目录

符号约定

- 符号 $\subset$ 代表集合的包含, 也包括相等的情形. 集合的真包含用符号 $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 表示.
- 环均指含幺交换环. 环同态均要求将乘法单位元映到乘法单位元.
- 为了书写方便, 有时我们并不区分相等符号"=" 和同构符号"$\simeq$".
- 注意素理想和极大理想根据定义都是真理想.
- 环 A 的所有乘法可逆元形成的集合记为 A^*.
- 设 A 为环, 一个 A-代数是指一个环同态 $\varphi: A \to B$. 其中 φ 称为结构同态. 在结构同态明确的情况下也称 B 为 A-代数. 设 $\psi: A \to C$ 也为 A-代数, 则 B 到 C 的一个 A-代数同态是指一个满足 $\psi = f \circ \varphi$ 的环同态 $f: B \to C$.
- 设 $\varphi: A \to B$ 为环同态 (不一定为单同态). 对 A 的理想 I, 我们经常将 $\varphi(I)$ 在 B 中生成的理想记为 IB. 对 B 的理想 J, 有时将 $\varphi^{-1}(J)$ 记为 $J \bigcap A$. 我们用 $\varphi^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, $Q \mapsto Q \cap A$ 表示 φ 诱导的素谱空间映射.
- 对环 A 的素理想 P, 用 $k(P)$ 表示 P 处的剩余类域 $\operatorname{Frac}(A/P) = A_P/PA_P$(同构的证明见推论 1.3.1).
- 环 A 称为局部环, 如果 A 只有唯一的极大理想 m. 常用符号 (A, m) 或 (A, m, k) 明确局部环 A 的极大理想 m 和剩余类域 $k = A/m$.

第一章 环及其局部化

1.1 空间与函数环

设 X 为拓扑空间, 令 $C(X)$ 为 X 上所有复值连续函数形成的 $\mathbb{C}$-代数. 我们的观点是用环 $C(X)$ 的信息来理解空间 X. 首先, 对 X 中的一个点 a, 我们对应 $C(X)$ 中的如下极大理想

$$m_a := \{f \in C(X) | f(a) = 0\}.$$

显然, 若 $a \neq b$, 则 $m_a \neq m_b$. 这说明将空间 X 中的点对应为 $C(X)$ 中的极大理想并没有损失信息. 其次, 我们也可以将函数 f 在点 a 处的取值利用环中的语言重新表述. 具体而言, 考虑剩余类域 $k(m_a) = C(X)/m_a$, 易知 $\mathbb{C}$-代数结构同态 $\mathbb{C} \to k(m_a)$ 为同构. 在这个同构下, 我们有 f 在 a 点的取值 $f(a) = \bar{f}$, 其中 $\bar{f}$ 表示 f 在商同态 $C(X) \to k(m_a)$ 下的像. 最后, 设 $g : X \to Y$ 为拓扑空间的连续映射, 则其诱导了函数环的拉回同态 (k-代数同态)

$$\begin{aligned} g^\sharp : C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

如果 $g(a) = b$, 则 $g^{\sharp-1}(m_a) = m_b$. 因此环同态 $g^\sharp$ 可以认为是空间映射 g 的对应物.

在上面的讨论中, 拓扑空间也可换作其它带结构的空间, 如微分流形, 复流形, 代数簇等, 而相应的函数环为光滑函数环, 全纯函数环, 或正则函数环.

例 1.1.1 记 $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ 为复平面. 考虑其上的多项式函数环 $\mathbb{C}[x]$. 则 $\mathbb{A}^1$ 中的点 a 一一对应到 $\mathbb{C}[x]$ 中的极大理想 $m_a = (x - a)$. 设 $g : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $z \mapsto f(z)$ 为多项式映射.

则容易验证 $g^\sharp : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ 为 $x \mapsto f(x)$. 这说明 $\mathbb{A}^1$ 到自身的多项式映射一一对应到 $\mathbb{C}[x]$ 到自身的 $\mathbb{C}$-代数同态.

1.2 素谱空间

对一般的环 A, 我们也希望将其看作某个空间上的函数环. 根据上节的讨论, 一个自然的空间是 A 上所有极大理想形成的集合. 为了更方便的处理理想的拉回, 我们考虑所有素理想形成的空间.

定义 1.2.1 环 A 的素谱空间 $\operatorname{Spec} A$ 定义为 A 的所有素理想形成的集合.

对 $P \in \operatorname{Spec} A$, 对 $f \in A$, 我们定义 f 在 P 处的取值 $f(P)$ 为 f 在自然同态 $A \to k(P) = \operatorname{Frac}(A/P)$ 下的像. 从而 $f(P) \in k(P)$. 以这样的方式, 我们将 f 看作 $\operatorname{Spec} A$ 上的“函数”, 其与真正函数的差别在于值域 $k(P)$ 随着点 P 变化. 如果 A 为某个域 k 上的代数, 并且自然同态 $k \to k(P)$ 为同构, 则通过该同构, f 可看作真正的 k-值函数. 虽然不是真正的函数, 我们仍然可以通过要求 f 是“连续的”来定义 $\operatorname{Spec} A$ 上的拓扑. 由于在不同的剩余类域 $k(P)$ 中, 能够统一表述的元素只有 0 和 1, 我们只能要求 f 不等于 0 的集合为开集.

定义 1.2.2 设 $f \in A$, 称 $D(f) \coloneqq \{P \in \operatorname{Spec} A | f(P) \neq 0\}$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的一个主开集.

根据定义, 条件 $f(P) \neq 0$ 也等价于 $f \notin P$. 下面的简单性质说明所有主开集形成 $\operatorname{Spec} A$ 上的一个开集基.

命题 1.2.1 设 $f, g \in A$, 则 $D(f) \bigcap D(g) = D(fg)$.

证明 根据定义即得. □

由此, 我们以主开集为开集基得到 $\operatorname{Spec} A$ 上的拓扑, 称为 Zariski 拓扑. 由定义, $U \subset \operatorname{Spec} A$ 为开集当且仅当 U 为一些主开集的并. 我们以后在素谱空间上默认赋予 Zariski 拓扑.

命题 1.2.2 $\operatorname{Spec} A$ 中的子集 F 为闭集 $\iff$ 存在 A 的理想 I, 使得

$$F = V(I) \coloneqq \{P \in \operatorname{Spec} A | f(P) = 0,\ \forall\ f \in I\} = \{P \in \operatorname{Spec} A | I \subset P\}.$$

证明 由 $\bigcup_{j \in J} D(f_j)$ 和 $V(\sum_{j \in J}(f_j))$ 互为补集即得. □

由定义, $V(I)$ 为理想 I 中所有“函数”的公共零点. 下面的命题给出了当理想作运算时, $V(I)$ 的变化.

命题 1.2.3 设 I, J 均为 A 的理想, 则有

(i) 如果 $I \subset J$, 那么 $V(J) \subset V(I)$.

(ii) $V(I+J)=V(I)\bigcap V(J)$.

(iii) $V(I\bigcap J)=V(IJ)=V(I)\bigcup V(J)$.

证明　由定义直接验证即得. 作为例子, 下面证明 $V(I\bigcap J)=V(I)\bigcup V(J)$. 首先由 (i) 知 $V(I)\bigcup V(J)\subset V(I\bigcap J)$. 假设 $V(I)\bigcup V(J)\subsetneqq V(I\bigcap J)$, 可取 $P\in V(I\bigcap J)$, 并且 $P\notin (V(I)\bigcup V(J))$. 这样存在 $f\in V(I)$, $g\in V(J)$, 使得 $f(P)\neq 0$, $g(P)\neq 0$. 从而 $fg(P)\neq 0$. 而 $fg\in V(I\bigcap J)$, 这与 $P\in V(I\bigcap J)$ 矛盾. 故 $V(I)\bigcup V(J)=V(I\bigcap J)$.□

在实际应用中, 我们经常需要利用主开集给出 $\operatorname{Spec} A$ 的开覆盖. 下面的命题是一个非常方便的判断方法.

命题 1.2.4　设 $f_j(j\in J)$ 为 A 的一族元素, 则以下几条互相等价:

(i) $D(f_j)$ 形成 $\operatorname{Spec} A$ 的一个开覆盖.

(ii) 理想 $\sum_{j\in J}(f_j)=A$.

(iii) 存在 J 的有限子集 $j_1,\ldots,j_n$, 存在 $c_1,\ldots,c_n\in A$, 使得 $\sum_{k=1}^n c_k f_{j_k}=1$.

证明　由于 $\bigcup_{j\in J}D(f_j)$ 的补集为 $V(\sum_{j\in J}(f_j))$, 故 $\bigcup_{j\in J}D(f_j)=\operatorname{Spec} A \iff V(\sum_{j\in J}(f_j))=\varnothing \iff \sum_{j\in J}(f_j)=A$. □

由该命题, $\operatorname{Spec} A$ 总是紧空间, 但一般不是 Hausdorff 的. 设 $\varphi: A\to B$ 为环同态, 则有素谱空间之间的映射

$$\begin{aligned}\varphi^*:\operatorname{Spec} B&\longrightarrow \operatorname{Spec} A\\ Q&\longmapsto \varphi^{-1}(Q)\end{aligned}$$

对于 $Q\in\operatorname{Spec} B$, 记 $P=\varphi^{-1}(Q)\in\operatorname{Spec} A$, 则 φ 诱导整环的单同态 $A/P\hookrightarrow B/Q$, 进而诱导剩余类域的同态 $\varphi_P: k(P)\to k(Q)$. 由取值的定义可以看到对于 $f\in A$, $\varphi(f)(Q)=\varphi_P(f(P))$. 这说明环同态 φ 可以看做空间映射 φ^* 诱导的函数环的拉回同态. 由这个看法或者直接由定义, 对于 $\operatorname{Spec} A$ 的主开集 $D(f)$, 有 ${\varphi^*}^{-1}(D(f))=D(\varphi(f))$. 从而 φ^* 为连续映射.

例 1.2.1　我们分析 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. 首先作为集合, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}=\{0,(2),(3),(5),\ldots\}$. 其中 0 处的剩余类域为 $\mathbb{Q}$, (p) 处的剩余类域为 $\mathbb{F}_p$. 对非零的 $n\in\mathbb{Z}$, n 在 (p) 处的取值为 $\bar{n}\in\mathbb{F}_p$. 主开集 $D(n)=\{(p):p\nmid n\}$. 由于 $\mathbb{Z}$ 为主理想整环, 对任意非零理想 $I=(n)$, 对应的闭集 $V(I)=\{(p):p\mid n\}$. 由此, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 的闭集为 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 或 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 的有限子集. 另一个具有普遍性的现象是点 0 的闭包为 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, 称为一般点, 而其它点自身均为闭子集, 称为闭点.

1.3 环的局部化

根据上几节的讨论, 我们将环 A 中的元素看作 $\operatorname{Spec} A$ 上的“函数”. 一个自然的问题是主开集 $D(f)$ 上的“函数”应该是哪个环中的元素? 直观上看, 由于 $D(f)$ 表示 f 取值不为零的开子集, 任意形如 $\frac{g}{f^n}$ 的“函数”都应该在 $D(f)$ 上有定义. 与通常的分数表示法类似, 当 $gf^m = hf^n$ 时, 两个元素 $\frac{g}{f^n}$, $\frac{h}{f^m}$ 应该代表同一个“函数”. 为了将上述分析严格化, 我们考虑集合 $\tilde{A} \coloneqq \{(g, f^n) | g \in A,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. 考虑 $\tilde{A}$ 上的如下关系 $\equiv$: $(g, f^n) \equiv (h, f^m) \iff gf^m = hf^n$. 不难看到, 关系 $\equiv$ 并不是 $\tilde{A}$ 上的等价关系 (不满足传递性). 为此, 我们将其进行修正, 变成等价关系. 令 $\sim$ 为 $\tilde{A}$ 上的如下关系: $(g, f^n) \sim (h, f^m) \iff$ 存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $(gf^m - hf^n)f^k = 0$. 容易看到, $\sim$ 为 $\tilde{A}$ 上的等价关系. 我们记 A_f 为商集 $\tilde{A}/\sim$, 并将 (g, f^n) 代表的 A_f 中元素记为 $\frac{g}{f^n}$. 这样在 A_f 中, $\frac{g}{f^n} = \frac{h}{f^m} \iff$ 存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $(gf^m - hf^n)f^k = 0$. 在 A_f 中, 通过如下方式定义加法和乘法, 使其成为环:

$$\frac{g}{f^n} + \frac{h}{f^m} \coloneqq \frac{gf^m + hf^n}{f^{m+n}}$$
$$\frac{g}{f^n} \cdot \frac{h}{f^m} \coloneqq \frac{gh}{f^{m+n}}.$$

容易验证, 上述定义不依赖于代表元的选取, 从而是良好的. 并且通过这样定义的加法和乘法, A_f 成为环, 称为 A 在 f 处的局部化. 对于 $\frac{g}{f^n} \in A_f$, 对 $P \in D(f)$, 通过令 $\frac{g}{f^n}(P) = \frac{g(P)}{f(P)^n} \in k(P)$, 我们将 $\frac{g}{f^n}$ 看作 $D(f)$ 上的“函数”. 不难看到, 当 $f \in A^*$ 为 A 中乘法可逆元时 (比如 $f = 1$), 局部化 A_f 与 A 同构.

我们将上述构造过程推广到一般情形. 称环 A 的子集 S 为一个乘法子集, 如果 $1 \in S$, 并且 $\forall\ s_1, s_2 \in S$, 均有 $s_1 s_2 \in S$. 对于乘法子集 $S \subset A$, 令

$$\tilde{A} = A \times S = \{(a, s) | a \in A,\ s \in S\}.$$

考虑 $\tilde{A}$ 上的关系 $\sim$: $(a, s_1) \sim (b, s_2) \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $(as_2 - bs_1)s = 0$. 可以验证这是 $\tilde{A}$ 上的等价关系. 记商集合 $\tilde{A}/\sim$ 为 A_S 或 $S^{-1}A$, 并将 (a, s) 代表的 A_S 中元素记为 $\frac{a}{s}$. 这样在 A_S 中, $\frac{a}{s_1} = \frac{b}{s_2} \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $(as_2 - bs_1)s = 0$. 在 A_S 中, 通过如下方式定义加法和乘法, 使其成为环:

$$\frac{a}{s_1} + \frac{b}{s_2} \coloneqq \frac{as_2 + bs_1}{s_1 s_2}$$
$$\frac{a}{s_1} \cdot \frac{b}{s_2} \coloneqq \frac{ab}{s_1 s_2}.$$

容易验证, 上述定义不依赖于代表元的选取, 从而是良好的. 并且通过这样定义的加法

和乘法, A_S 成为环, 称为 A 在 S 处的**局部化**.

例 1.3.1 以下为常用的三种乘法子集处的局部化:

- 对 $f \in A$, 乘法子集 S 取为 $\{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. 此时 A_S 恰为前面定义的在 f 处的局部化 A_f.
- 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, 取 S 为 P 的补集 $\{s \in A | s \notin P\}$. 此时 A_S 也记为 A_P, 称为 A 在点 P 处的局部化.
- 对同态 $\varphi : A \to B$, 对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, 取 B 的乘法子集 $S = \varphi(\mathfrak{p}^c) = \{\varphi(s) | s \notin \mathfrak{p}\}$. 此时 B_S 也记为 $B_{\mathfrak{p}}$.

一般地, 对同态 $\varphi : A \to B$, 对 A 的乘法子集 S, 我们将 B 在 $\varphi(S)$ 处的局部化记为 B_S 或 $S^{-1}B$.

映射 $i : A \to A_S,\ a \mapsto \frac{a}{1}$ 显然为环同态, 并且其满足如下万有性质:

命题 1.3.1 $i(S) \subset A^*$, 并且对任意环同态 $\varphi : A \to B$, 如果 $\varphi(S) \subset B^*$, 那么存在唯一的环同态 $\bar{\varphi} : A_S \to B$, 使得 $\varphi = \bar{\varphi} \circ i$. 用交换图表表示如下:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A_S \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}", "\exists!"'] & B \end{tikzcd}$$

证明 我们说明 $\bar{\varphi}$ 的存在性, 其它易验证. 给定 $\varphi : A \to B$ 满足 $\varphi(S) \subset B^*$. 对 $\frac{a}{s} \in A_S$, 令 $\bar{\varphi}(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. 不难验证, $\bar{\varphi}$ 不依赖代表元的选取, 从而给出了良好定义的 $\bar{\varphi} : A_S \to B$. $\square$

在不引起歧义的情况下, 对 $a \in A$, 我们也将 $i(a) \in A_S$ 记作 a. 利用万有性质可以避免构造同态时繁琐的验证定义良好性的问题.

命题 1.3.2 (局部化与商交换) 设 S 为环 A 的乘法子集, I 为 A 的理想. 记 $\bar{S} \subset A/I$ 为 S 的在商环 A/I 中的像. 则 $\bar{S}$ 为 A/I 的乘法子集, 并且有同构 $A_S/IA_S \simeq (A/I)_{\bar{S}}$.

证明 直接验证可知 $\bar{S}$ 为 A/I 的乘法子集. 利用局部化的万有性质, 自然同态 $A \to (A/I)_{\bar{S}}$ 诱导了同态 $A_S \to (A/I)_{\bar{S}}$. 再由商的万有性质, 又得到同态 $\varphi : A_S/IA_S \to (A/I)_{\bar{S}}$. 同理, 先由商的万有性质, 再由局部化的万有性质, 也可以从自然同态 $A \to A_S/IA_S$ 诱导一个同态 $\psi : (A/I)_{\bar{S}} \to A_S/IA_S$. 通过写出在具体元素上的作用, 可以验证 φ 和 ψ 互逆, 从而得到所要证的同构. $\square$

推论 1.3.1 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则有域同构 $\operatorname{Frac}(A/P) \simeq A_P/PA_P$.

证明 注意到 $\operatorname{Frac}(A/P)$ 为整环 A/P 在素理想 0 处的局部化. 利用上面的命题即可. $\square$

命题 1.3.3 (局部化的复合) 设 S_1, S_2 均为 A 的乘法子集, 则

$$S \coloneqq \{s_1 s_2 | s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

也为 A 的乘法子集, 并且有环同构 $(A_{S_1})_{S_2} \simeq A_S$.

证明 直接验证可知 S 为 A 的乘法子集. 利用局部化的万有性质, 同态 $A \to A_S$ 诱导了同态 $A_{S_1} \to A_S$, 再次利用局部化万有性质, 得到同态 $(A_{S_1})_{S_2} \to A_S$. 同理可得同态 $A_S \to (A_{S_1})_{S_2}$. 通过在具体元素上进行验证得到这两个同态互逆. □

命题 1.3.4 (局部化与多项式环交换) 设 S 为环 A 的乘法子集, 则有环同构

$$A[x]_S \simeq A_S[x].$$

证明 与前面类似, 利用局部化的万有性质和多项式环的万有性质即得互逆的同态. □

下面讨论局部化的素谱空间. 我们有如下基本性质.

命题 1.3.5 设 S 为 A 的乘法子集. 自然同态 $i : A \to A_S$ 诱导如下集合的双射:

$$\begin{aligned} i^* : \operatorname{Spec} A_S &\xrightarrow{\sim} X \coloneqq \{P \in \operatorname{Spec} A,\ P \cap S = \varnothing\} \\ Q &\longmapsto i^{-1}(Q) \end{aligned}$$

其逆映射为 $P \mapsto PA_S$.

证明 直接验证即可. □

在例 1.3.1 的三种情形, 有 $\operatorname{Spec} A_S$ 的更具体描述:

- 对 $f \in A$, 自然同态 $i : A \to A_f$ 诱导 $\operatorname{Spec} A_f$ 到 $\operatorname{Spec} A$ 的主开集 $D(f)$ 的双射.
- 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} A_P$ 一一对应到 A 的包含在 P 中的素理想. 特别地, A_P 为局部环, 其唯一的极大理想是 PA_P, 剩余类为 $k(P) = \operatorname{Frac}(A/P) = A_P/PA_P$.
- 对同态 $A \to B$, 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} B_P$ 一一对应到 B 的满足 $Q \cap A \subset P$ 的素理想 Q.

作为对比, 环同态基本定理告诉我们商环 A/I 的素理想一一对应到 A 的包含 I 的素理想. 所以作局部化和作商都有将问题集中到 A 的一部分素理想上的效果. 实际上这种一一对应还是保持拓扑结构的, 即有下面的命题.

命题 1.3.6 设 $f \in A$, 设 I 为 A 的理想. 则有:

(i) 自然同态 $i : A \to A_f$ 诱导的双射 $i^* : \operatorname{Spec} A_f \xrightarrow{\sim} D(f)$ 为同胚. 其中赋予 $D(f)$ 作为 $\operatorname{Spec} A$ 的开子集的子空间拓扑.

(ii) 商同态 $\pi: A \to A/I$ 诱导的双射 $\pi^*: \operatorname{Spec}(A/I) \xrightarrow{\sim} V(I)$ 为同胚. 其中赋予 $V(I)$ 作为 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集的子空间拓扑.

证明 (i): 前面已经说明 i^* 为双射, 并且 $\operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$ 总是连续映射. 下面只需验证 i^* 把 $\operatorname{Spec} A_f$ 的主开集映为 $D(f)$ 的开集. 设 U 为 $\operatorname{Spec} A_f$ 的主开集. 由定义, 存在 $h = g/f^n \in A_f$, 使得 $U = D(h)$. 其中 $g \in A$, $n \geq 0$. 由于 f 为 A_f 中的可逆元, 故 $U = D(g/1) = D(i(g))$. 由此可以看到 $i^*(U) = D(g) \cap D(f)$ 为 $D(f)$ 中的开集. 故 i^* 为同胚.

(ii): 与 (i) 类似, 只需验证 π^* 把 $\operatorname{Spec}(A/I)$ 的主开集映为 $V(I)$ 的开集. 任取 $g \in A$, 则 $\operatorname{Spec}(A/I)$ 的主开集 $D(\bar{g})$ 满足 $D(\bar{g})) = D(\pi(g))$. 由此可以看到 $\pi^*(D(\bar{g})) = D(g) \cap \operatorname{Im} \pi^* = D(g) \cap V(I)$. 这就验证了所需要的性质. □

综合利用局部化和取商的操作, 我们得到下面关于纤维的描述.

命题 1.3.7 设 $\varphi: A \to B$ 为环同态, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$. 则素谱空间映射 $\varphi^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 在点 P 处的纤维为 $\varphi^{*-1}(P) \simeq \operatorname{Spec}(B_P/PB_P)$.

证明 根据商环中理想的描述, 商同态 $B_P \to B_P/PB_P$ 诱导了 $\operatorname{Spec}(B_P/PB_P)$ 与 B_P 中包含 PB_P 的素理想的一一对应, 也即与 B_P 中满足 $Q \cap A \supset P$ 的素理想 Q 一一对应. 再由命题 1.3.5, $\operatorname{Spec} B_P$ 与 B 中与 $\varphi(A \setminus P)$ 不相交的素理想一一对应, 也即与 B 中满足 $Q \cap A \subset P$ 的素理想 Q 一一对应. 综合上面的两种描述, 得到同态 $B \to B_P/PB_P$ 诱导了 $\operatorname{Spec}(B_P/PB_P)$ 与 $\varphi^{*-1}(P)$ 的一一对应. □

例 1.3.2 考虑 $\mathbb{C}$ 的子环 $\mathbb{Z}[i]$, 其中 $i = \sqrt{-1}$. 我们考察环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$. 设 p 为素数. 则根据前面的命题, 纤维 $\{Q \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \mid Q \cap \mathbb{Z} = (p)\}$ 与 $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i]_{(p)}/(p))$ 一一对应. 注意到有环同构 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[i]$, $x \mapsto i$. 从而有环的一系列同构

$$\frac{\mathbb{Z}[i]_{(p)}}{(p)} \simeq \frac{(\mathbb{Z}[x]/(x^2+1))_{(p)}}{(p)} \simeq (\frac{\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)}{(p)})_{(p)} \simeq (\frac{\mathbb{F}_p[x]}{(x^2+1)})_{(p)} \simeq \frac{(\mathbb{F}_p[x])_{(p)}}{(x^2+1)} \simeq \frac{\mathbb{F}_p[x]}{(x^2+1)}.$$

这里用到了 $\mathbb{Z}\backslash(p)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中已经为可逆元, 从而局部化 $\mathbb{F}_p[x]_{(p)}$ 与 $\mathbb{F}_p[x]$ 同构. 通过上面的同构, 我们看到 $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i]_{(p)}/(p)) \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1))$. 从而 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 在 (p) 处的纤维元素个数不超过两个, 并且由 x^2+1 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的唯一因子分解确定.

命题 1.3.8 设 A 为环. 则 $\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$ 等于 A 的所有幂零元形成的理想.

证明 显然 A 的幂零元包含在 $\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$ 中. 反之, 设 $f \in \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P$, 考虑 A_f. 由上面的描述, $\operatorname{Spec} A_f \simeq D(f)$. 而根据 f 的取法, $D(f) = \varnothing$. 这样得到 $\operatorname{Spec} A_f = \varnothing$, 从而 A_f 为零环, 即 $1 = 0$. 故 f 为幂零元. □

该命题的几何意义是说, 对 $f \in A$, 如果 f 作为 $\operatorname{Spec} A$ 上的"函数"处处取值为 0, 则 f 为幂零元. 特别地, 如果 A 没有非平凡幂零元, 那么处处取值为 0 的"函数"也是零元素, 这说明此时将 A 中的元素看作 $\operatorname{Spec} A$ 上的"函数"不损失信息.

定义 1.3.1 称环 A 为**约化环**, 如果 A 没有非平凡幂零元, 或等价地, $\bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A} P=0$.

定义–命题 1.3.1 设 I 为环 A 的理想, 则 $\sqrt{I}:=\{a\in A|\exists\, n\geq 0,\ a^n\in I\}$ 也为 A 的理想. 如果 $\sqrt{I}=I$, 则称 I 为**根式理想**.

命题 1.3.8 可以用上面的符号写为 $\bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A} P=\sqrt{(0)}$. 更一般地, 我们有如下性质.

命题 1.3.9 设 I 为环 A 的理想, 则 $\bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A, P\supseteq I} P=\sqrt{I}$.

证明 应用命题 1.3.8 到商环 A/I 即可. □

该命题的几何意义是说, $\sqrt{I}$ 中的元素恰为在 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集 $V(I)$ 上取值为 0 的"函数". 这说明 $V(\sqrt{I})=V(I)$. 下面的命题说明根式理想和 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集一一对应.

命题 1.3.10 设 A 为环. 则 $I\mapsto V(I)$ 和 $Z\mapsto I(Z):=\{f\in A|f(x)=0,\ \forall\, x\in Z\}$ 建立了如下两个集合的一一对应:

$$\{A\text{的根式理想}\}\xrightarrow{1:1}\{\operatorname{Spec} A\text{的闭子集}\}.$$

证明 利用命题 1.3.9 验证 $I\mapsto V(I)$ 和 $Z\mapsto I(Z)$ 是互逆映射即可. □

我们称一个拓扑空间 X 是**不可约的**, 如果 X 不能写成两个真闭子集的并. 不难看到, X 不可约等价于 X 的每个非空开子集都是稠密的, 也等价于 X 的任何两个非空开子集的交非空. X 的子集 F 称为不可约子集, 如果 F 在子空间拓扑下是不可约的.

命题 1.3.11 设 I 为环 A 的理想, 则 $V(I)$ 是 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约闭子集 $\iff$ $\sqrt{I}$ 为 A 的素理想.

证明 由于 $V(I)=V(\sqrt{I})$, 我们不妨设 $I=\sqrt{I}$ 为根式理想. 又由于 $V(I)\simeq\operatorname{Spec} A/I$, 通过考虑 A/I, 我们又不妨设 $I=0$. 这样 A 为约化环, 只需证明

$$\operatorname{Spec} A\text{ 不可约}\iff A\text{ 为整环.}$$

$\Longrightarrow$: 设 $f,g\in A$ 并且 $fg=0$. 则 $\forall\, P\in\operatorname{Spec} A$, $f(P)g(P)=0$. 从而 $D(f)\cap D(g)=\varnothing$. 由 X 不可约知 $D(f)=\varnothing$ 或 $D(g)=\varnothing$. 不妨设 $D(f)=\varnothing$. 则 $\forall\, P\in\operatorname{Spec} A$, $f(P)=0$. 由 A 为约化环知 $f=0$.

$\Longleftarrow$: 设 $D(f)$, $D(g)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的两个非空主开集. 则 f, 均非零, 从而由 A 为整环知 $fg\neq 0$. 再由 A 为约化环即知 $D(fg)\neq\varnothing$. 这样证明了任意两个非空主开集的交非空. 由主开集形成为开集基即知 $\operatorname{Spec} A$ 的任意两个非空开子集的交非空. □

一般而言, 在一个理想处的局部化 A_P 因为是局部环, 所以比 A 更容易研究. 但是从 A 过渡到 A_P 的过程中某种意义上只保留了 P 附近的信息. 为了弥补这个损失, 我

们可以让 P 遍历 $\operatorname{Spec} A$ 中的所有点. 这样考虑所有 A_P 时就不会损失信息了. 下面的两个命题就说明了这种观点.

命题 1.3.12 设 A 为环, 设 $f \in A$. 则 $f = 0 \iff \forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, 均有 f 在 A_P 中为 0.

证明 只需证 $\Longleftarrow$. 记 $\operatorname{ann}(f) \coloneqq \{a \in A \mid af = 0\}$ 为 f 的零化理想. 如果 $\operatorname{ann}(f) \neq A$, 则存在 A 的极大理想 m 包含 $\operatorname{ann}(f)$. 由于 f 在 A_m 中为 0, 根据定义可以看到存在 $s \in A \setminus m$, 使得 $sf = 0$, 即 $s \in \operatorname{ann}(f)$. 而这与 $\operatorname{ann}(f) \subset m$ 矛盾. 故 $\operatorname{ann}(f) = A$, 从而 $f = 0$. □

命题 1.3.13 设 A 为整环. 对每个 $P \in \operatorname{Spec} A$, 通过自然的单同态将 A_P 看作 $\operatorname{Frac}(A)$ 的子环. 则 $A = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} A_P$.

证明 设 $0 \neq x \in \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} A_P$. 考虑理想 $I \coloneqq \{a \in A \mid ax \in A\}$. 只需证明 $I = A$. 假设 $I \subsetneqq A$, 则存在 A 的极大理想 m 包含 I. 由于 $x \in A_m$, 根据局部化的定义可以找到 $s \in A \setminus m$, 使得 $sx \in A$, 从而 $s \in I$. 这与 $I \subset m$ 矛盾. 故 $I = A$, 而 $x \in A$. 另一个方向的包含关系 $A \subset \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} A_P$ 是显然的. □

注记 1.3.1 命题 1.3.13 中证明一个分式域中的元素属于 A 的方法还会在处理整闭整环时出现 (定理 4.1.1, 定理 8.5.3).

1.4 层的观点

设 X 为拓扑空间. 为了构造 X 上的连续函数 f, 我们只需构造 X 的一个开覆盖 U_i, 以及每个 U_i 上的连续函数 f_i, 使得对每个 i, j, 在交集 $U_i \cap U_j$ 上有 $f_i = f_j$. 满足这些条件的 f_i 通过粘合给出整体的连续函数 f. 层的概念将这种通过粘合局部对象得到整体对象的方法抽象化, 以适应各种不同的语境.

1.4.1 层与 $\mathcal{B}$-层

定义 1.4.1 设 X 为拓扑空间, X 上的一个 (Abel 群) 预层 $\mathcal{F}$ 是指满足下列条件的一个结构:

(i) 对 X 的每个开集 U, 指定一个 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$, 并且 $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

(ii) (限制同态) 对任意两个开集 $V \subset U$, 指定一个群同态 $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, 并且 $\rho_{UU} = \mathrm{id}$.

(iii) (相容性) 对任意三个开集 $W \subset V \subset U$, 有 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

在上述定义中, 如果每个 $\mathcal{F}(U)$ 均为环, 并且限制同态 ρ_{UV} 均为环同态, 则得到的预层称为环预层. 我们称 $s \in \mathcal{F}(U)$ 为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的一个截面. $\mathcal{F}(X)$ 中的元素称为整体截面. 对 $s \in \mathcal{F}(U)$, $V \subset U$, 一般将 $\rho_{UV}(s)$ 记作 $s\,|_V$, 称为 s 在 U 上的限制. 为了从局

部截面粘合得到整体截面, 我们经常需要预层进一步满足如下的粘合条件.

定义 1.4.2 设 X 为拓扑空间. X 上的一个预层 $\mathcal{F}$ 称为层, 如果其满足如下粘合条件:

(1) 对任意开集 U, 对 U 的任意开覆盖 U_i $(i \in I)$, 如果 $s \in \mathcal{F}(U)$ 满足 $s\mid_{U_i} = 0$, $\forall\, i \in I$, 那么 $s = 0$.

(2) 对任意开集 U, 对 U 的任意开覆盖 U_i $(i \in I)$, 如果对每个 $i \in I$, 给定 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, 并且满足 $\forall\, i, j \in I$, $s_i\mid_{U_i \cap U_j} = s_j\mid_{U_i \cap U_j}$, 那么存在 $s \in \mathcal{F}(U)$, 使得 $s\mid_{U_i} = s_i$, $\forall\, i \in I$.

例 1.4.1 设 X 为拓扑空间, 对开集 $U \subset X$, 令 $C_X(U)$ 为 U 上的连续复值函数形成的环, 对 $V \subset U$, 令限制同态 ρ_{UV} 为函数在子集上的限制. 这样得到的预层 C_X 为层, 称为 X 上的连续函数层. 这是一个环层. 同样的方式, 如果 X 为微分流形 (复流形, 代数簇), X 上的光滑函数 (全纯函数, 正则函数) 也形成层.

在微分流形中, 为了描述在一个点附近的光滑函数性质, 我们有函数芽的概念. 对于抽象的预层或层, 我们也有类似的推广. 设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的一个预层, 设 $x \in X$. 给定一个满足如下条件的 x 的开邻域形成的集合 S:

$$\text{对}x\text{ 的任意开邻域}U,\ \exists\, V \in S, \text{使得}V \subset U. \tag{1.4–1}$$

注意这样的 S 一定存在, 比如可以将 S 取为所有 x 的开邻域形成的集合. 对满足(1.4–1) 的 S, 考虑无交并 $\bigsqcup_{U \in S} \mathcal{F}(U)$ 的如下商集:

$$\varinjlim_{U \in S} \mathcal{F}(U) := \bigsqcup_{U \in S} \mathcal{F}(U)/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 定义为: 对 $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$, 则 $s_1 \sim s_2 \iff$ 存在 $U_3 \in S$, 使得 $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$, 并且 $s_1\mid_{U_3} = s_2\mid_{U_3}$.

我们通过如下方式定义 $\varinjlim_{U \in S} \mathcal{F}(U)$ 上的加法:

$$\text{对}s_1 \in \mathcal{F}(U_1), s_2 \in \mathcal{F}(U_2), \text{取}U_3 \in S\text{满足}U_3 \subset U_1 \bigcap U_2, \text{则令}\overline{s_1} + \overline{s_2} := \overline{s_1\mid_{U_3} + s_2\mid_{U_3}}.$$

由定义可以验证上述定义不依赖于代表元的选取, 并且在这个加法运算下 $\varinjlim_{U \in S} \mathcal{F}(U)$ 成为 Abel 群. 更进一步, 下面的命题说明 $\varinjlim_{U \in S} \mathcal{F}(U)$(在同构意义下) 不依赖于 S 的选取.

命题 1.4.1 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层. 设 S_1 和 S_2 均为点 $x \in X$ 的一些开邻域形成的满足条件(1.4–1) 的集合. 则有 Abel 群同构:

$$\varinjlim_{U \in S_1} \mathcal{F}(U) \simeq \varinjlim_{U \in S_2} \mathcal{F}(U).$$

证明 对 $U \in S_1$, 以及 $s \in \mathcal{F}(U)$, 由于 S_2 满足条件(1.4–1), 可以找到 $V \in S_2$, 使得 $V \subset U$. 可以验证 $\bar{s} \mapsto \overline{s|_V}$ 是一个良好定义的从 $\varinjlim_{U\in S_1} \mathcal{F}(U)$ 到 $\varinjlim_{U\in S_2} \mathcal{F}(U)$ 的群同态. 同理可以构造反方向的同态并验证这两个同态互逆. □

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层. 对 $x \in X$, 定义

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U\in S} \mathcal{F}(U).$$

其中 S 为 x 的所有开邻域形成的集合. 这样得到的 Abel 群 $\mathcal{F}_x$ 称为 $\mathcal{F}$ 在 x 处的**茎**. 由命题 1.4.1, 可以将 S 换作任意一个满足条件(1.4–1) 的集合来计算茎. 设 U 为 X 的开集, $x \in U$. 截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ 在自然的商映射 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ 下的像记作 s_x, 称为 s 在 x 处的**芽**. 容易验证, 自然的商映射 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ 为群同态.

命题 1.4.2 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的层. 设 U 为 X 的开子集, $s \in \mathcal{F}(U)$ 为一个截面. 如果 $s_x = 0$, $\forall\, x \in U$, 则 $s = 0$.

证明 由 $s_x = 0$ 的定义, 存在 x 的开邻域 U_x, 使得 $U_x \subset U$, 并且 $s|_{U_x} = 0$. 由于 U_x $(x \in U)$ 形成 U 的一个开覆盖, 由层的定义得到 $s = 0$. □

设 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个开集基. 很多情况下我们只能对层 $\mathcal{F}$ 在 $U \in \mathcal{B}$ 上的截面有比较具体的描述. 为了更方便的使用层, 我们引入如下开集基上预层和层的概念.

定义 1.4.3 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为 X 的一个开集基. X 上的一个 (Abel 群)$\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$ 是指满足下列条件的一个结构:

(i) 对每个开集 $U \in \mathcal{B}$, 指定一个 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$, 并且 $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

(ii) (限制同态) 对任意两个满足 $V \subset U$ 的开集 $U, V \in \mathcal{B}$, 指定一个群同态 ρ_{UV} : $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, 并且 $\rho_{UU} = \mathrm{id}$.

(iii) (相容性) 对任意三个满足 $W \subset V \subset U$ 的开集 $W, V, U \in \mathcal{B}$, 有 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

定义 1.4.4 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个开集基. X 上的一个 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$ 称为 $\mathcal{B}$-层, 如果其满足如下粘合条件:

(1) 对任意 $U \in \mathcal{B}$, 对 U 的任意满足 $U_i \in \mathcal{B}$ 的开覆盖 U_i $(i \in I)$, 如果 $s \in \mathcal{F}(U)$ 满足 $s|_{U_i} = 0$, $\forall\, i \in I$, 那么 $s = 0$.

(2) 对任意 $U \in \mathcal{B}$, 对 U 的任意满足 $U_i \in \mathcal{B}$ 的开覆盖 U_i $(i \in I)$, 如果对每个 $i \in I$, 给定 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, 满足相容性条件: $\forall\, i, j \in I$, 对任意 $\mathcal{B}$ 中满足 $V \subset U_i \cap U_j$ 的元素 V, 均有 $s_i|_V = s_j|_V$, 那么存在 $s \in \mathcal{F}(U)$, 使得 $s|_{U_i} = s_i$, $\forall\, i \in I$.

注记 1.4.1 不难验证, 如果开集基 $\mathcal{B}$ 中任意两个开集的交还在 $\mathcal{B}$ 中, 则 $\mathcal{B}$-层定义中的相容性条件可以改为 $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$, 而得到等价的定义.

由定义可以看出, 任何预层 (层) 只看 $\mathcal{B}$ 中元素上的截面就得到 $\mathcal{B}$-预层 ($\mathcal{B}$-层). 反

之, 可以证明任何 $\mathcal{B}$-层也可以 (同构意义上) 唯一地扩张为层. 由于我们后面并不需要这个结论, 故省略详细证明, 有兴趣的读者可以自行查阅相关资料 (如 [4, §I.1.3]).

对于 $\mathcal{B}$-预层而言, 同样也有茎和芽的概念. 具体而言, 对 X 上的一个 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$, 对 $x \in X$, 定义:

$$\mathcal{F}_x \coloneqq \varinjlim_{U \in S} \mathcal{F}(U).$$

其中 S 为 x 的所有在 $\mathcal{B}$ 中的开邻域形成的集合. 这样得到的 Abel 群 $\mathcal{F}_x$ 称为 $\mathcal{F}$ 在 x 处的茎. 同样由命题 1.4.1, 可以将 S 换作任意一个满足条件(1.4–1) 的 x 的开邻域形成的 $\mathcal{B}$ 的子集来计算茎. 设 $U \in \mathcal{B}$, $x \in U$. 截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ 在商同态 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ 下的像记作 s_x, 称为 s 在 x 处的芽.

与命题 1.4.2 的证明类似, 我们有如下命题.

命题 1.4.3 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{B}$-层. 设 $U \in \mathcal{B}$, $s \in \mathcal{F}(U)$. 如果 $s_x = 0$, $\forall\, x \in U$, 则 $s = 0$.

1.4.2 环看作 $\mathcal{B}$-层

设 A 为环, 在 $X = \operatorname{Spec} A$ 上赋予 Zariski 拓扑. 令

$$\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$$

为主开集形成的开集基. 由于我们将 A_f 看作 $D(f)$ 上的 “函数” 环, 自然希望这些环形成 X 上的一个 $\mathcal{B}$-层. 为了实现这个想法, 我们先定义 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{O}_X$. 对 $f, g \in A$, 如果 $D(g) \subset D(f)$, 易验证 f 为 A_g 中的可逆元, 从而由局部化的万有性质 (命题 1.3.1), 存在唯一的环同态 $\rho_{f,g}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_f \arrow[rr, "\exists!", "\rho_{f,g}"'] & & A_g \end{tikzcd}$$

设 $D(h) \subset D(g) \subset D(f)$, 则在下图中令 φ 为 $\rho_{f,h}$ 或 $\rho_{g,h} \circ \rho_{f,g}$ 均使其成为交换图

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_f \arrow[rr, "\varphi"] & & A_h \end{tikzcd}$$

这样由唯一性得到 $\rho_{f,h} = \rho_{g,h} \circ \rho_{f,g}$. 特别地, 如果 $D(f) = D(g)$, 则 $\rho_{f,g}$ 给出了 A_f 和 A_g 的同构, 我们利用这个同构将 A_f 等同到 A_g. 则对 $D(f) \in \mathcal{B}$, 令 $\mathcal{O}_X(D(f)) \coloneqq A_f$, 对 $D(g) \subset D(f)$, 令 $\rho_{D(f),D(g)} \coloneqq \rho_{f,g}$, 就得到一个良好定义的 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{O}_X$. 事实上, 我们有如下更强的性质.

命题 1.4.4 上面定义的 $\mathcal{O}_X$ 是一个 $\mathcal{B}$-层.

证明　由于 $\operatorname{Spec} A_f \simeq D(f)$, 我们只需考虑全空间 X 的开覆盖即可. 首先考虑有限覆盖的情形. 设 $X = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ 为开覆盖. 我们分别验证 $\mathcal{B}$-层定义中的两条.

(1) 设 $s \in \mathcal{O}_X(X) = A$, 并且 $s|_{D(f_i)} = 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n$. 由 s 在 A_{f_i} 中为 0 知存在 $N_i \geq 1$, 使得 $sf_i^{N_i} = 0$. 取 $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, 则 $sf_i^N = 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq n$. 由 $X = \bigcup_{i=1}^n D(f_i^N)$ 及命题 1.2.4, 存在 $c_i \in A$, 使得 $c_1 f_1^N + \ldots c_n f_n^N = 1$. 故 $s = c_1 s f_1^N + \ldots c_n s f_n^N = 0$.

(2) 设对每个 i, 给定 $s_i \in \mathcal{O}_X(D(f_i)) = A_{f_i}$, 满足 $\forall\, i, j$, 在 $\mathcal{O}_X(D(f_i) \cap D(f_j)) = A_{f_i f_j}$ 中成立 $s_i|_{D(f_i)\cap D(f_j)} = s_j|_{D(f_i)\cap D(f_j)}$. 设 $s_i = \frac{g_i}{f_i^{a_i}}$, $g_i \in A$, $a_i \geq 0$. 则 $s_i|_{D(f_i)\cap D(f_j)} = s_j|_{D(f_i)\cap D(f_j)}$ 等价于存在 $a_{ij} \geq 0$, 使得在 A 中成立

$$(g_i f_j^{a_j} - g_j f_i^{a_i})(f_i f_j)^{a_{ij}} = 0.$$

取 $N = \max\{a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. 令 $b_i = a_i + N$, $h_i = g_i f_i^N$. 则 $s_i = \frac{g_i}{f_i^{a_i}} = \frac{h_i}{f_i^{b_i}}$. 并且对每个 i, j, 有 $h_i f_j^{b_j} = h_j f_i^{b_i}$. 由 $X = \bigcup_{i=1}^n D(f_i^{b_i})$ 及命题 1.2.4, 存在 $c_i \in A$, 使得 $c_1 f_1^{b_1} + \ldots c_n f_n^{b_n} = 1$. 令 $s \coloneqq c_1 h_1 + \ldots c_n h_n \in A = \mathcal{O}_X(X)$. 直接验证可得对每个 i, 有 s 在 A_{f_i} 中与 $\frac{h_i}{f_i^{b_i}}$ 相等, 即 $s|_{D(f_i)} = s_i$. 这样就证明了有限开覆盖的情形.

设 $X = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ 是 $X = \operatorname{Spec} A$ 的一个主开集形成的任意开覆盖. 由 X 的紧性. 可以找到有限个 $i_1, \ldots, i_n \in I$, 使得 $D(f_{i_1}), \ldots, D(f_{i_n})$ 为 X 的开覆盖. 假设 $s \in \mathcal{O}_X(X)$ 满足 $s|_{D(f_i)} = 0,\ \forall\, i \in I$, 则 s 限制在每个 $D(f_{i_k})$ 上为 0, $\forall\, k = 1, \ldots, n$. 由上面已证的关于有限覆盖的情形即知 $s = 0$. 特别地, 这也说明给定局部截面粘合得到的整体截面至多有一个. 假设对每个 $i \in I$, 给定 $s_i \in \mathcal{O}_X(D(f_i))$, 并且满足 $\forall\, i, j \in I$, 有 $s_i|_{D(f_i)\cap D(f_j)} = s_j|_{D(f_i)\cap D(f_j)}$. 由上面已证的有限覆盖情形, 存在 $s \in \mathcal{O}_X(X)$, 使得对每个 $k = 1, \ldots, n$, 均有 $s|_{D(f_{i_k})} = s_{i_k}$. 对任意 $j \in I$, 注意到 $D(f_{i_k}) \cap D(f_j)$ $(k = 1, \ldots, n)$ 为 $D(f_j) \simeq \operatorname{Spec} A_{f_j}$ 的一个主开集形成的有限覆盖. 由于 $s|_{D(f_j)}$ 和 s_j 在每个 $D(f_{i_k}) \cap D(f_j)$ 上的限制都相等 $(k = 1, \ldots, n)$, 从而由粘合得到的截面至多有一个知 $s|_{D(f_j)} = s_j$. 这就验证了 $\mathcal{O}_X$ 确实为一个 $\mathcal{B}$-层. □

注记 1.4.2　命题 6.1.3 将给出 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 为 $\mathcal{B}$-层的另一个更加概念性的证明.

命题 1.4.5　设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 $\mathcal{O}_{X,P} \simeq A_P$.

证明　利用局部化 A_P 的万有性质, 同态 $A \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$, $s \longmapsto s_P$ 诱导了环同态 $A_P \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$. 直接验证这是一个既单又满的映射即可. □

由这个将 A_P 解释为茎的看法, 不难看到命题 1.3.12 为命题 1.4.3 在 $\mathcal{O}_X$ 情形的推论.

1.4.3 中国剩余定理

利用 $\mathcal{B}$-层的看法, 我们将 A 中的元素看作 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 的整体截面. 从而可以利用粘合局部截面来证明 A 中元素的存在性. 本节我们利用这个看法证明一些命题.

命题 1.4.6 设 A 为环. 设 Z 为 $\operatorname{Spec} A$ 的既开又闭的子集. 则 Z 为主开集.

证明 令 $W = Z^c$ 为 Z 的补集. 则 Z 和 W 均为既开又闭的子集. 我们希望能构造 A 中的一个元素 f, 使其在 Z 上取值恒为 1, 而在 W 上取值恒为 0. 为此, 取 Z 的开覆盖 $Z = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ 和 W 的开覆盖 $W = \bigcup_{j=1}^m D(g_j)$ (覆盖的有限性由 Z 和 W 均为紧空间得到), 使得 $D(f_i) \bigcap D(g_j) = \varnothing$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. 取 $s_i := 1 \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f_i))$ 以及 $s_j := 0 \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g_j))$, 则这些局部截面显然满足粘合条件, 从而粘合为一个整体截面 $f \in A$. 由此不难看到 $Z = D(f)$ 为主开集. □

我们称一个环 A 为**零维环**, 如果 A 的每个素理想均为极大理想.

命题 1.4.7 设 A 为零维环, 并且 $\operatorname{Spec} A = \{P_1, \ldots, P_n\}$ 为有限集. 则

$$A \simeq A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_n}.$$

证明 由条件知每个 P_i 均为 $\operatorname{Spec} A$ 的既开又闭的子集. 从而由命题 1.4.6 知每个 P_i 均为主开集. 这样由 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 为 $\mathcal{B}$-层, 得到限制同态诱导的环同态

$$\begin{aligned} A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) &\longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(P_i) \\ s &\longmapsto (s\,|_{P_i}) \end{aligned}$$

为同构. 由 P_i 本身也为主开集知 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(P_i) \simeq \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, P_i} \simeq A_{P_i}$. 故得

$$A \simeq A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_n}.$$

□

定理 1.4.1 (中国剩余定理) 设 $I_1, \ldots, I_n$ 为环 A 的两两互素的理想. 这里两两互素是指对任意 $i \neq j$, 有 $I_i + I_j = A$. 则有环同构:

$$\frac{A}{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \simeq \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n}.$$

证明 通过考虑商环 $\frac{A}{I_1 \cap \cdots \cap I_n}$, 不妨假设 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = 0$. 令 $Z_i = V(I_i)$. 则 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = 0$ 蕴含 $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^n Z_i$. 又可验证 $I_i + I_j = A$ 蕴含 $Z_i \bigcap Z_j = \varnothing$. 故 $Z_1, \ldots, Z_n$ 为两两不交的既开又闭的子集, 从而由命题 1.4.6 均为主开集. 令 $A_i = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(Z_i)$, 则由 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 为 $\mathcal{B}$-层知限制同态诱导了环同构 $A \simeq A_1 \times \cdots \times A_n$,

并且 $A_i \simeq A/J_i$, 其中 $J_i = \{f \in A : f|_{Z_i} = 0\}$. 对 $j \neq i$, 设 $a \in I_i$, $b \in I_j$ 使得 $a+b=1$. 容易看到 $\forall\, P \in Z_i$, 有 $b(P) = 1 \neq 0$, 故 $b \in A_P^*$, 特别地, $I_j A_P = A_P$. 进而得到 $\forall\, P \in Z_i$, $0 = (I_1 \cap \cdots \cap I_n)A_P = (I_1 A_P) \cap \cdots \cap (I_n A_P) = I_i A_P$. 这说明 $I_i \subset J_i$. 设 $f \in J_i$, 由 $f|_{Z_i} = 0$ 知 $\forall\, P \in Z_i = V(I_i)$, 有 f 在 A_P 中为 0, 从而在 $(A/I_i)_P$ 中为 0. 由于 P 遍历 $\operatorname{Spec} A/I_i \simeq Z_i$, 根据 命题 1.3.12 得到 f 在 A/I_i 中为 0, 故 $f \in I_i$. 这样得到反向包含 $J_i \subset I_i$. 从而 $J_i = I_i$, 即得 $A_i \simeq A/I_i$. □

1.5 Noether 环

回忆一个环 A 称为 Noether 环, 如果 A 的任意理想升链均在有限步稳定, 这也等价于任意 A 的理想形成的非空集合均有极大元, 同时又等价于 A 的任意理想都是有限生成的. 熟知若 A 为 Noether 环, 则 A 的商环 A/I 以及多项式环 $A[x]$ 均为 Noether 环 (Hilbert 基定理). 下面的命题说明局部化也保持 Noether 性.

命题 1.5.1 设 S 为环 A 的乘法子集, 若 A 为 Noether 环, 则局部化 A_S 也为 Noether 环.

证明 任取 A_S 的理想 J, 令 $I = J \bigcap A$, 容易验证 $J = IA_S$. 从而由 I 为有限生成知 J 为有限生成. □

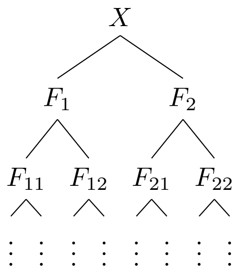
下面分析 $\operatorname{Spec} A$ 在 A 是 Noether 环时的特点.

命题 1.5.2 设 A 为 Noether 环, 则 $\operatorname{Spec} A$ 是 Noether 空间, 即 $\operatorname{Spec} A$ 的任意闭子集降链均在有限步之后稳定, 或者等价地, 任意 $\operatorname{Spec} A$ 的非空的由闭子集形成的集合均有极小元.

证明 由闭子集与根式理想的对应 (命题 1.3.10), $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集降链对应于 A 的理想升链. 从而由 A 为 Noether 环即得结论. □

命题 1.5.3 (不可约分解) 设 A 为 Noether 环. 则 $\operatorname{Spec} A$ 可以写为有限个不可约闭子集的并.

证明 令 $X = \operatorname{Spec} A$. 如果 X 本身不可约, 则结论显然成立. 如果 X 可约, 则有分解 $X = F_1 \bigcup F_2$, 并且 F_1, F_2 均为 X 的真闭子集. 若 F_1 和 F_2 均不可约, 则结论成立. 反之, 不妨设 F_1 可约, 则可以将其分解为两个真闭子集的并 $F_1 = F_{11} \bigcup F_{12}$, 继续讨论 F_{ij} 的可约性. 如果以上讨论过程在有限步不能终止, 那么可以找到 X 的一个无限长的闭子集降链, 并且其在有限步不能稳定住. 这将与 X 为 Noether 空间矛盾. 故上面的讨论在有限步终止, 从而 X 可写为有限个不可约闭子集的并. 这个讨论过程可以表示为如下二叉树图表:



我们也可以更形式化地进行如下论证: 考虑如下集合

$$S \coloneqq \{F \mid F \text{ 为} X \text{ 的非空闭子集, 并且} F \text{ 不能写为有限个不可约闭子集的并.}\}$$

如果 S 非空, 由 X 为 Noether 空间知 S 存在一个极小元 F. 由于 $F \notin S$, 知 F 一定可约. 设 $F = F_1 \bigcup F_2$, 并且 $F_i (i = 1, 2)$ 为 F 的真闭子集. 由 F 的极小性知 F_i 不在 S 中, 从而可写为有限个不可约闭子集的并. 从而 F 也可写为有限个不可约闭子集的并. 这与 $F \in S$ 矛盾! 故 S 为空集. 这样 $X \notin S$, 从而结论得证. □

对 Noether 环 A, 由命题 1.5.3 知存在分解 $\operatorname{Spec} A = F_1 \bigcup \cdots \bigcup F_n$, 使得 F_i 均为不可约闭子集, 并且 F_i 之间没有包含关系. 我们称这样的分解为 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分解, 每个 F_i 称为 $\operatorname{Spec} A$ 的**不可约分支**. 对 $\operatorname{Spec} A$ 的任意不可约闭子集 F, 由 $F = (F \bigcap F_1) \bigcup \ldots (F \bigcap F_n)$ 以及 F 的不可约性知存在某个 i, 使得 $F = F \bigcap F_i$, 从而 $F \subset F_i$. 由此不难看到 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分解在不计顺序的情况下是唯一的. 设 $W = V(I)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的任意闭子集, 由同胚 $V(I) \simeq \operatorname{Spec}(A/I)$ 以及 A/I 也为 Noether 环, 知 W 也存在不可约分解 $W = W_1 \cup \ldots W_m$, 使得 W_i 互不包含. 这些 W_i 称为 W 的不可约分支.

命题 1.5.4 设 A 为 Noether 环, 则 A 的极小素理想只有有限个.

