij}=0$. 对于这两种方阵, 我们有:

命题 5.16. 上三角或下三角矩阵的行列式等于所有对角元的乘积. 特别地, 对角矩阵的行列式等于所有对角元的乘积.

证明. 设A是上三角的, 即当$i>j$时有$A_{ij}=0$. 此时, 在表达式

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}$$

中, 如果$A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)}\neq 0$, 则对所有$1\le i\le n$有$i\le\sigma(i)$. 这推出$\sigma=\mathrm{id}$, 即$\sigma(i)=i$. 所以$\det(A)=A_{11}\cdots A_{nn}$. 下三角的情况可以类似证明. □

例 5.9. 丘老师书上册32页例1; 教材158页例6.

作为命题5.16的推广, 我们证明下面的结果.

命题 5.17. 设方阵A是分块上三角矩阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,k-1} & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k-1} & A_{k-1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{kk} \end{bmatrix},$$

其中A_{ii}为方阵, $A_{ij}\ (i<j)$和0为合适尺寸的矩阵. 则

$$\det(A) = \det(A_{11}) \cdots \det(A_{kk}).$$

特别地, 如果$B \in F^{r\times r}$, $C \in F^{r\times s}$, $D \in F^{s\times s}$, 则

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(B)\det(D). \tag{5.11}$$

对于分块下三角矩阵和分块对角矩阵, 类似的结论也成立.

证明. 我们先证明(5.11)式. 设矩阵$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$的$(i,j)$元为$a_{ij}$, $i,j \in \{1,\ldots,r+s\}$. 则

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r+s,\sigma(r+s)}.$$

注意到当$i \ge r+1$并且$\sigma(i) \le r$时, 有$a_{i\sigma(i)} = 0$. 所以, 如果$\sigma \in S_{r+s}$使得$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r+s,\sigma(r+s)} \ne 0$, 则当$i \ge r+1$时有$\sigma(i) \ge r+1$. 这推出当$i \le r$时有$\sigma(i) \le r$. 因此, 存在$\sigma_1 \in S_r$和$\sigma_2 \in S_s$使得

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma_1(i), & 1 \le i \le r, \\ r+\sigma_2(i-r), & r+1 \le i \le r+s. \end{cases}$$

此时有$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. 从而

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} &= \sum_{\sigma_1 \in S_r, \sigma_2 \in S_s} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_1(1)} \cdots a_{r\sigma_1(r)} a_{r+1,r+\sigma_2(1)} \cdots a_{r+s,r+\sigma_2(s)} \\ &= \left(\sum_{\sigma_1 \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} \cdots a_{r\sigma_1(r)} \right) \left(\sum_{\sigma_2 \in S_s} \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{r+1,r+\sigma_2(1)} \cdots a_{r+s,r+\sigma_2(s)} \right) \\ &= \det(B)\det(D). \end{aligned}$$

这就证明了(5.11).

接下来用归纳法证明分块上三角矩阵的结论. 当$k=2$时结论已经证明. 假设$k \ge 3$, 并且结论对$k-1$成立. 则

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,k-1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k-1} \end{bmatrix} \det(A_{kk}) = \det(A_{11}) \cdots \det(A_{kk}).$$

这就完成了证明. 分块下三角矩阵情况的证明类似. □

我们讨论了线性映射和矩阵的行列式. 线性映射自身的行列式与它关于有序基的矩阵的行列式有什么关系? 下面命题的前一部分回答了这一问题. 它也可以用来把线性映射行列式的计算转化为方阵行列式的计算.

命题 5.18. 设V是$n \geq 1$维线性空间, $T \in \mathrm{L}(V, V)$.

(1) 设$\mathcal{B}$是V的有序基, $[T]_{\mathcal{B}}$是T关于该有序基的矩阵. 则$\det([T]_{\mathcal{B}}) = \det(T)$.

(2) 设$T^t \in \mathrm{L}(V^*, V^*)$是$T$的转置映射. 则$\det(T^t) = \det(T)$.

证明. (1) 回忆坐标映射$\Gamma : V \to F^{n\times 1}$, $\alpha \mapsto [\alpha]_{\mathcal{B}}$是线性同构, 并且$\Gamma \circ T = L_{[T]_{\mathcal{B}}} \circ \Gamma$. 由命题5.11(4), 即得

$$\det(T) = \det(L_{[T]_{\mathcal{B}}}) = \det([T]_{\mathcal{B}}).$$

(2) 设$\mathcal{B}$是V的有序基, $\mathcal{B}^*$是$\mathcal{B}$在V^*中的对偶基, $[T]_{\mathcal{B}}$和$[T^t]_{\mathcal{B}^*}$分别是T和T^t关于相应有序基的矩阵. 我们知道, $[T^t]_{\mathcal{B}^*} = [T]_{\mathcal{B}}^t$. 由(1)和命题5.14(5), 即得

$$\det(T^t) = \det([T^t]_{\mathcal{B}^*}) = \det([T]_{\mathcal{B}}) = \det(T).$$

这就完成了证明. □

习题 5.4.

1. 教材162–163页习题3,4,5.
2. 丘老师书上册26页1(2); 35页1(3), 2(1), 3(1), 4(2).
3. 利用方阵行列式的表达式(5.10)验证命题5.14中的(1),(5),(6),(7).
4. 证明$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det R(\sigma)$, 这里$R(\sigma)$是习题5.1.3中定义的矩阵.
5. 利用命题5.11(5)证明命题5.18(2).
6. 设K是域F的子域, 满足F作为K上的线性空间是有限维的. 对于$x \in F$, K-线性映射
$$T_x : F \to F, \quad y \mapsto xy$$
的行列式称为x的(从F到K的)**范数**(norm), 记为$\mathrm{N}_{F/K}(x) = \det(T_x)$. 对于下面的情况, 给出范数的表达式.
   (1) $K = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$.
   (2) $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   (3) $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) := \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
7. 设V是有限维复线性空间, $T \in \mathrm{L}(V, V)$. 我们把对V执行"忘掉复结构"的操作后得到的实线性空间记为$V_{\mathbb{R}}$, 从而T可以视为实线性映射$T_{\mathbb{R}} \in \mathrm{L}(V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$. 证明$\det(T_{\mathbb{R}}) = |\det(T)|^2$. (提示: 若$T$关于$V$的某个基的矩阵为$A$, 则$T_{\mathbb{R}}$关于$V_{\mathbb{R}}$的某个基的矩阵为$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{bmatrix}$. 设$P = \begin{bmatrix} I & iI \\ iI & I \end{bmatrix}$. 则$P \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} A & \\ & \overline{A} \end{bmatrix}$.)
8. 设K和F如习题6, V是F上的有限维线性空间, $T \in \mathrm{L}(V, V)$. 把V视为K上的线性空间, 记为V_K. 从而T可以视为K-线性映射$T_K \in \mathrm{L}(V_K, V_K)$. 证明$\det(T_K) = \mathrm{N}_{F/K}(\det(T))$. 特别地, 如果$F$是$L$的子域, 则$\mathrm{N}_{L/K} = \mathrm{N}_{F/K} \circ \mathrm{N}_{L/F}$. (注: 此题暂时知道结论即可. 以后将利用有理标准形来证明. 更一般的结果见Bourbaki, Algebra I, p. 546, Prop. 6.)
9. 设$m < n$, $A \in F^{n\times m}$, $B \in F^{m\times n}$. 证明$\det(AB) = 0$.

