数学分析

习题演练（第一册）

（第二版）

周民强　编著

科学出版社
www.sciencep.com

数学分析习题演练

（第一册）
（第二版）

周民强　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累整理编写而成的.全书共分为三册.第一册分为6章:实数、函数,极限论,连续函数,微分学(一),微分学(二),不定积分.第二册分为6章:定积分,反常积分,常数项级数,函数项级数,幂级数、Taylor级数,Fourier级数.第三册分为8章:多元函数的极限与连续性,多元函数微分学,隐函数存在定理,一般极值与条件极值,含参变量的积分,重积分,曲线积分与曲面积分,各种积分之间的关系.本书选择的习题起点适当提高,侧重理论性和典范性.书中还添加了若干注记,便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练.第1册/周民强编著.—2版.—北京:科学出版社,2010

ISBN 978-7-03-028183-8

Ⅰ.数… Ⅱ.周… Ⅲ.数学分析-高等学校-习题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124752号

责任编辑:林 鹏 刘嘉善 姚莉丽/责任校对:李奕萱
责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010年7月第 二 版 印张:22 3/4
2010年7月第四次印刷 字数:450 000

印数:6 501—10 500

定价:36.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

学数学必须演算习题,这是大家的共识.通过演算,我们不仅能熟悉理论的意义和应用,掌握方法的操作,同时还可以洞察理论本身的适应性,预测其扩展前景.因此,关于数学各分支,都编写出了众多习题集或学习参考书,尤以微积分(或数学分析)类为最.作者在多年的教学实践中,积累了相当数量的练习题,且在培训学生过程中收到较好的效果.现在,在科学出版社编辑的鼓励下,把它们整理并编写出来,供读者参考,以开阔视野和启示思路.

本书以上海科技出版社(2002年)出版的《数学分析》教材为蓝本.因此,总的说来,选题的起点适当提高,侧重理论性和典范性,并力求多角度展示,减少了一般性命题及其在几何、力学方面的应用练习.解答也从简,不再在文字上多下功夫.书中还添加了若干注记,便于读者厘清某些误解.

全书共分三册.第一册分6章:实数、函数,极限论,连续函数,微分学(一),微分学(二),不定积分.第二册分6章:定积分,反常积分,常数项级数,函数项级数,幂级数、Taylor级数,Fourier级数.第三册分8章:多元函数的极限与连续性,多元函数微分学,隐函数存在定理,一般极值与条件极值,含参变量的积分,重积分,曲线积分与曲面积分,各种积分之间的联系.

由于作者的水平和视野所限,书中不足之处在所难免,欢迎读者批评指正.

作　者

2008年

技 重 于 练,

巧 重 于 悟.

目　　录

第 1 章　实数、函数

数学分析是以研究函数性质为己任的，这些函数是定义在实数集（或有序实数组形成的点集）上，且取值为实数．因此，先对这方面的基础知识作一简单介绍和回顾是有益的．

1.1　实　　数

1.1.1　分类

全体实数记为 $(-\infty,\infty)$ 或 $\mathbf{R}$．正整数（自然数，$1,2,\cdots,n,\cdots$）全体记为 $\mathbf{N}$．整数（$0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots$）全体记为 $\mathbf{Z}$．有理数 $\left(\dfrac{m}{n}: m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}; m\text{ 与 }n\text{ 互素，为既约分数}\right)$ 全体记为 $\mathbf{Q}$．无理数（非有理数之实数）全体记为 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$．

代数数　满足整系数代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的实数（根）．（有理数是代数数；$p+q\sqrt{7}$（$p,q\in\mathbf{Q}$）满足方程 $x^2-2px+(p^2-7q^2)=0$，是代数数．）

超越数　非代数数的实数．（圆周率 π，对数底 e．若 a 是不等于 0，1 的代数数，b 是无理数又是代数数，则 a^b 是超越数．）

例 1.1.1　试证明下列命题：

（1）若 n 是自然数，则 $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$．

（2）若自然数 n 不是完全平方数，则 $\sqrt{n}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$．

（3）设 a,b,c 是正有理数，若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$，则 $\sqrt{a}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{b}\in\mathbf{Q}$．

（4）（i）$\sqrt[n]{2}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$（$n\geqslant2$）．（ii）$\sqrt[n]{n}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$（$n\geqslant2$）．

（5）存在正无理数 a,b，使得 a^b 是正整数．

证明　（1）反证法．假定 $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=p/q$（$p$ 与 q 是互素正整数），则知

$$n^2-1=\left(\frac{p^2}{q^2}-2n\right)^2\Big/4,\qquad n=(p^4+4q^4)/4p^2q^2.$$

由此可知 q^2 是 p^4+4q^4 的因子，也即 q^2 是 p^4 的因子，这与假定矛盾．

（2）反证法．假定 $\sqrt{n}=p/q$（p,q 是互素正整数），则由 $nq^2=p^2$ 可知，q^2 是 p^2 的因子．从而得 $q^2=1$，即 $p^2=n$，这与题设矛盾．

（3）记 $d=\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，注意到 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$，即可得知 $\sqrt{a}=\dfrac{c+d}{2}$，$\sqrt{b}=\dfrac{c-d}{2}$．证毕．

(4) (i) 反证法.假定$\sqrt[n]{2}\in\mathbf{Q}$,记为$\sqrt[n]{2}=(1+p/q)$(p,q是互素正整数),则$2q^n=p^n+\binom{n}{1}p^{n-1}q+\cdots+q^n$.由此知 q 可除尽 p^n,但这与 p,q 互素矛盾.证毕.

(ii) 反证法.假定存在 $r\in\mathbf{Q}$,使得 $r=\sqrt[n]{n}$,即 $r^n=n$.易知 $r\in\mathbf{N}$ 且 $r\geqslant 2$.由此得 $r^n>n$,矛盾.证毕.

(5) 取 $a=\sqrt{2}$,$b=\log_{\sqrt{2}}3$($b\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$,否则有 $b=p/q=2\log_2 3$,则 $2^p=3^{2q}$.这是不可能的)可知 $a^b=3$.

例 1.1.2　试证明下列命题:

(1) 若有理数 p/q(既约分式)是整系数多项式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\qquad(a_n\neq 0)$$

的根,则 p 是 a_0 的因子,q 是 a_n 的因子.

(2) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$与$\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$以及$\sqrt{2}+\sqrt{3}$都是无理数.

(3) 若 $\cos a+\sin a\in\mathbf{Q}$,则 $\cos^n a+\sin^n a\in\mathbf{Q}(n\in\mathbf{N})$.

证明　(1) 用 p/q 代入方程并化简为

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

由此知 p 是 a_0q^n 的因子,但 p 不是 q^n 的因子,故 p 是 a_0 的因子.类似地可证 q 是 a_n 的因子.

(2) 易知$\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$,$\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$分别满足方程

$$x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0,$$
$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0.$$

从而由(1)立即得证.此外,如果 $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$是有理数,那么对$\sqrt{3}=r-\sqrt{2}$两端平方,可得

$$3=r^2-2\sqrt{2}r+2,\quad \sqrt{2}=(r^2-1)/2r.$$

这与$\sqrt{2}\overline{\in}\mathbf{Q}$矛盾.

(3) 由题设知

$$1+2\cos a\sin a=(\cos a+\sin a)^2\in\mathbf{Q}.$$

从而根据公式

$$\cos^{n+1}a+\sin^{n+1}a=(\cos a+\sin a)(\cos^n a+\sin^n a)$$
$$-\cos a\cdot\sin a(\cos^{n-1}a+\sin^{n-1}a),$$

再用归纳法即可得证.

定义 1.1.1　一个实数集 E 的全部元素若能按自然数次序排列起来,即 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,则称 E 为可列集.

定理 1.1.1　若 E_1,E_2 都是可列集,则其并集 $E_1\cup E_2$ 是可列集.

证明　不妨设 $E_1\cap E_2=\varnothing$,$E_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,$E_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$,则对 $E_1\cup E_2$

中全部元素可排列为 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$.

例 1.1.3　试证明下列命题：

(1) 自然数集 $\mathbf{N}$ 是可列集，偶正整数全体是可列集.

(2) 正有理数全体 $\mathbf{Q}_+$ 是可列集.

(3) $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证明　(2) 作 $\mathbf{Q}$ 之方阵如图 1.1，并按所示箭头为序把全体正有理数 $\mathbf{Q}_+$ 排成

$$\{r_n\}: 1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \cdots.$$

其中舍去重复者，且仅保留可约化的最简式.

(3) 因为正有理数全体是可列集，而负有理数全体只是前者在每个数前多一个“－”号，所以只要按前者的排序仍可排列起来，根据定理 1.1.1 即知 $\mathbf{Q}$ 是可列集(注意，数“0”可排在最前面).

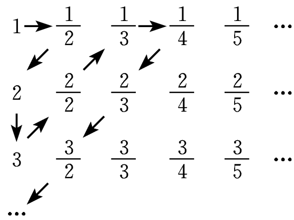

图 1.1

定理 1.1.2　开区间 $(0,1)$ 中的全体实数是不可排列的.

证明　用反证法. 将 $(0,1)$ 中实数都用十进位小数表示，并舍弃其小数点后连续出现无限个“0”的表示法. 现在假定 $(0,1)$ 中实数是可排列的，不妨将全体排列为 $\{a_n\}$：

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots$$
$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

下面将指出这是不可能的，即可找出 $(0,1)$ 中一个实数 b，它不在排列中. 我们取 $b=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 如下：

b_1　若 $a_{11}=1$，则取 $b_1=2$；若 $a_{11}\neq 1$，则取 $b_1=1$.

b_2　若 $a_{22}=1$，则取 $b_2=2$；若 $a_{22}\neq 1$，则取 $b_2=1$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

b_n　若 $a_{nn}=1$，则取 $b_n=2$；若 $a_{nn}\neq 1$，则取 $b_n=1$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

显然 $b\neq a_i\ (i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，这说明小数 b 没有在排列之中. 这一矛盾指出 $(0,1)$ 中实数全体是不可排列的.

我们称不可排列的数集为不可列集. 因此，$(0,1)$ 是不可列集，随之 $(0,1)$ 中无理数全体是不可列集. 这说明无理数的“数量”要比有理数“多得多”. 只有有限个元素的集合称为有限集，非有限集称为无限集. 可列集是无限集，有限集与可列集统称为至多可列集或可数集.

例 1.1.4　直线(实数全体)上互不相交的开区间形成的集是至多可列集.

证明　在每个开区间中取定一个有理数，显然这些有理数互不相同，因此开区间的“数量”与所选的有理数“数量”相同，即得所证.

1.1.2 稠密性

定义 1.1.2 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的一个实数集.若任意两个实数之间必有 E 中的一个数,则称 E 在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

例 1.1.5(有理数的稠密性) 设 a,b 是实数,$a<b$,则存在有理数 r:$a<r<b$.

证明 因为 $b-a>0$,所以存在正整数 n,使得 $0<\dfrac{1}{n}<b-a$.易知 $na<na+1<nb$,且存在整数 m:$m\leqslant na+1<m+1$.从而有 $na<m$.

综合上述结果,可得 $na<m\leqslant na+1<nb$.由此立即导出 $na<m<nb$,即 $a<\dfrac{m}{n}<b$,其中$\dfrac{m}{n}$是有理数.

例 1.1.6(无理数的稠密性) 设 a,b 是实数,$a<b$,则有无理数 c:$a<c<b$.

证明 根据$\sqrt{2}a<\sqrt{2}b$,可知存在有理数 r,使得$\sqrt{2}a<r<\sqrt{2}b$,易知 $a<\dfrac{r}{\sqrt{2}}<b$.若 $r\neq 0$,则$\dfrac{r}{\sqrt{2}}$是无理数.若 $r=0$,则 $a<0<b$ 或$\sqrt{2}a<0<\sqrt{2}b$.易知存在有理数 s:$0<s<\sqrt{2}b$.由此知$\sqrt{2}a<s<\sqrt{2}b$,即 $a<\dfrac{s}{\sqrt{2}}<b$.$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$是 a 与 b 之间的无理数.

***例 1.1.7** 试证明下列命题:

(1)对任一实数 x,任一正整数 n,存在 $r_n\in\mathbf{Q}$,使得 $|x-r_n|\leqslant 1/n(n\in\mathbf{N})$.

(2)设 $a>0$,$b>0$,则$\sqrt{2}$位于$(a+2b)/(a+b)$与 a/b 之间.

(3)若 m,n 取遍一切正整数,则数列$\{m^2/n^2\}$在$(0,\infty)$上稠密.

(4)若$\{a_n\}$是递增无上界列,且$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\to 1(n\to\infty)$,则数集$\{a_m/a_n: m\geqslant n\geqslant 1\}$在$(1,+\infty)$中稠密.

证明 (1)作 $r_n=[nx]/n$ 即可.

(2)若 $a/b\geqslant\sqrt{2}$,则我们有

$$\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}=1+\frac{1}{a/b+1}\leqslant 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

由此即可得证.

(3)对任一实数 $x>0$,以及 $\varepsilon>0$,取 n,m 使得

$$\frac{2\sqrt{x}}{n}+\frac{1}{n^2}<\varepsilon,\qquad \frac{m^2}{n^2}\leqslant x<\frac{(m+1)^2}{n^2}.$$

从而可知 $0\leqslant x-\dfrac{m^2}{n^2}<\dfrac{2m+1}{n^2}\leqslant\dfrac{2\sqrt{x}}{n}+\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$.即得所证.

(4)反证法.假定存在 $x_0>1$ 以及 $\varepsilon_0>0$,使得 $\left|\dfrac{a_m}{a_n}-x_0\right|\geqslant\varepsilon_0$,$1\leqslant n<m$.因为 $a_n/a_{n+1}\to 1$ $(n\to\infty)$,所以对充分大的 k,存在 $n_k>k$,使得

$$\frac{a_m}{a_k} < x_0 \quad (m < n_k), \qquad \frac{a_m}{a_k} > x_0 \quad (m > n_k).$$

特别,对每个 k,我们有

$$\frac{a_{n_k+1}}{a_k} - \frac{a_{n_k}}{a_k} \geqslant 2\varepsilon_0, \qquad \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} - 1 \geqslant 2\varepsilon_0 \frac{a_k}{a_{n_k}} > \frac{2\varepsilon_0}{x_0} > 0.$$

但后一式左端在 $k \to +\infty$ 时为 0,这与 $\varepsilon_0 > 0$ 矛盾.

例 1.1.8 试证明下列命题:

(1) 对任给的实数 x 以及正整数 $N: N>1$,必存在整数 $p, q: 0<q<N$,使得

$$|qx - p| < 1/N.$$

(2) 若 x 为无理数,则存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q}(q>0)$,使得 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

(3) 若 α 是无理数,则点集 $E = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbf{Z}\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

证明 (1) 考察 $N+1$ 个实数 $mx - [mx] (m = 1, 2, \cdots, N, N+1)$.由于有 $0 \leqslant mx - [mx] < 1$,故在 $N+1$ 个数 $\{mx - [mx]\}$ 中必有两个数,其差的绝对值小于 $\frac{1}{N}$,不妨设为

$$|m_2 x - [m_2 x] - (m_1 x - [m_1 x])| < \frac{1}{N}, \quad 0 < m_1 < m_2 \leqslant N.$$

令 $q = m_2 - m_1$, $p = [m_2 x] - [m_1 x]$,则 $0 < q < N$,且 $|qx - p| < \frac{1}{N}$.

(2) 反证法.假定只有有限个有理数满足上述不等式,即

$$\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

令 $\delta = \min\left\{\left|x - \frac{p_i}{q_i}\right| : i = 1, 2, \cdots, m\right\}$,取 $N: N > \frac{1}{\delta}$,且作整数 $p, q (0 < q < N)$,使得

$$|qx - p| < \frac{1}{N}, \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} < \frac{1}{q^2}.$$

但因 q 是正整数,故又有 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} < \frac{\delta}{q} < \delta$.根据 δ 之定义,$\frac{p}{q} \neq \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$,这与原假设矛盾,证毕.

(3) 对实数 $p, q: q - p = \varepsilon > 0$,由于存在 $p_n, q_n \in \mathbf{Q} (q_n \to +\infty, n \to \infty)$,使得

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}, \qquad |q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_n} < \varepsilon.$$

因此可令 $a = |q_n \alpha - p_n|$,而至少有一个数 $ma (m \in \mathbf{Z})$,使得

$$mq_n\alpha - mp_n (\text{或} -mq_n\alpha + mp_n) \in (p, q).$$

注 1 对 $x \in (-\infty, \infty)$,若存在既约分式 p_k/q_k(有理数,$p_k \in \mathbf{Z}$, $q_k \in \mathbf{N}$ 且 $q_k \to +\infty$, $k \to$

∞),使得 $x-p_k/q_k=o(1/q_k)(k\to\infty)$,则 $x\overline{\in}\mathbf{Q}$.为此,采用反证法:假定 $x=p/q(p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N})$,则知 $pq_k-qp_k\to 0(k\to\infty)$.因为 $pq_k-qp_k\in\mathbf{Z}$,所以 $pq_k-qp_k=0$.即对充分大的 k,有 $p/q=p_k/q_k$,矛盾.

注 2　若 α 是无理数,且是 n 次整系数代数方程的根,则存在 $C_\alpha>0$,使得 $|\alpha-p/q|<C_\alpha/q^n$ $(p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N})$.

注 3　(Kronecker-Чебыщев 定理)对任意的无理数 α 以及数 β,存在无限个整数 $p,q(p>0)$,使得 $|p\alpha-q+\beta|<3/p$.由此结果可以证明:对任意实数 β,均存在整数列 $\{n_k\}$,使得 $\sin n_k\to\sin\beta(k\to\infty)$.实际上,取 $\alpha=2\pi$,以及 $p_k,q_k(p_k\to+\infty)$,使得 $2p_k\pi-q_k+\beta=o(1)(k\to\infty)$,$q_k=2p_k\pi+\beta+o(1)(k\to\infty)$.

1.1.3　常用公式

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.　　2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

3. (Newton 二项式)$\displaystyle(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k^n a^{n-k}b^k,\mathrm{C}_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

4. $\displaystyle\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ $(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

证明　后一不等式称为几何-算术不等式,可用数学归纳法证之;而前一不等式可直接由下述不等式推出:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}$$

5. (Cauchy 不等式)$\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$.

证明　引进变量 t,展开不等式

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(a_it+b_i)^2=t^2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2t\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$

由此立即可得结论为真.

6. 三角求和公式

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)=\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\Big/\sin\frac{\alpha}{2}$.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\frac{(\sin nx)^2}{\sin x}$.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin^2kx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\cdot\sin nx}{2\sin x}$.

1.2 函　数

1.2.1 函数的构成和表示手段简介

（一）就一元函数而言，$y=f(x)$表示从一个实数集 E 到实数集 $R(f)$（值域）的一种对应关系，而 E 主要是指区间 I.从已知函数出发，还可以构成多种函数，其基本方法有：四则运算（如 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\times g(x)$等）；复合运算（如 $f[g(x)]$）；在对应是一一对应时，又可出现反函数；在许多课题中，函数关系 f 不是一下子就能用明显的形式表示出来，而是通过它所具有的性质，或者与其他事物的联系中暗示出来（如通过函数方程）.在未用显式表示时，我们称其为隐函数.许多隐函数是无法用显式表示的，此时可通过其他手段来研究其性质，有时也采用“无穷形式”的表示手法（如无穷级数、积分等）.

例 1.2.1 设在$[0,1)$上定义了函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\text{（既约分式）},\end{cases}$$

则 g 对 h 的复合函数为定义在$[0,1]$上的 $f(x)$：

$$f(x)=g[h(x)]=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

例 1.2.2 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 n 次复合函数为

$$(f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

证明 当 $n=1$ 时，即 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，满足该结论.

现在假定 $n=k$ 时，k 次复合函数满足$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则对 $n=k+1$ 时，其$(k+1)$次复合函数为

$$\begin{aligned}(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k}\circ f)(x)&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+k\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{\frac{1+x^2+kx^2}{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.\end{aligned}$$

根据数学归纳法即得所证.

例 1.2.3 解答下列问题：

(1) 设 n 是奇数，且 $p>0$，$q\in\mathbf{R}$，试证明 $y=x^n+px+q$ 存在反函数.

(2) 试问 a,b 取何值，使 $f(x)=\ln(a+be^x)$是自反函数？

证明　(1) 只需指出：若有 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，使得 $x_1^n + px_1 + q = x_2^n + px_2 + q$，则必有 $x_1 = x_2$. 实际上，由上等式可得 $x_1^n - x_2^n + p(x_1 - x_2) = 0$，而 n 是奇数且 $p > 0$，故必有 $x_1 = x_2$.

(2) 由题设知 $f(x) = f^{-1}(x)$，再注意到 $f[f^{-1}(x)] = x$ 可得 $f[f(x)] = x$，从而有 $\ln(a + be^{\ln(a+be^x)}) = x$，即 $a + ab + b^2 e^x = e^x$. 从而有(i) $a > 0, b = -1$；(ii) $a = 0$，$b = 1$.

例 1.2.4　求满足下列函数方程中的 $f(x)$：

(1) $f(x) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 1 + x\ (x \neq 0, 1)$.

(2) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的正值函数，且有 $f[f(x)] = 6x - f(x)$.

(3) $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$，$x, y \in (-\infty, \infty)$.

解　(1) 以变量 $(t-1)/t$ 代 x，可得

$$f((t-1)/t) + f(-1/(t-1)) = (2t-1)/t.$$

另以 $-1/(t-1)$ 代 x，又知

$$f(-1/(t-1)) + f(t) = (t-2)/(t-1).$$

从原式加第三式减第二式，我们有 $f(x) = (x^3 - x^2 - 1)/2x(x-1)$.

(2) 对任给实数 $x > 0$，记 $a_0 = x$，以及

$$a_{n+1} = f(a_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

则代入方程可得 $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 解其特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$，即 $(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$，可知 $a_n = (-3)^n c + 2^n d$. 根据 $f(a_n) > 0$，又得 $c = 0$，从而有 $a_n = 2^n d$. 易知 $d = a_0$，我们有 $f(a_0) = a_1 = 2a_0$，即 $f(x) = 2x$. 显然，此解是唯一的.

(3) 取 $x = y = 1$，则由题式知 $f(1) = 0$ 或 1：

(i) 若 $f(1) = 0$，则令 $y = 1$，可知 $f(x) \equiv 0$.

(ii) 若 $f(1) = 1$，则有 $f(x) + x = (x+1)f(x)$，$x \in (-\infty, \infty)$. 从而可得

$$f(x) = 1\ (x \neq 0), \qquad f(0) = a\ (-\infty < a < \infty).$$

例 1.2.5　试证明下列命题：

(1) 设定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) \leqslant x, \qquad f(x + y) \leqslant f(x) + f(y),$$

则 $f(x) \equiv x\ (-\infty < x < \infty)$.

(2) 若 $f(x)$ 是从 $(-\infty, \infty)$ 到 $(-\infty, \infty)$ 上的一一对应函数，则

$$f(x^2) - f^2(x) < 1/4 \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

证明　(1) (i) 易知 $f(0) \leqslant 0$. 又当 $x = y = 0$ 时有 $f(0) \leqslant 2f(0)$，即得 $f(0) \geqslant 0$. 故 $f(0) = 0$.

(ii) 由 $f(x) \geqslant f(x + (-x)) - f(-x) = -f(-x) \geqslant x$，结合 $f(x) \leqslant x$，我们有 $f(x) = x\ (x \in \mathbf{R})$.

(2) 反证法.假定对一切 $x\in(-\infty,\infty)$ 有

$$f(x^2)-f^2(x)\geqslant 1/4,$$

则取 $x=0$ 可得 $f(0)-f^2(0)\geqslant 1/4$,即 $[f(0)-1/2]^2\leqslant 0$.由此知 $f(0)=1/2$,取 $x=1$,又易得 $f(1)=1/2$.这与 f 是一一对应矛盾.证毕.

例 1.2.6　试问 a,b 取何值,使得函数 $y=\dfrac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x+1}$ 是线性函数?

解　因为我们有 $y=x+\dfrac{(a-1)x^2+(b-1)x+2b}{x^2+x+1}$,且由于上式右端分子为

$$(a-1)(x^2+x+1)+(b-1-a+1)x+2b-a+1,$$

故知 $a=-1,b=-1$ 时 y 为线性函数.

例 1.2.7　试求 a,b 之值,使方程 $\log_a x=x^b$ 有正解 x.

解　将原式写为 $a^{x^b}=x$ 或 $\ln x/x^b=\ln a$,可知原方程有正解 x 当且仅当 $\ln a$ 是在函数 $f(x)=\ln x/x^b$ 的值域中,易知 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1/be)$,从而原方程有正解 x 当且仅当 $\ln a\leqslant 1/be$,即 $1<a<\mathrm{e}^{1/be}$.

(二) 就一元函数而言,$y=f(x)$ 是笛卡儿直角坐标系中的表示方式,它的优越性是显然的,然而在许多情形中,用参数式 $x=x(t),y=y(t)$ 的表示法却有着不可替代的作用(特别是在方程 $F(x,y)=0$ 中 y 有多值以及描述平面运动时).

例 1.2.8　设从高 y_0 处以速度 v_0 在水平方向(x 轴正向)投掷一物,若不计空气阻力,记时间为 t,则其运动轨迹为

$$\begin{cases} y=y_0-\dfrac{gt^2}{2}, \\ x=v_0t, \end{cases}\quad \text{或}\quad y=y_0-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

例 1.2.9　椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

也可用参数方程表示.实际上,令 $x=a\cos t$,则代入原方程后,立即得到 $y=b\sin t$.故其参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

其中,参数 t 的几何意义如下:作出两个圆心位于原点 O 的同心圆,半径各为 a 与 b(图 1.2).设 $M(x,y)$ 是椭圆上一点,B 是大圆上的点,其横坐标也为 x,记 OB 与 x 轴的夹角为 t,由图示可知,

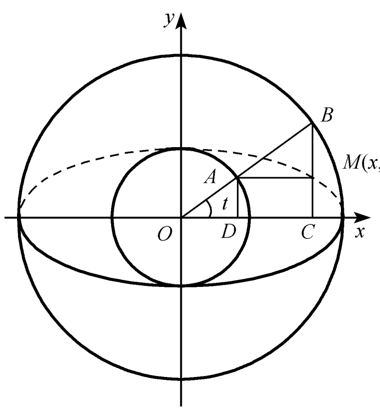

图 1.2

$$\begin{cases} x = OC = a\cos t, \\ y = MC = AD = b\sin t. \end{cases}$$

例 1.2.10(Cycloid 旋轮线或摆线) 设有半径为 a 的圆,置于一直线上并沿直线作无滑动之滚动,则其圆周上一点之运动轨迹曲线称为旋轮线.

现在,取直线为 x 轴,并在圆周上取定一点 P(图 1.3).假定运动开始时,P 点位于原点 O,并取过原点之 x 轴垂线为 y 轴.

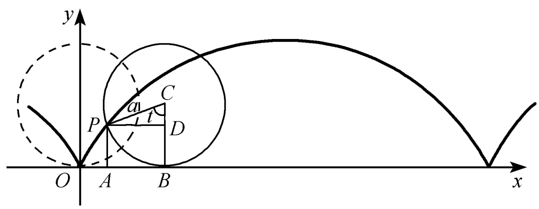

图 1.3

假定滚动开始且设该点到达自转角度为 t 的位置,易知点 P 的 x,y 坐标各为

$$\begin{cases} x = OA = OB - AB = at - a\sin t, \\ y = PA = DB = CB - CD = a - a\cos t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

注 1 如果我们想从旋轮线的参数表达式中直接得到 x 与 y 之间的函数关系,那么可以得到 $x=\varphi(y)$如下:在区间$[0,\pi]$上,函数 $y=a(1-\cos t)$有反函数 $t=\arccos\dfrac{a-y}{a}$,代入 $x=a(t-\sin t)$,可得 $x=a\arccos\dfrac{a-y}{a}-a\sin\left(\arccos\dfrac{a-y}{a}\right)$,或在 $0\leqslant x\leqslant\pi a$ 时有

$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}.$$

而在 $\pi a\leqslant x\leqslant 2\pi a$ 时,由图形易知 $x=2\pi a-\left(a\arccos\dfrac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}\right)$.

注意,函数 $x=a(t-\sin t)$存在反函数,但它不能用初等函数来表示.也就是说,函数 $y=f(x)$是不能用初等函数表出的.由此可知,在许多情况下,在函数的研究中,用参数方程表示法比直接用直角坐标表示要恰当和简便得多.

注 2 为了补充数学理论的完整性和概念的确定性,以及表达上的清晰性和运算的简便性,常需要人为地定义一些函数,如下所示:

符号函数(signum function):

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dirichlet 函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

Riemann 函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\in\mathbf{N},\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互素}).\end{cases}$$

双曲函数：$x\in(-\infty,\infty)$(图 1.4).

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},$$

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad \coth x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}.$$

整数部分函数：

$$y=[x]=\max\{z:z\in\mathbf{Z},z\leqslant x\}.$$

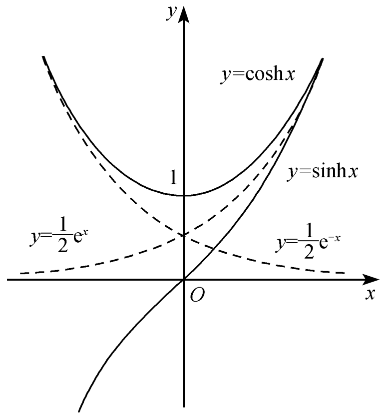

图 1.4

1.2.2 函数分类初步

有区别才有对策.给对象分类或划定一个范围,是在研究课题中带有一般性的启动步骤.就函数而言,从整体特征看,可分为奇偶、单调、周期与凹凸等,它反映出其图形的某种对称性(今后还将进一步挖掘局部——小范围的特征来界定函数的性质,那将是更深层次上的分类描述).此外,从对函数的认识进程来看,初等函数(见本节(二))是人们在初等数学领域中操作时所涉及的范围.在微积分创立以后,人们需要而且必须突破这一认识上的框框,才能进一步描述客观事物变化、运动的规律.

(一) 函数图形的整体特征分类简介

奇偶型

1. 定义在$(-a,a)$上的任一函数均可分解为偶函数与奇函数的和：

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

2. 奇函数的反函数为奇函数.不存在任何函数,其反函数为偶函数.

例 1.2.11 试证明下列命题：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是$(-\infty,\infty)$上的奇函数.

(2) 设 $a^2\neq b^2$,$f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上,且有

$$f(0)=0,\qquad af(x)+bf(1/x)=c/x\quad(x\neq 0),$$

则 $f(x)$是奇函数.

证明 (1) 因为我们有

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)\\&=\ln(1+x^2-x^2)=\ln 1=0,\end{aligned}$$

所以得到 $f(-x)=-f(x)$.

(2) 在题式中以 $x\neq 0$ 换 $1/x$，可知 $af(1/x)+bf(x)=cx$．再结合题式，则得

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

由此即知 $f(x)$是奇函数．

增减(单调)型

* **例 1.2.12**　试证明下列命题：

(1) $f(x)=x^3+px+q(p>0)$是$(-\infty,\infty)$上的严格递增函数．

(2) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上．若对任意的实数 λ，$f(x)+\lambda x$ 均为单调函数，则存在实数 a,b，使得 $f(x)=ax+b$．

证明　(1) 略．(2) 令 $F_\alpha(x)=f(x)+\alpha x$．依题设不妨假定对 α_0，$F_{\alpha_0}(x)$是递增函数，即当 $x<y$ 时有 $0\leqslant F_{\alpha_0}(y)-F_{\alpha_0}(x)=[f(y)-f(x)]+\alpha_0(y-x)$，则对 $\alpha_1>\alpha_0$，可知$(y>x)$

$$F_{\alpha_1}(y)-F_{\alpha_1}(x)=[f(y)-f(x)]+\alpha_1(y-x)>[f(y)-f(x)]+\alpha_0(y-x)\geqslant 0.$$

这说明 $F_{\alpha_1}(x)$是严格递增函数．同理可推：若 $F_{\beta_0}(x)$是严格递减函数，则对 $\beta_1<\beta_0$，$F_{\beta_1}(x)$是严格递减函数．现在令

$$\bar{\alpha}=\inf\{\alpha: F_\alpha(x)\text{严格递增}\},\quad \bar{\beta}=\sup\{\beta: F_\beta(x)\text{严格递减}\},$$

易知 $\bar{\alpha}=\bar{\beta}$，且 $F_{\bar{\alpha}}(x)=F_{\bar{\beta}}(x)=b$(常数)．这说明 $f(x)=ax+b(a=\bar{a})$．

* **例 1.2.13**　设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上非常数的递增函数，则存在实数 a 与 $c>0$，使得

$$f(a+x)-f(a-x)\geqslant cx\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

证明　依题设知存在 r_0,s_0：$r_0<s_0$，使得 $f(r_0)<f(s_0)$(不妨假定 $\delta=s_0-r_0>1$)．令 $l=f(s_0)-f(r_0)$，且取区间$[r_1,s_1]$为$[r_0,(r_0+s_0)/2]$或$[(r_0+s_0)/2,s_0]$之一而使得 $f(s_1)-f(r_1)$是最大值者．由此知 $f(s_1)-f(r_1)\geqslant l/2$．

类似地，又取$[r_2,s_2]$为区间$[r_1,s_1]$之左半或右半，使得 $f(s_2)-f(r_2)$是大者．如此继续做下去，可得区间列$\{[r_n,s_n]\}$，其中

$$s_n-r_n=\delta/2^n,\qquad f(s_n)-f(r_n)\geqslant l/2^n\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

现在记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$，$c=l/2\delta$，且对 $x\in(0,1]$，选取使得 $2^{-n}\delta\leqslant x$ 之第一个 n 为 n_0，我们有 $2^{-n_0}\delta\geqslant x/2$，且可知 $a\in[r_{n_0},s_{n_0}]$，区间长$\leqslant x$．因此有$[r_{n_0},s_{n_0}]\subset[a-x,a+x]$．从而根据 $f(x)$的递增性，即得

$$f(a+x)-f(a-x)\geqslant f(s_{n_0})-f(r_{n_0})\geqslant 2^{-n_0}l=2c2^{-n_0}\delta\geqslant Cx.$$

周期型

例 1.2.14　下列定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(x)$均为非周期函数：

(1) $f(x)=\sin x^2$．　　(2) $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$．

证明　(1) 假定 $T>0$ 是它的周期，即 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$，$x\in(-\infty,\infty)$．取 $x=0$，可知 $\sin T^2=0$，即 $T^2=n\pi$．由此知 $T=\sqrt{n\pi}$(n 是某个正整数)．

当 $x\in(0,\sqrt{\pi})$时，$\sin x^2\neq 0$．但因 $\sqrt{n\pi}$是周期，故有 $\sin(x+\sqrt{n\pi})^2\neq 0$．然而当 $x=\sqrt{\pi}$时，却有 $\sin(\sqrt{\pi}+\sqrt{n\pi})^2=\sin(\sqrt{\pi})^2=0$．这说明$\sqrt{\pi}+\sqrt{n\pi}$是从右边离 $\sqrt{n\pi}$最近的使 $\sin x^2=0$ 的数，注意到 $\sin(\sqrt{(n+1)\pi})^2=0$，就得到

$$\sqrt{\pi}+\sqrt{n\pi}\leqslant\sqrt{\pi(n+1)}\quad 或\quad 1\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

但这是不可能的，因为我们有 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1$.也就是说 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

(2) 反证法.假定 $f(x)$以 T 为周期，则 $0=f(x+T)-f(x)$，即

$$0=2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)+2\sin\frac{T}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{2}x+\frac{T}{\sqrt{2}}\right).$$

由此知 $\sin(T/2)=0=\sin(T/\sqrt{2})$.从而 $2n\pi=\sqrt{2}m\pi$，$m/n=\sqrt{2}$.但 m,n是正整数.

例 1.2.15　设 $T_0\neq 0$，试证明下列定义在$(-\infty,\infty)$上的 $f(x)$是周期函数：

(1) $f(x)$满足 $f(x+T_0)=-f(x)$.　　(2) $f(x)$满足 $f(x+T_0)=1/f(x)$.

证明　(1) 因为我们有

$$f(x+2T_0)=f[(x+T_0)+T_0]=-f(x+T_0)=-[-f(x)]=f(x),$$

所以 $f(x)$是以 $2T_0$ 为周期的周期函数.

(2) 因为 $f(x+2T_0)=1/f(x+T_0)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 $2T_0$ 为周期的周期函数.

***例 1.2.16**　试证明下列命题：

(1) 若对定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(x)$，存在 $T_0>0$，使得 $f(x+T_0)=[1+f(x)]/[1-f(x)]$$(-\infty<x<\infty)$，则 $f(x)$有周期 $4T_0$.

(2) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(x)$满足：

(i) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)(-\infty<x,y<\infty)$；

(ii) 存在 T_0，使得 $f(T_0)=0$，

则 $f(x)$有周期 $4T_0$.(将(ii)改为 $f(T_0)=-1$，则 $f(x)$的周期为 $2T_0$)

(3) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(x)$满足：

(i) $f(x_1-x_2)=[f(x_1)f(x_2)+1]/[f(x_2)-f(x_1)](-\infty<x_1,x_2<\infty)$；

(ii) 存在 T_0，使得 $f(T_0)=1$，$f(x)>0(0<x<2T_0)$，

则 $f(x)$是有周期 $4T_0$ 的奇函数.

证明　(1) 因为我们有

$$\begin{aligned}f(x+2T_0)&=f[(x+T_0)+T_0]=\frac{1+f(x+T_0)}{1-f(x+T_0)}\\&=\frac{1+[1+f(x)]/[1-f(x)]}{1-[1+f(x)]/[1-f(x)]}=\frac{2}{-2f(x)}=-\frac{1}{f(x)},\end{aligned}$$

所以导出

$$f(x+4T_0)=f[(x+2T_0)+2T_0]=-\frac{1}{f(x+2T_0)}=-\frac{1}{-1/f(x)}=f(x).$$

(2) 在(i)中以 $x+T_0$ 代替 x，T_0 代替 y，可得

$$f(x+2T_0)+f(x)=2f(x+T_0)f(T_0)=0.$$

由此又知 $f(x+2T_0)=-f(x)$.引用例 1.2.15 的结论，即可得证.

(3) 首先,令 $F(x)=1/f(x)$,可得

$$\frac{1}{F(x_1-x_2)}=\frac{1+F(x_1)F(x_2)}{F(x_1)-F(x_2)},\qquad F(x_1-x_2)=\frac{F(x_1)-F(x_2)}{1+F(x_1)F(x_2)}.$$

若令 $x_1=x_2$,则 $F(0)=0$;令 $x_1=0$,$x_2=x$,又知 $F(-x)=F(x)$.

其次,因为我们有

$$\begin{aligned}f(2T_0)&=f[T-(-T_0)]=\frac{f(T_0)f(-T_0)+1}{f(-T_0)-f(T_0)}\\&=\frac{f(T_0)f(-T_0)+1}{-2f(T_0)}=\frac{-f^2(T_0)+1}{2f(T_0)}=\frac{-1+1}{2}=0,\end{aligned}$$

所以导得

$$f(2T_0+x)=\frac{f(2T_0)f(-x)+1}{f(-x)-f(2T_0)}=-\frac{1}{f(x)}.$$

从而有 $f(x+4T_0)=f[2T_0+(2T_0+x)]=-1/f(2T_0+x)=f(x)$.

***例 1.2.17**　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的有界函数,若有

$$f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)=f(x)+f\left(\frac{13}{42}\right)\qquad(-\infty<x<\infty),$$

则 $f(x)$是周期函数.

(2) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上.若 $f(x)\neq3$ $(x\in(-\infty,\infty))$且存在 $T_0>0$,使得 $f(x+T_0)=[f(x)-5]/[f(x)-3]$ $(x\in(-\infty,\infty))$,则 $f(x)$是周期函数.

(3) 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的周期为 T_0 的函数.若数列$\{f(n)\}$满足 $f(k)\neq f(j)$ $(k\neq j)$,则 $T_0\overline{\in}\mathbf{Q}$.

证明　(1) 作 $F(x)=f(x+1/6)-f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$,则 $F(x+1/7)=F(x)$,且 $F(x+1)=F(x)$.再令

$$H(x)=f(x+1)-f(x)=F(x)+F(x+1/6)+\cdots+F(x+5/6),$$

则又有 $H(x+1)=H(x)$.由此知 $H(x+k)=H(x)$ $(k\in\mathbf{N})$.因为

$$f(x+k)-f(x)=H(x)+H(x+1)+\cdots+H(x+k-1),$$

所以 $f(x+k)-f(x)=kH(x)$ $(k\in\mathbf{N})$.由 $f(x)$的有界性可知,$kH(x)$也有界(对 $k\in\mathbf{N}$).然而这只有在 $H(x)$恒为 0 时才可能.因此我们有 $f(x+1)=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$,即 $f(x)$的周期为 1.

(2) 首先注意到,若有 $f(x_0)=2$,则 $f(x_0+T_0)=3$.这说明 2 也不是 $f(x)$的可取值.类似地还可推知 $f(x)\neq1$ $(-\infty<x<\infty)$.从而我们有

$$\begin{cases}f(x+2T_0)=\dfrac{f(x+T_0)-5}{f(x+T_0)-3}=\dfrac{2f(x)-5}{f(x)-2},\\[2ex]f(x+3T_0)=\dfrac{2f(x+T_0)-5}{f(x+T_0)-2}=\dfrac{3f(x)-5}{f(x)-1},\\[2ex]f(x+4T_0)=\dfrac{3f(x+T_0)-5}{f(x+T_0)-1}=f(x).\end{cases}$$

因此 $f(x)$有周期 $4T_0$.

(3) 反证法.假定 $T_0=p/q$(p、q 是互素正整数),则 $p=qT_0$ 也是 $f(x)$的周期.令 $n=kp+r$,其中 k,r 均为整数,$0<r<p-1$,则知 $f(n)=f(kp+r)=f(r)$.从而得

$$f(n)\in\{f(1),f(2),\cdots,f(p-1)\}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

这导致矛盾.

***例 1.2.18** 试证明下列命题:

(1) 若定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(x)$满足 $f(x+1)=f(x)+1(-\infty<x<\infty)$,且记 n 次复合的函数 $f[f[\cdots[f(x)]\cdots]]$为 $f_n(x)$,则 $F_n(x)=f_n(x)-x$ 是周期函数.

(2) 若定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(x)$($T_0\neq0$)满足

$$f(x+T_0)=1/2+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\qquad(-\infty<x<\infty),$$

则 $f(x)$是周期函数.

证明 (1) 运用归纳法.对 $n=1$,因为有

$$f_1(x)=f(x)+x,\qquad f_1(x+1)=f(x+1)-(x+1)=f(x)-x=f_1(x),$$

所以 $f_1(x)$以 $T=1$ 为周期.

现在假定 $n=k$,$f_k(x)$是周期为 1 的函数,那么对 $n=k+1$,由等式

$$f_{k+1}(x)=\underbrace{f[f[f\cdots[f(x)]\cdots]]}_{k}-x=f[f_k(x)+x]-x$$

可知

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x+1)&=f[f_k(x+1)+x+1]-x-1=f[f_k(x)+x+1]-x-1\\&=f[f_k(x)+x]+1-x-1=\underbrace{f[f[\cdots[f(x)]\cdots]]}_{k}-x=f_{k+1}(x).\end{aligned}$$

从而说明 $f_n(x)(n\in\mathbf{N})$是周期为 1 的函数.

(2) 依题设知 $f(x)=f[(x-T_0)+T_0]=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x-T_0)-f^2(x-T_0)}\geqslant\dfrac{1}{2}$.因此,我们有

$$\begin{aligned}f(x+2T_0)&=f[(x+T_0)+T_0]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+T_0)-f^2(x+T_0)}\\&=\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left[\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}+f(x)-f^2(x)\right]\right\}^{1/2}\\&=\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)\right\}^{1/2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x).\end{aligned}$$

这说明 $f(x)$以 $2T_0$ 为周期.

例 1.2.19 设定义在$(-\infty,\infty)$上的具有正周期 T 的函数 $f(x)$满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|\qquad(x,y\in(-\infty,\infty)),$$

则 $T\geqslant2|f(x)-f(y)|/M(x,y\in(-\infty,\infty))$.

证明 只需考察满足 $0\leqslant x<y\leqslant T$ 的 x,y,我们有

$$\begin{aligned}T&=(y-x)+[T-(y-x)]=|y-x|+|(x+T)-y|\\&\geqslant\frac{1}{M}|f(y)-f(x)|+\frac{1}{M}|f(x+T)-f(y)|=\frac{2}{M}|f(x)-f(y)|.\end{aligned}$$

例 1.2.20　试证明下列命题：

(1) 若函数 $y=f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的图形关于直线 $x=a$, $x=b$ 对称，即

$$f(a+x)=f(a-x),\qquad f(b+x)=f(b-x),$$

则 $f(x)$是周期函数.

(2) 若函数 $y=f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的图形关于点 $P(x_0,y_0)$对称，即 $f(x_0+x)-y_0=y_0-f(x_0-x)$，以及关于直线 $x=b(b\neq x_0)$对称，则 $f(x)$是周期函数.

证明　(1) 由题设知 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$. 令 $t=2b-x$，又有 $f(t+2(a-b))=f(t)$. 这说明 $f(x)$是周期为 $2|a-b|$的周期函数.

(2) 因为我们有

$$\begin{aligned}
&f(b+x)=2y_0-f(2x_0-b-x),\\
&f(b-x)=2y_0-f(2x_0-b-x),\\
&f(x)=2y_0-f(2x_0-2b+x),\\
&f(2b-2x_0+x)=2y_0-f(x),
\end{aligned}$$

所以 $f(2x_0-2b+x)=f(2b-2x_0+x)$. 从而有 $f(x)=f(4(b-x_0)+x)$. 这说明 $f(x)$的周期为 $4(b-x_0)$.

* **例 1.2.21**　试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上. 若存在 $T\neq 0$, $k>0$，使得 $f(x+T)=kf(x)$，则存在 $a>0$ 以及周期函数 $\varphi(x)$，使得 $f(x)=a^x\varphi(x)$.

(2) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上. 若存在 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)+c$，则存在以 T 为周期的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=g(x)+cx/T$.

(3) 不存在$(-\infty,\infty)$上的函数 $y=f(x)$，它以每个无理数为其周期，而任一有理数都不是其周期.

证明　(1) 令 $a=k^{1/T}$，且作 $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$，则

$$\begin{aligned}
\varphi(x+T)&=k^{-(x+T)/T}f(x+T)\\
&=k^{-x/T}\cdot k^{-1}\cdot kf(x)=k^{-x/T}f(x)=\varphi(x).
\end{aligned}$$

即 $\varphi(x)$以 T 为周期，且 $f(x)=a^x\varphi(x)$.

(2) 取 $g(x)=f(x)-ax/T$.

(3) 反证法. 假定存在如此之函数 $f(x)$，则对有理数 r，必存在实数 x_r，使得

$$f(x_r+r)\neq f(x_r).$$

(i) 若 x_r 是有理数，则取无理数 y_r，使得 y_r+r 是无理数. 从而有

$$f(x_r+r)=f(x_r+r+y_r)=f(x_r).$$

导致矛盾.

(ii) 若 x_r 是无理数，则 $f(x_r+r)=f(r)$. 但是 $f(r)=f(r-x_r+x_r)$，故若 $r-x_r$ 是无理数，则 $f(r-x_r+x_r)=f(x_r)$，导致矛盾. 从而 $r-x_r$ 为有理数，此时易知 x_r 是有理数，又矛盾. 证毕.

凹凸型

我们经常看到，许多函数的图形向上（y 轴正向）凸起或向下凸，这是曲线形状的最重要的特征．从几何上看下凸函数，如图 1.5 所示，对于定义域中的 x_1,x_2，作两点 $P_1(x_1,f(x_1))$与 $P_2(x_2,f(x_2))$之间连线——割线，则函数 $f(x)$在 x_1 与 x_2 之间的图形位于此割线的下方，下面给出分析定义：

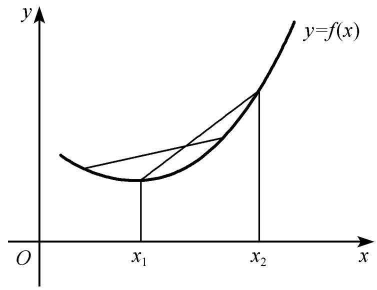

图 1.5

定义 1.2.1 设 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，若对 I 中任意的两点 x_1,x_2：$x_1<x_2$，有

$$f(x)\leqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad x\in[x_1,x_2]. \tag{①}$$

则称 $f(x)$为 I 上的（下）**凸函数**．若式①中"$\leqslant$"改为"$<$"（$x\in(x_1,x_2)$时），则称 $f(x)$为 I 上的**严格（下）凸函数**．

例如，函数 $x^\alpha(\alpha>1)$在$(0,\infty)$上是（下）凸的，$\ln x$ 在$(0,\infty)$上是上凸的．

定理 1.2.1 $f(x)$是区间 I 上的凸函数的充分必要条件是：对 $x_1,x_2\in I$ 以及 $0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2). \tag{②}$$

证明 充分性：设式②成立，易知存在唯一的 t：$0\leqslant t\leqslant 1$，使得对 x：$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，有

$$x=(1-t)x_1+tx_2,\quad 或\quad t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

从而由②知

$$\begin{aligned}f(x)&=f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\\&=f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).\end{aligned}$$

即①成立，$f(x)$在 I 上是凸函数．

必要性：对于 $x_1,x_2\in I$，仍记 x：$x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 为 $x=(1-t)x_1+tx_2$，$0\leqslant t\leqslant 1$．由凸性条件知

$$\begin{aligned}f((1-t)x_1+tx_2)&=f(x)\leqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\\&=f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]=(1-t)f(x_1)+tf(x_2).\end{aligned}$$

即②式成立．

推论（割线斜率的递增性） $f(x)$在区间 I 上是凸函数的充分必要条件是：对 I 中任意三点 $x_1<x_2<x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\left(或\begin{vmatrix}1&x_1&f(x_1)\\1&x_2&f(x_2)\\1&x_3&f(x_3)\end{vmatrix}\geqslant 0\right).$$

例 1.2.22 $f(x)$是区间 I 上的凸函数的充分必要条件是：对 $x_i\in I(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$，以及 $p_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，有

$$f(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)\leqslant p_1f(x_1)+\cdots+p_nf(x_n).$$

(称为 Jensen(詹生)不等式.)

证明　充分性由定理 1.2.1 立即可得.

必要性.设 $f(x)$是 I 上的凸函数,并采用归纳法:当 $n=2$ 时,由定理 1.2.1 即得.假定 $n=k$,不等式成立,则对于 $x_i\in I(i=1,2,\cdots,k,k+1)$以及满足 $p_1+\cdots+p_k+p_{k+1}=1$ 的 $p_i\geqslant0(i=1,\cdots,k,k+1)$,令 $\alpha=p_1+\cdots+p_k$,$\beta=1-\alpha=p_{k+1}$.

若 $\alpha=0$,即 $p_1=\cdots=p_k=0$,$\beta=p_{k+1}=1$,则

$$f(p_1x_1+\cdots+p_{k+1}x_{k+1})=f(x_{k+1}),$$
$$f(x_{k+1})=p_1f_1(x_1)+\cdots+p_{k+1}f(x_{k+1}).$$

若 $\alpha>0$,记 $m=\min\{x_1,\cdots,x_k\}$,$M=\max\{x_1,\cdots,x_k\}$,以及

$$\overline{x}=\frac{(p_1x_1+\cdots+p_kx_k)}{\alpha}.$$

易知 $m,M\in I$,且有

$$m=\frac{m\alpha}{\alpha}=\frac{m(p_1+\cdots+p_k)}{\alpha}\leqslant\frac{p_1x_1+\cdots+p_kx_k}{\alpha}\leqslant\frac{(p_1+\cdots+p_k)M}{\alpha}=M.$$

由此知,$m\leqslant\overline{x}\leqslant M$,且 $\overline{x}\in I$.因为 f 是凸的且 $\alpha+\beta=1$,所以有

$$f(\alpha\overline{x}+\beta x_{k+1})\leqslant\alpha f(\overline{x})+\beta f(x_{k+1}),$$
$$f(p_1x_1+\cdots+p_kx_k+p_{k+1}x_{k+1})\leqslant\alpha f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_kx_k}{\alpha}\right)+p_{k+1}f(x_{k+1}).$$

由于 $1=\frac{(p_1+\cdots+p_k)}{\alpha}=\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{p_k}{\alpha}\right)$,故由归纳法假定可知

$$f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_kx_k}{\alpha}\right)\leqslant\frac{p_1}{\alpha}f(x_1)+\cdots+\frac{p_k}{\alpha}f(x_k).$$

从而得 $\alpha f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_kx_k}{\alpha}\right)\leqslant p_1f(x_1)+\cdots+p_kf(x_k)$.最后,我们有

$$f(p_1x_1+\cdots+p_kx_k+p_{k+1}x_{k+1})\leqslant p_1f(x_1)+\cdots+p_kf(x_k)+p_{k+1}f(x_{k+1}).$$

注 1　在 Jensen 不等式中,令 $q_i=\frac{p_i}{(p_1+\cdots+p_n)}(i=1,2,\cdots,n)$,则得不等式

$$f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1f(x_1)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}.$$

例如,$f(x)=x^k(x>0,k>1)$,可得

$$\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)^k\leqslant\frac{p_1x_1^k+\cdots+p_nx_n^k}{p_1+\cdots+p_n},\quad p_i>0,\quad x_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k\right), \quad p_i > 0, \quad x_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

若以 $b_i^{\frac{k}{k-1}}$ 代 p_i，$a_i b_i^{-\frac{1}{k-1}}$ 代 x_i，则有 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}}$．此不等式称为 Hölder(赫尔德)不等式．

注 2 若 $f(1/x)$在区间 $I\subset(0,\infty)$上是(下)凸的，则 $xf(x)$在 I 上也凸．

注 3 若 $f(x)$在区间 I 上是(下)凸的，$g(x)$在 $f(I)$上是(下)凸且递增，则 $g[f(x)]$在 I 上也凸．但 $g(x)$不递增，结论不一定真．例如 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$，$f(x)=x^2$，而 $g[f(x)]=\mathrm{e}^{-x^2}$ 不是凸的．

***例 1.2.23** 试证明下列不等式：

(1) $\dfrac{n^2}{x_1+\cdots+x_n}\leqslant\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ $(x_k>0, k=1,2,\cdots,n)$．

(2) $\dfrac{1}{\dfrac{\alpha_1}{x_1}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{x_n}}\leqslant x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\leqslant \alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n$ $\left(\alpha_k>0, x_k>0(k=1,2,\cdots,n), \sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1\right)$．

(3) $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}+y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n}\leqslant(x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_n+y_n)^{\alpha_n}$ $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1; \alpha_k>0, x_k>0, y_k>0, k=1,2,\cdots,n\right)$．

证明 (1) 考察 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，我们有

$$1\Big/\left(\frac{x_1}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{n}\frac{1}{x_n}.$$

(2) 考察 $f(x)=-\ln x$，则

$$\ln(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n})=\alpha_1\ln x_1+\cdots+\alpha_n\ln x_n\leqslant\ln(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n).$$

(3) 将原式改写为 $\dfrac{x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\alpha}\cdots x_n^{\alpha}+y_1^{\alpha_1}\cdot y_2^{\alpha_2}\cdots y_n^{\alpha_n}}{(x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdot(x_2+y_2)^{\alpha_2}\cdots(x_n+y_n)^{\alpha_n}}\leqslant 1$，再根据(2)，我们有

$$\text{上式左端}\leqslant\alpha_1\frac{x_1}{x_1+y_1}+\cdots+\alpha_n\frac{x_n}{x_n+y_n}+\alpha_1\frac{y_1}{x_1+y_1}+\cdots+\alpha_n\frac{y_n}{x_n+y_n}=1.$$

由此即可得证．

例 1.2.24 试证明下列命题：

(1) 若 $f(x)$在$(0,\infty)$上严格上凸，$f(0)=0$，则

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2), \qquad x_1, x_2\in(0,\infty).$$

(2) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上是(下)凸的，且 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$，则 $f(x)/x$ 在$(0,\infty)$上递增．

(3) 设 $f(x)/x$ 在$(0,\infty)$上递减，则有

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2), \qquad x_1, x_2\in(0,\infty).$$

(4) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上是(下)凸的，且有

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2),\qquad x_1,x_2\in(0,\infty),$$
则 $f(x)/x$ 在$(0,\infty)$上递减.

证明 (1) 易知连结点$(0,0)$与$(x_1+x_2,f(x_1+x_2))$的直线为 $f(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)$,又由 $f(x_1)>kx_1$, $f(x_2)>kx_2$,故得所证.

(2) 设 $0<x_1<x_2<\infty$.若 $0<x<x_1$,则有 $x_1=\dfrac{x_2-x_1}{x_2-x}x+\dfrac{x_1-x}{x_2-x}x_2$.由 $f(x)$ 的凸性,可知
$$f(x_1)\leqslant\frac{x_2-x_1}{x_2-x}f(x)+\frac{x_1-x}{x_2-x}f(x_2).$$
令 $x\to0+$,即得 $f(x_1)\leqslant\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)$.证毕.

(3) 只需注意,对 $x_1,x_2\geqslant0$ 有
$$f(x_1+x_2)=x_1\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}+x_2\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$
(4) 设 $0<x_1<x_2$,且令 $p=x_1/x_2$,$q=1-p$,则
$$\begin{aligned}f(x_2)&=f(px_1+q(x_1+x_2))\leqslant pf(x_1)+qf(x_1+x_2)\\&\leqslant pf(x_1)+q[f(x_1)+f(x_2)]=f(x_1)+\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)f(x_2).\end{aligned}$$
从而知 $f(x_2)/x_2\leqslant f(x_1)/x_1$.

***例 1.2.25** 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[a,\infty)$上是凸的,则函数 $F(x)=f(b+x)-f(x)(b>0)$在$[a,\infty)$上递增.

(2) 设 $f(x)$是区间 I 上的正值函数.若对任意的 $\alpha\in(-\infty,\infty)$,$e^{\alpha x}f(x)$在 I 上是凸函数,则 $\ln f(x)$在 I 上也凸.

证明 (1) 只需指出不等式($x_1,x_2\in[a,\infty)$)
$$F(x_1)\leqslant F(x_2),\quad x_1<x_2,\quad x_2-x_1<b.$$
将三弦不等式用于 x_1,x_2,x_1+b;x_2,x_1+b,x_2+b,则
$$\begin{aligned}F(x_1)&=b\frac{f(x_1+b)-f(x_1)}{b}\leqslant b\frac{f(x_1+b)-f(x_2)}{x_1+b-x_2}\\&\leqslant b\frac{f(x_2+b)-f(x_2)}{b}=F(x_2).\end{aligned}$$
(2) 对 $x\neq y$,令 $\alpha=[\ln f(y)-\ln f(x)]/(x-y)$,则对 $t\in[0,1]$有
$$e^{\alpha[tx+(1-t)y]}f[tx+(1-t)y]\leqslant te^{\alpha x}f(x)+(1-t)e^{\alpha y}f(y).$$
从而可得
$$\begin{aligned}f(tx+(1-t)y)&\leqslant te^{\alpha(x-y)(1-t)}f(x)+(1-t)e^{-\alpha(x-y)t}f(y)\\&=te^{[\ln f(y)-\ln f(x)](1-t)}\cdot f(x)+(1-t)e^{[\ln f(x)-\ln f(y)]t}\cdot f(y)\\&=t\left[\frac{f(x)}{f(y)}\right]^{t-1}\cdot f(x)+(1-t)\left[\frac{f(x)}{f(y)}\right]^{t}f(y)\end{aligned}$$

$$= f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}.$$证毕.

* **例 1.2.26** 试证明下列命题:

(1) 设 $g(x)$是$(-\infty,\infty)$上的正值函数.若 $\ln g(x)$是(下)凸函数(称 $g(x)$是对数凸),则 $g(x)$是凸函数.

(2) 设 $f(x)$是$[0,1]$上的凸函数,则函数 $\varphi(x)=f(x)+f(1-x)$在$[0,1/2]$上是递减函数.

证明 (1) 因为对 $\alpha,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta=1$,有

$$\ln g(\alpha x+\beta y)\leqslant \alpha\ln g(x)+\beta\ln g(y) \qquad (-\infty< x,y<\infty),$$

所以 $g(\alpha x+\beta y)\leqslant g^{\alpha}(x)g^{\beta}(y)\leqslant \alpha g(x)+\beta g(y)$,证毕(后一不等式来自 $u^{\alpha}v^{\beta}\leqslant \alpha u+\beta v$,或 $(v/u)^{1-\alpha}\leqslant\alpha+\beta(v/u)(u\geqslant v)$.为此,考察不等式 $x^{1-\alpha}\leqslant\alpha+\beta x(x\geqslant1)$.令 $f(x)=\alpha+\beta x-x^{1-\alpha}$,则 $f'(x)\geqslant0$.而 $f(1)=0$,$f(x)>0(x>1)$.

(2) 对 $0\leqslant x<y\leqslant1/2$,取 α:$0\leqslant\alpha\leqslant1$,使得

$$y=\alpha x+(1-\alpha)(1-x), \qquad 1-y=\alpha(1-x)+(1-\alpha)x.$$

从而可得(根据 $f(x)$的(下)凸性)

$$\begin{aligned}\varphi(y)&=f(y)+f(1-y)\\&=f[\alpha x+(1-\alpha)(1-x)]+f[\alpha(1-x)+(1-\alpha)x]\\&\leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha)f(1-x)+\alpha f(1-x)+(1-\alpha)f(x)\\&=f(x)+f(1-x)=\varphi(x).\end{aligned}$$

* **例 1.2.27** 试证明下列命题:

(1) 设$\{f_{\alpha}(x)\}_{\alpha\in[a,b]}$是一族(下)凸函数,则 $f(x)=\sup\{f_{\alpha}(x):\alpha\in[a,b]\}$是(下)凸函数.

(2) 设 $f(x)$是(a,b)上的(下)凸函数,则对 $x\in(a,b)$,函数 $F(y)=[f(x)-f(y)]/(x-y)$ $(y\in(a,b)$且 $y\neq x)$是递增函数.

证明 (1) 对任给 $x,y\in[a,b]$,$0\leqslant t\leqslant1$,$\varepsilon>0$,存在 $\alpha\in[a,b]$,使得

$$\begin{aligned}f(tx+(1-t)y)&\leqslant f_{\alpha}(tx+(1-t)y)+\varepsilon\\&\leqslant tf_{\alpha}(x)+(1-t)f_{\alpha}(y)+\varepsilon\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε的任意性即可得证.

(2) 设 $y>x$,$0<t<1$,$z=tx+(1-t)y$,则

$$\begin{aligned}F(z)&=[f(tx+(1-t)y)-f(x)]/(1-t)(y-x)\\&\leqslant(1-t)[f(y)-f(x)]/(1+t)(y-x)=F(y).\end{aligned}$$

类似地可推出 $y<x$ 的情形.

(二) 初等函数

大家所熟识的幂函数、三角函数、反三角函数、对数函数与指数函数等,是人们在初期所认识和工作的对象,它们都由一个单一的式子表达,称为**基本初等函数**.后来,又有了一般的四则运算和复合运算等手段,函数的范围进一步扩大了,我们也给它一个说法:

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算、复合运算构成的函数称为**初等函数**,即通常所说的用一个"解析式"表达的函数,如 $\ln(1+\sqrt{1+\sin^2 x})$,$e^{x+\cot x}$,以及多项式(函数)

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 称为 $P(x)$的系数,a_0 称为首项系数,且总假定 $a_0\neq0$,此时称 $P(x)$为 n次多

项式,零次多项式是指非零常数 a_0.若 x_0 满足方程 $P(x)=0$,即

$$a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=0,$$

则称 x_0 为多项式 $P(x)$的根或零点.而式 $P(x)=0$ 称为代数方程.

注　不要随便说分段函数不是初等函数,请看下例.

* **例 1.2.28**　设分段函数定义为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$$

我们有 $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x^2}-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\ln\dfrac{x+\sqrt{(x-1)^2}+1}{2}$.

注　Dirichlet 函数不是初等函数,但可用“无限”次运算构成:

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\cos^n(2\pi\cdot m!x)\right].$$

最后我们指出,从运算的代数性质划分范围,类似于实数分类,函数还有**代数函数**与**超越函数**之分.若 $y=f(x)$是代数方程

$$a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)y+a_n(x)=0$$

的解,则称 $y=f(x)$为**代数函数**,其中 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$是 x 的多项式.

例如,多项式本身是代数函数,并称为有理整函数.又如

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\quad(a_0\neq 0,b_0\neq 0)$$

是代数函数,并称为有理分式(函数).上述两种函数统称为**有理函数**.不是有理函数的代数函数称为**无理函数**,如用无理根式表出的函数.

不是代数函数的函数称为**超越函数**,例如指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数等.

例 1.2.29　证明 $y=\sqrt{x}$不是有理函数.

证明　反证法.若有$\sqrt{x}=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$,则取 $x=k^2$(k 是正整数),可得

$$P(k)=a_0-b_0k+a_1k^2-b_1k^3+\cdots+a_nk^{2n}(\text{或}-b_mk^{2m+1})=0.$$

这说明多项式 $P(x)=0$ 有无穷多个不同实根,从而知 $P(k)\equiv 0$.因此,我们有 $a_0=b_0=a_1=b_1=\cdots=0$.也就是说,$\sqrt{x}$不能表成有理函数.

例 1.2.30　试证明下列命题:

(1) 在平面上,一条直线与有理函数的图形的交点至多为有限个.

(2) 三角函数不是有理函数.

证明　(1) 反证法.假定对无穷多个 x 值,等式

$$\alpha x+\beta=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}$$

成立,则根据上例之推理可知

$$b_0\beta=a_0,\quad b_0\alpha+b_1\beta=a_1,\quad \cdots,\quad b_k\alpha+b_{k+1}\beta=a_{k+1}.$$

(这里,为简便起见,当 $k>n$ 时令 $a_k=0$;$k>m$ 时令 $b_k=0$.)从而我们有

$$\begin{aligned}P(x)&=b_0\beta+(b_0\alpha+b_1\beta)x+(b_1\alpha+b_2\beta)x^2+\cdots\\&=b_0(\beta+\alpha x)+b_1(\beta+\alpha x)x+\cdots=(\beta+\alpha x)Q(x).\end{aligned}$$

由此又知(除 $Q(x)$的零点外),$P(x)/Q(x)$确为同一线性多项式.证毕.

(2) 由周期性可知,水平直线 $y=1$ 与任一三角函数的图形均有无穷多个交点.证毕.

注 初等函数的重要性,不仅在于它可以描述许多客观事物运动和变化的规律,还因为可运用“无限”的表现手法(如积分、级数)用初等函数来表示非初等函数,这属于本书第二册所介绍的内容.

第 2 章　极　限　论

2.1　数列极限以及求极限的方法

2.1.1　数列及其极限概念

（一）（实）数列

数列是指可列个实数的确定排列，如 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$.一般用字母表示为

$$\{a_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_1, a_2 称为初项，a_n 称为通项.因此，所谓给定一个数列，是指其通项已经有某种确定的描述.当然它的形式可有多样性，举例如下：

1. $a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.（俗称线性递推式）
2. $0<a_1<1, a_{n+1}=a_n(2-a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$.（非线性递推式）
3. $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$ $(n=1,2,\cdots)$.（和式）
4. $a_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$.（积式）
5. $0<a_1, a_2, a_{n+2}=\sqrt{a_n+a_{n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$.（根式）
6. $0<p<1, a_{n+2}\leqslant pa_n+(1-p)a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.（不等式）
7. $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$.（解析式）

（二）数列的极限

定义 2.1.1　设$\{a_n\}$是一个数列.若存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，都存在一个正整数 N，使得当（a_n 的下标）$n>N$ 时，有不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称 a 是$\{a_n\}$的**极限**.记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad \text{或} \quad a_n\to a(n\to\infty).$$

（lim 是 limit 的简写）或称当 n 趋于无穷大时，数列 a_n 趋于（或收敛于）a，$\{a_n\}$是以 a 为极限的**收敛列**；不是收敛列称为**发散列**.

注　为行文简便，在极限定义的陈述中的某些术语也常用符号代替（量词）：

“任给 $\varepsilon>0$”用“$\forall\varepsilon>0$”代替，其中符号“$\forall$”是英语 Any 第一个字母的倒写；“存在 N”用“$\exists N$”代替，其中符号“$\exists$”是英语 Exist 第一个字母的反写.从而，数列$\{a_n\}$以 a 为极限的定义可简写为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得 $|a_n-a|<\varepsilon$，$n>N$.

此外,所谓$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,就是指$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a)=0$.因此,若令 $h_n = a_n - a$,则得 $a_n = a + h_n$,而问题转化为$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

我们特别称收敛到零的数列$\{a_n\}$为**无穷小(变)量**(或**无穷小数列**).从而可以说:收敛到 a 的数列$\{a_n\}$等价于数列$\{a_n - a\}$是无穷小量.

定义 2.1.2 设有数列$\{a_n\}$.若对任意的正数 M,都存在正整数 N,使得当$n>N$时,有$|a_n|\geqslant M$,则称$\{a_n\}$为无穷大量(记为$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$);若存在正数 M,以及正整数 N,使得当$n\geqslant N$ 时,有$|a_n|\leqslant M$,则称$\{a_n\}$为有界变量.

2.1.2 求数列极限的方法

(一)用 ε-N 的定义

例 2.1.1 试证明下列命题:

(1)设数列$\{a_n\}$满足 $a_n/n\to 0(n\to\infty)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}{n}=0$.

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则

(i)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k/n = a$(称为在$(c,1)$意义下可求和于 a).

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)/(1+2+\cdots+n) = a$.

证明 (1)由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N_1,使得$|a_n/n|<\varepsilon$, $|a_n|<n\varepsilon(n>N_1)$.从而我们有

$$\left|\frac{\max\{a_{N_1+1}, \cdots, a_n\}}{n}\right|\leqslant\frac{n\varepsilon}{n}=\varepsilon,$$

对不等式

$$\frac{\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}{n}\leqslant\frac{\max\{a_1, \cdots, a_{N_1}\}}{n}+\frac{\max\{a_{N_1+1}, \cdots, a_n\}}{n},$$

再取 N_2,使得$|\max\{a_1, \cdots, a_{N_1}\}/n|<\varepsilon(n>N_2)$.令 $N=\max\{N_1, N_2\}$,则当 $n>N$ 时,可得$\left|\dfrac{\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}{n}\right|<2\varepsilon$.

(2)(i)首先知道,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N_1,当 $n>N_1$ 时,有$|a_n - a|<\varepsilon$.于是用 N_1 作分项指标,得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right|\\
=&\left|\frac{(a_1 - a)+\cdots+(a_n - a)}{n}\right|\\
\leqslant&\frac{|a_1 - a|+\cdots+|a_{N_1} - a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1} - a|+\cdots+|a_n - a|}{n}
\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon.$$

其次，记 $M=|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$，且取 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，有 $\frac{M}{n}<\varepsilon$. 从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，我们有

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon<2\varepsilon\quad(n>N).\text{证毕}.$$

注 此命题对 $a=\infty$ 也真. 此外，若 $\{a_n\}$ 是递增列，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，则 $a_n\to a$ $(n\to\infty)$.

(ii) 依题设可令 $a_n=a+\varepsilon_n$，$\varepsilon_n\to0$ $(n\to\infty)$，即对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得 $|\varepsilon_n|<\varepsilon(n>N)$. 故可知

$$\sum_{k=1}^{n}(ka_k)\Big/\sum_{k=1}^{n}k=a+\sum_{k=1}^{n}(k\varepsilon_k)\Big/\sum_{k=1}^{n}k\triangleq a+I_n.$$

从而只需指出 $I_n\to0(n\to\infty)$.

实际上，我们有（记 $\bar{\varepsilon}=\max\{|\varepsilon_1|,\cdots,|\varepsilon_N|\}$）

$$\begin{aligned}|I_n|&=\left|\frac{\varepsilon_1+\cdots+N\varepsilon_N}{1+2+\cdots+n}+\frac{(N+1)\varepsilon_{N+1}+\cdots+\varepsilon_n}{1+2+\cdots+n}\right|\\&\leqslant\frac{N(N+1)}{n(n+1)}\bar{\varepsilon}+\frac{|(N+1)\varepsilon_{N+1}+\cdots+n\varepsilon_n|}{1+2+\cdots+n}\\&<\frac{N(N+1)}{n(n+1)}\bar{\varepsilon}+\frac{(N+1)+(N+2)+\cdots+n}{1+2+\cdots+n}\varepsilon\\&<\frac{N(N+1)}{(n+1)n}\bar{\varepsilon}+\varepsilon<2\varepsilon\quad(n\text{ 充分大}).\text{证毕}.\end{aligned}$$

例 2.1.2 试证明下列极限式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{n^2+n}=1$.

证明 (1) 注意到 $n>1$ 时，有 $\sqrt[n]{n}>1$. 因此，令 $h_n=\sqrt[n]{n}-1>0(n>1)$. 从而当 $n>1$时，有 $n=(1+h_n)^n\geqslant nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$，以及

$$0<\sqrt[n]{n}-1=h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}},\qquad n>1.$$

故对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[1+\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$.

(2) 令 $\sqrt[2n+1]{n^2+n}=1+h_n$，则 $h_n>0$ 且有

$$n^2+n=(1+h_n)^{2n+1}>\binom{2n+1}{3}h_n^2=\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}h_n^2.$$

由此知 $h_n^2<\dfrac{6n(n+1)}{2n(2n-1)(2n+1)}<\dfrac{3}{n}$.从而对任给 $\varepsilon>0$,取 $N=[3/\varepsilon]+1$,就有 $h_n<\sqrt{\varepsilon}(n>N)$.

注 1 若 $a_n>0$ 且 $a_n\to a>0(n\to\infty)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

注 2 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$.

例 2.1.3 试证明下列命题:

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-a_{n-1})=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=l(|\lambda|<1)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l/(1-\lambda)$.

证明 (1) 对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$|2a_n+a_{n-1}|<\varepsilon \quad 或 \quad |a_n|<|a_{n-1}|/2+\varepsilon/2.$$

从而得

$$|a_n|<\left(\frac{|a_{n-2}|}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big/2+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+2^{-2}|a_{n-2}|$$

$$<\cdots\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}+\frac{|a_N|}{2^{n-N}}\qquad(n>N).$$

由此知 $|a_n|<\varepsilon+|a_N|/2^{n-N}(n>N)$.易知存在 $N_1>N$,使得 $|a_N|/2^{n-N}<\varepsilon(n>N_1)$.最后我们有 $|a_n|<2\varepsilon(n>N_1)$.即得所证.

(2) 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(a_n-\dfrac{l}{1-\lambda}\right)-\lambda a_{n-1}-\dfrac{l}{1-\lambda}\right]=0$,故当令 $b_n=a_n-l/(1-\lambda)$ 时,原极限式化为 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-\lambda b_{n-1})=0$.从而用类似于题(1)的方法,对任给 ε:$0<\varepsilon<1/2$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时有 $|b_n+\lambda b_{n-1}|<\varepsilon$,或 $|b_n|<|\lambda b_{n-1}|+\varepsilon$.于是有 $|a_n|<|\lambda||\lambda b_{n-2}+\varepsilon|+\varepsilon\leqslant|\lambda|^2|b_{n-2}|+\varepsilon+|\lambda|\varepsilon$.继续类推易知 $|b_n|<|\lambda|^{n-1}|b_1|+2\varepsilon$,这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l/(1-\lambda)$.

例 2.1.4 试求下列数列 $\{a_n\}$ 之极限:

(1) $a_{n+1}=2+\dfrac{1}{a_n}(a_1>0)$. (2) $a_{n+1}=\dfrac{A}{a_n}-1(A>0,a_1<0)$.

解 (1) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛列,那么令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,就有 $a^2-2a-1=0$ 或 $a=(2\pm\sqrt{8})/2$.注意到 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$,故应有 $a=1+\sqrt{2}$.从而计算 $h_n=a_n-(\sqrt{2}+1)$,得

$$h_{n+1}=a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)=1-\sqrt{2}+\frac{1}{a_n}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}+1+h_n}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1+h_n}h_n,$$

$$|h_{n+1}|\leqslant|h_n|\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\leqslant\frac{|h_n|}{2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|h_1|}{2^n}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

由此知 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}+1$.

(2) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛列,且设 $a_n\to a(n\to\infty)$,则由 $a^2+a-b=0$,可知 $a=$

$(-1\pm\sqrt{1+4b})/2$.令 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}$,$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}$.我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{b}{a_n}-1-\alpha=\frac{b-a_n-\alpha a_n}{a_n}\\&=\frac{b-(1+\alpha)(a_n-\alpha)-\alpha(1+\alpha)}{a_n}=\frac{-(1+\alpha)(a_n-\alpha)}{a_n}.\end{aligned}$$

注意到 $\alpha+\beta=-1$,故得 $a_{n+1}-\alpha=\beta(a_n-\alpha)/a_n$.

类似地,可推知 $a_{n+1}-\beta=\alpha(a_n-\beta)/a_n$.从而有

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\cdots=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}.$$

因为 $|\alpha/\beta|=\alpha/(1+\alpha)<1$,所以 $(\alpha/\beta)^n\to0(n\to\infty)$,最后得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta=(-1-\sqrt{1+4b})/2.$$

(二)迫敛法

求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,(一)中所用的方法是将其转化为求证 $a_n-a=h_n\to0(n\to\infty)$,而后者的证明则是与已知无穷小量作比较.这里所介绍的迫敛法,就是将数列直接与已知极限的数列作比较(用放大缩小的方法).这在许多情况下要比(一)中所用更方便和有效.其基本手段是:

“若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$满足 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n(n\geqslant n_0)$.若 $b_n\to a$,$c_n\to a(n\to\infty)$,则 $a_n\to a(n\to\infty)$.”

例 2.1.5 试求下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha](0<\alpha<1)$. (2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{n}-1)^2$.

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)\cdots(1+a^n)}(a>0)$. (4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

解 (1) 易知 $(n+1)^\alpha-n^\alpha>0$,我们有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}n^\alpha[(1+1/n)^\alpha-1]\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}n^\alpha[(1+1/n)-1]=\lim_{n\to\infty}1/n^{1-\alpha}=0.\end{aligned}$$

(2) 因为当 $n\geqslant3$ 时,我们有

$$n=(\sqrt[n]{n}-1+1)^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\sqrt[n]{n}-1)^3,$$

所以得到 $I\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left[\dfrac{3!}{(n-1)(n-2)}\right]^{2/3}=0$.

(3) 若 $0<a<1$,则 $I\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$;若 $a\geqslant1$,则

$$I\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)^{n-1}\cdot a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a)^{n-1}}=0.$$

(4) 因为我们有 $\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\leqslant\dfrac{1}{2n+1}$,所以 $I=0$.

例 2.1.6　试证明下列命题：

(1) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$.若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=q<1$,则(i) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.　(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}/a_n=0$.

(2) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明　(1)(i) 取 $\varepsilon_0>0$,使得 $q+\varepsilon_0<1$.则由题设知,存在 N,使得 $a_{n+1}/a_n<q+\varepsilon_0(n\geqslant N)$.从而得 $a_n<(q+\varepsilon_0)^{n-N}\cdot a_N(n\geqslant N)$.由此即知 $a_n\to0(n\to\infty)$.

特例:$\lim\limits_{n\to\infty}n^mq^n=0\ (0<q<1)$.

(ii) 由题设知,取 ε_0:$0<\varepsilon_0<1-q$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$a_{n+1}<(q+\varepsilon_0)a_n,\ a_{n+2}<(q+\varepsilon_0)^2a_n,\cdots,a_{2n}<(q+\varepsilon_0)^na_n,\cdots.$$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}/a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}(q+\varepsilon_0)^n=0$.

(2) 由题设知,可取 ε_0:$0<\varepsilon_0<1-q$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$\sqrt[n]{a_n}<(q+\varepsilon_0),\qquad a_n<(q+\varepsilon_0)^n\qquad(n\geqslant N).$$

由此可得 $a_n\to0(n\to\infty)$.

例 2.1.7　试求下列数列 $\{a_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$:

(1) $a_n=\sqrt[n]{2\sin^2n+\cos^2n}$.　　(2) $a_n=(n+1+n\cos n)^{1/(2n+n\cdot\sin n)}$.

(3) $a_n=n^{p/n^k}(p,k\in\mathbf{N})$.

解　(1) 因为 $1\leqslant a_n=\sqrt[n]{2}$,所以 $a_n\to1(n\to\infty)$.

(2) 因为 $1<a_n<(1+2n)^{1/n}<\sqrt[n]{n}(2+1/n)^{1/n}<\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{3}$,所以 $a_n\to1(n\to\infty)$.

(3) 因为(取 $mk>p$)$1\leqslant a_n\leqslant\sqrt[n^k]{n^p}<\sqrt[n^k]{n^{mk}}=\sqrt[n^k]{n^k}\cdots\sqrt[n^k]{n^k}$,所以 $a_n\to1(n\to\infty)$.

例 2.1.8　求下列数列 $\{a_n\}$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$:

(1) $a_n=\sqrt[n]{1+b^n}\ (b>0)$.　　(2) $a_n=\sqrt[n]{1+b^n+(b^2/2)^n}\ (b>0)$.

解　(1)(i) 若 $b\leqslant1$,则 $1<a_n\leqslant\sqrt[n]{2}$.故 $a_n\to1(n\to\infty)$.(ii) 若 $b>1$,则 $a_n=b\cdot\sqrt[n]{1+1/b^n}$.故 $a_n\to b(n\to\infty)$.

(2)(i) 若 $b\leqslant1$,则易知 $a_n\to1(n\to\infty)$.

(ii) 若 $1<b<2$,则由

$$b<\sqrt[n]{1+b^n+(b^2/2)^n}=b\cdot\sqrt[n]{(1/b)^n+(b/2)^n+1},$$

可知 $a_n\to b(n\to\infty)$.

(iii) 若 $2\leqslant b<+\infty$,则由 $\dfrac{b^2}{2}<a_n=\dfrac{b^2}{2}\cdot\sqrt[n]{(2/b^2)^n+(2/b)^n+1}$,可知 $a_n\to b^2/2$ $(n\to\infty)$.

例 2.1.9　设有正数列 $\{a_n\}$.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证明　若 $a=0$,则由不等式

$$0\leqslant\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\leqslant\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}\to 0\qquad(n\to\infty),$$

即可证得.若 $a>0$,则再用不等式

$$a=\frac{1}{\frac{1}{a}}=\lim_{n\to\infty}1\Bigg/\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}=a,\text{证毕}.$$

注 可作数列$\{a_n\}$,使得存在$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$,但不存在$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n$.例如,$a>0$,$b>0$.令

$$a_n:1,a,ab,a^2b,a^2b^2,a^3b^2,a^3b^3,\cdots,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a^{m/n}b^{m/n}, & n=2m+1\\ \lim\limits_{n\to\infty}a^{m/n}b^{(m-1)/n}, & n=2m\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{ab},\\ \sqrt{ab},\end{cases}$$

但是其比值,则是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{a^mb^m}{a^mb^{m-1}}, & n=2m\\ \dfrac{a^mb^{m-1}}{a^{m-1}b^{m-1}}, & n=2m-1\end{cases}=\begin{cases}b, & n=2m,\\ a, & n=2m-1.\end{cases}$$

例 2.1.10 试求下述(和式)数列$\{a_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$:

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^k$. (2) $a_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{m}a_kb_k^n\right)^{1/n}(a_k,b_k>0)$.

(3) $a_n=\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}k^n}\Big/n$. (4) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}(x>0)$.

解 (1) 因为我们有

$$1=\frac{n^n}{n^n}<a_n<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}n^k}{n^n}=\frac{n^{n+1}-n}{n^n(n-1)}=\frac{n^n-1}{n^n}\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-1},$$

所以得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 记 $\max\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}=b_{k_0}$,则 $\sqrt[n]{a_{k_0}}\cdot b_{k_0}<a_n<\left(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\right)^{1/n}\cdot b_{k_0}$.由此即知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b_{k_0}$.

(3) 因为 $1=\sqrt[n]{n^n}/n<a_n<\sqrt[n]{n\cdot n^n}/n$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(4) 因为我们有

$$\frac{1}{n^2}\left(x+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(nx+k)\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(nx+k+1)$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(x+\frac{n(n+1)}{2}+n\right),$$

所以得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1/2$.

例 2.1.11 试求下列数列(和式)$\{a_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$:

(1) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. (2) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n^k+1)^{1/k}}$.

(3) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$. (4) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k^2}{n^3}}-1\right)$.

解 (1) 因为 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant a_n\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}=1$, 所以 $a_n\to1$ $(n\to\infty)$.

(2) 因为 $\dfrac{n}{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+1}\leqslant a_n\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}=1$, 所以 $a_n\to1(n\to\infty)$.

(3) 在下述几何-算术平均不等式

$$1+\frac{x}{2+x}=\frac{2}{1/(1+x)+1}\leqslant\sqrt{(1+x)\cdot1}\leqslant\frac{1+x+1}{2}=1+\frac{x}{2}\quad(x>-1)$$

中,令 $x=k/n^2(k=1,2,\cdots,n)$,可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n^2}{2+k/n^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2},$$

$$\frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2n^2+n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\leqslant a_n\leqslant\frac{n(n+1)}{4n^2},$$

由此易知 $a_n\to1/4(n\to\infty)$.

(4) 在下述几何-算术平均不等式$(x>-1)$

$$1+\frac{x}{3+2x}=\frac{3}{1/(1+x)+1+1}\leqslant\sqrt[3]{(1+x)\cdot1\cdot1}\leqslant\frac{1+x+1+1}{3}=1+\frac{x}{3}$$

中,令 $x=k^2/n^3(k=1,2,\cdots,n)$,可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2/n^3}{3+2k^2/n^3}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2/n^3}{3+2k^2/n^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3+2k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(3n^3+2n^2)}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2)},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3},\qquad a_n\to 1/9\ (n\to\infty).$$

例 2.1.12　试求下列数列$\{a_n\}$极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$：

(1) $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4-1}$.

(2) $a_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$ $(F_1=F_2=1, F_{k+1}=F_{k-1}+F_k)$.

(3) $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

(4) $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{b}{2^k}\right)$ $(b\neq k\pi)$.

解　(1) 分解通项并改写和式为

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}\right)=1-\frac{1}{2n^2+2n+1},\end{aligned}$$

易知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 分解通项并改写和式为

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=2}^{n}\frac{F_k}{F_{k-1}F_kF_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_{k+1}-F_{k-1}}{F_{k+1}F_kF_{k-1}}\\&=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{F_{k-1}F_k}-\frac{1}{F_kF_{k+1}}\right)=\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}=1-\frac{1}{F_nF_{n+1}},\end{aligned}$$

易知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(3) 应用公式 $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$,可知

$$\arctan u-\arctan v=\arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right).$$

现在令 $b_k=\arctan k$,我们有

$$\tan(b_{k+1}-b_k)=\frac{\tan b_{k+1}-\tan b_k}{1+\tan b_{k+1}\cdot\tan b_k}=\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}=\frac{1}{k^2+k+1}.$$

从而可得

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{n}\arctan[\tan(b_{k+1}-b_k)]=\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k)\\&=b_{n+1}-b_0=\arctan(n+1)\to\pi/2\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

(4) 注意 $\tan x=\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1-\tan^2x}{\tan x}=\dfrac{1}{\tan x}-2\dfrac{1}{\tan(2x)}=\cot x-2\cot(2x)$,故知

$$\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{b}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{b}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\left(\frac{b}{2^{n-1}}\right).$$

由此可得 $a_n=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{b}{2^n}\right)-\cot b$.注意到 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot(bx)=\frac{1}{b}$,故有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{b}{2^n}\right)-\cot b=\frac{1}{b}-\cot b$.

例 2.1.13　试证明下列命题:

(1) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k!/n!$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则存在 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\left(S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k/n^2\right)$.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k/n^2=a/2$.

证明　(1) 因为我们有 $n!<\sum\limits_{k=1}^{n}k!\,(n\in\mathbf{N})$,以及

$$\sum_{k=1}^{n}k!<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!\,(n\in\mathbf{N}),$$

所以得出 $1<a_n<1+2/n\,(n\in\mathbf{N})$.由此即得所证.

(2) 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k/n^2=1/2$,故转而考察极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n\left(S'_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\Big/\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)$.依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$.从而我们有

$$\begin{aligned}|S'_n-a|&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^{-1}\left[\left|\sum_{k=1}^{N}k(a_k-a)\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}k(a_k-a)\right|\right]\\&\leqslant\frac{2}{n(n+1)}\left|\sum_{k=1}^{N}k(a_k-a)\right|+\frac{2}{n(n+1)}\cdot\varepsilon\sum_{k=N+1}^{n}k\leqslant\frac{M}{n(n+1)}+\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $S'_n\to a\,(n\to\infty)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a/2$.

(3) 根据题设以及题(2),可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_{k+1}-a_k)}{n^2}=\dfrac{a}{2}$,注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_{k+1}-a_k)/n^2=\left(na_{n+1}-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)/n^2$.我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k/n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}.$$

例 2.1.14　试证明下列命题:

(1) 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=+\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 1 \quad \left(I_n = \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} \right).$$

(2) 设 $0 < a_n < 1 (n \in \mathbf{N})$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^{n-k+1} = 0.$$

(3) 设 $a_0 + a_1 + \cdots + a_m = 0$,则 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \sqrt{n+k} = 0$.

证明 (1) (i) 由 $a_{2k} \leqslant a_{2k-1} (k \in \mathbf{N})$可知,$I_n \leqslant 1 (n \in \mathbf{N}$,分子$\leqslant$分母).

(ii) 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}$,我们有

$$I_n > \frac{S_n - a_1 + a_{2n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}} = \frac{S_n - a_1 + a_{2n+1}}{S_n}.$$

注意到$\lim\limits_{n\to\infty}[S_n - (a_1 + a_{2n+1})]/S_n = 1$,即可得证.

(2) 由题设知,对任给 $\varepsilon: 0 < \varepsilon < 1$,存在 N,使得 $0 < a_n < \varepsilon (n \geqslant N)$.改写原式为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{n-k+1} + \sum_{k=N}^{n} a_k^{n-k+1} = I_n' + I_n''.$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \lim\limits_{n\to\infty} a_k^{n-k+1} = 0$. 又有

$$I_n'' < \sum_{k=N}^{n} \varepsilon^{n-k+1} = \frac{1 - \varepsilon^{n-N+1}}{1 - \varepsilon} \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

从而即可得证.

(3) 我们有

$$\begin{aligned}
& a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_m \sqrt{n+m} \\
= & \sqrt{n}(a_0 + a_1 \sqrt{1 + 1/n} + \cdots + a_m \sqrt{1 + m/n}) \\
= & \sqrt{n}[a_0 + a_1 + a_1(\sqrt{1 + 1/n} - 1) + \cdots + a_m + a_m(\sqrt{1 + m/n} - 1)].
\end{aligned}$$

若记 $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}$,则

$$\begin{aligned}
I & \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot A[(\sqrt{1+1/n} - 1) + \cdots + (\sqrt{1+m/n} - 1)] \\
& \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot A(1/n + 2/n + \cdots + m/n) \leqslant \lim_{n\to\infty} Am(m+1)/2\sqrt{n} = 0.
\end{aligned}$$

例 2.1.15 试证明下列命题:

(1) 设$\{a_n\}$是递增正数列.若对任意的正整数 m, n,有 $a_{mn} \geqslant m a_n$,且 $\sup\{a_n/n: n \in \mathbf{N}\} = A < +\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = A$.

(2) 试定 $\lambda \neq 0$ 的值,使得 $I = \lim\limits_{n\to\infty} n^{2005}/[n^{\lambda} - (n-1)^{\lambda}] = 1/2006$.

(3) 设有数列$\{a_n\}$,令 $b_n = p a_n + q a_{n+1} (n \in \mathbf{N})$,且$\{b_n\}$是收敛列.(i)若$|p| < q$,则$\{a_n\}$收敛.(ii)若$|p| \geqslant q$,则$\{a_n\}$不一定收敛.

(4) 设正数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+2}\leqslant(a_{n+1}+a_n)/(n+2)^2$ $(n\in\mathbf{N})$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(5) 设定义在$[0,1]$上的函数 $f(x)$有反函数 $f^{-1}(x)$,且 f 的值域 $R(f)=[0,1]$.若 $f[2x-f(x)]=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 $f(x)\equiv x$.

证明 (1) 不妨设 $A>0$.由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得 $A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_N}{N}\leqslant A$,以及 $A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{mN}}{mN}\leqslant A$ $(m\in\mathbf{N})$.从而当 $n\geqslant N$ 且 $mN\leqslant n<(m+1)N$ 时,可得

$$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_{mN}}{(m+1)N}=\frac{a_{mN}}{mN}\cdot\frac{m}{m+1}.$$

这就是说,当 n 充分大时,我们有$\frac{a_n}{n}>A-\frac{\varepsilon}{2}$.由此即得所证.

(2) 易知,对 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\leqslant 1$,极限不存在.

现在,设 $\lambda>1$ 且记$[\lambda]=k$,则 $k\geqslant 1$ 且有

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\leqslant 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\lambda<1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

由此知存在 α,β,使得 $\alpha<n[1-(1-1/n)^\lambda]<\beta$,以及

$$\alpha n^{\lambda-1}<n^\lambda[1-(1-1/n)^\lambda]<\beta n^{\lambda-1}.$$

从而得:若 $\lambda-1<2005$,则 $I=+\infty$;若 $\lambda-1>2005$,则 $I=0$.最后,$\lambda=2006$,我们有(用二项式展开)$I=1/2006$.

(3) (i) 设 $b_n\to b(n\to\infty)$,并记 $b_n=b+\varepsilon_n$,$\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$,以及 $r=p/q$,则

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=(b+\varepsilon_n)/q-pa_n/q=(b+\varepsilon_n)/q-ra_n,\\
a_{n+2}&=(b+\varepsilon_{n+1})/q-ra_{n+1}\\
&=b(1-r)/q+(\varepsilon_{n+1}-r\varepsilon_n)/q+r^2a_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n+k}&=b[1-r+r^2+\cdots+(-r)^{k-1}]\\
&\quad+1/q+[\varepsilon_{n+k-1}-r\varepsilon_{n+k-2}+\cdots+(-r)^{k-1}\varepsilon_n]+(-r)^ka_n.
\end{aligned}$$

注意到

$$\left(\frac{b}{q}\right)[1-r+r^2-\cdots+(-r)^{k-1}]=\frac{b}{q}\frac{1-(-r)^k}{1+r}=\frac{b}{p+q}[1-(-r)^k],$$

以及对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得$|\varepsilon_n|<\varepsilon(n>N)$.故可得

$$\left|a_{n+k}-\frac{b}{p+q}\right|<\left|\frac{|b|}{p+q}+|a_n|\right||r|^k+\varepsilon\frac{1-|r|^k}{1-|r|}.$$

由此易知在$|p|<q$ 时,$\{a_n\}$收敛.

(ii) 若$|p|\geqslant q$,则取 $a_n=(-p/q)^n$ $(n\in\mathbf{N})$,易知$\{a_n\}$不收敛,但是我们有

$$b_n=p(-p/q)^n+q(-p/q)^{n+1}=0\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

(4) 取 $M>0$,使得 $a_1\leqslant M/1!$,$a_2<M/2!$,则可得

$$a_3\leqslant\frac{M}{3^2}\left(1+\frac{1}{2!}\right)=\frac{M}{3^2}\frac{3}{2!}=\frac{M}{3!}.$$

现在假定 $a_k\leqslant M/k!$,$a_{k+1}\leqslant M/(k+1)!$,那么对 $k+2$ 有

$$a_{k+2}\leqslant\frac{a_{k+1}+a_k}{(k+2)^2}\leqslant\frac{M}{(k+2)^2}\left[\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}\right]=\frac{M}{(k+2)!}.$$

根据归纳法即知 $0<a_n\leqslant M/(n+2)!$.由此即得所证.

(5) 由题设知 $f^{-1}(x)=2x-f(x)$,故得 $f(x)-x=x-f^{-1}(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$.现在对任意的 $x_0\in[0,1]$,令 $x_n=f(x_{n-1})(n\in\mathbf{N})$,则 $x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}$,$x_n=x_0+n(x_1-x_0)(n\in\mathbf{N})$.由于 $|x_n-x_0|\leqslant 1$,故 $|x_1-x_0|\leqslant 1/n$.从而知 $f(x_0)=x_1=x_0$.这说明 $f(x)\equiv x$.

（三）用直推通项的解析表达式求极限

为了探讨一个给定实数列的敛散性,我们在确定采用何种方法求解,以及考察它的各种性质(如有界性、可能收敛的极限值,单调性等)之前,先做的事情其实应是给它转型或简化其构成形式,即用变量替换或其他公式将其约化成最简单的典型.下面举例示范:

* **例 2.1.16**　试将下述数列形式化成最简型:

(1) $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+B(n\in\mathbf{N})$.　　(2) $a_{n+1}=\sqrt{A+Ba_n^2}(n\in\mathbf{N})$.

(3) $a_{n+2}=\dfrac{a_na_{n+1}}{2a_n-a_{n+1}}(n\in\mathbf{N})$.　　(4) $a_{n+1}\leqslant a_n+q^n(n\in\mathbf{N})$.

(5) $a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n(n\in\mathbf{N})$.

解　(1) 化原式为 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+B$,且令 $b_n=a_n-a_{n-1}$,则得 $b_{n+1}=b_n+B(n\in\mathbf{N})$.

(2) 将原式平方,可知 $a_{n+1}^2=A+Ba_n^2$.令 $b_{n+1}=a_{n+1}^2$,则得 $b_{n+1}=Bb_n+A$.

(3) 将原式改写为 $a_{n+2}=1/(2/a_{n+1}-1/a_n)$,再令 $b_n=1/a_n$,则得 $b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n$.

(4) 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}q^k$,则 $q^n=S_n-S_{n-1}$.令 $b_n=a_n-S_{n-1}$,则得 $b_{n+1}\leqslant b_n(n\in\mathbf{N})$.

(5) 解特征方程 $\lambda^2-A\lambda-B=0$ 的根,可知

$$\alpha=\frac{A-\sqrt{A^2+4B}}{2},\qquad\beta=\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2},$$

从而可化递推式为 $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n(n=1,2,\cdots)$.再作变量替换 $b_n=a_{n+1}-\beta a_n$,可得 $b_{n+1}=\alpha b_n(n=1,2,\cdots)$.

* **例 2.1.17**　试将下述数列形式化成最简式:

(1) $a_{n+1}=a_n^2+Aa_n+B(n\in\mathbf{N})$.　　(2) $a_{n+1}=a_n(2-\lambda a_n)(n\in\mathbf{N})$.

解　(1) 将原式写为 $a_{n+1}=(a_n+A/2)^2+B-A^2/4$,再改写为

$$a_{n+1}+A/2=(a_n+A/2)^2+B-A^2/4+A/2=(a_n+A/2)^2+B-A(A-2)/4.$$

令 $b_n=a_n+A/2$,则得 $b_{n+1}=b_n^2+B-A(A-2)/4(n\in\mathbf{N})$.

(2) 将原式写为 $a_{n+1}=2a_n-\lambda a_n^2=-\lambda\left(a_n-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2+\dfrac{1}{\lambda}$,再改写为 $a_{n+1}-1/\lambda=-\lambda(a_n-$

$1/\lambda)^2$,则令 $b_n=a_n-1/\lambda$,可得 $b_{n+1}=-\lambda b_n^2(n\in\mathbf{N})$.

* **例 2.1.18** 试将下述数列形式化成最简式:

(1) $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n+B}{Ca_n+D}(n\in\mathbf{N})$.　　(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{A+a_n^2}}(n\in\mathbf{N})$.

解 (1)改写原递推式为 $Ca_{n+1}+D=\dfrac{BC-AD}{Ca_n+D}+(A+D)(n=1,2,\cdots)$.并作替换 $b_n=Ca_n+D$.又令 $\alpha=BC-AD,\beta=A+D$,则原递推式可转型为

$$b_{n+1}=\frac{\alpha}{b_n}+\beta\qquad(n=1,2,\cdots).$$

(2)将原式平方,可知 $a_{n+1}^2=a_n^2/(A+a_n^2)$.令 $b_n=a_n^2$,则得 $b_{n+1}=b_n/(b_n+A)$.再令 $C_n=b_n+A$,又得 $C_{n+1}=(A+1)-A/C_n(n\in\mathbf{N})$.

* **例 2.1.19** 试将下述数列形式化为最简式:

(1) $a_{n+1}=A^2a_n+\dfrac{B^2}{a_n}(n\in\mathbf{N})$.　　(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n+1}+a_n(n\in\mathbf{N})$.

解 (1)改写原式为 $a_{n+1}=AB\left(\dfrac{A}{B}a_n+\dfrac{B}{Aa_n}\right)$,再令 $b_n=\dfrac{A}{B}a_n$,则得 $b_{n+1}=A^2(b_n+1/b_n)$ $(n\in\mathbf{N})$.

(2)将原式改写为 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n^2+a_n}{a_n+1}$,再写成

$$\begin{aligned}a_{n+1}+1&=\frac{2(a_n+1)^2-3(a_n+1)+1}{a_n+1}+1\\&=2(a_n+1)-3+\frac{1}{a_n+1}+1.\end{aligned}$$

令 $b_n=a_n+1$,则得 $b_{n+1}=2b_n+1/b_n-2(n\in\mathbf{N})$.

* **例 2.1.20** 试将下述数列化为最简式或写出通项的解析表达式:

(1) $a_{n+1}=\sqrt{Aa_n+B}(n\in\mathbf{N})$.　　(2) $(2-a_n)a_{n+1}=1(n\in\mathbf{N})$.

(3) $a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n}a_n+\dfrac{1}{n}a_{n-1}(n\geqslant 2)$.　　(4) $a_n=\dfrac{\sqrt[m]{1+b_n}-1}{b_n}(n,m\in\mathbf{N})$.

(5) $a_{n+1}=(2+2/n)a_n-1(n\in\mathbf{N})$.　　(6) $(n+2)a_{n+1}=na_n+1(n\in\mathbf{N})$.

解 (1)将原式改写为 $Aa_{n+1}+B=A\sqrt{Aa_n+B}+B$,且令 $b_n=Aa_n+B$,则得 $b_{n+1}=A\sqrt{b_n}+B(n\in\mathbf{N})$.

(2)由 $a_2=1/(2-a_1)$可知,$a_3=(2-a_1)/(3-2a_1)$.假定 $a_k=[(k-1)-(k-2)a_1]/[k-(k-1)a_1]$,则对 $k+1$ 有

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-[(k-1)-(k-2)a_1]/[k-(k-1)a_1]}=\frac{k-(k-1)a_1}{(k+1)-ka_1}.$$

从而根据归纳法可知 $a_{n+1}=[n-(n-1)a_1]/[(n+1)-na_1]$.

(3)改写原式为 $a_{n+1}-a_n=-(a_n-a_{n-1})/n$,则可得

$$a_n=a_{n-1}-\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{n-1}=a_1+(a_2-a_1)\left[1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}\right].$$

(4)令 $d_n=\sqrt[m]{1+b_n}$,我们有

$$a_n = \frac{d_n - 1}{d_n^m - 1} = \frac{1}{(d_n^{m-1} + d_n^{m-2} + \cdots + 1)} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(5) 将原式改写为 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} 2a_n + 1$，或

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2\frac{a_n}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad 2^{-(n+1)}\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2^{-n}\frac{a_n}{n} - \frac{2^{-n}}{n+1},$$

且令 $b_n = 2^{-n}a_n/n$，则得 $b_{n+1} = b_n - 2^{-n}/(n+1)(n \in \mathbf{N})$.

(6) 以 $(n+1)$ 乘等式两端，且令 $b_n = n(n+1)a_n$，则得

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + (n+1) = b_{n-1} + n + (n+1) \\ &= (n+1) + n + \cdots + 2 + b_1 = (n+1)(n+2)/2 + b_1 + 1. \end{aligned}$$

从而知 $a_{n+1} = 1/2 + (2a_1 - 1)/(n+1)(n+2)$.

* **例 2.1.21**　试写出下述数列的最简解析表达式：

(1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} (n \in \mathbf{N})$.

(2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} (n \in \mathbf{N})$.

(3) $a_n = (1 + 11 + \cdots + \overbrace{11\cdots1}^{n})/10^n$.

(4) $a_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!/(n+1)!(n \in \mathbf{N})$.

(5) $a_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)/2^k (n \in \mathbf{N})$.

解　(1) 注意 $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$，可知 $a_n = 1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{2} (n \in \mathbf{N})$.

(2) 注意 $1/(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}) = (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})/2$，可知 $a_n = (\sqrt{2n+1}/2 - 1/2)/\sqrt{n}(n \in \mathbf{N})$.

(3) 注意到公式

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 111 + \cdots + 11\cdots1 &= 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + n \cdot 10^0 \\ &= (1 + 10 + \cdots + 10^{n-1}) + (1 + 10 + \cdots + 10^{n-2}) + \cdots + (1 + 10) + 1 \\ &= \frac{10^n - 1}{9} + \frac{10^{n-1} - 1}{9} + \cdots + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10 - 1}{9} = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}, \end{aligned}$$

故有 $a_n = [10(1 - 1/10^n) - 9n/10^n]/81 (n \in \mathbf{N})$.

(4) 注意到 $k \cdot k! = (k+1)! - k!$，故有 $a_n = [(n+1)! - 1]/(n+1)!(n \in \mathbf{N})$.

(5) 因为我们有 $a_n/2 = a_n - a_n/2$，所以依题设知

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2^k} - \frac{2k-1}{2^{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^2} \right) - \left(\frac{3}{2^3} - \frac{5}{2^3} \right) - \cdots - \left(\frac{2n-3}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

从而得到 $a_n=1+(1-1/2^{n-1})/(1-1/2)-(2n-1)/2^n$.

* **例 2.1.22**　试写出下述数列$\{a_n\}$的最简解析表达式：

(1) $a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{b_k}\right)\ (n\in\mathbf{N},b_1=1,b_{k+1}=k(1+b_k))$.

(2) $a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n(n+1)/2}\right)\ (n\in\mathbf{N})$.

(3) $a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\ (n\in\mathbf{N})$.

(4) $a_n=\prod_{k=1}^{n}(2^{2^{n-1}}+1)/2^{2^{n-1}}\ (n\in\mathbf{N})$.

解　(1) 注意 $b_{k+1}=k+k(k-1)+\cdots+k(k-1)(k-2)\cdots2\cdot1$,故知 $a_n=(1+b_n)/n!=1+1+1/2!+1/3!+\cdots+1/n!\ (n\in\mathbf{N})$.

(2) 注意 $1-\frac{1}{k(k+1)/2}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$,故知

$$a_n=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdots\frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)}=\frac{1}{3}\ \frac{n+2}{n}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

(3) 注意 $1-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}$,故知

$$a_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+2}{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\ \frac{n+2}{n+1}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

(4) 注意$(2^{2^{n-1}}+1)/2^{2^{n-1}}=1+1/2^{2^{n-1}}$,故知 $a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\ (n\in\mathbf{N})$.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)a_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$$

$$=\prod_{k=3}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\cdots=\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

注　最简单的转型手段有：

1. 相邻比：$a_n=\frac{a_1}{1}\ \frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

2. 相邻差：$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$.

3. 和式差：$a_n=S_n-S_{n-1}\ (S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n)$.例如 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\ (n\in\mathbf{N})$,则在 $n\geqslant2$时,有 $\frac{a_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\ \frac{S_{n-1}}{n-1}$.

(A) 用一般公式推导求极限举例

例 2.1.23　解答下列问题：

(1) 设 $a_1+a_2+a_3=0$,试论$\lim\limits_{n\to\infty}I_n\ (I_n=a_1\sqrt{n}+a_2\sqrt{n+1}+a_3\sqrt{n+2})$.

(2) 试定 a,b,c 之值,使得$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=2\ (I_n=n(an+\sqrt{2+bn+cn^2})$.

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\cdots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ka_k^n}=a_{k_0}\triangleq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ ($a_i>0$, $p_i>0(i=1,2,\cdots,k)$).

解 (1) 由 $a_1=-a_2-a_3$ 可知

$$\begin{aligned}I_n&=a_2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+a_3(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\\&=a_2/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})+2a_3/(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}).\quad I_n\to0(n\to\infty).\end{aligned}$$

(2) 由 $I_n=n^2\left(a+\sqrt{\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{b}{n}+c}\right)\to2(n\to\infty)$,可知 $a+\sqrt{\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{b}{n}+c}\to0(n\to\infty)$,即 $a+\sqrt{c}=0$,$a=-\sqrt{c}$.从而根据 $I_n=n\sqrt{2+bn+cn^2}-n^2\sqrt{c}\to2(n\to\infty)$,知 $b=0$.由 $I_n=2/(\sqrt{c+2/n^2}+\sqrt{c})\to2(n\to\infty)$得 $c=1/4$.即 $a=-1/4$,$b=0$,$c=1/4$.

(3) 若 $a_1=a_2=\cdots=a_k$,则结论显然为真.现设 $a_{k_0}>a_i(i\neq k_0)$,则

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k_0}^{n+1}}{a_{k_0}^n}\cdot\frac{p_1(a_1/a_{k_0})^{n+1}+\cdots+p_{k_0}(a_{k_0}/a_{k_0})^{n+1}+\cdots+p_k(a_k/a_{k_0})^{n+1}}{p_1(a_1/a_{k_0})^n+\cdots+p_{k_0}(a_{k_0}/a_{k_0})^n+\cdots+p_k(a_k/a_{k_0})^n}\\&=a_{k_0}.\end{aligned}$$

例 2.1.24 试证明下列命题:

(1) 若$\{a_n+a_{n+1}\}$,$\{a_n+a_{n+2}\}$均为收敛列,则$\{a_n\}$是收敛列.

(2) 设 $\lambda>0$,$a_{n+1}=a_n(2-\lambda a_n)(n\in\mathbf{N})$.若 $a_1,a_2>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1/\lambda$.

(3) 若 $a_{n+1}=\alpha a_n+(1-\alpha)a_{n-1}$ $(0<\alpha<1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=[(1-\alpha)a_1+a_2]/(2-\alpha)$.

证明 (1) 只需注意表达式

$$a_{n+1}=\{(a_{n+1}+a_{n+2})+[(a_n+a_{n+1})-(a_n+a_{n+2})]\}/2.$$

(2) (i) 由题设知 $a_2=a_1(2-\lambda a_1)>0$,故 $2-\lambda a_1>0$,$1-\lambda a_1>-1$.又由 $\lambda a_1>0$,可知 $1-\lambda a_1<1$.即 $|1-\lambda a_1|<1$.

(ii) 因为我们有($n\in\mathbf{N}$)

$$a_{n+1}=\frac{1}{\lambda}-\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\sqrt{\lambda}a_n\right)^2=\frac{1}{\lambda}-\frac{(1-\lambda a_n)^2}{\lambda},$$

$$\lambda a_{n+1}=1-(1-\lambda a_n)^2,$$

$$(1-\lambda a_{n+1})=(1-\lambda a_n)^2=\cdots=(1-\lambda a_1)^{2^n},$$

所以根据(i)可得$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\lambda a_{n+1})=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=1/\lambda$.

(3) 因为由题设知 $a_{n+1}-a_n=(\alpha-1)(a_n-a_{n-1})$,所以我们有

$$a_{n+1}-a_n=(\alpha-1)^{n-1}(a_2-a_1),$$

$$a_{n+1}-a_1=\sum_{k=1}^n(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)\sum_{k=1}^n(\alpha-1)^{k-1}.$$

从而可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_2-a_1}{2-\alpha}+a_1\right)=\dfrac{a_2+(1-\alpha)a_1}{2-\alpha}$.

例 2.1.25　试论数列 $a_{n+1}=Aa_n+B(n\in\mathbf{N},B\neq 0)$ 的敛散性.

解　(i) 若 $A=1$,则 $a_{n+1}=a_n+B=\cdots=a_1+nB$.这说明 $\{a_n\}$ 是发散列;若 $A=-1$,则 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=0=a_{2n}-a_{2n-2}(n\in\mathbf{N})$.这说明当 $a_1=a_2$ 即 $a_1=-a_1+B$ 或 $a_1=B/2$ 时,$\{a_n\}$ 收敛.

(ii) 若 $A\neq\pm1$,则由题设知 $a_{n+1}-a_n=A^{n-1}(a_2-a_1)$.这说明 $a_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_1=(a_2-a_1)\sum\limits_{k=1}^{n}A^{k-1}+a_1$.注意到 $(a_2-a_1)=(A-1)a_1+B$.故有

$$a_{n+1}=(a_2-a_1)(1-A^n)/(1-A)+a_1=A^n\left(a_1+\frac{B}{A-1}\right)-\frac{B}{A-1}.$$

由此知,若 $|A|>1$,则 $\{a_n\}$ 发散;若 $|A|<1$,则 $\{a_n\}$ 收敛.

例 2.1.26　试求下述数列 $\{a_n\}$ 的敛散性:

(1) $a_n=4^n(1-b_n)(b_{n+1}=\sqrt{(1+b_n)/2},-1<b_1<1)$.

(2) $a_{n+1}=a_1(1-a_n-b_n)+a_n(b_{n+1}=b_1(1-a_n-b_n)+b_n(a_1,b_1\in(0,1)))$.

(3) $a_n=\dfrac{b_n+b_n^2+\cdots+b_n^m-m}{b_n-1}\quad(b_n\neq1,b_n\to1(n\to\infty))$.

解　(1) 令 $b_1=\cos\theta(0<\theta<\pi)$,则 $b_2=\cos(\theta/2)$,

$$b_3=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big/2}=\cos\frac{\theta}{4},\cdots,b_n=\cos\frac{\theta}{2^n},\cdots.$$

从而可知

$$a_n=4^n(1-\cos(\theta/2^n))=\frac{4^n(1-\cos(\theta/2^n))(1+\cos(\theta/2^n))}{1-\cos(\theta/2^n)}$$
$$=\frac{4^n\sin^n(\theta/2^n)}{1+\cos(\theta/2^n)}=\frac{\theta^2}{1+\cos(\theta/2^n)}\cdot\left(\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n}\right)^2,$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\theta^2/2=(\arccos b_1)^2/2.$$

(2) 记 $c_n=a_n+b_n(n\in\mathbf{N})$,我们有

$$a_{n+1}+b_{n+1}=(a_1+b_1)[1-(a_n+b_n)]+(a_n+b_n),$$
$$c_{n+1}=c_1(1-c_n)+c_n,\quad c_n=1-(1-c_1)^n(n\in\mathbf{N}).$$

从而知 $a_n=a_1[1-(1-c_1)^n]/c_1$,$b_n=[1-(1-c_1)^n]/c_1$,故得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a_1/(a_1+b_1),\qquad\lim_{n\to\infty}b_n=1/(a_1+b_1).$$

(3) 注意等式

$$a_n=\frac{1}{b_n-1}[(b_n-1)+(b_n^2-1)+\cdots+(b_n^m-1)]$$

$$= 1 + (b_n + 1) + (b_n^2 + b_n + 1) + \cdots + (b_n^{m-1} + b_n^{m-2} + \cdots + 1),$$

故有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 + 2 + \cdots + m = m(m+1)/2$.

例 2.1.27　设有数组$(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)})$：$a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} = A$，令

$$a_1^{(2)} = \frac{a_2^{(1)} + a_3^{(1)}}{2},\quad a_2^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_3^{(1)}}{2},\quad a_3^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)}}{2};\cdots;$$

$$a_1^{(n+1)} = \frac{a_2^{(n)} + a_3^{(n)}}{2},\quad a_2^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n)} + a_3^{(n)}}{2},\quad a_3^{(n+1)} = \frac{a_1^{(n)} + a_2^{(n)}}{2};\cdots,$$

试证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_i^{(n)} = A/3$.

证明　经计算可知 $|a_i^{(n+1)} - a_j^{(n+1)}| = |a_i^{(n)} - a_j^{(n)}|/2$ $(n\in\mathbf{N}; i,j=1,2,3)$.令 $b_1^{(n)} = a_1^{(n)} - a_2^{(n)}$，$b_2^{(n)} = a_2^{(n)} - a_3^{(n)}$，$b_3^{(n)} = a_3^{(n)} - a_1^{(n)}$ $(n\in\mathbf{N})$，易得$\lim\limits_{n\to\infty} b_i^{(n)} = 0$ $(i=1,2,3)$.注意到

$$a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + a_3^{(n+1)} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + a_3^{(n)} = a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} = A.$$

又推出 $a_1^{(n)} = (A + b_1^{(n)} - b_3^{(n)})/3$，$a_2^{(n)} = (A + b_2^{(n)} - b_1^{(n)})/3$，以及 $a_3^{(n)} = (A + b_3^{(n)} - b_2^{(n)})/3$.从而我们有$\lim\limits_{n\to\infty} a_i^{(n)} = A/3$ $(i=1,2,3)$.

例 2.1.28　设 k 是正整数，试定 b 值，使得满足$(a_{n+1} + a_{n-1})/2 = ba_n$ $(n\geqslant 2)$的数列$\{a_n\}$有周期 k，即 $a_{n+k} = a_n$ $(n\in\mathbf{N})$.

证明　采用矩阵表示，我们有$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 2b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.从而只需指出 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

因为 A 的特征多项式为 $\lambda^2 - 2b\lambda + 1$，所以 A 的特征值为 $b\pm\sqrt{b^2-1}$.注意到 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的必要条件是：$A$ 的特征值为单位的第 k 次根

$$b = \cos(2\pi j/k)\qquad (j = 0, 1, \cdots, [k/2]).$$

此时，若 $0<j<k/2$（即$-1<b<1$），则 A 的特征值不同（A 对角化），即 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.若 $b=+1$ 或 -1，则 A 的特征值不互异.A 有 Jordan 标准型：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.从而有 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例 2.1.29　试证明下列数列$\{a_n\}$不收敛：

(1) $\{\tan n\}$.　(2) $\{\sin 4^n\}$.　(3) $a_{n+1} = b(a_n + 1/a_n)$ $(n\in\mathbf{N}, a_1>0, b>1)$.