证明 由命题 1.3.10 和命题 1.3.11, A 的极小素理想一一对应到 $\operatorname{Spec} A$ 的极大不可约闭子集, 又一一对应到 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分支, 从而由命题 1.5.3 为有限个. □

习题

1. 本习题从关系生成的等价关系角度来说明局部化定义中的等价关系. 集合 X 上的一个关系是指 $X \times X$ 的一个子集 R. 关系 R 称为等价关系, 如果其满足

(i) (自反性) $\forall\, x \in X$, $(x, x) \in R$.

(ii) (对称性) $\forall\, x, y \in X$, $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$.

(iii) (传递性) $\forall\, x, y, z \in X$, $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R \implies (x, z) \in R$.

证明:

(1) 对 X 上的任一关系 R, 必存在最小的一个包含 R 的等价关系 $\tilde{R}$. 这称为 R 生成的等价关系.

(2) 设 A 为环, S 为 A 的乘法子集. 令 $X = A \times S$. 定义 X 上的如下关系 $R \subset X \times X$: $((a, s_1), (b, s_2)) \in R \iff as_2 = bs_1$. 则 R 生成的等价关系 $\tilde{R}$ 满足: $((a, s_1), (b, s_2)) \in \tilde{R} \iff \exists\, s \in S$, 使得 $(as_2 - bs_1)s = 0$.

2. 设 A 为环, $P \in \operatorname{Spec} A$. 证明: 点 P 的闭包为 $V(P)$. 特别地, P 为闭点 $\iff$ P 为极大理想.

3. 证明 命题 1.3.7 给出的一一对应 $\varphi^{*-1}(P) \simeq \operatorname{Spec}(B_P/PB_P)$ 是拓扑空间的同胚. 其中在纤维 $\varphi^{*-1}(P)$ 上赋予 $\operatorname{Spec} B$ 的子空间拓扑.

4. 证明命题 1.3.12 与命题 1.3.13 可以加强为只考虑极大理想, 即:

(i) 设 A 为环, 设 $f \in A$. 则 $f = 0 \iff$ 对 A 的每个极大理想 m, 均有 f 在 A_m 中为 0.

(ii) 设 A 为整环. 对每个 A 的极大理想 m, 通过自然的单同态将 A_m 看作 $\operatorname{Frac}(A)$ 的子环. 则 $A = \bigcap_m A_m$. 其中 m 遍历 A 的极大理想.

5. 设 I, J 均为环 A 的理想. 证明 $I = J \iff$ 对每个素理想 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均有 $IA_P = JA_P$ 在 A_P 中成立.

6. 设 I, J 均为环 A 的理想, 并且 $I + J = A$. 证明 $I \bigcap J = IJ$.

7. 设 A 为环, $f \in A$. 证明 $f \in A^* \iff \forall\ P \in \operatorname{Spec} A$, $f \in A_P^* \iff \forall\ P \in \operatorname{Spec} A$, $f(P) \neq 0$.

8. 设 $\varphi : A \longrightarrow B$ 为环同态. 证明:

(i) 若 φ 为单同态, 则 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = \operatorname{Spec} A$.

(ii) 若 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = \operatorname{Spec} A$, 并且 A 为约化环, 则 φ 为单同态.

9. 设 A 为环. 证明 A 可写为两个子环的乘积 $\iff$ $\operatorname{Spec} A$ 不连通 (即 $\operatorname{Spec} A$ 可写为两个互不相交开子集的并).

10. 设 A 为环, 证明 A 为整环 $\iff$ A 为约化环, 并且 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的 (即 $\operatorname{Spec} A$ 不能写成两个真闭子集的并).

11. 设 A 为 Noether 环, 并且对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 局部化 A_P 均为整环. 证明 A 为有限个整环的乘积.

12. 设 A 为环, 证明 $A/\sqrt{(0)}$ 为约化环, 并且 $\operatorname{Spec}(A/\sqrt{(0)})$ 与 $\operatorname{Spec} A$ 同胚.

13. 设 A 为环. 证明 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的 $\iff$ $\sqrt{(0)}$ 是 A 的素理想.

14. 设 $I_1, I_2, \ldots$ 为环 A 中的无限个理想, 是否总有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} V(I_i) = V(\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i)$?

15. 设 I, J 为环 A 的理想, 证明

(i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(ii) 对任意 $n \geq 1$, $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$.

(iii) $\sqrt{I \bigcap J} = \sqrt{I} \bigcap \sqrt{J}$.

(iv) 若 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 $\sqrt{P} = P$.

16. 对如下环 A 中理想 I, 计算 $\sqrt{I}$:

(i) $A=\mathbb{Z},\ \ I=(12)$

(ii) $A=\mathbb{C}[x,y],\ \ I=(x,y^4)$.

17. 设 A 为 Noether 环, $X=\operatorname{Spec}A$. 我们称 X 的一个子集 Z 为局部闭子集, 如果对任意 $x\in Z$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U, 使得 $Z\cap U$ 为 U 的闭子集. 称 X 的子集 W 为**可构造子集**, 如果 W 可以写为有限个局部闭子集的并.

(i) 证明: X 的子集 Z 为局部闭子集 $\iff$ 存在 X 的开子集 U 和 X 的闭子集 F, 使得 $Z=U\cap F$.

(ii) 在欧式空间 $\mathbb{R}^2$ 中举出一个不是局部闭子集的可构造子集的例子.

(iii) 证明可构造子集的有限交, 有限并和补集均为可构造子集.

(iv) 设 W 为 X 的子集. 证明 W 为 X 的可构造子集 $\iff$ 存在 X 的闭集形成的有限降链

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset F_{n+1}=\varnothing,$$

以及 $F_i\setminus F_{i+1}$ 的稠密开子集 U_i, $i=1,\ldots,n$, 使得 $W=\bigcup\limits_{i=0}^{n}U_i$.

(v) 设 W 为 X 的可构造子集. 证明 W 包含其闭包 $\overline{W}$ 的一个稠密开子集.

(vi) 设 W 为 X 的子集. 证明 W 为 X 的可构造子集 $\iff$ $\forall\, x\in W$, W 包含 $\{x\}$ 在 X 中的闭包 $\overline{\{x\}}$ 的一个非空开子集.

(vii) 设 W 为 X 的可构造子集. 证明 W 为 X 的开子集 $\iff$ $\forall\, P\in\operatorname{Spec}A=X$, 对任意满足 $Q\subset P$ 的 A 的素理想 Q, 均有 $Q\in W$.

18. 设 G 为 $GL_n(\mathbb{C})$ 的有限子群. 对 $g\in G$, 对 $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$, 令 $gf\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 为如下多项式: $(gf)(x_1,\ldots,x_n)\coloneqq f((x_1,\ldots,x_n)g)$. 其中 $(x_1,\ldots,x_n)g$ 为行向量与 n 阶方阵的乘法. 这样给出了 G 在 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 上的作用. 令

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G\coloneqq\big\{f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\mid gf=f,\ \forall\, g\in G\big\}$$

为所有 G-不变多项式形成的 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 的子代数. 本习题的目标是通过以下步骤证明 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$ 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数, 即存在有限个元素 $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$, 使得 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G=\mathbb{C}[a_1,\ldots,a_m]$.

(i) 记 I 为 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$ 中的正次数齐次多项式在 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 中生成的理想. 证明: 存在正次数齐次多项式 $f_1,\ldots,f_k\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$, 使得 $I=(f_1,\ldots,f_k)$.

(ii) 证明: 任取正次数齐次多项式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$, 存在齐次多项式 $h_1,\ldots,h_k\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$, 使得 $f=h_1f_1+\cdots+h_kf_k$.

(iii) 证明: 任取正次数齐次多项式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$, 存在齐次多项式 $h_1,\ldots,h_k\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$, 使得 $f=h_1f_1+\cdots+h_kf_k$.

(iv) 证明 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G$ 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数.

注记 1.5.1 上述定理和证明是 Hilbert 给出的. Hilbert 基定理也是在证明这个定理的过程中提出的. 关于其更多的背景和历史, 可见 [7, Introduction]. 另一个不依赖域的特征的证明见第三章习题 12.

习题提示

17. (iv): 设 $W = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(Z_i \cap Y_i)$, 并且 Z_i 为不可约闭子集, Y_i 为开子集. 不妨设 $Z_1, \ldots, Z_m$ $(m \le n)$ 为 $F_1 \coloneqq \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_i$ 的所有不可约分支, 则对每个 $1 \le i \le m$, 存在 Z_i 的非空开子集 V_i, 使得 $V_i \subset W$, 并且 $V_i \cap Z_j = \varnothing, \forall\, 1 \le i \ne j \le m$. 令 $U_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, 则 $F_1 \setminus U_1$ 为 X 的闭子集, 并且 $W_1 = W \setminus U_1$ 包含在 $F_1 \setminus U_1$ 中. 将上面对 W 的讨论应用到 W_1 上, 可以继续得到 F_2, U_2, W_2. 不断进行下去, 利用 Noether 性可知有限步之后这个过程终止, 即对某个 N 有 $W_N = \varnothing$.

(vi): $\Longleftarrow$: 考虑 $\overline{W}$ 的不可约分解, 与 (iv) 的证明类似, 构造一系列递降的闭集.

(vii): $\Longleftarrow$: 考虑 U 的补集. 证明 $\overline{X \setminus U} = X \setminus U$.

18. (i): 利用 Hilbert 基定理.

(iii): 设 $f = h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k$ 并且 f, h_i $(1 \le i \le k)$ 均为 G-不变多项式. 对任意 $g \in G$, 通过 g 的作用得到

$$f = gf = (gh_1)(gf_1) + \cdots + (gh_k)(gf_k) = (gh_1)f_1 + \cdots + (gh_k)f_k.$$

再取平均得到

$$f = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} gf = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}(gh_1)f_1 + \cdots + \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}(gh_k)f_k.$$

而每个 $\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}(gh_i)$ 均为 G-不变多项式.

第二章 模及其局部化

模的概念比环更广, 很多熟知的结构都可以看作模, 如理想, 线性空间, 代数等. 而模的各种构造更加方便, 从而为我们处理很多代数对象提供了更具有弹性的结构.

2.1 基本概念与基本构造

定义 2.1.1 设 A 为环. 一个 A-**模** M 是指 M 为一个 Abel 群, 同时带一个 A 的作用

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

满足如下条件:

(i) $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, x_1, x_2 \in M,$

(ii) $(a_1 + a_2)x = a_1x + a_2x,\ \forall\, a_1, a_2 \in A,\ \forall\, x \in M,$

(iii) $(a_1a_2)x = a_1(a_2x),\ \forall\, a_1, a_2 \in A,\ \forall\, x \in M.$

(iv) $1x = x,\ \forall\, x \in M.$

不难看到, M 为 A-模也等价于 M 为一个 Abel 群, 同时指定了一个环同态 $A \to \mathrm{End}(M)$. 其中 $\mathrm{End}(M)$ 是指 M 作为 Abel 群的自同态环.

例 2.1.1

- 环 A 本身在乘法下可以看成 A-模. 更一般地, A 的理想均为 A-模.
- 设 B 为 A-代数, 则通过结构同态, A 可以作用到 B 上, 使得 B 成为 A-模. 一般地, 任何 B-模 M 均可用类似的方式看成 A-模.

- 设 V 为 k-线性空间, 设 $\varphi \in \mathrm{End}_k(V)$ 为 V 上的 k-线性变换, 则通过定义作用 $f(x)v := f(\varphi)(v)$, 可以将 V 看成 $k[x]$-模.

设 M, N 均为 A-模, 其作为 Abel 群的直和 $M \bigoplus N$ 在 A 的如下作用下也成为 A-模:

$$a(x_1, x_2) := (ax_1, ax_2),\ a \in A,\ x_1 \in M,\ x_2 \in N.$$

A-模 M 的一个子 Abel 群 N 称为子模, 如果 $ax \in N$, $\forall\, a \in A, x \in N$. 对 M 的子模 N, 商群 M/N 也是一个 A-模, 其中 A 的作用为 $a\bar{x} := \overline{ax}$. 我们称 M/N 为商模. 设 N, K 均为 M 的子模, 则 $N + K := \{x + y \mid x \in N,\ y \in K\}$ 也为 M 的子模.

对 A-模 M, 对 $x \in M$, $Ax := \{ax \mid a \in A\}$ 为 M 的子模, 称为 x 生成的子模. 一组元素 $x_1, \ldots, x_n$ 称为 M 的生成元, 如果 $M = \sum_{i=1}^n Ax_i$. 如果 M 存在有限个元素作为生成元, 则 M 称为**有限 A-模**.

A-模 M 的一个子集 S 称为一组基, 如果其满足如下两个条件:

(i) S 为生成元, 即 $\forall\, x \in M$, 存在有限个元素 $x_1, \ldots, x_n \in S$, 存在 $a_1, \ldots, a_n \in A$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

(ii) S 线性无关, 即对任意有限个 S 中的元素 $x_1, \ldots, x_n$, 对任意 $a_1, \ldots, a_n \in A$, 如果 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, 则 $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

与线性空间不同, 并不是所有 A-模均存在基 (比如 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模). 如果 A-模 M 存在一组基, 则称 M 为一个自由 A-模.

命题 2.1.1 (自由模的万有性质) 设 M 为自由 A-模, S 为一组基. 则对任意 A-模 N, 对任意映射 $f : S \to N$, 均存在唯一的 A-模同态 $\varphi : M \to N$, 使得 $\varphi|_S = f$.

证明 由自由模的定义, 对任意 $x \in M$, 存在 S 中的元素 $x_1, \ldots, x_n$, 以及 A 中的元素 $a_1, \ldots, a_n$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, 并且这样的表达式是唯一的. 令 $\varphi(x) := \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$, 即得到所求的模同态. 唯一性直接验证即可. □

下面的命题说明自由模的基所包含的元素个数与基的选取无关, 这是线性空间中类似命题的一个推广, 其证明也与线性空间情形相同. 该命题的另一个证明可见命题 2.2.3.

命题 2.1.2 设 M 为自由 A-模. 设 $e_1, \ldots, e_n \in M$ 和 $f_1, \ldots, f_m \in M$ 均为 M 的基. 则 $n = m$.

证明 如果 $n \neq m$, 不妨设 $n > m$. 由基的定义, 存在 A-系数的 $m \times n$ 矩阵 $P \in M_{m\times n}(A)$ 以及 $n \times m$ 矩阵 $Q \in M_{n\times m}(A)$, 使得有如下等式:

$$(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_m)P,$$
$$(f_1, \ldots, f_m) = (e_1, \ldots, e_n)Q.$$

由此得到 $(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)QP$. 因为 $e_1,\ldots,e_n$ 是 A-线性无关的, 我们得到 $QP=\mathrm{I}_n$ 为单位方阵. 取行列式得到 $\det(QP)=\det\mathrm{I}_n=1$. 由 Q 和 P 的形状 (Q 的行数大于列数, P 的列数大于行数), 与域上矩阵的证明类似, 或者利用下面的引理 2.1.1, 可以看到 $\det(QP)=0$. 这个矛盾说明 $n=m$. □

引理 2.1.1 设 A 为环, P 为 A 上的 $m\times n$ 矩阵, Q 为 A 上的 $n\times m$ 矩阵, 并且 $n>m$, 则 $\det(QP)=0$.

证明 设 $P=(a_{ij})$, $Q=(b_{kl})$. 考虑整系数多项式环

$$B\coloneqq\mathbb{Z}[x_{ij},y_{kl}\mid 1\le i,l\le m,1\le j,k\le n].$$

定义 B 上的 $m\times n$ 矩阵 $\tilde{P}=(x_{ij})$, 以及 $n\times m$ 矩阵 $\tilde{Q}=(y_{kl})$. 将 $\tilde{P}$ 和 $\tilde{Q}$ 看作 B 的分式域 $\mathrm{Frac}(B)$ 上的矩阵, 由域上矩阵的性质, 知 $\det(\tilde{Q}\tilde{P})=0$. 由于 B 为整环, $B\hookrightarrow\mathrm{Frac}(B)$ 为单同态, 故在 B 上也有等式 $\det(\tilde{Q}\tilde{P})=0$. 考虑环同态:

$$\begin{aligned}\varphi: B&\longrightarrow A\\ x_{ij}&\longmapsto a_{ij}\\ y_{kl}&\longmapsto b_{kl}\end{aligned}$$

容易看到有 $\det(QP)=\varphi(\det(\tilde{Q}\tilde{P}))=0$. □

对存在有限个元素 $e_1,\ldots,e_n$ 作为基的自由 A-模 M, 我们称基中元素的个数 n 为 M 的**秩**, 记为 $\mathrm{rank}(M)$. 由上面的命题 2.1.2, $\mathrm{rank}(M)$ 不依赖于基的选取.

两个 A-模 M 和 N 之间的一个 **A-模同态**是指一个映射 $\varphi: M\to N$, 使得 φ 为 Abel 群同态, 并且 $\varphi(ax)=a\varphi(x),\ \ \forall\ a\in A,\ \ x\in M$. 我们用 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 表示所有 M 到 N 的 A-模同态形成的集合, 我们总是赋予其在以下加法和 A 作用下的 A-模结构:

$$\begin{gathered}(\varphi_1+\varphi_2)(x)\coloneqq\varphi_1(x)+\varphi_2(x),\ \forall\ \varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{Hom}_A(M,N),\forall\ x\in M,\\ (a\varphi)(x)\coloneqq a\varphi(x),\ \forall\ \varphi\in\mathrm{Hom}_A(M,N),\forall\ a\in A,x\in M.\end{gathered}$$

对 A-模同态 $\varphi: M\to N$, 其核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 为 M 的子模, 像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 为 N 的子模, 余核 $\mathrm{Coker}\,\varphi=N/\mathrm{Im}\,\varphi$ 为 N 的商模.

定理 2.1.1 (同态基本定理) 设 $\varphi: M\to N$ 为 A-模的满同态, 则 φ 诱导了如下 A-模

同构:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\operatorname{Ker}\varphi} &\xrightarrow{\sim} N \\ \bar{x} &\longmapsto \overline{\varphi(x)} \end{aligned}$$

证明 上述映射在 Abel 群层面上为同构, 同时该映射与 A 的作用交换, 从而为模同构. □

推论 2.1.1 设 N, K 均为 A-模 M 的子模, 则有如下的模同构:

$$\begin{aligned} \frac{N}{N \bigcap K} &\xrightarrow{\sim} \frac{N+K}{K} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

证明 验证该同态是满的, 并且其核为 $N \bigcap K$ 即可. □

推论 2.1.2 设 $K \subset N \subset M$ 为 A-模, 则有模同构:

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &\longrightarrow \frac{M/K}{N/K} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

证明 验证该同态是满的, 并且其核为 N 即可. □

命题 2.1.3 设 N 为 A-模 M 的子模, 则 M/N 的子模与 M 的包含 N 的子模一一对应:

$$\begin{aligned} \big\{K \mid K \text{ 为} M \text{ 的子模}, N \subset K \subset M\big\} &\xrightarrow{1:1} \big\{M/N \text{ 的子模}\big\} \\ K &\longmapsto K/N \end{aligned}$$

证明 记 $\pi : M \to M/N$ 为商同态. 则对 M/N 的每个子模 L, 对应 $L \mapsto \pi^{-1}(L)$ 给出了相应的逆映射. □

与环的局部化类似, 我们可以构造模的局部化. 设环 A 的子集 S 为一个乘法子集, 设 M 为 A-模. 令

$$\tilde{M} = \big\{(x,s) | x \in M,\ s \in S\big\}.$$

考虑 $\tilde{M}$ 上的关系 $\sim$: $(x, s_1) \sim (y, s_2) \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $(xs_2 - ys_1)s = 0$. 可以验证这是 $\tilde{M}$ 上的等价关系. 记商集合 $\tilde{M}/\sim$ 为 M_S 或 $S^{-1}M$, 并将 (x, s) 代表的 M_S 中元素记为 $\frac{x}{s}$. 这样在 M_S 中, $\frac{x}{s_1} = \frac{y}{s_2} \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $(xs_2 - ys_1)s = 0$. 在

M_S 中, 通过如下方式定义加法和 A_S 的作用, 使其成为环:

$$\begin{aligned} \frac{x}{s_1}+\frac{y}{s_2} &:= \frac{xs_2+ys_1}{s_1s_2},\ x,y\in M,\ s_1,s_2\in S,\\ \frac{a}{s_1}\cdot\frac{x}{s_2} &:= \frac{ax}{s_1s_2},\ a\in A,\ x\in M,\ s_1,s_2\in S. \end{aligned}$$

容易验证, 上述定义不依赖于代表元的选取, 从而是良好的. 并且通过这样定义的加法和 A_S 作用, M_S 成为 A_S-模, 称为 M 在 S 处的局部化. 对例 1.3.1 所列的三种特殊乘法子集 S, 我们有时也将对应的局部化 M_S 分别记作 M_f, M_P 和 $M_{\mathfrak{p}}$.

通过自然环同态 $A\to A_S$, M_S 也可看作 A-模, 并且映射 $i: x\mapsto \frac{x}{1}$ 是一个 M 到 M_S 的 A-模同态. 容易看到, 环的局部化 A_S 作为 A_S-模, 与 A 作为 A-模的局部化相同, 这说明模的局部化构造与前面环的局部化是相容的.

命题 2.1.4 (局部化的万有性质) 设 M 为 A-模, S 为 A 的乘法子集. 对任意 A_S-模 N, 对任意 A-模同态 $\varphi: M\to N$, 均存在唯一的 A_S-模同态 $\bar\varphi: M_S\to N$, 使得 $\varphi=\bar\varphi\circ i$. 用交换图表表示如下:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ M_S \arrow[r, dashed, "\exists!\ \bar\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

证明 对 $x/s\in M_S$, 令 $\bar\varphi(x/s)=s^{-1}\varphi(x)$ 即可. 其余易验证. □

与环的情形类似, 有如下判断模中一个元素为零的局部化方法.

命题 2.1.5 设 M 为 A-模. 设 $s\in M$. 则 $s=0 \iff$ 对任意 $P\in\operatorname{Spec}A$, s 在 M_P 中均为 0.

证明 只需证 $\Longleftarrow$. 假设对任意 $P\in\operatorname{Spec}A$, s 在 M_P 中均为 0. 考虑 s 的零化理想

$$\operatorname{ann}(s) := \{a\in A \mid as=0\}.$$

只需证明 $\operatorname{ann}(s)=A$. 如果 $\operatorname{ann}(s)$ 为 A 的真理想, 则可以找到 A 的极大理想 m 包含 $\operatorname{ann}(s)$. 由于 s 在 M_m 中为 0, 根据定义可知存在 $a\in A\setminus m$, 使得 $as=0$. 从而 $a\in\operatorname{ann}(s)$. 这与 $\operatorname{ann}(s)\subset m$ 矛盾! 故 $\operatorname{ann}(s)=A$, 即得 $s=0$. □

2.2 张量积

2.2.1 模的张量积

定义 2.2.1 设 M, N, K 为 A-模, 一个映射 $f : M \times N \to K$ 称为 (A-) 双线性映射, 如果其满足:

(i) $f(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1f(x_1, y) + a_2f(x_2, y)$,

(ii) $f(x, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1f(x, y_1) + a_2f(x, y_2)$.

其中 $a_i \in A,\ x, x_i \in M,\ y, y_i \in N$.

对给定的 A-模 M, N, 其张量积在某种意义上给出了所有从 $M \times N$ 出发的双线性映射. 具体构造为: 令 $\widetilde{M \times N}$ 为以 $M \times N$ 中的元素作为基生成的自由 A-模. 考虑 $\widetilde{M \times N}$ 中的如下两个集合:

$$
\begin{aligned}
S_1 &\coloneqq \big\{(a_1x_1 + a_2x_2, y) - a_1(x_1, y) + a_2(x_2, y) \mid a_i \in A,\ x_i \in M,\ y \in N\big\},\\
S_2 &\coloneqq \big\{(x, a_1y_1 + a_2y_2) - a_1(x, y_1) + a_2(x, y_2) \mid a_i \in A,\ x \in M,\ y_i \in N\big\}.
\end{aligned}
$$

设 R 为 $S_1 \bigcup S_2$ 生成的 $\widetilde{M \times N}$ 的子模, 令 $M \otimes_A N \coloneqq \widetilde{M \times N}/R$ 为商模, 称为 M 和 N 的**张量积**. 在环 A 明确的情况下我们也将 $M \otimes_A N$ 简记为 $M \otimes N$. 对 $x \in M$, $y \in N$, 我们记 $x \otimes y \in M \otimes_A N$ 为 (x, y) 在自然的商映射 $\widetilde{M \times N} \to M \otimes_A N$ 下的像. 容易看到, $\pi : M \times N \to M \otimes_A N$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ 是一个双线性映射. 其具有如下万有性质:

命题 2.2.1 (模的张量积的万有性质) 设 M, N 为 A-模. 则对任意 A-模 K 以及任意双线性映射 $f : M \times N \to K$, 均存在唯一的 A-模同态 $\bar{f} : M \otimes_A N \to K$, 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$. 用交换图表表示为:

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
M \otimes_A N \arrow[r, dashed, "\bar{f}", "\exists!"'] & K
\end{tikzcd}
$$

证明 对 $x \in M$, $y \in N$, 定义 $\bar{f}(x \otimes y) = f(x, y)$, 根据 $M \otimes_A N$ 的构造可以验证 $\bar{f}$ 是良好定义的. 其它均可直接验证. □

根据万有性质, 为了构造从 $M \otimes_A N$ 出发的模同态, 我们只需构造从 $M \times N$ 出发的双线性映射, 其本质是在万有性质中统一地证明了定义的良好性, 从而在每个具体情形不用再重新验证. 下面命题的证明说明了万有性质的用法.

命题 2.2.2 设 A 为环, $M, N, L, N_i (i \in I)$ 为 A-模, 则有如下模同构:

(i) $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.

(ii) $(M \otimes_A N) \otimes_A L \simeq M \otimes_A (N \otimes_A L)$.
(iii) $M \otimes_A (A/I) \simeq M/IM$, 其中 I 为 A 的理想.
(iv) $M \otimes_A A \simeq M$.
(v) $M \otimes_A (\bigoplus_{i \in I} N_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$.

证明 (i): 由张量积的万有性质, 双线性映射 $M \times N \to N \otimes_A M$, $(x, y) \to y \otimes x$ 诱导模同态 $\varphi : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$. 同理可得模同态 $\psi : N \otimes_A M \to M \otimes_A N$. 易验证在形如 $x \otimes y$ 的元素上, $\varphi \circ \psi$ 与 $\psi \circ \varphi$ 均为恒等映射. 由于所有形如 $x \otimes y$ 的元素为生成元, 故 φ 和 ψ 为互逆的模同态, 从而给出同构.

(ii): 对每个 $z \in L$, 考虑双线性映射 $f_z : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_A L)$, $(x, y) \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$. 由此诱导同态 $\varphi_z : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_A L)$. 再考虑双线性映射 $(M \otimes_A N) \times L \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_A L)$, $(t, z) \longmapsto \varphi_z(t)$. 该双线性映射诱导同态 $(M \otimes_A N) \otimes_A L \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_A L)$, $(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$. 同理可构造同态 $M \otimes_A (N \otimes_A L) \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A L$, $x \otimes (y \otimes z) \longmapsto (x \otimes y) \otimes z$. 在生成元上验证即知上述两个同态互逆.

(iii): 与 (i) 类似, 由张量积的万有性质可以构造模同态 $M \otimes_A (A/I) \to M/IM$, $x \otimes \bar{a} \mapsto \overline{ax}$. 另一方面, 由定理 2.1.1 (商的万有性质) 我们有模同态 $M/IM \to M \otimes_A (A/I)$, $\bar{x} \mapsto x \otimes \bar{1}$. 通过在生成元上验证, 可知这两个模同态互逆, 从而给出所要的模同构.

(iv) 为 (iii) 在 $I = 0$ 时的推论.

(v): 与前面类似, 我们有良好定义的模同态 $M \otimes_A (\bigoplus_{i \in I} N_i) \to \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$, $x \otimes (y_i) \mapsto (x \otimes y_i)$, 以及反方向的模同态 $(x \otimes y_i) \mapsto x \otimes (y_i)$. 易验证这两个同态互逆, 从而给出所要的模同构. □

现在我们可以借助张量积给出命题 2.1.2 的另一个证明.

命题 2.2.3 设 M 为有限 A-模, 并且 M 为自由模. 则 M 的任何一组基中的元素个数有限, 且任何两组基中包含的元素个数相等.

证明 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 M 的一组生成元, 则存在满同态 $A^n \xrightarrow{\varphi} M$. 任取 A 的一个极大理想 m, 令 $k = A/m$. 则 $k^n = A^n \otimes_A k \xrightarrow{\varphi \otimes 1} M \otimes_A k = M/mM$ 为 k-线性空间的满同态. 再由 $(\bigoplus_{i \in I} A) \otimes_A k \simeq \bigoplus_{i \in I} k$ 知 M 的任意一组基也为 M/mM 的 k-线性空间基. 由此得到 M 的任意基包含的元素个数等于 $\dim_k M/mM \leq n$. □

设 B 为 A-代数, M 为 A-模. 由张量积的万有性质, 对 $b \in B$, 映射 $x \otimes b_1 \mapsto x \otimes (bb_1)$ 给出了一个良好定义的 $M \otimes_A B$ 到自身的 A-模同态. 通过这个模同态, 环 B 作用到 $M \otimes_A B$ 上, 并且在这个作用下 $M \otimes_A B$ 成为 B-模. 以下运算中的“消去”性质经常用到.

命题 2.2.4 设 B 为 A-代数, M 为 A-模, N 为 B-模. 则有 B-模同构:

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \simeq M \otimes_A N.$$

证明 由张量积的万有性质得到良好定义的模同态 $(M \otimes_A B) \otimes_B N \to M \otimes_A N$, $(x \otimes b) \otimes y \mapsto x \otimes (by)$ 其中 $x \in M$, $b \in B$, $y \in N$. 同理有反方向的同态 $M \otimes_A N \to (M \otimes_A B) \otimes_B N$, $x \otimes y \mapsto (x \otimes 1) \otimes y$. 易验证这两个同态互逆, 从而给出所要的模同构. □

下面的命题表明, 我们可以用张量积和环的局部化来得到模的局部化.

命题 2.2.5 设 M 为 A-模, S 为 A 的一个乘法子集. 则有 A_S-模同构:

$$M_S \simeq M \otimes_A A_S.$$

证明 M_S 到 $M \otimes_A A_S$ 的同态由 $\frac{x}{s} \mapsto x \otimes \frac{1}{s}$ 给出. $M \otimes_A A_S$ 到 M_S 的同态由 $x \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{ax}{s}$ 给出. □

2.2.2 代数的张量积

设 B, C 均为 A-代数. 我们在 $B \otimes_A C$ 上赋予一个 A-代数结构. 首先定义乘法. 对 $b \in B$, $c \in C$, 双线性映射 $B \times C \to B \otimes_A C$, $(b_1, c_1) \mapsto (b_1 b) \otimes (c_1 c)$ 诱导了 A-模同态 $\varphi_{b,c} : B \otimes_A C \to B \otimes_A C$. 对 $x \in B \otimes_A C$, 双线性映射 $B \times C \mapsto B \otimes_A C$, $(b, c) \mapsto \varphi_{b,c}(x)$ 诱导了 A-模同态 $\psi_x : B \otimes_A C \to B \otimes_A C$. 对于 $x, y \in B \otimes_A C$, 我们定义乘法 $xy \coloneqq \psi_x(y) \in B \otimes_A C$. 可以看到这个乘法对于 x 和 y 是双线性的, 并且对于 $b, b_1 \in B$, $c, c_1 \in C$, 有 $(b \otimes c)(b_1 \otimes c_1) = (bb_1) \otimes (cc_1)$. 在这个乘法下, $B \otimes_A C$ 成为环, 并且在结构同态 $A \to B \otimes_A C$, $a \mapsto a \otimes 1 = 1 \otimes a = a(1 \otimes 1)$ 下成为一个 A-代数. 并且 $i_1 : B \otimes_A C$, $b \mapsto b \otimes 1$ 以及 $i_2 : C \to B \otimes_A C$, $c \mapsto 1 \otimes c$ 均为环同态. 作为 A-代数, $B \otimes_A C$ 有如下万有性质.

命题 2.2.6 (代数张量积的万有性质) 设 B, C 均为 A-代数, 结构同态为 $\varphi_1 : A \to B$, $\varphi_2 : A \to C$. 则

(1) $i_1 \circ \varphi_1 = i_2 \circ \varphi_2$.

(2) 对任意环 D 以及环同态 $\psi_1 : B \to D$ 和 $\psi_2 : C \to D$, 如果 $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, 那么存在唯一的环同态 $\psi : B \otimes_A C \to D$, 使得 $\psi_1 = \psi \circ i_1$, $\psi_2 = \psi \circ i_2$.

用交换图表表示为:

$$\begin{tikzcd}
D & & \\
& B \otimes_A C \arrow[ul, dashed, "\exists!\psi"'] & C \arrow[l, "i_2"] \arrow[ull, "\psi_2"'] \\
& B \arrow[u, "i_1"] \arrow[uul, "\psi_1"] & A \arrow[l, "\varphi_1"] \arrow[u, "\varphi_2"']
\end{tikzcd}$$

证明 (1): 直接验证即可.

(2): 通过同态 $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, D 成为 A-代数. A-模的双线性映射 $B \times C \to D$, $(b, c) \to \psi_1(b)\psi_2(c)$ 诱导模同态 $\psi : B \otimes_A C \to D$, 满足 $\psi(b \otimes c) = \psi_1(b)\psi_2(c)$. 不难看到 ψ 为环同态. 其余直接验证即可. □

下面分析素谱空间 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$. 首先注意到我们可以通过 $\operatorname{Hom}(A, k)$ 来"探测"$\operatorname{Spec} A$ 中的点, 即有如下命题.

命题 2.2.7 设 A 为环. 则

(1) 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均存在域 L 以及环同态 $\varphi : A \to L$, 使得 $P = \operatorname{Ker} \varphi$.

(2) 设 L 为域, $\varphi : A \to L$ 为环同态. 设 $P = \operatorname{Ker} \varphi$. 则 $P \in \operatorname{Spec} A$, 并且存在唯一的域嵌入 $\psi : k(P) \to L$ 使得如下图表交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ k(P) \arrow[r, dashed, "\exists ! \psi"'] & L \end{tikzcd}$$

其中 $\iota : A \to k(P) = \frac{A_P}{PA_P}$ 为局部化和商诱导的自然同态.

证明 (1): 取 $L = k(P)$, φ 为自然同态即可.

(2): 由自然同态 ι 的定义以及局部化和商的万有性质即得. □

命题 2.2.8 设 B, C 均为 A-代数, 结构同态为 $\varphi_1 : A \to B$, $\varphi_2 : A \to C$. 则交换图表

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A C & C \arrow[l, "i_2"'] \\ B \arrow[u, "i_1"] & A \arrow[l, "\varphi_1"] \arrow[u, "\varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

诱导了素谱空间映射的交换图表

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \arrow[r, "i_2^*"] \arrow[d, "i_1^*"'] & \operatorname{Spec} C \arrow[d, "\varphi_2^*"] \\ \operatorname{Spec} B \arrow[r, "\varphi_1^*"'] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

并且由此诱导如下集合之间的映射:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(B \otimes_A C) &\xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C \coloneqq \left\{ (P_1, P_2) \in \operatorname{Spec} B \times \operatorname{Spec} C \mid \varphi_1^*(P_1) = \varphi_2^*(P_2) \right\} \\ P &\longmapsto (i_1^*(P), i_2^*(P)) \end{aligned}$$

我们有:

(i) φ 为满射.

(ii) 当 $A \xrightarrow{\varphi_1} B$ 满足如下条件时, φ 为单射 (从而为双射):

$$\text{对任意}P_1 \in \operatorname{Spec} B,\ \text{令}P = P_1 \cap A,\ \text{则}\varphi_1\text{诱导剩余类域的同构}k(P) \xrightarrow{\sim} k(P_1).$$

证明 (i): 设 $P_1 \in \operatorname{Spec} B$, $P_2 \in \operatorname{Spec} C$, 并且 $\varphi_1^*(P_1) = \varphi_2^*(P_2) = P \in \operatorname{Spec} A$. 则有剩余类域之间的同态 $k(P) \to k(P_1)$, $k(P) \to k(P_2)$. 显然张量积 $k(P_1) \otimes_{k(P)} k(P_2)$ 不是零环. 取 $k(P_1) \otimes_{k(P)} k(P_2)$ 的一个极大理想 m, 令 $L \coloneqq k(P_1) \otimes_{k(P)} k(P_2)/m$, 则有域嵌入的交换图表:

$$\begin{tikzcd} L & k(P_2) \arrow[l] \\ k(P_1) \arrow[u] & k(P) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

通过复合自然同态 $B \to k(P_1)$ 和 $C \to k(P_2)$, 我们得到同态 $B \to L$ 和 $C \to L$. 不难验证以下图表交换:

$$\begin{tikzcd} L & C \arrow[l] \\ B \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

从而由张量积的万有性质 (命题 2.2.6) 得到同态 $B \otimes_A C \to L$, 设 P 为这个同态的核, 则由该同态的构造可以看到 P 在映射 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \to \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ 下的像即为 (P_1, P_2).

(ii): 设 $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$, 并且在映射

$$\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \to \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$$

下的像均为 (P_1, P_2). 我们需要证明 $Q_1 = Q_2$. 设 $P = i_1^*(P_1) = i_2^*(P_2) \in \operatorname{Spec} A$. 我们有如下域嵌入的交换图表:

$$\begin{tikzcd} & k(Q_2) & k(P_2) \arrow[l] \arrow[dll] \\ k(Q_1) & & \\ k(P_1) \arrow[u] \arrow[uur] & & k(P) \arrow[ll] \arrow[uu] \end{tikzcd} \tag{2.2–1}$$

跟前面类似, 通过作张量积再商极大理想的方式, 我们可以找到一个域 L, 使得有下面

的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
L & k(Q_2) \arrow[l] \\
k(Q_1) \arrow[u] & k(P_2) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由条件, φ_1 诱导同构 $k(P) \xrightarrow{\sim} k(P_1)$, 从而可知交换图表(2.2–1) 扩充为下面的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
L & k(Q_2) \arrow[l] & k(P_2) \arrow[l] \arrow[dll] \\
k(Q_1) \arrow[u] & & \\
k(P_1) \arrow[u] \arrow[uur] & & k(P) \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

同态 $k(P_1) \to L$ 诱导了同态 $B \to L$, 同态 $k(P_2) \to L$ 诱导了同态 $C \to L$. 记 $\psi_i : B \otimes_A C \to L$ 为 $k(Q_i) \to L$ 诱导的同态, $i = 1, 2$, 则有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
L & & \\
& B \otimes_A C \arrow[ul, shift left, "\psi_2"'] \arrow[ul, shift right, "\psi_1"] & C \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& B \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由张量积万有性质中的唯一性即知 $\psi_1 = \psi_2$, 从而 $Q_1 = \operatorname{Ker}\psi_1 = \operatorname{Ker}\psi_2 = Q_2$. □

作为推论, 我们得到命题 1.3.7 关于纤维刻画的另一个证明.

推论 2.2.1 设 $\varphi : A \to B$ 为环同态, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则素谱空间映射 $\varphi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 在点 P 处的纤维为

$$\varphi^{*-1}(P) \simeq \operatorname{Spec}(B \otimes_A k(P)) \simeq \operatorname{Spec}(B_P/PB_P).$$

证明 注意到 $\operatorname{Spec} k(P)$ 为单点集, 故 $\varphi^{*-1}(P) \simeq \operatorname{Spec} k(P) \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$. 又因为 $A \longrightarrow k(P)$ 显然诱导剩余类域的同构, 从而可以应用命题 2.2.8 (ii) 得到双射 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k(P)) \simeq \operatorname{Spec} k(P) \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$. 最后注意到环 $B \otimes_A k(P)$ 与 B_P/PB_P 同构即可. □

注记 2.2.1 以下两种情况满足命题 2.2.8 (ii) 的条件:

(1) $B = A/I$ 为商环, φ_1 为商同态.

(2) $B = A_S$ 为 A 的局部化, φ_1 为 A 到局部化的自然同态.

注意命题 2.2.8 中给出的素谱空间映射 φ 一般不是单射. 下面为两个例子.

例 2.2.1 (1) 设 $A = k$ 为域, $B = k[x]$, $C = k[y]$ 为一元多项式环. 则 $B \otimes_A C \simeq k[x, y]$. 考虑 $k[x, y]$ 中的两个素理想 $Q_1 = (x-y)$ 和 $Q_2 = (0)$. 则对 $i = 1, 2$, 均有 $Q_i \cap B = (0)$, $Q_i \cap C = (0)$. 这说明 Q_1, Q_2 在映射 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ 下的像相同.

(2) 设 $A = \mathbb{R}$ 为实数域, $B = C = \mathbb{C}$ 为复数域, 则

$$B \otimes_A C = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \frac{\mathbb{C}[x]}{(x^2+1)} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

由此知 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ 为两个点的集合, 而 $\operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ 为单点集.

2.3 函子性与正合性

设 M 和 N 为 A-模, 则 $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ 在加法运算 $(\varphi_1+\varphi_2)(x) \coloneqq \varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 以及 A 的作用 $(a\varphi)(x) \coloneqq a\varphi(x)$ 下也为 A-模. 我们将算符 $\operatorname{Hom}_A(\cdot, \cdot)$ 看作两个变量的函数, 这样对固定的 M, 符号 $\operatorname{Hom}_A(M, \cdot)$ 将每个 A-模 N 变为 A-模 $\operatorname{Hom}_A(M, N)$. 同时对 A-模同态 $f : N_1 \to N_2$, 有同态 $\operatorname{Hom}_A(M, N_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, N_2)$, $\varphi \mapsto f \circ \varphi$. 利用范畴语言, 这是说 $\operatorname{Hom}_A(M, \cdot)$ 是一个从 A-模范畴到 A-模范畴的共变函子. 同样地, 固定另一个变量 N, 我们看到 $\operatorname{Hom}_A(\cdot, N)$ 会将每个 A-模 M 变为 A-模 $\operatorname{Hom}_A(M, N)$, 并且对模同态 $f : M_1 \to M_2$, 有诱导的模同态 $\operatorname{Hom}_A(M_2, N) \to \operatorname{Hom}_A(M_1, N)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. 这样得到反变函子 $\operatorname{Hom}_A(\cdot, N)$.

把上面的讨论过程应用到张量积运算 $\cdot \otimes_A \cdot$ 上, 我们看到对 A-模 M, 运算 $M \otimes_A \cdot$ 把每个 A-模 N 变为 A-模 $M \otimes_A N$, 同时将模同态 $f : N_1 \to N_2$ 变为 $\mathrm{id} \otimes f : M \otimes_A N_1 \to M \otimes_A N_2$, $x \otimes y \mapsto x \otimes f(y)$. 这样 $M \otimes_A \cdot$ 为从 A-模范畴到 A-模范畴的共变函子. 同理有共变函子 $\cdot \otimes_A M$. 但由于 $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$, 函子 $M \otimes_A \cdot$ 与 $\cdot \otimes_A M$ 是同构的.

类似地, 固定环 A 的乘法子集 S, 则在 S 处作局部化这个运算将每个 A-模 M 变为 A_S-模 M_S, 并且将 A-模同态 $f : M \to N$ 变为 A_S-模同态 $M_S \to N_S$, $\frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s}$. 这样在 S 处作局部化为一个从 A-模范畴到 A_S-模范畴的共变函子.

为了分析上述几种运算之间的关系, 我们还需要引入复形与正合列的概念.

定义 2.3.1 A-模同态给出的一个序列 $\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i+1} \to \cdots$ 称为 A-模**复形**, 如果对每个 i, 均有 $d_i \circ d_{i-1} = 0$, 即 $\operatorname{Im} d_{i-1} \subset \operatorname{Ker} d_i$. 称上述复形在 M_i 处**正合**, 如果等式 $\operatorname{Im} d_{i-1} = \operatorname{Ker} d_i$ 成立. 如果一个复形在每个 M_i 处均正合, 则称该复形为**正合列**.

形如 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 的正合列称为**短正合列**. 形如 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ 的正合列称为**左正合列**. 形如 $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 的正合列称为**右正合列**. 不难看到, $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为短正合列等价于 φ 为单同态, ψ 为满同态, 同时 φ 的像等于 ψ 的核. 同样地, $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为左正合列等价于 φ 为单同态, 并且 φ 的像等于 ψ 的核. 而 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列等价于 ψ 为满同态, 并且 φ 的像等于 ψ 的核.

命题 2.3.1 设有如下 A-模同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 \end{array}$$

(i) 如果 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 均为短正合列, 并且 f_1 和 f_3 均为同构, 则 f_2 也为同构.

(ii) 如果 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ 和 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$ 均为左正合列, 并且 f_2 和 f_3 均为同构, 则 f_1 也为同构.

(iii) 如果 $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 和 $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 均为右正合列, 并且 f_1 和 f_2 均为同构, 则 f_3 也为同构.

证明 图表追踪即得. 作为演示, 我们只验证 (i) 中 f_2 的满射性. 给定 $n_2 \in N_2$, 我们希望找到 $m_2 \in M_2$, 使得 $f_2(m_2) = n_2$. 为此, 考虑 n_2 在 N_3 中的像 n_3, 由 f_3 为满同态, 可以找到 $m_3 \in M_3$, 使得 $f_3(m_3) = n_3$. 由 $M_2 \to M_3$ 为满同态, 可以取 $m_2' \in M_2$ 为 m_3 的一个原像. 这样由图表的交换性可以看到 $\delta_2 \coloneqq n_2 - f(m_2') \in N_2$ 映到 N_3 中为 0. 再由 $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$ 在 N_2 处正合, 可以找到 δ_2 在 N_1 中的一个原像 n_1. 进而由 f_1 为满同态又可以找到 n_1 在 M_1 中的一个原像 m_1. 记 m_1 在 M_2 中的像为 m_2''. 令 $m_2 \coloneqq m_2' + m_2''$, 则由图表的交换性可以验证 $f_2(m_2) = n_2$. 从而 f_2 为满同态. □

关于上述 Hom, $\otimes$ 及局部化各函子的正合性, 我们总结如下:

命题 2.3.2 设 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为 A-模复形. 设 M, N 为 A-模, S 为 A 的一个乘法子集. 则有:

(i) 局部化为正合函子, 即 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 在 M_2 处正合 $\Longrightarrow$ $S^{-1}M_1 \xrightarrow{\varphi_S} S^{-1}M_2 \xrightarrow{\psi_S} S^{-1}M_3$ 在 $S^{-1}M_2$ 处正合.

(ii) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为左正合列 $\Longleftrightarrow$ 对任意 A-模 M, 均有 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M_1) \xrightarrow{\varphi\circ\cdot} \mathrm{Hom}_A(M, M_2) \xrightarrow{\psi\circ\cdot} \mathrm{Hom}_A(M, M_3)$ 为左正合列.

(iii) $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列 $\Longleftrightarrow$ 对任意 A-模 N, 均有 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\cdot\circ\psi} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\cdot\circ\varphi} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$ 为左正合列.

(iv) $M \otimes_A \cdot$ 为右正合函子, 即 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列 $\Longrightarrow$ $M \otimes_A M_1 \xrightarrow{1\otimes\varphi} M \otimes_A M_2 \xrightarrow{1\otimes\psi} M \otimes_A M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列. 其中 $1 \otimes \varphi$

为同态 $x\otimes y\mapsto x\otimes\varphi(y)$. $1\otimes\psi$ 的含义同理.

证明 (i): 直接验证即可.

(ii): $\Longrightarrow$ 直接验证即可. 现在证明 $\Longleftarrow$. 为证明 φ 为单同态, 令 $M=\operatorname{Ker}\varphi$, 由条件得到 $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\varphi,M_1)\xrightarrow{\varphi\circ}\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\varphi,M_2)$ 为单同态. 考虑自然的包含同态 $i\in\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\varphi,M_1)$, 由 $\varphi\circ i=0$ 知 $i=0$, 从而 $\operatorname{Ker}\varphi=0$, 即 φ 为单同态. 由 $M_1\xrightarrow{\varphi}M_2\xrightarrow{\psi}M_3$ 为 A-模复形知 $\psi\circ\varphi=0$, 即 $\operatorname{Im}\varphi\subset\operatorname{Ker}\psi$. 再令 $M=\operatorname{Ker}\psi$, 由条件知 $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\psi,M_1)\xrightarrow{\varphi\circ}\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\psi,M_2)\xrightarrow{\psi\circ}\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\psi,M_3)$ 正合. 考虑自然的包含同态 $i\in\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\psi,M_2)$, 则 $\psi\circ i=0$, 从而由正合性知存在 $f\in\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ker}\psi,M_1)$, 使得 $i=\varphi\circ f$. 由此知 $\operatorname{Ker}\psi\subset\operatorname{Im}\varphi$. 从而 $\operatorname{Ker}\psi=\operatorname{Im}\varphi$. 这样就完成了 $\Longleftarrow$ 的证明.

(iii): 与 (ii) 类似, 只需证明 $\Longleftarrow$. 要证明 ψ 为满同态, 我们取 $N=\operatorname{Coker}\psi=M_3/\operatorname{Im}\psi$ 以及自然的商同态 $\pi\in\operatorname{Hom}_A(M_3,\operatorname{Coker}\psi)$. 要证明 $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Ker}\psi$, 我们可以取 $N=\operatorname{Coker}\varphi$ 以及自然的商同态 $\pi\in\operatorname{Hom}_A(M_2,\operatorname{Coker}\varphi)$. 再与 (ii) 类似进行推理即可.

(iv): 由 (iii), 任取 A-模 N, 只需证明 $0\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M\otimes_A M_3,N)\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M\otimes_A M_2,N)\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M\otimes_A M_1,N)$ 为左正合列. 由张量积的万有性质, 对 $i=1,2,3$, 有自然同构 $\operatorname{Hom}_A(M\otimes_A M_i,N)\simeq\operatorname{Hom}_A(M_i,\operatorname{Hom}_A(M,N))$. 从而又只需证明 $0\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M_3,\operatorname{Hom}_A(M,N))\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M_2,\operatorname{Hom}_A(M,N))\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M_1,\operatorname{Hom}_A(M,N))$ 为左正合列. 而这由条件中的右正合性以及 (ii) 即得. □

注记 2.3.1 上述命题中的 (iv) 还可以证明如下: 显然 $(1\otimes\psi)\circ(1\otimes\varphi)=0$. 双线性映射

$$\begin{aligned} f: M\times M_3 &\longrightarrow (M\otimes_A M_2)/(1\otimes\varphi)(M\otimes M_1)\\ (x,x_3)&\longmapsto \overline{x\otimes x_2}\end{aligned}$$

是良好定义的, 其中 $x_2\in M_2$ 为任意满足 $\psi(x_2)=x_3$ 的元素. 由张量积的万有性质, 双线性映射 f 诱导了模同态 $\bar f: M\otimes_A M_3\longrightarrow(M\otimes_A M_2)/(1\otimes\varphi)(M\otimes M_1)$. 通过在生成元上直接验证即得 $\bar f$ 与 $\overline{1\otimes\psi}:(M\otimes_A M_2)/(1\otimes\varphi)(M\otimes M_1)\longrightarrow M\otimes_A M_3$ 互为逆映射, 从而为互逆的同构.

设 M 为 A-模, N 为 M 的一个子模. 设 S 为 A 的一个乘法子集. 由于局部化为正合函子, 自然的包含同态 $N\hookrightarrow M$ 在局部化后得到的同态 $N_S\hookrightarrow M_S$ 还是单同态. 我们以后总是通过这个单同态将 N_S 看作 M_S 的子模. 特别地, 设 I 为环 A 的理想, 我们将 I_S 看作 A_S 的子模 (或理想). 容易验证有 A_S 中理想的等式 $I_S=IA_S$, 其中 IA_S 为 I 在环 A_S 中生成的理想.

命题 2.3.3 (商与局部化交换) 设 M 为 A-模, N 为 M 的一个子模. 设 S 为 A 的一个乘法子集. 则有 A_S-模同构 $M_S/N_S\simeq(M/N)_S$.

证明 考虑短正合列 $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$, 作局部化后得到如下交换图表:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_S \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"', "\wr"] & M_S \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"', "\wr"] & M_S/N_S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_S \arrow[r] & M_S \arrow[r] & (M/N)_S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由局部化为正合函子知 $0 \longrightarrow N_S \longrightarrow M_S \longrightarrow (M/N)_S \longrightarrow 0$ 为短正合列. 再由命题 2.3.1 即知 $M_S/N_S \to (M/N)_S$ 为同构. □

命题 2.3.4 A-模复形 $N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} K$ 在 M 处正合 $\iff$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均有局部化 $N_P \xrightarrow{\varphi_P} M_P \xrightarrow{\psi_P} K_P$ 在 M_P 处正合.

证明 由于局部化为正合函子, 不难看到有模同构

$$\operatorname{Im}\varphi_P \simeq (\operatorname{Im}\varphi)_P, \quad \operatorname{Ker}\psi_P \simeq (\operatorname{Ker}\psi)_P.$$

进而有 $\operatorname{Ker}\psi_P/\operatorname{Im}\varphi_P \simeq (\operatorname{Ker}\psi/\operatorname{Im}\varphi)_P$. 再由命题 2.1.5 即得. □

由于单同态, 满同态以及同构均可以由正合列描述, 我们得到如下常用的推论.

推论 2.3.1 设 $\varphi: M \to N$ 为 A-模同态. 则 φ 为单同态 (满同态, 同构) $\iff$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 局部化之后的同态 $\varphi_P: M_P \to N_P$ 为单同态 (满同态, 同构).

证明 利用命题 2.3.4, 并且注意到以下事实即可:
(i) φ 为单同态等价于 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ 为左正合列.
(ii) φ 为满同态等价于 $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 为右正合列.
(iii) φ 为同构等价于 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 为正合列. □

下面的推论说明可以通过局部化判断两个子模是否相等.

推论 2.3.2 设 N, K 均为 A-模 M 的子模. 则 $N = K \iff$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 都有 $N_P = K_P$. 这里通过自然的单同态将 N_P 和 K_P 都看作 M_P 的子模.

证明 只需证明 $\Longleftarrow$. 设 $L = N + K$. 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有 $(L/N)_P = L_P/N_P = (N_P + K_P)/N_P = 0$. 故 $L/N = 0$. 同理 $L/K = 0$. 从而 $L = N = K$. □

下面讨论张量积与局部化运算的交换性.

命题 2.3.5 (张量积与局部化交换) 设 M, N 均为 A-模. 设 S 为 A 的乘法子集. 则有 A_S-模同构 $(M \otimes_A N)_S \simeq M_S \otimes_{A_S} N_S$.

证明 这由以下运算即得:

$$M_S \otimes_{A_S} N_S = (M \otimes_A A_S) \otimes_{A_S} (N \otimes_A A_S) = M \otimes_A N \otimes_A A_S = (M \otimes_A N)_S.$$

下面给出另一个约化到自由模的论证. 当 $N = A$ 时, 由张量积的运算性质 (命题 2.2.2), 可知结论成立:

$$(M \otimes_A A)_S \simeq M_S \simeq M_S \otimes_{A_S} A_S.$$

进一步, 当 N 为自由 A-模时, N 同构于一些 (不一定有限个)A 的直和 $\bigoplus_{j\in J} A$, 而局部化和张量积均与直和交换 (命题 2.2.2 (v)). 故此时结论也成立:

$$(M \otimes_A \bigoplus_{j\in J} A)_S \simeq \bigoplus_{j\in J}(M \otimes_A A)_S \simeq \bigoplus_{j\in J} M_S \simeq \bigoplus_{j\in J}(M_S \otimes_{A_S} A_S) \simeq M_S \otimes_{A_S} (\bigoplus_{j\in J} A_S).$$

最后, 在一般情形, 通过取生成元, 我们总可以将 N 表达为两个自由模之间同态的余核, 即存在右正合列 $F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow N \longrightarrow 0$, 使得 F_1, F_2 均为自由 A-模. 对这个右正合列依次应用张量积函子 $M \otimes_A \cdot$ 和局部化函子, 并由张量积和局部化均保持右正合性, 仍然得到右正合列 $(M \otimes_A F_1)_S \longrightarrow (M \otimes_A F_2)_S \longrightarrow (M \otimes_A N)_S \longrightarrow 0$. 同样地, 对原右正合列依次应用局部化和张量积函子 $M_S \otimes_{A_S} \cdot$, 又得到右正合列

$$M_S \otimes_{A_S} F_{1S} \longrightarrow M_S \otimes_{A_S} F_{2S} \longrightarrow M_S \otimes_{A_S} N_S \longrightarrow 0.$$

利用张量积的万有性质, 不难建立上面得到的两个右正合列的同态, 即如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_A F_1)_S \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & (M \otimes_A F_2)_S \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & (M \otimes_A N)_S \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
M_S \otimes_{A_S} F_{1S} \arrow[r] & M_S \otimes_{A_S} F_{2S} \arrow[r] & M_S \otimes_{A_S} N_S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由前面的讨论已经得到 f_1 和 f_2 均为同构, 从而由命题 2.3.1 知 f_3 为同构. □

2.4 Noether 模

定义 2.4.1 我们称环 A 上的模 M 为 Noether 模, 如果 M 的子模满足升链条件, 即任意子模的升链在有限步稳定.