§5.5 行列式按行或列展开

这一节考察的性质可以用来更加有效地计算行列式, 并且具有重要的理论意义.

设$A=[a_{ij}]\in F^{n\times n}$, $n\geq 2$. 对于正整数$k<n$和指标集$I,J\subset\{1,\ldots,n\}$, $|I|=|J|=k$, 记$A_{I,J}\in F^{k\times k}$为由A的矩阵元$\{a_{ij}\mid i\in I,j\in J\}$ 构成的矩阵. 我们同时考虑矩阵A_{I^c,J^c}, 这里$I^c=\{1,\ldots,n\}\setminus I$. 由矩阵$A$得到$A_{I,J}$和$A_{I^c,J^c}$时, 行和列的排列顺序不变. 也就是说, 如果$\sigma_I\in S_n$是由(5.1)定义的置换, 则$A_{I,J}$和$A_{I^c,J^c}$的矩阵元分别为

$$(A_{I,J})_{rs}=a_{\sigma_I(r),\sigma_J(s)},\qquad r,s\in\{1,\ldots,k\},$$
$$(A_{I^c,J^c})_{rs}=a_{\sigma_I(k+r),\sigma_J(k+s)},\qquad r,s\in\{1,\ldots,n-k\}.$$

关于A的行列式, 我们有下面的Laplace展开定理.

定理 5.19(Laplace). 设n,k是正整数, $k<n$, $A\in F^{n\times n}$. 对于$I\subset\{1,\ldots,n\}$, 记$\Sigma_I=\sum_{i\in I}i$.

(1) (行列式按k行展开) 取定$I_0\subset\{1,\ldots,n\}$, $|I_0|=k$. 则
$$\det(A)=\sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,n\}\\|J|=k}}(-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\det(A_{I_0,J})\det(A_{I_0^c,J^c}).$$

(2) (行列式按k列展开) 取定$J_0\subset\{1,\ldots,n\}$, $|J_0|=k$. 则
$$\det(A)=\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\|I|=k}}(-1)^{\Sigma_I+\Sigma_{J_0}}\det(A_{I,J_0})\det(A_{I^c,J_0^c}).$$

行列式$\det(A_{I,J})$称为A的行列式的**子式**(minor), 行列式$\det(A_{I^c,J^c})$称为子式$\det(A_{I,J})$的**余子式**(complementary minor), 定理中的因子
$$(-1)^{\Sigma_I+\Sigma_J}\det(A_{I^c,J^c})$$
称为子式$\det(A_{I,J})$的**余因子**或**代数余子式**(cofactor). 在这样的词汇下, 定理5.19可以叙述为: A的行列式等于固定行(或列)指标集的所有子式与相应的余因子的乘积之和.

在证明定理前, 我们先来考察它的特殊情况.

例 5.10. 设$B\in F^{k\times k}$, $C\in F^{k\times(n-k)}$, $D\in F^{(n-k)\times(n-k)}$, $A=\begin{bmatrix}B&C\\0&D\end{bmatrix}$. 我们把$A$的行列式按前$k$列展开, 即对$J_0=\{1,\ldots,k\}$应用定理5.19(2). 对于$I\subset\{1,\ldots,n\}$, $|I|=k$, 如果$I\neq J_0$, 则矩阵A_{I,J_0}总有零行, 从而行列式为0. 另一方面, 我们有$A_{J_0,J_0}=B$, $A_{J_0^c,J_0^c}=D$. 因此, 定理5.19(2)推出
$$\det(A)=(-1)^{2\Sigma_{J_0}}\det(A_{J_0,J_0})\det(A_{J_0^c,J_0^c})=\det(B)\det(D).$$
这样我们就重新得到了(5.11)式.

接下来我们考虑$k=1$时的情况. 此时, 对于$i,j\in\{1,\ldots,n\}$, 一阶矩阵$A_{\{i\},\{j\}}$ 的行列式即为a_{ij}. 为了简化记号, 记$M_{ij}=A_{\{i\}^c,\{j\}^c}$. 它是在$A$中去掉第$i$ 行和第j列后得到的$n-1$阶矩阵. 也就是说, 如果定义置换
$$\sigma_i=\begin{pmatrix}1&\cdots&i-1&i&\cdots&n-1&n\\1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n&i\end{pmatrix},\tag{5.12}$$
则M_{ij}的矩阵元为
$$(M_{ij})_{rs}=a_{\sigma_i(r),\sigma_j(s)},\qquad r,s\in\{1,\ldots,n-1\}.$$
注意这里的σ_i实际上是(5.1)中的$\sigma_{\{i\}^c}$. 这样, 定理5.19在$k=1$时的特殊情况可以叙述如下.

定理 5.20. 设$A=[a_{ij}]\in F^{n\times n}$, $n\geq 2$, 并沿用上面的记号.

(1) (行列式按一行展开) 对任意取定的$1\leq i_0\leq n$, 有

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_0+j}a_{i_0j}\det(M_{i_0j}).$$

(2) (行列式按一列展开) 对任意取定的$1\leq j_0\leq n$, 有

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{ij_0}\det(M_{ij_0}).$$

我们把对应(i,j)-元的余因子记为

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

推论 5.21. 对任意$i,j\in\{1,\dots,n\}$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}C_{kj}=\delta_{ij}\det(A).$$

证明. 当$i=j$时, 等式即为定理5.20. 设$i\neq j$. 记B为把A的第j行替换为第i 行得到的矩阵. 由于B有两行相同, 所以$\det(B)=0$. 另一方面, 把B的行列式按第j行展开, 并注意到B的第j行的每个矩阵元与A的同位置矩阵元具有相同的余因子, 即得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{jk}=\det(B)=0.$$

类似地,

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}C_{kj}=0.$$

□

以余因子C_{ij}为(i,j)-元的n阶矩阵的转置称为A的**伴随矩阵**(adjugate, adjunct 或classical adjoint), 记为adj(A), 即

$$\mathrm{adj}(A)_{ij}=C_{ji}=(-1)^{i+j}\det(M_{ji}).$$

例如,

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\quad \mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

推论5.21可以重新叙述为:

推论 5.22. 设$A\in F^{n\times n}$, $n\geq 2$. 则

$$A\,\mathrm{adj}(A)=\mathrm{adj}(A)A=\det(A)I_n.$$

特别地, 如果A可逆, 则

$$A^{-1}=\det(A)^{-1}\mathrm{adj}(A).$$

□

推论 5.23(Cramer法则). 设$n\geq 2$, $A\in F^{n\times n}$可逆, $Y\in F^{n\times 1}$. 记B_j为把A的第j列替换为Y后得到的矩阵. 则线性方程组$AX=Y$的唯一解为

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\qquad x_j=\frac{\det(B_j)}{\det(A)}.$$

证明. 我们给出两个证明.