证明　(1) 反之，若存在 $\tan n\to a$ $(n\to\infty)$，则由 $\tan(n+m) = (\tan n + \tan m)/(1 - \tan n\cdot\tan m)$，可知（令 $n\to\infty$）

$$a = \frac{a + \tan m}{1 - a\tan m}\quad 或\quad a - a^2\tan m = a + \tan m,$$

即$-a^2=1$.但这是不可能的,证毕.

(2)反之,不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin 4^n=l$.(i)若$l=0$,则可设$k_n\in\mathbf{Z}$,$\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$,使得

$$4^n=k_n\cdot\pi+\varepsilon_n,\qquad 4^{n+1}=k_{n+1}\cdot\pi+\varepsilon_{n+1},$$

由此知$0=\pi(4k_n-k_{n+1})+4\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$.从而当$n$充分大时有$4k_n=k_{n+1}$,即$k_n=r\cdot 4^n$($r\in\mathbf{Q}$).但由$4^n=\pi k_n$可推$1=\pi r$.这是不可能的.

(ii)若$l\neq 0$,则由$\sin 4^{n+1}=4\sin 4^n\cdot\cos 4^n(1-2\sin^2 4^n)$可知,数列$\{\cos 4^n\}$收敛.从而有$k_n\in\mathbf{Z}$,$\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$,使得

$$4^n=2\pi k_n+\theta+\varepsilon_n\qquad(0<|\theta|<\pi).$$

因为$4^{n+1}=2\pi k_{n+1}+\theta+\varepsilon_{n+1}$,所以$0=2\pi(4k_n-k_{n+1})+3\theta+4\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$.而这只在$\theta=\pm 2\pi/3$时有可能,故对充分大的$n$,$4k_n-k_{n+1}$是常数$c$:

$$c=\begin{cases}1, & \theta=-2\pi/3,\\ -1, & \theta=2\pi/3.\end{cases}$$

对于前者,根据归纳法可知$k_n=r\cdot 4^n+1/3$.但由$4^n=2\pi k_n-2\pi/3+\varepsilon_n$可得$\pi\in\mathbf{Q}$,矛盾.

对于后者$\theta=2\pi/3$,也可类似推断.

(3)反证法.如果存在$a_n\to a(n\to\infty)$,则由原式中令$n\to\infty$,可知

$$a=b(a+1/a),\qquad(1-b)a^2=b.$$

但这是不可能成立的.证毕.

(B)应用$(c,1)$和求极限

例 2.1.30 证明下列命题:

(1)设有数列$\{a_n\}$.若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n/n=a$.

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.若$\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=l$,则$l=0$.

证明 (1)因为我们有$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n}=a.$$

注 $a_n=\sin(\ln n)(n\in\mathbf{N})$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$,然而$\{a_n\}$是有界的发散数列.

(2)我们有($a_0=0$)

$$\begin{aligned}l&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a_0)+2(a_2-a_1)+\cdots+n(a_n-a_{n-1})}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})+na_n}{n}=-a+a=0.\end{aligned}$$

例 2.1.31 设$\{a_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = A$，试证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{1/n}=0$.

证明 (1) 令 $S_0=0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n (n=1,2,\cdots)$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(S_k-S_{k-1})\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}kS_k-\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}S_k}{n}+\frac{S_n}{n}\right)\\ &=A-A=0.\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant(n!a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=(a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\cdots na_n)^{1/n}\\ &\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\to 0\quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

即得所证.

例 2.1.32 设$\{a_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k = l$，试证明

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$.

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}k(a_k-a_{k-1})/n=0$.

证明 (1) 令 $b_n=a_n-a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，则得

$$\lim_{n\to\infty}nb_n=0,\qquad b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1=a_n\qquad (令\ a_0=0).$$

$$\begin{aligned}a_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k&=b_1+\cdots+b_n-\frac{b_1+(b_1+b_2)+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n+1}\\ &=\frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\to 0\qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=l$.

(2) 因为 $\sum\limits_{k=2}^{n}k(a_k-a_{k-1})=-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+(n+1)a_n-a_1$，所以有

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}+\frac{n+1}{n}a_n-\frac{a_1}{n}\right)=-l+l-0=0.$$

例 2.1.33 试证明下列命题：

(1) 若$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})/n=0$.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=ab\quad(c_n=(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)/n).$$

(3) 对$\{a_n\}$令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k/n\,(n\in\mathbf{N})$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n/n=0$.

证明 (1) (i) 记$b_n=a_n+a_{n-1}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$. 由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n-1})/n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n/n=0$.

(ii) 再令$c_n=(-1)^na_n$，则由题设知$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-c_{n-2})=0$. 从而根据(i)可得$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n+c_{n-1})/n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})/n=0$.

(2) 记$a_n=a+\alpha_n$，$b_n=b+\beta_n$ ($n\in\mathbf{N}$；$\alpha_n\to0$，$\beta_n\to0$ ($n\to\infty$))，则

$$\begin{aligned}c_n&=ab+a\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}+b\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\\&=ab+\gamma_n^{(1)}+\gamma_n^{(2)}+\gamma_n^{(3)}.\end{aligned}$$

易知$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n^{(1)}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n^{(2)}$. 又假定$|\alpha_n|\leqslant M\,(n\in\mathbf{N})$，则

$$\lim_{n\to\infty}|\gamma_n^{(3)}|\leqslant\lim_{n\to\infty}M\frac{|\beta_1|+\cdots+|\beta_n|}{n}=0.$$

由此即可得证.

(3) 由题设知$n\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$，故可得

$$S_n=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1},\quad S_n/n=\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}/n.$$

由此知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n/n=0$，从而又有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n}\right)=0.$$

(C) 应用 Stolz 定理求极限

Stolz 定理 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足

(i) $0<b_n<b_{n+1}\,(n\in\mathbf{N})$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$； (ii) 存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n/b_n=l$.

证明 令$(a_{n+1}-a_n)/(b_{n+1}-b_n)=l+\alpha_n$，$\alpha_n\to0\,(n\to\infty)$，则对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n\geqslant N$时有$|\alpha_n|<\varepsilon/2$. 又当$n\geqslant N$时由$a_{n+1}-a_n=(l+\alpha_n)(b_{n+1}-b_n)$可得

$$\begin{cases}a_{n+1}-lb_{n+1}=a_n-lb_n+\alpha_n(b_{n+1}-b_n),\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{N+1}-lb_{N+1}=a_N-lb_N+\alpha_N(b_{N+1}-b_N).\end{cases}$$

将这些等式相加,可知 $a_{n+1}-lb_{n+1}=a_N-lb_N+\alpha_n(b_{n+1}-b_n)+\cdots+\alpha_N(b_{N+1}-b_N)$.从而有

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-lb_{n+1}|&\leqslant|a_N-lb_N|+|\alpha_n|(b_{n+1}-b_n)+\cdots+|\alpha_N|(b_{N+1}-b_N)\\&\leqslant|a_N-lb_N|+\frac{\varepsilon}{2}(b_{n+1}-b_N).\end{aligned}$$

最后导出 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-l\right|<\dfrac{|a_N+lb_N|}{b_{n+1}}+\dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{b_{n+1}-b_N}{b_{n+1}}$,证毕.

例 2.1.34 计算下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{\sqrt{k}}$(已知 $a_n\to a(n\to\infty)$). (2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}1/k}{\ln n}$.

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+2a^2+\cdots+na^n}{na^{n+2}}(a>1)$.

(4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{m=0}^{n}(k+m)!/m!}{n^{k+1}}$.

(5) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}+\cdots+\dfrac{a^n}{n}\right)\quad(a>1)$.

解 (1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}/\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_{n+1}=2a$.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/(n+1)}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(1+1/n)^n}\cdot\dfrac{n}{n+1}=1$.(见 2.2 节)

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}(n+1)}{a^{n+3}\cdot(n+1)-a^{n+2}\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(n+1)a^2-na}=\dfrac{1}{a(a-1)}$.

(4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+n+1)!/(n+1)!}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+n+1)(k+n)\cdots[k+(n-(k-1))+1]}{(k+1)n^k+O(n^{k-1})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{k+n+1}{n}\cdot\dfrac{k+n}{n}\cdots\dfrac{n+2}{n}}{k+1+O(n^{-1})}=\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

(5) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}/(n+1)}{a^{n+2}/(n+1)-a^{n+1}/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{na-(n+1)}\cdot\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{a-1}$.

例 2.1.35 试证明下列命题:

(1) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$.若 $\lim\limits_{n\to\infty}n(1-a_{n+1}/a_n)=l$,则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{1}{a_n}\Big/\ln n=l$.

(2) 设 $a_1>0$, $a_{n+1}=\ln(1+a_n)(n\geqslant1)$,则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(na_n-2)}{\ln n}=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设 $0<a_1<1$, $a_{n+1}=a_n(1-a_n)(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-na_n)}{\ln n}=1$.

(4) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$,且记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k(n\in\mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}a_n/A_n=0,$$

则 $I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k/A_k)/\ln A_n=1$.

(5) 对数列$\{a_n\}$,作 $A_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$.若有$\lim_{n\to\infty}A_n=A$,则

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k/k)/\ln n=A.$$

证明 (1) 由题设易知 $a_{n+1}/a_n-1\to0(n\to\infty)$,且因有

$$n\cdot\left[\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\Big/\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\right]\leqslant n\cdot\ln\left[1+\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\right]$$

$$=n\cdot\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leqslant n\cdot\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right),$$

所以导出$\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=-l$.从而根据 Stolz 定理,可得

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_{n+1})-\ln(1/a_n)}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{n\ln(a_{n+1}/a_n)}{\ln(1+1/n)^n}=-\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=l.$$

(2) (i) 易知 $a_n\to0(n\to\infty)$,且 $na_n\to2(n\to\infty)$.

(ii) 改写原式,并应用 Stolz 定理,可知

$$I=\lim_{n\to\infty}na_n\cdot\frac{n-2/a_n}{\ln n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n-2/a_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2/a_{n+1}+2/a_n}{\ln(1+1/n)}.$$

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$,$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to1(n\to\infty)$,所以导出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2/a_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}n\frac{1-2/a_{n+1}+2/a_n}{\ln(1+1/n)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{a_na_{n+1}+2a_n-2a_n\cdot a_n/a_{n+1}}{a_n^2}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}}{a_n^2}.$$

注意到

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\qquad(x>0),$$

$$2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}=2\ln(1+a_n)-2a_n+a_n\ln(1+a_n),$$

易知$\frac{a_n^3}{6}-\frac{a_n^4}{6}-\frac{a_n^5}{4}<2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}<\frac{a_n^3}{6}+\frac{a_n^4}{3}$.由此可得

$$I=\lim_{n\to\infty}na_n\cdot\frac{2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}}{a_n^3}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

(3)(i)易知$\{a_n\}$是递减趋于0的收敛列.又由

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1-a_n}\to 1 \qquad (n\to\infty)$$

可知 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)\Big/n\to 1(n\to\infty)$,即 $1/na_n\to 1(n\to\infty)$.

(ii)由(i)知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/a_n-n}{\ln n}$.应用Stolz定理,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/a_n-n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}-1}{\ln(1+1/n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{1-a_n}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{1-a_n}=1.$$

(4)应用Stolz定理,我们有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}/A_{n+1}}{\ln A_{n+1}-\ln A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}/A_{n+1}}{-\ln[(A_{n+1}-a_{n+1})/A_{n+1}]}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}\right)^{A_{n+1}/a_{n+1}}\right)^{-1}=\frac{1}{\ln e}=1.\end{aligned}$$

(5)(i)根据Stolz定理可知,若$b_n\to b(n\to\infty)$,则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k/k)/\ln n=b$.实际上,我们有(见2.2节)

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}/(n+1)}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{\ln(1+1/n)^{n+1}}=b.$$

(ii)用A_k表示a_k,我们有

$$a_1=A_1,a_2=2A_2-A_1,\cdots,a_n=nA_n-(n-1)A_{n-1} \qquad (n\geqslant 2).$$

从而可知(根据(i))

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{A_1/2+A_2/3+\cdots+A_{n-1}/n+A_n}{\ln n}=A.$$

(注意,视 $b_1=0,b_2=A_1,\cdots,b_n=A_{n-1}\to A(n\to\infty)$即可.)

注 可作数列

$$a_n=\begin{cases}[3+(-1)^n]/6, & [\log_2 n]\text{是偶数},\\ [3+2(-1)^n]/6, & [\log_2 n]\text{是奇数},\end{cases}$$

使得存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}[a_1+a_2+\cdots+a_n]/n=l$,但不存在极限

$$\lim_{n\to\infty}[a_1^2+\cdots+a_n^2]/n, \qquad \lim_{n\to\infty}[\sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n}]/n.$$

例 2.1.36 设m是取定的正整数,记 $I_n=\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^m}-\frac{n}{m+1}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

解 将原式写成 $I_n=\frac{(m+1)(1^m+2^m+\cdots+n^m)-n^{m+1}}{(m+1)n^m}$,且视 $b_n=(m+1)\cdot n^m$,以及 $a_n=(m+1)(1^m+2^m+\cdots+n^m)-n^{m+1}$.易知 $b_{n+1}>b_n>0$,且 $b_n\to+\infty$

$(n\to\infty)$.因为

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{1}{m+1}\frac{(m+1)(n+1)^m-(n+1)^{m+1}+n^{m+1}}{(n+1)^m-n^m}$$

$$=\frac{1}{m+1}\left[(m+1)(n^m+mn^{m-1}+\cdots+1)-\left(n^{m+1}+(m+1)n^m\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{m(m+1)}{2}n^{m-1}+\cdots+1\right)+n^{m+1}\right]\Big/(mn^{m-1}+\cdots+1)$$

$$=\frac{1}{m+1}\frac{[m(m+1)/2]n^{m-1}+\cdots+m}{mn^{m-1}+\cdots+1},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{1}{2}$.根据 Stolz 定理知 $I_n\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$.

例 2.1.37　试证明下列渐近公式:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^\alpha\sim\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(n\to\infty,\alpha>-1)$.　　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\alpha k}\sim n^{\alpha n}(n\to\infty,\alpha>0)$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k/k^\alpha)\sim\ln n\cdot n^{1-\alpha}/(1-\alpha)(n\to\infty,\alpha>1)$.

证明　(1) 只需指出 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k^n/n^{\alpha+1}=1/(\alpha+1)(\alpha>-1)$.应用 Stolz 定理,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha(1+1/n)^\alpha}{n^\alpha[(n+1)(1+1/n)^\alpha-n]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^\alpha}{(n+1)[1+\alpha/n+O(n^{-2})-n]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^\alpha}{\alpha+1+O(1/n)}=\frac{1}{\alpha+1}.$$

(2) 只需指出 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\alpha k}/n^{\alpha n}=1(\alpha>0)$.应用 Stolz 定理,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)^{\alpha(n+1)}-n^{\alpha n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n}(n+1)^{-\alpha}}=1.$$

(3) 只需指出 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k^\alpha}\Big/n^{1-\alpha}\cdot\ln n=\frac{1}{1-\alpha}(\alpha<1)$.应用 Stolz 定理,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)/(n+1)^\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}\ln(n+1)-n^{1-\alpha}\cdot\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1-n(1+1/n)^\alpha\ln n/\ln(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1-n[1+\alpha/n+O(n^{-2})]\ln n/\ln(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-\ln n/\ln(n+1))+(1-\alpha)\ln n/\ln(n+1)+O(n^{-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln(1+1/n)/(\ln n+\ln(1+1/n))+(1-\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

注 1　$\sum_{k=1}^{n} a^k \cdot k! \sim a^n \cdot n!\,(n\to\infty, a>0)$.

注 2　$\sum_{k=1}^{n} (k!)^{-\alpha/k} \sim \frac{e^{\alpha}}{1-\alpha} n^{1-\alpha}\ (n\to\infty, 0<\alpha<1)$.

注 3　数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$虽然满足 $a_n \cdot b_n \to 0\,(n\to\infty)$,但可以不是无穷小量.例如:

$$a_n: 1, 2, \frac{1}{2^2}, 3, \frac{1}{3^2}, \cdots, n, \frac{1}{n^2}, \cdots;$$

$$b_n: 1, \frac{1}{2^2}, 2, \frac{1}{3^2}, 3, \cdots, \frac{1}{n^2}, n, \cdots,$$

此外,如果其中有一个是收敛列,则$\{a_n\}$,$\{b_n\}$中必有一个是无穷小量.

2.2　收敛数列的典型——单调有界数列

定理 2.2.1　设$\{a_n\}$是递增(减)有上(下)界的数列,则$\{a_n\}$是收敛列,且其极限值为 $\sup_{n\geqslant 1}\{a_n\}\left(\inf_{n\geqslant 1}\{a_n\}\right)$.

下述两个范例,读者应牢记:

(1)(e 列)$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n=1,2,\cdots)$是严格递增的收敛列,其极限值为 e;$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$是严格递减的收敛列,其极限值也是 e(e=2.71828⋯).

(2) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$是严格递减的正数列,且可记为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

其中 c 称为 Euler 常数.

2.2.1　数列单调性、有界性判别

判别数列是否单调? 基本方法是:一比二减三公式.

例 2.2.1　判别下述数列$\{a_n\}$的单调性:

(1) $a_n=\frac{n!}{2^{n^2}}$.　(2) $a_n=\frac{n!}{(2n+1)!!}$.　(3) $a_n=\sum_{k=1}^{n} b_k/n\,(b_k\geqslant b_{k+1})$.

解　(1) 因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}\cdot\frac{2^{n^2}}{n!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2^{2n}}<1$,所以$\{a_n\}$是递减列.

(2) 因为 $a_{n+1}/a_n=(n+1)/(2n+3)<1$,所以$\{a_n\}$是递减列.

(3) 由题设知 $nb_{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n} b_k$,故有

$$n\sum_{k=1}^{n+1} b_k \leqslant (n+1)\sum_{k=1}^{n} b_k,\qquad \sum_{k=1}^{n+1} b_k\Big/(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k\Big/n.$$

这说明$\{a_n\}$是递减列.

例 2.2.2 试论下述数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的单调性:

(1) $a_{n+1}=a_n^2-b\ (b>2, a_1=b^2-b)$.

(2) 设 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$, $S_n=\sum_{k=1}^{m} a_k^n/m$, $a_n=\sqrt[n]{S_n}$.

(3) $a_n=2^n(b_n-1)\ (b_n=\sqrt[2^n]{a}, 1\neq a>0)$.

(4) $a_n=2^n(1-1/b_n)\ (b_n=\sqrt[2^n]{a}, 1\neq a>0)$.

解 (1) 因为 $a_2=a_1^2-b=(b^2-b)^2-b>a_1$,所以由 $a_{n+1}-a_n=(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$可知,$\{a_n\}$是递增列.

(2) (i) 因为我们有不等式 $\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^{n+1}\cdot a_k^{n-1}}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{m} a_k^{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{m} a_k^{n-1}$,所以 $S_n^2\leqslant S_{n+1}\cdot S_{n-1}$.

(ii) 由 $a_1\leqslant a_2$ 以及$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2\leqslant m\cdot\sum_{k=1}^{m} a_k^2$,根据归纳法可知 $S_{n-1}\leqslant S_n^{(n-1)/n}$.

综合(i)与(ii)可得 $a_{n+1}=\sqrt[n+1]{S_{n+1}}\geqslant\sqrt[n+1]{S_n^2/S_{n-1}}\geqslant\sqrt[n+1]{S_n^2/S_n^{(n-1)/n}}=a_n$.这说明$\{a_n\}$是递增列.

(3) 根据题设,我们有

$$\begin{aligned}a_n&=2^n(b_n-1)=2^n(a^{1/2^n}-1)=2^n(b_{n+1}^2-1)\\&=2^n(b_{n+1}-1)(b_{n+1}+1)=2^{n+1}(b_{n+1}-1)(b_{n+1}+1)/2.\end{aligned}$$

由此可知:若 $a>1$,则 $a_n>a_{n+1}$,$\{a_n\}$递减;若 $a<1$,则 $a_n<a_{n+1}$,$\{a_n\}$递增.

(4) 根据题设,我们有

$$a_n=2^n(1-1/b_n)=2^{n+1}(1-1/b_{n+1})(1+1/b_{n+1})/2.$$

由此可知:若 $a>1$,则 $a_n<2^{n+1}(1-1/b_{n+1})=a_{n+1}$,即$\{a_n\}$是递增列;若 $a<1$,则 $a_n>2^{n+1}(1-1/b_{n+1})=a_{n+1}$,即$\{a_n\}$是递减列.

注 其极限值参阅函数极限 2.5 节.

例 2.2.3 解答下列问题:

(1) 设$\{a_n^3-a_n\}$是有上界列,试问$\{a_n\}$是有上界的数列吗?

(2) 设$\{a_n^2-a_n\}$是有上界的数列,试问$\{a_n\}$是有上界的数列吗?

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$,试问$\{a_n\}$是有界列吗?

(4) 设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}-2a_n)=0$,试问$\{a_n\}$是有界列吗?

(5) 设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}-\sqrt{2}a_n)=0$,试问$\{a_n\}$是有界列吗?

解 (1) $\{a_n\}$有上界.若不然,则存在 $a_{n_k}\to+\infty(k\to\infty)$.从而可得

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}^3-a_{n_k})=\lim_{n\to\infty}a_{n_k}(a_{n_k}^2-1)=+\infty.$$

这与题设矛盾.证毕.

(2) 由题设知存在 $M>0$,使得

$$(a_n-1/2)^2=a_n^2-a_n+1/4\leqslant M\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

由此可知$|a_n-1/2|\leqslant\sqrt{M}$,即$|a_n|\leqslant\sqrt{M}+1/2$.故$\{a_n\}$是有上界的数列.

(3) 不一定,例如 $a_n=\sqrt{n}(n\in\mathbf{N})$.

(4) 不一定,例如 $a_n=\sqrt{n^2+1}(n\in\mathbf{N})$.

(5) 不一定,例如 $a_n=\sqrt{n}(n\in\mathbf{N})$.

例 2.2.4 试论下述数列$\{a_n\}$的有界性:

(1) $a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}(a_1,a_2>0)$.

(2) $a_{n+1}=a_n+1/a_n^2(a_1>0)$.

解 (1) 令 $M\geqslant\max\{a_1,a_2,4\}$,则

$$a_3\leqslant\sqrt{M}+\sqrt{M}=2\sqrt{M}\leqslant(\sqrt{M})^2=M.$$

根据归纳法可推 $a_n\leqslant M$.

(2) 易知$\{a_n\}$是递增正数列.若$\{a_n\}$有界,则必是收敛列.设 $a_n\to a(n\to\infty)$,由递推式可知 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+1/a_n^2)=a+\dfrac{1}{a^2}$,即 $1/a^2=0$,这不可能.故$\{a_n\}$是无界列.

注 实际上,因为我们有 $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N})$,所以

$$a_{n+1}^3-a_n^3=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2)=(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2)/a_n^2>3.$$

从而可得 $a_{n+1}^3>3+a_n^3>3+3+a_{n-1}^3>\cdots>3n+a_1^3=3n+1$.因此 $a_n>\sqrt[3]{3n}(n=2,3,\cdots)$.

例 2.2.5 试判别下述数列$\{a_n\}$的有界性:

(1) $\{a_n\}$满足:$\lim\limits_{n\to\infty}n(a_{n+1}-a_n)=+\infty$.

(2) $\{a_n\}$满足:$|a_n-a_m|>1/n(n<m)$.

(3) $a_{n+2}\leqslant pa_n+(1-p)a_{n+1}(0<p<1,a_n>0)$.

解 (1) 由题设知

$$+\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{1(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+n(a_{n+1}-a_n)}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+a_{n+1}\right).$$

从而$\{a_n\}$是无界列.

(2) 反证法.若存在 $M>0$,使得$|a_n|\leqslant M(n\in\mathbf{N})$,则作区间列$\{(a_n-1/2n,a_n+1/2n)\}$.依题设知,这些区间均互不相交,但又全部含于区间$\left(-M-\dfrac{1}{2},M+\right.$

$\left.\frac{1}{2}\right)$内.这是不可能的,因为$\left(-M-\frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}\right)$的长度是$2M+1$,而前述区间列的前$N$个区间之总长就有$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$,它是一个正无穷大量.这一矛盾说明$\{a_n\}$是无界列(参阅定理2.3.1注2).

(3) 令$M=\max\{a_1, a_2\}$,则易知

$$0 < a_3 \leqslant pM + (1-p)M = M.$$

现在假定$a_k \leqslant M$, $a_{k+1} \leqslant M$,则又知$0 < a_{k+2} \leqslant pM + (1-p)M = M$.故根据归纳法,$\{a_n\}$是有界列.

例 2.2.6　试证明下列命题:

(1) 设正数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2} \leqslant (a_{n+1} + a_n)/(n+2)^2$ $(n \in \mathbf{N})$,则存在$M>0$,使得$a_n \cdot n! \leqslant M$ $(n \in N)$.

(2) 设区间列$I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$中任两个均有公共点,则存在点$\xi \in [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$.

证明　(1) 选$M>0$,使得$a_1 < M/1!$, $a_2 < M/2!$,则有

$$a_3 \leqslant \frac{M}{3^2}\left(1+\frac{1}{2!}\right) = \frac{M}{3^2}\frac{3}{2!} = \frac{M}{3!}.$$

现在假定$a_n \leqslant M/n!$, $a_{n+1} \leqslant M/(n+1)!$,则

$$a_{n+2} \leqslant \frac{a_{n+1}+a_n}{(n+2)^2} \leqslant \frac{M}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{M}{(n+2)!}.$$

根据归纳法即得所证.

(2) 由题设知$a_n \leqslant b_m$ $(n, m \in \mathbf{N})$.由此又知$\{a_n\}$有上界.若记其上确界为ξ,则$a_n \leqslant \xi \leqslant b_m$ $(n, m \in \mathbf{N})$.

2.2.2　数列收敛性判别

例 2.2.7　判别下述数列$\{a_n\}$的收敛性:

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$.　(2) $a_{n+1} - a_n > -1/n^2$ $(|a_n| \leqslant M)$.

解　(1) 由$a_{n+1} - a_n = 1/(n+1)^{n+1}$可知,$\{a_n\}$是递增列.因为

$$\begin{aligned}
a_n &< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2 \qquad (n = 1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$

所以$\{a_n\}$又是有界列.即$\{a_n\}$收敛.

(2)因为 $a_{n+1}-a_n>-\frac{1}{n^2}>-\frac{1}{n(n-1)}=-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}(n>1)$,所以令 $b_n=a_n-1/(n-1)$,就知$\{b_n\}$是递增列.又由$\{a_n\}$是有界列,故$\{b_n\}$也是有界列.这说明$\{b_n\}$是收敛列,从而$\{a_n\}$也是收敛列.

* **例 2.2.8**　试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性:

(1) $a_{n+1}=a_n^2+1/4$.　　(2) $a_{n+1}=1+qa_n^2(q>0,0<a_1<1)$.

(3) $a_{n+1}=2-a_n^2$.　　(4) $a_{n+1}=a_n(a_n-1)$.

解　(1)依题设知,不论 a_1 的取值为何,$a_n\geqslant 1/4(n\geqslant 2)$.假定存在$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,由 $a^2-a+1/4=0$可知 $a=1/2$.

(i)若 $a_2>1/2$,可令 $a_2=1/2+\varepsilon(\varepsilon>0)$,则由题设知 $a_3=(1/2+\varepsilon)^2+1/4=1/2+\varepsilon+\varepsilon^2>a_2$.从而根据 $a_{n+1}-a_n=(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$推知,$\{a_n\}$是递增列.这说明$\{a_n\}$是发散列.

(ii)若 $a_2=1/2$,则 $a_3=1/2$.由此易推 $a_n=1/2(n\in\mathbf{N})$.这说明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1/2$.

(iii)若 $1/4\leqslant a_2<1/2$,或令 $a_2=1/2-\varepsilon\left(0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}\right)$,则 $a_3=(1/2-\varepsilon)^2+1/4=1/2-\varepsilon(1-\varepsilon)>a_2$,且 $a_3<1/2$,从而又可推知$\{a_n\}$是递增有上界 $1/2$ 的数列,这说明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1/2$.

(2)(i)若有 $a_n\to a(n\to\infty)$,则由 $qa^2-a+1=0$ 可知,必须有 $q\leqslant 1/4$.(ii)易知 $a_{n+1}>1(n\in\mathbf{N})$.又由 $a_1<2$ 知 $a_2<2$,由 $a_n<2$ 知 $a_{n+1}\leqslant 1+a_n^2/4<1+4/4=2$,故根据归纳法可得 $a_n<2(n\in\mathbf{N})$.(iii)因为 $a_{n+1}-a_n=q(a_n^2-a_{n-1}^2)(n=2,3,\cdots)$,再顾及 $a_2>a_1$,可知$\{a_n\}$是递增列,从而是收敛列.

(3)由题设易知 $a_n\leqslant 2(n\geqslant 2)$,且若存在$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 $a=1$ 或 -2.

(i)若 $a_1<-2$,或令 $a_1=-2-\varepsilon(\varepsilon>0)$,则 $a_2=2-(2+\varepsilon)^2=-2-4\varepsilon-\varepsilon^2<a_1$,由此易推$\{a_n\}$是递减列,$\{a_n\}$发散;若 $a_1>2$,则 $a_2<-2$,而归结为前述情形.

(ii)若 $a_1=-2$,则 $a_2=-2$,易知 $a_n=-2(n\in\mathbf{N})$;若 $a_1=2$,则 $a_2=-2$,从而推知 $a_n=-2(n\geqslant 2)$;若 $a_1=\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$,则 $a_2=0$,$a_3=2$,$a_4=-2$,由此易推 $a_n=-2(n\geqslant 4)$;若 $a_1=1$,则 $a_2=1$,从而易推 $a_n=1(n\geqslant 1)$;若 $a_1=-1$,则 $a_2=1$,由此又可推 $a_n=1(n\geqslant 3)$.

(iii)对$\{a_n\}$不属于上述的情形,若存在$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则有两种可能:

A. $a=-2$,此时不妨假定 $-2<a_n<-2+\varepsilon_0(\varepsilon_0>0$ 充分小),以及存在 n_0,使得 $a_n\leqslant a_{n_0}(n\in\mathbf{N})$,且记为 $a_{n_0}=-2+\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$,则有

$$a_{n_0+1}=2-(-2+\varepsilon)^2=-2+4\varepsilon-\varepsilon^2=(-2+\varepsilon)+\varepsilon(3-\varepsilon).$$

由此知 $a_{n_0+1}>a_{n_0}$,矛盾.这说明$\{a_n\}$不收敛到-2.

B. $a=1$.此时不妨假定存在 $1<a_{n_k}<1+\varepsilon_0(k\in\mathbf{N},\varepsilon_0>0$ 充分小),以及 $a_n\leqslant a_{n_1}(n\in\mathbf{N})$,则易知 $a_{n_1+2}>a_{n_1}$,导致矛盾.对 $1-\varepsilon_0<a_{n_k}<1$ 也可类推.

这说明$\{a_n\}$发散.

(4)如果存在$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则由题设知

$$a=a^2-a,\quad a(a-2)=0,\quad a=2 \text{ 或 } 0.$$

(i)若 $a_1>2$,则 $a_2>a_1$,且易知$\{a_n\}$是递增列.这说明$\{a_n\}$是发散列;若 $a_1<-1$,则 $a_2>2$.

由此又知$\{a_n\}$是发散列.

(ii)若$a_1=2$,则$a_2=2$,且易推$a_n=2(n\geqslant 2)$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$;若$a_1=-1$,则$a_2=2$,由此又知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$;若$a_1=0$,则$a_2=0$,且易推$a_n=0(n\geqslant 1)$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;若$a_1=1$,则$a_2=0$,由此又得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(iii)对$\{a_n\}$不属于上述情形(且$-1<a_n<2$).

首先,在$1\leqslant a_1<2$时,易知有$a_2<a_1$,且必存在n_0,使得a_{n_0}满足$0<a_{n_0}\leqslant 1$;在$-1<a_1\leqslant(1-\sqrt{5})/2$时,易知有$1\leqslant a_2<2$,这归结为前述情形;在$(1-\sqrt{5})/2<a_1<0$时,易知有$0<a_2<1$. 其次,只需考察$0<a_1<1$的情形,此时易推$a_{2n}<a_{2n+2}<\cdots<0<\cdots<a_{2n+1}<a_{2n-1}$.从而有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例 2.2.9 设$a_{n+1}=A+Ba_n^3(n\in\mathbf{N},A,B>0$且$A+B=1,0<a_1\leqslant A)$.试论$\{a_n\}$的敛散性.

解 由题设知$a_n>0(n\in\mathbf{N})$.又由$a_2=A+Ba_1^3<A+B=1$,易推$a_n<1(n\in\mathbf{N})$.这说明$\{a_n\}$是有界列.因为$a_2>A\geqslant a_1$,所以根据公式

$$a_{n+1}-a_n=(a_n^3-a_{n-1}^3)B=B(a_n-a_{n-1})(a_n^2+a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2),$$

可得$\{a_n\}$是递增列.这说明$\{a_n\}$是收敛列.

例 2.2.10 试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性:

(1) $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+2(a_1>4)$. (2) $a_{n+2}=\sqrt{a_na_{n+1}}(a_0,a_1>0)$.

(3) $a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}(a_1,a_2>0)$. (4) $2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+2^{-n}}(a_1>0)$.

解 (1)设$a_1=4+\varepsilon(\varepsilon>0)$,则$a_2=\sqrt{4+\varepsilon}+2<2+\sqrt{\varepsilon}+2<4+\sqrt{\varepsilon}<a_1$,从而根据$a_{n+1}-a_n=(a_n-a_{n-1})/(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}})$,易推$\{a_n\}$是递减列(再注意到$a_n>0$).这说明$\{a_n\}$是收敛列.

(2) (i)若$a_1<a_2$,则易知$a_1<a_3<a_5<\cdots<a_6<a_4<a_2$.故存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$,且有

$$\left(\lim_{n\to\infty}a_{2n+2}\right)^2=\lim_{n\to\infty}a_{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}.$$

由此知$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$.在$n\geqslant 3$时,由$a_n^2=a_{n-1}a_{n-2}$可得

$$\prod_{k=3}^{n}a_k^2=\prod_{k=3}^{n}a_{k-1}a_{k-2},\qquad a_n^2a_{n-1}=a_1a_2^2.$$

从而令$n\to\infty$,即知$a^3=a_1a_2^2$,$a=(a_1a_2^2)^{1/3}$.

(ii)类似地可论$a_1>a_2$.若$a_1=a_2$,则$a_n=a_1(n\in\mathbf{N})$.

(3)记$\alpha_0=\min\{a_0,a_1,4\}$,$\beta_0=\max\{a_0,a_1,4\}$,以及令$\alpha_n=2\sqrt{\alpha_{n-1}}$,$\beta_n=2\sqrt{\beta_{n-1}}(n\in\mathbf{N})$,则易知

$$\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots\leqslant 4,\quad\beta_0\geqslant\beta_1\geqslant\cdots\geqslant\beta_n\geqslant\cdots\geqslant 4.$$

已知$\alpha_0\leqslant a_0$,$\alpha_0\leqslant a_1$,故$\alpha_0\leqslant\min\{a_0,a_1\}$.假定对$k-1$,有$\alpha_{k-1}\leqslant\min\{a_{2n-2},$

$a_{2n-1}\}$,则得

$$a_{2n}=\sqrt{a_{2n-1}}+\sqrt{a_{2n-2}}\geqslant 2\sqrt{\alpha_{n-1}}=\alpha_n,$$
$$a_{2n+1}=\sqrt{a_{2n}}+\sqrt{a_{2n-1}}\geqslant\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\alpha_{n-1}}\geqslant 2\sqrt{\alpha_{n-1}}=\alpha_n.$$

从而根据归纳法,可知 $\alpha_n\leqslant\min\{a_{2n},a_{2n+1}\}$.同理可推 $\beta_n\geqslant\max\{a_{2n},a_{2n-1}\}$.因此,我们有

$$\alpha_n\leqslant a_{2n}\leqslant\beta_n,\quad \alpha_n\leqslant a_{2n+1}\leqslant\beta_n(n\in\mathbf{N}),\quad \lim_{n\to\infty}a_n=4.$$

(4)(i)因为我们有

$$a_{n+1}=(a_n+\sqrt{a_n^2+2^{-n}})/2<(a_n+a_n+2^{-n/2})/2=a_n+2^{-1}\cdot 2^{-n/2},$$
$$a_{n+1}-a_n<2^{-1}\cdot 2^{-n/2}(n\in\mathbf{N}),$$

又注意到 $a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})+a_1$,所以$\{a_n\}$是有界列.

(ii)由题设知 $2a_{n+1}>2a_n(n\in\mathbf{N})$,故知$\{a_n\}$是递增列.这说明$\{a_n\}$是收敛列.

例 2.2.11 试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性:

(1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n^{\alpha}}(\alpha>0,a_1>0)$.

(2) $a_1>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{m}[(m-1)a_n+a/a_n^{m-1}](m\in\mathbf{N},a>0)$.

(3) $a_1>-1/2,a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)$.

解 (1)易知 $0<a_{n+1}<a_n(n\in\mathbf{N})$,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2)由于 $a_{n+1}\geqslant\sqrt[m]{a_n^{m-1}\dfrac{a}{a_n^{m-1}}}=\sqrt[m]{a}$.故有

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{a_n}{m}+\frac{a}{ma_n^{m-1}}=-\frac{a_n^m-a}{ma_n^{m-1}}\leqslant 0\quad(n\geqslant 2).$$

这说明$\{a_n\}$收敛,且 $a_n\to\sqrt[m]{a}(n\to\infty)$.

(3)由题设知 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2a_n^3+1}{a_n^2}$.而 $2a_n^3+1-3a_n^2=(1+2a_n)(1-a_n)^2$ 说明 $a_2>1$.从而可推 $a_n>1(n\geqslant 2)$.根据 $a_{n+1}<(2a_n+1)/3<3a_n/3=a_n$,得到$\{a_n\}$是递减列.故$\{a_n\}$是收敛列.

例 2.2.12 试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性:

(1) $a_n=b_n/b_{n+1}(b_1=0,b_2=1,b_{n+2}=b_n+b_{n+1})$.

(2) $a_n=nb_n(b_{n+1}=b_n(1-qb_n),0<b_1<1/q)$.

(3) $b_n>0(n\in\mathbf{N}),a_n=\sqrt[p]{b_1+\sqrt[p]{b_2+\cdots+\sqrt[p]{b_n}}}(p>1)$.

(4) $a_n=\dfrac{b_n}{n}\left(\dfrac{b_n}{n}\leqslant M,b_{mn}\geqslant mb_n(m\in\mathbf{N})\right)$.

解 (1) 易知 $b_3=1$, $b_4=2$, $5b_4/3\geqslant b_5\geqslant 3b_4/2$. 假定 $n=k$ 时有 $5b_k/3\geqslant b_{k+1}\geqslant 3b_k/2(k>4)$, 则得

$$\frac{3}{2}b_{k+1}<\frac{8}{5}b_{k+1}=b_{k+1}+\frac{3}{5}b_{k+1}\leqslant b_{k+2}\leqslant b_{k+1}+\frac{2}{3}b_{k+1}\leqslant\frac{5}{3}b_{k+1}.$$

根据归纳法可知 $3b_n/2\leqslant b_{n+1}\leqslant 5b_n/3(n\geqslant 4)$. 从而又得 $b_{n+1}^2\leqslant\frac{5}{3}b_n\cdot\frac{2}{3}b_{n+2}<b_nb_{n+1}$, 即 $\frac{b_n}{b_{n+1}}>\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}\geqslant\frac{3}{5}(n\geqslant 4)$. 这说明 $\{b_n/b_{n+1}\}$ 是递减有界列. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{b_n}{b_{n+1}}=a$, 则由等式

$$1=\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}+\frac{b_n}{b_{n+2}}=\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}+\frac{b_n}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}},$$

我们有(令 $n\to\infty$) $1=a+a^2$, 即 $a=(-1+\sqrt{5})/2$.

(2) (i) 由 $b_2=b_1(1-qb_1)=b_1-qb_1^2$, 可得 $0<b_2<b_1<1/q$. 故不难推知 $\{b_n\}$ 是递减列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

(ii) 因为 $1/b_{n+1}-1/b_n=q/(1-qb_n)\to q(n\to\infty)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k}\right)\Big/n=q,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{nb_n}-\frac{1}{nb_1}\right)=q.$$

由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=1/q$.

(3) $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 数列 $\{\ln b_n/p^n\}$ 是有上界列.

必要性: 设 $a_n\to a(n\to\infty)$, 由 $a_n\leqslant a_{n+1}$ 可知

$$\sqrt[p]{b_1+\sqrt[p]{b_2+\cdots+\sqrt[p]{b_n}}}\leqslant a\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

从而又有 $\sqrt[p]{\sqrt[p]{\cdots\sqrt[p]{b_n}}}\leqslant a$, 即 $b_n\leqslant a^{p^n}$ 或 $\ln b_n/p^n\leqslant\ln a$.

充分性: 若存在 $M>0$, 使得 $\ln b_n/p^n\leqslant\ln M$, 即 $b_n\leqslant M^{p^n}$, 则有

$$a_n\leqslant\sqrt[p]{M^p+\sqrt[p]{M^{p^2}+\cdots+\sqrt[p]{M^{p^n}}}}=M\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\cdots+\sqrt[p]{1}}}.$$

而上式右端小于等于 $2^{\frac{1}{p-1}}$, 故 $\{a_n\}$ 是递增有上界列, 即收敛列.

注 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}(n\in\mathbf{N})$ 是收敛列.

(4) 不妨设 $A>0$, 则由题设知, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_N}{N}\leqslant A,\qquad A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{mN}}{mN}\leqslant A.$$

从而在 $n\geqslant N$ 且 $mN\leqslant n<(m+1)/N$ 时, 有 $\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_{mN}}{(m+1)N}=\frac{a_{mN}}{mN}\frac{m}{m+1}$, 即当 n 充分大时, 可得 $\frac{a_n}{n}>A-\frac{\varepsilon}{2}$. 证毕.

例 2.2.13 试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性：

(1) $a_{n+2}\leqslant 2a_n/3+a_{n-1}/3(|a_n|\leqslant M)$. (2) $a_{n+1}+1/a_n<2(a_n>0)$.

(3) $a_n(1-a_{n+1})>1/4(0<a_n<1)$. (4) $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}(a_n>0)$.

(5) $a_{n+1}\leqslant a_n+q^n(0<q<1,a_n>0)$.

解 (1) 将原式改写为 $a_{n+2}+2a_{n+1}/3\leqslant a_{n+1}+2a_n/3$，且令 $b_n=a_{n+1}+2a_n/3$，易知$\{b_n\}$是有界递减列．不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5b/3$ 以及 $c_n=a_n-b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-2c_n/3)=0$．由此可得$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$，从而$\{a_n\}$是收敛列．

(2) 由题设知 $a_{n+1}+1/a_n<2\leqslant a_n+1/a_n$，这说明$\{a_n\}$是有界递减列，$\{a_n\}$收敛．进一步，若令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $2\leqslant a+1/a\leqslant 2$，即 $a=1$．

(3) 引用几何-算术平均不等式，我们有

$$\frac{a_n+(1-a_{n+1})}{2}\geqslant\sqrt{a_n(1-a_{n+1})}>\frac{1}{2}.$$

由此知$\{a_n\}$是有界递减列，若记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则得

$$a(1-a)\geqslant 1/4,\quad a-a^2\geqslant 1/4,\quad (a-1/2)^2\leqslant 0.\quad a=1/2.$$

(4) (i) 由 $a_{n+1}\leqslant a_n-a_n^2=1/4-(a_n-1/2)^2\leqslant 1/4$，可知 $a_{n+1}\leqslant 1/2(n\in\mathbf{N})$．(ii)易知 $f(x)=x-x^2$ 在$(0,1/2)$上是递增函数且 $a_2<1/2$．假定 $a_k<1/k$，则有

$$a_{k+1}=f(a_k)<f(1/k)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k^2(k+1)}<\frac{1}{k+1}.$$

根据归纳法可得 $a_n<1/n(n\geqslant 2)$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．

(5) 已知 $1/(m-k)\leqslant a_1\leqslant m$，假定 $1/(m-k)\leqslant a_j\leqslant m$，则得

$$a_{j+1}<\frac{k}{m}\cdot m+(m-k)=m,$$

$$a_{j+1}>\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{m-k}+\frac{1}{m}=\frac{k+(m-k)}{m(m-k)}=\frac{1}{m-k}.$$

根据归纳法可知，$\{a_n\}$是有界列．

例 2.2.14 试证明下列命题：

(1) 设 $a_n\in(0,1)(n\in\mathbf{N})$，且 $a_n<(a_{n-1}+a_{n+1})/2(n=2,3,\cdots)$，则$\{a_n\}$是收敛列．

(2) 设 $0<\lambda<1$，且$\{a_n\}$是递增列．若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n/a_{n+1}=a\geqslant\lambda$，则$\{b_n\}$是收敛列，其中 $b_1=0,b_n=\lambda a_{n-1}/[a_{n-1}+(\lambda-b_{n-1})a_n](n=2,3,\cdots)$．

证明 (1) 由题设知 $2a_n<a_{n-1}+a_{n+1}$，即 $a_n-a_{n-1}<a_{n+1}-a_n$．

(i) 若存在 n_0，使得 $a_{n_0}-a_{n_0-1}>0$，则 $a_{n_0-1}<a_{n_0}<a_{n_0+1}$．由此知$\{a_{n_0+k}\}$是递增列，且根据不等式

$$a_n-a_{n_0}=\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$> \sum_{k=n_0}^{n-1} (a_{n_0} - a_{n_0-1}) = (n-1-n_0)(a_{n_0} - a_{n_0-1}),$$

可得 $a_n \to +\infty (n\to\infty)$.这与$\{a_n\}$是有界列矛盾.

(ii)由(i)知 $a_n - a_{n-1} \leqslant 0 (n=2,3,\cdots)$,即$\{a_n\}$是递减列.注意到 $a_n \in (0,1)$ $(n\in \mathbf{N})$,故$\{a_n\}$是收敛列.

(2)已知 $b_1 < \lambda$.假定 $b_{n-1} < \lambda$,则由 $b_n < \lambda a_{n-1}/a_{n-1} = \lambda$,以及归纳法,可知 $b_n < \lambda (n\in \mathbf{N})$.由题设知,对任给 $\varepsilon: 0<\varepsilon<\lambda$,存在 n_0,使得 $a_{n-1}/a_n \geqslant \lambda - \varepsilon/2 (n \geqslant n_0)$.从而根据 $\lambda - b_n = \lambda(\lambda - b_{n-1})/[a_{n-1}/a_n + (\lambda - b_{n-1})]$,可知

$$|\lambda - b_n| \leqslant \begin{cases} |\lambda - b_{n-1}|, & |\lambda - b_{n-1}| \geqslant \varepsilon/2, \\ \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - \varepsilon/2}\right)\dfrac{\varepsilon}{2} < 2\cdot \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, & |\lambda - b_{n-1}| < \varepsilon/2. \end{cases}$$

因此,若令 $r_n = \begin{cases} 0, & \lambda - b_n < \varepsilon, \\ \lambda - b_n, & 其它, \end{cases}$ 则知$\{r_n\}$是递减列,且记 $r_n \to r (n\to\infty)$.

若 $r\neq 0$,则从某个自然数 n_1 开始,就有 $r_n = \lambda - b_n$,且存在 b,使得 $b_n \to b (n\to\infty)$, $b=\lambda/[1+(\lambda - b)/a]$.即 $b=\lambda$ 或 $b=a\geqslant \lambda$.由此可得 $b=\lambda, r=0$,导致矛盾.

由上知 $r=0$.故对充分大的 n 有 $r_n < \varepsilon$.这说明 $b_n \to \lambda (n\to\infty)$.

例 2.2.15 解答下列问题:

(1)设 $a_1 > b_1 > c_1 > 0$,且对 $n\in \mathbf{N}$ 定义

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad b_n = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad \frac{1}{c_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}\right).$$

则$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为收敛列,且有相同的极限.

(2)设 $a_1>0, b_1>0, c_1>0$,且有 $a_1+b_1+c_1=1$.令

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n c_n, \quad b_{n+1} = b_n^2 + 2a_n c_n, \quad c_{n+1} = c_n^2 + 2a_n b_n \qquad (n\in \mathbf{N}),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1/3$.

证明 (1)易知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为正数列,且有 $c_n \leqslant b_n \leqslant a_n (n\in \mathbf{N})$.注意到 $c_n \leqslant a_{n+1} = (a_n+b_n+c_n)/3 \leqslant a_n$,以及

$$\frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}\right) \leqslant \frac{1}{c_n} \qquad (n\in \mathbf{N}),$$

可得 $c_n \leqslant c_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n (n\in \mathbf{N})$.此外,因为我们有

$$a_{n+1} - c_{n+1} \leqslant a_{n+1} - c_n = (a_n + b_n - 2c_n)/3 \leqslant 2(a_n - c_n)/3,$$

所以根据归纳法,可推 $a_n - c_n \leqslant (2/3)^n (a_0 - c_0) (n\in \mathbf{N})$.

这说明$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$.由此即可得证.

(2)(i)由题设知 $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} = (a_n+b_n+c_n)^2$,从而可得 $a_n+b_n+c_n = 1 (n\in \mathbf{N})$,且$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为正数列.

(ii)对 $n\in \mathbf{N}$,记 $\alpha_n = \max\{a_n, b_n, c_n\}$,$\beta_n = \min\{a_n, b_n, c_n\}$,若存在 n_0,使得 $a_{n_0} \geqslant$

$b_{n_0} \geqslant c_{n_0}$，则

$$\begin{cases} a_{n_0+1} = a_{n_0}^2 + b_{n_0}c_{n_0} + b_{n_0}c_{n_0} \leqslant a_{n_0}^2 + a_{n_0}b_{n_0} + a_{n_0}c_{n_0} = a_{n_0}, \\ b_{n_0+1} = a_{n_0}c_{n_0} + b_{n_0}^2 + a_{n_0}c_{n_0} \leqslant a_{n_0}b_{n_0} + a_{n_0}^2 + a_{n_0}c_{n_0} = a_{n_0}, \\ c_{n_0+1} = a_{n_0}b_{n_0} + a_{n_0}b_{n_0} + c_{n_0}^2 \leqslant a_{n_0}^2 + a_{n_0}b_{n_0} + a_{n_0}c_{n_0} = a_{n_0}. \end{cases}$$

类似地可推知 $a_{n_0+1} \geqslant c_{n_0}$，$b_{n_0+1} \geqslant c_{n_0}$，$c_{n_0+1} \geqslant c_{n_0}$。因此，我们有

$$\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n \leqslant \beta_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1.$$

现在令 $a_{n_0} - b_{n_0} = l_2 \geqslant 0$，$b_{n_0} - c_{n_0} = l_1 \geqslant 0$，$a_{n_0} - c_{n_0} = l_1 + l_2 = L$，则

$$\begin{aligned} |a_{n_0+1} - b_{n_0+1}| &= |a_{n_0} - b_{n_0}||a_{n_0} + b_{n_0} - 2c_{n_0}| \\ &= l_2(L + l_1) = (L - l_1)(L + l_1) \leqslant L^2, \\ |a_{n_0+1} - c_{n_0+1}| &= |a_{n_0} - c_{n_0}||a_{n_0} + c_{n_0} - 2b_{n_0}| = L(l_2 - l_1) \leqslant L^2, \\ |c_{n_0+1} - b_{n_0+1}| &= |b_{n_0} - c_{n_0}||2a_{n_0} - b_{n_0} - c_{n_0}| \\ &= l_1(l_2 + L) \leqslant (L - l_2)(L + l_2) \leqslant L^2. \end{aligned}$$

由此可知 $\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \leqslant (\alpha_n - \beta_n)^2 (n \in \mathbf{N})$。从而导出

$$\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \leqslant (\alpha_1 - \beta_1)^{2^n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

注意到 $\alpha_1 < 1$，$\beta_1 > 0$，故得 $\alpha_1 - \beta_1 < 1$。我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) = 0$。记 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \lambda$，且注意到 $\beta_n \leqslant a_n \leqslant \alpha_n (n \in \mathbf{N})$，即知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lambda$。根据 $a_n + b_n + c_n = 1 (n \in \mathbf{N})$，导出 $\lambda = 1/3$。

例 2.2.16 试论下述数列 $\{a_n\}$ 的敛散性：

(1) $a_{n+1} = a_n(a_n^2 + 3a)/(3a_n^2 + a) (a > 0, a_1 > 0)$。

(2) $a_{n+1} = a \cdot \sin a_n (|a| \leqslant \pi/2)$。

解 (1) 因为 $a_n > 0 (n \in \mathbf{N})$，以及 $a_{n+1} = a_n[1 - 2(a_n^2 - a)/(3a_n^2 + a)]$，所以当 $a_n > \sqrt{a}$时，有 $a_{n+1} < a_n$；$a_n < \sqrt{a}$时，有 $a_{n+1} > a_n$；当 $a_n = \sqrt{a}$时，有 $a_{n+1} = \sqrt{a}$。从而可知 $a_n(a_n^2 + 3a)/(3a_n^2 + a) > \sqrt{a} \iff (a_n - \sqrt{a})^3 > 0$。此式又等价于 $a_n > \sqrt{a}$。最后我们有：

若 $0 < a_1 < \sqrt{a}$，则 $\{a_n\}$ 是递增有上界 $\sqrt{a}$；

若 $a_1 > \sqrt{a}$，则 $\{a_n\}$ 是递减有下界 $\sqrt{a}$；

若 $a_1 = \sqrt{a}$，则 $a_n = c$（常数）。

故 $\{a_n\}$ 是极限为 $\sqrt{a}$ 的收敛列。

(2) 不失一般性，可设 $|a_1| \leqslant \pi/2$（否则有 $|a_2| \leqslant \pi/2$）。

(i) $0 < a \leqslant 1$，$0 < a_1 < \pi/2$ 时，则 $a_{n+1} < a_n$。从而知 $\{a_n\}$ 是递减收敛于 0 的，且是 $x = a\sin x$ 的唯一根。

(ii) $1 < a \leqslant \pi/2$，$0 < a_1 \leqslant \pi/2$ 时，则方程 $x = a\sin x$ 有两个非负解：$x_1 = 0$，$x_2 >$

0.若 $a_1<x_2$,则$\{a_n\}$是递增列,且小于 x_2.这是因为

$$a_2=a\sin a_1>a_1,\qquad a_2=a\sin a_1<a\sin x_2=x_2,$$

所以 $a_n<a_{n+1}<x_2$.同理对 $x_2<a_1\leqslant\pi/2$,有 $a_n>a_{n+1}>x_2$.因此 $a_n\to x_2(n\to\infty)$.

若$-\pi/2\leqslant a<0$,$a_1>0$,则对数列 $b_1=a_1$,$b_{n+1}=-a\cdot\sin b_n(n\in\mathbf{N})$,易知 $b_n=(-1)^{n-1}a_n$.从而我们有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1,\\ x_2, & 1<a<\pi/2,\\ \text{不存在}, & -\pi/2\leqslant a\leqslant -1.\end{cases}$

若$-\pi/2\leqslant a_1<0$,则看数列 $b_1=-a_1$,$b_{n+1}=a\sin b_n(n\in\mathbf{N})$.

若 $a_1=0$,则 $a_n=0(n\in\mathbf{N})$.

例 2.2.17 试论下述双数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的敛散性:

(1) $a_1=\alpha>0$,$b_1=\beta>\alpha$,$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$,$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{b_n}\right)$,$n\in\mathbf{N}$.

(2) $a_1=\alpha>0$,$b_1=\beta>0$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$,$b_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}}$,$n\in\mathbf{N}$.

解 (1) 由题设知 $a_1<a_2=\sqrt{a_1b_1}<b_1$,且有$\dfrac{1}{b_1}<\dfrac{1}{b_2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{b_1}\right)<\dfrac{1}{a_2}$.由此知 $a_1<a_2<b_2<b_1$.根据归纳法又得

$$a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}\qquad(n=2,3,\cdots).$$

从而可令 $a_n\to a$,$b_n\to b(n\to\infty)$,且易知 $\alpha<a=b<\beta$.

(2) 由题设知 $a_n>0$,$b_n>0(n=1,2,\cdots)$,且有 $b_{n+1}^2-a_{n+1}^2=(a_n-b_n)^2/4\geqslant 0$,故得 $b_{n+1}\geqslant a_{n+1}$.从而又有 $a_{n+1}\geqslant a_n$,$b_{n+1}\leqslant b_n$,故$\{a_n\}$,$\{b_n\}$皆为收敛列.根据

$$\begin{aligned}|b_{n+1}-a_{n+1}|&=\frac{b_{n+1}^2-a_{n+1}^2}{b_{n+1}+a_{n+1}}=\frac{(b_n-a_n)^2}{4}\frac{1}{b_{n+1}+a_{n+1}}\\&=\frac{|b_n-a_n|}{4}\frac{b_n+a_n}{b_{n+1}+a_{n+1}}\leqslant\frac{|b_n-a_n|}{4}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|b_1-a_1|}{4^n},\end{aligned}$$

可得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

例 2.2.18 判别下述双数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的敛散性:

(1) $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$,$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}(n\in\mathbf{N},b_1>a_1>0)$.

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$,$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_n}{2}(n\in\mathbf{N},a_1=a,b_1=b)$.

(3) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$,$b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}(n\in\mathbf{N},a_1>b_1>0)$.

(4) $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}$,$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}(n\in\mathbf{N},a_1>b_1>0)$.

解 (1) 易知 $a_n\leqslant b_n(n\in\mathbf{N})$,由此又得

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geqslant a_n,\qquad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant b_n\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

故$\{a_n\}$是有界递增列,$\{b_n\}$是有界递减列,均为收敛列.又因为

$$\begin{aligned}b_{n+1}-a_{n+1}&=(a_n+b_n)/2-\sqrt{a_nb_n}\\&=(b_n-a_n)/2-\sqrt{a_n}(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})\leqslant(b_n-a_n)/2,\end{aligned}$$

所以有 $b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant(b_1-a_1)/2^n(n\in\mathbf{N})$.这说明此两数列的极限相同.

(2) (i) 易知 $b_{n+1}=(a_n+3b_n)/4$.由 $a_{n+1}-b_{n+1}=(a_n-b_n)/4$ 可知,数列$\{a_n-b_n\}$是公比为 1/2 的几何级数的通项,故有 $a_n-b_n\to0(n\to\infty)$.

(ii) 若 $a\leqslant b$,则$\{a_n\}$是递增列.由 $a_n\leqslant b_n\leqslant b$ 可知,$\{a_n\}$是收敛列.从而$\{b_n\}$也收敛,且收敛于同一极限值.若 $a\geqslant b$,也可类似推证.

(3) 因为算术平均值不小于调和平均值,所以有

$$a_n\geqslant b_n,\qquad a_{n+1}=(a_n+b_n)/2\leqslant a_n\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

故$\{a_n\}$是递减列.又由 $b_{n+1}=2a_nb_n/(a_n+b_n)\geqslant b_n(n\in\mathbf{N})$可知,$\{b_n\}$是递增列.因为 $b_1<a_n,b_n<a_1$,所以$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为收敛列.令 $a_n\to a,b_n\to b(n\to\infty)$,则易知 $a=(a+b)/2,a=b$.

此外,又由 $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n(n\in\mathbf{N})$可知,

$$a_nb_n=a_1b_1\quad(n=2,3,\cdots),\qquad a=b=\sqrt{a_1b_1}.$$

(4) 由 $2(a_n^2+b_n^2)\geqslant(a_n+b_n)^2$ 可知 $a_n\geqslant b_n(n\in\mathbf{N})$,以及 $a_{n+1}\leqslant\dfrac{a_n^2+a_nb_n}{a_n+b_n}=a_n$.从而知$\{a_n\}$是递减列,$\{b_n\}$是递增列.又因为 $b_1<a_n,b_n<a_1$,所以$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均是收敛列.令 $a_n\to a,b_n\to b(n\to\infty)$,立即可得 $a=b$.

例 2.2.19 试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性:

(1) 设数列$\{b_n\}$满足:对 $m,n\in\mathbf{N}$,有 $|b_m-b_n|\geqslant|b_{m+1}-b_{n+1}|$,$|m-n|\leqslant2$,而 $a_n=b_n/n(n\in\mathbf{N})$.

(2) 设$\{b_n\}$是收敛列,$\{a_n\}$是有界列,且有

$$a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\geqslant b_{n+2}-\frac{3}{2}b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n.$$

解 (1) 令 $c_n=|b_n-b_{n+1}|$,$d_n=|b_n-b_{n+2}|$,则

$$c_n\geqslant|b_{n+1}-b_{n+2}|=c_{n+1},\qquad d_n\geqslant|b_{n+1}-b_{n+3}|=d_{n+1}.$$

由此知$\{c_n\}$,$\{d_n\}$皆为递减正数列.不妨设$|b_n-b_{n+1}|\to l>0(n\to\infty)$,即

$$b_n-b_{n+1}=ls_n+o(1)(n\to\infty),\qquad s_n=\pm1.$$

由此又知(参阅 2.5.3 节(三))

$$\begin{aligned}|b_n-b_{n+2}|&=|(b_n-b_{n+1})+(b_{n+1}-b_{n+2})|\\&=l|s_n+s_{n+1}|+o(1)\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

从而我们有 s_n 是常数,记为 s,且 $b_n-b_{n+1}=ls+o(1)(n\to\infty)$.即 $a_n\to ls(n\to\infty)$.

(2) 令 $c_n=a_{n+1}-a_n/2$, $d_n=b_{n+1}-b_n/2$,则依题设有 $c_{n+1}-d_{n+1}\geqslant c_n-d_n$ ($n\in\mathbf{N}$),即$\{c_n-d_n\}$是递增有界列,设为 $c_n-d_n\to l$ ($n\to\infty$).若记 $b_n\to b$ ($n\to\infty$),则 $d_n\to b/2$ ($n\to\infty$).从而 $c_n\to l+b/2$ ($n\to\infty$).最后可得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\dfrac{a_n}{2}\right)=l+\dfrac{b}{2}$.由此又有 $a_n\to 2l+b$ ($n\to\infty$).

例 2.2.20 设有非负有界数集 E,其上确界 $M<1$.若对 E 中任两个数 x, y 满足 $x<y$ 时,都有 $x/y\in E$,则 $M\in E$.

证明 反证法.若 $M\overline{\in} E$,则存在 E 中严格递增数列$\{x_n\}$:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M$.由此依题设知 $x_n/x_{n+1}\in E$ 且 $x_n/x_{n+1}\leqslant M$,故又得

$$\frac{x_n}{x_{n+p}}=\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\cdots\frac{x_{n+p-1}}{x_{n+p}}<M^p\qquad(p\in\mathbf{N}).$$

从而有 $0\leqslant x_n<M^p x_{n+p}$ ($p\in\mathbf{N}$).因为 $M<1$,所以令 $p\to+\infty$,即知 $x_n=0$ ($n\in\mathbf{N}$).于是又有 $M=0\in E$,这与假设矛盾.证毕.

2.2.3 e 列($\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\mathrm{e}$)的应用

例 2.2.21 试证明下列不等式:

(1) $\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ ($n\in\mathbf{N}$). (2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>\mathrm{e}^{1-1/n}$ ($n\in\mathbf{N}$).

(3) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ ($n\in\mathbf{N}$). (4) $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{3}{n}$ ($n\in\mathbf{N}$).

证明 (1) $n=1$ 时不等式显然成立.假定 $n=k$ 时有$(k/\mathrm{e})^k<k!$则我们有

$$\begin{aligned}(k+1)!&=(k+1)k!>(k+1)(k/\mathrm{e})^k\\&=\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}\frac{(k+1)(k/\mathrm{e})^k}{[(k+1)/\mathrm{e}]^{k+1}}>\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1},\end{aligned}$$

由此知(根据归纳法)$n!>(n/\mathrm{e})^n$ ($n\in\mathbf{N}$),左端不等式成立.

为证右端不等式,只需看不等式

$$\begin{aligned}n!&<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n=\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n[(n+1)/2]^n\Big/\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n\\&=\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Big/\mathrm{e}<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

(2) 因为$(1+1/n)^n<\mathrm{e}$,所以有

$$(1+1/n)^n\mathrm{e}^{1/n}>(1+1/n)^n(1+1/n)^{n\cdot 1/n}=(1+1/n)^{n+1}>\mathrm{e}.$$

(3) 右端不等式来自 $n\ln(1+1/n)<1$.此外,由 $\ln(1+1/n)^{n+1}>1>(n^2-1)/n^2$ 可知 $\ln(1+1/n)>\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)\Big/(n+1)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}$,故左端不等式成立.

(4) 因为我们有$(1+1/n)^{n+1}>\mathrm{e}$,所以

$$0<\mathrm{e}-(1+1/n)^n<(1+1/n)^{n+1}-(1+1/n)^n$$
$$<(1+1/n)^n\cdot\frac{1}{n}<\frac{\mathrm{e}}{n}<\frac{3}{n}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

例 2.2.22 试证明下列命题：

(1) $a_n=(1+x/n)^n$ ($x>0$, $n\in\mathbf{N}$)是有界的严格递增数列.

(2) $a_n=(1+x/n)^{m+n}$ ($x>0$, $m>0$ 且 $m,n\in\mathbf{N}$)是严格递减数列.

证明 (1) (i) 对 $b_1=1$, $b_2=b_3=\cdots=b_{n+1}=1+x/n$,我们用几何-算术不等式,可得$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n/(n+1)}\leqslant\dfrac{n+1+x}{n+1}=\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)$.由此知$\{a_n\}$严格递增.

(ii) 对 $0<x\leqslant1$,我们有$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$.对 $x>1$,取 n_0: $n_0\geqslant x$,我们有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n_0}\leqslant\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n<\left(1+\frac{n_0}{nn_0}\right)^{nn_0}<\mathrm{e}^{n_0},$$

(注意(i)中结论)证毕.

(2) 对 $b_1=1$, $b_2=b_3=\cdots=b_{n+m+1}=1+x/n$,我们用几何-算术不等式,可得

$$\sqrt[1+n+m]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+m}}>1+\frac{x(n+m)}{n^2+nm+n}>1+\frac{x(n+m)}{(n+1)(n+m)}.$$

由此即知所证.

例 2.2.23 解答下列问题：

(1) 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$. (2) 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.

(3) 试证明$\{a_n\}$是收敛列,其中 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ $(n\in\mathbf{N})$.

解 (1) (应用命题:若 $a_{n+1}/a_n\to a$ $(n\to\infty)$,则 $\sqrt[n]{a_n}\to a$ $(n\to\infty)$.)令 $a_n=n!/n^n$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

由此知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!/n^n}=1/\mathrm{e}$.

(2) 改写$\sqrt[m]{n}/\sqrt[n]{n!}$为$(n^{n/m}/n!)^{1/n}$,并令 $a_n=n^{n/m}/n!$,则由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{(n+1)/m}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^{n/m}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/m}\Big/(n+1)^{1-1/m},$$

可知 $I=\mathrm{e}$ $(m=1)$, $I=0$ $(m>1)$.

(3) 易知 $a_n<a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N})$,即$\{a_n\}$是递增列.又由$(1+1/2^k)<\mathrm{e}^{1/2^k}$,可知

$$a_n<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\cdots\mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}=\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}\right)}<\mathrm{e}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

即$\{a_n\}$是有界列.证毕.

例 2.2.24 试证明下列命题:

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n^x(b_1\cdot b_2\cdots b_n)^{1/n}=b\mathrm{e}^x$(已知$\lim\limits_{n\to\infty}n^xb_n=b$).

(3) 设$\{a_n\}$是公差$d>0$的等差数列,则

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{1/n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

证明 (1) 转换原式,即得

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

(2) 令$a_n=(b_1\cdots b_n)n^{nx}$,我们有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}\cdot(n+1)^xb_{n+1}\to b\cdot\mathrm{e}^x\qquad(n\to\infty),$$

故$I=b\cdot\mathrm{e}^x$.

(3) 只需指出$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\to\dfrac{2}{\mathrm{e}}(n\to\infty)$:$\left(b_n\triangleq\dfrac{n^n(a_1a_2\cdots a_n)}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n}&=\frac{(n+1)a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}\left[\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\Big/\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\right)\right]^n\\&=\frac{2a_{n+1}}{a_1+a_{n+1}}\left(\frac{2a_1+(n-1)d}{2a_1+nd}\right)^n\to\frac{2}{\mathrm{e}}\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

例 2.2.25 证明下列极限等式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}$,$a_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}(n\in\mathbf{N})$.

(2) 设$\{m_n\}$是严格递增的自然数子列,且存在$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\cdots+\dfrac{1}{m_n}\right)=A$,则存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$,其中$I_n=\left(1+\dfrac{1}{m_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{m_n}\right)$.

证明 (1) 易知$\{a_n\}$是递增列,由

$$a_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

可知$\{a_n\}$是收敛列,设$a_n\to l(n\to\infty)$.记$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$,则由

$$\begin{aligned}b_n&=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\&=2+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}<a_n,\end{aligned}$$

可知$\mathrm{e}\leqslant l$.此外,又由

$$b_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geqslant 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k-1}{n}\right),$$

可知 $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \geqslant a_m$.再令 $m\to\infty$ 得 $\mathrm{e}\geqslant l$.总之 $\mathrm{e}=l$.

(2)将 I_n 写成指数型:

$$I_n = \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{m_k}\right)} = \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{m_k}\right)^{m_k/m_k}} \leqslant \mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n}\sum\limits_{k=1}^{n}1/m_k} \leqslant \mathrm{e}^{A}.$$

(这里承认 $\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0}$,见"函数极限"部分)再注意$\{I_n\}$是递增列.

例 2.2.26　判别下述数列$\{a_n\}$的敛散性:

(1) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$.

(3) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

解　(1)将 a_n 写为 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$,则有

$$\begin{aligned} a_n &= \ln 2n + \varepsilon_{2n} + c - \ln n - \varepsilon_n - c \\ &= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \to \ln 2 \qquad (n\to\infty). \end{aligned}$$

(2)易知$\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n+1} < a_n < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.由此立即可得 $a_n \to \ln 2$ $(n\to\infty)$.

(3)由 $a_{n+1} - a_n = -1/\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 < 0$,知$\{a_n\}$递减.由归纳法得

$$2(\sqrt{n+1}-1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

故知 $a_n > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1) > -2$.这说明$\{a_n\}$是有下界列,即$\{a_n\}$是收敛列.

例 2.2.27　试证明 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\Big/\ln n = \dfrac{3}{2}$.

证明　因为我们有

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} &= \ln 2n + \varepsilon_{2n} + c - (\ln n + \varepsilon_n - c)/2 \\ &= \ln 2 + 3\ln n/2 + \varepsilon_n/2 + \varepsilon_{2n} + c + c/2, \end{aligned}$$

所以导出 $I = 3/2$.

2.3　数列极限的 Cauchy 收敛准则

定义 2.3.1　若数列$\{a_n\}$满足条件:对任给 $\varepsilon > 0$,存在 N,使得当 $n, m > N$ 时,有

$|a_n - a_m| < \varepsilon$,则称$\{a_n\}$为 **Cauchy 列**(或基本列).

定理 2.3.1(Cauchy 收敛准则) 数列$\{a_n\}$为收敛列的充分必要条件是$\{a_n\}$为 Cauchy 列.

注 1 $\{a_n\}$是 Cauchy 列的等价陈述:任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,对任意 $p\in\mathbf{N}$,均有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

注 2 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,则由不等式 $a_{2n}-a_n=\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{k}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$,可知$\{a_n\}$不是 Cauchy 列.但我们有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0 \qquad (p=1,2,\cdots).$$

例 2.3.1 试证明下列命题:

(1) 设$\{a_n\}$满足:对任给 $\varepsilon>0$,存在 N 以及数 a,使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n-a|<\varepsilon$,则$\{a_n\}$是收敛列.

(2) 设$\{a_n\}$满足 $\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|\leqslant A\,(n\in\mathbf{N},A>0)$,则$\{a_n\}$是收敛列.

(3) 设$\{a_n\}$满足$(0<\lambda<1)\,|a_{n+2}-a_{n+1}|\leqslant\lambda|a_{n+1}-a_n|\,(n\in\mathbf{N})$,则$\{a_n\}$是收敛列.

证明 (1) 根据题设有 $|a_n-a_m|\leqslant|a_n-a|+|a_m-a|<2\varepsilon\,(n,m>N)$,故$\{a_n\}$是 Cauchy 列,即收敛列.

(2) 记 $b_n=\sum_{k=2}^{n}|a_k-a_{k-1}|\,(n=2,3,\cdots)$.显然,$\{b_n\}$是递增有界列,故是收敛列,也是 Cauchy 列.从而根据不等式 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k-1}|=|b_{n+p}-b_n|$ $(p\in\mathbf{N})$,可知$\{a_n\}$是 Cauchy 列.

(3) 因为 $|a_{k+1}-a_k|\leqslant\lambda^{k-1}|a_2-a_1|$,所以可得

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}|a_2-a_1|$$
$$<\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\right)\cdot|a_2-a_1|/\lambda=|a_2-a_1|/(1-\lambda).$$

从而根据(2),取 $A=|a_2-a_1|/(1-\lambda)$即可得证.

例 2.3.2 试证明下列命题:

(1) 设 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+1\Big/\sum_{k=1}^{n}a_k$,则$\lim_{n\to\infty}a_n/\sqrt{2\cdot\ln n}=1$.

(2) 对给定的 y 值,方程 $x-\alpha\cdot\sin x=y$ $(0<\alpha<1)$有唯一解.

证明 (1) (i) 易知 $a_n>0$ 且 $a_n<a_{n+1}$,故$\{a_n\}$是递增正数列.因为

$$a_{n+1}^2=\left(a_n+1\Big/\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2>\left(a_n+\frac{1}{na_n}\right)^2>a_n^2+\frac{2}{n},$$

$$a_{2n}^2-a_n^2>\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-2}+\cdots+\frac{2}{n}>\frac{2n}{2n-1}>1,$$

所以$\{a_n^2\}$不是 Cauchy 列，从而有 $a_n\to+\infty(n\to\infty)$.

(ii) 由 $1\leqslant a_{n+1}/a_n\leqslant 1+1/na_n$，以及根据 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(a_{n+1}^2-a_n^2)}{n\cdot 2\ln(1+1/n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{a_1+\cdots+a_n}+\frac{1}{(a_1+\cdots+a_n)^2}\right).$$

注意到 $0<n/(a_1+\cdots+a_n)^2<1/n$，再根据 Stolz 定理，又有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_1+\cdots+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1-na_n/a_{n+1}).$$

再注意到

$$1\leqslant n+1-na_n/a_{n+1}\leqslant n+1-n(1/(1+1/na_n))$$
$$=n+1-n^2a_n/(na_n+1)=1+n/(na_n+1),$$

可知 $na_n/(a_1+\cdots+a_n)\to1(n\to\infty)$.最后得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{2\ln n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}=1$.

(2) 令 $y=x_0$，且 $x_1=y+\alpha\cdot\sin x_0$，$x_n=y+\alpha\cdot\sin x_{n-1}(n\in\mathbf{N})$.因为 $|\sin t|\leqslant|t|$，所以对任意自然数 n 及 p，可知

$$|x_{n+p}-x_n|=\alpha|\sin x_{n+p-1}-\sin x_{n-1}|$$
$$\leqslant\alpha|x_{n+p-1}-x_{n-1}|\leqslant\alpha^2|x_{n+p-2}-x_{n-2}|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n|x_p-x_0|=\alpha^{n+1}|\sin x_{p-1}|\leqslant\alpha^{n+1}.$$

由于 $0<\alpha<1$，故$\{x_n\}$是 Cauchy 列，从而是收敛列.

现在令 $x_n\to\xi(n\to\infty)$，易知 $\xi=y+\alpha\cdot\sin\xi$.进一步，若该方程另有一解 $x=\eta$，则由 $|\eta-\xi|=\alpha|\sin\eta-\sin\xi|\leqslant\alpha|\eta-\xi|$，可知 $\eta=\xi$.

注 命题 设 $a_k>0$，$b_k>0(k\in\mathbf{N})$，令

$$\alpha_n=\sqrt{a_1+b_1\cdot\sqrt{a_2+\cdots+b_{n-1}\cdot\sqrt{a_n}}}\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

则$\{\alpha_n\}$收敛当且仅当数列$\{\beta_n\}$:$\beta_n=\ln a_n/2^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln b_k/2^k)(n\in\mathbf{N})$是收敛的.例如:

(1) $\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+\cdots}}}}=3$.相当于 $a_n=1$，$b_k=k+1(n,k\in\mathbf{N})$.

(2) $\sqrt{5+\sqrt{6+2\cdot\sqrt{7+3\cdot\sqrt{8+\cdots}}}}=3$.相当于 $a_k=k+4$，$b_k=k(k\in\mathbf{N})$.

(3) $\cos x=\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{3x}{2}\cdot\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{4}+\cos\dfrac{3x}{4}\cdot\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{8}+\cdots}}}$.相当于

$$a_k=\sin^2\frac{x}{2^k},\qquad b_k=\cos\frac{3x}{2^k}\qquad(k\in\mathbf{N}).$$

(4) $\sqrt{3u_2u_4+u_4\cdot\sqrt{3u_4u_6+u_6\cdot\sqrt{3u_6u_8+\cdots}}}$，$u_1=u_2=1$，$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}(n=2,3,\cdots)$.相当于 $a_n=3u_{2n}\cdot u_{2(n+1)}$，$b_k=u_{2(k+1)}(n,k\in\mathbf{N})$.故 $a_n=3\cdot2^{4n+2}$，$b_k=2^{2k+2}(n,k\in\mathbf{N})$.

等式(1)的证明:因为我们看到

$$3=\sqrt{1+2\cdot4}=\sqrt{1+2\cdot\sqrt{16}}$$
$$=\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{25}}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{36}}}}=\cdots,$$

所以猜想有下列关系：

$$3=\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}\qquad(n>1).$$

实际上，应用公式 $(n+2)^2=(n+1)\sqrt{(n+3)^2}+1$，可知

$$3\geqslant\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{\cdots\sqrt{1+(n-1)\cdot\sqrt{(n+1)^2}}}}}.$$

为了得到相反的不等式，我们注意，对任意的 $a>1$，有

$$\sqrt{1+na}\leqslant\sqrt{a}\cdot\sqrt{1+n}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

重复此不等式，得到($a=2^{1-n}$)

$$3\leqslant(n+2)^a\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$

2.4 上、下极限

2.4.1 数列与子(数)列

数列$\{a_n\}$的子列常记为$\{a_{n_k}\}$，后者的子列记为$\{a_{n_{k_i}}\}$等．一个数列与其子列有如下关系：

(1) 若$\{a_n\}$是收敛列，则其任一子列均为收敛列，且有相同的极限．

(2) 若$\{a_n\}$是有界列，则必存在一个收敛子列．

(3) 若$\{a_n\}$是无上(下)界数列，则存在子列$\{a_{n_k}\}$，使得 $a_{n_k}\to+\infty(-\infty)(k\to\infty)$．

(4) 若$\{a_n\}$满足 $a_{2n}\to a, a_{2n-1}\to a(n\to\infty)$，则 $a_n\to a(n\to\infty)$．

(5) 若$\{a_n\}$的任一子列均含有收敛子列，则$\{a_n\}$是有界列．

例 2.4.1 试证明下列命题：

(1) 若$\{a_n\}$是有界数列，则存在正整数子列$\{n_k\}$，使得下列极限存在：

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=l_1,\qquad\lim_{k\to\infty}a_{n_k-1}=l_2.$$

(2) 若$\{a_n\}$的任一子列$\{a_{n_k}\}$均含有以 a 为极限的收敛子列，则$\{a_n\}$是收敛列．

(3) 设$\{a_n\}$是有界列．若其任一收敛子列都有相同的极限值 a，则$\{a_n\}$是收敛列，且极限为 a．

证明 (1) 因为$\{a_n\}$是有界列，所以存在收敛子列$\{a_{n_k}\}$．考察有界列$\{a_{n_k-1}\}$，它又有收敛子列$\{a_{n_{k_i}-1}\}$．显然$\{a_{n_{k_i}}\}$是收敛列，从而将其重新编号即得所证．

(2) 反证法．假定$\{a_n\}$是不收敛于 a 的数列，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及正整数子列$\{n_k\}$，使得 $|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0\ (k=1,2,\cdots)$．但依题设$\{a_{n_k}\}$中含有收敛于 a 的子列，这与上式矛盾，即得所证．

(3) 反证法.若结论不对,则存在 $\varepsilon_0>0$,以及$\{a_{n_k}\}$,使得 $|a_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$ $(k=1,2,\cdots)$.由于$\{a_{n_k}\}$是有界列,故存在收敛子列$\{a_{n_{k_i}}\}$,使得$\lim\limits_{i\to\infty}a_{n_{k_i}}=a$.这与 $|a_{n_{k_i}}-a|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾.证毕.

例 2.4.2 试证明下列命题:

(1) 若数列$\{a_n\}$中三个子列$\{a_{2n}\}$,$\{a_{2n-1}\}$,$\{a_{3n}\}$皆收敛,则$\{a_n\}$是收敛列.

(2) $a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$不是收敛列.

(3) 设$\{a_n\}$是有界数列.若$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,则存在数 l,以及子列$\{n_k\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=l,\qquad \lim_{k\to\infty}b_{n_k}=l.$$

(4) 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=(a+b)/2\left(S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k/n\right)$.

证明 (1) 设 $a_{2n}\to a$,$a_{2n-1}\to b$,$a_{3n}\to c(n\to\infty)$,则由 $a_{6n}\to a$,$a_{6n}\to c(n\to\infty)$可知 $a=c$.又由 $b=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2(3k-1)-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{3(2k-1)}=c$,可知 $b=c$.这说明$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=c=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$.证毕.

注 1 对于 $a_n=\begin{cases}0, & n=2^k,\\ 1, & 其他\end{cases}$ $(k=0,1,2,\cdots)$,我们有$\lim\limits_{k\to\infty}a_{3k}=1$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=1$.但极限$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$不存在.

注 2 对于 $a_n=\begin{cases}0, & n是素数,\\ 1, & n是合数,\end{cases}$则我们有$\lim\limits_{k\to\infty}a_{3k}=1$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=1$,但极限$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}$不存在.

(2) 只需注意 $a_{2n}=-n/2n$,$a_{2n+1}=(n+1)/(2n+1)$.

(3) 由$\{a_n\}$的有界性可知,存在 l 以及$\{n_k\}$,使得 $a_{n_k}\to l(k\to\infty)$.又由$(a_{n_k}-b_{n_k})\to 0(k\to\infty)$可知$\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=l$.

(4) 由题设知((c,1)和)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k-1}/n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}/n=b$.从而可得

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\Big/n+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\Big/n\right)=\frac{a+b}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{2n+1}a_k\Big/2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}\left(S_{2n}+\frac{a_{2n+1}}{2n}\right)=\frac{a+b}{2}.$$

例 2.4.3 试证明下列命题:

(1) 若存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}(a\sin n+b\cos n)=A$,则 $a=b=0$.

(2) 存在发散数列$\{a_n\}$,但对 $k\geqslant 2$,数列$\{a_{kn}\}$皆收敛.

(3) 存在$\{n_k\}$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{n_k}\cdot\sin n_k=0$.

证明 (1)(i)当 $a\neq0,b=0$ 或 $a=0,b\neq0$ 时,易知题设极限不存在,矛盾.

(ii)现在设 $a\neq0,b\neq0$,则令 $\cos\theta=a/\sqrt{a^2+b^2}$,$\sin\theta=b/\sqrt{a^2+b^2}$,可知

$$a\sin n+b\cos n=\sqrt{a^2+b^2}\sin(n+\theta)\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

从而得 $\sin(n+\theta)\to A/\sqrt{a^2+b^2}\triangleq B$.由

$$\sin(n+2+\theta)-\sin(n+\theta)=2\cdot\sin1\cdot\cos(n+1+\theta)$$

可知,$\cos(n+\theta)\to0(n\to\infty)$.又由 $\sin(2n+2\theta)=2\sin(n+\theta)\cdot\cos(n+\theta)$可知,$\sin(2n+2\theta)\to0(n\to\infty)$.再由

$$\sin(2(n+2)+2\theta)-\sin(2n+2\theta)=2\cdot\sin2\cdot\cos(2(n+1)+2\theta)$$

可知,$\cos(2n+2\theta)\to0(n\to\infty)$.这与 $\sin^2(2n+2\theta)+\cos^2(2n+2\theta)=1$ 矛盾.

(2)作 $a_n=\begin{cases}0, & n\text{ 是素数},\\ 1, & n\text{ 是合数},\end{cases}$易知$\{a_n\}$为非收敛列.但是子列$\{a_{k\cdot n}\}(k>1,n\geqslant2)$均为常数列.

(3)对任意的 $n\in\mathbf{N}$,均存在 $q_n\in\mathbf{N}$ 以及 $p_n\in\mathbf{Z}$,使得$\left|2\pi-\dfrac{p_n}{q_n}\right|<\dfrac{1}{q_n^2}$(参阅第1章).从而可知 $|p_n|<(2\pi+1)q_n$,$|2\pi q_n-p_n|<1/q_n$.故有

$$\begin{aligned}|\sqrt{|p_n|}\cdot\sin p_n|&=|\sqrt{|p_n|}\cdot\sin(2\pi q_n-p_n)|\\&\leqslant|\sqrt{|p_n|}\cdot\sin(1/q_n)|\leqslant\sqrt{2\pi+1}/\sqrt{q_n}.\end{aligned}$$

由于$\{q_n\}$是递增无界正整数列,故得所证.

例 2.4.4 设$\{a_n\}$满足 $a_n-a_{n-2}\to0(n\to\infty)$,试证明 $a_n/n\to0(n\to\infty)$.

证明 只需指出 $a_{2n}/2n\to0$,$a_{2n+1}/(2n+1)\to0(n\to\infty)$.

应用 Stolz 定理,我们有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}-a_{2n-2}}{n-(n-1)}=0$,以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\frac{a_{2n+1}}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n-1}}{n-(n-1)}=0.$$

注 1 设$\{a_n\}$是递增的无穷大量,$\{b_n\}$是递减的无穷小量,但极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 可以没有意义(包括非$+\infty$).例如已知(参阅函数极限)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sin(2/\sqrt{n})=2$,$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin(1/n)=1$,我们取子列$\{n_k\}$,$\{n_k'\}$,满足

$$n_1<n_1'<n_2<n_2'<\cdots<n_k<n_k'<\cdots,$$

$$\sin\frac{1}{n_1}>\sin\frac{2}{\sqrt{n_1'}}>\sin\frac{1}{n_2}>\sin\frac{2}{\sqrt{n_2'}}>\cdots$$

即可.

注 2 记$\chi_Q(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\overline{\in}\mathbf{Q},\end{cases}$ $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0,\end{cases}$我们有

(1)$I=\lim\limits_{m\to\infty}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\{\cos(m!\cdot x\pi)\}^n\right]=\chi_Q(x)$. (2)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\pi}\arctan(nx)=\operatorname{sgn}(x)$.

(3) $I=\lim\limits_{m\to\infty}\operatorname{sgn}[\sin^2(m!\cdot\pi x)]=1-\chi_{\mathbf{Q}}(x)$. (4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin(2\pi e\cdot n!)=2\pi$.

证明 (1)若 $x\in\mathbf{Q}$(有理数),则当 m 充分大时,就有 $m!x\in 2\mathbf{N}$,故 $\cos(m!\pi x)=1$.从而有 $I=1$.若 $x\overline{\in}\mathbf{Q}$(是无理数),则 $|\cos(m!\pi x)|<1$.故$\{\cos(m!\pi x)\}^n\to 0(n\to\infty)$.即 $I=0$.

(2)若 $x=0$,则 $\arctan(nx)=0$,即 $I=0$.若 $x>0$,则 $\arctan(nx)\to\pi/2(n\to\infty)$,即 $I=1$.若 $x<0$,则 $\arctan(nx)\to-\pi/2(n\to\infty)$,即 $I=-1$.

(3)若 $x\in\mathbf{Q}$,则易知 $\sin^2(m!x\pi)=0$,即 $I=0$.若 $x\overline{\in}\mathbf{Q}$,则 $\sin^2(m!\pi x)>0$,即 $I=1$.

(4)注意 $e\overline{\in}\mathbf{Q}$.令 $\varepsilon_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}1/k!$, $\delta_n=(n+1)!\varepsilon_n-1$,则$\{\delta_n\}$是收敛于 0 的递减列.我们有

$$n\sin(2\pi en!)=n\cdot\sin(2\pi\varepsilon_n\cdot n!)=\frac{\dfrac{n(1+\delta_n)}{n+1}\sin\left(2\pi\dfrac{1+\delta_n}{n+1}\right)}{(1+\delta_n)/(n+1)}\to 2\pi\qquad(n\to\infty).$$

2.4.2 上、下极限(最大、小聚点)

定义 2.4.1 设 $E\subset\mathbf{R}$ 是一个无穷点集,x_0 是 $\mathbf{R}$ 中一个固定点(x_0 不一定属于 E).若对任给的 $\varepsilon>0$,区间$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$均含有 E 中不同于 x_0 的点,则称 x_0 为 E 的聚点.

定理 2.4.1(聚点原理) $\mathbf{R}$ 中的有界无穷点集至少有一个聚点.

推论 设 $E\subset\mathbf{R}$,则 x_0 是 E 的聚点之充分必要条件是:E 中存在互异点列$\{x_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

定义 2.4.2 设$\{a_n\}$是一数列,则称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}\{a_k\}$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant n}\{a_k\}$为$\{a_n\}$的上、下极限.

由定义 2.4.1 易知,$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ 可以是$\pm\infty$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

定理 2.4.2 设$\{a_n\}$是有界数列,则

(1)$\underline{a}$是$\{a_n\}$的下极限,当且仅当对任给 $\varepsilon>0$,(i)存在无穷多个指标 n,使得 $a_n<\underline{a}+\varepsilon$.(ii)存在 N,使得 $a_n>\underline{a}-\varepsilon(n>N)$.

(2)$\bar{a}$是$\{a_n\}$的上极限,当且仅当对任给 $\varepsilon>0$,(i)存在自然数子列$\{n_k\}$,使得 $a_{n_k}>\bar{a}-\varepsilon$.(ii)存在 N,使得 $a_n<\bar{a}+\varepsilon(n>N)$.

注 上述结果表明,上、下极限是有界数列$\{a_n\}$的最大、最小的聚点,而且存在

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\bar{a},\qquad \lim_{k\to\infty}a_{n_k'}=\underline{a}.$$

定理 2.4.3 有界数列$\{a_n\}$收敛于 a 的充分必要条件是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a$.

注 因为有界数列总存在上、下极限(实数),所以由定理 2.4.3 可知,只需指出它们相等就是数列收敛.因此,有了下列运算法则后,在上、下极限运算的操作中就可判定数列的敛散性.

定理 2.4.4 若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足 $a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n)=-\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n.$$

定理 2.4.5 对数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,我们有

(1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$. (2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$.

(3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.　　(4) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

定理 2.4.6　设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是非负数列,则

(1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$.　　(2) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_nb_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

(3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_nb_n)$.　　(4) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_nb_n)\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

(5) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^2=(\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n)^2$.　　(6) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n^2=(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n)^2$.

(7) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}$.　　(8) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n}$.

推论　设 $a_n\to a(n\to\infty)$,则对数列$\{b_n\}$有

(1) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$,$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$;

(2) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_nb_n=a\,\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$,$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_nb_n=a\,\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n\,(a_n>0,b_n>0)$.

定理 2.4.7　设$\{a_n\}$是正数列.

(1) 若$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n>0$,则$\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}$.　　(2) 若$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n>0$,则$\overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n}$.

推论　设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足 $a_n\geqslant0$,$b_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(1) 若$\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n>0$,则$\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}\geqslant\dfrac{\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n}{\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n}$.　　(2) 若$\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n>0$,则$\overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}\leqslant\dfrac{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}{\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n}$.

注　我们有下列等式:

(i) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(\max\{a_n,b_n\})=\max\{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n,\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n\}$;(ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\min\{a_n,b_n\})=\min(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n,\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n)$.

但下述等式不成立:

(i) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(\min\{a_n,b_n\})=\min\{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n,\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n\}$;(ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\max\{a_n,b_n\})=\max\{\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n,\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n\}$.

例如,$a_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ 1, & n=2k+1,\end{cases}$ $b_n=\begin{cases}1, & n=2k,\\ 0, & n=2k+1.\end{cases}$

例 2.4.5　试求下述数列$\{a_n\}$的上、下极限:

(1) $a_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$.　　(2) $a_n=1+\dfrac{n\cdot\cos(n\pi/2)}{n+1}$.

(3) $a_n=\dfrac{n}{3}-\left[\dfrac{n}{3}\right]$.　　(4) $a_{n+1}=\begin{cases}a_n/2, & n\text{是偶数},\\ (1+a_n)/2, & n\text{是奇数}.\end{cases}$

解　(1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=2$,$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=1$.

(2) $$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{4n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4n-2}{4n-1}\right)=0.$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{4n+1}\right)=2.$$

(3) 易知 $a_n\geqslant0(n\in\mathbf{N})$.我们有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{3n}=n-[n]=0.$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{2}{3}-\left[n+\frac{2}{3}\right]\right)=\frac{2}{3}.$$

(4) 因为

$$\begin{aligned}\left| a_{2n+1}-\frac{1}{3}\right| &= \frac{1}{2}\left| a_{2n}-\frac{2}{3}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1+a_{2n-1}}{2}-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{4}\left| a_{2n-1}-\frac{1}{3}\right|,\end{aligned}$$

所以$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=1/3$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=2/3$.

例 2.4.6　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\cos n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} n=-1$.

证明　已知对无理数 x,必有无穷多个有理数$\dfrac{p}{q}$(p,q 为整数),使得$\left|x-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^2}$.取 $x=2\pi$,就有 $p>q$,且$|2\pi q-p|<\dfrac{1}{q}$.

现在,先取$\dfrac{p_1}{q_1}$,使得$|2\pi q_1-p_1|<\dfrac{1}{q_1}$.再取$\dfrac{p_2}{q_2}$,其中 $p_1<p_2$,$q_1<q_2$,使得$|2\pi q_2-p_2|<\dfrac{1}{q_2}$.假设已取定$\dfrac{p_1}{q_1}$,…,$\dfrac{p_n}{q_n}$,其中

$$|2\pi q_i-p_i|<\frac{1}{q_i}\quad (i=1,2,\cdots,n),p_1<p_2<\cdots<p_n;q_1<q_2<\cdots<q_n.$$

又可取$\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$,使得$|2\pi q_{n+1}-p_{n+1}|<\dfrac{1}{q_{n+1}}$,$p_n<p_{n+1}$,$q_n<q_{n+1}$.这说明存在数列$\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$,使得

$$|2\pi q_n-p_n|<\frac{1}{q_n},\quad p_n>q_n(n=1,2,\cdots),\quad \lim_{n\to\infty}p_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}q_n=+\infty.$$

由此导出$(p_n-2\pi q_n)\to 0(n\to\infty)$,且有

$$\lim_{n\to\infty}\cos p_n=\lim_{n\to\infty}\cos(2\pi q_n+p_n-2\pi q_n)=\lim_{n\to\infty}\cos(p_n-2\pi q_n)=1.$$

即存在整数列$\{p_n\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\cos p_n=1$.因为 $\cos n\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$,所以$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\cos n=1$.

类似地,可得$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\cos n=-1$.

例 2.4.7　试证明下列命题:

(1) 设$\{a_n\}$有界.若对任一数列$\{b_n\}$,有下列等式之一成立,则$\{a_n\}$为收敛列.

(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$. (ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.

(2) 设有正数列$\{a_n\}$.若对任一正数列$\{b_n\}$,均有下列等式之一成立,则$\{a_n\}$为收敛列.

(i) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n\cdot b_n)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.(ii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n\cdot b_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.

(3) 设$\{a_n\}$是有界正数列,则$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

证明 (1)(i) 在等式中取 $b_n=-a_n(n\in\mathbf{N})$,则得

$$0=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n-\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n.$$

在(ii)的情形也可类似地证得.

(2)(i) 在等式中取 $b_n=1/a_n$,则得

$$1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n\cdot\frac{1}{a_n}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n}.$$

这说明 $0<\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$.

在(ii)的情形也可类似地证得.

(3) 以最右端不等式为例:令 $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_{n+1}/a_n=L$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon\quad(n\geqslant N),\qquad \frac{a_n}{a_N}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}<(L+\varepsilon)^{n-N}.$$

由此知 $\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N}(L+\varepsilon)(L+\varepsilon)^{-N/n}$.因为 $\sqrt[n]{a_N}(L+\varepsilon)^{-N/n}\to1(n\to\infty)$,所以存在 N_1,使得 $\sqrt[n]{a_N}\cdot(L+\varepsilon)^{-N/n}<1+\varepsilon(n\geqslant N_1)$.从而我们有

$$\sqrt[n]{a_n}<(1+\varepsilon)(L+\varepsilon)=L+(L+1)\varepsilon+\varepsilon^2\qquad(n>N,N_1),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant L+(L+1)\varepsilon+\varepsilon^2.$$

由 ε 的任意性,可知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant L$.证毕.

例 2.4.8 试证明下列命题:

(1) 设 $\{a_n\}$ 是有界列,且有 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=l$,$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\neq\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$,则 $l>0$,且 $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$.

(2) 设 $0<a_n<M(n\in\mathbf{N})$,且 $\{a_n\}$ 是不收敛于 0 的数列,则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$.

(3) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$,且 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\to+\infty(n\to\infty)$.若对任意的有界数列 $\{b_k\}$,令 $\tilde{b}_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k/S_n(n\in\mathbf{N})$,则 $\underline{\lim_{n\to\infty}}b_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{b}_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{b}_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

证明 (1) 若 $l=0$,则 $a_n\to0(n\to\infty)$,与题设矛盾,故 $l>0$.由于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n>\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$,故知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=l$.从而有 $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-l$,即得所证.

(2) 首先,易知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$.其次,由题设知,存在 $m>0$,使得 $a_{n_k}\geqslant m(k\in\mathbf{N})$.从而可得 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$.

综合上述结论,即可得证.

(3) 以右端不等式为例,且记 $\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=l$,则对 $L>l$,存在 N,使得 $b_n<L(n\geqslant N)$.从而可知

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{N}a_kb_k+\frac{1}{S_n}\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_k\leqslant o(1)+\frac{1}{S_n}\sum_{N+1}^{n}La_k=L+o(1)\qquad(n\to\infty).$$

这说明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\tilde{b}_n\leqslant L$.令 $L\to l$,即得所证.

注 在上例中若有 $b_n\to b(n\to\infty)$,则 $\tilde{b}_n\to b(n\to\infty)$.

例 2.4.9 试证明下列命题:

(1)设$\{a_n\}$是正数列.若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$,则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_1+a_2+\cdots+a_n}=1$.

(2)设$\{a_n\}$是正数列.若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0,\qquad\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<+\infty,$$

则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)/n^2=0$.

(3)设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n/(a_{n+1}+a_{n+2})=0$,则$\{a_n\}$无界.

(4)设有界数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n+1})=0$.

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\sqrt{\dfrac{k}{n}}\Big/2^k=2$.

(6)设$\{a_n\}$是递增列,且记 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k/n$.若$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

证明 (1)首先,由 $\sqrt[n]{a_1+a_2+\cdots+a_n}>\sqrt[n]{a_n}$可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

其次,由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{a_n}<1+\varepsilon,\qquad a_n<(1+\varepsilon)^n.$$

从而得

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}&\leqslant\sqrt[n]{\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}}+\sqrt[n]{\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}}\\&<\sqrt[n]{\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}}+\left[\frac{(n-N)(1+\varepsilon)^n}{n}\right]^{1/n}\\&<\sqrt[n]{\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}}+1+\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}}\leqslant1$.这说明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_1+\cdots+a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}\leqslant1.$$

综合上述结论,即得所证.

(2)由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得 $a_n<n\varepsilon(n>N)$.由此可知

$$\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n^2}=\frac{a_1^2+\cdots+a_N^2}{n^2}+\frac{a_{N+1}^2+\cdots+a_n^2}{n^2}$$

$$\leqslant \frac{a_1^2+\cdots+a_N^2}{n^2}+\frac{n\varepsilon(a_{N+1}+\cdots+a_n)}{n^2},$$

从而得到 $I\leqslant \varepsilon\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.由 ε 的任意性,即知 $I=0$.

(3)(i)首先指出:若$\{b_n\}$是正数列,且有$\lim\limits_{n\to\infty}b_n/b_{n+1}=0$,则$\{b_n\}$是无穷大量.事实上,对任意的 $k\in\mathbf{N}$,存在 N_k,使得 $b_{N_k}/b_{N_k+m}<1/k$,即 $k\cdot b_{N_k}<b_{N_k+m}(m\in\mathbf{N})$.

(ii)其次,采用反证法:假定$\{a_n\}$是有界列,且令 $b_n=a_n/a_{n+1}$,则原式变为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=\frac{a_n/a_{n+1}}{1+a_{n+2}/a_{n+1}}=\frac{b_n}{1+1/b_{n+1}}.$$

由题设知,上式右端趋于 $0(n\to\infty)$.令$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n=\bar{b}$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n=b$,我们有

$$0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{b_n}{1+1/b_{n+1}}\geqslant\frac{\bar{b}}{1+1/\bar{b}}=\frac{\bar{b}^2}{1+\bar{b}}\geqslant 0.$$

从而得 $b=\bar{b}=0$,即 $a_n/a_{n+1}\to 0(n\to\infty)$.因此根据(i),可知$\{a_n\}$是无穷大量.

(4)(i)假定$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n-a_{n+1})=\bar{A}>A>0$,则存在子列$\{n_k\}$,使得

$$a_{n_k}-a_{n_k+1}>A\qquad(k=1,2,\cdots).$$

由题设知,对任意的 $m\in\mathbf{N}$,存在 N,使得

$$(a_n-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_{n+2})<A/m\qquad(n\geqslant N).$$

从而当 $n_k>N$ 时,我们有

$$a_{n_k+1}-a_{n_k+2}>a_{n_k}-a_{n_k+1}-A/m>A(m-1)/m,$$
$$a_{n_k+2}-a_{n_k+3}>a_{n_k+1}-a_{n_k+2}-A/m>A(m-2)/m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n_k+m-1}-a_{n_k+m}>A/m.$$

将上述各式左、右端相加,可得

$$a_{n_k}-a_{n_k+m}>A\left(1+\frac{m-1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\geqslant\frac{m}{2}A.$$

但这与$\{a_n\}$是有界列矛盾,故$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n-a_{n+1})\leqslant 0$.

(ii)类似地可证$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n-a_{n+1})\geqslant 0$.

综合上述结论,即得所证.

(5)(i)易知 $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\sqrt{\frac{k}{n}}\Big/2^k<\sum\limits_{k=0}^{n}2^{-k}<\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-k}=2$,故$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\sqrt{\frac{k}{n}}\Big/2^k\leqslant 2$.

(ii)由$\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\sqrt{\frac{k}{n}}\Big/2^k>\sum\limits_{k=0}^{m}\cos\sqrt{\frac{k}{n}}\Big/2^k(m<n)$可知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\sqrt{\frac{k}{n}}\Big/2^k\geqslant\sum\limits_{k=0}^{m}1/2^k$.

又令 $m\to\infty$ 得$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\sqrt{\frac{k}{n}}\Big/2^k\geqslant 2$.证毕.

(6)因为我们有 $\sigma_n\leqslant a_n(n\in\mathbf{N})$,以及对任意给定的 N 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k/n = \sum_{k=1}^{N} a_k/n + \sum_{k=N+1}^{n} a_k/n \geqslant \sum_{k=1}^{N} a_k/n + \frac{(n-N)}{n} a_N \qquad (n > N),$$

所以令 $n\to\infty$ 可得 $\sigma \geqslant a_N$. 从而可知

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad \sigma \geqslant \overline{\lim_{N\to\infty}} a_N. \text{证毕}.$$

例 2.4.10 试论下述数列 $\{a_n\}$ 的敛散性:

(1) $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - 2a_{n+1}) = 0$.

(2) $a_n = nb_n$, 其中 b_n 满足: $|nb_n| \leqslant M (n \in \mathbf{N})$, 且存在 $\lim\limits_{n\to\infty} n(b_n + b_{2n}) = l$.

解 (1) 由题设知存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $|a_n - 2a_{n+1}| < 1$, 或 $|a_{n+1}| < 1/2 + |a_n|/2 < \cdots < \sum\limits_{k=1}^{n} 1/2^k + |a_1|/2^n < 1 + |a_1|$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界列. 令 $\bar{a} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, 则由题设得

$$\begin{cases} 0 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n - 2a_{n+1}) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-2a_{n+1}) = \underline{a} - 2\underline{a} = -\underline{a}, \\ 0 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n - 2a_{n+1}) \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-2a_{n+1}) = \underline{a} - 2\underline{a} = -\underline{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n - 2a_{n+1}) \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-2a_{n+1}) = \bar{a} - 2\bar{a} = -\bar{a}, \\ 0 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n - 2a_{n+1}) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-2a_{n+1}) = \bar{a} - 2\bar{a} = -\bar{a}. \end{cases}$$

从而我们有 $\underline{a} = 0 = \bar{a}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) 由 $nb_n + nb_{2n} = nb_n + 2nb_{2n}/2$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{2n}/2) = l, \qquad \lim_{n\to\infty}(2a_n + a_{2n}) = 2l.$$

从而应用上、下极限运算得(记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_{2n} = \bar{c}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_{2n} = \underline{c}$)

$$2\bar{a} + \underline{a} \leqslant 2\bar{a} + \underline{c} \leqslant 2l, \qquad 2\underline{a} + \bar{a} \geqslant 2\underline{a} + \bar{c} \geqslant 2l.$$

由此即知 $\bar{a} = \underline{a}$, $\{a_n\}$ 收敛.

例 2.4.11 设 $a_{n+1} = 1 - a_n^2/b^2 (n \in \mathbf{N}, 0 < a_1 < b, b > \sqrt{2})$, 试论 $\{a_n\}$ 的敛散性.

解 易知 $0 = 1 - b^2/b^2 < 1 - \dfrac{a_1^2}{b^2} = a_2 < 1$, 从而可得

$$0 < a_3 < 1, \cdots, 0 < a_n < 1 \quad (n = 4, 5, \cdots).$$

令 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \bar{a}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{a}$, 我们有

$$\bar{a} = 1 - \frac{\underline{a}^2}{b^2}, \qquad \underline{a} = 1 - \frac{\bar{a}^2}{b^2}, \qquad \bar{a}b^2 + \underline{a}^2 = b^2, \qquad \underline{a}b^2 + \bar{a}^2 = b^2.$$

由此又得 $(\bar{a} - \underline{a})b^2 - (\bar{a}^2 - \underline{a}^2) = 0$, 即 $(\bar{a} - \underline{a})[b^2 - (\bar{a} + \underline{a})] = 0$. 因为 $b^2 > 2$, 而 $\bar{a} + \underline{a} \leqslant 2$, 所以只能 $\bar{a} - \underline{a} = 0$. 这说明 $\{a_n\}$ 是收敛列.

例 2.4.12　试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性：

(1) $a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n+6}\,(a_1>-6)$.　(2) $a_{n+1}=A\sqrt{a_n+B}\,(A,B>0,a_1>0)$.

解　(1) 依题设易知 $a_{n+1}>0\,(n\in\mathbf{N})$.记 $M=\max\{6,a_1\}$,则 $a_2^3=a_1+6<2M<M^3$.由此得 $a_2<M$,且不难导出 $a_n<M\,(n\in\mathbf{N})$.记$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{a}$,$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=\underline{a}$,则从题式推出

$$\begin{cases}\overline{a}^3=6+\overline{a},\\ \underline{a}^3=6+\underline{a};\end{cases}\quad \begin{cases}(\overline{a}-2)(\overline{a}^2+2\overline{a}+3)=0,\\ (\underline{a}-2)(\underline{a}^2+2\underline{a}+3)=0.\end{cases}$$

这说明 $\overline{a}=2=\underline{a}$.

(2) 取 $M>0$,使得 $a_1<M,B<M,\sqrt{2}A<\sqrt{M}$,则

$$a_2=A\sqrt{a_1+B}<A\sqrt{2M}<\sqrt{M}\cdot\sqrt{M}=M.$$

根据归纳法可推知$\{a_n\}$是有界列.由上、下极限运算(记 $\overline{a}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$,$\underline{a}=\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$)易得

$$\overline{a}^2=A^2(\overline{a}+B),\qquad \underline{a}^2=A^2(\underline{a}+B).$$

故$\{a_n\}$收敛,且有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=(A^2+\sqrt{A^4+4A^2B})/2$.

例 2.4.13　试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性：

(1) $a_{n+1}=A+B/a_n\,(A,B>0,a_1>A)$.

(2) $a_{n+1}=B^2-1/a_n\,(B\geqslant\sqrt{3},1/B\leqslant a_1<B^2)$.

(3) $a_{n+1}=A/a_n-1\,(A>0,a_1<0)$.

(4) $a_{n+1}=1/(m+1-na_n)\,(m\in\mathbf{N})$.

(5) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)+1\,(a_1>0)$.

解　(1) 由题设知 $A<a_2<A+B/A$,且易得 $A<a_n<A+B/A\,(n\in\mathbf{N})$,即$\{a_n\}$是有界列.令$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{a}$,$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=\underline{a}$,则根据题式可得$(\underline{a}>0)$

$$\begin{cases}\overline{a}=A+B/\underline{a},\\ \underline{a}=A+B/\overline{a};\end{cases}\quad \begin{cases}\overline{a}\underline{a}=A\underline{a}+B,\\ \underline{a}\overline{a}=A\overline{a}+B,\end{cases}$$

且由此导出 $\overline{a}=\underline{a}$.若令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,我们有

$$a^2-Aa-B=0,\qquad a=(A+\sqrt{A^2+4B})/2.$$

(2) 易知 $a_2=B^2-1/a_1\leqslant B^2$,且有

$$a_2\geqslant B^2-B=B(B-1)\geqslant B(\sqrt{3}-1)\geqslant B/3\geqslant B/B^2=1/B.$$

由此不难推出(根据归纳法)$1/B\leqslant a_n\leqslant B^2$,即$\{a_n\}$是有界列.若记$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{a}$,$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=\underline{a}$,我们有

$$\begin{cases}\overline{a}=B^2-1/\overline{a},\\ \underline{a}=B^2-1/\underline{a};\end{cases}\quad \begin{cases}\overline{a}^2-B^2\overline{a}+1=0,\\ \underline{a}^2-B^2\underline{a}+1=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\overline{a}=(B^2\pm\sqrt{B^4-4})/2,\\ \underline{a}=(B^2\pm\sqrt{B^4-4})/2.\end{cases}$$

注意到 $B^2(B-1)>1$,或 $B^3>B^2+1$,或 $B^4-4B+4/B^2<B^4-4$,即 $B^2-2/B<\sqrt{B^4-4}$,故有 $(B^2-\sqrt{B^4-4})/2<1/B$.因此,$\bar{a}=(B^2+\sqrt{B^4-4})/2=\underline{a}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=(B^2+\sqrt{B^4-4})/2$.

(3) 易知 $a_2<0$.由此易推 $a_n<0(n\in\mathbf{N})$.从而又有 $a_{n+1}<-1(n\in\mathbf{N})$,以及 $a_{n+1}>-1-A(n\geqslant 2)$,即 $\{a_n\}$ 是有界列.若记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\bar{a}$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{a}$,我们有

$$\begin{cases}\bar{a}=b/\underline{a}-1,\\ \underline{a}=b/\bar{a}-1;\end{cases}\quad\begin{cases}\bar{a}\underline{a}=b-\underline{a},\\ \underline{a}\bar{a}=b-\bar{a};\end{cases}\quad \bar{a}=\underline{a}<0.$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则由题式知 $a^2+a-A=0$,即 $a=(-1-\sqrt{1+4A})/2$.

(4) (i) 因为对 $a_1\leqslant 0$,有 $a_2>0$ 且 $a_2<1/m$,从而又有 $0<a_3<1/m,\cdots,0<a_n<1/m$,所以不妨认定 $a_1>0$.设 $M:M>(m+1)/m$,如果存在 n_0,使得 $a_{n_0}\geqslant M$,那么就有

$$a_{n_0+1}=\frac{1}{m+1-ma_{n_0}}<0,\qquad 0<a_{n_0+2}=\frac{1}{m+1-ma_{n_0+1}}<\frac{1}{m}.$$

由此推知 $0<a_n<1/m(n\geqslant n_0+2)$.总之,$\{a_n\}$ 有界.

(ii) 若记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\bar{a}$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{a}$,我们有

$$\begin{cases}\bar{a}=\dfrac{1}{m+1-m\bar{a}},\\[2ex] \underline{a}=\dfrac{1}{m+1-m\underline{a}};\end{cases}\quad\begin{cases}m\bar{a}^2-(m+1)\bar{a}+1=0,\\ m\underline{a}^2-(m+1)\underline{a}+1=0;\end{cases}\quad\begin{cases}\bar{a}=\dfrac{1+1/m\pm(1-1/m)}{2},\\[2ex] \underline{a}=\dfrac{1+1/m\pm(1-1/m)}{2}.\end{cases}$$

易知 $\bar{a}=1/m=\underline{a}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(5) 易知 $a_2>2$,由此可推 $a_n>2(n\geqslant 2)$.设 $M:M\geqslant 4$,且 $a_2\leqslant M$,则 $a_3<\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{2}\right)+1<\frac{1}{2}M+2\leqslant\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}M=M$.即 $\{a_n\}$ 是有界列.若记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\bar{a}$,$\underline{\lim\limits_{n\to a}}a_n=\underline{a}$,我们有

$$\begin{cases}\bar{a}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\bar{a}+\dfrac{1}{\underline{a}}\right)+1,\\[2ex] \underline{a}\geqslant\dfrac{1}{2}\left(\underline{a}+\dfrac{1}{\bar{a}}\right)+1;\end{cases}\quad\begin{cases}\bar{a}\leqslant 2+\dfrac{1}{\underline{a}},\\[2ex] \underline{a}\geqslant 2+\dfrac{1}{\bar{a}};\end{cases}\quad\begin{cases}\bar{a}\underline{a}\leqslant 1+2\underline{a},\\ \underline{a}\bar{a}\geqslant 2\bar{a}+1.\end{cases}$$

从而导出 $\bar{a}=\underline{a}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.而根据题式有 $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+1$,即 $a^2-2a-1=0$,或 $a=(2+\sqrt{4+4})/2=1+\sqrt{2}$.