由于环 A 的理想都是 A 作为自身上的模的子模, 故一个环 A 是 Noether 环等价于 A 作为自身上的模是 Noether 模.

命题 2.4.1 设 M 为 A-模. 则以下三条互相等价:

(i) M 为 Noether 模.

(ii) 任意非空的由 M 的一些子模形成的集合均存在极大元.

(iii) M 的任意子模都是有限 A-模.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由 Zorn 引理即得.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 设 N 为 M 的子模. 考虑 N 的所有有限子模形成的集合. 由 (ii), 可以找到该集合的一个极大元 K. 设 $K = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. 如果 $K \neq N$, 可以取 $x \in N \setminus K$, 则 $x_1, \ldots, x_n, x$ 生成的 N 的子模 K_1 也是有限子模, 并且 $K \subsetneqq K_1$. 这与 K 的极大性矛盾. 故 $N = K$ 为有限 A-模.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 设 $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ 为一个 M 的子模的升链. 令 $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. 则 N 为 M 的子模. 从而 $N = Ax_1 + \ldots Ax_n$ 为有限模. 故存在 $m \geq 1$ 使得每个 x_i 均包含在 N_m 中. 这说明 $N_{m+i} = N_m, \forall\, i \geq 0$. 故子模升链 $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ 从 N_m 之后为稳定的. □

下面的命题说明模的 Noether 性可以遗传到子模和商模上去.

命题 2.4.2 设 M 为 A-模, N 为子模. 则 M 为 Noether 模 $\Longleftrightarrow$ N 和 M/N 均为 Noether 模.

证明 $\Longrightarrow$: 任取 N 的子模 K, 则 K 也为 M 的子模. 由命题 2.4.1 知 K 为有限模. 由 K 的任意性知 N 为 Noether 模.

任取 M/N 的子模 K, 令 L 为 K 在模同态 $M \to M/N$ 下的原像. 则 L 为有限模, 从而 $K = L/N$ 也为有限模. 由 K 的任意性知 M/N 为 Noether 模.

$\Longleftarrow$: 设 K 为 M 的子模. 则 $K \bigcap N$ 为 N 的子模, 而 $K + N/N$ 为 M/N 的子模. 从而由条件知 $K \bigcap N$ 和 $K + N/N$ 均为有限模. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为 $K \bigcap N$ 的一组生成元, $y_1, \ldots, y_m \in K$ 在 $K + N/N$ 中为一组生成元. 则对任意 $x \in K$, 存在 $a_1, \ldots, a_m \in A$, 使得在 $K + N/N$ 中有 $\bar{x} = a_1\bar{y}_1 + \ldots a_m\bar{y}_m$. 令 $y = x - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$. 则 $y \in K \bigcap N$. 故存在 $b_1, \ldots, b_n \in A$ 使得 $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. 这样得到

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

由此知 $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$ 为 K 的一组生成元. 故 K 为有限模. 由 K 的任意性知 M 为 Noether 模. □

命题 2.4.3 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 则 M 为 Noether 模.

证明 设 $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. 对生成元个数 n 归纳.

(i) 如果 $n = 1$, 则 $M \simeq A/I$, 由 A 为 Noether 环得到 A 和 I 均为 Noether A-模, 从而 A/I 也为 Noether A-模.

(ii) 设 $n \geq 2$. 令 $M_1 = Ax_1$, 则由 $n = 1$ 的情形知 M_1 为 Noether 模. 由于商模 $M/M_1 = A\bar{x}_2 + \cdots + A\bar{x}_n$ 可由 $n - 1$ 个元素生成, 由归纳假设知 M/M_1 为 Noether 模. 从而由命题 2.4.2 得到 M 为 Noether 模. □

如果 A-模 M 没有非平凡子模, 即 M 的子模只有 0 和 M, 则我们称 M 为**单模**. M 的一个子模链 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 的长度为 n, 它的一

个加细是指在某些 M_i 和 M_{i+1} 之间再插入一些子模得到的 M 的子模链, 即形如 $M = M'_0 \supsetneqq M'_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M'_m = 0$, 并且存在 $0 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_n \le m$, 使得 $\forall\, 0 \le j \le n$, $M'_{i_j} = M_j$ 的 M 的子模链. M 的子模链 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 称为一个**合成列**, 如果该子模链不能进一步加细. 下面的定理说明, 合成列如果存在, 则有某种唯一性.

定理 2.4.1 (Jordan-Hölder 定理) 设 A-模 M 存在长度为 n 的合成列, 则

(i) M 的任意子模链均可加细为一个合成列.
(ii) M 的任意两个合成列的长度都相等.
(iii) 设 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 和 $M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_n = 0$ 为 M 的两个合成列, 则以下两个带重数的集合 (因子集) 相等:

$$\big\{M_i/M_{i+1} \mid i = 0, \ldots, n-1\big\} = \big\{N_i/N_{i+1} \mid i = 0, \ldots, n-1\big\}.$$

证明 首先注意到由于因子集中的元素个数 (计重数) 等于合成列的长度, 故两个合成列的因子集相同能推出长度相等. 设 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 为 M 的一个合成列, 设 $M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_m = 0$ 为 M 的一个子模列. 我们只需通过对 n 归纳, 证明 $M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_m = 0$ 可以加细为一个合成列, 并且该合成列的因子集与 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 的因子集相同. 用图表表示如下:

$$\begin{tikzcd}
& M_0 = M = N_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
M_1 \arrow[d, dashed, dash] & & N_1 \arrow[d, dashed, dash] \\
M_{n-1} \arrow[dr, dash] & & N_{m-1} \arrow[dl, dash] \\
& M_n = 0 = N_m &
\end{tikzcd}$$

如果 $n = 1$, 则 M 为单模, 从而 $m = 1$, $N_1 = 0$, 此时要证的结论成立.

下面设 $n \ge 2$. 考虑 N_{m-1} 与合成列 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 的交:

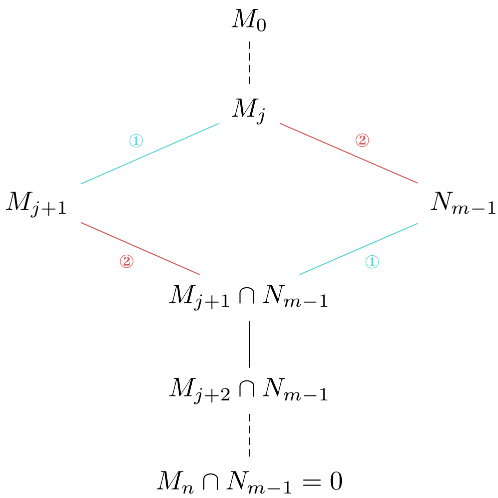
$$N_{m-1} = N_{m-1} \cap M_0 \supset N_{m-1} \cap M_1 \supset \cdots \supset N_{m-1} \cap M_n = 0.$$

由于对每个 $i = 0, \ldots, n-1$, 自然的同态 $\frac{N_{m-1} \cap M_i}{N_{m-1} \cap M_{i+1}} \longrightarrow \frac{M_i}{M_{i+1}}$ 为单同态, 并且 $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ 为单模, 从而知 $\frac{N_{m-1} \cap M_i}{N_{m-1} \cap M_{i+1}} = 0$ 或 $\frac{N_{m-1} \cap M_i}{N_{m-1} \cap M_{i+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{M_i}{M_{i+1}}$ 为同构.

设 j 为最大的非负整数, 使得 $N_{m-1} \cap M_j = N_{m-1}$. 则 $0 \le j < n$, 并且有

$$N_{m-1} = N_{m-1} \cap M_0 = \cdots = N_{m-1} \cap M_j \supsetneq N_{m-1} \cap M_{j+1},$$

以及 $\frac{N_{m-1}}{N_{m-1} \cap M_{j+1}} = \frac{N_{m-1} \cap M_j}{N_{m-1} \cap M_{j+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{M_j}{M_{j+1}}$ 为同构. 从而 $N_{m-1} + M_{j+1} = M_j$, 并由此又得到同构 $\frac{M_{j+1}}{N_{m-1} \cap M_{j+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{M_j}{N_{m-1}}$. 用图表表示如下:



其中两条蓝线①代表的商同构, 两条红线②代表的商也同构.

由于 M_{j+1} 存在长度为 $n-j-1 < n$ 的合成列 $M_{j+1} \supsetneq M_{j+2} \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$, 由归纳假设知 M_{j+1} 的子模列

$$M_{j+1} \supset M_{j+1} \cap N_{m-1} \supset M_{j+2} \cap N_{m-1} \supset \cdots \supset M_n \cap N_m = 0$$

可以加细为长度 $n-j-1$ 的合成列. 由于

$$M_{j+1} \cap N_{m-1} \supset M_{j+2} \cap N_{m-1} \supset \cdots \supset M_n \cap N_m = 0$$

删掉重复项之后已经是合成列, 故 $M_{j+1} \supset M_{j+1} \cap N_{m-1}$ 可加细为长度不超过 $n-j-1$ 的合成列. 从而 $M_j \supset N_{m-1}$ 也可加细为长度不超过 $n-j-1$ 的合成列. 该合成列与 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_j$ 合并, 给出 $M \supset N_{m-1}$ 的长度不超过 $n-j-1+j = n-1$ 的加细合成列. 从而对 M/N_{m-1} 应用归纳假设, 得到 $M = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_{m-1}$ 可加细为具有同样因子集 (计重数) 的合成列.

注意到 N_{m-1} 的如下子模链

$$N_{m-1} \supset M_{j+1} \cap N_{m-1} \supset M_{j+2} \cap N_{m-1} \supset \cdots \supset M_n \cap N_m = 0$$

在删掉重复项之后是一个合成列. 这个合成列与上面 $M=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_{m-1}$ 加细得到的合成列给出了 $M=N_0\supsetneqq N_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq N_m=0$ 加细而得的合成列. 从上面的构造过程, 不难看到其因子集 (计重数) 与合成列 $M=M_0\supsetneqq M_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq M_n=0$ 的因子集 (计重数) 相同. 这样就完成了归纳过程, 从而定理得证. □

我们称 A-模 M 为有限长度的, 如果 M 存在有限长的合成列. 由 Jordan-Hölder 定理, 有限长度模 M 的任一子模列均可加细为合成列, 且这些合成列的长度均相同, 我们称这些合成列的长度为 M 的**长度**, 记为 $\ell_A(M)$, 或者 (在 A 明确的情况下) $\ell(M)$.

命题 2.4.4 设 A-模 M 是有限长度的, 则 M 的任一子模 N 及商模 M/N 也是有限长度的, 并且 $\ell(M)=\ell(N)+\ell(M/N)$.

证明 任取 M/N 的子模列, 并将其等同到 M 的包含 N 的子模列. 这与任意 N 的子模列合并为 M 的一个子模列. 再由 Jordan-Hölder 定理即知这个 M 的子模列可以加细为有限长度的合成列. 由此知 N 和 M/N 的长度有限, 并且 $\ell(M)=\ell(N)+\ell(M/N)$.□

例 2.4.1 域 k 上的单模恰为一维线性空间. 从而 k-线性空间 V 作为 k-模是有限长度的等价于 V 是有限维线性空间, 并且此时 $\ell_k(V)=\dim_k V$.

由于 $\mathbb{Z}$ 存在无限长的子模列 $\mathbb{Z}\supsetneqq 2\mathbb{Z}\supsetneqq 4\mathbb{Z}\supsetneqq 8\mathbb{Z}\supsetneqq\ldots$, 故 $\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模不是有限长度的. 另一方面, 对素数 p, 可以看到 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为单的 $\mathbb{Z}$-模, 故 $\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})=1$. 一般地, 对 $n\geq 0$, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 有以下合成列

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\supsetneqq p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\supsetneqq p^2\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\supsetneqq\cdots\supsetneqq p^n\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}=0.$$

故 $\ell(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=n$.

设 m 为任意正整数, $m=p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k}$ 为其素因子分解. 由中国剩余定理, 命题 2.4.4及上面的讨论, 不难看到 $\ell(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})=\sum_{i=1}^k a_i$.

关于有限长度模, 以下命题给出了常用的一大类例子和长度计算方法.

命题 2.4.5 设 M 为 Noether 局部环 (A,m,k) 上的有限模. 并且存在 $a\geq 1$, 使得 $m^aM=0$. 则 M 的长度有限, 并且

$$\ell_A(M)=\sum_{i=0}^{\infty}\dim_k(m^iM/m^{i+1}M).$$

注意当 $i\geq a$ 时, $m^iM/m^{i+1}M=0$, 故上述和式为有限和.

证明 考虑 M 的子模列 $M=m^0M\supset mM\supset m^2M\supset\cdots\supset m^aM=0$. 由命题 2.4.4 知 $\ell_A(M)=\sum_{i=0}^a\ell_A(m^iM/m^{i+1}M)$. 由于 m 零化 $m^iM/m^{i+1}M$, 故 $m^iM/m^{i+1}M$ 的 A-子模等同于 $m^iM/m^{i+1}M$ 作为 k-线性空间的子空间. 再由 M 的 Noether 性知 $m^iM/m^{i+1}M$ 为有限维 k-线性空间, 从而 $\ell_A(m^iM/m^{i+1}M)=\dim_k(m^iM/m^{i+1}M)$.

命题得证. $\square$

2.5 层的观点

设 M 为 A-模. 记 $\mathcal{B}$ 为所有主开集形成的 $\operatorname{Spec} A$ 的开集基. 与环的情形类似, 我们定义 $\operatorname{Spec} A$ 上的如下 $\mathcal{B}$-预层 $\widetilde{M}$: 对主开集 $D(f)$, 令 $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$, 对 $D(g) \subset D(f)$, 令限制同态 $\rho_{D(f),D(g)}$ 为唯一的使下图交换的 A-模同态 (其存在唯一性由局部化的万有性质2.1.4保证):

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M_f \arrow[rr, dashed, "\rho_{D(f),D(g)}"] & & M_g \end{tikzcd}$$

由唯一性可以验证限制同态的相容性, 从而得到预层 $\widetilde{M}$. 利用1.4.2 节的记号, 不难看到当 $M = A$ 时, 我们有 $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$.

命题 2.5.1 $\widetilde{M}$ 是 $\mathcal{B}$-层.

证明 与环的情形一样. 只需在命题 1.4.4的证明中适当地将 A 替换为 M 即可. $\square$

与环的情形类似, 我们可以描述 $\widetilde{M}$ 在每个点的茎.

命题 2.5.2 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有 $\widetilde{M}_P \simeq M_P$

证明 直接验证即可. $\square$

命题 2.5.3 设 M 为 A-模. 设 $\operatorname{Spec} A = \{P_1, \ldots, P_k\}$ 为有限点集, 并且每个 P_i 均为闭点. 则有 A-模同构 $M \simeq M_{P_1} \oplus \cdots \oplus M_{P_k}$.

证明 与命题 1.4.7 的证明类似. $\square$

下面讨论 $\widetilde{M}$ 的支集. 为此, 我们先引入层的支集和模的零化理想的概念.

定义 2.5.1 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的一个 $\mathcal{B}$-层. 称以下集合

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

为 $\mathcal{F}$ 的支集.

设 M 为 A-模. 由 $\widetilde{M}$ 茎的描述, 可以看到 $\operatorname{Supp}(\widetilde{M})$ 与集合 $\{P \in \operatorname{Spec} A \mid M_P \neq 0\}$ 相同. 我们也将 $\operatorname{Supp}(\widetilde{M})$ 记为 $\operatorname{Supp}_A(M)$, 在 A 明确的情况下也直接记为 $\operatorname{Supp}(M)$.

定义 2.5.2 设 M 为 A-模. 对于 $x \in M$, 称以下理想

$$\operatorname{ann}_A(x) := \{a \in A \mid ax = 0\}$$

为 x 的**零化理想**. 称 $\operatorname{ann}_A(M) := \{a \in A \mid ax = 0, \forall\, x \in M\}$ 为 M 的**零化理想**. 在环 A 明确的情况下, 我们也将 $\operatorname{ann}_A(x)$ 和 $\operatorname{ann}_A(M)$ 分别记为 $\operatorname{ann}(x)$ 和 $\operatorname{ann}(M)$.

下面的命题说明, 取零化理想和局部化操作是交换的.

命题 2.5.4 设 M 为 A-模, $x \in M$. 设 S 为 A 的乘法子集. 则

$$\operatorname{ann}_{A_S}(x) = (\operatorname{ann}_A(x))_S,\ \operatorname{ann}_{A_S}(M_S) = (\operatorname{ann}_A(M))_S.$$

证明 直接验证即可. □

命题 2.5.5 设 M 为有限 A-模. 则 $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$.

证明 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 M 的生成元. 则对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有

$$M_P = 0 \iff \exists\, s \in A \setminus P,\ \forall\, i,\ sx_i = 0 \iff \operatorname{ann}(M) \not\subseteq P.$$

由此得到 $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$. □

习题

1. 设 A 为环.

(i) 设 $P \in M_{m\times n}(A)$ 为 A 上的 $m \times n$ 矩阵, 并且 $m < n$. 证明存在非零列向量 $x = (a_1, \ldots, a_n)^t \in A^n$, 使得 $Px = 0$.

(ii) 设 M 为 A-模. 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 M 的一组生成元. 证明 M 中任意 $n+1$ 个元素必线性相关.

(iii) 设 M 为有限 A-模, 且为自由模. 证明 M 的任意一组基的元素个数有限, 即 M 为秩有限的自由模.

2. 计算下列有限 Abel 群:

(i) $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$.

(ii) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, \dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}})$.

3. 设以下两个复形均为 A-模短正合列:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} N \xrightarrow{g} N' \longrightarrow 0$$

证明: $M' \otimes_A N' \simeq (M \otimes_A N)/T$, 其中 $T = (i \otimes 1)(K \otimes_A N) + (1 \otimes j)(M \otimes L)$.

4. (Hom 与局部化的交换性) 设 M, N 为 A-模, S 为 A 的乘法子集. 设 M 同构于两个有限秩的自由模之间同态的余核. 证明有 A_S-模同构

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_S \simeq \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S).$$

5. 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 证明 M 同构于两个有限秩的自由模之间同态的余核.

6. 设 A 为环, M 为 A-模, 并且 $\forall\, P \in \mathrm{Spec}\, A$, 局部化 M_P 均为有限 A_P-模.

(i) 是否可以得到 M 为有限 A-模?

(ii) 如果进一步假设 $\forall\, P \in \mathrm{Spec}\, A$, 局部化 M_P 均为秩 1 的自由 A_P-模, 是否可以得到 M 为有限 A-模?

7. 设 A 为环, M 为 A-模. 设 $\mathrm{Spec}\, A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ 为主开集的开覆盖, 使得每个 M_{f_i} 均为有限 A_{f_i}-模. 证明 M 为有限 A-模.

8. (Frobenius 同态) 设 A 为 $\mathbb{F}_p$-代数, 映射 $F_A : A \longrightarrow A$, $a \longmapsto a^p$ 称为 A 的 Frobenius 映射.

(i) 证明 F_A 为环同态. 我们也称其为 Frobenius 同态.

(ii) 证明 $F_A^* : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ 为恒等映射.

(iii) 以下设 $\varphi : A \longrightarrow B$ 为环同态. 证明有如下交换图表

$$\begin{tikzcd}
B & B \arrow[l, "F_B"'] \\
A \arrow[u, "\varphi"] & A \arrow[l, "F_A"] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

(iv) 令 $B^{(p)} = A \otimes_A B$ 为张量积, 其中 $A \longrightarrow A$ 为 Frobenius 同态 F_A. 证明有如下环同态的交换图表

$$\begin{tikzcd}
B & & \\
& B^{(p)} \arrow[ul, dashed, "F_{B/A}"'] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ull, bend right, "F_B"'] \\
& A \arrow[u, "i_1"'] \arrow[uul, bend left, "\varphi"] & A \arrow[l, "F_A"] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

其中 A-代数同态 $F_{B/A} : B^{(p)} \longrightarrow B$ 称为相对 Frobenius 同态.

(v) 证明 $F_{B/A} \circ i_2 = F_B$, 以及 $i_2 \circ F_{B/A} = F_{B^{(p)}}$.

(vi) 证明 $F_{B/A}$ 诱导的素谱空间映射 $F_{B/A}^* : \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B^{(p)}$ 为同胚.

习题提示

4. 与命题 2.3.5 的证明思路类似. 首先证明 M 本身为有限秩自由模的情形. 在一般情形, 设 $F_1 \to F_2 \to M \to 0$ 为右正合列, 并且 F_1, F_2 均为有限秩的自由模. 考虑如下交换图表即可:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N)_S \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(F_2,N)_S \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_A(F_1,N)_S \arrow[d, "\wr"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_S}(F_{2S},N_S) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_S}(F_{1S},N_S)
\end{tikzcd}$$

8. (v): 考虑如下交换图表

$$\begin{tikzcd}
B^{(p)} & B \arrow[l, "i_2"'] & B^{(p)} \arrow[l, "F_{B/A}"'] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ll, bend right, "F_B"'] \\
A \arrow[u, "i_1"'] & A \arrow[l, "F_A"'] \arrow[u, "\varphi"'] & A \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "i_1"'] & A \arrow[l, "F_A"'] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

第三章 一些常用技术

3.1 行列式技巧

对于交换环上的矩阵, 很多在域上熟知的构造和运算仍然成立, 如伴随方阵, 行列式的常见性质等. 我们可以借用一些矩阵技巧得到环上有限生成模的结论.

定理 3.1.1 (Cayley-Hamilton 定理) 设 M 为环 A 上的有限模, $e_1, \ldots, e_n$ 为一组生成元. 设 $\varphi : M \to M$ 为 M 的一个 A-模自同态. 设 $P \in M_n(A)$ 为 A 上的 n 阶方阵, 使得 $\varphi(e_1, \ldots, e_n)^t = P(e_1, \ldots, e_n)^t$. 则有如下 M 的自同态的等式成立:

$$\det(\varphi \mathrm{I}_n - P) = 0.$$

其中 $(e_1, \ldots, e_n)^t$ 代表行向量 $(e_1, \ldots, e_n)$ 作转置得到的列向量.

证明 在等式 $(\varphi \mathrm{I}_n - P)(e_1, \ldots, e_n)^t = 0$ 两边乘以 $\varphi \mathrm{I}_n - P$ 的伴随方阵 $(\varphi \mathrm{I}_n - P)^*$, 得到

$$\det(\varphi \mathrm{I}_n - P)(e_1, \ldots, e_n)^t = (\varphi \mathrm{I}_n - P)^*(\varphi \mathrm{I}_n - P)(e_1, \ldots, e_n)^t = 0.$$

由 $e_1, \ldots, e_n$ 为 M 的生成元, 知作为 M 的自同态有 $\det(\varphi \mathrm{I}_n - P) = 0$. □

我们将上面证明 Cayley-Hamilton 定理的推理方法称为行列式技巧, 其核心为交换环上的方阵等式 $(\det P)\mathrm{I}_n = P^* P$. 下面讨论行列式技巧的更多应用.

命题 3.1.1 设 A 为环, M 为有限 A-模. 设 $\varphi : M \to M$ 为 M 的自同态. 如果 φ 为满同态, 则 φ 为同构.

证明 设 $e_1,\ldots,e_n$ 为 M 的一组生成元. 由 φ 为满同态知存在 A 上的 n 阶方阵 P, 使得 $(e_1,\ldots,e_n)^t = P\varphi(e_1,\ldots,e_n)^t$. 在等式 $(\mathrm{I}_n - P\varphi)(e_1,\ldots,e_n)^t$ 两边同时乘以 $(\mathrm{I}_n - \varphi P)^*$, 得到 $\det(\mathrm{I}_n - \varphi P)(e_1,\ldots,e_n)^t = 0$. 将行列式展开, 则得到 A 中的元 $a_1,\ldots,a_n$, 使得 $1 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots + a_n\varphi^n = 0$ 作为 M 的自同态成立. 由此不难看到 φ 为单同态. 从而 φ 为同构. □

另一个行列式技巧的重要应用是如下的 Nakayama 引理.

引理 3.1.1 (Nakayama 引理) 设 (A,m) 为局部环, M 为有限 A-模. 如果 $M = mM$, 则 $M = 0$.

证明 取 M 的一组生成元 $e_1,\ldots,e_n$. 由 $M = mM$ 知存在 A 上的 n 阶方阵 P, 使得 P 的每个元素均在 m 中, 并且 $(e_1,\ldots,e_n)^t = P(e_1,\ldots,e_n)^t$. 利用行列式技巧, 得到 $\det(\mathrm{I}_n - P)e_i = 0,\ \forall\, i = 1,\ldots,n$. 由 $\det(\mathrm{I}_n - P) \in 1 + m$ 和 (A,m) 为局部环知 $\det(\mathrm{I}_n - P) \in A^*$. 从而 $e_i = 0,\ \forall\, i = 1,\ldots,n$. 这样就得到 $M = 0$ □

设 $k = A/m$ 为剩余类域. 由于 $M/mM = M \otimes_A k$, Nakayama 引理也等价于说 $M \otimes_A k = 0 \implies M = 0$.

推论 3.1.1 设 (A,m) 为局部环, M 为有限 A-模. 设 N 为 M 的子模, 并且满足 $M = mM + N$. 则 $M = N$.

证明 对商模 M/N 应用 Nakayama 引理即可. □

推论 3.1.2 设 (A,m,k) 为局部环, M 为有限 A-模. 设 $x_1,\ldots,x_n \in M$, 使得 $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ 为 k-线性空间 $M \otimes_A k = M/mM$ 的生成元. 则 $x_1,\ldots,x_n$ 为 M 的一组生成元.

证明 令 $N = Ax_1 + \cdots + Ax_n$, 则 $M = mM + N$. 从而由推论 3.1.1 即得

$$M = Ax_1 + \cdots + Ax_n.$$

□

由该推论, 为了找 M 的生成元, 我们只需找 k-线性空间 M/mM 的一组生成元, 再提升到 M 中即可.

定义 3.1.1 设 (A,m,k) 为局部环, M 为有限 A-模. M 的一组元素 $x_1,\ldots,x_n$ 称为一组**极小生成元**, 如果 $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ 为 k-线性空间 M/mM 的一组基.

由推论 3.1.2不难看到, 一组元素是 M 的极小生成元等价于其是包含最少元素的生成元.

例 3.1.1 设 p 为素数, 则 $\mathbb{Z}$ 在 (p) 处的局部化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 为局部环. 令 $F = \mathbb{Z}_{(p)}e_1 \oplus \mathbb{Z}_{(p)}e_2$ 是秩为 2 的自由 $\mathbb{Z}_{(p)}$-模. 令 $N = \mathbb{Z}_{(p)}(pe_1 + pe_2)$ 为 F 的子模, $M := F/N$ 为商模. 则 $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ 为 M 的极小生成元, 但是 M 并不是自由模.

3.2 素避引理

在后面的讨论中, 我们经常需要找到一个理想 I 中的元素, 使其同时不在一些素理想 P_i 中. 下面的引理说明, 为了证明这样的元素存在, 只需要 I 不包含在每一个 P_i 中.

引理 3.2.1 (素避引理) 设 A 为环, $I, P_1, \ldots, P_r$ 为 A 的理想, 并且 $P_3, \ldots, P_r$ 为素理想. 如果 $\forall\, i = 1, \ldots, r$, 均有 $I \not\subseteq P_i$, 那么 $I \not\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} P_i$.

证明 对 r 归纳. $r = 1$ 的情形是平凡的. 当 $r = 2$ 时, 由 $I \not\subseteq P_i$, 我们可以找到 $a_i \in I \setminus P_i$, $i = 1, 2$. 如果 $a_1 \notin P_2$, 则令 $a = a_1$, 如果 $a_2 \notin P_1$, 则令 $a = a_2$, 如果 $a_1 \in P_2$ 且 $a_2 \in P_1$, 则取 $a = a_1 + a_2$. 无论在那种情况, 均有 $a \in I$ 且 $a \notin P_1 \bigcup P_2$. 故 $I \not\subseteq P_1 \bigcup P_2$.

假设 $r \geq 3$. 不妨假设这些 P_i 之间没有包含关系. 由归纳假设, 存在 $a \in I$, 使得 $a \notin \bigcup\limits_{i=1}^{r-1} P_i$. 如果 $a \notin P_r$, 则结论得证. 假设 $a \in P_r$. 由 $P_i \not\subseteq P_r$, $i = 1, \ldots, r-1$, 以及 $I \not\subseteq P_r$, 知 $IP_1 \ldots P_{r-1} \not\subseteq P_r$. 故可以找到 $b \in IP_1 \ldots P_{r-1}$, 使得 $b \notin P_r$. 不难验证 $a + b \in I \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{r} P_i)$. 从而结论得证. □

3.3 Artin-Rees 引理与完备化

引理 3.3.1 (Artin-Rees 引理) 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 设 I 为 A 的理想, N 为 M 的子模. 则存在正整数 $c \geq 1$, 使得对任意 $i \geq c$, 均有 $I^i M \bigcap N = I^{i-c}(I^c M \bigcap N)$.

证明 设 $a_1, \ldots, a_n$ 为 I 的生成元, $e_1, \ldots, e_m$ 为 M 的生成元. 考虑如下集合

$$K := \Big\{ (f_1, \ldots, f_m) \in A[x_1, \ldots, x_n]^m \mid f_1, \ldots, f_n \text{ 为同次数的齐次多项式, 且 } \textstyle\sum_{q=1}^m f_q(a_1, \ldots, a_n) e_q \in N \Big\}.$$

将 $A[x_1, \ldots, x_n]^m$ 看作秩为 m 的自由 $A[x_1, \ldots, x_n]$-模, 令 $\tilde{K}$ 为 K 生成的 $A[x_1, \ldots, x_n]^m$ 的子模. 由 Hilbert 基定理, $A[x_1, \ldots, x_n]$ 为 Noether 环, 故 $A[x_1, \ldots, x_n]^m$ 为 Noether $A[x_1, \ldots, x_n]$-模. 从而 $\tilde{K}$ 为有限 $A[x_1, \ldots, x_n]$-模. 设 $k_1, \ldots, k_r \in K$ 为 $\tilde{K}$ 的生成元, 并且 $k_p = (f_{p1}, \ldots, f_{pm})$, $p = 1, \ldots, r$. 设 $x \in I^i M \bigcap N$, 则存在 i 次齐次多项式 $g_1, \ldots, g_m \in A[x_1, \ldots, x_n]$, 使得 $x = \sum_{q=1}^m g_q(a_1, \ldots, a_n) e_q$. 这样得到 $(g_1, \ldots, g_m) \in \tilde{K}$. 令 c 为 $\deg f_{pq}$ $(1 \leq p \leq r, 1 \leq q \leq m)$ 的最大值. 则当 $i \geq c$ 时, 不难看到存在齐次多项式 $h_1, \ldots, h_r \in A[x_1, \ldots, x_n]$, 使得 $(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{p=1}^r h_p k_p$, 并且 $\deg h_p = i - \deg k_p \geq i - c$. 这里 $\deg k_p$ 是指 k_p 的任一分量的次数. 再由 x 的表达

式即知

$$x=\sum_{q=1}^{m}g_q(a_1,\ldots,a_n)e_q=\sum_{p=1}^{r}h_p(a_1,\ldots,a_n)(\sum_{q=1}^{m}f_{pq}(a_1,\ldots,a_n)e_q)\in I^{i-c}(I^cM\bigcap N).$$

□

作为推论, 有下面的定理.

定理 3.3.1 (Krull 交集定理) 设 (A,m) 为 Noether 局部环, 设 M 为有限 A-模. 则 $\bigcap_{i\geq 0}m^iM=0$.

证明 令 $N=\bigcap_{i\geq 0}m^iM$. 由 Artin-Rees 引理, 存在 $c\geq 0$, 使得对任意 $i\geq c$, 均有 $m^iM\bigcap N=m^{i-c}(m^cM\bigcap N)$. 取 $i=c+1$, 即得

$$N=m^{c+1}M\bigcap N=m(m^cM\bigcap N)=mN.$$

再由 Nakayama 引理即得 $N=0$. □

设 A 为环, 对 $n\geq 1$, $\varphi_n:M_n\to M_{n-1}$ 为 A-模同态. 如下集合

$$\varprojlim_n M_n\coloneqq\left\{(\cdots,x_1,x_0)\in\prod_{n=0}^{\infty}M_n\mid\varphi_n(x_n)=x_{n-1},\forall\ n\geq 1\right\}$$

显然为乘积模 $\prod_{n=0}^{\infty}M_n$ 的子模. 我们称 $\varprojlim_n M_n$ 为这一族模 M_n 在同态 φ_n 下的**逆极限**, 或称为 **投射极限**.

如果 I 为环 A 的理想, M 为 A-模. 则商模 M/I^nM 之间有自然的商同态 $M/I^nM\to M/I^{n-1}M,\ \ n\geq 1$. 这样得到的逆极限 $\varprojlim_n M/I^nM$ 称为 M 在理想 I 处的**完备化**, 记为 $\widehat{M}$.

注意到 $\prod_{n=1}^{\infty}A$ 为环, 容易验证其子集 $\widehat{A}$ 为子环. 这样我们总是将 $\widehat{A}$ 看作环. A 到 $\widehat{A}$ 有一个自然的环同态 $a\mapsto(a_n)$, 其中 $a_n=a$, $\forall\ n\geq 0$. 另一方面, 对 $(a_n)\in\widehat{A}$, 对 $(x_n)\in\widehat{M}$, 通过令 $(a_n)\cdot(x_n)\coloneqq(a_nx_n)$, 我们看到 $\widehat{M}$ 为 $\widehat{A}$-模. 通过自然同态 $A\to\widehat{A}$ 将 $\widehat{M}$ 看作 A-模, 则 $x\mapsto(x_i)$, $x_i=x$ 是一个 A-模同态 $M\to\widehat{M}$. 我们一般将 $x\in M$ 在 $\widehat{M}$ 中的像仍记作 x. 设 $f:M\to N$ 为 A-模同态, 则 $\hat{f}:\widehat{M}\to\widehat{N}$, $(x_n)\mapsto(f(x_n))$ 为 $\widehat{A}$-模同态. 这样, 在 I 处作完备化是一个从 A-模范畴到 $\widehat{A}$-模范畴的一个函子. 我们会证明在一些条件下这个函子是正合的.

例 3.3.1 设 $A=\mathbb{C}[x]$, $I=(x)$. 则容易看到有环同构:

$$\mathbb{C}[\![x]\!] \xrightarrow{\sim} \widehat{A} = \varprojlim_n \mathbb{C}[x]/(x^n)$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \longmapsto (\sum_{i=0}^{n} c_i x^i)$$

受上面例子的启发, 对于一族元素 $a_i \in I^i$, $i \geq 0$, 我们用无穷和 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ 代表 $\widehat{A}=\varprojlim_n A/I^n$ 中的元素 (b_n), 其中 $b_n=\sum_{i=0}^{n} a_i$, $\forall\, n\geq 0$. 不难看到, $\widehat{A}$ 中的每个元素均可以表示为这样的无穷和. 类似地, 对 A-模 M, 对一组元素 $x_i \in I^iM$, 我们用无穷和 $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ 代表 $\widehat{M}=\varprojlim_n M/I^nM$ 中的元素 (b_n), 其中 $b_n=\sum_{i=0}^{n} x_i$, $\forall\, n\geq 0$. 同样地, $\widehat{M}$ 中的元素均可表示为这样的无穷和.

本节剩下的命题中, 如不特别说明, 对于环 A 上的模, 完备化指在某一个固定理想 I 处的完备化, 如果 A 为局部环, 则默认完备化为在 A 的唯一极大理想处的完备化.

命题 3.3.1 设 $e_1,\ldots,e_n$ 为 A-模 M 的一组生成元, 则 $e_1,\ldots,e_n$ 也为 $\widehat{A}$-模 $\widehat{M}$ 的生成元.

证明 设 $x\in\widehat{M}$, 则存在 $x_i\in I^iM$, 使得 $x=\sum_{i=0}^{\infty} x_i$. 对每个 i, 又可找到 $a_{ij}\in I^i$, 使得 $x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$. 这样得到 $x=\sum_{i=0}^{\infty} x_i=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij})e_j$. 对每个 j, 令 $a_j=\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\in\widehat{A}$ 即得 $x=\sum_{j=1}^{n} a_je_j$. □

命题 3.3.2 设 $\varphi: M\to N$ 为有限 A-模的满同态, 则 $\widehat{\varphi}: \widehat{M}\to\widehat{N}$ 为 $\widehat{A}$-模的满同态.

证明 设 $e_1,\ldots,e_n$ 为 M 的生成元, 则由 φ 为满同态知 $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$ 为 N 的生成元. 从而由命题 3.3.1 知 $e_1,\ldots,e_n$ 生成 $\widehat{M}$, $\widehat{\varphi}(e_1),\ldots,\widehat{\varphi}(e_n)$ 生成 $\widehat{N}$. 故 $\widehat{\varphi}$ 为满同态.□

命题 3.3.3 (完备化的正合性) 设 A 为 Noether 环. 设 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 为有限 A-模的短正合列, 则 $0\longrightarrow\widehat{M_1}\longrightarrow\widehat{M_2}\longrightarrow\widehat{M_3}\longrightarrow 0$ 为有限 $\widehat{A}$-模的短正合列. 用函子语言, 这等价于说完备化是从有限 A-模范畴到有限 $\widehat{A}$-模范畴的一个正合函子.

证明 由命题 3.3.1 知完备化将有限 A-模变为有限 $\widehat{A}$-模. 由 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 为短正合列, 知 $M_3\simeq M_2/M_1$, 从而对任意 $i\geq 0$, 有

$$\frac{M_3}{I^iM_3}\simeq\frac{M_2/M_1}{I^i(M_2/M_1)}\simeq\frac{M_2}{I^iM_2+M_1}\simeq\frac{M_2/I^iM_2}{M_1/(I^iM_2\cap M_1)}.$$

这样得到短正合列 $0\longrightarrow M_1/(I^iM_2\cap M_1)\longrightarrow M_2/I^iM_2\longrightarrow M_3/I^iM_3\longrightarrow 0$. 由此可以直接验证有逆极限的左正合列

$$0\longrightarrow\varprojlim_i M_1/(I^iM_2\cap M_1)\longrightarrow\varprojlim_i M_2/I^iM_2\longrightarrow\varprojlim_i M_3/I^iM_3.$$

由 Artin-Rees 引理, 自然的模同态 $M_1/I^iM_1 \to M_1/(I^iM_2\cap M_1)$ 诱导逆极限的同构 $\varprojlim_i M_1/I^iM_1 \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i M_1/(I^iM_2\cap M_1)$. 从而有左正合列 $0\longrightarrow \widehat{M_1}\longrightarrow \widehat{M_2}\longrightarrow \widehat{M_3}$. 根据命题 3.3.2, $\widehat{M_2}\to\widehat{M_3}$ 为满同态. 故 $0\longrightarrow \widehat{M_1}\longrightarrow \widehat{M_2}\longrightarrow \widehat{M_3}\longrightarrow 0$ 为短正合列. □

命题 3.3.4 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 则有 $\widehat{A}$-模同构 $\widehat{M}\simeq M\otimes_A\widehat{A}$.

证明 对每个 A-模 M 均有 $\widehat{A}$-模同态 $M\otimes_A\widehat{A}\to\widehat{M}$, $x\otimes(a_i)\mapsto(a_ix)$.

由条件知存在右正合列 $A^n\longrightarrow A^m\longrightarrow M\longrightarrow 0$. 分别对其作用张量积函子 $\cdot\otimes_A\widehat{A}$ 和完备化函子, 得到如下右正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
A^n\otimes_A\widehat{A} & \longrightarrow & A^m\otimes_A\widehat{A} & \longrightarrow & M\otimes_A\widehat{A} & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \\
\widehat{A}^n & \longrightarrow & \widehat{A}^m & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

不难看到 φ_1 和 φ_2 均为自由 $\widehat{A}$-模之间的同构, 从而 φ_3 也为同构. □

命题 3.3.5 设 A 为 Noether 环, $\widehat{A}$ 为 A 在理想 I 处的完备化. 设 J 为 A 的理想, 则 $\widehat{J}=J\widehat{A}$. 这里通过自然的单同态, 我们将 $\widehat{J}$ 看作 $\widehat{A}$ 的理想.

证明 由完备化的正合性知 $\widehat{J}\hookrightarrow\widehat{A}$ 为单同态, 从而可将 $\widehat{J}$ 看作 $\widehat{A}$ 的理想. 由命题 3.3.1 知 J 的生成元 $a_1,\dots,a_n$ 也为 $\widehat{J}$ 的生成元. 从而 $\widehat{J}=J\widehat{A}$. □

命题 3.3.6 设 A 为 Noether 环, 则 $\widehat{A}$ 也是 Noether 环.

证明 设 $\widehat{A}$ 为 A 在理想 I 处的完备化. 设 $a_1,\dots,a_n$ 为 I 的生成元. 考虑如下映射:

$$\begin{aligned}\varphi: A[\![x_1,\dots,x_n]\!] &\longrightarrow \widehat{A}\\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} f_i(a_1,\dots,a_n)\end{aligned}$$

这里 $f_i\in A[x_1,\dots,x_n]$ 为 i 次齐次多项式. 容易看到 φ 为满的环同态. 从而由 $A[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ 为 Noether 环知 $\widehat{A}$ 为 Noether 环. □

命题 3.3.7 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, 则 $(\widehat{A},m\widehat{A},k)$ 也为 Noether 局部环.

证明 $\widehat{A}$ 的 Noether 性前面已证. 任取 $a\in m\widehat{A}$, 则 $(1-a)^{-1}:=\sum_{i=0}a^i$ 为 $\widehat{A}$ 中良好定义的元素, 并且 $(1-a)(1-a)^{-1}=1$. 故对任意 $a\in m\widehat{A}$, $1-a$ 均为 A 中的乘法可逆元. 从而知 $m\widehat{A}$ 包含在 A 的任一极大理想中. 又由于 $\widehat{A}/\widehat{m}=\widehat{A/m}=A/m=k$ 为域, 并且 $\widehat{m}=m\widehat{A}$, 即知 $m\widehat{A}$ 为 $\widehat{A}$ 的唯一极大理想. □

例 3.3.2 设 p 为素数, 整数环 $\mathbb{Z}$ 在 (p) 处的完备化记为 $\mathbb{Z}_p$, 称为 ***p*-进整数环**. 回忆 $\mathbb{Z}$ 在 (p) 处的局部化记为 $\mathbb{Z}_{(p)}$. 由于对每个 $i\geq 1$, 有同构 $\mathbb{Z}/(p^i)\simeq\mathbb{Z}_{(p)}/(p^i)$, 从而

$\mathbb{Z}_p \simeq \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$. 这样 $\mathbb{Z}_p$ 为 Noether 局部环, 并且其极大理想为 $p\mathbb{Z}_p$, 剩余类域为 $\mathbb{F}_p$.

练习 3.3.1 证明 $\mathbb{Z}_p$ 为整环.

3.4 伴随素理想

伴随素理想是极小素理想的一种推广, 其在研究 Noether 环上的有限模时起着重要的作用.

定义 3.4.1 设 A 为环, M 为 A-模. A 的素理想 P 称为 M 的一个**伴随素理想**, 如果存在 $x \in M$, 使得 $P = \operatorname{ann}(x)$. M 的所有伴随素理想的集合记为 $\operatorname{Ass}_A(M)$ 或 $\operatorname{Ass}(M)$.

环 A 的伴随素理想是指 A 作为 A-模的伴随素理想. 环 A 的所有伴随素理想形成的集合记为 $\operatorname{Ass}(A)$.

由定义, 一个素理想 P 为伴随素理想等价于存在一个 A-模的单同态 $A/P \hookrightarrow M$.

下面的命题给出了伴随素理想的存在性.

命题 3.4.1 设 A 为 Noether 环, M 为非零 A-模. 则集合 $\{\operatorname{ann}(x) \mid x \in M, x \neq 0\}$ 的每个极大元均为 M 的伴随素理想. 特别地, $\operatorname{Ass}(M) \neq \varnothing$.

证明 注意到集合 $\{\operatorname{ann}(x) \mid x \in M, x \neq 0\}$ 非空. 由 A 的 Noether 性知该集合存在极大元. 设 $I = \operatorname{ann}(x)$ 为一个极大元. 只需证明 I 为素理想. 设 $a, b \in A$ 且 $ab \in I$. 则 $abx = 0$. 设 $b \notin I$, 则 $bx \neq 0$, 并且 $a \in \operatorname{ann}(bx)$. 而 $I \subset \operatorname{ann}(bx) \subsetneq A$. 从而由 I 的极大性知 $I = \operatorname{ann}(bx)$, 这样得到 $a \in I$. 由此证明了 I 为素理想. □

对 A-模 M, 我们称 $a \in A$ 为 M 的一个**零因子**, 如果存在 $0 \neq x \in M$, 使得 $ax = 0$.

推论 3.4.1 设 A 为 Noether 环, M 为非零 A-模. 则 $\bigcup\limits_{P \in \operatorname{Ass}(M)} P$ 恰为 M 的所有零因子形成的集合.

证明 这是命题 3.4.1 的直接推论. □

对 A-模 M, 一个元素 $a \in A$ 称为 M-**正则元**, 如果乘 a 映射 $M \to M$, $x \mapsto ax$ 为单同态. 由推论 3.4.1, 在 A 为 Noether 环时, a 为 M-正则元等价于 a 不包含在任一伴随素理想中. 后面我们经常利用这个结论来找 M-正则元.

下面分析伴随素理想的有限性.

命题 3.4.2 设 A 为环, $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模短正合列. 则 $\operatorname{Ass}(M_2) \subset \operatorname{Ass}(M_1) \bigcup \operatorname{Ass}(M_3)$.

证明 设 $P = \operatorname{ann}(x) \in \operatorname{Ass}(M_2)$. 则 $A/P \simeq Ax \subset M_2$. 如果 $Ax \bigcap M_1 = 0$. 则复合映射 $Ax \hookrightarrow M_2 \to M_3$ 为单同态, 从而 $P \in \operatorname{Ass}(M_3)$. 如果 $Ax \bigcap M_1 \neq 0$. 任取

$0 \neq y \in Ax \bigcap M_1$, 由 $Ax \simeq A/P$ 且 A/P 作为环是整环, 可以看到 $\operatorname{ann}_A(y) = P$, 故 $P \in \operatorname{Ass}(M_1)$. □

下面的命题说明取伴随素理想是与局部化交换的.

命题 3.4.3 设 A 为 Noether 环, M 为 A-模. 设 S 为 A 的乘法子集. 则 $\operatorname{Ass}_{A_S}(M_S) = \operatorname{Ass}_A(M) \bigcap \operatorname{Spec} A_S$. 这里将 $\operatorname{Spec} A_S$ 等同到 A 中与 S 交集为空的素理想全体.

证明 设 $P \in \operatorname{Ass}_{A_S}(M_S)$, 则存在 $x \in M$, 使得 $P = \operatorname{ann}_{A_S}(x)$. 设 $a_1, \dots, a_r$ 为 P 的生成元, 则对每个 i, 存在 $s_i \in S$, 使得 $s_i a_i x = 0$. 由此不难看到 $P = \operatorname{ann}_A(s_1 \cdots s_r x)$.

设 $P \in \operatorname{Ass}_A(M) \bigcap \operatorname{Spec} A_S$. 则存在 $x \in M$, 使得 $P = \operatorname{ann}_A(x)$, 并且 $P \bigcap S = \varnothing$. 利用定义验证即得, 将 P 看作 A_S 的素理想, 有 $P = \operatorname{ann}_{A_S}(x)$. 故 $P \in \operatorname{Ass}_{A_S}(M_S)$. □

综合利用上面的几个命题, 我们得到以下关于 Noether 环上有限模的伴随素理想的基本性质.

定理 3.4.1 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模, 则

(i) 存在 M 的有限长子模列 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$, 使得 $\forall\, i = 1, \dots, n$, 有 $M_i/M_{i-1} \simeq A/P_i$, $P_i \in \operatorname{Spec} A$.

(ii) $\operatorname{Ass}(M)$ 为有限集合.

(iii) $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$.

(iv) $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元形成的集合与 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元形成的集合相同.

证明 (i): 任取 $P_1 = \operatorname{ann}(x_1) \in \operatorname{Ass}(M)$, 令 $M_1 = Ax_1$, 则 $M_1 \simeq A/P_1$. 如果 $M_1 \neq M$, 则取 $P_2 = \operatorname{ann}(\bar{x}_2) \in \operatorname{Ass}(M/M_1)$, 这样得到 $A/P_2 \simeq A\bar{x}_2$. 由 M/M_1 的子模 $A\bar{x}_2$ 对应到 M 的子模 $M_2 := Ax_2 + M_1$, 故 $M_1 \subsetneq M_2$, 且 $M_2/M_1 \simeq A\bar{x}_2 \simeq A/P_2$. 继续操作下去, 我们得到 M 的子模列 $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$, 由 M 为 Noether 模可知这个子模列在有限步稳定, 故存在 n 使得 $M_n = M$.

(ii): 注意到对素理想 $P \in \operatorname{Spec} A$, 由 A/P 为整环可知 $\operatorname{Ass}_A(A/P) = \{P\}$. 再由 (i) 和命题 3.4.2 即知 $\operatorname{Ass}(M)$ 有限.

(iii): 设 $P \in \operatorname{Ass}(M)$, 则由伴随素理想和局部化交换 (命题 3.4.3) 知 $P \in \operatorname{Ass}_{A_P}(M_P)$, 特别地, $\operatorname{Ass}_{A_P}(M_P)$ 非空. 故 $M_P \neq 0$, 即 $P \in \operatorname{Supp}(M)$.

(iv): 设 P 为 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元, 则 $M_P \neq 0$. 并且由 $\operatorname{Supp}_{A_P}(M_P) = \{PA_P\}$ 知 $\operatorname{Ass}_{A_P}(M_P) = \{PA_P\}$. 因此 P 为 $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元. 再设 P 为 $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元. 如果 P 不是 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元, 则存在更小的素理想 $Q \subsetneq P$ 使得 $M_Q \neq 0$. 再由伴随素理想和局部化交换知 $\operatorname{Ass}_{A_Q}(M_Q) = \operatorname{Ass}_A(M) \bigcap \operatorname{Spec} A_Q \neq \varnothing$. 由此可以找到 M 的包含在 Q 中的伴随素理想, 这与 P 的极小性矛盾. 故 P 也为 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元. □

在上面的定理中取 $M = A$, 即得 A 的极小素理想有限的另一个证明 (命题 1.5.4). 现在可以将命题 2.1.5 加强为如下的

命题 3.4.4 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 设 $x \in M$, 则 $x = 0 \iff \forall\, P \in \mathrm{Ass}(M)$, 均有 x 在 M_P 中为 0.

证明 只需证明 $\Longleftarrow$. 如果在 M 中, $x \neq 0$, 那么 $\mathrm{ann}(x)$ 为 A 的真理想, 从而由命题 3.4.1, 存在 $P \in \mathrm{Ass}(M)$ 包含 $\mathrm{ann}(x)$. 这与 x 在 M_P 中为 0 矛盾. 故在 M 中有 $x = 0$. □

同样地, 在 Noether 整环的情形可以将命题 1.3.13 加强为

命题 3.4.5 设 A 为 Noether 整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$. 设 $x = \frac{b}{a} \in K$. 如果对商环 $A/(a)$ 的任意伴随素理想 $P \in \mathrm{Ass}(A/(a))$, 通过将 P 等同于 A 中包含 (a) 的素理想, 均有 $x \in A_P$, 则 $x \in A$.

证明 与命题 1.3.13 的证明思路一样, 考虑理想 $I := \{s \in A \mid sx \in A\}$. 不难看到, $(a) \subset I$, 并且 $I/(a) = \mathrm{ann}_{A/(a)}(\bar{b})$. 如果 $I \neq A$, 则 $I/(a)$ 为 $A/(a)$ 的真理想, 从而由命题 3.4.1 知存在 $P \in \mathrm{Ass}(A/(a))$, 使得 $I/(a) \subset P$. 另一方面, 通过将 P 等同于 A 中包含 (a) 的素理想, 由 $x \in A_P$ 知存在 $s \in A \setminus P$, 使得 $sx \in A$, 即 $s \in I$. 这样在 $A/(a)$ 中有 $\bar{s} \in I/(a)$, 并且 $\bar{s} \notin P$. 这与 $I/(a) \subset P$ 矛盾. 故 $I = A$, 即得 $x \in A$. □

3.5 应用: 符号幂与准素分解

我们应用前几节的技术 (伴随素理想, 局部化, Artin-Rees 引理) 来讨论 Noether 环中的准素分解.

定义 3.5.1 设 A 为 Noether 环, $P \in \mathrm{Spec}\, A$. 称 A 的理想 I 为 P-**准素理想**, 如果 $\mathrm{Ass}_A(A/I) = \{P\}$. 这也等价于 $I \subset P$, 并且商环 A/I 恰有一个伴随素理想 P/I.

由定义, 素理想均为准素理想. 对于 Noether 局部环 (A, m), 容易看到对任意正整数 $s \geq 1$, 商环 A/m^s 只有一个素理想 m, 从而也只有一个伴随素理想, 这样得到 m^s 为 A 的准素理想. 对一般的 Noether 环 A, 我们可以通过局部化得到伴随素理想: 取一个素理想 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 则对正整数 s, 环 A_P/P^sA_P 只有一个素理想. 考虑自然同态 $A \to A_P/P^sA_P$, 记 $P^{(s)}$ 为其核, 则有单同态 $A/P^{(s)} \hookrightarrow A_P/P^sA_P$, 这样得到 $A/P^{(s)}$ 也只有一个伴随素理想. 由此, 我们得到

定义–命题 3.5.1 设 P 为 Noether 环 A 的素理想. 对正整数 $s \geq 1$, P 的 s-次**符号幂** $P^{(s)}$ 定义为自然同态 $A \to A_P/P^sA_P$ 的核. $P^{(s)}$ 为 P-准素理想.

命题 3.5.1 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的 P-准素理想. 则有:

(i) $\sqrt{I} = P$.

(ii) 存在 $s \geq 1$, 使得 $P^{(s)} \subset I$.

证明 (i): 由于 A/I 的极小素理想均为伴随素理想, 故 P/I 为 A/I 的唯一极小素理想, 从而 $\sqrt{I}=P$.

(ii): 这等价于要证存在 $s\geq 1$, 使得 $P^{(s)}$ 在 A/I 中为 0. 由命题 3.4.4 以及 $\mathrm{Ass}_A(A/I)=\{P\}$, 只需证明在 $(A/I)_P=A_P/IA_P$ 中 $P^{(s)}$ 为 0. 由定义, $P^{(s)}$ 在 A_P 中恰为 $(PA_P)^s$. 由于 P 为 $(A/I)_P$ 中的唯一极小素理想, 故存在 $s\geq 1$, 使得 $P^{(s)}$ 在 $(A/I)_P$ 中为 0. □

几何上看, $f\in P^{(s)}$ 等价于 f 在 $V(P)$ 的一个非空开集上零点的阶不小于 s. 由于 A 的所有伴随素理想附近的行为控制着 f 在 A 中是否为零 (命题 3.4.4), 故我们可以期望下面的性质.

命题 3.5.2 设 A 为 Noether 环, 设 $\mathrm{Ass}\,A=\{P_1,\ldots,P_m\}$. 则存在正整数 $s\geq 1$, 使得

$$0=P_1^{(s)}\bigcap P_2^{(s)}\bigcap\cdots\bigcap P_m^{(s)}.$$

证明 记 $I_s=P_1^{(s)}\bigcap P_2^{(s)}\bigcap\cdots\bigcap P_m^{(s)}$. 我们希望找到 $s\geq 1$, 使得 I_s 在每个 A_{P_i} 中均为 0, $1\leq i\leq m$.