证明一. 方程组的唯一解为

$$X = A^{-1}Y = \det(A)^{-1}\mathrm{adj}(A)Y.$$

两边取第j行, 并对B_j应用定理5.20(2), 即得

$$x_j = \det(A)^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_i C_{ij} = \det(A)^{-1}\det(B_j).$$

证明二. 记A的第i列为A_i. 则

$$Y = [A_1, \ldots, A_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i.$$

(注意这说明x_j是Y在$F^{n\times 1}$的基$\{A_1, \ldots, A_n\}$下的第j个坐标.) 因此

$$\begin{aligned}\det(B_j) &= \det[A_1, \ldots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det[A_1, \ldots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n] \\ &= x_j \det(A).\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

例 5.11. 考虑方程组$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. 如果$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, 则唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{dy_1 - by_2}{ad - bc}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ay_2 - cy_1}{ad - bc}.$$

考虑方程组$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. 如果$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, 则唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

当方程组的阶数较大时, Cramer法则的重要性更多在于其理论价值. 在具体计算时, 初等行变换的方法具有更高的效率.

现在我们回到定理的证明. 我们先证明定理5.20.

定理5.20的证明. (1) 考虑S_n的n个子集

$$P_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i_0) = j\}, \quad 1 \le j \le n.$$

对于$\tau \in S_{n-1}$, 定义$\tilde{\tau} \in S_n$为

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n-1) & n \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

容易看出,

$$P_j = \{\sigma_j \tilde{\tau} \sigma_{i_0}^{-1} \mid \tau \in S_{n-1}\},$$

这里σ_j, σ_{i_0}的定义如(5.12). 注意到$\mathrm{sgn}(\tilde{\tau}) = \mathrm{sgn}(\tau)$, $\mathrm{sgn}(\sigma_j) = (-1)^{n-j}$. 所以

$$\mathrm{sgn}(\sigma_j \tilde{\tau} \sigma_{i_0}^{-1}) = (-1)^{i_0+j} \mathrm{sgn}(\tau).$$

因此

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \sum_{\sigma \in P_j} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{r=1}^{n-1} a_{\sigma_{i_0}(r), \sigma\sigma_{i_0}(r)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\sigma_j \tilde{\tau} \sigma_{i_0}^{-1}) \prod_{r=1}^{n-1} a_{\sigma_{i_0}(r), \sigma_j \tau(r)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{r=1}^{n-1} (M_{i_0 j})_{r, \tau(r)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \det(M_{i_0 j}).
\end{aligned}$$

(2) 可以类似证明, 也可以通过对A^t应用(1)来证明. □

下面我们证明定理5.19. 读者可以与定理5.20的证明做比较.

定理5.19的证明. 与定理5.20的情况类似, 我们只需对(1)给出证明. 对于$\{1, \ldots, n\}$的k元子集J, 考虑S_n的子集

$$P_J = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(I_0) = J\}.$$

则

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k}} \sum_{\sigma \in P_J} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}. \tag{5.14}$$

对于$\tau \in S_k$和$\upsilon \in S_{n-k}$, 定义$(\tau, \upsilon) \in S_n$为

$$(\tau, \upsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(k) & k+\upsilon(1), & \cdots & k+\upsilon(n-k) \end{pmatrix}.$$

容易看出,

$$P_J = \{\sigma_J (\tau, \upsilon) \sigma_{I_0}^{-1} \mid \tau \in S_k, \upsilon \in S_{n-k}\},$$

这里σ_J, σ_{I_0}的定义如(5.1). 容易看出, $\mathrm{sgn}(\tau, \upsilon) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\upsilon)$. 结合(5.2), 即得

$$\mathrm{sgn}(\sigma_J (\tau, \upsilon) \sigma_{I_0}^{-1}) = (-1)^{\Sigma_{I_0} + \Sigma_J} \mathrm{sgn}(\tau) \mathrm{sgn}(\upsilon).$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in P_J}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma\in P_J}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{r=1}^{k}a_{\sigma_{I_0}(r),\sigma\sigma_{I_0}(r)}\prod_{s=1}^{n-k}a_{\sigma_{I_0}(k+s),\sigma\sigma_{I_0}(k+s)}\\
&= \sum_{\tau\in S_k,\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\sigma_J(\tau,\upsilon)\sigma_{I_0}^{-1})\prod_{r=1}^{k}a_{\sigma_{I_0}(r),\sigma_J(\tau,\upsilon)(r)}\prod_{s=1}^{n-k}a_{\sigma_{I_0}(k+s),\sigma_J(\tau,\upsilon)(k+s)}\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\sum_{\tau\in S_k,\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\upsilon)\prod_{r=1}^{k}a_{\sigma_{I_0}(r),\sigma_J(\tau(r))}\prod_{s=1}^{n-k}a_{\sigma_{I_0}(k+s),\sigma_J(k+\upsilon(s))}\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\sum_{\tau\in S_k,\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\upsilon)\prod_{r=1}^{k}(A_{I_0,J})_{r\tau(r)}\prod_{s=1}^{n-k}(A_{I_0^c,J^c})_{s\upsilon(s)}\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\left(\sum_{\tau\in S_k}\operatorname{sgn}(\tau)\prod_{r=1}^{k}(A_{I_0,J})_{r\tau(r)}\right)\left(\sum_{\upsilon\in S_{n-k}}\operatorname{sgn}(\upsilon)\prod_{s=1}^{n-k}(A_{I_0^c,J^c})_{s\upsilon(s)}\right)\\
&= (-1)^{\Sigma_{I_0}+\Sigma_J}\det(A_{I_0,J})\det(A_{I_0^c,J^c}).
\end{aligned}$$

将此式代入(5.14), 就完成了证明. □

在下一节中, 我们将给出定理5.19的另一个证明.

例 5.12. Vandermonde行列式(丘老师书上册41页).

习题 5.5.

1. 教材162–163页习题1,2,9,12.
2. 丘老师书上册43–44页1(2,4),2,4,6; 51页4; 56页3.

§5.6 对偶空间上的外代数

在这一节中, 我们重点考察多重交错线性函数的一种交错乘积, 称为外积. 这一构造在微分几何等领域中是非常重要的. 作为准备, 我们先考虑一般多重线性函数的张量积.

定义 5.5. 设V是域F上的线性空间, r,s是正整数, $L\in(V^*)^{\otimes r}$, $M\in(V^*)^{\otimes s}$. 我们定义L与M的**张量积**(tensor product)$L\otimes M\in(V^*)^{\otimes(r+s)}$ 为

$$L\otimes M(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s})=L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)M(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_{r+s}),\quad \alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}\in V.$$

命题 5.24. (1) 映射$(V^*)^{\otimes r}\times(V^*)^{\otimes s}\to(V^*)^{\otimes(r+s)}$, $(L,M)\mapsto L\otimes M$是双线性的.