例 2.4.14 解答下列问题:

(1) 设 $a_1=0$,$a_{2n}=a_{2n-1}/2$,$a_{2n+1}=1+a_{2n}(n\in\mathbf{N})$,试求 $\bar{a}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_{2n}$,$\underline{a}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_{2n}$,

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_{2n+1}=\overline{b}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_{2n+1}=\underline{b}$．

（2）设$\{a_n\}$满足 $a_n\to+\infty(n\to\infty)$，$a_n>n(n\in\mathbf{N})$，试论数列 $b_n=(1-a_n/n)^n$ 的敛散性．

解　（1）易知 $a_n\geqslant 0(n\in\mathbf{N})$，且由

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= 1+a_{2n+1}/2=1+(1+a_{2n-1}/2)/2 \\ &= 1+1/2+1/2^2+a_{2n-3}/2^3 \\ &= 1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^{2n-3}a_3\leqslant 2, \end{aligned}$$

可知$\{a_n\}$是有界列．故存在 $\overline{a}$，$\underline{a}$，$\overline{b}$，$\underline{b}$，且有 $\overline{a}=\overline{b}/2$，$\overline{b}=1+\overline{a}$．由此可知 $\overline{a}=1$，$\overline{b}=2$．同理可推 $\underline{a}=1$，$\underline{b}=2$．这说明$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=2$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=1$．

（2）依题设知，对任意的 $M>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $a_n>M$．由此可得

$$\begin{aligned} &0<1-a_n/n<1-M/n \quad (n\geqslant N), \\ &0<(1-a_n/n)^n<(1-M/n)^n \quad (n\geqslant N), \\ &0\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(1-a_n/n)^n\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(1-a_n/n)^n\leqslant e^{-M}. \end{aligned}$$

再令 $M\to+\infty$，我们有$(1-a_n/n)^n\to 0(n\to\infty)$．

注　$(1+a_n/n)^n\to+\infty(n\to\infty)$．

例 2.4.15　试论下述数列$\{a_n\}$的敛散性：

（1）$a_{n+1}+4/a_n<4(a_n>0)$．　　（2）$a_{n+1}\leqslant a_n+1/n^2(a_n>0)$．

（3）$a_{n+1}\leqslant ka_n+\varepsilon_n(a_n>0,\varepsilon_n>0(n\in\mathbf{N}),\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,0<k<1)$．

解　（1）易知$\{a_n\}$是有界列，现令$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=\overline{a}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=\underline{a}$，则由题式知 $4\geqslant\overline{a}+4/\overline{a}$，$4\geqslant\underline{a}+4/\underline{a}$ 以及 $\underline{a}>0$．故可得$(\overline{a}-2)^2\leqslant 0$，$(\underline{a}-2)^2\leqslant 0$，即 $\overline{a}=\underline{a}=2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$．

（2）由题设知，对 $m\geqslant n$ 有

$$a_m\leqslant a_n+\sum_{k=n}^{m-1}1/k^2\leqslant a_n+\xi_n,\qquad \xi_n=\sum_{k=n}^{\infty}1/k^2.$$

令 $m\to+\infty$，则可得 $a_n\geqslant\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} a_m-\xi_n$．注意到存在极限 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}1/k^2$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$．从而在上述不等式中，令 $n\to\infty$，可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n\geqslant\overline{\lim_{m\to\infty}} a_m-\lim_{n\to\infty}\xi_n=\overline{\lim_{m\to\infty}} a_m.\qquad \{a_n\}\text{ 是收敛列}.$$

（3）任给 $\delta>0$，存在 N，使得 $\varepsilon_n<\delta(n\geqslant N)$．我们有

$$\begin{aligned} &a_{N+1}\leqslant ka_N+\varepsilon_N<ka_N+\delta, \\ &a_{N+2}\leqslant k^2a_N+k\delta+\varepsilon_{N+1}<k^2a_N+(1+k)\delta, \\ &a_{N+3}<k^3a_N+(1+k+k^2)\delta, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

根据归纳法推理，不难推得$(m\in\mathbf{N})$

$$a_{N+m} < k^m \cdot a_N + (1+k+\cdots+k^{m-1})\delta < k^m a_N + \frac{\delta}{1-k}.$$

从而令 $m \to +\infty$，即知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leqslant \delta/(1-k)$．因此，根据 δ 的任意性，可知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$．这说明 $a_n \to 0\ (n\to\infty)$．

例 2.4.16　试证明下列命题：

(1) 若 $\{a_n\}$ 满足 $0 \leqslant a_{n+m} \leqslant a_n + a_m\ (n, m \in \mathbf{N})$，则数列 $\{a_n/n\}$ 收敛．

(2) 若 $\{a_n\}$ 满足 $0 \leqslant a_{n+m} \leqslant a_n \cdot a_m\ (n, m \in \mathbf{N})$，则数列 $\{a_n^{1/n}\}$ 收敛．

(3) 设 $\{a_n\}$ 是正数列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}$．

(4) 设 $\{a_n\}$ 是正数列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geqslant 1$．

证明　(1) 易知 $0 \leqslant a_n \leqslant n a_1$，从而 $\{a_n/n\}$ 是有界列．记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n/n = L$，且取 $\{n_k\}$ 使得 $a_{n_k}/n_k \to L\ (k\to\infty)$．固定 n，令 $n_k = n i_k + j_k$，$j_k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，则得

$$a_{n_k} \leqslant i_k a_n + a_{j_k}, \qquad \frac{a_{n_k}}{n_k} \leqslant \frac{i_k}{n i_k + j_k} a_n + \frac{a_{j_k}}{n_k}.$$

令 $k\to\infty$，我们有 $L \leqslant a_n/n$．由此又知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{n} = L \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{n}$，即得所证．

(2) (i) 由 $a_{n+1} \leqslant a_n \cdot a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_1^{n+1}$ 可知 $0 < a_n^{1/n} \leqslant a_1\ (n \in \mathbf{N})$．

(ii) 记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n^{1/n} = \bar{a}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n^{1/n} = \underline{a}$，并取 $\{n_k\}$，$\{m_i\}$：

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}^{1/n_k} = \bar{a}, \qquad \lim_{i\to\infty} a_{m_i}^{1/m_i} = \underline{a}.$$

固定 i，令 $n_k/m_i = j_k + d_k\ (0 \leqslant j_k \in \mathbf{Z}; 0 \leqslant d_k < 1, k \in \mathbf{N})$，易知 $j_k/n_k \to 1/m_i\ (k\to\infty)$，$d_k/m_k \to 0\ (k\to\infty)$．我们有

$$a_{n_k} \leqslant a_{m_i\cdot j_k} \cdot a_{m_i\cdot d_k} = a_{m_i}^{j_k} \cdot a_1^{m_i\cdot d_k}, \qquad a_{n_k}^{1/n_k} \leqslant a_{m_i}^{j_k/n_k} \cdot a_1^{m_i d_k/n_k}.$$

现在令 $k\to\infty$，得 $\bar{a} \leqslant a_{m_i}^{1/m_i} \cdot 1$．再令 $i\to\infty$，又得 $\bar{a} \leqslant \underline{a}$．证毕．

注　令 $b_n = \ln a_n$，则可归为上述题型．

(3) 注意到 $(1+1/n)^n \to \mathrm{e}\ (n\to\infty)$，故只需指出，存在子列 $\{a_{n_k}\}$，使得

$$(a_1 + a_{n_k+1})/a_{n_k} > 1 + 1/n_k.$$

采用反证法：假定上述不等式不真，则存在 N，使得

$$(a_1 + a_{n+1})/a_n \leqslant 1 + 1/n = (n+1)/n \quad (n \geqslant N).$$

将其改写为 $a_n/n \geqslant a_1/(n+1) + a_{n+1}/(n+1)\ (n \geqslant N)$，则又有

$$\frac{a_N}{N} \geqslant \frac{a_1}{N+1} + \frac{a_{N+1}}{N+1} \geqslant \frac{a_1}{N+1} + \frac{a_1}{N+2} + \frac{a_{N+2}}{N+2}$$

$$\geqslant \cdots \geqslant a_1 \cdot \sum_{k=N+1}^{m} 1/k + a_m/m \quad (m > N).$$

由此推出 $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{k} \leqslant \frac{a_N}{N a_1}\ (m \geqslant N)$．但这个不等式是不成立的．证毕．

(4) 反证法：假定不等式不成立，则存在 N，使得 $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1\ (n\geqslant N)$，以及

$$1+a_{n+1}<\frac{n+1}{n}a_n,\qquad \frac{a_n}{n}>\frac{1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\ (n\geqslant N).$$

由此可知 $(k\geqslant N)$

$$\begin{aligned}\frac{a_k}{k}&>\frac{1}{k+1}+\frac{a_{k+1}}{k+1}>\cdots\\&>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+p}+\frac{a_{k+p}}{k+p}\\&>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+p}\quad (p>1).\end{aligned}$$

但这个不等式不成立(当 $p\to+\infty$ 时，右端趋于 $+\infty$)．因此，对任意的 N，总存在 n：$n\geqslant N$，使得 $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1$．

例 2.4.17　试论下述数列 $\{a_n\}$ 的敛散性：

(1) $a_n>0$，$a_{n+2}^2=\dfrac{1}{\alpha a_{n+1}^2+\beta a_n}\ (n\in\mathbf{N};\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1)$．

(2) 设 $a_1>0$，$a_2>0$，$a_{n+2}=\dfrac{2}{a_n+a_{n+1}}\ (n=1,2,\cdots)$．

(3) $a_1>0$，$a_{n+1}=\alpha\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\ (n\in\mathbf{N};0<\alpha<1)$．

解　(1) 取 $M>1$，使得 $1/M<a_1,a_2,\alpha,\beta<M$，则由

$$\frac{1}{M^2}\leqslant\frac{1}{\alpha M^2+\beta M}\leqslant a_3^2\leqslant\frac{1}{\alpha/M^2+\beta/M}=\frac{M^2}{\alpha+\beta M}\leqslant M^2,$$

可知 $1/M\leqslant a_3\leqslant M$．根据归纳法易得 $1/M\leqslant a_n\leqslant M\ (n\in\mathbf{N})$．从而对原递推式作上、下极限运算可知

$$\bar{a}^2\leqslant 1/(\alpha\underline{a}^2+\beta\underline{a}),\qquad \underline{a}^2\geqslant 1/(\alpha\bar{a}^2+\beta\bar{a}).$$

即 $\alpha\bar{a}^2\underline{a}^2+\beta\bar{a}^2\underline{a}\leqslant 1\leqslant\alpha\underline{a}^2\bar{a}^2+\beta\underline{a}^2\bar{a}$．从而有 $\bar{a}\underline{a}(\bar{a}-\underline{a})\leqslant 0$，$\bar{a}\leqslant\underline{a}$．故 $\{a_n\}$ 为收敛列．令 $a_n\to a\ (n\to\infty)$，可得 $a^2=1/(\alpha a^2+\beta a)$，

$$\alpha a^4+\beta a^3-1=0,\qquad \alpha a^4+(1-\alpha)a^3-1=0.$$

$$(a-1)(\alpha a^3+a^2+a+1)=0,\qquad a=1.$$

(2) (i) $\{a_n\}$ 是有界列，这是因为存在 $\varepsilon>0$，使得 a_1 与 a_2 位于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 与 ε 之间，所以 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 也位于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 与 ε 之间，即 a_3 位于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 与 ε 之间．由此不难证得，若 a_{n-1} 与 a_n 在 $\frac{1}{\varepsilon}$ 与 ε 之间，则 a_{n+1} 就在 $\frac{1}{\varepsilon}$ 与 ε 之间．所以根据归纳法可知，$\{a_n\}$ 在 $\frac{1}{\varepsilon}$ 与 ε 之间．

(ii) 在递推公式的两端取上极限、下极限,则 $\overline{a}\leqslant\dfrac{2}{2\underline{a}}$,$\underline{a}\geqslant\dfrac{2}{2\overline{a}}$;$\overline{a}\,\underline{a}=1$.

(iii) 根据上极限的理论可知,存在正整数子列$\{n_k\}$,使得$\{a_{n_k+2}\}$收敛于 $\overline{a}$,同时(用抽收敛子列法)可使得$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+1}=l_1$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=l_2$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k-1}=l_3$.于是由等式

$$a_{n_k+1}+a_{n_k}=\frac{2}{a_{n_k+2}},\quad a_{n_k}+a_{n_k-1}=\frac{2}{a_{n_k+1}},$$

可推得

$$l_1+l_2=\frac{2}{\overline{a}},\quad l_2+l_3=\frac{2}{l_1}.$$

注意到 $\underline{a}\leqslant l_1,l_2,l_3\leqslant\overline{a}$,我们有 $l_1=l_2=\underline{a}$,$l_2=l_3=\overline{a}$.这说明$\{a_n\}$是收敛列.若令其极限为 a,则从等式 $a_{n+2}=\dfrac{2}{a_n+a_{n+1}}$中立即得出 $a=1$.

(3) 令 $B=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$,并取 $A>0$,使得$\dfrac{B}{A}<a_1<A$,则

$$a_2<\alpha\left(A+\frac{A}{B}\right)=\alpha A\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)=A,$$

$$a_2>\alpha\left(\frac{B}{A}+\frac{1}{A}\right)=\frac{\alpha}{A}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+1\right)=\frac{B}{A}.$$

根据归纳法,不难推知 $B/A<a_n<A\ (n\in\mathbf{N})$.

现在对原递推式施行上、下极限运算,我们有

$$\begin{cases}\overline{a}\leqslant\alpha\overline{a}+\alpha/\underline{a},\\ \underline{a}\geqslant\alpha\underline{a}+\alpha/\overline{a},\end{cases}\quad \overline{a}\,\underline{a}=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

再取$\{n_k\}$,使 $a_{n_k}\to\overline{a}\ (k\to\infty)$,而 $a_{n_k-1}\to l\ (k\to\infty)$.从而对 $a_{n_k}=\alpha(a_{n_k-1}+1/a_{n_k-1})$,令 $k\to\infty$,则得

$$\overline{a}=\alpha\left(l+\frac{1}{l}\right),\qquad \frac{\alpha}{\underline{a}(1-\alpha)}=\alpha\left(l+\frac{1}{l}\right),$$

$$l+\frac{1}{l}=\frac{1}{\underline{a}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+1\right)=\frac{1}{\underline{a}}(\overline{a}\,\underline{a}+1)=\overline{a}+\frac{1}{\underline{a}}.$$

因为 $0\leqslant\overline{a}-l=1/l-1/\underline{a}\leqslant0$,所以 $\overline{a}=l=\underline{a}$.$\{a_n\}$收敛,且 $a_n\to\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\ (n\to\infty)$.

特例 设 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n/2+1/a_n\ (n\in\mathbf{N})$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.实际上,易知递推式可改写为:$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a_n}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{a_n}\right)$,且令 $b_n=a_n/\sqrt{2}$,则 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n+1/b_n)$.从而知

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\sqrt{(1/2)/\left(1-\frac{1}{2}\right)}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$$

($\{a_n\}$是有理数列).

注 设数列$\{a_n\}$.若对任意实数 $C>1$,均存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_{[C^n]}$($[x]$表示 x 的整数部分),则$\{a_n\}$

是收敛列(因为若有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < l < L < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$,则必存在 $C>1$,使得在$\{[C^n]\}$中有无穷多个指标$\{n_k\}$,使 $a_{n_k}>L$,$a_{m_i}<l$,这与题设矛盾).

例 2.4.18 试证明下列命题:

(1) 记数列$\{a_n\}$的上、下极限各为 L,l:$l<L$,且有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$,则任意的$a\in(l,L)$都是$\{a_n\}$的聚点.

(2) 若数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_n)=0$,则$\{a_n\}$的聚点至多两个或无穷多个.

(3) 记数列$\{a_n\}$的上、下极限各为 L,l:$l<L$,且有

$$a_{n+1}-a_n>-b_n\ (n\in\mathbf{N}),\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n=0,$$

则任意的 $a\in(l,L)$都是$\{a_n\}$的聚点.

证明 (1) 记 $\delta=\min\{L-a,a-l\}$,则对 $i\in\mathbf{N}$,存在 $k_i\in\mathbf{N}$,当 $n\geqslant k_i$ 时,$|a_{n+1}-a_n|<\delta/2^i$.

取 $l_1\geqslant k_1$,使 $a_{l_1}>L-\delta/2$,又取 $m_1>l_1$,使 $a_{m_1}<l+\delta/2$;

取 $l_2>k_2$,$l_2>m_1$,使 $a_{l_2}>L-\delta/2^2$,又取 $m_2>l_2$,使 $a_{m_2}<l+\delta/2^2$;

…………

取 $l_i>k_i$,$l_i>m_{i-1}$,又取 $m_i>l_i$,使得 $a_{l_i}>L-\delta/2^i$,$a_{m_i}<l+\delta/2^i$;

…………

从而知存在 n_i:$l_i<n_i<m_i$($i\in\mathbf{N}$),使得

$$a_{n_i}<l+\delta\leqslant a,\qquad a_{n_i-1}\geqslant a\qquad (i\in\mathbf{N}).$$

故$|a_{n_i}-a|<|a_{n_i}-a_{n_i-1}|$($i\in\mathbf{N}$).又由 $n_i>l_i>k_i$ 可知 $n_i-1\geqslant k_i$,得$|a_{n_i}-a_{n_i-1}|<\delta/2^i$.这说明$|a_{n_i}-a|<\delta/2^i$,$\lim\limits_{i\to\infty}a_{n_i}=a$($i\in\mathbf{N}$).

(2) 根据题设,我们有

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n+1}+a_{2n})=0, & \lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}+a_{2n-1})=0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n+2}+a_{2n-1})=0; & \lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n-1}+a_{2n-2})=0.\end{cases}$$

由此推得

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n+1}-a_{2n-1})=0,\qquad \lim_{n\to\infty}(a_{2n}-a_{2(n-1)})=0.$$

也就是说,数列$\{a_{2n}\}$,$\{a_{2n+1}\}$满足上述(1)之题设.从而即得所证.

(3) 反证法.假定有 $a_0\in(l,L)$不是$\{a_n\}$的聚点,则存在 $\varepsilon_0>0$,以及 N_1,使得

$$l<a_0-\varepsilon_0<a_0<a_0+\varepsilon_0<L,\qquad a_n\overline{\in}[a_0-\varepsilon_0,a_0+\varepsilon_0]\qquad (n>N_1).$$

也存在 N_2,使得 $a_n-a_{n+1}<b_n<\varepsilon$($n>N_2$).

此外,还存在$\{a_{n_k}\}$:$a_{n_k}>L-\varepsilon_0>a_0$.从而知

$$a_{n_k+1}=a_{n_k}+(a_{n_k+1}-a_{n_k})>a_0-\varepsilon_0.$$

因为 $a_{n_k+1}>a_0+\varepsilon_0$($n_k>\max\{N_1,N_2\}$),所以有 $l\geqslant a_0+\varepsilon_0>a_0>l$,导致矛盾.

2.5　函数极限

2.5.1　函数的界

定义 2.5.1　对于定义在 $X\subset(-\infty,\infty)$上的函数 $y=f(x)$：

(1) 若存在实数 M,使得 $f(x)\leqslant M,x\in X$,则称 $f(x)$在 X 上是**上方有界的**(**函数**),M 称为 $f(x)$在 X 上的**上界**.

(2) 若存在实数 m,使得 $f(x)\geqslant m,x\in X$,则称 $f(x)$在 X 上是**下方有界的**(**函数**),m 称为 $f(x)$的 X 上的**下界**.

(3) 若存在正实数 M,有 $|f(x)|\leqslant M,x\in X$(即值域 $R(f)$是有界集),则称 $f(x)$在 X 上是**有界的**(**函数**),M 称为 $f(x)$在 X 上的**界**.

不是有界的函数称为无界函数,无界是有界的否定.因此,为了得到函数无界的正面明确陈述,只要将定义有界的语句在数学含义上给予否定即可得出.

设 $f(x)$是定义在数集 X 上的函数.若对任意的正数 M(否定存在 M),存在 $x'\in X$(否定任意的 $x\in X$),有 $|f(x')|>M$(否定 $|f(x)|\leqslant M$),则说 $f(x)$在 X 上是**无界**的.

注 1　上述函数的有界(无界)性,往往出现在某点附近的邻域内.此时也称函数在该点附近有界(无界),如定义在(0,1)上的函数 $f(x)=1/x$ 在 $x=0$ 附近无界.

注 2　设 $f(x)=\begin{cases}0, x\text{是无理数}, \\ q, x=\dfrac{p}{q}\ (p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N},\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互素}),\end{cases}$ 则 $f(x)$在任一区间(a,b)上均无界.

例 2.5.1　设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上,且有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),\qquad x_1,x_2\in(-\infty,\infty).$$

若 $f(x)$在某点 x_0 的邻域 $U_\delta(x_0)\triangleq(x_0-\delta,x_0+\delta)$上有界,则 $f(x)$在任一点 $x\in(-\infty,\infty)$的邻域 $U_\delta(x)$上有界.

证明　依题设不妨假定 $|f(x')|\leqslant M,x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

现在考察$(-\infty,\infty)$中任意取定点 x,对于任意的 $x''\in(x-\delta,x+\delta)$,令 $x'''=x''-(x-x_0)$,则由 $x'''-x_0=x''-x$ 可知 $|x'''-x_0|<\delta$.从而得 $|f(x''')|\leqslant M$.由于

$$\begin{aligned}|f(x'')|&=|f(x'''+(x-x_0))|=|f(x''')+f(x-x_0)|\\&\leqslant|f(x''')|+|f(x-x_0)|\leqslant|f(x''')|+|f(x)-f(x_0)|\\&\leqslant|f(x''')|+|f(x)|+|f(x_0)|\leqslant 2M+|f(x)|,\end{aligned}$$

这里的 x''是点 x 的邻域$(x-\delta,x+\delta)$中任意一点,由不等式 $|f(x'')|\leqslant 2M+|f(x)|$,说明此函数在点 x 的邻域 $U_\delta(x)$中有界.

例 2.5.2　设 $f(x)$是$[a,b]$上的上凸或(下)凸函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证明　只需指出(下)凸函数 $f(x)$仅呈现下述两种情形:

(i) $f(x)$在$[a,b]$上递增或递减.

(ii) 存在子区间$[p,q]$(或 $p=q=x_0$),使得 $f(x)$在$[a,p]$上递减;在$[q,b]$上

递增;在$[p,q]$上是常数.

事实上,若不出现(i),则存在 $c<x_0<d$,使得 $f(c)>f(x_0)<f(d)$(由于凸性).从而当 $c''>c'<c$ 时必有 $f(c'')\geqslant f(c')$.这说明 $f(x)$在$[a,c)$上是递减的.类似地可知 $f(x)$在$(d,b]$上是递增的.

令 $p=\sup\{c:f(x)$在$[a,c)$上递减$\}$,$q=\inf\{d:f(x)$在$(d,b]$上递增$\}$,易知 $p\leqslant q$.证毕.

例 2.5.3 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的凸函数.若 $f(x)$有界,则 $f(x)$是常数.

证明 由 $f(x)$的凸性可知,若对 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$,

$$f(x)\geqslant f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),\qquad x>x_2,$$

从而知 $f(x)$是无界的,这与题设矛盾.证毕.

例 2.5.4 试证明下列命题:

(1) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的 $f(x)$满足 $f(x)-\dfrac{1}{2}f(x/2)=x^2$,$x\in(-\infty,\infty)$.若 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域 $U(0)$上有界,则 $f(x)=8x^2/7$.

(2) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的 $f(x)$,$g(x)$满足

$$f(x+y)+g(x-y)=2f(x)g(y),\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

若 $f(x)\not\equiv0$ 且有 $|f(x)|\leqslant1$,则 $|g(x)|\leqslant1$.

证明 (1) 易知 $f(0)=0$,且有

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+f(x/2)/2=x^2+x^2/2^3+f(x/2^2)/2^2\\&=\cdots=x^2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{3k}}+\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$,并注意 $f(x)$在 $U(0)$上有界,可得

$$f(x)=\frac{8}{7}x^2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{8}{7}x^2.$$

(2) 反证法.若存在 t_0,使得 $|g(t_0)|=a>1$,则当 $f(x)$的上确界为 $M=\sup\{|f(x)|:x\in\mathbf{R}\}$时,我们有 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $|f(x_0)|>M/a$,故知

$$\begin{aligned}|f(x_0+t_0)|+|g(x_0-t_0)|&\geqslant|f(x_0+t_0)+g(x_0-t_0)|\\&=2|f(x_0)||g(t_0)|>2\frac{M}{a}a=2M.\end{aligned}$$

因此,或 $|f(x_0+t_0)|>M$,或 $|g(x_0-t_0)|>M$.这均导致矛盾.证毕.

例 2.5.5 设 $f(x)$在$[0,100]$上递增.若 $0<f(0)$,$f(100)<100$,试证明方程 $f(x)=x$ 有解.

证明 作数集 $E=\{x\in[0,100):x-f(x)\leqslant0\}$,易知 E 是有界集.令 $\sup E=x_0$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $x\in E$,使得 $x\leqslant x_0<x+\varepsilon$.从而有

$$x_0-f(x_0)\leqslant x_0-f(x)<x+\varepsilon-f(x)\leqslant\varepsilon.$$

由此得 $x_0\leqslant f(x_0)$.假定 $f(x_0)-x_0=\delta>0$,则对某个 $x\in E$,有 $x\leqslant x_0<x_0+\delta$,从而知 $x\leqslant x_0<f(x_0)-x_0+x+\delta$.由此知 $x\leqslant x_0<f(x_0)-x_0+x$.因为 $f(x)$递增,所以有

$$f(x_0)-x_0+x\leqslant f(x_0)\leqslant f[f(x_0)-x_0+x].$$

这说明 $x_0<f(x_0)-x_0+x\in E$,但与 x_0 之定义矛盾.证毕.

2.5.2 函数的极限概念

函数在点 x_0 处的极限

定义 2.5.2 设函数 $f(x)$在 $U_0(x_0)\triangleq(x_0-\eta,x_0)\cup(x_0,x_0+\eta)$上有定义,$A$ 是一个常数.若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon,0<|x-x_0|<\delta$,则称 $f(x)$当 x 趋于 x_0(记为 $x\to x_0$)时趋于 A,也称当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$以 A 为**极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\quad 或\quad f(x)\to A\quad(x\to x_0).$$

又称为 $f(x)$**在点 x_0 处存在极限**,其**极限值**为 A.

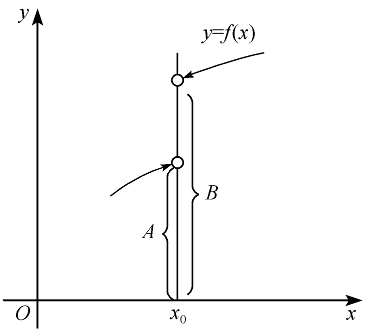

图 2.1

定义 2.5.3 (1) 设 $f(x)$在$(x_0-\eta,x_0)$上有定义,$\eta>0$,A 是一个常数.若对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0(\delta<\eta)$,使得 $|f(x)-A|<\varepsilon,0<x_0-x<\delta$,则称 $f(x)$在点 x_0 的**左极限存在**(图 2.1),A 称为$f(x)$在点 x_0 的**左极限值**,记为

$$f(x_0-)\triangleq\lim_{x\to x_0-}f(x)=A.$$

(2) 设 $f(x)$在$(x_0,x_0+\eta)$上有定义,$\eta>0$,B 是一个常数.若对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0(\delta<\eta)$,使得

$$|f(x)-B|<\varepsilon,\quad 0<x-x_0<\delta,$$

则称 $f(x)$在点 x_0 的**右极限存在**(图 2.1),其**右极限值**为 B,并记为 $f(x_0+)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=B$.

定理 2.5.1 设 $f(x)$在 $U_0(x_0)$上有定义,则存在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$f(x_0+)=f(x_0-)=A.$$

定义 2.5.4 设 $f(x)$在区域 $|x|>a$上有定义,A 是常数.若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得

$$|f(x)-A|<\varepsilon\quad(|x|>M),$$

则称 $f(x)$当 x 趋于无穷(记为 $x\to\infty$)时趋于 A,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.也称为 $x\to\infty$时 $f(x)$极限存在,其极限值为 A.

对于在$(a,+\infty)$上有定义的函数,若上述结论在 $x>M$ 上成立,则称 $f(x)$在 $x\to+\infty$时极限存在,其极限值为 A,并记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

对于$(-\infty,b)$上有定义的函数,若上述结论在 $x<-M$ 上成立,则称 $f(x)$在 $x\to-\infty$时极限存在,其极限值为 A,并记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

注 1 设对任意的 $a\in(-\infty,\infty)$,均有$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{a}{n}\right)=0$,但仍可以不存在极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1/n\cdot\sqrt[n]{2}, n\in\mathbf{N},\\ 0, & x\text{ 是其他值}.\end{cases}$$

注 2 设对任意的 $a>0$,均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(an)=0$,但仍可以不存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.例如 $f(x)=\begin{cases}1, x=n\cdot\sqrt[n]{2}(n\in\mathbf{N}),\\ 0, x\text{ 是其他值}.\end{cases}$实际上,对 $a>0$,取 $n,k\in\mathbf{N}$,使得 $ak=n\cdot\sqrt[n]{2}$,而又无其他 k',n'使得 $ak'=n'\cdot\sqrt[n']{2}$(否则导致 $k/k'=(n/n')\cdot 2^{(n'-n)/nn'}$.矛盾).

注 3 对任意的 $a>0$,均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a+n)=0$,仍可以不存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.如对正有理数 α,令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=n\alpha \quad (n=1,2,\cdots),\\ 0, & x\text{ 是其他值}.\end{cases}$$

(注意对某个 k,n,有 $\alpha+k=n\alpha$,则不存在另外的 k',n',有 $\alpha+k'=n'\alpha$.)

注 4 若对任意的 $a>0,b>0$,均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a+bn)=0$,但仍可以不存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.例如仍用注 2 中函数.$a,b>0$,且有(对某个 $n,m,k,l\in\mathbf{N}$)$a+b\,n=m\sqrt[m]{2}$,$a+b\,k=l\cdot\sqrt[l]{2}$,使得 $n\neq k,m\neq l$,于是

$$a=\frac{nl\cdot\sqrt[l]{2}-mk\sqrt[m]{2}}{n-k},\qquad b=\frac{m\cdot\sqrt[m]{2}-l\cdot\sqrt[l]{2}}{n-k}.$$

若有 $p,q\in\mathbf{N}$,使得 $p\neq n,p\neq k,q\neq m,q\neq l$,而 $a+bp=q\cdot\sqrt[q]{2}$,则可得

$$m(p-k)\sqrt[m]{2}+l(n-p)\sqrt[l]{2}=q(n-k)\sqrt[q]{2}.\text{导致矛盾}.$$

例 2.5.6 试描述具有下列性质的函数 $f(x)$:

(1) 对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x_1,x_2\in(-\infty,\infty)$且$(x_1-x_2)<\delta$时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

(2) 对任给 $\varepsilon>0$,任给 $\delta>0$,当 $x_1,x_2\in(-\infty,\infty)$且 $|x_1-x_2|<\delta$时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

(3) 对任给 $\varepsilon>0$,任给 $\delta>0$,当 $x_1,x_2\in(-\infty,\infty)$且 $|x_1-x_2|<\delta$时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon$.

(4) 对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x_1,x_2\in(-\infty,\infty)$且 $|x_1-x_2|<\varepsilon$时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\delta$.

(5) 存在 $\varepsilon_0>0$,对任意 $\delta>0$,当 $x_1,x_2\in(-\infty,\infty)$且 $|x_1-x_2|<\delta$时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_0$.

解 (1) 与(2)中的 $f(x)\equiv$常数.(3)中的函数不存在.(4) $f(x)$在任意的区间$[a,b]$上均有界.(5) $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界.

例 2.5.7 在下列函数 $f(x)$中,$x_0\in(-\infty,\infty)$,对任给 $\varepsilon>0$,试求出 $\delta>0$(可能与 x_0 有关),使得 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, $|x-x_0|<\delta$.

(1) $f(x)=x^2-2x$. (2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$. (3) $f(x)=x^n$.

(4) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$.

解 (1) 由不等式

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|x^2-2x-x_0^2-2x_0|\\&=|[(x-x_0)+(x_0-1)]^2-(x_0-1)^2|\\&\leqslant|[\delta+|x_0-1|]^2-(x_0-1)^2|<\varepsilon,\end{aligned}$$

可知$(\delta+|x_0-1|)^2<\varepsilon+(x_0-1)^2$,即令 $\delta<\sqrt{\varepsilon+(x_0-1)^2}-|x_0-1|$.

(2) 注意到$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0})^2\leqslant4(x^{2/3}+x^{1/3}x_0^{1/3}+x_0^{2/3})$,再以$|x^{1/3}-x_0^{1/3}|$相乘两端,可知$|x^{1/3}-x_0^{1/3}|^3\leqslant4|x-x_0|$.从而取 $\delta=\frac{\varepsilon^3}{4}$即可.

(3) 注意到

$$\begin{aligned}|x^n-x_0^n|&=|x-x_0||x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\cdots+x_0^{n-1}|\\&\leqslant\delta\cdot|x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\cdots+x_0^{n-1}|,\end{aligned}$$

取 $\delta<1$ 使得$|x|<|x_0|+1$,则

$$\begin{aligned}|x^n-x_0^n|&<\delta[(|x_0+1|)^{n-1}+|x_0|(|x_0+1|)^{n-2}+\cdots]\\&<\delta[(|x_0|+1)^{n-1}+(|x_0|+1)^{n-1}+\cdots].\end{aligned}$$

由此知$|x^n-x_0^n|<\delta\cdot n(|x_0|+1)^{n-1}$,故只需取 $\delta=\varepsilon/n(|x_0|+1)^{n-1}$ $(\varepsilon<1)$即可.

(4) 我们注意到

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|a_n(x^n-x_0^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-x_0^{n-1})+\cdots|\\&\leqslant|a_n||x^n-x_0^n|+|a_{n-1}||x^{n-1}-x_0^{n-1}|+\cdots,\end{aligned}$$

则由(3)可知

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant A\cdot\delta[n(|x_0|+1)^{n-1}+(n-1)(|x_0|+1)^{n-2}+\cdots],$$

其中 A 是$|a_i|$$(i=1,2,\cdots,n)$中之最大者.从而有

$$|f(x)-f(x_0)|<A\cdot\delta[n(|x_0|+1)^{n-1}+n(|x_0|+1)^{n-1}+\cdots],$$

故只需取 $\delta=\min\{1,\varepsilon/An^2(|x_0|+1)^{n-1}\}$即可.

例 2.5.8 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[0,1]$上递增.若 $f(0)>0$,$f(1)<1$,则存在 $x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=x_0^2$.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调.若有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$,$\{x_n\}\subset[a,b]$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$.

证明 (1) 作数集 $E=\{x\in(0,1):f(x)\geqslant x^2\}$,且记 $x_0=\sup E$,则

(i) 对任给 $\varepsilon>0$,存在 $t:x_0-\varepsilon<t\leqslant x_0$,使得 $f(t)\geqslant t^2$.令 $\varepsilon\to0$,即 $t\to x_0-$,可知 $f(x_0-)\geqslant x_0^2$.

(ii) 对大于 x_0 的 $x\in(0,1)$,可知 $f(x)<x_0^2$.令 $x\to x_0+$,则 $f(x_0+)\leqslant x_0^2$.

综合(i)与(ii),得到 $f(x_0+)\leqslant f(x_0-)$.注意到 $f(x)$递增,我们有 $f(x_0+)=f(x_0-)=f(x_0)=x_0^2$.

(2) 令 $y_n=f(x_n)$,则 $x_n=f^{-1}(y_n)$$(n\in\mathbf{N})$.因为$\{x_n\}$是递增有界列,所以存在

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.若 $x_0\neq b$,即 $x_0<b$ 并注意 $y_n\to f(b)(n\to\infty)$,可知$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)<b$.这一矛盾说明命题成立.

例 2.5.9 试证明下列命题:

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

(2) 设 $f(x)$是$(-a,a)$上的正值函数,若有$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1/f(x)]=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

证明 (1) 由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 δ:$0<\delta<1$,使得

$$\left|f\left(x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)\right|<\varepsilon\qquad(0<|x|<\delta).$$

现在取 n:$n>1/\delta$,且对 $0<t<1/(n+1)$,令 $x=(1-t)/n$,则由

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1-1/(n+1)}{n}<\frac{1-t}{n}=x<\frac{1}{n},$$

可知 $n<1/x<n+1$,$[1/x]=n$.从而有

$$x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=x\left(\frac{1}{x}-n\right)=1-\frac{1-t}{n}n=t.$$

故若 $0<t<1/(n+1)$,则 $|f(t)|=\left|f\left(x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)\right|<\varepsilon$.

对 $t<0$ 的情形可类似讨论.

(2) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$0\leqslant f(x)-1/f(x)-2<\varepsilon,\qquad 0<|x|<\delta.$$

由此可知,当 $0<|x|<\delta$时有

$$\begin{cases}0\leqslant[f(x)-1]+[1/f(x)-1]<\varepsilon,\\ 0\leqslant[f(x)-1][1-1/f(x)]<\varepsilon.\end{cases}$$

将前一式作平方,并注意到后一式,我们有

$$[f(x)-1]^2+[1/f(x)-1]^2\leqslant\varepsilon^2+2\varepsilon\qquad(0<|x|<\delta).$$

从而直接得出$[f(x)-1]^2\leqslant\varepsilon^2+2\varepsilon(0<|x|<\delta)$.即 $|f(x)-1|<\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}(0<|x|<\delta)$.

2.5.3 函数极限的基本性质

与数列极限的情形类似,下面列出的若干定理不仅揭示出函数的局部性态,而且扩充了求证函数极限的方法.我们约定:凡是讲到函数 $f(x)$(包括多个函数)在点 x_0 处的极限时,总认为已在某个邻域 $U_0(x_0)$上有定义,而讲到在无穷远处的极限时,也一样认为在相应的区域上已有定义,所论之自变量 x 的取值皆属于定义域.

(一) 函数值与极限值之间的关系

定理 2.5.2(唯一性) 若存在极限(i)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$;(ii)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$,则其极限值是唯一的.

定理 2.5.3(有界性) (i) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则存在 $\delta>0$,使得 $f(x)$在 $U_0(x_0,\delta)=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$上有界;(ii) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,则存在 $M>0$,使得 $f(x)$在 $|x|>M$ 上有界.

定理 2.5.4(保号性) 设(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$;(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.若 $A>0(<0)$,则

(i) 存在 $\delta>0$,使得 $f(x)>0(<0)(x\in U_0(x_0,\delta))$.

(ii) 存在 $M>0$,使得 $f(x)>0(<0)(|x|>M)$.

(二) 函数极限运算之间的关系

定理 2.5.5(四则运算) 若存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则有

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=A\cdot B=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(iii) 若 $g(x)\neq 0$,且 $B\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

注 上述定理对于存在极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$,也有相应的结论.

定理 2.5.6(复合运算) 设 $y=f(u)$在 $U_0(u_0)$上有定义,$u=g(x)$在 $U_0(x_0)$上有定义,且值域 $R(g)\subset U_0(u_0)$.若有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=A$.

注 1 上述定理中,若不限制 g 的值域,则结论不一定成立.例如:

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad f(x)\text{是 Riemann 函数}.$$

注 2 上述定理对 $u\to\infty$, $x\to\infty$也有相应的结论.此外,它为极限过程的转移提供基础.

定理 2.5.7(保序性) 设函数 $f(x)$, $g(x)$满足

(i) $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in U_0(x_0)$; (ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,

则 $A\leqslant B$.

注 上述定理对于 $x\to\infty$的极限过程也有相应的结论.

定理 2.5.8(迫敛性) 设函数 $f(x)$, $g(x)$与 $h(x)$满足

(i) $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, $x\in U_0(x_0)$; (ii) $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

注 上述定理对 $x\to\infty$的极限过程也有相应的结论.

基本初等函数的极限举例:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. (2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$. (3) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} x^\alpha=x_0^\alpha$. (5) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}\ (a>0)$. (6) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0\ (x_0>0)$.

(三) 符号“o”,“$\sim$”

1. 为方便起见,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)=0$,则记为 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$.从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

记为 $f(x)=o(1)(x\to x_0)$,也称为无穷小量.若 $f(x)-g(x)=o(h(x))(x\to x_0)$,则也记为 $f(x)=g(x)+o(h(x))(x\to x_0)$.易知下述命题成立:

若 $f(x)=o(1)(x\to x_0)$,而 $g(x)$在 $U(x_0)$上有界,则 $f(x)g(x)=o(1)(x\to x_0)$.例如:

(i) $(1+x)^n=1+nx+o(x)(x\to 0)$. (ii) $(1+x)^n=1+nx+\binom{n}{2}x^2+o(x^2)(x\to 0)$.

(iii) $x^\alpha\ln x=o(1)(\alpha>0,x\to 0+)$. (iv) $x^n/e^x=o(1)(x\to+\infty)$.

(v) $(\ln x)^n/x=o(1)(x\to+\infty)$.

2. 若在 x 充分接近 x_0 时,有 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|(M>0)$,则记为 $f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$.

注 1 条件$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(2x)]=0$不能推出$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.例如

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n, & x=1/2^n(n=0,1,2,\cdots),\\ 0, & x=\text{其他}.\end{cases}$$

但若再加条件 $f(x)\geqslant g(x)$且$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.这是因为此时有

$$g(x)\leqslant f(x)=[f(x)+f(2x)]-f(2x)\leqslant[f(x)+f(2x)]-g(2x).$$

注 2 条件$\lim\limits_{x\to 0}f(x)f(2x)=0$不能保证极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在.例如:

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n, & x=1/2^{2^n},n\in\mathbf{N}.\\ 0, & x=\text{其他}.\end{cases}$$

但若再加条件:当 $x\in U_0(0)$时有 $f(x)f(2x)\leqslant|x|$,$f(x)\geqslant|x|^\alpha(1/2<\alpha<1)$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.这是因为此时有

$$|x|^\alpha\leqslant f(x)\leqslant|x|/f(2x)\leqslant|x|/|2x|^\alpha.$$

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=1$,则记为 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,且称为 $f(x)$与 $g(x)$在 $x\to x_0$ 时是等价变量.特别在 $f(x)=o(1)$,$g(x)=o(1)(x\to x_0)$时又有 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,则称 $f(x)$与 $g(x)$为等价无穷小量.例如:

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x(x\to 0),$$
$$x\sim\arcsin x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1(x\to 0).$$

易知下述命题成立:若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)/g(x)=l$,且 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)/f(x)=l$(即在乘积极限式中,可用等价量作替换).

此外,若有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)/x^\alpha=0(\alpha>0)$,则称 $f(x)$(在 $x\to 0$ 时)为 α阶无穷小量.

例 2.5.10 试求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$. (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\quad(m,n\in\mathbf{N})$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$. (4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)\quad(m,n\in\mathbf{N})$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}\Bigg/\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\to 1(x\to+\infty)$.

(2) 令 $x=(1+t)^{mn}$,则 $x\to 1$ 相当于 $t\to 0$.从而有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)^m-1}=\frac{n}{m}.$$

(3) 令 $t=\sqrt[5]{32+x}$,则 $x\to 0$ 相当于 $t\to 2$.从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^4+2t^3+4t^2+8t+16}=\frac{1}{80}.$$

(4) 令 $x=1+t$,则 $x\to 1$ 等价于 $t\to 0$,从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{(1+t)^n-1}-\frac{m}{(1+t)^m-1}\right)\\&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{nt+\binom{n}{2}t^2+o(t^2)}-\frac{m}{mt+\binom{m}{2}t^2+o(t^2)}\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\left(n\binom{m}{2}-m\binom{n}{2}\right)t^2+o(t^2)}{mnt^2+o(t^2)}\\&=\frac{n\binom{m}{2}-m\binom{n}{2}}{mn}=\frac{m-n}{2}.\end{aligned}$$

例 2.5.11 试求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(1+x)\tan(1-x)-\tan^2 1}{\tan^2 x}$. (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+\sqrt{x})}{\ln(6+\sqrt[6]{x})}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\tan^2 x}\left(\dfrac{\tan^2 1-\tan^2 x}{1-\tan^2 1\cdot\tan^2 x}-\tan^2 1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan^2 x}\left(\frac{\tan^4 1\tan^2 x-\tan^2 x}{1-\tan^2 1\cdot\tan^2 x}\right)=\tan^4 1-1.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}+\ln(1+2/\sqrt{x})}{\ln\sqrt[6]{x}+\ln(1+6/\sqrt[6]{x})}=3$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

例 2.5.12 试求下列函数极限:

(1) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha a^x\,(a>0,a\neq 1)$. (2) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{x^\alpha\cdot\ln^\beta x}}$.

解 (1) 我们有(用指数-对数变换)

$$I=\lim_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x+x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}e^{x(\ln a+\alpha\ln x/x)}$$

$$=\begin{cases}0, & 0<a<1,\text{任意 }\alpha\text{值},\\ +\infty, & a>1,\text{任意 }\alpha\text{值}.\end{cases}$$

(2) 用指数-对数变换 $a=e^{\ln a}$,我们有

$$I=\lim_{x\to+\infty}e^{x}/e^{x^{\alpha}\cdot\ln^{\beta+1}x}=\begin{cases}0, & \alpha>1;\alpha=1\text{ 且 }\beta>-1,\\ 1, & \alpha=1\text{ 且 }\beta=-1,\\ +\infty, & \alpha<1;\alpha=1\text{ 且 }\beta<-1.\end{cases}$$

例 2.5.13 试证明下列函数极限式:

(1) 设 $f(x)$是$(0,\infty)$上的单调函数.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(2x)/f(x)=1$,则对任意的 $a>0$,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(ax)/f(x)=1$.

(2) 设 $f(x)$定义在 $U(0)$上,若有

$$\lim_{x\to0}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(x/2)}{x}=0,$$

则$\lim\limits_{x\to0}f(x)/x=0$.

证明 (1) 不妨设 $f(x)$递增.首先我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^{n}x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^{n}x)}{f(2^{n-1}x)}\cdot\frac{f(2^{n-1}x)}{f(2^{n-2}x)}\cdots\frac{f(2x)}{f(x)}=1.$$

其次,对 $a\geqslant1$,存在 $n\in\mathbf{Z}$,使得 $2^{n}\leqslant a<2^{n+1}$.从而又有

$$f(2^{n}x)\leqslant f(ax)\leqslant f(2^{n+1}x)\qquad(x>0).$$

由此知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(ax)/f(x)=1$.

当 $a<1$ 时,我们有($t=ax$) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(t)}{f(t/a)}=1$.

(2)由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x|<\delta$时有

$$\frac{|f(x)-f(x/2)|}{|x|}<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |f(x)-f(x/2)|<\varepsilon|x|/2.$$

从而可知

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^{i}}\right)\right)+f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^{i}}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|x|\varepsilon}{2^{i}}+\left|f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)\right|<\varepsilon|x|+\left|f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$,则得 $|f(x)|\leqslant\varepsilon|x|$ $(0<|x|<\delta)$.证毕.

例 2.5.14 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$是$(-\infty,\infty)$上的周期函数.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$,则

$f(x)=g(x)(-\infty<x<\infty)$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上有界.若对 $a>1,b>1,0\leqslant x\leqslant 1/a$,有 $f(ax)=bf(x)$,则$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$.

证明 (1) 设 $f(x)$的周期为 T.由题设知$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+T)-g(x+T)]=0$,从而由不等式

$$\begin{aligned}|g(x+T)-g(x)|\leqslant&|g(x+T)-f(x+T)|\\&+|f(x+T)-f(x)|+|f(x)-g(x)|,\end{aligned}$$

可知 $g(x+T)-g(x)\to 0(x\to+\infty)$.因为 $g(x+T)-g(x)$是周期函数,所以$g(x+T)-g(x)\equiv 0$.即 $g(x+T)=g(x)(-\infty<x<\infty)$.这说明 $g(x)$也是以 T 为周期的周期函数,即 $f(x)-g(x)$是以 T 为周期的函数.注意 $f(x)-g(x)\to 0(x\to+\infty)$,不难指出 $f(x)-g(x)\equiv 0$.

(2) 不妨设 $|f(x)|\leqslant M(x\in[0,1])$,又由公式 $f(a^2x)=bf(ax)=b^2f(x)(0\leqslant x\leqslant 1/a^2)$,以及 $f(a^nx)=b^nf(x)(0\leqslant x\leqslant a^{-n},n\in\mathbf{N})$,可知 $|f(x)|=|b^{-n}f(a^nx)|\leqslant Mb^{-n}(0\leqslant x\leqslant a^{-n})$.令 $n\to\infty$,即可得证.

例 2.5.15 试证明下列命题:

(1) 不存在极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$.

证明 (1) 令 $x_n'=\dfrac{1}{4n+1}\dfrac{2}{\pi},x_n''=\dfrac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$,则 $x_n'\to 0,x_n''\to 0(n\to\infty)$.但我们有$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n'}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n''}=0$,即得所证.

(2) 注意到$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,以及

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})&=\sin[\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+n\pi]\\&=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},\end{aligned}$$

即可得证.

2.5.4 著名极限、重要典式

(一) 两个基础极限典式:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(二) 两个重要极限模式

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0,a\neq 1)$.

(ii) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=l$,则$\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{g(x)}=\mathrm{e}^l$.

例 2.5.16 试求下列极限：

(1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$. (2) $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$.

(3) $I=\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{1/\ln x}$. (4) $I=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

(5) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$. (6) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\arctan 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$.

解 (1) 注意到 $\cos 3x-\cos 7x=2(\sin 5x\cdot\sin 2x)$，我们有

$$I=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}=2\times 5\times 2=20.$$

(2) 因为(注意 $x-a\to 0$, $x\to a$) $\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}\,\dfrac{1}{x+a}$，所以 $I=1/2a$.

(3) 运用指数-对数变换改写原式，我们有

$$I=\lim_{x\to 0+}e^{\ln\sin x/\ln x}=\lim_{x\to 0+}e^{\left(\ln\frac{\sin x}{x}+\ln x\right)/\ln x}=e.$$

(4) 消去根号，我们有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\,\frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}}\,\frac{1}{1-\cos\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\,\frac{2\sin^2(x/2)}{1+\sqrt{\cos x}}\,\frac{1}{2\sin^2(\sqrt{x}/2)}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\,\frac{2x^2}{4}\cdot\frac{2}{x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(5) 应用公式 $\ln(1+x)\sim x\,(x\to 0)$，我们有

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\,\frac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{x}=\frac{3}{2}.$$

(6) 分子分母同除以 x，可得

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x+2\arctan 3x+3x^2}{x}\right)\Big/\left(\frac{\ln(1+3x+\sin^2 x)}{x}+e^x\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin 2x}{2x}+6\frac{\arctan 3x}{3x}\right)\Big/\left[\left(3+\frac{\sin^2 x}{x}\right)+1\right]=2.\end{aligned}$$

例 2.5.17 计算下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}$. (2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\pi\cos x/2)}{\sin(\sin^2 x)}$. (4) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\cot(2x)\cdot\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x}=e^0=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(1-\left(1-\cos\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-x^2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2x}\right)=-\frac{\pi^2}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\pi\cos x/2)}{\sin(\sin^2 x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\left(1-\cos x\right)\right]}{\sin x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-\cos x)\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(4) 令 $t=\pi/4-x$,则 $x\to\pi/4$ 等价于 $t\to0$.从而可知

$$\lim_{x\to\pi/4}\cot(2x)\cdot\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{x\to\pi/4}\cot\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\cdot\cot t=\lim_{t\to0}(\tan 2t)\cdot\cot t=2.$$

例 2.5.18　计算下列函数极限：

(1) $I=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

(2) $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}-x^2\right)$.

(3) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{1+1/x}-x^{-1/[x(x+a)]}\right]$.

解　(1) 约化原式即可得出

$$I=\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{e^x-1}{x}\,\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{e^x}}-\sqrt{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}=1.$$

(2) $$\sqrt[n]{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}-x^2=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x^2+k)/n}-x^2$$

$$=e^{\left[n\ln x^2+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+k/x^2)\right]/n}-x^2=x^2\left(e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{x^2}\right)/n}-1\right).$$

$$\left(\text{注意}\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{x^2}\right)=0\right)\sim x^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{x^2}\right)\Big/n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\ln\left(1+\frac{k}{x^2}\right)^{x^2/k}\Big/n\to\sum_{k=1}^{n}k/n=\frac{n+1}{2}\quad(x\to\infty).$$

(3) $$x\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+1/x}-x^{-1/[x(x+a)]}\right]$$

$$=x\left[\left(e^{(1+1/x)(a/x)\ln(1+a/x)^{x/a}}-1\right)-\left(e^{-\frac{\ln x}{x(x+a)}}-1\right)\right]$$

$$\sim x\left[\frac{a}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(-\frac{\ln x}{x(x+a)}\right)\right]=a\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\ln x}{x+a}\to a\quad(x\to+\infty).$$

例 2.5.19　试求下列函数极限：

(1) $I=\lim\limits_{x\to0+}(e^x+2x)^{1/x}$.　　(2) $I=\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$.

(3) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.　　(4) $I=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}-x)^{1/x}$.

(5) $I=\lim\limits_{x\to 0}[\ln(\mathrm{e}+x)]^{\cot x}$.　　(6) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\mathrm{e}^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2}$.

(7) $I=\lim\limits_{x\to 0+}(x^x-1)\ln x$.　　(8) $I=\lim\limits_{x\to 0+}x^{x^x-1}$.

解　(1) 注意到 $\mathrm{e}^x+2x=1+(\mathrm{e}^x-1+2x)$,故

$$I=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x-1+2x)/x}=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+2}=\mathrm{e}^3.$$

(2) 注意到 $2-x=1+(1-x)$并令 $1-x=t$,则

$$I=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\tan[\pi(1-t)/2]}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\cot(\pi t/2)}=\lim_{t\to 0}\mathrm{e}^{t\frac{\cos(\pi t/2)}{\sin(\pi t/2)}}=\mathrm{e}^{2/\pi}.$$

(3) 令 $t=1/x$,则 $t\to 0+$,且有

$$I=\lim_{t\to 0+}[1+(\cos t-1+\sin t)]^{1/t}=\lim_{t\to 0+}\mathrm{e}^{\frac{\cos t-1}{t}+\frac{\sin t}{t}}=\mathrm{e}.$$

(4) 提出因子 $\sqrt{1+x}$,我们有

$$I=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/2x}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)^{1/x}$$

$$=\mathrm{e}^{1/2}\cdot\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{x}{x\sqrt{1+x}}}=\mathrm{e}^{1/2}\cdot\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1/2}.$$

(5) 改写原式,我们有

$$I=\lim_{x\to 0}\left[1+\ln\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}}\right)\right]^{\cot x}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\cot x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\cos x}{\sin x}\frac{x}{\mathrm{e}}\ln\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{e}/x}}=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}.$$

(6) 改写原式为

$$I=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x\mathrm{e}^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right]^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x(x\pi^x+1)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\pi^x}{x\pi^x+1}\frac{(\mathrm{e}/\pi)^x-1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\frac{\mathrm{e}}{\pi}}=\frac{\mathrm{e}}{\pi}.$$

(7) 运用指数-对数替换,我们有

$$I=\lim_{x\to 0+}(\mathrm{e}^{x\ln x}-1)\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln^2 x=0.$$

(8) 应用指数-对数替换,并注意 $x\to 0+$时有 $x^x-1\sim x\ln x$,可得

$$I=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{(x^x-1)\ln x}=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{x\ln^2 x}=1.$$

例 2.5.20　试求下列函数极限:

(1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}$ $(a,b>0,a\neq b)$.　(2) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ $(a,b>0)$.

解　(1) 提因子改写原式为典式,我们有

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{b^{2x}[(a/b)^x-1]^2}{b^{x^2}[(a/b)^{x^2}-1]}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(a/b)^x-1}{x}\right]^2\Big/\left[\frac{(a/b)^{x^2}-1}{x^2}\right]$$

$$=[\ln(a/b)]^2/\ln(a/b)=\ln\frac{a}{b}.$$

(2) 改写原式为典式,我们有

$$I=\lim_{x\to 0}\left[1-\left(1-\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right]^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2-a^x-b^x}{-2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

例 2.5.21 计算下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$ $(a,b>0)$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

解 (1) 令 $e^{-2x}=t$,则 $x\to+\infty$ 等价于 $t\to 0+$.故

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/t}=\lim_{t\to 0+}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^{1/t}=e^{\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1-t}}=e^2.$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\left(1-\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)\right]^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a(a^x-1)+b(b^x-1)}{x}}=e^{\frac{a\ln a+b\ln b}{a+b}}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^a}(a^{a^x-x^a}-1)}{a^x-x^a}=a^{a^a}\ln a$.(注意 $a^x-x^a\to 0(x\to a)$)

例 2.5.22 试证明下列命题:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$,且存在 $\alpha\in(-\infty,\infty)$,$0<m<M$,使得 $m\leqslant f(x)/x^\alpha\leqslant M(x\in U(0))$.若 $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)\ln x^\alpha=l$,则 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)^{g(x)}=e^l$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+f(x)/\tan x)}{2^x-1}=8$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)/x^2=8\ln 2$.

证明 (1) 令 $\varphi(x)=f(x)/x^\alpha$,则

$$\lim_{x\to 0+}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0+}e^{g(x)\ln f(x)}=\lim_{x\to 0+}e^{g(x)\ln x^\alpha+g(x)\ln\varphi(x)}=e^l.$$

(2) 用(1)的方法,相当于 $g(x)=x$,$\alpha=1/2$,$f(x)=2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin(1/x)$,且 $x\ln x/2\to 0(x\to 0+)$.证毕.

(3) 注意到 $2^x-1\to 0(x\to 0)$,故由题设可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)/\tan x=0$.又注意到 $2^x-1\sim x\ln 2(x\to 0)$,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln 2\cdot x\tan x}=8,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln 2}\frac{f(x)}{x^2}=8.$$

从而得证.

例 2.5.23 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)=1-\cos\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$，试问 α,β 取何值时，将使 $f(x)$ 与 αx^{β} 在 $x\to+\infty$ 时成为等价无穷小量？

(2) 求 k 值，使 $f(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 与 $g(x)=kx^2$ 在 $x\to0$ 时成为等价无穷小量.

解 (1) 我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=1-\cos\left(2\sin^2\frac{1}{2x}\right)=2\sin^2\left(\sin^2\frac{1}{2x}\right)\\&\sim2\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^4=\frac{1}{8}x^{-4}\quad(x\to+\infty),\quad\alpha=1/8,\beta=-4.\end{aligned}$$

(2) 问题归结为求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=k$：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\arcsin x}{x^2}\right)\frac{1}{2}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right)\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}=\frac{3}{4},\qquad k=3/4.\end{aligned}$$

例 2.5.24 试证明极限等式 $I=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{1/x}=e^{\frac{n+1}{2}}$.

证明 因为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{1/x}\\&=\left(\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)+n}{n}\right)^{1/x}\\&=\left(1+\frac{x+o(x)+2x+o(2x)+\cdots+nx+o(nx)}{n}\right)^{1/x}\\&=\left(1+\frac{1+2+\cdots+n}{n}x+\frac{o(x)+2o(x)+\cdots+no(x)}{n}\right)^{1/x}\\&=\left(1+\frac{n+1}{2}x+\frac{n+1}{2}o(x)\right)^{1/x}\quad(x\to0),\end{aligned}$$

所以得到 $I=\lim\limits_{x\to0}e^{\left(\frac{n+1}{2}x+\frac{n+1}{2}o(x)\right)/x}=e^{\frac{n+1}{2}}$.

例 2.5.25 解答下列问题：

(1) 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}\,\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$ $(a>0,a\neq1)$.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 定义在 (a,b) 上.若有

(i) $f(x)>-1(a<x<b)$, $f(x)\neq 0(a<x<b)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to b-} f(x)g(x)=l\neq 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to b-}[1+f(x)]^{g(x)}=e^l$.

试证明 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=0$.

证明 (1) 令 $f(x)=[(a^x-1)/x(a-1)]^{1/x}$.

(i) 考察 $x\to+\infty$.当 $a>1$ 时,我们有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}+\frac{\ln(a^x-1)}{x}.$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1-a^{-x})}{x}+\ln a=\ln a$,可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln f(x)}=e^{\ln a}=a$;当 $0<a<1$ 时,则

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}+\frac{\ln(1-a^x)}{x}.$$

由此可得 $\ln f(x)\to 0(x\to+\infty)$.

综合上述推理,导出

$$I=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases} a, & a>1, \\ 1, & 0<a<1,\end{cases} \text{即 } I=\max\{a,1\}.$$

(ii) 考察 $x\to-\infty$.当 $a>1$ 时,我们有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln|x|}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}+\frac{\ln(1-a^x)}{x}.$$

由此易知 $\ln f(x)\to 0(x\to-\infty)$;当 $0<a<1$ 时,则

$$\ln f(x)=-\frac{\ln|x|}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}+\frac{\ln(1-a^{-x})}{x}+\ln a.$$

从而可得 $\ln f(x)\to\ln a(x\to-\infty)$.

综合上述结果,导出

$$I=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases} 1, & a>1, \\ a, & 0<a<1,\end{cases} \text{即 } I=\min\{a,1\}.$$

(2) 由(iii)得(取指数-对数变换) $\lim\limits_{x\to b-} g(x)\ln[1+f(x)]=l$.从而又知

$$\lim_{x\to b-} g(x)f(x)\frac{\ln[1+f(x)]}{f(x)}=l, \qquad \lim_{x\to b-}\frac{\ln[1+f(x)]}{f(x)}=1.$$

根据上述右端公式可知,存在 δ:$0<\delta<b$,使得 $f(x)$ 在 $(b-\delta,b)$ 上有界.现在记 $\overline{\lim\limits_{x\to b-}} f(x)=\bar{l}$, $\underline{\lim\limits_{x\to b-}} f(x)=\underline{l}$.

若 $\bar{l}>0$,则取 $\{x_n\}$:$x_n\to b-(n\to\infty)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\bar{l}$,故有

$$\lim_{x\to b-}\frac{\ln[1+f(x)]}{f(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[1+f(x_n)]}{f(x_n)}=\frac{\ln(1+\bar{l})}{\bar{l}}\neq 1.$$

若 $\bar{l}<0$,也可类推,导致矛盾.

对 l,也由 $l>0$ 与 $l<0$ 可推出矛盾.

最后得 $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=0$.

2.6 渐 近 线

设 $f(x)$,$g(x)$满足 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$,则也称 $g(x)$为 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的渐近曲线.一般情况,常讨论 $g(x)$为一、二次曲线的情形.在一次曲线的情形,称 $g(x)$为渐近(直)线:$y=\alpha x+\beta$.

对于以极坐标表示的曲线 $r=f(\theta)$,其渐近线为 $r\sin(\theta_0-\theta)=p$,其中 $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}f(\theta)=\infty$,$p=\lim\limits_{\theta\to\theta_0}r(\theta_0-\theta)$.

例 2.6.1 解答下列问题:

(1) 求 α,β之值,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-(\alpha x+\beta))=0$.

(2) 求 α,β之值,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\arctan x-(\alpha x+\beta))=0$.

(3) $f(x)$定义在(a,∞)上,求 α,β,γ,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)]=0$.

解 (1) 易知 $\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x\to\beta(x\to+\infty)$.又由

$$\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x=x(\sqrt{4+1/x+1/x^2}-\alpha),$$

可知 $\sqrt{4+1/x+1/x^2}-\alpha\to0(x\to+\infty)$.从而立即可得 $\alpha=2$,$\beta=1/4$.

(2) 易知 $x\arctan x-\alpha x\to\beta(x\to+\infty)$.又由 $x\arctan x-\alpha x=x(\arctan x-\alpha)$可知,$\arctan x\to\alpha(x\to+\infty)$.即得 $\alpha=\pi/2$.

现在令 $x=\tan t$,则 $x\to+\infty$等价于 $t\to(\pi/2)-$.若记 $t-\pi/2=s$,则相当于 $s\to0-$.从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)&=\lim_{t\to(\pi/2)-}\tan t\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lim_{t\to(\pi/2)-}\sin t\,\frac{t-\pi/2}{\cos t}=\lim_{s\to0-}\frac{-s}{\sin s}=-1.\end{aligned}$$

总之我们有 $\alpha=\pi/2$,$\beta=-1$.

(3) $\gamma=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)/x^2$,$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\gamma x^2}{x}$,$\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\beta x+\gamma x^2)]$.

例 2.6.2 试求下列曲线的渐近线:

(1) $(x-a)y^2=x^2(x-b)(a>0,b>0,a\neq b)$.

(2) $r=a\theta/(\theta-1)(a>0)$.

解 (1) 易知 $x=a$是其渐近线.注意到此曲线关于 x 轴对称,故只需考察曲

线 $y=x\sqrt{(x-b)/(x-a)}$.此时我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}=1,\qquad 即\ \alpha=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}-1\right)=\frac{a-b}{2}.$$

(对称性),从而渐近线为 $y=a,y=x+\dfrac{a-b}{2},y=-x-\dfrac{a-b}{2}$.

(2) 因为我们有 $\lim\limits_{\theta\to1\pm0}r(f(\theta))=\infty(\theta_0=1)$,以及

$$\begin{aligned}p&=\lim_{\theta\to1\pm0}r(1-\theta)=\lim_{\theta\to1\pm0}f(\theta)(1-\theta)\\&=\lim_{\theta\to1\pm0}\frac{a\theta}{\theta-1}(1-\theta)=-a,\end{aligned}$$

所以此曲线的渐近线为 $r\sin(\theta_0-\theta)=-p$,即

$$r\sin(\theta-1)=a.$$

2.7　函数极限的 Cauchy 收敛准则、Stolz 定理

定理 2.7.1(Cauchy 收敛准则)

(1) 存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,\quad 0<|x'-x_0|<\delta,\quad 0<|x''-x_0|<\delta,$$

(2) 存在极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,\quad |x'|>M,\quad |x''|>M.$$

推论　存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的充分必要条件是:对满足 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 的任一数列 $\{x_n\}$,$\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列.

定理 2.7.2(Stolz)　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义,T 是一个正的常数,且满足

(1) $f(x),g(x)$ 在任一区间 $[a,b]$ 上是有界的;

(2) 对任意的 $x>a$,有 $g(x+T)>g(x)$,且有 $g(x)\to+\infty(x\to+\infty)$.

若存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$,则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

例 2.7.1　设 $f(x),g(x)$ 定义在 $(-a,a)$ 上,且有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|g(x')-g(x'')|\qquad (x',x''\in(-a,a)).$$

若存在极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$,则存在极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

证明　对任意 $x_n\to0$ 的数列 $\{x_n\}$,$\{g(x_n)\}$ 是 Cauchy 列,因此根据不等式可知,$\{f(x_n)\}$ 也是 Cauchy 列,也是收敛列,即得所证.

例 2.7.2　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 定义在 $[a,\infty)$ 上,且在任一区间 $[a,b]$ 上有界.又有 $f(x)\geqslant c>0$.

若存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)/f(x)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=A$.

(2) 设 $f(x)$ 定义在 $[a,\infty)$ 上，且在任一区间 $[a,b]$ 上有界. 若存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x=A$.

(3) 设定义在 $[a,\infty)$ 上的 $f(x)$ 满足

(i) 在任一区间 (α,β) 上 $f(x)\geqslant l(\alpha\geqslant a)$；

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x=+\infty$.

证明　(1) 我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{x}}$，在 Stolz 定理中取 $T=1$，$g(x)=x$，则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}=\ln A.$$

从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=e^{\ln A}=A$.

(2) 在 Stolz 定理中取 $T=1$，$g(x)=x$，则由

$$f(x+1)-f(x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x},$$

即得所证.

(3) (i) 由题设知，对任给 $M>0$，存在 X，使得 $f(x+1)-f(x)>2M(x>X)$. 从而有 $f(x+n)-f(x)>2nM$，或有

$$f(x+n)/(x+n)>[f(x)+2nM]/(x+n).$$

(ii) 对 x：$X<x\leqslant X+1$，则存在 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$\frac{f(x+n)}{x+n}>\frac{l+2nM}{n+1+X}>\frac{l+2nM}{2n}=M+l/2n>M/2.$$

这就是说，可得到 $\dfrac{f(t)}{t}>\dfrac{M}{2}(t=x+n, X<x\leqslant X+1)$.

2.8　数列极限与函数极限的关系

定理 2.8.1　(i) 存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对满足 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 的任一点列 $\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=A$.

(ii) 存在极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对满足 $|x_n|\to+\infty\ (n\to\infty)$ 的任一点列 $\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=A$.

类似于函数在极限状态中的符号表示，对数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 同样有意义：

$a_n=o(b_n)(n\to\infty)$ 表示 $a_n/b_n\to 0(n\to\infty)$. $a_n\sim b_n(n\to\infty)$ 表示 $a_n/b_n\to 1(n\to\infty)$.

例 2.8.1　试求下述数列极限：

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(e-1)e^{1/n}}{n(e^{1/n}-1)}$. (2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{\alpha^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-2}$. (4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n(x^{1/n}-x^{1/2n})(x>0)$.

(5) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{n}(a>0,b>0,c>0)$.

解 (1) 改写原式并利用(典式)$(a^x-1)/x\to\ln a(x\to 0)$,可知

$$I=\lim_{n\to\infty}(e-1)e^{1/n}\Big/\left(\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right)=e-1.$$

(2) 利用典式$(1+f(x))^{g(x)}\to e^{f(x)g(x)}(x\to x_0)$,其中$f(x)\to 0(x\to x_0)$,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}e^{-n\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{2n^2}\right)}=e^{-\alpha}.$$

(3) 改写原式为典式,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{64}-1}{3}\right)^{2n-2}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n-2}{3}(\sqrt[n]{64}-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n-2}{3n}\cdot\frac{\sqrt[n]{64}-1}{1/n}}=e^{\frac{2}{3}\ln 64}=16.$$

(4) 化原式为典式极限,可知

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{x}-1}{1/n}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt[2n]{x}-1}{1/2n}\right)=\frac{\ln x}{2}.$$

(5) 化原式为典式极限,可知

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{3}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)}{3}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{3}\cdot n[(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)+(\sqrt[n]{c}-1)]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{1/n}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{1/n}+\frac{\sqrt[n]{c}-1}{1/n}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)\right\}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 2.8.2 试求下列极限值:

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$. (2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$.

解 (1) 改写原式为

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{3/n}(2^{1/n}-1)-(2^{3/n}-1)}{(2^{1/n}-1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{3/n}-2^{2/n}-2^{1/n}-1}{2^{1/n}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{2/n}(2^{1/n}-1)+2\cdot 2^{1/n}(2^{1/n}-1)+(2^{1/n}-1)}{2^{1/n}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3\cdot 2^{2/n}+2\cdot 2^{1/n}+1)=6.$$

(2) 改写原式,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/n}(n^{2/n}-1)+3(n^{2/n}-1)}{(n^{1/n}-1)(n^{1/n}-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^{2/n}+3)(n^{2/n}-1)}{(n^{1/n}-1)(n^{1/n}-2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^{2/n}+3)(n^{1/n}-1)(n^{1/n}+1)}{(n^{1/n}-1)(n^{1/n}-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^{2/n}+3)(n^{1/n}+1)}{n^{1/n}-2}=-8.$$

例 2.8.3 试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n\left(a_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}=0$,以及 $\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n=\left(1-\dfrac{a_n}{1+a_n}\right)^n(n\in\mathbf{N})$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-na_n}{1+a_n}}=e^0=1.$$

(2) 因为

$$\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}=\arctan\frac{1/[n(n+1)]}{1+1/[n(n+1)]}$$

$$=\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\sim\frac{1}{n^2}\qquad(n\to\infty),$$

所以 $n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)\sim 1(n\to\infty)$.

例 2.8.4 试求下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})(a>0)$.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{a}-1)^n(a>0)$.

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{i/n}$.

(4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n[(n+1)^\alpha-n^\alpha](\alpha>0)$.

(5) $I=\lim\limits_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n(p,q>0$ 且 $p+q=1$;$a_n>0,b_n>0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^n=b>0)$.

解 (1) 因为 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)}{1/[n(n+1)]}\cdot\dfrac{n}{n+1}$,所以 $I=\ln a$.

(2) 因为 $(2\sqrt[n]{a}-1)^n=[1+2(a^{\frac{1}{n}}-1)]^n$,所以 $I=\lim\limits_{n\to\infty}e^{2\frac{a^{1/n}-1}{1/n}}=e^{2\ln a}=a^2$.

(3) 因为 $\sum_{i=1}^{n} e^{i/n} = \frac{e^{1/n} - e^{1+1/n}}{1 - e^{1/n}}$，所以可得

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}(e-1)}{(e^{1/n}-1)/(1/n)} = e-1.$$

(4) 应用指数-对数替换，可知

$$I = \lim_{n\to\infty} n[e^{\alpha\ln(1+n)} - e^{\alpha\ln n}] = \lim_{n\to\infty} n^{1+\alpha}[e^{\alpha\ln(1+1/n)} - 1]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{1+\alpha} \cdot \alpha \cdot \ln(1+1/n) \frac{e^{\alpha\cdot\ln(1+1/n)}-1}{\alpha\cdot\ln(1+1/n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot n^{\alpha} \cdot \ln(1+1/n)^{n} \frac{e^{\alpha\ln(1+1/n)}-1}{\alpha\ln(1+1/n)} = +\infty.$$

(5) 易知 $a_n \to 1, b_n \to 1 (n\to\infty)$. 设 $a_n \neq 1, b_n \neq 1$. 因为

$$pa_n + qb_n = 1 + (pa_n + qb_n - 1),$$

以及 $pa_n + qb_n - 1 \to 0 (n\to\infty)$，所以

$$I = \lim_{n\to\infty} e^{n[(pa_n+qb_n)-1]} = \lim_{n\to\infty} e^{n[p(a_n-1)+q(b_n-1)]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{p\frac{(a_n^n)^{1/n}-1}{1/n}+q\frac{(b_n^n)^{1/n}-1}{1/n}} = e^{p\ln a+q\ln b} = a^p b^q.$$

例 2.8.5 试证明不等式

$$(1-2x^n+x^{n+1})^n < (1-x^n)^{n+1} \qquad \left(n\geqslant 2, 0<x<\frac{n}{n+1}\right).$$

证明 将原式改写为 $1-2x^n+x^{n+1} < (1-x^n)\cdot\sqrt[n]{1-x^n}$，或

$$\frac{1-x^n}{1-x} < \frac{1-(1-x^n)}{1-\sqrt[n]{1-x^n}},$$

易知函数 $f(t)=(1-t^n)/(1-t)$ 在 $(0,1)$ 上是严格递增的，故为了证明上述不等式，只需指出 $x<\sqrt[n]{1-x^n}$ 或 $0<x<1/\sqrt[n]{2}$.

因为当 $n\geqslant 2$ 时，有 $(1+1/n)^n > 2$，所以有 $1/\sqrt[n]{2} > n/(n+1)$. 从而即得所证.

注 对 $(0,1)$ 中的 $t_1 < t_2$，我们有

$$\frac{1-t_1^n}{1-t_1} < \frac{1-t_2^n}{1-t_2}, \qquad (1+t_1+\cdots+t_1^{n-1}) < (1+t_2+\cdots+t_2^{n-1}).$$

例 2.8.6 设 $b_1 \geqslant a_1 > 0$，且令 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$，试论极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$.

解 由题设知，存在 θ：$0\leqslant\theta<\pi/2$，使得 $a_1 = b_1\cos\theta$. 对 $\theta\neq 0$，我们有

$$a_{n+1} = \frac{b_1\sin\theta}{2^n\tan(\theta/2^n)}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_1\cdot\sin\theta}{2^n\cdot\sin(\theta/2^n)}.$$

从而可得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1\cdot\sin\theta}{\theta}$. 对于 $\theta=0$，易知 $a_1 = b_1$，$a_n = b_n = c$(常数)$(n\in\mathbf{N})$.

例 2.8.7 解答下列问题：

(1) 试求正数 a,b,c 之间的关系，使 $2a^{1/n}-b^{1/n}-c^{1/n}=o(1/n)(n\to\infty)$成立.

(2) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$，若有 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\leqslant M\sqrt{n}(M>0,n\in\mathbf{N})$，试证明

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=o(1/\sqrt{n})\qquad(n\to\infty).$$

解 (1) 由于

$$\frac{2a^{1/n}-b^{1/n}-c^{1/n}}{1/n}=\frac{a^{1/n}-b^{1/n}+a^{1/n}-c^{1/n}}{1/n}$$
$$=b^{1/n}\frac{(a/b)^{1/n}-1}{1/n}+c^{1/n}\frac{(a/c)^{1/n}-1}{1/n},$$

故令 $n\to\infty$时有 $\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\ln\left(\frac{a}{c}\right)=\ln\frac{a^2}{bc}$，当 $a^2=bc$ 时，可使等式成立.

(2) 由题设知

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=\frac{\sqrt[n]{n!\cdot a_1\cdot a_2\cdots a_n}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot 2a_2\cdots na_n}}{\sqrt[n]{n!}}$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\sum_{k=1}^{n}ka_k/n\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{M\cdot\sqrt{n}}{n}=\frac{M}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{n!}},$$

从而 $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\Big/\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{M}{\sqrt[n]{n!}}\to 0(n\to\infty)$.

例 2.8.8 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}$.

解 (i) 由 $\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$，可知在 $|x|$充分小时有

$$0\leqslant x-\sin x\leqslant\tan x-\sin x=\sin x(1-\cos x)/\cos x$$
$$=\sin x\cdot 2\sin^2(x/2)/\cos x\leqslant x^2.$$

(ii) 我们有

$$\sum_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{\pi}{n+k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{n+k}+\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\frac{\pi}{n+k}-\frac{\pi}{n+k}\right],$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{n+k}=\pi\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)=\pi\left(\ln\frac{2n}{n-1}+o(1)\right)\qquad(n\to\infty),$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\frac{\pi}{n+k}-\frac{\pi}{n+k}\right]\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi^2}{(n+k)^2}\leqslant\frac{n\pi^2}{n^2}\to 0\qquad(n\to\infty),$$

从而可知，该极限值为 $\pi\ln 2$.

例 2.8.9 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx$ 满足 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，试证明 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\leqslant 1$.

证明 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$，以及

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}=\sum_{k=1}^{n}ka_k.$$

即得所证.

例 2.8.10　试证明$\lim\limits_{n\to\infty}n^p\sin(\sqrt{2}+1)^n\pi=0(p\geqslant0)$.

证明　因为$(\sqrt{2}+1)^n+(1-\sqrt{2})^n$是整数$m$,所以有

$$\begin{aligned}n^p\sin(\sqrt{2}+1)^n\pi&=n^p\sin[(\sqrt{2}+1)^n+(1-\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]\pi\\&=n^p\sin[m\pi-(1-\sqrt{2})^n\pi]=\varepsilon_n\cdot n^p\sin(1-\sqrt{2})^n\pi\\&=\varepsilon_n\cdot\{\sin(1-\sqrt{2})^n\pi/[(1-\sqrt{2})^n\pi]\}\cdot n^p\cdot(1-\sqrt{2})^n\pi\quad(\varepsilon_n=\pm1).\end{aligned}$$

注意到在$|q|<1$时有$n^p\cdot q^n\to0(n\to\infty)$,故可得证.

例 2.8.11　试证明下列极限等式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{b_n}{n}\right)^k=b^k\mathrm{e}^{-b}/k!$(已知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$).

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k-a}{n}\right)^n=\frac{\mathrm{e}^{a+1}}{\mathrm{e}-1}(a>0)$.

证明　(1) $\binom{n}{k}\left(\frac{b_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k}b_n^k\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^n\Big/\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^k$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)b_n^k\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^n\Big/\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^k\\&\to\frac{1}{k!}b^k\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^n=b^k\mathrm{e}^{-b}/k!\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

(2) 注意,在$x>0$,$x>x_0$时,$f(x)=(1-x_0/x)^x$是递增函数,且有$f(x)\to\mathrm{e}^{-x_0}(x\to+\infty)$,以及$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{a-k}{n}\right)^n\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{a-k}=\mathrm{e}^a\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-k}<\frac{\mathrm{e}^{a+1}}{\mathrm{e}-1}$,故可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{a-k}{n}\right)^n\leqslant\frac{\mathrm{e}^{a+1}}{\mathrm{e}-1}.$$

又当$n>N$时,有$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k-a}{n}\right)^n\geqslant\sum\limits_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k-a}{n}\right)^n$,故可知

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k-a}{n}\right)^n\geqslant\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k-a}{n}\right)^n,$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{a-k}{n}\right)^n\geqslant\sum_{k=0}^{N}\mathrm{e}^{a-k}=\frac{\mathrm{e}^{a+1}}{\mathrm{e}-1}(1-\mathrm{e}^{-(N+1)}).$$

从而有(令$N\to\infty$)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{a-k}{n}\right)^n\geqslant\frac{\mathrm{e}^{a+1}}{\mathrm{e}-1}$.即得所证.

例 2.8.12　设$f(x)$,$g(x)$在$U(0)$上定义,$g(x)>0$,且有$\lim\limits_{x\to0}f(x)/g(x)=1$.

又双指标数列$\{a_{m,n}\}$满足条件:对任给$\varepsilon>0$,存在N,使得

$$|a_{m,n}|<\varepsilon \quad (n>N,m=1,2,\cdots). \tag{*}$$

则有(假定右端极限存在)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}f(a_{m,n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}g(a_{m,n})$.常记条件(*)为$a_{m,n}\rightrightarrows 0(n\to\infty)$.

证明 由题设知,对任给$\varepsilon>0$,存在N,使得

$$1-\varepsilon<\frac{f(a_{m,n})}{g(a_{m,n})}<1+\varepsilon \quad (n>N;m=1,2,\cdots,n).$$

由此可得$1-\varepsilon<\dfrac{f(a_{1,n})+f(a_{2,n})+\cdots+f(a_{n,n})}{g(a_{1,n})+g(a_{2,n})+\cdots+g(a_{n,n})}<1+\varepsilon$.即得所证.

例 2.8.13 试求下述数列极限:

(1)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$. (2)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{ka}{n^2}$.

(3)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{k/n^2}-1)(a>1)$. (4)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

(5)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}\right)$.

解 (1)易知$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1+k/n^2}-1)/(k/3n^2)=1$,以及$k/n^2\rightrightarrows 0(n\to\infty)$.从而应用例2.8.12,视$f(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$,$g(x)=x/3$,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}.$$

(2)易知$\sin\left(\dfrac{ka}{n^2}\right)\Big/\left(\dfrac{ka}{n^2}\right)\to 1(n\to\infty)$,且$\dfrac{ka}{n^2}\rightrightarrows 0(n\to\infty)$,故

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an(n+1)}{2n^2}=\frac{a}{2}.$$

(3)易知$(a^{k/n^2}-1)/(k\ln a/n^2)\to 1(n\to\infty)$,且$\dfrac{k}{n^2}\rightrightarrows 0(n\to\infty)$,故

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\ln a}{n^2}=\frac{1}{2}\ln a.$$

(4)应用指数-对数替换,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+k/n^2)}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}k/n^2}=e^{1/2}.$$

(5)由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}\right)}{-k^2a^2/2n^3}=1$,且$\dfrac{k^2a^2}{2n^3}\rightrightarrows 0(n\to\infty)$知(用指数-对数替换)

$$I=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{ka}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{2n^3}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{2\cdot 6\cdot n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{6}}.$$

例 2.8.14 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上.若对任意的 $t\in[a,b]$,均存在极限$\lim\limits_{x\to t}f(x)$,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证明 反证法.假定 $f(x)$在$[a,b]$上无界,则对任意的 $n\in\mathbf{N}$,存在 $x_n\in[a,b]$,使得 $f(x_n)\geqslant n$.因为$\{x_n\}$是有界数列,故存在子列$\{x_{n_k}\}$,使得

$$x_{n_k}\to x_0\quad(k\to\infty),\qquad f(x_{n_k})\geqslant n_k\quad(k\in\mathbf{N}).$$

这导致不存在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,矛盾.证毕.

例 2.8.15 设 $f(x)$是$(0,\infty)$上的正值函数.若有 $f[f(x)]=6x-f(x)(0<x<\infty)$,试求 $f(x)$.

解 任取 $x>0$,且令 $a_0=x$,又作数列 $a_{n+1}=f(a_n)(n=0,1,2,\cdots)$,则由题设易知 $a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$.

为解该线性递推式数列$\{a_n\}$,我们设 $a_n=b\lambda^n(n=0,1,2,\cdots)$,则可从递推式解得 $\lambda^2+\lambda-6=0$,即 $\lambda=2$.因为 $a_0=b$,所以 $a_n=a_0 2^n$.由此知 $a_1=f(a_0)=2a_0$.这说明(根据 x 的任意性)$f(x)=2x(0<x<\infty)$.

2.9 闭区间套序列、有限子覆盖

定理 2.9.1(Cantor) 设$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套序列,即

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

且有 $b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$,则存在唯一的 ξ:$\xi\in[a_n,b_n]\quad(n=1,2,\cdots)$.

定义 2.9.1 设 E是$(-\infty,\infty)$中一个点集,Γ是$(-\infty,\infty)$中的一些区间组成的区间族.若对任意的 $x\in E$,存在 Γ中的一个元即区间 I,使得 $x\in I$,则称 Γ是 E 的一个(**区间**)**覆盖**.特别当 Γ中的区间都是开区间时,称 Γ是 E 的**开覆盖**;当 Γ中的区间只有有限个时,称 Γ为 E 的**有限覆盖**.

定理 2.9.2(有限子覆盖) 设 $E=[a,b]$是一个闭区间,Γ是$[a,b]$的一个开覆盖,则 Γ中必存在有限个开区间(组),它覆盖$[a,b]$.简言之,Γ中存在$[a,b]$的一个有限子覆盖.

例 2.9.1 设 $f(x)$在$[a,b]$上递增,且有 $f(a)>a$,$f(b)<b$,则存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=x_0$.

证明 将$[a,b]$二等分.若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{a+b}{2}$,取 $x_0=\frac{a+b}{2}$.否则作$[a_1,b_1]$:

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>\dfrac{a+b}{2}\text{时}, & [a_1,b_1]=\left[\dfrac{a+b}{2},b\right];\\[2ex] f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<\dfrac{a+b}{2}\text{时}, & [a_1,b_1]=\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right].\end{cases}$$

显然,$f(a_1)>a_1$,$f(b_1)<b_1$.再对$[a_1,b_1]$二等分,用类似的方法取定$[a_2,$

b_2],…,从而可得二分区间套序列$[a_n,b_n]$($n=1,2,\cdots$),其中$f(a_n)>a_n$,$f(b_n)<b_n$($n=1,2,\cdots$).根据闭区间套定理我们有$x_0\in[a_n,b_n]$($n=1,2,\cdots$),以及$a_n<f(a_n)\leqslant f(x_0)\leqslant f(b_n)<b_n$.令$n\to\infty$,立即导出$x_0=f(x_0)$.

例 2.9.2 设$f(x)$定义在(a,b)上,$a<c<d<b$.若对任意的$x\in[c,d]$,存在正数M_x以及δ_x($\delta_x<\min\{c-a,b-d\}$),使得$x',x''\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M_x|x'-x''| \qquad (\text{点点 Lip1}).$$

则存在正数M,对一切$x',x''\in[c,d]$有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''| \qquad (\text{整体 Lip1}).$$

证明 易知开区间族$\{x-\delta_x,x+\delta_x\}$:$x\in[c,d]$是$[c,d]$的一个开覆盖,从而存在$[c,d]$的有限子覆盖,记为

$$(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2),\cdots,(x_m-\delta_m,x_m+\delta_m),$$

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M_{x_i}|x'-x''|,$$

$$x',x''\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i) \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

现在令$M=M_{x_1}+M_{x_2}+\cdots+M_{x_m}$,则用插项法易知

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''|, \qquad x',x''\in[c,d].$$

例 2.9.3 设定义在$[0,1]$上的$f(x)$,$g(x)$满足(参阅第 3 章)

$$f(0)>0, \qquad f(1)<0 \qquad g\in C([0,1]).$$

若$f(x)+g(x)$在$[0,1]$上递增,则存在$\xi\in[0,1]$,$f(\xi)=0$.

证明 (i) 记$a_1=0$,$b_1=1$,且二等分$[0,1]$.若$f(1/2)\geqslant 0$,则记$a_2=1/2$,$b_2=1$;若$f(1/2)\leqslant 0$,则记$a_2=0$,$b_2=1/2$.类似地,对已取得$[a_n,b_n]$再作二等分.若$f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\geqslant 0$,则记$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$,$b_{n+1}=b_n$;若$f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\leqslant 0$,则记$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$,$a_{n+1}=a_n$.从而$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套序列,其中

$$b_n-a_n\to 0 \quad (n\to\infty), \qquad f(a_n)\geqslant 0, \quad f(b_n)\leqslant 0.$$

(ii) 根据闭区间套定理可知,存在ξ,使得

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n, \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

因为$g\in C([0,1])$,所以$g(a_n)\to g(\xi)$,$g(b_n)\to g(\xi)$($n\to\infty$).

注意到$g(a_n)\leqslant f(a_n)+g(a_n)\leqslant f(b_n)+g(b_n)\leqslant g(b_n)$,可得

$$g(\xi)=\lim_{n\to\infty}[f(a_n)+g(a_n)]=\lim_{n\to\infty}[f(b_n)+g(b_n)].$$

再由$f(a_n)+g(a_n)\leqslant f(\xi)+g(\xi)\leqslant f(b_n)+g(b_n)$,立即可知

$$g(\xi)\leqslant f(\xi)+g(\xi)\leqslant g(\xi), \qquad f(\xi)=0.$$

例 2.9.4 设定义在$(-\infty,\infty)$上的$f(x)$满足:对任意的$x_0\in(-\infty,\infty)$,都存在$\delta>0$,使得$f(x_0)\geqslant f(x)$,$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$(即$x_0$为$f(x)$的极大值点),试证明存在一个区间$I$,使$f(x)$在$I$上是一个常数.

证明 反证法.假定存在$x_1\in[a_1,b_1]$以及$f(x_1)\geqslant f(x)$($a_1\leqslant x\leqslant b_1$),又有

$x_2\in[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$,使得 $f(x_2)\geqslant f(x)(a_2\leqslant x\leqslant b_2)$.而 $f(x_1)>f(x_2)$,且 $b_2-a_2\leqslant(b_1-a_1)/2$.进一步,存在 $x_3\in[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$,使得 $f(x_3)\geqslant f(x)(a_3\leqslant x\leqslant b_3)$,而 $f(x_2)>f(x_3)$,且 $b_3-a_3\leqslant(b_2-a_2)/2$.如此继续,可得闭区间套列$\{[a_n,b_n]\}$,$b_n-a_n\to0(n\to\infty)$,以及

$$f(x_n)\geqslant f(x)\quad(a_n\leqslant x\leqslant b_n),\qquad f(x_n)>f(x_{n+1})\quad(n\in\mathbf{N}).$$

根据区间套定理,可知存在 $\xi\in[a_n,b_n](n\in\mathbf{N})$,以及 $\delta>0$,使得 $f(\xi)\geqslant f(x)$ $(\xi-\delta\leqslant x\leqslant\xi+\delta)$.但是当 n 充分大时,必有 $x_n\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$,且 $f(x_n)>f(\xi)$,导致矛盾.即得所证.

例 2.9.5 试作由有理端点作成的区间列:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

使得交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$不含有理数.

解 略.

例 2.9.6 设 $f(x)$在(a,b)上不是常数(函数),则存在 $x_0\in(a,b)$以及 $l>0$,使得对任意的 $\delta>0$,存在 $x',x''\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(a,b)$,有

$$|[f(x')-f(x'')]/(x'-x'')|\geqslant l.$$

证明 反证法.假定结论不真,则对区间$[c,d]$($a<c<d<b,f(c)\neq f(d)$),以及任意的 $x\in[c,d]$,任意的 ε,均存在 $\delta>0$,使得(任意的 $x',x''\in(x-\delta,x+\delta)$)

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon|x'-x''|/(b-a).$$

从而对$[c,d]$应用有限覆盖定理,可知存在$[c,d]$的有限覆盖(依序排列)

$$(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),\cdots,(x_m-\delta_m,x_m+\delta_m),$$

且不妨假定 $c\in(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$,$d\in(x_m-\delta_m,x_m+\delta_m)$.

现在取 $\xi_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1})(i=1,2,\cdots,m-1)$,则得

$$\begin{aligned}|f(d)-f(c)|&\leqslant|f(d)-f(\xi_{m-1})|+\cdots+|f(\xi_1)-f(c)|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}[(d-\xi_{m-1})+(\xi_{m-1}-\xi_{m-2})+\cdots+(\xi_1-c)]\\&=\frac{\varepsilon}{b-a}(d-c)<\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$,我们有 $f(d)=f(c)$,矛盾.证毕.

例 2.9.7 若 $f(x)$在$[a,b]$上无界,试证明存在 $x_0\in[a,b]$,对任意的 $\delta>0$,使得 $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上无界.

证明 依题设知,$f(x)$在$[a,(a+b)/2]$上或在$[(a+b)/2,b]$上无界,且记其上使 $f(x)$无界者为$[a_1,b_1]$.再二等分$[a_1,b_1]$,又记使 $f(x)$在其上为无界之子区间为$[a_2,b_2]\cdots$.继续进行,可得闭区间套序列:

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\quad(n\in\mathbf{N}),\qquad b_n-a_n\to0\quad(n\to\infty).$$

而 $f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界.根据区间套定理,可知存在 $x_0\in[a_n,b_n](n\in\mathbf{N})$,且

$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

现在，对任意的 $\delta>0$，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $[a_n, b_n]\subset(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 从而知 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上无界.

注 对 $(0,1)$ 中的每个有理数均用一个小区间盖住，但其全体区间不一定能盖住 $(0,1)$ 中的一切无理数：

例如，对 $(0,1)$ 中的 p/q（p, q 为互素的正整数），用长度为 $1/2q^2$ 且以 p/q 为中心的区间盖住，但 $\sqrt{2}/2$ 不属于上述任一区间. 为证此，只需指出不等式：

$$|\sqrt{2}/2 - p/q| \leqslant 1/4q^2 \qquad (0<p<q) \tag{*}$$

不成立. 采用反证法. 假定式 (*) 成立，则可得

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{p^2}{q^2}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

（注意 $\sqrt{2}/2+p/q<2$）由此就有 $|q^2-2p^2|<1$. 注意到 q^2-2p^2 是一个整数，故应得 $q^2-2p^2=0$. 但这不可能，因为 $\sqrt{2}$ 是无理数.

第 3 章　连 续 函 数

3.1　函数在一点连续的概念及其局部性质

（一）函数在一点连续的概念

定义 3.1.1　设 $f(x)$在 x_0 在邻域 $U(x_0)$上有定义．若有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 处**连续**，x_0 称为 $f(x)$的**连续点**．否则，就称 $f(x)$在点 x_0 处不连续或间断，x_0 称为 $f(x)$的**间断点**．

例如我们已经知道：

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n,\quad \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,\quad \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\quad (a>0),\quad \lim_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0\quad (x>0).$$

这说明上述函数在其定义域中的每一点上都是连续的．

若 $f(x)$在区间 I 中的每一点上都连续，则称 $f(x)$在 I 上连续，且记为 $f\in C(I)$．

设 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处间断，可能有以下几种情形发生：

(i) $f(x_0-)$与 $f(x_0+)$存在；(ii) $f(x_0-)$与 $f(x_0+)$至少有一个不存在．

若(i)成立，则称点 x_0 为 $f(x)$的**第一类间断点**．此时，如果 $f(x_0-)=f(x_0+)$，那么又称点 x_0 为 $f(x)$的**可去间断点**．意思是说，只要我们舍去在点 x_0 上的原有值 $f(x_0)$，而重新定义 $f(x)$在点 x_0 上的值为 $f(x_0+)$，就可使 $f(x)$在点 x_0 上连续了．当然，这样改变原函数值所得的新函数与原函数已不同．但若我们所期望的结论并不涉及该间断点的值，则就可以借"点"光了．若(ii)成立，则称 x_0 为 $f(x)$的**第二类间断点**．

定义 3.1.2　设 $f(x)$在$(x_0-\eta, x_0]$上定义，$\eta>0$．若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 处**左连续**．类似地，设 $f(x)$在$[x_0, x_0+\eta)$上有定义，$\eta>0$．若有

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0+)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$在点 x_0 处**右连续**．

根据函数左、右极限存在的关系，易知 $f(x)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$在点 x_0 处同时左、右连续．此外，联系到函数极限与序列极限的关系，易知 $f(x)$在点 x_0 处连续的充要条件是对于定义域内满足 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$的任一点列$\{x_n\}$必有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$．

（二）局部属性

定理 3.1.1(保号性)　设 $f(x)$在点 x_0 处连续，且 $f(x_0)>0\,(f(x_0)<0)$，则存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0\,(f(x)<0)$．

定理 3.1.2(有界性)　设 $f(x)$在点 x_0 处连续,则存在 $\delta>0$,使得 $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上是有界的.

定义 3.1.3　设 $f(x)$在邻域 $U(x_0)$上定义.(i) 若$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\leqslant f(x_0)$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处是上半连续的.(ii) 若$\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)\geqslant f(x_0)$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处是下半连续的.

注 1　$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)\triangleq\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{0<|x-x_0|<\delta}\{f(x)\}$;　　$\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)\triangleq\lim\limits_{\delta\to 0}\inf\limits_{0<|x-x_0|<\delta}\{f(x)\}$.

注 2　下述函数 $f(x)$在$(0,1)$上既非上半,也非下半连续函数:

$$f(x)=\begin{cases}1-1/q, & x=p/q(p,q\text{互素}),q>0\text{偶数},\\ -1+1/q, & x=p/q(p,q\text{互素}),q>0\text{奇数},\\ 0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

易知在 $U(x_0)$上的函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续的充分必要条件是 $f(x)$在 $x=x_0$ 处是上半也是下半连续的.

注 3　设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且$\{x_n\}\subset(-\infty,\infty)$是有界列,也不一定有关系

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)=f(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n),\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)=f(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n).$$

例如 $f(x)=-x$,$x_n=(-1)^n(n\in\mathbf{N})$.

注 4　Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q}\end{cases}$在$(-\infty,\infty)$上处处不连续,而 $f(x)=D(x)\sin(\pi x)$只在 $x\in\mathbf{Z}$处连续.

例 3.1.1　试论下列函数 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性与间断性:

(1) $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

(3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.　(4) $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+x^{2n}+x^{-2n}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) 易知$\lim\limits_{n\to\infty}x\sin(1/x)=0$,故 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,所以 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点.

(3) 易知 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(0)=0$,故 $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点.

(4) 易知 $f(x)=\max\{4,x^2,1/x^2\}(x\neq 0)$,故 $x=0$ 是 $f(x)$的间断点.

例 3.1.2　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}a_n+\sin\pi x, & x\in[2n,2n+1],\\ b_n+\cos\pi x, & x\in(2n-1,2n)\end{cases}$ $(n\in\mathbf{Z})$,试确定 a_n,b_n 的取值,使 $f(x)$在任一 $x\in(-\infty,\infty)$上连续.

(2) 试论 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{是有理数},\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$的连续点与间断点.

解 (1)易知 $f(x)$在点 $x\in(-\infty,\infty)$处连续当且仅当

$$\lim_{x\to 2n-}f(x)=\lim_{x\to 2n+}f(x),\qquad \lim_{x\to(2n-1)-}f(x)=\lim_{x\to(2n-1)+}f(x).$$

即 $b_n+1=a_n,a_{n-1}=b_n-1$.根据归纳法可知

$$a_n=a_0+2n,\qquad b_n=a_0+2n-1\quad(n=1,2,\cdots).$$

(2)(i)若 $x_0\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则当$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$是收敛于 x_0 的有理数列与无理数列时,我们有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=0$,以及

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n'=\lim_{n\to\infty}\sin x_0\pi\neq0.$$

这说明 $x=x_0$ 不是 $f(x)$的连续点.

(ii)若 $x_0=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon/\pi$,我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|f(x)|\leqslant|\sin\pi x|\\&=|\sin(k\pi+\pi(x-k))|=|\sin(x-x_0)\pi|<|x-x_0|\pi<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $x_0=k$是 $f(x)$的连续点.

例3.1.3 在$(0,1)$上考察下列函数 $f(x)$的连续性:

(1)Riemann 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in\mathbf{N},\text{且互素}).\end{cases}$

(2)$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{nx}{n+1}, & x=\dfrac{m}{n}(m,n\in\mathbf{N},\text{且互素}).\end{cases}$

解 (1)(i)当 $x_0=\dfrac{p}{q}$(正有理数)时,我们取 ε_0:$0<\varepsilon_0<\dfrac{1}{q}$.易知对任意的 $\delta>0$,当然均存在无理数 $x\in(0,1)$,使得 $|x-x_0|<\delta$.此时有 $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{1}{q}>\varepsilon_0$.这说明 $f(x)$在正有理数点 x_0 处是不连续的.

(ii)若 x_0 是正无理数,则对任给的 $\varepsilon>0$,易知只有有限个正整数 p 与 q,能满足不等式$\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$.因此,必存在 $\delta>0$,使得由上述之有限个 q 所组成的有限个$\dfrac{p}{q}$,满足$\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\delta$.从而,对一切在$(0,1)$内满足 $|x-x_0|<\delta$的正有理数,有

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|=\frac{1}{q}<\varepsilon.$$

注意到在 x 为无理数时,有 $|f(x)-f(x_0)|=0$,可知对任意 $x_0\in(0,1)$,有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.即 $f(x)$在正无理数点 x_0 处连续.

(2)(i)当 $x_0=m/n$时,$f(x)=m/(n+1)$.现取 $x_k=(km+1)/kn(k\in\mathbf{N})$,则有$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\dfrac{m}{n}=x_0$,$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=\dfrac{m}{n}=x_0$.这说明 $f(x)$在 x_0 处不连续,即在有理数点

上不连续.

(ii) 当 x_0 是无理数时,$f(x_0)=x_0$.取有理数列$\{r_k\}$:$r_k=m_k/n_k$,$\lim\limits_{k\to\infty}r_k=x_0$,则

$$\lim_{k\to\infty}f(r_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k}\Big/\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=x_0.$$

由此易知 $f(x)$在无理数点上连续.

例 3.1.4　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[a,b]$中每一点上都连续,且有 $x_n\in[a,b]$($n\in\mathbf{N}$)使得 $f(x_n)\to A$($n\to\infty$),则存在 $x_0\in[a,b]$,使得 $f(x_0)=A$.

(2) 设 $f(x)$,$g(x)$是定义在(a,b)上的单调函数,且对$[a,b]$中的任一有理数 r,均有 $f(r)=g(r)$,则 $f(x)$与 $g(x)$的连续点相同,在连续点上的函数值也相同.

证明　(1) 易知存在$\{x_{n_k}\}\subset[a,b]$,使得 $x_{n_k}\to x_0$($k\to\infty$,$x_0\in[a,b]$).从而有

$$A=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0).$$

(2) 设 $x=x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的连续点,则对满足 $r_n\to x_0$($n\to\infty$)的任一有理数列$\{r_n\}$,必有 $f(r_n)\to f(x_0)$($n\to\infty$).现在假定 $g(x)$是递增函数,则存在左、右极限 $g(x_0-)$,$g(x_0+)$,且有 $g(x_0-)\leqslant g(x_0)\leqslant g(x_0+)$.若取有理数列$\{r_n\}$递减收敛于 x_0,则

$$g(x_0+)=\lim_{n\to\infty}g(r_n)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=f(x_0).$$

类似地可得 $g(x_0-)=f(x_0)$.因此有

$$f(x_0)=g(x_0-)\leqslant g(x_0)\leqslant g(x_0+)=f(x_0).$$

这说明 $x=x_0$ 是 $g(x)$的连续点,且 $g(x_0)=f(x_0)$.

反向也可类似证出.

例 3.1.5　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x-2, & x<-1,\\ Ax+B, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 5x+5, & x>1,\end{cases}$ 试求 A,B 之值,使得 $f(x)$在 $x=-1$,1 处连续.

(2) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,令

$$m(x)=\inf_{a\leqslant t<x}\{f(t)\},\qquad M(x)=\sup_{a\leqslant t<x}\{f(t)\}\quad(a<x\leqslant b).$$

试证明 $M(x)$,$m(x)$在任一点 $x_0\in(a,b]$上都是左连续的.

(3) 设定义在(a,b)上的函数 $f(x)$满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}\qquad(x,y\in(a,b)).$$

若对 $x_0\in(a,b)$存在极限$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=l$,则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

(4) 设 $f(x)$定义在(a,b)上,且对(a,b)中的任一点 x_0,均存在极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

若令 $g(x)=\lim\limits_{t\to x}f(t)$，$x\in(a,b)$，则 $g\in C((a,b))$.

解 (1) 易知 $f(x)$ 在 $x=-1,1$ 处皆左、右连续，故为使它们是连续点，当且仅当其左、右连续值相等，即

$$-4=f((-1)-)=f(-1)=-A+B,$$
$$10=f(1+)=f(1)=A+B.$$

由此知

$$\begin{cases}-A+B=-4,\\ A+B=10.\end{cases}\qquad \begin{cases}A=7,\\ B=3.\end{cases}$$

(2) 以 $M(x)$ 为例，显然 $M(x)$ 是 $(a,b]$ 上有界的递增函数．因此存在极限：$\lim\limits_{x\to x_0-}M(x)=M(x_0-)$，且对任意的 $x:a<x<x_0$，有 $M(x)\leqslant M(x_0-)$.

现在假定 $M(x)$ 在点 x_0 处不是左连续的，则有 $\varepsilon_0=M(x_0)-M(x_0-)>0$．根据上确界的定义，可知存在 $x':a<x'<x_0$ 使得 $f(x')>M(x_0)-\varepsilon=M(x_0-)$．矛盾．即得所证．

(3) 记 $\overline{f}(x_0)=\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$，$\underline{f}(x_0)=\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$，则由

$$2f(x_0+x)\leqslant f(x_0+2x)+f(x_0),$$

可知 $\overline{f}(x_0)\leqslant f(x_0)$．又由

$$2f(x_0)-f(x_0+x)\leqslant f(x_0-x),$$

可知 $2f(x_0)-\overline{f}(x_0)\leqslant\underline{f}(x_0)$．这说明 $\overline{f}(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\underline{f}(x_0)$．即得所证．

(4) 设 $x_0\in(a,b)$．对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得

$$|f(x)-g(x_0)|=|f(x)-\lim_{t\to x_0}f(t)|<\varepsilon/2,\qquad 0<|x-x_0|<\delta.$$

又对满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 的 x，存在 $\delta_2>0$，使得 $(x-\delta_2,x+\delta_2)\subset(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$，以及 $|f(x')-g(x)|<\varepsilon/2$，$0<|x'-x|<\delta_2$．即得所证．

例 3.1.6 试证明下述命题：

(1) 设 $f\in C([a,b])$，$\varepsilon_0>0$，$|f(b)-f(a)|\geqslant\varepsilon_0$，令

$$E=\{t\in[a,b):|f(x)-f(a)|<\varepsilon_0,a\leqslant x\leqslant t\},$$

以及 $t_0=\sup\{E\}$，则 $|f(t_0)-f(a)|=\varepsilon_0$.

(2) 数集 $\{2^m3^n:m,n\in\mathbf{Z}\}$ 在 $(0,\infty)$ 上稠密．

证明 (1) 假定 $|f(t_0)-f(a)|<\varepsilon_0$，则由 f 的连续性可知，存在 $t':t'>t_0$，使得 $|f(t')-f(a)|<\varepsilon_0$．这与 t_0 是 E 的上确界矛盾．此外，若有 $|f(t_0)-f(a)|>\varepsilon_0$，则同理可得出矛盾．因此，$|f(t_0)-f(a)|=\varepsilon_0$.

(2) 改写 $2^m3^n=e^{m\ln2+n\ln3}$，且易知点集 $\{m\ln2+n\ln3:m,n\in\mathbf{Z}\}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中稠密．再注意到指数函数、对数函数是连续函数，即可得证．

3.2 连续函数的运算性质，复合函数、反函数以及初等函数的连续性

定理 3.2.1 设 $f(x)$与 $g(x)$均在 x_0 点连续，则

(1) $f(x)\pm g(x)$以及 $f(x)\cdot g(x)$均在点 x_0 处连续.

(2) 当 $g(x_0)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0 处连续.

例如，多项式函数 $P_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 在$(-\infty,\infty)$上连续；$\tan x$ 的不连续点是 $x=(k+1/2)\pi(k=0,\pm1,\cdots)$.

定理 3.2.2(复合函数的连续性) 设 $u=g(x)$在点 x_0 处连续，$y=f(u)$在点 $u_0=g(x_0)$处连续，则复合函数 $f[g(x)]$在点 x_0 处连续. 例如，幂函数 $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$在$(0,\infty)$上连续.

定理 3.2.3(反函数的连续性) 设 $f(x)$是区间 I 上严格单调的连续函数，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$在区间 $J=R(f)$上是连续的.

例如，反正弦函数 $\arcsin x$ 在任一点 $x\in[-1,1]$上连续；反正切函数 $\arctan x$ 在任一点 $x\in(-\infty,+\infty)$上连续. 这是因为 $\sin x$，$\tan x$ 分别在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上严格递增且连续.

综上所述，基本初等函数在其定义区域上是连续函数. 不仅如此，根据 3.1 节所介绍的函数连续性的运算关系，还知道凡初等函数皆是在其定义域上的连续函数.

定理 3.2.4 设 $f(x)$定义在(a,b)上. 若对(a,b)中任一 Cauchy 列$\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$必为 Cauchy 列，则 $f\in C((a,b))$.

注 1 设 $f(x)$在(a,b)上定义，且与值域 $R(f)$一一对应(即反函数存在). 又 $x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的连续点，但 $f^{-1}(y)$在 $y_0=f(x_0)$处不一定连续. 例如：

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & -1<x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^{-1}+[x^{-1}]}{1+x^{-1}+[x^{-1}]}, & 0<x<1,\end{cases}\qquad x_0=0.$$

注 2 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leqslant 0,\\ x+\pi, & x>0,\end{cases}$ 则 $g(x)$不连续，但 $f[g(x)]$连续，又设

$$g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leqslant 0,\\ x+\pi, & x>0,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x+\pi, & x\leqslant -\pi,\\ x-\pi, & x>\pi,\\ 1, & -\pi<x<\pi,\end{cases}$$

则 $f(x)$与 $g(x)$皆非连续函数，但 $f[g(x)]$连续.

注 3 若 $g(x)$的值域 $R(g)$包含 $f(x)$的某个不连续点的一个邻域，则 $f[g(x)]$不连续.

例 3.2.1 试证明下列命题：

(1) 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续，则 $|f(x)|$亦然.

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$在区间 I 上连续，则函数

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},\qquad m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

也在 I 上连续.

(3) 设 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$是$[a,b]$上的连续函数.现定义 $f(x)$如下:对任一点 $x_0\in[a,b]$,令 $f(x_0)$为三个值 $f_1(x_0),f_2(x_0),f_3(x_0)$的中间值,则 $f\in C([a,b])$.

证明 (1) 略.(2) 注意 $M(x)=[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]/2$.

(3) 注意 $f=f_1+f_2+f_3-\max\{f_1,f_2,f_3\}-\min\{f_1,f_2,f_3\}$.

例 3.2.2 解答下列问题:

(1) 设 $y=f(x)$定义在(a,b)上,且(a,b)与 $f((a,b))$一一对应,$x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的连续点.若 $f(x)$是严格单调的,试问 $f^{-1}(y)$在 $y_0=f(x_0)$处连续吗?

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且$(-\infty,\infty)$与 $f((-\infty,\infty))$一一对应,试证明 $f(x)$严格单调.

解 (1) 答案是肯定的.

(2) 反证法.若存在 $x_1<x_2<x_3$,使得 $f(x_1)>f(x_2)<f(x_3)$.由题设知,对 $y:f(x_2)<y<\min\{f(x_1),f(x_3)\}$,存在 $s\in(x_1,x_2)$,$t\in(x_2,x_3)$,使得 $f(s)=y=f(t)$.从而有 $s=t$.但这与 $x_1<s<x_2<t<x_3$ 矛盾.

例 3.2.3 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C((a,b))$,$g\in C((a,b))$,且有

$$f(x)\neq g(x),\quad g(x)\neq 0,\qquad x\in(a,b).$$

若存在 $x_0\in(a,b)$,以及 $\delta_1>0$,使得

$$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}<\frac{f(x_0)+g(x_0)}{f(x_0)-g(x_0)},\qquad 0<|x-x_0|<\delta_1,$$

则存在 $\delta_2>0$,使得$\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$,$x_0-\delta_2<x<x_0+\delta_2$.

(2) 设 $a_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,令

$$f_n(x)=\sin(a_nx)/a_n+\cos(a_n+x)\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

则存在子列$\{f_{n_k}(x)\}$以及 $g\in C((-\infty,\infty))$,使得

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=g(x),\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

证明 (1) 因为 $F(x)=f(x)/g(x)$在(a,b)上连续,又有

$$\frac{F(x)+1}{F(x)-1}<\frac{F(x_0)+1}{F(x_0)-1},\qquad 0<|x-x_0|<\delta_1,$$

所以存在 $\delta_2>0$,使 $F(x)-1$ 与 $F(x_0)-1$ 在区间$(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$上同号,即 $(F(x)-1)(F(x_0)-1)>0$.由此易知 $2F(x)>2F(x_0)$,即得所证.

(2) (i) 若$\{a_n\}$无界,则不妨设 $a_{n_k}\to+\infty(k\to+\infty)$.从而有 $\sin(a_{n_k}x)/a_{n_k}\to 0$ $(k\to+\infty)$.又在 $|\cos(a_{n_k}+x)|\leqslant 1$ 中可取$\{n_{k_i}\}$,使得存在$\lim\limits_{i\to\infty}\cos(a_{n_{k_i}}+x)=A$.因此得到

$$\lim_{i\to\infty}f_{n_{k_i}}(x)=0+A=A.$$

(ii) 若$\{a_n\}$是有界列,则存在$\{n_k\}$,使得 $a_{n_k}\to a(k\to\infty)$.若 $a=0$,则

$$\frac{1}{a_{n_k}}\sin(a_{n_k}x) = x\cdot\frac{\sin(a_{n_k}x)}{a_{n_k}x}\to x \qquad (k\to\infty).$$

从而有$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=x+1$.若 $a\neq 0$,则有

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=\frac{\sin(ax)}{a}+\cos(a+x).$$

例 3.2.4　试证明下列命题:

(1)设$\{a_n\}$是方程 $\tan x=x(x>0)$的相继根列,则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$.

(2)设 $f(x)$是$[0,1]$上的单调且连续的函数,又 $0\leqslant f(x)\leqslant 1(x\in[0,1])$,则对任意 $a_1\in[0,1]$,作 $a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)$,$\{a_n\}$是收敛列,且其极限值 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$.

证明　(1)易知 $a_n\in(n\pi,n\pi+\pi/2)(n\in\mathbf{N})$,故 $a_n\to+\infty(n\to\infty)$.从而有

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0.$$

而由 $\tan x$ 的连续性可知,$\pi/2+n\pi-a_n\to 0(n\to\infty)$.因此可得

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n-\pi)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n-\left(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-a_{n+1}\right)\right)=0.$$

我们有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$.

(2)不妨假定 $f(x)$递增.(i)若 $a_2\geqslant a_1$,则 $f(a_2)\geqslant f(a_1)$,且有 $a_3\geqslant a_2,\cdots,a_{n+1}\geqslant a_n$.可令 $a_n\to a(n\to\infty)$.(ii)若 $a_2\leqslant a_1$,则 $f(a_2)\leqslant f(a_1)$,且有 $a_3\leqslant a_2,\cdots,a_{n+1}\leqslant a_n$.可令 $a_n\to a(n\to\infty)$.从而由 $a_{n+1}=f(a_n)$可得 $f(a)=a$.

例 3.2.5　设 $f(x)$是$[0,\infty)$上的连续(下)凸函数,且 $f(0)=0$,则 $F(x)=f(x)/x$ 在$(0,\infty)$上递增.

证明　取 $0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_{n-m},\underset{m}{x}<+\infty(n>m)$,由 $f(x)$的(下)凸性可知

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-m}+x+\cdots+x}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-m})+mf(x)}{n}.$$

而当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-m}=0$ 时,上式变为 $f\left(\frac{m}{n}x\right)\leqslant\frac{m}{n}f(x)(1\leqslant m\leqslant n,x>0)$.这就是说,对满足 $0<r\leqslant 1$ 的有理数 r,有

$$f(y)\leqslant rf(x),\qquad \frac{f(y)}{y}\leqslant\frac{f(x)}{x}\qquad (0<y=rx<x).$$

此外,对无理数 θ:$0<\theta<1$,取有理数列$\{r_n\}$:$0<r_n<1$,$r_n\to\theta(n\to\infty)$,则有

$$\frac{f(r_nx)}{r_nx}\leqslant\frac{f(x)}{x},\qquad \frac{f(\theta x)}{\theta x}\leqslant\frac{f(x)}{x}.$$

因此,对任意满足 $0<y=\theta x<x$ 的 θ,有 $f(y)/y\leqslant f(x)/x$.

例 3.2.6　设 $f(x)$是$(0,\infty)$上的有界连续函数,且有 $f(x)\leqslant f(nx)(x>0$,

$n=1,2,\cdots$).则必存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

证明　反证法.假定存在 l:$\underline{f}<l<\overline{f}$,其中

$$\underline{f} \triangleq \varliminf_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{r\to+\infty} \inf_{x\geqslant r}\{f(x)\} < \lim_{r\to+\infty} \sup_{x\geqslant r}\{f(x)\} = \varlimsup_{x\to+\infty} f(x) \triangleq \overline{f}.$$

则存在 $a>0$,使得 $f(a)>l$.由连续性又知,存在 b:$a<b$,使得 $f(x)>l(x\in[a,b])$.记 $p=ab/(b-a)$,则当 $x\geqslant p$ 时有 $x/a\geqslant x/b+1$.这说明存在 n,使得

$$\frac{x}{a}\geqslant n\geqslant\frac{x}{b}\quad 或\quad a\leqslant\frac{x}{n}\leqslant b.$$

由此知 $f(x/n)>l$,从而又有 $f(x)>l(x>p)$,这与 $\underline{f}<l$ 矛盾.即得所证.

例 3.2.7　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$.若 T_1,T_2 皆是 $f(x)$的周期,且 T_1 与 T_2 不可通约(即 $T_1/T_2\overline{\in}\mathbf{Q}$),则 $f(x)$是常数(函数).

(2) 设 $f(x)$,$g(x)$各有基本正周期 T_1,T_2.若 $T_1/T_2\overline{\in}\mathbf{Q}$,则 $h(x)=f(x)+g(x)$是非周期函数.

证明　(1) 易知数集$\{m+nT_1/T_2:m,n\in\mathbf{Z}\}$在$(-\infty,\infty)$中稠密(见第1章),则对 $x\in(-\infty,\infty)$,存在$\lim\limits_{k\to\infty}(m_k+n_kT_1/T_2)=x/T_2$.根据 $f(x)$的连续性和周期性,可得

$$f(0)=\lim_{k\to\infty}f(m_kT_2+n_kT_1)=f(x).$$

证毕.(注意,一个不是常数的周期函数可以有两个不可通约的周期 T_1,T_2.例如,设有 T_1,T_2,且 $T_1/T_2\overline{\in}\mathbf{Q}$,则作数集 $E=\{x\in\mathbf{R}:x=rT_1+sT_2;s,t\in\mathbf{Q}\}$,并作

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash E.\end{cases}$$

易知 T_1,T_2 是此 $f(x)$的周期.

(2) 反证法.假定 $h(x)$以 T 为周期.由 $T_1/T_2\overline{\in}\mathbf{Q}$ 可知或 $T/T_1\overline{\in}\mathbf{Q}$,或 $T/T_2\overline{\in}\mathbf{Q}$.不妨设 $T/T_1\overline{\in}\mathbf{Q}$.因为

$$f(x+T)+g(x+T)=h(x+T)=h(x)=f(x)+g(x),$$

所以 $H(x)\triangleq f(x+T)-f(x)=g(x)-g(x+T)$是周期且连续的函数.但 T_1 与 T_2 不可通约,故 $H(x)$是常数.这说明 $f(x+T)=f(x)+C$.

若 $C\neq0$,则以 $x=0$,T 代入上式,得

$$f(2T)=f(T)+C=f(0)+2C.$$

依据归纳法又知 $f(nT)=f(0)+nC$,但这与 $f(x)$的有界性相矛盾.因此 $C=0$,而这又推知 T 是 $f(x)$的周期,即 $T=nT_1$(某个 $n\in\mathbf{Z}$),这又矛盾.证毕.

例 3.2.8　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R})$.若有 $f(2x)=f(x)(x\in\mathbf{R})$,则 $f(x)$恒等于一个常数.

(2) 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足

$$f(x+y)=f(x)f(y)\quad(x,y\in\mathbf{R}),$$

且 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,则 $f\in C(\mathbf{R})$.

证明　(1) 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,我们有

$$f(x)=f(x/2)=\cdots=f(x/2^n)\to f(0)\quad(n\to\infty);$$
$$f(y)=f(y/2)=\cdots=f(y/2^n)\to f(0)\quad(n\to\infty).$$

由此可知 $f(x)=f(y)=f(0)$.

(2) 由题设可知 $f(x)=f(x)f(0)$.从而我们有

(i) 若 $f(x)\equiv 0$,则结论得证.

(ii) 若 $f(x)\not\equiv 0$,则 $f(0)=1$.从而根据题设得

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=f(x)f(\Delta x)-f(x)f(0)\\&=f(x)[f(\Delta x)-f(0)]\to 0\quad(\Delta x\to 0).\end{aligned}$$

这说明 $f\in C(\mathbf{R})$.

例 3.2.9　试证明下列命题:

(1) 设 $f:(0,1)\mapsto(0,1)$满足性质:若对$(0,1)$中的任一 Cauchy 数列$\{a_n\}$,$\{f(a_n)\}$必是 Cauchy 数列.则 $f\in C((0,1))$.

(2) 设 $a_n=\sin(n+\ln n)(n\in\mathbf{N})$,则$\{a_n\}$不是收敛于零的数列.