首先考虑极小素理想. 不妨设 $P_1,\ldots,P_n$ $(n\leq m)$ 为 A 的所有极小素理想. 由于 A_{P_i} $(1\leq i\leq n)$ 为零维 Noether 局部环, 不难看到存在 $s_1\geq 1$, 使得 I_{s_1} 在每个 A_{P_i} $(1\leq i\leq n)$ 中均为 0.

假设 $I_{s_1}\neq 0$. 将 I_{s_1} 看作 A-模, 则 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})=V(\mathrm{ann}(I_{s_1}))$ 不包含 $P_1,\ldots,P_n$. 并且 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的极小元也为 I_{s_1} 的伴随素理想, 从而也为 A 的伴随素理想 (I_{s_1} 是 A 的子模). 任取 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的一个极小元 Q, 则 Q 等于某个 P_i, $n+1\leq i\leq m$. 由极小性, 存在 $s\geq 1$, 使得在 A_Q 中有 $Q^sA_Q\subset\mathrm{ann}(I_{s_1}A_Q)$, 这样得到在 A_Q 中 $Q^sI_{s_1}=0$. 由 Artin-Rees 引理 3.3.1, 不难看到对充分大的 s, 在 A_Q 中有 $I_s\subset Q^s\bigcap I_{s_1}\subset Q^{s-c}I_{s_1}=0$. 由于 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的极小元个数有限, 我们可以找到正整数 $s_2\geq s_1$, 使得对 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的每个极小元 Q, 均有 I_{s_2} 在 A_Q 中为 0. 这样得到 $\mathrm{Supp}(I_{s_2})\subsetneqq\mathrm{Supp}(I_{s_1})$.

继续讨论下去, 如果对任意 s 都有 $I_s\neq 0$, 则我们将得到无限长的递增数列 $s_1\leq s_2\leq\ldots s_i\leq s_{i+1}\leq\ldots$, 使得 $\forall\, i$, 均有 $\mathrm{Supp}(I_{s_{i+1}})\subsetneqq\mathrm{Supp}(I_{s_i})$. 这与 A 的 Noether 性矛盾! 故必有一个正整数 s 使得 $I_s=0$. □

对任意理想 I, 通过考虑 A/I, 我们得到如下准素分解的存在性

定理 3.5.1 设 I 为 Noether 环 A 的理想. 设 $\mathrm{Ass}(A/I)=\{P_1,\ldots,P_m\}$. 则存在正整数 $s\geq 1$, 使得

$$I=P_1^{(s)}\bigcap P_2^{(s)}\bigcap\cdots\bigcap P_m^{(s)}.$$

特别地, I 可写为有限个准素理想的交集, 这称为 I 的一个**准素分解**.

证明 应用命题 3.5.2 于商环 A/I 即可. □

显然 I 的准素分解并不唯一. 为了得到尽可能具有唯一性的分解, 我们对一个准素分解 $I=I_1\bigcap\cdots\bigcap I_m$ 做一些修改, 使其长度 m 尽可能小:

- 如果 I_i 是冗余的, 即 $I=I_1\bigcap\dots I_{i-1}\bigcap I_{i+1}\bigcap\cdots\bigcap I_m$, 则可以将 I_i 去掉.
- 如果 I_i 与 I_j 均为 P-准素理想, 则 $I_i\bigcap I_j$ 也为 P-准素理想 (这可以通过考虑单同态 $A/I_i\cap I_j\hookrightarrow A/I_i\oplus A/I_j$ 看出), 从而可以去掉 I_i 和 I_j, 替换为 $I_i\bigcap I_j$.

我们称一个准素分解 $I=I_1\bigcap\cdots\bigcap I_m$ 是极小的, 如果其满足:
(1) 每个 I_i 均不是冗余的. 即对每个 i, 均有 $I\neq I_1\bigcap\dots I_{i-1}\bigcap I_{i+1}\bigcap\cdots\bigcap I_m$.
(2) 素理想 $\sqrt{I_1},\dots,\sqrt{I_m}$ 互不相同.

下面的命题表明, 极小准素分解一定存在, 其具有一定程度的唯一性.

定理 3.5.2 设 I 为 Noether 环 A 的理想. 则
(i) I 一定存在极小的准素分解. 设为 $I=I_1\bigcap\cdots\bigcap I_m$.
(ii) $\operatorname{Ass}(A/I)=\{\sqrt{I_1},\dots,\sqrt{I_m}\}$.
(iii) 设 $P_i\coloneqq\sqrt{I_i}$ 为 $\operatorname{Ass}(A/I)$ 中的极小元, 那么 $I_i=\operatorname{Ker}(A\to A_{P_i}/IA_{P_i})$. 特别地, 这样的 I_i 由 I 唯一决定.

证明 (i): 准素分解的存在性由定理 3.5.1给出. 由上面的讨论, 对准素分解进一步约化可以得到一个极小准素分解.

(ii): 记 $P_i=\sqrt{I_i}$. 由单同态 $A/I\hookrightarrow A/I_1\oplus\cdots\oplus A/I_m$ 可得 $\operatorname{Ass}(A/I)\subset\{P_1,\dots,P_m\}$. 下面说明 $P_1\in\operatorname{Ass}(A/I)$. 考虑同态 $\varphi: A/I\to A/I_2\oplus\cdots\oplus A/I_m$. 由 I_1 的非冗余性知 $\operatorname{Ker}\varphi\neq 0$, 并且 $\operatorname{Ker}\varphi\hookrightarrow A/I_1$ 为单同态. 由 $\{P_1\}=\operatorname{Ass}(A/I_1)$ 得到 $\{P_1\}=\operatorname{Ass}(\operatorname{Ker}\varphi)\subset\operatorname{Ass}(A/I)$. 由对称性知 $\forall\, i$, 均有 $P_i\in\operatorname{Ass}(A/I)$.

(iii): 由 P_i 的极小性知对任意 $j\neq i$, 有 $(A/I_j)_{P_i}=0$. 正合列

$$0\longrightarrow I\longrightarrow A\longrightarrow A/I_1\bigoplus\cdots\bigoplus A/I_m$$

在 P_i 处作局部化, 得到正合列 $0\longrightarrow I_{P_i}\longrightarrow A_{P_i}\longrightarrow(A/I_i)_{P_i}$. 由此得到 $I_{P_i}=I_iA_{P_i}$, 故 $I_i\subset J\coloneqq\operatorname{Ker}(A\to A_{P_i}/IA_{P_i})$. 为了得到反包含 $J\subset I_i$, 只需证明 J 在 A/I_i 中为零. 由 $\operatorname{Ass}(A/I_i)=\{P_i\}$ 以及命题 3.4.4, 又只需证明 J 在局部化 $(A/I_i)_{P_i}$ 中为零. 而这由 J 的定义和 $A_{P_i}/IA_{P_i}=A_{P_i}/I_iA_{P_i}$ 即得. $\square$

3.6 整扩张

定义 3.6.1 设 $\varphi: A \to B$ 为环同态. 称 $b \in B$ 在 A 上整, 如果存在 $n \geq 1$, 存在 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, 使得 $b^n + \varphi(a_{n-1})b^{n-1} + \cdots + \varphi(a_1)b + \varphi(a_0) = 0$.

称环同态 $\varphi: A \to B$ 为**整扩张**, 或 B 为 A 的整扩张, 如果任意 $b \in B$ 均在 A 上整.

注意整扩张不一定为单同态. 另外我们经常省略同态记号 φ, 而将上面关于 b 的首一方程直接记作 $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.

命题 3.6.1 设 $A \to B$ 为环同态, $b \in B$. 则以下几条互相等价:

(i) b 在 A 上整.

(ii) $A[b]$ 为有限 A-模. 其中 $A[b]$ 是指 B 的包含 A 的像以及 b 的最小子环.

(iii) 存在 B 的 A-子代数 C, 使得 $b \in C$, 并且 C 为有限 A-模.

证明 (i) $\implies$ (ii): 设 b 满足系数在 A 上的 n 次首一方程, 则容易看到 $1, b, \ldots, b^{n-1}$ 为 $A[b]$ 作为 A-模的一组生成元.

(ii) $\implies$ (iii): 取 $C = A[b]$ 即可.

(iii) $\implies$ (i): 利用行列式技巧. 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 C 作为 A-模的一组生成元. 任取 $c \in C$, 考虑乘 c 映射的矩阵表示, 得到 A 上的 $n \times n$ 方阵 $P \in M_n(A)$, 使得

$$c(e_1, \ldots, e_n)^t = P(e_1, \ldots, e_n)^t.$$

从而由行列式技巧得到 $\det(c\,\mathrm{I}_n - P)(e_1, \ldots, e_n)^t = 0$. 由于 $e_1, \ldots, e_n$ 可以 A-线性组合出 C 的乘法单位元 1, 故知 $\det(c\,\mathrm{I}_n - P) = 0$. 将该行列式展开即得 c 满足系数在 A 上的 n 次首一方程. 从而 $A \to C$ 为整扩张. 特别地, $b \in C$ 在 A 上整. □

定义–命题 3.6.1 设 $A \to B$ 为环同态. 如果 $b_1, b_2 \in B$ 均在 A 上整, 那么 $b_1 + b_2, b_1 b_2$ 都在 A 上整. 特别地, $\tilde{A} \coloneqq \{b \in B \mid b \text{ 在} A \text{ 上整}\}$ 是 B 的子环, 称为 A 在 B 中的**整闭包**.

证明 设 b_1, b_2 均在 A 上整, 则由命题 3.6.1, $A[b_1]$ 为有限 A-模. 同样地, b_2 在 A 上整蕴含 b_2 在 $A[b_1]$ 上整, 从而 $A[b_1][b_2] = A[b_1, b_2]$ 为有限 $A[b_1]$-模. 这样得到 $A[b_1, b_2]$ 为有限 A-模. 再由命题 3.6.1 即知 $A[b_1, b_2]$ 中的元素 $b_1 + b_2, b_1 b_2$ 均在 A 上整. □

定义 3.6.2 设 B 为 A-代数, 结构同态为 $\varphi: A \to B$. 如果存在有限个元素 $b_1, \ldots, b_n \in B$, 使得 $B = A[b_1, \ldots, b_n]$, 则称 B 为**有限生成 A-代数**. 如果 B 作为 A-模为有限模, 则称 φ 为**有限扩张**.

由定义, B 为有限生成 A-代数等价于存在 A-代数的满同态 $A[x_1, \ldots, x_n] \to B$.

命题 3.6.2 设 $A \to B$ 为环同态. 则以下三条互相等价:

(i) $B = A[b_1, \ldots, b_n]$ 为有限生成 A-代数, 并且每个 b_i 均在 A 上整.

(ii) $A \to B$ 为有限扩张.

(iii) $A \to B$ 为整扩张, 并且 B 为有限生成 A-代数.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 设 $m \geq 1$, 使得每个 b_i 均满足 A 系数的 m 次首一方程. 则易验证 B 作为 A-模, 有一组生成元 $\left\{b_1^{a_1} \ldots b_n^{a_n} \mid 0 \leq a_i \leq m-1\right\}$. 从而 $A \to B$ 为有限扩张.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 由命题 3.6.1 即得.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 显然. □

下面考察整扩张与张量积, 局部化, 取商之间的关系.

命题 3.6.3 设 $A \to B$ 为整扩张. 则有:

(i) 如果 $B \to C$ 也为整扩张, 那么复合同态 $A \to C$ 为整扩张.

(ii) 对任意 A-代数 C, $C \to C \otimes_A B$ 为整扩张.

(iii) 对 A 的理想 I 以及 B 的理想 J, 如果 $IB \subset J$, 那么 $A/I \to B/J$ 为整扩张. 特别地, $A/J \cap A \to B/J$ 为整扩张.

(iv) 对 A 的任一乘法子集 S, 局部化 $A_S \to B_S$ 为整扩张.

证明 (i): 任取 $c \in C$, 设 c 满足如下 B 系数的首一方程: $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$, $b_i \in B$. 考虑 C 的 A-子代数 $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c]$. 由命题 3.6.1 知 $A \to A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$ 和 $A[b_0, \ldots, b_{n-1}] \to A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c]$ 均为有限扩张. 从而 $A \to A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c]$ 为有限扩张. 故 c 在 A 上整.

(ii), (iii), (iv) 由定义直接验证即可. □

命题 3.6.4 设 $A \hookrightarrow B$ 为整环之间的单同态, 且为整扩张. 则 A 为域 $\Longleftrightarrow$ B 为域.

证明 $\Longrightarrow$: 任取 $0 \neq b \in B$, 考虑 b 满足的次数最小的 A 系数首一方程: $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in A$. 如果 $a_0 = 0$, 则 b 将满足次数更小的首一方程 $b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$, 这与开始的首一方程次数最小矛盾. 故 $a_0 \neq 0$, 这就得到 $b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 = 0$, 从而由 A 为域知 b 在 B 中的逆元为 $-a_0^{-1}(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1)$. 这样得到 B 中非零元均可逆, 从而 B 为域.

$\Longleftarrow$: 任取 $0 \neq a \in A$, 设 a 在域 B 中的逆元为 $a^{-1} \in B$. 只需证明 $a^{-1} \in A$. 由 $A \to B$ 为整扩张, a^{-1} 满足 A 系数的首一方程: $(a^{-1})^n + a_{n-1}(a^{-1})^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in A$. 该等式两边同时乘以 a^{n-1} 得到 $a^{-1} + a_{n-1} + \cdots + a_0 a^{n-1} = 0$, 由此知 $a^{-1} \in A$. □

推论 3.6.1 设 $A \to B$ 为整扩张, 设 $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P = Q \cap A$. 则 Q 为 B 的极大理想 $\Longleftrightarrow$ P 为 A 的极大理想.

证明 由 $A/P \hookrightarrow B/Q$ 为单的整扩张和命题 3.6.4 即得. □

命题 3.6.5 设 $A \to B$ 为整扩张, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$. 则 P 处纤维中的点代表的素理想没有包含关系, 即对任意 $Q_1 \neq Q_2 \in \operatorname{Spec} B$, 如果 $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = P$, 那么 $Q_1 \not\subseteq Q_2$.

证明 假设 $Q_1 \subset Q_2$. 在 P 处作局部化, 则 $A_P \to B_P$ 仍为整扩张, 并且对 $i = 1, 2$, Q_i 看作 B_P 中的素理想, 满足 $Q_i \cap A_P = PA_P$. 由推论 3.6.1 知 Q_i 为 B_P 中的极大理想, $i = 1, 2$. 再由 $Q_1 \subset Q_2$ 即知 $Q_1 = Q_2$. □

命题 3.6.6 设 $\varphi : A \to B$ 为整扩张, 则 $\varphi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 为闭映射. 更进一步, 设 J 为 B 的理想, 则 $\varphi^*(V(J)) = V(J \cap A)$. 特别地, 若 φ 为单的整扩张, 则 φ^* 为满射.

证明 设 J 为 B 的理想. 由定义即得 $\varphi^*(V(J)) \subset V(J \cap A)$. 设 $\bar{A} = A/J \cap A$, $\bar{B} = B/J$. 则 $\bar{A} \hookrightarrow \bar{B}$ 为单的整扩张. 任取 $P \in \operatorname{Spec} \bar{A}$, 在 P 处作局部化, 得到单的整扩张 $\bar{A}_P \hookrightarrow \bar{B}_P$. 这样知 $\bar{B}_P \neq 0$. 任取 $\bar{B}_P$ 的极大理想 Q, 则由推论 3.6.1 知 $Q \cap \bar{A}_P$ 为极大理想, 从而 $Q \cap \bar{A}_P = P\bar{A}_P$. 再由 $\operatorname{Spec} \bar{A} \simeq V(J \cap A)$ 和 $\operatorname{Spec} \bar{B} \simeq V(J)$ 知 $V(J \cap A) \subset \varphi^*(V(J))$. □

作为整扩张的应用, 我们证明域上有限生成代数的一些独特性质, 主要是 Hilbert 零点定理和 Noether 正规化定理. 首先看一个例子.

例 3.6.1 设 m 为 $\mathbb{C}[x, y]$ 中的极大理想, 我们分析 m 的形状. 由于 $\mathbb{C}[x, y]$ 不是域, 故 $m \neq 0$. 从而可以取 $0 \neq f(x, y) \in m$.

(i) 假设 $f(x, y) = y^n + g_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + g_0(x)$ 为 y 的首一多项式. 则 $\overline{m} := m/(f)$ 为商环 $\mathbb{C}[x, y]/(f)$ 的极大理想. 由 f 为 y 的首一多项式可知 $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x, y]/(f)$ 为整扩张. 从而 $\overline{m} \bigcap \mathbb{C}[x]$ 为 $\mathbb{C}[x]$ 的极大理想 (推论 3.6.1). 这样得到 $\overline{m} \bigcap \mathbb{C}[x] = (x - a)$, $a \in \mathbb{C}$. 从而 $(x - a, f) \subset m$, 故 $m/(x - a, f)$ 为 $\mathbb{C}[x, y]/(x - a, f) \simeq \mathbb{C}[y]/(f(a, y))$ 的极大理想. 这样可以找到 $b \in \mathbb{C}$ 满足 $f(a, b) = 0$, 使得 $m/(x - a, f) = (y - b)$. 由此不难看到 $m = (x - a, y - b)$.

(ii) 对一般情形, 由于 $f \neq 0$, 不妨设 $f(0, y) \neq 0$. 从而可以找到充分大的正整数 N, 使得通过作如下可逆变量代换:

$$\begin{cases} x = x' + y'^N \\ y = y' \end{cases}$$

$f(x, y) = y'^m + h_{m-1}(x')y'^{m-1} + \cdots + h_0(x')$ 成为 y' 的首一多项式. 由此化归为前一种情形, 仍然得到 $m = (x - a, y - b)$, $a, b \in \mathbb{C}$.

由上面的讨论, 我们得到结论: $\mathbb{C}[x, y]$ 中的极大理想均形如 $(x - a, y - b)$, 其中 $a, b \in \mathbb{C}$.

上面论证的方法可以总结为两步: 首先通过可逆变量代换制造首一多项式, 其次通过构造整扩张将问题约化到更少变量的情况. 对一般的多项式环, 不断应用同样的做法, 我们得到下面 Hilbert 零点定理的弱形式.

定理 3.6.1 (Hilbert 零点定理: 弱形式) 设 k 为代数封闭域, 设 m 为多项式环 $k[x_1,\ldots,x_n]$ 的极大理想. 则存在 $a_1,\ldots,a_n\in k$, 使得 $m=(x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n)$.

证明 对 n 进行归纳. 取 $0\neq f\in m$. 设 $f(0,\ldots,0,x_n)\neq 0$. 作如下形式的可逆变量代换:

$$\begin{cases} x_1=x_1'+x_n'^{N_1}\\ x_2=x_2'+x_n'^{N_2}\\ \vdots\\ x_n=x_n' \end{cases}$$

不难看到, 通过适当地取正整数 $N_1,\ldots,N_{n-1}$, 可以使得 f 成为 x_n' 的首一多项式. 从而 $k[x_1',\ldots,x_{n-1}']\to k[x_1,\ldots,x_n]/(f)=k[x_1',\ldots,x_n']/(f)$ 为整扩张. 令 $\bar{m}=m/(f)$, 则由推论 3.6.1 知 $\bar{m}\cap k[x_1',\ldots,x_{n-1}']$ 为极大理想. 由归纳假设知存在 $a_1',\ldots,a_{n-1}'\in k$, 使得 $\bar{m}\cap k[x_1',\ldots,x_{n-1}']=(x_1'-a_1',\ldots,x_{n-1}'-a_{n-1}')$. 在商环 $k[x_n']=k[x_1',\ldots,x_n']/(x_1'-a_1',\ldots,x_{n-1}'-a_{n-1}')$ 中, 极大理想 $m/(x_1'-a_1',\ldots,x_{n-1}'-a_{n-1}')$ 为主理想, 因而具有形式 $(x_n'-a_n')$, $a_n'\in k$. 这样就得到极大理想之间的包含关系 $(x_1'-a_1',\ldots,x_n'-a_n')\subset m$. 故 $m=(x_1'-a_1',\ldots,x_n'-a_n')$. 再通过变量代换即知 m 具有形式 $(x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n)$, $a_i\in k$. □

定理 3.6.2 (Hilbert 零点定理: 剩余类域形式) 设 k 为域, A 为有限生成 k 代数. 设 $P\in\operatorname{Spec}A$. 则以下几条互相等价:

(i) P 为极大理想.

(ii) 剩余类域 $k(P)$ 为 k 的有限扩张.

(iii) 剩余类域 $k(P)$ 为 k 的代数扩张.

证明 令 $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): 设 P 为极大理想, 考虑同态 $A/P=k(P)\hookrightarrow k(P)\otimes_k\bar{k}$. 由 $k\hookrightarrow\bar{k}$ 为整扩张 (代数扩张) 和命题 3.6.3 知 $k(P)\hookrightarrow k(P)\otimes_k\bar{k}$ 为单的整扩张. 再由命题 3.6.6 知存在 $Q\in\operatorname{Spec}(k(P)\otimes_k\bar{k})$, 使得 $Q\cap k(P)=(0)$. 对单的整扩张 $k(P)\hookrightarrow\frac{k(P)\otimes_k\bar{k}}{Q}$ 应用命题 3.6.4 知 $\frac{k(P)\otimes_k\bar{k}}{Q}$ 为域, 即 Q 为 $k(P)\otimes_k\bar{k}=(A/P)\otimes_k\bar{k}$ 的极大理想. 由于 $(A/P)\otimes_k\bar{k}$ 为代数封闭域 $\bar{k}$ 上的有限生成代数, 根据 Hilbert 零点定理的弱形式, 不难看到 $\bar{k}\to\frac{k(P)\otimes_k\bar{k}}{Q}$ 为同构. 从而 $\frac{k(P)\otimes_k\bar{k}}{Q}$ 的子域 $k(P)$ 为 k 的代数扩张. 再由 $k(P)=A/P$ 为有限生成 k-代数知 $k(P)/k$ 为有限扩张.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 考虑环的单扩张 $k\hookrightarrow A/P\hookrightarrow\operatorname{Frac}(A/P)=k(P)$. 由 $k(P)/k$ 为代数扩张 (整扩张) 知 $k\hookrightarrow A/P$ 为整扩张, 从而由命题 3.6.4 知 A/P 为域, 即 P 为极大理想. □

定理 3.6.3 (Hilbert 零点定理: 强形式) 设 k 为域, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包. 设 I 为多项式

环 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的理想. 设 $f\in k[x_1,\dots,x_n]$ 满足: 对任意 $a=(a_1,\dots,a_n)\in\bar{k}^n$, 只要 $g(a)=0,\forall\, g\in I$, 就有 $f(a)=0$. 则 $f\in\sqrt{I}$.

证明 记 $A=k[x_1,\dots,x_n]/I$, $A_{\bar{k}}=A\otimes_k\bar{k}$. 注意到 $A_f\otimes_k\bar{k}=(A_{\bar{k}})_f=A_{\bar{k}}[\frac{1}{f}]$ 为有限生成 $\bar{k}$-代数. 由定理 3.6.2, $(A_{\bar{k}})_f$ 中的素理想 P 为极大理想当且仅当 $k(P)=\bar{k}$. 由此可以看到 $(A_{\bar{k}})_f$ 中的极大理想一一对应到 $A_{\bar{k}}$ 中满足 $f(m)\neq 0$ 的极大理想 m. 再由 $A_{\bar{k}}=\bar{k}[x_1,\dots,x_n]/I$ 和 Hilbert 零点定理的弱形式, 得到 $A_{\bar{k}}$ 的极大理想一一对应到理想 I 在 $\bar{k}^n$ 中的公共零点 $Z:=\{a=(a_1,\dots,a_n)\in\bar{k}^n\mid g(a)=0,\forall\, g\in I\}$. 而由条件, $\forall\, a\in Z$, 均有 $f(a)=0$. 故 $(A_{\bar{k}})_f$ 没有极大理想. 这说明 $(A_{\bar{k}})_f$ 为零环, 从而其子环 A_f 也为零环. 故 f 为 A 中幂零元. 在 $k[x_1,\dots,x_n]$ 即为 $f\in\sqrt{(0)}$ □

由上面的论证过程, 不难看到上述 Hilbert 零点定理的三种形式互相等价, 它们各自有不同的适用场景.

注记 3.6.1 设 k 为代数封闭域. 设 $f_1,\dots,f_m\in k[x_1,\dots,x_n]$ 在 k^n 中没有公共零点, 则由 Hilbert 零点定理, 存在 $g_1,\dots,g_m\in k[x_1,\dots,x_n]$ 使得 $\sum_{i=1}^m g_if_i=1$. 有效零点定理 (Effective Nullstellensatz) 可以利用 $\max\limits_{1\le i\le m}\deg f_i$ 给出 $\max\limits_{1\le i\le m}\deg g_i$ 的上界. 从而寻找这样的 g_i 就可以转化为解线性方程组的问题. 这方面的结果可见 [8, 9].

一般而言, 拓扑空间 X 的一个开集中的闭点在 X 中不一定还是闭点. 但是对于域上有限生成代数的素谱空间, 开子集中的闭点总是全空间的闭点, 即一个点是否为闭点是一个局部条件.

推论 3.6.2 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 设 $P\in\operatorname{Spec}A$, 以及 U 为 P 的一个开邻域. 则 P 为 $\operatorname{Spec}A$ 的闭点 $\iff$ P 为 U 的闭点 (即 P 在 U 中的闭包为 P 自身).

证明 不妨设 $U=D(f)$ 为主开集. 则 A_f 也为有限生成 k-代数, 并且 P 在 A 中的剩余类域和 P 在 A_f 中的剩余类域同构. 这样由定理 3.6.2 即得所要证的等价性. □

推论 3.6.3 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 则 $\operatorname{Spec}A$ 的闭点形成的集合在 $\operatorname{Spec}A$ 中稠密.

证明 设 $U=D(f)$ 为 $\operatorname{Spec}A$ 的主开集. 如果 U 不是空集, 则 U 中必有闭点 x(对应于 A_f 的极大理想). 由闭点的局部性知 x 也为 $\operatorname{Spec}A$ 的闭点. □

对域 k 上的有限生成代数 A, 令 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 为 A 的所有极大理想形成的集合, 也等于 $\operatorname{Spec}A$ 的所有闭点形成的子集. 赋予 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 子空间拓扑. 对 A 的理想 I, 令 $V_m(I):=V(I)\bigcap\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 为 $\operatorname{Spec}A$ 中的闭集 $V(I)$ 与 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 的交. 这样得到的 $V_m(I)$ 为 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 的全部闭集. 由 $V_m(I)$ 在 $V(I)$ 中稠密, 可知 $V(I)\mapsto V_m(I)$ 给出了 $\operatorname{Spec}A$ 的闭子集到 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 的闭子集的一一对应. 在这个对应下, A 的素理想一一对应到 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 的不可约闭子集. 由此, 拓扑空间 $\operatorname{Spec}A$ 可以由 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}A$ 完全恢复出来. 在 k 为代数闭域的情形下, 若 $A=k[x_1,\dots,x_n]/I$, 则由 Hilbert 零点定理的弱形

式, $\mathrm{Spec_m}\,A$ 可以等同到 I 在 k^n 中的公共零点形成的集合, 这说明此时考虑这些 "看得见的" 零点集与考虑 $\mathrm{Spec}\,A$ 得到的信息是一样的.

在域上的有限生成代数情形, 我们可以将 命题 1.3.9 加强为如下的:

推论 3.6.4 设 k 为域, A 为有限生成 k 代数. 设 I 为 A 的理想, 则 $\sqrt{I}$ 等于所有包含 I 的极大理想的交.

证明 与命题 1.3.9 的证明想法类似, 任取包含 I 的所有极大理想的交集中的元 f, 往证 $f \in \sqrt{I}$. 考虑有限生成 k-代数 $(A/\sqrt{I})_f$, 其极大理想一一对应到 A 的包含 $\sqrt{I}$ 并且不包含 f 的极大理想 (由闭点的局部性). 而根据 f 的取法, A 中不存在这样的极大理想, 故 $(A/\sqrt{I})_f$ 没有极大理想, 从而为零环. 由此即得 $f \in \sqrt{I}$. □

相比于 Hilbert 零点定理, 下面的 Noether 正规化定理具有更广的内涵, 并且在处理有限生成代数时使用起来更为方便.

定理 3.6.4 (Noether 正规化定理) 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 则 A 中可找到有限个在 k 上代数无关的元 $t_1, \ldots, t_n$, 使得 $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow A$ 为有限扩张.

证明 设 $A = k[a_1, \ldots, a_m]$. 对生成元个数 m 进行归纳. 当 $m = 0$ 时 $A = k$, 结论显然成立.

下面设 $m \geq 1$. 设 $a_1, \ldots, a_m$ 在 k 上代数相关, 并且 $0 \neq f \in k[x_1, \ldots, x_m]$ 使得 $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$. 不妨设 $f(0, \ldots, 0, x_m) \neq 0$. 则可以作如下形式的可逆变量代换:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_m'^{N_1} \\ x_2 = x_2' + x_m'^{N_2} \\ \vdots \\ x_m = x_m' \end{cases}$$

通过适当选取正整数 $N_1, \ldots, N_{m-1}$, 可以使得 f 为 x_m' 的首一多项式. 再令 $a_1', \ldots, a_m'$ 由下式决定:

$$\begin{cases} a_1 = a_1' + a_m'^{N_1} \\ a_2 = a_2' + a_m'^{N_2} \\ \vdots \\ a_m = a_m' \end{cases}$$

则 a_m' 在 $k[a_1', \ldots, a_{m-1}']$ 上整. 利用归纳假设, 可以在 A 的子代数 $k[a_1', \ldots, a_{m-1}']$ 中找到在 k 上代数无关的元 $t_1, \ldots, t_n$, 使得 $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow k[a_1', \ldots, a_{m-1}']$ 为整扩张, 从而 $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow k[a_1', \ldots, a_m'] = A$ 也为整扩张. 再由命题 3.6.2 知 $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow A$ 为有限扩张. □

注记 3.6.2 Noether 正规化定理的几何意义为: 对于仿射空间 $\mathbb{A}_k^m = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_m]$ 的闭子簇 (闭子概形) X, 存在一个 $\mathbb{A}_k^m$ 的自同构 $\varphi: \mathbb{A}_k^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_k^m$, 存在一个线性子空间 $H \subset \mathbb{A}_k^m$, 使得线性投影 $\mathbb{A}_k^m \longrightarrow H$ 诱导了一个满的有限态射 $X \longrightarrow H$. 另外不难看到如果 k 为无限域, 则上述定理证明中的可逆变量代换可取为可逆线性变换, 这也等价于自同构 $\varphi: \mathbb{A}_k^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_k^m$ 可取为线性自同构.

定理 3.6.5 (Noether 正规化定理: 整环形式) 设 R 为 Noether 整环, A 为有限生成 R-代数, 并且 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \neq 0$. 则存在 $0 \neq f \in R$, 同时满足:

(i) $R_f \hookrightarrow A_f$ 为单同态.

(ii) 存在环同态的分解 $R_f \hookrightarrow B \hookrightarrow A_f$, 使得 B 作为 R_f-代数同构于多项式代数 $R_f[x_1, \ldots, x_n]$, 以及 $B \hookrightarrow A_f$ 为有限扩张.

证明 设 I 为结构同态 $R \to A$ 的核. 由 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \neq 0$ 知 $R \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \to A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 为单同态, 从而 $I \otimes_R \operatorname{Frac}(R) = 0$. 由 R 为 Noether 环知 I 为有限生成理想, 从而存在 $0 \neq f \in R$ 使得 $I_f = 0$, 即 $R_f \to A_f$ 为单同态.

下面不妨设 $R \hookrightarrow A$ 为单同态, 以及 $A = R[a_1, \ldots, a_m]$. 对域 $\operatorname{Frac}(R)$ 上的有限生成代数 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 应用 Noether 正规化定理, 可以找到 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 中在 $\operatorname{Frac}(R)$ 上代数无关的元 t_i, $i = 1, \ldots, n$, 使得 $\operatorname{Frac}(R)[t_1, \ldots, t_n] \to A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 为整扩张. 由局部化的定义, 我们可以找到 $0 \neq f \in R$, 使得每个 t_i 都在 A_f 中, 并且每个 a_i 满足系数在 $R_f[t_1, \ldots, t_n]$ 上的首一方程. 这样即知 $R_f[t_1, \ldots, t_n] \to A_f = R_f[a_1, \ldots, a_m]$ 为整扩张, 进而为有限扩张. 由 $t_1, \ldots, t_n$ 在 $\operatorname{Frac}(R)$ 上代数无关知 $R_f[t_1, \ldots, t_n]$ 作为 R_f-代数同构于 $R_f[x_1, \ldots, x_n]$. □

习题

1. 设 $A \to B$ 为环同态, M 为有限 B-模. 设对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均有 $M \otimes_A k(P) = 0$, 证明 $M = 0$. 这里 $k(P) = A_P / PA_P$ 为 P 处的剩余类域.

2. 设 M 为有限 A-模, I 为 A 的理想. 证明:

(i) $\sqrt{\operatorname{ann}_A(M/IM)} = \sqrt{\operatorname{ann}_A(M) + I}$.

(ii) $\operatorname{Supp}_A(M/IM) = \operatorname{Supp}_A(M) \bigcap V(I)$.

3. (作业) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模, N 为 M 的子模. 证明

$$\bigcap_{n \geq 1} (N + m^n M) = N.$$

4. 设 $\widehat{A}$ 为环 A 在理想 I 处的完备化.

(i) 证明嵌入同态 $I \hookrightarrow A$ 诱导的完备化之间的同态 $\widehat{I} \hookrightarrow \widehat{A}$ 为单同态, 下面通过这个单同态将 $\widehat{I}$ 看作 $\widehat{A}$ 的理想.

(ii) 证明 $\widehat{I}$ 包含在 $\widehat{A}$ 的任何一个极大理想中.

(iii) 设 I 为有限生成理想, 证明 $\widehat{I} = I\widehat{A}$.

5. 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 证明 $\operatorname{Spec} A$ 上的整数值函数

$$f : P \mapsto \dim_{k(P)} M \otimes_A k(P)$$

是上半连续的, 即对任意实数 a, $f^{-1}((-\infty, a))$ 为开子集. 并证明 $f(\operatorname{Spec} A)$ 为有限集.

6. 设 A 为 Noether 环. 设 S 为 A 的正则元全体. 则 S 为 A 的乘法子集. 记 $\operatorname{Tot}(A) = A_S$ 为 A 在 S 处的局部化, 称为 A 的全分式环. 设 A 还是约化环. 记 $P_1, \ldots, P_r$ 为 A 的所有极小素理想.

(i) 证明 $A \to A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$ 为单同态.

(ii) 证明 $\operatorname{Ass}(A) = \{P_1, \ldots, P_r\}$.

(iii) 记 $K_i = \operatorname{Frac}(A/P_i)$. 证明 $\operatorname{Tot}(A) \simeq K_1 \times \cdots \times K_r$.

7. 设 $\varphi : A \to B$ 为 Noether 环之间的环同态, 设 M 为有限 B-模. 通过 φ 将 M 也看作 A-模. 证明 $\operatorname{Ass}_A(M) = \varphi^*(\operatorname{Ass}_B(M))$. 其中 $\varphi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 为 φ 诱导的素谱空间的映射.

8. 设 $A \hookrightarrow B$ 为整环的单同态, 且为整扩张. 设 P 为 B 的非零素理想. 证明 $P \cap A \neq 0$.

9. 利用 Noether 正规化定理 3.6.4 给出定理 3.6.2 的另一个证明.

10. 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数, 并且 A 为整环. 令 $K = \operatorname{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 设 k' 为 k 在 K 中的整闭包. 证明 k' 为域, 并且 $[k' : k] < +\infty$.

11. 设 R 为有限生成 $\mathbb{Z}$-代数.

(i) 设 m 为 R 的极大理想, 证明 $m \cap \mathbb{Z} = (p)$ 为 $\mathbb{Z}$ 的非零素理想.

(ii) 设 m 为 R 的极大理想, 证明 R/m 为有限域.

(iii) 设 $P \in \operatorname{Spec} R$, 证明 P 为极大理想 $\iff$ 剩余类域 $k(P) := R_P/PR_P$ 为有限域.

(iv) 证明 R 的极大理想在 $\operatorname{Spec} R$ 中稠密, 即对于 $f \in R$, 如果 f 不是幂零元, 那么存在 R 的极大理想 m, 使得 $f \notin m$.

注: 该命题是模 p 约化的交换代数基础. 关于代数几何中模 p 约化的一些应用, 见 [12].

12. 我们利用整扩张给出第一章习题18 的另一个证明. 记号同该习题, 并设 $N = |G|$.

(1) 对每个 i, 设 $\prod_{g \in G} (x - gx_i) = x^N + \sum_{j=0}^{N-1} c_{ij} x^j$. 证明 $c_{ij} \in k[x_1, \ldots, x_n]^G$.

(2) 令 $A = \mathbb{C}[c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N-1]$ 为所有 c_{ij} 生成的 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 的子代数. 证明 $A \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 为整扩张, 进而证明其为有限扩张.

(3) 证明 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 为 Noether A-模.

(4) 证明 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 为 Noether A-模.

(5) 证明 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数.

如果将 $\mathbb{C}$ 换为任意域 k, 同样的证明可以得到 $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ 为有限生成 k-代数.

习题提示

7. 设 $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$. 要证明 $P \in \varphi^*(\mathrm{Ass}_B(M))$, 可以先在 P 处作局部化从而假设 A 为局部环, P 为其唯一极大理想. 再设 $x \in M$, $P = \mathrm{ann}_A(x)$. 则 $P \subset \mathrm{ann}_B(x)$. 由命题 3.4.1 可以找到一个 $Q \in \mathrm{Ass}_B(M)$ 包含 $\mathrm{ann}_B(x)$, 即得 $Q \cap A = P$.

10. 为了证明 $[k' : k] < +\infty$, 利用 Noether 正规化定理, 将问题约化为: $k[x_1, \ldots, x_n] \subset K$, 设 $a_1, \ldots, a_m \in K$ 为 k-线性无关的, 则也为 $k(x_1, \ldots, x_n)$-线性无关的. 该习题见 [14, Lemma 037J].

11. 假设 m 为 R 的极大理想并且 $m \cap \mathbb{Z} = 0$, 则有单同态 $\mathbb{Z} \hookrightarrow R/m$. 再由 Noether 正规化定理的整环形式 (定理 3.6.5), 存在 $0 \neq f \in \mathbb{Z}$ 以及分解 $\mathbb{Z}_f \hookrightarrow \mathbb{Z}_f[x_1, \ldots, x_n] \xhookrightarrow{\varphi} R/m$, 使得 $x_1, \ldots, x_n$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关, 并且 φ 为有限扩张. 因为 R/m 是域, 故 $\mathbb{Z}_f[x_1, \ldots, x_n]$ 也为域. 而这是不可能的.

第四章 Dedekind 整环

本章主要介绍 Dedekind 整环的基本性质. 这种环对应一维正则概型, 在代数数论中的典型例子是代数数域的代数整数环, 在代数几何中的典型例子是一维光滑仿射曲线的正则函数环. Dedekind 整环局部上是离散赋值环, 因此很多时候我们通过逐点作局部化来考察 Dedekind 整环. 另一方面, 类比于利用分歧覆盖来研究代数曲线, 我们也可以从整扩张的角度去考察 Dedekind 整环. 因此, 考察整扩张时的纤维可以说是本章的核心方法.

4.1 离散赋值环

定义 4.1.1 设 A 为环, 如果其同时满足:

(i) A 为整环,

(ii) (A, m) 为 Noether 局部环,

(iii) $m = (\pi)$ 为非 0 主理想,

则称 A 为**离散赋值环**, 简称 DVR.

例 4.1.1 形式幂级数环 $\mathbb{C}[\![x]\!]$, p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$, 以及 $\mathbb{Z}$ 在素理想 (p) 处的局部化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 均为 DVR.

命题 4.1.1 设 (A, m) 为 DVR, $m = (\pi)$, 则:

(i) $\forall\, 0 \neq a \in A$, 存在 $k \geqslant 0$ 为非负整数, 以及 $u \in A^*$, 使得 $a = u \cdot \pi^k$.

(ii) A 为主理想整环 (PID), 从而为唯一因子分解整环 (UFD).

证明 (i): 由 Krull 交集定理, $\bigcap_{i=0}^{\infty} m^i = (0)$. 从而对 $0 \neq a \in A$, 可以找到 $k \geq 0$, 使得 $a \in m^k \setminus m^{k+1}$. 由次可得 $a = u\pi^k$, 并且 $u \in A \setminus m = A^*$.

(ii): 设 I 为 A 的非零理想. 由 Noether 性知 $I=(a_1,\dots,a_n)$ 是有限生成的. 由 (i), 可设 $a_i=u_i\pi^{k_i}$, $u_i\in A^*$, $k_i\geq 0$. 令 $k=\min\limits_{1\leq i\leq n}k_i$, 不难看到 $I=(\pi^k)$, 从而为主理想. □

下面从整闭整环的角度给出 DVR 的等价刻画.

定义 4.1.2 设 A 为整环, 如果 A 在其分式域 $\mathrm{Frac}(A)$ 中的整闭包为 A, 则称 A 为**整闭整环**.

命题 4.1.2 唯一因子分解整环 (UFD) 为整闭整环.

证明 设 A 为 UFD, $K=\mathrm{Frac}(A)$. 设 $0\neq x\in K$ 在 A 上整. 则 $x=\dfrac{a}{b}$, a,b 为 A 中互素的元素, 并且 x 满足 A 上的首一方程

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots+a_0=0,$$

其中 $a_i\in A$. 该方程等价于

$$a^n+a_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+a_0b^n=0.$$

假设 $b\notin A^*$, 则可以取 b 的不可约因子 p. 由上述方程可知 $p\mid a^n$, 从而 $p\mid a$. 这与 a,b 互素矛盾. 由此即知 $b\in A^*$, $x\in A$. □

定义 4.1.3 我们称环 A 是**一维环**, 如果 A 的任何不是极大理想的素理想均为极小素理想, 并且存在不是极大理想的素理想.

定理 4.1.1 设 (A,m) 为局部环. 则 A 为 DVR $\iff$ A 为一维 Noether 整闭整环. .

证明 $\Longrightarrow$: 由 DVR 是唯一因子分解整环和命题 4.1.2 即得 A 为整闭整环. 一维和 Noether 性由 DVR 的定义即得.

$\Longleftarrow$: 取 $0\neq a\in m$. 则 m/aA 为 A/aA 的极小素理想. 从而 $m\in\mathrm{Ass}(A/aA)$. 设 $b\in A$ 使得 $m=\mathrm{ann}(\bar{b})$. 则 $\frac{b}{a}\notin A$, 且 $m\frac{b}{a}\subset A$ 为 A 的理想. 如果 $m\frac{b}{a}\subset m$, 由伴随方阵技巧知 $\frac{b}{a}$ 在 A 上整, 从而 $\frac{b}{a}\in A$, 这与 $\frac{b}{a}\notin A$ 矛盾. 故 $m\frac{b}{a}=A$. 设 $\pi\in m$ 使得 $\pi\frac{b}{a}=1$. 不难验证 $m=(\pi)$. 从而 A 为 DVR. □

命题 4.1.3 设 (A,m,k) 为 DVR, 设 $f(x)\in A[x]$ 为首一不可约多项式. 令 $B=A[x]/(f(x))$. 如果 $\overline{f(x)}\in k[x]$ 满足 $(\overline{f(x)},\overline{f'(x)})=1$(即 $\overline{f(x)}$ 没有重根), 则对 B 中的任意极大理想 P, 均有 B_P 为 DVR.

证明 由定义知 B 为 Noether 环, $A\hookrightarrow B$ 为单的整扩张. 从而 $P\cap A=m$ 为 A 的极大理想. 根据作商与作局部化交换知 $B_P/mB_P=(B/mB)_P$. 而 $B/mB=k[x]/(\overline{f(x)})$. 由 $(\overline{f(x)},\overline{f'(x)})=1$ 知 $k[x]/(\overline{f(x)})$ 为有限个域的乘积. 从而 $(B/mB)_P$ 为域. 这样得

到 $PB_P = mB_P$. 设 $m = (\pi)$. 则 $PB_P = (\pi)$ 为主理想. 再由 $A \hookrightarrow B$ 为单同态知对任意 $n \geq 1$, $\pi^n \neq 0$, 从而 B_P 为整环. 综合以上信息知 B 为 DVR. □

例 4.1.2 设 $p \neq 2$ 为素数. 则 x^2+1 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中没有重根. 设 P 为 $\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ 中的素理想, 并且满足 $P \cap \mathbb{Z} = (p)$. 考察整扩张 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$, 可以看到 P 为 $\mathbb{Z}[i]$ 中的极大理想. 又可以验证 $\mathbb{Z}[i]_P$ 同构于 $\mathbb{Z}_{(p)}[x]/(x^2+1)$ 在一个极大理想处的局部化, 从而由命题 4.1.3 知 $\mathbb{Z}[i]_P$ 为 DVR.

4.2 Dedekind 整环

定义 4.2.1 一个环 A 称为 **Dedekind 整环**, 如果 A 为 Noether 整环, 并且对任意一个非零素理想 $P \in \operatorname{Spec} A$, 局部化 A_P 均为离散赋值环.

显然一个 Noether 整环 A 为 Dedekind 整环也等价于 A 不是域, 并且 A 在任意一个极大理想处的局部化均为离散赋值环. 根据定义, Dedekind 整环主要的特点为局部上均为 DVR. 由于 DVR 可以从整闭整环的角度去刻画 (定理 4.1.1), 我们可以将这个刻画整体化, 得到 Dedekind 整环的等价定义. 为此, 首先说明整闭整环的性质是一个局部性质.

命题 4.2.1 设 A 为整环, $K = \operatorname{Frac}(A)$ 为 A 的分式域.
(i) 如果 A 为整闭整环, 则对任意乘法子集 $S \subset A$, A_S 为整闭整环.
(ii) 如果 $\forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, A_P 均为整闭整环, 则 A 为整闭整环.

证明 (i): 注意到 $K = \operatorname{Frac}(A_S)$. 设 $x \in K$ 在 A_S 上整, 满足如下首一方程:

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{s_0} = 0,$$

其中 $a_i \in A$, $s_i \in S$. 令 $s = s_0 \ldots s_{n-1} \in S$ 为 s_i 的乘积, 则上式两边同乘以 s^n 得到

$$(sx)^n + b_{n-1}(sx)^{n-1} + \cdots + b_0 = 0,$$

其中 $b_i \in A$. 由 A 为整闭整环知 $sx \in A$, 从而 $s \in A_S$.

(ii): 设 $x \in K$ 在 A 上整, 则对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, x 也在 A_P 上整. 从而由 A_P 为整闭整环知 $x \in A_P$. 再由 $A = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} A_P$ (命题 1.3.13) 知 $x \in A$. □

注意在 (ii) 中, 只需对所有非零素理想 P 有 A_P 为整闭整环, 就能得到 A 为整闭整环. 这是因为 A 在 (0) 处的局部化为 $\operatorname{Frac}(A)$, 而域显然为整闭整环.

定理 4.2.1 设 A 为环. 则 A 为 Dedekind 整环 $\iff$ A 为一维 Noether 整闭整环.

证明 $\Longrightarrow$: 由 Dedekind 整环的定义以及命题 4.2.1 即得.

$\Longleftarrow$: 任取 A 的非零素理想 P, 则 A_P 为 Noether 局部整环, 并且 $PA_P \neq (0)$. 由命题 4.2.1 知局部环 A_P 为一维 Noether 整闭整环, 再由定理 4.1.1 即知 A_P 为 DVR.□

在具体例子中, 我们经常直接利用定义, 通过证明每个局部上都是 DVR 来说明一个环为 Dedekind 整环.

例 4.2.1 我们说明 $\mathbb{Z}[i]$ 为 Dedekind 整环. 首先 $\mathbb{Z}[i]$ 为 Noether 整环. 任取非零素理想 P, 考虑整扩张 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$, 由于 $\mathbb{Z}[i]$ 中的零理想与 $\mathbb{Z}$ 交为 (0), 而且对整扩张, 任一点的纤维中的两个素理想没有包含关系 (命题 3.6.5), 从而 $P \cap \mathbb{Z} \neq (0)$. 设 $P \cap \mathbb{Z} = (p)$. 如果素数 P 不为 2, 则例 4.1.2 已经说明了 $\mathbb{Z}[i]_P$ 是 DVR. 故只需考虑 $P \cap \mathbb{Z} = (2)$ 的情形, 此时 $\overline{P}$ 为 $\mathbb{Z}[i]/(2)$ 中的素理想, 而我们有环同构:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(2)} \overset{i \leftarrow x}{\cong} \frac{\mathbb{Z}[x]}{(2, x^2+1)} = \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(x^2+1)} = \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(x+1)^2}.$$

由于 $\mathbb{F}_2[x]/(x+1)^2$ 只有一个素理想 $(x+1)$, 故在 $\mathbb{Z}[i]/(2)$ 中有 $\overline{P} = \overline{(i+1)}$. 这说明在 $\mathbb{Z}[i]$ 中有 $P = (2, i+1)$. 再由 $2 = (1+i)(1-i)$ 即知 $P = (i+1)$ 为主理想. 这样得到 $\mathbb{Z}[i]_P$ 为 DVR.

利用同样地处理方法, 我们可以证明分圆整数环均为 Dedekind 整环.

命题 4.2.2 设 $N \geq 1$, 设 $\zeta_N := e^{\frac{2\pi i}{N}} \in \mathbb{C}^*$ 为 N 次本原单位根. 则分圆整数环 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 为 Dedekind 整环.

证明 显然 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 为 Noether 整环. 对 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的任意非零素理想 P, 由命题 3.6.5 知 $P \cap \mathbb{Z} \neq (0)$. 下面对 N 归纳来证明: $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 在每个非零素理想 P 处的局部化为 DVR, 并且如果 $P \cap \mathbb{Z} = (q)$ 以及素数 q 满足 $(q, N) = 1$, 则 $P\mathbb{Z}[\zeta_N]_P = (q)$.

(1) 设 $N = p^n$ 为素数幂次. 令 $B = \mathbb{Z}[x]/(x^N - 1)$. 则 $B \to \mathbb{Z}[\zeta_N]$, $x \mapsto \zeta_N$ 为满同态. 设 P 为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的非零素理想, 并且 $P \cap \mathbb{Z} = (q)$, q 为素数.
   - (i) 假设 $q \neq p$. 将 P 在 B 中对应的素理想仍记作 P, 由 $q \neq p$ 知 $x^N - 1$ 在 $\mathbb{F}_q[x]$ 中无重根, 从而由命题 4.1.3 可知 $PB_P = (q)$, 故 $P\mathbb{Z}[\zeta_N]_P = (q)$ 为主理想. 这样得到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_P$ 为 DVR.
   - (ii) 假设 $q = p$, 即 $P \cap \mathbb{Z} = (p)$. 由 $B/(p) = \mathbb{F}_p[x]/(x-1)^{p^n}$, 并且 $(x-1)$ 为 $\mathbb{F}_p[x]/(x-1)^{p^n}$ 中的唯一素理想知 $P/(p) = (\zeta_N - 1)$. 故在 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 中有 $P = (p, \zeta_N - 1)$. 易知 $\Phi(x) := \frac{x^{p^n}-1}{x^{p^{n-1}}-1}$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中, 并且 $\Phi(\zeta_N) = 0$. 显然 $\zeta_N - 1$ 为 $f(y) := \Phi(y+1) = \frac{(y+1)^{p^n}-1}{(y+1)^{p^{n-1}}-1} \in \mathbb{Z}[y]$ 的根. 由 $(y+1)^m - 1$ 的最低次项为 my 可知 $f(y)$ 的常数项为 p. 再利用 $f(\zeta_N - 1) = 0$ 即得 $p \in (\zeta_N - 1)$, 故 $P = (\zeta_N - 1)$ 为主理想. 这样得到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_P$ 为 DVR.

(2) 设 $N = p^n m$, 且 $(p, m) = 1$. 不难验证 $\mathbb{Z}[\zeta_N] = \mathbb{Z}[\zeta_m, \zeta_{p^n}]$. 令 $A = \mathbb{Z}[\zeta_m]$, 则 $\mathbb{Z}[\zeta_N] = A[\zeta_{p^n}]$. 由归纳假设, A 为 Dedekind 整环. 设 P 为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的非零素理想. 并设 $P \cap A = Q$, $P \cap \mathbb{Z} = Q \cap \mathbb{Z} = (q)$, q 为素数. 设 $QA_Q = (\pi)$. 注意到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_P$

可看作 $A_Q[\zeta_{p^n}]$ 在 P 处的局部化.

(i) 假设 $q \neq p$, 则 $k(Q) \coloneqq A_Q/QA_Q$ 为 $\mathbb{F}_q$ 的扩域, 从而 $x^{p^n}-1$ 在 $\mathbb{F}_q[x]$ 中无重根, 与前面一样的推理得到 $P\mathbb{Z}[\zeta_N]_P = (\pi)$, 故 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_P$ 为 DVR.

(ii) 假设 $q = p$. 由 $(p,m)=1$ 和归纳假设知 $QA_Q = (p)$. 这样 $k(Q) \coloneqq A_Q/QA_Q$ 为 $\mathbb{F}_p$ 的扩域. 与前面一样, 由 $A_Q[\zeta_{p^n}]/(p)$ 为 $k(Q)[x]/(x-1)^{p^n}$ 的商环知 $P\mathbb{Z}[\zeta_N]_P = (p, \zeta_{p^n}-1)$. 再由 $\zeta_{p^n}-1$ 为整系数多项式 $f(y) \coloneqq \frac{(y+1)^{p^n}-1}{(y+1)^{p^{n-1}}-1}$ 的根得到 $p \in (\zeta_{p^n}-1)$. 故 $P\mathbb{Z}[\zeta_N]_P = (\zeta_{p^n}-1)$ 为主理想. 这样得到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_P$ 为 DVR. □

作为推论, 我们得到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 为整闭整环. 在代数曲线的情形, 我们有下面的 Dedekind 整环的典型例子.

命题 4.2.3 设 k 为代数封闭域, $f(x,y) \in k[x,y]$ 为不可约多项式. 设 $f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ 在 k^2 中无解, 则 $k[x,y]/(f)$ 为 Dedekind 整环.

证明 设 $B = k[x,y]/(f)$. 由条件知 B 为 Noether 整环. 设 m 为 B 的极大理想, 由 Hilbert 零点定理, 存在 $a,b \in k$, 使得 $m = (x-a, y-b)$, 并且 $f(a,b)=0$. 由于 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ 不能同时为 0, 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. 这样 $m/(x-a) = \overline{(y-b)}$ 为 $k[x,y]/(x-a,f) = k[y]/(f(a,y))$ 的一个极大理想. 由 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ 知 b 为 $f(a,y)$ 的单根, 从而由中国剩余定理不难看到 $k[y]/(f(a,y))$ 在 $(y-b)$ 处的局部化为 k, 即 $B/(x-a)$ 在 $m/(x-a)$ 处的局部化为 k. 由局部化和作商的交换性, 得到 $B_m/(x-a) = k$ 为域. 从而 $mB_m = (x-a)$ 为主理想. 这就证明了 B_m 为 DVR. 由 m 的任意性知 B 为 Dedekind 整环. □

4.3 Dedekind 整环的有限扩张

定义 4.3.1 设 (A,m), (B,n) 为局部环. 如果环同态 $A \to B$ 满足 $n \cap A = m$, 则称其为**局部同态**, 记为 $(A,m) \to (B,n)$.

设 $(A,m) \to (B,n)$ 为离散赋值环之间的局部同态, 并且 $mB \neq 0$, 则存在 $e \geq 1$, 使得 $mB = n^e$. 我们称 e 为 B/A 的**分歧指数**. 如果 $k(n) = B/n$ 为 $k(m) = A/m$ 的有限扩张, 则称域扩张次数 $f = [k(n):k(m)]$ 为 B/A 的**剩余类域次数**.

对于 Dedekind 整环之间的单扩张 $A \hookrightarrow B$, 如果 P, Q 分别为 A, B 的非零素理想, 并且 $P = Q \cap A$, 则 DVR 的扩张 $A_P \hookrightarrow B_Q$ 的分歧指数和剩余类域次数分别称为 P 在 Q 处的分歧指数和剩余类域次数.