(2) 设$L\in(V^*)^{\otimes r}$, $M\in(V^*)^{\otimes s}$, $N\in(V^*)^{\otimes t}$. 则

$$(L\otimes M)\otimes N=L\otimes(M\otimes N).$$

证明. (1) 对任意$c \in F$, $L_1, L_2 \in (V^*)^{\otimes r}$, $M \in (V^*)^{\otimes s}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s} \in V$有

$$\begin{aligned}
&(cL_1 + L_2) \otimes M(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) \\
=& (cL_1 + L_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) \\
=& cL_1(\alpha_1, \dots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) + L_2(\alpha_1, \dots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) \\
=& cL_1 \otimes M(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) + L_2 \otimes M(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) \\
=& (cL_1 \otimes M + L_2 \otimes M)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}).
\end{aligned}$$

因此

$$(cL_1 + L_2) \otimes M = cL_1 \otimes M + L_2 \otimes M.$$

类似地, 对任意$c \in F$, $L \in (V^*)^{\otimes r}$, $M_1, M_2 \in (V^*)^{\otimes s}$有

$$L \otimes (cM_1 + M_2) = cL \otimes M_1 + L \otimes M_2.$$

(2) 对任意$\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s+t} \in V$, 我们有

$$\begin{aligned}
&(L \otimes M) \otimes N(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s+t}) \\
=& L \otimes M(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) N(\alpha_{r+s+1}, \dots, \alpha_{r+s+t}) \\
=& L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}) N(\alpha_{r+s+1}, \dots, \alpha_{r+s+t}) \\
=& L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) M \otimes N(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s+t}) \\
=& L \otimes (M \otimes N)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s+t}).
\end{aligned}$$

因此$(L \otimes M) \otimes N = L \otimes (M \otimes N)$. □

由命题5.24(2), 对于$L_1 \in (V^*)^{\otimes r_1}, \dots, L_n \in (V^*)^{\otimes r_n}$, 可以定义它们的张量积$L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$, 所得结果与做乘法的次序无关. 例5.4中的$r$重线性函数即为$f_1, \dots, f_r$的张量积, 那里的记号$f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$与这里也是一致的. 注意张量积不满足乘法交换率.

下面我们在空间有限维的情况给出$(V^*)^{\otimes r}$的基和维数.

定理 5.25. 设V是有限维线性空间, $\dim V = n$, $\{f_1, \dots, f_n\}$是V^*的基.

(1) 集合
$$\{f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \mid 1 \le i_1, \dots, i_r \le n\} \tag{5.15}$$
是$(V^*)^{\otimes r}$的基. 特别地, $\dim (V^*)^{\otimes r} = n^r$.

(2) 如果$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$\{f_1, \dots, f_n\}$在$V$中的对偶基, 则对任意$L \in (V^*)^{\otimes r}$, 有
$$L = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}.$$

证明. 注意到对$\beta \in V$有$\beta = \sum_{i=1}^n f_i(\beta)\alpha_i$. 于是, 对任意$L \in (V^*)^{\otimes r}$和$\beta_1, \dots, \beta_r \in V$有

$$\begin{aligned}
L(\beta_1, \dots, \beta_r) &= L\left(\sum_{i_1=1}^n f_{i_1}(\beta_1)\alpha_{i_1}, \dots, \sum_{i_r=1}^n f_{i_r}(\beta_r)\alpha_{i_r}\right) \\
&= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} f_{i_1}(\beta_1) \cdots f_{i_r}(\beta_r) L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) \\
&= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}(\beta_1, \dots, \beta_r).
\end{aligned}$$

这就证明了(2), 并且集合(5.15)生成$(V^*)^{\otimes r}$. 另一方面, 如果$c_{i_1,\dots,i_r}\in F$满足
$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_r\le n} c_{i_1,\dots,i_r} f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_r}=0,$$
则对任意$j_1,\dots,j_r\in\{1,\dots,n\}$, 考虑此式左边在$(\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_r})$的取值, 即得$c_{j_1,\dots,j_r}=0$. 所以集合(5.15)线性无关, 因此是$(V^*)^{\otimes r}$的基. □

我们约定$(V^*)^{\otimes 0}=F$, 并考虑直和
$$\bigoplus_{r=0}^{\infty}(V^*)^{\otimes r}=\{(L_0,L_1,\dots)\mid L_r\in(V^*)^{\otimes r},\text{只有有限个}r\text{使}L_r\neq 0\}.$$
通过把$L_r\in(V^*)^{\otimes r}$等同为$(0,\dots,0,L_r,0,\dots)$, 可以把所有$(V^*)^{\otimes r}$视为$\bigoplus_{r=0}^{\infty}(V^*)^{\otimes r}$的子空间. 于是
$$(L_0,L_1,\dots)=\sum_{r=0}^{\infty}(0,\dots,0,L_r,0,\dots)=\sum_{r=0}^{\infty}L_r.$$
注意到只有有限个L_r非零, 所以这里的求和是有限和. 我们在$\bigoplus_{r=0}^{\infty}(V^*)^{\otimes r}$上定义张量积为
$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}L_r\right)\otimes\left(\sum_{s=0}^{\infty}M_s\right)=\sum_{r,s=0}^{\infty}L_r\otimes M_s.$$
则$\bigoplus_{r=0}^{\infty}(V^*)^{\otimes r}$成为一个域$F$上的代数, 称为$V^*$的**张量代数**(tensor algebra), 记为$\bigotimes(V^*)$或$T(V^*)$.

接下来我们考虑多重交错线性函数的乘法. 对于$L\in\Lambda^r(V^*)$, $M\in\Lambda^s(V^*)$, 张量积$L\otimes M$一般不是交错的. 为了定义交错的乘法, 我们首先考虑一种把一般多重线性函数化为交错函数的方法. 对于$L\in(V^*)^{\otimes r}$, 定义$\mathrm{Alt}(L)\in(V^*)^{\otimes r}$为
$$\mathrm{Alt}(L)(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)}),\quad \alpha_1,\dots,\alpha_r\in V. \tag{5.16}$$
与引理5.7(1)的证明类似, 不难证明$\mathrm{Alt}(L)$是交错的, 称为L的**交错化**(alternation). 事实上, (5.6)式定义的$f_1\wedge\cdots\wedge f_n$即为$f_1\otimes\cdots\otimes f_n$的交错化. 也就是说, 我们有

引理 5.26. 设$f_1,\dots,f_n\in V^*$. 则
$$\mathrm{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}.$$

证明. 直接验证即得
$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)(\alpha_1,\dots,\alpha_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1\otimes\cdots\otimes f_n(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_1(\alpha_{\sigma(1)})\cdots f_n(\alpha_{\sigma(n)})\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots f_{\sigma(n)}(\alpha_n)\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_n).\end{aligned}$$
□