证明　(1) 反证法.假定 $f(x)$在 $x_0\in(0,1)$处不连续,那么就存在点列$\{x_n\}$:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq f(x_0)$.于是我们作点列

$$t_n=\begin{cases}x_n, & n=2m,\\ x_0, & n=2m-1\end{cases}\quad(m=1,2,\cdots),$$

易知$\{t_n\}$是$(0,1)$中的 Cauchy 列,但$\{f(t_n)\}$不是 Cauchy 列.矛盾,从而即得所证.

(2) 反证法.假定$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则由等式

$$\sin^2(n+\ln n)+\cos^2(n+\ln n)=1$$

可知,$\lim\limits_{n\to\infty}|\cos(n+\ln n)|=1$.将此结论应用于公式

$$\begin{aligned}|a_{n+1}|&=|\sin(n+1+\ln(n+1))|\\&=|\sin(n+\ln n+1+\ln(1+1/n))|\\&\leqslant|\sin(n+\ln n)\cdot\cos(1+\ln(1+1/n))|\\&\quad+|\cos(n+\ln n)\cdot\sin(1+\ln(1+1/n))|,\end{aligned}$$

并注意到正弦函数、余弦函数的连续性,可得$\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|=\sin 1$.这导致矛盾,证毕.

例 3.2.10　设 $f\in C((-\infty,\infty))$是周期函数,记其一切正周期全体形成的数集的下确界为 T_0.若 $T_0=0$,试证明 $f(x)=C$(常数).

证明　由题设知,对任给 $\delta>0$,均存在 $f(x)$的周期 τ:$0<\tau<\delta$.由此知任意的长为 δ 的区间 I 均包含数 $n\tau(n\in\mathbf{Z})$,且有 $f(n\tau)=f(\tau)=f(0)$.从而对 $x\in I$,有 $n\tau\in I$,使得 $|n\tau-x|<\delta$.根据 $f(x)$的连续性,可得 $f(x)=f(0)$.证毕.

例 3.2.11 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上,且满足 Cauchy 方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (x,y\in(-\infty,\infty)).$$

(i) 若 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,试证明 $f(x)=cx(c=f(1))$.

(ii) 若 $f(x)$在某区间(a,b)上有界,试证明 $f(x)=cx$.

证明 (i) 在等式中,取 $y=x$,则有 $f(2x)=2f(x)$.由此易知对任意的正整数 n,有 $f(nx)=nf(x)$.以$\frac{y}{n}$代 x,有$\frac{1}{n}f(y)=f\left(\frac{y}{n}\right)$;又以 mx 代 y(m 是正整数),得 $\frac{m}{n}f(x)=\frac{1}{n}f(mx)=f\left(\frac{m}{n}x\right)$.

此外,由 $f(0)=0$ 以及 $y=-x$ 可知 $0=f(0)=f(x)+f(-x)$,从而得到 $f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x)$.这说明对一切 $r\in\mathbf{Q}$(有理数)以及 $x\in(-\infty,\infty)$有 $f(rx)=rf(x)$.取 $x=1$,有 $f(r)=cr$,$c=f(1)$.任取 $x_0\in(-\infty,\infty)$,由 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)=f(0)=0$,得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,可知 $f(x)\in C(\mathbf{R})$.

现在对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$取 $r_n\in\mathbf{Q}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$.于是,由 $f(r_n)=cr_n$ 及 $f(x)$的连续性,可知 $f(x)=cx$.

(ii) (a) 由题设可推 $f(x)$在任意的区间$(-\delta,\delta)$上有界.为此,令 $g(x)=f(x)-f(1)x$.易知 $g(x)$也满足 Cauchy 方程,且 $g(r)=0(r\in\mathbf{Q})$.

对 $x\in(-\delta,\delta)$,存在 $r\in\mathbf{Q}$,使 $x+r\in(a,b)$.故

$$g(x)=g(x)+g(r)=g(x+r)=f(x+r)-f(1)(x+r).$$

这说明 $g(x)$在$(-\delta,\delta)$上有上界,当然 $f(x)$也有上界.因为 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$又有下界.

(b) 由(a)知,只需指出 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.为此,令 $x_n\to 0(n\to\infty)$,并取 $r_n\in\mathbf{Q}$ $(n\in\mathbf{N})$,使 $r_nx_n\to 0$ $(n\to\infty)$.从而$\{|f(r_nx_n)|\}$是有界列,记上界为 M,我们有

$$|f(x_n)|=\left|f\left(\frac{1}{r_n}\cdot r_nx_n\right)\right|=\frac{1}{r_n}|f(r_nx_n)|\leqslant\frac{M}{r_n}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

即 $f(x_n)\to f(0)(n\to\infty)$.证毕.

例 3.2.12 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且满足 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)(x,y\in(-\infty,\infty))$,试求非零解 $f(x)$.

(2) 试在$(0,\infty)$上求满足方程 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)(x,y\in(0,\infty))$的非零连续解 $f(x)$.

(3) 试在$(0,\infty)$上求满足方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$的非零连续解 $f(x)$.

(4) 试在$(-\infty,\infty)$上求满足方程 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x(x,y\in(-\infty,\infty))$的非零连续解 $f(x)$.

(5) 试在$(-\infty,\infty)$上求满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)+axy(-\infty<x,y,a<\infty)$的连续解 $f(x)$.

(6) 试在$(-\infty,\infty)$上求满足方程 $f(xy)=xf(y)+yf(x)(-\infty<x,y<\infty)$的非零连续解 $f(x)$.

解 (1) 由 $f(x)=f^2(x/2)$可知 $f(x)>0$.令 $g(x)=\ln f(x)$,易知 $g\in C((-\infty,\infty))$且满足 Cauchy 方程,故得 $g(x)=cx$,$c=g(1)=\ln f(1)$.从而有 $f(x)=b^x$,$b=f(1)$.

(2) 对 $x,y\in(0,\infty)$,取 $t,s\in(-\infty,\infty)$,使得 $x=e^t$,$y=e^s$,并令 $g(t)=f(e^t)$,则 $g(t)$满足方程 $g(t+s)=g(t)\cdot g(s)$.故由(1)知 $g(t)=b^t$,而 $f(x)=b^{\ln x}=x^a(a=\ln b)$.

(3) 对 $x\in(0,\infty)$,令 $x=e^t$,$g(x)=f(e^t)$,则 $g(t)$满足 Cauchy 方程.故 $g(t)=ct$.从而 $f(x)=c\ln x$.记 $a=e^{1/c}$,则 $f(x)=\log_a x$.

(4) 注意 $g(x)=f(x)e^{-x}$满足 Cauchy 方程,故有 $f(x)=cxe^x$.

(5) 令 $g(x)=f(x)-ax^2/2$,则 $g(x)$满足 Cauchy 方程.故 $g(x)=g(1)x$,有

$$f(x)=ax^2/2+[f(1)-a/2]x.$$

(6) 易知 $f(1)=0=f(-1)$,由此可得 $f(-x)=-f(x)$,即 $f(x)$是奇函数.考察函数 $g(x)=f(x)/x(x>0)$,易知 $g(xy)=g(x)+g(y)$.从而有 $g(x)=g(e)\ln x=f(e)\ln x/e$,$f(x)=f(e)x\ln x/e(x>0)$.

例 3.2.13 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$有界或单调,且有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$,则 $f\in C((-\infty,\infty))$.

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$且满足 Jensen 方程

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\qquad(x,y\in(-\infty,\infty)),$$

则 $f(x)=ax+b$.

证明 (1) 只需注意不等式

$$f(x+\delta)-f(x)\leqslant\frac{1}{2}[f(x+2\delta)-f(x)]\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^n}[f(x+2^n\delta)-f(x)].$$

(2) 记 $f(0)=b$ 并取 $y=0$,则由 Jensen 方程知

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)+f(0)}{2}=\frac{f(x)+b}{2}.$$

从而有$[f(x)+f(y)]/2=f[(x+y)/2]=[f(x+y)+b]/2$,即

$$f(x)+f(y)=f(x+y)+b.$$

令 $g(x)=f(x)-b$,则 $g(x)$满足 Cauchy 方程.从而有 $g(x)=ax$,即 $f(x)=ax+b$.

例 3.2.14 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且有 $f(3x)-f(2x)=x$,$x\in(-\infty,\infty)$,试求 $f(x)$.

(2) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的 $f(x)$满足 $2f(2x)=f(x)+x$,$x\in(-\infty,\infty)$,试求在 $x=0$ 处连续的 $f(x)$.

(3) 求在$(-\infty,\infty)$上满足方程 $f(x^2)+f(x)=x^2+x$ 的连续解 $f(x)$.

解 (1) 由题设知,对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$,有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x}{3}+f\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3^2}x+f\left(\frac{2^2}{3^2}x\right)\\&=\cdots=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}x\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)+f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right)\\&=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}x\left(\frac{1}{3}-\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)\Big/\left(1-\frac{2}{3}\right)+f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,即得 $f(x)=x+c(c=f(0))$.

(2) 令 $t=2x$,我们有

$$f(t)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}t\right)+\frac{1}{2^2}t=\frac{1}{2^2}f\left(\frac{1}{2^2}t\right)+\frac{1}{2^4}t+\frac{1}{2^2}t.$$

根据归纳法易得

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^n}t\right)+\frac{1}{2^{2n}}t+\frac{1}{2^{2(n-1)}}t+\cdots+\frac{1}{2^2}t\\&=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^n}t\right)+t\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{2(n+1)}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

由此知(令 $n\to\infty$,注意 $f(0)=0$)$f(t)=t/3$.

(3) 易知 $f(0)=0$.令 $F(x)=x-f(x)$,则

$$F(x)=f(x^2)-x^2=-F(x^2).$$

注意到 $F(x)$是偶函数,故只需考察 $x>0$ 的情形.因为

$$F(x)=-F(x^{1/2})=F(x^{1/4})=\cdots=(-1)^n F(x^{2^{-n}}),$$

所以得到 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n F(x^{2^{-n}})=F(0)=0$.这说明 $f(x)=x$.

例 3.2.15 解答下列问题:

(1) 求在$(-\infty,\infty)$上满足方程 $f(x+y)-f(x-y)=f(x)f(y)$且在 $x=0$ 处连续的解 $f(x)$.

(2) 求在$(-\infty,\infty)$上满足方程 $f(\alpha x)+f(\beta y)=ax+b(\alpha\beta\neq 0)$的连续解 $f(x)$.

(3) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$,有

$$\lim_{h\to+\infty}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]=0,$$

试证明 $f(x)$是线性函数.

解 (1) 易知 $f(0)=0$, $f(2x)=f^2(x)$,又有

$$f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)=f^{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cdots=f^{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

由此知 $f(x/2^n)=\sqrt[2^n]{f(x)}$.

若有 $f(x)>0$,则在上式中令 $n\to\infty$得出 $0=1$.这一矛盾说明 $f(x)\equiv 0$.

(2) (i) 若 $\alpha=\beta$,则由 $2f(\alpha x)=ax+b$ 可知

$$2f(x)=\frac{a}{\alpha}x+b,\qquad f(x)=\frac{ax}{2\alpha}+\frac{b}{2}.$$

(ii) 若 $\alpha>\beta$,则由 $f(x)+f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)=ax\frac{1}{\alpha}+b$ 可知

$$\begin{aligned}f(x)&=ax\frac{1}{\alpha}+b-f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)\\&=ax\frac{1}{\alpha}+b-\left[ax\frac{\beta}{\alpha^2}+b-f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)\right]\\&=ax\frac{1}{\alpha}-ax\frac{\beta}{\alpha^2}+f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)=\cdots\\&=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\cdots\pm\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}\right)+b-f\left(\frac{\beta^{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}x\right).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,我们有 $f(x)=\frac{ax}{\alpha}\frac{1}{1+\beta/\alpha}+\frac{b}{2}=\frac{a}{\alpha+\beta}x+b$.

(3) 易知,当 $f(x)$满足题设极限式时,$f(-x)$也必满足,故只需考察,$f(x)$是偶(或奇)函数的情形.

(i) 设 $f(x)$是偶函数,则 $f(x)\to f(0)\ (x\to+\infty)$,

$$f(h)-2f(0)+f(-h)\to 0,\qquad 2f(h)-2f(0)\to 0\quad(h\to+\infty),$$

从而对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$,有

$$f(x+h)+f(-x+h)-2f(x)\to 0\qquad(h\to+\infty),$$

即 $2f(0)-2f(x)=0$, $f(x)\equiv f(0)$.

(ii) 设 $f(x)$是奇函数,则对 $x\in(-\infty,\infty)$有 $\frac{1}{n}f(nx)\to f(x)\ (n\to\infty)$.从而 $f(\lambda x)=\lambda f(x)\ (\lambda\in(-\infty,\infty))$.

例 3.2.16 解答下列问题:

(1) 求在$(-\infty,\infty)$上满足 $f(2x+1)=f(x)$且在 $x=-1$ 处连续的解 $f(x)$.

(2) 求在 $x\neq 1$ 处满足方程 $f(x)=f(x/(1-x))$且在 $x=0$ 处连续的解 $f(x)$.

(3) 设 $0\leqslant a\leqslant 1/4$,试求在$(-\infty,\infty)$上满足 $f(x)=f(x^2+a)$的连续解 $f(x)$.

解 (1) 对 $x\in(-\infty,\infty)$,令 $x_1=x$,以及 $x_{n+1}=(x_n-1)/2\ (n=1,2,\cdots)$,则

$x_n \to -1 (n\to\infty)$,且有
$$f(x_n) = f(2x_{n+1}+1) = f(x_{n+1}) \qquad (n\in\mathbf{N}).$$
由此知 $f(x)=f(x_n)$,从而 $f(x)\equiv f(-1)$.

(2) 由归纳法可知 $f(-1)=f(-1/2)=f(-1/3)=\cdots=f(0)$.又对 $t\neq 0$,$-1,-1/2,-1/3,\cdots$,有
$$f(t)=f\left(\frac{t}{t+1}\right)=f\left(\frac{t}{2t+1}\right)=f\left(\frac{t}{3t+1}\right)=\cdots.$$
因为 $t/(nt+1)\to 0(n\to\infty)$,所以 $f(t)\equiv 0$.

(3) 因为 $f(-x)=f(x)$,所以只需看在$[0,\infty)$上的情形.由方程 $x^2+a=x$ 易知有解 $\alpha=(1-\sqrt{1+4a})/2$,$\beta=(1-\sqrt{1-4a})/2$.

(i) 若 $0\leqslant x\leqslant\alpha$,并记 $x_1=x^2+a$,再定义数列 $x_{n+1}=x_n^2+a(n\in\mathbf{N})$,则由 $g(x)=x^2+a$之单调性可知,$\{x_n\}$是单调列.注意它的有界性,$\{x_n\}$必是收敛列,且易知它收敛于 α或 β.根据 $f(x)=f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$,令 $n\to\infty$时,得到 $f(x)=$常数.

(ii) 若 $x>\alpha$,并记 $x_1=\sqrt{x-a}$,再定义 $x_{n+1}=\sqrt{x_n-a}(n=1,2,\cdots)$,同样可以推出 $f(x)=$常数.

例 3.2.17 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R})$满足 $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})(x,y\in\mathbf{R})$,则 $f(x)=x^2(x\in\mathbf{R})$.

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R})$满足 $f(x_0)\neq 0$ 以及
$$f(x)f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2}) \quad (x,y\in\mathbf{R}),$$
则 $f(x)=[f(1)]^{x^2}(x\in\mathbf{R})$.

证明 (1) (i) 易知 $f(0)=0$,$f(x)$是偶函数.

(ii) 若 $f(x)\not\equiv 0$,则可推 $f(x)\neq 0(x\neq 0)$.事实上,若有 $a>0$,使得 $f(a)\neq 0$,则 $f(x)\neq 0(0<x<a)$.这是因为:令 c 是 $f(x)$在$(0,a)$中的最大零点,则由
$$2f\left(\frac{x}{2^2}\right)=f\left(\frac{x}{2^{3/2}}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$$
可知,$f(c/2^n)=0$,从而得 $f(c\sqrt{1+2^{-2n}})=f(c)+f(c/2^n)=0$.

但是 $c\sqrt{1+2^{-2n}}\in(c,a)$($n$充分大时),这与 c 的取值矛盾.因此,由 $f(2^n a)=4^n f(a)\neq 0$ 可知,a可取到任意大.这说明 $f(x)\neq 0(x>0)$.假定 $f(1)=1$,则点集 $E=\{x>0:f(x)=x^2\}$在$[0,\infty)$中稠密.证毕.

(2) (i) 因为 $f(x)f(x_0)=f(\sqrt{x^2+x_0^2})=f(-x)f(x_0)$,所以 $f(x)=f(-x)=f(|x|)(x\in\mathbf{R})$,即 $f(x)$是偶函数.

(ii) 往证 $f(\sqrt{n}x)=[f(x)]^n(n\in\mathbf{N})$.事实上,对 $n=1$,上式显然成立.现在假定 $n=k$ 上式为真,则可得

$$f(\sqrt{k+1}x)=f(\sqrt{k+1}\,|x|)=f(\sqrt{(\sqrt{k}x)^2+x^2})$$
$$=f(\sqrt{k}x)f(x)=[f(x)]^k f(x)=[f(x)]^{k+1}.$$

根据归纳法,即得所证.

(iii) 设 p,q 是非零整数,则

$$f(p)=f(|p|)=f(\sqrt{p^2}\cdot 1)=[f(1)]^p;$$
$$f(|p|)=f(\sqrt{q^2}\,|p/q|)=[f(|p/q|)]^{q^2}.$$

由此可知 $[f(p/q)]^{q^2}=[f(1)]^{q^2}$.

若 $f(1)>0$,则 $[f(p/q)]=[f(1)]^{p^2/q^2}$.这说明对一切有理数 $r\neq 0$,都有 $f(r)=[f(1)]^{r^2}$.从而根据 $f(x)$ 的连续性,最后得 $f(x)=[f(1)]^{x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$.

例 3.2.18 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且满足方程 $f[f(f(x))]=x$,$x\in(-\infty,\infty)$,则 $f(x)\equiv x$.

(2) 若定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的 $f(x)$ 满足方程 $f[f(x)]=-x$,则 $f(x)$ 不是连续函数.

(3) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,$g\in C((-\infty,\infty))$,且满足方程

$$f[g(x)]=g[f(x)],\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

若方程 $f[f(x)]=g[g(x)]$ 有解,则方程 $f(x)=g(x)$ 也有解.

(4) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且满足方程 $f(x)=f(\sin x)$,$x\in(-\infty,\infty)$,则 $f(x)=C$(常数).

证明 (1) (i) 若 $x\neq y$,则可推 $f(x)\neq f(y)$.事实上,若有 $u=f(x)=f(y)$,则由题设知 $x=f[f(f(x))]=f[f(u)]=f[f(f(y))]=y$.矛盾.由此再注意到 $f(x)$ 连续,可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上严格单调.

(ii) 若 $f(x)$ 递减,则 $f[f(x)]$ 递增,而 $f[f(f(x))]$ 递减,这与题设矛盾.

设 $f(x)$ 递增.若结论不真,即存在 x_0,使得 $f(x_0)\neq x_0$.则当 $f(x_0)>x_0$ 时,有 $f[f(x_0)]>f(x_0)$,$f[f(f(x_0))]>f[f(x_0)]>f(x_0)>x_0$,与题设矛盾.当 $f(x_0)<x_0$ 时,也可推 $f[f(f(x_0))]<x_0$,同样导致矛盾.

从而我们有 $f(x)\equiv x$.

(2) 可证 $(-\infty,\infty)$ 与 $f((-\infty,\infty))$ 是一一对应的.这是因为若有 $f(x_1)=f(x_2)$,则由 $-x_1=f[f(x_1)]=f[f(x_2)]=-x_2$,可知 $x_1=x_2$.因此,如果 $f(x)$ 连续,则 $f(x)$ 严格单调.而 $f(f(x))$ 严格递增.矛盾.

(3) 反证法.假定 $h(x)=f(x)-g(x)>0$(或 <0),则

$$\begin{aligned}0\neq\ & h[f(x)]+h[g(x)]\\ =\ & f[f(x)]-g[f(x)]+f[g(x)]-g[g(x)]\\ =\ & f[f(x)]-g[g(x)].\end{aligned}$$

与题设矛盾.

(4) 对 $x\in(-\infty,\infty)$,令 $x_1=\sin x$,$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(i) 若 $x_1\in[0,1]$,则 $x_2=\sin x_1\leqslant x_1$,且相继有 $x_3\leqslant x_2$,$\cdots$,$x_{n+1}\leqslant x_n$,$\cdots$.因此令 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$,可得 $x_0=\sin x_0$,即 $x_0=0$.再根据 $f(x)$的连续性,我们有 $f(x_n)\to f(0)$ $(n\to\infty)$.故由

$$f(x)=f(x_1)=f(\sin x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=\cdots,$$

可知 $f(x)=f(0)$.

(ii) 若 $0>x_1\geqslant-1$,则$\{x_n\}$是极限为零的递增列,从而有 $f(x_n)\to f(0)$ $(n\to\infty)$,$f(x)=f(0)$.证毕.

例 3.2.19 设 $f\in C([0,1])$,且值域 $R(f)=[0,1]$,以及

$$f(0)=1-f(1)=0,\quad f_n(x)\overset{\triangle}{=}(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)\quad (n\text{次复合})$$

若存在 n_0,使得 $f_{n_0}(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 $f(x)\equiv x$.

证明 (i) 若$[0,1]$中 $x_1\neq x_2$,则由题设知

$$f_{n_0}(x_1)=x_1,\qquad f_{n_0}(x_2)=x_2,\qquad f(x_1)\neq f(x_2).$$

这说明 $f(x)$在$[0,1]$上的一一对应的函数,从而根据 f 的连续性以及 $f(0)<f(1)$,可知 $f(x)$是严格递增的.

(ii) 若存在 $x_0\in[0,1]$,使得 $f(x_0)>x_0$,则易知

$$f_{n_0}(x_0)>f_{n_0-1}(x_0)>\cdots>f(x_0)>x_0.$$

这与题设矛盾.类似地可证:若 $f(x_0)<x_0$ 也导致矛盾.

归纳之,即得 $f(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

例 3.2.20 解答下列问题:

(1) 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,$g(x)$满足

$$f(-x)+f(x)=g(x)\quad (x\in\mathbf{R}).$$

若 $g\in C(\mathbf{R})$,试问 $f(x)$必在 $\mathbf{R}$ 上连续吗?

(2) 已知不存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$,使得对任意的 $y\in\mathbf{R}$,有且仅有 x_1,x_2:$x_1\neq x_2$,$f(x_1)=f(x_2)=y$.不过一定存在 $f\in C(\mathbf{R})$,使得对任意的 $y\in\mathbf{R}$,有且仅有 x_1,x_2,x_3,$x_1<x_2<x_3$,$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=y$.

解 (1) 否!反例如下:作 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}_+,\\ -1, & x\in\mathbf{Q}_-,\\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q},x=0,\end{cases}$ 则得

$$f(-x)=\begin{cases}-1, & x\in\mathbf{Q}_+,\\ 1, & x\in\mathbf{Q}_-,\\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q},x=0.\end{cases}$$

从而知

$$g(x)=f(-x)+f(x)=\begin{cases}0, & x\in \mathbf{Q}_+,\\ 0, & x\in \mathbf{Q}_-,\\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q}, x=0.\end{cases}$$

即 $g\in C(\mathbf{R})$,但 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上不连续.

(2) 例如在$[-\pi/2,\pi/2]$上用 $\cos x$,在$(\pi/2,\pi]$上用$-\cos x$,然后以此区间为周期将上述函数在 y 轴上以 2 周期分段上、下移位即可.

例 3.2.21 试证明下列命题:

(1) 设 $f_n(x)(n\in\mathbf{N})$,$f(x)$定义在 $\mathbf{R}$ 上.若对任意的$\{x_n\}$:$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$,均有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$,则 $f\in C(\mathbf{R})$.

(2) 设 $I=[0,a]$(或$[0,\infty)$),$f\in C(I)$且 $f(0)=0$.则 $f(x)$在 I 上是(下)凸函数的充分必要条件是:对 I 内的点组:$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{n-1}\geqslant x_n$,有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(x_k)\geqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k\Big)\ (n\geqslant 2).\qquad (*)$$

证明 (1) 反证法.假定存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$\varepsilon_0>0$,对任意的 $\delta>0$,均有 $y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,使得 $|f(y)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$,则对每个 $m\in\mathbf{N}$,存在 $y_m\in(x_0-1/m,x_0+1/m)$,$|f(y_m)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$.由于$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(y_m)=f(y_m)(m\in\mathbf{N})$,故存在 n_m,使得

$$|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|<\varepsilon_0/2.$$

从而可选取$\{n_m\}$:$n_1<n_2<\cdots<n_m<\cdots$,而定义

$$x_n=y_m(n_{m-1}<n\leqslant n_m)\quad(n\in\mathbf{N}),$$

易知 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.然而因为对每个 $m\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}|f_{n_m}(x_{n_m})-f(x_0)|&=|f_{n_m}(y_m)-f(x_0)|\\ &\geqslant|f(x_0)-f(y_m)|-|f(y_m)-f_{n_m}(y_m)|>\varepsilon_0-\varepsilon_0/2=\varepsilon_0/2.\end{aligned}$$

这导致矛盾.证毕.

(2) 必要性.设 I 中三个点 $x_1>x_2>x_3$,可写成$(0<\lambda<1)x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$,则 $f(x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$,且有

$$f(x_1-x_2+x_3)=f[(1-\lambda)x_1+x_3]\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_3).$$

将上两式相加可得 $f(x_2)+f(x_1-x_2+x_3)\leqslant f(x_1)+f(x_3)$(此式对 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3$ 也真,注意 f 的连续性).又若取值 $x_3=0$,则由 $f(0)=0$ 知 $f(x_1-x_2)\leqslant f(x_1)-f(x_2)$,即式$(*)$对 $n=2,3$ 真.

现在假定式$(*)$对 $n=m\geqslant 2$ 为真,则对 $n=m+2$:$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{m+2}$,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k-1}f(x_k)&\geqslant f(x_1)-f(x_2)+\sum_{k=3}^{m+2}(-1)^{k-1}f(x_k)\\ &\geqslant f(x_1)-f(x_2)+f\Big(\sum_{k=3}^{m+2}(-1)^{k-1}f(x_k)\Big)\geqslant f\Big(\sum_{k=1}^{m+2}(-1)^{k-1}x_k\Big).\end{aligned}$$

根据归纳法，式(*)得证．

充分性．对 I 中的点 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$，由题设可知 $f(x_2)+f(x_1-x_2+x_3) \leqslant f(x_1)+f(x_3)$．现在取 $x_2=(x_1+x_3)/2$，即得 $f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}$．这说明 $f(x)$ 在 I 上是(下)凸函数．

3.3 闭区间上连续函数的重要性质

3.3.1 有界性、最值性

定理 3.3.1(有界性) 若 $f \in C([a,b])$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界．

推论 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且存在 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-} f(x)=B$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界．

定义 3.3.1 设 $f(x)$ 定义在区间 I 上，若有 $x_0 \in I$，使得对于一切 $x \in I$，都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的**最大(小)值**．

若存在点 $x=x_0$ 的一个邻域 $U(x_0)$，使得 $f(x_0) \geqslant f(x)$ $(x \in U(x_0))$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取到极大值，x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点．类似地，若有 $f(x_0) \leqslant f(x)$ $(x \in U(x_0))$，则称 $f(x_0)$ 与 x_0 为极小值以及极小值点．

定理 3.3.2 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值与最小值：

(1) 存在 $x_1 \in [a,b]$，使得 $\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=f(x_1) \geqslant f(x)$，$x \in [a,b]$；

(2) 存在 $x_2 \in [a,b]$，使得 $\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=f(x_2) \leqslant f(x)$，$x \in [a,b]$．

例 3.3.1 设 $f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续正值函数．若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$．

证明 反证法．假定结论不真，则存在 X，对任意的 $n \in \mathbf{N}$，必有点 $x_n > n$，使得

$$0 < f(x_n) \leqslant X \quad \text{或} \quad f(x_n) \in (0, X].$$

因为 $f(x)$ 连续，所以它在 $[0,X]$ 上是有界的．从而存在 M，使当 $f(x) \leqslant X$ 时，有 $f(f(x)) \leqslant M$．由此知，对每个 $n \in \mathbf{N}$，存在 $x_n > n$，有 $f(f(x_n)) \leqslant M$．这导致矛盾．

例 3.3.2 试证明下列命题：

(1) 设 $f \in C([a,b])$．若对任意的 $x \in [a,b]$，存在 $\bar{x} \in [a,b]$，使得 $|f(\bar{x})| \leqslant \frac{|f(x)|}{2}$，则存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0)=0$．

(2) 设 $f \in C([0,\infty))$，且满足方程

$$f(x) \cdot f(y) \leqslant xf(y/2)+yf(x/2) \qquad (x, y \geqslant 0),$$

则 $f(x) \leqslant x$ $(x \geqslant 0)$．

证明 (1) 注意到 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，可假定 $|f(x_0)|$ 为其最小值．但依

题设又有 $\bar{x}_0\in[a,b]$使得 $|f(\bar{x}_0)|\leqslant\dfrac{|f(x_0)|}{2}$,这只有 $f(x_0)=f(\bar{x}_0)=0$.

(2) (i) 因为当 $x=y$ 时,有 $f^2(x)\leqslant 2xf(x/2)$,所以 $f(x)\geqslant 0\ (x\geqslant 0)$.又在 $f(0)f(y)\leqslant yf(0)$中令 $y\to 0+$,可知 $f(0)=0$.

(ii) 若结论不真,即存在 $x_0>0$,使得 $f(x_0)>x_0$,则令 $F(x)=f(x)-x$,可知 $F(x_0)>0$. $F(x)$在$[0,x_0]$上具有最大值,不妨认定 x_0 就是 $F(x)$的最大值点,即 $F(x)\leqslant F(x_0)\ (0\leqslant x\leqslant x_0)$.由于

$$f^2(x_0)=[F(x_0)+x_0]^2\leqslant 2x_0 f\left(\frac{x_0}{2}\right)=2x_0\left[F\left(\frac{x_0}{2}\right)+\frac{x_0}{2}\right],$$

$$F^2(x_0)+2x_0F(x_0)\leqslant 2x_0F\left(\frac{x_0}{2}\right),$$

故可得 $F(x_0/2)>F(x_0)$,矛盾,证毕.

例 3.3.3　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$.若(a,b)中无 $f(x)$的极值点,则 $f(x)$在$[a,b]$上单调.

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$.若对任意的开区间(a,b),其值域 $f((a,b))$必是开区间,则 $f(x)$必单调.

证明　(1)易知 $f(x)$的最大、最小值点不能位于(a,b)内,因此不妨假定 $f(a)$是最小值,$f(b)$是最大值,此时 $f(x)$是递增的.事实上,若有(a,b)中点 $x_1<x_2$,使得 $f(x_1)>f(x_2)$,则易知在$[x_1,x_2]$上,$f(x_1)$是最大值,$f(x_2)$是最小值.再看$[a,x_1]$,则 $f(x_1)$是最大值,$f(a)$是最小值.由此得出 x_1 是 $f(x)$的极大值点,矛盾.

(2) 反证法.假定存在 $a<b<c$,使得 $f(a)<f(b)>f(c)$.则令 $f(x)$在区间$[a,c]$上的最大值为 $M=f(x_0)$,易知 $x_0\neq a$,$x_0\neq c$.由此可知值域 $f((a,c))$不是开区间,因为它包含 M,矛盾.证毕.

* **例 3.3.4**　设 $f(x)$定义在$[0,1]$上.若对任意的 $x\in[0,1]$以及 $\varepsilon>0$,均存在 $\delta>0$,使得

$$f(y)<f(x)+\varepsilon\quad(y\in[0,1],\ |y-x|<\delta),\tag{*}$$

(即 $f(x)$是半连续函数)则存在 $x_0\in[0,1]$,使得 $f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}$.

证明　(i) 给定的 $\varepsilon>0$,对$[0,1]$中的 x,记满足式(*)之 δ 为 δ_x,且令 $I_x=(x-\delta_x,x+\delta_x)$,则易知区间族$\{I_x\}$是$[0,1]$的一个开覆盖.从而存在有限子覆盖:

$$\{I_{x_i}\}\ (i=1,2,\cdots,n),\qquad \bigcup_{i=1}^{n}I_{x_i}\supset[0,1].$$

若令 $K=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)+\varepsilon\}$,则 $f(x)$在$[0,1]$上有上界.

(ii) 记 $f(x)$在$[0,1]$上的上确界为 M,易知存在$[0,1]$中的点列$\{x_n\}$,使得 $f(x_n)\to M\ (n\to\infty)$.取子列$\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k}\to x_0\in[0,1]\ (k\to\infty)$,又知存在 N_0,使得

$$f(x_{n_k})<f(x_0)+\varepsilon,\qquad M<f(x_{n_k})+\varepsilon\quad(k\geqslant N_0).$$

因此,我们有 $f(x_0)\leqslant M<f(x_0)+\varepsilon$.根据 ε 的任意性,导出 $f(x_0)=M$.

* **例 3.3.5**　设 $f\in C([0,1])$且 $f(0)=0$,则可作在$[0,1]$上连续的上凸函数 $g(x)$: $g(0)=0$, $g(x)\geqslant f(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

证明　令 $M=\max\limits_{[0,1]}\{|f(x)|\}$,并取$\{x_n\}$:$x_0=1$,$0<x_n<x_{n-1}/3$,使其满足$|f(x)|<M/2^n$($0<x<x_n$,$n\in\mathbf{N}$).现在作函数 $g:[0,1]\to[0,1]$:$g(0)=0$,$g(x)=t\dfrac{M}{2^n}+(1-t)\dfrac{M}{2^{n-1}}$($t\in[0,1]$,$0<x=tx_{n+1}+(1-t)x_n$,$n=0,1,2,\cdots$),易知 $g(x)\geqslant f(x)$($x\in[0,1]$),且有

$$\frac{g(x_n)-g(x_{n+1})}{x_n-x_{n+1}}=\frac{M/2^n}{x_n-x_{n+1}}>\frac{M/2^{n-1}}{x_n-x_{n+1}}=\frac{g(x_{n-1})-g(x_n)}{x_{n-1}-x_n}.$$

$g(x)$是下凸函数.

3.3.2　中(介)值性

定理 3.3.3　设 $f\in C([a,b])$,若有 $f(a)f(b)<0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

推论(介值性)　设 $f\in C([a,b])$,且 $f(a)\neq f(b)$.若值 y_0 位于 $f(a)$与 $f(b)$之间,则存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=y_0$.即$[a,b]$上的连续函数具有介值性.

例 3.3.6　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$.若 f 存在反函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上单调.若 $f(x)$在$[a,b]$上具有介值性,则 $f\in C([a,b])$.

(3) 设 $f(x)$定义在(a,b)上.若对任意的 $x\in(a,b)$,均存在极限$\lim\limits_{t\to x}f(t)$,且又具有介值性(即对任意的 $f(x_1)$,$f(x_2)$(x_1,$x_2\in(a,b)$)之间的值 y,存在 x_1,x_2 之间的点 x,使得 $f(x)=y$),则 $f\in C((a,b))$.

证明　(1) 不妨设 $f(a)<f(b)$且取 $x\in(a,b)$.

(i) 若 $f(x)>f(b)$,则存在 t:$a<t<x$,使得 $f(t)=f(b)$,矛盾.

(ii) 若 $f(x)<f(a)$,则存在 $x<s<b$,使得 $f(s)=f(a)$,矛盾.

因此,$f(a)<f(x)<f(b)$($x\in[a,b]$).

现在,对于 $a<x_1<x_2<b$,若有 $f(x_1)>f(x_2)$,则存在 x_3:$x_2<x_3<b$,使得 $f(x_3)=f(x_1)$,矛盾.即必有 $f(x_1)<f(x_2)$.综合以上所述,结论成立.

(2) 不妨设 $f(x)$递增.反证法.若结论不真,即存在 $x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的不连续点,则有 $f(x_0-)\leqslant f(x_0)<f(x_0+)$或 $f(x_0-)<f(x_0)\leqslant f(x_0+)$.易知,不论哪种情形,都与 $f(x)$的介值性矛盾.

(3) 任取 $x_0\in(a,b)$,且令$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.若 $f(x_0)>A$,则存在 B:$f(x_0)>B>A$.而对 $\varepsilon=B-A$,存在 $\delta>0$,我们有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon=B,\qquad 0<|x-x_0|<\delta.$$

取 x_1:$0<|x_1-x_0|<\delta$,$f(x_1)<B<f(x_0)$,则在 x_1 与 x_0 之间 $f(x)$的取值违反介值性.因此 $f(x_0)\leqslant A$.

类似地,若 $f(x_0)<A$ 也不行,故 $f(x_0)=A$,即在 $x=x_0$ 处 $f(x)$连续.

例 3.3.7　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,1])$.若值域 $R(f)\subset[0,1]$,则存在 $\xi\in[0,1]$,使得 $f(\xi)=\xi$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$.若 $f(a)=f(b)$,则在$[a,b]$中存在 c,d,$d-c=(b-a)/2$,使

得 $f(c)=f(d)$.

(3) 设 $f\in C([0,1])$.若 $f(0)=f(1)$,则存在 α,β:$0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$,$\beta-\alpha=1/5$,使得 $f(\alpha)=f(\beta)$.

(4) 设 $f\in C([a,b])$,$x_i\in[a,b]$($i=1,2,\cdots,n$).则存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)/n$.

证明　(1) 令 $F(x)=f(x)-x$($0\leqslant x\leqslant 1$),则由 $F(1)=f(1)-1<0$(否则取 $\xi=1$),$F(0)=f(0)>0$(否则取 $\xi=0$),可知存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

(2) 令 $F(x)=f(x+(b-a)/2)-f(x)$,则

$$F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a),\qquad F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

由此知 $F\left(\frac{a+b}{2}\right)=-F(a)$.从而存在 $\xi\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$,使得 $F(\xi)=f\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)-f(\xi)=0$,即 $f\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)=f(\xi)$.令 $\xi=c$,$d=\xi+(b-a)/2$,则 $d-c=(b-a)/2$,$f(d)=f(c)$.

(3) 令 $F(x)=f(x+1/5)-f(x)$,则有

$$\begin{aligned}&F(0)=f(1/5)-f(0), &&f(1/5)=f(2/5)-f(1/5),\\ &F(2/5)=f(3/5)-f(2/5), &&f(3/5)=f(4/5)-f(3/5),\\ &F(4/5)=f(1)-f(4/5).\end{aligned}$$

由此,相加得 $F(0)+F(1/5)+F(2/5)+F(3/5)+F(4/5)=0$.

(i) 若有 i_0($i_0=1,2,3,4,0$),使得 $F(i_0/5)=0$,则取 $\alpha=i_0/5$,$\beta=(i_0+1)/5$,即得所证.

(ii) 若对一切 $i=1,2,3,4,0$,均有 $F(i/5)\neq 0$,则必存在 i_1,i_2($i_1\neq i_2$),使得 $F(i_1/5)>0$,$F(i_2/5)<0$.从而知存在位于 i_1 与 i_2 之间的 ξ,使得

$$0=F(\xi)=f(\xi+1/5)-f(\xi).$$

因此,取 $\alpha=\xi$,$\beta=\xi+1/5$ 即可得证.

(4) 因为我们有

$$\begin{aligned}\min_{[a,b]}\{f(x)\}&\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\\&\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}\leqslant\max_{[a,b]}\{f(x)\},\end{aligned}$$

所以存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)/n$.

例 3.3.8　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上以 T 为周期的连续函数,则存在 $\xi\in(-\infty,\infty)$,使

得 $f(\xi+T/2)=f(\xi)$.

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且以1为周期,则存在 ξ:$f(\xi+\pi)=f(\xi)$.

(3) 设 $f\in C([0,1])$,$n\in\mathbf{N}$. (i) 若 $f(0)=f(1)$,则存在 $\xi_n\in[0,1/n]$,使得

$$f(\xi_n+1/n)=f(\xi_n),\qquad(n=1,2,\cdots).$$

(ii) 若 $f(0)=0$,$f(1)=1$,则存在 $\xi_n\in(0,1)$,使得

$$f(\xi_n+1/n)=f(\xi_n)+1/n\qquad(n=1,2,\cdots).$$

证明 (1) 令 $F(x)=f(x+T/2)-f(x)$,则由

$$F(0)=f(T/2)-f(0),\qquad F(T/2)=f(0)-f(T/2),$$

可知 $F(0)=-F(T/2)$.故根据连续函数介值定理,存在 $\xi\in[0,T/2]$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi+T/2)-f(\xi)=0$.

(2) 取[0,1]中的 x_1,x_2,使其成为 $f(x)$的最小、最大值点.再令 $F(x)=f(\pi+x)-f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$,易知 $F(x_1)\geqslant 0$,$F(x_2)\leqslant 0$.由此可知存在 $\xi\in[0,1]$,使得 $F(\xi)=0$.证毕.

(3) (i) 令 $F(x)=f(x+1/n)-f(x)(0\leqslant x\leqslant 1-1/n)$,则

$$\begin{aligned}
&F(0)=f(1/n)-f(0),\\
&F(1/n)=f(2/n)-f(1/n),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F(1-2/n)=f(1-1/n)-f(1-2/n),\\
&F(1-1/n)=f(1)-f(1-1/n),
\end{aligned}$$

相加得 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}F(k/n)=f(1)-f(0)=0$.这说明或者等式中有两项反号,或者每项皆为0.证毕.

注 上述断言中的 $1/n$ 不能换成任意的 $\delta>0$ 且 $\delta\neq 1/n$.事实上,令 $\varphi\in C(\mathbf{R})$,且 $\varphi(0)=0$,$\varphi(1)=A\neq 0$,并以 δ 为周期,再作 $f(x)=\varphi(x)-Ax$,则 $f(0)=f(1)$且有

$$f(x+\delta)=\varphi(x)-Ax+A\delta\neq\varphi(x)-Ax=f(x).$$

(ii) 作 $F(x)=f(x+1/n)-f(x)-1/n$,我们有

$$\begin{aligned}
&F(0)=f(1/n)-1/n,\\
&F(1/n)=f(2/n)-f(1/n)-1/n,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F((n-1)/n)=f(n/n)-f((n-1)/n)-1/n.
\end{aligned}$$

相加得 $F(0)+F(1/n)+\cdots+F((n-1)/n)=1-1=0$.从而可知

(A) 对任意的 $k=0,1/n,\cdots,(n-1)/n$,有 $F(k/n)=0$.此时取 $\xi=k/n$ 即可得证.否则有

(B) 存在 k_1,k_2,使得 $F(k_1/n)>0$,$F(k_2/n)<0$.此时就存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F(\xi)=0$.

例 3.3.9 设 $f\in C([0,n])$,且 $f(0)=f(n)$,则存在 $x_k, x_k'(k=1,2,\cdots,n-1)$:$x_k-x_k'=k$ 或 $x_k-x_k'=n-k$,使得 $f(x_k)=f(x_k')(k=1,2,\cdots,n-1)$.

证明 以周期 $T=n$ 在$[0,\infty)$上延拓 $f(x)$,则对任意 k,令 $F(x)=f(x+k)-f(x)(x\geqslant 0)$,存在 $x_0\in[0,kn]$,使 $F(x_0)=0$.事实上,若 $F(0)=0$,则取 $x_0=0$.若 $F(0)>0$,此时如果 $F(k)>0(k=0,1,2,\cdots,nk-k)$,则

$$f(0)<f(k)<f(2k)<\cdots<f(nk)=f(0).$$

这一矛盾说明存在 j_0:$F(j_0)>0$,$F(j_0+1)\leqslant 0$.因为 $F(x)$连续,所以有 $x_0\in(j_0,j_0+1]$,使 $F(x_0)=0$,即 $f(x_0+k)=f(x_0)$.

现在,首先假定有某个 l:$1\leqslant l\leqslant k$,使得 $x_0\in[(l-1)n,ln-k]$.则由周期性知,$f(x_0)=f[x_0-(l-1)n]$,以及 $f(x_0+k)=f(x_0-(l-1)n+k)$.故取

$$x_k=x_0-(l-1)n,\qquad x_k'=x_0+(l-1)n+k.$$

其次,若 $x_0\in[ln-k,ln]$,则 $x_0+k\in[ln,(l+1)n]$,以及 $f(x_0-(l-1)n)=f(x_0)=f(x_0+k)=f(x_0-ln+k)$.故可取 $x_k=x_0-(l-1)n$,$x_k'=x_0-ln+k$.

例 3.3.10 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,则对任意区间(a,b),存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)\qquad(p,q>0).$$

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且其函数值变号,则存在等差数组 $a<b<c$,使得

$$f(a)+f(b)+f(c)=0.$$

证明 (1) 作 $F(x)=(p+q)f(x)-pf(a)-qf(b)$,则由 $F(a)F(b)=-pq[f(a)-f(b)]^2<0$ 即可得证.

(2) 首先,设在点 x_1 处有 $f(x_1)>0$,则由 $f(x)$的连续性可知,存在邻域 $U(x_1)$,使得 $f(x)>0(x\in U(x_1))$.此时,易知在 $U(x_1)$内可找到等差数 $a_1<b_1<c_1$,使得 $f(a_1)+f(b_1)+f(c_1)>0$.

其次,设 $f(x_2)<0$,同理在 $U(x_2)$中可取到等差数 $a_2<b_2<c_2$,使得

$$f(a_2)+f(b_2)+f(c_2)<0.$$

现在,对 $t\in[0,1]$,取等差数

$$a(t)=a_1(1-t)+a_2t,\quad b(t)=b_1(1-t)+b_2t,\quad c(t)=c_1(1-t)+c_2t,$$

且作 $F(t)=f(a(t))+f(b(t))+f(c(t))$,则 $F(t)$连续,且有 $F(0)>0$,$F(1)<0$.由此即知存在 $t_0\in(0,1)$,$F(t_0)=0$.即得所证.

例 3.3.11 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$定义在(c,d)上,$g\in C([a,b])$且值域 $R(g)\subset(c,d)$.若 $f[g(x)]$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在 $R(g)$上连续.

(2) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上,若 $F(x)=e^xf(x)$,$G(x)=e^{-f(x)}$都在$(-\infty,\infty)$上递增,则 $f\in C((-\infty,\infty))$.

(3) 设 $f,g\in C([0,1])$,值域 $R(f)$,$R(g)$等于$[0,1]$,则存在 $x_0\in[0,1]$,使得

$$g[f(x_0)] = f[g(x_0)].$$

证明 (1)反证法.假定 $f(y)$在 $y_0 = g(x_0)$处不连续,则存在 $\varepsilon_0 > 0$,以及单调且互异值列$\{g(x_n)\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$, $|f[g(x_n)] - f[g(x_0)]| \geqslant \varepsilon_0$.

记$[\alpha,\beta]$为以 x_1, x_0 为端点的闭区间,则根据 $g(x)$的连续性可知,存在

$$x'_n \in [\alpha,\beta], \qquad g(x'_n) = g(x_n) \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

因为$\{x'_n\}$是有界列,所以存在子列$\{x'_{n_k}\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x'_0, \qquad \lim_{k\to\infty} g(x'_{n_k}) = g(x'_0).$$

显然,$g(x'_0) = g(x_0)$.从而有$|f[g(x'_{n_k})] - f[g(x'_0)]| \geqslant \varepsilon_0$.这与假设矛盾.

(2)对于点 $x_0 \in (-\infty,\infty)$,当 $x > x_0$ 时,由 $f(x) = -\ln G(x)$可知,$f(x)$递减,故得 $f(x) \leqslant f(x_0)$.由此易知$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \leqslant f(x_0)$.此外,由于 $F(x) = e^x f(x)$递增,易知$\lim\limits_{x\to x_0} F(x) \geqslant F(x_0)$.从而得

$$f(x_0) = \frac{F(x_0)}{e^{x_0}} \leqslant \frac{F(x_0+)}{e^{x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{e^x} = f(x_0+).$$

由此可得 $f(x_0+) = f(x_0)$,即右连续.类似地可证左连续.

(3)考察 $\Phi(x) = g[f(x)] - f[g(x)]$.假定 $g(x)$在 $x_1 \in [0,1]$处取到最大值1,且设 $f(x_2) = x_1$,则 $\Phi(x_2) = g[f(x_2)] - f[g(x_2)] = 1 - f[g(x_2)] \geqslant 0$.

若 $\Phi(x_2) = 0$,则取 $x_0 = x_2$ 即得所证.否则就有 $\Phi(x_2) > 0$.

再假定 $f(x)$在 $x_3 \in [0,1]$处取到最大值1,且设 $g(x_4) = x_3$,则易知 $\Phi(x_4) \leqslant 0$.若 $\Phi(x_4) = 0$,则取 $x_0 = x_4$ 即得所证.否则就有 $\Phi(x_4) < 0$.

这样,从 $\Phi(x_2) > 0$, $\Phi(x_4) < 0$ 可知,存在 $x_0 \in [0,1]$,使得 $\Phi(x_0) = 0$.证毕.

例 3.3.12 试证明下列命题:

(1)设 $f \in C([0,1])$, $g \in C([0,1])$,且 $R(f) \subset [0,1]$, $R(g) \subset [0,1]$.若 $f[g(x)] = g[f(x)]$ $(x \in [0,1])$,则存在 $\xi \in [0,1]$,使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

(2)设 $f \in C((-\infty,\infty))$.若有 $f[f(x)] = x$, $x \in (-\infty,\infty)$,则存在 $\xi \in (-\infty,\infty)$,使得 $f(\xi) = \xi$.

证明 (1)反证法.假定对一切 $x \in [0,1]$, $f(x) - g(x) \neq 0$,不妨认定 $f(x) - g(x) > 0$,则对某个 $\delta > 0$,有 $f(x) > g(x) + \delta$(因为连续性).从而得

$$f[f(x)] > g[f(x)] + \delta = f[g(x)] + \delta > g[g(x)] + 2\delta.$$

根据归纳法可知,其 n 次复合满足 $f^{\langle n\rangle}(x) > g^{\langle n\rangle}(x) + n\delta$.但当 $n\delta > 1$ 时,上式不能成立,故得所证.

(2)反证法.若对任意的 $x \in (-\infty,\infty)$,均为 $f(x) \neq x$,则不妨假定 $f(x) > x$ $(-\infty < x < \infty)$,从而知 $f[f(x)] > f(x)$.由此得 $f[f(x)] > x$,这与题设矛盾.

例 3.3.13 试证明下列问题:

(1)设 $f \in C([0,1])$, $g \in C([0,1])$,且均为非负函数.若有

$$\sup_{[0,1]}\{f(x)\}=\sup_{[0,1]}\{g(x)\},$$

则存在 $\xi\in[0,1]$,使得 $f^2(\xi)+3f(\xi)=g^2(\xi)+3g(\xi)$.

(2) 设 $f(x)$是(a,∞)上的有界连续函数,则对任意的 T,皆存在$\{x_n\}$:$x_n\to+\infty(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0$.

证明 (1) 令 α,β各为$f(x),g(x)$在$[0,1]$中的最大值点,且记 $f(\alpha)=g(\beta)=M$,并考察 $F(x)=f(x)-g(x)$.因为有

$$F(\alpha)=M-g(x)\geqslant 0,\qquad F(\beta)=f(\beta)-M\leqslant 0,$$

所以存在 $\xi\in[0,1]$,使得 $f(\xi)=g(\xi)$.证毕.

(2) 不妨设 $T>0$(否则,用 $x+T=t$)看 $f(x+T)-f(x)$:

(i) 若存在 X,使得当 $x\geqslant X$ 时,$f(x+T)-f(x)$不变号.此时$\{f(X+nT)\}$是单调数列.而由 $f(x)$的有界性可知,存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(X+nT)=l$.因此有

$$\lim_{n\to\infty}[f(X+(n+1)T)-f(X+nT)]=l-l=0.$$

从而取 $x_n=X+nT$,即得所证.

(ii) 若没有(i)的情形,即对任意的 X',必有 $X''>X'$,使得 $f(X''+T)-f(X'')=0$.此时,易知存在 $x_n\to+\infty(n\to\infty)$,使得 $f(x_n+T)-f(x_n)=0(n\in\mathbf{N})$.

例 3.3.14 试证明下列命题:

(1) 设 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$.

(i) 若 a_n 与 a_0 的符号相反,则 $P_n(x)=0$ 至少有一个正根.

(ii) 若 n是偶数,则 $P_n(x)=0$ 还有一个负根.

(2) 设 $P_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n>2)$,则

(i) 方程 $P_n(x)-1=0$ 在$[1/2,1]$内有唯一实根 x_n.(ii) $x_n\to\dfrac{1}{2}(n\to\infty)$.

证明 (1) (i) 易知对充分大的正值 x,$P_n(x)$与 a_n 同号,而 $P_n(0)$与 $P_n(x)$反号,故 $P_n(x)=0$ 有正根.(ii) 易知对其绝对值很大的负值 x,$P_n(x)$与 a_n 同号,故 $P_n(x)=0$ 有负根.

(2) (i) 令 $Q_n(x)=P_n(x)-1$,则有

$$Q_n(1/2)=\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)-1<0,$$

$$Q_n(1)=1+1+\cdots+1-1=n-1>0.$$

由此知存在 $x_n\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得 $Q_n(x_n)=0$.

(ii) 令 $a_m=\dfrac{m+1}{2m}\to\dfrac{1}{2}(m\to\infty)$,对 $m\geqslant 2$,有

$$0<\lim_{n\to\infty}Q_n\left(\frac{m+1}{2m}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(m+1)/2m-((m+1)/2m)^{n+1}}{1-(m+1)/2m}-1\right]$$
$$=\frac{m+1}{m-1}-1=\frac{2}{m-1}.$$

从而知存在 N,当 $n>N$ 时,得到$\frac{1}{2}<x_n<\frac{m+1}{2m}$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

例 3.3.15 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R})$.若存在自然数 n,使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n}=0,$$

则(i) 当 $n=2k+1$ 时,存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使得 $f(\xi)+\xi^n=0$.

(ii) 当 $n=2k$ 时,存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使得 $f(\xi)+\xi^n\leqslant f(x)+x^n\ (x\in\mathbf{R})$.

(2) 设 $f(x)$定义在$[0,1]$上,且有 $f(0)>0$,$f(1)<0$.若存在 $g\in C([0,1])$,使得 $F(x)=f(x)+g(x)$在$[0,1]$上递增,则存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$.

(3) 设 $f\in C([0,\infty))$,并作点集

$$E=\{\lambda:\text{存在}\{x_n\},\lim_{n\to\infty}x_n\to+\infty,\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda\}.$$

若存在 $a,b\in E(a<b)$,则$[a,b]\subset E$.

证明 (1) 令 $F(x)=f(x)+x^n\ (x\in\mathbf{R})$,我们有

(i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{2k+1}[f(x)/x^{2k+1}+1]=\begin{cases}+\infty,\\-\infty.\end{cases}$由此知存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使得 $F(\xi)=0$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{2k}[f(x)/x^{2k}+1]=\begin{cases}+\infty,\\+\infty.\end{cases}$由此知存在极小值点 $\xi\in\mathbf{R}$,使得 $F(\xi)\leqslant F(x)\ (x\in\mathbf{R})$.

(2) 由题设知对 $x\in[0,1]$,存在极限值:

$$f(x+)\triangleq\lim_{h\to0+}f(x+h),\qquad f(x-)\triangleq\lim_{h\to0-}f(x+h).$$

又由 $\lim\limits_{y\to x-}g(y)=\lim\limits_{y\to x+}g(y)=g(x)$可推得

$$f(x-)=\lim_{y\to x-}f(y)\leqslant f(x+)=\lim_{y\to x+}f(y).$$

(i) 必有 $x_0\in(0,1)$,使得 $f(x_0)\geqslant0$.实际上,如果对一切 $x\in(0,1)$,均有 $f(x)<0$,那么 $f(0+)\leqslant0$.但根据 $F(0)\leqslant f(x)+g(x)(0<x\leqslant1)$可知

$$f(0)+g(0)\leqslant f(0+)+g(0),\qquad f(0)\leqslant f(0+)\leqslant0.$$

这导致矛盾.

(ii) 作点集 $E=\{x\in(0,1):f(x)>0\}$,且记 $\bar{x}=\sup E$,则由 $f(1)<0$ 可知 $\bar{x}<1$,且 $f(\bar{x})=0$.这是因为否则就存在$\{x_n\}\subset(0,1)$:$x_n>\bar{x}$,$f(x_n)\leqslant0$,而使得

$$f(\bar{x})\leqslant f(\bar{x}+)\leqslant0,\qquad \text{即 } f(\xi)=0,\xi=\bar{x}.$$

(3) 取 $c: a<c<b$,以及$\{x_n\}$,$\{y_n\}$:$x_n\to+\infty$,$y_n\to+\infty(n\to\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=a,\qquad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=b.$$

不妨假定 $f(x_n)<c$,$f(y_n)>c(n\in\mathbf{N})$.易知对每个 n,可选 $\xi_n: x_n<\xi_n<y_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=c$.从而有$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$,即 $c\in E$,证毕.

注 设 $f(x)$定义在区间 I 上,若对 I 中任意的两点 $x_1, x_2: x_1<x_2$,l 是位于 $f(x_1)$与 $f(x_2)$之间的任意值,均存在 $\bar{x}: x_1<\bar{x}<x_2$,使得 $f(\bar{x})=l$,则称 $f(x)$在 I 上具有中(介)值性,也称 $f(x)$在 I 上 Darboux 连续,或简称 D 连续.下述性质成立:

1. 若 $f(x)$,$g(x)$在$(-\infty,\infty)$上 D 连续,则 $F(x)=f[g(x)]$在$(-\infty,\infty)$上 D 连续.

证明 设 $x_1<x_2$,以及 $F(x_1)<l<F(x_2)$,记 $y_1=g(x_1)$,$y_2=g(x_2)$,且假定 $y_1<y_2$,即有 $f(y_1)<l<f(y_2)$.则由 f 之 D 连续性,可知存在 $\bar{y}: y_1<\bar{y}<y_2$,使得 $f(\bar{y})=l$.此外,又由 $g(x_1)=y_1<\bar{y}<y_2=g(x_2)$可知,存在 $\bar{x}: x_1<\bar{x}<x_2$,使得 $g(\bar{x})=\bar{y}$.最后得 $f[g(\bar{x})]=F(\bar{x})=l$.

2. 若 $f(x)$在 I 上 D 连续,则 $|f(x)|$在 I 上也 D 连续.

证明 设 I 中两点 $x_1<x_2$,又假定 $|f(x_1)|<l<|f(x_2)|$.易知只需看 $f(x_1)<0$,$f(x_2)>0$ 的情形,此时有

$$0<-f(x_1)<l<f(x_2),\qquad f(x_1)<-f(x_1)<l<f(x_2).$$

由此即知存在 $\bar{x}: x_1<\bar{x}<x_2$,使得 $f(\bar{x})=l$.

3. 设 $|f(x)|$在 $x=x_0$ 处连续.若 $f(x)$是 D 连续的,则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

证明 只需看 $f(x_0)>0$ 的情形,并采用反证法.假定 $f(x)$在 x_0 处不连续,则存在 $\varepsilon_0: 0<\varepsilon_0<f(x_0)$,以及$\{x_n\}$:$x_n\to x_0(n\to\infty)$,使得 $f(x_n)<f(x_0)-\varepsilon_0(n\in\mathbf{N})$,且这里的 $f(x_n)$可认定为负值,否则与 $|f(x)|$在 $x=x_0$ 处连续矛盾.然而此时,注意到 f 的 D 连续性,可对任意的 l_n: $f(x_n)<0<l_n<f(x_0)-\varepsilon_0<f(x_0)$,均有位于 x_n 与 x_0 之间的点 $\bar{x}_n$,使得 $f(\bar{x}_n)=l_n$.从而导出

$$\lim_{n\to\infty}\bar{x}_n=x_0,\qquad |f(\bar{x}_n)|=f(\bar{x}_n)<|f(x_0)|-\varepsilon_0.$$

这与 $|f(x)|$在 $x=x_0$ 处连续矛盾,证毕.

4. 一切 D 连续函数不构成线性空间.如设

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)-g(x)$不是 D 连续函数.

5. (i) 任一定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数均是两个 D 连续函数之差;(ii) 存在 D 连续函数 $f(x)$,但没有原函数;(iii) 设 $f:[0,1]\to[0,1]$,则存在 D 连续函数列$\{f_n(x)\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(x\in[0,1])$;(iv) 存在 D 连续函数列$\{f_n(x)\}$,且在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$,但 $f(x)$不是 D 连续函数.

3.3.3 一致连续性

定义 3.3.2 设 $f(x)$是定义在区间 I(包括无穷区间)上的函数.若对任意的 $\varepsilon>0$,存在(只与 ε有关的)$\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对于 I 中的任意两点 x', x'',只要 $|x'-x''|<\delta$,就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,则称 $f(x)$是 I 上的**一致连续函数**,或说 $f(x)$在 I 上**一致连续**.

注 1 若 $f(x)$在区间 I 上一致连续,则 $f(x)$在 I 中的每一点上均连续.

注 2 为使 $f(x)$在区间 I上一致连续,其理想模式是满足不等式

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''|^{\alpha},\quad x',x''\in I,$$

其中 $\alpha>0$(此时,称 $f(x)$在 I上满足 α **阶的 Lipschitz 条件**,简记为 $f\in \mathrm{Lip}\alpha(I)$).实际上,此时,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=(\varepsilon/M)^{1/\alpha}$,则当 $|x'-x''|<\delta$时就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.不过,在 I上一致连续的函数不一定属于 $\mathrm{Lip}\alpha$.例如:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[0,1]$上是一致连续的,但不属于 $\mathrm{Lip}1([0,1])$.(取 $x_n=\mathrm{e}^{-n}$,则 $|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{1}{n}$.对 $M>0$,有 $M|x_n-0|=M/2^n$.因为 $2^n\geqslant n(n-1)/2$,所以对充分大的 n,有$\dfrac{M}{2^n}\leqslant\dfrac{2M}{n(n-1)}<\dfrac{1}{n}$.由此知 $|f(x_n)-f(0)|>M|x_n-0|$.)

定理 3.3.4 $f(x)$在区间 I(包括$[a,\infty)$)上一致连续的充分且必要的条件是:对 I中满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 的任意两个数列$\{x_n'\}$,$\{x_n''\}$,必有$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0$.

注 设 $f\subset C((0,1))$,且$\{x_n\}\subset(0,1)$是 Cauchy 列,但$\{f(x_n)\}$可以不是 Cauchy 列.例如:$f(x)=\sin(1/x)/2$,$x\in(0,1)$,则$\{2/n\pi\}$是 Cauchy 列,$\{f(2/n\pi)\}$不是.

定理 3.3.5 若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

定理 3.3.6 设 $f(x)$在(a,b)上连续,则 $f(x)$在(a,b)上一致连续的充要条件是:存在极限

$$\lim_{x\to a+}f(x),\quad \lim_{x\to b-}f(x).$$

注 1 若 $f(x)$在(a,b)上一致连续,则 $f(x)$可连续地延拓到$[a,b]$上,且 $f(x)$是有界的.

注 2 若 $f(x)$,$g(x)$在(a,b)上均一致连续,则乘积 $\Phi(x)=f(x)g(x)$在(a,b)上一致连续.但改(a,b)为$[a,\infty)$,则结论不一定成立(如 $x\sin x$).而当两者都是有界时成立;对于一致连续函数,其反函数可以不一致连续.例如$[1,\infty)$上的 $y=\ln x$.若 $f(x)$在(c,d)上一致连续,$g(x)$在(a,b)上一致连续,且 $c<g(x)<d$,则 $f[g(x)]$在(a,b)上一致连续.

例 3.3.16 判别下列函数在指定区间上的一致连续性:

(1) $f(x)=\ln x$,$(0,1]$.　　(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,$(0,1]$.

(3) $f(x)=\sin^2 x$,$[0,\infty)$.　　(4) $f(x)=\sin x^2$,$[0,\infty)$.

(5) $f(x)=\sqrt{x}$,$[0,\infty)$.　　(6) $f(x)=\mathrm{e}^x$,$[0,\infty)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$,所以不一致连续.

(2) 因为存在 $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x/x=1$,所以是一致连续的.

(3) 因为 $|\sin^2 x_1-\sin^2 x_2|=|\sin x_1-\sin x_2||\sin x_1+\sin x_2|\leqslant 2|x_1-x_2|$,所以是一致连续的,且属于 $\mathrm{Lip}1([0,\infty))$.

(4) 取 $x_n'=\sqrt{2n\pi}$,$x_n''=\sqrt{2n\pi+\pi/2}$时,我们有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,但 $|f(x_n')-f(x_n'')|=1$.故不一致连续.

(5) 因为 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant\sqrt{|x_1-x_2|}$,所以是一致连续的.

(6) 取 $x_n'=\ln n, x_n''=\ln(n+1)$时,我们有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,但$|f(x_n')-f(x_n'')|=1$.故不一致连续.

例 3.3.17　试论下列函数 $f(x)$在指定区间上的一致连续性:

(1) $f(x)=e^x\cos(1/x),(0,1]$.　　(2) $f(x)=e^{1/x},(0,1)$.

(3) $f(x)=\cos x\cdot\cos(\pi/x),(0,1)$.　　(4) $f(x)=x^2,(0,\infty)$.

(5) $f(x)=|\sin x|/x,(-1,1)$.　　(6) $f(x)=\sin(\sin x),[0,\infty)$.

(7) $f(x)=x\sin(1/x),(0,\infty)$.　　(8) $f(x)=\sin(x\sin x),[0,\infty)$.

解　(1) 因为对点列 $x_n'=1/2n\pi(n\in\mathbf{N})$以及 $x_n''=1/[(2n+1)\pi](n\in\mathbf{N})$,有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=e^{1/[2n\pi]}+e^{1/[(2n+1)\pi]}\to 2\quad(n\to\infty),$$

所以 $f(x)$在$(0,1]$上不一致连续.

(2) 因为对点列$\{1/\ln n\},\{1/\ln(n+1)\}$,有

$$\left|f\left(\frac{1}{\ln n}\right)-f\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right|=|n-(n+1)|=1,$$

所以不一致连续.

(3) 因为对点列$\{1/2n\},\{1/(2n+1)\}$,有

$$|f(1/2n)-f(1/(2n+1))|=\cos(1/2n)+\cos(1/(2n+1))\to 2\quad(n\to\infty),$$

所以不一致连续.

(4) 令 $\varepsilon_0=1$,对任意的 $\delta>0$,可取 $0<x_1,x_2<+\infty$,使得

$$|x_1-x_2|=\delta/2,\qquad |x_1+x_2|>2/\delta.$$

从而我们有$|x_1^2-x_2^2|=|x_1-x_2||x_1+x_2|>1$.这说明 $f(x)=x^2$ 在$(0,\infty)$上不一致连续.

(5) 因为对于 $x_n'\to 0-(n\to\infty)$以及 $x_n''\to 0+(n\to\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=-1,\qquad \lim_{n\to\infty}f(x_n'')=1,$$

所以存在 N,使得$|f(x_n')-f(x_n'')|>1(n>N)$.这说明 $f(x)$在$(-1,1)$上不一致连续.

(6) 因为$|\sin(\sin x_1)-\sin(\sin x_2)|\leqslant 2\left|\sin\dfrac{\sin x_1-\sin x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|$,所以 $f\in \mathrm{Lip}1([0,\infty))$,更一致连续.

(7) 因为 $f(x)\to 0(x\to 0+)$,而且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$,所以 $f(x)$是一致连续的.

(8) 因为

$$\begin{aligned}&\left|f\left(2n\pi+\frac{1}{2n\pi}\right)-f(2n\pi)\right|\\=&\left|\sin\left(2n\pi\cdot\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\right)+\frac{1}{2n\pi}\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\right|\to\sin 1\qquad(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$不一致连续.

例 3.3.18 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$.若存在极限

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=l,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=L,$$

则 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

(2) 设 $f(x)$在$[a,\infty)$上一致连续,且 $g\in C([a,\infty))$.若有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$

则 $g(x)$在$[a,\infty)$上一致连续.

(3) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上,且在 $x=0$ 处连续,$f(0)=0$.若有

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\qquad x,y\in(-\infty,\infty),$$

则 $f(x)$一致连续.

证明 (1) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $A>0$,使得

$$|f(x)-L|<\varepsilon/2\quad(x\geqslant A),\qquad |f(x)-l|<\varepsilon/2\quad(x\leqslant -A).$$

由此知,对 $x_1,x_2\in[A,+\infty)$或 $x_1,x_2\in(-\infty,-A]$,均有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.又注意到 $f(x)$在$[-A-1,A+1]$上一致连续,即可得证.

(2) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/3,\qquad |x'-x''|<\delta.$$

又存在 $A>a$,当 $x',x''>A$ 时,有

$$|f(x')-g(x')|<\varepsilon/3,\qquad |f(x'')-g(x'')|<\varepsilon/3.$$

从而当 $x',x''>A$ 且$|x'-x''|<\delta$时有

$$|g(x')-g(x'')|\leqslant|g(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-g(x'')|<\varepsilon.$$

再注意到 $g(x)$在$[a,A+1]$上的一致连续性,即可得证.

(3) 由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当$|x|<\delta$时,有$|f(x)|<\varepsilon$.因此,对$|t|<\delta$,可得

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant f(t)<\varepsilon,\qquad f(x)-f(x+t)\leqslant f(-t)<\varepsilon.$$

从而有$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$,即得所证.

例 3.3.19 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上一致连续,且有

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0,\quad x\in[0,\infty).$$

则$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=0$.

证明 对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得$|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,$|x-y|<\delta$.对$[0,1]$作分划:$x_i\in[0,1]$($i=1,2,\cdots,m$),使对任意的 $t\in[0,1]$,必存在 i,使得$|t-x_i|<\delta$.又由题设知,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,有$|f(x_i+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$($i=1,2,\cdots,m$).现在,对 $x>N+1$,存在 $n\geqslant N$,以及 i,使得$|x-x_i-n|<\delta$.因此,我们有

$$|f(x)|\leqslant|f(x_i+n)|+|f(x)-f(x_i+n)|<\varepsilon.$$

例 3.3.20 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$在$[1,\infty)$上一致连续，则存在 $M>0$，使得 $|f(x)|/x\leqslant M(x\geqslant 1)$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|+\varepsilon(x,y\in[a,b])$.

(3) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续，$f(0)=0$，则存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant 1+M|x|\quad(-\infty<x<\infty).$$

解 (1) 取 $\varepsilon=1$，则由题设知存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x)-f(x')|<1\qquad(|x'-x|<\delta).$$

现在对 $x\geqslant 1$，写成 $x=1+n\delta+r(n=0,1,\cdots;0\leqslant r<\delta)$，我们有

$$|f(x)|\leqslant|f(1)|+|f(x)-f(1)|\leqslant|f(1)|+(n+1),$$

$$\frac{|f(x)|}{x}\leqslant\frac{|f(1)+n+1|}{1+n\delta+r}\leqslant\frac{|f(1)|+2}{\delta}.$$

从而取 $M=(|f(1)|+2)/\delta$ 即可.

(2) 因为 $f(x)$在$[a,b]$上一致连续，所以对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\qquad|x-y|<\delta.$$

不妨设 $|f(x)|\leqslant M'(x\in[a,b])$，从而对 $|x-y|\geqslant\delta$ 的 x,y，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2M'\leqslant 2M'|x-y|/\delta.$$

现在取 $M=2M'/\delta$，即得所证.

(3) 依题设可知，存在 $\delta>0$，使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant 1(|x-y|\leqslant\delta)$. 记 $M=1/\delta$，且对任意的 $x>0$，令 $n_x=[x/\delta]$(整数部分)，我们有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x)-f(0)|\\&\leqslant|f(x)-f(n_x\delta)|+\sum_{i=1}^{n_x}|f(i\delta)-f((ci-1)\delta)|\\&\leqslant 1+n_x\leqslant 1+Mx.\end{aligned}$$

类似地可证 $x<0$ 时的情形.

例 3.3.21 试证明下列命题：

(1) 若 $f(x)$在$[1,\infty)$上属于 Lip1，则函数 $f(x)/x$ 在$[1,\infty)$上一致连续.

(2) $f(x)$在区间 I 上一致连续的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $l>0$，使得当 $x_1,x_2\in I,x_1\neq x_2$，且 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|>l$ 时可推知 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明 (1) 由题设知 $|f(x)-f(1)|\leqslant M'|x-1|(x\in[1,\infty))$，故可得 $|f(x)|\leqslant|f(1)|+M'|x-1|$. 从而存在 $M''>0$，使得

$$\frac{|f(x)|}{x}\leqslant\frac{|f(1)|}{x}+M'\frac{|x-1|}{x}\leqslant M''\qquad(x\in[1,\infty)).$$

此外,我们还有($x,y\in[1,\infty)$),

$$\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{|xf(y)-yf(x)|}{xy}=\frac{|xf(y)-xf(x)+xf(x)-yf(x)|}{xy}$$

$$\leqslant\frac{|f(y)-f(x)|}{y}+\frac{|x-y|}{y}\frac{|f(x)|}{x}\leqslant|f(y)-f(x)|+|x-y|M''$$

$$\leqslant M|y-x|+|x-y|M''\leqslant M'''|x-y|.$$

(这里假定 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$, $M'''=\max\{M,M''\}$.)

(2) 充分性.依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.下面指出:如果有 $x_1,x_2\in I$,且有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon$,则 $|f(x_1)-f(x_2)|/|x_1-x_2|\leqslant l$.

因为若 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon$,则 $|x_1-x_2|\geqslant\delta$.现在假定 $x_1<x_2$, $f(x_1)<f(x_2)$,则 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant\varepsilon$.从而存在 $\eta\in[\varepsilon,2\varepsilon]$,以及 $k\in\mathbf{N}$,使得 $f(x_2)=f(x_1)+k\eta$.根据 $f(x)$的中值性有

$$x_1=t_0<t_1<\cdots<t_k=x_2,\qquad f(t_i)=f(x_1+i\eta).$$

$$|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\eta\geqslant\varepsilon,\qquad |t_i-t_{i-1}|\geqslant\delta,$$

故 $|x_1-x_2|\geqslant k\delta$.令 $l=2\varepsilon/\delta$,则

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant\frac{k\eta}{k\delta}=\frac{\eta}{\delta}\leqslant\frac{2\varepsilon}{\delta}=l.$$

最后,由上式可知,从 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon$ 可推出 $|x_1-x_2|\geqslant\varepsilon/l$.这说明取 $\delta=\varepsilon/l$ 即得所证.

例 3.3.22 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续,则下述两个命题等价:

(i) 对任一在$(-\infty,\infty)$上一致连续的函数 $g(x)$,乘积 $f(x)\cdot g(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

(ii) $|x|f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

(2) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上,且 $R(f)\subset[a,b]$.若有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\qquad(x,y\in[a,b]),$$

则可取 $x_1\in[a,b]$且定义数列 $x_{n+1}=[x_n+f(x_n)]/2$ ($n\in\mathbf{N}$),此数列收敛于某个 $x_0\in[a,b]$,且 $f(x_0)=x_0$.

证明 (1) (ii)⇒(i).因为 $f(x)g(x)$在 $x=0$ 处连续,所以对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得 $|f(x)g(x)-f(0)g(0)|<\varepsilon/2$, $|x|<\delta_1$.故若 $|x_1|<\delta_1$, $|x_2|<\delta_1$,就有 $|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|<\varepsilon$.

而对 $|x_1|\geqslant\delta_1$,可知

$$|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|$$

$$\leqslant\frac{|g(x_1)|}{|x_1|}|x_1||f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)||g(x_1)-g(x_2)|.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|\\ \leqslant&\frac{|g(x_1)|}{|x_1|}\left(\Big||x_1|f(x_1)-|x_2|f(x_2)\Big|+|f(x_2)||x_2-x_1|\right)\\ &+|f(x_2)||g(x_1)-g(x_2)|.\end{aligned}$$

现在令 $M=\sup\{|g(x)|/|x|:|x|\geqslant\delta_1\}$,以及

$$L=\max\left\{\sup_{|x|\leqslant\delta_1}|f(x)|,\sup_{|x|\geqslant\delta_1}\frac{|x||f(x)|}{|x|}\right\},$$

则可知

$$\begin{aligned}&|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|\\ \leqslant&ML|x_1-x_2|+M\Big||x_1|f(x_1)-|x_2|f(x_2)\Big|+L|g(x_1)-g(x_2)|.\end{aligned}$$

故由 $f(x)$,$g(x)$的一致连续性即可得证.

(i)⇒(ii) 显然.

(2) 反证法.若结论不真,则有下列情况发生:

(i) $\{x_n\}$为非收敛列(否则有 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$,则由 $x_0=[x_0+f(x_0)]/2$ 可知,$x_0=f(x_0)$).

(ii) 没有子列收敛于 f 的不动点(否则,由不等式

$$\begin{aligned}|x_0-x_{n+1}|&=|[x_0+f(x_0)]/2-[x_n+f(x_n)]/2|\\ &\leqslant|x_0-x_n|/2+|f(x_0)-f(x_n)|/2\leqslant|x_0-x_n|\end{aligned}$$

可知,只能是$\{x_n\}$本身收敛.与(i)矛盾).

(iii) 注意到$\{x_n\}$中至少有一个收敛子列,设其极限为 x_0',则 $f(x_0')>x_0'$.这是因为若对一切收敛子列之极限 p,有 $f(p)\leqslant p$,则其下确界 q 也满足$f(q)\leqslant q$.但由此又知$[q+f(q)]/2$ 也是一个子列的极限,而它不能小于 q,故 $f(q)=q$.这与(ii)矛盾.从而我们就有 $f(x_0')>x_0'$.

(iv) 存在 $\varepsilon_0>0$,对一切子列极限 p,有 $|f(p)-p|\geqslant\varepsilon_0$(否则有 $|p_n-f(p_n)|<1/n(n\in\mathbf{N})$.但$\{p_n\}$的任一子列均收敛于 f 之不动点,且也是$\{x_n\}$的一个子列.这与(ii)矛盾.

最后,存在最大聚点满足 $f(t)>t$.不妨记为 w,且令 $S=[\omega+f(w)]/2$,可知 $f(w)>S>w$,$f(S)<S$.由(iv)知,存在最小聚点,记为 R,$R>w$ 且满足 $f(x)<x$.从而得 $w<R<f(w)$.

注意到 $f(R)<\omega$(否则 $A=[R+f(R)]/2$ 满足 $w<A<R$,且 $f(A)=A$,与(ii)矛盾),于是 $f(R)<w<R-f(w)$.由此得 $|f(R)-f(w)|>|R-w|$,这与题设矛盾.证毕.

例 3.3.23　设 $f\in C([0,\infty))$.若对任意的 $h\in(-\infty,\infty)$,有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+h)-f(x)]=0.$$

试证明对任一区间$[a,b]$,任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,使得

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon \qquad (h\in[a,b],x\geqslant X).$$

因此,$f(x)$在$[0,\infty)$上一致连续.

证明 结论等价于:对任给 $\varepsilon>0$,存在 $a_\varepsilon,b_\varepsilon:a_\varepsilon<b_\varepsilon$,使得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\sup_{a_\varepsilon\leqslant h\leqslant b_\varepsilon}|f(x+h)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

为证这后一断言,可用反证法:作闭区间套列$\{J_n\}$以及数列$\{x_n\}:x_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$,且有$|f(x_n+h)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon(h\in J_n,n\in\mathbf{N})$.

例 3.3.24 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in\mathrm{Lip}\beta([a,b])$.若 $0<\alpha<\beta$,则 $\mathrm{Lip}\beta([a,b])\subset\mathrm{Lip}\alpha([a,b])$.

(2) 设 I 是一个区间.若任意的 $f\in C(I)$都必在 I 上一致连续,则 I 是有界闭区间.

证明 (1) 设 $f\in\mathrm{Lip}\beta([a,b])$,且 $x,y\in[a,b]$.

(i) 若$|x-y|\leqslant1$,则可得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\beta\leqslant M|x-y|^\alpha.$$

(ii) 若$|x-y|>1$,则取 $n_0\in\mathbf{N}$,使得$(b-a)/n_0<1$,则

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leqslant M|x-y|^\beta=n_0^\beta M\cdot\left(\frac{|x-y|}{n_0}\right)^\beta<n_0^\beta M\left(\frac{|x-y|}{n_0}\right)^\alpha\\&=n_0^{\beta-\alpha}\cdot M|x-y|^\alpha.\end{aligned}$$

(2) (i) 假定 I 是开区间$(a,b)(b\neq0)$,则函数 $f(x)=\tan(\pi x/2b)$在(a,b)上连续,但不一致连续.这说明 I 是闭区间.

(ii) 假定 I 是无界区间,如 $I=[a,\infty)$,则 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 是$[a,\infty)$上连续函数,但不一致连续.故 I 是有界的.

第 4 章　微分学(一):导数、微分

4.1　导 数 概 念

定义 4.1.1　设函数 $y=f(x)$在 $U(x_0)$上定义,考虑自变量在 $U(x_0)$内的一个变动,从 x_0 变到 x,并估计差 $f(x)-f(x_0)$与 $x-x_0$ 的比值(商):$[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$.若在 $x\to x_0$ 时,此比值的极限存在,则称 $f(x)$(关于变量 x)在点 x_0 处**可导**,而此极限值称为 $f(x)$(关于变量 x)在点 x_0 处的**导数**,并记为 $f'(x_0)$:$f'(x_0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$.$f(x)$在点 x_0 处可导也称为导数 $f'(x_0)$存在.

若在导数的定义中,记 $x-x_0=h$(可正可负),则极限 $x\to x_0$ 就转化为 $h\to 0$,从而有

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

这样,对于讨论函数在点 x 上的导数,记法上就清晰多了:$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

为了方便,也用记号 y'_x或 y';$[f(x)]'_x$ 或$[f(x)]'$表示 $y=f(x)$在点 x 处的导数.

若比值$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$当 $x\to x_0+$时极限存在,则称 $f(x)$在点 x_0 处的**右导数存在**,并称此极限值为 $f(x)$在点 x_0 处的**右导数**,记为 $f'_+(x_0)$(类似地可理解左导数 $f'_-(x_0)$):

$$f'_+(x_0)\triangleq\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\qquad f'_-(x_0)\triangleq\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

显然,关于右(左)导数 $f'_+(x_0)$($f'_-(x_0)$),只要求函数在点 x_0 的右(左)半邻域有定义即可.此外,易知 $f'(x_0)$存在当且仅当 $f'_+(x_0)$和 $f'_-(x_0)$存在且相等.

上述算式中的 h 用来描述自变量改变的大小,为了能明确地表示变量 x 的改变,更常用的记法是用 Δx 表示,称为 x 的改变量或增量,而随之引起的函数值的改变记为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$,称为函数的改变量.从而差商就成为改变量之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.$h\to 0$ 转化为 $\Delta x\to 0$.而函数在点 x 处的导数成为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.即改变量之比的极限,且其极限值也记为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

注　若 $f'(x_0)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+1/n)-f(x_0)]=f'(x_0)$,但反之不然(例如 $f(x)=x\ (x\in\mathbf{Q})$,$f(x)=0\ (x\overline{\in}\mathbf{Q})$).

定理 4.1.1　若 $f'(x_0)$存在,则 $f(x)$在点 x_0 必连续.

注　若 $f'(x)\in C(I)$,则记为 $f\in C^{(1)}(I)$.

例 4.1.1　证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在点 $x=x_0$ 的邻域 $U(x_0)$上恒等于一个常数 c,则 $f'(x_0)=0$.

(2) 设 $f(x)=|x|$,则 $f(x)$在 $x\neq 0$ 处可导,且 $f'(x_0)=x/|x|$.

(3) 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处的导数为 0.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处不可导.

证明　(1) 因为我们有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0,\qquad x\in U(x_0)且 x\neq x_0,$$

所以当 $x\to x_0$ 时,上式左端的极限值也为 0.即 $f'(x_0)=0$.

(2) 对 $x_0>0$,我们有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$.

类似地可知,对 $x_0<0$ 有 $f'(x_0)=-1$.这说明曲线 $y=|x|$在 $x\neq 0$ 时有切线 $y=x(x>0)$;$y=-x(x<0)$.总之,当 $x\neq 0$ 时,$(|x|)'=\dfrac{x}{|x|}\left(或\dfrac{|x|}{x}\right)$.

对 $x_0=0$,因为我们有

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x-0}{x}=-1,$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$,所以在点 $x=0$ 处导数不存在,或说曲线在点 $x=0$ 处无切线.这从几何上看十分明显,曲线 $y=|x|$的图形在点 $x=0$ 处有一个角点.在这里,我们见到了导数不存在的一种几何形象.

(3) 只需注意 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}\Big/x=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(4) 因为$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x\sin(1/x)-0}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$,而当 $x\to 0$ 时,$\sin\dfrac{1}{x}$不存在极限,所以 $f(x)$在点 $x=0$ 处不可导.

例 4.1.2　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$,试求 $f'(0)$.

(2) 设 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,$f^2(x)$在 $x=0$ 处的导数值为 A,试论 $f(x)$在 $x=0$ 处的可导性.

(3) 设定义在 $U(x_0)$上的 $f(x)$,$g(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=0, \qquad |f(x)|\leqslant M|x-x_0|, \qquad x\in U(x_0),$$

证明 $F(x)=f(x)g(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且 $F'(x_0)=0$.

(4) 设 $xf(x)$在 $x_0\neq 0$ 处有导数 A,证明存在 $f'(x_0)$.

(5) 设 $f(0)=0$.试证明 $f'(0)$存在当且仅当存在 $g(x)$,$g(x)$在 $x=0$ 处连续,且使得 $f(x)=xg(x)$,$f'(0)=g(0)$.

(6) 设 $f(x)$,$g(x)$在 $x=x_0$ 处可导.若有 $f(x_0)=g(x_0)=0$,$g'(x_0)\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

解 (1) 根据定义($f(0)=0$),我们有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-100)=100!.$$

(2) (i) 若 $f(0)\neq 0$,则由

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f^2(x)-f^2(0)}{x}\frac{1}{f(x)+f(0)}$$

可知,$f'(0)=A/2f(0)$.(ii) 若 $f(0)=0$,请读者思考.

(3) 注意 $f(x_0)=0$,且当 $x\neq x_0$ 时有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M$,$x\in U(x_0)$,则可得

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0.$$

(4) 因为我们有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{xx_0f(x)-xx_0f(x_0)}{xx_0(x-x_0)}$$
$$=\frac{xx_0f(x)-x_0^2f(x_0)-xx_0f(x_0)+x_0^2f(x_0)}{xx_0(x-x_0)}$$
$$=\frac{1}{x}\left(\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\frac{f(x_0)}{x},$$

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}\right)-\dfrac{f(x_0)}{x}\right]=\dfrac{1}{x_0}[A-f(x_0)]$.

(5) 充分性显然.下证必要性:作函数 $g(x)=\begin{cases} f(x)/x, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$ 因为我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

所以 $g(x)$在 $x=0$ 处连续,且易知 $xg(x)=f(x)$,$g(0)=f'(0)$.

(6) 将分子、分母同除以 $x-x_0$,则得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\Big/\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

例 4.1.3 解答下列问题:

(1) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的 $g(x)$在 $x=x_0$ 处可导.又令 $f(x)=g(x_0+bx)-g(x_0-bx)$,试求 $f'(0)$.

(2) 设 $f(x)$,$g(x)$在 $x=0$ 处可导,且有 $f(0)=g'(0)=0$,$g(0)=f'(0)=1$.若对 $x\in U(0)$有关系

$$f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x),$$

试证明 $f'(x)=g(x)$,$x\in U(0)$.

(3) 设 $f'(x)$在$[0,\infty)$上存在且是连续函数,则存在常数 α,β,使得函数

$$g(x)=\begin{cases}\alpha f(-x)+\beta f(-2x), & x<0,\\ f(x), & x\geqslant 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导.

解 (1) 我们有

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x_0+bx)-g(x_0-bx)}{x}\\&=b\lim_{x\to 0}\frac{g(x_0+bx)-g(x_0)}{bx}+b\lim_{x\to 0}\frac{g(x_0-bx)-g(x_0)}{-bx}\\&=bg'(x_0)+bg'(x_0)=2bg'(x_0).\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(h)-g(0)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}\\&=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x).\end{aligned}$$

(3) 为使 $g(x)$在 $x=0$ 处可导,$g(x)$必须在 $x=0$ 处连续,故应有

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}[\alpha f(-x)+\beta f(-2x)]=g(0)=f(0),$$

$$\alpha f(0)+\beta f(0)=f(0),\qquad \alpha+\beta=1.\quad (设\ f(0)\neq 0)$$

又由 $g'_-(0)=g'_+(0)$,可知$-\alpha f'(0)-2\beta f'(0)=f'(0)$,$\alpha+2\beta=-1$.从而解出得 $\alpha=3$,$\beta=-2$.

例 4.1.4 试证明下列命题:

(1) 设定义在$(-\infty,\infty)$上的 $f(x)$满足

$$[f(x)-f(y)]^2 \leqslant |x-y|^3, \qquad x,y\in(-\infty,\infty),$$

则 $f'(x)=0(x\in(-\infty,\infty))$.

(2) 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的(下)凸函数,则在任一区间$[c,d]$上 $f\in \mathrm{Lip}1$,且处处左、右可导.

(3) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上存在 $f'_-(x)$,则

$$\inf_{(a,b)}\{f'_-(x)\} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \sup_{(a,b)}\{f'_-(x)\}.$$

(4) 设 $f(x)$在(a,b)上存在 $f'_-(x)$.若 $f'_-(x)$在(a,b)上连续,则 $f(x)$在(a,b)上可导.

证明 (1) 因为$\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}(y\neq x)$,所以当令 $y\to x$ 时,可得 $|f'(x)|\leqslant 0$. 证毕.

(2) 作区间$[a,b]$: $a<c<d<b$,易知(三弦不等式)

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(b)-f(d)}{b-d}, \qquad c\leqslant x<y\leqslant d,$$

由此得 $|f(y)-f(x)|\leqslant M\cdot |y-x|$,其中

$$M=\max\left\{\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|,\left|\frac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right\}.$$

此外,由三弦不等式可知差商 $\varphi(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$是 h 的递增函数,故 $f'_-(x)$,$f'_+(x)$存在.

(3) 作函数(在$[a,b]$上)$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,则 $F(b)=f(a)=F(a)$.由此知$\inf\limits_{(a,b)}\{F'_-(x)\}\leqslant 0\leqslant \sup\limits_{(a,b)}\{F'_-(x)\}$.即得所证.

(4) 因为(对 $h>0$)我们有

$$\inf_{(x,x+h)}\{f'_-(t)\} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \sup_{(x,x+h)}\{f'_-(t)\},$$

所以令 $h\to 0+$并注意到 $f'_-(x)$的连续性,即得 $f'_+(x)=f'_-(x)$.

例 4.1.5 设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且有数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0, \qquad a_n<x_0<b_n \qquad (n\in \mathbf{N}),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}[(f(b_n)-f(a_n))/(b_n-a_n)]=f'(x_0)$.

证明 记 $I_n=(f(b_n)-f(a_n))/(b_n-a_n)$,则

$$I_n=\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n}\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-\frac{a_n-x_0}{b_n-a_n}\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}.$$

又记 $\lambda_n=\dfrac{b_n-x_0}{b_n-a_n}$,$1-\lambda_n=\dfrac{x_0-a_n}{b_n-a_n}$,则由

$$|I_n-f'(x_0)|\leqslant\lambda_n\left|\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$
$$+(1-\lambda_n)\left|\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$

可知,$|I_n-f'(x_0)|\to 0\ (n\to\infty)$.

注　例中若无 $a_n<x_0<b_n$ 条件,结论不真:例如 $f(x)=x^2\sin(1/x)(x\neq 0)$,$f(0)=0$,则 $f'(0)=0$.现在取 $a_n=2/[(4n+1)\pi]$,$b_n=1/2n\pi$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}=-\frac{2}{\pi}\neq f'(0).$$

又如 $g(x)=x^{3/2}\sin(1/x)$,$g(0)=0$,则 $g'(0)=0$.但 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(a_n)-g(b_n)]/(a_n-b_n)=-\infty$.

例 4.1.6　设 $f'(0)$存在,且对 $0<x_n<y_n$,$y_n\to 0(n\to\infty)$.若数列$\{y_n/(y_n-x_n)\}$是有界列,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(0)$.

证明　(i)令 $\alpha_n\to 0$,$\beta_n\to 0(n\to\infty)$如下:

$$\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}-f'(0)=\alpha_n,\qquad f(y_n)=f(0)+f'(0)y_n+\alpha_n y_n,$$
$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}-f'(0)=\beta_n,\qquad f(x_n)=f(0)+f'(0)x_n+\beta_n x_n.$$

则可得(两式相减)

$$f'(0)=\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-\frac{\alpha_n y_n-\beta_n x_n}{y_n-x_n}$$
$$=\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-\alpha_n\frac{y_n}{y_n-x_n}+\beta_n\frac{x_n}{y_n-x_n}.$$

(ii)令 $n\to\infty$,且注意 $|x_n/(y_n-x_n)|\leqslant|y_n/(y_n-x_n)|$,即可得证.

注 1　例中若将 $f'(0)$存在改为 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续,则结论成立(证明用微分中值公式).

注 2　设 $f(x)$定义在(a,b)上,$x_0\in(a,b)$:

(i)若存在$\lim\limits_{\substack{s\to x_0\\ t\to x_0\\ s\neq t}}\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t}=f^*(x_0)$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处强可导,称 $f^*(x_0)$为其强导数.

(ii)若存在$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f^s(x_0)$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处对称可导,称 $f^s(x_0)$为其对称导数.

可导不一定强可导,导函数连续则强可导,反之不然.

例 4.1.7　试证明下列命题:

(1)设 $f\in C([0,1])$,$x_0\in(0,1)$,l 是一个常数.若对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,

使得对满足 $0<|h|<\delta$ 的一切有理数 h,有

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-l\right|<\varepsilon,$$

则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且 $f'(x_0)=l$.

(2) 在(0,1)上定义的 Riemann 函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in\mathbf{N}\text{ 且互素})\end{cases}$$

在无理点不可导(注意,$f(x)$在无理点连续).

(3) 设在(0,1)上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{1}{q^2}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in\mathbf{N},p\text{ 与 }q\text{ 互素}),\end{cases}$$

则 $f(x)$在(0,1)中的无理点上仍不可导.

(4) 设有函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ \dfrac{1}{q^3}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in\mathbf{N},p\text{ 与 }q\text{ 互素}),\end{cases}$$

则 $f(x)$在点 $x=\sqrt{k}$上可导,其中 k 是非平方数的正整数.

证明 (1) 由 $f(x)$的连续性可知,存在 $\delta_1>0$,对 $|h|<\delta_1$,可取 $h'\in\mathbf{Q}(h'\neq 0)$,使得 $|h'-h|\leqslant h^2$,$|f(x_0+h)-f(x_0+h')|<\varepsilon h/2$.

记$[f(x_0+h')-f(x_0)]/h'=l+\alpha$,$|\alpha|<\varepsilon$.我们有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-l\right|\\ \leqslant&\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0+h')}{h}\right|+\left|\frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'}\frac{h'}{h}-l\right|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\left|(l+\alpha)\frac{h'}{h}-l\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+l\left|1-\frac{h'}{h}\right|+\left|\alpha\frac{h'}{h}\right|\end{aligned}$$

,证毕.

(2) 设 $x_0\in(0,1)$是无理数,则

(i) 取数列$\{h_n\}$;$h_n\to 0(n\to\infty)$,使得 $x_0+h_n(n=1,2,\cdots)$为无理数,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{h_n}=0.$$

(ii) 不妨假定 $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$(十进位小数),取 $h_n=0.a_1a_2\cdots a_n-x_0$,并设 N 是使 $a_N\neq 0$ 的最小正整数,则 $f(x_0+h_n)=f(0.a_1a_2\cdots a_n)\geqslant 10^{-n}$,$n\geqslant N$.但 $|h_n|\leqslant 10^{-n}$,由此知

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right|=\left|\frac{f(x_0+h_n)}{h_n}\right|\geqslant 1,\qquad n\geqslant N.$$

(3) 设 $x_0\in(0,1)$是无理数,则存在无穷多个有理数$\frac{p}{q}$(既约分数),使得$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$.由此可知

$$\left|\frac{f(x_0)-f\left(\frac{p}{q}\right)}{x_0-\frac{p}{q}}\right|=\frac{q^{-2}}{\left|x_0-\frac{p}{q}\right|}>1.$$

另一方面,x_0 是 $f(x)$的极小值点.如果 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可微,那么必有$f'(x_0)=0$.这与上式矛盾,因此结论成立.

(4) 由题设知$\sqrt{k}\,\overline{\in}\,\mathbf{Q}$,故有 $f(\sqrt{k})=0$.从而只需指出$\lim\limits_{x\to\sqrt{k}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}=0$.对任给 $\varepsilon>0$,易知只存在有限个分数 p/q 满足 $0<q<1/\varepsilon$,$\left|p/q-\sqrt{k}\right|<1$.

由此又知,可取 δ:$0<\delta<1$,使得在区间 $I_\delta=(\sqrt{k}-\delta,\sqrt{k}+\delta)$内不再存在如上所述之分数.因此得 $q\geqslant 1/\varepsilon$,$\left|\sqrt{k}-p/q\right|<\sqrt{k}+(\sqrt{k}+\delta)<2\sqrt{k}+1$ 以及 $|kq^2-p^2|\geqslant 1$(或 $kq^2-p^2\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$).于是我们有

$$\left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=\left|\frac{f(p/q)}{p/q-\sqrt{k}}\right|=\frac{1}{q^3}\frac{\left|\sqrt{k}+p/q\right|}{\left|k-p^2/q^2\right|}$$
$$=\frac{1}{q}\left|\frac{\sqrt{k}+p/q}{q^2k-p^2}\right|<\varepsilon(2\sqrt{k}+1).$$

此外,若 $x\in I_\delta\backslash\{\sqrt{k}\}$是无理数,则 $f(x)=0$,且有 $|f(x)/(x-\sqrt{k})|=0$,得证.

注　可以证明:对于函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数或 }x=0,\\ a_n, & x=\dfrac{m}{n}(m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N},\text{互素}),\end{cases}$$

其中$\{a_n\}$是满足$\lim\limits_{n\to\infty}n^ka_n=0$($k$是$\geqslant 2$的某个整数)的数列,则 $f(x)$在 $x\,\overline{\in}\,\mathbf{Q}$ 上可导(证明用到 Liouville 定理:存在 $M>0$,使得$\left|x-\frac{m}{n}\right|>\frac{1}{Mn^k}$,$\left|\frac{f(m/n)-f(x)}{m/n-x}\right|\leqslant Mn^k|a_n|$.)

例 4.1.8　设 $f(x)$在$[a,\infty)$上可导,且 $f(a)=0$.若有 $f'(x)\geqslant -f(x)$,$x\in[a,\infty)$,试证明 $f(x)\geqslant 0(a\leqslant x<\infty)$.

证明　反证法.假定存在 $x_0>a$,使得 $f(x_0)<0$,则令 $t\in(a,x_0]$为 $f(x)$在(a,x_0)上的最小值点,易知 $f(t)<0$,且 $f'(t)\geqslant -f(t)>0$.从而对充分小的 $h>0$,有

$$[f(t-h)-f(t)]/(-h)>0, \qquad f(t-h)<f(t).$$

这与 t 是最小值点矛盾.

* **例 4.1.9** 解答下列问题:

(1) 设在 $\mathbf{R}$ 上定义如下函数

$$f(x)=\begin{cases} C_n, & x=1/n \quad (n\in\mathbf{N}), \\ 0, & x\neq 1/n \quad (n\in\mathbf{N}), \end{cases}$$

试问数列$\{C_n\}$满足什么条件,可使 $f'(0)$存在?

(2) 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,$g(x)$满足($\delta>0$)

$$f(x_0)=g(x_0), \qquad f(x)\leqslant g(x) \qquad (x_0-\delta<x<x_0+\delta).$$

若存在 $f'(x_0)$,$g'(x_0)$,试证明 $f'(x_0)=g'(x_0)$.

(3) 试证明对 $x\in\mathbf{R}$,必存在 $\delta>0$,当 s,t 满足 $x\in[s,t]\subset[x-\delta,x+\delta]$时,成立不等式

$$0\leqslant \frac{t-s}{(1+x^2)2\pi}\leqslant \frac{1}{\pi}(\arctan t-\arctan s).$$

证明 (1) 因为对 $x\neq 1/n(n\in\mathbf{N})$,我们有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 1/n}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 1/n}}\frac{0}{x}=0.$$

从而对 $x=1/n$,应满足$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1/n)-f(0)}{1/n}=nC_n=0$.即条件为 $nC_n\to 0(n\to\infty)$.

(2) (i) 对 $x_0<x<x_0+\delta(\delta>0)$,我们有

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\geqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

令 $x\to x_0+$,可知 $g'(x_0)\geqslant f'(x_0)$.

(ii) 对 $x_0-\delta<x<x_0(\delta>0)$,我们有

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

令 $x\to x_0-$,可知 $g'(x_0)\leqslant f'(x_0)$.

综合上述结果,即得所证.

(3) 因为 $\arctan x$ 可导,所以根据在 x 处的导数定义可知,对 $\varepsilon=1/2(1+x^2)$,必存在 $\delta>0$,使得当 s,t 满足 $x\in[s,t]\subset[x-\delta,x+\delta]$时,有

$$\left|\arctan t-\arctan s-\frac{t-s}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{t-s}{2(1+x^2)}.$$

(即 $|f(t)-f(s)-f'(x)(t-s)|\leqslant\varepsilon(t-s)$)由此即知

$$\frac{t-s}{2(1+x^2)}\leqslant\arctan t-\arctan s-\frac{t-s}{1+x^2},$$

$$\frac{t-s}{2(1+x^2)}\leqslant\arctan t-\arctan s.$$

4.2　基本初等函数的导数,求导运算法则,复合函数以及反函数的求导法

表 4.1　导数基本公式表

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c(常数)	0	x^{a}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\cdot\tan x$	$\csc x$	$-\csc x\cdot\cot x$
e^x	e^x	a^x	$a^x\ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

定理 4.2.1　设 $u(x),v(x)$在点 x 处导数存在,我们有

(1) $y=u(x)\pm v(x)$在点 x 处导数存在,且有$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $y=u(x)v(x)$在点 x 处导数存在,且有$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) 若 $v(x)\neq 0$,则 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$在点 x 处导数存在,且有$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

定理 4.2.2(复合函数求导公式)　设函数 $y=F(x)$可视为两个函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的复合函数:$F(x)=f[g(x)]$,其中 $u=g(x)$在点 x_0 处可导,$y=f(u)$在点 $u_0=g(x_0)$处可导,则 $y=F(x)$在点 x_0 处可导,且有

$$F'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)=f'[g(x_0)]g'(x_0).$$

一般情况下,也写为$(f[g(x)])'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$,或$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{u=g(x)}$.

定理 4.2.3(反函数求导公式)　设 $y=f(x)$是 $U(x_0)$上的严格单调函数,其反函数记为 $x=f^{-1}(y)$.若 $f(x)$在点 x_0 处可导,且 $f'(x_0)\neq 0$,则 $f^{-1}(y)$在 $y_0=f(x_0)$处可导,且有

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}.$$

注 1　(i) $f(x)=x^2$ 在$(-1,1)$上不是单调函数,但 $f'(x)=2x$ 是单调函数;$f(x)=x+\sin x$ 在$(0,\infty)$上是单调函数,但 $f'(x)=1+\cos x$ 不是单调的.(ii) $f(x)=x$ 不是周期函数,但 $f'(x)=1$ 是周期函数;若可导函数 $f(x)$是周期的,则 $f'(x)$是周期函数.(iii)若 $f(x)$在$(-a,a)$上是可导的偶(奇)函数,则 $f'(x)$是奇(偶)函数.

注 2　$f(x)=g(x)=|x|$在 $x=0$ 处均不可导,但 $h(x)=f(x)\cdot g(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导.

注 3　$f(x)=|x-1||x-2||x-3|$在 $x=1,2,3$ 处均不可导.

注 4　$f(x)=x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$在 $x=0$ 处可导,但在$(-\delta,\delta)(\delta>0)$内有无穷多个不可导点($x_n=$

$2/(2n+1), n=1,2,\cdots)$.

注 5 关于复合函数的导数,我们有

(i) $f(x)=x^2, g(x)=|x|$,则存在 $f'[g(0)]$,但 $g'(0)$不存在.

(ii) $f(x)=|x|, g(x)=x^2$,则 $f'[g(x_0)]$不存在,但 $g'(0)$存在.

(iii) $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=|x|$,则 $f'[g(0)]$与 $g'(0)$均不存在.

注 6 $f(x)=|x|^{2/3}$,则 $f(x), f^2(x)$在 $x=0$ 处不可导,$f^3(x)$在 $x=0$ 处可导.

例 4.2.1 试求下列函数 $y=F(x)$的导数 $y'\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$:

(1) 设 $y=\dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sin^7 x}, x\neq n\pi, n\in\mathbf{Z}$.　　(2) $y=\ln^2(\sec(2^{\sqrt[3]{x}}))$.

(3) $y=x+x^x+x^{x^x}$.　　(4) $f(x)>0$ 且存在 $f'(x), g'(x), y=f(x)^{g(x)}$.

解 (1) 令 $z=\ln|y|$,则$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dy}{dx}=y\dfrac{dz}{dx}$.因为有

$$z=\ln(1+x^2)-\frac{4}{3}\ln|x|-7\ln|\sin x|,$$

所以得$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4}{3x}-\dfrac{7\cos x}{\sin x}$.从而可知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sin^7 x}\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4}{3x}-\frac{7\cos x}{\sin x}\right).$$

(2) $y'=\dfrac{\ln 2}{3}(\sec(2^{\sqrt[3]{x}}))\tan 2^{\sqrt[3]{x}}\dfrac{2^{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

(3) $y'=1+x^x(\ln x+1)+x^{x^x}[x^{x-1}+x^x(1+\ln x)\ln x]$.

(4) 因为原式可写为 $y=e^{g(x)\ln f(x)}$,所以有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=e^{g(x)\ln f(x)}\cdot\frac{d}{dx}[g(x)\ln f(x)]\\&=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right].\end{aligned}$$

注 幂指函数 $f(x)^{g(x)}$的求导公式可看成下述两部分的和:

(1) 视 $g(x)$为常数,$f(x)^{g(x)}$为幂函数,则其导数为 $g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$.

(2) 视 $f(x)$为常数,$f(x)^{g(x)}$为指数函数,则其导数为 $f(x)^{g(x)}\ln f(x)g'(x)$.

例 4.2.2 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=|\ln|x||$,试求 $f'(x)(x\neq 0)$.

(2) 设 $f(x)$在 $U(x_0)$上定义,且 $f(x_0)=0$,试证明 $F(x)=|f(x)|$在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f'(x_0)=0$.

(3) 设 $f'(x_0), g'(x_0)$存在,且 $g(x_0)=0, g'(x_0)\neq 0$,试证明 $F(x)=f(x)\cdot|g(x)|$在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f(x_0)=0$.

解　(1) 运用复合函数求导法($(|x|)'=x/|x|$),我们有

$$f'(x)=\frac{\ln|x|}{|\ln|x||}\frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x}=\frac{\ln|x|}{|\ln|x||}\frac{1}{x}\qquad(x\neq 0).$$

(2) (i) 若 $f'(x_0)=0$,则

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)|}{|x-x_0|}=\lim_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|=0,$$

$$F'_-(x_0)=-\lim_{x\to x_0-}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=-|f'(x_0)|=0.$$

由此知 $F(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且 $F'(x_0)=0$.

(ii) 若 $F'(x_0)$存在,则

$$\lim_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=F'(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0-}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0-}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=F'(x_0).$$

因此知 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$,即 $f'(x_0)=0$.

(3) 注意到等式

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)|g(x)|}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|g(x)|+\frac{|g(x)|-|g(x_0)|}{x-x_0}f(x_0),$$

以及 $|g(x)|$在 $x=x_0$ 处不可导(见(2)),故得所证.

例 4.2.3　试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}-x\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos 2x)-f(0)}{(\tan x)^2}$(已知 $f'(0)$存在).

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$(已知 $f'(x_0)$存在).

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)\Big/f(a)\right]^n$(已知 $f'(a)$存在且 $f(a)\neq 0$).

解　(1) 令 $x=\sqrt{t}$,则我们有

$$\text{原式}=\lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{t+1/n}-\sqrt{t}}{1/n}=\left(\sqrt{t}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2x}\qquad(x\neq 0).$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos 2x)-f(0)}{1-\cos 2x}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}\dfrac{x^2}{(\tan x)^2}=2f'(0)$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-xf(x)+xf(x)-x_0 f(x)}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[-x\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(x)\right]=f(x_0)-x_0 f'(x_0).$$

(4) 首先,将此数列极限转换成连续变量的函数极限,即考察 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}$.由于在 $|x|$充分小时,有$\dfrac{f(a+x)}{f(a)}>0$,故可先取对数,即得

$$\ln\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{1/x}=\frac{\ln|f(a+x)|-\ln|f(a)|}{x}.$$

最后令 $x\to 0$,上式极限可视为 $\ln|f(x)|$在 $x=a$处的导数,故有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln|f(a+x)|-\ln|f(a)|}{x}}=e^{f'(a)/f(a)}.$$

例 4.2.4 试求下列极限值 I:

(1) 设 $f\in C^{(1)}((-\infty,\infty))$是周期为 1 的正值函数,$I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{f(x)}{1+nf(x)}\right]$.

(2) $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$. (3) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$ $(f'(0)\neq 0)$.

(4) $I=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{f(x_0)}\right]^{1/(\ln x-\ln x_0)}$ $(x_0>0,f'(x_0)$存在,$f(x_0)>0)$.

解 (1) $|I|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f'(x)}{[1+nf(x)]^2}\right|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{1+n\cdot m}=0$,其中

$$M=\max_{(-\infty,\infty)}\{|f'(x)|\},\qquad m=\min_{(-\infty,\infty)}\{f(x)\}.$$

(2) 我们有 $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sin(x-a)}\cdot\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=(\sin x)'\Big|_{x=a}=\cos a$.

(3) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)e^x-f(0)e^0}{x-0}\cdot\dfrac{x}{f(x)\cos x-f(0)\cos 0}$

$$=[f(x)e^x]'_{x=0}\cdot\lim_{x\to 0}1\Big/\left(\frac{f(x)\cos x-f(0)\cos 0}{x-0}\right)$$

$$=[f(x)e^x]'_{x=0}\cdot 1\Big/[f(x)\cos x]'_{x=0}=\frac{f'(0)+f(0)}{f'(0)}.$$

(4) 应用指数-对数变换原式,我们有

$$I=\lim_{x\to x_0}e^{\frac{\ln f(x)-\ln f(x_0)}{\ln x-\ln x_0}}=\lim_{x\to x_0}e^{\frac{\ln f(x)-\ln f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{\ln x-\ln x_0}}$$

$$=e^{[\ln f(x)]'_{x=x_0}/[\ln x]'_{x=x_0}}=e^{x_0 f'(x_0)/f(x_0)}.$$

例 4.2.5　试求下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sum\limits_{i=1}^{k}f\left(\dfrac{x}{i}\right)$（已知 $f'(0)$ 存在,且 $f(0)=0,k\in\mathbf{N}$）.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{(n+i)^m}{n^{m-1}}-n\right]$（$m\in\mathbf{N}$）.

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\sum\limits_{i=1}^{k}f\left(a+\dfrac{i}{n}\right)-kf(a)\right]$（已知 $f'(a)$ 存在）.

(4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\dfrac{k}{n}\right)^n\Big/a^{nk}$（$k\in\mathbf{N}$）.

解　(1) 应用极限运算法则,我们有

$$I=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{k}\frac{f(x/i)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{k}\frac{f(x/i)-f(0)}{x/i}i$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\lim_{x\to 0}\frac{f(x/i)-f(0)}{x/i}\cdot i=f'(0)\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}.$$

(2) 注意到 $(x^m)'_{x=1}=m(m\in\mathbf{N})$,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{(n+i)^m-n^m}{n^{m-1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}n^m\frac{(1+i/n)^m-1}{n^{m-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}i\cdot\frac{(1+i/n)^m-1}{i/n}=\sum_{i=1}^{k}m\cdot i=m\frac{k(k+1)}{2}.$$

(3) 应用极限运算,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}i\cdot\frac{f(a+i/n)-f(a)}{i/n}=f'(a)\frac{k(k+1)}{2}.$$

(4) 应用指数-对数替换,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\left\{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n/a^{nk}\right\}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{k}\ln(a+i/n)^n-\ln a^{nk}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{k}n[\ln(a+i/n)-\ln a]}=\mathrm{e}^{\frac{k(k+1)}{2a}}.$$

例 4.2.6　试求下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{na}{n^2}\right)$（$a>0$）.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\dfrac{k}{n^2}\right)-nf(a)\right]$（已知 $f'(a)$ 存在）.

解　(1) 采用指数-对数变换,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{ka}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[a\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)-\ln\frac{1}{a}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a\frac{k}{n^2}}=\mathrm{e}^{a/2}.$$

(注意到$\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{k}{n^2}\right)-\ln\dfrac{1}{a}}{a\cdot k/n^2}\to 1(n\to\infty)$,$\dfrac{k}{n^2}=\Rightarrow 0(n\to\infty)$.参阅例 2.8.12.)

(2)应用(1)中方法,我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(a+\frac{k}{n^2}\right)-f(a)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(a)\frac{k}{n^2}=\frac{f'(a)}{2}.$$

例 4.2.7 试求下列和式:

(1) $I_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k\mathrm{e}^{kx}$.　　(2) $Q_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}$.

(3) $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\tan\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.　　(4) $I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n}{k}k^2$.

(5) $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot\cos(kx)$.　　(6) $I_n=\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k\dbinom{2n}{k}k^n$.

解 (1)注意到$\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{kx}=[1-\mathrm{e}^{(n+1)x}]/(1-\mathrm{e}^x)$,故

$$I_n=\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{kx})'=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{kx}\right)'=([1-\mathrm{e}^{(n+1)x}]/(1-\mathrm{e}^x))'$$
$$=[n\mathrm{e}^{(n+2)x}-(n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}+\mathrm{e}^x]/(1-\mathrm{e}^x)^2.$$

(2)令 $P_n(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$,则

$$P_n(x)=\begin{cases}[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1]/(x-1)^2, & x\neq 1,\\ n(n+1)/2, & x=1.\end{cases}$$

注意到 $Q_n(x)=[xP_n(x)]'$,我们有($x\neq1$)

$$Q_n(x)=\left[x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\right]'$$
$$=\frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}}{(x-1)^3}+\frac{(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}.$$

(3)注意到$\left(\ln\left|\cos\dfrac{x}{2^k}\right|\right)'=-\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{x}{2^k}$,故有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=-\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)'$$
$$=-\left[\ln\left|\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right|\right]'$$
$$=-\left[\ln\left|\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}\right|\right]'=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

(4)在恒等式$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}x^k$ 两端求导,得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1},\qquad nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^k.$$

在上式两端再对 x 求导,并乘以 x,可知

$$n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}+nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k.$$

令 $x=1$,我们有

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}.$$

(5)因为$(x\neq 2m\pi)\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\dfrac{\sin(nx/2)\cdot\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)}$,所以

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}[\sin(kx)]'=\left(\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right)'\\&=\left(\frac{\sin(nx/2)\cdot\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)}\right)'\\&=\frac{n\cdot\sin(x/2)\cdot\sin[(2n+1)x/2]-\sin^2(nx/2)}{2\sin^2(x/2)}.\end{aligned}$$

(6)因为$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}e^{kx}=(e^x-1)^{2n}$,所以

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kk^ne^{kx}\binom{2n}{k}=\frac{d^n}{dx}(e^x-1)^{2n}.$$

令 $g(x)=e^x-1$,则 $g^{2n}(x)$的 n 次导数中每一项均含有 $g(x)$的至少 n 次幂,$(e^x-1)^{2n}$的导数在 $x=0$ 处的值为 0,故 $I_n=0$.

例 4.2.8 试证明下列命题:

(1)设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且 $f_k(x_0)\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$,则$\dfrac{F'(x_0)}{F(x_0)}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{f'_k(x_0)}{f_k(x_0)}$,$F(x)=\prod_{k=1}^{n}f_k(x)$.

(2)设 $f_1(x),\cdots,f_n(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且 $f_k(x_0)\neq 0$,$g_k(x_0)\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$,则 $G'(x_0)=G(x_0)\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{f'_k(x_0)}{f_k(x_0)}-\dfrac{g'_k(x_0)}{g_k(x_0)}\right)$,其中 $G(x)=\prod_{k=1}^{n}(f_k(x)/g_k(x))$.

证明 (1)易知存在 $U(x_0)$,使所有 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$在其上不变号,从而知所有 $|f_k(x)|(k=1,2,\cdots,n)$在 $x=x_0$ 处可导.故得

$$\frac{F'(x_0)}{F(x_0)}=\left(\ln\prod_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right)'_{x=x_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f'_k(x_0)}{f_k(x_0)}.$$

(2)类似(1)视 $f_k(x)$为 $f_k(x)/g_k(x)$即可.

例 4.2.9 求下列函数 $y=f(x)$的反函数 $f^{-1}(y)$在指定点处的导数.

(1)$y=2x-\cos(x/2)$,$y_0=-1/2$. (2)$y=2x^2-x^4(0<x<1)$,$y_0=3/4$.

解 (1) 由方程 $-1/2=2x-\cos(x/2)$ 可知,它有唯一解 $x_0=0$.从而我们有

$$[f^{-1}(y)]'_{y_0=-1/2}=\left.\frac{1}{2+\sin(x/2)/2}\right|_{x_0=0}=1/2.$$

(2) 方程 $3/4=2x^2-x^4$ 在 $0<x<1$ 中有唯一解 $x_0=1/\sqrt{2}$,从而我们有

$$[f^{-1}(y)]'_{y_0=3/4}=\left.\frac{1}{4x-4x^3}\right|_{x_0=1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.3 导数的几何意义

设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,则曲线 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处有切线存在,切线斜率就是 $f'(x_0)$,切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$,$y_0=f(x_0)$.(若 $f'(x_0)=\infty$,则表示曲线 $y=f(x_0)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处有垂直切线,若 $f'(x_0)=0$,则为水平切线.)

例 4.3.1 解答下列问题:

(1) 求曲线 $y=3x^3+14x^2+3x+8$ 上的点,使其上之切线通过原点.