定理 4.3.1 设 A 为 Dedekind 整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 $K \hookrightarrow L$ 为域的有限扩张. 令 $B \coloneqq \{x \in L \mid x \text{ 在} A \text{ 上整}\}$ 为 A 在 L 中的整闭包. 设 B 为有限 A-模, P 为 A 的非零素理想, 则有:

(i) B 为 Dedekind 整环.

(ii) B 中满足 $Q\cap A=P$ 的素理想 Q 均为非零素理想，并且只有有限个，记为 $Q_1,\ldots,Q_t$.

(iii) P 在每个 Q_i 处的剩余类域次数 f_i 是有限的.

(iv) $[L:K]=\sum\limits_{i=1}^{t}e_if_i$. 其中 e_i, f_i 分别为 P 在 Q_i 处的分歧指数和剩余类域次数.

(v) 在 B 中成立理想的等式 $PB=Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\ldots Q_t^{e_t}$.

证明 (i): 由 B 的定义知 B 为整闭整环. 由 B 为有限 A-模知 B 为 Noether 环. 由定理 4.2.1 只需再证明 B 为一维环. 设 $P_1\subset P_2$ 为 B 的两个素理想. 令 $P_0=(0)$. 则

$$(0)=P_0\cap A\subset P_1\cap A\subset P_2\cap A$$

为 A 的三个素理想. 而 A 为一维环, 故 $P_0\cap A,P_1\cap A,P_2\cap A$ 中至少有两个相等. 再由整扩张的纤维中的素理想没有包含关系 (命题 3.6.5) 知 P_0,P_1,P_2 中至少有两个相等. 由此得到 B 为一维环.

(ii): 设素理想 Q 满足 $Q\cap A=P$. 由 $P\neq(0)$ 知 $Q\neq(0)$. 通过在 P 处作局部化, $A_P\hookrightarrow B_P$ 为单的整扩张, 故 B_P/PB_P 为零维 Noether 环. 从而其素理想均为极小素理想, 故只有有限个, 这些素理想一一对应到 B 中满足 $Q\cap A=P$ 的素理想 Q.

(iii) 和 (iv): 通过将 A,B 分别替换为 A_P,B_P, 我们不妨设 A 为 DVR, $P=m=(\pi)$ 为 A 的唯一极大理想. 则 $A\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 由 $Q_i\cap A=m$ 知 $A/m\hookrightarrow B/Q_i$ 为单的有限扩张. 从而 $[k(Q_i):k(m)]=f_i$ 为有限数.

由于 B 为有限 A-模, 而 A 为 DVR, 根据主理想整环上有限模的结构定理, 可知 B 为秩有限的自由 A-模, 记 $n=\operatorname{rank}_A(B)$. 由 $A\hookrightarrow B$ 为单的有限扩张知 $K=A\otimes_A K\hookrightarrow B\otimes_A K$ 也为单的有限扩张, 从而 $B\otimes_A K$ 为域. 而作为 B 的局部化, 我们有自然的单同态 $B\subset B\otimes_A K\subset L=\operatorname{Frac}(B)$, 从而得到 $B\otimes_A K=L$, 故 $[L:K]=n$.

另一方面, 记 $k=A/m$, 则由 B 为秩 n 的自由 A-模知 $B/mB=B\otimes_A k$ 为 n 维 k-线性空间, 即 $\dim_k B/mB=n$. 注意到 B/mB 为零维 Noether 环, 并且 $\operatorname{Spec}(B/mB)=\{Q_1,\ldots,Q_t\}$, 由命题 1.4.7 得到环同构

$$B/mB\simeq B_{Q_1}/mB_{Q_1}\times\cdots\times B_{Q_t}/mB_{Q_t}. \tag{4.3–1}$$

在离散赋值环 B_{Q_i} 中, 设 $Q_iB_{Q_i}=(\pi_i)$, 则 $mB_{Q_i}=(\pi_i)^{e_i}$. 从而 $B_{Q_i}/mB_{Q_i}=B_{Q_i}/(\pi_i)^{e_i}$. 由此得到

$$\begin{aligned}\dim_k\left(\frac{B_{Q_i}}{mB_{Q_i}}\right)&=\ell_A\left(\frac{B_{Q_i}}{mB_{Q_i}}\right)=\sum_{j=1}^{e_i}\ell_A\left(\frac{(\pi_i)^{j-1}}{(\pi_i)^j}\right)=\sum_{j=1}^{e_i}\ell_A\left(\frac{B_{Q_i}}{(\pi_i)}\right)\\&=\sum_{j=1}^{e_i}\dim_k k(Q_i)=e_if_i.\end{aligned}$$

分别计算(4.3–1) 两边作为 k-线性空间的维数即得 $n = \sum\limits_{i=1}^{t} e_i f_i$.

(v): 设 Q 为 B 的非零素理想, 我们比较 P 和 $Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}$ 在 B_Q 中生成的理想, 只需证明 $PB_Q = Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}B_Q$.

如果 $Q\cap A\neq P$, 则 $PB_Q = B_Q$, 而且 $Q\neq Q_i$, $\forall\ 1\leq i\leq t$. 故对每个 i 有 $Q_iB_Q = B_Q$. 这样得到 $PB_Q = Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}B_Q = B_Q$.

如果 $Q\cap A = P$, 则存在某个 i 使得 $Q = Q_i$. 由 e_i 的定义得到 $PB_Q = Q_i^{e_i}B_Q$. 对 $j\neq i$, 由于 Q_i 和 Q_j 为不同的极大理想, 不难看到 $Q_j^{e_j}B_Q = B_Q$. 由此也得到 $PB_Q = Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}B_Q$. □

下面考察在哪些情况下, 上述定理中 “B 为有限 A-模” 这个条件成立.

命题 4.3.1 设 A 为整闭整环, 且为 Noether 环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 $K\hookrightarrow L$ 为域的有限扩张. 令 B 为 A 在 L 中的整闭包. 设下列两个条件中至少一个成立, 则 B 为有限 A-模.

(i) L/K 为有限可分扩张.
(ii) A 为一个域 k 上的有限生成代数.

证明 (i): 想法是将 B 放入更大的一个有限 A-模中, 则利用 Noether 模的性质可得 B 为有限 A-模. 为此, 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 L 的一组 K-基. 通过乘以 A 中的元, 可设 $e_i\in B$, $\forall\ i = 1,\dots,n$. 由 L/K 为有限可分扩张, 知如下 K-双线性映射

$$\begin{aligned}\varphi: L\times L &\longrightarrow K\\ (x,y) &\longmapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)\end{aligned}$$

为非退化的 ([14, Lemma 0BIL]). 由 A 整闭知 $\mathrm{Tr}_{L/K}(B)\subset A$, 从而 $\varphi(e_i,b)\in A$, $\forall\ 1\leq i\leq n$, $\forall\ b\in B$. 设 $b = \sum_{i=1}^n x_ie_i\in B$, $x_i\in K$, 则

$$M\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in A^n,$$

其中 $M=(\varphi(e_i,e_j))$ 为 A 上的 n 阶方阵. 由此知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M^{-1}\cdot A^n = (\det M)^{-1}M^*\cdot A^n.$$

其中 M^* 为 M 的伴随方阵. 这样得到 B 包含在如下有限 A-模中:

$$(\det M)^{-1}(e_1,\ldots,e_n)\cdot M^*\cdot A^n.$$

再由 A 为 Noether 环知 B 为有限 A-模.

(ii): 当 $\mathrm{char}.K=0$ 时, L/K 为有限可分扩张, 从而由 (i) 即知 B 为有限 A-模. 下面设 $\mathrm{char}.K=p>0$. 由 Noether 正规化定理, 我们取 A 的 k-子代数 $k[t_1,\ldots,t_n]$, 使得 $t_1,\ldots,t_n$ 在 k 上代数无关, 并且 $k[t_1,\ldots,t_n]\hookrightarrow A$ 为有限扩张. 这样得到域的有限扩张 $k(t_1,\ldots,t_n)\subset K\subset L$, 并且 B 为 $k[t_1,\ldots,t_n]$ 在 L 中的整闭包. 只需证明 $k[t_1,\ldots,t_n]\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 故下面不妨设 $A=k[t_1,\ldots,t_n]$, 并且 $t_1,\ldots,t_n$ 在 k 上代数无关.

通过将 L 替换为 L/K 的正规闭包, 我们还可以假设 L/K 为有限正规扩张. 域扩张 L/K 可以分解为 $K\subset L_{insep}\subset L$, 使得 L_{insep}/K 为有限纯不可分扩张, L/L_{insep} 为有限可分扩张 ([14, Lemma 030M]). 设 B_i 为 A 在 L_{insep} 中的整闭包, 则 B 为 B_i 在 L 中的整闭包, 并且由 (i) 知 $B_i\hookrightarrow B$ 为有限扩张, 从而只需证明 $A\hookrightarrow B_i$ 为有限扩张. 故通过将 L 替换为 L_{insep}, 又不妨假设 L/K 为有限纯不可分扩张.

设 $L=K(b_1,\ldots,b_m)$, $b_i\in B$, $\forall\, 1\le i\le m$. 由 L/K 为纯不可分的有限扩张, 存在 p 的一个正整数幂次 q, 使得 $b_i^q\in K$, $\forall\, 1\le i\le m$. 又由于 b_i^q 在 A 上整, 并且 A 为整闭的, 故每个 b_i^q 均在 $A=k[t_1,\ldots,t_n]$ 中. 这样可以找到有限个 k 中的元素 $c_1,\ldots,c_r$, 使得每个 b_i 均在 $k'(t_1^{\frac{1}{q}},\ldots,t_n^{\frac{1}{q}})$ 中, 其中 $k'=k(c_1^{\frac{1}{q}},\ldots,c_r^{\frac{1}{q}})$ 为 k 的有限扩域. 由此得到 $L\subset k'(t_1^{\frac{1}{q}},\ldots,t_n^{\frac{1}{q}})$, 从而 B 包含在 A 在 $k'(t_1^{\frac{1}{q}},\ldots,t_n^{\frac{1}{q}})$ 的整闭包 B' 中. 不难看到 $B'=k'[t_1^{\frac{1}{q}},\ldots,t_n^{\frac{1}{q}}]$. 这是因为 $k'[t_1^{\frac{1}{q}},\ldots,t_n^{\frac{1}{q}}]$ 在 A 上整, 同时 $k'[t_1^{\frac{1}{q}},\ldots,t_n^{\frac{1}{q}}]$ 同构于 k' 上的 n 元多项式环, 从而为整闭整环. 由于 $A\hookrightarrow B'$ 显然为有限有限扩张, 从而由 Noether 性知 B 为有限 A-模. □

注记 4.3.1 一般地, 当 A 为 Dederkind 整环时, 只要 L/K 为有限扩张, 就能得到 B 为 Dedekind 整环 (但不一定是有限 A-模). 这是 Krull-Akizuki 定理的一个推论, 其表述和证明见 [10, Theorem 11.7].

一个**代数数域** K 是指有理数域 $\mathbb{Q}$ 的一个有限扩域. 代数数域 K 的**代数整数环**是指 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的代数闭包, 一般记为 $\mathcal{O}_K$. 由 命题 4.3.1, $\mathcal{O}_K$ 为 Dedekind 整环.

4.4 Dedekind 整环的理想类群

在本节中, 如不特别说明, A 均为一个 Dedekind 整环, K 为 A 的分式域, $\operatorname{Spec}_m A$ 表示 A 的所有非零素理想 (极大理想) 形成的集合. 我们分别定义 A 上的 Picard 群, 理想类群和除子类群, 并说明这三个群是同构的. 这个群反映了 A 的一些整体信息.

定义 4.4.1 称 A-模 M 为**可逆模**, 如果 M 为有限 A-模, 并且对 A 的每个非零素理想 P, 均有 M_P 为秩 1 的自由 A_P-模.

命题 4.4.1 设 M 为可逆 A-模, 设 $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ 为 A-模的单同态, 则

$$\begin{aligned} 1\otimes\varphi : M\otimes_A M_1 &\longrightarrow M\otimes_A M_2 \\ x\otimes x_1 &\longmapsto x\otimes\varphi(x_1) \end{aligned}$$

也为单同态.

证明 对任意 $P\in\operatorname{Spec} A$,

$$M\otimes_A M_i\otimes_A A_P \simeq M_i\otimes_A (M\otimes_A A_P)\simeq M_i\otimes_A A_P,$$

由 φ 为单同态知 $M_1\otimes_A A_P \longrightarrow M_2\otimes_A A_P$ 为单同态. 故 $1\otimes\varphi$ 在每个素理想 P 处的局部化均为单同态, 由此知 $1\otimes\varphi$ 为单同态. □

对于可逆 A-模 M, 我们将 M 作为 A-模的同构类记作 $[M]$. 记 $\operatorname{Pic}(A)$ 为所有可逆 A-模的同构类形成的集合. 容易看到, 若 M, N 均为可逆模, 则 $M\otimes_A N$ 也为可逆模, 并且 $[M]\cdot[N] := [M\otimes_A N]$ 是良好定义的 $\operatorname{Pic}(A)$ 上的运算.

命题 4.4.2 $\operatorname{Pic}(A)$ 在上述运算 $[M]\cdot[N]$ 下是一个 Abel 群. 其单位元为 $[A]$, 并且 $[M]\in\operatorname{Pic}(A)$ 的逆元为 $[\operatorname{Hom}_A(M,A)]$

证明 由张量积的性质, 该运算显然具有结合性和交换性, 并且 $[A]$ 为单位元. 下面验证对于可逆 A-模 M, 有 $M\otimes_A \operatorname{Hom}_A(M,A)\simeq A$. 首先有 A-模同态

$$\begin{aligned} M\otimes_A \operatorname{Hom}_A(M,A) &\xrightarrow{\varphi} A \\ x\otimes f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

由 M 为可逆模可知对 A 的每个素理想 P, 均有 $M_P\simeq A_P$, 以及

$$\operatorname{Hom}_A(M,A)_P\simeq \operatorname{Hom}_{A_P}(M_P,A_P)\simeq A_P.$$

这样得到 φ 在 P 处的局部化 $M\otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,A)\otimes_A A_P \xrightarrow{\varphi_P} A_P$ 为同构. 由 P 的任意性知 φ 为同构. □

$\mathrm{Pic}(A)$ 称为 A 的 **Picard 群**. 对于可逆 A-模 M, 由命题 4.4.1 知自然同态 $M\to M\otimes_A K$, $x\mapsto x\otimes 1$ 为单的 A-模同态. 又由于任取非零素理想 P, 有

$$M\otimes_A K\simeq M\otimes_A A_P\otimes_{A_P} K\simeq M_P\otimes_{A_P} K\simeq A_P\otimes_{A_P} K\simeq K.$$

我们看到 M 同构于 K 的一个 A-子模. 一般地, 我们称 K 的一个非零有限 A-子模为 A 的一个**分式理想**. A 的非零理想均为分式理想.

命题 4.4.3 A 的分式理想均为可逆 A-模.

证明 设 $M\subset K$ 为 A 的一个分式理想. 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 M 的生成元. 对任意 $P\in\mathrm{Spec}_m A$, 令 π 为极大理想 PA_P 的生成元. 则 $e_i=u_i\pi^{a_i}$, 其中 $u_i\in A_P^*$, $a_i\in\mathbb{Z}$. 不妨设 $a_1=\min\{a_1,\dots,a_n\}$. 则易验证 $M_P=A_Pe_1$ 为秩 1 的自由 A_P-模. □

由该命题以及前面的讨论, $\mathrm{Pic}(A)$ 中的每个元素都可以取分式理想为代表元. 为了完全用分式理想刻画 $\mathrm{Pic}(A)$, 我们还需要讨论两个分式理想何时作为 A-模是同构的.

命题 4.4.4 设 I, J 均为 A 的分式理想, 则 I 与 J 作为 A-模同构 $\iff$ 存在 $0\neq f\in K^*$, 使得 $J=fI$.

证明 $\Longleftarrow$ 是显然的. 故只需证 $\Longrightarrow$. 设 $\varphi: I\xrightarrow{\sim} J$ 为 A-模同构. 取 $0\neq x_0\in I$, 令 $f=\dfrac{\varphi(x_0)}{x_0}\in K$. 则 $f\neq 0$. 对任意 $x\in I$, 由于 $\dfrac{x}{x_0}\in K$, 可找到 $a,b\in A$, $b\neq 0$, 使得 $\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{a}{b}$, 从而 $ax_0-bx=0$. 故 $a\varphi(x_0)-b\varphi(x)=0$. 这说明

$$\varphi(x)=\frac{a\varphi(x_0)}{b}=\frac{\varphi(x_0)}{x_0}x=fx.$$

从而 $J=\varphi(I)=fI$. □

为了对应可逆模的张量积运算, 我们需要在分式理想上引入乘法运算. 设 I, J 为 A 的分式理想, 定义 IJ 为集合 $\{xy\mid x\in I, y\in J\}$ 生成的 K 的 A-子模. 显然 IJ 也是一个分式理想, 称为 I 和 J 的乘积. 当 I, J 均为 A 的非零理想时, 其作为分式理想的乘积与作为理想的乘积相同.

命题 4.4.5 设 I, J 均为 A 的分式理想, 则在 $\mathrm{Pic}(A)$ 中有 $[I]\cdot[J]=[IJ]$.

证明 由命题 4.4.1, 我们得到如下一系列单的 A-模同态:

$$I\otimes_A J\hookrightarrow K\otimes_A J\hookrightarrow K\otimes_A K\xrightarrow{\sim} K.$$

并且 $I \otimes_A J$ 在这些同态的复合下映为 K 的子模 IJ. 由此得到 A-模同构 $I \otimes_A J \simeq IJ$.□

在 A 的所有分式理想形成的集合上, 引入等价关系 $\sim$ 为: $I \sim J \iff$ 存在 $0 \neq f \in K^*$, 使得 $I = fJ$. 令等价类集合为 $\mathrm{Cl}(A)$. 分式理想的乘积给出了 $\mathrm{Cl}(A)$ 上的一个运算. 前面的讨论实际上已经证明了如下命题.

命题 4.4.6 $\mathrm{Cl}(A)$ 在分式理想的乘积下形成一个 Abel 群, 并且有群同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(A) \\ I &\longmapsto [I] \end{aligned}$$

我们称 $\mathrm{Cl}(A)$ 为 A 的**理想类群**. 作为 $\mathrm{Cl}(A)$ 是一个群的推论, 分式理想在乘积运算下均有逆元. 下面的推论给出了逆元的形式.

推论 4.4.1 对分式理想 I, 令 $I^{-1} \coloneqq \{x \in K \mid xI \subset A\}$, 则 I^{-1} 为分式理想, 并且 $II^{-1} = A$.

证明 由群同构 $\mathrm{Cl}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(A)$ 知存在分式理想 J 使得 $IJ = A$. 显然 $J \subset I^{-1}$. 反之, 任给 $x \in I^{-1}$, 有 $x \in xA = xIJ \subset AJ = J$, 故 $I^{-1} \subset J$. 这样得到 $I^{-1} = J$ 为分式理想, 并且 $II^{-1} = A$. □

由于分式理想的乘积显然具有结合性和交换性, 因此 A 的所有分式理想在乘积运算下形成一个 Abel 群, 将其记为 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$. 形如 fA, $f \in K^*$ 的分式理想称为主分式理想, 所有主分式理想形成 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$ 的子群. 根据上面的分析, $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$ 商掉主分式理想形成的子群得到的商群即为 $\mathrm{Cl}(A)$.

A 的除子群 $\mathrm{Div}(A)$ 定义为以 A 的所有非零素理想 $\mathrm{Spec}_m A$ 作为基生成的自由 Abel 群 ($\mathbb{Z}$-模). 除子群 $\mathrm{Div}(A)$ 中的一个元素 D 称为一个**除子**, 其为有限个非零素理想的形式和: $D = \sum_{i=1}^t n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in \mathrm{Spec}_m A$. 对一个分式理想 $I \subset K$, 在非零素理想 P 处作局部化得到 $I_P \subset K \otimes_A A_P = K$, 从而 I_P 可以自然地看作 K 的 A_P-子模.

命题 4.4.7 设 I 为 A 的分式理想, 则只有有限个非零素理想 P 使得 $I_P \neq A_P$, 或者等价地, 对几乎所有非零素理想 P, 均有 $I_P = A_P$. 这里均通过自然的单同态将 I_P 和 A_P 看作 K 的 A_P-子模.

证明 设 $f_1, \ldots, f_n \in K^*$ 为 I 作为 A-模的生成元. 设 $f_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i \in A \setminus \{0\}$. 由 A 为一维 Noether 环知集合

$$S \coloneqq \{P \mid P \in \mathrm{Spec}_m A,\ 并且存在 1 \le i \le n,\ 使得 a_i \in P\ 或者 b_i \in P\}$$

为有限集. 若 P 为不在 S 中的非零素理想, 则 $I_P = A$. 从而命题得证. □

对分式理想 I, 对 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 设 π_P 为主理想 PA_P 的生成元, 则容易看到存在

整数 $v_P(I)$, 使得作为 K 的子模有 $I_P = \pi_P^{v_P(I)} A_P$. 容易看到 $v_P(I)$ 不依赖于生成元 π_P 的选取, 称为 I 在点 P 处的阶. 由命题 4.4.7, 只有有限个 P 使得 $v_P(I) \neq 0$, 从而

$$\operatorname{div}(I) := \sum_{P \in \operatorname{Spec}_m A} v_P(I) P \in \operatorname{Div}(A)$$

是良好定义的除子. 特别地, 设 $f \in K^*$, 则主分式理想 fA 对应的除子 $\operatorname{div}(f) := \operatorname{div}(fA)$ 称为一个主除子. $v_P(f) := v_P(fA)$ 称为 f 在点 P 处的阶. 直观上看, $v_P(f)$ 代表有理函数 f 在 P 处的零点或极点的重数 (按 $v_P(f)$ 正负区分零点极点). A 的所有主除子形成 $\operatorname{Div}(A)$ 的子群, 记为 $\operatorname{Div}_p(A)$. 对应的商群 $\operatorname{Cl}'(A) := \operatorname{Div}(A)/\operatorname{Div}_p(A)$ 称为 A 的**除子类群**.

命题 4.4.8 对应 $I \mapsto \operatorname{div}(I)$ 给出了群同构 $\widetilde{\operatorname{Cl}(A)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Div}(A)$, 并且在这个同构下主分式理想形成的子群 $\mathrm{P}(A)$ 对应到主除子形成的子群 $\operatorname{Div}_p(A)$. 特别地, 我们有群同构 $\operatorname{Cl}(A) \simeq \operatorname{Cl}'(A)$.

证明 对分式理想 I, J, 如果 $\operatorname{div}(I) = \operatorname{div}(J)$, 则 $I_P = J_P$, $\forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, 从而 $I = J$. 这就证明了同态 $I \mapsto \operatorname{div}(I)$ 为单的. 对任意 $P \in \operatorname{Spec}_m A$, 显然 $\operatorname{div}(P) = P \in \operatorname{Div}(A)$. 由于 $\operatorname{Div}(A)$ 由 $\operatorname{Spec}_m A$ 生成, 故 $I \mapsto \operatorname{div}(I)$ 为满的. 这就得到了群同构 $\widetilde{\operatorname{Cl}(A)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Div}(A)$. 由定义, 这个同构将主分式理想对应到主除子, 从而诱导了商群的同构 $\operatorname{Cl}(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Cl}'(A)$. □

作为分式理想群和除子群同构的推论, 我们得到分式理想的素因子分解.

推论 4.4.2 设 I 为 A 的分式理想, 则有:

(i) 存在分解 $I = P_1^{a_1} \dots P_n^{a_n}$. 其中 $P_1, \dots, P_n$ 为互不相同的非零素理想, $a_1, \dots, a_n$ 均为非零整数.

(ii) 上述分解在不计各 $P_i^{a_i}$ 顺序的前提下是唯一的.

(iii) I 为 A 的理想 $\iff \forall\, i = 1, \dots, n$, $a_i > 0$.

特别地, 我们得到 A 的非零理想均可写为有限个素理想的乘积, 而且这种分解在不计素理想因子顺序的前提下是唯一的.

证明 这是命题 4.4.8 给出的群同构以及对 $P \in \operatorname{Spec}_m A$, $\operatorname{div}(P) = P$ 的直接推论. □

$\operatorname{Cl}(A)$ 刻画了 A 相对于主理想整环的偏离程度. 具体而言, 有下面的命题.

命题 4.4.9 设 $\operatorname{Cl}(A) = 0$ 为平凡 Abel 群 $\iff$ A 为主理想整环.

证明 由理想类群 $\operatorname{Cl}(A)$ 的定义即得. □

总结上面的讨论, 我们得到了 Picard 群 $\operatorname{Pic}(A)$, 理想类群 $\operatorname{Cl}(A)$ 和除子类群 $\operatorname{Cl}'(A)$ 是互相同构的. 前面已经说明了可逆模和分式理想的对应, 下面描述除子和它们之间的对应. 其中涉及到的验证都是直接的, 读者可以自行补充. 设 $D = \sum_{i=1}^{t} n_i P_i \in \operatorname{Div}(A)$

为除子. 通过 $\mathrm{Div}(A)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$ 的同构, 令 I 为与 D 对应的分式理想, 则 $\mathrm{div}(I) = D$. 由 $\mathrm{div}(I)$ 的定义即可验证 $I = \{f \in K^* \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \bigcup \{0\}$ 为 K 的子集. 这里 $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$ 是指除子 $\mathrm{div}(f) + D$ 作为形式和的每个系数均为非负整数.

另一方面, 给一个可逆 A-模 M, 对 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 由于 $M_P \simeq A_P$ 为秩 1 的自由 A_P-模, 我们可取 $e_P \in M_P$ 为 M_P 的生成元, 即 $M_P = A_P e_P$. 这样的元素 e_P 称为 M 在点 P 处的局部标架. 任何两个 P 处的局部标架相差一个 A_P^* 中的元. 我们称 $M \otimes_A K$ 中的一个元 s 为 M 的一个亚纯截面. 现在取定一个非零的亚纯截面 s, 再对每个 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 取定一个 P 处的局部标架 e_P, 取定 PA_P 的生成元 π_P. 由 $M \otimes_A K \simeq M_P \otimes_{A_P} K$, 将 $e_P \in M_P$ 等同 $e_P \otimes 1 \in M_P \otimes_{A_P} K$, 再等同到 $M \otimes_A K$ 中的元, 可知 $M \otimes_A K = K e_P$. 这样得到 $s = f_P\, e_P$, 其中 $f_P \in K^*$. 易知只有有限个 P 使得 $v_P(f_P) \neq 0$. 从而 $\mathrm{div}(s) := \sum_{P \in \mathrm{Spec}_m A} v_P(f_P) P \in \mathrm{Div}(A)$ 是一个良好定义的除子, 并且可验证不依赖于 e_P 和 π_P 的选取. 若 s' 为另一个非零亚纯截面, 则存在 $0 \neq f \in K^*$, 使得 $s' = fs$, 并且 $\mathrm{div}(s') = \mathrm{div}(s) + \mathrm{div}(f)$. 这说明 $\mathrm{div}(s)$ 和 $\mathrm{div}(s')$ 相差一个主除子, 从而 $\mathrm{div}(s)$ 代表的 $\mathrm{Cl}'(A)$ 中的元不依赖于 s 的选取. 不难看到 $[M] \mapsto \mathrm{div}(s)$ 即为前面给出的群同构 $\mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cl}'(A)$.

对于一个代数数域 K, 其代数整数环 $\mathcal{O}_K$ 的理想类群 $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ 是一个有限 Abel 群. 这是代数数论中的一个基本结论. 其证明可见代数数论的相关教材, 如 [11]. 关于代数整数环的理想类群, 还有很多猜想没有得到证明, 比如二次域的 Cohen-Lenstra heuristics. ([2, §5.10]).

习题

1. 设 A 为 Dedekind 整环. 证明:

(i) 对 $0 \neq a \in A$, 有 $A/aA = A_1 \times \cdots \times A_n$, 并且每个 A_i 均为离散赋值环的商环.

(ii) 设 I 为 A 的非零理想, 则存在 $a, b \in I$, 使得 $I = (a, b)$.

2. 证明若 A 为整闭整环, 则 $A[x]$ 也为整闭整环.

3. 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ 均为 Dedekind 整环.

4. 设 $N \geq 1$, $\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} \in \mathbb{C}^*$. 设 P 为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的非零素理想, $P \cap \mathbb{Z} = (p)$. 求 (p) 在 P 处的分歧指数.

5. 设 A 为 DVR, 证明 $\widehat{A}$ 也为 DVR.

6. 设 $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ 为 Dedekind 整环间单的有限扩张, 并且 (A, m) 为 DVR. 设 φ^* 在点 m 处的纤维为 $\varphi^{*-1}(m) = \{Q_1, \ldots, Q_t\}$. 证明:

(i) $\widehat{A} \otimes_A B \simeq \prod_{i=1}^{t} B_i$, 其中 $B_i = \widehat{B_{Q_i}}$ 为离散赋值环 B_{Q_i} 的完备化.

(ii) 对 $1 \leq i \leq t$, 对于 DVR 之间的扩张 $A \to B_{Q_i}$ 和 $\widehat{A} \to \widehat{B_{Q_i}}$, 它们的分歧指数 e_i 和剩余类次数 f_i 分别相等. 并且 $\widehat{B_{Q_i}}$ 为秩等于 $e_i f_i$ 的自由 $\widehat{A}$-模.

注记 4.4.1 本习题说明 B 完备化之后分裂为有限个局部环的乘积. 这在某种意义上是说在完备局部环比一般的局部环更具有 “局部性”. 一般地, 具有这种 “分裂” 效果的环称为 henselian 局部环, 其主要性质可见 [5, §2.8].

习题提示

1. (i): A/aA 为零维 Noether 环. (ii): $A_1 \times \cdots \times A_n$ 的每个理想均为主理想.
2. 利用 $A[x] = \bigcap_{\mathrm{ht}\, P=1} A_P[x]$, 将 A 约化为离散赋值环的情形.

第五章 维数理论

5.1 基本定理

设 X 为拓扑空间. 设 $F_0 \supsetneq F_1 \supsetneq \cdots \supsetneq F_n$ 为 X 的不可约闭子集形成的降链, 称 n 为该降链的长度. 我们定义 X 的**维数**, 记为 $\dim X$, 为所有 X 的不可约闭子集降链长度的上确界. 设 Y 为 X 的闭子集, 我们定义 Y 在 X 中的**余维数**, 记为 $\operatorname{codim}_X(Y)$ 为 X 的所有包含 Y 的不可约闭子集形成的降链长度的上确界. 设 A 为环, 定义 A 的 (Krull) 维数为素谱空间 $\operatorname{Spec} A$ 的维数, 记为 $\dim A$. 对于 A 的理想 I, 我们称 $V(I)$ 在 $\operatorname{Spec} A$ 中的余维数 $\operatorname{codim}_{\operatorname{Spec} A}(V(I))$ 为 I 的**高度**, 记为 $\operatorname{ht} I$.

由定义, 环 A 的维数 $\dim A$ 为 A 中素理想降链长度的上确界. 理想 I 的高度为包含在 I 中的素理想降链的长度的上确界. 注意即使 A 为 Noether 环, 也有可能发生 $\dim A = +\infty$. 在研究维数的性质时, 整扩张是一个重要的手段.

定理 5.1.1 (上升定理) 设 $A \to B$ 为环的整扩张, 设 $P_1 \subsetneq P_2$ 为 A 的两个素理想, 设 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ 且 $Q_1 \cap A = P_1$, 则存在 $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_2 \cap A = P_2$, 并且 $Q_1 \subsetneq Q_2$.

证明 令 $\bar{A} = A/P_1$, $\bar{B} = B/Q_1$, 则 $\bar{A} \hookrightarrow \bar{B}$ 为单的整扩张. 在 P_2 处作局部化, 得到单的整扩张 $\bar{A}_{P_2} \hookrightarrow \bar{B}_{P_2}$. 故 $\bar{B}_{P_2}$ 不是零环. 任取 $\bar{B}_{P_2}$ 的极大理想 Q, 则由整扩张的性质, $\bar{A}_{P_2} \cap Q$ 为 $\bar{A}_{P_2}$ 的极大理想, 从而 $\bar{A}_{P_2} \cap Q = P_2\bar{A}_{P_2}$. 令 $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ 为 Q 对应的素理想即可. □

命题 5.1.1 设 $A \to B$ 为单的整扩张, 则 $\dim A = \dim B$.

证明 设 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ 为 A 的一个素理想链. 由命题 3.6.6, 存在 $Q_0 \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_0 \cap A = P_0$. 再由定理 5.1.1, 可以将 Q_0 扩展为 B 中的素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq$

$\cdots \subsetneq Q_n$, 使得 $Q_i \cap A = P_i$, $\forall\, 0 \leq i \leq n$. 这样得到 $\dim A \leq \dim B$.

反过来, 任给 B 的素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$, 令 $P_i = Q_i \cap A$, 则得到 A 的素理想链 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$. 对每个 $i = 0, \ldots, n-1$, 由 $Q_i \subsetneq Q_{i+1}$ 和命题 3.6.5 知 $P_i \subsetneq P_{i+1}$. 这样得到一个 A 中长度为 n 的素理想链. 从而 $\dim A \geq \dim B$. 结合已得到的关系 $\dim A \leq \dim B$ 即知 $\dim A = \dim B$. □

定理 5.1.2 (下降定理) 设 $A \hookrightarrow B$ 为整环的单同态, 并且为整扩张. 还设 A 为整闭整环. 设 $P_1 \subsetneq P_2$ 为 A 的素理想, $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ 并且 $Q_2 \cap A = P_2$. 则存在 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ 满足 $Q_1 \cap A = P_1$, 以及 $Q_1 \subsetneq Q_2$.

证明 令 $K = \operatorname{Frac}(A)$, $L = \operatorname{Frac}(B)$, 则 L/K 为代数扩张. 下面将问题逐步进行约化.

(1) 可设 B 为 A 在 L 中的整闭包. 理由为: 令 $\tilde{B}$ 为 A 在 L 中的整闭包, 则有整扩张 $A \subset B \subset \tilde{B}$. 由上升定理, 可取 $\tilde{Q}_2 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_2 \cap B = Q_2$. 如果对 $A \subset \tilde{B}$ 的情形已经证明了下降定理, 则可取 $\tilde{Q}_1 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_1 \subset \tilde{Q}_2$, 且 $\tilde{Q}_1 \cap A = P_1$. 这样取 $Q_1 = \tilde{Q}_1 \cap B$ 即可.

(2) 可设 L/K 为有限扩张. 理由为: 假设对有限扩张的情形已经证明了下降定理, 对 L/K 的每个中间域 M, 记 A_M 为 A 在 M 中的整闭包. 考虑如下集合

$$S := \big\{(M, Q_M) \mid M \text{ 为 } L/K \text{ 的中间域}, Q_M \in \operatorname{Spec} A_M, Q_M \cap A = P_1, \\ Q_M \subset Q_2 \cap A_M \ \big\}.$$

定义 S 上的偏序关系 $\leq$ 为: $(M_1, Q_{M_1}) \leq (M_2, Q_{M_2}) \iff M_1 \subset M_2$, 且 $Q_{M_2} \cap A_{M_1} = Q_{M_1}$. 对 S 中的任意链 (全序子集) $\big\{(M_i, Q_{M_i}) \mid i \in I\big\}$, 令 $M := \bigcup\limits_{i \in I} M_i$, $Q_M := \bigcup\limits_{i \in I} Q_{M_i}$, 易验证 $(M, Q_M) \in S$, 并且 $(M_i, Q_{M_i}) \leq (M, Q_M)$, $\forall\, i \in I$. 这说明 S 中的任意链均有上界. 由 Zorn 引理, 可以找到 S 的一个极大元 (M_0, Q_{M_0}). 如果 $M_0 \neq L$, 取 $a \in L \setminus M_0$, 令 $M_1 = M_0(a)$. 则 M_1/M_0 为域的有限扩张, 并且对这个有限扩张应用下降定理可找到 $Q_{M_1} \in \operatorname{Spec} A_{M_1}$, 使得 $Q_{M_1} \cap A_{M_0} = Q_{M_0}$, 以及 $Q_{M_1} \subset Q_2 \cap A_{M_1}$. 这样得到 $(M_0, Q_{M_0}) < (M_1, Q_{M_1})$, 与 (M_0, Q_{M_0}) 的极大性矛盾. 故 $M_0 = L$, 从而取 $Q_1 = Q_{M_0}$ 即可.

(3) 可设 L/K 为正规扩张. 理由为: 取 $\tilde{L}$ 为 L/K 的正规闭包, 令 $\tilde{B}$ 为 A 在 $\tilde{L}$ 中的整闭包. 则 $A \subset B \subset \tilde{B}$ 为整扩张. 由上升定理, 可取 $\tilde{Q}_2 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_2 \cap B = Q_2$. 如果对 $A \subset \tilde{B}$ 的情形已经证明了下降定理, 则可取 $\tilde{Q}_1 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_1 \subset \tilde{Q}_2$, 且 $\tilde{Q}_1 \cap A = P_1$. 这样取 $Q_1 = \tilde{Q}_1 \cap B$ 即可.

(4) 可设 L/K 为可分扩张. 理由为: 设 $\operatorname{char}.K = p > 0$, 由于已经假设 L/K 为有限正规扩张, 域扩张 L/K 可以分解为 $K \subset L_{insep} \subset L$, 使得 L_{insep}/K 为有限纯不可分扩张, L/L_{insep} 为有限可分扩张 ([14, Lemma 030M]). 设 A_{insep} 为 A 在 L_{insep} 中的整闭包. 对 $j = 1, 2$, 令 $\tilde{P}_j := \big\{x \in A_{insep} \mid \exists\, n \geq 1, x^{p^n} \in P_j\big\}$. 则 $\tilde{P}_j$ 为 A_{insep} 中唯一的满足 $\tilde{P}_j \cap A = P_j$ 的素理想, 并且 $\tilde{P}_1 \subset \tilde{P}_2$, $Q_2 \cap A_{insep} = \tilde{P}_2$. 如果对可分扩张 L/L_{insep} 已经证明了下降定理, 则可找到 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$, 使得

$Q_1 \cap A_{insep} = \tilde{P}_1$, $Q_1 \subset Q_2$. 这样 Q_1 也满足 $Q_1 \cap A = P_1$ 的要求.

(5) 由前面几步的约化, 我们可以假设 L/K 为有限 Galois 扩张, B 为 A 在 L 中的整闭包. 令 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ 为 Galois 群. 由上升定理, 可找到 $Q_1' \in \operatorname{Spec} B$ 使得 $Q_1' \cap A = P_1$, 又可找到 $Q_2' \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_2' \cap A = P_2$, 且 $Q_1' \subset Q_2'$. 我们断言存在 $g \in G$, 使得 $gQ_2' = Q_2$. 这是因为, 假设 $\forall\, g \in G$, $Q_2 \not\subseteq gQ_2'$, 则由素避引理 3.2.1, 可找到 $x \in Q_2$, 使得 $x \notin gQ_2'$, $\forall\, g \in G$. 这样得到 $y := \prod_{g\in G} gx \notin Q_2'$. 由于 $y \in L^G = K$, y 在 A 上整且 A 为整闭整环, 知 $y \in A$. 从而 $y \in Q_2 \cap A = P_2 \subset Q_2'$. 这与 $y \notin Q_2'$ 矛盾. 故存在 $g \in G$, 使得 $Q_2 \subseteq gQ_2'$. 由于 $gQ_2' \cap A = P_2 = Q_2 \cap A$, 以及整扩张时每个纤维中的素理想没有包含关系, 我们得到 $Q_2 = gQ_2'$. 这样取 $Q_1 = gQ_1'$ 即满足条件. □

注记 5.1.1 在环的平坦同态时也有形如下降定理的性质成立 (命题 7.3.5).

现在可以将 Noether 正规化定理加强为下面的版本.

定理 5.1.3 (Noether 正规化定理: 理想链版本) 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 设 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r$ 为 A 的理想链, 并且 $I_r \neq A$. 则 A 中可找到有限个在 k 上代数无关的元 $t_1, \ldots, t_n$, 满足:

(i) $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow A$ 为有限扩张.

(ii) 存在整数 $0 \leq h(1) \leq h(2) \leq \cdots \leq h(r) \leq n$, 使得对每个 $1 \leq i \leq r$, 均有 $I_i \bigcap k[t_1, \ldots, t_n] = (t_1, \ldots, t_{h(i)})$. 其中当 $h(i) = 0$ 时, $(t_1, \ldots, t_{h(i)})$ 理解为零理想 (0).

证明 设 $A = k[x_1, \ldots, x_n]/J$, 则 $I_1 \subset \cdots \subset I_r$ 可看作 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 中的理想链. 通过考虑 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的理想链 $J \subset I_1 \subset \cdots \subset I_r$, 不妨假设 $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ 为多项式环. 下面对 n 进行归纳.

(1) 当 $n = 1$ 时, 不妨设 $I_1 \neq (0)$, 则 $I_1 = (f)$ 为主理想, 且 f 为次数大于 0 的多项式. 令 $t_1 = f$, 则 t_1 在 k 上代数无关, $k[t_1] \hookrightarrow A$ 为整扩张, 并且 $I_1 \cap k[t_1] = (t_1)$. 由于 (t_1) 为极大理想, 故 $I_i \cap k[t_1] = (t_1)$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 不妨设 $I_1 \neq 0$. 取 $0 \neq f \in I_1$, 并令 $I_0 = (f)$. 与定理 3.6.4 的证明类似, 通过一个可逆变量代换, 不妨设 f 为 x_1 的首一多项式. 这样取 $u_1 = f$, $u_i = x_i$ $(2 \leq i \leq n)$, 则容易看到 $u_1, \ldots, u_n$ 在 k 上代数无关, $k[u_1, \ldots, u_n] \hookrightarrow A$ 为整扩张, 并且 $I_0 \cap k[u_1, \ldots, u_n] = (u_1)$. 对 $k[u_2, \ldots, u_n] \simeq k[u_1, \ldots, u_n]/(u_1)$ 及其理想链

$$\frac{I_1 \cap k[u_1, \ldots, u_n]}{(u_1)} \subset \frac{I_2 \cap k[u_1, \ldots, u_n]}{(u_1)} \subset \cdots \subset \frac{I_r \cap k[u_1, \ldots, u_n]}{(u_1)}$$

应用归纳假设, 可以找到 $k[u_2, \ldots, u_n]$ 中在 k 上代数无关的元 $t_2, \ldots, t_n$, 使得

$k[t_2,\ldots,t_n] \hookrightarrow k[u_2,\ldots,u_n]$ 为整扩张, 且

$$\frac{I_i \cap k[u_1,\ldots,u_n]}{(u_1)} \bigcap k[t_2,\ldots,t_n] = (t_2,\ldots,t_{h(i)}),\ i=1,\ldots,r.$$

其中 $h(i)$ 为非负整数. 令 $t_1 = u_1$, 则 $t_1,\ldots,t_n$ 为 A 中在 k 上代数无关的元素, 并且由 $k[t_1,\ldots,t_n] \hookrightarrow k[u_1,\ldots,u_n]$ 为整扩张知 $k[t_1,\ldots,t_n] \hookrightarrow A$ 为整扩张. 同时不难验证, 对每个 $i=1,\ldots,r$, 有 $I_i \cap k[t_1,\ldots,t_n] = (t_1,\ldots,t_{h(i)})$. 归纳证毕. □

上述证明想法的几何意义为: 设 $V(I_1) \supset V(I_2) \supset \cdots \supset V(I_r)$ 为仿射空间 $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1,\ldots,x_n]$ 的闭子簇 (闭子概型). 取 $Y = V(f)$ 为 $\mathbb{A}_k^n$ 的包含 $V(I_1)$ 的超曲面. 通过可逆变量代换, 找到满的有限态射 $\mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\pi_1} A_k^n$, 使得 $\pi_1(Y) \subset H$, $H \simeq \mathbb{A}_k^{n-1}$ 为 $\mathbb{A}_k^n$ 的一个超平面. 取定一个线性同构 $\psi : \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\sim} H \times \mathbb{A}_k^1$ 使得 $\psi(H) = H \times \{0\}$. 对 H 及其闭子簇链 $\pi_1(V(I_1)) \supset \cdots \supset \pi_1(V(I_r))$ 应用归纳假设, 又可以找到满的有限态射 $\pi_2 : H \longrightarrow \mathbb{A}_k^{n-1}$, 使得 $\pi_1(V(I_1)) \supset \cdots \supset \pi_1(V(I_r))$ 在 π_2 下的像为子线性空间链. 这样得到

$$\pi : \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\psi} H \times \mathbb{A}_k^1 \xrightarrow{\pi_2 \times \mathrm{id}} \mathbb{A}_k^{n-1} \times \mathbb{A}_k^1 = \mathbb{A}_k^n$$

为满的有限态射, 且 $V(I_1) \supset V(I_2) \supset \cdots \supset V(I_r)$ 在 π 下的像为一组子线性空间.

下面分析 Noether 局部环的维数.

定义 5.1.1 设 (A,m) 为 Noether 局部环. m 中的一组元素 $x_1,\ldots,x_r$ 称为一组**参数系**, 如果存在正整数 i, 使得 $m^i \subset (x_1,\ldots,x_r)$. 包含元素个数最少的参数系称为 A 的一组极小参数系. 极小参数系中包含的元素个数记为 $\delta(A)$.

由定义, $\delta(A)$ 不超过 m 的极小生成元的个数. 实际上, 有下面更强的不等式成立.

引理 5.1.1 设 (A,m) 为 Noether 局部环. 则 $\delta(A) \le \dim A$.

证明 不妨设 $d = \dim A < +\infty$. 对 d 归纳. 若 $d = 0$, 则 m 为极小素理想, 从而 m 为幂零理想, 故 $r = 0$.

下面记 $r = \delta(A)$. 设 $d \ge 1$. 则 m 不是极小素理想. 由于 A 的极小素理想只有有限个, 由素避引理 3.2.1, 可以找到 $x \in m$, 使得 x 不在任何极小素理想中. 这样得到 $\dim A/(x) \le d-1$. 从而由归纳假设, 可以找到 $y_1,\ldots,y_r \in m$, 使得 $r \le d-1$, 并且 $\overline{y_1},\ldots,\overline{y_r}$ 为 $A/(x)$ 的极小参数系. 由此可得 $x, y_1,\ldots,y_r$ 为 A 的参数系. 故 $\delta(A)$ 不超过 $r+1 \le d$. □

我们的目标是证明 Noether 局部环 A 的极小参数系包含的元素个数恰好等于 A 的维数. 为此, 需要先考察极小参数系只含一个元素的情形.

定理 5.1.4 (Krull 主理想定理) 设 (A,m) 为 Noether 局部环, 并且 $x \in m$ 为 A 的参数系. 则 $\dim A \le 1$.

证明 设 $P \subsetneq m$ 为 A 的一个不等于 m 的素理想. 我们只需证明 P 为极小素理想. 由参数系的定义, 存在 $i \geq 1$, 使得 $m^i \subset (x)$. 从而在 $A/(x)$ 中有 $\overline{m}^i = 0$. 这说明 $A/(x)$ 为有限长度的 A-模. 故 $A/(x)$ 的任意理想降链均在有限步稳定.

如果 $x \in P$, 由 $m^i \subset (x) \subset P$ 知 $m \subset P$. 这与 $P \subsetneq m$ 矛盾. 故 $x \notin P$.

考虑 P 的符号幂 $P^{(r)} = P^r A_P \bigcap A$, 以及 A 的理想降链

$$P^{(1)} + (x) \supset P^{(2)} + (x) \supset \cdots .$$

该理想降链对应到 $A/(x)$ 的理想降链, 再由 $A/(x)$ 的任意理想降链均在有限步稳定, 可知存在 $r \geq 1$, 使得 $P^{(r)} + (x) = P^{(r+1)} + (x)$. 从而对任意 $y \in P^{(r)}$, 存在 $z \in P^{(r+1)} \subset P^{(r)}$ 以及 $a \in A$, 使得 $y = z + xa$. 再由 $x \notin P$ 可知 $a \in P^{(r)}$. 由此得到 $P^{(r)} = P^{(r+1)} + xP^{(r)}$. 注意到 $x \in m$, 利用 Nakayama 引理可得 $P^{(r)} = P^{(r+1)}$. 这样在 A_P 中有 $P^r A_P = P^{r+1} A_P$. 再 Noether 局部环 A_P 中再次应用 Nakayama 引理, 即得 $P^r A_P = 0$. 故 PA_P 为 A_P 中的极小素理想. 从而 P 为 A 的极小素理想. □

注记 5.1.2 通过局部化, 显然 Krull 主理想定理等价于下面的形式: 设 A 为 Noether 环, $x \in A$, 并且 P 为包含 x 的素理想中的极小元, 则 P 的高度 $\operatorname{ht} P \leq 1$.

现在可以给出关于 Noether 局部环维数的如下基本定理.

定理 5.1.5 设 (A, m) 为 Noether 局部环, 则 $\dim A = \delta(A)$.

证明 对 $\delta(A)$ 归纳. 如果 $\delta(A) = 0$, 则 m 为幂零理想, 从而为极小素理想, 这说明 $\dim A = 0$.

如果 $\delta(A) = 1$, 由 Krull 主理想定理, $\dim A \leq 1$. 而若 $\dim A = 0$, 则 m 为极小素理想, 从而幂零, 这将得到 $r(A) = 0$. 故 $\dim A = 1$.

下面假设 $\delta(A) = r \geq 2$. 由于引理 5.1.1 已经证明了 $r \leq \dim A$, 故只需证明 $\dim A \leq r$. 取 A 的一组极小参数系 $x_1, \ldots, x_r \in m$. 任取 A 的一个长度为 n 的素理想链 $P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1} \subsetneq P_n = m$. 由 Noether 环中任意理想的非空子集均有极大元, 可知存在一个素理想 P 满足 $P_{n-1} \subset P \subsetneq m$, 并且 P 和 m 之间不存在其它的素理想. 由参数系的定义可以看到 $(x_1, \ldots, x_r) \not\subset P$, 因为否则 m 的一个幂次 (从而 m 本身) 将包含在 P 中. 不妨设 $x_r \notin P$. 则 m 为包含 $P + (x_r)$ 的素理想的极小元. 从而 m 的一个幂次包含在 $P + (x_r)$ 中. 特别地, 对每个 $i = 1, \ldots, r-1$, 均存在 $c_i \geq 1$, $y_i \in P$, $a_i \in A$, 使得 $x_i^{c_i} = y_i + a_i x_r$. 由此可以看到 $(y_1, \ldots, y_{r-1}, x_r)$ 为 A 的另一组极小参数系. 在商环 $A/(y_1, \ldots, y_{r-1})$ 中, $\overline{x_r}$ 为 $\overline{m}$ 的一个参数系, 从而由 Krull 主理想定理知 $\dim A/(y_1, \ldots, y_{r-1}) \leq 1$. 再由 $\overline{P} \subsetneq \overline{m}$ 知 $\overline{P}$ 为 $A/(y_1, \ldots, y_{r-1})$ 的极小素理想. 这样得到 $y_1, \ldots, y_{r-1}$ 为局部化 A_P 的一组参数系. 从而由归纳假设知 $\dim A_P \leq r - 1$. 再由 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1} \subset P$ 知 $n - 1 \leq \dim A_P \leq r - 1$. 故 $n \leq r$. 这说明 A 的任意素理想链长度不超过 r. 即得 $\dim A \leq r = \delta(A)$. □

作为直接的推论, 我们得到下面关于局部同态纤维维数的不等式.

推论 5.1.1 设 $(A,m) \to (B,n)$ 为 Noether 局部环的局部同态, 则

$$\dim B/mB \geq \dim B - \dim A.$$

证明 取 A 的一组极小参数系 $x_1,\ldots,x_r$, 取 B/mB 的一组极小参数系 $\overline{y_1},\ldots,\overline{y_s}$, 则 $x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s$ 为 B 的一组参数系. 从而 $\dim B \leq \dim A + \dim B/mB$. □

5.2 有限生成代数的维数

作为上节几个基本定理的应用, 我们分析域上有限生成代数的维数. 为此, 先引入饱和素理想链的概念. 我们称环 A 的一个素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ 为**饱和素理想链**, 如果 P_n 为极大理想, P_0 为极小素理想, 并且对每个 $0 \leq i \leq n-1$, 不存在满足 $P_i \subsetneq Q \subsetneq P_{i+1}$ 的素理想 Q.

定理 5.2.1 设 A 为域 k 上的有限生成代数, 且为整环. 令 $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 则有:

(i) $\dim A = \mathrm{trdeg}_k K$. 其中 $\mathrm{trdeg}_k K$ 为 K/k 的超越次数 ([14, Definition 030G]).

(ii) A 的任意素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ 均可扩充为一个饱和素理想链.

(iii) A 的任意两个饱和素理想链的长度相等.

(iv) 对 A 的任意极大理想 m, 有 $\dim A = \dim A_m$.

证明 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$. 由理想链形式的 Noether 正规化定理 5.1.3, 可以找到在 k 上代数无关的元 $t_1,\ldots,t_n$, 以及非负整数 $0 \leq h(0) \leq h(1) \leq \cdots \leq h(r) \leq n$, 使得 $k[t_1,\ldots,t_n] \hookrightarrow A$ 为整扩张, 并且 $P_i \cap k[t_1,\ldots,t_n] = (t_1,\ldots,t_{h(i)})$. 由于整扩张每个纤维中的素理想没有包含关系, 我们看到 $h(i) < h(i+1)$, $\forall\ i = 0,\ldots,r-1$. 由下降定理 5.1.2, $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ 可以扩充为素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$, 使得 $Q_i \cap k[t_1,\ldots,t_n] = (t_1,\ldots,t_i)$, $\forall\ i = 0,\ldots,n$. 注意到 $k[t_1,\ldots,t_n]$ 中的素理想链 $(0) \subsetneq (t_1) \subsetneq (t_1,t_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (t_1,\ldots,t_n)$ 已经饱和, 再由整扩张每个纤维中的素理想没有包含关系, 我们看到素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$ 是饱和的. 这样我们证明了 A 的任何有限长素理想链都可以扩充为长度为 n 的饱和素理想链. 由 $n = \mathrm{trdeg}_k K$, 定理得证. □

作为推论, 我们看到 $\dim k[x_1,\ldots,x_n] = n$. 这与直观相符.

推论 5.2.1 设 A 为域 k 上的有限生成代数, $\mathrm{Spec}\, A = X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_r$ 为不可约分解. 则对每个 X_i, 任取闭点 $P \in X_i$, 使得 $\forall\ j \neq i$, $P \notin X_j$, 则 $\dim X_i = \dim A_P$.

证明 设 $X_i = V(P_i)$, P_i 为极小素理想. 由定义, $\dim X_i = \dim A/P_i$. 再由定理 5.2.1 知 $\dim A/P_i = \dim A_P/P_iA_P$. 而根据 P 的取法, P_iA_P 为 A_P 的唯一极小素理想, 从而 $\dim A_P/P_iA_P = \dim A_P$. □

推论 5.2.2 设 k 为域, $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$.

(i) 如果 $I = (f_1, \ldots, f_r)$, 则 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均大于或等于 $n - r$.

(ii) 如果 $I = (f)$ 为非零主理想, 则 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均为 $n - 1$.

证明 (i): 设 X 为 $\operatorname{Spec} A$ 的一个不可约分支. 取闭点 $P \in X$, 使得 P 不在其它不可约分支中. 由推论 5.2.1, $\dim X = \dim A_P = \dim k[x_1, \ldots, x_n]_P/(f_1, \ldots, f_r)$. 设 $d = \dim k[x_1, \ldots, x_n]_P/(f_1, \ldots, f_r)$, 由 Noether 局部环维数的基本定理 5.1.5, 可取 $a_1, \ldots, a_d \in Pk[x_1, \ldots, x_n]_P$ 使得 $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d$ 为 $k[x_1, \ldots, x_n]_P/(f_1, \ldots, f_r)$ 的极小参数系, 从而 $a_1, \ldots, a_d, f_1, \ldots, f_r$ 为 $k[x_1, \ldots, x_n]_P$ 的参数系. 这样得到 $n = \dim k[x_1, \ldots, x_n]_P \geq d + r$. 故 $d \leq n - r$.