引理5.26启发我们尝试定义$L\in\Lambda^r(V^*)$与$M\in\Lambda^s(V^*)$的“交错乘积”为$\mathrm{Alt}(L\otimes M)$. 但是, 进一步分析以后, 我们发现$\mathrm{Alt}(L\otimes M)$的展开式中每项会重复$r!s!$次. 这是由L和M的交错性导致的. 另外, 这样定义的“交错乘积”只在差一个因子的意义下满足乘法结合律, 即对于$L\in\Lambda^r(V^*)$, $M\in\Lambda^s(V^*)$, $N\in\Lambda^t(V^*)$, 有
$$(s+t)!\,\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(L\otimes M)\otimes N)=(r+s)!\,\mathrm{Alt}(L\otimes\mathrm{Alt}(M\otimes N)). \tag{5.17}$$

如果域F的特征为0, 有重复项是无关紧要的. 同时, 我们可以把L与M的"交错乘积"定义为

$$\frac{1}{(r+s)!}\mathrm{Alt}(L\otimes M) \tag{5.18}$$

或

$$\frac{1}{r!s!}\mathrm{Alt}(L\otimes M), \tag{5.19}$$

从而使它满足乘法结合律. 这两种定义都是被广泛采用的, 并且各有利弊. 注意(5.19) 中除掉的因子$r!s!$恰好起到了"消掉重复项"的作用, 并且对讨论行列式来说更加适合. 但是, 如果域F的特征非零, 因子$(r+s)!$或$r!s!$在F中一般不可逆, 从而(5.18)和(5.19)没有意义. 为了克服这一困难, 我们跳过交错化的过程, 直接采用"对每个重复项只加一次"的办法来定义交错乘法.

为此, 考虑S_{r+s}的子集

$$\mathrm{Sh}(r,s)=\{\sigma\in S_{r+s}\mid \sigma(1)<\cdots<\sigma(r),\sigma(r+1)<\cdots<\sigma(r+s)\}.$$

$\mathrm{Sh}(r,s)$中的置换称为(r,s)**-洗牌**((r,s)-shuffle)(谁有更好的翻译请告诉我). 容易看出,

$$|\mathrm{Sh}(r,s)|=\binom{r+s}{r}=\frac{(r+s)!}{r!s!}.$$

我们定义$L\wedge M\in (V^*)^{\otimes(r+s)}$为

$$L\wedge M(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s})=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s)}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)}), \tag{5.20}$$

这里$\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}\in V$.

例 5.13. 设$f_1,f_2\in V^*$. 则$f_1\wedge f_2$与例5.6中的记号和表达式一致. 注意到$f\wedge f=0$. (此性质在以后版本中应该加在例5.6中.)

例 5.14. 设$n>k\geq 1$. 容易看出,

$$\mathrm{Sh}(k,n-k)=\{\sigma_I\mid I\subset\{1,\dots,n\},|I|=k\}, \tag{5.21}$$

这里$\sigma_I\in S_n$是由(5.1)定义的置换. 特别地,

$$\mathrm{Sh}(n-1,1)=\{\sigma_i\mid 1\leq i\leq n\},$$

其中σ_i的定义如(5.12). 因此, 如果$L\in\Lambda^{n-1}(V^*)$, $f\in V^*$, 则

$$\begin{aligned} L\wedge f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)&=\sum_{i=1}^n\mathrm{sgn}(\sigma_i)L(\alpha_{\sigma_i(1)},\dots,\alpha_{\sigma_i(n-1)})f(\alpha_{\sigma_i(n)}) \\ &=\sum_{i=1}^n(-1)^{n-i}L(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)f(\alpha_i). \end{aligned} \tag{5.22}$$

容易证明, 当$\mathrm{char}\,F=0$时, 由(5.20)定义的$L\wedge M$就是(5.19)式, 从而是交错的. 但是, 在一般情况下, 我们需要重新证明这一事实.

引理 5.27. 对于$L\in\Lambda^r(V^*)$, $M\in\Lambda^s(V^*)$, 由(5.20)给出的多重线性函数$L\wedge M$是交错的.

证明. 由命题5.5(1), 只需证明某两个相邻变量相同时, $L\wedge M$的取值是0. 设$\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}\in V$, $\alpha_i=\alpha_{i+1}$, 这里$1\leq i\leq r+s-1$. 我们需要证明$L\wedge M(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s})=0$. 考虑$\mathrm{Sh}(r,s)$的子集

$$P=\{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s)\mid i\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\},i+1\in\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+s)\}\},$$
$$P'=\{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s)\mid i\in\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+s)\},i+1\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\}\}.$$

如果$\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s)\setminus(P\cup P')$, 则$i$和$i+1$同时落在$\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\}$或$\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+s)\}$中. 此时, 由$L$和$M$的交错性有

$$L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})=0.$$

另一方面, 考虑对换$\tau = (i, i+1)$. 容易看出, 如果$\sigma \in P$, 则$\tau\sigma \in \mathrm{Sh}(r,s)$, 而且进一步有

$$P' = \{\tau\sigma \mid \sigma \in P\}.$$

并且由于$\alpha_i = \alpha_{i+1}$, 当$\sigma \in P$时有

$$L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) = L(\alpha_{\tau\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r)}),$$
$$M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) = M(\alpha_{\tau\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r+s)}).$$

利用这些事实, 我们得到

$$\begin{aligned}
&L \wedge M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+s})\\
=& \sum_{\sigma \in P \cup P'} \mathrm{sgn}(\sigma) L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)})\\
=& \sum_{\sigma \in P} \mathrm{sgn}(\sigma)(L(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r+s)}) - L(\alpha_{\tau\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r)}) M(\alpha_{\tau\sigma(r+1)}, \ldots, \alpha_{\tau\sigma(r+s)}))\\
=& 0.
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

由于引理5.27, 我们可以做出下面的定义.

定义 5.6. 设$L \in \Lambda^r(V^*)$, $M \in \Lambda^s(V^*)$. 由(5.20)给出的$L \wedge M \in \Lambda^{r+s}(V^*)$称为$L$与$M$的**外积**(exterior product或wedge product).

我们可以利用引理5.27给出行列式的Laplace展开定理的另一个证明.