(2) 求曲线 $y=x^3-3x^2+2$ 上的点,使其上之切线平行于直线 $y=9x+4$.

(3) 求曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=1/x$ 之公切线.

解 (1) 曲线上点(x_0,y_0)满足 $y_0=3x_0^3+14x_0^2+3x_0+8$,且在该点处的切线方程为 $y=(9x_0^2+28x_0+3)(x-x_0)+y_0$.由于切线过原点,故可知 $y_0=9x_0^3+28x_0^2+3x_0$.从而我们有 $3x_0^3+7x_0^2-4=0$,即$(x_0+1)(3x_0^2+4x_0-4)=0$.最后求得曲线上的点为$(-1,16)$,$(2/3,154/9)$以及$(-2,34)$.

(2) 曲线上点(x_0,y_0)应满足 $y_0=x_0^3-3x_0^2+2$.而在该点处的切线斜率为 $3x_0^2-6x_0$,故依题设应有 $9=3x_0^2-6x_0$.由此知 $x_0=3,-1$,从而求得之点为$(3,2)$,$(-1,-2)$.

(3) 两曲线上点(x_0,y_0),(x_1,y_1)应满足 $y_0=x_0^2$,$y_1=1/x_1$.因为其切线斜率相同,所以有 $2x_0=-1/x_1^2$.

另一方面,两曲线之切线各为

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0),\qquad y-\frac{1}{x_1}=-\frac{1}{x_1^2}(x-x_1),$$

依题设可推(相减)$1/x_1-x_0^2=2x_0(x_1-x_0)$.

由 x_0 与 x_1 之关系可知 $1/x_1+(1/2x_1^2)^2=-1/x_1$.从而得出 $x_1^3=-1/8$,即 $x_1=-1/2$,故 $x_0=-2$.因为曲线 $y=x^2$ 在 $x_0=-2$ 处的切线斜率为-4,$y_0=4$,所以公切线是 $y=-4x-4$.

例 4.3.2 设有曲线 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$,记其在点$(1,1/2)$处的切线与 x 轴之交点为$(x_n,0)$,试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 因为 $f'(1)=-n/4$,所以过点$(1,1/2)$之切线方程为 $y-1/2=-n(x-1)/4$.从而它与 x 轴之交点的横坐标 x_n 满足 $-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{n}{4}(x_n-1)$,$x_n-1=\dfrac{2}{n}$.$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 4.3.3 试证明下列命题:

(1) 带参变量 α 的曲线族 $(x/a)^{\alpha}+(y/b)^{\alpha}=2$ 在点 $P=(a,b)$处均相切(即具有公切线).

(2) 设 $f(x)=ax^3+bx$,P 是曲线 $y=f(x)$上一点,其横坐标为 x_0.若过点 P 的切线又与曲线 $y=f(x)$相交于点 Q,则 Q 的横坐标为 $-2x_0$.

证明 (1) 在曲线族表示式两端对 x 求导,可知

$$\alpha\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{a}+\alpha\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{y'}{b}=0.$$

由此得到 $y'=-(b^{\alpha}x^{\alpha-1})/(a^{\alpha}y^{\alpha-1})$.从而在点 $P=(a,b)$处有

$$y'|_P=-\frac{b^{\alpha}}{a^{\alpha}}\frac{a^{\alpha-1}}{b^{\alpha-1}}=-\frac{b}{a}.$$

这说明该曲线族中任一曲线在点 $P=(a,b)$处的切线斜率与 α 值无关,也就是说它们具有公切线:

$$y-b=-\frac{b}{a}(x-a).$$

(2) 由 $f'(x)=3ax^2+b$ 可知,曲线在点 P 处之切线为 $y=(3ax_0^2+b)x+C$.又由 $f(x_0)=ax_0^3+bx_0=3ax_0^3+bx_0+C$ 可知 $C=-2ax_0^3$,即其切线方程为

$$y=3ax_0^2x+bx-2ax_0^3.$$

现在,若记点 Q 之横坐标为 x_1,则由

$$3ax_0^2x_1+bx_1-2ax_0^3=ax_1^3+bx_1$$

可知,$x_1^3-3x_0^2x_1+2x_0^3=0$ 或 $x_1^3-x_0^3-3x_0^2(x_1-x_0)=0$,以及

$$(x_1-x_0)(x_1^2+x_1x_0-2x_0^2)=0,\qquad (x_1-x_0)(x_1-x_0)(x_1+2x_0)=0.$$

因此得解 $x_1=-2x_0$.

4.4 参数式函数和隐函数的导数

(一) 参数式函数的求导法

设有 x 的函数 $y=f(x)$由参数式方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 给出,$\varphi'(t)$及 $\psi'(t)$存在,且 $x=\varphi(t)$存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,反函数可导又不为零.从而 y 通过中间变量 t 可表示为 x 的复合函数.根据复合函数求导公式可知$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)\cdot(\varphi^{-1}(x))'$.而$(\varphi^{-1}(x))'=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$($t=$

$\varphi^{-1}(x))$,故我们有$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}(t=\varphi^{-1}(x))$.

例 4.4.1　求旋轮线$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0$ 的 y'_x.

解　因为 $x'_t=a(1-\cos t), y'_t=a\sin t$,所以得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$.

用极坐标 $r=f(\theta)$表达的函数,只需将其转换为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,也可以纳入参数式的情况,参数为 θ.

如图 4.1,若记 α 为曲线上点 $M(r,\theta)$处切线的倾斜角,则我们有$\left(记\ r'=\dfrac{dr}{d\theta}\right)$

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}.$$

注　记 φ为向径(从原点出发的射线)OM 与切线之夹角,则

$$\varphi=\alpha-\theta,\qquad \tan\varphi=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}.$$

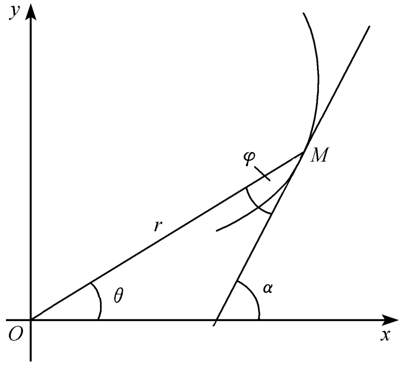

图 4.1

从而可得

$$\tan\varphi=\frac{(r'\sin\theta+r\cos\theta)\cos\theta-(r'\cos\theta-r\sin\theta)\sin\theta}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)\cos\theta+(r'\sin\theta+r\cos\theta)\sin\theta}=\frac{r}{r'},\qquad r'=r\cot\varphi.\qquad (*)$$

这说明,用极坐标表达的函数,其向径对极角的导数,等于向径与切线夹角的余切乘以向径的长度.

例 4.4.2　等角螺线 $r=e^{\alpha\theta}$的几何意义.

解　因为有 $r'=\alpha e^{\alpha\theta}$,所以由式(*)知 $\cot\varphi=\dfrac{r'}{r}=\alpha$(常数).这说明在此曲线上的任一处,其切线与向径相交之角总是一个定角.

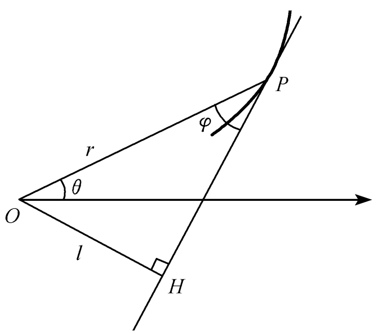

图 4.2

例 4.4.3　设 $r=r(\theta)$是以极坐标表示的光滑曲线,记极点 O 到曲线上点$P(r,\theta)$处切线的距离为 l,则

$$\frac{1}{l^2}=\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2.$$

证明　如图 4.2,记向径与切线之夹角为 φ,则 $\tan\varphi=\dfrac{r}{r'}$,$\cos\varphi=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\dfrac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$.

因为 $l=OH=OP\sin\varphi=r\cdot\tan\varphi\cdot\cos\varphi$,所以有

$$l = r \cdot \frac{r}{r'} \cdot \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

由此知$\dfrac{1}{l^2}=\dfrac{r^2+r'^2}{r^4}=\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{r'^2}{r^4}=\dfrac{1}{r^2}+\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)\right)^2$.

例 4.4.4　解答下列问题:

(1) 设 $y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$确定,试求其在 $x=3$ 处的法线方程.

(2) 设函数 $y=f(x)$的动点坐标(x,y)在极坐标(r,θ)中表示为

$$r = a(1+\cos\theta), \qquad \theta \in (0, 2\pi/3),$$

试求 $f'(x)$.

解　(1) 由题设知 $3=t^2+2t$,故有 $t^2+2t-3=(t+3)(t-1)=0$.即 $x=3$ 相应于 $t=1$($t=-3$ 不合理),且此时 $y=\ln(1+1)=\ln 2$.

(2) 应用(x,y)与(r,θ)之关系,我们有$\begin{cases} x=r\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y=r\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$由此可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\cot\left(\frac{3\theta}{2}\right).$$

例 4.4.5　试证明两曲线:

$$(\mathrm{A})\ r=a\sec^2\frac{\theta}{2}, \qquad (\mathrm{B})\ r=b\csc^2\frac{\theta}{2}$$

是正交的(即交点处两切线互相垂直).

证明　改写两曲线表示式为(皆为抛物线)

$$(\mathrm{A})\ r=\frac{a}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{2a}{1+\cos\theta}, \qquad (\mathrm{B})\ r=\frac{2b}{1-\cos\theta},$$

且记曲线上动点处的向径与切线之夹角为 φ,则有 $\tan\varphi=r/r'$.注意到此两曲线关于 x 轴对称,故只需考察它们在 x 轴上方之交点向径与 x 轴之交角 $\theta=\theta_0$.我们有

$$(\mathrm{A})\ \tan\varphi_1=a\sec^2\frac{\theta_0}{2}\bigg/a\sec^2\frac{\theta_0}{2}\tan\frac{\theta_0}{2}=\cot\frac{\theta_0}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right),$$

$$(\mathrm{B})\ \tan\varphi_2=-b\csc^2\frac{\theta_0}{2}\bigg/b\csc^2\frac{\theta_0}{2}\cot\frac{\theta_0}{2}=-\tan\frac{\theta_0}{2}=\tan\left(-\frac{\theta_0}{2}\right).$$

因此,$\varphi_1=\pi/2-\theta_0/2+n\pi$,$\varphi_2=-\theta_0/2+m\pi$,证毕.

(二) 隐函数求导法

例 4.4.6　设有函数方程 $y-\varepsilon\sin y=x$($0\leqslant\varepsilon<1$),试求 $y'(x)$.

解　(i) 若对一个 x 值,对应两个值 y_1,y_2,则有

$$y_1-y_2=\varepsilon(\sin y_1-\sin y_2)=2\varepsilon\cdot\sin\frac{y_1-y_2}{2}\cdot\cos\frac{y_1-y_2}{2}.$$

从而得 $|y_1-y_2|\leqslant 2\varepsilon\cdot|(y_1-y_2)/2|=\varepsilon|y_1-y_2|$，矛盾．这说明该方程确定了一个隐函数 $y(x)$．

(ii) 因为 $x'(y)=1-\varepsilon\cos y$，所以 $y'(x)=1/(1-\varepsilon\cos y)$．

例 4.4.7　求由下列函数方程确定的隐函数 $y(x)$ 的导数 $y'(x)$：

(1) $y^2+2\ln y=x^4$．　　(2) $x^y=y^x(x>0,y>0)$．

(3) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0(x<2y-1)$．

解　(1) 视 y 为 x 的(隐)函数，在公式两端对 x 求导，得 $2yy'+\frac{2}{y}y'=4x^3$．故

$$y'=4x^3/(2y+2/y)=2x^3y/(1+y^2).$$

注　由于 $y=y(x)$ 是隐函数，故导函数表达式有 $y=y(x)$ 出现．此外，这里仅介绍求导运算，其中的理论问题，可参阅多元函数中的内容．

(2) 首先将原式转换形式(取对数)，得 $y\ln x=x\ln y$．

其次，在上式两端对 x 求导，可知 $y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y'$．由此知

$$y'(x)=\left(\ln y-\frac{y}{x}\right)\Big/\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}.$$

(3) 在方程的两端对 x 求导，我们有 $y'(8y-4x-3)=4y-2x-4$．注意到 $x<2y-1$，故得

$$y'(x)=(4y-2x-4)/(8y-4x-3).$$

例 4.4.8　设 $y=y(x)$ 是由方程 $(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3$ 确定的隐函数(严格的说，$y(x)$ 并不是一般意义上的单值函数)，求在 $x=0,y=0$ 处的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

解　引入参变量 t：$y=tx$，则代入原方程后可得 $x=\frac{3t-t^3}{(1+t^2)^2}$，$y=\frac{3t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$．从而知道

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+t^2)(6t-4t^3)-4t(3t^2-t^4)}{(1+t^2)(3-3t^2)-4t(3t-t^3)}.$$

注意到 $x=0,y=0$ 相当于 $t=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$，因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=0,\quad\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{3}}=\sqrt{3},\quad\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

4.5 微　　分

(一) 微分概念

设 $y=f(x)$定义在 $U(x_0)$上,若对 x 的改变量 $\Delta x=x-x_0$,函数 y 的改变量 Δy 可以写成

$$\Delta y(=f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

其中 A 是常数,$\alpha=o(1)(\Delta x\to 0)$,则称 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可微,式中 $A\cdot\Delta x$ 称为 $y=f(x)$的微分(线性主部),记为 $\mathrm{d}y$.

定理 4.5.1　函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可微的充要条件是 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导.此时 $A=f'(x_0)$.记 $\mathrm{d}x=\Delta x$,则 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$,$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$,$\alpha=o(1)(\Delta x\to 0)$.

例 4.5.1　设 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,且有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,则 $f(x)$在 $x=0$ 处可微,且 $f'(0)=A$.

证明　由题设知$\dfrac{f(x)}{x}-A=o(1)(x\to 0)$.从而有 $f(x)=Ax+o(x)(x\to 0)$.由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.根据连续性,我们有 $f(0)=0$.上式可改写为 $f(x)-f(0)=Ax+o(x)(x\to 0)$.即得所证.

注　设有函数 $f(x)$,假定 $f(x_0)$的值易被算出,且 $f'(x_0)$存在,则由

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

可知 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$,其中值 $|\Delta x|$较小.

例 4.5.2

$$\begin{aligned}\sqrt{3.98}&=\sqrt{4-0.02}\approx\sqrt{4}+\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=4}\cdot(-0.02)\\&=\sqrt{4}-\frac{0.02}{2\sqrt{4}}=1.995.\end{aligned}$$

如上所述,我们对函数的导数概念的认识达到了一个新的高度,即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$作为函数 $y=f(x)$的导数,原先只是一个表示符号,现在有了微分概念以后,导数可以当作两个微分 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的商,即分数来处理了.这就是导数称作微商的理由,而求函数的导数与求它的微分也就统一了(求导运算也称为微分法).由于微分 $\mathrm{d}y$ 与导数 $y'=f'(x)$只差一个因子 $\mathrm{d}x$,故基本初等函数的微分公式可直接得出.关于可微函数 $u(x)$与 $v(x)$的四则运算,其微分关系可归结为下列公式:

(1) $\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$,$c$ 是常数;　　(2) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}(u\cdot v)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$;　　(4) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$,$v\neq 0$.

例 4.5.3　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.若存在极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)/x^2=B$,则 $f'(0)=0$.

(2) 设 $1+xy=k(x-y)$(k 是常数),则 $(1+y^2)\mathrm{d}x=(1+x^2)\mathrm{d}y$.

(3) 设 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0\ (xy>0)$,则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0$.

证明 (1) 将原式改写为

$$\frac{f(x)}{x^2}-B=o(1),\qquad f(x)=Bx^2+o(x^2)\qquad (x\to 0),$$

注意 $o(x^2)=o(x)$,$Bx^2=o(x)(x\to 0)$,则有 $f(x)=0+0\cdot x+o(x)(x\to 0)$.由此即知 $f'(0)=0$.

(2) 因为 $x\neq y$,所以 $k=(1+xy)/(x-y)$.在式两端(对 x)求微分,可知

$$0=\frac{(x-y)(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)-(1+xy)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)}{(x-y)^2}.$$

从而得上式分子为 0,故解出 $(1+x^2)\mathrm{d}y-(1+y^2)\mathrm{d}x=0$.

(3) 在原式两端(对 x)求微分,可得

$$2xy^2\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0.$$

由此知 $x(1+y^2)\mathrm{d}x+y(1+x^2)\mathrm{d}y=0$.因为

$$x^2=\frac{1-y^2}{1+y^2},\qquad y^2=\frac{1-x^2}{1+x^2},\qquad x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\qquad y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}},$$

且由 $xy>0$ 知 x 与 y 同号,所以

$$\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}(1+y^2)\mathrm{d}x+\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}(1+x^2)\mathrm{d}y=0.$$

$$\sqrt{1-y^4}\,\mathrm{d}x+\sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}y=0.$$

例 4.5.4 试解答下列问题:

(1) 试问对什么 x 值,函数 $y=f(x)=\cos x$ 在 $\Delta x\to 0$ 时,其微分 $\mathrm{d}y$ 与差分 $\Delta y=\Delta f(x)$ 不等价?

(2) 设 $y=x^3-3x$,试问当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是 Δx 的几阶无穷小?

解 (1) 因为 $\mathrm{d}y=-\sin x\cdot\Delta x$,以及

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2},$$

所以答案为 $x\neq k\pi$.

(2) 因为 $\Delta y-\mathrm{d}y=3x(\Delta x)^2-(\Delta x)^3$,所以当 $x\neq 0$ 时为二阶无穷小量;$x=0$ 时为三阶无穷小量.

(二) 复合函数的微分法,微分形式的不变性

设 $y=f[g(x)]$是两个可微函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的复合函数,易知 y 对 x 的微分为

$$dy = y'_x \cdot dx. \qquad (*)$$

但将 $y'_x = y'_u u'_x$ 代入,则可得 $dy = y'_u u'_x dx$.因为 $u'_x dx$ 是 $u = g(x)$ 作为 x 的函数时的微分,即 $du = u'_x dx$,所以我们有

$$dy = y'_u \cdot du. \qquad (**)$$

比较式($*$)与($**$),我们注意到,不论 u 是自变量,还是中间变量,微分 dy 的公式在形式上完全一致.也就是说,我们永远可以把 y 的微分写成($**$)的形式,不论 u 是否是自变量(其中的差别只是:若 u 不是自变量,则 du 并不表示改变量 Δu,而是表示 u 作为另一自变量 x 的函数的微分).因此,微分的这一性质称为微分的形式不变性.

由于导数可以看作是微分的商,故微分形式的不变性也就给求导带来方便.例如 y 与 x 的函数关系由参数方程 $x = \varphi(t)$,$y = \psi(t)$,$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 表达时,其导数 y'_x 可直接计算如下:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (\varphi'(t) \neq 0).$$

$$\frac{dx}{dy} = 1\Big/\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

4.6 高阶导数、高阶微分

(一) 高阶导数

一般地说,设函数 $y = f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上可微,则 $f'(x)$ 也是 $U(x_0)$ 上的函数.因此,仍可以考察函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的导数.若存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = A$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**存在二阶导数**(或称为**二次可导**),并称 A 为 $f(x)$ 的**二阶导数(值)**,记为 $A = f''(x_0)$.

若 $f(x)$ 在区间 I 中每一点 x 上均二次可导,则称 $f(x)$ 在 I 上二次可导,其导函数记为 $f''(x) = [f'(x)]'$,也记为

$$y'' = (y')', \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right).$$

类似地,可以定义三阶导数 $f'''(x)$,…,以及 n 阶导数

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \qquad f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \qquad \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}\right).$$

也同样可以理解 $f''_+(x)$,$f''_-(x)$ 等.此外,为便于统一陈述,规定 $f^{(0)}(x) = f(x)$.

这里,我们还要指出的是,凡提到 $f^{(n)}(x_0)$ 存在,总是首先假定在某个邻域 $U(x_0)$ 上 $f^{(n-1)}(x)$ 存在,且由此又可知在 $U(x_0)$ 上 $f^{(n-2)}(x)$ 不仅存在而且是连续函数.一般,当 $f^{(k)}(x)$ 在区间 I 上连续时,我们就称 $f(x)$ 在 I 上是 **k 阶连续可导**,并记为 $f \in C^{(k)}(I)$.其中 $C^{(k)}(I)$ 表示一切在 I 上 k 阶连续可导函数的全体构成的集合,而 $C^{(\infty)}(I)$ 则表示一切在 I 上任意次可导的函数的全体.

我们将部分初等函数的 n 阶导数公式归纳如表 4.2.

表 4.2 导数基本公式表

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^{α}	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
$1/x$	$(-1)^n n!/x^{n+1}$
$1/(ax+b)$	$(-1)^n n!a^n/(ax+b)^{n+1}$
$\sin x$	$\sin(x+n\pi/2)$
$\cos x$	$\cos(x+n\pi/2)$
e^x	e^x
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$
a^x	$a^x(\ln a)^n$
$1/(x^2+a^2)$	$(-1)^n n!\sin\left[(n+1)\operatorname{arccot}\frac{x}{a}\right]\Big/\left[a(x^2+a)^{\frac{n+1}{2}}\right]$
$x/(x^2+a^2)$	$(-1)^n n!\cos\left[(n+1)\operatorname{arccot}\frac{x}{a}\right]\Big/\left[(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}\right]$

n 次求导的运算法则：$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$，$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$，以及如下定理.

定理 4.6.1(Leibniz 法则) 设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 处有 n 阶导数存在，则

$$\begin{aligned}(u\cdot v)^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\\&=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)}+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.\end{aligned}$$

注 1 设 $f(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3-1/x+2/(2x-3)}$ $(0<x<3/2)$，$f(0)=0$ $(x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 3/2)$，则 $f\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$，且 $f'(1)=1$.

注 2 设 $f(x)=x^{2n}\cdot\sin(1/x)$ $(x\neq 0)$，$f(0)=0$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$ n 次可导，但不存在 $(n+1)$阶导数.

注 3 设定义在 $U(x_0)$上的 $f(x)$满足 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=l$，但 $f''(x_0)$不一定存在.例如 $f(x)=x^2\sin(1/x)$ $(x\neq 0)$，$f(0)=0$.

例 4.6.1 设 $y=f[g(x)]$，求 y'''.

解 记 $u=g(x)$，则 $y'_z=(f[g(x)])'=f'(u)g'(x)=f'[g(x)]g'(x)$.

$$\begin{aligned}(f[g(x)])''&=f''(u)[g'(x)]^2+f'(u)g''(x)\\&=f''[g(x)][g'(x)]^2+f'[g(x)]g''(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f[g(x)])'''&=f'''(u)[g'(x)]^3+2f''(u)g'(x)g''(x)\\&\quad+f''(u)g'(x)g''(x)+f'(u)g'''(x)\\&=f'''[g(x)][g'(x)]^3+3f''[g(x)]g'(x)g''(x)+f'[g(x)]g'''(x).\end{aligned}$$

注　符号 $f''[g(x)]$表示 $f''(u)$中的 u用 $g(x)$代替的意思,而$(f[g(x)])''$表示 $f[g(x)]$作为 x 的函数对 x 的二次导数.

例 4.6.2　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,x_0]$上二次可导,试求 a,b,c之值,使得

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant 0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>0\end{cases}$$

在 $x=x_0$ 处二次可导.

(2) 设 $ax^2+bx+c>0(-\infty<x<\infty)$,试证明

$$I=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}\sqrt{ax^2+bx+c}=0.$$

解　(1) 为使 $f''(x_0)$存在,必须有

(i) $F(x)$在 $x=x_0$ 处连续,由此易知 $c=f(x_0)$.

(ii) 由 $F'_-(x_0)=F'_+(x_0)$可知,$b=f'(x_0)$.

(iii) 由 $F''_-(x_0)=F''_+(x_0)$可知,$a=f''(x_0)/2$.

(2) 记 $\varphi(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$,我们有 $\varphi'(x)=\dfrac{ax+b/2}{\varphi(x)}$,以及

$$\begin{aligned}\varphi''(x)&=[a\cdot\varphi(x)-(ax+b/2)^2/\varphi(x)]/\varphi^2(x)\\&=(ac-b^2/4)\varphi^3(x).\end{aligned}$$

由此即可得证.

例 4.6.3　求下列 $f(x)$的 n 阶导数:

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$.　　　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解　(1) 改写 $f(x)$为 $f(x)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{1}{c}\left(b-\dfrac{ad}{c}\right)(x+d/c)^{-1}$,则可得

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{1}{c}\left(b-\frac{ad}{c}\right)\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-n-1}\cdot n!.$$

(2) $f'(x)=1\cdot(1-2x)^{-3/2}$,$f''(x)=1\cdot 3(1-2x)^{-5/2}$,设 $f^{(k)}(x)=(2k-1)!!(1-2x)^{-(2k+1)/2}$,则 $f^{(k+1)}(x)=(2k+1)!!(1-2x)^{-[2(k+1)+1]/2}$.从而有

$$f^{(n)}(x)=(2n-1)!!(1-2x)^{-(2n+1)/2}.$$

例 4.6.4　试求下列函数 $f(x)$的 n 阶导数:

(1) $f(x)=x^2\cos 2x$.　　　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^x\cdot\sin x$.

(3) $f(x)=x^n\ln x(x>0)$.　　　　(4) $f(x)=\ln x/x(x>0)$.

(5) $f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$.

解　(1) 用 Leibniz 法则,视 $u=\cos 2x$,$v=x^2$,注意$(x^2)^{(k)}=0(k>2)$,则有

$$(x^2\cos 2x)^{(n)}=\binom{n}{0}x^2(\cos 2x)^{(n)}+\binom{n}{1}(x^2)'(\cos 2x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}(x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)}.$$

再利用余弦函数的 n 阶导数公式，可知

$$(x^2\cos 2x)^{(n)}=2^n\left(x^2-\frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^n nx\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(2) $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{n/2}\cdot e^x\cdot\sin(x+n\pi/4)$.

(3) $(x^n\ln x)^{(n)}=n!(\ln x+1+1/2+1/3+\cdots+1/n)$.

(4) $(\ln x/x)^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot x^{-n-1}(\ln x-1-1/2-\cdots-1/n)$.

(5) $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n e^{1/x}/x^{n+1}\ (x\neq 0)$.

注 一般情况：$\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=(-1)^n f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\Big/x^{n+1}$.

例 4.6.5 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

(2) 设 $P_{n,m}(x)=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$，求 $P_{n,m}(1)$.

解 (1) 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，所以可以写成 $f'(x)(1+x^2)=1$. 对该式两端求 $(n-1)$ 次导数，且对左端应用 Leibniz 法则，视 $u=f'(x)$，$v=(1+x^2)$，可得

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0.$$

由此知 $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)(n\geqslant 2)$.

由 $f^{(2)}(0)=0$，得 $f^{(2k)}(0)=0$. 由 $f'(0)=1$，得 $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\cdot(2k)!$.

(2) 我们有

$$\frac{d}{dx}(1-x^m)^n=n(1-x^m)^{n-1}\cdot(-1)\cdot mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(1-x^m)^n=n(n-1)(1-x^m)^{n-2}(-1)^2(mx^{m-1})^2+n(1-x^m)^{n-1}(-1)m(m-1)x^{m-2},$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n=n!(-1)^n(mx^{m-1})^n+\cdots.$$

由此知 $P_{n,m}(1)=(-1)^n\cdot n!\,m^n$.

例 4.6.6 求下列函数 $f(x)$ 的 n 阶导数：

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$.　　　　(2) $f(x)=\frac{12}{x^2+a^2}$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$，所以得到

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

注 本例求导运算之所以简便，是因为将原式分解成一次式 $(ax+b)^a$ 的组合. 类似地如对

$P(x)=(x^2-1)^n$ 求 $P^{(n)}(1)$,也是先用分解 $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$,再用 Leibniz 法则来得方便.还有,如求 $\sin^2 x$ 以及 $\ln(x^2+x-2)$的 n 阶导数,也应先将其化为$\frac{1-\cos 2x}{2}$以及 $\ln|x-1|+\ln|x+2|$再求导为宜.

(2) 利用复数分解公式$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-a\mathrm{i}}-\frac{1}{x+a\mathrm{i}}\right)$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,可知

$$\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a\mathrm{i})^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2a\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(x-a\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(x+a\mathrm{i})^{n+1}}\right].$$

现在令 $x=a\cot\theta, 0<\theta<\pi, \theta=\operatorname{arccot}(x/a)$,则

$$x\pm a\mathrm{i}=a(\cot\theta\pm\mathrm{i})=a(\cos\theta\pm\mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta.$$

由此可知

$$\frac{1}{(x\pm a\mathrm{i})^{n+1}}=\frac{\sin^{n+1}\theta}{a^{n+1}}[\cos(n+1)\theta\mp\mathrm{i}\sin(n+1)\theta].$$

代入前式并注意 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$,我们有

$$\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\sin^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta}{a^{n+2}}$$

$$=(-1)^n n!\frac{\sin[(n+1)\operatorname{arccot}(x/a)]}{a(x^2+a^2)^{(n+1)/2}}.$$

例 4.6.7 解答下列问题:

(1) 设 $g\in C^{(n-1)}(U(x_0))$,$f(x)=(x-x_0)^n g(x)$,求 $f^{(n)}(x_0)$.

(2) 设 $f(x)$在(a,b)上可导,且有 $f'(x)=f^2(x)$,求 $f^{(n)}(x)$.

(3) 设 $f(x)$在(a,b)上可导,且存在 $g\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$,使得

$$f'(x)=g[f(x)]\qquad(a<x<b),$$

则 $f\in C^{(\infty)}((a,b))$.

解 (1) 由题设知 $f^{(n-1)}(x)$是存在的,且考虑到 $f(x)$是乘积型,求 $f^{(n-1)}(x)$当应用 Leibniz 求导公式.注意到乘积因子 $(x-x_0)^n$,易知这一求导公式中的许多项可分为两个部分:

$$f^{(n-1)}(x)=n!(x-x_0)g(x)+(x-x_0)^2 g(x)$$

$$=n!(x-x_0)g(x)+o(x-x_0)\qquad(x\to x_0).$$

由此可知 $f^{(n-1)}(x_0)=0$,且有

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{n!(x-x_0)g(x)+o(x-x_0)}{x-x_0}=n!g(x_0).$$

(2) 易知存在 $f'(x)$,且有 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$, $x\in(a,b)$.从而有 $f'''(x)=3!\cdot f^{(4)}(x)$.运用归纳法,易得

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot f^{n+1}(x),\qquad x\in(a,b).$$

(3) 应用复合函数求导公式,我们有

$$f''(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)=g'[f(x)]g[f(x)],$$
$$f'''(x)=g''[f(x)]\cdot g^2[f(x)]+(g'[f(x)])^2g[f(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

运用归纳法,易知 $f^{(n)}(x)$是函数 $g^{(k)}[f(x)]$($k=0,1,2,\cdots,n-1$)的乘积之和.

例 4.6.8 设 $y=f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^m$,试证明

(1) $(1+x^2)y''+xy'=m^2y$.

(2) $(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+(n^2-m^2)y^{(n)}=0$,

并由此求出 $f^{(n)}(0)$.

证明 (1) 由 $\ln y=m\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,可知

$$\frac{y'}{y}=m\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\Big/\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{m}{\sqrt{1+x^2}},$$

即$(1+x^2)y'^2=m^2y^2$.故对此式再求导,有

$$(1+x^2)2y'y''+2xy'^2=2m^2yy'.$$

从而当 $y'\neq0$ 时就可导出式(i).

(2) 在式(1)两端对 x 求 n 次导数,并应用 Leibniz 公式,则

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+n\cdot2x\cdot y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2y^{(n)}+xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=m^2y^{(n)}.$$

由此可得式(2).

为求 $f^{(n)}(0)$,令式(ii)中 $x=0$,我们有 $f^{(n+2)}(0)=(m^2-n^2)f^{(n)}(0)$.注意到 $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)=m^2$,可知

$$f'''(0)=(m^2-1^2)f'(0)=(m^2-1^2)m,$$
$$f^{(4)}(0)=(m^2-2^2)f''(0)=(m^2-2^2)m^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(2k-1)}(0)=[m^2-(2k-3)^2][m^2-(2k-5)^2]\cdots(m^2-3^2)(m^2-1^2)m,$$
$$f^{(2k)}(0)=[m^2-(2k-2)^2][m^2-(2k-4)^2]\cdots(m^2-4^2)(m^2-2^2)m.$$

反函数的高阶导数

以二阶导数为例,设 $f(x)$是(a,b)上的严格单调且二次可微函数,$f'(x)\neq0$,则反函数 $x=f^{-1}(y)$在值域(也为一开区间)$J=R(f)$上二次可微,且有

$$(f^{-1})''(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},\qquad x=f^{-1}(y),\qquad y\in J.$$

实际上,此时我们已经知道 $x=f^{-1}(y)$在 J上可微,且有

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}.$$

再注意到 $f'(x)$在(a,b)上可微.可知复合函数 $f'[f^{-1}(y)]$在 J上可微,而且

$$f'[f^{-1}(y)]=f'(x)\neq 0,\qquad y\in J.$$

这就说明函数$(f^{-1})'(y)$在 J上可微,即 $f^{-1}(y)$在 J上二次可微,且有

$$(f^{-1})''(y)=\left(\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}\right)'=-\frac{f''[f^{-1}(y)](f^{-1})'(y)}{(f'[f^{-1}(y)])^2}$$

$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

注　从导数运算看问题,下述记法更为简便些:记 $y'=y'_x$,$y''=y''_{x^2}$,则

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=(y')^{-1}.$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(y')^{-1}=-(y')^{-2}\frac{dy'}{dy}=-(y')^{-2}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}$$

$$=-(y')^{-2}y''(y')^{-1}=-\frac{y''}{(y')^3},\quad x=f^{-1}(y).$$

例 4.6.9　设 $y=x+x^5$,求 x''_{y^2}.

解　因为 $y'_x=1+5x^4$,$y''_{x^2}=20x^3$,所以 $x''_{y^2}=\dfrac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}$.

例 4.6.10　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$在$(-1,1)$上可导,试说明即使存在极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=l$,也可以不存在 $f''(0)$.

(2) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上二次可导.若有

$$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)+f^2(y)-1\qquad(x,y\in\mathbf{R}^1),\qquad(*)$$

试证明 $f(x)$满足方程 $f''(x)=\pm\lambda^2f(x)(\lambda\geqslant0)$.

解　(1) 由题设易知 $f(0)=0$.从而可得(ξ位于 0 与 x 之间)

$$l=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{x}\qquad(f'(\xi)\to f'(0)(x\to0)),$$

于是又有 $f'(0)=0$.因此问题归结为:是否存在极限$\lim\limits_{x\to0}f'(x)/x$? 易知下述函数 $f(x)$不存在这一极限:

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

这是可导函数,且有$\lim\limits_{x\to0}f(x)/x^2=0$.但是又成立等式

$$\frac{f'(x)}{(x)}=3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\qquad(x\neq0)$$

而不存在极限$\lim\limits_{x\to0}f'(x)/x$.

(2) 在式($*$)两端对 y 求导,可得

$$f'(x+y)f(x-y)-f(x+y)f'(x-y)=2f(y)f'(y). \qquad (**)$$

再在上式两端对 x 求导,又得

$$f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y)=0. \qquad (***)$$

在式($*$),($**$)中取 $x=y=0$,可知 $f^2(0)=2f^2(0)-1$,$2f(0)f'(0)=0$.由此知 $f(0)=\pm1$,$f'(0)=0$.现在对任意 $t\in\mathbf{R}^1$,在式($***$)中选取 $x=y=t/2$,我们有 $f''(t)f(0)-f(t)f''(0)=0$.这就导出 $f''(t)\pm\lambda^2 f(t)=0$($\lambda=|f''(0)|^{1/2}$).

参数式函数的高阶导数

设有 x 的函数 y 由参数方程($\varphi'(t)$,$\psi'(t)$存在)$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 给出,$x=\varphi(t)$存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,且 $\varphi'(t)\neq0$,则由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$($t=\varphi^{-1}(x)$)可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}\frac{1}{\varphi'(t)}$$
$$=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

注 具体计算时,不一定硬套公式.如对由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 表达的函数 $y=y(x)$,已知 $y'_x=\cot\dfrac{t}{2}$,所以

$$y''_{x^2}=\left(\cot\frac{t}{2}\right)'_t t'_x=\left(\cot\frac{t}{2}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{4\sin^4\frac{t}{2}}.$$

(二) 高阶微分

设 $y=f(x)$在区间 I 上可微(即可导).因为 $f'(x)$是 I 上的函数,所以其微分(dx 给定)

$$dy=f'(x)dx$$

仍是 I 上的函数.因此,如果 dy 在某点 x 处可微,那么仍可计算它的一阶微分,即它在点 x 的导数乘以 x 的改变量.在这里,我们特别取此改变量与原来对 $y=f(x)$作一阶微分时相同,即 $dx=\Delta x$,且称此时 dy 的微分为 $y=f(x)$在点 x 处的**二阶微分**(**量**),记为 d^2y 或 $d^2f(x)$.从而有

$$d^2y\triangleq d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)(dx)^2,$$

或记为 $d^2y=f''(x)dx^2$.

注 这里的 dx 与 x 无关,所以$(dx)'_x=0$.此外,还把$(dx)^2$ 记为 dx^2,在函数 $y=f(x)$高阶微分表达式中,这种记法不会理解为 x^2 的微分.

类似地,若 $y=f(x)$的二阶微分 d^2y 在点 $x\in I$ 处可导,仍取 x 的改变量与原来的相同,可以定义它的三阶微分 $d^3y=d(d^2y)=f'''(x)(dx)^3=f'''(x)dx^3$.

应用数学归纳法,当 $d^{n-1}y$ 在点 $x\in I$ 处可导时,作 $d^{n-1}y$ 的一阶微分,并取 x 的改变量与原来的相同,记为 $d^ny=d(d^{n-1}y)$,称为 $y=f(x)$在点 x 处的 n 阶微分.即

$$d^ny=y^{(n)}dx^n=f^{(n)}(x)dx^n.$$

因此,由高阶微分表达式还可得到$\dfrac{d^n y}{dx^n}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$.

相应于高阶导数的运算关系,也可推出 n 阶微分运算公式.

设 $u=u(x)$,$v=v(x)$在点 x 处的 n 阶微分存在,易知

$$d^n(cu)=c\,d^n u,\qquad d^n(u+v)=d^n u+d^n v,$$

以及 Leibniz 法则:$d^n(u\cdot v)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d^{n-k}u\cdot d^k v$,其中约定 $d^0 u=u$,$d^0 v=v$.

关于函数的商$\dfrac{u}{v}$,以二阶微分为例,我们有

$$\begin{aligned}
d^2\left(\frac{u}{v}\right)&=d\left(d\left(\frac{u}{v}\right)\right)=d\left(\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\right)\\
&=\frac{v^2\cdot d(v\,du-u\,dv)-(v\,du-u\,dv)d(v^2)}{v^4}\\
&=\frac{v^2\cdot(v\,d^2u+du\,dv-du\,dv-u\,d^2v)}{v^4}-\frac{2v\,dv(v\,du-u\,dv)}{v^4}\\
&=\frac{1}{v}d^2u-\frac{u}{v^2}d^2v-\frac{2}{v^2}du\,dv+\frac{2u}{v^3}dv^2.
\end{aligned}$$

在复合函数 $y=y[u(x)]$的情形,求 y 对 x 的二阶微分时,自变量是 x(不是 u),从而在 $dy=y'_u du$ 中,$du=u'_x dx$ 是 x 的函数.故得

$$d^2y=d(y'_u du)=d(y'_u)du+y'_u d(du)=y''_{u^2}du\cdot du+y'_u d^2u=y''_{u^2}du^2+y''_u d^2u.$$

注 这是二阶微分的一般公式.当 u 是自变量时,有 $d^2u=d(du)=0$,所以又回到 $d^2y=y''_{u^2}du^2$.因此,一般说来,函数的二阶微分,没有微分形式的不变性,且在 x 不是自变量时,$d^n y/dx^n$ 也不是 n 阶导数 $y^{(n)}_{x^n}$.

例 4.6.11 设 $y=x^n e^x$,求 $d^n y$.

解 根据 Leibniz 公式,我们有

$$\begin{aligned}
d^n y&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d^k(x^n)d^{(n-k)}(e^x)\\
&=e^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(dx)^{n-k}\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}(dx)^k\\
&=e^x(dx)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 k!\,x^{n-k}.
\end{aligned}$$

例 4.6.12 试作定义在$(-\infty,\infty)$上的 $C^{(\infty)}(\mathbf{R})$函数 $f(x)$,满足条件:

(i) $f(x)=0(x<0$ 或 $x>2)$. (ii) $f'(1)=1$.

解 利用 $\varphi(x)=e^{-1/x}(x>0)$, $\varphi(x)=0(x\leqslant 0)$的性质,作函数如下:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}e^{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{2x-3}}, & 0<x<\dfrac{3}{2},\\[2ex] 0, & x\leqslant 0,\ x\geqslant\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

例 4.6.13 对 $\varepsilon>0$, $\alpha\in\mathbf{R}$,试作 $f\in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, 满足

(i) $|f^{(k)}(x)|\leqslant\varepsilon\ (k=0,1,2,\cdots,n-1,x\in\mathbf{R})$.

(ii) $f^{(k)}(0)=0\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$.　(iii) $f^{(n)}(0)=\alpha$.

解　令 $g(x)=\sin^n x$，易知 $g^{(n)}(0)=n!$. 现在对 $\lambda>0$，记 $C=\alpha/(n!\lambda^n)$，作 $f(x)=C\cdot\sin^n(\lambda x)$，则 $f^{(n)}(0)=C\lambda^n\cdot n!=\alpha$.

此外，还存在 $M>0$，使得 $|g^{(k)}(x)|\leqslant M(k=0,1,2,\cdots,n-1;0\leqslant x\leqslant 2\pi)$. 故

$$|f^{(k)}(x)|=|C|\lambda^k|g^{(k)}(x)|\leqslant|C|\lambda^k M\quad(x\in\mathbf{R}).$$

取 $\lambda\geqslant\max(1,|\alpha|/n!\varepsilon)$，即得 $|f^k(x)|\leqslant\varepsilon(k=0,1,2,\cdots,n-1;x\in\mathbf{R})$.

4.7　光滑曲线的几何量

(一) 两曲线之间的交角

设两条曲线 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处相交，且在此点上两曲线都有切线，则定义此两切线的夹角为该两曲线之间的**交角** $\left(\text{约定为从 } 0 \text{ 到 } \frac{\pi}{2}\right)$.

若两曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f_1(x_0)=f_2(x_0)=y_0$，则此两曲线在 (x_0,y_0) 点处的交角之正切为 $\tan\theta=\left|\dfrac{f_1'(x_0)-f_2'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}\right|$，其中当 $1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)=0$ 时表示此两曲线之切线在过点 (x_0,y_0) 处时互相垂直.

例 4.7.1　求曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 的交角.

解　易知该两曲线之交点为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$，且其导数各为 $y'=2x$，$y'=\dfrac{1}{2y}$，易知在点 $(0,0)$ 处该两曲线之交角为 $90°$. 又在点 $(1,1)$ 处，由于它们的切线斜率各为 $y'|_{x=1}=2$ 与 $y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，故知其交角的正切为 $3/4$，即 $\theta\sim 37°$.

(二) 弧长的微分

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，记 $M_0=(a,f(a))$，$M=(x,f(x))$，弧长 $\overset{\frown}{M_0M}$ 记为 s，它是 x 的函数，则

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2},\qquad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

当函数由参数式 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示时，弧长的微分为 $ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$.

(三) 曲线的曲率

设 $y=f(x)$ 二次可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处的曲率值(称 $1/k$ 为曲率半径)

$$k=\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|\Big/\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

当曲线由参数式 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$表示时,则曲率 $k=\left|\dfrac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}}\right|$.

当曲线由极坐标形式 $r=f(\theta)$表示时,则曲率 $k=\dfrac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$.

Newton 公式:当曲线 $y=f(x)$在原点$(0,0)$处与 x 轴相切时,它在原点处的曲率为 $K=\lim\limits_{x\to0}2f(x)/x^2$.一般而言,为求 $y=f(x)$在其上 P 点处的曲率 K_P,可在曲线上取一动点 Q,过 Q 点向曲线在点 P 处的切线作垂线,记垂足为点 M,则 $K_P=\lim\limits_{Q\to P}2\overline{MQ}/(\overline{PM})^2$.

例 4.7.2 设 $r=f(\theta)$是二次可导的,记曲线 $r=f(\theta)$上动点处的向径与切线之交角为 φ,则在该点处的曲率为 $K=\dfrac{\sin\varphi}{r}\left(1+\dfrac{d\varphi}{d\theta}\right)$.

证明 注意到 $\tan\varphi=r/r'$,有 $r'=r\cot\varphi$.从而得

$$r''=r'\cot\varphi-r\csc^2\varphi\cdot\frac{d\varphi}{d\theta}=r\cot^2\varphi-r\csc^2\varphi\cdot\frac{d\varphi}{d\theta},$$

$$K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}=\frac{r^2+2r^2\cot^2\varphi-r^2\cot^2\varphi+r^2\csc^2\varphi\cdot\dfrac{d\varphi}{d\theta}}{(r^2+r^2\cot^2\varphi)^{3/2}}$$

$$=\frac{r^2\csc^2\varphi\cdot\left(1+\dfrac{d\varphi}{d\theta}\right)}{r^3\csc^2\varphi}=\frac{\sin\varphi}{r}\left(1+\frac{d\varphi}{d\theta}\right).$$

例 4.7.3 曲率 K 与弧长 s 的关系:

(1) $K=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)$. (2) $K^2=\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2$.

证明 记 $y=f(x)$的切线斜率为 $\tan\alpha=\dfrac{dy}{dx}$,则 $\cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}$,$\sin\alpha=\dfrac{dy}{ds}$.我们有

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{ds}\right)=\dfrac{d(\sin\alpha)}{dx}=\dfrac{d(\sin\alpha)}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dx}=\cos\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{d\alpha}{ds}=K$.

(2) $\dfrac{d^2x}{ds^2}=\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)=\dfrac{d(\cos\alpha)}{ds}=-\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{ds}\cdot\dfrac{d^2y}{ds^2}=\cos\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{ds}$.

例 4.7.4 设有二次曲线记为 C,其中心为(α,β),且在原点$(0,0)$处与 x 轴相切,又曲线 C 在原点处的曲率半径为 ρ.试求 C 之表达式.

解 因为曲线 C 通过原点,所以其表达式可写为

$$C:\ ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0. \qquad (*)$$

而注意到其中必为点(α,β),故又有公式

$$a\alpha+h\beta+g=0,\qquad h\alpha+b\beta+f=0.$$

在式$(*)$两端对 x 求导得 $2ax+2hy+2hxy'+2byy'+2g+2fy'=0$.

在上式中,令 $x=y=0$,$y'=0$,就有 $g=0$.因为在原点处曲线 C 之曲率半径为 $\rho=\lim\limits_{x\to 0}x^2/2y$,所以在式(*)两端除以 $2y$,且令 $x\to 0$,$y\to 0$,可导出

$$\lim_{x\to 0}a\left(\frac{x^2}{2y}\right)+\lim_{x\to 0}hx+\lim_{x\to 0}\frac{by}{2}+f=0.$$

由此知 $a\rho+f=0$,即 $f=-a\rho$.

综合以上所述,我们有

$$h=-\frac{a\alpha}{\beta},\qquad b=\frac{a\rho-h\alpha}{\beta}=\frac{a\beta\rho+a\alpha^2}{\beta^2}.$$

最后得出 C:$\beta^2x^2-2\alpha\beta xy+(\beta\rho+\alpha^2)y^2=2\beta^2\rho y$.

第 5 章 微分学(二):微分中值定理、Taylor 公式

5.1 微分中值定理

定理 5.1.1(Rolle) 设 $f(x)$在(a,b)上可微,在$[a,b]$上连续,且有 $f(b)=f(a)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

定理 5.1.2(Lagrange) 设 $f(x)$在(a,b)上可微,在$[a,b]$上连续,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{或} \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

在 Lagrange 中值公式中,记 a为 x,b为 $x+\Delta x$($\Delta x=b-a$,$\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$ 均可),且令

$$\theta=\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{\xi-x}{\Delta x}, \qquad x<\xi<x+\Delta x \quad \text{或} \quad x+\Delta x<\xi<x,$$

则得 $\xi=x+\theta\Delta x$ 或 $\xi=a+\theta(b-a)$.此时,公式又写为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad 0<\theta<1.$$

定理 5.1.3(Cauchy) 设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,且 $g'(x)\neq 0$,$x\in(a,b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

注 1 设 $f(x)$在(a,b)上可导,$x_0\in(a,b)$.虽然在公式

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$$

中,令 $x\to x_0$,有 $f'(x_0+\theta(x-x_0))=f'(x_0)$,但这不能说明 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处连续.例如函数

$$f(x)=x^2\sin(1/x)(x\neq 0), \qquad f(0)=0$$

在 $x_0=0$ 处就是这种情形,即 $f'(x)$在 $x=0$ 处不连续.其中原因是 $\theta(x)$可能是间断函数,例如:

$$f(x)=x\cdot\sin(\ln x) \quad (x>0), \qquad f(0)=0.$$

此时中值公式为 $f(x)-f(0)=xf'(\theta(x))$,$0<\theta(x)<x$,即

$$x\cdot\sin(\ln x)=x[\sin(\ln\theta(x))+\cos(\ln\theta(x))], \qquad \sin(\ln x)=\sqrt{2}\cos[\ln\theta(x)-\pi/4].$$

考察区间$(0,x)$,$x_0\in(0,x)$,取 Δx 使得 $x_0+\Delta x\in(0,x)$,则

$$\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\cos[\ln\theta(x_0)-\pi/4], \qquad \sin(\ln(x_0+\Delta x))=\sqrt{2}\cos[\ln(x_0+\Delta x)-\pi/4].$$

由此知

$$\ln\theta(x_0)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\frac{\sin(\ln\theta(x_0))}{\sqrt{2}} \qquad (k=0,-1,-2,\cdots),$$

$$\ln\theta(x_0+\Delta x)=\frac{\pi}{4}+2n\pi\pm\arccos\frac{\sin(\ln(x_0+\Delta x))}{\sqrt{2}} \qquad (n=0,-1,-2,\cdots).$$

从而得到

$$\ln\theta(x_0+\Delta x)-\ln\theta(x_0)=2\pi(n-k)\pm\left[\arccos\frac{\sin(\ln(x_0+\Delta x))}{\sqrt{2}}-\arccos\frac{\sin(\ln x_0)}{\sqrt{2}}\right],$$

$$|\ln\theta(x_0+\Delta x)-\ln\theta(x_0)|\geqslant 2\pi|n-k|\geqslant\pi \qquad (|n-k|\geqslant 1).$$

这说明 $\theta(x)$在$(0,\delta)$上是间断函数.

注 2 Lagrange 中值定理之逆不真,即对任意的 $\xi\in(a,b)$,不一定能找到 $x_1,x_2\in(a,b)$且 $x_1<\xi<x_2$,使得 $f'(\xi)=[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1)$.例如 $f(x)=x^3$,$\xi=0$.

例 5.1.1 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=e^x$,求在公式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 中的 θ.

(2) 设 $f(x)=1/x$,$0<x_0<x_0+\Delta x$,则公式

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

中之 θ满足:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta=1/2$.

解 (1) 因为 $e^{x+\Delta x}-e^x=e^{x+\theta\Delta x}\cdot\Delta x$,所以 $\theta=\ln[(e^{\Delta x}-1)/\Delta x]/\Delta x$.

(2) 由$\dfrac{1}{x_0+\Delta x}-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{\Delta x}{(x_0+\theta\Delta x)^2}$可知

$$x_0(x_0+\Delta x)=(x_0+\theta\Delta x)^2, \qquad \Delta x\theta^2+2x_0\theta-x_0=0.$$

解此方程可得

$$\theta=\frac{-2x_0+\sqrt{4x_0^2+4x_0\Delta x}}{2\Delta x}=x_0\frac{\sqrt{1+\Delta x/x_0}-1}{\Delta x},$$

由此即知 $\theta\to 1/2(\Delta x\to 0)$.

例 5.1.2 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上二次可导.若曲线 $y=f(x)$与两点$(a,f(a))$,$(b,f(b))$间的连结直线有交点$(c,f(c))$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=0$.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$三次可导,且有 $f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'''(\xi)=0$.

(3) 设 $f\in C([a,\infty))$,且在(a,∞)上可微.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$,则存在 $\xi\in(a,\infty)$,使得$f'(\xi)=0$.

(4) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可导,且有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则存在 $\xi\in(-\infty,\infty)$,使得 $f'(\xi)=0$.

(5) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.若 $f(a)=f(b)$且不是常数,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)>0$.

(6) 设 $f(x)$在$[a,b]$上二次可导,$f(a)=f(b)=0$,若存在 c:$a<c<b$,使得 $f(c)>0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)<0$.

证明 (1) 易知存在 $\xi_1\in(a,c)$,$\xi_2\in(c,b)$,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.由此即知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f''(\xi)=0$.

(2) 由 $f(a)=f(b)$可知,存在 $\xi_1\in(a,b)$,使得 $f'(\xi_1)=0$.又由 $f'(a)=f'(b)=0$ 可知,存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)$,$\xi_3\in(\xi_1,b)$,使得 $f''(\xi_2)=0=f''(\xi_3)$.从而又知存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)$,使得 $f'''(\xi)=0$.

(3) 作变量替换 $x=\varphi(t)=1/t+a-1$,则 $\varphi(1)=a,\varphi(t)\to+\infty(x\to0+)$.又记 $g(t)=f[\varphi(t)]$,则 $g(t)$在$(0,1)$上可导,注意到 $g(t)\to g(1)(t\to0+)$,可以令 $g(0)=g(1)$,使得 $g\in C([0,1])$.

对 $g(x)$在$[0,1]$上应用Rolle定理可知,存在 $\xi'\in(0,1)$,使得 $g'(\xi')=0$.现在令 $\xi=\varphi(\xi')$,则由 $f'(\xi)\varphi'(\xi')=0$ 以及 $\varphi'(\xi')=-1/\xi'^2\neq0$,可得 $f'(\xi)=0$.

(4) 作替换 $x=\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)=\varphi(t),-1<t<1$.

(5) 不妨设 $x_0\in(a,b)$有 $f(x_0)>f(a)$,从而有

$$0<f(x_0)-f(a)=f'(\xi)(x_0-a),\qquad a<\xi<x_0,$$

即得所证.

(6) 易知有$(a<\xi_1<c,c<\xi_2<b)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1),\qquad \frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2),$$

$$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=f''(\xi),\qquad \xi_1<\xi<\xi_2.$$

从而得 $f''(\xi)=\dfrac{-f(c)}{\xi_2-\xi_1}\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}\right)=\dfrac{-(b-a)f(c)}{(\xi_2-\xi_1)(b-c)(c-a)}<0$.

例 5.1.3　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$且在(a,b)上可微.若 $f(x)>0(a\leqslant x\leqslant b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)/f(a)=\mathrm{e}^{(b-a)f'(\xi)/f(\xi)}$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$且在(a,b)上可微.若 $f(x)\neq0(a<x<b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)/f(\xi)=1/(a-\xi)+1/(b-\xi)$.

证明　(1) 作函数 $F(x)=\ln f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则由中值公式知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得$[F(b)-F(a)]/(b-a)=F'(\xi)$,即

$$\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)},\qquad \ln\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]=(b-a)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

从而在等式两端取指数即可得证.

(2) 作函数 $F(x)=(x-a)(x-b)f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $F(a)=F(b)=0$.由此知存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$0=F'(\xi)=(\xi-b)f(\xi)+(\xi-a)f(\xi)+(\xi-a)(\xi-b)f'(\xi).$$

在上式两端除以$(\xi-a)(\xi-b)f(\xi)$,即可得证.

例 5.1.4　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b]),g\in C([a,b])$,且均在$(a,b)$上可导.若 $f(a)=f(b)=0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导,且 $f'(0)=0$,则存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0.$$

(3) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 二次可导,且 $g''(x)\neq 0(x\in(a,b))$.若有

$$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0,$$

则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

(4) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且在 (a,b) 上 $g'(x)\neq 0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明 (1) 作 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$,由题设知 $F(a)=F(b)=0$,从而存在 $\xi\in(a,b)$,$F'(\xi)=0$,即 $e^{g(\xi)}g'(\xi)f(\xi)+e^{g(\xi)}f'(\xi)=0$.由此可得所证.

(2) 由于原式左端 $f'(\xi)$ 前没有乘积因子,而 $f''(\xi)$ 前却有,这显然不易成为其他函数的导数形式.注意到

$$(e^{g(x)}f(x))'=e^{g(x)}(f'(x)+g'(x)f(x)),\qquad \left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{(x-1)^2},$$

故将原式调整为

$$\frac{f'(\xi)}{(\xi-1)^2}-f''(\xi)=0\quad 或\quad f''(\xi)-\frac{f'(\xi)}{(\xi-1)^2}=0.$$

再作辅助函数 $F(x)=e^{1/(x-1)}f'(x)(0\leqslant x<1)$.虽然此函数在 $x=1$ 处无定义,但由于 $\lim\limits_{x\to 1-}f'(x)=f'(1)$,而且 $\lim\limits_{x\to 1-}e^{1/(x-1)}=0$,故只要令 $F(1)=0$,就可使 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 上可导.因此由 $F(0)=e^{-1}f'(0)=0=F(1)$ 可知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $0=F'(\xi)=e^{\frac{1}{\xi-1}}\left[f''(\xi)-\dfrac{1}{(\xi-1)^2}f'(\xi)\right]$,即得所证.

(3) (i) 易知 $g(x)\neq 0(a<x<b)$(否则将导致 $g''(\xi')=0$).(ii) 作 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,易知 $F(a)=F(b)=0$,故存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$.由此得证.

(4) 我们解此题的思路是:作辅助函数并纳入 Rolle 定理的框架.由于目标等式的模样不利于设计辅助函数,故先将其改写为(摆平)

$$[f(a)-f(\xi)]g'(\xi)=f'(\xi)[g(\xi)-g(b)],$$

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(b)-f(a)g'(\xi)=0,$$

不难判定,上式左端是函数 $F(x)=f(x)g(x)-f(x)g(b)-f(a)g(x)$ 在 $x=\xi$ 处的导数,因此 $F(x)$ 就是辅助函数.

因为 $F(a)=-f(a)g(b)=F(b)$,所以根据 Rolle 定理可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即得所证.

例 5.1.5 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,1])$,在 $(0,1)$ 上可导且 $f(1)=0$,则存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$,在(a,b)上可导.若有 $f(a)\cdot f(b)>0$,$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$,则对任给的 $\lambda\in(-\infty,\infty)$,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.

(3) 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导,且有 $0<f(x)<1$,$f'(x)\neq 1$,$x\in[0,1]$,则存在唯一的 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=\xi$.

(4) 设 $f\in C([a,b])$,在(a,b)上可导.若 $f^2(a)-f^2(b)=b^2-a^2$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)f(\xi)+\xi=0$.

(5) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上可导,且 $0\leqslant f(x)\leqslant x/(1+x^2)$,$0\leqslant x<\infty$,则存在 $\xi\in(0,\infty)$,使得 $f'(\xi)=(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$.

证明　(1) 作辅助函数 $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 $F(0)=0=F(1)$.故存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)+\xi\mathrm{e}^{-\xi}(-1)f(\xi)+\xi\mathrm{e}^{-\xi}f'(\xi)=0,$$
$$\mathrm{e}^{-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0.$$

由此知 $f'(\xi)=f(\xi)(\xi-1)/\xi$.证毕.

(2) 作 $F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $F(a)F(b)>0$,$F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$.从而知存在 ξ_1,ξ_2:$a<\xi_1<(a+b)/2<\xi_2<b$,使得 $F(\xi_1)=0=F(\xi_2)$.由此又得 $\xi\in(a,b)$,$F'(\xi)=0$,即 $\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-\lambda f(\xi)]=0$,$f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.

(3) (i) 作 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(0)>0>F(1)$.由连续性知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

(ii) 假定另有 $\xi'\in(a,b)$;$\xi'\neq\xi$使得 $f(\xi')=\xi'$,即 $F(\xi')=0$.注意到 $F(\xi)=0$ 可知,存在 $\xi''\in(0,1)$,使得 $F'(\xi'')=0$,$f'(\xi'')-1=0$,$f'(\xi'')=1$.这与题设矛盾.证毕.

(4) 作 $F(x)=f^2(x)+x^2$,则 $F(a)=F(b)$.从而知存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $2[f'(\xi)f(\xi)+\xi]=0$.证毕.

(5) 作 $F(x)=f(x)-x/(1+x^2)$,则 $F(0)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.从而知存在 $\xi\in(0,\infty)$,使得 $F'(\xi)=0$.因为 $F'(x)=f'(x)-(1-x^2)/(1+x^2)^2$,所以由 $F'(\xi)=0$可得 $f'(\xi)=(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$.

例 5.1.6　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导,且 $f(0)=f(1)=0$,则存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导,且 $f(0)=0$,$f(x)>0(0<x<1)$,则存在 $\xi\in(0,1)$,使得$\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

(3) 设 $f\in C([a,b])$,在(a,b)上二次可导,且有

$$f'(a)=f'(b)=0,\qquad f(x)>0\qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$.

证明 (1) 易知存在 $\xi'\in(0,1)$,$f'(\xi')=0$.作函数

$$F(x)=\mathrm{e}^{(1-x)^2f'(x)},\qquad F(1)=F(\xi'),$$

由此可知存在 $\xi\in(\xi',1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$\mathrm{e}^{(1-\xi)^2f'(\xi)}\cdot(1-\xi)[(1-\xi)f''(\xi)-2f'(\xi)]=0.$$

从而有$(1-\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)$.证毕.

(2) 作函数 $F(x)=f^2(x)f(1-x)$.由 $F(0)=F(1)=0$ 可知,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $2f(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^2(\xi)f'(1-\xi)=0$.由此即得所证.

(3) 作 $F(x)=f'(x)/f^2(x)$,则 $F(a)=F(b)=0$.故知存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即$\{f''(\xi)f(\xi)-2[f'(\xi)]^2\}/f^3(\xi)=0$.由此知此式分子为0,证毕.

例 5.1.7 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,\infty))$,且在$(0,\infty)$上可导,$f(0)=0$,则对任意的 $x\in(0,\infty)$,存在 $\xi\in(0,x)$,使得 $f(x)=(1+\xi)\cdot\ln(1+x)f'(\xi)$.

(2) 设 $f\in C^{(1)}([a,b])$,且存在 c:$a<c<b$,使得 $f'(c)=0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

(3) 若 $f(x)$在$[a,b]$上可导,且有 $f'(a)=f'(b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)(\xi-a)=f(\xi)-f(a)$.

(4) 设 $f(x)$在$[3\pi/4,7\pi/4]$上可导,且 $f(3\pi/4)=0$,$f(7\pi/4)=0$,则存在 $\xi\in(3\pi/4,7\pi/4)$,使得 $f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$.

证明 (1) 注意 Cauchy 中值公式,我们有

$$\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+x)-\ln(1+0)}=\frac{f'(\xi)}{1/(1+\xi)}=(1+\xi)f'(\xi).$$

由此即得所证.

(2) 作辅助函数 $F(x)=[f(x)-f(a)]\mathrm{e}^{-x/(b-a)}$,则 $F(a)=0$.由 $f'(c)=0$ 可知 $F'(c)=-F(c)/(b-a)$.

(i) 若 $F(c)\neq0$,则存在 $\xi'\in(a,c)$,使得

$$F'(\xi')=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a},\qquad F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}=-\frac{c-a}{b-a}F'(\xi').$$

由此知 $F'(c)$与 $F'(\xi')$反号,故根据连续性可知,存在 $\xi\in(\xi',c)$,使得 $F'(\xi)=0$.即 $f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]/(b-a)=0$.

(ii) 若 $F(c)=0$,则存在 $\xi\in(a,c)$,使得 $F'(\xi)=\dfrac{F(c)-F(a)}{c-a}=0$.即得所证.

(3) 不妨假定 $f'(a)=0$(否则考察 $g(x)=f(x)-xf'(a)$),并作函数 $F(x)=$

$[f(x)-f(a)]/(x-a)$ ($a<x\leqslant b$), $F(a)=0$,易知 $F(x)$在$(a,b]$上可导,且有 $F'(b)=-F(b)/(b-a)$.

(i) 若 $F(b)=0$,则由 $F(a)=0$ 可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f'(\xi)(\xi-a)-[f(\xi)-f(a)]=0$.

(ii) 若 $F(b)\neq0$,则 $F(b)F'(b)<0$,由 $F(a)=0$ 可知,存在 $x_0\in(a,b)$,使得

$$F(x_0)\geqslant\max\{F(a),F(b)\}\quad 或\quad F(x_0)\leqslant\min\{F(a),F(b)\}.$$

从而知存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$.

(4) 将原式写为 $f'(\xi)+[f(\xi)-\cos\xi]=0$,则根据上题解答的启示,应增加非零因子 $e^{g(x)}$.从而作辅助函数 $F(x)=e^x[f(x)-(\cos x+\sin x)/2]$.而由 $F(3\pi/4)=F(7\pi/4)=0$,可知有 $\xi\in(3\pi/4,7\pi/4)$,使得 $F'(\xi)=0$,即得所证.

例 5.1.8　试证明下列命题:

(1) 若 $f(x)$在(a,b)上可导,且是无界函数,则 $f'(x)$在(a,b)上也无界.

(2) 设 $f(x)$在$(0,1]$上可导.若有

$$f(x)>0\quad(0<x\leqslant1),\qquad f(x)\to0\quad(x\to0+),$$

则 $F(x)=f'(x)/f(x)$在$(0,1]$上无界.

(3) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导,且 $f(a)=0$.若存在 $l>0$,使得 $|f'(x)|\leqslant l|f(x)|$ $(x\in[a,b])$,则 $f(x)\equiv0$.

(4) 设 $f\in C^{(2)}((-\infty,\infty))$,且有 $|f(x)|\leqslant1$, $|f'(0)|>1$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

证明　(1) 反证法.假定 $f'(x)$在(a,b)上有界,则由 $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|$可知,$f\in\mathrm{Lip}1(a,b)$,更有 $f(x)$在(a,b)上一致连续.这导致 $f(x)$在(a,b)上有界,矛盾.

(2) 由$[\ln f(x)]'=F(x)$可知

$$\frac{\ln f(1)-\ln f(x)}{1-x}=F(\xi(x)),\qquad 0<x<\xi(x)<1.$$

而上式左端在$(0,1)$上是无界函数,故 $F(x)$必在$[0,1]$上无界.

(3) 反证法.假定点集$\{x\in[a,b]:f(x)\neq0\}$非空,则记 $x_0=\inf\{x\in[a,b]:f(x)\neq0\}$,由 $f(x)$的连续性可知,$f(x_0)=0$.

取 x_1: $x_1>x_0$ 且 $f(x_1)\neq0$, $1/(x-x_0)>l$.又记 $|f(x_2)|=\max\{|f(x)|:x_0\leqslant x\leqslant x_1\}$,则

$$\begin{aligned}l\,|f(x_2)|&<|f(x_2)/(x_1-x_0)|\leqslant|[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_0)|\\&=|f'(\xi)|\leqslant l\,|f(\xi)|,\qquad x_0<\xi<x_2.\end{aligned}$$

由此知 $|f(x_2)|<|f(\xi)|$.这与 $|f(x_2)|$是最大值矛盾.这说明没有点 x,使得 $f(x)\neq0$,即 $f(x)\equiv0$.

(4) 为使 $f''(\xi)+f(\xi)$成为导数式,作辅助函数 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$.此

时有 $F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$.

(i) 若存在$[a,b]$:$a<0<b$,使得 $F(a)<F(0)>F(b)$,则令 $M=F(\xi)$为 $F(x)$在$[a,b]$上的最大值.显然 $\xi\neq a,b$,故 $0=F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]$.注意到 $f'(\xi)\neq 0$(否则 $F(\xi)(=f^2(\xi))\geqslant F(0)\geqslant|f'(0)|^2$,矛盾),可知 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

(ii) 若对一切 $x>0$,有 $F(x)\geqslant F(0)$,则记 $F(0)=1+\delta,\delta>0$(因为 $F'(0)>1$).从而有$[f'(x)]^2=F(x)-f^2(x)\geqslant F(0)-1=\delta$(一切 x),即 $|f'(x)|>\sqrt{\delta}$.于是对一切 $x>0$,有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(0)+f'(\xi)x|\\&\geqslant|f'(\xi)||x|-|f(0)|\geqslant\sqrt{\delta}|x|-1,\qquad 0<\xi<x.\end{aligned}$$

这就导致当 $x\to+\infty$时,有 $|f(x)|\to+\infty$,矛盾.

(iii) 若对一切 $x<0$,有 $F(x)\geqslant F(0)$,也可推出矛盾.

例 5.1.9 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上可导,且 $f'(x)$是递减函数,$f(0)=0$,则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$ $(x_1,x_2>0)$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.若有 $\varepsilon_0>0$,

$$f(a)<\varepsilon_0,\qquad f(x)+f'(x)<\varepsilon_0\qquad(a<x<b),$$

则 $f(x)<\varepsilon_0$ $(a<x<b)$.

(3) 设 $f(x)$在$[0,1]$上有两个零点.若有 $|f''(x)|\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1)$,则

$$|f(x)|\leqslant 1/2\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

证明 (1) 不妨设 $0<x_1<x_2$,我们有

$$\begin{aligned}&f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)=[f(x_1+x_2)-f(x_2)]-[f(x_1)-f(0)]\\&=f'(x_2+\theta_1x_1)x_1-f'(\theta_2x_1)\cdot x_1\leqslant 0,\qquad 0<\theta_1,\theta_2<1.\end{aligned}$$

(2) 作 $F(x)=\mathrm{e}^xf(x)-\varepsilon_0\mathrm{e}^x$,我们有

$$F'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)-\varepsilon_0]<0,\qquad a<x<b.$$

这说明 $F(x)$在(a,b)上递减.又注意到 $F(a)=\mathrm{e}^a[f(a)-\varepsilon_0]<0$,故知 $F(x)<0$,即 $f(x)<\varepsilon_0$ $(a<x<b)$.

(3) 为了应用二阶导函数的估值,我们期望作出一个具有三个零点的函数,如

$$F(x)=f(x)-f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

其中 x_1,x_2 是 $f(x)$的两个零点,x_0 是异于 x_1,x_2 的$[0,1]$中的点,从而存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)-f(x_0)\dfrac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=0$.由此可知 $|f(x_0)|=|f''(\xi)|\dfrac{|(x_0-x_1)(x_0-x_2)|}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.由于 x_0(与 x_1,x_2 不同)是任意取的,即得所证.

例 5.1.10 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上二次可导.若有 $|f''(x)|\leqslant M(x\in\mathbf{R})$,则存在 ξ:$f''(\xi)=0$.

(2) 存在唯一的 $\lambda\in\mathbf{R}$ 满足:对定义在$[0,1]$上的任意具有性质 $f(0)=0$,$f(1)=1$ 的可微函数 $f(x)$,总有 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=\lambda\xi$.

(3) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微,且 $f'(x)\neq1$,则 $f(x)$至多有一个不动点.(称满足 $f(x_0)=x_0$ 的 x_0 为 f 的不动点.)

(4) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导,且 $f''(x)>0(x\in[a,b])$.若 $f(0)>0$,$f(1)=1$,则存在 $0<d<1$,$f(d)=d$ 当且仅当 $f'(1)>1$.

证明 (1) 因为 $f''(x)$有界,所以 $f'(x)$不能是严格单调的.从而知存在 $x_1<x_2<x_3$,使得

$$f'(x_1)>f'(x_2)<f'(x_3).$$

又由 $f'(x)$的连续性可知,存在 $y_1<y_2$,使得 $f'(y_1)=f'(y_2)$.从而导致存在 $\xi\in(y_1,y_2)$,使得

$$0=f'(y_2)-f'(y_1)=f''(\xi)(y_2-y_1),\qquad f''(\xi)=0.$$

(2) 作函数 $g(x)=x^2/2$,则 $g(1)=1/2$,$g(0)=0$.故有

$$2=\frac{1-0}{1/2-0}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{\xi}.$$

这说明取 $\lambda=2$ 即可得证.

(3) 反证法.若存在两个不动点 x_1,x_2:$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$,$f(x_1)=x_1$,$f(x_2)=x_2$,则由中值定理知,存在 $x_1<\xi<x_2$,使得

$$x_2-x_1=f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

由此导出 $f'(\xi)=1$,这与题设矛盾.

(4) 必要性.设 $f(d)=d(0<d<1)$,则由中值定理知,存在 ξ:$d<\xi<1$,使得 $1=[f(1)-f(d)]/(1-d)=f'(\xi)$.此外.根据题设,$f'(x)$是严格递增的.因此,$f'(1)>1$.

充分性.略.

例 5.1.11 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.若 $f(a)=f(b)=1$,则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.若 $f(a)=0$,$f(x)>0(x\in(a,b))$,则对任意的自然数 n,m,存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得$\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{mf'(\eta)}{f(\eta)}$.

(3) 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.若 $f(0)=0$,$f(1)=1$,则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1(\xi\neq\eta)$.

证明 (1) 记原式为 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$,则左端是 $F(x)=e^{x}f(x)$在 $x=\eta$

处的导数,右端是函数 $G(x)=e^x$ 在 $x=\xi$ 处的导数.从而由 $f(a)=f(b)=1$ 可知

$$F(b)-F(a)=e^b f(b)-e^a f(a)=e^b-e^a=G(b)-G(a).$$

因此存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$F'(\eta)(b-a)=G'(\xi)(b-a),\qquad F'(\eta)=G'(\xi).$$

(2) 令 $F(x)=f^n(x)f^m(a+b-x)$,则 $F(a)=F(b)=0$.故存在 $\zeta\in(a,b)$,使得 $F'(\zeta)=0$,即

$$nf^{n-1}(\zeta)f^m(a+b-\zeta)f'(\zeta)-mf^n(\zeta)f^{m-1}(a+b-\zeta)f'(a+b-\zeta)=0,$$

$$\frac{nf'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{mf'(a+b-\zeta)}{f(a+b-\zeta)}.$$

从而令 $\xi=\zeta,\eta=a+b-\zeta$,即得所证.

(3) 作 $F(x)=f(x)+x-1$,则 $F(0)=-1,F(1)=1$.由此知存在 $\zeta\in(0,1)$,使得 $F(\zeta)=0,f(\zeta)=1-\zeta$.从而有 $\xi\in(0,\zeta),\eta\in(\zeta,1)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\zeta)-f(0)}{\zeta},\qquad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\zeta)}{1-\zeta}.$$

注意到 $f(\zeta)-f(0)=1-\zeta,f(1)-f(\zeta)=\zeta$,即得所证.

例 5.1.12 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,且在 (a,b) 上可导.若 $f(x)$ 不是线性函数,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $|f(b)-f(a)|<|f'(\xi)||b-a|$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导.则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是:对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,\qquad 0<|h|<\delta.$$

证明 (1) 作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,则 $F(a)=F(b)=0$.由题设知 $F(x)\not\equiv0\ (x\in(a,b))$,所以存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)>0$,$F'(\eta)<0$,即

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\qquad f'(\eta)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ 证毕.

(2) 必要性.由 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon,x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$.应用中值公式,可对 $[a,b]$ 中任一点 x,有(注意:$|\xi-x|<|h|<\delta$)

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=|f'(\xi)-f'(x)|<\varepsilon.$$

充分性.对任一点 $x\in[a,b]$,以及 $0<|h|<\delta$,只要 $x+h\in[a,b]$,由题设可知

$$|f'(x+h)-f'(x)|$$

$$\leqslant\left|f'(x+h)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|+\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|$$

$$<\left|f'(x+h)-\frac{f(x+h-h)-f(x+h)}{-h}\right|+\varepsilon<2\varepsilon,$$

即 $f'(x)$在$[a,b]$上一致连续.

例 5.1.13 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,在(a,b)上除 n 个点外均可导,则存在 $n+1$ 个点:$a<c_1<c_2<\cdots<c_{n+1}<b$,以及 $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$,$\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,n+1)$,使得

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f'(c_i)(b-a).$$

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$,则

(i) $(0,1)$中存在 $x_1<x_2$,使得 $1/f'(x_1)+1/f'(x_2)=2$.

(ii) $(0,1)$中存在 $x_1<x_2<x_3$,使得 $1/f'(x_1)+1/f'(x_2)+1/f'(x_3)=3$.

(3) 设 $f\in C^{(3)}([-1,1])$,且有 $f(-1)=0$,$f(1)=1$,$f'(0)=0$.则存在 $\xi\in(-1,1)$,使得 $f'''(\xi)=\xi$.

(4) 设 $f_k\in C([a,b])$,$g_k\in C([a,b])(k=1,2,\cdots,n)$,且都在$(a,b)$上可导.若 $g_k(a)\neq g_k(b)(k=1,2,\cdots,n)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\sum_{k=1}^{n}f'_k(\xi)=\sum_{k=1}^{n}g'_k(\xi)\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}.$$

证明 (1) 只需看 $n=1$,并假定 $f(x)$在 $d(a<d<b)$处不可导,我们有

$$f(d)-f(a)=f'(c_1)(d-a),\qquad a<c_1<d,$$
$$f(b)-f(d)=f'(c_2)(b-d),\qquad d<c_2<b.$$

令 $\alpha_1=(d-a)/(b-a)$,$\alpha_2=(b-d)/(b-a)$,知 $\alpha_1+\alpha_2=1$,且 $\alpha_1>0$,$\alpha_2>0$,则

$$f(b)-f(a)=[\alpha_1 f'(c_1)+\alpha_2 f'(c_2)](b-a).$$

(2) (i) 取 c:$0<c<1$,使得 $f(c)=1/2$.从而有

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{1}{2c},\qquad 0<x_1<c,$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1}{2(1-c)},\qquad c<x_2<1.$$

由此即得所证.

(ii) 取 c_1,c_2:$0=c_0<c_1<c_2<c_3=1$,使得 $f(c_i)=i/3(i=1,2)$,则$(i=1,2,3)$

$$f'(x_i)=\frac{f(c_i)-f(c_{i-1})}{c_i-c_{i-1}}=\left(\frac{i}{3}-\frac{i-1}{3}\right)/(c_i-c_{i-1})=\frac{1}{3(c_i-c_{i-1})}.$$

由此知 $\sum_{i=1}^{3}1/f'(x_i)=\sum_{i=1}^{3}3(c_i-c_{i-1})=3$.

(3) 我们希望作 $F(x)=f(x)-P(x)$,使得

$$F(-1)=0,\qquad F(1)=0,\qquad F(0)=0,\qquad P'''(x)=3.$$

这说明 $P(x)$应为三次多项式:$P(x)=x^3/2+Ax^2+Bx+C$.

因为

$$\begin{aligned}&P(-1)=0,\quad -1/2+A-B+C=0,\\&P(1)=1,\quad 1/2+A+B+C=1,\\&P'(0)=0,\quad B=0,\quad C=f(0).\end{aligned}$$

所以 $P(x)=x^3/2+(1/2-f(0))x^2+f(0)$.此时,我们有

$$F(-1)=F(1)=F(0)=F'(0)=0.$$

由此知存在 $\xi\in(-1,1)$,$F'''(\xi)=0$,即 $f'''(\xi)=\xi$.

(4) 考察函数 $F(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[f_k(x)-f_k(a)-(g_k(x)-g_k(a))\dfrac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}\right]$

即可.

例 5.1.14　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,1])$,且在$(0,1)$上二次可导.若有 $f(0)=f(1)=0$ 以及$f''(x)<0(0<x<1)$,且记其最大值为 $M=f(\bar{x})$,则对任意的自然数 n,存在 $x_n\in(0,1)$,使得 $f(x_n)=M/n(n\in\mathbf{N})$.

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}((a,b))$,$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是(a,b)内 $n+1$ 个点.又有 n次多项式 $P(x)$,满足 $P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$.则对任一 $x\in(a,b)$,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}Q(x),$$

其中 $Q(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

证明　(1) 作函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{M}{n}x$,则 $F(0)=0$,$F(1)<0$.但我们有

$$F(\bar{x})=f(\bar{x})-\frac{M}{n}\bar{x}=M\left(1-\frac{\bar{x}}{n}\right)>0,$$

从而存在 $x_n\in(0,1)$,使得 $F'(x_n)=0$,$f(x_n)=M/n$.

(2) 记 $\varphi(x)=[f(x)-P(x)]/Q(x)$,以及作函数

$$F(t)=f(t)-P(t)-Q(t)\varphi(x),$$

则易知 $F(x)=0$,$F(x_i)=0(i=0,1,2,\cdots,n)$.根据 Rolle 定理,存在

$$\xi_{1,1},\xi_{1,2},\cdots,\xi_{1,n+1};\qquad F'(\xi_{1,k})=0\qquad(k=1,2,\cdots,n+1).$$

由此可知存在 n个点

$$\xi_{2,1},\xi_{2,2},\cdots,\xi_{2,n};\qquad f''(\xi_{2,k})=0\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

如此继续下去,可得(a,b)中的两个点:

$$\xi_{n,1},\xi_{n,2};\qquad F^{(n)}(\xi_{n,k})=0\qquad (k=1,2).$$

现在,因为 $P^{(n+1)}(t)=0$, $F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!\varphi(t)$,所以由 $F^{(n+1)}(\xi)=0$ 可得 $f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\varphi(\xi)=0$, $\varphi(\xi)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

例 5.1.15 试证明下列命题:

(1) 若存在 $f''(0)$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^2}=f''(0)$.

(2) 设 $h>0$, $f\in C([a-h,a+h])$,在 $(a-h,a+h)$ 上可导,则存在 θ: $0<\theta<1$,使得 $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 上二次可导,则对 $x\in(a,b)$,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{2}(x-b)f''(\xi).$$

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上二次可导, $a<b<c$,则存在 $\xi\in(a,c)$,使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

(5) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上三次可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]=f'''(\xi)(b-a)^3/12.$$

(6) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

(7) 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可导,且 $0<|h|<1$,则对 $x\in(0,1)$,存在 $\theta\in(0,1)$,使得 $f(xh)=xf(h)+(1-x)f(0)+\dfrac{1}{2}x(x-1)f''(\theta h)h^2$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证明 (1) 记 $[f(2h)-2f(0)+f(-2h)]/4h^2=A\,(=A(h))$,作

$$F(x)=f(2x)-2f(0)+f(-2x)-4Ax^2,$$

则 $F(0)=0=F(h)$,故存在 $\xi\in(0,h)$(或 $(h,0)$),使得 $F'(\xi)=0$.由此知

$$\frac{2f'(2\xi)-2f'(-2\xi)}{8\xi}=\frac{[f'(2\xi)-f'(0)]-[f'(-2\xi)-f'(0)]}{4\xi}=A.$$

从而令 $h\to 0$,即得 $A(h)\to f''(0)$.

(2) 记 $[f(a+h)-f(a-h)]/h=A$,作函数

$$F(x)=f(a+x)-f(a-x)-Ax,$$

则 $F(0)=0=F(h)$.故存在 θ:$0<\theta<1$,使得 $F'(\theta h)=0$,即

$$f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h)-A=0.$$

由此即得所证.

(3) 对给定的 $x\in(a,b)$而言,应有

$$\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\Big/\frac{x-b}{2}=A(\text{常数}),$$

从而问题转化为 $A=f''(\xi)(\xi\in(a,b))$.改写上式为

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{x-b}{2}A=0,$$

$$[f(x)-f(a)](b-a)-[f(b)-f(a)](x-a)-\frac{A}{2}(b-a)(x-a)(x-b)=0.$$

由于涉及二阶导数,期望作出三个零点的辅助函数:

$$F(t)=[f(x)-f(a)](t-a)-[f(t)-f(a)](x-a)$$
$$-\frac{A}{2}(t-a)(x-a)(x-t).$$

易知 $F(b)=0=F(a)=F(x)$,根据 Rolle 定理,存在 $\xi_1\in(a,x)$,$\xi_2\in(x,b)$,使得 $F'(\xi_1)=0$,$F'(\xi_2)=0$.再根据 Rolle 定理知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f''(\xi)=0$.因为

$$F'(t)=f(x)-f(a)-f'(t)(x-a)-\frac{A}{2}[(x-a)(x-t)-(t-a)(x-a)],$$

$$F''(t)=-f''(t)(x-a)-\frac{A}{2}[-(x-a)-(x-a)]=(x-a)[A-f''(t)],$$

所以由 $F''(\xi)=0$ 可推出 $A=f''(\xi)$,即得所证.

(4) 记 $2\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right]=A$,且作

$$F(x)=f(x)(b-c)+f(b)(c-x)+f(c)(x-b)+\frac{A}{2}(x-b)(b-c)(c-x),$$

则 $F(a)=0=F(b)=F(c)$.由此知存在 $\xi\in(a,c)$,$f''(\xi)=0$.因为

$$F'(x)=f'(x)(b-c)-f(b)+f(c)+A(b-c)(b+c-2x)/2,$$
$$F''(x)=f''(x)(b-c)-A(b-c)=(b-c)[f''(x)-A],$$

所以由 $F''(\xi)=0$ 推出 $A=f''(\xi)$.

(5) 记 $12\left\{f(a)-f(b)+\frac{b-a}{2}[f'(a)+f'(b)]\right\}\Big/(b-a)^3=A$,且作

$$F(x)=f(x)-f(b)+\frac{b-x}{2}[f'(x)+f'(b)]-\frac{A}{12}(b-x)^3,$$

则 $F(a)=0=F(b)$.由此知存在 $\xi'\in(a,b)$,$F'(\xi')=0$.因为

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)+f'(b)}{2}+\frac{b-x}{2}f''(x)+\frac{A}{4}(b-x)^2,$$

所以 $F'(b)=0$.从而知存在 $\xi\in(\xi',b)$,$f''(\xi)=0$.由于

$$F''(x)=f''(x)-\frac{f''(x)}{2}-\frac{f''(x)}{2}+\frac{b-x}{2}f'''(x)-\frac{A}{2}(b-x)$$

$$=\frac{1}{2}(b-x)[f'''(x)-A],$$

故由 $F''(\xi)=0$ 可得 $A=f'''(\xi)$.

(6) 记$\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=A$,作函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-[g(x)-g(a)-(x-a)g'(a)]A,$$

则 $F(b)=0=F(a)$.由此知存在 $\xi'\in(a,b)$,$F'(\xi')=0$.因为

$$F'(x)=f'(x)-f'(a)-Ag'(x)+g'(a)A,$$

所以 $F'(a)=0$.从而又存在 $\xi\in(a,\xi')$,$f''(\xi)=0$.由于

$$f''(x)=f''(x)-Ag''(x),\qquad f''(\xi)-Ag''(\xi)=0,$$

故 $A=f''(\xi)/g''(\xi)$.

(7) 令 $2[f(xh)-xf(h)-(1-x)f(0)]/x(x-1)=A$,并作

$$F(t)=f(ht)-tf(h)-(1-t)f(0)-\frac{A}{2}(t-1)t,$$

则 $F(x)=0=F(0)=F(1)$.由此知存在 $\theta\in(0,1)$,使得 $f''(\theta)=0$.因为

$$F'(t)=hf'(ht)-f(h)+f(0)-\frac{A}{2}(2t-1),$$

$$F''(t)=h^2f''(ht)-A,$$

所以 $F''(\theta)=0$,即 $A=h^2f''(\theta h)$.

(8) 记$\left[f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)\right]\Big/\dfrac{(b-a)^2}{4}=A$,作

$$F(x)=f(x)-2f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f(a)-\frac{(x-a)^2}{4}A,$$

则 $F(b)=0=F(a)$.由此知存在 $\xi'\in(a,b)$,使得 $F'(\xi')=0$,即

$$f'(\xi')-f'\left(\frac{a+\xi'}{2}\right)-\frac{\xi'-a}{2}A=0.$$

再对上式 $f'(x)$用中值公式,可知存在 $\xi\in\left(\dfrac{a+\xi'}{2},\xi'\right)$,使得

$$f'(\xi')-f'\left(\frac{a+\xi'}{2}\right)=f''(\xi)\left(\xi'-\frac{a+\xi'}{2}\right).$$

从而有 $f''(\xi)\left(\xi'-\dfrac{a+\xi'}{2}\right)-\dfrac{\xi'-a}{2}A=0$,$[f''(\xi)-A]\dfrac{\xi'-a}{2}=0$,$A=f''(\xi)$.

例 5.1.16　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l$,则对任意的 A 值,有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+A)-f(x)]=lA.$$

(2) 设 $f(x)$在(a,∞)上可导.

(i) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)/x=0$.

(ii) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)/x=0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

(3) 设 $f(x)$,$g(x)$在(a,∞)上可导,且有$|g'(x)|<f'(x)(a<x<\infty)$.若存在$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则存在$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

(4) 设 $f(x)$在(a,∞)上可导,且$|f'(x)|$在(a,∞)上递减.若存在$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.

证明　(1) 在式 $f(x+A)-f(x)=f'(x+\theta A)\cdot A$ 中令 $x\to+\infty$即可.

(2) (i) 易知(运用下一节中 L'Hospital 法则)$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(ii) 易知$[f(2n)-f(n)]/n\to0(n\to\infty)$,故由中值公式即知 $f'(n+\theta n)\to0$ $(n\to\infty,0<\theta<1)$.从而必有$\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

(3) 易知 $f'(x)>0(a<x<\infty)$,因此存在 $X:X>a$,使得当 $x'',x'>X$ 时有 $f(x'')\neq f(x')$.从而有

$$\left|\frac{g(x'')-g(x')}{f(x'')-f(x')}\right|=\frac{|g'(\xi)|}{|f'(\xi)|}<1,$$

其中 ξ位于 x'与 x''之间.由此可得$|g(x'')-g(x')|<|f(x'')-f(x')|$.这说明在 $x\to+\infty$过程中,$g(x)$满足 Cauchy 列条件.证毕.

(4) 由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>a$,使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon\qquad(x_2>x_1>X).$$

从而有$(x_1<\xi<x_2)$

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=|f'(\xi)|(x_2-x_1)\\&\geqslant|f'(x_2)|(x_2-x_1)=x_2|f'(x_2)|-x_1|f'(x_2)|\\&\geqslant|x_2f'(x_2)|-|x_1f'(x_1)|\geqslant0.\end{aligned}$$

这说明$\lim\limits_{x\to+\infty}|xf'(x)|=0$.

例 5.1.17　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(1)}([0,\infty))$,则存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=A$ 的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $f'(x)$在$[0,\infty)$上一致连续.

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}([-1,1])$,且$-1<a<b<1$.又记

$$I_1=[-1,a],\qquad I_2=[a,b],\qquad I_3=[b,1],\qquad I=[-1,1];$$

$$m_k(J)=\inf\{|f^{(k)}(x)|:x\in J\}\qquad(k\in\mathbf{N}),$$

$|J|$表示区间 J的长度,则

$$m_k(I)\leqslant\frac{1}{|I_2|}\{m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)\}\qquad(k\in\mathbf{N}).$$

证明　(1) 必要性.请参阅 L'Hospital 法则中的例.

充分性.只需指出 $f'(x)\to 0(x\to+\infty)$.若结论不真,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任意的 $X>0$,存在 $x''>x'>X$,使得 $|f'(x'')-f'(x')|\geqslant\varepsilon_0$,$f'(x'')\geqslant f'(x')+\varepsilon_0$.由此知存在 $\delta>0$,使得

$$f'(x)\geqslant[f'(x')+\varepsilon_0]/2,\qquad x\in(x''-\delta,x''+\delta).$$

从而有 l_0,使得(ξ 位于 t' 与 t'' 之间)

$$|f(t')-f(t'')|=|f'(\xi)(t'-t'')|\geqslant l_0|t'-t''|.$$

这与 $f(x)\to A(x\to+\infty)$矛盾.证毕.

(2) 对 $x_1\in I_1$,$x_3\in I_3$,我们有 $\dfrac{f^{(k-1)}(x_3)-f^{(k-1)}(x_1)}{x_3-x_1}=f^{(k)}(\xi)$,$\xi\in(x_1,x_3)$.

由此知

$$\begin{aligned}m_k(I)&\leqslant[|f^{(k-1)}(x_3)|+|f^{(k-1)}(x_1)|]/(x_3-x_1)\\&\leqslant\frac{1}{|I_2|}[|f^{(k-1)}(x_3)|+|f^{(k-1)}(x_1)|].\end{aligned}$$

再对 x_1,x_3 取遍 I_1,I_3 作下确界,可得 $m_k(I)\leqslant\dfrac{1}{b-a}[m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)]$.

注　特别,再增加条件 $|f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1)$.则

$$m_k(I)\leqslant\frac{1}{|I|^k}2^{k(k+1)/2}\cdot k^k\qquad(k\in\mathbf{N}).$$

实际上,运用归纳法,我们有:对 $k=1$,显然成立.现在设 k 结论为真,则对 $k+1$,有

$$\begin{aligned}m_{k+1}(I)&\leqslant\frac{1}{|I_2|}[m_k(I_1)+m_k(I_3)]\\&\leqslant\frac{1}{|I_2|}\left[\frac{1}{|I_1|^k}2^{k(k+1)/2}k^k+\frac{1}{|I_3|^k}2^{k(k+1)/2}k^k\right].\\&=2^{k(k+1)/2}\cdot k^k\left(\frac{1}{|I_1|^k\cdot|I_2|}+\frac{1}{|I_3|^k\cdot|I_2|}\right).\end{aligned}$$

现在取小区间如下:$|I_1|=|I_3|=k|I|/2(k+1)$,$|I_2|=|I|/(k+1)$,则

$$m_{k+1}(I)\leqslant 2^{(k+1)(k+2)/2}.(k+1)^{k+1}/|I|^{k+1}.$$

证毕.

例 5.1.18　试证明下列命题:

(1) $\dfrac{\ln 2+1}{4}=\dfrac{1}{2(1+\xi)^2}$,$-1<\xi<1$.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上二次可导.若 $f'(a)=f'(b)=0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明　(1) 将原式改写为 $\dfrac{\ln 2+1}{4}=\dfrac{1/(1+\xi)}{2(1+\xi)}$,则知右端分子为 $\ln(1+x)$在

$x=\xi$处的导数,分母为$(1+x)^2$ 在 $x=\xi$处的导数.从而认定

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \ln(1+x), & x>0. \end{cases} \qquad g(x)=(1+x)^2.$$

易知 $f(x)$在$[-1,1]$上可导,且 $4=g(1)-g(-1)$,$f(1)=\ln 2$,$f(-1)=-1$,用 Cauchy 中值公式即得所证.

(2) 若 $f(x)$是常数,结论自明,且由 $f'(a)=f'(b)=0$ 可知 $f(x)$不是线性函数.于是在$[a,(a+b)/2]$上对 $f(x)$与 $g(x)=(x-a)^2/2$ 应用 Cauchy 中值公式,在$[(a+b)/2,b]$上对 $f(x)$与 $g(x)=(b-x)^2/2$ 应用 Cauchy 中值公式,可得 $a<\xi_1<(a+b)/2$,$(a+b)/2<\xi_2<b$,以及

$$\frac{8\left[f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}, \qquad \frac{8\left[f(b)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}.$$

相加知

$$\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}+\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}.$$

既然 $f'(a)=f'(b)=0$,上式右端可写成

$$\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}-\frac{f'(b)-f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=f''(\eta_1)-f''(\eta_2),$$

其中 $a<\eta_1<\xi_1$,$\xi_2<\eta_2<b$.按绝对值估计我们有

$$\frac{8\mid f(b)-f(a)\mid}{(b-a)^2}\leqslant\mid f''(\eta_1)\mid+\mid f''(\eta_2)\mid.$$

现在不妨设 $f(b)\neq f(a)$(否则点 ξ可任取),从而在$|f''(\eta_1)|$与$|f''(\eta_2)|$两者之间必有一个不为 0.若记$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$,则 $8|f(b)-f(a)|/(b-a)^2\leqslant 2|f''(\xi)|$.由此我们有

$$f''(\xi)\geqslant\frac{4\mid f(b)-f(a)\mid}{(b-a)^2}.$$

例 5.1.19 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.对 $\xi\in(a,b)$,若 $f'(\xi)$不是(a,b)上的最大或最小值,则存在 a_1,b_1:$a<a_1<b_1<b$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1}.$$

证明 由题设知存在 c_1,$c_2\in(a,b)$,使得 $f'(c_1)<f'(\xi)<f'(c_2)$.因为

$$f'(c_i)=\lim_{x,y\to c_i}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \qquad (i=1,2),$$

所以在(a,b)中有 x_1,y_1,x_2,y_2,使得(设 $x_1\leqslant x_2$)

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1}<f'(\xi)<\frac{f(x_2)-f(y_2)}{x_2-y_2}.$$

现在令 $[f(x_1)-f(y_2)]/(x_1-y_2)=l$:

(i) $l>f'(\xi)$. 由于 $g(y)=[f(x_1)-f(y)]/(x_1-y)$ 在 (x_1,b) 上连续,且 $g(y_1)<f'(\xi)$, $g(y_2)>f'(\xi)$,故存在 y_3(位于 y_1 与 y_2 之间),使得

$$g(y_3)=f'(\xi), \qquad [f(x_1)-f(y_3)]/(x_1-y_3)=f'(\xi).$$

(ii) $l<f'(\xi)$. 由于 $h(x)=[f(x)-f(y_2)]/(x-y_2)$ 在 (a,y_2) 上连续,且 $h(x_2)>f'(\xi)$, $h(x_1)<f'(\xi)$,故存在 x_3: $x_1<x_3<x_2$,使得

$$h(x_3)=f'(\xi), \qquad [f(x_3)-f(y_2)]/(x_3-y_2)=f'(\xi).$$

例 5.1.20 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f(a)=f(b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(a)-f(\xi)=\xi f'(\xi)/2.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上二次可导, $f(0)=0$,则对任意的 $x>0$,存在 ξ, $0<\xi<x$,使得 $f'(x)-f(x)/x=\xi f''(\xi)$.

(3) 设 $b>a>0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $be^a-ae^b=(1-\xi)e^\xi(b-a)$.

证明 (1) 研究两个函数 $x^2f(x)$ 与 $x^2/2$ 的 Cauchy 中值公式,则

$$\frac{b^2f(b)-a^2f(a)}{b^2/2-a^2/2}=\frac{2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)}{\xi}, \quad a<\xi<b,$$

$$2\frac{f(a)(b^2-a^2)}{b^2-a^2}=2f(\xi)+\xi f'(\xi), \quad a<\xi<b,$$

由此即得所证.

(2) 研究 $F(x)=xf'(x)-f(x)$ 与 $G(x)=2x$ 的 Cauchy 中值公式,并注意到 $F(0)=0=G(0)$,我们有

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \qquad 0<\xi<x.$$

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{2x}=\frac{\xi f''(\xi)}{2}, \qquad f'(x)-\frac{f(x)}{x}=\xi f''(\xi).$$

(3) 考察 $f(x)=e^x/x$ 与 $g(x)=1/x$ 的 Cauchy 中值公式即可.

例 5.1.21 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,且在 (a,b) 上可导. 若 $f'(x)\neq 0$,则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可微,则有 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

(3) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $g(x)\neq 0$ 且 $g'(x)\neq 0$,则对 x_1, $x_2\in[a,b]$,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{1}{g(x_2)-g(x_1)}\begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) \\ g(x_1) & g(x_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(\xi)}\begin{vmatrix} f(\xi) & g(\xi) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证明 (1) 应用 Cauchy 中值公式,我们有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$, $a<\eta<b$.应用 Lagrange 中值公式,知

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{e^b-e^a}, \qquad a<\xi<b.$$

从而结论成立.

(2) 作函数

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}.$$

显然,$F(a)=0=F(b)$,且有

$$F'(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}.$$

从而由 Rolle 定理即得所证.

注 当 $h(x)=1$ 时,即 Cauchy 中值公式;$h(x)=1$, $g(x)=x$ 时,即 Lagrange 中值公式.

(3) 在 Cauchy 中值公式中,看函数 $f(x)/g(x)$ 与 $1/g(x)$,我们有

$$\frac{f(x_1)g(x_2)-f(x_2)g(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f(x_2)/g(x_2)-f(x_1)/g(x_1)}{1/g(x_2)-1/g(x_1)}$$

$$=\frac{[f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)]/g^2(\xi)}{-g'(\xi)/g^2(\xi)}=\frac{1}{g'(\xi)}[f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)].$$

用行列式写出上式,即得所证.

注 取 $g(x)=x$,则得等式 $\dfrac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_1-x_2}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

例 5.1.22 试证明下列不等式:

(1) $e^x\geqslant 1+x\ (x\in(-\infty,\infty))$.

(2) $(1+x/p)^p<(1+x/q)^q\ (x>0;0<p<q)$.

证明 (1) 应用 Lagrange 中值公式,我们有

$$\frac{e^x-1}{x}=e^\xi>1 \quad (x>0); \qquad \frac{e^x-1}{x}=e^\xi<1 \quad (x<0).$$

(2) 应用 Lagrange 中值公式,我们有

$$\frac{\ln(1+x/q)}{x/q}=\frac{1}{1+\xi_0}>\frac{1}{1+\xi_1}=\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{p}\right)-\ln\left(1+\dfrac{x}{q}\right)}{x/p-x/q},$$

$$0<\xi_1<x/q,\qquad x/q<\xi_2<x/p.$$

从而知$\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{q}\right)\ln\left(1+\frac{x}{q}\right)>\frac{x}{q}\left[\ln\left(1+\frac{x}{p}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{q}\right)\right]$,故得

$$\frac{x}{p}\ln\left(1+\frac{x}{q}\right)>\frac{x}{q}\ln\left(1+\frac{x}{p}\right).$$

证毕.

例 5.1.23　试证明$\frac{1}{n^{\alpha+1}}<\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right]$ $(\alpha>0)$.

证明　考察$f(x)=1/x^{\alpha}(\alpha>0)$,则$(n>1)$

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}=f(n-1)-f(n)=f'(n-1-\theta)(-1)$$

$$=-\frac{-\alpha}{(n-1-\theta)^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{(n-(1+\theta))^{\alpha+1}}>\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

例 5.1.24　解答下列问题:

(1) 设$f(x)$在$[c,d]$上可导,且有r使得$|f'(x)|\leqslant r<1$,$x\in[c,d]$.试证明数列$a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots,a_1\in[c,d])$收敛,且$a_n\to a(n\to\infty)$满足$f(a)=a$.

(2) 设$a_1=1$,$a_{n+1}=\cos a_n(n=1,2,\cdots)$,试论$\{a_n\}$的收敛性.

(3) 设$b>0$,$a_1>0$,$a_{n+1}=\sqrt{a_n+b}(n=1,2,\cdots)$,试论$\{a_n\}$的收敛性.

证明　(1) 由$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-f(a_{n-1})=f'(\xi_n)(a_n-a_{n-1})$($\xi_n$位于$a_n$与$a_{n-1}$之间)可知$|a_{n+1}-a_n|\leqslant r|a_n-a_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-1}|a_2-a_1|$.从而有

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|a_{n+i}-a_{n+i-1}|\leqslant|a_2-a_1|\sum_{i=1}^{p}r^{n+i-2}$$

$$=|a_2-a_1|r^{n-1}\frac{1-r^p}{1-r}\leqslant|a_2-a_1|\frac{r^{n-1}}{1-r}.$$

因此对$\varepsilon>0$,存在N,当$n>N$时,有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.这说明$\{a_n\}$是收敛列.若令$a_n\to a(n\to\infty)$,则由连续性可知$f(a)=a$.

(2) 考察函数$f(x)=\cos x(0\leqslant x\leqslant 1)$.因为

$$|f'(x)|=|\sin x|\leqslant\sin 1<1\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

所以根据(1)可知,$\{a_n\}$是收敛列,其极限a满足$a=\cos a$.

(3) 考察$f(x)=\sqrt{b+x}$,若有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则由$a=f(a)=\sqrt{b+a}$可知

$$a=(1+\sqrt{1+4b})/2>1.$$

从而取定变量范围为$x>1/2$,则得

$$|f'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{b+x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{2}}<1\qquad(x>1/2).$$

根据(1),可知$\{a_n\}$是收敛列,其极限为$a=(1+\sqrt{1+4b})/2$.

例 5.1.25 求下列极限：

(1) $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}(a>1)$.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}n[\arctan[\ln(n+1)]-\arctan(\ln n)]$.

(3) 设 $0<a<b$, $f\in C([a,b])$且在(a,b)上可微,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$[af(b)-bf(a)]/(a-b)=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

解 (1) 记 $f(x)=\sin x$, $g(x)=a^x$,应用 Cauchy 中值公式,有

$$I=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\xi}{a^{\xi}\ln a}\quad(\xi\text{位于 }a^a\text{ 与 }a^x\text{ 之间}).$$

由此即知 $I=\cos a^a/(a^{a^a}\cdot\ln a)$.

(2) 记 $f(x)=\arctan(\ln x)$,则由 Lagrange 中值公式知

$$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)=\frac{1}{(1+\ln^2\xi_n)\xi_n},\qquad n<\xi_n<n+1.$$

$$\frac{n}{[1+\ln^2(n+1)](n+1)}<nf'(\xi_n)=\frac{n}{(1+\ln^2\xi_n)\cdot\xi_n}<\frac{n}{(1+\ln^2 n)\cdot n}.$$

由此即知 $I=0$.

(3) 对函数 $f(x)/x$ 与 $1/x$ 应用 Cauchy 中值公式,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\left[\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}\right]\Big/\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\left[\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}\right]\Big/\left(-\frac{1}{\xi^2}\right).$$

整理后即可得证.

例 5.1.26 试证明下列不等式：

(1) $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}(a>1)$.

(2) $a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a\left(0<x<y<\dfrac{\pi}{2},a>\mathrm{e}\right)$.

(3) $(m+n)(1+x^m)\geqslant 2n(1-x^{m+n})/(1-x^n)\quad(x>0,m\geqslant n\geqslant 1)$.

证明 (1) 作 $f(x)=a^x$,则存在 ξ:$1/(n+1)<\xi<1/n$,使得

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{a^{\xi}\ln a}{n(n+1)}.$$

易知对上式右端有估计$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}\ln a}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\xi}\ln a}{n(n+1)}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}\ln a}{n^2}$,由此即得所证.

(2) 应用 Cauchy 中值公式,我们有

$$\frac{a^y-a^x}{\cos y-\cos x}=\frac{a^{\xi}\ln a}{-\sin\xi}<\frac{a^x\ln a}{-1}\qquad(x<\xi<y).$$

由此即得所证.

(3) 不妨考虑 $0<x<1$,否则用变量变换 $1/x$.作

$$F(x)=(1-x^n)(1+x^m)/(1-x^{m+n}),$$

并记 $f(x)=(1-x^n)(1+x^m)$, $g(x)=1-x^{m+n}$,我们有

$$F(x)=\frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{n\xi^{-m}+m+n-m\xi^{-n}}{m+n},\qquad 0<\xi<1.$$

从而只需指出 $n\xi^{-m}+m+n-m\xi^{-n}>2n$,或 $(m-n)\xi^m-m\xi^{m-n}+n>0$.作

$$G(t)=(m-n)t^m-mt^{m-n}+n\qquad(0<t<1).$$

因为 $G'(t)=m(m-n)t^{m-n-1}(t^n-1)<0\ (0<t<1)$,所以 $G(t)$ 递减.由 $G(1)=0$ 可知,$G(t)>0\ (0<t<1)$,即得所证.

例 5.1.27 解答下列问题:

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$,其中 $I_n=\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.

(2) 试证明公式 $2^x+5^x=3^x+4^x$ 只在 $x=0$ 与 1 才成立.

解 (1) 考察在区间 $[n,n+1]$ 上的递增函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,易知存在 $\xi_n\in(n,n+1)$,使得 $f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)$.因为 $f'(\xi_n)=(1+1/\xi_n)^{\xi_n}[\ln(1+1/\xi_n)-1/(1+\xi_n)]$,所以有

$$f'(\xi_n)<\left(1+\frac{1}{\xi_n}\right)^{\xi_n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+2}\right].$$

注意到 $\xi_n\to+\infty\ (n\to\infty)$,可得

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}f'(\xi_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\xi_n}\right)^{\xi_n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+2}\right]=0.$$

$\left(\text{这里用到公式}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+1/n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0.\right)$

(2) 改写该等式为 $5^x-4^x=3^x-2^x$,并作 $f(t)=t^x$,易知 $f(t)$ 在 $I=[2,3]$ 与 $J=[4,5]$ 上可导.应用微分中值公式,存在 $\xi_1\in(2,3)$, $\xi_2\in(4,5)$,使得

$$\begin{cases}x\xi_1^{x-1}=f'(\xi_1)=f(3)-f(2)=3^x-2^x,\\ x\xi_2^{x-1}=f'(\xi_2)=f(5)-f(4)=5^x-4^x.\end{cases}$$

现在假定还有 x_0: $x_0\neq0$ 与 1,使得原等式成立,那么由上式导出 $x_0\xi_1^{x_0-1}=x_0\xi_2^{x_0-1}$,即 $(\xi_1/\xi_2)^{x_0-1}=1$.但此式不再成立.证毕.

***例 5.1.28** 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,1])$,且在 $(0,1)$ 上可导.若有

$$f(0)=f(1)=0,\qquad f(1/2)=1/2,$$

则存在 $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(0,1)$,使得曲线 $y=f(x)$ 在此两点 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ 上的切线互相垂直.

(2) 设 $f(\theta)$ 是 $[\theta_1,\theta_2]$ 上的正值连续函数,且在 (θ_1,θ_2) 上可导,$f(\theta_1)=f(\theta_2)$,则存在 $\theta_0\in(\theta_1,\theta_2)$,使得曲线 $r=f(\theta)\ (\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 在点 $(\theta_0,f(\theta_0))$ 处的切线与其向径垂直.

证明 (1) 因为从点 $(0,0)$ 到点 $(1/2,1/2)$ 之割线斜率为 $[f(1/2)-f(0)]/(1/2-0)=1$,从点 $(1/2,1/2)$ 到点 $(1,f(1))$ 的割线斜率为 $[f(1)-f(1/2)]/(1-1/2)=-1$,所以由中值定理可知,必有曲线上两点之切线斜率乘积为 -1.

(2) 只需指出存在点 $(\theta_0, f(\theta_0))$,使该点处曲线之法线通过原点的法线方程 $y=-x/y'(x)$ 必有解.注意到

$$\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta, \\ y=f(\theta)\sin\theta, \end{cases} \qquad y'(x)=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta},$$

故知法线方程可化为

$$f(\theta)\sin\theta=-\frac{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}f(\theta)\cos\theta,$$

从而期望有 $f'(\theta)=0$.而由题设已知有 $f(\theta_1)=f(\theta_2)$.因此,根据中值定理,必存在 $\theta_0\in(\theta_1,\theta_2)$,使得 $f'(\theta_0)=0$.

* **例 5.1.29** 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$,试证明对 $n\in\mathbf{N}$,必存在 $[0,1]$ 中 n 个不同的点:$x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得 $\sum_{i=1}^{n}1/f'(x_i)=n$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上 n 次可微,令 $(a_0<a_1\cdots<a_n)$

$$I=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(a_i)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},$$

试证明存在 ξ:$a_0<\xi<a_n$,使得 $I=f^{(n)}(\xi)/n!$.

(3) 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上,且 $a\leqslant f(x)\leqslant b$.若有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y| \qquad (x,y\in[a,b],x\neq y),$$

试问是否存在 M:$M<1$,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y| \qquad (a\leqslant x,y\leqslant b).$$

解 (1) 对每个 i,令 $\lambda_i=\min\{x\in(0,1):f(x)=i/n\}(i=1,2,\cdots,n-1)$,易知 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<1$.又记 $\lambda_0=0$, $\lambda_n=1$,并取 x_i:$f'(x_i)=[f(\lambda_i)-f(\lambda_{i-1})]/(\lambda_i-\lambda_{i-1})$,故又有

$$f'(x_i)=\frac{i/n-(i-1)/n}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}=\frac{1}{n(\lambda_i-\lambda_{i-1})}.$$

从而得出 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}n(\lambda_i-\lambda_{i-1})=n$.

注 设 $f(x)$ 同上,则对 $n\in\mathbf{N}$,存在 $[0,1]$ 中相异点组 $x_1,\cdots,x_n$;正数 $k_1,\cdots,k_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i/f'(x_i))=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

事实上,记 $L_m=\sum_{i=1}^{m}k_i/S(m=1,\cdots,n)(L_0=0)$, $S=\sum_{i=1}^{n}k_i$,以及

$$C_m=\min\{x\in(0,1):f(x)=L_m\}; \qquad C_0<C_1<\cdots<C_n=1.$$

从而存在 x_i:$C_{i-1}<x_i<C_i(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$f'(x_i)=\frac{f(C_i)-f(C_{i-1})}{C_i-C_{i-1}}=\frac{L_i-L_{i-1}}{C_i-C_{i-1}}=\frac{k_i}{S}\frac{1}{C_i-C_{i-1}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i\,\frac{S(C_i-C_{i-1})}{k_i}=S\sum_{i=1}^{n}(C_i-C_{i-1})=S.$$

(2) 作函数 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x^n & x^{n-1} & \cdots & 1\\ f(a_0) & a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & 1\\ f(a_1) & a_1^n & a_1^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ f(a_n) & a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix},$$

易知 $F(a_0)=F(a_1)=\cdots=F(a_n)=0$.根据 Rolle 定理,可知存在$\{\xi_{1,i}\}_1^n$:

$$a_0<\xi_{1,1}<a_1<\xi_{1,2}<\cdots<\xi_{1,n}<a_n;\qquad F'(\xi_{1,1})=F'(\xi_{1,2})=\cdots=F^{(n)}(\xi_{1,n})=0.$$

由此又有 $\xi_{1,1}<\xi_{2,1}<\xi_{1,2}<\xi_{2,2}<\xi_{1,3}<\cdots<\xi_{2,n-1}<\xi_{1,n}$,使得

$$F''(\xi_{2,1})=F''(\xi_{2,2})=\cdots=F''(\xi_{2,n-1})=0.$$

继续这样做下去,我们有 $\xi_{n-1,1}$,$\xi_{n-1,2}$,使得

$$a_0<\xi_{n-1,1}<\xi_{n-1,2}<a_n;\qquad F^{(n-1)}(\xi_{n-1,1})=F^{(n-1)}(\xi_{n-1,2})=0.$$

最后还有 ξ:$a_0<\xi<a_n$,使得 $F^{(n)}(\xi)=0$.因为

$$F^{(n)}(x)=\begin{vmatrix} f^{(n)}(x) & n! & 0 & \cdots & 0\\ f(a_0) & a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ f(a_n) & a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=f^{(n)}(x)\begin{vmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}-n!\begin{vmatrix} f(a_0) & a_0^{n-1} & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ f(a_n) & a_n^{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix},$$

所以导出

$$f^{(n)}(\xi)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2}(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_n)$$

$$=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(a_i)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2}(a_0-a_1)\cdots(a_0-a_{i-1})(a_0-a_{i+1})\cdots(a_0-a_n)$$

$\cdots(a_{i-1}-a_{i+1})\cdots(a_{n-1}-a_n)$.(缺少有关 a_i 的项)

由此即得所证.

(3) 否!例如定义在[0,1]上的 $f(x)=\sin x$,易知存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)=(\cos\xi)(x-y)\quad(0\leqslant x,y\leqslant 1).$$

自然有 $|f(x)-f(y)|<1\,|x-y|$.现在假定存在 $M<1$,使得 $|f(x)-f(y)|<M\,|x-y|$ $(0\leqslant x, y\leqslant 1)$,那么取 $x=0$ 且令 $y\to 0$,就出现 $f'(0)\leqslant M<1$;但实际上 $f'(0)=1$,矛盾.

5.2 不定型的极限——L'Hospital 法则

定理 5.2.1 $\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”不定型}\right)$ 设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,$g'(x)\neq 0$($a<$

$x<b$),且 $f(a)=0=g(a)$.若存在极限 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,则当 $x\to a+$ 时,$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限存在,且有

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(类似地,对 $x\to b-$ 也有相应结论).

注 1　当 $f(x)$与 $g(x)$在 $x=a$ 处无定义时,只要有 $f(a+)=0=g(a+)$,则结论仍然成立.实际上,只需补充 $f(a)=0$,$g(a)=0$,则 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上就连续了.

注 2　若有 $f'(a+)=0$,$g'(a+)=0$,而 $f'(x)$与 $g'(x)$还在(a,b)上可微,则在下式右端极限存在时,仍有 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}\left(=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

注 3　若定理中相应的条件改为 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$(或$-\infty$),则也有结论

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty(\text{或}-\infty).$$

注 4　设 $f(x)=x^{3/2}\sin\frac{1}{x}$,$g(x)=x$,则 $f(x)\to 0$,$g(x)\to 0(x\to 0)$,且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\qquad \text{但不存在}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

又存在$\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin(1/x)/\sin^2 x$,不能用 L'Hospital 法则.再有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\sin 2x+1)/[(2x+\sin 2x)(\sin x+4)^2]=0$,但不能用 L'Hospital 法则.因为求导后,分母中 $\cos x$ 在 $2n\pi t+\pi/2$ 上取零值.

推论　设 $f(x)$在(a,∞)上可微,且有 $f(x)\to 0$,$g(x)\to 0(x\to+\infty)$.若存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 5.2.2$\left(“\frac{\infty}{\infty}”\text{不定型}\right)$　设 $f(x)$,$g(x)$在(a,b)上可微,且 $g'(x)\neq 0$,$a<x<b$,且有 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\pm\infty$.若存在极限 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,则 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.对 $x\to b-$ 以及 $x\to\infty$ 的情形,也有类似结果.

其他不定型

还有一些函数极限,也属于“不定型”,我们把它们记为“$0\cdot\infty$”型,“0^0”型,“∞^0”型,“1^∞”型,“$\infty-\infty$”型,求解的方法是将它们都化归为前述两种情形.

例如,当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to 0$,$g(x)\to\infty$,则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$属于“$0\cdot\infty$”型.此时,作形式转换 $f(x)g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}=\frac{g(x)}{1/f(x)}$,就可化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型.

又如,当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to\infty$,$g(x)\to\infty$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$属于“$\infty-\infty$”型.此时,作形式转换 $f(x)-g(x)=\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]\Big/\frac{1}{f(x)g(x)}$,就可化为“$\frac{0}{0}$”型.