(ii): 任取 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分支 X, 由于 X 为 $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$ 的真闭子集, 得到 $\dim X < \dim \mathbb{A}_k^n = n$. 而由 (i) 知 $\dim X \geq n - 1$. 故 $\dim X = n - 1$. □

翻译为几何语言, 上述推论中的 (i) 是说在仿射空间 k^n 中, 每用一个超曲面 $V(f_i)$ 截一次, 维数至多降一维. (ii) 是说 k^n 的每个超曲面的不可约分支均为 $n - 1$ 维的.

对于空间之间的一个满射 $f : Y \to X$, 直观上看纤维 $f^{-1}(x)$ 的维数应该是 $\dim Y - \dim X$. 对于域上有限生成代数的素谱之间的映射, 下面的定理说明每个非空纤维的维数都不会小于期望维数 $\dim Y - \dim X$, 并且对于一个稠密开子集上的 x, 其纤维维数确实等于期望维数.

定理 5.2.2 设 k 为域, 设 A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $\varphi : A \hookrightarrow B$ 为 k-代数单同态. 记 $f : Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间之间的映射. 则有:

(i) 对 X 的任一闭点 x, 如果 $f^{-1}(x) \neq \varnothing$, 则对 $f^{-1}(x)$ 的任一不可约分支 F, 均有 $\dim F \geq \dim Y - \dim X$.

(ii) 存在 X 的非空开集 U, 使得 $U \subset f(Y)$, 并且对 U 的任一闭点 x, 对 $f^{-1}(x)$ 的任一不可约分支 F, 均有 $\dim F = \dim Y - \dim X$.

证明 (i): 任取 F 上的一个闭点 y, 则 y 也是 Y 的闭点. 设 x 对应 A 的极大理想 m, y 对应 B 的极大理想 n, 由定理 5.2.1 (iv) 可知 $\dim X = \dim A = \dim A_m$, $\dim Y = \dim B = \dim B_n$, 以及 $\dim F = \dim B_n/mB_n$. 再由 推论 5.1.1 即得 $\dim F \geq \dim Y - \dim X$.

(ii): 由整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5, 通过将 A 替换为某个局部化 A_a, 我们不妨设 φ 可以分解为

$$A \hookrightarrow A[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow B,$$

使得 $x_1, \ldots, x_n$ 在 $\operatorname{Frac}(A)$ 上代数无关, 并且 B 为 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 的有限扩张. 记 $Z = \operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_n]$, 则 f 分解为

$$Y \xrightarrow{f_1} Z \xrightarrow{f_2} X.$$

由 f_1 和 f_2 均为满射, 知 f 为满射.

由 Noether 正规化定理, 存在 A 的子代数 $A_1 = k[y_1, \ldots, y_m]$, 使得 $y_1, \ldots, y_m$ 在 k 上代数无关, 并且 $A_1 \hookrightarrow A$ 为有限扩张. 设 $g : X \to X_1 = \operatorname{Spec} A_1$ 为相应的素谱空间的映射, 则对 X 的闭点 x, 其在 X_1 中的像 $g(x)$ 也为闭点, 并且 $f^{-1}(x)$ 的每个不可约分支也是 $(g \circ f)^{-1}(g(x))$ 的一个不可约分支. 再由 $\dim X = \dim X_1$, 我们不妨设 $A = A_1$ 为 k 上的多项式环. 由 Z 的定义知 $f_2^{-1}(x)$ 为 n 维不可约闭子集. 再由 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 为整闭整环, 可以应用下降定理 5.1.2 得到 $f^{-1}(x) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(x))$ 的每个不可约分支 F 满足 $f_1(F) = f_2^{-1}(x)$, 故 $\dim F = \dim f_2^{-1}(x) = n$. 显然 $n = \dim Y - \dim X$. 故 $\dim F = \dim Y - \dim X$. □

例 5.2.1 下面是一个纤维维数不等于期望维数的例子. 设 k 为代数封闭域, $A = k[x, y]$, $B = k[x, y, z]/(x - zy)$, 而同态 $A \to B$ 为 $x \mapsto x, y \mapsto y$. 则对于 $\operatorname{Spec} A$ 上的闭点 P, 当 $P \neq (x, y)$ 时, $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 在 P 处的纤维维数是 0, 而闭点 (x, y) 处的纤维维数是 1.

5.3 Hilbert-Samuel 多项式

环 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ 称为**分次环**, 如果每个 A_n 均为加法交换群, $\bigoplus_{n \geq 0} A_n$ 为 Abel 群的直和, 并且

$$A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}, \quad \forall\, n, m \geq 0.$$

设 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ 为分次环, A-模 $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ 称为一个**分次 A-模**, 如果每个 M_n 均为加法交换群, $\bigoplus_{n \geq 0} M_n$ 为 Abel 群的直和, 并且

$$A_n \cdot M_m \subset M_{n+m}, \quad \forall\, n, m \geq 0.$$

例 5.3.1 设 A_0 为环, 则多项式环 $A = A_0[x_1, \ldots, x_n]$ 为分次环, 其中 A_m 定义为 m 次齐次多项式形成的加法子群.

设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 则

$$\operatorname{gr}(A) \coloneqq \bigoplus_{n \geq 0} m^n / m^{n+1}$$

为分次环.

$$\operatorname{gr}(M) \coloneqq \bigoplus_{n \geq 0} m^n M / m^{n+1} M$$

为分次 $\operatorname{gr}(A)$-模. 并且每个 $m^n M / m^{n+1} M$ 为有限维 k-线性空间. 我们希望考察 $\dim_k m^n M / m^{n+1} M$ 随着 n 增长时的行为. 下面的定理说明当 n 充分大时这是 n 的一

个多项式.

定理 5.3.1 设 $A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ 为 Noether 分次环, $M=\bigoplus_{n\geq 0}M_n$ 为分次 A-模, 且为有限 A-模. 设 A 作为 A_0-代数可以由 A_1 中的有限个元素 $x_1,\ldots,x_s$ 生成, 并且每个 M_n 作为 A_0-模的长度 $\ell(M_n)$ 有限. 则存在唯一的多项式 $f(t)\in\mathbb{Q}[t]$, 使得 $\deg f(t)\leq s-1$, 并且对充分大的 n 都有

$$f(n)=\ell(M_n),$$

其中当 $s=0$ 时 $f(t)=0$. 这个多项式 $f(t)$ 称为 M 的 **Hilbert 多项式**.

证明 对 s 归纳. 当 $s=0$ 时, $A=A_0$. 设 $e_1,\ldots,e_n$ 为 M 的生成元. 取 m 为正整数, 使得每个 e_i 均包含在 $\bigoplus_{n=0}^{m}M_n$ 中. 则 $M_n=0,\ \forall\ n>m$. 这说明当 $n>m$ 时有 $\ell(M_n)=0$. 故 $f(t)$ 为零多项式.

设 $s\geq 1$. 考虑乘 x_1 的模同态 $M\xrightarrow{x_1\cdot}M$, 其在每个分次部分上诱导了正合列:

$$0\longrightarrow K_n\longrightarrow M_n\xrightarrow{x_1\cdot}M_{n+1}\longrightarrow\frac{M_{n+1}}{x_1M_n}\longrightarrow 0.$$

令 $K\coloneqq\bigoplus_{n\geq 0}K_n$, $\overline{M}\coloneqq\bigoplus_{n\geq -1}\frac{M_{n+1}}{x_1M_n}$, 其中 $M_{-1}=0$. 则 K 和 M 均为分次 $A/(x_1)$-模. 这里 $A/(x_1)$ 的分次环结构为 $A/(x_1)=\bigoplus_{n\geq 0}\frac{A_n}{xA_{n-1}}$, 其中 $A_{-1}=0$. 由于作为 A-模, K 为 M 的子模, $\overline{M}$ 为 M 的商模, 从而 K 和 $\overline{M}$ 均为有限 A-模, 也为有限 $A/(x_1)$-模. 由于 $A/(x_1)$ 由 $s-1$ 个元素 $x_2,\ldots,x_s$ 生成, 根据归纳假设, 存在有理系数多项式 $g(t)$ 和 $h(t)$, 次数均不超过 $s-2$, 并且对充分大的 n 有 $g(n)=\ell(K_n)$, $h(n)=\ell(M_{n+1}/x_1M_n)$. 这样得到对充分大的 n, $\ell(M_{n+1})-\ell(M_n)=h(n)-g(n)$. 由此不难看到存在有理系数多项式 $f(t)$, 次数不超过 $s-1$, 使得对充分大的 n, 有 $f(n)=\ell(M_n)$. $f(t)$ 的唯一性是显然的. □

推论 5.3.1 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 则存在唯一的多项式 $F(t)\in\mathbb{Q}[t]$, 使得对充分大的 n 有

$$F(n)=\ell(M/m^nM).$$

其中 $\ell(M/m^nM)$ 是指 M/m^nM 作为 A-模的长度. 这个多项式 $F(t)$ 称为 M 的 **Hilbert-Samuel 多项式**.

证明 考虑分次环 $\mathrm{gr}(A)$ 上的分次模 $\mathrm{gr}(M)$. 设 $x_1,\ldots,x_s$ 为理想 m 的生成元, $e_1,\ldots,e_r$ 为 M 作为 A-模的生成元. 则 $x_1,\ldots,x_s\in m/m^2$ 也是 $\mathrm{gr}(A)$ 作为 k-代数的生成元, 而 $e_1,\ldots,e_r\in M/mM$ 是 $\mathrm{gr}(M)$ 作为 $\mathrm{gr}(A)$-模的生成元. 作为有限生成 k-代数, $\mathrm{gr}(A)$ 也是 Noether 环. 应用定理 5.3.1, 存在有理系数多项式 $f(t)$, 使得对充分大的

n 有 $f(n) = \dim_k(m^nM/m^{n+1}M)$. 再由 $\ell(M/m^nM) = \sum_{i=0}^{n-1}\dim_k(m^iM/m^{i+1}M)$ 即知多项式 $F(t)$ 的存在性. $F(t)$ 的唯一性是显然的. □

命题 5.3.1 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 设 $x \in A$ 为 M-正则元. 则 $d(M/xM) \leq d(M) - 1$.

证明 记 $\overline{M} = M/xM$, 则对任意 $n \geq 1$, 有短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{xM + m^nM}{m^nM} \longrightarrow \frac{M}{m^nM} \longrightarrow \frac{\overline{M}}{m^n\overline{M}} \longrightarrow 0.$$

记 $F(t)$ 和 $\overline{F}(t)$ 分别为 M 和 $\overline{M}$ 的 Hilbert-Samuel 多项式, 令 $G(t) = F(t) - \overline{F}(t)$. 则对充分大的 n 有

$$G(n) = F(n) - \overline{F}(n) = \ell(\frac{M}{m^nM}) - \ell(\frac{\overline{M}}{m^n\overline{M}}) = \ell(\frac{xM + m^nM}{m^nM}) = \ell(\frac{xM}{m^nM\bigcap xM}).$$

由 Artin-Rees 引理, 存在 $c \geq 1$, 使得 $\forall\, n \geq c$, 均有 $m^nM\bigcap xM = m^{n-c}(m^cM\bigcap xM)$. 而

$$m^n(xM) \subset m^{n-c}(m^cM\bigcap xM) \subset m^{n-c}(xM).$$

故对充分大的 n, 有

$$\ell\left(\frac{xM}{m^{n-c}(xM)}\right) \leq G(n) = \ell\left(\frac{xM}{m^{n-c}(m^cM\bigcap xM)}\right) \leq \ell\left(\frac{xM}{m^n(xM)}\right).$$

由 x 为 M-正则元知对任意 n, $\dfrac{M}{m^nM} \simeq \dfrac{xM}{m^n(xM)}$. 从而对充分大的 n 有

$$F(n-c) \leq F(n) - \overline{F}(n) = G(n) \leq F(n).$$

由此知 $\deg\overline{F}(t) \leq \deg F(t) - 1$, 即 $d(M/xM) \leq d(M) - 1$. □

对于 Noether 局部环 A, 其作为自身上模的 Hilbert-Samuel 多项式的次数记为 $d(A)$. 回忆 $\delta(A)$ 为 A 的一组极小参数系包含的元素个数.

命题 5.3.2 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 则 $d(A) \leq \delta(A)$.

证明 记 $r = \delta(A)$. 取 $x_1, \ldots, x_r \in m$ 为 A 的一组极小参数系. 由于对任意 $n \geq 1$, 自然同态 $A/(x_1, \ldots, x_r)^n \to A/m^n$ 为满同态, 故

$$\ell(A/m^n) \leq \ell(A/(x_1, \ldots, x_r)^n).$$

由于对每个 $i \geq 0$, $(x_1,\ldots,x_r)^i/(x_1,\ldots,x_r)^{i+1}$ 作为 A-模有有一组生成元

$$\{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_r^{a_r} \mid a_1+\cdots+a_r=i,\ a_1,\ldots,a_r\geq 0\},$$

从而 $\ell((x_1,\ldots,x_r)^i/(x_1,\ldots,x_r)^{i+1}) \leq \ell(A/(x_1,\ldots,x_r))\binom{i+r-1}{r-1}$. 这样得到

$$\ell\left(\frac{A}{(x_1,\ldots,x_r)^n}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\ell\left(\frac{(x_1,\ldots,x_r)^i}{(x_1,\ldots,x_r)^{i+1}}\right)\leq \ell\left(\frac{A}{(x_1,\ldots,x_r)}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+r-1}{r-1}.$$

由此得到

$$\ell(A/m^n)\leq \ell\left(\frac{A}{(x_1,\ldots,x_r)}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+r-1}{r-1}.$$

不难看到上述不等式右边是关于 n 的 r 次多项式. 从而 $d(A)\leq r=\delta(A)$. □

命题 5.3.3 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, 则 $d(A)\geq \dim(A)$.

证明 对 $d(A)$ 归纳. 当 $d(A)=0$ 时, 对充分大的 n, $\ell(A/m^n)$ 为 n 的常值函数. 从而存在 n 使得 $m^n=m^{n+1}$. 由 Nakayama 引理知 $m^n=0$. 故 $\dim A=0$.

设 $d(A)\geq 1$. 如果 $\dim A=0$, 则显然 $d(A)\geq \dim A$. 下面设 $\dim A\geq 1$. 任取 A 的素理想链 $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_r=m$, 并且 $r\geq 1$. 将 $\overline{A}:=A/P_0$ 看作 A-模. 取 $x\in P_1\setminus P_0$. 则 x 为 $\overline{A}$-正则元. 从而可以应用命题 5.3.1 得到

$$d(\overline{A}/x\overline{A})\leq d(\overline{A})-1\leq d(A)-1.$$

注意到 $\overline{A}/x\overline{A}$ 分别看作 A-模和 $\overline{A}/x\overline{A}$-模得到的 Hilbert-Samuel 多项式相同, 对环 $\overline{A}/x\overline{A}$ 应用归纳假设可得 $d(\overline{A}/x\overline{A})\geq \dim(\overline{A}/x\overline{A})$. 由于 $P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_r$ 对应了 $\overline{A}/x\overline{A}$ 中的一个长度为 $r-1$ 的素理想链, 可知 $\dim(\overline{A}/x\overline{A})\geq r-1$. 由此得到 $r-1\leq d(A)-1$. 故 $r\leq d(A)$. 再由素理想链 $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_r$ 的任意性即知 $\dim A\leq d(A)$. □

综合定理 5.1.5, 命题 5.3.2 以及 命题 5.3.3, 我们得到如下关于 Noether 局部环维数的三种等价刻画.

推论 5.3.2 设 A 为 Noether 局部环, 则 $\dim A=\delta(A)=d(A)$.

5.4 正则局部环初步

对于 Noether 局部环 (A, m, k), 我们称 k-线性空间 m/m^2 为 A 的余切空间. 由 Noether 性, 这是有限维线性空间. 再由 Nakayama 引理, 其维数等于 m 的极小生成元的个数.

命题 5.4.1 对于 Noether 局部环 (A, m, k), 有 $\dim A \leq \dim_k m/m^2$.

证明 由定理 5.1.5 和 A 的极小参数系包含的元素个数不超过 $\dim_k m/m^2$ 即得. □

定义 5.4.1 Noether 局部环 (A, m, k) 称为**正则局部环**, 如果 $\dim A = \dim_k m/m^2$.

由定义和 Nakayama 引理, 离散赋值环等价于一维局部正则环. 设 k 为代数封闭域, m 为 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的极大理想, 则局部化 $k[x_1, \ldots, x_n]_m$ 为正则局部环. 这是因为由 Hilbert 零点定理, m 具有形式 $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, $a_i \in k$. 从而显式计算可以看到 $\dim_k m/m^2 = n = \dim k[x_1, \ldots, x_n]_m$. 事实上, 对任意域 k, 多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 在任意素理想处的局部化都是正则局部环 (推论 9.2.1, 命题 9.2.2).

命题 5.4.2 正则局部环均为整环.

证明 设 (A, m) 为正则局部环. 对 $\dim A$ 归纳. 当 $\dim A = 0$ 时 A 为域, 也为整环. 设 $\dim A > 0$. 取 $x \in m - m^2$, 并且 x 不在任何极小素理想中. 则 A/xA 为正则局部环. 由归纳假设, A/xA 为整环. 从而 (x) 为 A 的素理想. 设 P 为包含在 (x) 中的极小素理想. 对任意 $a \in P$, 由 $P \subset (x)$ 知存在 $b \in A$ 使得 $a = bx$. 再由 $x \notin P$ 知 $b \in P$. 这样得到 $P = xP$. 由 Nakayama 引理知 $P = 0$. 故 A 为整环. □

注记 5.4.1 事实上, 正则局部环都是唯一因子分解整环 (定理 9.3.1).

命题 5.4.3 设 (A, m, k) 为正则局部环, $I \subset m$ 为 A 的理想. 则 A/I 为正则局部环 $\iff$ I 存在一组生成元 $x_1, \ldots, x_r$, 使得 $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r}$ 在余切空间 m/m^2 中是 k-线性无关的.

证明 我们分析商环 A/I 的余切空间维数与 A 的余切空间维数之差. A/I 的极大理想为 $\overline{m}$. 从而

$$\frac{\overline{m}}{\overline{m}^2} = \frac{m/I}{(m^2 + I)/I} = \frac{m}{m^2 + I} = \frac{m/m^2}{(I + m^2)/m^2}.$$

记 $r = \dim_k \dfrac{I + m^2}{m^2} = \dim_k \dfrac{m}{m^2} - \dim_k \dfrac{\overline{m}}{\overline{m}^2}$ 为两个余切空间维数之差. 设 $x_1, \ldots, x_r \in I$ 形成 $\dfrac{I + m^2}{m^2}$ 的一组 k-线性基. 令 $J = (x_1, \ldots, x_r) \subset I$. 则同样的分析可知 A/J 的余切空间维数等于 A/I 的余切空间维数, 均为 $\dim_k m/m^2 - r = \dim A - r$. 不断应用 Krull 主理想定理可知 $\dim A/J \geq \dim A - r$. 这样得到 $\dim A/J$ 大于等于 A/J 的余

切空间维数, 而反向不等式总是成立, 故 A/J 为正则局部环, 并且 $\dim A/J$ 等于 A/I 的余切空间维数.

$\Longrightarrow$: 如果 A/I 为正则局部环, 则通过比较余切空间维数得到 $\dim A/J = \dim A/I$, 再由 A/J 为整环和满同态 $A/J \to A/I$ 知 $I = J = (x_1, \ldots, x_r)$, 并且由 x_i 的取法知 $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r}$ 在余切空间 m/m^2 中是 k-线性无关的.

$\Longleftarrow$: 如果 I 由在 m/m^2 中 k-线性无关的元素生成, 则容易看到 $I = J = (x_1, \ldots, x_r)$. 从而 $A/I = A/J$ 为正则局部环. $\square$

习题

1. 设 k 为域, 设 A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $\varphi : A \hookrightarrow B$ 为 k-代数单同态. 记 $f : Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间之间的映射. 证明存在 X 的非空开集 U, 使得 $U \subset f(Y)$, 并且对 X 的任意不可约闭子集 Z, 只要 $Z \bigcap U \neq \varnothing$, 那么 $f^{-1}(Z)$ 的任一不可约分支 F 都满足 $\overline{f(F)} = Z$ 以及 $\dim F = \dim Z + \dim Y - \dim X$.

注: 取 Z 为闭点即得到定理 5.2.2.

2. 设 A 为 Noether 环, 证明 A 的素理想降链一定在有限步稳定.

3. 设 $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$. 记 $A = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$, $X = \operatorname{Spec} A$. 对每个 $m \geq 1$, 固定域嵌入 $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^m}$, 记 $X(\mathbb{F}_{p^m})$ 为 $f_1, \ldots, f_r$ 在 $\mathbb{F}_{p^m}^n$ 中的公共零点集.

(i) 证明存在集合的双射 $X(\mathbb{F}_{p^m}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_p}(A, \mathbb{F}_{p^m})$. 其中后者是指 A 到 $\mathbb{F}_{p^m}$ 的所有 $\mathbb{F}_p$-代数同态的全体.

(ii) 对 $m \geq 1$, 记 X_m 为 $\operatorname{Spec} A$ 中满足 $k(P) \simeq \mathbb{F}_{p^m}$ 的点 P 的全体. 证明

$$| X(\mathbb{F}_{p^m}) | = \sum_{r \mid m} r \mid X_r \mid .$$

(iii) 设 $d = \dim X$. 证明存在正实数 $C > 0$, 使得对任意 $m \geq 1$, 均有 $| X(\mathbb{F}_{p^m}) | \leq C p^{md}$.

4. 设 A, B 均为域 k 上的有限生成代数, $\varphi : A \longrightarrow B$ 为 k-代数同态. 证明 $\varphi^*(\operatorname{Spec} B)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的可构造子集.

5. 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环. 证明 A 为 n 维正则局部环 $\Longleftrightarrow$ 分次 k-代数 $\operatorname{gr}(A)$ 同构于 $k[x_1, \ldots, x_n]$.

习题提示

1. 仿照定理 5.2.2 的证明即可.

2. 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 $\dim A_P < +\infty$.

3. (iii): 对 $\mathbb{F}_p$-代数 A 应用 Noether 正规化定理.

5. $\Longrightarrow$: 通过正则参数系构造满同态 $k[x_1, \ldots, x_n] \to \oplus_{i=0}^{\infty} m^i/m^{i+1}$, 如果 ker 非零, 比较两边 Hilbert-Samuel 多项式的次数. 见 [1, Theorem 11.22].

第六章 同调工具

6.1 标准单形与 Cěch 复形

设 I 为非空集合. 对 $m \geq 0$, 令 $F_m(\Delta)$ 为符号集合 $\{e_{i_0 i_1 \ldots i_m} | i_0, \ldots, i_m \in I\}$ 作为基生成的自由 Abel 群, 即

$$F_m(\Delta) \coloneqq \bigoplus_{i_0, \ldots, i_m \in I} \mathbb{Z} e_{i_0 \ldots i_m}.$$

令 $R_m(\Delta)$ 为 $F_m(\Delta)$ 中由 $\{e_{i_{\sigma(0)}, \ldots, i_{\sigma(m)}} - \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_{i_0 \ldots i_m} | i_0, \ldots, i_m \in I,\ \sigma \in S_{m+1}\}$ 中元素生成的子群. 这里 S_{m+1} 理解为 $\{0, 1, \ldots, m\}$ 到自身的双射形成的群. 定义 $C_m(\Delta)$ 为商群 $F_m(\Delta)/R_m(\Delta)$. 令 $C_{-1}(\Delta) = \mathbb{Z}$. 对 $m < -1$, 令 $C_m(\Delta) = 0$. 定义如下边缘同态 ∂.

$$\begin{aligned}
C_m(\Delta) &\xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(\Delta) \\
e_{i_0 \ldots i_m} &\longmapsto \sum_{j=0}^{m} (-1)^j e_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_m} \\
C_0(\Delta) &\xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(\Delta) \\
e_i &\longmapsto 1
\end{aligned}$$

容易验证 $\forall\, m \in \mathbb{Z},\ \partial_{m-1} \circ \partial_m = 0$, 从而 $(C.(\Delta), \partial.)$ 成为复形. 称为以 I 为顶点的**增广标准单形**. 容易看到 $C_m(\Delta)$ 为自由 $\mathbb{Z}$-模, 并且如果 "$<$" 为 I 上的一个全序, 则 $C_m(\Delta)$ 的一组基为 $\{e_{i_0 \ldots i_m} | i_0 < \cdots < i_m\}$.

定理 6.1.1 增广标准单形 $(C.(\Delta), \partial.)$ 处处正合, 即 $H_m(C.(\Delta)) = 0,\ \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

证明 我们构造 $C.(\Delta)$ 到自身的恒等同态 id 和零同态的一个同伦 h. 固定一个 $i \in I$. 令 $h_{-1} : C_{-1}(\Delta) = \mathbb{Z} \to C_0(\Delta)$ 由 $1 \mapsto e_i$ 确定. 对 $m \geq 0$, 令 $h_m : C_m(\Delta) \to C_{m+1}(\Delta)$ 由 $h_m(e_{i_0 \ldots i_m}) = e_{i i_0 \ldots i_m}$ 确定. 容易验证, $h.$ 给出了 id 和 0 的同伦, 即对任意 m, 有 $\mathrm{id} = h_{m-1} \circ \partial_m + \partial_{m+1} \circ h_m$. 由此得到 $H_m(C.(\Delta)) = 0, \forall\, m \in \mathbb{Z}$. □

上面定理证明中的同伦 h 称为锥构造, 其不仅证明了零调性, 实际上构造了 $C.(\Delta)$ 上恒等同态 id 与零同态的同伦. 这是一个比零调性更强的结论. 对于其它从 $C.(\Delta)$ 衍生出的复形, 如果要分析其零调性, 我们经常可以让同伦映射 h 相应地诱导衍生复形上恒等同态与零同态的一个同伦. 这从下面的例子中可以看到.

命题 6.1.1 设 M 为 $\mathbb{Z}$-模 (Abel 群), 则复形 $C^{\cdot}(\Delta; M) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C.(\Delta), M)$ 是处处正合的.

证明 同态 $h_m : C_m(\Delta) \to C_{m+1}(\Delta)$ 诱导了

$$h^{m+1} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{m+1}(\Delta), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_m(\Delta), M).$$

容易验证 $h^{\cdot}$ 给出了 id 和零同态的同伦. 从而 $C^{\cdot}(\Delta; M)$ 是零调的. □

另一个从标准单形衍生出的复形为预层的 Cěch 复形. 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为开集基, 使得 $X \in \mathcal{B}$, 并且 $\mathcal{B}$ 中任意两个开集的交均在 $\mathcal{B}$ 中. 设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的 $\mathcal{B}$-预层. 设 $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ 为 X 的一个开覆盖, 并且 $U_i \in \mathcal{B}, \forall\, i \in I$. 对每个 $n \geq 0$, 定义 Abel 群 $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \coloneqq \prod_{(i_0,\ldots,i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 \ldots i_n})$. 其中 $U_{i_0 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. 令 $C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. 对 $n \geq 0$, 定义群同态

$$\delta^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{6.1–1}$$

$$s = (s_{i_0 \ldots i_n}) \longmapsto \delta^n(s) \tag{6.1–2}$$

其中 $\delta^n(s)$ 的 $(i_0 \ldots i_{n+1})$ 分量为

$$\delta^n(s)_{i_0 \ldots i_{n+1}} \coloneqq \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s_{i_0 \ldots \widehat{i_j} \ldots i_{n+1}} \mid_{U_{i_0 \cdots i_{n+1}}},$$

而 $\widehat{i_j}$ 是指将指标 i_j 删除. 另外定义群同态

$$\delta^{-1} : C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{6.1–3}$$

$$s \longmapsto (s \mid_{U_i})_{i \in I} \tag{6.1–4}$$

不难验证, 对 $n \geq -1$, 有 $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. 从而 $(C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta^{\cdot})$ 形成一个复形, 称为 $\mathcal{F}$

在开覆盖 $\mathcal{U}$ 下的**增广 Cěch 复形**, 其上同调群 $H^n(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})) \coloneqq \operatorname{Ker}\delta^n/\operatorname{Im}\delta^{n-1}$ 记为 $H^n(\mathcal{U};\mathcal{F})$. 直观上看, $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 可以看做从增广标准单形 $C_{\cdot}(\Delta)$ 到 $\mathcal{F}$ 的 "同态" 形成的复形, 即有不严格的等式 "$C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \operatorname{Hom}(C_{\cdot}(\Delta),\mathcal{F})$". 我们自然希望模仿命题 6.1.1 的证明, 得到 Cěch 复形的零调性. 实际上, Cěch 复形并不总是零调的. 其零调性需要一些额外的条件.

命题 6.1.2 设开覆盖 $\mathcal{U}$ 满足 $X \in \mathcal{U}$, 则 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 是零调的. 即 $H^n(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

证明 设 $U_i = X$. 对 $n \geq 0$, 我们定义如下同态:

$$h^{n+1} : C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \tag{6.1–5}$$

$$s = (s_{i_0\dots i_{n+1}}) \longmapsto h^{n+1}(s) \tag{6.1–6}$$

其中 $h^{n+1}(s)$ 的 $(i_0\dots i_n)$ 分量为 $h^{n+1}(s)_{i_0\dots i_n} \coloneqq s_{ii_0\dots i_{n+1}} \in \mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$. 注意 $s_{ii_0\dots i_{n+1}}$ 虽然是 $\mathcal{F}(U_{ii_0\dots i_n})$ 中的元素, 但是因为 $U_{ii_0\dots i_n} = U_i \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} = X \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} = U_{i_0\dots i_n}$, 我们将 $s_{ii_0\dots i_n}$ 自然看作 $\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$ 中的元素.

再定义同态 $h^0 : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $s = (s_{i_0}) \longmapsto s_i$. 通过直接验证可以看到 $h^{\cdot}$ 给出了 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 上恒等同态与零同态的一个同伦. 从而得到 Cěch 复形的零调性. □

对于素谱空间上由模给出的预层, 我们有如下推论.

命题 6.1.3 设 A 为环, M 为 A-模. 设 $\operatorname{Spec} A = \cup_{i=1}^n D(f_i)$ 为主开集形成的有限开覆盖, 记为 $\mathcal{U}$. 则 $H^m(\mathcal{U},\widetilde{M}) = 0,\ \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

证明 注意到 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\widetilde{M})$ 是 A-模复形, 由局部化保持正合性, 只需验证 $\forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, 有 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\widetilde{M})_P$ 处处正合. 又由于 $\operatorname{Spec} A = \cup_{i=1}^n D(f_i)$, 我们只需验证 $\forall\, i = 1,\dots,n$, 在 f_i 处的局部化 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\widetilde{M})_{f_i}$ 处处正合.

考虑 $\mathcal{U}$ 在 $D(f_i)$ 上的限制形成的开覆盖 $\mathcal{U}\mid_{D(f_i)} = \big\{D(f_i) \cap D(f_j) \mid j \in I\big\}$. 则 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\widetilde{M})_{f_i}$ 恰为子空间 $D(f_i) \simeq \operatorname{Spec} A_{f_i}$ 上的 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U}\mid_{D(f_i)},\widetilde{M_{f_i}})$. 由于 $\mathcal{U}\mid_{D(f_i)}$ 满足命题 6.1.2 的条件, 从而利用该命题得到 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\widetilde{M})_{f_i}$ 处处正合. 故原命题得证. □

对于拓扑空间 X 上的 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$, 不难看到, $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathcal{B}$-层 $\iff$ 对 $\mathcal{B}$ 的任何元素 U, 对 U 的任何 $\mathcal{B}$ 中元素形成的开覆盖 $\mathcal{V}$, 均有 $H^{-1}(\mathcal{V},\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{V},\mathcal{F}) = 0$. 如果 $\mathcal{B}$ 中每个元素都是紧空间, 则上述开覆盖 $\mathcal{V}$ 可以只取为有限开覆盖. 由此, 作为命题 6.1.3 的推论, 我们得到命题 2.5.1 的另一个证明. 而命题 1.4.4 又可看作命题 2.5.1 在 $M = A$ 时的特殊情况.

6.2 投射消解

Cartan-Eilenberg 消解. 特例: 短正合列的投射消解.

6.3 Tor 函子

6.4 Ext 函子

习题

1.

习题提示

第七章 平坦性

7.1 基本性质

定义 7.1.1 设 A 为环. 我们称 A-模 M 是平坦的, 如果对任意 A-模之间的单同态 $N_1 \to N_2$, 均有 $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ 为单同态. 环同态 $A \to B$ 称为平坦的, 或者说 B 为平坦 A-代数, 如果 B 作为 A-模是平坦的.

由于张量积是右正合函子, 显然 M 平坦等价于 $\cdot \otimes_A M$ 为正合函子.

命题 7.1.1 设 A 为环.

(i) 投射 A-模均为平坦的.

(ii) (局部化) 对任意乘法集 $S \subset A$, 局部化 A_S 为平坦 A-模.

(iii) (传递性) 设 $A \to B$ 为平坦的环同态, M 为平坦 B-模. 则 M 也为平坦 A-模.

(iv) (基变换) 设 $A \to A'$ 为环同态, 设 M 为平坦 A-模. 则 $M' := M \otimes_A A'$ 为平坦 A'-模.

证明 (i): 注意到自由模均为平坦的, 而投射模均为自由模的直和项, 从而也平坦. (ii)-(iv): 根据定义和张量积的简单性质即得. □

下面的命题说明, 平坦性是一个局部性质.

命题 7.1.2 设 $A \to B$ 为环同态, 设 M 为 B-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 作为 A-模是平坦的.

(ii) 对任意 $P \in \operatorname{Spec} B$, 局部化 M_P 是平坦 A_Q-模. 其中 $Q = P \bigcap A \in \operatorname{Spec} A$.

(iii) 对任意 B 的极大理想 P, 局部化 M_P 是平坦 A_Q-模. 其中 $Q = P \bigcap A \in \operatorname{Spec} A$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 是显然的. 下面证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i). 设 $N_1 \to N_2$ 为 A-模的单同态. 则 $N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi} N_2 \otimes_A M$ 也可看作 B-模同态. 从而 φ 为单同态 $\Longleftrightarrow$ 对任意 B 的极大理想 P, 局部化 $(N_1 \otimes_A M)_P \xrightarrow{\varphi_P} (N_2 \otimes_A M)_P$ 为单同态. 对 $i = 1, 2$,

$$(N_i \otimes_A M)_P = N_i \otimes_A M \otimes_B B_P = N_i \otimes_A A_Q \otimes_{A_Q} (M \otimes_B B_P) = N_{iQ} \otimes_{A_Q} M_P.$$

由 $N_1 \to N_2$ 为单同态知 $N_{1Q} \to N_{2Q}$ 也为单同态, 从而由 M_P 是平坦 A_Q-模得到 φ_P 为单同态. □

由定义, 为了验证 M 的平坦性, 我们需要对任意 A-模单同态 $N_1 \to N_2$ 来验证 $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ 为单同态. 下面的命题说明, 可以只对一些特殊的单同态 $N_1 \to N_2$ 进行验证.

命题 7.1.3 设 A 为环, M 为 A-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 平坦.

(ii) 对任意的有限 A-模 N_1, N_2, 以及任意单同态 $N_1 \to N_2$, 有 $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ 也为单同态.

(iii) 对 A 的任意有限生成理想 I, 自然同态 $I \otimes_A M \to M$ 为单同态.

(iv) 对 A 的任意有限生成理想 I, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.

(v) 对 A 的任意理想 I, 自然同态 $I \otimes_A M \to M$ 为单同态.

(vi) 对 A 的任意理想 I, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.

(vii) 对任意有限 A-模 N, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$.

证明 显然有 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv), 以及 (vi) $\Longleftrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (v): 设 $x \in \ker(I \otimes_A M \to M)$. 由张量积的定义, 存在 $a_1, \dots, a_n \in I$, 以及 $y_1, \dots, y_n \in M$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i$. 令 $J = (a_1, \dots, a_n)$, 及 $x' \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i \in J \otimes_A M$. 则 $x' \in \ker(J \otimes_A M \to M)$, 并且 x 为 x' 在自然同态 $J \otimes_A M \to I \otimes_A M$ 下的像. 而根据 (iii) 知 $x' = 0$. 故 $x = 0$.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): 对 N 的生成元个数进行归纳, 应用 Tor 函子的长正合列即可.

(vii) $\Longrightarrow$ (ii): 对短正合列 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_2/N_1 \longrightarrow 0$ 应用 Tor 函子的长正合列即可.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 设 $N_1 \to N_2$ 为 A-模的单同态. 设 $x \in \ker(N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi} N_2 \otimes_A M)$. 根据张量积的具体构造, 可以看到存在 N_i 的有限子模 N_i', 使得有以下交换图表:

$$\begin{CD} N_1' \otimes_A M @>{\varphi'}>> N_2' \otimes_A M \\ @V{\psi_1}VV @V{\psi_1}VV \\ N_1 \otimes_A M @>{\varphi}>> N_2 \otimes_A M \end{CD}$$

并且存在 $y \in \ker(N_1' \otimes_A M \xrightarrow{\varphi'} N_2' \otimes_A M)$, 使得 $x = \psi(y)$. 由 $N_1 \to N_2$ 为有

限 A-模的单同态知 $N_1'\otimes_A M\xrightarrow{\varphi'}N_2'\otimes_A M$ 为单同态. 从而 $y=0$. 故 $x=0$, $N_1\otimes_A M\xrightarrow{\varphi}N_2\otimes_A M$ 为单同态. □

由平坦性的这些等价判别法, 容易得到离散赋值环上模的平坦性的等价刻画.

命题 7.1.4 设 (A,m) 为离散赋值环, π 为 m 的生成元. 则 A-模 M 平坦 $\Longleftrightarrow$ π 不是 M 的零因子.

证明 由 A 的理想具有形式 (π^i) 及命题 7.1.3, (iii) 即得. □

对于 Noether 局部环上的有限模, 其平坦性的检验可以进一步简化如下.

命题 7.1.5 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, 设 M 为有限 A-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 为自由 A-模.

(ii) M 为投射 A-模.

(iii) M 为平坦 A-模.

(iv) $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)=0$.

(v) 自然同态 $m\otimes_A M\to M$ 为单同态.

证明 不难看到有 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (v). 下面证明 (iv) $\Longrightarrow$ (i). 取 $x_1,\ldots,x_r$ 为 M 的一组极小生成元. 则得到 A-模满同态 $\varphi:A^r\to M$, 使得 $\varphi\otimes k$ 为同构. 对短正合列 $0\to\ker\varphi\to A^r\to M\to 0$ 应用 $\mathrm{Tor}_i^A(k,\cdot)$ 函子的长正合列, 得到

$$\mathrm{Tor}_1^A(k,M)\longrightarrow\ker\varphi\otimes_A k\longrightarrow A^r\otimes_A k\xrightarrow{\varphi\otimes k}M\otimes_A k\longrightarrow 0$$

为正合列. 再由 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)=0$ 及 $\varphi\otimes k$ 为同构知 $\ker\varphi\otimes_A k$. 应用 Nakayama 引理即得 $\ker\varphi=0$, 故 φ 为同构. □

由该命题, 得到如下平坦模维数的局部常值性.

推论 7.1.1 设 A 为 Noether 环, 设 M 为平坦的有限 A-模. 对 $P,Q\in\operatorname{Spec}A$, 如果 P,Q 位于 $\operatorname{Spec}A$ 的同一个连通分支中, 则 $\dim_{k(P)}M\otimes_A k(P)=\dim_{k(Q)}M\otimes_A k(Q)$.

证明 由于存在 $\operatorname{Spec}A$ 的不可约分支 $V_1,\ldots,V_n$, 使得 $P\in V_1$, $Q\in V_n$, 并且 $V_i\cap V_{i+1}\neq\varnothing$ $(1\le i\le n-1)$, 可以看到不妨假设 P, Q 在 $\operatorname{Spec}A$ 的同一个不可约分支中. 设该不可约分支对应的极小素理想为 P_1, 则 $P_1\subset P$, $P_1\subset Q$. 在 P 处作局部化得到 M_P 为平坦的有限 A_P-模, 从而是自由 A_P-模. 这样得到

$$\dim_{k(P)}M\otimes_A k(P)=\dim_{k(P_1)}M\otimes_A k(P_1).$$

同理在 Q 处作局部化得到 $\dim_{k(P)}M\otimes_A k(P)=\dim_{k(P_1)}M\otimes_A k(P_1)$. 故

$$\dim_{k(P)}M\otimes_A k(P)=\dim_{k(Q)}M\otimes_A k(Q).$$ □

反过来, $\dim_{k(P)} M\otimes_A k(P)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 上的常值函数在某些条件下也可以蕴含 M 的平坦性. 具体而言, 我们有如下的

命题 7.1.6 设 (A,m,k) 为整的 Noether 环. 记 $K=\operatorname{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 M 为有限 A-模. 则 M 为自由模 $\iff \dim_k M\otimes_A k=\dim_K M\otimes_A K$.

证明 $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 设 $\dim_k M\otimes_A k=r$. 通过取 M 的一组极小生成元, 我们构造满同态 $\varphi: A^r\to M$, 使得 $\varphi\otimes k: A^r\otimes_A k\to M\otimes_A k$ 为同构. 令 $N=\ker\varphi$. 对短正合列

$$0\longrightarrow N\longrightarrow A^r\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

应用正合函子 $\cdot\otimes_A K$ 得到短正合列

$$0\longrightarrow N\otimes_A K\longrightarrow A^r\otimes_A K\stackrel{\varphi\otimes K}{\longrightarrow} M\otimes_A K\longrightarrow 0.$$

由 $\dim_K M\otimes_A K=r$ 知 $\varphi\otimes K$ 为同构. 从而 $N\otimes_A K=0$. 作为 A^r 的子模, N 是无挠的. 故 $N=0$, 从而 $M\simeq A^r$ 为自由模. □

命题 7.1.7 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想. 设 $\hat{A}=\varprojlim_n A/I^n$ 为 A 的 I-进完备化. 则 $A\to\hat{A}$ 是平坦的.

证明 由**??**??, 对有限 A-模 M, 有 $\hat{M}=M\otimes_A\hat{A}$, 并且 I-进完备化为有限 A-模上的正合函子. □

7.2 局部判别法

命题 7.1.5 将 Noether 局部环上有限模的平坦性检验约化到只需验证 $m\otimes_A M\to M$ 为单同态. 在实际应用中, 经常遇到 M 不是有限 A-模的情形. 下面说明即使在更一般的情形, 单同态 $m\otimes_A M\to M$ 也能保证 M 的平坦性.

定理 7.2.1 (平坦性的局部判别法) 设 $(A,m)\to(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态. 设 M 为有限 B-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 为平坦 A-模.

(ii) 自然同态 $m\otimes_A M\to M$ 为单同态.

(iii) $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)=0$. 其中 $k:=A/m$ 为剩余类域.

证明 显然有 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\iff$ (iii). 下面证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i). 设 $N_1\hookrightarrow N_2$ 为有限 A- 模的单同态. 由命题 7.1.3, 只需证明 $N_1\otimes_A M\to N_2\otimes_A M$ 为单同态即可. 由 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)=0$, 通过对长度进行归纳, 不难看到对任意长度有限的 A-模 N, 均有

$\mathrm{Tor}_1^A(N,M)=0$. 对任意正整数 $i\geq 1$, 对短正合列

$$0\longrightarrow \frac{N_1}{N_1\cap m^iN_2}\longrightarrow \frac{N_2}{m^iN_2}\longrightarrow \frac{N_2}{N_1+m^iN_2}\longrightarrow 0$$

应用 Tor 函子的长正合列, 并注意到 $\frac{N_2}{N_1+m^iN_2}$ 长度有限保证了

$$\mathrm{Tor}_1^A(\frac{N_2}{N_1+m^iN_2},M)=0.$$

从而得到 $\frac{N_1}{N_1\cap m^iN_2}\otimes_A M\longrightarrow \frac{N_2}{m^iN_2}\otimes_A M$ 为单同态. 显然有

$$\frac{N_1}{N_1\cap m^iN_2}\otimes_A M=\frac{N_1\otimes_A M}{(N_1\cap m^iN_2)\otimes_A M},$$

$$\frac{N_2}{m^iN_2}\otimes_A M=\frac{N_2\otimes_A M}{m^iN_2\otimes_A M}.$$

由 Artin-Rees 引理**??**??, 存在 $i_0\geq 1$, 使得对任意 $i\geq i_0$, 均有

$$N_1\cap m^iN_2=m^{i-i_0}(N_1\cap m^{i_0}N_2)\subset m^{i-i_0}N_1.$$

综合以上信息得到

$$\ker(N_1\otimes_A M\to N_2\otimes_A M)\subset\bigcap_{i\geq i_0}m^{i-i_0}N_1\otimes_A M.$$

注意到 $N_1\otimes_A M$ 为有限 B-模. 从而 $\bigcap_{i\geq i_0}m^{i-i_0}N_1\otimes_A M\subset\bigcap_{i\geq i_0}n^{i-i_0}N_1\otimes_A M=0$. 这样得到 $\ker(N_1\otimes_A M\to N_2\otimes_A M)=0$, 即 $N_1\otimes_A M\to N_2\otimes_A M$ 为单同态. 故 M 为平坦 A-模. □

定义 7.2.1 设 M 为非零 A-模. 称 $a\in A$ 为 M-**正则元**, 如果乘 a 映射 $M\xrightarrow{a\cdot}M$ 为单射, 或者等价地, 如果 a 不是 M 的零因子.

引理 7.2.1 设 $(A,m)\to(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, M 为有限 B-模. 记 $k=A/m$. 设 $b\in n$, 则以下两条互相等价:

(i) b 为 M-正则元, 并且 M/bM 为平坦 A-模.
(ii) $\bar{b}\in B/mB$ 为 $M\otimes_A k$-正则元, 且 M 为平坦 A-模.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 对短正合列 $0\to M\xrightarrow{b\cdot}M\to M/bM\to 0$ 应用函子 $k\otimes_A\cdot$, 得到长

正合列:

$$\begin{aligned}\cdots \to \operatorname{Tor}_1^A(k,M) \xrightarrow{b\cdot} \operatorname{Tor}_1^A(k,M) \to \operatorname{Tor}_1^A(k,M/bM)\\ \to M\otimes_A k \xrightarrow{\bar{b}\cdot} M\otimes_A k \to M/bM\otimes_A k \to 0.\end{aligned}$$

由 M/bM 平坦知 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M/bM)=0$, 故 $M\otimes_A k \xrightarrow{\bar{b}\cdot} M\otimes_A k$ 为单同态, 而 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M) \xrightarrow{b\cdot} \operatorname{Tor}_1^A(k,M)$ 为满同态. 前者说明 $\bar{b}\in B/mB$ 为 $M\otimes_A k$-正则元, 后者说明 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M) = b\operatorname{Tor}_1^A(k,M)$. 注意到 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)$ 为有限 B-模, 从而由 Nakayama 引理知 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)=0$. 再由定理 7.2.1 得到 M 为平坦 A-模.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 记 K 为 $M\xrightarrow{b\cdot} M$ 的核, 则有如下两个短正合列:

$$0\to K\to M\xrightarrow{\varphi} bM\to 0, \tag{7.2–1}$$

$$0\to bM\xrightarrow{\psi} M\to M/bM\to 0. \tag{7.2–2}$$

其中 φ 为乘 b 同态, ψ 为自然包含同态. 由 $M\otimes_A k\xrightarrow{\bar{b}\cdot} M\otimes_A k$ 为单同态, 知同态 $M\otimes_A k\xrightarrow{\varphi\otimes k} bM\otimes_A k$ 和同态 $bM\otimes_A k\xrightarrow{\psi\otimes k} M\otimes_A k$ 的复合为单同态. 再由 $\varphi\otimes k$ 为满同态知 $\varphi\otimes k$ 为同构. 从而 $\psi\otimes k$ 为单同态. 应用定理 7.2.1 得到 M/bM 为平坦 A-模. 再由短正合列 (7.2–2) 以及 M 的平坦性知 bM 为平坦 A-模. 从而对短正合列 (7.2–1) 应用 $\cdot\otimes_A k$ 仍然得到短正合列. 我们已经知道 $\varphi\otimes k$ 为同构, 从而 $K\otimes_A k=0$. 这说明 $K=mK=nK$, 注意到 K 为有限 B-模, 应用 Nakayama 引理即得 $K=0$. □

上面的引理经常被迭代使用, 主要有两个用途: 判断 M/bM 的平坦性, 或者判断 b 为 M-正则元. 下面的定理是第一个用途的典型用法. 第二个用途见下一章.

定理 7.2.2 设 A 为 Noether 环, $C=A[x_1,\dots,x_n]/I$ 为有限生成 A-代数. 设 $I=(f_1,\dots,f_r)$. 记 $J\coloneqq\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})\in A[x_1,\dots,x_n]$ 为相应的 Jacobian. 如果 $P\in\operatorname{Spec}C$ 使得 $0\neq J(P)\in k(P)$, 则 $A_Q\to C_P$ 平坦. 其中 $Q=P\bigcap A\in\operatorname{Spec}A$.

证明 通过在 Q 处作局部化, 我们不妨设 (A,m) 为局部环, 并且 $P\bigcap A=m$. 设 $k=A/m$. 通过应用正合函子 $\cdot\otimes_k\bar{k}$, 我们不妨设 $k=\bar{k}$ 为代数封闭域. 利用有限生成 k-代数中极大理想在素谱空间中稠密??, 我们可以找到 $P_1\in\operatorname{Spec}C$, 使得 $P\subset P_1$, $J(P_1)\neq 0$, 并且 P_1 为 $C\otimes_A k$ 中的极大理想. 如果 $A\to C_{P_1}$ 平坦, 则进一步作局部化可得 $A\to C_P$ 也平坦. 故我们又可以直接设 $P=P_1$ 为 $C\otimes_A k$ 中的极大理想.

总结以上约化, 我们在如下额外假设下证明所要结论即可: (A,m,k) 为局部环, $k=\bar{k}$ 为代数封闭域, 以及 P 为 $C\otimes_A k$ 中的极大理想.

令 $B=A[x_1,\dots,x_n]_P$, 则 $B\otimes_A k$ 为正则局部环, 其极大理想为 $n\coloneqq PB\otimes_A k$. 条件 $J(P)\neq 0$ 等价于 $f_1,\dots,f_r$ 在 n/n^2 中是 k-线性无关的. 对 $i=1,\dots,r$, 令 $B_i\coloneqq B/(f_1,\dots,f_i)$. 则 f_1 为 $B\otimes_A k$ 中正则元, $B_i\otimes_A k$ 为正则局部环, 且 f_{i+1} 为 $B_i\otimes_A k$ 中正则元 $(1\le i\le r-1)$. 这样, 由 B 为平坦 A-代数, 应用引理 7.2.1 对 i 归

纳, 即得每个 B_i 均为平坦 A-代数. 特别地, $B_r = C_P$ 为平坦 A-代数. $\square$

7.3 忠实平坦性

定义 7.3.1 称 A-模 M 为忠实平坦的, 如果对任意 A-模复形 $N_1 \to N_2 \to N_3$, 该复形正合 $\iff$ 与 M 作张量积后的复形 $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M \to N_3 \otimes_A M$ 正合.

命题 7.3.1 设 M 为 A-模. 以下几条互相等价:

(i) M 忠实平坦.

(ii) M 平坦, 并且对任意非零的 A-模 N, 有 $N \otimes_A M \neq 0$.

(iii) M 平坦, 并且对 A 的任意极大理想 m, 均有 $mM \subsetneqq M$.

证明 (i) $\implies$ (ii): 由忠实平坦的定义知 M 平坦. 对任意 A-模 N, 考虑复形 $0 \to N \to 0$. 如果 $N \otimes_A M = 0$, 则 $0 \otimes_A M \to N \otimes_A M \to 0 \otimes_A M$ 正合, 从而由 M 忠实平坦得到 $0 \to N \to 0$ 正合, 即 $N = 0$.

(ii) $\implies$ (i): 设有 A-模复形 $N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_3$. 与 M 作张量积后得到的复形记作 $N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi_1'} N_2 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi_2'} N_3 \otimes_A M$. 由 M 的平坦性知

$$\frac{\ker \varphi_2'}{\operatorname{im} \varphi_1'} = \frac{\ker \varphi_2}{\operatorname{im} \varphi_1} \otimes_A M.$$

从而由 $\frac{\ker \varphi_2'}{\operatorname{im} \varphi_1'} = 0$ 知 $\frac{\ker \varphi_2}{\operatorname{im} \varphi_1} = 0$.

(ii) $\implies$ (iii): 显然.

(iii) $\implies$ (ii): 对非零 A-模 N, 取 $0 \neq x \in N$, 令 $I = \operatorname{ann}(x)$. 则有单同态 $A/I \hookrightarrow N$, 从而由 M 的平坦性得单同态 $A/I \otimes_A M = M/IM \hookrightarrow N \otimes_A M$. 取 A 的一个包含 I 的极大理想 m, 则 $IM \subset mM \subsetneqq M$. 故 $M/IM \neq 0$, 知 $N \otimes_A M \neq 0$. $\square$

命题 7.3.2 设 (A, m) 为 Noether 局部环, $\hat{A} = \varprojlim_i A/m^i$ 为 A 的完备化. 则 $A \to \hat{A}$ 为忠实平坦的.

证明 由 $m\hat{A}$ 为 $\hat{A}$ 的极大理想和命题 7.3.1, (iii) 即得. $\square$

命题 7.3.3 设 $\varphi : A \to B$ 为环同态, 则 φ 忠实平坦 $\iff$ φ 平坦, 并且其诱导的素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 为满射.

证明 $\implies$: 任取 $Q \in \operatorname{Spec} A$, 由命题 7.3.1, (ii) 知 $B \otimes_A k(Q) \neq 0$. 故 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 的纤维 $\operatorname{Spec} B \otimes_A k(Q)$ 非空.

$\impliedby$: 由 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 为满射, 对 A 的任意极大理想 m, 均存在 $P \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $P \bigcap A = m$. 特别地, $mB \subsetneqq B$. 从而由命题 7.3.1, (iii) 得到 φ 忠实平坦. $\square$

命题 7.3.4 设 $(A,m) \to (B,n)$ 为局部环之间平坦的局部同态, 则 B 为忠实平坦 A-代数.

证明 应用命题 7.3.1, (iii) 即得. □

命题 7.3.5 设 $\varphi : A \to B$ 为平坦的, 则 φ 满足素理想的降链性质, 即对于 $P \in \operatorname{Spec} B$, $Q' \in \operatorname{Spec} A$, 若 $Q' \subset Q := P \bigcap A$, 那么存在 $P' \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $P' \subset P$, 并且 $P' \bigcap A = Q'$.

证明 A 和 B 分别在 Q 和 P 处作局部化, 我们可以假设 A, B 均为局部环, 而 Q, P 为极大理想. 利用命题 7.3.4, 得到 φ 为忠实平坦的. 再由命题 7.3.1 知 $B \otimes_A k(Q') \neq 0$. 从而任取 $Q \in \operatorname{Spec} B \otimes_A k(Q')$ 即可. □

命题 7.3.6 设 $\varphi : A \to B$ 为 Noether 环之间的平坦同态, 并且 B 为有限生成 A-代数. 则 φ 诱导的素谱空间映射 $\varphi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 为开映射.

证明 通过考虑 B_f, 我们只需证明 $\operatorname{im} \varphi^*$ 为开集. 由**??**??, $\operatorname{im} \varphi^*$ 为可构造集, 从而其补集 $(\operatorname{im} \varphi^*)^c$ 也为可构造集. 再由命题 7.3.5 知 $\forall\, x \in (\operatorname{im} \varphi^*)^c$, 有 $\overline{\{x\}} \subset (\operatorname{im} \varphi^*)^c$. 由此不难看到可构造集 $(\operatorname{im} \varphi^*)^c$ 为闭集. 故 $\operatorname{im} \varphi^*$ 为开集. □

命题 7.3.7 设 $(A,m) \to (B,n)$ 为 Noether 局部环之间的平坦态射. 则

$$\dim B = \dim A + \dim B/mB.$$

证明 设 $\dim A = r$, $\dim B/mB = s$. 取 m 的一组参数系 $x_1, \ldots, x_r$ 和 B/mB 的极大理想 n/mB 的一组参数系 $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s$. 则易知存在正整数 i, 使得 $n^i \subset (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$. 故 $\dim B \le r + s = \dim A + \dim B/mB$.