定理5.19的另一证明. 这里只证明按k行展开的部分. 按k列展开的部分可以类似证明. 对于矩阵$B = [b_{ij}] \in F^{n\times l}$ $(1 \le l < n)$和行指标集$I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| = l$, 记$B_I \in F^{l\times l}$为由B的矩阵元$\{b_{ij} \mid i \in I, 1 \le j \le l\}$构成的矩阵, 即$B_I$的矩阵元为

$$(B_I)_{rs} = b_{\sigma_I(r),s}, \quad r, s \in \{1, \ldots, l\}.$$

我们知道, 映射$(A_1, \ldots, A_n) \mapsto \det[A_1, \ldots, A_n]$是$F^{n\times 1}$上的$n$重交错线性函数. 因此, 对于取定的行指标集$I_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I_0| = k$, 映射

$$L : (F^{n\times 1})^k \to F, \quad L(B_1, \ldots, B_k) = \det[B_1, \ldots, B_k]_{I_0}$$

是$F^{n\times 1}$上的k重交错线性函数, 映射

$$M : (F^{n\times 1})^{n-k} \to F, \quad M(B_1, \ldots, B_{n-k}) \mapsto \det[B_1, \ldots, B_{n-k}]_{I_0^c}$$

是$F^{n\times 1}$上的$n-k$重交错线性函数. 由引理5.27, 外积$L \wedge M$是$F^{n\times 1}$上的n重交错线性函数. 而这样的n重交错线性函数空间的维数是1. 因此存在常数$c \in F$使得

$$L \wedge M(A_1, \ldots, A_n) = c \det[A_1, \ldots, A_n], \quad \forall A_1, \ldots, A_n \in F^{n\times 1}. \tag{5.23}$$

下面我们计算$L \wedge M$的表达式, 并且给出常数c. 由(5.21), 我们有

$$\begin{aligned}
L \wedge M(A_1, \ldots, A_n) &= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\}\\ |J|=k}} \mathrm{sgn}(\sigma_J) L(A_{\sigma_J(1)}, \ldots, A_{\sigma_J(k)}) M(A_{\sigma_J(k+1)}, \ldots, A_{\sigma_J(n)})\\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\}\\ |J|=k}} \mathrm{sgn}(\sigma_J) \det[A_{\sigma_J(1)}, \ldots, A_{\sigma_J(k)}]_{I_0} \det[A_{\sigma_J(k+1)}, \ldots, A_{\sigma_J(n)}]_{I_0^c}\\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\}\\ |J|=k}} \mathrm{sgn}(\sigma_J) \det[A_1, \ldots, A_n]_{I_0,J} \det[A_1, \ldots, A_n]_{I_0^c, J^c}.
\end{aligned}$$

将此式代入(5.23), 得到

$$c\det(A)=\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\|J|=k}}\operatorname{sgn}(\sigma_J)\det(A_{I_0,J})\det(A_{I_0^c,J^c}),\quad \forall A\in F^{n\times n}.$$

在上式中取$A=I_n$, 即得$c=\operatorname{sgn}(\sigma_{I_0})$. 再利用(5.2), 就完成了证明. □

我们继续讨论交错多重线性函数的外积.

命题 5.28. (1) 映射$\Lambda^r(V^*)\times\Lambda^s(V^*)\to\Lambda^{r+s}(V^*)$, $(L,M)\mapsto L\wedge M$是双线性的.

(2) 设$L\in\Lambda^r(V^*),M\in\Lambda^s(V^*),N\in\Lambda^t(V^*)$. 则

$$(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N).$$

(3) 设$L\in\Lambda^r(V^*),M\in\Lambda^s(V^*)$. 则

$$M\wedge L=(-1)^{rs}L\wedge M.$$

证明. (1) 类似于命题5.24(1)的证明. 这里从略.

(2) 我们验证$(L\wedge M)\wedge N$和$L\wedge(M\wedge N)$在$(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s+t})\in V^{r+s+t}$的取值都等于

$$\sum_{\sigma\in\operatorname{Sh}(r,s,t)}\operatorname{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})N(\alpha_{\sigma(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)}),\quad(5.24)$$

这里

$$\operatorname{Sh}(r,s,t)=\{\sigma\in S_{r+s+t}\mid\sigma(1)<\cdots<\sigma(r),\sigma(r{+}1)<\cdots<\sigma(r{+}s),\sigma(r{+}s{+}1)<\cdots<\sigma(r{+}s{+}t)\}.$$

首先, 对于$\tau\in\operatorname{Sh}(r,s)$, 定义$\tilde\tau\in\operatorname{Sh}(r,s,t)$为

$$\tilde\tau(i)=\begin{cases}\tau(i), & 1\le i\le r+s,\\ i, & r+s+1\le i\le r+s+t.\end{cases}$$

则$\operatorname{sgn}(\tilde\tau)=\operatorname{sgn}(\tau)$. 容易看出, 如果$\sigma\in\operatorname{Sh}(r+s,t)$, $\tau\in\operatorname{Sh}(r,s)$, 则$\sigma\tilde\tau\in\operatorname{Sh}(r,s,t)$, 并且映射$\operatorname{Sh}(r+s,t)\times\operatorname{Sh}(r,s)\to\operatorname{Sh}(r,s,t)$, $(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\tilde\tau$可逆. 从而

$$\begin{aligned}&(L\wedge M)\wedge N(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s+t})\\
=&\sum_{\sigma\in\operatorname{Sh}(r+s,t)}\operatorname{sgn}(\sigma)L\wedge M(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})N(\alpha_{\sigma(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\operatorname{Sh}(r+s,t)\\\tau\in\operatorname{Sh}(r,s)}}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)L(\alpha_{\sigma(\tau(1))},\dots,\alpha_{\sigma(\tau(r))})M(\alpha_{\sigma(\tau(r+1))},\dots,\alpha_{\sigma(\tau(r+s))})N(\alpha_{\sigma(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\operatorname{Sh}(r+s,t)\\\tau\in\operatorname{Sh}(r,s)}}\operatorname{sgn}(\sigma\tilde\tau)L(\alpha_{\sigma\tilde\tau(1)},\dots,\alpha_{\sigma\tilde\tau(r)})M(\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+s)})N(\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma\tilde\tau(r+s+t)})\end{aligned}$$

$=$ (5.24)式.

类似地, 对$\tau\in\operatorname{Sh}(s,t)$, 定义$\hat\tau\in\operatorname{Sh}(r,s,t)$为

$$\hat\tau(i)=\begin{cases}i, & 1\le i\le r,\\ r+\tau(i-r), & r+1\le i\le r+s+t.\end{cases}$$

则$\mathrm{sgn}(\hat{\tau})=\mathrm{sgn}(\tau)$, 并且$(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\hat{\tau}$是从$\mathrm{Sh}(r,s+t)\times\mathrm{Sh}(s,t)$到$\mathrm{Sh}(r,s,t)$的可逆映射. 因此

$$\begin{aligned}
&L\wedge(M\wedge N)(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s+t})\\
=&\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s+t)}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M\wedge N(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s+t)})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s+t)\\ \tau\in\mathrm{Sh}(s,t)}}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+\tau(1))},\dots,\alpha_{\sigma(r+\tau(s))})N(\alpha_{\sigma(r+\tau(s+1))},\dots,\alpha_{\sigma(r+\tau(s+t))})\\
=&\sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s+t)\\ \tau\in\mathrm{Sh}(s,t)}}\mathrm{sgn}(\sigma\hat{\tau})L(\alpha_{\sigma\hat{\tau}(1)},\dots,\alpha_{\sigma\hat{\tau}(r)})M(\alpha_{\sigma\hat{\tau}(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma\hat{\tau}(r+s)})N(\alpha_{\sigma\hat{\tau}(r+s+1)},\dots,\alpha_{\sigma\hat{\tau}(r+s+t)})
\end{aligned}$$

$=$ (5.24)式.