再如,当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to 0$,$g(x)\to 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}(f(x)>0)$属于“$0^0$”型.此时,作形式转换如下:令 $y=f(x)^{g(x)}$,$\ln y=g(x)\ln f(x)$,就可化为“$0\cdot\infty$”型.

例 5.2.1　试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}$.　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\ (a>0)$.

解　(1) 应用 L'Hospital 法则,我们有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 应用 L'Hospital 法则,我们有原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 先改写 $(1+x)^{1/x}$ 为 $\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$,再用 L'Hospital 法则,我们有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1/(1+x)}{2+6x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

(4) 应用 L'Hospital 法则两次,我们有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\dfrac{x}{a+x}\right]-a^x\ln a}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\dfrac{x}{a+x}\right]^2+(a+x)^x\left[\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{a}{(a+x)^2}\right]-a^x\ln^2 a}{2}$$

$$=\frac{2}{a}.$$

例 5.2.2　试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

解　(1) 先取对数,再用 L'Hospital 法则,我们有原式$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln^2 x/x-\ln(\ln x))}$.注意到 $\ln^2 x/x\to 0\ (x\to+\infty)$,$\ln(\ln x)\to+\infty\ (x\to+\infty)$,可知 $(\ln^2 x/x-\ln(\ln x))\to-\infty$.从而原式$=0$.

(2) 直接应用 L'Hospital 法则是不方便的,故令 $1/x^2=t$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{\mathrm{e}^t}=50\,!\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}=0.$$

例 5.2.3　试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$.　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\right)^{\mathrm{e}^{2x}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{x^x-1}$.　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{1/x}$ $(a>0, a\neq1)$. (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos x}-\sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}$ $(m,n\in\mathbf{N})$.

解 (1) 首先将函数式化为"$\dfrac{0}{0}$"型,即$\dfrac{1-x\cot x}{x^2}\triangleq\dfrac{f(x)}{g(x)}$.其次计算

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-(\cot x-x\csc^2 x)}{2x}=\frac{x-\sin x\cos x}{2x\sin^2 x}$$

$$=\frac{x-\sin x\cos x}{2x\cdot x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

因为上式右端乘积的第一项仍为"$\dfrac{0}{0}$"型,所以再计算

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x}{12x}=\frac{1}{3}.$$

由此可知$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1}{3}\cdot1=\dfrac{1}{3}$.

(2) 将函数式取对数,化为"$\dfrac{0}{0}$"型,即

$$e^{2x}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\ln(e^x+e^{-x})-\ln(e^x-e^{-x})}{e^{-2x}}\triangleq\frac{f(x)}{g(x)}.$$

因为我们有

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)\Big/(-2e^{-2x})$$

$$=\frac{-4}{e^{2x}-e^{-2x}}\Big/(-2e^{-2x})=\frac{2}{1-e^{-4x}}\to2\quad(x\to+\infty),$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^{e^{2x}}=e^2$.

(3) 先取对数,我们有

$$原式=\lim_{x\to0+}e^{x\ln^2 x\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}x\ln^2 x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0+}x\ln^2 x\cdot\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}}=e^{\lim\limits_{x\to0+}x\ln^2 x}=1.$$

(4) 取对数,我们有

$$原式=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)/x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1}\left(\cos\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-2}\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sin\frac{2\pi x}{2x+1}\right)^{-1}(2x+1)^{-2}\right]\cdot2\pi}=e^{-2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2x+1}\Big/\sin\frac{\pi}{2x+1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+1}}=1.$$

(5) (i) 设 $a>1$.取对数,我们有

$$原式=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(a^x-1)}{x}-\frac{\ln(a-1)x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{a^x-1}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a-1}{(a-1)x}}=e^{\ln a}=a.$$

(ii) 设 $a<1$.取对数,我们有

$$\text{原式} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1-a^x)}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1-a)x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-a^x\ln a}{1-a^x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-a}{(1-a)x}} = e^0 = 1.$$

(6) 令 $t=\cos x$,则 $x\to 0$ 相当于 $t\to 1$.故有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{t\to 1}\frac{t^{1/m}-t^{1/n}}{1-t^2} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{2}\,\frac{t^{1/m}-t^{1/n}}{1-t} \\ &= \lim_{t\to 1}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{m}t^{1/m-1}-\frac{1}{n}t^{1/n-1}\right) = \frac{m-n}{2mn}.\end{aligned}$$

例 5.2.4 试证明下列命题:

(1) 设 $g\in C^{(2)}((-\infty,\infty))$,$g(0)=1$,$g'(0)=-1$.令

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

则 $f'(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ $(a_1,\cdots,a_n>0)$.

(3) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导,且 $f'(x)$在$(0,\infty)$上递增.若 $f(x)/x^p\to 1(x\to+\infty)$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{px^{p-1}}=1$.

证明 (1) 应用 L'Hospital 法则,我们有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2} = \frac{g''(0)-1}{2}, \\ f'(x) &= \frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2} \qquad (x\neq 0). \end{aligned}$$

由此知 $f'(x)\to[g''(0)-1]/2(x\to 0)$,即得所证.

(2) 先取对数,再用 L'Hospital 法则,我们有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(a_1^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+\cdots+a_n^x}} \\ &= e^{(\ln a_1+\cdots+\ln a_n)/n} = e^{\frac{\ln(a_1\cdots a_n)}{n}} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.\end{aligned}$$

(3) 由 $f'(x)$的递增性可知,当 $h>0$ 时,有

$$f(x)-f(x-h)\leqslant hf'(x)\leqslant f(x+h)-f(x).$$

令 $h=\delta x(\delta>0)$,则得

$$\frac{f(x)-f(x-\delta x)}{\delta x^p}\leqslant\frac{f'(x)}{x^{p-1}}\leqslant\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x^p}.$$

将上式右端不等式写成 $\dfrac{f'(x)}{x^{p-1}}\leqslant\dfrac{f(x+\delta x)}{(x+\delta x)^p}\dfrac{(1+\delta)^p}{\delta}-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{f(x)}{x^p}$,从而有$(x\to+\infty)$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f'(x)}{x^{p-1}}\leqslant\frac{(1+\delta)^p}{\delta}-\frac{1}{\delta}.$$

类似地,考察左端不等式,也可导致$\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{(1-\delta)^p}{\delta}\leqslant\underline{\lim}_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x^{p-1}}$.注意到

$$\lim_{\delta\to0+}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{(1-\delta)^p}{\delta}\right)=\lim_{\delta\to0+}\left(\frac{(1+\delta)^p}{\delta}-\frac{1}{\delta}\right)=p,$$ 证毕.

例 5.2.5 试证明下列命题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)=e^2$.

(2) 设 $f(x)$在 $U(0)$上二次连续可微,且 $f'(x)\to1(x\to0)$.定义数列:$a_1\neq0$ 且 $a_1\in U(0)$,$a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则$\dfrac{1}{na_n}\to-\dfrac{f''(0)}{2}(n\to\infty)$.

证明 (1) 引进连续变量 $x\sim\dfrac{1}{n}$,$n\to\infty$相当于 $x\to0+$.取对数后转而考察

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]}{x}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right).$$

应用 L'Hospital 法则,易知上述极限值为 2,即得所证.

(2) 依题设易知(应用 L'Hospital 法则)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{f''(0)}{2}$.由此可得 $\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)\to-\dfrac{f''(0)}{2}(n\to\infty)$.从而我们有

$$-\frac{f''(0)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na_{n+1}}-\frac{1}{na_1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}.$$

特别,对 $a_1>0$,$a_{n+1}=\ln(1+a_n)(n=1,2,\cdots)$,易知$\{a_n\}$是递减正数列,且 $a_n\to0(m\to\infty)$.而 $f(x)=\ln(1+x)$,且 $f'(x)\to1(x\to0)$,$f''(0)=-1$,故 $na_n\to2$ $(n\to\infty)$.

例 5.2.6 试证明下列命题:

(1) 设 $0<a_1<\pi$,$a_{n+1}=\sin a_n(n=1,2,\cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$.

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n/2^n=\sqrt{ab}\quad(a,b>0)$.

(3) 设 $f(x)$在 $x=a$处有 n 阶导数,则

$$f^{(n)}(a)=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]\right\}.$$

证明 (1) 易知$\{a_n\}$为递减收敛于零的数列.又由 L'Hospital 法则可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\dfrac{1}{3}$.由此即知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\frac{1}{3},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2}-\frac{1}{a_k^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

从而得证.

(2)将问题转向研究连续变量的极限,即$\lim\limits_{t\to0+}\left(\dfrac{a^t+b^t}{2}\right)^{1/t}=\lim\limits_{t\to0+}\mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{a^t+b^t}{2}}{t}}$.我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{\ln\dfrac{a^t+b^t}{2}}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{2}{a^t+b^t}\cdot\frac{a^t\ln a+b^t\ln b}{2}\\&=\frac{2}{2}\cdot\frac{\ln a+\ln b}{2}=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

由此知 $I=\sqrt{ab}$.

(3)(i)在多项式$(1-x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}x^k$中,对$x$求导$m(m\leqslant n)$次,并取$x=1$处的值,则

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k\binom{n}{k}=\begin{cases}0, & m=0,1,2,\cdots,n-1,\\ n!, & m=n.\end{cases}$$

(ii)对原极限式用 L'Hospital 法则,可得

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right\}\\&=\frac{1}{n!}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right\}\bigg|_{h=0}=f^{(n)}(a).\end{aligned}$$

例 5.2.7　解答下列问题:

(1)设$f''(0)=2$,且$\lim\limits_{x\to0}f(x)/x=0$,试求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)/x]^{1/x}$.

(2)设$f\in C^{(2)}((-\infty,\infty))$,且$f(0)=1,f'(0)=0,f''(0)=-1$,则对$a\in(-\infty,\infty)$,试证明 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(a/\sqrt{x})]^x=\mathrm{e}^{-a^2/2}$.

(3)设$a_i\in(-\infty,\infty)(i=1,2,\cdots,k)$,试求极限

$$\lim_{n\to\infty}I_n,\qquad I_n=\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}-n.$$

解　(1)注意到$f'(0)=0$,我们有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}=1.$$

由此知 $I=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{f(x)/x^2}=\mathrm{e}^{f''(0)/2}=\mathrm{e}$.

(2)作变量替换$t=1/x$,$x\to+\infty$相应于$t\to0+$,我们有

$$I=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\cdot\ln f(a/\sqrt{x})}=\lim_{t\to0+}\mathrm{e}^{\ln f(a\sqrt{t})/t}.$$

注意到

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\ln f(a\sqrt{t})}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{af'(a\sqrt{t})}{2\sqrt{t}f(a\sqrt{t})}=\lim_{t\to 0+}\frac{a^2\cdot f''(a\sqrt{t})}{2f(a\sqrt{t})+2a\sqrt{t}f'(a\sqrt{t})}=-\frac{a^2}{2},$$

即得 $I=\mathrm{e}^{-a^2/2}$.

(3) 用指数-对数变换,我们有

$$I_n=\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{k}[\ln n+\ln(1+a_i/n)]/k}-n=n\left[\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{k}\ln(1+a_i/n)/k}-1\right].$$

从而考察连续变量极限($1/n$ 换为 x)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{k}\ln(1+a_ix)/k}-1}{x}\quad(\text{用 L'Hospital 法则})$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{k}\ln(1+a_ix)/k}\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{1+a_ix}=1\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_k)/k.$$

由此知 $\lim\limits_{x\to\infty}I_n=(a_1+a_2+\cdots+a_k)/k$.

例 5.2.8 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导,$a>0$.若有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[af(x)+f'(x)]=l$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l/a$(对 a 是有正实部的复数,结论亦真).

(2) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导,$a>0$.若有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[af(x)+2\sqrt{x}f'(x)]=l$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l/a$.

(3) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上二次可导.若有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]=l$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

(4) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导,$a>0$.若有

$$\lim_{x\to+\infty}[af(x)-f'(x)]=l,\qquad |f(x)|\leqslant M\qquad(0<x<\infty),$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l/a$.

证明 (1) 应用 L'Hospital 法则,我们有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}f(x)}{\mathrm{e}^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}[af(x)+f'(x)]}{a\mathrm{e}^{ax}}=\frac{l}{a}.$$

(2)应用 L'Hospital 法则,我们有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{a\sqrt{x}}f(x)}{\mathrm{e}^{a\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{a\sqrt{x}}\left[f'(x)+\dfrac{a}{2\sqrt{x}}f(x)\right]}{a\mathrm{e}^{a\sqrt{x}}/2\sqrt{x}}=\frac{l}{a}.$$

(3) 令 $\alpha=1/2-\sqrt{3}\mathrm{i}/2$,$\beta=1/2+\sqrt{3}\mathrm{i}/2$,则(参见(1))

$$\begin{aligned}f(x)+f'(x)+f''(x)&=\alpha\beta f(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+f''(x)\\&=\beta[\alpha f(x)+f'(x)]+[\alpha f(x)+f'(x)]',\end{aligned}$$

从而由题设知

$$\lim_{x\to+\infty}[\alpha f(x)+f'(x)]=l/\beta.$$

再根据(1)中的尾注,可知 $f(x)\to l/\alpha\beta=l(x\to+\infty)$.

注 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)]=l$,则可以没有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.例如 $f(x)=\cos x$.

(4) 我们有$\left(“\frac{0}{0}”型极限\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-ax}f(x)}{e^{-ax}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-ax}[f'(x)-af(x)]}{-ae^{-ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{af(x)-f'(x)}{a}=\frac{l}{a}.$$

注 1 (4)中若无条件 $|f(x)|\leqslant M$,结论不一定成立,例如 $f(x)=e^x+A$.

注 2 设 $f(x)$在$[a,\infty)$上可导,且 $f'(x)$在$[a,\infty)$上一致连续.若 $f(x)\to l(x\to+\infty)$,则

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=l.$$

注 3 设 $f(x)$在$[a,\infty)$上可导.虽然存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f'(x)]=l$,但可以不存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.例如 $f(x)=e^x+l$.

5.3 可微函数的性质

5.3.1 函数的单调性

Lagrange 中值公式把函数值的差与其导数值联结成一个“精确的”等式,这就为我们用导数的知识研究函数的性态提供了极大的方便.

定理 5.3.1 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导.若在(a,b)上有 $f'(x)\geqslant 0(>0)$,则 $f(x)$在$[a,b]$上是递增(严格递增)的.

注 根据上述推理,易知在条件 $f'(x)\leqslant 0(<0)$时,应得到 $f(x)$递减(严格递减)的结论.此外,上述定理对于无穷区间如$[a,\infty)$,也有同样的结论.

推论 1 在上述定理的前提条件下,若有 $f'(x)=0(a<x<b)$,则 $f(x)\equiv C$(常数).

推论 2 设 $f(x),g(x)$在(a,b)上可导,且有 $f'(x)=g'(x)(a<x<b)$,则 $f(x)$与 $g(x)$在(a,b)上相差一个常数.

定理 5.3.2 设 $f(x)$在区间 I 上可导.若 $f'(x)$在 I 上有界,则 $f\in \mathrm{Lip}1(I)$(即存在$M>0$),使得对任意的 $x,y\in I$,有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$.

推论 设 $f(x)$在区间 I 上可导.有 $f'(x)$在 I 上有界,则 $f(x)$在 I 上一致连续.

注 1 设 $f\in C((a,b))$,且在(a,b)上存在右导数.若 $f'_+(x)=0(x\in(a,b))$,则 $f(x)\equiv C$.

注 2 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上,且 $R(f)\subset[a,b]$.如果对 $x,y\in[a,b]$,均有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$,也不一定存在 $0<M<1$,使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$.如 $f(x)=\sin x$ 在$[0,1]$上.

注 3 $f(x)=x+\sin x$ 单调上升,但 $f'(x)$并不是.

注 4 设 $f(x)=x+x^2\sin(2/x)$,$f(0)=0$,则 $f'(0)>0$,但在任一区间$(-\delta,\delta)$上,$f(x)$都不单调递增.

注 5 对于定义在$(0,1)$上的函数 $f(x)$.若对任意的 $x\in(0,1)$,均存在 $x_n>x$ 且 $x_n\to x(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x)]/(x_n-x)=0$,则 $f(x)$是一个常数.但上述条件不能改为 $x_n\neq x$ 且 $x_n\to x(n\to\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x)]/(x_n-x)=0$.

例 5.3.1 试证明下列命题:

(1) $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi(1<x<\infty)$.

(2) 设 $f(x)$可导.若曲线 $y=f(x)$上任一点 $P(x,y)$处的切线与向径 OP 垂直,则此曲线为一个(半)圆周.

证明 (1) 记原式左端为 $f(x)$,易知 $f'(x)\equiv0(1<x<\infty)$.由此得 $f(x)\equiv C$ $(1<x<\infty)$.因为 $f(\sqrt{3})=\pi$,所以有 $f(x)\equiv\pi$.

(2) 记点 P 处的切线与 x 轴的夹角为 θ,向径与 x 轴之交角为 α,则有

$$y'=f'(x)=\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{x}{y}.$$

由此知 $x+yy'=0$.记向径长 $OP=r^2=x^2+y^2$,则

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}x}=2x+2yy'=2(x+yy')=0.$$

这说明 $r^2=C$(常数),即 $x^2+y^2=C$.证毕.

例 5.3.2 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$在$(-\infty,\infty)$上均不是常数,可导且有

$$\begin{cases}f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),\\ g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)\end{cases}\quad(x,y\in(-\infty,\infty)).$$

若 $f'(0)=0$,则 $f^2(x)+g^2(x)=1$.

(2) 设 $f(x)$,$g(x)$在(a,b)上均不是常数.若有

$$f(x)+g(x)\neq0,\qquad f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=0,\qquad x\in(a,b),$$

则 $g(x)\neq0(x\in(a,b))$,且 $f(x)/g(x)=C$(常数).

证明 (1) 在等式两端对 y 求导,可得

$$f'(x+y)=f(x)f'(y)-g(x)g'(y),$$
$$g'(x+y)=f(x)g'(y)+g(x)f'(y).$$

令 $y=0$,有 $f'(x)=-g'(0)g(x)$,$g'(x)=g'(0)f(x)$.由此知 $2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0$,即得

$$f^2(x)+g^2(x)=C(\text{常数}).$$

由 $f^2(x+y)+g^2(x+y)=[f^2(x)+g^2(x)][f^2(y)+g^2(y)]$可知,$C=C^2$,$C\neq0$,故 $C=1$.

(2) 反之,假定存在 x_1:$g(x_1)=0$,则不妨设 $x_2>x_1$,$g(x_2)\neq0$.令 $x_3=\sup\{x\in[x_1,x_2]:g(x)=0\}$,易知 $g(x_3)=0$,$g(x)\neq0(x_3<x<x_2)$.因为

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0, \qquad x \in (x_3, x_2],$$

所以 $f(x)/g(x)=f(x_2)/g(x_2)$,$f(x)=g(x)f(x_2)/g(x_2)$,$x\in(x_3,x_2]$.令 $x\to x_3+$,我们有 $f(x_3)=\lim\limits_{x\to x_3+}\dfrac{g(x)f(x_2)}{g(x_2)}=0$.但这与 $f(x_3)+g(x_3)\neq 0$ 矛盾.故 $g(x)\neq 0$,$f(x)/g(x)=$常数.

例 5.3.3 解答下列问题:

(1) 设定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足:(i) $f(x)f(y)=f(x+y)$,$x,y\in(-\infty,\infty)$;(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\ln a\,(a>0)$.试求 $f(x)$.

(2) 设有 n 次多项式 $P(x)$ 满足

$$P^2(x)-P^2(y)=P(x+y)P(x-y), \qquad x,y\in(-\infty,\infty),$$

试求 $P(x)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可导.若存在 α:$0<\alpha<1$,$\beta=1-\alpha$,使得

$$f(y)-f(x)=f'(\beta y+\alpha x)(y-x), \quad x,y\in(-\infty,+\infty),$$

试求 $f(x)$.

解 (1) 由(i)知 $f(x)[f(0)-1]=0\,(-\infty<x<\infty)$,再由(ii)知 $f(0)=1$,这说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}f(x)=\ln a\cdot f(x),$$

所以 $f(x)$ 处处可导,且有 $f'(x)=\ln a\cdot f(x)$.

现在,令 $F(x)=a^{-x}f(x)$,则 $F'(x)=a^{-x}[f'(x)-\ln a f(x)]=0$.由此知 $F(x)=c$.即 $a^{-x}f(x)=c$,$f(x)=ca^x$.而 $f(0)=1$,故知 $c=1$.

(2) 在题式两端对 x 求导,可得

$$2P'(x)P(x)=P'(x+y)P(x-y)+P(x+y)P'(x-y).$$

令 $x=y$,则上式变成 $2P'(y)P(y)=P(2y)P'(0)$.

(i) 若 $P'(0)=0$,则 $P(y)=C$(常数).

(ii) 若 $P'(0)\neq 0$,则 $2P'(y)P(y)$ 是 $2n-1$ 次多项式,$P(2y)P'(0)$ 是 n 次多项式.故由 $2n-1=n$ 知 $n=1$.注意到 $P(0)=0$,即知 $P(x)=ax$.

(3) 令 $y=t+\alpha h$,$x=t-\beta h$,则得 $f(t+\alpha h)-f(t-\beta h)=hf'(t)$.在上式中对 h 求二次导数,我们有 $\alpha^2 f''(t+\alpha h)=\beta^2 f''(t-\beta h)$.

这说明对任意的 $x,y\in(-\infty,\infty)$,有 $\alpha^2 f''(x)=\beta^2 f''(y)$.

(i) $\alpha^2\neq\beta^2$,则 $f''(x)=0$,即 $f(x)=ax+b$.

(ii) $\alpha^2=\beta^2$,则 $\alpha=\beta=1/2$,即 $f''(x)=c$,$f(x)$ 是二次函数.

例 5.3.4　试证明下列命题：

(1) 设在(a,b)上定义的函数$f(x)$，$g(x)$满足条件：对任意的$x\in(a,b)$以及$\delta>0$，均有$f(x+h)-f(x-h)=2h\cdot g(x)$，$0<h<\delta$.若$f'(x)$存在，则$f(x)$是一个至多为二次的多项式.

(2) 设$P(x)$是一个n次多项式，则

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}.$$

(3) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$，$|x|\leqslant 1/2$.

证明　(1) 由题设可得$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=g(x)$.从而可知$f(x)$在$(a,b)$上二次可导.在原题式中对$h$求导，得

$$f''(x+h)-f''(x-h)=0,$$

这说明$f''(x)\equiv 0$.证毕.

(2) 记原式左端为$L(x)$，右端为$R(x)$，则$L(0)=R(0)=0$，且有

$$L'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k=P(x),$$

$$\begin{aligned}R'(x)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{k!}x^k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{P^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}\\&=P(x)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{k!}x^k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{P^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}\\&\quad+(-1)^n\frac{P^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1}=P(x).\end{aligned}$$

从而知$L'(x)=R'(x)$，即$L(x)=R(x)+C$.又由$L(0)=R(0)$可知$C=0$.证毕.

(3) (i) 因为$f(x)=3x-4x^3$是奇函数，且有

$$f'(x)=3-12x^2>0\qquad(0<x<1/2),$$

所以$f(x)$在$(0,1/2)$上递增.又由$f(0)=0$，$f(1/2)=1$可知，当$|x|\leqslant 1/2$时，有$|f(x)|\leqslant 1$.这说明函数$\arccos(3x-4x^3)$是有意义的.

(ii) 作函数$F(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$ $(0<x<1/2)$.因为

$$\begin{aligned}F'(x)&=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\\&=\frac{3(1-4x^2)}{|1-4x^2|\cdot\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=0\qquad(0<x<1/2),\end{aligned}$$

所以当$|x|<1/2$时，$F(x)\equiv C$(常数).又由$F(0)=\pi$可知，$F(x)\equiv\pi$ $(|x|<1/2)$.此外显然有$F(\pm 1/2)=\pi$，故有

$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=F(x)=\pi\qquad(|x|\leqslant 1/2).$$

例 5.3.5　试证明下列命题:

(1) 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$,则存在 $X>0$,使得 $P(x)$在$(-\infty,-X)$,$(X,+\infty)$上严格单调.

(2) 设 $R(x)=(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)/(b_mx^m+\cdots+b_0)$,$a_nb_m\neq 0$,且不是常数,则存在 $X>0$,使得 $R(x)$在$(-\infty,-X)$,$(X,+\infty)$上严格单调.

证明　(1) 只需注意导数公式

$$P'(x)=na_nx^{n-1}\left(1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx}+\cdots+\frac{a_1}{na_nx^{n-1}}\right).$$

(2) 设 $m\neq n$,记 $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$,我们有

$$\begin{aligned}R'(x)&=\frac{P_n'(x)Q_m(x)-Q_m'(x)P_n(x)}{Q_m^2(x)}\\&=\frac{a_nb_m\cdot x^{m+n-1}\left((n-m)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{Q_m^2(x)}\qquad(x\to\pm\infty).\end{aligned}$$

由此即得所证.

例 5.3.6　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,\infty))$,且在$(0,\infty)$上可导.若有

$$f(0)=0,\qquad f(x)\geqslant 0\text{ 且 }f(x)\geqslant f'(x)\qquad(0<x<\infty),$$

则 $f(x)\equiv 0$.

(2) 设 $f(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上.若存在 $m>0$,使得 $f'(x)\geqslant m(-\infty<x<\infty)$,则存在 x_0,使得 $f(x_0)=0$.

(3) 设 $f,g\in C^{(1)}((-1,1))$,$f(0)=g(0)=0$.若 $f'(0)\neq 0$,$g'(0)\neq 0$,则存在 $\delta>0$,使得$[f^2(x)+g^2(x)]^{1/2}$在$(0,\delta)$上递增.

证明　(1) 作 $F(x)=e^{-x}f(x)$,易知 $F'(x)\leqslant 0$,故 $F(x)$递减.注意到 $F(0)=0$,可得 $f(x)e^{-x}=F(x)\leqslant 0$,即 $f(x)\leqslant 0$,从而得证.

(2) 任取 $x_1\in(-\infty,\infty)$,并作 $F(x)=f(x_1)+m(x-x_1)$,则 $F(x_1)=f(x_1)$,且有$[f(x)-F(x)]'=f'(x)-m\geqslant 0$.由此可知

$$f(x)\leqslant F(x),\qquad x<x_1;\qquad f(x)\geqslant F(x),\qquad x>x_1.$$

此外,易知 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.从而得

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

故存在 $x_0\in(-\infty,\infty)$,使得 $f(x_0)=0$.

(3) 令 $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$,我们有

$$F'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x).$$

由此知存在 ξ_1,ξ_2,$0<\xi_1,\xi_2<x$,使得

$$F'(x)=2[f(x)-f(0)]f'(x)+2[g(x)-g(0)]g'(x)$$

$$=2x[f'(\xi_1)f'(x)+g'(\xi_2)g'(x)].$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}[f'(\xi_1)f'(x)+g'(\xi_2)g(x)]=[f'(0)]^2+[g'(0)]^2>0$,所以存在$\delta>0$,使得 $F'(x)>0(0<x<\delta)$.

例 5.3.7 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(2)}((-\infty,\infty))$,则对任意的 $x,h\in(-\infty,\infty)$,使得

$$f(x+h)+f(x-h)>2f(x)$$

的充分必要条件是 $f''(x)>0(-\infty<x<\infty)$.

(2) 设 $f(x)$是$[1,\infty)$上递增的可导函数,$f(1)=1$,则 $F(x)=f(x)/[1+f(x)]$递增,$G(x)=f(x)/[1+f(x)]^2$ 递减.

(3) 设 $f(x)$在(a,b)上可导,则 $f(x)$在(a,b)上严格递增的充分必要条件是:对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$,存在 $\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f'(\xi)>0$.

证明 (1) 充分性.因为

$$\begin{aligned}f(x+h)+f(x-h)-2f(x)&=[f(x+h)-f(x)]+[f(x-h)-f(x)]\\&=f'(\xi_1)h-f'(\xi_2)h=f''(\xi_3)(\xi_1-\xi_2)h,\end{aligned}$$

其中 ξ_1 位于 x 与 $x+h$之间,ξ_2 位于 $x-h$与 x 之间,ξ_3 位于 ξ_1 与 ξ_2 之间.易知当 $h>0$ 时有 $\xi_1>\xi_2$,$h<0$ 时有 $\xi_2>\xi_1$.从而知 $f''(\xi_3)(\xi_1-\xi_2)h>0$.证毕.

必要性.反证.假定存在 x_0,使得 $f''(x_0)<0$,则由 $f''(x)$的连续性可知,存在$\delta>0$,使得 $f''(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上取负值,即 $f'(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上递减.由

$$\begin{aligned}I&=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=f'(x+\theta_1h)h-f'(x-\theta_2h)h\\&=h[f'(x+\theta_1h)-f'(x-\theta_2h)]\qquad(0<\theta_1,\theta_2<1;x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)),\end{aligned}$$

可知在 $h>0$ 时得到 $I<0$;在 $h<0$ 时 $I<0$,这与必要性题设矛盾.证毕.

(2) 因为

$$F'(x)=\frac{f'(x)[1+f(x)]-f'(x)f(x)}{(1+f(x))^2}=\frac{f'(x)}{(1+f(x))^2}\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}G'(x)&=\frac{f'(x)[1+f(x)]^2-2f(x)[1+f(x)]f'(x)}{[1+f(x)]^4}\\&=\frac{f'(x)+2f(x)f'(x)+f'(x)f^2(x)-2f(x)f'(x)-2f^2(x)f'(x)}{[1+f(x)]^4}\\&=\frac{f'(x)-f'(x)f^2(x)}{[1+f(x)]^4}=\frac{f'(x)[1-f^2(x)]}{[1+f(x)]^4}\leqslant 0,\end{aligned}$$

所以结论得证.

(3) 必要性.因为按题设有 $f(x_2)>f(x_1)$,所以

$$0<f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\qquad f'(\xi)>0.$$

充分性.反证.假定存在 $a<c<d<b$,使得 $f(c)\geqslant f(d)$.则存在 $\xi\in(c,d)$,它不是 $f(x)$的递增点.从而有 x',x'':$c<x'<\xi<x''<d$,使得 $f(x')\geqslant f(\xi)\geqslant f(x'')$.

由此继续下去,可知存在$\{x_n'\}$,$\{x_n''\}$,使得

$$0\geqslant\frac{f(x_n'')-f(x_n')}{x_n''-x_n'}\to f'(\xi)\qquad(n\to\infty).$$

导致矛盾.证毕.

注　设 $f\in C([a,b])$,又$\{x_n\}\subset(a,b)$.若 $f(x)$在$[a,b]\backslash\{x_n\}$上可导,且 $f'(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格递增.

例 5.3.8　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上可导,且存在 $k>0$,使得 $f'(x)\leqslant kf(x)(x\geqslant0)$,则 $f(x)\leqslant e^{kx}f(0)(x\geqslant0)$.

(2) 设 $f(x)$,$g(x)$在$[0,a]$上可导,$f(0)=g(0)=0$,且有

$$g(x)>0,\qquad g'(x)>0\qquad(0<x\leqslant a).$$

若 $f'(x)/g'(x)$在$[0,a]$上递增,则 $f(x)/g(x)$递增.

(3) 设 $g\in C^{(1)}((a,b))$,$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上定义,且满足 $g'(x)=f[g(x)]$,$(x\in(a,b))$,则 $g(x)$是单调函数.

证明　(1) 考察 $F(x)=f(x)e^{-kx}$,我们有

$$F'(x)=e^{-kx}[f'(x)-kf(x)]\leqslant0.$$

由此知 $F(x)$递减.故 $F(x)\leqslant F(0)=f(0)$,即 $f(x)\leqslant f(0)e^{kx}$.

(2) 我们有(应用 Cauchy 中值公式)

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'&=\frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\right)\\&=\frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right)\qquad(0<\xi<x\leqslant a).\end{aligned}$$

注意到 $f'(x)/g'(x)$递增,故知$(f(x)/g(x))'>0$.证毕.

(3) 反证法.若存在 $a<c<d<b$,使得 $g'(c)>0$,$g'(d)<0$,$g(c)\leqslant g(d)$,则取

$$\xi\in(c,d),\qquad g(\xi)=\max\{g(x):c\leqslant x\leqslant d\},$$

且令 $\sigma=\max\{x\in[c,\xi]:g(x)=g(d)\}$.显然,$\sigma<\xi$,且 $g(x)>g(\sigma)(\sigma<x\leqslant\xi)$.从而有 $g'(\sigma)\geqslant0$.因为 $g(\sigma)=g(d)$,所以

$$0>g'(d)=f[g(d)]=f[g(\sigma)]=g'(\sigma)\geqslant0.$$

矛盾,即得所证.

例 5.3.9　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上二次可导.若有 $f(0)f'(0)\geqslant0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,则存在$-\infty<\xi_1<\xi_2<+\infty$,使得(i) $f'(\xi_1)=0$.(ii) $f''(\xi_2)=0$.

(2) 设 $f(x)$在(a,b)上二次可导.若有 ξ:$a<\xi<b$,$f''(\xi)\neq0$,则存在 x_1,$x_2\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$.

证明 (1) 反证法.(i) 假定对一切 x,有 $f'(x)\neq 0$,则

(A) 当 $f'(x)>0(-\infty<x<\infty)$时,有 $f(0)\geqslant 0$.从而知 $f(x)$在$(0,\infty)$上严格递增,这与$f(x)\to 0(x\to+\infty)$矛盾.

(B) 当 $f'(x)<0(-\infty<x<\infty)$时,有 $f(0)\leqslant 0$.从而可知 $f(x)$在$(0,\infty)$上严格递减,这也与 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$矛盾.

故存在 $\xi_1\in(-\infty,\infty)$,使得 $f'(\xi_1)=0$.

(ii) 假定对一切 $x>\xi_1$,有 $f''(x)>0$,则 $f'(x)$在(ξ_1,∞)上严格上升.从而存在 $\delta>0$ 以及$X>\xi_1$,使得 $f'(x)\geqslant\delta>0(x>X)$.于是又有 ξ:$X<\xi<x$,使得

$$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)\geqslant\delta(x-X).$$

这也与 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$矛盾.

同理可证 $f''(x)<0$ 不真.这说明有 $f''(\xi_2)=0$.

(2) 为确定起见,不妨设 $f''(\xi)<0(a<\xi<b)$,则存在 $\delta>0$,使得 $f'(x)>f'(\xi)$ $(\xi-\delta<x<\xi)$;$f'(x)<f'(\xi)(\xi<x<\xi+\delta)$.

在区间$(\xi-\delta,\xi+\delta)$上考察函数 $F(x)=f(\xi)-f(x)+f'(\xi)(x-\xi)$,则 $F'(x)=-f'(x)+f'(\xi)$.显然有

$$F'(x)<0\quad(\xi-\delta<x<\xi);\qquad F'(x)>0\quad(\xi<x<\xi+\delta).$$

因此,$F(x)$在$(\xi-\delta,\xi)$上递减,在$(\xi,\xi+\delta)$上递增.在 $x=\xi$处有 $F(\xi)=0$,从而有 $F(x)\geqslant 0(\xi-\delta<x<\xi+\delta)$.令

$$A=\lim_{x\to(\xi-\delta)+}F(x),\qquad B=\lim_{x\to(\xi+\delta)-}F(x),$$

并考察方程 $F(x)=\varepsilon(0<\varepsilon<\min(A,B))$,它有两个根:$\xi-\delta<x_1<\xi$,$\xi<x_2<\xi+\delta$,

$$f(\xi)-f(x_1)+f'(\xi)(x_1-\xi)=\varepsilon,\qquad f(\xi)-f(x_2)+f'(\xi)(x_2-\xi)=\varepsilon.$$

将两式相减,我们有$[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1)=f'(\xi)$.即得所证.如果开始时假定 $f''(\xi)>0$,则应当考察方程 $F(x)=-\varepsilon(0<\varepsilon<\min(|A|,|B|))$.

例 5.3.10 解答下列问题:

(1) 设 $a_1=\sqrt{2}$,$a_{n+1}=2^{a_n/2}(n\in\mathbf{N})$,试论$\{a_n\}$的收敛性.

(2) 设 $a_1>0$,$a_{n+1}=2^{1-a_n}(n\in\mathbf{N})$,试论$\{a_n\}$的收敛性.

(3) 已知 $5^2+5+2=2^5$,问是否存在其他正整数 n,m,使得 $n^m+n+m=m^n$?

(4) 求一切满足 $0<a<b$ 且 $a^b=b^a$ 的整数 a,b之值.

解 (1) 易知 $a_n\in(1,2)(n\in\mathbf{N})$,考察在$(0,2)$上的函数 $F(x)=2^{x/2}-x$.因为

$$F'(x)=2^{x/2}\ln 2/2-1,\qquad 2^{x/2}<2/\ln 2\qquad(1<x<2),$$

所以 $F'(x)<0(1<x<2)$.即 $F(x)$下降,故 $F(x)>F(2)=0$.这说明 $a_{n+1}-a_n=2^{a_n/2}-a_n>0$,$\{a_n\}$是递增有界列,即收敛列.令 $a_n\to a(n\to\infty)$,得 $a=2^{a/2}$,$a=2$.

(2) 易知 $0<a_n<2(n\geqslant 2)$.若 $a_n>1$,则 $a_{n+1}<1$.令 $f(x)=2^{1-x}$,$F(x)=f[f(x)]-x$,则$F'(x)<0(0<x<2)$.从而有

$$F(x)\begin{cases}< F(1)=0, & 1<x<2,\\ > F(1)=0, & 0<x<1.\end{cases}$$

故 $f[f(x)]<x(1<x<2)$,$f[f(x)]>x(0<x<1)$.由此知$\{a_{2n}\}$递减收敛于 1,$\{a_{2n-1}\}$递增收敛于 1(分别考虑 $a_1<1$ 或>1).$\{a_n\}$收敛于 1.

(3) $m=1$,则 $n=0$,不真.$m=2$,得唯一的 $n=5(2^n>(n+1)^2,n\geqslant 6)$.

$m\geqslant 3$.此时易知 $n=1,2$ 无解.由 $n^m<m^n$ 可推 $n^{\frac{1}{n}}<m^{\frac{1}{m}}$.因为 $x^{1/x}$,当 $x>\mathrm{e}$ 时递减,所以知 $a>b\geqslant 3$.

考察 $f(x)=x^m+x+m-m^x$,则 $f(m)=2m>0$.往证 $f(m+1)>0$ 且 $f(x)$递减$(x>m\geqslant 3)$:因为

$$\begin{aligned}m^{m+1}&=\mathrm{e}m^m+(m-\mathrm{e})m^m\\&>(1+1/m)^m m^m+(m-\mathrm{e})m^m>(m+1)^m+(2m+1),\end{aligned}$$

且对 $x>m\geqslant 3$ 有 $x^m<m^x$,所以

$$\begin{aligned}f'(x)&=mx^{m-1}+1-(\ln m)m^x\\&=m^x\left(\frac{m}{x}\frac{x^m}{m^x}+m^{-x}-\ln m\right)<m^x\left(1+\frac{1}{27}-\ln 3\right)<0.\end{aligned}$$

由上可知,只有一根大于 3,$m<3<m+1$,它不可能是整数.

(4) 考察 $F(x)=\ln x/x$,从而问题归结为对一切 a,b 有 $F(a)=F(b)$.因为 $F'(x)=(1-\ln x)/x^2$,所以 $f(x)$在 $x<\mathrm{e}$ 上递增,在 $x>\mathrm{e}$ 上递减.故知为满足等式,必须 $0<a<\mathrm{e}$,即 $a=1$ 或 2,且 $b>2$.$a=1$ 时显然无解;$a=2$ 时 $b=4$ 是唯一解.

例 5.3.11 设定义在$(-\infty,\infty)$上的 $f(x)$满足:对任给的 $x\in(-\infty,\infty)$以及 $h>0$,均有 $|f(x+h)-f(x-h)|<h^2$,则 $f(x)$是一个常数.

证明 在题式中以 x 换 $x+h$ 或 $x-h$,可得

$$\left|\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right|\leqslant\frac{h^2}{2h},\qquad\left|\frac{f(x-2h)-f(x)}{2h}\right|\leqslant\frac{h}{2}.$$

从而使 $h\to 0+$,可知 $f'(x)=0(-\infty<x<\infty)$.证毕.

例 5.3.12 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,$a<c<b$.又 $f(x)$在$[a,c)$与$(c,b]$上有非负的导数,则 $f(x)$在$[a,b]$上递增.

(2) 设 $f(x),g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上可微,若 $f'(x)=g(x)$,$g'(x)=-f(x)(-\infty<x<\infty)$,则$f^2(x)+g^2(x)\equiv C$(常数).

(3) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上二次可导.若存在非负函数 $g(x)$,使得 $f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x)(x\in\mathbf{R})$,则$|f(x)|$在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证明 (1) 对任意的 $x:x>c$,易知存在 $\xi:c<\xi<x$,使得$[f(x)-f(c)]/(x-c)=f'(\xi)\geqslant 0$.故有 $f(c)<f(x)$.同理,对 $x<c$,也可推 $f(x)<f(c)$.证毕.

(2) 令 $F(x)=f^2(x)+g^2(x)(x\in\mathbf{R})$,我们有

$$\begin{aligned}F'(x)&=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\\&=2[f(x)g(x)-f(x)g(x)]=0\qquad(x\in\mathbf{R}).\end{aligned}$$

这说明 $F(x)=f^2(x)+g(x)\equiv$常数.

(3) 令 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$,则得

$$F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=-2xg(x)[f'(x)]^2.$$

(i) 对 $x\in[0,\infty)$,可知 $F'(x)\leqslant 0$,即 $F(x)$递减.故有

$$f^2(x)+[f'(x)]^2\leqslant f^2(0)+[f'(0)]^2\qquad(0\leqslant x<\infty).$$

(ii) 对 $x\in(-\infty,0)$,可知 $F'(x)\geqslant 0$,即 $F(x)$递增.故有

$$f^2(x)+[f'(x)]^2\geqslant f^2(0)+[f'(0)]^2\qquad(-\infty<x\leqslant 0).$$

综上所述,即得所证.

例 5.3.13 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上可微,且 $f(0)=0$.若 $f'(x)$在$[0,\infty)$上递增,则函数 $F(x)=\begin{cases}f(x)/x, & x>0,\\ f'(0), & x=0\end{cases}$ 在$[0,\infty)$上递增.

(2) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上可微,则 $F(x)=f(x)-xf'(x)$在$(0,\infty)$上递减当且仅当 $f'(x)$在$(0,\infty)$上递增.

(3) 设 $f\in C((a,b))$,且对任意的 $x\in(a,b)$,存在极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=g(x).$$

(i) 若 $g(x)\geqslant 0$ $(a<x<b)$,则 $f(x)$在(a,b)上递增;若 $g(x)<0$ $(x\in(a,b))$,则 $f(x)=$常数$(a<x<b)$.

(ii) 若 $g\in C((a,b))$,则 $f\in C^{(1)}((a,b))$.

(4) 设 $f\in C([0,1])$.若对任意的 $x_0\in[0,1)$,有

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

则 $f(x)$在$[0,1]$上递增.

证明 (1) 对 $0<x_1<x_2<\infty$,易知存在 $0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2$,使得

$$f(x_1)=f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1,\qquad f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi_2)(x_2-x_1),$$

$$\frac{f(x_1)}{x_1}=f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

由此知 $f(x_1)/x_1\leqslant f(x_2)/x_2$,即 $g(x)$在$(0,\infty)$上递增.

此外,由于 $g(0)=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$,且对 $x>0$,$0<t<x$,有 $g(t)\leqslant g(x)$,故在 $t\to 0$ 时知 $g(0)\leqslant g(x)$.这说明 $g(x)$在$[0,\infty)$上递增.

注 在 $x>0$ 处,$g(x)$是曲线 $y=f(x)$在联结点$(0,f(0))$与$(x,f(x))$之弦的斜率.

(2) 充分性. 对任意的 $y>x>0$, 均存在 $\xi\in(x,y)$, 使得

$$\begin{aligned}&[f(y)-yf'(y)]-[f(x)-xf'(x)]\\&=f'(\xi)(y-x)-yf'(y)+xf'(x)\\&=y[f'(\xi)-f'(y)]+x[f'(x)-f'(\xi)]\leqslant 0,\end{aligned}$$

必要性. 假定 $F(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上递减, 则得

$$\frac{[f(y)-yf'(y)]-[f(x)-xf'(x)]}{y-x}\leqslant 0 \qquad (x,y>0,x\neq y),$$

$$\frac{1}{y}\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-f'(x)\right]\leqslant\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}.$$

这说明 $\lim\limits_{y\to x}[f'(y)-f'(x)]/(y-x)\geqslant 0$. 即 $f'(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增.

(3) (i) 首先看 $g(x)>0$ $(a<x<b)$, 用反证法. 假定存在 (a,b) 中点 x_1,x_2: $x_1<x_2$, 使得 $f(x_1)>f(x_2)$ (不妨认定 $f(x_1)=1$, $f(x_2)=-1$), 则令

$$\bar{x}=\sup\{x\in(x_1,x_2):y\in(x_1,x_2),f(y)\geqslant 0\},$$

就存在 $\{h_n\}$: $h_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$ 以及 $h_n\to 0$ $(n\to\infty)$, $f(\bar{x}+h_n)<0$ $(n\in\mathbf{N})$. 从而可知

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\bar{x}+h_n)-f(\bar{x}-h_n)}{2h_n}\leqslant 0.$$

导致矛盾, 这说明 $f(x)$ 在 (a,b) 上递增. 一般情形, 可考察

$$f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon x \qquad (\varepsilon>0).$$

其次, 对 $g(x)\equiv 0$, 可将上述推理用于 $f(x)$, $-f(x)$.

(ii) 设 $G'(x)=g(x)$ (参阅关于积分的知识), 令 $F(x)=f(x)-G(x)$, 则得 $F'(x)=f'(x)-g(x)$, 且有

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=0 \qquad (a<x<b).$$

从而由 (i) 知 $F(x)\equiv$ 常数, 即 $F'(x)=0$ $(a<x<b)$, $f'(x)\equiv g(x)$, $f\in C^{(1)}((a,b))$.

(4) 只需指出 $f(1)\geqslant f(0)$ (否则用变量替换), 且不妨假定 $f(0)=0$. 令 $F(x)=f(x)-f(1)x$ $(x\in[0,1])$, 且记其最大值为 $F(\xi)$ $(0\leqslant\xi\leqslant 1)$. 由 $F(\xi)\geqslant F(x)$ $(\xi<x<1)$, 可知

$$0\geqslant\overline{\lim_{x\to\xi+}}\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi}=-f(1)+\overline{\lim_{x\to\xi+}}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

注意到上式右端第二项是非负的, 故有 $f(1)\geqslant 0$.

例 5.3.14 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可微, 且 $f'(x)$ 递减以及 $f'(x)>0$ $(0\leqslant x<\infty)$, 试证明存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f'(k)$ 当且仅当 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界.

(2) 试论数列 $\sqrt{7}$, $\sqrt{7-\sqrt{7}}$, $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}$, $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}$, … 的收敛性.

解 (1) 必要性.假定 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f'(k)=L$.因为 $(0<\theta_k<1,k=1,2,\cdots,n-1)$

$$\begin{aligned}f(n)-f(1)&=\sum_{k=1}^{n-1}[f(k+1)-f(k)]\\&=\sum_{k=1}^{n-1}f'(k+\theta_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}f'(k)\to L\qquad(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=f(1)+L$.注意到 $f'(x)>0$,可知 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增.由此知 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界.

充分性.假定 $f(x)$ 有界,则由 $f(x)$ 递增知存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.令 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L$,则在 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x(\Delta x>0)$ 中令 $x\to+\infty$,可得 $0=l-l=L\cdot\Delta x$,即 $L=0$.从而在式

$$\begin{aligned}f(n)-f(1)&=\sum_{k=1}^{n-1}[f(k+1)-f(k)]=\sum_{k=1}^{n-1}f'(k+\theta_k)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}f'(k+1)=\sum_{k=1}^{n}f'(k)\end{aligned}$$

两端令 $n\to\infty$,即知 $l-f(1)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f'(k)$ 存在.

(2) (i) 记 $x_0=\sqrt{7}$,$x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}}$,$x_2=\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}$,…,则此数列之通项可表示为 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

作函数 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$ $(x\in[0,7])$,则该数列又可写成

$$x_{n+2}=f(x_n)\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

(ii) 往证 $x_n\to2=f(2)(n\to\infty)$.事实上,因为

$$|f(x)-2|=|f(x)-f(2)|=|f'(\xi)||x-2|,$$

$$|f'(x)|=\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+x}}\cdot\sqrt{7+x}}\right|\leqslant\frac{1}{4\sqrt{7-\sqrt{14}}\cdot\sqrt{7}}\triangleq r<1,$$

所以我们有 $|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-2|\leqslant r|x_n-2|$.注意到 x_0,x_1 位于 0 与 7 之间,故也有 $0<x_n<7(n\in\mathbf{N})$.从而导出

$$|x_{2k}-2|\leqslant r^{2k}|x_0-2|,\qquad|x_{2k+1}-2|\leqslant r^{2k}|x_0-2|\qquad(k\in\mathbf{N}),$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

注 函数 $f(x)=x/2+x^2\sin(1/x)$,$f(0)=0$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可微,且 $f'(0)>0$,但对任意的 $\delta>0$,$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 上不是递增的.

证明 对 $x\neq0$,有 $f'(x)=1/2+2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$,且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x/2+x^2\sin(1/x)}{x}=\frac{1}{2}>0.$$

注意,对 $x_n=1/(2n\pi+\pi/2)$,$f'(x_n)=1/2+[2/(2n\pi+\pi/2)]-1$,故当 n 充分大时,$f'(x_n)<0$.

5.3.2　不等式

例 5.3.15　试证明下列不等式:

(1) $\cos x>1-x^2/2!\ (x\neq 0)$.　　(2) $\sin x>x-\dfrac{x^3}{3!}\ (x>0)$.

(3) $\cos x<1-x^2/2!+x^4/4!\ (x\neq 0)$.　(4) $\sin x<x-x^3/3!+x^5/5!\ (x>0)$.

证明　应用 Cauchy 中值公式:

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\qquad 0<\xi<x.$$

(1)设 $f(x)=1-\cos x$,$g(x)=x^2/2$,则由

$$\frac{1-\cos x}{x^2/2}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\sin\xi}{\xi}<1\qquad(x\neq 0),\text{证毕}.$$

(2) 设 $f(x)=x-\sin x$,$g(x)=x^3/3!$,则

$$\frac{x-\sin x}{x^3/3!}=\frac{1-\cos\xi}{\xi^2/2!}<1\qquad(0<\xi<x),\text{证毕}.$$

(3) 设 $f(x)=\cos x-1+x^2/2$,$g(x)=x^4/4!$,即可得证.

(4) 设 $f(x)=\sin x-x+x^3/3!$,$g(x)=x^5/5!$,即可得证.

例 5.3.16　试证明下列不等式:

(1) $\sin x+\tan x>2x\ (0<x<\pi/2)$.　(2) $x(2+\cos x)>3\sin x\ (0<x<2\pi)$.

(3) $\cos x<\sin^2 x/x^2\ (0<x<\pi/2)$.　(4) $\tan x/x>x/\sin x\ (0<x<\pi/2)$.

(5) $\sin(\tan x)\geqslant x\ (0\leqslant x\leqslant\pi/4)$.　(6) $\tan(\sin x)\geqslant x\ (0\leqslant x\leqslant\pi/3)$.

证明　(1) 作 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$,我们有

$$f'(x)=[\cos^3 x+1-2\cos^2 x]/\cos^2 x.$$

注意到 $f(0)=0$ 以及

$$\cos^3 x+1-2\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^2 x)>0,$$

可知 $f'(x)>0$,$f(x)$严格递增,即 $f(x)>0$.证毕.

(2) 作 $f(x)=x-3\sin x/(2+\cos x)$,则 $f(0)=0$,且有

$$f'(x)=(\cos x-1)^2/(2+\cos x)^2>0\qquad(0<x<2\pi),$$

即得所证.

(3) 作 $f(x)=\sin x/\sqrt{\cos x}-x$,则 $f(0)=0$,且有

$$f'(x)=\frac{1+\cos^2 x-2\sqrt{\cos x}\cdot\cos x}{2\sqrt{\cos x}\cdot\cos x}>\frac{(1-\cos x)^2}{2\sqrt{\cos x}\cdot\cos x}>0,$$

由此即可得证.

(4) 作 $f(x)=\sin x\cdot\tan x-x^2$,则 $f(0)=0$,且有

$$f'(x)=\sin x+\sin x\cdot\sec^2 x-2x,\qquad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=(\sqrt{\sec x}-\sqrt{\cos x})^2+2\tan^2 x\cdot\sec x>0\qquad(0<x<\pi/2).$$

由此知 $f'(x)$递增且 $f'(x)>0$.从而又得 $f(x)$递增,$f(x)>0$.

(5) 作 $f(x)=\sin(\tan x)-x$,则 $f(0)=0$,且有

$$f'(x)=\cos(\tan x)/\cos^2 x-1\qquad(0<x<\pi/4).$$

为证 $f'(x)\geqslant 0$,只需指出 $\cos(\tan x)\geqslant\cos^2 x$.由例 5.3.12 之(1)可知

$$\cos(\tan x)\geqslant 1-\tan^2 x/2,$$

从而只需指出 $1-\tan^2 x/2\geqslant\cos^2 x(0\leqslant x\leqslant\pi/4)$.为此只需将此式写成 $2\cos^4 x-3\cos^2 x+1\leqslant 0$,而后者显然成立.

(6) 作 $f(x)=\tan(\sin x)-x$,则 $f(0)=0$,且有 $f'(x)=\cos x/\cos^2(\sin x)-1$.为证 $f'(x)\geqslant 0$,只需指出

$$\cos x\geqslant\cos^2(\sin x)=[1+\cos(2\sin x)]/2.$$

注意到例 5.3.12 之(3),我们有

$$1+\cos(2\sin x)\leqslant 2-2\sin^2 x+\frac{2}{3}\sin^4 x\leqslant 2\cos x,\text{证毕}.$$

例 5.3.17 试证明下列不等式:

(1) $\cos^p\theta\leqslant\cos(p\theta)(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2;0<p<1)$.

(2) $\cos x+\cos y\leqslant 1+\cos(xy)(x^2+y^2\leqslant\pi)$.

(3) $1/\sin^2 x\leqslant 1/x^2+1-4/\pi^2(0<x\leqslant\pi/2)$.

(4) $f(s+t)<f(s)+f(t)(s,t>0,s+t<1)$,其中

$$f(x)=x-x^3/6+(x^4/24)\sin(1/x)(x>0).$$

证明 (1) 作 $f(\theta)=\cos(p\theta)-\cos^p\theta$,则 $f(0)=0$,且有

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-p,\sin(p\theta)+p\cdot\cos^{p-1}\theta\cdot\sin\theta\\&=p(-\sin(p\theta)+\sin\theta/\cos^{1-p}\theta)>0\qquad(0<\theta<\pi/2).\end{aligned}$$

由此即得所证.

(2) 因为 $1-x^2/2\leqslant\cos x\leqslant 1-x^2/2+x^4/24$(参阅例 5.3.12 之(3)),所以只需指出 $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}\leqslant 1+1-\frac{x^2y^2}{2}$,或等价地去指出

$$x^4+y^4+12x^2y^2-12(x^2+y^2)\leqslant 0\qquad(x^2+y^2\leqslant\pi).$$

再换成极坐标表示:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,我们有

$$r^2(2+5\sin^2(2\theta))\leqslant 24\qquad(r^2\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

因为 $r^2(2+5\sin^2(2\theta))\leqslant 7\pi<24$,所以上式成立.这说明结论为真.

(3) 作 $f(x)=(\sin x)^{-2}-x^{-2}$,我们有

$$f'(x)=-2(\sin x)^{-3}\cdot\cos x+2x^{-3},$$

故 $f'(x)>0$ 当且仅当 $1/x^3>\cos x/\sin^3 x$,或 $g(x)=\sin x/\sqrt[3]{\cos x}-x>0$.由于 $g'(x)=(\cos x)^{2/3}+(\cos x)^{-4/3}\cdot\sin^2 x/3-1$,以及

$$g''(x)=(4/9)(\cos x)^{-7/3}\cdot\sin^3 x>0\qquad(0<x<\pi/2),$$

故 $g'(x)$递增.注意到 $g'(0)=0$,可知 $g'(x)>0$.从而知 $g(x)$递增.注意到 $g(0)=0$,可得 $g(x)>0$.这说明 $f(x)$递增,于是 $f(x)\leqslant f(\pi/2)=1-4/\pi^2$.证毕.

(4) 作 $g(x)=f(x)/x=1-x^2/6+(x^3/24)\sin(1/x)$,易知 $g'(x)<0(0<x<1)$,故 $g(x)$严格递减,我们有 $g(s+t)<g(s)$,$g(s+t)<g(t)$.由此知 $sg(s+t)+tg(s+t)<sg(s)+tg(t)$.即得所证.

例 5.3.18 试证明下列不等式:

(1) $\ln x<x/\mathrm{e}(0<x\neq\mathrm{e})$. (2) $x\ln x/(x^2-1)<1/2(0<x\neq1)$.

(3) $1/x+1/\ln(1-x)<1(x<1,x\neq0)$.

证明 (1) 作 $f(x)=\ln x-x/\mathrm{e}$,我们有

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}-x}{x\mathrm{e}}\begin{cases}>0, & 0<x<\mathrm{e},\\ <0, & \mathrm{e}<x,\end{cases}\quad f(\mathrm{e})=0.$$

由此知 $f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上递增,在(e,∞)上递减,故得 $f(x)<f(\mathrm{e})=0$.

(2) 作 $f(x)=2x\ln x-x^2+1$,我们有

$$f'(x)=2\ln x+2-2x,\qquad f''(x)=2/x-2.$$

当 $x>1$ 时,$f''(x)<0$,$f'(x)$递减,故 $f'(x)<f'(1)=0$.从而知 $f(x)$递减,得 $f(x)<f(1)=0(x>1)$.

当 $0<x<1$ 时,$f''(x)=2/x-2>0$,$f'(x)$递增,故 $f'(x)<f'(1)=0$.从而知 $f(x)$递减,得 $f(x)>f(1)=0$,即

$$f(x)=2x\ln x-x^2+1>0,\qquad 2x\ln x>x^2-1.$$

于是有 $x\ln x/(x^2-1)<1/2(0<x<1)$.

(3) 注意到 $x\ln(1-x)<0$,将题式化为

$$\frac{\ln(1-x)+x}{x\ln(1-x)}<1,\qquad \ln(1-x)+x>x\ln(1-x).$$

于是作 $f(x)=\ln(1-x)+x-x\ln(1-x)$,我们有

$$f'(x)=-\frac{1}{1-x}+1+\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)=-\ln(1-x),$$

从而得 $f'(x)\begin{cases}<0, & x<0,\\ >0, & 0<x<1,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.证毕.

例 5.3.19 试证明下列不等式:

(1) $\dfrac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$. (2) $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}(x>0)$.

(3) $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}(x>0)$. (4) $\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)<\dfrac{b}{a}(a,b,x>0)$.

证明 (1) 作 $f(x)=\frac{2}{2x+1}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(x>0)$,则

$$f'(x)=1/(2x+1)^2x(x+1)>0 \qquad (x>0).$$

这说明 $f(x)$在$(0,\infty)$上严格递增.再注意 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,即知 $f(x)<0(x>0)$.

(2) 作 $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}(x>0)$,则

$$f'(x)=-1/x(1+x)^2<0 \qquad (x>0).$$

这说明 $f(x)$在$(0,\infty)$上严格递减.再注意 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,即知 $f(x)>0(x>0)$.

(3) 作 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}(x>0)$,则

$$f'(x)=[2\sqrt{1+x}-2-x]/2(1+x)\sqrt{1+x}.$$

注意到 $\sqrt{1+x}<1+x/2(x>0)$,故 $f'(x)<0(x>0)$.从而可得 $f(x)<f(0)=0$.

(4) 转而证明 $I=(1+b/x)^{\ln(1+x/a)}<e^{\frac{b}{a}}$.注意到 $\ln(1+t)<t$,我们有

$$I<\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x/a}=\left[\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x/b}\right]^{b/a}<e^{b/a}.$$

例 5.3.20 试证明下列不等式:

(1) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leqslant x^x(x>0)$. (2) $\frac{y}{x}>\frac{y^x}{x^y}(y>x>1)$.

(3) $(e+x)^{e-x}>(e-x)^{e+x}(0<x<e)$. (4) $e^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}<\frac{x}{n}(e^x-1)(x>0)$.

证明 (1) 等价于证明 $(x+1)[\ln(1+x)-\ln2]\leqslant x\ln x$,故作 $f(x)=(x+1)[\ln(1+x)-\ln2]-x\ln x$,我们有

$$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln2\begin{cases}>0, & 0<x<1,\\ <0, & x>1.\end{cases}$$

因此 $f(x)$在$(0,1)$上递增,在$(1,\infty)$上递减.从而有 $f(x)\leqslant f(1)=0$.

(2) 取对数,则不等式改为 $\ln y-\ln x>x\ln y-y\ln x$,$y>x>1$,即

$$\frac{\ln x}{x-1}>\frac{\ln y}{y-1}, \qquad y>x>1.$$

作函数 $f(t)=\ln t/(t-1)(t>1)$,易知

$$f'(t)=\frac{\ln(1-(1-1/t))+(1-1/t)}{(t-1)^2}<0, \qquad t>1.$$

从而知 $f(x)$递减,即得 $f(x)>f(y)$.再取指数,即可得证.

(3) 取对数后,往证 $(e-x)\ln(e+x)>(e+x)\ln(e-x)$.作函数 $f(x)=(e-x)\ln(e+x)-(e+x)\ln(e-x)$,易知 $f''(x)>0(0<x<e)$.因此 $f'(x)$上升,故 $f'(x)>f'(0)=0$.这说明 $f(x)$上升,从而有 $f(x)>f(0)=0$,得证.

(4) 作 $f(x)=\mathrm{e}^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}-\dfrac{x}{n}(\mathrm{e}^x-1)(x>0)$,则

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{x}{n}\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{n}+\frac{1}{n},$$

$$f^{(m)}(x)=\mathrm{e}^x-\sum_{k=m}^{n}\frac{x^{k-m}}{(k-m)!}-\frac{x}{n}\mathrm{e}^x-\frac{m}{n}\mathrm{e}^x\qquad(m=2,3,\cdots,n).$$

易知 $f^{(m)}(0)=-m/n<0$, $f'(0)=0$, $f(0)=0$.因为 $f^{(n)}(x)<0(x>0)$,所以 $f^{(n-1)}(x)$严格递减.从而 $f^{(n-1)}(x)<f^{(n-1)}(0)<0$,这说明 $f^{(n-2)}(x)$递减且 $f^{(n-2)}(x)<0(x>0)$.如此递推,最后可得 $f(x)<f(0)=0(x>0)$.

例 5.3.21　试证明下列不等式:

(1) $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}(x,y>0,0<\alpha<\beta)$.

(2) $\arctan x>x/(1+2x/\pi)(x>0)$.

证明　(1) 先将原式化为

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{1/\alpha}>\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right]^{1/\beta},$$

再研究函数 $f(x)=(1+b^x)^{1/x}(b>0)$,易知 $f(x)$递减,由此即得所证.

(2) 考察函数 $f(x)=\arctan x-x/(1+2x/\pi)$,易知

$$f(0)=0=\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad f'(4\pi/(\pi^2-4))=0,$$

以及 $f(x)$在$(0,4\pi/(\pi^2-4))$上递增,在$(4\pi/(\pi^2-4),\infty)$上递减.因此 $f(x)>0(x>0)$.

例 5.3.22　试证明下列不等式:

(1) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\leqslant\sqrt[n]{x-y}(x\geqslant y\geqslant 0)$.

(2) $\dfrac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{x+x^3+\cdots+x^{2n+1}}\geqslant\dfrac{n+1}{n}(x>0;n=1,2,\cdots)$.

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k-nx)^2\dbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\dfrac{n}{4}$.

证明　(1) 令 $x-y=t\geqslant 0$, $x=y+t$,则不等式改为

$$\sqrt[n]{y+t}-\sqrt[n]{y}\leqslant\sqrt[n]{t},\qquad y\geqslant 0,t\geqslant 0.$$

令 $f(t)=t^{1/n}-(y+t)^{1/n}+y^{1/n}$,则 $f(0)=0$,且有

$$f'(t)=\frac{1}{n}(1/t^{1-1/n}-1/(y+t)^{1-1/n})>0.$$

由此即可得证.

(2) (i) $x=1$ 时,不等式显然成立.(ii) $x\neq1$,将原式化为

$$\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}\,\frac{1-x^2}{x-x^{2n+1}}\geqslant\frac{n+1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

从而只需指出 $f(x)=n(1-x^{2n+2})-(n+1)x\cdot(1-x^{2n})\geqslant 0$.因为

$$f'(x)=-2n(n+1)x^{2n+1}-(n+1)+(n+1)(2n+1)x^{2n},$$
$$f''(x)=2n(n+1)(2n+1)x^{2n-1}(1-x),$$
所以当 $x\in(0,1)$时 $f'(x)<0$,$f(x)$递减.从而由 $f(0)>0$,$f(1)=0$,可知 $f(x)>0$ $(0<x<1)$;而当 $x>1$ 时,$f''(x)<0$,$f'(x)$递减.从而由 $f'(1)=0$ 可知 $f'(x)<0$.注意到 $f(1)=0$,即得 $f(x)<0$.证毕.

(3) 在等式$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ 两端对 x 求导,可知
$$n(x+y)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k}.$$
对 x 再求导,再乘以 x^2,可知
$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$
在上述三个等式中,以 $1-x$ 代 y,可得
$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\qquad nx=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$
$$n(n-1)x^2=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
从而我们有 $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4}$.

例 5.3.23　试证明下列不等式:

(1) $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}(n\geqslant 8)$.　(2) $\ln(\sqrt{2}+1)>\sqrt{2}-1$.

(3) $\pi^3<3^\pi$.　(4) $a/b<\ln a/\ln b(\mathrm{e}<a<b)$.

(5) $\ln(b/a)>2(b-a)/(b+a)(b>a>0)$.　(6) $(1+1/n)^{n+1}<\mathrm{e}(1+1/2n)$.

(7) $\ln(b/a)<(b-a)/\sqrt{ab}(b>a>0)$.

证明　(1) 令 $f(x)=\ln x/x(x>0)$,易知
$$f'(x)=(1-\ln x)/x^2<0\qquad(x>\mathrm{e}).$$
从而当 $\mathrm{e}\leqslant x<y$ 时,有 $f(x)>f(y)$,即 $\ln x/x>\ln y/y$.若 $n\geqslant 8$,则 $\mathrm{e}<\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$.证毕.

(2) 原式改为 $\ln(\sqrt{2}-1+2)>\sqrt{2}-1$,考察 $f(x)=\ln(x+2)-x(0<x<1)$,则
$$f'(x)=1/(x+2)-1=-(x+1)/(x+2)<0.$$
由此知 $f(x)$递减,而 $f(1)=\ln 3-1>0$,故得 $\ln(x+2)>x(0<x<1)$.最后,以 $\sqrt{2}-1$代 x,即得所证.

(3) 作 $f(x)=3^x\cdot x^{-3}(x>0)$,我们有
$$f'(x)=3^x(x\ln 3-3)/x^4>0\qquad(x>3/\ln 3).$$
因为 $3/\ln 3<3<\pi$,所以 $f(3)=1<f(\pi)=3^\pi/\pi^3$.即 $\pi^3<3^\pi$.

(4) 将原式改写为 $\ln a/a>\ln b/b(\mathrm{e}<a<b)$,并作 $f(x)=\ln x/x(x>\mathrm{e})$,我们有 $f'(x)=(1-\ln x)/x^2<0(x>\mathrm{e})$.故 $f(x)$在(e,∞)上递减,$f(a)>f(b)$.证毕.

(5) 将原式改写为 $\ln(b/a)>2\left(\dfrac{b}{a}-1\right)\Big/\left(\dfrac{b}{a}+1\right)$,并作 $f(x)=\ln x-2(x-1)/(x+1)(x>1)$,则 $f'(x)=(1-x)^2/x(1+x)^2>0(x>1)$.故 $f(x)$递增,$f(x)>f(1)=0$.证毕.

(6) 将原式改写为$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1+1/n}<\mathrm{e}^{1/n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{1/n}$,并作 $f(x)=x+x\ln(1+x/2)-(1+x)\ln(1+x)(x>0)$,则

$$f'(x)=\frac{x}{x+2}-\ln\left(\frac{1+x}{1+x/2}\right)>\frac{x}{x+2}-\frac{x/2}{1+x/2}=0.$$

故 $f(x)$递增,而 $f(0)=0$,因此 $f(x)>0(x>0)$.

(7) 将原式改写为 $2\ln\sqrt{\dfrac{b}{a}}<\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}(0<a<b)$,并作 $f(x)=x-1/x-2\ln x(x>1)$,则 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$.这说明 $f(x)$递增.而由 $f(1)=0$ 可知,$f(x)>0(x>1)$.

例 5.3.24　试证明下列不等式:

(1) $0\leqslant \mathrm{e}^{-t}-(1-t/n)^n\leqslant t^2\mathrm{e}^{-t}/n\quad(n\in\mathbf{N},t\in[0,n])$.

(2) $\mathrm{e}^{-t}-(1-t/n)^n\leqslant t\mathrm{e}^{-t}/2\sqrt{n}\quad(n\geqslant 36,t\in[0,n])$.

证明　(1) 左端不等式只需用 $\ln(1+x)\leqslant x(x>-1)$即可.

为证右端不等式,令 $f(t)=t^2/n+\mathrm{e}^t(1-t/n)^n$,则 $f(0)=1$.因为 $f'(t)=tg(t)$,其中 $g(t)\geqslant g(1)>0$,$f(t)$在$[0,n]$上递增,所以得证.

(2) 不妨假定 $t\in(0,2\sqrt{n}]$,并令 $t=\sqrt{n}x$,则原不等式等价于

$$1-\mathrm{e}^{\sqrt{n}x}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n\leqslant\frac{x}{2},\qquad 1-\frac{x}{2}\leqslant\mathrm{e}^{\sqrt{n}x}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

考察 $f_n(x)=\sqrt{n}x+n\ln(1-x/\sqrt{n})-\ln(1-x/2)$,往证 $f_n(x)>0$:易知(对 n 求导,即视 n 为$[1,\infty)$中的连续变量)

$$\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}n}=\frac{x}{2\sqrt{n}}+\ln(1-x/\sqrt{n})+x/[2(\sqrt{n}-x)]=g(x/\sqrt{n})/2,$$

$$g(u)=u+2\ln(1-u)+u/(1-u),$$

$$g(0)=0,\qquad g'(u)=\left(\frac{u}{1-u}\right)^2\geqslant 0,\qquad g(u)\geqslant 0.$$

从而有 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$.下面指出 $f_{36}(x)\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 2)$:

因为 $f'_{36}(x)=(6x^2-13x+6)/(6-x)(2-x)$,所以$\min\limits_{[0,2]}[f_{36}(x)]=f_{36}(3/2)=9+36\ln(3/4)+\ln 4=0.0297\cdots$.

例 5.3.25 试证明下列不等式：

(1) $(e^x-1)\ln(1+x)>x^2\ (x>0)$.　　(2) $\tan x\cdot\arctan x>x^2\ (0<x<\pi/2)$.

(3) $[(1+x)^p-1][(1+x)^{1/p}-1]>x^2\ (x>0,p>0,p\neq1)$.

(4) $[(1-x)^p-1][1-(1+x)^{1/p}]>x^2\ (0<x<1,p<-1)$.

证明 这些不等式都是下述不等式的特定情形：

$$f(x)\cdot f^{-1}(y)\geqslant xy \qquad (x,y>0;y\leqslant f(x)), \tag{*}$$

其中 $f(x)/x$ 是递增函数.而(*)来自 $\dfrac{f(x)}{x}\geqslant\dfrac{f(t)}{t}\ (t=f^{-1}(y)\leqslant x)$.

例 5.3.26 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，$b-a\geqslant4$，则存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$f'(x_0)<1+f^2(x_0).$$

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的正值可微函数.若有

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$$

则当 $a<x<b$ 时有 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.

(3) 满足 $(1+x)^{x+\alpha}>e\ (x>0)$ 的最小值 $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三次可导，且 $f'''(x)>0$，则

$$f(a+h)-f(a)<\frac{h}{2}[f'(a)+f'(a+h)] \qquad (a<a+h<b).$$

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可微，$f(0)=0$ 且 $f'(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，则

$$f(x)/x<f(y)/y \quad (0<x<y).$$

(6) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可微.若有 $f(x_0)=0$，$f'(x)<f(x)\ (-\infty<x<\infty)$，则 $f(x)>0\ (x>x_0)$.

证明 (1) 对 $a<x_1<x_2<b$，$x_2-x_1>\pi$，我们有 $x_1<x_0<x_2$，

$$|\arctan f(x_2)-\arctan f(x_1)|=(x_2-x_1)|f'(x_0)|/(1+f^2(x_0)).$$

$$\pi\geqslant(x_2-x_1)|f'(x_0)|/(1+f^2(x_0)),$$

$$|f'(x_0)|/(1+f^2(x_0))\leqslant\pi/(x_2-x_1)<1.$$ 证毕.

(2) 作 $F(x)=f(x)/g(x)$，则

$$F'(x)=[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]/g^2(x)<0.$$

这说明 $F(x)$ 递减，故 $F(x)>F(b)\ (a<x<b)$，即

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}, \qquad f(x)g(b)>f(b)g(x).$$

(3) 令 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$，则 $f'(x)=f(x)\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x+\alpha}{x^2+x}\right]$.

记 $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-(x+\alpha)/(x^2+x)$，则有

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0,\qquad g'(x)=\frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}.$$

由此知 $\alpha\geqslant 1/2$ 时,$g(x)$在 $x\to+\infty$时递增趋于 0;当 $\alpha<1/2$ 时,$g(x)$在 $x\to+\infty$时递减趋于 0.故当 $\alpha\geqslant 1/2$ 时 $f(x)$递减趋于 e;当 $\alpha<1/2$ 时 $f(x)$递增趋于 e.$\alpha=1/2$.

(4) 在 $a\leqslant x\leqslant b-a$ 上作函数

$$F(x)=f(a+x)-f(a)-x[f'(a)+f'(a+x)]/2,$$

我们有(对 x 求导)

$$F'(x)=f'(a+x)-\frac{f'(a)+f'(a+x)}{2}-\frac{xf''(a+x)}{2},$$

$$\begin{aligned}F''(x)&=f''(a+x)-\frac{f''(a+x)}{2}-\frac{f''(a+x)}{2}-\frac{xf'''(a+x)}{2}\\&=-\frac{xf'''(a+x)}{2}<0,\qquad a<x<b-a.\end{aligned}$$

由此知 $F'(x)$递减,而 $F'(0)=0$,故 $F'(x)<0(a<x<b-a)$.从而知 $F(x)$递减,而 $F(0)=0$,故 $F(x)<0$.这说明 $f(a+x)-f(a)<x[f'(a)+f'(a+x)]/2$.即得所证.

(5) 问题可转化为证明不等式

$$F(x,y)=xf(y)-yf(x)>0\quad(0<x<y).$$

实际上,存在 $0<\xi_1<x<\xi_2<y$,使得

$$\begin{aligned}F(x,y)&=x[f(y)-f(x)]+(x-y)f(x)\\&=xf'(\xi_2)(y-x)-(y-x)[f(x)-f(0)]\\&=[xf'(\xi_2)-f(\xi_1)x](y-x)>0.\end{aligned}$$

(6) 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$,我们有

$$F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]>0\quad(-\infty<x<\infty).$$

这说明 $F(x)$严格递增,从而 $F(x)>F(x_0)=0$,即 $f(x)>0(x>x_0)$.

5.3.3 导函数的特征

定理 5.3.3(导函数在一点的极限特性)　设 $f(x)$在 $U(x_0)$上连续,且在 $x\neq x_0$ 处可导.若有 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$,则 $f'(x_0)$存在且等于 A.

定理 5.3.4(导函数的中值性)　设 $f(x)$在$[a,b]$上可导,则 $f'(x)$可取到位于 $f'(a)$与$f'(b)$之间的一切值(例如,若 $f'(a)<y_0<f'(b)$,则存在 x_0:$a<x_0<b$,使得 $f'(x_0)=y_0$).

例 5.3.27　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=(x-1)^2|(x+1)^3|$,求 $f'(x)$.

(2) 设$\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$$(-\infty<t<\infty)$,求 $y(x)$在 $x=0$ 处的导数.

(3) 设在 $U(0)$ 上定义函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, & x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$ 则 $f'\in C(U(0))$.

解 (1) 在 $x\neq -1$ 时,我们有 $f'(x)=|x+1|(x^2-1)(5x-1)$.注意到 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续,而且 $\lim\limits_{x\to -1}f'(x)=0$,故上式对任意的 x 都成立.

(2) 在 $t\neq 0$ 时,我们有$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2+t/|t|$,以及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=10t+8|t|,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{10t+8|t|}{2+t/|t|}.$$

因为 $x=0$ 相当于 $t=0$, $y=4tx-3t^2$,且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\to 0(t\to 0)$,所以根据导函数的极限特性,可知 $y'(0)=0$.

(3) 只须指出 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续即可.注意到 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x+3x^2}=-\frac{1}{2},$$

我们有

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\left[\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right]=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

这说明 $f'(0)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$且 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续.

例 5.3.28 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在(a,b)上可导.若 $f'(x)$在(a,b)上单调,则 $f'\in C((a,b))$.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上二次可导.若 $f''(x)\neq 0(a\leqslant x\leqslant b)$,则对任意的 $\xi\in(a,b)$,存在 ξ': $a<\xi<\xi'\leqslant b$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi')-f(a)}{\xi'-a}$.

(3) (i) 设 $f(x)$在(a,b)上可导,且有

$$x_i\in(a,b),\quad \lambda_i>0\quad (i=1,2,\cdots,n);\qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,$$

则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)=f'(\xi)$.

(ii) 设 $f(x)$在(a,b)上可导,且有 $x_i<y_i$, x_i, $y_i\in(a,b)(i=1,2,\cdots,n)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}[f(y_i)-f(x_i)]=f'(\xi)\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i).$$

证明 (1) 对任意的 $x_0\in(a,b)$,它是 $f(x)$的连续点.由 $f'(x)$的单调性,可知存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0+}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-}f'(x)$.从而根据定理 5.3.3,可知 $f'(x_0)$存在且 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 不妨假定 $f''(x)>0(a\leqslant x\leqslant b)$,此时 $f'(x)$严格递增,自然有 $f'(a)<f'(\xi)<f'(b)$.

若$[f(b)-f(a)]/(b-a)\neq f'(\xi)$,不妨设$[f(b)-f(a)]/(b-a)>f'(\xi)$,令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ f'(a), & x=a,\end{cases}$$

则知 $F\in C([a,b])$,它可取到从 $f'(a)$到$[f(b)-f(a)]/(b-a)$之间的一切值.从而存在 ξ',使 $F(\xi')=f'(\xi)$.

(3) (i) 不妨假定指标:$1\leqslant i_0,i_1\leqslant n$ 满足 $f'(x_{i_0})\leqslant f'(x_i)\leqslant f'(x_{i_1})(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$f'(x_{i_0})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_{i_0})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)\leqslant f'(x_{i_1}).$$

根据导函数的中间值性质,可知存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)=f'(\xi)$.

(ii) 记 $\lambda_i=(y_i-x_i)\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)(i=1,2,\cdots,n)$,则有 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.因为$(x_i<\xi_i<y_i)$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[f(y_i)-f(x_i)]}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)}=\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\frac{y_i-x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(\xi_i),$$

以及存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f'(\xi_i)=f'(\xi)$,所以命题得证.

例 5.3.29 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上二次可导.若 $f(x)$是有界函数,则存在点 $x_0\in(-\infty,\infty)$,使得 $f''(x_0)=0$.

(2) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微,且存在常数:$k_1,b_1,k_2,b_2(k_1<k_2)$,使得

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(k_1x+b_1)]=0,\qquad\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(k_2x+b_2)]=0,$$

则对任意的 $k\in(k_1,k_2)$,存在 ξ,使得 $f'(\xi)=k$.

(3) 设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可导,且 $g'(x)\neq0(x\in[a,b])$,则函数 $f'(x)/g'(x)$可取到 $f'(a)/g'(a)$与 $f'(b)/g'(b)$之间的一切值.

(4) 设 $f(x)$在$[a,b]$上二次可导,且有

$$f(a)=f(b)=0,\qquad f'(a)\cdot f'(b)>0,$$

则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=0$.

证明 (1) (i) 若存在 $x_1<x_2$,使得 $f''(x_1)\cdot f''(x_2)\leqslant0$,则根据导函数中值

性可知,存在 $x_0\in[x_1,x_2]$,使得 $f''(x_0)=0$.

(ii) 现在假定 $f''(x)>0$, $-\infty<x<\infty$,从而 $f'(x)$是严格递增函数.此时,不妨设在点 $x=x_1$,使得 $f'(x_1)>0$,则当 $x>x_1$ 时,有$(0<\theta<1)$

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x_1)+f'(x_1+\theta(x-x_1))(x-x_1)\\ &>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1). \end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$,可得 $f(x)\to+\infty$,这与题设 $f(x)$有界矛盾.从而可知在$(-\infty,\infty)$上不可能都是 $f''(x)>0$($f'(x_1)<0$ 时类似可证).

对于 $f''(x)<0$, $x\in(-\infty,\infty)$,也可类似地讨论.这说明只有(i)的情形成立.

(2) 由题设知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$.从而可得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=k_1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=k_2.$$

因此,对 $k_1<k<k_2$,存在 $x_1<0$, $x_2>0$,使得

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}<k,\qquad \frac{f(x_2)-f(0)}{x_2}>k.$$

这就是说(Lagrange 中值公式),存在 $x_1<\xi_1<0$, $0<\xi_2<x_2$,使得 $f'(\xi_1)<k$, $f'(\xi_2)>k$.从而由导函数的中值性可知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f'(\xi)=k$.

(3) 不妨假定 λ: $f'(a)/g'(a)<\lambda<f'(b)/g'(b)$,且作函数 $F(x)=f(x)-\lambda g(x)$,则 $F(x)$在$[a,b]$上可导.又有

$$F'(a)=f'(a)-\lambda g'(a)<0,\qquad F'(b)=f'(b)-\lambda g'(b)>0.$$

从而根据导函数的中值性可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\lambda g'(\xi),\qquad f'(\xi)/g'(\xi)=\lambda.$$

(4) 设 $f'(a)>0$, $f'(b)>0$,由题设知,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $f'(\eta)=0$.从而有

$$0>\frac{f'(\eta)-f'(a)}{\eta-a}=f''(\xi_1),\qquad a<\xi_1<\eta,$$

$$0<\frac{f'(b)-f'(\eta)}{b-\eta}=f''(\xi_2),\qquad \eta<\xi_2<b.$$

根据导函数中值性可知,存在 $\xi_1<\xi<\xi_2$,使得 $f''(\xi)=0$.

例 5.3.30 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(2)}(\mathbf{R})$,且 $f(0)=0$.令 $F(x)=\begin{cases} f(x)/x, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$ 则 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上连续可微.

(2) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上可微,若对每个有理数 $r\neq0$,方程 $f'(x)=\sqrt{2}r$($x\in\mathbf{R}$)均有解,则对 $\lambda\in\mathbf{R}$,方程 $f'(x)=\lambda$($x\in\mathbf{R}$)必有解.

证明 (1) 由 $F'(x)=[xf'(x)-f(x)]/x^2$($x\neq0$)可知,除点 $x=0$ 外,$F(x)$

有连续导数.此外,又由

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

可知 $F(x)$在 $x=0$ 处连续.注意到

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

且根据导函数的极限性质,可知 $F'(0)$存在且 $F'(x)$在 $x=0$ 处连续.

(2) 对 $\lambda\in(-\infty,\infty)$,存在有理数 r_1,r_2,使得

$$r_1<\lambda/\sqrt{2}<r_2,\qquad \sqrt{2}r_1<\lambda<\sqrt{2}r_2.$$

又依题设知存在 x_1,x_2,使得 $f'(x_1)=\sqrt{2}r_1$,$f'(x_2)=\sqrt{2}r_2$.从而根据导函数的介值性,可得位于 x_1 与 x_2 之间的 x_0,使得 $f'(x_0)=\lambda$.

5.3.4 函数的极值

定义 5.3.1 设 $f(x)$在 $U(x_0)$上有定义,若

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(f(x)\geqslant f(x_0)),\qquad x\in U(x_0),$$

则称 $f(x)$在点 x_0 处取到**极大(小)值**,其极大(小)值为 $f(x_0)$,x_0 称为 $f(x)$的**极大(小)值点**.极大、极小值统称**极值**.若上述不等式中“$\leqslant$”换成“$<$”(“$\geqslant$”换成“$>$”),则称 $f(x_0)$为**严格极大(小)值**.

定理 5.3.5(极值存在的必要条件) 设 $f(x)$在 $U(x_0)$有定义,且 $f'(x_0)$存在.若 x_0 是$f(x)$的极大值点或极小值点,则 $f'(x_0)=0$.

注 对可微函数 $f(x)$来说,若 $f'(x_0)=0$,则称 x_0 为 $f'(x)$的**稳定点**(或**驻点**、**临界点**).因此,上述定理表明,极值点必为稳定点.但还要指出的是:对不可微的点来说,函数也可以在其上取到极值,如 $y=|x|$,它在 $x=0$ 处不可微,它是极小值点.这样,函数取极值只能在两种形式下发生:其一是在可微点上,此时其导数必为零;其二是在不可微点上发生.至于如何判断一个点是极值点?我们有下述结论.

定理 5.3.6 设 $f(x)$在 $U(x_0)$上连续,在 $U_0(x_0)$上可微.

(1) 对 $U_0(x_0)$中的点 x,若有$\begin{cases}f'(x)>0, & x<x_0,\\ f'(x)<0, & x>x_0,\end{cases}$则 $f(x_0)$是 $U(x_0)$上 $f(x)$的极大值.

(2) 对 $U_0(x_0)$中的点 x,若有$\begin{cases}f'(x)<0, & x<x_0,\\ f'(x)>0, & x>x_0,\end{cases}$则 $f(x_0)$是 $U(x_0)$上 $f(x)$的极小值.

上面主要介绍的是利用一阶导数给出的函数取极值的必要条件,以及判定极大(小)值的充分条件.在函数有二阶导数的情形,可以给出下述充分条件.

定理 5.3.7 设 $f(x)$在 x_0 处二次可导,且 $f'(x_0)=0$.

(1)若 $f''(x_0)<0$,则 x_0 是 $f(x)$的极大值点;(2)若 $f''(x_0)>0$,则 x_0 是 $f(x)$的极小值点.

注 1 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=x^2\sin^2(1/x)\,(x\neq 0)$,$f(0)=0$ 的非严格的极小值点.

注 2 $f(x)=x^2(2+\cos(1/x))\,(x\neq 0)\,(f(0)=0)$在 $x=0$ 处取到严格极小值,但它在任一区间$(-\delta,0)$上均非递减,在$(0,\delta)$上均非递增.类似的情形还有 $f(x)=|x|(2+\cos(1/x))$

$(x\neq 0)$，$f(0)=0$(此例不存在 $f'(0)$).

例 5.3.31　解答下列问题：

(1) 求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$在$(-\infty,\infty)$上的极值.

(2) 给定 n 个数：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，求 x 值使得 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ 达到最小值.

解　(1) 首先，易知 $f\in C((-\infty,\infty))$.其次，因为我们有

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},$$

所以得稳定点为 $x_1=\frac{2}{5}$，以及不可微点 $x_2=0$.注意到

$$f'(x)<0\left(0<x<\frac{2}{5}\right),\qquad f'(x)>0\left(\frac{2}{5}<x\right),$$

从而知 $x_1=\frac{2}{5}$为 $f(x)$的极小值点，极小值为

$f\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.又注意到

$$f'(x)>0\quad(x<0),$$
$$f'(x)<0\quad\left(0<x<\frac{2}{5}\right),$$

从而知 $x_2=0$ 为 $f(x)$的极大值点，极大值为 $f(0)=0$.见图 5.1.

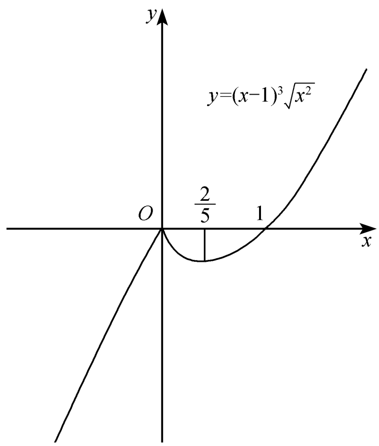

图 5.1

(2) 因为 $f'(x)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)=2\left(nx-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$，所以 $f'(x)=0$ 的解为

$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

易知此 x 是使 $f(x)$取到最小值的点(本例说明取平均值在计算测量目标值时的意义).

例 5.3.32　试求下列函数 $f(x)$的极值：

(1) $f(x)=x^m(1-x)^n$.

(2) $f(x)=1/(1+|x|)+1/(1+|x-1|)$.

(3) $f(x)=(1+x+x^2/2!+\cdots+x^n/n!)\mathrm{e}^{-x}$.

解　(1) 我们有 $f'(x)=(m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m/(m+n)-x]$，故知当 $m>1$ 时，$f'(x)$在 $x_1=0$ 处为 0；当 $n>1$ 时，$f'(x)$在 $x_2=1$ 处为 0.又 $x_3=m/(n+m)$时 $f'(x)=0$.从而我们有

m 是偶数时,x_1 是 $f(x)$的极小值点;m 是奇数时,x_1 不是 $f(x)$的极值点;
n 是偶数时,x_2 是 $f(x)$的极小值点;n 是奇数时,x_2 不是 $f(x)$的极值点.
$x=x_3$ 是 $f(x)$的极大值点,且 $f(x_3)=m^m n^n/(m+n)^{m+n}$.

(2) 因为我们有

$$f'(x)\begin{cases} >0, & x<0, \\ <0, & 0<x<1/2, f(0)=3/2, \\ >0, & 1/2<x<1, f(1/2)=4/3, \\ <0, & x>1, f(1)=3/2, \end{cases}$$

所以 $x=0$,1 是 $f(x)$的极大值点,$x=1/2$ 是 $f(x)$的极小值点.

(3) 因为 $f'(x)=e^{-x}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$,所以当 $f'(x)=0$ 时可知有解 $x=0$.此外,当 n 是奇数时得

$$f'(x)\begin{cases} >0, & x<0, \\ <0, & x>0, \end{cases}$$

故 $f(0)$为极大值.n 是偶数时得 $f'(x)<0(x\neq 0)$,故此时无极值.

例 5.3.33　设 $f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\cdot\sin x+c\sin^2 x$.

(1) 试问在什么条件下,$f(x)$是一个常数?

(2) 在不是(1)的情形,试求 $f(x)$的极值.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2a\cos x\cdot\sin x+2b(\cos^2 x-\sin^2 x)+2c\cos x\cdot\sin x \\ &= (c-a)\sin 2x+2b\cos 2x, \end{aligned}$$

所以欲使 $f'(x)\equiv 0$,就是 $c=a$,$b=0$ 时.

(2) 若 $a\neq c$,则由 $f'(0)=0$ 应解出 $\tan 2x=2b/(a-c)$.从而

$$x=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2b}{a-c}\right)+\frac{n\pi}{2}\triangleq\alpha \qquad (n=0,\pm1,\cdots).$$

若 $a=c$,则欲使 $f'(x)=0$ 可解出 $x=\pi/4\pm n\pi/2=\triangleq\beta(n=0,\pm1,\cdots)$.从而当 $a\neq c$ 时,因为 $f''(x)=2\cos 2x[(c-a)-2b\tan 2x]=2\cos 2x\cdot\frac{(c-a)^2+4b^2}{c-a}$,所以有 $f''(\alpha)=2\frac{(c-a)^2+4b^2}{c-a}\cos\left(\arctan\frac{2b}{a-c}+n\pi\right)$.而 $a=c$ 时,有

$$f''(\beta)=-4b\sin 2\beta=-4b\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm n\pi\right).$$

不论何种情况,根据 n 是奇、偶数,$f''(\alpha)$与 $f''(\beta)$的正、负值交替出现,其极大、极小值以 $\pi/2$ 间隔交替发生:

$$f(\alpha)=c+(a-c)\cos^2\alpha+b\sin 2\alpha=\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\cos 2\alpha+b\sin 2\alpha$$

$$=\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\cos2\alpha\left[1+\frac{2b}{a-c}\tan2\alpha\right]=\frac{a+c}{2}+\frac{(a-c)^2+4b^2}{2(a-c)}\cos2\alpha,$$

$$f(\beta)=\frac{a+c}{2}+b\sin2\beta=\frac{a+c}{2}+b\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm n\pi\right).$$

例 5.3.34 试证明下列不等式：

(1) $\ln x<\sqrt{x}\ (x>0)$. (2) $x^2-2ax+1<e^x\ (x>0, a>\ln2-1)$.

(3) $x^x(1-x)^{1-x}>e^{1/2}\ (0<x<1, x\neq1/2)$.

(4) $(x^p-1)/p\geqslant(x^q-1)/q\ (p>q>0, x>0)$.

证明 (1) 作 $f(x)=\ln x-\sqrt{x}\ (x>0)$，则

$$f'(x)=1/x-1/2\sqrt{x}=(2-\sqrt{x})/2x,\qquad f'(4)=0.$$

易知 $x=4$ 是 $f(x)$的最大值点，且 $f(4)<0$，即得所证.

(2) 作 $f(x)=e^x-x^2+2ax-1$，则 $f'(x)=e^x-2x+2a$，$f''(x)=e^x-2$.由此知在 $x_0=\ln2$ 处，$f''(x_0)=0$.由

$$f''(x)\begin{cases}<0, & x<x_0,\\ >0, & x>x_0,\end{cases}$$

可知 x_0 是 $f'(x)$的最小值点，且 $f'(x_0)>0$.这说明 $f'(x)>0$，$f(x)$严格递增，顾及 $f(0)=0$，即知 $f(x)>0\ (x>0)$.

(3) 作 $f(x)=\ln[x^x(1-x)^{1-x}]\ (0<x<1)$，则

$$f'(x)=1+\ln x-1-\ln(1-x)=\ln[x/(1-x)].$$

从 $f'(x)=0$ 可知 $x=1/2$，且有 $f'(x)\begin{cases}<0, & x\in(0,1/2),\\ >0, & x\in(1/2,1).\end{cases}$ 这说明 $f(x)$在 $x=1/2$ 处取到极小值(最小值)，且有

$$f(1/2)=(1/2)^{1/2}(1/2)^{1/2}=1/2,\qquad f(x)>1/2.$$

(4) 作 $f(x)=(x^p-1)/p-(x^q-1)/q\ (x>0)$，则

$$f'(x)=x^{p-1}-x^{q-1}=x^{q-1}(x^{p-q}-1).$$

易知 $x=1$ 是 $f(x)$的唯一极小值点，且 $f(1)=0$.从而可得 $f(x)\geqslant0\ (x>0)$.

例 5.3.35 试证明下列不等式：

(1) $x^n(1-x)<1/ne\quad(0<x<1, n\in\mathbf{N})$. (2) $x^y+y^x>1\quad(x, y>0)$.

(3) $x^\alpha|\ln x|<1/\alpha e\quad(0<x<1, \alpha>0)$.

证明 (1) 作函数 $f(x)=x^n(1-x)$，则 $f'\left(\frac{n}{n+1}\right)=0$，且易知 $f\left(\frac{n}{n+1}\right)$ 是最大值.从而有 $x^n(1-x)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{en}$.

(2) 只需讨论 $0<x, y<1$ 的情形.令 $y=tx$，则由对称性可知，讨论 $0<t\leqslant1$ 以及 $x^y+y^x=x^{tx}+(tx)^x=(x^x)^t+t^xx^x$.因为 x^x 在 $x=1/e$ 处达到最小值 $e^{-1/e}$(记为

a),且有 $x^y+y^x \geqslant a^t+ta(t^x\geqslant t)$.

此外,函数 $g(t)=a^t+ta$ 只有一个极小值点 $t_0=1-\mathrm{e}<0$,故 $g(t)$在(0,1)上递增.$g(0)=1$,我们有 $x^y+y^x>1$.

(3) 作函数 $f(x)=x^\alpha|\ln x|$,则由等式

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}|\ln x|+x^{\alpha-1}|\ln x|/\ln x=x^{\alpha-1}|\ln x|(\alpha+1/\ln x)=0$,
可知 $\ln x=-1/\alpha$,即得解 $x_0=\mathrm{e}^{-1/\alpha}$.因为 $f(1)=0$,$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$,所以 x_0 必为 $f(x)$的最大值点.且此时有 $f(x_0)=\mathrm{e}^{-1}|\ln \mathrm{e}^{-1/\alpha}|=\mathrm{e}^{-1}/\alpha=1/\alpha\mathrm{e}$.

例 5.3.36　试证明下列不等式:

(1) $t^2\mathrm{e}^{-t}/n^2\leqslant \mathrm{e}^{-t}-(1-t/n)^n(n\geqslant 2,0\leqslant t\leqslant n)$.

(2) $0\leqslant \mathrm{e}^{-t^2/2n}-\mathrm{e}^t(1-t/n)^n\leqslant 1/\sqrt{\mathrm{e}^n}(0\leqslant t\leqslant n)$.

证明　(1) 令 $f(t)=t^2/n^2+\mathrm{e}^t(1-t/n)^n$,则只需指出 $f(t)\leqslant 1(0\leqslant t\leqslant n)$.因为 $f(0)=f(n)=1$,且当 $f'(t_0)=0$ 时有 $\mathrm{e}^{t_0}(1-t_0/n)^{n-1}=2/n$.此时,得 $f(t)\leqslant 1(0\leqslant t\leqslant n,n\geqslant 2)$.

(2) 左端不等式来自 $\ln(1-x)\leqslant -x-x^2/2(0<x<1)$.为证右端不等式,作 $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2/2n}-\mathrm{e}^t(1-t/n)^n(0\leqslant t\leqslant n)$.因为 $f(0)<1/\sqrt{\mathrm{e}^n}$,$f(n)\leqslant 1/\sqrt{\mathrm{e}^n}$,所以看 $f'(t_0)=0$,得 $\mathrm{e}^{-t_0^2/2n}=\mathrm{e}^{t_0}(1-t_0/n)^{n-1}$.由此即知 $f(t_0)=t_0\mathrm{e}^{-t_0^2/2n}\leqslant 1/\sqrt{\mathrm{e}^n}$.证毕.

例 5.3.37　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=a^x-ax(a>1)$在$(-\infty,\infty)$中的驻点为 $x(a)$.试问 a 为何值时,$x(a)$达到最大值,并求此值.

(2) 设 $t>0$,试证明对一切 $x>0$,有 $\mathrm{e}^x>x^t$ 当且仅当 $t<\mathrm{e}$.

(3) 确定满足 $1<a<\infty$的 a 值,使得 $x^a\leqslant a^x(1<x<\infty)$成立.

解　(1) 由 $f'(x)=a^x\ln a-a=0$,可得唯一驻点为 $x(a)=1-\ln\ln a/\ln a$.由 $x'(a)=(1-\ln\ln a)/a\cdot\ln^2 a=0$,可知有解 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$.因为

$$x'(a)\begin{cases}<0, & a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}},\\ >0, & a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}},\end{cases}$$

所以 $x(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})=1-1/\mathrm{e}$ 为极大值,也是最大值.

(2) 作 $f(x)=\mathrm{e}^x/x^t(x>0)$,由于 $f(x)\to+\infty(x\to 0+,x\to+\infty)$,故 $f(x)$在$(0,\infty)$上达到最小值.因为由 $f'(x)=\mathrm{e}^x x^{-t}(1-t/x)=0$,可知 $x=t$ 为 $f(x)$的最小值点,且有最小值为 $f(t)=\mathrm{e}^t/t^t=(\mathrm{e}/t)^t$.所以 $\mathrm{e}^x\geqslant(x\mathrm{e}/t)^t$,且右端$>x^t$ 当且仅当 $t<\mathrm{e}$.

(3) 作函数 $f(x)=x^{-a}a^x$,并求其极小值.因为

$$\ln f(x)=x\ln a-a\ln x,\qquad f'(x)/f(x)=\ln a-a/x,$$

所以 $f'(x)$在$(1,a/\ln a)$上取负值,在$(a/\ln a,+\infty)$上取正值.从而 $f(x)$在 $x_a=a/\ln a$处取到极(最)小值,且有 $\ln f(x_a)=a-a\ln\left(\dfrac{a}{\ln a}\right)=a\ln(\mathrm{e}\ln a/a)$.因此,$a$满足

条件当且仅当 $\mathrm{e}\ln a/a\geqslant 1$.

为求 a 值,作 $g(t)=\ln t/t$,则 $g'(t)=(1-\ln t)/t^2$.由此知 $g(t)$在$(1,\infty)$内的 $t=\mathrm{e}$上达到极大值,极大值为 $g(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$.由于在$(1,\mathrm{e})$以及$(\mathrm{e},\infty)$上有 $g(t)<1/\mathrm{e}$,故 $a=\mathrm{e}$ 为唯一满足要求者.

例 5.3.38 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,且 $f\in C^{(2)}((a,b))$.若有

$$f''(x)=\mathrm{e}^x f(x),\qquad f(a)=f(b)=0,$$

则 $f(x)\equiv 0$.

(2) 设 $f\in C^{(2)}((-\infty,\infty))$,若有

$$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4,\qquad |f(x)|\leqslant 1\quad(-\infty<x<\infty),$$

则存在 ξ,使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

(3) 设 $f\in C^{(1)}((0,\infty))$,$f(0)=1$.若 $|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$,则存在 $x_0>0$,使得 $f'(x_0)=-\mathrm{e}^{-x_0}$.

(4) 设 $f\in C^{(1)}((a,b))$,且 $f'(x)$在(a,b)上严格单调.若有 $x_0\in(a,b)$,$f(x_0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/f'(x)=0$.

证明 (1) 假定 $f(x)\not\equiv 0$,则不妨设 $x_0\in(a,b)$,$f(x_0)>0$ 是 $f(x)$在$[a,b]$上的极大值.从而 $f''(x_0)\leqslant 0$,这导致 $\mathrm{e}^{x_0}f(x_0)\leqslant 0$,矛盾.类似地,可推 $f(x_0)<0$ 为极小值的情形.

(2) 作 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$,则 $F(0)=4$.我们有

$$\frac{f(0)-f(-2)}{2}=f'(\xi_1),\qquad \xi_1\in(-2,0),$$

$$\frac{f(2)-f(0)}{2}=f'(\xi_2),\qquad \xi_2\in(0,2).$$

故得

$$|f'(\xi_1)|\leqslant[|f(0)|+|f(-2)|]/2\leqslant\frac{1+1}{2}=1,$$

$$|f'(\xi_2)|\leqslant[|f(2)|+|f(0)|]/2\leqslant\frac{1+1}{2}=1.$$

从而知

$$|F(\xi_1)|\leqslant|f(\xi_1)|^2+|f'(\xi_1)|^2\leqslant 2,$$
$$|F(\xi_2)|\leqslant|f(\xi_2)|^2+|f'(\xi_2)|^2\leqslant 2.$$

设 $F(\xi)(a<\xi<b)$是最大值,此时有 $F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$.

若 $f'(\xi)=0$,则 $F(\xi)=f^2(\xi)\leqslant 1$,而 $F(0)=4$,这与 $F(\xi)$是最大值矛盾;若 $f'(\xi)\neq 0$,则只有 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

(3) 作 $F(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$,则 $F(0)=0$,且有

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=0, \qquad F(x)\leqslant 0 \qquad (0<x<\infty).$$

若 $F(x)\equiv 0$,则 $f(x)\equiv e^x\ (x\geqslant 0)$.从而假定存在 $a>0$,使得 $F(a)<0$,则存在 X,当 $x\geqslant X$ 时,有 $F(x)>F(a)/2$.由此知存在 $x_0\in(0,X)$,使得 $F(x_0)$达到极小值.因此 $F'(x_0)=0$,即得所证.

(4) 不妨假定 $f'(x)$在(a,b)上严格递增.

(i) 若 $f'(x_0)\neq 0$,则存在 ξ(位于 x_0 与 x 之间),使得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x-x_0)=\frac{f'(x_0)}{f'(x_0)}\cdot 0=0.$$

(ii) 若 $f'(x_0)=0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$的极小值点.从而存在 $\delta>0$,$0<|x-x_0|<\delta$,对位于 x_0 与 x 之间的 ξ,有 $|f'(\xi)|\leqslant|f'(x)|$,

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x-x_0)\right|\leqslant\lim_{x\to x_0}|x-x_0|=0.$$

例 5.3.39　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$定义在$(-\infty,\infty)$上,且 $f(x)$二次可导.又有

$$f(a)=f(b)=0\,(a<b), \quad f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0, \quad x\in(-\infty,\infty),$$

则 $f(x)=0\,(a<x<b)$.

(2) 设 $f\in C^{(2)}([0,a])$,且 $x_0\in(0,a)$是 $f(x)$的极小值点,则

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant a\cdot\max_{[0,a]}\{|f''(x)|\}.$$

证明　(1) 假定 $x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的最大值点,则 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\leqslant 0$.从而知 $0\geqslant f''(x_0)=-f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)=f(x_0)$,即最大值 $f(x_0)=0$.

此外,若 $x=x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的最小值点,则 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\geqslant 0$.这也导致 $f(x_0)=0$.

(2) 对 $f'(x)$应用中值公式,可得

$$f'(0)=f'(x_0)-f''(\xi_1)x_0, \qquad 0<\xi_1<x_0,$$
$$f'(a)=f'(x_0)+f''(\xi_2)(a-x_0), \quad x_0<\xi_2<a.$$

注意到 $f'(x_0)=0$,我们有

$$|f'(0)|+|f'(a)|=|f''(\xi_1)|x_0+|f''(\xi_2)|(a-x_0)$$
$$\leqslant\max_{[0,a]}\{|f''(x)|\}(x_0+a-x_0).$$证毕.

例 5.3.40　解答下列问题:

(1) 设 $y=y(x)$由参数式表示为 $x=\dfrac{t^3}{t^2+1}$,$y=\dfrac{t^3-2t^2}{t^2+1}$,求 $f(x)$的极值.

(2) 设 $y=y(x)$由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定,求 $y=y(x)$的极值.

(3) 设 $y=y(x)$是由方程 $x^2+y+\sin(xy)=0$ 在 $U(0)$上确定的隐函数,且 $y(0)=0$,试证明 $x=0$ 是 $y(x)$的极大值点.

解 （1）因为我们有

$$\begin{cases} x'(t)=\dfrac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2}>0, \\ y'(t)=\dfrac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}, \end{cases} \qquad y'(x)=\frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)} \quad (t\neq 0),$$

且 $y'(x)=0$ 仅在 $t=1$ 处（注意 $t^2+t+4>0$），所以 $y(x)$ 仅有两个驻点：$x_1=1/2(t=1)$，$x_2=0(t=0)$．若 $x<0$，则 $t<0$．此时 $y'(x)>0$．若 $x>0$，则 $t>0$．此时 $y'(x)<0$．从而 $y(0)$ 取到极大值，又易知 $y(x_1)=y(1)=-1/2$ 为极小值．

（2）在原方程中对 x 求导，我们有 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$，故

$$y'=(2x-2y)/(6y^2-4y+2x).$$

由 $y'=0$ 可知 $y=x$，注意到原方程中 x 与 y 之关系，得

$$2x^3-x^2-1=0; \qquad x=1, \qquad y=1.$$

再看二阶导数，我们有

$$12y(y')^2+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+2y'+2y'+2xy''-2=0.$$

以 $x=1$，$y=1$，$y'=0$ 代入，可知 $y''=1/2>0$．这说明 $x=1$ 时，$y(1)=1$ 是极小值．

（3）在原方程中对 x 求导，我们有 $2x+y'+\cos xy\cdot(y+xy')=0$，故

$$y'(x)=-(2x+y\cos xy)/(1+x\cos xy).$$

由 $y(0)=0$ 可知，$y'(0)=0$，从而得

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+o(x)=o(x) \qquad (x\to 0),$$

$$|y\cdot\cos xy|\leqslant y=o(x) \qquad (x\to 0).$$

故有估计 $y'(x)\begin{cases}<0, & x>0,\\ >0, & x<0,\end{cases}$ 且 $|x|$ 充分小．这说明 $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点．

例 5.3.41 求下列命题中的最大值项：

（1）数列 $\sqrt{1},\sqrt[2]{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$． （2）$\dfrac{e^b-e^a}{b-a},\dfrac{e^b+e^a}{2}(a\neq b)$．

解 （1）首先将数列的各项视为函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，$x\in[1,\infty)$ 的特定值列．其次，用微分学理论研究此函数的极值．因为我们有 $f'(x)=x^{1/x}(1-\ln x)/x^2$，所以 $f'(x)=0$ 有唯一解 $x=e$．

在 $[1,e)$ 上，易知 $f'(x)>0$；在 (e,∞) 上易知 $f'(x)<0$，从而得最大值 $f(e)$．返回数列，易知最大值项或为 $\sqrt[2]{2}$，或为 $\sqrt[3]{3}$．但我们有 $2^3<3^2$，由此知 $\sqrt[2]{2}<\sqrt[3]{3}$，即第三项 $\sqrt[3]{3}$ 为最大值项．

（2）记 $x=b-a\neq 0$，则有

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}-\frac{e^b+e^a}{2}=e^a\left\{\frac{e^{b-a}-1}{b-a}-\frac{e^{b-a}+1}{2}\right\}=\frac{e^a}{2x}\{2(e^x-1)-x(e^x+1)\}.$$

作函数 $f(x)=2(e^x-1)-x(e^x+1)$，易知 $f(0)=0$，以及

$$f'(x)=e^x-xe^x-1,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=-xe^x\begin{cases}>0, & x<0,\\ =0, & x=0,\\ <0, & x>0.\end{cases}$$

由此知 $f'(x)$在 $x=0$ 处取到唯一最大值,从而 $f'(x)<0(x\neq0)$.这就是说 $x<0$ 时,$f(x)>f(0)$;$x>0$ 时,$f(x)<f(0)$.从而又得 $f(x)<0(x\neq0)$,即$(e^b-e^a)/(b-a)<(e^b+e^a)/2$.

例 5.3.42　试证明下列不等式:

(1) 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

(i) $\sum_{i=1}^n a_i e^{-a_i}/n\leqslant 1/e$.　(ii) $\prod_{i=1}^n a_i\leqslant\left(\frac{3}{e}\right)^n\cdot e^{\sum_{i=1}^n a_i/3}$.

(2) 设 $p>1,q>1$,且 $1/p+1/q=1$,则 $ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}(a>0,b>0)$.

证明　(1) (i) 作 $f(x)=xe^{-x}(x>0)$,易知在$[0,\infty)$上 $f(x)$之最大值为 $f(1)=1/e$.从而可得$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\cdot e^{-a_i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$.

(ii) 取对数,只需指出$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\ln a_i-\frac{a_i}{3}\right)\leqslant\ln3-1$.为此,作 $f(x)=\ln x-x/3(x>0)$,我们有

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\begin{cases}>0, & 0<x<3,\\ <0, & x>3.\end{cases}$$

由此可知 $f(3)=\ln3-1$ 是最大值.证毕.

(2) 视 b 为变量,作函数

$$f(x)=\frac{a^p}{p}+\frac{x^q}{q}-ax\qquad(x>0).$$

由 $f'(x)=x^{q-1}-a$ 可知,当 $x=x_0=a^{1/(q-1)}$时,$f'(x_0)=0$.注意到

$$f'(x)<0(x<x_0),\qquad f'(x)>0(x>x_0),$$

$f(x_0)$是最小值:$f(x_0)=\frac{a^p}{p}+\frac{1}{q}a^{q/(q-1)}-a^{q/(q-1)}=\frac{a^p}{p}+\frac{a^p}{q}-a^p=0$.这说明 $f(x)\geqslant0(x>0)$,即对任意的 $b>0$,$f(b)\geqslant0$.

例 5.3.43　解答下列问题:

(1) 求 A 之最小值,使 $f(x)=5x^2+Ax^{-5}(x>0)$的值不小于 28.

(2) 求正数 $a,b(b>1)$,使方程 $\log a^x=x^b$ 有正解 x_0.

解　(1) 命题等价于求 A 之最小值,使 $28x^5-5x^7\leqslant A(x>0)$.从而问题又转化为求 $f(x)=28x^5-5x^7$ 在$(0,\infty)$上的最大值.因为我们有

$$f'(x)=140x^4-35x^6=35x^4(4-x^2),$$

所以 $f'(2)=0$. $x=2$ 是 $f(x)$在$(0,\infty)$上的最大值点.且 $f(2)=256$,即 $A=256$.

(2) 改写原式为 $\ln x/x^b=\ln a$,则 $\ln a$ 须在函数 $f(x)=\ln x/x^b$ 的值域中.易知 $f(x)$的值域 $R(f)=\left(-\infty,\frac{1}{be}\right)$(由 $f'(x)=0$ 可知 $x=e^{1/b}$ 为最大值).从而知该方程有正解当且仅当 $\ln a\leqslant 1/be$,即 $1<a<e^{1/be}$.

例 5.3.44 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(\infty)}([0,\infty))$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(0)$,则对任意的 $n\in\mathbf{N}$,$f^{(n)}(x)$均有零点.

(2) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$二次可导,且 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$.

(i) 若 $x=x_0\neq0$ 是 $f(x)$的极值点,则它必是 $f(x)$的极小值点.

(ii) 若 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点,则它必是 $f(x)$的极小值点.

(3) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上可导.若有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\{[f'(x)]^2+f^3(x)\}=0$,则 $f(x)\to0$,$f'(x)\to0\ (x\to+\infty)$.

(4) 设 λ 是函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$的极值,试证明方程 $ax^2+bx+c-\lambda(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=0$ 有重根.

证明 (1) 考察 $f'(x)$,我们有

$$0=\lim_{n\to\infty}[f(n+1)-f(n)]=\lim_{n\to\infty}f'(\xi_n),\qquad n<\xi_n<n+1.$$

进一步,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,则有极值点,使得 $f'(x)$有零点;否则存在 $\varepsilon_0>0$,以及 $\{\xi_k'\}$:$f'(\xi_k')\geqslant\varepsilon_0>0$.此时注意到 $f'(\xi_n)\to0\ (n\to\infty)$,可知 $f'(x)$有无穷多个极值点.

(2) (i) 由 $f'(x_0)=0$ 可知 $f''(x_0)=(1-e^{-x_0})/x_0>0$. (ii) 由 $f''(x)=(1-e^{-x})/x-3[f'(x)]^2$ 可知$\lim\limits_{x\to0}f''(x)=1$.根据导函数的性质,可知 $f''(0)=1>0$.

(3) (i) 若存在$\{x_n\}$:$x_n\to+\infty\ (n\to+\infty)$,使得 $f'(x_n)=0$.则由题设知 $f(x_n)\to0\ (n\to\infty)$.由此知 $f(x)\to0\ (x\to+\infty)$(此时,该点列可作为 $f(x)$的极值点列).从而还有 $f'(x)\to0\ (x\to+\infty)$.

(ii) 若存在 $X>0$,使得当 $x>X$ 时,$f'(x)\neq0$,此时$[f'(x)]^2>0$.如果 $f'(x)>0\ (X<x<+\infty)$,那么在 $f(x)$无界的情形,$f^3(x)$和$[f'(x)]^2+f^3(x)$都是无界的,这与题设矛盾;而在 $f(x)$有界的情形,存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.此时也存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x),\qquad\lim_{x\to+\infty}[f'(x)]^2,\qquad\lim_{x\to+\infty}f^3(x).$$

易知 $f'(x)\to0\ (x\to+\infty)$,由此得 $f(x)\to0\ (x\to+\infty)$.类似地可讨论 $f'(x)<0\ (X<x<+\infty)$的情形.

(4) 因为 λ 是 $f(x)$的极值,所以在极值点 $x=x_0$ 处有 $f'(x_0)=0$,$\lambda=f(x_0)$,即

$$0=f'(x_0)$$
$$=\frac{(2ax_0+b)(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)-(2\alpha x_0+\beta)(ax_0^2+bx_0+c)}{(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)^2}.$$

由此可知$(2ax_0+b)(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)-(2\alpha x_0+\beta)(ax_0^2+bx_0+c)=0$,以及

$$\frac{2ax_0+b}{2\alpha x_0+\beta}=\frac{ax_0^2+bx_0+c}{\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma}.$$

上式之值就是 λ.因此有$\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c-\lambda(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)=0, \\ 2ax_0+b-\lambda(2\alpha x_0+\beta)=0. \end{cases}$注意到后一方程的左端是前一方程左端的导数,可知 $x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c-\lambda(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=0$ 的重根.

例 5.3.45　试证明下列命题:

(1) $\dfrac{(a+2)^2}{1+x}\leqslant\dfrac{4}{a}+a^2\ (a,x>0)$.

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$.若 $f(x)$满足方程$(b>0)$

$$f''(x)+f'(x)-f(x)=0\qquad(0\leqslant x\leqslant b),\quad f(0)=f(b)=0,$$

则 $f(x)\equiv 0$.

证明　(1) 令 $f(x)=(a+2)^2/(1+x)-4/x$,我们有 $f'(x)=-(a+2)^2/(1+x)^2+4/x^2$.易知由 $f'(x)=0$ 可得 $x=2/a$ 是 $f(x)$唯一的极大值点,且 $f(2/a)=a^2$,证毕.

(2) 反证法.假定有 $f(x_0)=\max\limits_{[0,b]}\{f(x)\}>0\ (0<x_0<b)$,则 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\leqslant 0$.这与方程式矛盾,故 $f(x_0)=0$.同理可证其最小值也不能为负值.

例 5.3.46　解答下列问题:

(1) 试求 α 值,使得 $x\leqslant\dfrac{\alpha-1}{\alpha}y+\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}\ (x,y>0)$.

(2) 试求公式$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\beta}$成立之 α 的最大者,β 的最小者.