另一方面, 设 $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_r = m$ 为 A 的素理想链, 设 $Q_0 \subsetneqq Q_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Q_s = n/mB$ 为 B/mB 中的素理想链. 将 Q_i 看作 B 中包含 mB 的素理想, 则 $P_r \subset Q_0 \bigcap A$. 由平坦态射的素理想降链性质命题 7.3.5, 可以将 P_i 提升为 B 中的素理想链 $P'_0 \subsetneqq P'_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P'_r$, 使得 $P'_r \subset Q_0$. 这样得到 B 中素理想链

$$P'_0 \subsetneqq P'_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P'_r \subset Q_0 \subsetneqq Q_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Q_s = n.$$

由此得到 $\dim B \ge r + s = \dim A + \dim B/mB$. 从而 $\dim B = \dim A + \dim B/mB$. □

命题 7.3.8 (Grothendieck's Generic Freeness Lemma) 设 A 为 Noether 整环, B 为有限生成 A-代数, M 为有限 B-模. 则存在非零的 $a \in A$, 使得 M_a 为自由 A_a-模或零模. 特别地, M_a 为平坦 A_a-模.

证明 设 $K = \operatorname{Frac}(A)$. 考虑 K-代数 $B \otimes_A K$. 如果 $B \otimes_A K = 0$, 则容易看到 $M \otimes_A K = M \otimes_B B \otimes_A K = 0$. 从而存在非零的 $a \in A$, 使得 $M_a = 0$. 下面设

$B \otimes_A K \neq 0$.

由 Noether 正规化定理????, 通过在一个非零元处作局部化, 我们不妨设存在分解 $A \hookrightarrow C \hookrightarrow B$, 使得 $C = A[x_1, \ldots, x_n]$ 为 A 上的多项式环, 并且 $C \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 注意到 $n = \dim B \otimes_A K$ 为 $B \otimes_A K$ 的 Krull 维数. 下面对 n 进行归纳.

若 $n = 0$, 即 $C = A$, 则 $A \hookrightarrow B$ 为有限扩张, 这样得到 M 为有限 A-模. 从而由 $M \otimes_A K$ 为有限维 K-线性空间可以看到, 存在 $0 \neq a \in A$, 使得 M_a 为自由 A_a-模.

若 $n \geq 1$, 则 M 为有限 C-模. 从而由????, 存在 M 的有限 C-子模降链

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_p = M,$$

使得 $\forall\ 1 \leq i \leq p$, 有 $M_i/M_{i-1} \simeq C/P_i$, 其中 $P_i \in \operatorname{Spec} C$. 对每个 i, 如果 $P_i = 0$, 令 $a_i = 1$, 则 $(C/P_i)_{a_i} = C/P_i = C$ 为自由 A-模. 如果 $P_i \neq 0$, 由归纳假设 (注意 $\dim (C/P_i) \otimes_A K < n$), 存在 $0 \neq a_i \in A$, 使得 $(C/P_i)_{a_i}$ 为自由 A_{a_i}-模. 最终令 $a = a_1 a_2 \ldots a_p \in A$, 则 M_a 为自由 A_a-模. □

作为推论, 我们得到定理 5.2.2 的另一个证明

推论 7.3.1 设 k 为域, A, B 均为整的有限生成 k-代数. 设 $\varphi : A \hookrightarrow B$ 为单的 k-代数同态. 则存在 $\operatorname{Spec} A$ 的非空开子集 U, 满足

(i) $U \subset \operatorname{im} \varphi^*$.

(ii) 对 U 的每个闭点 x, 纤维 $\varphi^{*-1}(x)$ 的每个不可约分支的维数均为 $\dim B - \dim A$.

证明 由 Noether 正规化??? 和 命题 7.3.8, 我们不妨设 B 为平坦 A-代数, 并且存在分解 $A \hookrightarrow A[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow B$, 使得 $A[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 这样得到 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_n]$ 为满射, 故 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ 为满射. 对 $\operatorname{Spec} A$ 的每个闭点 x, 设 F 为纤维 $\varphi^{*-1}(x)$ 的一个不可约分支. 我们可以取 F 上的一个闭点 y, 使得 y 不在 $\varphi^{*-1}(x)$ 的其它不可约分支上. 记 P, Q 分别为 x, y 对应的极大理想, 则 $A_P \to B_Q$ 为平坦同态, 从而由命题 7.3.7 知 $\dim(B/PB)_Q = \dim B_Q - \dim A_P$. 再由 $\dim(B/PB)_Q = \dim F$, $\dim B_Q = \dim B$ 以及 $\dim A_P = \dim A$ 即得

$$\dim F = \dim B - \dim A.$$

□

7.4 忠实平坦下降

设 $\pi : U \longrightarrow X$, $f : Y \longrightarrow X$ 为拓扑空间的连续映射. 我们定义纤维积为

$$U \times_X Y \coloneqq \{(u, y) \in U \times Y \mid \pi(u) = f(y)\},$$

并赋予 $U \times_X Y$ 作为 $U \times Y$ 子集的子空间拓扑. 设 $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ 为 X 的开覆盖, 并且 U 为无交并空间 $\coprod\limits_{i \in I} U_i$. 此时容易看到 $U \times_X Y$ 同胚于无交并空间 $\coprod\limits_{i \in I} f^{-1}(U_i)$, 此时纤维积 $U \times_X Y$ 可以看作 f 在开覆盖 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i \mid i \in I\}$ 下的局部化. 特别地, 如果 $f = \pi$, 则 $U^2 \coloneqq U \times_X U \simeq \coprod\limits_{(i_0, i_1) \in I^2} U_{i_0} \bigcap U_{i_1}$, $U^3 \coloneqq (U \times_X U) \times_X U \simeq \coprod\limits_{(i_0, i_1, i_2) \in I^3} U_{i_0} \bigcap U_{i_1} \bigcap U_{i_2}$, $U^n \coloneqq U^{n-1} \times_X U \simeq \coprod\limits_{(i_0, \ldots, i_{n-1}) \in I^n} U_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap U_{i_{n-1}}$. 由此看到对 X 上的一个预层 $\mathcal{F}$, 其 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 可以用纤维积表示为

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U^2) \longrightarrow \cdots.$$

这说明可以将更一般的连续映射 $U \longrightarrow X$ 看作开覆盖, 对预层的某种合适推广定义 Cěch 复形. 同时也可以将 “粘合” 的观点在这种 “开覆盖”$U \longrightarrow X$ 下进行推广. 本节主要目标是说明对于环的忠实平坦同态 $A \longrightarrow B$, 其素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 就是 $\operatorname{Spec} A$ 的 “开覆盖” 的一种推广.

7.4.1 Amitsur 复形 设 M 为环 A 上的模. 我们定义 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M}$ 的类比. 对任意 A-代数 B, 令 $\mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B) = M \otimes_A B$, 对任意 A-代数同态 $B \xrightarrow{\varphi} C$, 定义 A-模同态 $\rho_\varphi = \mathrm{id} \otimes \varphi : \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B) = M \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A C = \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} C)$, $x \otimes b \longmapsto x \otimes \varphi(b)$. 显然这样的一组数据满足如下与预层类似的性质:

(i) 对任意 A-代数 B, 有 $\rho_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$.
(ii) 对任意 A-代数同态 $B \xrightarrow{\varphi} C$ 以及 $C \xrightarrow{\psi} D$, 有 $\rho_\psi \circ \rho_\varphi = \rho_{\psi \circ \varphi}$.

我们将 A-代数同态 $B \xrightarrow{\varphi} C$ 诱导的素谱空间映射 $\operatorname{Spec} C \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Spec} B$ 类比到开子集的包含, 而同态 $\rho_\varphi : \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B) \longrightarrow \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} C)$ 类比到预层中的限制同态. 称 $s \in \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B)$ 为 $\mathcal{F}_M$ 在 $\operatorname{Spec} B$ 上的截面, 将 $\rho_\varphi(s)$ 记为 $s|_{\operatorname{Spec} C}$, 称为 s 在 $\operatorname{Spec} C$ 上的限制. 同样地, 可以定义 Cěch 复形的类比.

设 I 为非空集合, 对每个 $i \in I$, 给定一个 A-代数同态 $A \xrightarrow{\varphi_i} B_i$. 对 $i \in I$, 记 U_i 为 $\operatorname{Spec} B_i$, 对 $i_0, \ldots, i_n \in I$, 记 $U_{i_0 \ldots i_n} = \operatorname{Spec} B_{i_0} \otimes_A B_{i_1} \otimes_A \cdots \otimes_A B_{i_n}$, 由命题 2.2.8, $U_{i_0 \ldots i_n} \simeq U_{i_0} \times_{\operatorname{Spec} A} \cdots \times_{\operatorname{Spec} A} U_{i_n}$. 记这一族 A-代数 B_i 为 $\mathcal{U}$. 对 $n \geq 0$, 令 $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}_M) \coloneqq \prod\limits_{(i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}_M(U_{i_0 \ldots i_n}) = \prod\limits_{(i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}} M \otimes_A B_{i_0} \otimes_A B_{i_1} \otimes_A \cdots \otimes_A B_{i_n}$.

定义如下 A-模同态

$$\begin{aligned}\delta^n : C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) &\longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)\\ s=(s_{i_0\ldots i_n}) &\longmapsto \delta^n(s)\end{aligned}$$

其中 $\delta^n(s)$ 的 $(i_0\ldots i_{n+1})$ 分量为

$$\delta^n(s)_{i_0\ldots i_{n+1}} \coloneqq \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j s_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}}\,|_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}},$$

这里 $\widehat{i_j}$ 是指将指标 i_j 删除, $s_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}}\,|_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}}$ 是指 $s_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}} \in \mathcal{F}_M(U_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}})$ 在 A-代数同态

$$\begin{aligned}\pi_j : &B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_{j-1}}\otimes_A B_{i_{j+1}}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_{n+1}} \longrightarrow B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_{n+1}}\\ &b_{i_0}\otimes\cdots\otimes b_{i_{j-1}}\otimes b_{i_{j+1}}\otimes\cdots\otimes b_{i_{n+1}} \longmapsto b_{i_0}\otimes\cdots\otimes b_{i_{j-1}}\otimes 1\otimes b_{i_{j+1}}\otimes\cdots\otimes b_{i_{n+1}}\end{aligned}$$

诱导的同态 $\rho_{\pi_j} : \mathcal{F}_M(U_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}}) \longrightarrow \mathcal{F}_M(U_{i_0\ldots i_{n+1}})$ 下的像. 再定义 $C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) \coloneqq \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} A) = M$, 以及 A-模同态 $\delta^{-1} : C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$, $s \longmapsto (s\,|_{U_i})_{i\in I}$. 其中 $s\,|_{U_i}$ 是指 $s\in M$ 在 A-模同态 $M \longrightarrow M\otimes_A B_i$, $x\longmapsto x\otimes 1$ 下的像. 不难验证, 对 $n\geq -1$, 有 $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$. 从而 $(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M),\delta^{\cdot})$ 形成一个复形. 这是拓扑空间上 Cěch 复形的类比. 类比于命题 6.1.2, 我们有下面的

命题 7.4.1 在上面的设定及符号下, 如果存在 $i\in I$, 使得 $A\xrightarrow{\varphi_i} B_i$ 存在截面 (即满足 $\psi_i\circ\varphi_i = \mathrm{id}$ 的环同态 $\psi_i : A\longrightarrow B_i$), 那么 $(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M),\delta^{\cdot})$ 处处正合, 即对任意 $n\in\mathbb{Z}$, 有 $H^n(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})) \coloneqq \operatorname{Ker}\delta^n/\operatorname{Im}\delta^{n-1} = 0$.

证明 与命题 6.1.2 的证明类似, 我们将标准单形上的锥构造转移到 Cěch 复形上来. 对 $n\geq 0$, 我们定义如下同态:

$$h^{n+1} : C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) \longrightarrow C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) \tag{7.4–1}$$

$$s=(s_{i_0\ldots i_{n+1}}) \longmapsto h^{n+1}(s) \tag{7.4–2}$$

其中 $h^{n+1}(s)$ 的 $(i_0\ldots i_n)$ 分量为 $h^{n+1}(s)_{i_0\ldots i_n} \coloneqq \tilde{\psi}_i(s_{ii_0\ldots i_{n+1}}) \in \mathcal{F}_M(U_{i_0\ldots i_n})$. 这里 $\tilde{\psi}_i$ 为如下两个同态的复合:

$$\begin{aligned}&M\otimes_A B_i\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\psi_i\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}} M\otimes_A A\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n},\\ &M\otimes_A A\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n} \xrightarrow{\sim} M\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n}.\end{aligned}$$

再定义同态 $h^0 : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) \longrightarrow C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$, $s=(s_{i_0}) \longmapsto (\mathrm{id}\otimes\psi_i)(s_i)\in M$. 通

过直接验证可以看到 $h^{\cdot}$ 给出了 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$ 上恒等同态与零同态的一个同伦. 从而得到 Cěch 复形的零调性. $\square$

命题 7.4.2 设 I 为有限集, 并且存在 $i\in I$, 使得 $A\xrightarrow{\varphi_i}B_i$ 为忠实平坦的, 那么 $(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M),\delta^{\cdot})$ 处处正合, 即对任意 $n\in\mathbb{Z}$, 有 $H^n(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}))\coloneqq\operatorname{Ker}\delta^n/\operatorname{Im}\delta^{n-1}=0$.

证明 我们将所有的 A-代数基变换为 B_i-代数. 即对任意 $j\in I$, 令 $B_j'\coloneqq B_i\otimes_A B_j$, 并通过 $\varphi_j':B_i\longrightarrow B_j'$, $b_i\longmapsto b_i\otimes 1$ 将 B_j' 看作 B_i-代数. 这族 B_i-代数 $B_j'(j\in I)$ 记为 $\mathcal{U}'$. 考虑 B_i-模 $M'\coloneqq M\otimes_A B_i$. 不难验证有复形的同构

$$C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)\otimes_A B_i\simeq C^{\cdot}(\mathcal{U}',\mathcal{F}_{M'}).$$

由于同态 $B_i\xrightarrow{\varphi_i'}B_i'=B_i\otimes_A B_i$ 存在截面 $B_i\otimes B_i\xrightarrow{x\otimes y\mapsto xy}B_i$, 应用命题 7.4.1 知 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U}',\mathcal{F}_{M'})$ 处处正合. 又由于 B_i 为忠实平坦的 A-代数, 从而 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$ 也处处正合. $\square$

作为推论, 我们有如下 Amitsur 复形的正合性.

推论 7.4.1 设 $A\longrightarrow B$ 为忠实平坦环同态, M 为 A-模, 则以下 **Amitsur 复形** 处处正合:

$$0\to M\to M\otimes_A B\xrightarrow{d_0}M\otimes_A B\otimes_A B\xrightarrow{d_1}M\otimes_A B\otimes_A B\otimes_A B\xrightarrow{d_2}\cdots.$$

其中 d_n 定义为

$$d_n(m\otimes b_0\otimes\cdots\otimes b_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m\otimes b_0\otimes\cdots\otimes b_{i-1}\otimes 1\otimes b_i\otimes\cdots\otimes b_n.$$

证明 将 A-代数 B 看作一族 A-代数 (只有一个, 从而指标集 I 为单点集), 其给出的 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$ 即为 Amitsur 复形. 从而由命题 7.4.2 即得正合性. $\square$

设 $\mathcal{U}=\{D(f_i)\mid i=1,\ldots,n\}$ 为 $\operatorname{Spec}A$ 的有限个主开集形成的开覆盖. 令 $B=A_{f_1}\times\cdots\times A_{f_n}$. 则 $\operatorname{Spec}B$ 为 $D(f_i)$ 的无交并, 并且 B 为忠实平坦的 A-代数. 对 A-模 M, 不难看到此时 Amitsur 复形即为 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M}$ 在这个开覆盖 $\mathcal{U}$ 下的 Cěch 复形 $C^{\cdot}(\mathcal{U},\widetilde{M})$. 从而命题 6.1.3 为推论 7.4.1 的推论.

7.4.2 模的下降 (粘合) 设 A 为环, $X = \operatorname{Spec} A$. 设 $\mathcal{U} = \{D(f_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ 为 X 的一个主开集形成的有限开覆盖. 对每个 i, 给定 A_{f_i}-模 M_i. 我们希望找到 A-模 M, 使得 $M_{f_i} \simeq M_i$, 这样的 M 可以称为由 M_i "粘合" 得到. 显然, 如果 M 存在, 这些模 M_i 应该满足如下相容性条件:

条件 7.4.1 对任意 i, j, 存在 $A_{f_if_j}$-模同构 $\varphi_{ij} : (M_i)_{f_if_j} \xrightarrow{\sim} (M_j)_{f_if_j}$, 使得对任意 i, j, k, 有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
(M_i)_{f_if_jf_k} \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & (M_k)_{f_if_jf_k} \\
& (M_j)_{f_if_jf_k} \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

与拓扑空间或微分流形的粘合一样, 如果满足相容性条件, 那么我们可以将这些模 M_i 粘合得到 M. 即有下面的定理成立.

定理 7.4.1 设 A 为环, $X = \operatorname{Spec} A$. 设 $\mathcal{U} = \{D(f_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ 为 X 的一个主开集形成的有限开覆盖. 对每个 i, 给定 A_{f_i}-模 M_i, 满足相容性条件 7.4.1. 则存在 A-模 M, 使得 $\forall\, i$, 有 A_i-模同构 $\varphi_i : M_{f_i} \xrightarrow{\sim} M_i$, 并且 $\forall\, i, j$, 如下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
& M_{f_if_j} \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\
(M_i)_{f_j} \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & (M_j)_{f_i}
\end{tikzcd}$$

满足上面性质的 M 在同构意义下是唯一的.

证明 对任意 i, j, 我们固定一个 $A_{f_if_j}$-模 M_{ij}, 以及使得下图交换的 $A_{f_if_j}$-模同构 ψ_i, ψ_j:

$$\begin{tikzcd}
& (M_i)_{f_if_j} \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dd, "\varphi_{ij}"] \\
M_{ij} & \\
& (M_j)_{f_if_j} \arrow[ul, "\psi_j"]
\end{tikzcd}$$

定义 A-模 $C^0 \coloneqq \prod_{i \in I} M_i$, $C^1 \coloneqq \prod_{(i,j) \in I^2} M_{ij}$, 其中 $I = \{1, \ldots, n\}$. 定义模同态

$$\begin{aligned}
d^0 : C^0 &\longrightarrow C^1 \\
(x_i) &\longmapsto (x_{ij})
\end{aligned}$$

其中 $x_{ij}=\psi_j(x_j)-\psi_i(x_i)\in M_{ij}$. 令 $M:=\operatorname{Ker} d^0$, 则有 A-模的左正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\psi}C^0\xrightarrow{d^0}C^1.$$

令 $\varphi_i:M\longrightarrow M_i$ 为复合同态 $M\xrightarrow{\psi}C^0\xrightarrow{\pi_i}M_i$. 下面证明 φ_i 诱导的 A_{f_i}-模同态 $M_{f_i}\longrightarrow M_i$ 为满足要求的同构.

对任意 $k\in I,\mathcal{U}^k:=\{D(f_jf_k)\mid i\in I\}$ 为 $D(f_k)\simeq\operatorname{Spec}A_{f_k}$ 的一个主开集形成的开覆盖. 考虑这个开覆盖下 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M_k}$ 的 Cěch 复形的前几项:

$$0\longrightarrow M_k\xrightarrow{\delta^{-1}}\prod_{i\in I}(M_k)_{f_kf_i}\xrightarrow{\delta^0}\prod_{(i,j)\in I^2}(M_k)_{f_kf_if_j}.$$

我们有同构 $\varphi_{ik}:(M_i)_{f_if_k}\xrightarrow{\sim}(M_k)_{f_kf_i}$. 交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & (M_i)_{f_if_jf_k} \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dd, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"] & \\
(M_{ij})_{f_if_jf_k} & & (M_k)_{f_if_jf_k} \\
 & (M_j)_{f_if_jf_k} \arrow[ul, "\psi_j"] \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

给出了同构 $\varphi_{ij}\circ\psi_i^{-1}:(M_{ij})_{f_if_jf_k}\xrightarrow{\sim}(M_k)_{f_if_jf_k}$. 由此可以验证有交换图表

$$\begin{tikzcd}
(C^0)_{f_k} \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\wr"'] & (C^1)_{f_k} \arrow[d, "\wr"] \\
\prod_{i\in I}(M_k)_{f_kf_i} \arrow[r, "\delta^0"] & \prod_{(i,j)\in I^2}(M_k)_{f_kf_if_j}
\end{tikzcd}$$

进而得到交换图表:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{f_k} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & (C^0)_{f_k} \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\wr"'] & (C^1)_{f_k} \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & M_k \arrow[r] & \prod_{i\in I}(M_k)_{f_kf_i} \arrow[r, "\delta^0"] & \prod_{(i,j)\in I^2}(M_k)_{f_kf_if_j}
\end{tikzcd}$$

由这个图表的交换性可以验证同构 $M_{f_k}\xrightarrow{\sim}M_k$ 由 $\varphi_k:M\longrightarrow M_k$ 诱导. 再由

$d^0(\psi(M))=0$ 以及 d^0 的定义即得交换图表

$$
\begin{tikzcd}
& M_{f_if_j} \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\
(M_i)_{f_j} \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & (M_j)_{f_i}
\end{tikzcd}
$$

最后, 容易看到满足命题中条件的 A-模 M 均同构于 $C^0 \xrightarrow{d^0} C^1$ 的核, 由此得到 M 在同构意义下是唯一的. □

注意到如果 $\mathcal{U}=\{D(f_i)\mid i=1,\ldots,n\}$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的一个主开集形成的有限开覆盖, 令 $B=A_{f_1}\times\cdots\times A_{f_n}$, 则 $A\longrightarrow B$ 为忠实平坦同态. 并且对任意 A-模 M, $M\otimes_A B\simeq\prod_{i=1}^n M_{f_i}$. 这提示我们可以将主开集形成的开覆盖 $\mathcal{U}$ 推广为忠实平坦的同态 $A\longrightarrow B$, 将局部化诱导的同态 $M\longrightarrow\prod_{i=1}^n M_{f_i}$ 推广为同态 $M\longrightarrow M\otimes_A B$, $x\longmapsto x\otimes 1$. 相应的也可以研究模的粘合问题. 为了处理更多的情形, 我们从层的扩张的角度来看这个问题. 先引入一些概念.

定义 7.4.1 设 A 为环. 称 $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴的一个子范畴, 如果 $\mathcal{I}$ 为一族 A-代数 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 以及对任意 $B,C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 指定一个满足如下条件的 A-代数同态集合 $\mathrm{Mor}(B,C)$ 给出的数据:

(i) $\forall\, B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, $\mathrm{id}\in\mathrm{Mor}(B,C)$.

(ii) $\forall\, B,C,D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, $\forall\,\varphi\in\mathrm{Mor}(B,C)$, $\forall\,\psi\in\mathrm{Mor}(C,D)$, 有 $\psi\circ\varphi\in\mathrm{Mor}(B,D)$.

有时为了强调 $\mathcal{I}$, 我们也将 $\mathrm{Mor}(B,C)$ 记作 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{I}}(B,C)$.

定义 7.4.2 设 A 为环, $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴的一个子范畴. 一个 $\mathcal{I}$-模层 $\mathcal{F}$ 是指对每个 $B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 指定一个 B-模 $\mathcal{F}(B)$, 对每个 $\varphi\in\mathrm{Mor}(B,C)$, 指定一个 Abel 群同态 $\mathcal{F}(\varphi)$, 并且满足如下条件的一组数据:

(i) $\forall\, B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, $\mathcal{F}(\mathrm{id})=\mathrm{id}$.

(ii) $\forall\, B,C,D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, $\forall\,\varphi\in\mathrm{Mor}(B,C)$, $\forall\,\psi\in\mathrm{Mor}(C,D)$, $\mathcal{F}(\psi\circ\varphi)=\mathcal{F}(\psi)\circ\mathcal{F}(\varphi)$.

(iii) $\forall\, B,C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, $\forall\,\varphi\in\mathrm{Mor}(B,C)$, $\mathcal{F}(\varphi)$ 满足 $\mathcal{F}(\varphi)(bx)=\varphi(b)\mathcal{F}(\varphi)(x)$, $\forall\, b\in B, x\in\mathcal{F}(B)$. 即通过 φ 将 C 看作 B-代数之后, $\mathcal{F}(\varphi)$ 为 B-模同态. 并且 $\mathcal{F}(\varphi)$ 诱导的 C-模同态 $\mathcal{F}(B)\otimes_B C\longrightarrow\mathcal{F}(C)$, $x\otimes c\longmapsto\varphi(c)\mathcal{F}(\varphi)(x)$ 为 C-模同构. 该同构仍记为 $\mathcal{F}(\varphi)$.

直观上, 我们可以将 $\mathcal{I}$ 看作一些 A-代数组成的节点, 以及这些节点之间由 A-代数同态给出的一些箭头. 而一个 $\mathcal{I}$-模层 $\mathcal{F}$ 可以看做每个节点 B 处放一个 B-模 $\mathcal{F}(B)$, 并且对每个箭头 $\varphi\in\mathrm{Mor}(B,C)$, 相应的放一个箭头 $\mathcal{F}(\varphi):\mathcal{F}(B)\longrightarrow\mathcal{F}(C)$, 满足一定的相容性条件和刚性条件 ($\mathcal{F}(\varphi)$ 诱导模同构).

定义 7.4.3 设 A 为环, $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴的一个子范畴. 设 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 均为 $\mathcal{I}$-模层. 一个同态 $f:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 是指对每个 $B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 指定一个 B-模同态 $f_B:\mathcal{F}(B)\longrightarrow\mathcal{G}(B)$, 使得

对任意 $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 以及任意 $\varphi \in \mathrm{Mor}(B, C)$, 均有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B) \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\varphi)"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[d, "\mathcal{G}(\varphi)"] \\
\mathcal{F}(C) \arrow[r, "f_C"] & \mathcal{G}(C)
\end{tikzcd}$$

如果对每个 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, f_B 均为 B-模同构, 则称 f 为同构.

设 A 为环, $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ 均为 A-代数的子范畴. 我们称 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{I}$ 的子范畴, 记作 $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, 如果每个 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ 均在 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 中, 并且对任意 $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, 有 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{J}}(B, C) \subset \mathrm{Mor}_{\mathcal{I}}(B, C)$. 如果 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{I}$ 的子范畴, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{I}$-模层, 我们记 $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{J}}$ 为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{J}$ 上的限制, 即对于 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{J}}(B) = \mathcal{F}(B)$, 对于 $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{J}}(B, C)$, $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{J}}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$.

例 7.4.1

- 设 A 为环, 取 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 为所有的 A-代数, 对 $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 取 $\mathrm{Mor}(B, C)$ 为所有 B 到 C 的 A-代数同态形成的集合. 这样得到的 $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴, 我们将其记为 $\mathcal{I}_A$. 设 M 为 A-模. 对每个 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_A)$, 令 $\mathcal{F}(B) := M \otimes_A B$. 对任意 $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_A)$, 以及每个 $\varphi \in \mathrm{Mor}(B, C)$, 令

$$\mathcal{F}(\varphi) = \mathrm{id} \otimes \varphi : M \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A C.$$

  这样得到一个 $\mathcal{I}_A$-模层, 我们将其记为 $\mathcal{F}_M$. 不难看到对任意 $\mathcal{I}_A$-模层 $\mathcal{F}$, 令 $M = \mathcal{F}(A)$, 则 $\mathcal{F}$ 同构于 $\mathcal{F}_M$.

- 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态. 取 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 为所有满足如下条件的 A-代数 C 形成的族: 存在 A-代数同态 $B \longrightarrow C$. 对 $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 令 $\mathrm{Mor}(C, D)$ 为 C 到 D 的所有 A-代数同态形成的集合. 这样得到的 $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴 $\mathcal{I}_A$ 的子范畴, 我们将其记为 $\mathcal{I}_{B/A}$. 对于 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 由于可能存在不止一个 B 到 C 的 A-代数同态, 从而没有一个典范的办法将 C 看作 B-代数, 这说明 $\mathcal{I}_B$ 一般不能看作 $\mathcal{I}_A$ 的子范畴.

- 设 A 为环, 取 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 为所有的局部化 A_f, $f \in A$. 对 $A_f, A_g \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 取 $\mathrm{Mor}(A_f, A_g)$ 为如下集合:

$$\mathrm{Mor}(A_f, A_g) = \begin{cases} \varnothing, \text{ 如果} D(g) \not\subseteq D(f); \\ \{\rho_{D(f), D(g)}\}, \text{ 如果} D(g) \subseteq D(f). \end{cases}$$

  其中 $\rho_{D(f), D(g)}$ 为使下面图表交换的唯一环同态:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A_f \arrow[rr, "\rho_{D(f), D(g)}"] & & A_g
\end{tikzcd}$$

这样得到一个 A-代数的子范畴 $\mathcal{I}$. 如果 M 为 A-模, 对每个 $A_f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 令 $\mathcal{F}(A_f) = M_f$. 对 $\rho_{D(f),D(g)} \in \mathrm{Mor}(A_f, A_g)$, 令

$$\mathcal{F}(\rho_{D(f),D(g)}) = \mathrm{id} \otimes \rho_{D(f),D(g)} : M \otimes A_f = M_f \longrightarrow M \otimes_A A_g = M_g.$$

容易看到, 这样得到的 $\mathcal{I}$-模层 $\mathcal{F}$ 本质是就是2.5 节中定义的 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M}$.

现在我们可以将模的粘合问题重新叙述为如下将一个节点 B 处的模扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层的问题.

问题 7.4.1 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模. 那么 M 是否可以扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层? 即是否存在 $\mathcal{I}_A$-模层 $\mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{F}(B)$ 与 M 作为 B-模同构?

为叙述方便, 先引入一些记号和约定. 设 $f : A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 A-模. 我们将 B-模 $M \otimes_A B$ 记为 f_*M. 对 A-模同态 $\varphi : M \longrightarrow N$, 将 B-模同态 $M \otimes_A B \longrightarrow N \otimes_A B$, $x \otimes b \longmapsto \varphi(x) \otimes b$ 记为 $f_*\varphi$. 设 $g : B \longrightarrow C$ 为另一个环同态, 我们通过同构 $(M \otimes_A B) \otimes_B C \xrightarrow{\sim} M \otimes_A C$, $(x \otimes b) \otimes c \longmapsto x \otimes (g(b)c)$ 将 $(M \otimes_A B) \otimes_B C$ 等同于 $M \otimes_A C$. 这样得到 $g_*f_*M = (g \circ f)_*M$.

设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, 定义如下 A-代数同态.

$$\begin{aligned}
i_1 &: B \longrightarrow B \otimes_A B,\ b \longmapsto b \otimes 1\\
i_2 &: B \longrightarrow B \otimes_A B,\ b \longmapsto 1 \otimes b\\
i_{12} &: B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 \otimes b_2 \otimes 1\\
i_{23} &: B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto 1 \otimes b_1 \otimes b_2\\
i_{13} &: B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 \otimes 1 \otimes b_2\\
j_1 &: B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b \longmapsto b \otimes 1 \otimes 1\\
j_2 &: B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b \longmapsto 1 \otimes b \otimes 1\\
j_3 &: B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b \longmapsto 1 \otimes 1 \otimes b.
\end{aligned}$$

回到层的扩张, 我们先处理将节点 B 处的模扩张为 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层的问题.

命题 7.4.3 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模. 则以下两条等价:

(i) 存在 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层 $\mathcal{F}$, 使得作为 B-模有 $\mathcal{F}(B) \simeq M$.

(ii) 存在 $B \otimes_A B$-模同构 $\varphi : i_{1*}M \xrightarrow{\sim} i_{2*}M$, 使得 $i_{13*}\varphi = i_{23*}\varphi \circ i_{12*}\varphi$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 记 $\psi : \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\sim} M$ 为 B-模同构, 则 $i_{1*}\psi : i_{1*}\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\sim} i_{1*}M$ 和

$i_{2*}\psi : i_{2*}\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\sim} i_{2*}M$ 均为 $B\otimes_A B$-模同构. 由 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层的定义, 有 $B\otimes_A B$-模同构

$$\mathcal{F}(i_1) : i_{1*}\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(B\otimes_A B).$$
$$\mathcal{F}(i_2) : i_{2*}\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(B\otimes_A B).$$

令 $\varphi = (i_{2*})\psi \circ \mathcal{F}(i_2)^{-1} \circ \mathcal{F}(i_1) \circ (i_{1*}\psi)^{-1}$ 为 $i_{1*}M$ 到 $i_{2*}M$ 的同构. 直接验证即知 $i_{13*}\varphi = i_{23*}\varphi \circ i_{12*}\varphi$.

(ii) $\implies$ (i): 对每个 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, 对任意 f_1, f_2 为 B 到 C 的 A-代数同态, 张量积的万有性质给出了唯一的 A-代数同态 $\Psi(f_1, f_2) : B\otimes_A B \longrightarrow C$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
C & B\otimes_A B \arrow[l, "\Psi(f_1,f_2)"'] & B \arrow[l, "i_2"] \arrow[ll, bend right, "f_2"'] \\
& B \arrow[u, "i_1"] \arrow[ul, "f_1"] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由此得到同构 $\Psi(f_1, f_2)_*\varphi : f_{1*}M = \Psi(f_1, f_2)_* i_{1*}M \xrightarrow{\sim} \Psi(f_1, f_2)_* i_{2*}M = f_{2*}M$. 由 φ 所满足的条件, 可知对任意三个 B 到 C 的 A-代数同态 f_1, f_2, f_3, 有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
& f_{1*}M \arrow[dl, "\Psi(f_1,f_2)_*\varphi"'] \arrow[dr, "\Psi(f_1,f_3)_*\varphi"] & \\
f_{2*}M \arrow[rr, "\Psi(f_2,f_3)_*\varphi"] & & f_{3*}M
\end{tikzcd}$$

对每个 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, 我们选取一个 A-代数同态 $f_C : B \longrightarrow C$, 并定义 $\mathcal{F}(C) \coloneqq f_{C*}M$. 对任意 $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{I}_{B/A}}(C, D)$, D-模同构

$$\Psi(g\circ f_C, f_D)_*\varphi : g_*\mathcal{F}(C) = g_* f_{C*}M \xrightarrow{\sim} f_{D*}M = \mathcal{F}(D)$$

和自然同态 $\mathcal{F}(C) \longrightarrow g_*\mathcal{F}(C) = \mathcal{F}(C)\otimes_C D$, $x \longmapsto x\otimes 1$ 的复合诱导了同态 $\mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(C) \longrightarrow \mathcal{F}(D)$. 直接验证可知 $\mathcal{F}$ 为一个 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层. □

再处理 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层的问题.

命题 7.4.4 设 $A \longrightarrow B$ 为忠实平坦的环同态, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层, 则存在 A-模 N, 使得 $\mathcal{I}_A$-模层 $\mathcal{F}_N$ 满足 $\mathcal{F}_N\mid_{\mathcal{I}_{B/A}}$ 同构于 $\mathcal{F}$. 这样的 A-模 N 在同构意义下是唯一的.

证明 先证 N 的存在性. 令 N 为如下 A-模:

$$N \coloneqq \left\{x \in \mathcal{F}(B) \mid \mathcal{F}(i_1)(x) = \mathcal{F}(i_2)(x) \in \mathcal{F}(B\otimes_A B)\right\}.$$

记 $i : N \hookrightarrow M$ 为相应的包含映射. 下面构造 $\mathcal{F}_N\mid_{\mathcal{I}_{B/A}}$ 到 $\mathcal{F}$ 的同态. 对任意

$C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, 任取 $g : B \longrightarrow C$ 为 A-代数同态, 则 A-模同态 $i : N \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ 和同态 $\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(C)$ 的复合给出了 A-模同态 $N \longrightarrow \mathcal{F}(C)$, 从而诱导了 C-模同态 $f_C : \mathcal{F}_N(C) = N \otimes_A C \longrightarrow \mathcal{F}(C)$. 现在验证 f_C 不依赖 A-代数同态 g 的选取. 设 $h : B \longrightarrow C$ 为另一个 A-代数同态, 则由张量积的万有性质, 可已找到环同态 $\Psi(g,h) : B \otimes_A B \longrightarrow C$, 使得下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
C & B \otimes_A B \arrow[l, "\Psi(g,h)"'] & B \arrow[l, "i_2"] \arrow[ll, bend right, "h"'] \\
& B \arrow[u, "i_1"'] \arrow[ul, "g"] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由此得到交换图表

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) & \mathcal{F}(B \otimes_A B) \arrow[l, "\mathcal{F}(\Psi(g,h))"'] & \mathcal{F}(B) \arrow[l, "\mathcal{F}(i_2)"'] \arrow[ll, bend right, "\mathcal{F}(h)"'] \\
& \mathcal{F}(B) \arrow[u, "\mathcal{F}(i_1)"'] \arrow[ul, bend left, "\mathcal{F}(g)"] &
\end{tikzcd}$$

由 N 的定义即知 f_C 不依赖于 A-代数同态 $B \longrightarrow C$ 的选取. 直接验证可得这些同态 f_C 给出了一个 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层同态 $f : \mathcal{F}_N \mid_{\mathcal{I}_{B/A}} \longrightarrow \mathcal{F}$. 只需再验证对每个 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, f_C 为 C-模同构. 而由于 $\mathcal{F}(C) \simeq \mathcal{F}(B) \otimes_B C$, 又只需验证包含同态 $i : N \hookrightarrow \mathcal{F}(B)$ 诱导了 B-模同构 $N \otimes_A B \simeq \mathcal{F}(B)$. 为此, 考虑如下 A-模复形:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(i_2) - \mathcal{F}(i_1)} \mathcal{F}(B \otimes_A B).$$

由 N 的定义, 该复形是左正合的. 作用 $\cdot \otimes_A B$, 得到左正合列

$$0 \longrightarrow N \otimes_A B \xrightarrow{i \otimes 1} \mathcal{F}(B) \otimes_A B \xrightarrow{(\mathcal{F}(i_2) - \mathcal{F}(i_1)) \otimes 1} \mathcal{F}(B \otimes_A B) \otimes_A B. \qquad (7.4\text{–}3)$$

令 $B' = B \otimes_A B$, 则有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & B' \arrow[dl, "i_2'"'] & & B \arrow[ll, "i_1"'] \arrow[dl, "i_1"] \\
B' \otimes_B B' & & B' \arrow[ll, "i_1'"'] & \\
 & B \arrow[uu, dashed, "i_2"] \arrow[dl, dashed, "i_2"'] & & A \arrow[uu] \arrow[ll, dashed] \arrow[dl] \\
B \otimes_A B \arrow[uu, "j"] & & B \arrow[ll, "i_1"] \arrow[uu, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $B' \otimes_B B'$ 的定义中, B 到左边和右边的 B' 同态均为 i_1, 并且 i_1' 为同态 $b' \mapsto b' \otimes 1$, i_2' 为同态 $b' \mapsto 1 \otimes b'$. 该交换图表给出了如下 A-模的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(B') \arrow[dl, "\mathcal{F}(i_2')"'] & & \mathcal{F}(B) \arrow[ll, "\mathcal{F}(i_1)"'] \arrow[dl, "\mathcal{F}(i_1)"] \\
\mathcal{F}(B' \otimes_B B') & & \mathcal{F}(B') \arrow[ll, "\mathcal{F}(i_1')"'] & \\
 & \mathcal{F}(B) \arrow[uu, dashed, "\mathcal{F}(i_2)"] \arrow[dl, dashed, "\mathcal{F}(i_2)"'] & & N \arrow[uu, "i"'] \arrow[ll, dashed, "i"] \arrow[dl, "i"] \\
\mathcal{F}(B \otimes_A B) \arrow[uu, "\mathcal{F}(j)"] & & \mathcal{F}(B) \arrow[ll, "\mathcal{F}(i_1)"] \arrow[uu, "\mathcal{F}(i_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

这又诱导了如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(B') \arrow[dl, "\mathcal{F}(i_2')"'] & & \mathcal{F}(B) \arrow[ll, "\mathcal{F}(i_1)"'] \arrow[dl, "\mathcal{F}(i_1)"] \\
\mathcal{F}(B' \otimes_B B') & & \mathcal{F}(B') \arrow[ll, "\mathcal{F}(i_1')"'] & \\
 & \mathcal{F}(B) \otimes_A B \arrow[uu, dashed, "\widetilde{\mathcal{F}(i_2)}"] \arrow[dl, dashed, "\mathcal{F}(i_2)\otimes 1"'] & & N \otimes_A B \arrow[uu, "\tilde{i}"'] \arrow[ll, dashed, "i\otimes 1"] \arrow[dl, "i\otimes 1"] \\
\mathcal{F}(B \otimes_A B) \otimes_A B \arrow[uu, "\widetilde{\mathcal{F}(j)}"] & & \mathcal{F}(B) \otimes_A B \arrow[ll, "\mathcal{F}(i_1)\otimes 1"] \arrow[uu, "\widetilde{\mathcal{F}(i_2)}"'] &
\end{tikzcd}$$

其中竖直方向的同态含义为:

$\tilde{i} : N \otimes_A B \longrightarrow \mathcal{F}(B), x \otimes b \longmapsto bi(x)$.

$\widetilde{\mathcal{F}(i_2)} : \mathcal{F}(B) \otimes_A B \longrightarrow \mathcal{F}(B')$, $x \otimes b \longmapsto b\mathcal{F}(i_2)(x)$, 其中 B'-模 $\mathcal{F}(B')$ 通过 i_1 看作 B-模.

$\widetilde{\mathcal{F}(j)}: \mathcal{F}(B\otimes_A B)\otimes_A B \longrightarrow \mathcal{F}(B'\otimes_B B'), x\otimes b \longmapsto b\mathcal{F}(j)(x)$, 其中 $B'\otimes_B B'$-模 $\mathcal{F}(B'\otimes_B B')$ 通过 $i_2'\circ i_1 = i_1'\circ i_1$ 看作 B-模.

由 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层的定义可以验证 $\widetilde{\mathcal{F}(i_2)}$ 和 $\widetilde{\mathcal{F}(j)}$ 均为同构. 由 Amitsur 复形的正合性 (推论 7.4.1) 可知以下为左正合列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(i_1)} \mathcal{F}(B') \xrightarrow{\mathcal{F}(i_2')-\mathcal{F}(i_1')} \mathcal{F}(B'\otimes_B B')$$

再结合左正合列(7.4–3) 即得到 $\tilde{i}: N\otimes_A B \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ 为 B-模同构. 以上验证了 N 的存在性.

设 N' 为另一个满足要求的 A-模. 不难看到存在 A-模同态 $f: N' \longrightarrow N$ 使得 $f\otimes 1: N'\otimes_A B \longrightarrow N\otimes_A B$ 为 B-模同构. 从而由 $A\longrightarrow B$ 忠实平坦可知 f 为 A-模同构. 这样证明了 N 在同构意义下的唯一性. □

7.4.3 Galois 下降

习题

1. 设 A 为 Noether 环, I 为理想, M 为 A-模. 设 M/IM 为平坦 A/I-模, 且 $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.

(i) 证明: 对任意的有限 A/I-模 N, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$.

(ii) 证明: 对任意正整数 $s\geq 1$, 对任意的有限 A/I^s- 模 N, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$.

(iii) 进一步设对任意的有限 A-模 N, 有 $N\otimes_A M$ 为 I-进可分的 (即 $\bigcap_{s\geq 1} I^s(N\otimes_A M) = 0$). 证明 M 为平坦 A-模.

2. 设 A 为环, M 为平坦 A-模. 设 N_1, N_2 均为 A-模 N 的子模. 证明: 作为 $N\otimes_A M$ 的子模, 有 $(N_1\otimes_A M)\bigcap(N_2\otimes_A M) = (N_1\bigcap N_2)\otimes_A M$.

3. 设 A 为环, M 为平坦 A-模. 设 P 为系数在 A 中的 $m\times n$ 矩阵, x 为系数在 M 中的 n 维列向量, 并且 $Px = 0$. 证明: 存在系数在 A 中的 n 维列向量 $x_1, \ldots, x_s$ 以及 M 中的元 $y_1, \ldots, y_s$, 使得 $x = \sum_{i=1}^s x_i y_i$.

4. 设 (A, m) 为 Noether 局部环, 证明 $\dim\widehat{A} = \dim A$.

5. 设 A 为 Noether 环, 证明 $\dim A[X] = \dim A + 1$.

6. 设 $(A, m)\to(B, n)$ 为 Noether 局部环之间的平坦同态, 设 B 为 DVR, 并且 $mB = n$. 证明: A 为 DVR.

注记 7.4.1 事实上, 条件 $mB = n$ 可以去掉 (命题 9.2.1).

7. 设 k 为域, $\bar{k}$ 为其代数闭包. 设 (A, m) 为局部环, 并且 $k(m) = A/m$ 为 k 的有限可分扩张. 设 $A\otimes_k\bar{k}$ 为 Dedekind 整环. 证明 A 为 DVR.

注记 7.4.2 $k(m)/k$ 为有限可分扩张这个条件可以去掉 (命题 9.2.1).

8. 设 k 为域, $\bar{k}$ 为其代数闭包. 设 $f(x,y) \in k[x,y]$ 为不可约多项式, 并且 $f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ 在 $\bar{k}^2$ 中无解. 证明 $k[x,y]/(f)$ 为 Dedekind 整环.

习题提示

1. (i): 考虑 A/I-模的短正合列 $0 \to R \to (A/I)^r \to N \to 0$. 利用 M/IM 为平坦 A/I-模, 得到 $R \otimes_A M \to (A/I)^r \otimes_A M$ 为单同态. 再由 $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ 得到 $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$. (ii): 考虑 $0 \subset I^{s-1}N \subset \cdots \subset IN \subset N$. (iii): 利用定理 7.2.1 证明中类似的方法. 关于平坦性局部判别法的一般情形, 可见 [10, §22].

2. [10, Theorem 7.4].

3. [10, Theorem 7.6].

6. 由平坦性知 $A \to B$ 为单同态. 设 $k = A/m$, $k' = B/n$. 利用平坦性, 有

$$\frac{n}{n^2} = \frac{m \otimes_A B}{m^2 \otimes_A B} = \frac{m}{m^2} \otimes_A B = \frac{m}{m^2} \otimes_A B \otimes_B k' = \frac{m}{m^2} \otimes_k k'.$$

从而由 $\dim_{k'}(n/n^2) = 1$ 得到 $\dim_k(m/m^2) = 1$.

第八章 Cohen-Macaulay 环

8.1 Koszul 复形与正则序列

设 $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 为 A 中元素形成的一个序列. 模仿标准单形的构造, 我们定义一个 A-模复形 $(K.(\underline{a}), \partial.)$. 对 $1 \leq m \leq n$, 令 $F_m(\underline{a})$ 为符号集合 $\{e_{i_1 \ldots i_m} | i_1, \ldots, i_m \in I\}$ 作为基生成的自由 A-模, 即

$$F_m(\underline{a}) \coloneqq \bigoplus_{1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n} A e_{i_1 \ldots i_m}.$$

令 $R_m(\underline{a})$ 为 $F_m(\underline{a})$ 中由 $\{e_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(m)}} - \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_{i_1 \ldots i_m} | 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n,\ \sigma \in S_m\}$ 中元素生成的 A-子模. 定义 $K_m(\underline{a})$ 为商模 $F_m(\underline{a})/R_m(\underline{a})$.

令 $K_0(\underline{a}) = A$. 对 $m < 0$ 或 $m > n$, 令 $K_m(\underline{a}) = 0$. 定义如下边缘同态 ∂.

$$\begin{aligned} K_m(\underline{a}) &\xrightarrow{\partial_m} K_{m-1}(\underline{a}) \\ e_{i_1 \ldots i_m} &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} a_{i_j} e_{i_1 \ldots \hat{i}_j \ldots i_m} \\ K_1(\underline{a}) &\xrightarrow{\partial_1} K_0(\underline{a}) \\ e_i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

不难验证 $(K.(\underline{a}),\partial.)$ 是复形, 称为序列 $\underline{a}$ 对应的 Koszul 复形. 设 M 为 A-模, 令 $K.(\underline{a},M)=K.(\underline{a})\otimes_A M$, 得到的复形 $K.(\underline{a},M)$ 称为 M 关于序列 $\underline{a}$ 的 Koszul 复形. 我们可以将 Koszul 复形看作以 $a_1,\dots,a_n$ 为顶点, 同时按顶点扭曲一下边缘同态得到的标准单形.

由定义, 当 $m>n$ 或 $m<0$ 时, $K_m(\underline{a})=0$. 对 $m\geq 0$, $K_m(\underline{a})$ 为自由 A-模, 一组基为 $\{e_{i_1\dots i_m}|i_1<\cdots<i_m\}$. 由定义, Koszul 复形不依赖于 $a_1,\dots,a_n$ 的顺序. 即对于 $\sigma\in S_n$, 如果令 $\sigma(\underline{a})=(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$, 那么有 $K.(\underline{a},M)=K.(\sigma(\underline{a}),M)$.

下面考察 Koszul 复形的同调群. 首先由定义可以直接验证总有 $H_0(K.(\underline{a},M))=M/(a_1,\dots,a_n)M$.

命题 8.1.1 设 $a_1\in A^*$ 为 A 中可逆元, 则 Koszul 复形 $K.(\underline{a},M)$ 满足 $H_m(K.(\underline{a},M))=0,\ \forall\, m\geq 1$.

证明 我们模仿定理 6.1.1 的证明. 对 $m\geq 0$, 定义同态 $h_m: K_m(\underline{a},M)\to K_{m+1}(\underline{a},M)$ 为 $e_{i_1\dots i_m}\mapsto a_1^{-1}e_{1i_1\dots i_m}$. 容易验证当 $m\geq 1$ 时, 有 $\mathrm{id}=h_{m-1}\circ\partial_m+\partial_{m+1}\circ h_m$. 由此得到 $H_m(K.(\underline{a},M))=0,\ \forall\, m\geq 1$. □

推论 8.1.1 对任意 A-模 M, 对 $1\leq i\leq n$, 以及 $m\geq 1$, 有局部化 $H_m(K.(\underline{a},M))_{a_i}=0$.

证明 注意到 A_{a_i}-模 M_{a_i} 关于 $\underline{a}$ 的 Koszul 复形 $K.(\underline{a},M_{a_i})$ 同构于 $K.(\underline{a},M)_{a_i}$. 再利用命题 8.1.1 即得 $K.(\underline{a},M)_{a_i}$ 正合. 由于局部化为正合函子, 故 $H_m(K.(\underline{a},M))_{a_i}=H_m(K.(\underline{a},M)_{a_i})=0$. □

一般而言, Koszul 复形的正合性与下面定义的正则序列密切相关.

定义 8.1.1 设 M 为非零 A-模. 回忆 $a\in A$ 称为 M-正则元, 如果乘 a 映射 $M\xrightarrow{a\cdot}M$ 为单射. 我们称 A 中元素的序列 $(a_1,\dots,a_n)$ 为 M-**正则序列**, 如果同时满足如下两个条件:

(i) a_1 为 M-正则元, a_2 为 M/a_1M-正则元, $\dots$, a_n 为 $M/(a_1,\dots,a_{n-1})M$-正则元.

(ii) $M/(a_1,\dots,a_n)M\neq 0$.

Koszul 复形的正合性与正则序列的关系由下面的定理给出.

定理 8.1.1 设 $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$ 为 A 中序列, 设 M 为 A-模.

(i) 如果 $\underline{a}$ 为 M-正则序列, 则 $H_m(K.(\underline{a},M))=0,\ \forall\, m\geq 1$.

(ii) 设 (A,m) 为 Noether 局部环, $a_1,\dots,a_n\in m$, 并且 M 为有限 A-模. 如果 $H_1(K.(\underline{a},M))=0$, 则 $\underline{a}$ 为 M-正则序列.

证明 (i): 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时由 Koszul 复形的定义即得. 当 $n>1$ 时, 考察乘 a_1 诱导的复形同态 $K.(\underline{a},M)\xrightarrow{a_1\cdot}K.(\underline{a},M)$. 由 a_1 为 M-正则元知该同态为单同态. 直接计算其余核可得如下复形的短正合列

$$0\longrightarrow K.(\underline{a},M)\xrightarrow{a_1\cdot}K.(\underline{a},M)\longrightarrow K.(\underline{a}',M_1)\oplus K.(\underline{a}',M_1)[-1]\longrightarrow 0,$$

其中 $K.(\underline{a}',M_1)$ 代表 $M_1=M/a_1M$ 作为 $A_1:=A/(a_1)$-模, 关于序列 $\underline{a}':=(\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n)$ 的 Koszul 复形. 上述复形的短正合列诱导同调群的长正合列如下

$$\longrightarrow H_{m+1}(K.(\underline{a}',M_1)\oplus K.(\underline{a}',M_1)[-1])\longrightarrow H_m(K.(\underline{a},M))\xrightarrow{a_1\cdot}H_m(K.(\underline{a},M))\longrightarrow.$$

对 M_1-正则序列 $\underline{a}'$ 应用归纳假设, 可得当 $m\geq 1$ 时,

$$H_{m+1}(K.(\underline{a}',M_1)\oplus K.(\underline{a}',M_1)[-1])=H_{m+1}(K.(\underline{a}',M_1))\oplus H_m(K.(\underline{a}',M_1))=0,$$

从而乘 a_1 同态 $H_m(K.(\underline{a},M))\xrightarrow{a_1\cdot}H_m(K.(\underline{a},M))$ 为单同态. 再由推论 8.1.1 知 $H_m(K.(\underline{a},M))_{a_1}=0$. 这样得到 $H_m(K.(\underline{a},M))=0$.

(ii): 由 $H_1(K.(\underline{a},M))=0$ 的定义, 得到: 如果 $x_1,\ldots,x_n\in M$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_ix_i=0$, 那么存在 $y_{ij}\in M$, $1\leq i<j\leq n$, 使得对每个 $1\leq p\leq n$, 有

$$x_p=\sum_{i<p}a_iy_{ip}-\sum_{j>p}a_jy_{pj}. \tag{8.1–1}$$

下面对 n 进行归纳来证明 $H_1(K.(\underline{a},M))=0\implies(a_1,\ldots,a_n)$ 为 M-正合列. 当 $n=1$ 时显然. 当 $n>1$ 时, 由(8.1–1) 可以看到 a_n 为 $M/(a_1,\cdot,a_{n-1})M$-正则元. 故只需再证明 $\underline{a}':=(a_1,\ldots,a_{n-1})$ 为 M-正则元. 利用 H_1 的定义以及(8.1–1), 直接计算可以得到

$$H_1(K.(\underline{a}',M))\equiv 0\pmod{a_n\,H_1(K.(\underline{a}',M))},$$

此即 $H_1(K.(\underline{a}',M))=a_n\,H_1(K.(\underline{a}',M))$. 再由 Nakayama 引理即得 $H_1(K.(\underline{a}',M))=0$, 从而由归纳假设得到 $\underline{a}'=(a_1,\ldots,a_{n-1})$ 为 M-正则元. □

在 Noether 局部环上的有限模情形, 我们得到如下推论.

推论 8.1.2 设 (A,m) 为 Noether 局部环, $a_1,\ldots,a_n\in m$. 设 M 为有限 A-模.

(i) 序列 $\underline{a}:=(a_1,\ldots,a_n)$ 为 M-正则序列 $\iff H_1(K.(\underline{a},M))=0$.

(ii) 若 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为 M-正则序列, 则 $\forall\,\sigma\in S_n$, 序列 $(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(n)})$ 也为 M-正则序列. 即正则序列与顺序无关.

8.2 深度

以下设 A 为 Noether 环, 设 M 为有限生成 A-模. 首先注意到对于 M-正则序列 $(a_1,\ldots,a_n)$, 有 $a_1M\subsetneq(a_1,a_2)M\subsetneq\ldots$, 从而由理想的严格升链 $(a_1)\subsetneq(a_1,a_2)\subsetneq\ldots$. 由 Noether 性知 M 的正则序列均为有限长的. 设 I 为 A 的理想, 且 $IM\neq M$. 我们称 M-正则序列 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为 I-极大的, 如果 $a_1,\ldots,a_n\in I$, 并且对任意 $a\in I$, 加长的序列 $(a_1,\ldots,a_n,a)$ 均不是 M-正则序列.

本节主要目标是证明任意两个 I-极大正则序列的长度都相同. 为此, 我们需要 Ext^i 函子. 切入点是下面的观察.

引理 8.2.1 任意 $a \in I$ 均为 M 的零因子 $\iff \mathrm{Hom}_A(A/I, M) \neq 0$.