这就完成了证明.

(3) 考虑置换

$$\tau=\begin{pmatrix}1&\cdots&r&r+1&\cdots&r+s\\ s+1&\cdots&r+s&1&\cdots&s\end{pmatrix}\in S_{r+s}.$$

容易看出, $\mathrm{sgn}(\tau)=(-1)^{rs}$, 并且对于$\sigma\in S_{r+s}$, $\sigma\in\mathrm{Sh}(s,r)$的充分必要条件是$\sigma\tau\in\mathrm{Sh}(r,s)$. 从而对$\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}\in V$, 我们有

$$\begin{aligned}
M\wedge L(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s})&=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(s,r)}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})M(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(s)})\\
&=\mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(s,r)}\mathrm{sgn}(\sigma\tau)L(\alpha_{\sigma\tau(1)},\dots,\alpha_{\sigma\tau(r)})M(\alpha_{\sigma\tau(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma\tau(r+s)})\\
&=(-1)^{rs}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(r,s)}\mathrm{sgn}(\sigma)L(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(r)})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\dots,\alpha_{\sigma(r+s)})\\
&=(-1)^{rs}L\wedge M(\alpha_1,\dots,\alpha_{r+s}).
\end{aligned}$$

因此$M\wedge L=(-1)^{rs}L\wedge M$. □

由外积的乘法结合律, 即命题5.28(2), 对于$L_1\in\Lambda^{r_1}(V^*),\dots,L_n\in\Lambda^{r_n}(V^*)$, 可以定义它们的外积$L_1\wedge\cdots\wedge L_n$, 所得结果与做外积的次序无关. 如果$L_i$都是线性函数, 它们的外积有下面的表达式.

命题 5.29. 设$f_1,\dots,f_n\in V^*$. 则

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n=\mathrm{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}.$$

证明. 第二个等式就是引理5.26. 我们用归纳法证明第一个等式. 当$n=1$时无需证明. 假设$n\geq 2$, 并且第一个等式对$n-1$成立. 对于$1\leq i\leq n$, 记

$$P_i=\{\sigma\in S_n\mid\sigma(n)=i\}.$$

则

$$P_i=\{\sigma_i\tilde{\tau}\mid\tau\in S_{n-1}\},$$

这里σ_i由(5.12)定义, $\tilde{\tau}$由(5.13)定义. 由(5.22)式和归纳假设, 对$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$有

$$\begin{aligned}
&f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\
=&\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\sigma_i)\operatorname{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_{n-1})(\alpha_{\sigma_i(1)},\dots,\alpha_{\sigma_i(n-1)})f_n(\alpha_{\sigma_i(n)})\\
=&\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\sigma_i)\sum_{\tau\in S_{n-1}}\operatorname{sgn}(\tau)f_1\otimes\cdots\otimes f_{n-1}(\alpha_{\sigma_i(\tau(1))},\dots,\alpha_{\sigma_i(\tau(n-1))})f_n(\alpha_{\sigma_i(n)})\\
=&\sum_{i=1}^n\sum_{\tau\in S_{n-1}}\operatorname{sgn}(\sigma_i\tilde{\tau})f_1\otimes\cdots\otimes f_n(\alpha_{\sigma_i\tilde{\tau}(1)},\dots,\alpha_{\sigma_i\tilde{\tau}(n)})\\
=&\sum_{i=1}^n\sum_{\sigma\in P_i}\operatorname{sgn}(\sigma)f_1\otimes\cdots\otimes f_n(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})\\
=&\operatorname{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)(\alpha_1,\dots,\alpha_n).
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

命题5.29说明, 我们在(5.6)中引入的n重交错线性函数即为$f_1,\dots,f_n$的外积. 那里的记号$f_1\wedge\cdots\wedge f_n$与这里是一致的.

推论 5.30. 设$f_1,\dots,f_n\in V^*$. 则

(1) 对任意$\sigma\in S_n$有

$$f_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge f_{\sigma(n)}=\operatorname{sgn}(\sigma)f_1\wedge\cdots\wedge f_n.$$

(2) 对任意$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$有

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\det[f_i(\alpha_j)],$$

这里$[f_i(\alpha_j)]\in F^{n\times n}$是$(i,j)$-元为$f_i(\alpha_j)$的方阵.

证明. (1) 由命题5.29, 有

$$\begin{aligned}
f_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge f_{\sigma(n)}&=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)f_{\sigma\tau(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma\tau(n)}\\
&=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\tau)f_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\tau(n)}\\
&=\operatorname{sgn}(\sigma)f_1\wedge\cdots\wedge f_n.
\end{aligned}$$

我们也可以对多重交错线性映射$(V^*)^n\mapsto\Lambda^n(V^*)$, $(f_1,\dots,f_n)\mapsto f_1\wedge\cdots\wedge f_n$应用命题5.5(2)的推广来证明(1).

(2) 利用方阵行列式的表达式(5.10), 即得

$$\begin{aligned}
f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}(\alpha_1)\cdots f_{\sigma(n)}(\alpha_n)=\det[f_i(\alpha_j)].
\end{aligned}$$

□

上面的内容可以帮助我们进一步理解Laplace展开定理的第二个证明. 设$\{f_1,\dots,f_n\}$是$F^{n\times 1}$的标准基在$(F^{n\times 1})^*$中的对偶基. 取定指标集$I_0\subset\{1,\dots,n\}$, $|I_0|=k$. 设

$$I_0=\{i_1,\dots,i_k\},\quad i_1<\cdots<i_k,$$

$$I_0^c = \{i'_1, \dots, i'_{n-k}\}, \quad i'_1 < \cdots < i'_{n-k}.$$

由推论5.30(1), 我们有

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n = \operatorname{sgn}(\sigma_{I_0})(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}) \wedge (f_{i'_1} \wedge \cdots \wedge f_{i'_{n-k}}).$$

容易看出, $f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}$和$f_{i'_1} \wedge \cdots \wedge f_{i'_{n-k}}$ 分别是证明中的函数L和M, 而上式就是(5.23)式. 也就是说, 我们把$f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}$与$f_{i'_1} \wedge \cdots \wedge f_{i'_{n-k}}$的外积按定义做展开, 就得到了Laplace展开定理.

接下来我们给出$\Lambda^r(V^*)$的基和维数.

定理 5.31. 设V是有限维线性空间, $\dim V = n$, $\{f_1, \dots, f_n\}$是V^*的基.

(1) 如果$1 \le r \le n$, 则

$$\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n\} \tag{5.25}$$

是$\Lambda^r(V^*)$的基. 特别地, $\dim \Lambda^r(V^*) = \binom{n}{r}$.

(2) 如果$r > n$, 则$\Lambda^r(V^*) = \{0\}$.