解　(1) 令 $f(y)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}y+\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}\ (x,y>0)$,则

$$f'(y)=\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\right).$$

若 $\alpha<1$,则当 $y<x$ 时,$f'(y)>0$;$y=x$ 时,$f'(y)=0$;$y>x$ 时 $f'(y)<0$.因此 $y=x$ 是 $f(y)$的最大值点,且 $f(x)=x$.但这与 $y\neq x$ 时 $x<f(y)$矛盾.

若 $\alpha>1$,则 $f'(y)<0\ (y<x)$;$f'(y)>0\ (y>x)$.因此 $y=x$ 是 $f(y)$的最小值点.即 $x\leqslant f(y)\ (x,y>0)$.

最后结论为 $\alpha\in[1,\infty)$.

(2) 以 $f(n)$代 α,则由$(1+1/n)^{n+f(n)}=e$ 可推 $f(n)=1/\ln(1+1/n)-n$.令

$f(x)=1/\ln(1+1/x)-x$,则 $f'(x)=1/(x^2+x)\ln(1+1/x)-1$.由 $\ln(1+t)<t/\sqrt{1+t}(t>0)$可知,$f'(x)>0(x>0)$.故 $f(x)$的最小值在 $x=1$ 处达到,且其值为 $1/\ln2-1$.又 $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=1/2$.

例 5.3.47 解答下列问题:

(1)求给定圆内接等腰三角形中周长最大者.

(2)给定底边和顶角,求面积最大之三角形.

(3)设 P 是两直线 OA 与 OB 之夹角内一点,在 OA,OB 上各取点 X,Y,直线 XY 通过点 P,求长度乘积 $PX\cdot PY$ 之最小者.

解 (1)设$\triangle ABC$为圆内接三角形,且 $AB=BC$.又记$\angle BAC=\alpha$,则 $AB=BC=2R\sin\alpha$(R 为圆半径),$AC=2R\sin2\alpha$.从而有

$$\text{三角形周长 } S(\alpha)=2R(2\sin\alpha+\sin2\alpha)\qquad(0<\alpha<\pi/2).$$

$$\begin{aligned}S'(\alpha)&=4R(\cos2\alpha+\cos\alpha)\\&=4R(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)=4R(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1).\end{aligned}$$

由 $S'(\alpha)=0$ 可知唯一解 $\alpha_0=\pi/3$,且有 $S'(\alpha)\begin{cases}>0, & 0<\alpha<\pi/3,\\ <0, & \pi/3<\alpha<\pi/2.\end{cases}$这说明 $S(\alpha_0)$为最大值.

(2)设底边长为 a,顶角为 θ,其他两边长为 x 与 y,其对角各为 η与 ξ,我们有

$$x=a\sin\eta/\sin\theta,\qquad y=a\sin\xi/\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}\text{面积 } S&=xy\sin\theta/2=a^2\sin\xi\cdot\sin\eta/(2\sin\theta)\\&=a^2\sin\xi\cdot\sin(\theta+\xi)/(2\sin\theta),\end{aligned}$$

$$S'_\xi=a^2\sin(2\xi+\theta)/(2\sin\theta),\qquad S'_\xi=0\text{ 知 }\xi=(\pi-\theta)/2.$$

由此易知 η值.

(3)记$\angle OYP=\gamma$,$\angle POY=\alpha$,$\angle POX=\beta$.则

$$\frac{\sin\alpha}{PY}=\frac{\sin\gamma}{OP},\qquad\frac{\sin\beta}{PX}=\frac{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}{OP}.$$

乘积 $PX\cdot PY$ 为 γ 的函数 $F(\gamma)$,我们有

$$\begin{aligned}F(\gamma)&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot OP\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}\cdot OP\\&=K\cdot\csc\gamma\cdot\csc(\pi-\alpha-\pi-\gamma),\qquad 0<\gamma<\pi,\end{aligned}$$

其中 $K=\sin\alpha\cdot\sin\beta(OP)^2$.因为 $F(\gamma)$可导,且有

$$\lim_{\gamma\to0+}F(\gamma)=+\infty,\qquad\lim_{\gamma\to\pi-}F(\gamma)=+\infty,$$

所以在$(0,\pi)$间有极小值点 $F'(\gamma)=0$,即

$$0=\csc\gamma\cdot\csc(\pi-\alpha-\beta-\gamma)[\cot\gamma-\cot(\pi-\alpha-\beta-\gamma)],$$

可得 $\cot\gamma=\cot(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$.由于 $0<\gamma<\pi$,$0<\pi-\alpha-\beta-\gamma<\pi$,故有 $\gamma=\pi-\alpha-\beta-\gamma$,这说明 $OX=OY$.

例 5.3.48 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$,且在 (a,b) 上二次可导以及 $f''(x)>0$.试证明存在唯一的 $d\in(a,b)$,使得连接三点 $A(a,f(a))$,$B(b,f(b))$,$D(d,f(d))$ 形成的 $\triangle ABD$ 面积最大.

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可导,$P(x,y)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的点,$P_0(a,b)$ 为平面上任一定点.若 P_0 与 P 的连接直线段之长度作为 x 的函数达到极值,则此直线必为该曲线的法线.

(3) 试求圆心在 $[0,2\pi]$ 上,与曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 相切的最大圆的半径.

(4) 试求包含曲线 $(x^2+y^2)^2=8x$ 的最小矩形(其边平行于坐标轴)的边长.

(5) 试求曲线 $y=x^2$ 上一点,使其与点 $(0,h)$ 的距离最短.

解 (1) 作点 A 与 B 的连接直线方程

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

线段 AB 的长度为 $L=\sqrt{[f(b)-f(a)]^2+(b-a)^2}$.由 $f''(x)>0$ 可知,曲线 $y=f(x)$ 位于 AB 之下方.因此设点 $X(x,f(x))(a<x<b)$,则点 X 到 AB 之距离为

$$l=\frac{f(a)+[f(b)-f(a)](x-a)/(b-a)-f(x)}{\sqrt{1+\{[f(b)-f(a)]^2/(b-a)\}^2}}.$$

由此可知 $\triangle ABX$ 的面积为

$$S(x)=\frac{AB\cdot l}{2}=\frac{1}{2}\{(x-a)[f(b)-f(a)]-(b-a)[f(x)-f(a)]\}.$$

因为 $S(a)=S(b)=0$,且有 $S'(x)=\dfrac{1}{2(b-a)}\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)\right]$,所以存在 $d\in(a,b)$,使得

$$S'(d)=\frac{1}{2(b-a)}\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(d)\right]=0.$$

由于 $S''(x)=-f''(x)/2(b-a)<0(a<x<b)$,故知 $S(x)$ 在 $x=d$ 处达到极大值,且 $x=d$ 是 $S'(x)=0$ 的唯一解.这说明 $x=d$ 是 $S(x)$ 在 (a,b) 上的最大值点,此时组成的 $\triangle ABD$ 面积最大.

(2) 记 P 与 P_0 的连接直线段长为 $l(x)$.则

$$l(x)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\qquad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}=\frac{x-a+(y-b)y'}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}.$$

依题设,点 (x,y) 应满足条件:$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}=0$,$x-a+(y-b)y'=0$.现在,设 (x_1,y_1) 是上述方程的一个解,而该曲线在点 (x_1,y_1) 的法线方程为

$$y-y_1=-(x-x_1)/f'(x_1).$$

又注意到 $y'=f'(x)$,易知此法线是过点(a,b)的.证毕.

(3) 记圆心坐标为$(x_0,0)$,圆与曲线 $y=\sin x$ 相切的切点为$(x,\sin x)$,则此切点上之切线斜率为 $\cos x$.

因为切点与圆心之连线与切线垂直,所以有

$$-1/\cos x=\sin x/(x-x_0),\qquad x-x_0+\sin x\cdot\cos x=0.$$

从而其圆半径 r 为

$$\begin{aligned}r^2&=(x-x_0)^2+\sin^2x=\sin^2x(2-\sin^2x)\\&\leqslant\{[\sin^2x+(2-\sin^2x)]/2\}^2=1,\end{aligned}$$

且在 $x=\pi/2$ 时,$r=1$ 达到最大.

(4) 易知该曲线位于第一象限,且通过原点$(0,0)$以及点$(2,0)$,还关于 x 轴对称.因为$(x^2+y^2)^2\geqslant x^4$,且 $8x<x^4\ (x>2)$,所以应在$[0,2]$范围考察其极值.我们有

$$y=\sqrt{\sqrt{8x}-x^2},\qquad y'=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-x\right)\Big/\sqrt{\sqrt{8x}-x^2},$$

故 $x_0=2^{-1/3}$ 为 y 的最大值点,且 $y\Big|_{x=2^{-1/3}}=\sqrt[6]{432}/2$.这说明最小矩形的一条边长为 2,另一条边长为 $\sqrt[6]{432}/2$.

(5) 记点(x,x^2)与点$(0,h)$之距离 l 为

$$l=\sqrt{x^2+(x^2-h)^2}=\sqrt{x^4-(2h-1)x^2+h^2},$$

则$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}=x[2x^2-(2h-1)]/\sqrt{x^4-(2h-1)x^2+h^2}$.

(i) $h>1/2$ 时.由$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}=0$ 知 $x=0$ 以及$\pm\sqrt{h-1/2}$.易知最短距离在曲线的点$(\pm\sqrt{h-1/2},h-1/2)$上达到,且其最短距离为$\sqrt{h-1/4}$.

(ii) $h\leqslant1/2$ 时.由$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\begin{cases}<0, & x<0,\\>0, & x>0.\end{cases}$易知最短距离在$(0,0)$点上达到.

5.4　光滑曲线的几何特征

5.4.1　凹凸性

定理 5.4.1　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,则 $f(x)$在$[a,b]$上为(下)凸函数的充分必要条件是 $f'(x)$在(a,b)上递增(严格凸相应于严格递增).如图 5.2.

定理 5.4.2　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,则 $f(x)$在$[a,b]$上是(下)凸的充分必要条件是:对任意的 $x_0\in(a,b)$,有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad x\in[a,b]$$

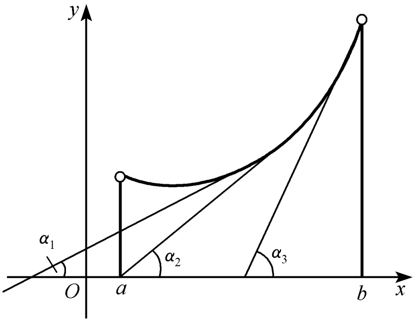

图 5.2

(相当于曲线 $y=f(x)$位于任一点切线之上方).

定理 5.4.3　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上二次可导,则

(1) $f(x)$是$[a,b]$上的(下)凸函数的充分必要条件是 $f''(x)\geqslant 0$,$x\in(a,b)$.

(2) $f(x)$在$[a,b]$上是严格凸函数的充分必要条件是:在(a,b)上 $f''(x)\geqslant 0$,且不在(a,b)中任一子区间上有 $f''(x)\equiv 0$.

注 1　设 $f(x)$在(a,b)上有定义,$x_0\in(a,b)$,$f'(x_0)$存在,且有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\qquad x\in U(x_0)\subset(a,b),$$

则称 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处(下)凸或凹(不等式反号时称为上凸).若 $f(x)$在$[a,b]$上可导,则必存在 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x)$在 $x=x_0$ 处下凸或上凸.

注 2　设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上是(下)凸的.若有$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)/x=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)/x=0$,则 $f(x)$是一个常数.

注 3　若 $f(x)$是$[0,\infty)$上的非负可微的凸函数,则 $xf'(x)\leqslant f(x)(x\geqslant 0)$.

注 4　若 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 是内接于圆的凸多边形上的相继顶点.A_0,A_n 固定,则当 A_1,$A_2,\cdots,A_{n-1}$等分弧$\overset{\frown}{A_0A_n}$时,该多边形面积为最大.这是因为 $\sin x$ 在$[0,\pi]$上是上凸函数.

例 5.4.1　设 $y=f(x)$在$[0,\infty)$上二次可导,且 $f''(x)>0$.若在 $x\to+\infty$时,曲线 $y=f(x)$以直线 $y=ax+b$ 为渐近线,则此曲线严格的从上方无限地接近该渐近线.

证明　(由于 $f(x)$下凸,故在几何上看,这一结论是极易理解的)作函数

$$g(x)=f(x)-ax-b,\qquad g''(x)=f''(x)>0,\qquad x>0.$$

这说明 $g(x)$是严格下凸函数,故对任一点 $x'>0$,有

$$g(x)>g(x')+g'(x')(x-x')\qquad (x>0).$$

依题设有 $g(x)\to 0(x\to+\infty)$.由此知 $g'(x')\leqslant 0(x'>0)$,这说明 $g(x)$递减.

(i) 若存在 $x_0>0$,使得 $g(x_0)<0$,则有 $g(x)\leqslant g(x_0)<0$,$x>x_0$.这与 $g(x)\to 0(x\to+\infty)$相悖.这说明 $g(x)\geqslant 0$,$x>0$.

(ii) 若存在 $x_0>0$,使得 $g(x_0)=0$,则有 $g(x)=0$,$x>x_0$.这与 $g''(x_0)>0$相悖.

综合以上结论,我们有 $g(x)>0$ 或 $f(x)>ax+b$.

例 5.4.2　试证明下列不等式:

(1) $2^{1-p}(|a|+|b|)^p\geqslant|a|^p+|b|^p\ (0\leqslant p\leqslant 1)$.

(2) $\sin x\geqslant 3x/\pi-4x^3/\pi^3\ (0\leqslant x\leqslant\pi/2)$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k+\dfrac{1}{x_k}\right)^{\alpha}\geqslant\dfrac{(n^2+1)^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}$($\alpha>1$,$x_1+\cdots+x_n=1$;$x_k\in(0,1)(k=1$,

$2,\cdots,n)$).

(4) $1+\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)^{-1}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x_k}{x_k}\right)^{p_k}$ ($p_k>0,0<x_k<1,k=1,2,\cdots,n,$ $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$).

证明　(1) 将不等式改写为

$$\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^p\geqslant\frac{|a|^p+|b|^p}{2}\qquad(0\leqslant p\leqslant 1),$$

并考察函数 $f(x)=x^p$ ($x\geqslant 0,0\leqslant p\leqslant 1$).易知 $f(x)$是上凸函数($f''(x)>0$),故对任意的 $x_1,x_2>0$,均有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\qquad\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^p\geqslant\frac{x_1^p+x_2^p}{2}.$$

(2) 作 $f(x)=\sin x-3x/\pi+4x^3/\pi^3$,且记 $I=[0,\pi/4]$, $J=[\pi/4,\pi/2]$,则 $f(0)=f(\pi/2)=0$, $f(\pi/4)>0$, $f''(0)=0$, $f''(\pi/4)<0$, $f^{(4)}(x)\geqslant 0$ ($x\in I$).从而知 $f''(x)\leqslant 0$ ($x\in I$),即 $f(x)$在 I 上是上凸的, $f(x)\geqslant 0$ ($x\in I$).对于区间 J,类似地可推知 $f(x)\geqslant 0$ ($x\in J$).

(3) 因为 $f(x)=(x+1/x)^{\alpha}$ 在$(0,\infty)$上是下凸的($f''(x)>0$),所以我们有

$$\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\alpha}=\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{-1}\right]^{\alpha}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^{\alpha}.$$

(4) 考察 $f(x)=\ln(1+1/x)$.由 $f''(x)>0$ ($0<x<\infty$)可知, $f(x)$在$(0,\infty)$上是下凸函数.从而可得

$$\ln\left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)^{-1}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p_k\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right),$$

$$\ln\left(1+\left(\sum_{k=1}^{n}p_kx_k\right)^{-1}\right)\leqslant\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{p_k}.$$

例 5.4.3　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[a,\infty)$上二次可导.若有

$$f(a)>0,\quad f'(a)<0,\quad f''(x)<0\quad(a\leqslant x<\infty),$$

则 $f(x)=0$ 恰有一实根.

(2) 设 $f\in C([0,1])$,且在$(0,1)$上二次可导.若有

$$f(0)=f(1)=0,\quad f''(x)+2f'(x)+f(x)\geqslant 0\qquad(0<x<1),$$

则 $f(x)\leqslant 0$ ($x\in[0,1]$).

(3) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上三次可导,则存在 $x_0\in(-\infty,\infty)$,使得

$$f(x_0)f'(x_0)f''(x_0)f'''(x_0)\geqslant 0.$$

证明　(1) 由 $f''(x)<0$ 可知, $f(x)$在(a,∞)上严格上凸,即曲线 $y=f(x)$在切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$的下面.易知此切线与 x 轴之交点为 $x_0=a-f(a)/$

$f'(a)$,而 $f(x_0)<0$.注意到 $f(a)>0$,可知存在 $\xi\in(a,x_0)$,使得 $f(\xi)=0$.再考虑到 $f'(x)$严格递减,知 $f(x)<f(x_0)=0(x_0<x)$.这说明 $f(x)=0$ 只有一个根.

(2) 作函数 $F(x)=e^x f(x)$,易知

$$F''(x)=e^x[f''(x)+2f'(x)+f(x)]\geqslant 0\qquad(0<x<1).$$

从而 $F(x)$是下凸函数,即点$(x,F(x))$位于点$(0,F(0))$与$(1,F(1))$连线之下方.但 $F(0)=F(1)=0$,故有 $F(x)\leqslant 0$,即 $f(x)\leqslant 0$.

(3) 反证法.假定 $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x)<0(-\infty<x<\infty)$.由此以及连续性可知,$f(x),f'(x),f''(x),f'''(x)$之值不能变号.不妨假定 $f(x)>0(-\infty<x<\infty)$,否则以 $-f(x)$换之.

(i) 若有 $f'(x)>0(-\infty<x<\infty)$,此时易知存在极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l\geqslant 0$,从而 $f(x)$必下凸,即得 $f''(x)>0$.这样,由题设假定知必须 $f'''(x)<0$,但以相同理由看 $g(x)=f'(x)>0$,$g'(x)=f''(x)>0$,也必有 $g''(x)=f'''(x)>0$.矛盾.

(ii) 若 $f'(x)<0(-\infty<x<\infty)$,此时也存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k\geqslant 0$.从而 $f(x)$必下凸,即得 $f''(x)>0(-\infty<x<\infty)$.此时,由题式假定知 $f'''(x)>0$.但以相同理由看 $g(x)=f'(x)<0$,$g'(x)=f''(x)>0$,有 $g''(x)=f'''(x)<0$,得矛盾.证毕.

例 5.4.4 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(1)}((\alpha,\beta))$是方程 $f(x)=g[f'(x)]$,$x\in(\alpha,\beta)$的一个解,其中 $g(x)$定义在 $f'(x)$的值域上,则 $f(x)$是上凸或下凸函数.

(2) 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$以及 $f(x)$是$[a,b]$上的下凸函数,且满足条件

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$,

(ii) $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$以及 $f(x)$在 $x_0\in(a,b)$上可导,且有 $f'_n(x_0)\to l(n\to\infty)$,则 $f'(x_0)=l$.

证明 (1) 为证明 $f(x)$下凸或上凸,只需指出 $f'(x)$是递增或递减的.现在采用反证法:假定存在(α,β)中的 $a<b<c$,使得

(i) $f'(a)<f'(b)>f'(c)$; (ii) $f'(a)>f'(b)<f'(c)$.

以(i)为例.此时记 $x=x_0$ 为 $f'(x)$在$[a,c]$中的最大值点:$f'(x_0)(x_0\in(a,c))$.取 $y_0\in[\max\{f'(a),f'(c)\},f'(x_0)]$,使得

$$0\leqslant y_0<f'(x_0)\quad\text{或}\quad y_0<f'(x_0)=0.$$

令 $\gamma=\max\{x\in[a,x_0]:f'(x)=y_0\}$,$\delta=\min\{x\in[x_0,c]:f'(x)=y_0\}$,则 $a\leqslant\gamma<x_0<\delta\leqslant c$,$f'(\gamma)=f'(\delta)=y_0$ 且 $f'(x)>y_0(\gamma<x<\delta)$.从而有 $f(\gamma)=f(y_0)=f(\delta)$.但另一方面,$0\leqslant y_0\leqslant f'(x_0)\Rightarrow f'(x)>0(\gamma<x<\delta)$.由此知 $f(\gamma)<f(\delta)$,矛盾.而对于 $y_0<f'(\pi_0)=0$,由于 $f'(x)\leqslant 0(\gamma<x<\delta)$或 $f'(\gamma)<0$ 可推 $f(\gamma)>f(\delta)$,矛盾.

(2) 反证法.假定 $f'(x_0)\neq l$,不妨设 $f'(x_0)<l$,则存在 l':$l>l'>f'(x_0)$.由

此知存在 N,使得 $f_n'(x_0)>l'>f'(x_0)(n>N)$.

根据下凸函数的性质,易知对 $n>N$,有

$$f_n(x)-f_n(x_0)\geqslant l'(x-x_0),\qquad x_0<x<b.$$

令 $n\to\infty$,我们有 $f(x)-f(x_0)\geqslant l'(x-x_0)$,$x_0<x<b$.这与 $f'(x_0)<l'$矛盾.

例 5.4.5　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在(a,b)上四次可导,$x_0\in(a,b)$,且有

$$f^{(2)}(x_0)=0,\qquad f^{(3)}(x_0)=0,\qquad f^{(4)}(x)>0\qquad(a<x<b),$$

则 $f(x)$是下凸函数.

(2) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上二次可导,且有

$$f(x)\leqslant 0,\qquad f''(x)\geqslant 0\qquad(-\infty<x<\infty),$$

则 $f(x)\equiv C$(常数).

(3) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导,则存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $x=x_0$ 是 $f(x)$的上凸点或下凸点.

(4) 设 $f(x)$在(a,b)上可导.若对(a,b)中的 $x,y(x\neq y)$,存在唯一的 $\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\xi)$,则 $f(x)$是严格上凸或下凸.

证明　(1) 由题设知 $f^{(3)}(x)$在(a,b)上严格递增,又有

$$f^{(3)}(x)\begin{cases}>0, & x_0<x<b,\\ <0, & a<x<x_0,\end{cases}\qquad f^{(2)}(x)\begin{cases}\text{递增}, & x_0<x<b,\\ \text{递减}, & a<x<x_0,\end{cases}$$

注意到 $f^{(2)}(x_0)=0$,可得 $f^{(2)}(x)\geqslant 0$.证毕.

(2) 由题设知 $f(x)$是下凸函数,故对任意的 x_0 有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\qquad(-\infty<x<\infty).$$

若 $f'(x_0)>0$,则当 $x>x_0-f(x_0)/f'(x_0)$时,有

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x_0-f(x_0)/f'(x_0)-x_0)=0;$$

若 $f'(x_0)<0$,则当 $x<x_0-f(x_0)/f'(x_0)$时,有 $f(x)>0$.

上述两种情况都与题设不合,故 $f'(x_0)=0$.由 x_0 的任意性,可知结论成立.

(3) 易知 $f(x)$与 $F(x)=f(x)+[f(a)-f(b)](x-a)/(b-a)$的下(上)凸性是相同的,故转而考察 $F(x)$.因为 $F(a)=f(a)=F(b)$,所以存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $F(x_0)$达到极大(小)值.

假定 $F(x_0)\geqslant F(x)(x\in U(x_0))$,则

$$f(x_0)+\frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x_0-a)\geqslant f(x)+\frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x-a).$$

由此知 $f(x)\leqslant f(x_0)+\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}[-(x-a)+(x_0-a)]$.注意到 $F'(x_0)=0$,即$[f(a)-f(b)]/(b-a)=-f'(x_0)$.从而有

$$f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

对 $F(x_0)\leqslant F(x)$,也类似地可得证.

(4) 反证法.假定(a,b)内存在 $x_1<x_2$,使得在点$(x_1,f(x_1))$与点$(x_2,f(x_2))$之连结直线段上的某点$(x_3,f(x_3))$上与曲线 $y=f(x)$相交,则存在唯一的 $\xi_1\in(x_1,x_3)$,$\xi_2\in(x_3,x_2)$,使得

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=f'(\xi_1),\qquad \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}=f'(\xi_2).$$

由于三点$(x_1,f(x_1))$,$(x_3,f(x_3))$,$(x_2,f(x_2))$共线,所以 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.这导致矛盾.证毕.

例 5.4.6 设 $f(x)$是$(0,1)$上三次可导的非负值函数.若存在 $x_1,x_2\in(0,1)$,使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$,则存在点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'''(\xi)=0$.

证明 反证法.假定结论不真,且不妨设定 $f'''(x)>0\ (0<x<1)$.由此可知 $f''(x)$在$(0,1)$上严格递增.依题设存在 x_0:$x_1<x_0<x_2$,使得 $f'(x_0)=0$.又注意到 $f'(x)$在$(0,1)$上是(下)凸函数,且有

$$0=f'(x_0)<f'(x)\qquad(0<x<1,x\neq x_0).$$

这说明 $f(x)$在$(0,1)$上严格递增,也就不可能有两个零点,导致矛盾.

例 5.4.7 设 $f(x)$在区间 I 上定义,则 $f(x)$是(下)凸函数当且仅当对任意的 $\lambda>0$,$e^{\lambda f(x)}$在 I 上是(下)凸函数.

证明 必要性.假定 $f(x)$在 I 上是凸函数,注意到 $e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$在 I 上是凸函数,故对任意的 $x_1,x_2\in I$,有

$$e^{\lambda f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}\leqslant e^{\lambda\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}}\leqslant\frac{e^{\lambda f(x_1)}+e^{\lambda f(x_2)}}{2},$$

即 $e^{\lambda f(x)}$是 I 上的凸函数.

充分性.假定 $e^{\lambda f(x)}\ (\lambda>0)$是 I 上的凸函数,则对任意的 $x_1,x_2\in I$,有

$$e^{\lambda f[(x_1+x_2)/2]}\leqslant[e^{\lambda f(x_1)}+e^{\lambda f(x_2)}]/2.$$

视上式两端为 $\lambda\in(0,\infty)$的函数.并应用导数公式将其改写为

$$1+\lambda f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+o(\lambda)\leqslant 1+\lambda\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+o(\lambda)\qquad(\lambda\to 0+).$$

从而导出

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+o(1)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+o(1)\qquad(\lambda\to 0+).$$

由此立即可得

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.\text{证毕}.$$

5.4.2 拐点

定义 5.4.1 设 $f(x)$在 $U(x_0)$上连续,若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$的左侧是严格(下)凸的,右侧是严格上凸的;或左侧是严格上凸的,右侧是严格(下)凸的,则称$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的**拐点**,或简称为点 $x=x_0$ 是 $f(x)$的拐点.

由图 5.3 可以看出,如果曲线在拐点处的切线存在,那么切线把曲线切成两部分:在拐点的一侧,曲线在切线的下方;在另一侧,曲线在切线的上方.

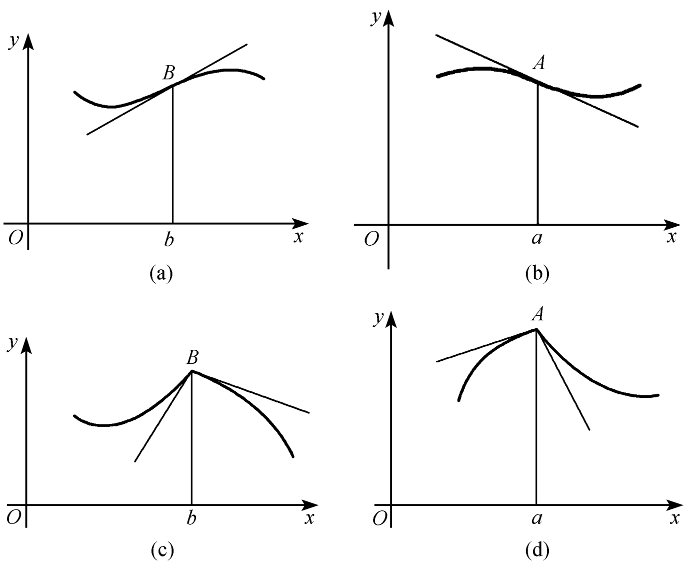

图 5.3

定理 5.4.4 设 $f''(x_0)$存在,若点 x_0 是曲线 $y=f(x)$的拐点,则 $f''(x_0)=0$.

注 在上述定理的假定下,$f''(x_0)=0$ 是 x_0 为曲线 $y=f(x)$的拐点的必要条件,不是充分条件.如对 $f(x)=x^4$,有 $f''(0)=0$,易知 $x_0=0$ 不是它的拐点.不过,我们有下述充分条件.

定理 5.4.5 设 $f(x)$在 $U_0(x_0)$上二次可导,则在出现下述两种情形之一时,x_0 为曲线 $y=f(x)$的拐点:

(1) $f''(x)\begin{cases}>0, & x<x_0,\\ <0, & x>x_0;\end{cases}$ (2) $f''(x)\begin{cases}<0, & x<x_0,\\ >0, & x>x_0.\end{cases}$

定理 5.4.6 设 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处三次可导,且 $f''(x_0)=0$.若 $f'''(x)\neq0$,则 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$的拐点.

上述充分条件还可进一步推广到更高阶导数的情形:

设 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,$f^{(n)}(x_0)\neq0$,若 n 是奇数,则 $x=x_0$ 是 $f(x)$的拐点;若 n 是偶数,则 $x=x_0$ 不是 $f(x)$的拐点.

注 1 上述定理 5.4.5 并未假定 $f''(x_0)$存在,定理的结论也可说成:$f''(x)(x-x_0)$在 $x\neq x_0$ 时不变号.

注 2 点(0,0)不是函数 $f(x)=x^3(2+\cos(1/x^2))(x\neq0)$,$f(0)=0$ 的拐点,因为 $f'(x)$在 $x=0$ 处附近发生无穷多次变号.

注 3 正系数偶次多项式无拐点.

注 4 设 $f(x)$二次可导,则(i)在 $f(x)$的两个严格极值点之间,必有 $f(x)$的拐点.(ii) 在 $f(x)$的两个拐点之间,必有 $f(x)$的极值点.

例 5.4.8 解答下列问题:

(1) 试问 $x=0$ 是 $f(x)=x^3/2-\tan x+\sin x$ 的拐点吗?

(2) 试定 a,b,c 之值,使 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有带水平切线的拐点.

(3) 设 $a\neq0$,试问在什么条件下,可使 $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 有拐点?

(4) 试证明曲线 $y=x\cdot\sin x$ 的拐点落在曲线 $y^2(4+x^2)=4x^2$ 上.

解 (1) 因为(参阅 Taylor 公式)我们有

$$\sin x = x-x^3/3!+x^5/5!+o(x^6)\quad(x\to0),$$
$$\tan x = x+x^3/3+(2/15)x^5+o(x^6)\quad(x\to0),$$

所以 $f(x)=c_5x^5+o(x^6)(x\to0)$.由于

$$c_5\neq0,\qquad f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0,\qquad f^{(5)}(0)\neq0.$$

故 $x=0$ 是 $y=f(x)$的拐点.

(2) 因为 $y'=3x^2+2ax+b$,$y''=6x+2a$,所以由 $y''=0$,可知 $x_0=-a/3$.为使曲线 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的切线是水平的,应有 $f'(-a/3)=0$,$b=a^2/3$.至于 c 可为任意值.

(3) 因为 $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$,而

$$f''(x)=0,\qquad 6ax^2+3bx+c=0,$$

所以可解出 $x_0=(-3b\pm\sqrt{9b^2-24ac})/12a$.从而可知,当 $9b^2>24ac$ 时,$x=x_0$ 是 $y=f(x)$的拐点.

(4) 因为 $y'=\sin x+x\cdot\cos x$,$y''=2\cos x-x\cdot\sin x$,所以从 $y''=0$ 可解得 $x_0=2\cot x_0$.从而知

$$\begin{aligned}y^2(x_0)(4+x_0^2)&=x_0^2\sin^2x_0(4+x_0^2)\\&=4x_0^2[\sin^2x_0(1+\cos^2x_0/\sin^2x_0)]=4x_0^2.\end{aligned}$$

例 5.4.9 解答下列问题:

(1) 试问 a 取何值时,使曲线 $y=f(x)=e^x+ax^3$ 有拐点.

(2) 试证明非线性奇次多项式必有拐点.

(3) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$二次可导,且有

$$f'(0)=0,\qquad f''(x)+[f'(x)]^2=x\qquad(-\infty<x<\infty),$$

试证明 $x=0$ 是 $y=f(x)$的拐点.

解 (1) (i) 若 $a>0$,则方程 $f''(x)=0$ 有解.而 $f'''(x)>0$,故 $y=f(x)$有

拐点.

(ii) 若 $a<0$,则方程 $f''(x)=e^x+6ax=0$ 有解时应有 $a=-e^x/6x$.此时欲使 $f'''(x)\neq 0$,需有 $a\neq -e^x/6$.即 $x=1$,故在 $a\neq -e/6$ 时 $y=f(x)$有拐点.

(2) 设 $P(x)=ax^{2n+1}+\cdots+\alpha x^2+\beta x+\gamma$,则

$$\begin{cases} a>0, & P(x)\to+\infty(x\to+\infty), \quad P(x)\to-\infty(x\to-\infty), \\ a<0, & P(x)\to-\infty(x\to+\infty), \quad P(x)\to+\infty(x\to-\infty). \end{cases}$$

又由 $P'(x)=(2n+1)ax^{2n}+\cdots+\beta$,知

$$\begin{cases} a>0, & P'(x)\to+\infty(x\to+\infty), \quad P'(x)\to+\infty(x\to-\infty), \\ a<0, & P'(x)\to-\infty(x\to+\infty), \quad P'(x)\to-\infty(x\to-\infty). \end{cases}$$

再由 $P''(x)=2n(2n+1)x^{2n-1}+\cdots+2\alpha$,知

$$\begin{cases} a>0, & P''(x)\to+\infty(x\to+\infty), \quad P''(x)\to-\infty(x\to-\infty), \\ a<0, & P''(x)\to-\infty(x\to+\infty), \quad P''(x)\to+\infty(x\to-\infty). \end{cases}$$

从而存在 x_0,使得 $P''(x_0)=0$.

(3) 易知 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上任意次可导,且有

$$f''(0)=0, \qquad f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1 \qquad (-\infty<x<\infty).$$

由此可知 $f'''(0)=1\neq 0$.证毕.

5.5 方程的根

对可微函数 $f(x)$而言,若其中值等式 $f'(\xi)=0$ 用方程根的观点来解释,则有下列结论.

定理 5.5.1 若 $x_1<x_2$ 是 $f(x)=0$ 的两个根,则 $f'(x)=0$ 在区间(x_1,x_2)内必有一根.

定理 5.5.2 设 $f\in C([a,b])$,且在(a,b)上可导.若 $f(a)=f(b)$,则方程 $f(x)-f'(x)=0$ 在(a,b)内必有一根.

例 5.5.1 试证明下列命题:

(1) 方程 $x^4+2x^2-x-2=0$ 恰有两个实根.

(2) 方程 $2^x-1-x^2=0$ 恰有三个实根.

(3) 若 $a^2-3b<0$,方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 仅有一个实根.

(4) 方程 $e^x-a-bx^3=0$ 至多有四个实根.

(5) 方程 $2x^3-3x^2-a^2x+b=0$ 在$[0,1]$中至多有一个实根.

证明 (1) 令 $f(x)=x^4+2x^2-x-2$,则由

$$f(-1)>0, \qquad f(0)=-2<0, \qquad f(1)=0,$$

可知,$f(x)=0$ 至少有两个实根.因为

$$f'(x)=4x^3+4x-1, \qquad f''(x)=12x^2+4>0,$$

所以 $f'(x)$严格上升,$f'(x)=0$ 有且仅有一个根.这说明 $f(x)=0$ 恰有两个根.

(2) 令 $f(x)=2^x-1-x^2$,易知 $f(0)=f(1)=0$,$f(4)<0$,$f(5)>0$,故方程

$f(x)=0$ 至少有三个根.如果 $f(x)=0$ 有四个以上的根,那么方程 $f'''(x)=0$ 应该有根.但是 $f'''(x)=(\ln 2)^3\cdot 2^x\neq 0$,因此 $f(x)=0$ 恰有三个根.

(3) 令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.因为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,且由题设知 $f'(x)=0$ 无实根,所以 $f(x)=0$ 仅有一个根.

(4) 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-a-bx^3$.因为 $f'''(x)=\mathrm{e}^x-6b$,所以 $f'''(x)=0$ 至多有一个根.由此知 $f''(x)=0$ 至多有二个根,从而 $f'(x)=0$ 至多有 3 个根.这样,$f(x)=0$ 至多有 4 个根.

(5) 因为 $f'(x)=6[(x-1/2)^2-1/4-a^2/6]$,所以 $f'(x)=0$ 等价于 $(x-1/2)^2=1/4+a^2/6$.由于 $1/4+a^2/6\geqslant 1/4$,故 $|x-1/2|\geqslant 1/2$.这说明 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 中无根,因此 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内至多有一个根.

例 5.5.2 解答下列问题:

(1) 试论下列方程的实根数:

(i) $x^3-6x^2+9x-10=0$. (ii) $\ln x=kx(x>0)$.

(2) 试证明方程 $\mathrm{e}^x=x^n$ 至多有三个根.

(3) 设 $f(x)=\max\{7x-6x^2,|x|^3\}$,试求 $f'(x)=0$ 之根.

解 (1) (i) 令 $f(x)=x^3-6x^2+9x$,$g(x)=10$,从而问题归结为求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=g(x)$ 的交点.因为

$$f'(x)=3x^2-12x+9,\quad f'(1)=0=f'(3),$$

$$f''(1)<0,\quad f''(3)>0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

所以 $f(1)=4$ 是极大值,$f(3)=0$ 是极小值,且 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 相交于一点,即原方程仅有一实根.

(ii) 令 $f(x)=\ln x/x$,$g(x)=k$,易知

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\qquad f'(\mathrm{e})=0.$$

故 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内的点 $x=\mathrm{e}$ 处取到最大值 $1/\mathrm{e}$.

若 $k>1/\mathrm{e}$,则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=k$ 不相交,即原方程无实根;若 $0<k<1/\mathrm{e}$,则注意到 $f(1)=0$,原方程有两个实根 x_1,x_2:$1<x_1<\mathrm{e}$,$\mathrm{e}<x_2<\infty$.

(2) 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^n$,根据定理 5.5.2 可知,只需指出方程 $f(x)-f'(x)=0$ 至多有二个根.因为 $f(x)-f'(x)=nx^{n-1}-x^n=x^{n-1}(n-x)$,所以 $f(x)-f'(x)=0$ 不可能有三个根.证毕.

(3) 令 $g(x)=7x-6x^2$,$h(x)=|x|^3$,则得

$$g'(x)=7-12x,\qquad g'(7/12)=0,\qquad h'(x)=3|x|x,\qquad h'(0)=0.$$

$g(7/12)=91/24>h(7/12)$,且在 $|x|$ 充分接近于零时,$g(x)>h(x)(x>0)$,$h(x)>g(x)(x<0)$.又有 $f'_-(0)=0$,$f'_+(0)=7$,故 $x=0$ 不是 $f'(x)=0$ 之根,$x=7/12$ 是 $f'(x)=0$ 之根.

例 5.5.3 解答下列问题：

(1) 求正数 $a,b(a>1)$,使方程 $a^x=x^b$ 有一个正解 x_0.

(2) 给定方程 $a^x=bx(a>1)$,试证明：

(i) 若 $b<0$,则该方程有一个单根.

(ii) 若 $b>\mathrm{e}\cdot\ln a$,则该方程有两个实根.

(iii) 若 $b=\mathrm{e}\cdot\ln a$,则该方程有一个二重根.

(iv) 若 $0\leqslant b<\mathrm{e}\cdot\ln a$,则该方程无实根.

解 (1) 设 $c=a^{1/b}>1$,故方程等价于 $c^x=x$.从而作 $f(x)=c^x-x$,我们有

$$f'(x)=c^x\ln c-1\begin{cases}>0, & c^x>\log_c\mathrm{e},\\ <0, & c^x<\log_c\mathrm{e}.\end{cases}$$

因此,$f(x)$有极小值点 $x_0>0$,且有 $c^{x_0}=\log_c\mathrm{e}$.

若 $f(x_0)=0$,则存在唯一正解 $x=x_0$.

(2) 令 $f(x)=a^x-bx$,则 $f'(x)=a^x\ln a-b$.

(i) 若 $b<0$,则 $f'(x)>0$.而 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)<0$,故 $f(x)=0$ 只有一个单根.

(ii) 对 $b\geqslant0$.此时存在 x_0,使 $f'(x_0)=a^{x_0}\ln a-b=0$.由 $f''(x)=a^x\ln^2a>0$,可知 $x=x_0$ 是 $f(x)$的极小值点.从而只要让 $f(x_0)=a^{x_0}-bx_0<0$,该方程就有两个实根.即 $a^{x_0}(1-x_0\ln a)<0$,$x_0\ln a<1$,$\ln\left(\dfrac{b}{\ln a}\right)>1$,得 $b>\mathrm{e}\cdot\ln a$.

(iii) $b=\mathrm{e}\ln a$时,$f'(x_0)=0$,$f(x_0)=0$,方程有二重根.

(iv) $0\leqslant b<\mathrm{e}\cdot\ln a$,则 $f(x_0)>0$,方程无根.

例 5.5.4 解答下列问题：

(1) 试论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数.

(2) 试问在什么条件下,方程 $f(x)=x^3+px+q=0$ 有

(i) 一个实根？ (ii) 三个实根？

(3) 试论 t 的取值对方程 $P_t(x)=(1+t^2)x^3-3t^3x+t^4=0$ 的实根及其重数的影响.

(4) 设 $a>0$,试问方程 $x=a^x$ 何时有解？

(5) 试求 a,b之值,使得方程 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ 对一切 c 值之正根不超过两个.

解 (1) 问题归结为求方程 $f(x)=\ln^4x-4\ln x+4x-k=0$ 的根数.由 $f'(x)=4(\ln^3x-1+x)/x$可知,$f'(1)=0$,且易知 $x=1$ 是 $f(x)$的最小值点：$f(1)=4-k$.

(i) $k<4$,$f(x)=0$ 无实根. (ii) $k=4$,$f(x)=0$ 有唯一实根.

(iii) $k>4$,此时 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$,故 $f(x)=0$ 有两个实根.

(2) 首先有 $f(x)\to+\infty(x\to+\infty)$,$f(x)\to-\infty(x\to-\infty)$.

其次,由 $f'(x)=3x^2+p=0$,得根 $x_1=\sqrt{-p/3}$,$x_2=-\sqrt{-p/3}$,故(当 $p>0$ 时,方程有一个实根)当 $p<0$ 时,易知有极大值 $f(x_1)=q-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$,极小值 $f(x_2)=q+\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$.从而知 $f(x_1)\geqslant 0$ 且 $f(x_2)\leqslant 0$,即在

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\leqslant q\leqslant-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},\qquad |q|\leqslant\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

时,方程有三个实根.

此外,方程有一个实根时 $f(x)$的极小值必须大于零,或者 $f(x)$的极大值小于零,或者 $f'(x)\geqslant 0$.由此可推知 $q^2+4p^3/27>0$.

(3) 我们有(对 x 求导)$p_t'(x)=3(1+t^2)x^2-3t^3$,$P_t''(x)=6(1+t^2)x$.

(i) $t<0$ 时.当 x 充分地小且小于-1时,$p_t(x)<0$;当 x 充分大且大于1时,$P_t(x)>0$,故方程有根.而由 $P_t'(x)>0$ 可知它只有一个根.

(ii) $t=0$ 时.$P_0(x)=x^3$,$x=0$ 是方程的三重根.

(iii) $t>0$ 时,可知(对 x 求导)

$$P_t'\left(\pm\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)=0,\qquad P_t''(x)\begin{cases}<0, & x<0,\\ >0, & x>0.\end{cases}$$

极小值是 $P_t\left(\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)$,极大值是 $P_t\left(-\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)$.因为 $P_t(0)>0$,$P_t'(0)<0$,所以极大值必为正,而极小值是

$$P_t\left(\sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}}\right)=t^4\left(1-2\sqrt{\frac{t}{1+t^2}}\right)\triangleq A_t.$$

从而我们有 $0<t<2-\sqrt{3}$,$A_t>0$,方程有一个单根;$2-\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}$,$A_t<0$,方程有三个根;$t>2+\sqrt{3}$,$A_t>0$,方程有一个根.

(4) 作函数 $f(x)=a^x-x$,易知当 $a\leqslant 1$ 时有解.

$a>1$ 时.因为 $f'(x)=a^x\ln a-1=0$ 有解 $x_0=\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$,而 $f''(x)=a^x\ln^2 a>0$,所以 $f(x_0)$达到极(最)小值.

$f(x)=0$ 有解须 $f(x_0)\leqslant 0$,即

$$a^{\log_a(1/\ln a)}-\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)\leqslant 0,\qquad \frac{1}{\ln a}+\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}=\frac{1+\ln(\ln a)}{\ln a}\leqslant 0.$$

即 $\ln(\ln a)\leqslant -1$,$\ln a\leqslant \mathrm{e}^{-1}$.答 $a\leqslant \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$.

(5) 假设存在 a,b 之值,对某个 c,使 $P(x)=0$ 有三个正根,则方程 $P'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 有两个正根.

反之,若 $P'(x)=0$ 有两个正根,则存在 c,使得 $P(x)=0$ 有三个正根.现在,

$P'(x)=0$ 的根是 $(-a\pm\sqrt{a^2-3b})/3$.由此知 $a^2>3b$,$-(a+\sqrt{a^2-3b})>0$.即 $a<0$ 且 $a^2>a^2-3b$.故 $b>0$.当 $b>0$,且 $a<-\sqrt{3b}$时,$P'(x)=0$ 有两个正根.从而有,若 $b\leqslant0$ 或 $a\geqslant-\sqrt{3b}$,$P(x)=0$ 对任何 c 值均不超过两个正根.

例 5.5.5 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,\infty))$,且在 (a,∞) 上可导,$f(a)<0$.若存在 $k>0$,使得 $f'(x)>k(x>a)$,则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,a+f(a)/k)$ 上有唯一实根.

(2) 设 $a>0$,则方程 $ae^x=1+x+x^2/2$ 恰有一实根.

(3) 设 $f(x)$,$g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的可微函数,且有

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=g(x),\qquad\frac{\mathrm{d}(xg(x))}{\mathrm{d}x}=xf(x),$$

则 $g(x)=0$ 的相邻两个根之间必有 $f(x)=0$ 的根.反之亦然.

证明 (1) 根据 Lagrange 中值公式,我们有 $(0<\theta<1)$

$$f(a+|f(a)|/k)-f(a)=|f(a)|f'(a+\theta|f(a)|/k)/k.$$

又由 $f'(x)>k$ 知 $f(a+|f(a)|/k)-f(a)>|f(a)|$,$f(a+|f(a)|/k)>0$.

这说明 $f(x)$ 在 $(a,a+|f(a)|/k)$ 内有零点:$f(\xi)=0$.至于唯一性的证明用反证法.假定有 ξ',使 $f(\xi')=0$,则由 Rolle 定理知,在 ξ 与 ξ' 之间有点 η,使得 $f'(\eta)=0$.这与题设 $f'(x)>k>0(x>a)$ 矛盾,故实根唯一.

(2) 作函数 $f(x)=ae^x-1-x-x^2/2$,则根据

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

可知 $f(x)=0$ 必有一实根:$x=x_0$.

此外,易知 $f'(x)>f(x)$,则作 $F(x)=e^{-x}f(x)$,可知 $F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]>0$.这说明 $F(x)$ 是递增函数,注意到 $f(x_0)=0$,可得 $F(x_0)=0$.从而知 $F(x)>0(x>x_0)$,由此又得 $f(x)>0(x>x_0)$.故 $f(x)=0$ 恰有一个实根 $x=x_0$.

(3) 设 $x_1<x_2$ 是 $g(x)$ 的两个相邻零点,则 $x_1g(x_1)=x_2g(x_2)=0$.由此知存在 ξ:使得

$$(xg(x))'|_{x=\xi}=g(\xi)+\xi g'(\xi)=0,\qquad x_1<\xi<x_2.$$

注意到 $g(\xi)\neq0$,且 $(xg(x))'=xf(x)$,故 $\xi\neq0$,$\xi f(\xi)=0$,即 $f(\xi)=0$,得证.

反之,设 $x_1<x_2$ 是 $f(x)$ 的两个相邻零点,则由 $f'(x)=g(x)$ 可知,存在 ξ:$x_1<\xi<x_2$,使得 $f'(\xi)=g(\xi)=0$.

例 5.5.6 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可导.若有

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq0\qquad(-\infty<x<\infty),$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 没有相同的零点,且在 $g(x)=0$ 的任两个根之间必有 $f(x)=0$ 的根.反之亦然.

(2) 设 $f\in C^{(2)}([a,b])$,且 $f(x)=0$ 至少有三个不同的根,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)+f''(\xi)=2f'(\xi)$.

证明　(1) (i) 设 $f(x_0)=0$,则由题设知 $f'(x_0)g(x_0)\neq 0$.故有 $g(x_0)\neq 0$.反之亦然.

(ii) 设 $g(a)=g(b)=0(a<b)$,如果 $f(x)\neq 0(a<x<b)$,那么对函数 $F(x)=g(x)/f(x)$,必存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi)=\frac{f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)}{f^2(\xi)}=0.$$

由此导致 $f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)=0$,与题设矛盾.证毕.

(2) 作 $F(x)=e^x f(x)$,且设 $F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)=0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $e^{\xi}f(\xi)+2e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f''(\xi)=0$.从而得 $f(\xi)+f''(\xi)=2f'(\xi)$.

例 5.5.7　试证明下列命题:

(1) 方程 $3^x+4^x=5^x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中恰有一实根.

(2) 方程 $(1+x)^{-n}-1+nx-\dfrac{n(n+1)}{2}x^2=0$ 无正根.

(3) 若 $\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$,则方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一实根.

(4) 多项式 $P(x)=1+x+x^2/2+\cdots+x^n/n$ 在 n 是偶数时无零点,n 是奇数时恰有一个零点.

证明　(1) 作 $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1$,则 $f(2)=0$.如果该方程另外还有一个实根 $x=x_0$,则存在 $f'(\xi)=0$.但我们总有 $f'(x)<x(-\infty<x<\infty)$,故得证.

(2) 作 $f(x)=(1+x)^{-n}-1+nx-n(n+1)x^2/2$,则

$$\begin{aligned}f'(x)&=-n(1+x)^{-n-1}+n-n(n+1)x\\&=n[1-(n+1)x-(1+x)^{-n-1}],\\f''(x)&=n[-(n+1)+(n+1)(1+x)^{-n-2}]\\&=n(n+1)[1/(1+x)^{n+2}-1]<0\qquad(x>0).\end{aligned}$$

由此知 $f'(x)$在$(0,\infty)$上严格递减,注意到 $f'(0)=0$,则 $f'(x)<0$.这说明 $f(x)$在$(0,\infty)$上严格递减.注意到 $f(0)=0$,则有 $f(x)<0(0<x<\infty)$.证毕.

(3) 作 $f(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$,则 $f(0)=0=f(1)$.由此知 $f'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在$(0,1)$内至少有一个根.

(4) (i) n 是偶数.因为

$$P'(x)=\frac{x^n-1}{x-1}\begin{cases}<0, & -\infty<x<-1,\\>0, & -1<x<\infty,\end{cases}$$

所以 $P(-1)$是最小值.且由 $P(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}>0$,可知 $P(x)=0$ 无实根.

(ii) n是奇数.因为 $P'(x)>0(-\infty<x<\infty)$,且

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty,$$

所以 $P(x)=0$ 恰有一个实根.

例 5.5.8 试证明下列命题:

(1) 设 $P_n(x)=1+x+x^2/2!+\cdots+x^n/n!$,则当 n是奇数时,$P_n(x)=0$ 仅有一个实根;n是偶数时无实根.

(2) 若有数组$\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$满足

$$\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+\cdots+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0,$$

则 $a_n\ln^nx+\cdots+a_2\ln^2x+a_1\ln x+a_0$ 在$(1,e^2)$内必有一个零点.

(3) 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有 n个不同的实根.若存在 k:$1\leqslant k\leqslant n+1$,$a_k=0$,且 $a_i\neq0(i\neq k)$,则 $a_{k-1}\cdot a_{k+1}<0$.

证明 (1) (i) 当 $n=1,2$ 时,结论显然成立.

(ii) 现在假定 $n=k$结论成立.

$k=2m$.由 $P_{k+1}(x)=1+x+x^2/2!+\cdots+x^{k+1}/(k+1)!$,易知 $P'_{k+1}(x)=P_k(x)$.由于 $P_k(x)=0$ 无实根,故 $P'_{k+1}(x)>0$(或<0).注意到 $P_k(x)$的最高次幂项 x^{2m}的系数为正,故 $P'_{k+1}(x)>0$ 说明 $P_{k+1}(x)$是递增的.而 $P_{k+1}(x)$是奇次多项式,故 $P_{k+1}(x)=0$ 只有一个实根.

$k=2m+1$.即 $k+1=2(m+1)$,而 $P_{k+1}(x)$是偶次多项式,它在$[0,\infty)$上无实根.当 $x<0$ 时,由 $\lim\limits_{x\to-\infty}P_{k+1}(x)=+\infty$,$P_{k+1}(0)=1$ 可知,若 $P_{k+1}(x)$在$(-\infty,0)$有零点,其个数必为偶数.因为 $P'_{k+1}(x)=P_k(x)$是奇次多项式,所以根据 Rolle 定理以及归纳法的假定可知,存在 $\xi\in(-\infty,\infty)$,使得 $P_k(\xi)=0$.由此我们有

$$P_{k+1}(\xi)-P_k(\xi)=\xi^{k+1}/(k+1)!>0\qquad(k+1\text{ 是偶数}).$$

这说明 $P_{k+1}(\xi)>0$,而 $P_{k+1}(x)$在极小点上的值为正.从而有 $P_{k+1}(x)\neq0$,$x\in(-\infty,0)$.

(2) 作 $f(x)=\frac{a_n}{n+1}\ln^{n+1}x+\cdots+\frac{a_2}{3}\ln^3x+\frac{a_1}{2}\ln^2x+\frac{a_0}{1}\ln x$,则 $f(1)=0$,且有

$$\begin{aligned}f(e^2)&=2^{n+1}\frac{a_n}{n+1}+\cdots+2^3\frac{a_2}{3}+2^2\frac{a_1}{2}+2\frac{a_0}{1}\\&=2\left(2^n\frac{a_n}{n+1}+\cdots+2\frac{a_1}{2}+\frac{a_0}{1}\right)=0,\end{aligned}$$

从而知存在 $x_0\in(1,e^2)$,使得 $0=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}(a_n\ln^nx_0+\cdots+a_1\ln x_0+a_0)$.证毕.

(3)由

$$P^{(k-1)}(x)=(k-1)!a_{k-1}+\frac{(k+1)!}{2!}a_{k+1}x^2+\cdots+\frac{n!}{(n-k+1)!}a_nx^{n-k+1}$$

可知 $P^{(k-1)}(x)=0$ 有 $n-k+1$ 个不同实根,$P^{(k)}(x)$有 $n-k$ 个不同零点.

现在假定结论不真,即 a_{k-1} 与 a_{k+1} 同号,不妨设皆为正值,则存在 $\varepsilon_0>0$,使得 $P^{(k-1)}(x)$在$(-\varepsilon_0,0)$上递减,在$(0,\varepsilon_0)$上递增.显然 $P^{(k)}(0)=0$.若 $P^{(k)}(x)$再无其他零点,则有 $P^{(k-1)}(x)>P^{(k-1)}(0)>0(x\neq 0)$,矛盾;若 $P^{(k)}(x)$具有其他零点,记 $x_0\neq 0$为靠近 $x=0$ 的点,而0与 x_0 间有 $P^{(k-1)}(x)$的零点.但另一方面,$P^{(k-1)}(x)>0$ $(0<x<x_0)$,矛盾.

例 5.5.9 试证明下列命题:

(1)设 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,$\alpha_i\neq\alpha_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$.则方程

$$a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\cdots+a_nx^{\alpha_n}=0\qquad(0<x<\infty)$$

至多有 $n-1$ 个实根.

(2)设 $P(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0(a_m>0)$有 m 个不同零点.令 $Q(x)=P^2(x)-P'(x)$.(i)若 m 是奇数,则 $Q(x)=0$ 恰有 $m+1$ 个不同的根.(ii)若 m 是偶数,则 $Q(x)=0$ 恰有 m 个不同的根.

证明 (1)采用归纳法:$n=1$,$a_1x^{\alpha_1}=0$ 在$(0,\infty)$内无根.现在假定对 n,方程

$$a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\cdots+a_nx^{\alpha_n}=0$$

至多有 $n-1$ 个根.转而考察方程

$$a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\cdots+a_nx^{\alpha_n}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}=0,$$

$$a_1+a_2x^{\alpha_2-\alpha_1}+\cdots+a_nx^{\alpha_n-\alpha_1}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}-\alpha_1}=0.$$

若此方程有多于 n 个实根,则其导数方程

$$(\alpha_2-\alpha_1)a_2x^{\alpha_2-\alpha_1-1}+\cdots+(\alpha_n-\alpha_1)a_nx^{\alpha_n-\alpha_1-1}+(\alpha_{n+1}-\alpha_1)a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}-\alpha_1-1}=0$$

就有 n 个根,也即

$$x^{-\alpha_1-1}[(\alpha_2-\alpha_1)a_2x^{\alpha_2}+\cdots+(\alpha_n-\alpha_1)a_nx^{\alpha_n}+(\alpha_{n+1}-\alpha_1)a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}]=0$$

有 n 个根.这与题设矛盾.证毕.

(2)设 $x_1<x_2<\cdots<x_m$ 是 $P(x)=0$ 的实根,则

$$P'(x_m)>0,P'(x_{m-1})<0,P'(x_{m-2})>0,\cdots,$$

$$Q(x_m)<0,Q(x_{m-1})>0,\cdots.$$

若 m 是奇数,则 $Q(x_1)<0$;若 m 是偶数,则 $Q(x_1)>0$.因此,根据 Rolle 定理可知,m 是奇数时 $Q(x)$至少有 $m+1$ 个零点;m 是偶数时 $Q(x)$至少有 m 个零点.下面指出 $Q(x)$的零点皆不同.

因为 $P(x)$的零点都不同:

$$P(x)=a_m(x-x_1)\cdots(x-x_m),\quad P'(x)/P(x)=\sum_{i=1}^{m}1/(x-x_i)\quad(x\neq x_i),$$

所以有 $P(x)\cdot P''(x)-[P'(x)]^2=-P^2(x)\cdot\sum_{i=1}^{m}1/(x-x_i)^2<0$.

对 $x=x_i$,$[P'(x_i)]^2>0=P(x_i)\cdot P''(x_i)$,故得

$$\begin{aligned}P(x)Q'(x)&=P(x)\cdot[2P(x)P'(x)-P''(x)]\\&=2P'(x)[P^2(x)-P'(x)]+2[P'(x)]^2-P(x)P''(x)\\&>2P'(x)P^2(x)-[P'(x)]^2.\end{aligned}$$

由此知 $P(x)Q'(x)>2P'(x)Q(x)$.这说明 $Q(x)=0$ 的根全是单根.若 t_1,t_2 是 $Q(x)$的相继零点,则 $Q'(t_1)$,$Q'(t_2)$就有不同符号.因此,$P(t_1)$与 $P(t_2)$也有不同符号.这说明 $Q(x)=0$ 的相继两个实根之间至少有 $P(x)=0$ 的一个实根.

(i) m 是奇数.若 $Q(x)=0$ 有多于 $m+1$ 个实根,则 $P(x)=0$ 就会有多于 m 个实根,这与题设矛盾.

(ii) m 是偶数.若 $Q(x)=0$ 有多于 m 个实根(至少有 $m+2$ 个),则 $P(x)=0$ 有多于 m 个实根,导致矛盾.

例 5.5.10 设 $x^n+x=1$ 在$(0,1)$中的根为 $a_n(n\in\mathbf{N})$,试证明 $a_n\to1(n\to\infty)$.

证明 (i) 令 $F_n(x)=x^n+x-1$,则对任意的 $n\in\mathbf{N}$,我们有

$$F_n(1)=1>0,\qquad F_n(1/2)=1/2^n+1/2-1\leqslant0\quad(n\in\mathbf{N}).$$

由此知存在 a_n:$1/2\leqslant a_n<1$,使得 $F_n(a_n)=0(n\in\mathbf{N})$.因为在$[1/2,1)$上,$F'_n(x)=nx^{n-1}+x>0$.所以 $F_n(x)$是严格递增的.故 $F_n(x)=0$ 的根 a_n 是唯一的.由

$$F_n(x)-F_{n+1}(x)=x^n(1-x)>0\qquad(0<x<1),$$

可知 $F_n(x)>F_{n+1}(x)$,即 $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N})$.这说明$\{a_n\}$是递增有界列.

(ii) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,易知 $a=1$.事实上,若 $a<1$,则存在 N 以及 $\delta>0$,使得

$$a_n\leqslant(1-\delta)\qquad(n\geqslant N,0<\delta<1).$$

从而得 $a_n^n\leqslant(1-\delta)^n\to0(n\to\infty)$,因此就有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^n+a_n-1)=a-1<0$.但这与由 $a_n^n+a_n-1=0$导出的(令 $n\to\infty$)$a-1=0$ 矛盾.即得所证.

* **例 5.5.11** 试证明下列命题:

(1) 设 $P(x)$是一个多项式,且有 $\lambda\in\mathbf{R}$:$P(\lambda)\neq0$,则存在多项式 $Q(x)$,使得 $F(x)=P(x)Q(x)$满足

$$F(\lambda)=1,\quad F'(\lambda)=0,\quad F''(\lambda)=0.$$

(2) 设有方程

$$x(1+\ln(1/\varepsilon\sqrt{x}))=1\qquad(x>0,\varepsilon>0),\tag{*}$$

则

(i) 对每个充分小的 ε,(*)有两个解(记其小者为 x_ε).

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}x_\varepsilon=0$. (iii) $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\varepsilon^{-t}x_\varepsilon=\infty(t>0)$.

证明 (1) 令 $Q(x)=a_0+a_1(x-\lambda)+\cdots+a_n(x-\lambda)^n$,其中

$$a_0=\frac{1}{P(\lambda)},\quad a_1=-\frac{P'(\lambda)Q(\lambda)}{P(\lambda)},\quad a_2=-\frac{P''(\lambda)Q(\lambda)+P'(\lambda)Q'(\lambda)}{P(\lambda)},$$

则经计算可立即得证.

(2)(i)对 $x>0$,可解出 $\varepsilon=\mathrm{e}/\sqrt{x}\mathrm{e}^{1/x}\triangleq f(x)$.若记 $F(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{1/x}=\mathrm{e}/f(x)$,则 $F'(x)=x^{-3/2}\mathrm{e}^{1/x}(x-2)/2$.从而知 $F(x)$在$(0,2]$上严格递减,在$[2,\infty)$上严格递增,且有

$$\lim_{x\to0+}F(x)=+\infty=\lim_{x\to+\infty}F(x),\quad F(2)>0.$$

由此得 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,即 $f(x)$在$(0,2]$上严格递增,在$[2,\infty)$上严格递减,且 $f(2)=\sqrt{\mathrm{e}/2}$.现在令

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,2),\\ 0, & x\in[2,\infty),\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,2],\\ f(x), & x\in(2,\infty).\end{cases}$$

则对 $0<\varepsilon<\sqrt{\mathrm{e}/2}$,方程(*)确有两个解:$x=f_1^{-1}(\varepsilon)$,$f_2^{-1}(\varepsilon)$.较小者为 $x_\varepsilon=f_1^{-1}(\varepsilon)$.

(ii)因为 f_1 严格递增且连续,以及 $f_1(0+)=0$,所以(ii)真.

(iii)对 $t>0$,我们有($x=x_\varepsilon=f_1^{-1}(\varepsilon)$)

$$\varepsilon^{-t}x_\varepsilon=\left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{1/x}}\right)^{-t}x=\mathrm{e}^{-t}x^{1+t/2}\mathrm{e}^{t/x}.$$

因为当 $\varepsilon\to0+$时有 $x\to0+$,所以 $\mathrm{e}^{-t}x^{1+t/2}\mathrm{e}^{t/x}\to+\infty(x\to0+)$.

***例 5.5.12**　试证明下列命题:

(1)设 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是不同实数,令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^{\lambda_i}\qquad(0<x<\infty).$$

若有 $a_{i_0}<0$,$a_i>0(i\neq i_0)$,则方程 $f(x)=0$ 至多有两个正根.

(2)设 $f(x)$在$[a,b]$上 n次可导,且至少有 $n+1$ 个不同零点.若 $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 只有实根,则函数

$$f^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_0f(x)\tag{*}$$

在$[a,b]$上至少有一个零点.

(3)设 $P(x)$是一个非常数的多项式.若存在 x_0,使得

$$P(x_0)\neq0,\quad P'(x_0)=P''(x_0)=0,$$

则方程 $P(x)=0$ 必有复根.

证明　(1)只需指出 $F(x)=f(x)/x^{\lambda_{i_0}}$ 的零点不超过两个.因为 $F'(x)=\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n}(\lambda_i-\lambda_{i_0})a_ix^{\lambda_i-\lambda_{i_0}-1}$,以及

$$xF'(x)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n}(\lambda_i-\lambda_{i_0})a_ix^{\lambda_i-\lambda_{i_0}},$$

且后一式中每一项均在$(0,\infty)$上递增(无论 $\lambda_i-\lambda_{i_0}>0$ 或 $\lambda_i-\lambda_{i_0}<0$),所以 $xF'(x)$在$(0,\infty)$上递增.这说明 $F'(x)$在$(0,\infty)$上至多有一个正根,证毕.

(2)采用归纳法.当 $n=1$ 时结论显然为真,现在假定 $n=k$ 时式(*)至少有一个零点,则对 $k+1$ 次多项式 $P(x)$以及存在 $k+1$ 次导数且有 $k+2$ 个不同零点的$[a,b]$上的 $f(x)$,由于 $P(x)=0$ 全都是实根,故可写出($\lambda\in\mathbf{R}$)

$$P(x)=Q(x)(x-\lambda)\quad(Q(x)\text{是 }k\text{ 次多项式,零点全是实数}).$$

从而$\left(\text{记 } D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ $F(x)=(D-\lambda)f(x)$ k次可导,且至少有 $k+1$ 个不同零点(注意,若 $g(x)$可导且有 $m+1$ 个不同零点,则 $f'(x)-\lambda f(x)$至少有 m 个不同零点).根据归纳法,易知 $Q(D)F(x)$至少有一个零点.注意到

$$Q(D)F(x)=Q(D)(D-\lambda)f(x)=P(D)f(x),$$

这说明 $n=k+1$ 时结论亦真.证毕.

(3) 反证法.假定 $P(x)=0$ 全是实根($r_1<r_2<\cdots<r_k$):

$$P(x)=(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\cdots(x-r_k)^{n_k},\qquad \sum_{i=1}^{k}n_i=n,$$

则当 $n_i>1$ 时,$x=r_i$ 是 $P'(x)$的(n_i-1)重实根.总之,$P'(x)$有 $n-1$ 个根,其中有重数 $n-k$(重).根据 Rolle 定理,对 i:$1\leqslant i\leqslant k-1$,有 s_i:$r_i<s_i<r_{i+1}$,使得 $P'(s_i)=0$.这说明 $P'(x)$留下 $k-1$ 个不同实根.

现在,已知 $x=x_0$ 是 $P''(x)=0$ 的实根,故 $x=x_0$ 是 $P'(x)$的重根,即 $x_0\neq s_i$($i=1,2,\cdots,k-1$),$x=x_0$ 不是 $P'(x)$的根,导致矛盾.

5.6 Taylor 公式

对于在点 x_0 处 n次可导的函数 $f(x)$,我们称多项式

$$P_n(x)\stackrel{\triangle}{=}P_n(x_0,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$在点 x_0 的 **Taylor 多项式**,而称

$$R_n(x)=R_n(x_0,x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

为该 Taylor 公式的**余项**(**误差**),并统称

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x_0,x)$$

为 $f(x)$在 x_0 处的 **Taylor 公式**.

5.6.1 Peano 余项的 Taylor 公式

定理 5.6.1(Peano 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$在点 x_0 处 n次可导,则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0).$$

上述定理指出 $R_n(x_0,x)=o((x-x_0)^n)(x\to x_0)$,我们称此为 Peano 型余项.

此外,若记 $x-x_0=h$,则上述定理的结论又可写为

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+o(h^n)\qquad(h\to 0).$$

Peano 余项的 Taylor 公式的一个特殊情形是 $x_0=0$ 的情形,此时有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)\qquad(x\to 0),$$

也称为 **Maclaurin** 公式,并被经常采用.

Peano 余项的 Taylor 公式的性质

Peano 余项的 Taylor 公式有下列性质,它为寻求函数的 Taylor 公式提供了方便.

(1)(唯一性)设 $f(x)$在 $U(x_0)$上有定义,且有多项式

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

$$Q(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n.$$

如果 $f(x)=P(x)+o((x-x_0)^n)=Q(x)+o((x-x_0)^n)(x\to x_0)$,那么 $P(x)\equiv Q(x)$.

注　此性质说明,若在 $U(x_0)$上有展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

则 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=1,2,\cdots,n)$,即 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ 就是$f(x)$在点 $x=x_0$ 处的 Taylor 多项式.这为我们寻求函数的 Taylor 公式提供了便利.实际上,它说明,在 $U(x_0)$上用多项式逼近$f(x)$,且达到精度 $o((x-x_0)^n)(x\to x_0)$时,$f(x)$的 Taylor 多项式唯一可能.

(2)设 $f(x)$,$g(x)$在 $U(x_0)$上有定义,而且

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

则可得

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),c_k=\sum_{k=0}^{n}a_ib_{k-i},$$

$$f(cx)=\sum_{k=0}^{n}c^k a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0).$$

(3)设 $f(x)$在以原点为心的对称区间上有定义,且在 $x_0=0$ 处任意次可导,我们有:

若 $f(x)$是偶函数,则 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k+1})(x\to 0)$;

若 $f(x)$是奇函数,则 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})(x\to 0)$.

注　对于商函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$,$b_0=g(x_0)\neq 0$,可以采用待定系数法.即假设有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o(x-x_0)^n\qquad(x\to x_0),$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o(x-x_0)^n\qquad(x\to x_0).$$

则令 $h(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)(x\to x_0)$,可得

$$\left(\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0).$$

从中比较其同类项系数可求出 $c_k(k=1,2,\cdots,n)$.

(4)复合函数 $f[g(x)]$的展式.设

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

$$f(u)=\sum_{k=0}^{n}a_k(u-u_0)^k+o((u-u_0)^n)\qquad(u\to u_0),$$

其中 $u_0=g(x_0)$,则为了寻求展式

$$f[g(x)]=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

只需将 $f(u)$的展式中的 u代以 $g(x)$的展式即可.特别是在 $g(x)=Ax^m(m\in\mathbf{N})$时,有

$$f[g(x)]=f[Ax^m]=\sum_{k=0}^{n}A^ka_kx^{mk}+o(x^{nm})\qquad(x\to 0).$$

(5)已知 $f(x)$的导函数 $f'(x)$有展式

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad(x\to x_0),$$

$$b_k=\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\qquad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

此时,由 $f^{(n+1)}(x_0)$存在,可知 $f(x)$也有展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^{n+1})$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o((x-x_0)^{n+1})\qquad(x\to x_0),$$

其中 $a_{k+1}=\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}=\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{b_k}{k+1}(k=0,1,2,\cdots,n)$.因此,有

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o((x-x_0)^{n+1})\qquad(x\to x_0).$$

基本初等函数的 Maclaurin 展式举例

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\qquad(x\to 0).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\qquad(x\to 0).$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{n!}x^n+o(x^n)\qquad(x\to 0).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \qquad (x \to 0).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (x \to 0).$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad (x \to 0).$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad (x \to 0).$$

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad (x \to 0).$$

例 5.6.1　试求下列函数 $f(x)$的 Maclaurin 展式:

(1) $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{2-x}$.　　(2) $f(x)=e^x\ln(1+x)$到 $o(x^4)$项.

(3) $f(x)=e^{x\cos x}$到 $o(x^3)$项.　(4) $f(x)=x^2/(1+\sin x)$到 $o(x^6)$项.

解　(1) $$\ln\frac{3+x}{2-x} = \ln\frac{3}{2} + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\right)x^k + o(x^n) \qquad (x \to 0).$$

(2) $e^x\ln(1+x)$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2}+1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3$$

$$+ \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \qquad (x \to 0).$$

(3) 当 $x\to 0$ 时,易知

$$u = x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4), \qquad u^2 = x^2 + o(x^3),$$

$$u^3 = x^3 + o(x^3), \qquad e^u = \sum_{k=0}^{3}\frac{u^k}{k!} + o(u^3),$$

从而可得

$$e^{x\cos x} = 1 + x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4) + \frac{1}{2!}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{3!}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0).$$

(4) 因为$\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + o(t^n)\,(t\to 0)$,以及

$$(t=)\sin x = x - x^3/3! + o(x^4) \quad (x\to 0),$$
$$(t^2=)\sin^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4) \quad (x\to 0),$$
$$(t^3=)\sin^3 x = x^3 + o(x^4) \quad (x\to 0),$$
$$(t^4=)\sin^4 x = x^4 + o(x^4) \quad (x\to 0),$$

所以 $f(x)=x^2-x^3+x^4-5x^5/6+2x^6/3+o(x^6)(x\to 0)$.

* **例 5.6.2** 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[a,a+h]$上可微$(a>0)$,则

$$f(a+h)=f(a)+(e^h-1)e^{-\theta h}f'(a+\theta h),\quad 0<\theta<1.$$

(2) 设 $g(x)=1-2\sin^2(2\pi x)$,$f(y)=2/(1+\sqrt{1-y})$,则

$$f[g(x)]=2-4\sqrt{2}\pi|x|+O(x^2)\quad (x\to 0).$$

证明 (1) 考察 $F(x)=f(a+\ln x)$,则 $F(x)$在$[1,e^h]$上可微.由此可知

$$F(e^h)-F(e^0)=F'(e^{\theta h})(e^h-1),\quad 0<\theta<1,$$

故 $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)(e^h-1)$,即可得证.

(2) 注意到 $\sin x=x-x^3/6+O(x^5)(x\to 0)$,以及

$$\sin^2 x = x^2+O(x^4),\quad g(x)=1-8\pi^2x^2+O(x^4)\quad (x\to 0),$$

故得 $f[g(x)]=2/[1+\sqrt{8\pi^2x^2+O(x^4)}]=2/[1+2\sqrt{2}\pi|x|+O(x^2)](x\to 0)$.

引用公式 $2/(1+t)=2-2t+2t^2+O(t^3)(x\to 0)$,立即导出

$$f[g(x)]=2-4\sqrt{2}\pi|x|+O(x^2)\quad (x\to 0).$$

例 5.6.3 解答下列问题:

(1) 求函数(i)$f(x)=x^6\cdot\sin(1/x)(x\neq 0)$,$f(0)=0$.(ii)$f(x)=e^{x^2|x|}$的 Maclaurin 展式.

(2) 求由方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 确定的 $y=y(x)$的 Maclaurin 展式.

(3) 设 $f(x)$在 $U(0)$上可导,且存在 $f''(0)$,试证明

$$f(x)=f(0)+f'(0)\sin x+\frac{1}{2}f''(0)\sin^2 x+o(x^2)\quad (x\to 0).$$

(4) 求函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}-\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$在 $x=2$ 处的 Taylor 展式到 $o((x-2)^{2n+2})$项.

解 (1) (i) 对 $x\neq 0$,我们有 $f'(x)=6x^5\sin\dfrac{1}{x}-x^4\cos\dfrac{1}{x}$,以及

$$f''(x)=30x^4\sin\frac{1}{x}-6x^3\cos\frac{1}{x}-4x^3\cos\frac{1}{x}-x^2\sin\frac{1}{x},$$

$$f'''(x)=120x^3\sin\frac{1}{x}-60x^2\cos\frac{1}{x}-12x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}.$$

由此知,$f'(0)=0$,$f''(0)=0$,以及 $f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=0$.且易知 $f(x)$在 $x=0$ 处的四阶导数不存在,因此得 $f(x)=o(x^3)(x\to 0)$.

(ii) 易知 $f'(x)=3e^{x^2|x|}\cdot x|x|$, $f''(x)=3e^{x^2|x|}(3x^4+2|x|)$, 从而得 $f'(0)=0$, $f''(0)=0$. 但不存在极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}3e^{x^2|x|}\frac{3x^4+2|x|}{x}.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处三阶导数不存在. 由此知 $f(x)=o(x^2)(x\to 0)$.

(2) 易知 $x=0$ 时有 $y^3=1$, 即 $y(0)=1$. 求导可得

$$3x^2+3y^2y'+y+xy'=0,\qquad y'(0)=-1/3.$$

继续求导, 最后可得 $f(x)=1-\frac{x}{3}-\frac{52}{27}x^3+o(x^3)(x\to 0)$.

(3) 由 $\sin x=x+o(x^3)(x\to 0)$, 可知

$$f'(0)\sin x-f'(0)x=o(x^3)\qquad(x\to 0),$$
$$f''(0)\sin^2 x-f''(0)x^2=o(x^3)\qquad(x\to 0).$$

从而我们有

$$\left[f(0)+f'(0)\sin x+\frac{1}{2}f''(0)\sin^2 x\right]$$
$$-\left[f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2\right]=o(x^2)\qquad(x\to 0).$$

由此即得所证.

(4) 改写原式为 $f(x)=2(x-2)[x(4-x)]^{-1/2}$, 并令 $x=t+2$, 则 $x(4-x)=4-t^2$, 且有 $[x(4-x)]^{-1/2}=(4-t^2)^{-1/2}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right]^{-1/2}$. 由此易得

$$f(x)=(x-2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^{2^k}\cdot k!}(x-2)^{2k+1}+o((x-2)^{2n+2})\qquad(x\to 0).$$

例 5.6.4　试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\tan x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x]^{\cot x^3}$.　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$.

解　(1) 当 $x\to 0$ 时, 我们有

$$\arcsin x-\sin x=\frac{x^3}{3}+o(x^3);\qquad\sqrt{1+2\tan x}-e^x+x^2=\frac{2x^3}{3}+o(x^3),$$

所以其极限值为 2.

(2) 利用替换 $t=\frac{1}{x}$, 可知

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})=\lim_{t\to 0+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{4}}+(1-t)^{\frac{1}{4}}-2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1+\frac{t}{4}-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)+\left(1-\frac{t}{4}-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)\right)-2}{t^2}=-\frac{3}{16}.$$

(3) 因为 $\cot x^3=\frac{1}{\tan x^3}$,所以 $\cot x^3=\frac{1}{x^3+o(x^3)}(x\to 0)$.此外,当 $x\to 0$ 时,有

$$xe^x=x+x^2+o(x^2),\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3),$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x=1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$

因此,我们有

$$\lim_{x\to 0}[\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x]^{\cot x^3}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{x^3+o(x^3)}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

(4) 令 $x-2=t$,则有 $t\to 0$,以及

$$\sqrt{3-x}=\sqrt{1-t},\qquad \ln\frac{x}{2}=\ln\left(1+\frac{t}{2}\right),\qquad \sin^2(x-2)=\sin^2 t.$$

易知 $\left(\sqrt{1-t}+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2 t}}=\left(1-\frac{t^2}{4}+o(t^2)\right)^{\frac{1}{t^2+o(t^2)}}(t\to 0)$.从而可得其极限值为 $e^{-\frac{1}{4}}$.

例 5.6.5 试求下列极限:

(1) $I=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$. (2) $I=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$.

(3) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\Big/e\right]^x$. (4) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right]$.

(5) $I=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha}-\frac{\beta}{1-x^\beta}\right)(\alpha\beta\neq 0)$.

(6) $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{2}x+x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)\right]$.

解 (1) $I=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-(1-x+o(x))}-\sqrt{1-(1-x^2/2+o(x^2))}}{\sqrt{x-x^3/3!+o(x^3)}}$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x+o(x)}-\sqrt{x^2/2+o(x^2)}}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+o(\sqrt{x})}-x\cdot\sqrt{1+o(1)}/\sqrt{2}}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}=1.$$

(2) 我们有 $x^x-(\sin x)^x=x^x\left[1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right]$,以及

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x = e^{x\ln(\sin x/x)} = e^{x\cdot\ln(1-x^2/6+o(x^2))} = e^{x\cdot(-x^2/6+o(x^2))}.$$
$$= 1-x^3/6+o(x^3)\ (x\to 0).\quad I=1/6.$$

(3) 我们有

$$\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x/e\right]^x = e^{x[\ln(1+1/x)^x-1]}$$
$$= e^{x^2\ln(1+1/x)-x} = e^{x^2[1/x-1/2x^2+o(1/x^2)]-x}\quad (x\to+\infty),\quad I=e^{-1/2}.$$

(4) 因为

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-x\ln(1+1/x)}$$
$$= e^{-x}\cdot[1/x-1/2x^2+1/3x^3+o(x^{-3})]$$
$$= e^{-1}\cdot e^{1/2x-1/3x^2+o(x^{-2})}\qquad (x\to+\infty),$$

所以令 $t=1/x$,则

$$I=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0+}\frac{1-e^{t/2-t^2/3+o(t^2)}}{t} = \frac{1}{e}\cdot\lim_{t\to 0+}\frac{1-e^{t/2-t^2/3(1+o(t^2))}}{t}$$
$$=\frac{1}{e}\cdot\lim_{t\to 0+}\frac{1-e^{t/2-t^2/3}}{t} = \frac{1}{e}-\frac{1}{2}.$$

(5) 令 $1-x^\alpha=t$,则 $x\to 1$ 相应于 $t\to 0$,我们有

$$I=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\alpha}{t}-\frac{\beta}{1-(1-t)^{\beta/\alpha}}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\alpha}{t}-\frac{\beta}{1-[1-\beta t/\alpha+At^2+o(t^2)]}\right)\qquad\left(A=\frac{(\beta/\alpha-1)\beta/\alpha}{2}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\beta t-A\alpha t^2+o(t^2)-\beta t}{t(\beta t/\alpha-At^2+o(t^2))} = -\frac{A\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(6) 因为我们有

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\cdot\ln(1+1/x)} = e^{x(1/x-1/2x^2+1/3x^3+o(1/x^3))}$$
$$= e\cdot\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\qquad (x\to+\infty),$$

所以得到

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{2}x+x^2\left(e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-e\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{11e}{24}+o(1)\right)=\frac{11}{24}e.$$

例 5.6.6 设 m,k 是自然数,求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^k-\left(1+\frac{k}{n}\right)^m\right]$.

解 应用 Peano 余项的 Maclaurin 展式，我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}n^2\left[1+\frac{mk}{n}+\frac{k(k-1)}{2}\frac{m^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1-\frac{mk}{n}-\frac{m(m-1)}{2}\frac{k^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=mk\frac{k-m}{2}.$$

例 5.6.7 试求下列极限 I：

(1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$. (2) $I=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\cos(1-\sin x)}{\sin^4(\cos x)}$.

解 (1) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x^n-x^{3n}/6+O(x^{5n})]-[x-x^2/3!+O(x^5)]^n}{x^{n+2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{nx^{n-1}\cdot x^3/3!+o(x^{n+3})}{x^{n+2}}=\frac{n}{6}.$$

(2) $I=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-[1-(1-\sin x)^2/2+(1-\sin x)^4/4!-\cdots]}{(\cos x-\cos^3 x/6+\cdots)^4}$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1-\sin x)^2[1/2-(1-\sin x)^2/4+\cdots]}{\cos^4 x(1-\cos^2 x/6+\cdots)^4}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{(1+\sin^2 x)^2}\cdot\frac{1/2-(1-\sin x)^2/4!+\cdots}{(1-\cos^2 x/6+\cdots)^4}=\frac{1}{8}.$$

例 5.6.8 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$ 在 $U(0)$ 上可导，$f(0)=0$ 且存在 $f''(0)$. 令 $F(x)=\begin{cases}f(x)/x, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$ 求 $F'(0)$.

(2) 设 $f''(0)$ 存在，且有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=3$. 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

(3) 设 $f(x)=\left(e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，试求 $f'(0)$.

解 (1) 易知 $F(x)$ 在 $U(0)$ 上连续，又有

$$f(x)=f'(0)x+f''(0)x^2/2+o(x^2)\quad(x\to 0),$$
$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+o(x)\quad(x\to 0).$$

从而知(对 $x\neq 0$)

$$\begin{aligned}F'(x)&=[xf'(x)-f(x)]/x^2\\&=[f'(0)x+f''(0)x^2+o(x^2)-f'(0)x-f''(0)x^2/2+o(x^2)]/x^2\\&=f''(0)/2+o(1)\quad(x\to 0).\end{aligned}$$

最后我们有 $F'(0)=f''(0)/2$.

(2) 根据题设，可知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+x+f(x)/x]/x=3$，故

$$\lim_{x\to 0}(x+f(x)/x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}f(x)/x=0,$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0),\qquad f'(0)=\lim_{x\to 0} f(x)/x=0,$$

$$\ln(1+x+f(x)/x)\sim x+f(x)/x\qquad(x\to 0).$$

我们有$\lim\limits_{x\to 0}(x+f(x)/x)/x=3$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x^2=2$.根据 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+f''(0)x^2/2+o(x^2) \\ &= f''(0)x^2/2+o(x^2)\qquad(x\to 0), \end{aligned}$$

可知 $2=\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x^2=\lim\limits_{x\to 0}[f''(0)/2+o(1)]=f''(0)/2$,即 $f''(0)=4$.

(3) 用 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)(x\to 0)$,可知

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{x^3}{6}(1+o(1))\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{6}}x[1+o(1)]^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{6}}+o(x)\quad(x\to 0). \end{aligned}$$

注意到 $f(0)=0$,由上式知 $f(x)$在 $x=0$ 处可微,且 $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

例 5.6.9　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=1/(x\ln 2)-1/(2^x-1)(x\neq 0)$,$f(0)=1/2$,求 $f'(0)$.

(2) 设 $f(x)$在$(-1,1)$上三次可导,且有$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$,试求 $f(0)$,$f'(0)$,$f''(0)$.

解　(1) 令 $2^x-1=t$,则 $x\to 0$ 相应于 $t\to 0$,从而有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{1/(x\ln 2)-1/(2^x-1)-1/2}{x} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1/\ln(1+t)-1/t-1/2}{\ln(1+t)/\ln 2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{2t-2\ln(1+t)-t\ln(1+t)}{t\ln^2(1+t)} \\ &= \frac{\ln 2}{2}\lim_{t\to 0}\frac{2t-2t+t^2-2t^3/3+O(t^4)-t^2+t^3/2+O(t^4)}{t^3} \\ &= \frac{\ln 2}{2}\lim_{t\to 0}\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\ln 2}{12}. \end{aligned}$$

(2) 因为我们有

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2} &= \frac{1}{x^3}[\sin 3x+xf(x)] \\ &= \frac{1}{x^3}\left[3x-\frac{27}{3!}x^3+o(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{f''(0)}{2}x^3+o(x^4)\right] \\ &= \frac{3+f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{-9+f''(0)}{2}+o(1)\qquad(x\to 0), \end{aligned}$$

所以根据题设立即可知 $f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9$.

例 5.6.10 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=e^x-(1-ax)/(1+bx)$ 在 $x\to 0$ 时是与 x^3 同阶的无穷小量,试求 a,b 之值.

(2) 试求 a,b 之值,使得函数 $f(x)=\cos x-(1+ax^2)/(1+bx^2)$ 在 $x\to 0$ 时达到可能的最高阶无穷小量.

(3) 设 $n\to\infty$ 时,$(n+1/2)\ln(1+1/n)-1$ 与 $1/n^k$ 是同阶无穷小量,求 k 的值.

解 (1) 因为我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\ &\quad -(1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3)) \\ &= (1-a+b)x+(1/2+ab-b^2)x^2 \\ &\quad +(1/6+b^3-ab^2)x^3+o(x^3) \qquad (x\to 0), \end{aligned}$$

所以依题设有 $1-a+b=0, \frac{1}{2}+ab-b^2=0, \frac{1}{6}+b-ab^2\neq 0$.由此即知 $a=1/2, b=-1/2$.

(2) 因为我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^7) \\ &\quad -(1-ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^7)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}+a+b\right)x^2+\left(\frac{1}{24}-b^2-ab\right)x^4 \\ &\quad +\left(-\frac{1}{6!}+ab^2+b^3\right)x^6+o(x^7) \qquad (x\to 0), \end{aligned}$$

所以令 $-1/2+a+b=0, 1/24-b^2-ab=0$,可得 $a=5/12, b=1/12$.此时 x^6 之系数不为零,故 $f(x)$ 达到最高阶无穷小数 x^6.

(3) 考察 $f(x)=(1/x+1/2)\ln(1+x)-1$ 在 $x\to 0$ 的情形,我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-1 \\ &= \frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)=\frac{x^2}{12}+o(x^2)\ (x\to 0). \quad k=2. \end{aligned}$$

例 5.6.11 解答下列问题:

(1) 确定 α 以及 n 之值,使得极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{\alpha x^n}-\cos x^2\right]/x^8$ 存在.

(2) 确定 a,b 之值,使得

$$\cot x=(1+ax^2)/(x+bx^3)+o(x^5) \qquad (x\to 0).$$

解　(1) 应用 Taylor 展式可得

$$(e^{\alpha x^n}-\cos x^2)/x^8$$
$$=\left(1+\alpha x^n+\frac{\alpha^2}{2}x^{2n}+o(x^{2n})-1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)\right)/x^8,$$
$$=\left[\left(\alpha x^n+\frac{1}{2}x^4\right)+\left(\frac{\alpha^2}{2}x^{2n}-\frac{1}{4!}x^8\right)+(o(x^{2n})+o(x^8))\right]/x^8\qquad(x\to 0).$$

由此易知当 $n=4$,$\alpha=-1/2$ 时该极限存在.

(2) 由公式 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1+ax^2}{1+bx^3}+o(x^5)(x\to 0)$,可知

$$\cos x(x+bx^3)=\sin x(1+ax^2)+o(x^7)\qquad(x\to 0),$$
$$(x+bx^3)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^6)\right)$$
$$=(1+ax^2)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^7)\right)\qquad(x\to 0),$$
$$x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}+O(x^7)+bx^3-b\frac{x^5}{2}$$
$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)+ax^3-a\frac{x^5}{6}+O(x^7)\qquad(x\to 0).$$

从而可得 $-\dfrac{1}{2}+b=a-\dfrac{1}{6}$,$\dfrac{1}{24}-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{120}-\dfrac{a}{6}$,即 $a=-2/5$,$b=-1/15$.

例 5.6.12　解答下列问题:

(1) 证明 $(n+1/2)\ln(1+1/n)>1$.

(2) 试问 x 取何值时 $a_n=(1+x/n)^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N})$是递减列?

解　(1) 应用 $\ln(1+x)$的 Taylor 公式,我们有

$$\ln[(1+x)/(1-x)]=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$
$$=\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{x^k}{k}+o(x^{2m+1})$$
$$=2x\sum_{k=0}^{m}\frac{x^{2k}}{2k+1}+o(x^{2m+1})\qquad(|x|<1,x\to 0).$$

在上式中取 $x=1/(2n+1)$,我们有

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots+o\left(\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2m+1}\right)\right]$$
$$>\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+1/2}\qquad(n\to\infty),\text{证毕}.$$

(2) 考察函数 $f(t)=(1+tx)^{1+1/t}$在 $t\to 0+$时的情形,我们有

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=(\ln f(t))'=\left[-\ln(1+xt)+\frac{xt(1+t)}{1+xt}\right]/t^2.$$

注意到$\frac{xt(1+t)}{1+xt}=xt+x(1-x)t^2-x^2(1-x)t^3+o(t^3)(t\to 0)$,以及 $\ln(1+xt)=xt-x^2t^2/2+x^3t^3/3+o(t^3)(t\to 0)$,并代入前式.

若 $x(1-x)>-x^2/2$,即 $0<x<2$,则 $f'(t)$在 t 充分小时大于 0,即当 n 充分大时,$\{a_n\}$递减;

若 $x(1-x)<-x^2/2$,即 $x<0$ 或 $x>2$,则 $f'(t)<0$,即 n 充分大时,$\{a_n\}$递增.

若 $x=0$,则 $a_n=1(n=1,2,\cdots)$.

若 $x=2$,则关于 t,t^2 幂次项相同.看 t^3 项:由 $8/3<4$,故 $f'(t)>0$(t 充分小时),$\{a_n\}$在 n 充分大时递减.

结论:$0<x\leqslant 2$.

*例 5.6.13　试证明 $f(x)=x/(\mathrm{e}^x-1)$在 $x=0$ 处的 Taylor 级数之系数皆为有理数.

证明　依题设我们有

$$1=f(x)\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right).$$

由此易知(比较上式左、右端)

$$a_0=1,\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{(k+1)!}=0.$$

应用归纳法,可以计算出 $a_k\in\mathbf{Q}(k\in\mathbf{N})$.

5.6.2　Lagrange 余项的 Taylor 公式

定理 5.6.2(Lagrange 型余项的 Taylor 公式)　设 $f(x)$在$[x_0,x+h](h>0)$上有定义(类似地可讨论$[x_0-h,x_0]$和 $U(x_0)$的情形).

(1) $f(x)$在$[x_0,x_0+h]$上 n 次连续可微;(2) 在(x_0,x_0+h)上 $f^{(n+1)}(x)$存在,则对任意的 $x\in[x_0,x_0+h]$,存在 $\xi\in(x_0,x)$,使得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)+R_n(x_0,x),\qquad R_n(x_0,x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

基本初等函数展式举例

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\qquad(x>-1),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

函数极值高阶判别.我们曾经介绍过用二阶导数判别函数极值的方法.然而在 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$ 的情形,点 x_0 可能是 $f(x)$的极值点,也可能不是.此时,通过 Taylor 公式还可以用更高阶的导数来作出判别.

定理 5.6.3 设 $f(x)$在 $U(x_0)$上是 n次连续可微的,$f^{(n+1)}(x_0)$存在,且有

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0,\qquad f^{(n+1)}(x_0)\neq 0.$$

若 n是奇数(即 $n+1$是偶数),则$\begin{cases}\text{当 } f^{(n+1)}(x_0)<0 \text{ 时},f(x_0)\text{是极大值};\\ \text{当 } f^{(n+1)}(x_0)>0 \text{ 时},f(x_0)\text{是极小值}.\end{cases}$

若 n是偶数(即 $n+1$是奇数),则 $f(x_0)$既非极大值也非极小值.

函数值的精细近似计算.为了把握函数用其 Taylor 多项式近似的程度,须估计误差 $R_n(x_0,x)$的范围.显然,关键在于对 $f^{(n+1)}(\xi)$值的估计,如果存在 $M_n>0$,使得对 $n=0,1,2,\cdots$,有

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_n,\qquad x\in[x_0-\eta,x_0+\eta]\quad(\eta>0),$$

那么可得估计 $|R_n(x_0,x)|\leqslant\dfrac{M_n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$,$x\in[x_0-\eta,x_0+\eta]$.从而,当我们期望近似值的误差不超过 ε时,只需在不等式

$$\frac{M_n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}<\varepsilon$$

中解出 n是多少,就知道 Talyor 多项式应计算多少项即可.

例如 e 的近似值.此时,在 Talyor 公式中,令 $x_0=0$,$x=1$,我们有

$$|R_n(1)|=\left|\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\right|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

取 $n=8$,则有 $|R_8(1)|<\dfrac{3}{9!}<10^{-5}$.由此可算得

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{8!}\approx 2.71828.$$

而误差不超过 0.00001.

注意,由于对固定的 x,有$\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0(n\to\infty)$.故只要 n取得充分大,就可以算出 e^x 的近似值,而其误差小于预先指定的任意值.

例 5.6.14 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(3)}([-1,1])$,且 $f(-1)=0$,$f(1)=1$,$f'(0)=0$,则存在 $\xi\in(-1,1)$,使得 $f'''(\xi)=3$.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上三次可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi).$$

证明 (1) 作 Taylor 公式

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+f''(0)/2-f'''(\xi_1)/6,\qquad -1<\xi_1<0,$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+f''(0)/2+f'''(\xi_2)/6,\qquad 0<\xi_2<1,$$

由此知 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$.因此 $f'''(x)$在$(-1,1)$上取到最大值 $M\geqslant 3$,最小值

$m\leqslant 3$,从而由中值性可知,存在 $\xi\in(-1,1)$,使得

$$f'''(\xi)=[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]/2=3.$$

(2) 令$\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]/(b-a)^3=A$,作辅助函数($x$ 换 b)

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-A(x-a)^3,$$

易知 $F(b)=0=F(a)$,故存在 $\eta\in(a,b)$,$F'(\eta)=0$.即

$$f'(\eta)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-f''\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}-3A(\eta-a)^2=0.$$

注意到 $\eta=(a+\eta)/2+(\eta-a)/2$,从而应用 Taylor 公式($(\eta+a)/2<\xi<\eta$)

$$\begin{aligned}f'(\eta)&=f'\left(\frac{a+\eta}{2}+\frac{\eta-a}{2}\right)\\&=f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f''\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}+\frac{f'''(\xi)}{2}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

可知前式成为

$$\frac{f'''(\xi)}{2}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2-3A(\eta-a)^2=0,\qquad A=f'''(\xi)/24.$$

例 5.6.15 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-1,1)$上二次可导,且有

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad |f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|,\quad x\in(-1,1),$$

则存在 $\delta>0$,使得 $f(x)=0(-\delta<x<\delta)$.

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$,且有

(i) 存在 $M>0$,使得 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M(x\in(-\infty,\infty),n\in\mathbf{N})$;

(ii) $f(1/n)=0(n=1,2,\cdots)$,

则 $f(x)=0(-\infty<x<\infty)$.

证明 (1) 考察区间$[-1/4,1/4]$上的函数 $|f(x)|+|f'(x)|$,并假定它在 $x_0\in[-1/4,1/4]$点上取到最大值 M.由题设知,$f(x_0)$,$f'(x_0)$在 $x=0$ 处的 Taylor 公式为 $f(x_0)=f''(\xi_0)x_0^2/2$,$f'(x_0)=f''(\eta_0)x_0$,其中 ξ_0 位于 x_0 与 0 之间,η_0 位于 x_0 与 0 之间.从而有

$$\begin{aligned}M&=|f(x_0)|+|f'(x_0)|=|f''(\xi_0)|x_0^2/2+|f''(\eta_0)x_0|\\&\leqslant[|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|]/4\\&\leqslant[|f(\xi_0)|+|f'(\xi_0)|+|f(\eta_0)|+|f'(\eta_0)|]/4\\&\leqslant M/2.\end{aligned}$$

这说明 $M=0$,得证.

(2) 由题设知 $f(0)=0$.从而由 Rolle 定理知,存在$\{x_m^{(0)}\}$,使得

$$\lim_{m\to\infty} x_m^{(0)} = 0, \qquad f'(x_m^{(0)}) = 0 \qquad (m = 1,2,\cdots).$$

现在假定存在$\{x_m^{(k)}\}$,使得$\lim\limits_{m\to\infty} x_m^{(k)}=0$,$f^{(k)}(x_m^{(k)})=0(m=1,2,\cdots)$.则由 Rolle 定理知,存在$\{x_m^{(k+1)}\}$,使得

$$\lim_{m\to 0} x_m^{(k+1)} = 0, \qquad f^{(k+1)}(x_m^{(k+1)}) = 0 \qquad (m = 1,2,\cdots).$$

以上说明 $f^{(n)}(0)=0(n=0,1,2,\cdots)$.于是对 $x\in(-\infty,\infty)$,有

$$|f(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \leqslant \frac{M}{n!}|x|^n \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

由此即可得证.

例 5.6.16 解答下列问题:

(1)求 $I=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi e n!)$.

(2)设 $f\in C^{(3)}(U(0))$,$f'(0)=1$,$f''(0)=0$,$f'''(0)=-1$.若以 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\in\mathbf{N})$定义的数列$\{a_n\}$满足 $a_n\to 0(n\to\infty)$,求$\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$.

解 (1)应用 Taylor 公式,我们有$(0<\theta<1)$

$$\begin{aligned}2\pi e n! &= 2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!}\right)\\ &= N_n\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n\sin(2\pi e n!) &= n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 2\pi\frac{n}{n+1}+o(1)\ (n\to\infty). \quad I = 2\pi.\end{aligned}$$

(2)易知 $f(0)=0$,$f(x)=x+f'''(\theta x)x^3/6$,故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{x^2} &= \frac{x^2-f^2(x)}{x^2f^2(x)} = \frac{x^2-(x+f'''(\theta x)x^3/6)^2}{x^2(x+f'''(\theta x)x^3/6)^2}\\ &= \frac{-f'''(\theta x)x^4/3+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} \qquad (x\to 0).\end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

这说明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(1/a_{k+1}^2-1/a_k^2)/n\to 1/3(n\to\infty)$.注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2}-\frac{1}{a_k^2}\right) = \frac{1}{na_{n+1}^2}-\frac{1}{na_1^2} = \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{(n+1)a_{n+1}^2}-\frac{1}{na_1^2},$$

可得 $na_n^2\to 3(n\to\infty)$.

例 5.6.17 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在$[-1,1]$上二次可导.若有

$$f(-1)=0,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1,$$

则存在 $\xi\in(-1,1)$,使得 $f''(\xi)=1$.

(2) 设 $f(x)$在$[-1,1]$上三次可导.若有

$$f(-1)=f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f'(0)=0,$$

则存在 $\xi\in(-1,1)$,使得 $f'''(\xi)\geqslant 3$.

证明 (1) 应用 Taylor 公式,我们有

$$1=f(1)=f(0)+f'(0)+f''(\xi_1)/2,\qquad 0<\xi_1<1,$$
$$0=f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+f''(\xi_2)/2,\quad -1<\xi_2<0.$$

将上两式相加,得到

$$1=[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]/2,\quad f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2.$$

如果 $f''(\xi_1)=1$ 以及 $f''(\xi_2)=1$,那么结论自然成立.如果 $f''(\xi_1)<1$(或 $f''(\xi_2)<1$),则 $f''(\xi_2)>1$(或 $f'(\xi_1)>1$),那么根据导函数的介值性可知,存在 $\xi\in(-1,1)$,使得 $f''(\xi)=1$.

(2) 应用 Taylor 公式,我们有

$$1=f(1)=f''(0)/2+f'''(\xi_1)/3!,\quad 0<\xi_1<1,$$
$$0=f(-1)=f''(0)/2-f'''(\xi_2)/3!,\quad -1<\xi_2<0.$$

将上两式相减,可得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$.由此即知 $f'''(\xi_1)\geqslant 3$ 或 $f'''(\xi_2)\geqslant 3$.证毕.

注 结论中的等号是可以成立的.例如:$f(x)=(x^3+x^2)/2$.

例 5.6.18 设 $f\in C^{(2)}((0,1))$,且 $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0$.若存在 $M>0$,使得$(1-x^2)|f''(x)|\leqslant M(0<x<1)$,则 $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)f'(x)=0$.

证明 对 $t,x\in(0,1)$:$t>x$,作 Taylor 公式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+f''(\xi)(t-x)^2/2,\qquad x<\xi<t,$$

并取 $t=x+(1-\delta)x(0<\delta<1/2)$,我们有

$$f(t)-f(x)=(t-x)f'(x)+f''(x+\theta(t-x))(t-x)^2.$$

令 $t\to 1-$,则得 $0=\lim\limits_{x\to 1-}[(1-x)f'(x)+\delta f''(x+\theta(1-x))(1-x)^2]$.

由此知,对 $\varepsilon>0$,当 x 从左边充分接近于 1 时,可知

$$\begin{aligned}(1-x)|f'(x)|&\leqslant\varepsilon+|f''(x+\theta(1-x))|(1-x)^2/2\\&\leqslant\varepsilon+M(x-1)^2/2.\end{aligned}$$

由 δ的任意性,即得$(1-x)|f'(x)|\leqslant 2\varepsilon$($x$ 充分接近于 1).

例 5.6.19 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导.若有

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad |f''(x)| \leqslant B, \qquad x \in [0,1],$$

则 $|f'(x)| \leqslant 2A + B/2 (x \in [0,1])$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导,且有 $f(0)=f(1)$, $|f''(x)| \leqslant M (0 \leqslant x \leqslant 1)$, 则 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M}{2} (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导,且 $f(0)=f(1)=0$.若 $\min\limits_{[0,1]}\{f(x)\}=-1$,则 $\max\limits_{[0,1]}\{f''(x)\} \geqslant 8$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上二次可导,且有

$$M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : -\infty < x < \infty\} < +\infty \qquad (k=0,1,2),$$

则 $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.(等号可以成立,例如 $f(x)=2x^2-1 (-1<x<0)$, $f(x)=(x^2-1)/(x^2+1) (0 \leqslant x < \infty)$,则 $M_0=1$, $M_1=M_2=4$.)

(5) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上 m 次可导,且有

$$M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : -\infty < x < \infty\} < +\infty \qquad (k=0,1,\cdots,m; m \geqslant 2),$$

则 $M_k \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m} (k=1,2,\cdots,m-1)$.

证明　(1) 对任一点 $x_0 \in [0,1]$,作 Taylor 公式

$$f(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f''(\xi_1)x_0^2/2, \qquad 0 < \xi_1 < x_0;$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + f''(\xi_2)(1-x_0)^2/2, \qquad x_0 < \xi_2 < 1.$$

由此知 $f(1)-f(0)=f'(x_0)+[f''(\xi_2)(1-x_0)^2 - f''(\xi_1)x_0^2]/2$,故

$$|f'(x_0)| \leqslant |f(1)| + |f(0)| + B[(1-x_0)^2 + x_0^2]/2 \leqslant 2A + B/2.$$

(2) 由于结论涉及任意点 x 上的导数值,故应在点 x 上展开 Taylor 公式.为了利用 $f(0)=f(1)$,0 和 1 点当然就成为展开目标了.由

$$\begin{cases} f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \dfrac{f''(\xi_1)(1-x)^2}{2}, & x < \xi_1 < 1, \\ f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \dfrac{f''(\xi_2)x^2}{2}, & 0 < \xi_2 < x, \end{cases}$$

可知(两式相减) $f'(x)=\dfrac{f''(\xi_2)x^2 - f''(\xi_1)(1-x)^2}{2}$.从而易得 $|f'(x)| \leqslant M/2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

(3) 设 $x_0 \in (0,1)$ 使 $f(x_0)=-1$,则 $f'(x_0)=0$.由 Taylor 公式

$$0 = f(0) = -1 + f''(\xi_1)x_0^2/2, \qquad 0 < \xi_1 < x_0;$$

$$0 = f(1) = -1 + f''(\xi_2)(1-x_0)^2/2, \qquad x_0 < \xi_2 < 1,$$

可得 $f''(\xi_1)=2/x_0^2$; $f''(\xi_2)=2/(1-x_0)^2$.显然有

$$f''(\xi_1) > 8 \quad (x_0 < 1/2); \qquad f''(\xi_2) \geqslant 8 \quad (x_0 \geqslant 1/2),$$

即得所证.

(4) 作 Taylor 公式($h>0$)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x+\theta_1 h)h^2/2,\qquad 0<\theta_1<1,$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+f''(x-\theta_2 h)h^2/2,\qquad 0<\theta_2<1.$$

从而可得

$$f'(x)=[f(x+h)-f(x-h)]/2h-[f''(x+\theta_1 h)-f''(x-\theta_2 h)]h/4.$$

因此我们有$|f'(x)|\leqslant M_0/h+hM_2/2$.取 $h=\sqrt{2M_0/M_2}$即得所证.

(5) $m=2$ 时上题已证得.现采用归纳法:假定对 m 结论成立,我们有

$$f^{(m-1)}(x+h)=f^{(m-1)}(x)+f^{(m)}(x)h+f^{(m+1)}(x+\theta_1 h)h^2/2,$$
$$f^{(m-1)}(x-h)=f^{(m-1)}(x)-f^{(m)}(x)h+f^{(m+1)}(x-\theta_2 h)h^2/2.$$

从而知

$$f^{(m)}(x)=[f^{(m-1)}(x+h)-f^{(m-1)}(x-h)]/2h$$
$$-[f^{(m+1)}(x+\theta_1 h)-f^{(m+1)}(x-\theta_2 h)]h/4.$$

由此可得$|f^{(m)}(x)|\leqslant M_{m-1}/h+M_{m+1}h/2\,(h>0)$.现取 $h=\sqrt{2M_{m-1}/M_{m+1}}$,得 $M_m\leqslant\sqrt{2M_{m-1}M_{m+1}}$.

根据归纳法假设,有 $M_k\leqslant 2^{k(m-k)/2}M_0^{1-k/m}M_m^{k/m}$.以 M_m 的上述估计代入,则得

$$M_k\leqslant 2^{k(m+1-k)/2}\cdot M_0^{1-k/(m+1)}M_{m+1}^{k/(m+1)}.$$证毕.

例 5.6.20 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(3)}(U(x_0))$,且 $f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)\neq 0$,则微分中值公式 $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)(0<\theta<1)$中的 θ满足 $\theta\to\sqrt{1/3}\,(h\to 0)$($\theta$与 h 有关).

(2) 设 $f(x)$在 $U(x_0)$上$(n+1)$次可导,且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$,则在 Taylor 公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n$$

中的 θ满足 $\theta\to 1/(n+1)\,(h\to 0)$($\theta$与 h 有关).

(3) 设 $f\in C^{(3)}(U(x_0))$,且 $f'''(x)\neq 0\,(x\in U(x_0))$.则在 Taylor 公式($\xi=x_0+\theta(x-x_0)$,$0<\theta<1$)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(\xi)(x-x_0)^2/2$$

中的 $\xi=\xi(x)$在 $x=x_0$ 处可导,且 $\xi'(x_0)=1/3$.

(4) 设 $f\in C^{(2)}([0,1])$,$g\in C^{(2)}([0,1])$,$g'(x)\neq 0\,(0<x<1)$,且 $f'(0)g''(0)\neq f''(0)g'(0)$.令$\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$,$0<\xi<x$,则$\dfrac{\xi}{x}\to\dfrac{1}{2}\,(x\to 0+)$.

证明 (1) 由 Taylor 公式

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\theta^2h^2f'''(x_0+\theta_2\theta h)/2,\qquad 0<\theta_2<1,$$
$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h^3f'''(x_0+\theta_1 h)/6,\qquad 0<\theta_1<1,$$

可知 $\theta^2h^3f'''(x_0+\theta_2\theta h)/2=h^3f'''(x_0+\theta_1 h)/6$,以及

$$\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{f'''(x_0+\theta_1 h)}{f'''(x_0+\theta_2\theta h)} \to \frac{1}{3} \quad (h\to 0),\text{证毕}.$$

(2) 将公式 $f(x_0+h)=f(x_0)+\cdots+h^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(x_0)/(n+1)!+o(h^{n+1})$ $(h\to 0)$与题设公式相减,可得

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)}{h}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+\frac{o(h)}{h} \quad (h\to 0).$$

从而有

$$\theta=\left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+\frac{o(h)}{h}\right]\Big/\left[\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)}{\theta h}\right] \quad (h\to 0).$$

令 $h\to 0$,并注意 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$,故 $\theta\to 1/(n+1)(h\to 0)$.

(3) 由 Taylor 公式($\tau=x_0+\theta_1(x-x_0)$)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\tau)}{6}(x-x_0)^3,$$

$$f''(\xi)=f''(x_0)+f'''(\sigma)(\xi-x_0) \quad (\sigma=x_0+\theta_2(\xi-x_0)),$$

可知(与题设公式比较)

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}[f''(x_0)+f'''(\sigma)(\xi-x_0)](x-x_0)^2$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{f'''(\tau)}{6}(x-x_0)^3.$$

从而知 $f'''(\sigma)(\xi-x_0)/2=f'''(\tau)(x-x_0)/6$,即

$$\frac{\xi-x_0}{x-x_0}\left(=\frac{\xi(x)-\xi(x_0)}{x-x_0}\right)=\frac{1}{3}\frac{f'''(\tau)}{f'''(\sigma)}.$$

令 $x\to x_0$,即得 $\xi'(x_0)=1/3$.

(4) 由 Taylor 公式,可知

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(0)x+f''(\xi_1)x^2/2}{g'(0)x+g''(\xi_2)x^2/2} \quad (0<\xi_1,\xi_2<x),$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(0)+\xi f''(\xi_3)}{g'(0)+\xi g''(\xi_4)} \quad (0<\xi_3,\xi_4<\xi).$$

根据题设(上式左端相等),注意 $f''(x)$,$g''(x)$的连续性,可知 $\xi/x\to 1/2(x\to 0)$.

例 5.6.21　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上 $n+1$ 次可导,则对 $x\in(-\infty,\infty)$,存在 $\theta\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x)-\frac{x^2}{2}f''(x)+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}f^{(n)}(x)$$

$$+(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

(2) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上 $2n+1$ 次可导,则对 $x\in(-\infty,\infty)$,存在 $\theta\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(0)+\frac{2}{1!}f'\left(\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}+\frac{2}{3!}f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$$
$$+\frac{2}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}+\frac{2}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\theta x)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

证明 (1) 在 Taylor 展式

$$f(0)=f(x+(-x))=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(-x)+\frac{f''(x)}{2!}(-x)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x-\theta_1x)}{(n+1)!}(-x)^{n+1}\quad(0<\theta_1<1)$$

中令 $\theta=1-\theta_1$ 即可.

(2) 因为我们有

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)+f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)+\cdots+f^{(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}/(2n)!$$
$$+f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}+\frac{\theta_1x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}/(2n+1)!,$$
$$f(0)=f\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)-f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)+\cdots+f^{(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}/(2n)!$$
$$-f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{\theta_2x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\Big/(2n+1)!,$$

所以两式相减,可得

$$f(x)=f(0)+2f'\left(\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}+\frac{2}{3!}f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$$
$$+\frac{2}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$$
$$+\left[f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}+\frac{\theta_1x}{2}\right)+f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{\theta_2x}{2}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\Big/(2n+1)!.$$

现在,用导函数的介值性,结论即可得证.

例 5.6.22 设 $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k(x-k)^n\ (-\infty<x<\infty)$,试证明 $P(x)\equiv 0$.

证明 易知 $P(x)$是至多 n 次多项式.对公式$(1-t)^{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^kt^k$ 求导,可知

$$-(n+1)(1-t)^n=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^kt^{k-1}\cdot k.\qquad(*)$$

令 $t=1$,得 $0=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\cdot k$.由此知 $P^{(n-1)}(0)=0$.对(*)式再求导并令 $t=1$,结合前式可得 $P^{(n-2)}(0)=0,\cdots$,继续此过程,我们有 $P^{(m)}(0)=0(m=0,1,2,\cdots,n-1)$.更有 $P^{(n)}(0)=0$.根据 $0=(1-1)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k$.

依照 Taylor 公式,$P(x)\equiv 0$.

例 5.6.23 解答下列问题:

(1) 试证明 $6+1/12>\sqrt{37}>6+1/12-1/1728$.

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$,且 $f(1/n)=n^2/(n^2+1)(n\in\mathbf{N})$.试求值(i)$f(0)$,(ii)$f'(0)$,(iii)$f''(0)$,(iv)$f'''(0)$,(v)$f^{(4)}(0)$.

解 (1) 将 $f(x)=\sqrt{x}$在 $x=x_0>0$ 处展成 Taylor 公式:

$$\sqrt{x_0+h}=\sqrt{x_0}+h/2\sqrt{x_0}-h^2/8x_0^{3/2}+h^3/16\xi^{5/2}\qquad(h>0,x_0<\xi<x_0+h).$$

易知 $\sqrt{x_0}+h/2\sqrt{x_0}>\sqrt{x_0+h}>\sqrt{x_0}+h/2\sqrt{x_0}-h^2/8x_0^{3/2}$.从而对 $f(x)=\sqrt{37}$,$x_0=36,h=1$,我们有

$$\sqrt{36}+1/2\sqrt{36}>\sqrt{36+1}>\sqrt{36}+1/2\sqrt{36}-1/8\cdot 36^{3/2}.$$

由此即得所证.

(2) (i) 由 f 的连续性可知,$f(0)=\lim_{n\to\infty}f(1/n)=1$.

(ii) 因为 $f'(0)=\lim_{n\to\infty}n[f(1/n)-f(0)]$,所以有

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n^2}{n^2+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1}=0.$$

(iii) 由 $f(1/n)-f(0)-f'(0)/n=f''(\xi_n)/2n^2\ (0<\xi_n<1/n)$可知,$f''(0)=\lim_{n\to\infty}f''(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}2n^2\left(\frac{-1}{n^2+1}\right)=-2$.

(iv) 因为 $f(1/n)-f(0)-f'(0)/n-f''(0)2n^2=f'''(\eta_n)/6n^3\ (0<\eta_n<1/n)$,所以有 $6n^3(-1/(n^2+1)+2/2n^2)=f'''(\eta_n)$.由此可知

$$f'''(0)=\lim_{n\to\infty}f'''(\eta_n)=\lim_{n\to\infty}6n^3/n^2(n^2+1)=0.$$

(v) $f^{(4)}(0)=\lim_{n\to\infty}f^{(4)}(\delta_n)=\lim_{n\to\infty}24n^4\left(\frac{1}{n^2(n^2+1)}-\frac{0}{6n^3}\right)=24$.

5.7 函数和导函数的极限动态

5.7.1 函数的极限动态

设 $f(x)$在(a,∞)上可导.如果只有极限$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=B$存在,那么当 $x\to+\infty$时,$f(x)$不一

定存在极限.例如 $f(x)=\sin(\ln x)(0<x<\infty)$,此时有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(\ln x)}{x}=0$,但不存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

例 5.7.1　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在(a,∞)上可导.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=B>0$,则(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.(ii) $f(x)\sim Bx(x\to+\infty)$.

(2) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导.若存在 $M>0$ 以及 $X>0$,使得 $|f'(x)/x|\leqslant M$ $(x>X)$,则 $|f(x)/x^2|\leqslant M(x>X)$.

证明　(1) (i) 由题设知,存在 $x_0>a$,使 $f'(x)>B/2(x>x_0)$.因此对 $x>x_0$,存在 $x_0<\xi<x$,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)>\frac{B}{2},\qquad f(x)>f(x_0)+\frac{B}{2}(x-x_0).$$

由此得 $f(x)\to+\infty(x\to+\infty)$.

(ii) 根据 L'Hospital 法则,可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=B$.

(2) 由题设知$(x\geqslant X)$

$$\begin{aligned}|f(x)-f(X)|&=|f'(\xi)|(x-X)\\&\leqslant M\cdot\xi(x-X)\leqslant Mx(x-X)\leqslant Mx^2.\end{aligned}$$

5.7.2　导函数的极限动态

设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可导.