证明 $\Longrightarrow$: 此时 $I \subset \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P$, 从而 $I \subset P$, 对某一个 $P \in \mathrm{Ass}\, M$ 成立. 这样, 复合同态 $A/I \twoheadrightarrow A/P \hookrightarrow M$ 即为 $\mathrm{Hom}_A(A/I, M)$ 中的一个非零元素.

$\Longleftarrow$: 设 $\varphi : A/I \to M$ 非零. 令 $x = \varphi(1)$, 则 x 为 M 中非零元, 并且 $Ix = 0$. 从而任意 $a \in I$ 均为 M 的零因子. □

由该引理, 我们得到下面 I-极大正则序列长度的一个刻画.

定理 8.2.1 设 $(a_1, \ldots, a_n)$ 为 I-极大的 M-正则序列, 则

$$\mathrm{Ext}_A^0(A/I, M) = \cdots = \mathrm{Ext}_A^{n-1}(A/I, M) = 0, \quad \mathrm{Ext}_A^n(A/I, M) \neq 0.$$

证明 记 $M_0 = M$. 对 $i = 1, \ldots, n$, 记 $M_i = M/(a_1, \ldots, a_i)M$. 由极大性, 知 I 中元素均为 M_n 的零因子, 从而由上述引理, $\mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_n) = \mathrm{Hom}_A(A/I, M_n) \neq 0$. 对如下短正合列

$$0 \to M_{n-1} \xrightarrow{a_n \cdot} M_{n-1} \to M_n \to 0$$

应用 $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, \cdot)$ 函子的长正合列, 得到如下正合列

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_{n-1}) \xrightarrow{a_n \cdot} \mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_{n-1}) \to \mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_n) \\ &\to \mathrm{Ext}_A^1(A/I, M_{n-1}) \xrightarrow{a_n \cdot} \mathrm{Ext}_A^1(A/I, M_{n-1}). \end{aligned}$$

对任意 i, 对任意 $a \in A$ 以及任意 A-模 N_1, N_2, 注意到 $\mathrm{Ext}_A^i(N_1, N_2) \xrightarrow{a \cdot} \mathrm{Ext}_A^i(N_1, N_2)$ 和应用函子 $\mathrm{Ext}_A^i(\cdot, N_2)$ 于 $N_1 \xrightarrow{a \cdot} N_1$ 得到的同态一致. 如果 $a \in I$, 则 $A/I \xrightarrow{a \cdot} A/I$ 为零同态, 故 $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, N_2) \xrightarrow{a \cdot} \mathrm{Ext}_A^i(A/I, N_2)$ 为零同态. 将这个结论应用到上述正合列, 得到单同态 $\mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_{n-1}) \xrightarrow{a_n \cdot} \mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_{n-1})$ 为零同态, 从而 $\mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_{n-1}) = 0$. 进而有单同态 $\mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_n) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(A/I, M_{n-1})$, 故 $\mathrm{Ext}_A^1(A/I, M_{n-1}) \neq 0$.

继续上述讨论, 通过对 j 归纳, 不难得到对任意 $0 \leq j \leq n$, 有

$$\mathrm{Ext}_A^0(A/I, M_{n-j}) = \cdots = \mathrm{Ext}_A^{j-1}(A/I, M_{n-j}) = 0, \ \mathrm{Ext}_A^j(A/I, M_{n-j}) \neq 0.$$ □

注记 8.2.1 当 $M = A$ 时, Koszul 复形 $K.(\underline{a})$ 提供了 $A_1 \coloneqq A/(a_1, \ldots, a_n)A$ 的一个自由消解. 利用这个消解计算 $\mathrm{Ext}_A^i(A_1, A)$, 再利用 k 作为 A_1-模的自由消解, 即可得到上述定理的另一证明.

由定理 8.2.1, 记 $\operatorname{depth}(I,M) := \inf\{i|\operatorname{Ext}_A^i(A/I,M)\neq 0\}$, 则任意 I-极大的 M-正则序列的长度都等于 $\operatorname{depth}(I,M)$. 我们称 $\operatorname{depth}(I,M)$ 为 M 的 I-**深度**. 如果 (A,m,k) 为 Noether 局部环, 则 $\operatorname{depth}(m,M)$ 直接称为 M 的**深度**, 记为 $\operatorname{depth} M$ 或 $\operatorname{depth}_A M$, 此时

$$\operatorname{depth} M = \inf\{i|\operatorname{Ext}_A^i(k,M)\neq 0\}.$$

8.3 Cohen-Macaulay 环

在讨论深度和维数时, 经常需要做归纳, 下面的命题虽然简单, 却在归纳时频繁被用到.

命题 8.3.1 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想. 设 M 为有限 A-模, 满足 $IM\neq M$. 那么对任意 M-正则元 $a\in I$, 有

$$\operatorname{depth}(I,M/aM)=\operatorname{depth}(I,M)-1,\ \dim M/aM=\dim M-1.$$

证明 前一个等式由定义即得. 对后一个等式, 可以由行列式技巧证明

$$\sqrt{\operatorname{ann} M/aM}=\sqrt{\operatorname{ann} M+(a)}.$$

再由 $\dim M/aM=\dim A/\sqrt{\operatorname{ann} M/aM}$ 即得. □

上节我们看到正则序列的长度总是有限的, 下面的命题给出了一个上界.

命题 8.3.2 设 (A,m) 为 Noether 局部环, 以及 M 为有限 A-模. 对 $P\in \operatorname{Ass} M$, 有

$$\dim A/P\geq \operatorname{depth} M.$$

证明 对 $\operatorname{depth} M$ 进行归纳. $\operatorname{depth} M=0$ 时显然成立. 设 $\operatorname{depth} M>0$. 取 $a\in m$ 为 M-正则元, 有 $\operatorname{depth} M/aM=\operatorname{depth} M-1$. 下面只需找到一个 $Q\in \operatorname{Ass}(M/aM)$, 使得 $P\subsetneqq Q$ 即可. 这是因为由归纳假设, $\dim A/Q\geq \operatorname{depth} M/aM$, 进而得到

$$\dim A/P\geq \dim A/Q+1\geq \operatorname{depth} M/aM+1=\operatorname{depth} M.$$

为找到 Q, 设 $P=\operatorname{ann}(x)$, 对 $0\neq x\in M$ 成立. 如果 $0\neq \bar{x}\in M/aM$, 则 $P\subset \operatorname{ann}(\bar{x})$, 并且由于 $a\notin P$, 知 $P\subsetneqq \operatorname{ann}(\bar{x})$. 如果 $0=\bar{x}\in M/aM$, 则 $x=ax_1$, $x_1\in M$, 并且由 a 为 M-正则元知 $P=\operatorname{ann}(x_1)$. 将 x 换作 x_1 继续讨论. 由于 $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^iM=0$, 总可以找到 $x_i\in M$, 使得 $x=a^ix_i$, 并且 $0\neq \bar{x}_i\in M/aM$. 这样 $P\subsetneqq \operatorname{ann}(\bar{x}_i)$. 取 $Q\in \operatorname{Ass}(M/aM)$ 满足 $\operatorname{ann}(\bar{x}_i)\subset Q$ 即可. □

定义 8.3.1 设 (A, m) 为 Noether 局部环, 以及 M 为有限 A-模. 如果 $\dim M = \operatorname{depth} M$, 则称 M 为 **Cohen-Macaulay 模**, 或 **CM 模**.

定理 8.3.1 设 A 为 Noether 局部环, 以及 M 为有限 A-模.

(i) 设 M 为 CM 模, 则对任意 $P \in \operatorname{Ass} M$, 有 $\dim A/P = \dim M = \operatorname{depth} M$. 特别地, M 没有嵌入素理想.

(ii) 设 $a_1, \ldots, a_r$ 为 M-正则序列, 则 M 为 CM 模 $\Leftrightarrow$ $M/(a_1, \ldots, a_r)M$ 为 CM 模.

(iii) 设 M 为 CM 模. 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 M_P 作为 A_P-模为 CM 模. 如果 $M_P \neq 0$, 则

$$\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}_{A_P} M_P.$$

证明 (i) 由定义, $\dim M = \dim \operatorname{Supp} M = \sup\{\dim A/P | P \in \operatorname{Ass} M\}$. 再由 CM 模的定义以及 命题 8.3.2 即得.

(ii) 对 r 归纳, 并应用命题 8.3.1 即可.

(iii) 首先证明 M_P 作为 A_P 模为 CM 的. 不妨设 $M_P \neq 0$. 从而 $P \in \operatorname{Supp} M = V(\operatorname{ann} M)$. 对 $\operatorname{depth}_{A_P} M_P$ 进行归纳. 如果 $\operatorname{depth}_{A_P} M_P = 0$, 则 $P \in \operatorname{Ass} M$. 由 i知 P 为 $V(\operatorname{ann} M)$ 的极小素理想, 故 $\dim M_P = 0$. 设 $\operatorname{depth}_{A_P} M_P > 0$, 则 PA_P 不是 M_P 的伴随素理想, 从而 P 不是 M 的伴随素理想. 取 $a \in P$ 为 M-正则元, 显然 a 也是 M_P-正则元. 由于 $\operatorname{depth}_{A_P}(M_P/aM_P) = \operatorname{depth}_{A_P} M_P - 1$, 对 M_P/aM_P 应用归纳假设, 得到 M_P/aM_P 为 CM 模. 再由 (ii) 知 M_P 是 CM 的.

如果 $M_P \neq 0$, 要证明等式 $\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}_{A_P} M_P$. 通过对 $\operatorname{depth}(P, M)$ 进行归纳, 不难看到我们只需处理 $\operatorname{depth}(P, M) = 0$ 的情形即可. 而此时 $P \subset Q$, $Q \in \operatorname{Ass} M$. 由 M 为 CM 模知 Q 为 $\operatorname{supp} M$ 的一个极小素理想, 从而由 $M_P \neq 0$ 知 $P = Q$. 故 $\operatorname{depth}_{A_P} M_P = \operatorname{depth}_{A_Q} M_Q = 0$. □

定义 8.3.2 设 A 为 Noether 环. 如果对 A 的任意极大理想 m, 局部环 A_m 作为自身上的模都是 CM 模, 则称 A 为 **Cohen-Macaulay 环**, 或 **CM 环**.

由定理 8.3.1, (iii), CM 环的局部化仍为 CM 环.

设 (A, m) 为 CM 局部环, 对任意两个极小素理想 P_1, P_2, 由定理 8.3.1 (i) 知 $\dim A/P_1 = \dim A/P_2$. 这等价于说 P_1 和 m 之间饱和素理想链的最大长度等于 P_2 和 m 之间饱和素理想链的最大长度. 下面的定理说明有更强的结论成立: 给定任意两个有包含关系的素理想 $Q_1 \subset Q_2$, 则 Q_1 和 Q_2 之间的任意两个饱和素理想链长度都相等, 即 A 为悬链环.

定理 8.3.2 CM 环均为悬链环.

证明 设 A 为 CM 环, 只需证明: 对任意两个有包含关系的素理想 $P \subset Q$, 如果 P 和 Q 之间无法插入其它素理想, 那么 $\operatorname{ht}(Q) = \operatorname{ht}(P) + 1$. 通过在 Q 处作局部化, 不妨设

A 为局部环, 并且 Q 为其唯一极大理想. 此时 (A,m) 为 CM 局部环, 而我们需要证明 $\dim A = \mathrm{ht}(P)+1$. 与前面的论证手法类似, 对 $\mathrm{ht}(P)$ 进行归纳即得. □

定理 8.3.3 正则局部环均为 CM 环.

证明 对正则局部环的维数或深度进行归纳即得. □

定理 8.3.4 设 A 为 CM 环, 则多项式环 $A[X_1,\dots,X_n]$ 也为 CM 环.

证明 只需证明: A 为 CM 环 $\Longrightarrow$ $A[X]$ 为 CM 环. 任取 $A[X]$ 的极大理想 n, 令 $P=n\cap A$. 记 $B=A[X]_n$, 只需证明 B 为 CM 局部环. 通过考虑 A_P, 不妨设 (A,P) 为局部环. 由于 n/P 为域上一元多项式环 $A/P[X]$ 的极大理想, 故存在首一多项式 $f(X)\in A[X]$, 使得 $n=P+(f(X))$. 取 $a_1,\dots,a_r$ 为 A 的一个极大正则序列, 由 $f(X)$ 为首一多项式知其为 $A/(a_1,\dots,a_r)[X]$ 中的正则元. 这样得到 $(a_1,\dots,a_r,f(X))$ 为 $A[X]$ 的正则序列, 也为 B 的正则序列. 由于 $\dim B=\dim A+1=r+1$, 我们看到 $\operatorname{depth} B\geq \dim B$. 再由命题 8.3.2 知 $\operatorname{depth} B=\dim B$, 即 B 为 CM 局部环. □

联合定理 8.3.2 和 定理 8.3.4, 得到如下推论.

推论 8.3.1 CM 环均为万有悬链环.

8.4 CM 环与平坦性

在本节中, 如不特别说明, 我们总是使用以下符号:$(A,m)\to(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, A 的剩余类域为 $k=A/m$, $F:=B\otimes_A k=B/mB$ 为纤维, M 为有限 B-模. 我们关心 B 的 CM 性质与 A, F 的 CM 性质, 以及 $A\to B$ 平坦性的关系.

当 B 为平坦 A 代数时, ref?? 说明维数公式 $\dim B=\dim A+\dim F$ 成立. 下面的命题说明在一定条件下, 维数公式也可以蕴含 B 的平坦性.

定理 8.4.1 设 A 为正则局部环, B 为 CM 局部环, 并且维数公式 $\dim B=\dim A+\dim F$ 成立, 则 B 为平坦 A-代数.

证明 由于零维正则局部环为域, 我们不妨假设 $\dim A>0$. 通过对 $\operatorname{depth} B$ 进行归纳可知 B 的任意参数系均为极大正则序列. 取 $(a_1,\dots,a_s)$ 为 A 的一个参数系, 取 $(b_1,\dots,b_r)\in n$ 使得 $(\bar b_1,\dots,\bar b_r)$ 为 F 的一个参数系, 从而由 $\dim B=\dim A+\dim F$ 不难看到 $(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_r)$ 为 B 的一个参数系. 下面对 r 进行归纳来证明 B 的平坦性.

当 $r=0$ 时, 由于 A 正则, $(a_1,\dots,a_s)$ 为 A 的正则序列, 故 Koszul 复形 $K.(\underline{a},A)$ 给出了 A-模 $k:=A/m$ 的一个自由消解. 我们利用这个自由消解计算 $\mathrm{Tor}_1^A(k,B)$. 注意到 $K.(\underline{a},A)\otimes_A B=K.(\underline{a},B)$ 恰为 $(a_1,\dots,a_s)$ 看作 B 中元素得到的 Koszul 复形.

而由于 $(a_1,\ldots,a_s)$ 为 B 的一个参数系, 从而也为 B 的正则序列, 这样 $K.(\underline{a},B)$ 为正合列. 由此得到 $\mathrm{Tor}_1^A(k,B)=0$. 再利用平坦性的局部判别法即得 B 为平坦 A 代数.

当 $r>0$ 时, 由于 $(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_r)$ 为 B 的一个参数系知 b_1 为 B 中正则元. 对 $A\to B/b_1B$ 应用归纳假设, 得到 B/b_1B 为平坦 A-模. 再利用 引理 7.2.1即得 B 为平坦 A-模. □

我们可以将上述定理写作如下代数几何中更加常用的形式。

推论 8.4.1 设 k 为域, R,S 均为整的有限生成 k-代数, 并且 R 为正则环, S 为 CM 环. 设 $\varphi: R\to S$ 为 k-代数同态. 并且对任意 R 的极大理想 m, 纤维 $\operatorname{Spec} S/mS$ 或者为空集, 或者其每个不可约分支的维数均为 $\dim S-\dim R$. 则 φ 为平坦的.

证明 对 S 中的每个极大理想 n, 其在 φ 的逆像 $m:=\varphi^{-1}(n)$ 均为 R 的极大理想. 对局部同态 $R_m\to S_n$ 应用 定理 8.4.1 即可. □

注记 8.4.1 推论 8.4.1 可以翻译为: 设 $\varphi: X\to Y$ 为不可约 k-代数簇之间的 k-态射, 并且 X 为 CM 的, Y 为正则的. 如果 φ 的每个非空纤维的任意不可约分支的维数均为 $\dim X-\dim Y$, 那么 φ 为平坦态射.

当 $A\to B$ 平坦时, A,B,F 三者 CM 性质的关系如下

定理 8.4.2 设 B 为平坦 A 代数, 则 B 为 CM 局部环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 局部环.

证明 对 $\operatorname{depth} F$ 进行归纳.

(i) 假设 $\operatorname{depth} F=0$. 下面对 $\operatorname{depth} A$ 进行归纳.

如果 $\operatorname{depth} A=0$, 则 $m\in \operatorname{Ass} A$, $n/m\in \operatorname{Ass} F$. 故存在单同态 $A/m\hookrightarrow A$ 以及 $B/nB\hookrightarrow B/mB$. 由 B 的平坦性, 对单同态 $A/m\hookrightarrow A$ 作用 $\cdot\otimes_A B$ 得到单同态 $B/mB\hookrightarrow B$, 再与 $B/nB\hookrightarrow B/mB$ 复合得到单同态 $B/nB\hookrightarrow B$. 这说明 $n\in\operatorname{Ass} B$, 即 $\operatorname{depth} B=0$. 再由 $\dim B=\dim A+\dim F$ 可得 B 为 CM 环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 环.

如果 $\operatorname{depth} A>0$, 取 $a\in m$ 为 A 的正则元, 由 B 的平坦性知 a 也为 B 的正则元. 令 $A_1=A/(a)$, $B_1=B/(a)$. 则 $\operatorname{depth} A_1=\operatorname{depth} A-1$, $\operatorname{depth} B_1=\operatorname{depth} B-1$, 局部同态 $A_1\to B_1$ 是平坦的, 并且其纤维还是 F. 由归纳假设, B_1 为 CM 环 $\iff$ A_1 和 F 均为 CM 环. 又由于 B_1 为 CM 环 $\iff$ B 为 CM 环, A_1 为 CM 环 $\iff$ A 为 CM 环. 从而 B 为 CM 环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 环.

(ii) 假设 $\operatorname{depth} F>0$. 取 $b\in n$ 使得 $\bar b$ 为 F 的正则元. 由引理 7.2.1 知 b 为 B 的正则元, 并且 $B_1:=B/(b)$ 为平坦 A-代数. 由于 $A\to B_1$ 的纤维为 $F_1:=F/(\bar b)$, 故可以对 $A\to B_1$ 应用归纳假设, 得到 B_1 为 CM 环 $\iff$ A 和 F_1 均为 CM 环. 由于由于 B_1 为 CM 环 $\iff$ B 为 CM 环, F_1 为 CM 环 $\iff$ F 为 CM 环. 从而 B 为 CM 环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 环. □

推论 8.4.2 设 A 为 Noether 局部环, 则 A 为 CM 局部环 $\Longleftrightarrow$ 完备化 $\hat{A}$ 为 Noether 局部环.

证明 注意到 $A \to \hat{A}$ 平坦, 并且纤维 $\hat{A}/m\hat{A} = A/m$ 为域即可. □

8.5 CM 环与整闭性

回忆对整环 A, 有 $A = \cap_{P \in \operatorname{Spec} A} A_P$. 回忆其证明关键为对于 $x = b/a \in \operatorname{Frac}(A)$, 考虑 A 的理想

$$I \coloneqq \{s \in A | sx \in A\} = \{s \in A | sb \in aA\}.$$

注意到在商环 A/aA 中看, 有 $I/aA = \operatorname{ann}(\bar{b})$. 从而如果 $\bar{b} \neq 0$, 则存在 $P \in \operatorname{Ass} A/aA$, 使得 $I \subset P$. 利用这个观察, 在 Noether 整环的情形, 可以将命题 $A = \cap_{P \in \operatorname{Spec} A} A_P$ 加强为只需 P 遍历 $\operatorname{Ass}(A/aA)$, $\forall\, a \neq 0$.

命题 8.5.1 设 A 为 Noether 整环. 设 $a, b \in A$ 为非零元素, $x = \frac{b}{a} \in \operatorname{Frac}(A)$. 如果对任意 $P \in \operatorname{Ass}(A/aA)$, 都有 $x \in A_P$, 那么 $x \in A$.

证明 假设 $x \notin A$, 则 $b \notin aA$. 记 $I \coloneqq \{c \in A | xc \in A\} = \{c \in A | cb \in aA\}$. 则 $I = \operatorname{ann}(\bar{b})$, 其中 $\bar{b} \in A/aA$ 为 b 代表的元. 由于 $\bar{b} \neq 0$, 存在 $P \in \operatorname{Ass}(A/aA)$, 使得 $I \subset P$. 这与 $x \in A_P$ 矛盾! 故 $x \in A$. □

命题 8.5.2 设 A 为 Noether 环, 且为整闭整环. 则对每个非零的 $a \in A$, 对每个 $P \in \operatorname{Ass}(A/aA)$, 均有 $\operatorname{ht} P = 1$.

证明 通过在 P 处作局部化, 不妨设 A 为局部环, 且 $P = m$ 为极大理想. 设 $b \in A$, 使得对 $0 \neq \bar{b} \in A/aA$, 有 $m = \operatorname{ann}(\bar{b})$. 从而 $mb \subset aA$, 即 $m\frac{b}{a} \subset A$. 下面讨论理想 $m\frac{b}{a}$ 是否等于 A:

- 若 $m\frac{b}{a} = A$, 令 $\pi \in m$ 满足 $\pi\frac{b}{a} = 1$, 则容易验证 $m = (\pi)$, 从而 A 为离散赋值环.
- 若 $m\frac{b}{a} \subset m$, 则通过伴随方阵技巧知 $\frac{b}{a}$ 在 A 上整, 故由 A 的整闭性知 $\frac{b}{a} \in A$. 这与 $\bar{b}$ 在 A/aA 中不为零矛盾! □

定理 8.5.1 设 A 为 Noether 整环. 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:

(i) 对 A 的每个高度为 1 的素理想 P, 局部环 A_P 为离散赋值环.

(ii) $A = \bigcap_{\operatorname{ht} P = 1} A_P$.

证明 如果这两个条件成立, 容易看到 A 为整闭整环. 如果 A 为整闭整环, 由?? , (i) 成立. 由命题 8.5.1 知 $A = \bigcap A_P$, 其中 P 遍历集合 $S \coloneqq \bigcup_{a \in A \setminus 0} \operatorname{Ass}(A/aA)$. 再由命题 8.5.2 知 S 恰为所有高度等于 1 的素理想集合. 由此知 (ii) 成立. □

以下为更易使用的一个整闭性判据.

定理 8.5.2 设 A 为 Noether 整环. 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:

(i) 对 A 的每个高度为 1 的素理想 P, 局部环 A_P 为离散赋值环.

(ii) 对每个非零的 $a \in A$, 对每个 $P \in \operatorname{Ass}(A/aA)$, 均有 $\operatorname{ht} P = 1$.

证明 当 A 为 Noether 整闭整环时, 由定理 4.1.1知 (i) 成立. 由命题 8.5.2 知 (ii) 成立.

反之, 假设 (i) 和 (ii) 成立, 由命题 8.5.1 知 $A = \bigcap A_P$, 其中 P 遍历集合 $S := \bigcup\limits_{a\in A\setminus 0} \operatorname{Ass}(A/aA)$. 再由 (ii) 知 S 恰为所有高度等于 1 的素理想集合. 由此知 $A = \bigcap\limits_{\operatorname{ht} P=1} A_P$ 为一些离散赋值环的交, 从而 A 为整闭整环. □

注意到当 A 为 CM 整环时, 定理 8.5.2 的(ii) 总成立. 这是因为 A 为 CM 整环蕴含着 A/aA 为 CM 环, 从而其伴随素理想均为极小素理想.

例 8.5.1 设 $n \geq 1$, 则 $A := \mathbb{C}[x,y,z]/(x^n+y^n+z^n)$ 为 Noether 整闭整环. 我们验证 定理 8.5.2 的两条. 首先, 不难看到 $f := x^n+y^n+z^n$ 为不可约多项式. 从而 A 为 CM 整环. 由上面的解释, (ii) 成立. 其次, 任取 A 的高度为 1 的素理想 P, 不难看到 $\dim A/P = 1$, 从而可以取一个极大理想 $m = (x-a, y-b, z-c)$, $a,b,c \in \mathbb{C}$, 使得 $P \subset m$ 并且 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. 由于 $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ 的公共解只有 $(0,0,0)$, 知 $f \notin m/m^2$. 这样 A_m 为正则局部环, 从而 A_P 为一维正则局部环, 即离散赋值环. 故(i) 也成立.

定理 8.5.3 (Serre 整闭性判据) 设 A 为 Noether 局部环, 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:

(i) A 在任意极小素理想处的局部化均为域, 在任意高度 1 素理想处的局部化均为离散赋值环.

(ii) 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 如果 $\operatorname{ht} P \geq 2$, 则 $\operatorname{depth}(P, A) \geq 2$.

证明 设 A 为整闭整环. 由定理 4.1.1知 (i) 成立. 对 $P \in \operatorname{Spec} A$ 满足 $\operatorname{ht} P \geq 2$, 假设 $\operatorname{depth}(P,A) = 1$, 则取 $0 \neq a \in P$, 可知 a 为 P 中的极大正则序列, 从而存在 $Q \in \operatorname{Ass} A/aA$, 使得 $P \subset Q$. 由定理 8.5.2, (ii), 知 $\operatorname{ht} Q = 1$, 从而 $\operatorname{ht} P = 1$, 这与 $\operatorname{ht} P \geq 2$ 矛盾! 故 $\operatorname{depth}(P,A) \geq 2$, 即 (ii) 成立.

设 (i) 和 (ii) 均成立. 注意到 $\forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, 若 $\operatorname{ht} P \geq 1$, 则 $\operatorname{depth}(P,A) \geq 1$. 由此知 A 的伴随素理想均为极小素理想. 设 $P_1, \ldots, P_n$ 为 A 的全部极小素理想. 则 $\{s \in A | s \text{ 为正则元}\} = \{s \in A | s \notin P_1 \cup \cdots \cup P_n\}$. 记该集合为 S. 在该乘法子集处的局部化为 $K := S^{-1}A$, 这称为 A 的全分式环. 不难看到, K 为零维环, 其所有素理想为 $P_1, \ldots, P_n$. 故 $K = K_1 \times \ldots K_n$, 其中 $K_i = A_{P_i}$ 为域.

由定义可以看到, $A \hookrightarrow K$ 为单同态. 下面验证 A 在 K 中为整闭的, 即 $\forall\, x \in K$, 若 x 在 A 上整, 则 $x \in A$. 为此, 设 $x = \frac{b}{a} \in K$ 在 A 上整, 其中 $a, b \in A$, 且 $a \in S$ 为正则元. 考虑 A 的理想 $I := \{t \in A | tx \in A\} = \{t \in A | tb \in aA\}$. 如果 $I = A$, 则 $x \in A$. 如果 $I \neq A$, 则在 A/aA 中, 有 $\bar{b} \neq 0$, 并且 $I/aA = \operatorname{ann}(\bar{b})$. 故存在 $P \in \operatorname{Ass} A/aA$ 使得 $I \subset P$. 由 (ii), $\operatorname{ht} P \leq 1$. 再由 (i) 知 A_P 为整闭整环. 将 $x = \frac{b}{a}$ 看作 $\operatorname{Frac}(A_P)$ 中

的元素, 由 x 在 A 上整知 $x \in A_P$. 这样得到 $I_P = A_P$. 这与 $I \subset P$ 矛盾! 从而 $I = A$, $x \in A$. 这就验证了 A 在 K 中整闭.

由分解 $K = K_1 \times \cdots \times K_n$, 得到 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 其中 e_i 为 K_i 中的 1. 由 $e_i^2 - e_i = 0$ 及 A 在 K 中整闭知 $e_i \in A$. 由此不难看到 $A = Ae_1 \times \cdots \times Ae_n$ 为 n 个子环的乘积. 由 A 为局部环知 $n = 1$. 从而 K 为域, 并且 A 为整闭整环. □

习题

1. 设 $\varphi: A \to B$ 为 Noether 局部环之间的有限同态, 设 M 为有限 B-模. $\operatorname{depth}_A M$ ($\operatorname{supp}_A M$) 表示 M 作为 A-模的深度 (支集). $\operatorname{depth}_B M$ ($\operatorname{supp}_B M$) 表示 M 作为 B-模的深度 (支集). 证明:

(i) $\operatorname{depth}_A M = \operatorname{depth}_B M$, $\dim \operatorname{supp}_A M = \dim \operatorname{supp}_B M$.

(ii) M 作为 A-模是 CM 的 $\iff$ M 作为 B-模是 CM 的.

2. 设 A 为 CM 局部环, 证明 $A[\![X]\!]$ 为 CM 环.

3. 设 A 为 CM 环 (不一定为局部环), 证明 $A[\![X]\!]$ 为 CM 环.

4. 设 L/k 为域的可分代数扩张. 设 A 为 k-代数. 证明 A 为 CM 环 $\iff$ $A \otimes_k L$ 为 CM 环.

5. 记号同 8.4 节. 证明: 如果 B 为平坦 A 代数, 则 $\operatorname{depth} B = \operatorname{depth} A + \operatorname{depth} F$.

6. 设 (A, m) 为正则局部环, M 为有限 A-模, 并且 $\dim \operatorname{supp} M = \dim A$. 证明 M 为 CM 模 $\iff$ M 为自由模.

7. 设 A 为 Noether 局部环. 证明 $\operatorname{depth} A = \operatorname{depth} \hat{A}$.

8. 设 k 为特征 0 的域, (A, m) 为局部 k-代数, 且为 CM 环. 设 G 为 A 作为 k-代数的自同构群 $\operatorname{Aut}_k(A)$ 的有限子群. 证明不变子环 A^G 为 CM 环.

9. 设 k 为特征 0 的域, A 为有限生成 k-代数, 且为 CM 环. 设 G 为 A 作为 k-代数的自同构群 $\operatorname{Aut}_k(A)$ 的有限子群. 证明不变子环 A^G 为 CM 环.

10. 设 $f: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上的复值函数. 设 f 还是有理函数, 即对任意 $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, 存在 $g, h \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, 使得 $h(x) \neq 0$, 并且对任意 $y \in D(h) \coloneqq \{a \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} | h(a) \neq 0\}$, 均有 $f(y) = g(y)/h(y)$. 证明存在唯一的多项式 $F \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, 使得 $F|_U = f$.

注: 这是多复变函数论中 Hartogs 现象 (见 [3, Chapter I, (3.28)]) 的一个有理函数版本.

习题提示

1. [13, Chapter IV, prop. 12].

3. 利用定理 8.4.2. 局部化之后分析纤维 F.

6. 利用 $\dim_k M \otimes_A k = \dim_K M \otimes_A K$ 判断 M 的自由性.

9. 设 $Q \in \operatorname{Spec} A$ 位于 $P \in \operatorname{Spec} A^G$ 上方, 则所有位于 P 上方的素理想为轨道 $G \cdot Q = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$. 验证

$$\varprojlim_n A^G/P^n = (\varprojlim_n A/(PA)^n)^G = (\prod_{i=1}^m \varprojlim_n A/Q_i^n)^G = (\varprojlim_n A/Q^n)^H.$$

其中 $H = \operatorname{Stab}_G(Q)$ 为 Q 的稳定子群. 再应用习题 8 到完备局部环 $\hat{A} := \varprojlim_n A/Q^n$ 上.

10. 设 $A = \mathbb{C}[x_1, x_2]$, 由 A 为整闭整环知 $A = \bigcap_{\operatorname{ht} P=1} A_P$.

第九章 正则局部环

9.1 极小自由消解

本节中, 我们固定一个 Noether 局部环 A, 并用 m 和 k 分别表示其极大理想和剩余类域.

设 M 为有限 A-模. 我们希望找到 M 的自由消解

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

使得 F_i 的秩尽可能地小. 为此, 取自由 A-模 F_0 以及同态 $F_0 \to M$ 使得 $F_0 \otimes k \to M \otimes k$ 为同构. 由 Nakayama 引理, $F_0 \to M$ 为满同态, 并得到短正合列

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

继续取自由 A-模 F_1 以及同态 $F_1 \to K_0$ 使得 $F_0 \otimes k \to K_0 \otimes k$ 为同构, 则同样理由得到短正合列

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0.$$

继续讨论下去, 我们得到 M 的自由消解

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

满足如下条件:

(i) F_i 为有限自由 A-模, $\forall\, i \geq 0$.

(ii) $\bar{d}_i = 0$, 即 $d_i(F_i) \subset mF_{i-1}$, $\forall\, i \geq 0$.

(iii) $\bar{\epsilon}: F_0 \otimes k \to M \otimes k$ 为同构.

由上面的构造, 我们得到如下的

定义–命题 9.1.1 任一有限 A-模 M 均存在同时满足上述三条的自由消解. 这称为 M 的**极小自由消解**.

称 $\min\{n|F_i = 0,\ \forall\ i > n\}$ 为 M 的上述极小自由消解的长度. 如果这个最小值不存在 (即对任意 n, 均存在 $i > n$, 使得 $F_i \neq 0$), 则称该极小自由消解的长度为无穷大. 同样地, 对 M 的任一投射消解或自由消解, 我们也可以定义其长度.

极小自由消解在相差一个同构的情况下是唯一的, 即

命题 9.1.1 有限 A-模 M 的任意两个极小自由消解均同构.

证明 设 $(F_\cdot, d_\cdot)$ 和 $(F'_\cdot, d'_\cdot)$ 均为 M 的极小自由消解. 由投射消解的性质, 存在复形的同伦等价 $\varphi_\cdot : (F_\cdot, d_\cdot) \to (F'_\cdot, d'_\cdot)$. 由于 $\varphi_\cdot \otimes k : (F_\cdot \otimes k, \bar{d}_\cdot) \to (F'_\cdot \otimes k, \bar{d}'_\cdot)$ 仍为同伦等价, 从而诱导同调群的同构. 注意到 $\bar{d}_\cdot = \bar{d}'_\cdot = 0$, 我们看到 $\bar{\varphi}_i : F_i \otimes k \xrightarrow{\sim} F'_i \otimes k$. 由此得到 $\varphi_i : F_i \xrightarrow{\sim} F'_i$ 为同构, $\forall\ i$. □

定义 9.1.1 对有限 A-模 M, 其极小自由消解的长度称为 M 的投射维数, 记为 $\operatorname{proj\,dim} M$ 或 $\operatorname{proj\,dim}_A M$. 如果极小自由消解的长度为无穷大, 则记 $\operatorname{proj\,dim} M = \infty$.

例 9.1.1 设 $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 为 A 的一个正则序列. Koszul 复形 $K_\cdot(\underline{a})$ 给出了 $A/(a_1, \ldots, a_n)$ 的一个长度为 n 的极小自由消解. 特别地, 如果 A 为正则局部环, 那么 Koszul 复形给出了 k 的一个长度为 $\dim A$ 的极小自由消解.

命题 9.1.2 设 M 为有限 A-模, 则

(i) $\operatorname{proj\,dim} M \leq \operatorname{proj\,dim} k$.

(ii) $\operatorname{proj\,dim} M = \sup\{i|\operatorname{Tor}^i_A(M,k) \neq 0\}$.

(iii) $\operatorname{proj\,dim} M < \infty \iff M$ 存在长度有限的投射消解.

证明 (i) 设 $\operatorname{proj\,dim} k = n < \infty$. 利用 k 的极小自由消解进行计算, 可以看到 $\operatorname{Tor}^i_A(M,k) = 0,\ \forall\ i > n$. 设 $F_\cdot \to M \to 0$ 为 M 的极小自由消解, 则 $\operatorname{Tor}^i_A(M,k) = F_i \otimes k,\ \forall\ i \geq 0$. 由此知对于 $i > n$, 有 $F_i \otimes k = 0$, 从而 $F_i = 0$.

(ii) 利用 M 的极小自由消解计算 $\operatorname{Tor}^i_A(M,k)$ 即得.

(iii) 如果 M 存在长度有限的投射消解, 则 $\sup\{i|\operatorname{Tor}^i_A(M,k) \neq 0\} < \infty$, 再由 (ii) 即得 $\operatorname{proj\,dim} M < \infty$。 □

下面的命题给出了利用极小自由消解判断 A 中正则元存在性的一个方法. 这是习题2 的一个特殊情形.

命题 9.1.3 设 M 为有限 A-模, 且 $0 < \operatorname{proj\,dim} M < \infty$. 则 $\operatorname{depth} A \geq 1$, 即 $m \notin \operatorname{Ass} A$.

证明 反证法. 假设 $0 \neq a \in A$, 使得 $ma = 0$. 取 M 的极小自由消解

$$0 \to L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \to M \to 0.$$

在等同 $L_n = A^r$, $L_{n-1} = A^s$ 下, 同态 d_n 表示为一个系数全在 m 中的矩阵, 从而 $d_n((a,\ldots,a)) = 0$, 这与 d_n 为单同态矛盾! □

9.2 正则局部环的同调刻画

本节主要目标为证明如下定理

定理 9.2.1 (Serre) 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环. 则以下三条相互等价:

(i) A 为正则局部环.

(ii) $\operatorname{proj}\dim k < \infty$.

(iii) 对任意有限 A-模 M, 有 $\operatorname{proj}\dim M < \infty$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 由 Koszul 复形即得 (例 9.1.1). (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) 由命题 9.1.2 得到. 故只需证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i). 设对任意有限 A-模 M, 有 $\operatorname{proj}\dim M < \infty$. 下面通过对 $\dim_k m/m^2$ 进行归纳来证明 A 为正则局部环.

当 $\dim_k m/m^2 = 0$ 时, 易知 A 为域, 故为正则局部环. 设 $\dim_k m/m^2 > 0$. 则 $0 < \operatorname{proj}\dim k < \infty$. 从而由命题 9.1.3知 $m \notin \operatorname{Ass} A$. 这样可以取 $x \in m - m^2$, 并且 x 为 A 的正则元. 令 $\bar{A} = A/xA$. 则 $\bar{A}$ 也为 Noether 局部环, 其极大理想为 $\bar{m} = m/xA$, 其剩余类域仍为 k, 并且 $\dim_k \bar{m}/\bar{m}^2 = \dim_k m/m^2 - 1$, 以及 $\dim \bar{A} = \dim A - 1$. 从而只需证明 $\bar{A}$ 为正则局部环. 根据归纳假设, 又只需证明 $\operatorname{proj}\dim_{\bar{A}} k < \infty$.

由条件, m 作为 A-模, 存在长度有限 (设为 n) 的极小自由消解 $F_. \to m \to 0$. 考虑如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r] \arrow[d, "x\cdot"] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "x\cdot"] & \ldots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "x\cdot"] & m \arrow[r] \arrow[d, "x\cdot"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_n/xF_n \arrow[r] & F_{n-1}/xF_{n-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & F_0/xF_0 \arrow[r] & m/xm \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由于 x 为正则元, 上面的图表为 (行) 复形的短正合列, 从而由上面的两行正合知最下面一行也正合. 这样得到 m/xm 作为 A/xA-模, 存在有限长度的极小自由消解, 即 $\operatorname{proj}\dim_{\bar{A}} m/xm < \infty$.

下面说明自然的满同态 $m/xm \to m/xA$ 存在截面, 从而 m/xA 同构于 m/xm 的一个直和项. 由于 $x \notin m^2$, 我们可以取 m 的一组极小生成元 $x = x_1, x_2, \ldots, x_s$.

由于 $x = x_1, x_2, \ldots, x_s$ 为 m/m^2 的一组 k-基, 可以看到对任意 $c_2, \ldots, c_s \in A$, 若 $c_2x_2 + \ldots c_sx_s \in xA$, 则 $c_2x_2 + \ldots c_sx_s \in xm$. 这说明生成元之间的映射 $\bar{x}_i \mapsto \bar{x}_i$ $(i = 2, \ldots, s)$ 给出了一个良好定义的 $\bar{A}$-模同态 $m/xA \to m/xm$. 这显然是自然满同态 $m/xm \to m/xA$ 的一个截面. 这样 m/xA 同构于 m/xm 的一个直和项, 再由命题 9.1.2, (ii) 得到 $\operatorname{proj}\dim_{\bar{A}} m/xA \leq \operatorname{proj}\dim_{\bar{A}} m/xm < \infty$.

短正合列 $0 \longrightarrow m/xA \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow k \longrightarrow 0$ 以及 m/xA 的极小自由消解给出了 k 作为 $\bar{A}$-模的长度有限的投射消解, 从而由命题 9.1.2, (iii) 知 $\operatorname{proj}\dim_{\bar{A}} k < \infty$. □

推论 9.2.1 设 A 为正则局部环, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则局部化 A_P 也为正则局部环.

证明 记 $k(P) = A_P/PA_P$ 为 P 处的剩余类域. 由定理 9.2.1, 只需证明

$$\operatorname{proj}\dim_{A_P} k(P) < \infty.$$

由 A 正则可知 A/P 存在有限长度的极小自由消解 $F_\cdot \to A/P \to 0$. 显然在 P 处作局部化之后得到 $F_\cdot \otimes_A A_P \to (A/P) \otimes_A A_P = k(P) \to 0$ 为 $k(P)$ 的一个投射消解. 从而由命题 9.1.2, (iii) 知 $\operatorname{proj}\dim_{A_P} k(P) < \infty$. □

命题 9.2.1 设 $(A, m) \to (B, n)$ 为 Noether 局部环之间的平坦局部态射, 则

(i) B 为正则局部环 $\implies$ A 为正则局部环.

(ii) A 和 B/mB 均为正则局部环 $\implies$ B 为正则局部环.

证明 (i) 假设 A 不是正则局部环, 则 A/m 的极小自由消解 $F_\cdot \to A/m \to 0$ 的长度为无穷大. 由 B 平坦知 $F_\cdot \otimes_A B \to B/mB \to 0$ 也为正合列, 并且直接验证定义即知这是 B/mB 作为 B-模的极小自由消解. 由此知 $\operatorname{proj}\dim_B B/mB = \infty$. 这与 B 正则矛盾! 故 A 为正则局部环.

(ii) 记 $k = B/n$. 设 $x_1, \ldots, x_r$ 和 $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s$ 分别为 A 和 B/mB 的正则参数系, 容易看到 $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ 为 n 的一组生成元. 这样得到

$$\dim B \leq \dim_k n/n^2 \leq r + s = \dim A + \dim B/mB.$$

而平坦性保证了等式 $\dim B = \dim A + \dim B/mB$. 从而 $\dim B = \dim_k n/n^2$. 即 B 为正则局部环. □

例 9.2.1 上述命题的 (i) 中, 不能得到纤维 B/mB 为正则局部环. 下面为一个例子: $A = \mathbb{C}[y]_{(y)}$, $B = \mathbb{C}[x]_{(x)}$, 同态 $A \to B$ 为 $y \mapsto x^2$. 不难验证, A, B 均为正则局部环, $A \to B$ 为平坦局部态射, 而纤维 $B/x^2B = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ 不是正则局部环. 几何上看, 这是二重分歧覆盖 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ 在分歧点 0 处对应的局部环同态.

定义 9.2.1 环 A 称为正则环, 如果 A 为 Noether 环, 并且 A 在每个素理想 P 处的局部化 A_P 均为正则局部环.

由推论 9.2.1, 正则环的局部化均为正则环, 并且 Noether 环 A 为正则环 $\iff$ A 在每个极大理想 m 处的局部化 A_m 为正则局部环.

命题 9.2.2 设 A 为正则环, 那么 $A[X]$ 和 $A[\![X]\!]$ 均为正则环.

证明 设 Q 为 $A[X]$ 的极大理想, 令 $P = Q \cap A$. 通过在 P 处作局部化, 不妨设 A 为局部环, 并且其极大理想 $m = P$. 显然 $A \to A[X]_Q$ 平坦, 并且其纤维 $(A/m[X])_Q$ 是离散赋值环. 由命题 9.2.1, (ii) 知 $A[X]_Q$ 为正则局部环. 从而 $A[X]$ 为正则环. 同理 $A[\![X]\!]$ 为正则环. □

9.3 正则局部环是唯一因子分解整环

命题 9.3.1 设 A 为 Noether 整环. 则 A 是唯一因子分解整环 $\iff$ A 的每个高度为 1 的素理想均为主理想.

证明 $\Longrightarrow$: 设 P 为高度 1 的素理想. 取 $0 \neq a \in P$. 设 $a = p_1 \dots p_m$ 为 a 的素因子分解. 由 $a \in P$ 知存在 i, 使得 $p_i \in P$. 由于 p_i 为素元, 知 (p_i) 为素理想. 再由 $(p_i) \subset P$ 和 $\operatorname{ht} P = 1$ 知 $P = (p_i)$ 为主理想.

$\Longleftarrow$: 设 a 为 A 的不可约元, 我们只需证明 a 为素元, 即 (a) 为素理想. 取 P 为包含 (a) 的一个极小素理想. 由 Krull 主理想定理知 $\operatorname{ht} P = 1$. 从而 $P = (b)$ 为主理想. 由 $a \in P$ 知 $b \mid a$. 再由 a 不可约即知 $a = \lambda b$, 并且 $\lambda \in A^*$ 为可逆元. 这样得到了 a 为素元. □

命题 9.3.2 设 A 为 Noether 整环. 设 $0 \neq x$ 为 A 的一个素元 (即 (x) 为素理想). 则 A 是唯一因子分解整环 $\iff$ 局部化 A_x 是唯一因子分解整环.

证明 设 $a \in A$ 为不可约元, 并且 $x \nmid a$, 我们只需证明 a 为素元. 首先说明 a 为 A_x 中的不可约元. 假设在 A_x 中有分解 $a = \frac{b}{x^m}\frac{c}{x^n}$, 其中 $b, c \in A$, m, n 为正整数. 则在 A 中有 $ax^{m+n} = bc$. 由 x 为素元知 $x \mid b$ 或 $x \mid c$. 不妨设 $b = xb_1$. 则 $ax^{m+n-1} = b_1 c$. 继续讨论下去不难看到 b 或 c 在 A_x 中为可逆元. 这样证明了 a 为 A_x 中的不可约元. 由于 A_x 是唯一因子分解整环, a 为 A_x 的素元. 从而如果在 A 中有 $a \mid wz$, 则在 A_x 中有 $a \mid w$ 或 $a \mid z$. 不妨设 $a \mid w$ 在 A_x 中成立, 则 $w = a \cdot \frac{a_1}{x^n}$, 其中 $a_1 \in A$, $n \geq 0$. 这样得到 A 中的等式 $wx^n = aa_1$. 如果 $n > 0$, 由 $x \nmid a$ 并且 x 为素元, 得到 $x \mid a_1$. 设 $a_1 = xa_2$, 则 $\frac{a_1}{x^n} = \frac{a_2}{x^{n-1}}$. 继续讨论下去不难看到存在 $a_i \in A$ 使得 $w = aa_i$. 故在 A 中有 $a \mid w$. 这样我们证明了 a 为素元. □

定理 9.3.1 正则局部环是唯一因子分解整环.

证明 设 A 为正则局部环. 我们对 $\dim A$ 进行归纳. 当 $\dim A = 0$ 时, A 为域, 从而为唯一因子分解整环. 设 $\dim A > 0$, 取 A 的一个不可约元 $x \in m$. 由 A 为整环 (????)

及 命题 9.3.2, 只需证明 A_x 是唯一因子分解整环. 再由命题 9.3.1, 又只需证明 A_x 的任意高度为 1 的素理想均为主理想. 设 P 为 A 的高度为 1 的素理想, 并且满足 $x \notin P$. 则我们只需证明 PA_x 为 A_x 的主理想. 注意到 A_x 的每个素理想均形如 QA_x, 其中 Q 为 A 的不包含 x 的素理想. 由 $x \in \mathfrak{m}$ 知 $\operatorname{ht} Q < \operatorname{ht} \mathfrak{m} = \dim A$. 从而 $(A_x)_Q = A_Q$ 为正则局部环, 并且 $\dim A_Q < \dim A$. 由归纳假设, A_Q 是唯一因子分解整环, 而且 $(PA_x)_Q = PA_Q$ 为主理想. 这样得到 A_x 的理想 PA_x 在每个素理想处的局部化均为主理想, 故 PA_x 为投射 A_x-模.

由定理 9.2.1知 P 作为有限 A-模, 存在长度有限的极小自由消解, 再作局部化得到 PA_x 作为 A_x-模存在长度有限的自由消解. 由下面的引理 9.3.1和 引理 9.3.2 即知 PA_x 为 A_x 的主理想. □

引理 9.3.1 设 A 为 Noether 环, M 为投射 A-模. 设 M 存在长度有限的自由消解

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

使得对任意 i, 自由 A-模 F_i 的秩有限. 则存在正整数 n_1, n_2, 使得 $M \oplus A^{n_1} \simeq A^{n_2}$.

证明 对 r 进行归纳. 当 $r = 1$ 时, 由 M 投射知短正合列 $0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 分裂, 从而 $M \oplus F_1 \simeq F_0$. 当 $r > 1$ 时, 令 $K = \ker \epsilon$. 由 M 投射知短正合列 $0 \to K \to F_0 \to M \to 0$ 分裂, 从而

$$M \oplus K \simeq F_0 \simeq A^s. \tag{9.3–1}$$

注意到

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

为 K 的自由消解, 从而由归纳假设知存在正整数 m_1, m_2 使得

$$K \oplus A^{m_1} \simeq A^{m_2}. \tag{9.3–2}$$

(9.3–2)两边均与 M 作直和, 得到 $M \oplus K \oplus A^{m_1} \simeq M \oplus A^{m_2}$. 再由(9.3–1) 得到 $M \oplus A^{m_2} \simeq A^{s+m_1}$. □

引理 9.3.2 设 A 为整环, I 为 A 的非零理想, 并且存在正整数 n, m, 使得有 A-模同构 $I \oplus A^n = A^m$. 则 $m = n+1$, 并且 I 为主理想.

证明 设 $K = \operatorname{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 由 $I \oplus A^n = A^m$ 得到 K-线性空间同构 $(I \otimes_A K) \oplus K^n = K^m$. 显然 $I \otimes_A K \simeq K$. 故 $m = n+1$.

条件 $I \oplus A^n = A^{n+1}$ 等价于短正合列 $0 \to A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \to I \to 0$ 分裂. 故存在同态 $\psi : A^{n+1} \to A^n$, 使得 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. 取 A^n 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$ 以及 A^{n+1} 的一组基

$f_1, \ldots, f_{n+1}$, 则 φ 和 ψ 具有如下的矩阵表示:

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_{n+1})P$$
$$\psi(f_1, \ldots, f_{n+1}) = (e_1, \ldots, e_n)Q.$$

其中 $P \in M_{(n+1)\times n}(A)$, $Q \in M_{n\times(n+1)}(A)$. 由 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ 知 $QP = \mathrm{I}_n$ 为单位方阵. 由 Cauchy-Binet 公式, 得到行列式等式:

$$1 = \det(QP) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

其中 a_i 为 Q 删去第 i 列得到的 n 阶方阵的行列式, 而 b_i 为 P 删去第 i 行得到的 n 阶方阵的行列式. 由此, 令 $\tilde{Q}$ 为 Q 添加第一行为 $(a_1, -a_2, \ldots, (-1)^{n+1}a_n)$ 得到的 $n+1$ 阶方阵, 则 $\det \tilde{Q} = 1$. 同理, P 添加一列可以得到一个 $n+1$ 阶方阵 $\tilde{P}$ 满足 $\det \tilde{P} = 1$. 由 $\tilde{P}$ 为 A 上的可逆方阵, 不难看到令 $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n+1}) = (f_1, \ldots, f_{n+1})\tilde{P}$, 则 $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n+1})$ 为 A^{n+1} 的一组基, 并且 $\varphi(e_i) = \tilde{f}_i$, $i = 1, \ldots, n$. 从而 $I \simeq \operatorname{coker}\varphi \simeq A \cdot \tilde{f}_{n+1}$ 为自由 A-模, 即 I 为主理想. □

习题

1. 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A- 模. 设 $\operatorname{proj}\dim M = n < \infty$. 证明对 M 的任意投射消解 $P_\cdot \to M \to 0$, 有 $P_n \neq 0$. 并证明 $\operatorname{proj}\dim M$ 等于 M 的投射消解的最小长度.

2. [Auslander-Buchsbaum] 设 A 为 Noether 局部环, $0 \neq M$ 为有限 A- 模. 设 $\operatorname{proj}\dim M = n < \infty$. 证明 $\operatorname{proj}\dim M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A$.

3. 设 (A, m) 为 Noether 局部环, 证明 A 为正则局部环 $\iff$ 完备化 $\hat{A}$ 为正则局部环.

4. 设 A 为正则环. 证明 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, 使得每个 A_i 均为整的正则环.

5. 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数, 且 A 为整环. 证明以下几条互相等价:

(i) A 为 Cohen-Macaulay 环.

(ii) 对任意正则环 B, 任意单的有限同态 $\varphi : B \hookrightarrow A$ 为平坦的.

(iii) 存在多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 到 A 的单的平坦的有限同态.

习题提示

2. [10, Theorem 19.1].

第十章 微分模

10.1 基本正合列

10.2 光滑与平展同态

10.3 可积联络与无穷小下降

…Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la rigidité, et la faculté de croître, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de soufre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs, etc.

Grothendieck (letter to Tate in 1968)

[6]

[14, Lemma 07JG], 以及

$$\sum_{K''} \theta_{K''}(m) \otimes \prod \zeta''^{k''_i} = \sum_{K,K'} \theta_{K'}(\theta_K(m)) \otimes \prod \zeta'^{k'_i} \prod \zeta^{k_i} \tag{10.3–1}$$

类比于以下恒等式

$$\exp(\theta_1(\zeta_1+\zeta'_1)) \dots \exp(\theta_n(\zeta_n+\zeta'_n)) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\theta_i\zeta_i) \prod_{i=1}^{n} \exp(\theta_i\zeta'_i).$$

从而等式(10.3–1) 等价于 $\theta_i\theta_j=\theta_j\theta_i, \forall\ i,j$, 以及 $i_1!\dots i_n!\theta_{i_1\dots i_n}=\theta_1^{i_1}\dots\theta_n^{i_n}$.

习题

1.

习题提示

参考文献

[1] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction To Commutative Algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Avalon Publishing, 1994. ISBN: 9780813345444. URL: https://books.google.com/books?id=HOASFid4x18C (引用于 p. 96).

[2] Henri Cohen. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1993. DOI: 10.1007/978-3-662-02945-9 (引用于 p. 79).

[3] J.P. Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. Université de Grenoble I, 1997. URL: https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf (引用于 p. 137).

[4] D. Eisenbud and J. Harris. *The Geometry of Schemes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000. ISBN: 9780387986388. URL: https://doi.org/10.1007/b97680 (引用于 p. 14).

[5] L. Fu. *Etale Cohomology Theory (Revised Edition)*. Nankai Tracts In Mathematics. World Scientific Publishing Company, 2015. ISBN: 9789814675109. URL: https://books.google.com/books?id=muGiCgAAQBAJ (引用于 p. 80).

[6] A Grothendieck. “Crystals and the De Rham cohomology of schemes,(notes by I. Coates et O. Jussila)”. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (1968). URL: https://agrothendieck.github.io/divers/CRCSscan.pdf (引用于 p. 147).

[7] David Hilbert. *Theory of algebraic invariants*. Cambridge university press, 1993 (引用于 p. 20).

[8] Zbigniew Jelonek. “On the effective Nullstellensatz”. *Inventiones mathematicae* 162.1 (2005), pp. 1–17. DOI: 10.1007/s00222-004-0434-8 (引用于 p. 62).

[9] János Kollár. "Sharp effective nullstellensatz". *Journal of the American Mathematical Society* 1.4 (1988), pp. 963–975 (引用于 p. 62).

[10] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*. Vol. 8. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1986 (引用于 pp. 74, 125, 146).

[11] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*. Vol. 322. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. xviii+571. ISBN: 3-540-65399-6. DOI: 10.1007/978-3-662-03983-0 (引用于 p. 79).

[12] Jean-Pierre Serre. "How to use finite fields for problems concerning infinite fields". *Contemporary Mathematics* 14 (2009), p. 183 (引用于 p. 65).

[13] Jean-Pierre Serre. *Local algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author. Berlin: Springer-Verlag, 2000, pp. xiv+128 (引用于 p. 138).

[14] The Stacks project authors. *The Stacks project*. https://stacks.math.columbia.edu. 2023 (引用于 pp. 66, 73, 74, 84, 88, 147).

名词索引暨英译

中文术语按汉语拼音排序.