证明. 设$L \in \Lambda^r(V^*)$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$是$\{f_1, \dots, f_n\}$在$V$中的对偶基. 由定理5.25(2),

$$L = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}.$$

如果$r > n$, 则集合$\{1, \dots, n\}$中的数字$i_1, \dots, i_r$总会有两个相同, 从而$L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) = 0$. 因此$L = 0$. 这就证明了(2). 假设$1 \le r \le n$. 则

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\} \\ \text{并且互不相同}}} L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r} L(\alpha_{i_{\sigma(1)}}, \dots, \alpha_{i_{\sigma(r)}}) f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes f_{i_{\sigma(r)}} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes f_{i_{\sigma(r)}} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} L(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_r}.
\end{aligned}$$

因此集合(5.25)生成$\Lambda^r(V^*)$. 另一方面, 集合(5.15)线性无关推出集合(5.25)也线性无关. 这就证明了(5.25)是$\Lambda^r(V^*)$的基. □

我们约定$\Lambda^0(V^*) = F$, 并考虑直和

$$\bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V^*) = \{(L_0, L_1, \dots) \mid L_r \in \Lambda^r(V^*), \text{只有有限个} r \text{使} L_r \ne 0\}.$$

与张量代数的情况类似, 我们把所有$\Lambda^r(V^*)$视为$\bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V^*)$的子空间, 并且在$\bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V^*)$上定义外积为

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} L_r\right) \wedge \left(\sum_{s=0}^{\infty} M_s\right) = \sum_{r,s=0}^{\infty} L_r \wedge M_s.$$

则$\bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V^*)$成为一个域$F$上的代数, 称为$V^*$的**外代数**(exterior algebra)或**Grassmann代数**, 记为$\Lambda(V^*)$. 如果V是有限维的, $\dim V = n$, 则由定理5.31, 我们有$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(V^*)$, 并且

$$\dim \Lambda(V^*) = \sum_{r=0}^{n} \dim \Lambda^r(V^*) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

最后, 我们证明一个线性函数外积的重要性质, 即外积是否为零可以用来判断这些线性函数是否线性相关.

定理 5.32. 设$f_1,\ldots,f_n\in V^*$. 则$f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0$的充分必要条件是$\{f_1,\ldots,f_n\}$线性无关.

证明. “$\Longrightarrow$”. 假设$f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0$. 则存在$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$使$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq 0$. 由推论5.30(2), 这推出矩阵$[f_i(\alpha_j)]$ 可逆. 如果$c_1,\ldots,c_n\in F$满足$\sum_{i=1}^n c_if_i=0$, 则

$$(c_1,\ldots,c_n)[f_i(\alpha_j)]=\Big(\sum_{i=1}^n c_if_i(\alpha_1),\ldots,\sum_{i=1}^n c_if_i(\alpha_n)\Big)=0.$$

所以$(c_1,\ldots,c_n)=0$. 因此$\{f_1,\ldots,f_n\}$线性无关.

“$\Longleftarrow$”. 假设$\{f_1,\ldots,f_n\}$线性无关. 我们先证明线性映射

$$T:V\to F^n,\quad T(\alpha)=(f_1(\alpha),\ldots,f_n(\alpha))$$

是满射. 为此, 只需证明$\mathrm{Im}(T)$在$(F^n)^*$中的零化子空间$\mathrm{Im}(T)^0$为零子空间. 设$g\in\mathrm{Im}(T)^0$. 由于g是F^n上的线性函数, 所以存在$c_1,\ldots,c_n\in F$使得

$$g(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n c_ix_i,\quad \forall(x_1,\ldots,x_n)\in F^n.$$

而$g\in\mathrm{Im}(T)^0$说明$g\circ T=0$, 即对任意$\alpha\in V$有

$$g(T(\alpha))=\sum_{i=1}^n c_if_i(\alpha)=0,$$

也就是说$\sum_{i=1}^n c_if_i=0$. 由于$\{f_1,\ldots,f_n\}$线性无关, 这推出$c_1=\cdots=c_n=0$, 即$g=0$. 这就证明了$\mathrm{Im}(T)^0=0$. 因此T是满射. 现在, 考虑F^n的标准基$\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\}$. 由于$T$是满射, 存在$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$ 使得$T(\alpha_j)=\epsilon_j$, 即$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$. 从而矩阵$[f_i(\alpha_j)]$为单位矩阵. 由推论5.30(2), 我们得到$f_1\wedge\cdots\wedge f_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$. 因此$f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0$. □

下面的推论是显然的.

推论 5.33. 设$\dim V=n$, $f_1,\ldots,f_n\in V^*$. 则$f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0$的充分必要条件是$\{f_1,\ldots,f_n\}$是$V^*$的基.

我们利用推论5.9给出推论5.33的另一个证明.

证明. 注意到$\dim\Lambda^n(V^*)=1$. 取定同构映射$\phi:\Lambda^n(V^*)\to F$. 则映射

$$L:(V^*)^n\to F,\quad L(f_1,\ldots,f_n)=\phi(f_1\wedge\cdots\wedge f_n)$$

是V^*上的n重线性函数. 由于对任意$f\in V^*$有$f\wedge f=0$, 所以L在相邻变量相同时取值是零. 由命题5.5(1), L是交错的. 另一方面, 由引理5.7(2), L不恒等于零. 总之, 我们有$L\in\Lambda^n(V^{**})\smallsetminus\{0\}$. 由推论5.9, 即得

$$\{f_1,\ldots,f_n\}\text{是}V^*\text{的基}\quad\Longleftrightarrow\quad L(f_1,\ldots,f_n)\neq 0\quad\Longleftrightarrow\quad f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0.$$

这就完成了证明. □

习题 5.6.

1. 验证(5.16)中定义的$\mathrm{Alt}(L)$是交错的.
2. 不用上题结果, 直接验证(5.16)中定义的$\mathrm{Alt}(L)$是反对称的.
3. 不用命题5.28(2)直接验证(5.17)式.
4. 假设$\mathrm{char}\,F=0$. 利用(5.17)验证(5.18)和(5.19)中定义的“交错乘积”都满足乘法结合率.
5. 假设$\mathrm{char}\,F=0$. 验证(5.20)中定义的$L\wedge M$与(5.19)式一致.

6. 设r是奇数, $L \in \Lambda^r(V^*)$. 证明$L \wedge L = 0$.
7. 设$f_1, \ldots, f_r \in V^*$线性无关. 证明对$f \in V^*$, $f \in \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_r\}$的充分必要条件是$f \wedge f_1 \wedge \cdots \wedge f_r = 0$.
8. 设$g_1, \ldots, g_r \in W^*$, $T \in \mathrm{L}(V, W)$. 证明
$$\Lambda^r(T^t)(g_1 \wedge \cdots \wedge g_r) = T^t g_1 \wedge \cdots \wedge T^t g_r.$$
9. 设$\dim V = n$, $f_1, \ldots, f_n \in V^*$, $T \in \mathrm{L}(V, V)$. 证明
$$T^t f_1 \wedge \cdots \wedge T^t f_n = \det(T) f_1 \wedge \cdots \wedge f_n.$$