(1) 即使存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,也不一定存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.例如,$f(x)=\sin x^2/x\to0(x\to+\infty)$.因为有 $f'(x)=2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}$,所以当 $x\to+\infty$时 $f'(x)$不存在极限.

(2) 设 $f(x)$在$[a,\infty)$上单调有界,$f(x)$可导,不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.例如作 $f(x)$如下:

$$f(n)=1-2^{-n}(n=0,1,2,\cdots),\qquad f(n+1/2)=[f(n)+f(n+1)]/2,$$

而 $f(x)$在$[n,n+1]$上单调可微,且有 $f'(n)=f'(n+1)=0$,$f'(n+1/2)=1$.再令 $f(-x)=f(x)$.

(3) 设 $f(x)$在(a,∞)上可导,且曲线 $y=f(x)$在 $x\to+\infty$时有斜渐近线,但不一定存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.例如,$f(x)=x+\sin x^2/x$,易知其渐近线为 $y=x$.因有 $f'(x)=1+2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}$,所以 $f'(x)$在 $x\to+\infty$时无极限.

此外,$f(x)=x+\ln x$ 在 $x\to+\infty$时无渐近线,但有 $f'(x)=1+1/x\to1(x\to+\infty)$.

例 5.7.2　试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(1)}((a,\infty))$.若 $f'(x)$在(a,∞)上一致连续,且存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上三次可导,且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$.

(3) 设 $f\in C^{(2)}([0,1])$.若有 $f(x)\to0(x\to0+)$,而且存在 x_0:$0<x_0<1$, $M>0$,使得$|x^2f''(x)|\leqslant M(0\leqslant x<x_0)$,则 $xf'(x)=o(1)(x\to0+)$.

(4) 设 $f\in C^{(1)}((a,b))$,且 $f'(x)$在(a,b)上严格单调.若有 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/f'(x)=0$.

(5) 设 $f(x)$在(a,b)上可导,且$\lim\limits_{x\to b-} f(x)=+\infty$,则$\overline{\lim\limits_{x\to b-}} f'(x)=+\infty$.

证明　(1) 反证法.(不妨)假定存在 $\varepsilon_0>0$ 以及$\{x_n\}$:$x_n\to+\infty(n\to\infty)$,使得 $f'(x_n)>\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$.由 $f'(x)$的一致连续性可知,存在 $\delta>0$,使得

$$|f'(x)-f'(x_n)|<\varepsilon_0/2,\qquad |x-x_n|<\delta,$$
$$f'(x_n)-\varepsilon_0/2<f'(x)<f'(x_n)+\varepsilon_0/2,\qquad |x-x_n|<\delta.$$

由此知 $f'(x)>\varepsilon_0/2(|x-x_n|<\delta)$.从而在

$$|f(x_n+\delta/2)-f(x_n)|=|f'(x_n+\theta\delta/2)|\delta/2,\qquad 0<\theta<1$$

中令 $n\to\infty$,上式左端趋于 0(由题设),但右端大于 $\varepsilon_0\delta/4$,矛盾.即得所证.

(2) 考虑 $f(x+1)$, $f(x-1)$在点 x 的 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

$$\begin{cases} f(x+1)=f(x)+f'(x)+\dfrac{1}{2}f''(x)+\dfrac{1}{6}f'''(\xi_1), & x<\xi_1<x+1; \\ f(x-1)=f(x)-f'(x)+\dfrac{1}{2}f''(x)-\dfrac{1}{6}f'''(\xi_2), & x-1<\xi_2<x. \end{cases}$$

两式相加,得 $f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\dfrac{1}{6}[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)]$.两式相减,得

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)].$$

从而知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=2A-2A+0=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(3) 设 $x,\delta\in(0,1)$,则存在 $\xi\in(\delta x,x)$,使得

$$f(\delta x)=f(x)+f'(x)(\delta-1)x+f''(\xi)(\delta-1)^2x^2/2.$$

从而有 $xf'(x)=\dfrac{f(x)-f(\delta x)}{1-\delta}+\dfrac{(1-\delta)}{2}x^2f''(\xi)$.

现在对任给 $\varepsilon>0$,可取 δ接近于 1,使上式右端第 2 项的绝对值小于 $\varepsilon/2$;再取 x 充分小,使第一项的绝对值小于 $\varepsilon/2$,得证.

(4) 假定 $f(x)$严格上升.

(i) 若有 $f'(x_0)\neq0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x-x_0)$$
$$=\frac{f'(x_0)}{f'(x_0)}\cdot 0=0.$$

(ii) 若有 $f'(x_0)=0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$的极小值点,从而

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x-x_0)\right|=0$$

(注意,ξ位于 x_0 与 x 之间,$|f'(\xi)|<|f'(x)|$).

(5) 只需指出存在$\{x_n\}$:$x_n\to b(n\to\infty)$,且 $f'(x_n)\to+\infty(n\to\infty)$,从而只需找到一列割线(曲线 $y=f(x)$之弦),使其斜率趋于$+\infty$.

为此,令 $b-a=l$, $b_n=b-l/n$, 由题设知存在 x_1: $b_1<x_1<b$, $|f(x_1)-f(b_1)|>l$.即存在 ξ_1:$b_1<\xi_1<x_1$,

$$|f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(x_1)-f(b_1)}{x_1-b_1}\right|>\frac{|f(x_1)-f(b_1)|}{l}>1.$$

继续做下去,得$\{x_n\}$:$b_n<\xi_n<x_n<b(n\in\mathbf{N})$,使得对 $n\in\mathbf{N}$ 有

$$|f(x_n)-f(b_n)|>nl,\qquad |f'(\xi_n)|>\frac{|f(x_n)-f(b_n)|}{l}>n.$$

即得所证.

例 5.7.3 试证明下列命题:

(1) 设数列满足$\{a_n\}$:$a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)$,且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\qquad f(x)=x+\alpha\cdot x^k+o(x^k)\qquad(x\to 0),$$

其中 $k>1$,$\alpha=\alpha(x)\to\beta\neq 0(x\to 0)$,则存在 $b>0$,存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n^b=A$.

(2) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上三次可导,且有

$$f(x)>0,\qquad f'(x)>0,\qquad f''(x)>0\qquad(x>0).$$

若存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)f'''(x)/[f''(x)]^2=l$,$l\neq 1$,则存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)f''(x)/[f'(x)]^2=1/(2-l).$$

证明 (1) 因为我们有

$$\frac{1}{a_{n+1}^b}-\frac{1}{a_n^b}=\frac{a_n^b-a_{n+1}^b}{a_n^b a_{n+1}^b}=\frac{a_n^b-(a_n+\alpha\cdot a_n^k+o(a_n^k))^b}{a_n^b(a_n+\alpha\cdot a_n^k+o(a_n^k))^b}$$
$$=\frac{a_n^b-(a_n^b+b\alpha\, a_n^{b+k-1}+o(a_n^{b+k-1}))}{a_n^b\cdot(a_n^b+b\alpha\, a_n^{b+k-1}+o(a_n^{b+k-1}))}$$
$$=\frac{-b\alpha\, a_n^{b+k-1}+o(a_n^{b+k-1})}{a_n^{2b}+b\alpha\, a_n^{2b+k-1}+o(a_n^{2b+k-1})}\qquad(n\to\infty),$$

所以在 $b=k-1$ 时,可得极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^b}-\frac{1}{a_n^b}\right)=-b\beta$.由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}^{b}}-\frac{1}{a_{k}^{b}}\right)=-b\beta,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}^{b}}-\frac{1}{a_{1}^{b}}\right)=-b\beta,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_{n+1}^{b}}=-b\beta,\qquad \lim_{n\to\infty}n\cdot a_{n}^{b}=\frac{-1}{b\beta}.$$

从而取 $b=k-1$,$A=-1/b\beta$ 即得所证.

(2) 首先,我们有 $f'(x)/xf''(x)\to 1-l(x\to+\infty)$. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{f'(x)}{xf''(x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-f'(x)/f''(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(f'(x)/f''(x))'}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=l.$$

其次,注意到 $l<1$,故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf''(x)/f'(x)=1/(1-l)$.由

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(\xi)h^2/2\qquad (h>0),$$

可知 $f(x)\to+\infty(x\to+\infty)$.从而我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)}=1+\frac{1}{1-l}.$$

最后得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\frac{1}{2-l}.$$

例 5.7.4 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(2)}((0,\infty))$,且 $f(x)>0(x\in(0,\infty))$.若有

$$f'(x)\leqslant 0,\qquad |f''(x)|\leqslant M\qquad (x\in(0,\infty)),$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(2) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上二次可导.若存在 $\alpha\in\mathbf{R}$,使得

$$\text{(i)}f(x)=o(x^{\alpha});\text{(ii)}f''(x)=O(x^{\alpha-2})\left(x\to\begin{cases}0+\\+\infty\end{cases}\right).$$

则 $f'(x)=o(x^{\alpha-1})\left(x\to\begin{cases}0+\\+\infty\end{cases}\right)$.

证明 (1) 由题设易知存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\xi$.故对任意的 $h>0$,均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+h)-f(x)]/h=0$,此外,由等式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{1}{2}hf''(\xi),\qquad x<\xi<x+h,$$

又可得 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}h\cdot\sup\limits_{(x,x+h)}\{f''(\xi)\}$.再令 $h\to0$,即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

(2) 设 δ:$0<\delta<1$,则对 $x>0$,有展式$(0<\theta<1)$

$$f(x\pm\delta x)=f(x)\pm f'(x)\delta x+\delta^2x^2f''(x+\theta\delta x)/2.$$

由题设(ii)知,存在 $M>0$,使得

$$|f''(x+\theta\delta x)|\leqslant M(1\pm\theta\delta)^{\alpha-2}x^{\alpha-2}$$
$$\leqslant\begin{cases}Mx^{\alpha-2}(1+\delta)^{\alpha-2}, & \alpha\geqslant 2,\\ Mx^{\alpha-2}(1-\alpha)^{\alpha-2}, & \alpha\leqslant 2.\end{cases}$$

从而当 $x\to 0+$ 或 $+\infty$ 时,我们有

$$-\frac{1}{2}M\delta(1+\delta)^{\alpha-2}\leqslant\varliminf_{x\to 0+,+\infty}x^{1-\alpha}f'(x)$$
$$\leqslant\varlimsup_{x\to 0+,+\infty}x^{1-\alpha}f'(x)\leqslant\frac{1}{2}M\delta(1-\delta)^{\alpha-2}\ (\alpha\geqslant 2),$$
$$-\frac{1}{2}M\delta(1-\delta)^{\alpha-2}\leqslant\varliminf_{x\to 0+,+\infty}x^{1-\alpha}f'(x)$$
$$\leqslant\varlimsup_{x\to 0+,+\infty}x^{1-\alpha}f'(x)\leqslant\frac{1}{2}M\delta(1-\delta)^{\alpha-2}\ (\alpha\leqslant 2).$$

由此,导出 $\lim\limits_{x\to\begin{cases}0\\+\infty\end{cases}}x^{1-\alpha}f'(x)=0$.

例 5.7.5 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微.若存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a,\qquad\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=b,$$

则 $b=0$.

(2) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上具有连续导函数,且有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty,$$

则 $F(x)=\sin[f(x)]$不是周期函数.

证明 (1) 对正整数 n,N:$n<N$,作$[n,N]$上函数 $F(x)=xf(x)$,则由中值定理可知,存在 $\xi_n\in(n,N)$,使得

$$F'(\xi_n)=[Nf(N)-nf(n)]/(N-n).$$

因为根据题设可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{Nf(N)-nf(n)}{N-n}=\lim_{N\to+\infty}\frac{f(N)-nf(n)/N}{1-n/N}=a,$$

所以对充分大的 n,必有 $|F'(\xi_n)-a|<1/n$.注意到 $\xi_n\to+\infty(n\to\infty)$,以及 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$,可知存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=a+b$.再注意到$\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F'(\xi_n)=a$,即得 $b=0$.

(2) 反证法.假定 $F(x)=\sin[f(x)]$是周期的,那么 $F'(x)=f'(x)\cos f(x)$也是周期函数.从而知 $F'(x)$是有界函数($f'(x)$连续).现在考察数列 $a_n=2n\pi(n\in$

N),由于 $f(x)$连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,故存在 n_0,使得当 $n\geqslant n_0$ 时,存在 x_n,使得 $f(x_n)=a_n$.注意 $x_n\to+\infty(n\to\infty)$,故有

$$\lim_{n\to\infty} F'(x_n)=\lim_{n\to\infty}[f'(x_n)\cdot\cos f(x_n)]=+\infty.$$

这与 $F(x)$的有界性矛盾.

5.8 广义中值公式

例 5.8.1(广义 Cauchy 型) 设 $f\in C^{(n)}([a,b])$,且在(a,b)上 $f^{(n+1)}(x)$存在,则对任意的 $x_0,x\in[a,b]$以及任意自然数 p,存在 $\theta\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

证明 设 $x_0<x$,考察$[x_0,x]$上的函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],$$

$$F(x_0)=R_n(x),\quad F(x)=0,\quad F'(t)=-f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!.$$

根据 Cauchy 中值公式,有($G(x)$后定)

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},\qquad x_0<\xi<x,$$

$$R_n(x)=\frac{G(x)-G(x_0)}{G'(\xi)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

取 $G(t)=(x-t)^p$,并记 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$,则得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

例 5.8.2 (广义 Taylor 中值公式) 设 $f\in C^{(n-1)}([a,b])$,$g\in C^{(n-1)}([a,b])$,且都在(a,b)上有 n 阶导数,$x_0\in[a,b]$,则对$[a,b]$中的任意的 $x\neq x_0$,存在 x 与 x_0 之间的 ξ,使得

$$\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]g^{(n)}(\xi)$$
$$=f^{(n)}(\xi)\left[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right].$$

(取 $g(x)=(x-x_0)^n$,$g^{(k)}(x_0)=0(k\leqslant n-1)$,$g^{(n)}(x_0)=n!$,即 Taylor 公式.)

证明 不妨假设 $x_0<x$,$x_0<b$.取定 x,作

$$\left.\begin{aligned}F(t)&=f(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\\G(t)&=g(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\end{aligned}\right.\quad t\in[x_0,x],$$

则 $F,G\in C([x_0,x])$，且都在(x_0,x)上可导.由此知

$$F'(\xi)[G(x)-G(x_0)]=G'(\xi)[F(x)-F(x_0)],\qquad \xi\in(x_0,x).$$

$$F'(\xi)[g(x)-G(x_0)]=G'(\xi)[f(x)-F(x_0)],$$

求导得 $F'(t)=\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)$，$G'(t)=\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)$，令 $\xi=t$，代入前式即得所证.

例 5.8.3(广义 Taylor 中值公式)　设 $f\in C^{(n-1)}([a,b])$，$g\in C^{(n-1)}([a,b])$，且都在(a,b)上有 n 阶导数，$x_0\in[a,b]$，则对$[a,b]$中的任意的 $x\neq x_0$，存在 x 与 x_0 之间的 ξ，使得

$$\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]g^{(n)}(\xi)$$

$$=f^{(n)}(\xi)\left[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right].$$

(取 $g(x)=(x-x_0)^n$，$g^{(k)}(x_0)=0(k\leqslant n-1)$，$g^{(n)}(x_0)=n!$，即 Taylor 公式.)

证明　不妨假设 $x_0<x$，$x_0<b$.取定 x，作

$$\left.\begin{aligned}F(t)&=f(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\\G(t)&=g(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\end{aligned}\right.\quad t\in[x_0,x],$$

则 $F,G\in C([x_0,x])$，且都在(x_0,x)上可导.由此知

$$F'(\xi)[G(x)-G(x_0)]=G'(\xi)[F(x)-F(x_0)],\qquad \xi\in(x_0,x).$$

$$F'(\xi)[g(x)-G(x_0)]=G'(\xi)[f(x)-F(x_0)],$$

求导得 $F'(t)=\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)$，$G'(t)=\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)$，令 $\xi=t$，代入前式即得所证.

第 6 章　微分的逆运算——不定积分

6.1　原函数与不定积分的概念

定义 6.1.1　设 $f(x)$定义在区间 I上.若存在一个在 I上可微的函数 $F(x)$,使得 $F'(x)=f(x)$, $x\in I$; $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$, $x\in I$,则称 $F(x)$是 $f(x)$(在 I上的)一个**原函数**.

显然,若 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I上的原函数,则对任一常数 C, $F(x)+C$也是 $f(x)$的原函数.因此, $f(x)$有无穷多个原函数.同时易知, $f(x)$的任两个原函数之间只相差一个常数.这样, $f(x)$的一切原函数可由其中一个原函数 $F(x)$写出: $F(x)+C$(C是任意一个常数).

定义 6.1.2　设 $f(x)$在区间 I上有原函数存在,则记原函数的一般表达式为

$$\int f(x)\mathrm{d}x,\qquad x\in I,$$

并称它为 $f(x)$在 I上的**不定积分**,表达式中的 $f(x)$称为**被积函数**.

由此和前面的讨论可知,如果 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I上的一个原函数,那么

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\qquad x\in I.$$

这里 C表示任意常数,并称为积分常数.因此,不定积分并不只是一个函数,而是表示一族函数,即原函数的全体,且有性质:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x),\qquad x\in I.$$

注 1　从导函数具有介值性可知,不是任何一个函数都有原函数存在的.例如,符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

在点 $x=0$处有第一类间断,故它在$(-\infty,\infty)$上不存在原函数.

但从定积分的理论可以证明,连续函数必存在原函数(参阅本书第二册).

注 2　设 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $F'(x)=f(x)$是间断函数.

注 3　设 $f(x)$在区间 I上有原函数 $F(x)$.若原函数 $F(x)$是初等函数,则常称 $f(x)$是初等可积的.

表 6.1 部分初等函数积分表

$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq -1$	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\mid x\mid+C$
$\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$	$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C,a>0,a\neq 1$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln\mid\cos x\mid+C$	$\int \cot x\,\mathrm{d}x=\ln\mid\sin x\mid+C$
$\int \sec^{2}x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$	$\int \csc^{2}x\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln\mid x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\mid+C$
$\int \sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^{2}-x^{2}}+a^{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \sqrt{x^{2}+a^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^{2}+a^{2}}+a^{2}\ln(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}})\right)$	
$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^{2}+b^{2}}(a\cos bx+b\sin bx)$	$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^{2}+b^{2}}(a\sin bx-b\cos bx)$

例 6.1.1 求下列函数 $f(x)$的不定积分：

(1) $f(x)=|x|$.　　(2) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

(3) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}$.　　(4) $f(x)=[\sin x+\cos x]\mathrm{e}^{x}$.

解 (1) 因为$\left(\frac{x\mid x\mid}{2}\right)'=\mid x\mid$,所以$\int\mid x\mid\mathrm{d}x=\frac{x\mid x\mid}{2}+C$.

(2) 因为$(2\sqrt{\sin x})'=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$,所以$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{\sin x}+C$.

(3) 因为$\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=[\ln(1-\mathrm{e}^{-x})]'$,所以$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}-1}=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})+C$.

(4) 因为$(\sin x\cdot\mathrm{e}^{x})'=(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^{x}$,所以$\int(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\sin x\cdot\mathrm{e}^{x}+C$.

例 6.1.2 求下列函数 $f(x)$的不定积分：

(1) $f(x)=|1+x|-|1-x|$.　　(2) $f(x)=(2x-3)|x-2|$.

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$.　　(4) $f(x)=\max(1,x^{2})$.

解 (1) 注意到$(x|x|/2)'=|x|$,故有

$$\left(\frac{(1+x)\mid 1+x\mid}{2}\right)'=\mid 1+x\mid,\qquad\left(\frac{(1-x)\mid 1-x\mid}{2}\right)'=-\mid 1-x\mid.$$

由此知$\int[|1+x|-|1-x|]\mathrm{d}x=\dfrac{(1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|}{2}+C$.

(2) 注意到$(2x-3)|x-2|=2(x-2)|x-2|+|x-2|$,以及$\left(\dfrac{|x|^3}{3}\right)'=x|x|$,故$\int(2x-3)|x-2|\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}|x-2|^3+\dfrac{1}{2}(x-2)|x-2|+C$.

(3) 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^x$,故 $F(x)=\mathrm{e}^x+C$;当 $x<0$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,故 $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}+C'$.因为存在极限$\lim\limits_{x\to 0-}F(x)=F(0)$,所以 $C'=2+C$.从而得

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+C, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^{-x}+2+C, & x<0.\end{cases}$$

(4) 当$|x|\leqslant 1$ 时,$f(x)=1$,故 $F(x)=x+C$;当$|x|>1$ 时,$f(x)=x^2$,故 $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C_i'(i=1,2)$.注意到$\lim\limits_{x\to 1+}F(x)=1+C_1'$,$\lim\limits_{x\to -1-}F(x)=-1+C_2'$.从而知

$$F(x)=\begin{cases}x+C, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2\operatorname{sgn}x}{3}+C, & |x|>1.\end{cases}$$

例 6.1.3 解答下列问题:

(1) 求满足方程 $f'(x^2)=1/x(x\in(0,\infty))$之 $f(x)$.

(2) 求满足 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<\infty\end{cases}$之 $f(x)$.

(3) 求满足方程 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$ 之 $f(x)$.

(4) 设 $f(\mathrm{e}^x)=1+x(0\leqslant x<\infty)$.若 $f[\varphi(x)]=1+x+\ln x$,求 $\varphi(1)$之值.

解 (1) 令 $x^2=t$,则 $f'(t)=1/\sqrt{t}$.从而我们有

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$

(2) 令 $x=\mathrm{e}^t$,则有

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^t, & 0<t<\infty.\end{cases}\qquad f(t)=\begin{cases}t+C', & -\infty<t\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^t+C, & 0<t<\infty.\end{cases}$$

由此易知 $f(x)=\begin{cases}x+C+1, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C, & 0<x<\infty.\end{cases}$

(3) 令 $\sin^2 x=t$,则有 $f'(t)=1-2t+\dfrac{t}{1-t}=-2t+\dfrac{1}{1-t}$,故

$$f(t)=\int\left[-2t+\frac{1}{1-t}\right]\mathrm{d}t=-t^2-\ln(1-t)+C.$$

(4) 令 $x=\ln t$,则 $f(t)=1+\ln t$.我们有

$$f[\varphi(t)]=1+\ln\varphi(t)=1+t+\ln t\qquad(t\geqslant 1).$$

由此知 $\ln\varphi(t)=t+\ln t$,即 $\varphi(t)=t\cdot e^t$,$\varphi(1)=e$.

例 6.1.4 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可微,$g(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微.

(1) 若有$\begin{cases} xf'(x^2)+g'(x)=\cos x-3x^3, & ① \\ f(x^2)+g(x)=\sin x-x^4, & ② \end{cases}$试求 $f(x)$,$g(x)$.

(2) 若对 $x>0$,有

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=x+1, & ③ \\ f'(x)-g'(x)=0, & ④ \\ f'(2x)+g'(-2x)=1-12x^2, & ⑤ \end{cases}$$

试求 $f(x)$,$g(x)$.

解 (1) 在②式两端对 x 求导,我们有

$$2xf'(x^2)+g'(x)=\cos x-4x^3. \qquad ②'$$

则②'-①可得 $xf'(x^2)=-x^3$,即 $f'(x^2)=-x^2$.令 $t=x^2$,可知 $f'(t)=-t$,即 $f(t)=-t^2/2+C$.从而 $g(x)=\sin x-x^4/2-C$.

(2) 由③知 $f'(x)+g'(x)=1$,结合④可得

$$f(x)=\frac{x}{2}+C,\qquad g(x)=\frac{x}{2}+1-C\quad(x>0).$$

由⑤知 $g'(-2x)=1/2-12x^2(x>0)$,即

$$g'(2x)=\frac{1}{2}-12x^2\quad(x<0),\qquad g'(t)=\frac{1}{2}-3t^2\quad(t<0).$$

从而知 $g(t)=t/2-t^3+C'(t<0)$.最后得

$$f(x)=\frac{x}{2}+C,\qquad g(x)=\begin{cases} x/2+C, & x>0, \\ x/2-x^3+C, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

例 6.1.5 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$是定义在$(0,\infty)$上的正值函数,且有原函数 $F(x)$.若满足关系式 $2xF(x)=f(x)(x>0)$.试求 $f(x)$.

(2) 设$\int g(x)dx=G(x)+C$,且有正值函数 $f(x)$,它满足$\int g(x)f(x)dx=2x+C$,试求$\int\frac{dx}{f(x)}$.

(3) 设 $f''(x)=af(x)$,$g''(x)=bg(x)(a\neq b)$,试证明

$$\int f(x)g(x)dx=\frac{1}{a-b}[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]+C.$$

(4) (反函数的不定积分) 设 $f(x)$具有可微的反函数 $f^{-1}(x)$.设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,试证明$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C$.

解 (1) 由 $F'(x)=f(x)$,可知原式可化为

$$2xF(x)=F'(x),\qquad 2x=\frac{F'(x)}{F(x)}=(\ln F(x))'.$$

从而可得$\int 2x\,dx=\int(\ln F(x))'dx$，$x^2+C'=\ln F(x)$. 由此知 $F(x)=Ce^{x^2}$ ($C>0$)，故 $f(x)=F'(x)=2Cxe^{x^2}$.

(2) 由题设知 $g(x)f(x)=2$，即$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{g(x)}{2}$，故

$$\int\frac{dx}{f(x)}=\int\frac{g(x)}{2}dx=\frac{G(x)}{2}+C.$$

(3) 在公式右端对 x 求导，即可得证.

(4) 在公式右端对 x 求导，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\{xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C\}\\&=f^{-1}(x)+x\cdot\frac{df^{-1}(x)}{dx}-f[f^{-1}(x)]\frac{df^{-1}(x)}{dx}\\&=f^{-1}(x)+x\frac{df^{-1}(x)}{dx}-x\frac{df^{-1}(x)}{dx}=f^{-1}(x).\end{aligned}$$ 证毕.

例 6.1.6 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$在$[a,b]$上递增. 若 $f(x)$有原函数，试证明 $f\in C([a,b])$.

(2) 设 $F'(x)=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$.

(i) 若 $f(x)$是周期函数，试问 $F(x)$是周期函数吗？

(ii) 若 $f(x)$是奇函数，试问 $F(x)$是偶函数吗？

(3) 设 $f(x)$定义在(a,b)上，$a<c<b$，且有 $F_1'(x)=f(x)$ $(a<x<c)$；$F_2'(x)=f(x)$ $(c<x<b)$；$\lim\limits_{x\to c-}F_1(x)=A$，$\lim\limits_{x\to c+}F_2(x)=B$. 若 $f(x)$在 $x=c$ 处连续，试证明 $f(x)$在(a,b)上存在原函数.

解 (1) 由题设知，$f(x)$的间断点必是第一类间断点，而 $f(x)$有原函数必无第一类间断点，故 $f\in C([a,b])$.

(2) (i)不一定. 例如 $F(x)=\sin x+x$，而 $f(x)=F'(x)=\cos x+1$ 是周期的.

(ii) 是的.

(3) 作函数 $F(x)$如下：

$$F(x)=\begin{cases}F_1(x), & a<x<c,\\ A, & x=c,\\ F_2(x)-B+A, & c<x<b.\end{cases}$$

易知 $F(x)$在 $x=c$ 处连续，由 $f(x)$在 $x=c$ 处连续可知$\lim\limits_{x\to c-}F'(x)=\lim\limits_{x\to c+}F'(x)$，故根据导函数的特征，即知 $F'(c)$存在且等于 $f(c)$. 这说明 $F(x)$是 $f(x)$在(a,b)上的原函数.

例 6.1.7　试证明下列命题：

(1)(函数方程)　设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的可微函数,且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\qquad x,y\in(-\infty,\infty),$$

则 $f(x)=x^2+f'(0)x$.

(2)设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,且 $f(a)=f(b)=0$,则对在$[a,b]$上任一连续函数 $\varphi(x)$,有 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)+\varphi(\xi)f(\xi)=0$.

证明　(1)取 $x=y=0$,可得 $f(0)=2f(0)$,即 $f(0)=0$.将原式改写为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x,\qquad y\neq 0,$$

可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}+2x\\&=2x+f'(0).\end{aligned}$$

由此知$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int[2x+f'(0)]\mathrm{d}x=x^2+f'(0)\cdot x+C$,即 $f(x)$的一般表达式为 $f(x)=x^2+f'(0)x+C$.

因为当 $x=0$ 时,$f(0)=0$,所以有 $C=0$.可知 $f(x)=x^2+f'(0)x$.

(2)因为 $\varphi(x)$连续,所以存在原函数,用符号$\int\varphi(x)\mathrm{d}x$ 记之,则作

$$F(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}\cdot f(x).$$

依题设易知:$F\in C([a,b])$且在(a,b)上可微.又 $F(a)=F(b)=0$,从而根据 Rolle 定理,一定存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}[f'(\xi)+\varphi(\xi)f(\xi)]=0$.由此立即推出 $f'(\xi)+\varphi(\xi)f(\xi)=0$.

例 6.1.8　解答下列问题：

(1)设多项式 $P(x)$满足:对任一多项式 $Q(x)$,均有 $P[Q(x)]=Q[P(x)]$,试证明 $P(x)\equiv x$.

(2)设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可导.若有 $f'\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(x\neq y)$,试证明 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(3)设 $f\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$且不恒为零.若有

$$\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0,\qquad f(x)f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})\qquad (x,y\in(-\infty,\infty)),$$

试证明(i) $f(0)=1$,$f(x)$是偶函数.(ii)求 $f(x)$的表达式.

解　(1)取 $Q(x)=x+h$,则依题设可知

$$P(x+h)=P(x)+h\qquad (x\in(-\infty,\infty),h\neq 0).$$

从而得$[P(x+h)-P(x)]/h=1$.令 $h\to 0$,我们有 $P'(x)=1$,$P(x)=x+C$.因为

$x=0$ 时,易知 $P(0)=0$,所以 $C=0$.证毕.

(2) 以 $x+y$,$x-y$ 替换 y,x,可得 $f'(x)=[f(x+y)-f(x-y)]/2y$.在上式两端对 y 求导,我们有

$$y[f'(x+y)+f'(x-y)]-[f(x+y)-f(x-y)]=0.$$

再对 y 求导,有

$$f'(x+y)+f'(x-y)+y[f''(x+y)-f''(x-y)] -[f'(x+y)+f'(x-y)]=0.$$

由此可知 $f''(x+y)=f''(x-y)$.从而得到 $f''(2x)=f''(0)$,$f''(x)=f''(0)$.因此,$f(x)=ax^2+bx+c$.

(3) (i) 设 $f(x_0)\neq 0(x_0>0)$,则 $f(x)f(x_0)=f(\sqrt{x^2+x_0^2})=f(-x)f(x_0)$.故 $f(x)=f(-x)$,$f(x)$是偶函数.此外,由 $f(0)f(x_0)=f(x_0)$可知 $f(0)=1$.

(ii) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,则在 $f(x)f(y)=f(r)$中对 y 求导,可知 $f(x)f'(y)=f'(r)r'_y$.再对 y 求导知

$$f(x)f''(y)=f''(r)(r'_y)^2+f'(r)\cdot r''_{yy}.$$

因为 $r'_y=y/r$,$r''_{yy}=x^2/r^3$,所以(取 $y=0$)

$$f'(x)=f''(0)xf(x),\qquad f'(x)/f(x)=f''(0)x.$$

由此即得 $f(x)=e^{f''(0)x^2/2}$.注意到 $f(x)\to 0(|x|\to\infty)$,我们有 $f''(0)/2=-\alpha<0$ $(\alpha>0)$.最后得 $f(x)=e^{-\alpha x^2}$.

* **例 6.1.9**　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上二次可导,且有

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)\qquad(x,y\in\mathbf{R}),$$

试求 $f(x)$.

(2) 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,$g(x)$在 $x=0$ 处可导,又有

$$f(x+y)=f(x)+\frac{f(y)g(x)}{1-f(x)f(y)},\tag{*}$$

$$g(x+y)=\frac{g(x)g(y)}{1-f(x)f(y)},\tag{**}$$

试求 $f(x)$,$g(x)$.

解　(1) 在公式中令 $x=y=0$,可知 $f(0)=0$.在公式两端对 x 求导,可得

$$2f(x)f'(x)=f'(x+y)f(x-y)+f(x+y)f'(x-y).$$

再对 y 求导,又有 $0=f''(x+y)f(x-y)-f(x+y)f''(x-y)$.若以$(u+v)/2$ 代 x,$(u-v)/2$ 代 y,后一式变为

$$f''(u)f(v)=f(u)f''(v).$$

假定存在 v_0,使得 $f(v_0)\neq 0$,那么上式又可写为

$$f''(u)=\lambda f(u)\qquad(\lambda=f''(v_0)/f(v_0)).$$

不难推知此方程有解(注意 $f(0)=0$)

$$f(u)=\begin{cases} C\sin(ku), & \lambda>0\text{ 且 }\lambda=k^2, \\ Cu, & \lambda=0, \\ C\sin(ku), & \lambda<0\text{ 且 }\lambda=-k^2. \end{cases}$$

(2) 在公式(*),(**)中令 $y=0$,可知

$$f(x)=f(x)+\frac{f(0)g(x)}{1-f(x)f(0)},\qquad g(x)=\frac{g(x)g(0)}{1-f(x)f(0)}.$$

由此出现两种情形:$g(x)=0(x\in\mathbf{R})$或 $f(0)=0,g(0)=1$.

若 $g(x)=0$,则由式(*)知 $f(x+y)=f(x)$,即 $f(x)\equiv C$.

若 $f(0)=0,g(0)=1$,则由式(*)知

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y}\,\frac{g(x)}{1-f(x)f(y)}.$$

由此又可得$(y\to 0)f'(x)=f'(0)g(x)$.此外,从(**)式可导出 $g'(x)=[f'(0)f(x)+g'(0)]g(x)$.在上两式中消去 $g(x)$,且记 $F(x)=f'(0)f(x)+g'(0)$,则得 $F''(x)=F(x)F'(x)$.易知有解 $F(x)=2A\tan(Ax+B)$.由此就有 $g'(0)=F(0)=2A\tan(B)$.注意到$[f'(0)]^2=F'(0)=2A^2/\cos^2 B$,则导出

$$f(x)=\frac{F(x)-g'(0)}{f'(0)}=\sqrt{2}\,\frac{\sin(Ax)}{\cos(Ax+B)},\qquad g(x)=\frac{\cos^2 B}{\cos^2(Ax+B)}.$$

代入原方程又有 $A=0$.因此

$$f(x)=C,\quad g(x)=0;\quad f(x)=0,\quad g(x)=1\quad(x\in\mathbf{R}).$$

解为 $f(x)=0,g(x)=a^x(x\in\mathbf{R})$.

6.2 积分法法则

6.2.1 不定积分运算的初等性质

相应于求导运算的可加性关系$(F_1(x)+F_2(x))'=F_1'(x)+F_2'(x)$,可得下述结论.

性质 6.2.1 设 $f_1(x),f_2(x)$在区间 I上有原函数存在,则 $f_1(x)+f_2(x)$在 I上也存在原函数,且有$\int[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x,x\in I$.

相应于求导运算的数乘关系$[kF(x)]'=kF'(x)$,可得下述结论.

性质 6.2.2 设 $f(x)$在区间 I上有原函数存在,$k\in(-\infty,\infty)$,则 $kf(x)$也存在原函数,且 $k\neq 0$ 时有$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,x\in I$.

性质 6.2.3 若$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则$\int f(x+l)\mathrm{d}x=F(x+l)+C$.

性质 6.2.4 设 $f(x)$在区间 I上可微,$f(x)\neq 0(x\in I)$,则

(i)$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$.

(ii)若 $f(x)>0(x\in I)$,则$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2\sqrt{f(x)}+C,\int\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(x)+C$.

例 6.2.1　试求下列不定积分：

(1) $I=\int\dfrac{dx}{3x^2+3x-1}$.　(2) $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{3x^2+3x-1}}$.　(3) $I=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+7}$.

解　(1) 将被积函数整型，并应用积分表，可得

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2-7/12}=\frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{7/12}}\ln\left|\frac{x+1/2-\sqrt{7/12}}{x+1/2+\sqrt{7/12}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}(2x+1)-\sqrt{7}}{\sqrt{3}(2x+1)+\sqrt{7}}\right|+C.$$

(2) 将被积函数整型，并对照积分表，可知

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1/2)^2-7/12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{12}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\left|\sqrt{3}(2x+1)+2\sqrt{3x^2+3x-1}\right|}{2\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}(2x+1)+2\sqrt{3x^2+3x-1}\right|+C.$$

(3) 将被积函数整型，并对照积分表，可得

$$I=\int\frac{dx}{(x-5/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-5/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-5}{\sqrt{3}}+C.$$

例 6.2.2　试求下列不定积分：

(1) $I=\int\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}dx\,(a>0)$.　　(2) $I=\int\dfrac{\ln x+1}{1+x\ln x}dx$.

(3) $I=\int\dfrac{\sin 2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos x}dx\,(a^2\neq b^2)$.　(4) $I=\int\dfrac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$.

(5) $I=\int(3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}\,dx$.

解　(1) 注意到 $(a^x+a^{-x})'=(a^x-a^{-x})\ln a$，因此有

$$I=\frac{1}{\ln a}\int\frac{(a^x+a^{-x})'}{a^x+a^{-x}}dx=\frac{\ln(a^x+a^{-x})}{\ln a}+C.$$

(2) 注意到 $(x\ln x)'=\ln x+1$，因此有

$$I=\int\frac{(1+x\ln x)'}{1+x\ln x}dx=\ln|1+x\ln x|+C.$$

(3) 注意到 $(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)'=(a^2-b^2)\sin 2x$，因此可得

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)'}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)+C.$$

(4) 改写被积函数为

$$\frac{x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}}=\frac{-2-2x}{-2\sqrt{2-2x-x^2}}+\frac{-2}{\sqrt{3-(x+1)^2}},$$

则应用性质 6.2.4,我们有

$$I=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2-2x-x^2}-2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(5) 改写被积函数为

$$(3x-1)\sqrt{3x^2-2x+7}=\frac{1}{2}(6x-2)\sqrt{3x^2-2x+7},$$

则应用性质 6.2.4,我们有

$$I=\frac{1}{2}\int(6x-2)\sqrt{3x^2-2x+7}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}(3x^2-2x+7)^{3/2}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(3x^2-2x+7)^3}+C.$$

例 6.2.3　试求下列不定积分:

(1) $I=\int(\tan x-\sec x)^2\,dx$.　　(2) $I=\int\sin^4 x\,dx$.

(3) $I=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$.　　(4) $I=\int(e^x+e^{-2x})^3\,dx$.

(5) $I=\int\sin mx\cdot\cos nx\cdot dx$.　　(6) $I=\int(e^x-e^{-x})\sin x\,dx$.

解　(1) 改写被积函数,可得

$$I=\int(\tan^2 x+\sec^2 x-2\tan x\cdot\sec x)dx$$

$$=\int\left(2\sec^2 x-1-2\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=2\int\sec^2 x\,dx-\int 1\,dx-\int\left(\frac{2}{\cos x}\right)'dx$$

$$=2\tan x-x-\frac{2}{\cos x}+C.$$

(2) 应用公式 $2\sin^2 x=1-\cos 2x$,$2\cos^2 x=1+\cos 2x$,则有

$$4\sin^4 x=1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}.$$

从而得

$$I=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-2\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

(3) 改写被积函数为 $\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}=\sec^2 x-2+\frac{1+\cos 2x}{2}$,则有

$$I=\tan x-\frac{3}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

(4) 展开被积函数,我们有

$$I=\int(e^{3x}+3+3e^{-3x}+e^{-6x})dx=\frac{e^{3x}}{3}+3x-e^{-3x}-\frac{e^{-6x}}{6}+C.$$

(5) 应用公式 $\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$,则有

$$I=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right\}+C\qquad(n\neq\pm m),$$

$$I=-\cos 2mx/4m+C\qquad(n=\pm m).$$

(6) 应用求导公式

$$[e^x(\sin x-\cos x)]'=2e^x\sin x,\qquad[e^{-x}(-\sin x-\cos x)]'=2e^{-x}\sin x,$$

$$I=\int e^x\sin x\,dx-\int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\{e^x\sin x-e^x\cos x+e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\}+C.$$

例 6.2.4　试求下列不定积分:

(1) $I=\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.　　(2) $I=\int\frac{dx}{x(x^n+1)}$.

解　(1) 改写被积函数为

$$\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$

$$=\sqrt{x}(x+1)-x\sqrt{x+1}$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}},$$

则得 $I=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx+\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$,即

$$I=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2) 注意 $1=x^n+1-x^n$,故

$$I=\int\frac{x^n+1-x^n}{x(x^n+1)}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{n}\int(\ln|x^n+1|)'dx=\ln|x|-\ln\sqrt[n]{|x^n+1|}+C.$$

例 6.2.5 解答下列问题：

(1) 设 $f(x^2-1)=\ln(x^2/(x^2-2))$，又 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(2) 求和 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\tan\frac{x}{2^k}$.

解 (1) 令 $t=x^2/(x^2-2)$，则 $t>1$ 且有 $x^2-1=\frac{2t}{t-1}-1=\frac{t+1}{t-1}$，以及

$$f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)=\ln t,\qquad \varphi(t)=\frac{t+1}{t-1}.$$

由此知

$$\begin{aligned}\int\varphi(x)\mathrm{d}x&=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{x-1}{x-1}\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\&=x+2\ln(x-1)+C.\end{aligned}$$

(2) 注意 $\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)'=-\tan\frac{x}{2^k}\Big/2^k$，我们有

$$\begin{aligned}\int S_n(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{n}\int\tan\frac{x}{2^k}\Big/2^k\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|+C_k\right]\\&=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right|+\sum_{1}^{n}C_k\\&=-\ln\left|\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}\right|+\sum_{k=1}^{n}C_k\\&=\ln 2^n+\ln\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|-\ln|\sin x|+\sum_{k=1}^{n}C_k.\end{aligned}$$

从而可知

$$S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int S_n(x)\mathrm{d}x=\cos\frac{x}{2^n}\Big/2^n\sin\frac{x}{2^n}-\cot x=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

6.2.2 换元积分法

大家知道，导数与微分只是变量变化率的两种角度的描述，它们是统一的. 微分比之导数的一大优点是一阶微分形式的不变性，它在复合函数的微分法上呈现出表达上的简洁性，这正是 Leibniz 所用的不定积分符号下带有 $\mathrm{d}x$ 记法的科学性. 因此，在不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)\mathrm{d}x$ 可设计为某一函数的微分时，不论它是否是复合而成的函数，都可用求导公式直接返回到它的原函数.

定理 6.2.1（第一积分换元法） 若 $f(u)$ 在区间 J 上有原函数 $F(u)$：

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,\qquad u\in J,$$

则 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在区间 I 上的原函数：

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C, \qquad x \in I,$$

其中 $u=\varphi(x)$是 I 上的可微函数,且 $R(\varphi)\subset J$.

注　本公式称为**第一换元积分公式**,为求 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$,就用 u 去替换 $\varphi(x)$,并视积分号下的 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}u$,则问题可转化为求不定积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$. 因此,在具体应用这一公式时,允许作下列演算:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{\varphi(x)=u} \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C \xlongequal{u=\varphi(x)} F[\varphi(x)] + C, \qquad x \in I.$$

因此,关键在于将被积函数凑成 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 的形式,俗称凑微分法. 顺便指出:有了这一换元积分法,原先不定积分中纯符号 $\mathrm{d}x$,现在可以当作 x 的微分来对待,这说明恰当运用数学符号的重要性. 在下文的不定积分表达式中,若未明示存在区域,则暗指定义区域.

定理 6.2.2(第二积分换元法)　设 $G(t)$是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$在区间 I 上的原函数:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C,$$

则 $G(\varphi^{-1}(x))$是 $f(x)$在区间 J 上的原函数:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C, \qquad x \in J.$$

其中 $f(x)$在区间 J 上有定义,$x=\varphi(t)$在 I 上连续且在 I 内部可微,$R(\varphi)=J$ 且 $\varphi'(t)\neq 0$.

注　本公式称为**第二换元积分公式**,为求 $\int f(x)\mathrm{d}x$,就用 $\varphi(t)$去替换 x,并视 $\mathrm{d}x$ 为微分 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$,从而将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化成不定积分 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 来计算. 因此,在具体演算时,可采用如下形式写出:

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)} G[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

例 6.2.6　试求下列不定积分:

(1) $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^4 + x}$.　　(2) $I = \int \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^4}}$.

(3) $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.　　(4) $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \sqrt{\mathrm{e}^x}}$.

(5) $I = \int \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^6 - 7x^4 + x^2}}\mathrm{d}x$.　　(6) $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(7) $I = \int x(1-x)^n \mathrm{d}x$.　　(8) $I = \int \dfrac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $x^3 = t$,则 $3x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. 故有

$$I = \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^3(x^3+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|+C.$$

(2) 令 $x^2=t$,则 $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.故有

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-4t^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1/2)^2-t^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\arcsin(2t)+C=\frac{1}{4}\arcsin(2x^2)+C.$$

(3) 令 $x=\tan t$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/\cos^2 t$.故有

$$I=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}\sin t\xlongequal{\sin t=u}\int u^{-4}\mathrm{d}u-\int u^{-2}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{3u^3}+\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+C$$

$$=-\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C=\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C.$$

(4) 令 $\mathrm{e}^x=1/t^2$,则 $t=\mathrm{e}^{-x/2}$,$\mathrm{d}x=-2\mathrm{d}t/t$.故有

$$I=-2\int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t}=-2\left[\int\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}\right]$$

$$=-2t+\ln(1+t)+C=-x+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}+2\ln(1+\sqrt{\mathrm{e}^x})+C.$$

(5) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2-7+1/x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1+1/x^2}{\sqrt{x^2-7+1/x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{\sqrt{(x-1/x)^2-5}}=\ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-7+1/x^2}\right|+C.$$

(6) 令 $x=\sec t$,则 $\mathrm{d}x=\sin t\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$.故得

$$I=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

(7) 令 $x=1-t$,$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,我们有

$$I=-\int(1-t)t^n\mathrm{d}t=-\int t^n\mathrm{d}t+\int t^{n+1}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{n+2}}{n+2}+C=-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}+C.$$

(8) 令 $1+x\mathrm{e}^x=t$,则 $\mathrm{e}^x(1+x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,我们有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|1-\frac{1}{1+x\mathrm{e}^x}\right|+C.$$

例 6.2.7 试求下列不定积分:

(1) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$. (2) $I=\int\frac{\sec x\cdot\csc x}{\ln(\tan x)}\mathrm{d}x$.

(3) $I=\int\frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$.　　(4) $I=\int\frac{dx}{x^8(1+x^2)}$.

解　(1) 令 $\ln x=t$,则 $dx=e^t dt$.故有

$$I=\int\frac{e^t dt}{e^t\cdot t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C.$$

(2) 改写被积函数,且令 $\tan x=t$,则

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sec^2x\cdot\csc x}{\sec x\cdot\ln(\tan x)}dx=\int\frac{d(\tan x)}{\tan x\cdot\ln(\tan x)}\\&=\int\frac{dt}{t\ln t}=\ln|\ln t|+C=\ln|\ln(\tan x)|+C.\end{aligned}$$

(3) 令 $\ln x=t$,我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{d\ln x}{\ln x\cdot\ln\ln x}=\int\frac{dt}{t\cdot\ln t}\\&=\ln|\ln t|+C=\ln|\ln\ln x|+C.\end{aligned}$$

(4) 令 $t=1/x$,则 $dx=-(1/t^2)dt$.我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t^8dt}{1+t^2}=-\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\&=-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t+C\\&=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+C.\end{aligned}$$

例 6.2.8　试求下列不定积分:

(1) $I=\int\frac{dx}{\sin x}$.　　(2) $I=\int\frac{dx}{\cos x}$.

(3) $I=\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.　　(4) $I=\int\frac{\sqrt[4]{\tan x}}{\sin^2x}dx$.

(5) $I=\int\frac{dx}{3\cos^2x+4\sin^2x}$.　　(6) $I=\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$.

(7) $I=\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.　　(8) $I=\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

解　(1) 应用公式 $\sin x=2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)$,则得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}\\&=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

(2) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\int\left(\frac{1}{1-\tan\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

(3) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{1-2\sin^2x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C.$$

(4) 令 $\tan x=t^4$,则 $\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t/(1+t^8)$,以及 $\sin x=t^4/\sqrt{t^8+1}$,故有

$$I=\int\frac{4t^4}{1+t^8}\frac{t^8+1}{t^8}\mathrm{d}t=\int 4t^{-4}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{4}{3}\frac{1}{t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3x}+C.$$

(5) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{1}{3\cos^2x}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan x\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

(6) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{4}\right)}{\tan\frac{x}{4}}=\sqrt{2}\ln\left|\tan\frac{x}{4}\right|+C.$$

(7) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{\sin x+1-1}{\sin x+1}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

$$=x-\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}+\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2x}$$

$$=x-\tan x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

(8) 引用公式 $\sin 2x+2\sin x=2\sin x\cdot 2\cos^2(x/2)$,得

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cdot\cos^2(x/2)}=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\sec^2(x/2)\mathrm{d}x}{\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 u\mathrm{d}u}{\tan u\cos^2 u}\qquad(u=x/2)$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2 u}{\tan u}\mathrm{d}\tan u=\frac{1}{4}\int\frac{1+t^2}{t}\mathrm{d}t\qquad(t=\tan u)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln t+\frac{t^2}{2}\right)+C=\frac{1}{4}\ln(\tan u)+\frac{1}{8}\tan^2 u+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{8}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

例 6.2.9　试求下列不定积分:

(1) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos^2 x}$.

(2) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)\cdot\cos x}$.

(3) $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x$.

(4) $I=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin(2x)}}\mathrm{d}x$.

(5) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+3\sin x}$.

(6) $I=\int\frac{\sin(2x)}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}\mathrm{d}x$.

解　(1) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

(2) 改写被积函数,我们有(参阅例 6.2.8 之(1))

$$I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(3) 改写被积函数,我们有

$$I=\int\frac{1+\sin x-1}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x}}.$$

应用公式 $\sqrt{1+\sin x}=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$,则(见例 6.2.8(1))

$$I=\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

(4) 令 $\sin x+\cos x=t$，则 $(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，且 $\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos x=(\cos x+\sin x)^2-1=t^2-1$．从而得

$$I=\int\frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}=-\ln(t+\sqrt{t^2-1})+C$$

$$=-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})+C.$$

(5) 改写被积函数，且令 $\cos x=t$，则得

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(\sin^2x+3)}=\int\frac{\sin x\cdot\mathrm{d}x}{\sin^2x(4-\cos^2x)}$$

$$=\int\frac{-\mathrm{d}t}{(1-t^2)(4-t^2)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2-4}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{12}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C.$$

(6) 注意到 $\mathrm{d}(\sin^2x)=\sin(2x)$，且令 $\sin^2x=t$，则有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}(\sin^2x)}{1+\mathrm{e}^{\sin^2x}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}=-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t}+1}=-\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t}+1)}{\mathrm{e}^{-t}+1}$$

$$=-\ln(\mathrm{e}^{-t}+1)+C=-\ln(\mathrm{e}^{-\sin^2x}+1)+C.$$

例 6.2.10　试求下列不定积分：

(1) $I=\int\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\,\mathrm{d}x$．　(2) $I=\int\dfrac{\cos(2x)\mathrm{d}x}{(1-\sin x)(1-\cos x)}$．

(3) $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}(a\neq b)$．(4) $I=\int\dfrac{\sin x\cdot\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$．

解　(1) 改写被积函数，我们有

$$I=2\int\sin^2x\cdot\cos x(3\sin x-4\sin^3x)\mathrm{d}x$$

$$=6\int\sin^3x\,\mathrm{d}(\sin x)-8\int\sin^5x\,\mathrm{d}(\sin x)=\frac{3}{2}\sin^4x-\frac{4}{3}\sin^6x+C.$$

(2) 应用三角公式改写被积函数，则得

$$\frac{\cos(2x)}{(1-\sin x)(1-\cos x)}=\frac{(\cos^2x-\sin^2x)(1+\sin x)(1+\cos x)}{(1-\sin^2x)(1-\cos^2x)}$$

$$=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}(1+\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x)$$

$$=\csc^2x-\sec^2x+\frac{1}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos^2x}+\frac{\cos x}{\sin^2x}-\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}.$$

从而可知

$$I=-\cot x-\tan x+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}$$

$$-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln|\sin x|+\ln|\cos x|+C$$

$$=-\frac{1+\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}+\ln\left|\frac{\tan(x/2)\sin x\cdot\cos x}{\tan(x/2+\pi/4)}\right|+C.$$

(3) 改写被积函数，我们有

$$I=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)-\cos(x+a)\cdot\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left\{\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\{\ln|\sin(x+b)|-\ln|\sin(x+a)|\}+C.$$

(4) 应用待定系数法，改写 $\sin x$ 为

$$\sin x=A(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)+B(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)'+C,$$

则易知 $A=1/2$，$B=-1/2$，$C=-\sqrt{2}/2$.故得(注意三角公式)

$$I=\frac{1}{2}\int 1\cdot\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)'}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right|-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

例 6.2.11　解答下列问题：

(1) 设 $F(x)$是 $f(x)$在 $I=(0,\infty)$上的一个原函数，$F(1)=\sqrt{2}\pi/4$.若有 $f(x)\cdot F(x)=\arctan\sqrt{x}/[\sqrt{x}(1+x)]$ $(x\in I)$，试求 $f(x)$.

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$，且 $f(x)>0$ $(-\infty<x<\infty)$.若有 $\int f^3(x)\mathrm{d}x=\left\{\int f(x)\mathrm{d}x\right\}^3$，试求 $f(x)$.

(3) 求解满足公式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，$x,y\in(-\infty,\infty)$的可微函数 $f(x)$.

解　(1) 由题设知 $F'(x)F(x)=\arctan\sqrt{x}/[\sqrt{x}(1+x)]$，故可得

$$\frac{1}{2}F^2(x)=\int F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

因为 $F(1)=\sqrt{2}\pi/4$，所以 $C=0$.从而有

$$F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x},\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}.$$

(2) 令 $F(x)$是 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的一个原函数.在等式两端求导,可知 $f^3(x)=3\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)^2 f(x)$,$f(x)=\sqrt{3}\int f(x)\mathrm{d}x$ 或 $F'(x)=\sqrt{3}F(x)$.由此易得 $F(x)=Ce^{\sqrt{3}x}$,即 $f(x)=C\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}$.

(3) 令 $y=0$,则有 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}$,或写为 $f(0)[1+f^2(x)]=0$,即 $f(0)=0$.从而在等式

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\,\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}$$

中令 $\Delta x\to 0$,可知 $f'(x)=f'(0)[1+f^2(x)]$.记 $y=f(x)$,上式可写为$\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=f'(0)\mathrm{d}x$.由此得 $\arctan y=f'(0)x+C$,即 $f(x)=\tan[f'(0)x+C]$.由 $f(0)=0$,得 $C=0$.最后,我们有

$$f(x)=\tan(f'(0)x),\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

例 6.2.12 解答下列问题:

(1) 设 $y=y(x)$是由方程 $y(x-y)^2=x$ 所确定的隐函数,试求 $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x-3y}$.

(2) 设 $y=y(x)$满足方程$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.试求不定积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{y(x^2+y^2+a^2)}$.

(3) 设 $y=y(x)$由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 确定,试求不定积分$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{y^2}$.

解 (1) 令 $x-y(x)=t$,则原式可写为 $yt^2=x$.由此知

$$x=\frac{t^3}{t^2-1},\qquad y=\frac{t}{t^2-1},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t,\qquad x-3y=\frac{t(t^2-3)}{t^2-1}.$$

从而我们有 $I=\int\dfrac{t\mathrm{d}t}{t^2-1}=\dfrac{1}{2}\ln|(x-y(x))^2-1|+C$.

(2) 令 $y=tx$,我们有 $x=\sqrt{2}a\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$,以及

$$y=\sqrt{2}a\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\sqrt{2}a\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}.$$

由 $x^2+y^2+a^2=a^2\dfrac{3-t^2}{1+t^2}$,可知

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+C.$$

注　或用变量替换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 来做.

(3) 令 $y=tx$,我们有 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}, y=\dfrac{1}{t(1-t)}, \mathrm{d}x=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$,以及

$$I=\int \frac{-2+3t}{t}\mathrm{d}t=3t-2\ln|t|=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.$$

例 6.2.13　试求不定积分 $I=\int\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}\,\mathrm{d}x$(其中根号 $\sqrt{\ }$ 有 n 重).

解　令 $x=2\cos t$,则可得

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}&=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos t}}}\\&=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}}=\cdots=2\cos\left(\frac{t}{2^n}\right).\end{aligned}$$

从而我们有

$$\begin{aligned}I&=-4\int\sin t\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\mathrm{d}t=-2\int\left[\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}t\right)-\sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}t\right)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\cos\left(\frac{2^n+1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{2^{n+1}}{2^n-1}\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C.\end{aligned}$$

6.2.3　分部积分法

相应于函数乘积的求导公式 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$,可以得到下述分部积分法则.

定理 6.2.3(分部积分法)　设 $u(x), v(x)$ 在区间 I 上可微,若 $v(x)u'(x)$ 在 I 上有原函数(例如 $u'(x)$ 在 I 上连续),则 $u(x)v'(x)$ 在 I 上也有原函数,而且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

或写成

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x).$$

注　分部积分法主要用于被积函数是两个不同类型函数乘积的不定积分,此时,先求其中一部分 $v'(x)$ 的积分 $v(x)$,然后将 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 化归为求解 $\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$. 因此,使用这一方法是否有效,取决于选择好谁是 u, v,且使 $v(x)u'(x)$ 的原函数容易求出. 在这里我们介绍一种优先选 u 的一般顺序:

对数函数→反三角函数→代数函数→三角函数→指数函数.

举例言之,如果被积函数是对数函数 f 与代数函数 g 的乘积,那么取 f 为 u, $g\mathrm{d}x$ 为 $\mathrm{d}v$. 此时,在 $\int v\mathrm{d}u$ 中,对数的特征将在微分后消失. 因此,在 $\int v\mathrm{d}u$ 的被积函数是代数函数,有希望比 $\int u\mathrm{d}v$ 更易计算.

例 6.2.14　试求下列不定积分：

(1) $I=\int \ln x\,dx$.　　　　　　　　　(2) $I=\int xe^{x}\,dx$.

(3) $I=\int \ln(1+\sqrt{x})\,dx$.　　　　　(4) $I=\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{2} dx$.

(5) $I=\int \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^{2}}}\,dx$.　　　　(6) $I=\int \frac{\ln(x^{2}-1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

(7) $I=\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解　(1) 视 $u=\ln x$, $dv=dx$, 则

$$I=x\ln x-\int x\,d(\ln x)=x\ln x-\int \frac{x}{x}\,dx=x\ln x-x+C.$$

(2) $I=\int x\,de^{x}=xe^{x}-\int e^{x}\,dx=xe^{x}-e^{x}+C$.

(3) $I=x\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}=x\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

令 $x=t^{2}$, 有

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int \frac{t\,dt}{1+t}=2t-\int \frac{dt}{1+t}=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

从而可得 $I=(x-1)\ln(1+\sqrt{x})-\frac{x}{2}+\sqrt{x}+C$.

(4) $I=-\int \ln^{2}x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\left\{\frac{\ln^{2}x}{x}-2\int \frac{\ln x}{x^{2}}\,dx\right\}=-\left\{\frac{\ln^{2}x}{x}+2\int \ln x\,d\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$

$$=-\left\{\frac{\ln^{2}x}{x}+2\,\frac{\ln x}{x}-2\int \frac{1}{x^{2}}\,dx\right\}=-\frac{1}{x}\left(\ln^{2}x+2\ln x+2\right)+C.$$

(5) 注意到 $\left(\sqrt{1+x^{2}}\right)'=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$, 故知

$$I=\int \ln x\cdot d\sqrt{1+x^{2}}=\ln x\cdot\sqrt{1+x^{2}}-\int \frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}\,dx.$$

对上式右端第二个积分，作变换 $x=\tan t$, 则有

$$\int \frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}\,dx=\int \frac{dt}{\sin t\cdot\cos^{2}t}=-\int \frac{d\cos t}{\sin^{2}t\cdot\cos^{2}t}$$

$$\xlongequal{u=\cos t}-\int \frac{du}{u^{2}(1-u^{2})}=-\int\left(\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{1-u^{2}}\right)du$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+C$$

$$=\sqrt{1+x^{2}}+\ln\frac{\sqrt{1+x^{2}}-1}{x}+C.$$

从而我们有 $I=\sqrt{1+x^2}\cdot\ln\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+C$.

(6) 令 $x+1=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, $x^2-1=t^2(t^2-2)$, 则得

$$\begin{aligned}I&=2\int[\ln t^2+\ln(t^2-2)]\mathrm{d}t=4\int\ln t\mathrm{d}t+2\int\ln(t^2-2)\mathrm{d}t\\&=4(t\ln t-t)+2\int[\ln(t-\sqrt{2})+\ln(t+\sqrt{2})]\mathrm{d}t\\&=2\sqrt{x+1}[\ln(x^2-1)-4]-4\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}+C.\end{aligned}$$

(7) 视 $u=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$, 则得 $I=x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}\mathrm{d}x=2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$.

例 6.2.15　试求下列不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int x\cdot\cos x\mathrm{d}x$.　　(2) $I=\displaystyle\int(2x+3x^2)\arctan x\mathrm{d}x$.

(3) $I=\displaystyle\int\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.　　(4) $I=\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$.

(5) $I=\displaystyle\int\frac{x\cdot\arctan x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.　　(6) $I=\displaystyle\int\mathrm{e}^{\arccos x}\mathrm{d}x$.

(7) $I=\displaystyle\int(\arccos x)^2\mathrm{d}x$.

解　(1) $I=\displaystyle\int x\mathrm{d}(\sin x)=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

(2) 根据分部积分法, 我们有

$$I=\int\arctan x\mathrm{d}(x^2+x^3)=(x^2+x^3)\arctan x-\int\frac{x^2+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

因为

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int\left(x+1-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C.\end{aligned}$$

所以 $I=(x^3+x^2-1)\arctan x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

(3) 注意到 $(\sqrt{1-x^2})'=-x/\sqrt{1-x^2}$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=-\int\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x=-\int\arcsin x\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})\\&=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(\arcsin x)\\&=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+\int1\mathrm{d}x=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C.\end{aligned}$$

(4) 注意到 $d(1/x^2)=-2dx/x^3$，我们有

$$I=-\int \arctan x\, d\left(\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{\arctan x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\arctan x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\arctan x}{2x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{\arctan x}{2}+C$$

$$=-\frac{1+x^2}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}+C.$$

(5) 注意到 $(1/\sqrt{1-x^2})'=x/(1-x^2)^{3/2}$，故知

$$I=\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}.$$

令 $x=\sin\theta$，我们有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}=\int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta(1+\sin^2\theta)}=\int \frac{\csc^2\theta}{\csc^2\theta+1}d\theta$$

$$=\int \frac{-d(\cot\theta)}{2+\cot^2\theta}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{2}}\right)+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}\right)+C.$$

从而得到 $I=\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}\right)+C.$

(6) 视 $u=e^{\arccos x}$，$dv=dx$，我们有

$$I=xe^{\arccos x}+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}dx=xe^{\arccos x}-\int e^{\arccos x}d(1-x^2)^{1/2}$$

$$=xe^{\arccos x}-\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arccos x}-\int e^{\arccos x}dx.$$

由此可得 $I=\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arccos x}+C.$

(7) 视 $u=(\arccos x)^2$，$dv=dx$，我们有

$$I=x(\arccos x)^2+2\int \frac{x\cdot\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\triangleq I_1+2I_2.$$

注意到 $(\sqrt{1-x^2})'=-x/\sqrt{1-x^2}$，故得

$$I_2=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x-\int 1dx=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x-x+C.$$

从而可知 $I=x\cdot(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x-2x+C.$

例 6.2.16 试求下列不定积分：

(1) $I=\displaystyle\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$. (2) $I=\displaystyle\int \sin\ln x\,dx$.

解　(1) 注意到 $(\cot x)' = -1/\sin^2 x$，故有

$$I = -\int \ln\sin x \,\mathrm{d}(\cot x) = -\cot x \cdot \ln\sin x + \int \frac{\cot x \cdot \cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$
$$= I_1 + I_2 .$$
$$I_2 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int 1\mathrm{d}x$$
$$= -\cot x - x + C .$$

由此可知 $I = -(x + \cot x \cdot \ln(\mathrm{e}\cdot\sin x)) + C$.

(2) 视 $u = \sin\ln x$，$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$，我们有

$$I = x \cdot \sin\ln x - \int \cos\ln x \,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \sin\ln x - x\cos\ln x - \int \sin\ln x \,\mathrm{d}x .$$

由此可知 $I = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.

例 6.2.17　试求下列不定积分：

(1) $I = \int \mathrm{e}^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$.　　(2) $I = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

(3) $I = \int \mathrm{e}^{-x} \cdot \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.　　(4) $I = \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

(5) $I = \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x\sin x + \cos x)^2}$.

解　(1) 因为 $(1-x)^2 = 1 + x^2 - 2x$，所以

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} - \int \mathrm{e}^x \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} + C .$$

(2) 因为 $\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$，所以

$$I = \int \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2(x/2)}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \cdot \tan^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x \tan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C.$$

(3) 令 $e^x = t$,我们有

$$I = -\int \arctan e^x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^x}\right) = -\int \arctan t \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} \triangleq I_1 + I_2 .$$

对于 I_2,令 $t = \tan u$,我们有

$$I_2 = \int \frac{\cos u \mathrm{d}u}{\sin u} = \ln|\sin u| + C$$

$$= \ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + C = \ln\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} + C.$$

由此可知 $I = +x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\arctan e^x + C$.

(4) 改写被积函数,我们有

$$I = \int \frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos x} + \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\int x\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x - \ln(1+\cos x)$$

$$= \int x\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - \ln\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\cos\frac{x}{2} - \ln 2 - 2\ln\cos\frac{x}{2} + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(5) 注意到 $(x\sin x + \cos x)' = x\cos x$,故有

$$I = \int \frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2} x\sec x \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{(x\sin x+\cos x)'}{(x\sin x+\cos x)^2} x\sec x \cdot \mathrm{d}x$$

$$= -\int x\sec x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$$

$$= -\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x} + \int \frac{\sec x + x\sec x\tan x}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x\sec x}{x\sin x+\cos x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$= -x\frac{\sec x}{x\sin x+\cos x} + \tan x + C.$$

例 6.2.18　试求下列不定积分：

(1) $I=\int e^x\sin x\,dx$.　　(2) $I=\int x^2e^{2x}\cdot\sin^2 x\,dx$.

(3) $I=\int xe^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, $J=\int xe^{ax}\sin bx\,dx\,(a\neq 0)$.

解　(1) 视 $u=\sin x$, $dv=e^x\,dx$, 则得

$$\begin{aligned}I&=\int\sin x\,de^x=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\\&=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\cdot\sin x\,dx.\end{aligned}$$

由此可知 $I=\dfrac{\sin x-\cos x}{2}e^x+C$.

(2) 应用公式 $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int x^2e^{2x}(1-\cos 2x)dx\\&=\frac{1}{2}\int x^2e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int x^2e^{2x}\cdot\cos 2x\cdot dx\triangleq I_1-I_2,\\I_1&=\frac{1}{4}\int x^2de^{2x}=\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-2\int xe^{2x}dx\right)\\&=\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-xe^{2x}+\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{4}(x^2e^{2x}-xe^{2x}+e^{2x}/2)+C.\end{aligned}$$

对于 I_2, 令 $2x=t$, 则得

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{16}\int t^2e^t\cos t\,dt=\frac{1}{16}\int t^2\cos t\cdot de^t\\&=\frac{1}{16}\left[e^tt^2\cos t-\int e^t(2t\cos t-t^2\sin t)dt\right]\\&=\frac{1}{16}\left[e^tt^2\cos t-2\int te^t\cos t\,dt+\int t^2e^t\sin t\,dt\right]\\&=\frac{1}{16}\left[e^tt^2\cos t-te^t(\cos t+\sin t)+e^t\sin t+\int t^2e^t\cdot\sin t\,dt\right].\end{aligned}$$

类似可得

$$\int t^2e^t\sin t\,dt=t^2e^t\sin t-te^t(\sin t-\cos t)-e^t\cos t-\int t^2e^t\cos t\,dt.$$

由此可知

$$2\int t^2e^t\cos t\,dt=t^2e^t(\cos t+\sin t)-2te^t\sin t+e^t(\sin t-\cos t),$$

$$2\int t^2e^t\sin t\,dt=t^2e^t(\sin t-\cos t)+2e^tt\cos t-e^t(\cos t+\sin t).$$

最后我们有

$$I=\frac{e^{2x}}{8}(2x^2-2x+1)-\frac{e^{2x}}{32}[(4x^2-1)\cos 2x+(4x^2-4x+1)\sin 2x].$$

(3) 视 $u=x\cos bx$, $dv=e^{ax}dx/a$,则得

$$\begin{aligned}I&=\frac{e^{ax}x\cos bx}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ax}(\cos bx-bx\sin bx)dx\\&=\frac{xe^{ax}\cos bx}{a}-\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a(a^2+b^2)}+\frac{b}{a}J.\end{aligned}$$

由此可知

$$aI-bJ=xe^{ax}\cos bx-\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}.$$

同理易得

$$aI+bJ=xe^{ax}\sin bx-\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

联立上两公式,可解出

$$I=\frac{xe^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}-\frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx+2ab\sin bx\}}{(a^2+b^2)^2},$$

$$J=\frac{xe^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx-2ab\cos bx\}}{(a^2+b^2)^2}.$$

例 6.2.19 试求不定积分 $I=\int\frac{1-2x^3}{(x^2-x+1)^3}dx$.

解 我们有

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x^2-x+1}&=\int\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}+2\int\frac{(x^2-x)(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}dx\\&=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}+2\int\frac{(2x^3-1)-3x^2+3x-3-2x+4}{(x^2-x+1)^3}dx\\&=\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}-2I-6\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}-2\int\frac{2x-4}{(x^2-x+1)^3}dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}&=\frac{x}{(x^2-x+1)^2}+2\int\frac{x(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}dx\\&=\frac{x}{(x^2-x+1)^2}+4\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}+\int\frac{2x-4}{(x^2-x+1)^3}dx.\end{aligned}$$

由此可知

$$3\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}+\int\frac{2x-4}{(x^2-x+1)^3}dx=\frac{-x}{(x^2-x+1)^2}.$$

从而我们有

$$2I=\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x^2-x}{(x^2-x+1)^2}+\frac{2x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2x^2+1}{(x^2-x+1)^2},$$

$$I=\frac{2x^2+1}{2(x^2-x+1)^2}.$$

例 6.2.20　设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上严格递增的可微函数,且 $F'(x)=f(x)$, $g(x)$是 $f(x)$的反函数.试用 $F(x)$,$g(x)$表示 $g(x)$的原函数 $G(x)$.

解　在 $G(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$ 中令 $x=f(y)$,则有

$$\begin{aligned} G(x)&=\int g[f(y)]\mathrm{d}f(y)=\int y\mathrm{d}f(y)\\ &=yf(y)-\int f(y)\mathrm{d}y=g(x)\cdot x-\int f[g(x)]\mathrm{d}g(x)\\ &=xg(x)-\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=xg(x)-\int[F(g(x))]'\mathrm{d}x\\ &=xg(x)-F[g(x)]+C. \end{aligned}$$

例 6.2.21　试求 $I=\int\dfrac{3x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2}}\mathrm{d}x$.

解　为化去三次根,应令 $y^3=x^3-2x^2$.再引入新变量 $y=tx$,可得

$$x=\frac{2}{1-t^3},\qquad x-2=\frac{2t^3}{1-t^3},\qquad \mathrm{d}x=\frac{6t^2\mathrm{d}t}{(1-t^3)^2}.$$

从而有 $I=\int\dfrac{2t(t^3+2)}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$. 注意到

$$\begin{aligned} \int\frac{t\mathrm{d}t}{t^3-1}&=\frac{t^2}{2(t^3-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{t^2\cdot3t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2(t^3-1)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^4+2t-2t}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t\\ &=\frac{t^2}{2(t^3-1)}+\frac{3}{4}I-3\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^3-1)^2}, \end{aligned}$$

故又有$\int\dfrac{t(t^3+2)}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t=\dfrac{t^2}{2(t^3-1)}+\dfrac{3}{4}I$,$\dfrac{1}{2}I-\dfrac{3}{4}I=\dfrac{t^2}{2(t^3-1)}$.从而知

$$I=\frac{2t^2}{1-t^3}=\frac{2}{(2/x)}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{2/3}=\sqrt[3]{x(x-2)^2}.$$

6.2.4　不定积分的递推公式

在许多不定积分中,被积函数不仅是自变量的函数,而且还依赖于正整数指标 n.此时,经过一次变量替换或分部积分,往往不能直接得出具体的原函数,而是另一个类似的表达式,其中指标 n 的值减少了.这就启示我们,只要再作相应的推演,逐步地可使 n 降到最低值,从而全部求出该不定积分.这种方法称为递推法,所得公式称为递推公式.

例 6.2.22　试求下列不定积分的递推公式:

(1) $I_n=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x$.　　　(2) $I_n=\int\sec^n x\,\mathrm{d}x$.

(3) $I_n=\int(\arcsin x)^n\mathrm{d}x$.　　　(4) $I_n=\int\ln^n x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 应用公式 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$,我们有

$$I_n=\int\tan^{n-2}x\tan^2x\,\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$$
$$=\int\tan^{n-2}x\sec^2x\,\mathrm{d}x-\int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}\qquad(n>1).$$

(2) 应用公式 $(\tan x)'=\sec^2x$,我们有

$$I_n=\int\sec^{n-2}x\cdot\sec^2x\,\mathrm{d}x=\int\sec^{n-2}x\,\mathrm{d}\tan x$$
$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x-(n-2)\int\tan x\cdot\sec^{n-3}x\cdot\sec x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$
$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x-(n-2)\int\sec^{n-2}x\cdot\tan^2x\,\mathrm{d}x$$
$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x-(n-2)\int\sec^{n-2}x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x$$
$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x-(n-2)(I_n-I_{n-2}).$$

从而可知 $I_n=\dfrac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}\,(n>1)$.

(3) 视 $u=(\arcsin x)^n$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$,我们有

$$I_n=x\cdot(\arcsin x)^n-n\int\frac{x(\arcsin x)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=x\cdot(\arcsin x)^n-n\Big\{-\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}$$
$$+(n-1)\int\frac{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Big\}.$$

故得 $I_n=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}\,(n>1)$.

(4) $I_n=x\cdot\ln^nx-n\int\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x=x\ln^nx-nI_{n-1}$.

例 6.2.23 试求下列不定积分的递推式:

(1) $I_n=\int\dfrac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$.　　(2) $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+k\cos x)^n}$.

(3) $I_n=\int e^{ax}\cdot\cos^n(bx)\mathrm{d}x$.　　(4) $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^3+a^3)^n}$.

(5) $I_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x\,(a\neq0)$.

解 (1) 应用公式 $2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$,则得

$$I_n-I_{n-2}=\int\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{2\sin x\cdot\cos(n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{2\sin(n-1)x}{n-1}.$$

由此可知 $I_n=\dfrac{2}{n-1}\sin(n-1)x+I_{n-2}\,(n>1)$.

(2) 我们有求导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{k\sin x}{(1+k\cos x)^{n-1}}\right\}=\frac{k\cos x}{(1+k\cos x)^{n-1}}+\frac{k^2(n-1)\sin^2 x}{(1+k\cos x)^n}$$

$$=\frac{1+k\cos x-1}{(1+k\cos x)^{n-1}}+k^2(n-1)\frac{1-\cos^2 x}{(1+k\cos x)^n}$$

$$=\frac{1}{(1+k\cos x)^{n-2}}-\frac{1}{(1+k\cos x)^{n-1}}+\frac{k^2(n-1)}{(1+k\cos x)^n}$$

$$-(n-1)\frac{(k\cos x+1)^2-2(k\cos x+1)+1}{(1+k\cos x)^n}$$

$$=\frac{(n-1)(k^2-1)}{(1+k\cos x)^n}+(2n-3)\frac{1}{(1+k\cos x)^{n-1}}-(n-2)\frac{1}{(1+k\cos x)^{n-2}}.$$

在上式两端作不定积分,可得

$$(n-1)(1-k^2)I_n=(2n-3)I_{n-1}-(n-2)I_{n-2}$$
$$-k\sin x(1+k\cos x)^{-n+1}\qquad(n>1).$$

(3) 视 $u=\cos^n(bx)$, $\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$,我们有

$$I_n=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\cos^n bx+\frac{bn}{a}\int\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1}bx\cdot\sin bx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\cos^n bx+\frac{bn}{a}\Big[\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\cos^{n-1}bx\cdot\sin bx$$

$$-\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{ax}\{(n-1)b\cos^{n-2}bx(-\sin^2 bx)+b\cos^{n-1}bx\cdot\cos bx\}\mathrm{d}x\Big]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}\cdot\cos^n bx}{a}+\frac{bn}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cdot\cos^{n-1}bx\cdot\sin bx$$

$$-\frac{b^2n}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}\{-(n-1)\cos^{n-2}bx(1-\cos^2 bx)+\cos^n bx\}\mathrm{d}x.$$

由此可知

$$I_n=\frac{\mathrm{e}^{ax}\cos^n bx}{a}+\frac{bn}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1}bx\cdot\sin bx+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}I_{n-2}-\frac{b^2n^2}{a^2}I_n.$$

$$(a^2+b^2n^2)I_n=(a\cos bx+bn\sin bx)\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1}bx+n(n-1)b^2I_{n-2}\qquad(n>1).$$

(4) 先作导数公式,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{x}{(x^3+a^3)^{n-1}}\right\}=\frac{1}{(x^3+a^3)^{n-1}}-\frac{3x^3(n-1)}{(x^3+a^3)^n}$$

$$=\frac{1}{(x^3+a^3)^{n-1}}-\frac{3(n-1)(x^3+a^3-a^3)}{(x^3+a^3)^n}$$

$$=\frac{1-3(n-1)}{(x^3+a^3)^{n-1}}+3(n-1)a^3\frac{1}{(x^3+a^3)^n}.$$

在上式两端作不定积分，可得

$$\frac{x}{(x^3+a^3)^{n-1}}=(4-3n)I_{n-1}+3(n-1)a^3I_n.$$

由此知 $3(n-1)a^3I_n=x/(x^3+a^3)^{n-1}+(3n-4)I_{n-1}$.

(5) 改写被积函数为 $\dfrac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{x^{n-1}}{2a}\cdot\dfrac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. 故得

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{2a}\int x^{n-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x-\frac{b}{2a}\int\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\\&=\frac{1}{2a}\left\{x^{n-1}\cdot2\sqrt{ax^2+bx+c}-2(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x\right\}-\frac{b}{2a}I_{n-1}\\&=\frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{n-1}{a}\int\frac{x^{n-2}(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x-\frac{b}{2a}I_{n-1}\\&=\frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-(n-1)I_n-\frac{(n-1)b}{a}I_{n-1}-\frac{(n-1)c}{a}I_{n-2}-\frac{b}{2a}I_{n-1}.\end{aligned}$$

由此可知 $a\cdot nI_n=x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}-\dfrac{(2n-1)b}{2}I_{n-1}-(n-1)cI_{n-2}$.

例 6.2.24　试求下列不定积分的递推公式：

(1) $I_{m,n}=\int\sin^m x\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$；$J_{m,n}=\int\sin^m x\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$.

(2) $I_{m,n}=\int\cos^m x\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$；$J_{m,n}=\int\cos^m x\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$.

(3) $I_{m,n}=\int x^m\ln^n x\,\mathrm{d}x$.　　(4) $I_{n,m}=\int\dfrac{x^m}{(x^3+A)^n}\mathrm{d}x$.

解　(1) 根据分部积分法，我们有

$$I_{m,n}=\sin^m x\frac{\sin nx}{n}-\frac{m}{n}\int\sin nx\cdot\sin^{m-1}x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x,\qquad ①$$

$$J_{m,n}=-\sin^m x\frac{\cos nx}{n}+\frac{m}{n}\int\cos nx\cdot\sin^{m-1}x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x.\qquad ②$$

(i) 对①式作分部积分，我们有

$$\begin{aligned}I_{m,n}=&\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}-\frac{m}{n}\left\{-\frac{\cos nx}{n}\sin^{m-1}x\cos x\right.\\&\left.+\frac{1}{n}\int\cos nx\left[(m-1)\sin^{m-2}x\cdot\cos^2x-\sin^{m-1}x\cdot\sin x\right]\mathrm{d}x\right\}\\=&\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}+\frac{m\cos nx\cdot\sin^{m-1}x\cdot\cos x}{n^2}\\&-\frac{m}{n^2}\int\cos nx\left[(m-1)\sin^{m-2}x-m\sin^m x\right]\mathrm{d}x\\=&\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}+\frac{m\cos nx\cdot\sin^{m-1}x\cdot\cos x}{n^2}\end{aligned}$$

$$-\frac{m(m-1)}{n^2}I_{m-2,n}+\frac{m^2}{n^2}I_{m,n}\qquad(m>1).$$

由此可知

$$(n^2-m^2)I_{m,n}=\sin^{n-1}x(m\cos nx\cdot\cos x+n\cdot\sin nx\cdot\sin x)$$
$$-m(m-1)I_{m-2,n}.$$

类似地可推知

$$(n^2-m^2)J_{m,n}=\sin^{m-1}x(m\sin nx\cdot\cos x-n\cos nx\cdot\sin nx)$$
$$-m(m-1)J_{m-2,n}.$$

(ii) 对①式右端积分作计算，我们有

$$\int\sin^{m-1}x\cdot\sin nx\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin^{m-1}x\,\frac{\sin(n+1)x+\sin(n-1)x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\sin^{m-1}x\left[\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{2}+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int\sin^{m-1}x\left[\cos nx\cdot\sin x+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=I_{m,n}+J_{m-1,n-1}.$$

将此式代入①式，可得

$$I_{m,n}=\frac{\sin^m x\cdot\sin nx}{n}-\frac{m}{n}I_{m,n}-\frac{m}{n}J_{m-1,n-1},$$
$$(m+n)I_{m,n}=\sin^m x\cdot\sin nx-mJ_{m-1,n-1}.$$

对②式右端的积分再作计算，我们有

$$\int\sin^{m-1}x\cdot\cos nx\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin^{m-1}x\,\frac{\cos(n+1)x+\cos(n-1)x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\sin^{m-1}x\left[\frac{\cos(n+1)x-\cos(n-1)x}{2}+\cos(n-1)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int\sin^{m-1}x\left[-\sin nx\cdot\sin x+\cos(n-1)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=-J_{m,n}+I_{m-1,n-1}.$$

将此结果代入②式，可得 $(m+n)J_{m,n}=-\sin^m x\cdot\cos nx+mI_{m-1,n-1}$.

(iii) 当 $m=n$ 时，从(i)可知

$$I_{n-2,n}=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x(\cos nx\cdot\cos x+\sin nx\cdot\sin x)$$
$$=\sin^{n-1}x\cdot\cos(n-1)x/(n-1)\qquad(n>1).$$

类似地可知 $J_{n-2,n}=\sin^{n-1}x\cdot\sin(n-1)x/(n-1)(n>1)$.

(iv) 当 $m=n$ 时，由(ii)的结论可知

$$2nI_{n,n}=\sin^n x\cdot\sin nx-nI_{n-1,n-1},$$
$$2nJ_{n,n}=-\sin^n x\cdot\cos nx+nJ_{n-1,n-1}.$$

(2) 应用分部积分公式,我们有

$$I_{m,n}=-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m}{n}\int\cos^{m-1}x\cdot\sin x\cdot\cos nx\,dx. \qquad (*)$$

(i) 对(*)式中积分再作分部积分,可得

$$I_{m,n}=-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m}{n}\left\{\frac{\sin nx}{n}\cos^{m-1}x\cdot\sin x\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\int\sin nx\left[\cos^m x-(m-1)\cos^{m-1}x\cdot\sin^2 x\right]dx\right\}$$

$$=-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m\sin nx\cdot\sin x\cdot\cos^{m-1}x}{n^2}$$

$$+\frac{m}{n^2}\int\sin nx\left[m\cos^m x-(m-1)\cos^{m-2}x\right]dx.$$

由此可知

$$(m^2-n^2)I_{m,n}=\cos^{m-1}x(m\sin nx\cdot\sin x+n\cos nx\cdot\cos x)$$
$$+(m-1)mI_{m-2,n}.$$

(ii) 改写(*)式右端积分中之被积函数,我们有

$$\cos^{m-1}x\cdot\sin x\cdot\cos nx=\cos^{m-1}x\,\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{2}$$

$$=\cos^{m-1}x\left\{\frac{\sin(n+1)x+\sin(n-1)x}{2}-\sin(n-1)x\right\}$$

$$=\cos^{m-1}x\cdot\sin nx\cdot\cos x-\cos^{m-1}x\cdot\sin(n-1)x$$

$$=\cos^m x\cdot\sin nx-\cos^{m-1}x\cdot\sin(n-1)x,$$

$$I_{m,n}=-\frac{\cos^m x\cdot\cos nx}{n}-\frac{m}{n}I_{n,m}+\frac{m}{n}I_{m-1,n-1},$$

$$(n+m)I_{m,n}=-\cos^m x\cdot\cos nx+mI_{m-1,n-1}.$$

(iii) 在(i)中令 $m=n$,左端为零,可得

$$(n-1)nI_{n-2,n}=-n\cos^{n-1}x(\cos nx\cdot\cos x+\sin nx\cdot\sin x)$$
$$=-n\cos^{n-1}x\cdot\cos(n-1)x,$$

或 $\displaystyle\int\cos^{n-2}x\cdot\sin nx\,dx=-\frac{\cos^{n-1}x\cdot\cos(n-1)x}{n-1}$.

(iv) 在(ii)中令 $m=n$,易知有 $2nI_{n,n}=-\cos^n x\cdot\cos nx+n\cdot I_{n-1,n-1}$.对 $J_{m,n}$,用同样的方法可得

$$(m^2-n^2)J_{m,n}=\cos^{m-1}x(m\cos mx\sin x-n\sin nx\cdot\cos x)+m(m-1)J_{m-2,n},$$

$$(m+n)J_{m,n}=\cos^m x\cdot\sin nx+mJ_{m-1,n-1}.$$

(3) 应用分部积分公式,我们有

$$I_{m,n}=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(\ln x)^{n-1}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}.$$

(4) 应用分部积分公式,我们有

$$I_{n,m} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\frac{1}{(x^3+A)^n} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}(-n\cdot 3x^2)}{(x^3+A)^{n+1}}\mathrm{d}x,$$

$$(m+1)I_{n,m} = \frac{x^{m+1}}{(x^3+A)^n} + 3n\int \frac{x^m(x^3+A-A)}{(x^3+A)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^{m+1}}{(x^3+A)^n} + 3n(I_{n,m} - AI_{n+1,m}),$$

$$I_{n+1,m} = \frac{x^{m+1}}{3nA(x^3+A)^n} + \frac{3n-m-1}{3nA} I_{n,m}.$$

6.3　原函数是初等函数的几类函数积分法

前面曾经提到,有的函数不一定有原函数.在本节末段将指出,即使是函数存在原函数的情形,其原函数也不一定能用初等函数表达出来.因此,阐明其不定积分能用初等函数表示出的那些函数类是一项很重要的任务.为此,在这里将分别对某些代数函数(有理函数与无理函数)与超越函数进行讨论.

6.3.1　有理分式

有理函数的不定积分问题,只需考察有理真分式:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} \quad (a_0, b_0 \neq 0, n < m).$$

不难证明,它总可分解为形如下列四种最简真分式的组合:

$$\frac{A}{x-a};\qquad \frac{A}{(x-a)^k}\quad (k \geqslant 2);$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\quad (p^2-4q<0; k\geqslant 2).$$

因此,有理分式的不定积分就化归为计算上述四种类型真分式的不定积分:

(i) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$;

(ii) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-k}\mathrm{d}x = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$;

(iii) $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$$

(iv) $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$$

$$= \frac{A}{2}I_k + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)J_k.$$

对 I_k,用替换 $x^2+px+q=t$,$\mathrm{d}t=(2x+p)\mathrm{d}x$,则可得

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^k} = \frac{t^{1-k}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

注意到 $q-\frac{p^2}{4}>0$,故可对 J_k 用替换 $x+\frac{p}{2}=t$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,$q-\frac{p^2}{4}=l^2$,则可得

$$J_k = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k}.$$

作分解有

$$J_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = \frac{1}{l^2}\int \frac{(t^2+l^2)-t^2}{(t^2+l^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{l^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}} - \frac{1}{l^2}\int \frac{t^2}{(t^2+l^2)^k}\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

上式之最后一项不定积分又可分解为

$$\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\frac{\mathrm{d}(t^2+l^2)}{(t^2+l^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2+l^2)^{k-1}}\right),$$

根据分部积分公式知

$$\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+l^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}}\right].$$

代入(*),得到

$$J_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^k} = \frac{1}{l^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}}$$

$$+ \frac{1}{l^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+l^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}}\right]$$

$$= \frac{t}{2l^2(k-1)(t^2+l^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2l^2(k-1)}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+l^2)^{k-1}}.$$

上式右端之不定积分与 J_k 型类似,只不过这里的方幂已下降为 $k-1$,可记为 J_{k-1}.这就是说,不定积分 J_k 可用 J_{k-1} 来表出.因此,继续上述计算过程,最后将化归为下述不定积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+l^2} = \frac{1}{l}\arctan\frac{t}{l} + C.$$

至于在最后的表达式中的 t 与 l,再用 x 以及 A,B,p 与 q 代入即可.

小结 根据以上讨论可知,任一有理函数的不定积分均可用初等函数表达出来,实际上它就是由下述三类函数组成:①有理函数;②对数函数;③反正切函数.

例 6.3.1　试求下列不定积分：

(1) $I=\int \dfrac{dx}{x(x^3+1)^2}$.　(2) $I=\int \dfrac{x(x^2+3)dx}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$.

(3) $I=\int \dfrac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$.　(4) $I=\int \dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

(5) $I=\int \dfrac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}dx$.　(6) $I=\int \dfrac{dx}{\cos^7 x}$.

(7) $I=\int \dfrac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$.

解　(1) 令 $x^3=t,3x^2dx=dt$,则

$$I=\int \frac{x^2dx}{x^3(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t(t+1)^2}=\frac{1}{3}\left\{\int \frac{dt}{t}-\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{dt}{(t+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+\frac{1}{3}\frac{1}{t+1}+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|+\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3}+C.$$

(2) (i) 对被积函数作部分分式分解,令

$$\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

故有

$$x(x^2+3)\equiv A(x+1)(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2$$
$$+(Cx+D)(x^4-1)+(Ex+F)(x^2-1),$$
$$x^3+3x\equiv(A+B+C)x^5+(A-B+D)x^4+(2A+2B+E)x^3$$
$$+(2A-2B+F)x^2+(A+B-C-E)x+A-B-D-F.$$

由此可知

$$A+B+C=0,\quad A-B+D=0,\quad 2A+2B+E=1,$$
$$2A-2B+F=0,\quad A+B-C-E=3,\quad A-B-D-F=0.$$

解出可得 $A=1/2,B=1/2,C=E=-1,D=F=0$.

(ii) 从而我们有

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C$$

$$=\ln\sqrt{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}}+\frac{1}{2(x^2+1)}+C.$$

(3) 首先,将被积函数化为真分式：

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}.$$

注意到 $2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)$,故令

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{2x^2+2x+1},$$

$$6x^2+x-2=A(2x^2+2x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

由此可知 $A=1$,$B=4$,$C=3$.

其次,由上式得

$$\begin{aligned}I&=\int x\,\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\ln|2x^2+2x+1|+\arctan(2x+1)+C.\end{aligned}$$

(4) 改写被积函数,并令 $x+1=t$,我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x+1+1}{[(x+1)^2+1]^2}\mathrm{d}x=\int\frac{t+1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right)+C\\&=\frac{t-1}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C.\end{aligned}$$

(5) 改写被积函数,并用分部积分法,我们有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{5x^3+15x+5-12x-6}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x\\&=5\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+3x+1)^2}-6\int\frac{2x+1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x,\end{aligned}\qquad(*)$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+3x+1)^2}&=\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+2\int\frac{x(3x^2+3)}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{(x^3+3x+1)^2}+\frac{6}{5}\int\frac{5x^3+3x-1+2x+1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将后一式代入(*)式可得

$$I=\frac{5x}{(x^3+3x+1)^2}+6I+6\int\frac{2x+1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x-6\int\frac{2x+1}{(x^3+3x+1)^3}\mathrm{d}x.$$

由此可知 $I=-\dfrac{x}{(x^3+3x+1)^2}+C$.

(6) 改写被积函数,并令 $\sin x=t$,故得

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos x}{\cos^8 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^4}\\&=\frac{5}{16}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}+\frac{5}{32}\int\left\{\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right\}\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{8}\int\left\{\frac{1}{(1-t)^3}+\frac{1}{(1+t)^3}\right\}\mathrm{d}t+\frac{1}{16}\int\left\{\frac{1}{(1-t)^4}+\frac{1}{(1+t)^4}\right\}\mathrm{d}t\\&=\frac{5}{32}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{5}{16}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x}\frac{1}{24}\frac{3\sin x+\sin^3 x}{\cos^6 x}+C.\end{aligned}$$

(7) 因为

$$x^5+x^4-x^3-x^2=x^2(x^3+x^2-x-1)=x^2(x+1)(x^2-1)$$
$$=x^2(x+1)^2(x-1),$$

所以被积函数应分解为

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}.$$

易知 $A=1,B=-1,C=\frac{1}{2},D=-\frac{1}{2},E=-1$,从而得到

$$I=\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

6.3.2 无理函数

不是任一无理函数的不定积分均可用初等函数来表示的,因此在这里,我们将介绍某些特定的无理函数类,通过变量替换可把它们化归有理函数的积分.

为此,用 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 只进行有理运算而组合成的函数(类),如

$$\frac{x^2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x^3}}\in R(x,\sqrt{x},\sqrt{1+x^3}).$$

它对 $x_1=x,x_2=\sqrt{x},x_3=\sqrt{1+x^3}$是有理函数.我们的目的是要把其中的无理运算化掉,使之成为单变量的有理函数.

(一) $R(x,x^{\frac{m}{n}},\cdots,x^{\frac{r}{s}})$的不定积分

记$\frac{m}{n},\cdots,\frac{r}{s}$的公分母为 k,并令 $x=t^k$,$\mathrm{d}x=kt^{k-1}\mathrm{d}x$,则 $R(x,x^{\frac{m}{n}},\cdots,x^{\frac{r}{s}})$中每个 x 的分数次幂均化为 t 的整数幂,而本身就化为 t 的有理函数.

(二) $R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]$的不定积分

与前述情形类似,只需求出$\frac{m}{n},\cdots,\frac{r}{s}$的公分母,记为 k,并令$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ 即可.

(三) $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$的不定积分

现在我们已经有了经验,对于 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$的不定积分,关键是要化去根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$,而所用的变量替换称为 **Euler 替换**.

Euler 第一替换　若 $a>0$,则令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$.

为了确定起见,不妨在$\sqrt{a}$前取正号,从而得 $ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2$.此时,$x$ 为 t 的有理函数:$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$,$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t=\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t$.这就使原式化为 t 的有理函数了.

Euler 第二替换　若 $c>0$，则令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$，我们有

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c,\qquad x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}.$$

这就可使原式化为 t 的有理函数 .

注　Euler 第一、二替换可相互转化，只需令 $x=\frac{1}{z}$，就有

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{|z|}\sqrt{a+bz+cz^2}.$$

Euler 第三替换　在 ax^2+bx+c 有两个实根的情形：

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

可作替换 $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$. 此时有 $a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2$，以及

$$a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2,\qquad x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

这就可使原式化为 t 的有理函数了 .

注 1　在 Euler 第三替换中，不论 $a>0$ 或 $a<0$ 均有效 .

注 2　对于化 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 为有理函数的积分，Euler 第一、三替换是足够的：若 $b^2-4ac>0$，则 ax^2+bx+c 有两个实根，可用 Euler 第三替换 . 若 $b^2-4ac\leqslant 0$，则有

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)].$$

这说明 ax^2+bx+c 的符号与 a 的符号相同 . 由于 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 是实值，故 ax^2+bx+c 必须是正值 . 即 $a>0$，从而可用 Euler 第一替换 .

注 3　一般而言，Euler 替换会带来繁重的计算 . 因此，对下述几种形式，可作适当调整：

(i) $I=\int\frac{P_n(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$，$P_n(x)$ 为多项式；　(ii) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$；

(iii) $I=\int\frac{(Mx+N)\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$，$p^2-4q<0$.

第(i)种形式：可化为 $I=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$，其中 $Q(x)$ 是不高于 $n-1$ 次的多项式，λ 是常数 .

实际上，对两端求导并乘以 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，可得多项式的恒等式，而求出 λ 及 $Q(x)$ 的系数 .

第(ii)种形式：用替换 $t=\frac{1}{x-\alpha}$，可将其化为第(i)种形式 .

第(iii)种形式：当二次三项式 ax^2+bx+c 与 x^2+px+q 相同或只差一个常数因子时，I 均化为如下形式：

$$\int\frac{(2x+p)\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}},\qquad\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}.$$

而这些不定积分可用替换 $u=x^2+px+q$，$t=(\sqrt{x^2+px+q})'=\frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$ 积出 .

一般地讲，若 $p\neq\frac{b}{a}$，可采用替换 $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$，其中 α,β 的选取规则为：使二次三项式 x^2+

$px+q$ 与 ax^2+bx+c 在替换后消失 t 的一次项，而得到形式 $\int \frac{P(t)\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{st^2+r}}$，这里的 $P(t)$ 是 $2m-1$ 次多项式，$\lambda>0$.

然后，再分解有理真分式 $\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$，使之形成两类不定积分

$$\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}.$$

对此，可用替换 $u^2=st^2+r$，$v=(\sqrt{st^2+r})'=\frac{st}{\sqrt{st^2+r}}$ 进行积分.

最后还要指出的是，对于不定积分 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 的计算，应用三角函数或双曲函数变换有时也是很方便的. 为此，须先从二次三项式 ax^2+bx+c 分离出完全平方项，使之变为形式

$$\int R(t,\sqrt{p^2-t^2})\mathrm{d}t, \quad \int R(t,\sqrt{t^2-p^2})\mathrm{d}t, \quad \int R(t,\sqrt{t^2+p^2})\mathrm{d}t,$$

然后，再用替换

$t=p\sin u$ 或 $t=p\cos u$（第一个积分式）； $t=p\sinh u$ 或 $t=\frac{p}{\cos u}$（第二个积分式）；

$t=p\sinh u$ 或 $t=p\tan u$（第三个积分式）.

（四）$x^m(ax^n+b)^p$ 的不定积分

这里的 m,n,p 都是有理数，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$n\neq 0$，$p\neq 0$. 此时，称 $I=\int x^m(ax^n+b)^p\mathrm{d}x$ 为二项式微分型的不定积分，且当 m,n,p 之一不是整数时，I 就是无理函数的积分.

作变量替换：$x^n=t$，$x=t^{\frac{1}{n}}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$，可得 $I=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(at+b)^p\mathrm{d}t$.

(i) 若 p 是整数，则不定积分 I 可化为 $\int R(t,t^{\frac{r}{s}})\mathrm{d}t$ 型，在(一)中已讨论过.

(ii) 若 $\frac{m+1}{n}-1\left(\text{或}\frac{m+1}{n}\right)$ 是整数，而 p 不是整数，则不定积分 I 可化为 $\int R(t,(at+b)^{\frac{r}{s}})\mathrm{d}t$ 型，在(二)中已讨论过.

(iii) 若 $\frac{m+1}{n}+p$ 是整数，则转换形式为 $I=\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{at+b}{t}\right)^p\mathrm{d}t$，可知不定积分 I 可化为 $\int R\left(t,\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)\mathrm{d}t$ 型，在(二)中已经讨论过.

综合以上所述，在下列三种情形之一：

p 是整数； $\frac{m+1}{n}$ 是整数； $\frac{m+1}{n}+p$ 是整数.

二项式微分型可以有理函数化，从而其不定积分就能用初等函数来表达. 事实上，这也是所有可能的情形，它由俄国数学家 Чебышев(切比雪夫，1821～1894)证明.

（五）$R(x,\sqrt{P_n(x)})$ 的不定积分

这里，$P_n(x)$ 是次数 $n>2$ 的多项式. 此时，一般说来，不定积分 $\int R(x,\sqrt{P_n(x)})\mathrm{d}x$ 是不能表

成初等函数的.其中,当 $n=3,4$ 时,称为椭圆积分.(此时,若该不定积分是初等函数,则称其为伪椭圆积分.法国数学家 Liouville(刘维尔)在 1833 年首先证明椭圆积分不能用初等函数表达.)

当 $n>4$ 时,称其为超椭圆积分.椭圆积分是在求椭圆弧长的计算中发现的.椭圆积分理论发展迅速,出现复变量椭圆函数论,成为一种新的算法.其中的杰出工作者有:Abel,Jacobi 等.

椭圆积分总可用初等函数与标准椭圆积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

来表示,而通过变量替换 $x=\sin\varphi$,又可将上述积分表为下述积分的线性组合:

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi,\quad \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad 0<k<1.$$

例 6.3.2　试求下列不定积分:

(1) $I=\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.　　(2) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

(3) $I=\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$.　　(4) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{2(1-x)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

(5) $I=\int \frac{x^2+1}{(x-1)^{5/2}\sqrt{x^3+1}}\mathrm{d}x$.　　(6) $I=\int \sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

(7) $I=\int \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}\mathrm{d}x$.　　(8) $I=\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $x=t^6$,则得

$$I=6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}t^5\mathrm{d}t=6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=6\int t^3\mathrm{d}t+6\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\arctan\sqrt[6]{x}+C.$$

(2) 令 $(x+1)^{1/6}=t$, $x=t^6-1$, $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$,则得

$$I=\int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(t+1)\right]$$
$$=6\left[\frac{\sqrt{x+1}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}+\sqrt[6]{x+1}-\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)\right]+C.$$

(3) 令 $\frac{2-x}{2+x}=t^3$,则有

$$x=2\frac{1-t^3}{1+t^3},\qquad \mathrm{d}x=-12\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2},\qquad \frac{1}{2-x}=\frac{1+t^3}{4t^3},$$

从而得到

$$I=-12\int\frac{(t^3+1)^2t^3\mathrm{d}t}{16t^6(t^3+1)^2}=-\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

(4) 因为 $\dfrac{1}{2(1-x)\sqrt{x^2+2x-3}}=\pm\dfrac{1}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$,所以令 $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}=t$,就有 $x=\dfrac{1+3t^2}{1-t^2}$,$\mathrm{d}x=\dfrac{8t\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$.从而得

$$\begin{aligned}I&=\pm\frac{1}{2}\int\left(\frac{1-t^2}{4t^2}\right)^2\cdot t\frac{8t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t\\&=\pm\int\frac{\mathrm{d}t}{4t^2}=\mp\frac{1}{4t}+C=\mp\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}+C.\end{aligned}$$

(5) 令 $\dfrac{x+1}{x-1}=t$,即 $x=\dfrac{t+1}{t-1}$,$\mathrm{d}x=\dfrac{-2\mathrm{d}t}{(t-1)^2}$,故知

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}}\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{t^3+3t}}{3}+C=-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{x^3+1}}{(x-1)^{3/2}}+C.$$

(6) 令 $\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}=t$,即 $x^2=\dfrac{a^2+b^2t^2}{1+t^2}$,$2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2t(b^2-a^2)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$,$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{t(b^2-a^2)\mathrm{d}t}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)}$.从而可知

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t^2(b^2-a^2)\mathrm{d}t}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)}=\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{a^2}{a^2+b^2t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\arctan t-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\arctan\frac{bt}{a}+C\\&=\arctan\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}-\frac{a}{b}\arctan\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\right)+C.\end{aligned}$$

(7) 注意到 $2+x-x^2=(x+1)(2-x)$,故令 $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}=t$,即 $x=\dfrac{2-t^2}{1+t^2}$,$\mathrm{d}x=\dfrac{-6t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$,则得

$$\begin{aligned}I&=-18\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(2-t^2)(1+t^2)}=\int\left[\frac{-4}{2-t^2}+\frac{-4}{1+t^2}+\frac{6}{(1+t^2)^2}\right]\mathrm{d}t\\&=\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|-4\arctan t+3\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan t\right)+C\\&=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}\sqrt{x+1}}\right|-\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+\sqrt{(2-x)(x+1)}+C.\end{aligned}$$

(8) 注意到 $1-x^2=(1-x)(1+x)$,故令 $\sqrt{(1-x)/(1+x)}=t$,我们有

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}-4\arctan t\right)+C$$
$$=2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

例 6.3.3 试求下列不定积分：

(1) $I=\int\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}\mathrm{d}x$.　　(2) $I=\int\frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-3x-1}}\mathrm{d}x$.

(3) $I=\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$.　　(4) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

(5) $I=\int\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}$.　　(6) $I=\int\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4^2x+4x+2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{x^2+2x+3}=t-x$,则有 $x=(t^2-3)/[2(1+t)]$,$\mathrm{d}x=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2+2x+3}=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)}$. 故得

$$I=\int\frac{(t^2+2t+3)^2}{2(t^2-3)(t+1)^2}\mathrm{d}t=\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{6}{t^2-3}\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{t}{2}+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}$$
$$+\ln(\sqrt{x^2+2x+3}+x+1)+\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+\sqrt{3}}\right|+C.$$

(2) 令 $\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}}=t$,即 $x=\frac{1+t^2}{1-4t^2}$,则得

$$\mathrm{d}x=\frac{10t\mathrm{d}t}{(1-4t^2)^2},\qquad\sqrt{4x^2-3x-1}=\frac{5t}{1-4t^2}.$$

$$I=2\int\frac{1-4t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=-8\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+10\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$
$$=-8\arctan t+\frac{10}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan t\right)+C$$
$$=-3\arctan t+\frac{5t}{1+t^2}=-3\arctan\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}}+5\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}}\frac{4x+1}{5x}+C$$
$$=-3\arctan\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}}+\frac{\sqrt{4x^2-3x-1}}{x}+C.$$

注 本题也可用替换 $\sqrt{4x^2-3x-1}=t-2x$ 来做.

(3) 用 Euler 第二替换,令 $\sqrt{1+x+x^2}=tx+1$,则得 $1+x+x^2=t^2x^2+2tx+1$.由此知 $x=\dfrac{2t-1}{1-t^2}$,$\mathrm{d}x=2\dfrac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$,以及

$$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{1-t+t^2}{1-t^2},\qquad t=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$$

因此,我们有

$$I=\int\frac{-2t\mathrm{d}t}{1-t^2}=\ln|1-t^2|+C=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C.$$

(4) 因为 $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$,所以令 $\sqrt{x^2+3x-4}=(x+4)t$.我们有

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2,\qquad x-1=(x+4)t^2,$$

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{10t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t,\qquad \sqrt{x^2+3x-4}=\frac{5t}{1-t^2},$$

由此可得

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}\mathrm{d}t=\int\frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}\\&=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.\end{aligned}$$

(5) 先改写被积函数,后用 Euler 替换,则得

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{2\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1+x+x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}\\&=2I_1-\ln\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x+1}\right\}.\end{aligned}$$

对 I_1,令 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$,我们有

$$\begin{aligned}I_1&=-2\int\frac{2t+1}{t(t+2)(t^2-2t-2)}\mathrm{d}t\\&=-2\int\left\{-\frac{1}{4t}+\frac{1}{4(t+2)}+\frac{1}{4\sqrt{3}(t-\sqrt{3}-1)}-\frac{1}{4\sqrt{3}(t+\sqrt{3}-1)}\right\}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x-\sqrt{3}-1}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\sqrt{3}-1}\right|+C.\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}I=&\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x-\sqrt{3}-1}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\sqrt{3}-1}\right|\\&-\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.\end{aligned}$$

(6) 用待定系数法简化为真分式积分.令

$$I=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{4x^2+4x+2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x+2}},$$

且在两端求导,可知

$$\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{4x^2+4x+2}$$
$$+(Ax^2+Bx+C)\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

再在两端均乘以 $\sqrt{4x^2+4x+2}$,可知

$$12x^3+16x^2+9x+2=(2Ax+B)(4x^2+4x+2)$$
$$+(Ax^2+Bx+C)(4x+2)+\lambda.$$

比较两端 x 同幂次的系数,得到 $A=1,B=\frac{3}{4},C=\frac{1}{8},\lambda=\frac{1}{4}$.最后求出

$$I=\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)\sqrt{4x^2+4x+2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x+2}}.$$

对上式右端后一积分,作替换 $t=2x+1$,经计算可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x+2}}=\frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2})+C'.$$

例 6.3.4 试求下列不定积分:

(1) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$. (2) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

解 (1)作替换 $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$,则(让 t 的一次项消失,再定 α,β)得

$$x^2+2=\frac{(\alpha t+\beta)^2+2(t+1)^2}{(t+1)^2}=\frac{(\alpha^2+2)t^2+\beta^2+2}{(t+1)^2},$$
$$2x^2-2x+5=\frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2},$$

其中,利用方程组$\begin{cases}2\alpha\beta+4=0,\\4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0,\end{cases}\begin{cases}\alpha=2,\\\beta=-1,\end{cases}\begin{cases}\alpha=-1,\\\beta=2,\end{cases}$确定 α,β 值.例如取 $\alpha=-1,\beta=2$,有

$$x=\frac{2-t}{1+t},\qquad t=\frac{2-x}{1+x},\qquad \mathrm{d}x=\frac{-3\mathrm{d}t}{(1+t)^2},$$
$$x^2+2=\frac{3t^2+6}{(t+1)^2},\qquad 2x^2-2x+5=\frac{9t^2+9}{(t+1)^2}.$$

从而可知 $I=-\frac{1}{3}\int\frac{|t+1|\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$.在 $t+1>0$ 即 $t>-1$ 的区域,我们有

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}.$$

在上式第一个积分中再用替换 $u^2=t^2+1$,第二个积分再用替换 $v=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$,可得

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}v}{2-v^2}=-\frac{1}{3}\arctan u-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x}+C.$$

在 $x<-1$ 的区域,可类似地操作.

(2) 先把积分写成 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2\sqrt{(2x+1)^2+4}}$,再用替换 $t=2x+1$,可得 $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2+4}}$. 再用替换 $t=2\sinh u$,注意到 $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$,$(\sinh u)'=\cosh u$,我们有

$$I=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sinh^2 u}=-\frac{1}{8}\coth u+C=-\frac{\sqrt{1+\sinh^2 u}}{2\sinh u}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{t^2+4}}{8t}+C=\frac{-\sqrt{4x^2+4x+5}}{8(2x+1)}+C.$$

例 6.3.5 试求下列不定积分:

(1) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{(x-a)(x-b)}}\quad(a\neq b)$.

(2) $I=\displaystyle\int\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^{3/2}\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x$.　(3) $I=\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$.

(4) $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\mathrm{d}x$.　(5) $I=\displaystyle\int\frac{(x+1)^3(x-1)}{(x^2+x+1)^2\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $x-a=\dfrac{1}{t}$,$\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$,则得

$$I=\int\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}+a-b}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+(a-b)t}}$$

$$=-\frac{2}{a-b}\sqrt{1+(a-b)t}+C=-\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

注 一般地,对不定积分

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\alpha x+\beta)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

可用替换 $\alpha x+\beta=1/t$,即 $x=(1-\beta t)/\alpha t$,使得 $I=\displaystyle\int\frac{t^k}{\sqrt{At^2+Bt+C}}\mathrm{d}t$.

(2) 令 $x+1=t^2$,我们有

$$I=2\int\frac{(t^4-3)\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^4-3t^2+3}}=2\int\frac{(t^2+\sqrt{3})(t^2-\sqrt{3})\mathrm{d}t}{t^2t\sqrt{\left(t-\frac{\sqrt{3}}{t}\right)^2+2\sqrt{3}-3}}.$$

再令 $t-\sqrt{3}/t=u$,得

$$I=2\int\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+2\sqrt{3}-3}}=2\sqrt{u^2+2\sqrt{3}-3}+C$$

$$=2\sqrt{t^2-3+3/t^2}+C=2\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}+C.$$

(3) 改写被积函数为

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\Big/\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right],$$

并令 $x+1/x=t$,则 $(1-1/x^2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.我们有 $I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.再令 $t=1/u$,可知 $I=-\arcsin(x/(x^2+1))+C$.

(4) 令 $x+\frac{1}{x}=t$,则 $I=-\int\frac{\sqrt{t^2-2}}{t(t^2-4)}\mathrm{d}t$.再用置换 $\sqrt{t^2-2}=u$,我们有

$$I=\int\frac{u^2\mathrm{d}u}{(2+u^2)(2-u^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2-u^2}-\frac{1}{2+u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^4}}{1-x^2}\right|-\arctan\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x}\right\}+C.$$

(5) 令 $x+\frac{1}{x}=t$,则 $I=\int\frac{(t+2)\mathrm{d}t}{(t+1)^2\sqrt{t^2-2}}$.再令 $1/(t+1)=u$,我们有

$$I=-\int\frac{(1+u)\mathrm{d}u}{\sqrt{1-2u-u^2}}=\sqrt{1-2u-u^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{t^2-2}}{1+t}+C=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+x+1}+C.$$

例 6.3.6 试求下列(二项式微分型)不定积分:

(1) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.　　(2) $I=\int x^5(a^3+x^3)^{1/3}\mathrm{d}x$.

(3) $I=\int\frac{(x^6+a^6)^3}{x^{11}}\mathrm{d}x$.　　(4) $I=\int\frac{x^4}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $m=0,n=4,p=-\frac{1}{4}$,所以 $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$.从而 I 是初等可积的.用替换 $1+x^{-4}=t^4$,可得 $t=(1+x^{-4})^{\frac{1}{4}}$,$x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$.因此,我们有

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^4-1}=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

(2) 注意到 $m+1/n=6/3=2$,故令 $\sqrt[3]{a^3+x^3}=t$,即 $x=(t^3-a^3)^{1/3}$,$\mathrm{d}x=t^2\mathrm{d}t/(t^3-a^3)^{2/3}$,我们有

$$I=\int t^3(t^3-a^3)\mathrm{d}t=\frac{t^7}{7}-\frac{a^3t^4}{4}=(a^3+x^3)^{4/3}\left(\frac{a^3+x^3}{7}-\frac{a^3}{4}\right)+C$$

$$=\frac{(a^3+x^3)^{4/3}(4x^3-3a^3)}{28}+C.$$

(3) 令 $\sqrt[3]{1+\dfrac{a^6}{x^6}}=t$,即 $x=\dfrac{a}{(t^3-1)^{1/6}}$,$\mathrm{d}x=-\dfrac{at^2\mathrm{d}t}{2(t^3-1)^{7/6}}$,

$$I=-\int\frac{t^4}{2a^6}\mathrm{d}t=-\frac{t^5}{10a^6}+C=-\frac{(x^6+a^6)^{5/3}}{10a^6x^{10}}+C.$$

(4) 注意到 $(m+1)/n+p$ 是整数,故令 $\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{x^4}}=t$,则 $I=-\displaystyle\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^4-1)^2}$,且有

$$\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^4-1}=\frac{t^3}{3(t^4-1)}-\frac{1}{3}\int\frac{t^3(-4t^3)}{(t^4-1)^2}\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3(t^4-1)}+\frac{4}{3}\int\frac{t^6-t^2+t^2}{(t^4-1)^2}\mathrm{d}t.$$

由此可知

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{t^4-1}+\int\frac{t^2}{t^4-1}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{t^4-1}+\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(x(1+x^4)^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right|\right)+C.$$

例 6.3.7 解答下列问题:

(1) 记 $I_{m,p}=\displaystyle\int x^m(ax^n+b)^p\mathrm{d}x(a\neq0,n\neq0,p\neq-1)$,试证明

$$a(m+1+np)I_{m,p}=x^{m+1-n}\cdot(ax^n+b)^{p+1}-b(m+1-n)I_{m-n,p}.$$

(2) 设在 $I=\displaystyle\int R(x,\sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q})\mathrm{d}x$ 中,$p,q,(p+q)/n$ 是整数,试证明 I 是初等函数.

(3) 试问:$I=\displaystyle\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x(a\neq0)$ 在什么条件下是代数函数?

解 (1) 应用分部积分公式,我们有

$$I_{m,p}=\frac{1}{na(p+1)}\int x^{m+1-n}\mathrm{d}(ax^n+b)^{p+1}$$

$$= \frac{1}{na(p+1)}\left[x^{m+1-n}(ax^n+b)^{p+1}-(m+1-n)\int(ax^n+b)^{p+1}x^{m-n}\mathrm{d}x\right],$$

$$a(np+n)I_{m,p}=x^{m+1-n}(ax^n+b)^{p+1}-(m+1-n)\int(ax^n+b)^p(ax^n+b)x^{m-n}\mathrm{d}x$$

$$=x^{m+1-n}(ax^n+b)^{p+1}-(m+1-n)\left[\int(ax^n+b)^p ax^m\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+b\int(ax^n+b)^p x^{m-n}\mathrm{d}x\right],$$

移项即可得证.

(2)令 $x=t+a$,则得 $\sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q}=t^{p/n}(t+(a-b))^{q/n}$.因为从二项式微分型的观点看,题设条件指出 $\left(\frac{p}{n}+1\right)\Big/1+q/n$ 是整数,故初等可积.

(3)答:条件为 $4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1$.

6.3.3 三角(超越)函数

我们在这里讨论的超越函数的不定积分,是指 $\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$.对此,用变量替换(也称为万能三角函数替换)$t=\tan\frac{x}{2}$,$x\in(-\pi,\pi)$,一定能把它化为 t 的有理函数的不定积分.此时,我们有

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x=2\arctan t$,$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.从而可得

$$\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

注意到有理函数的有理函数仍为有理函数,故上式右端是 t 的有理函数之不定积分.

注 1 虽然用替换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 对 $\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 的计算总是有效的,但不一定是最简便的.因此,遇到下列情形,应灵活设计变量替换:

(i)若有 $R(\cos x,-\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$,则可用替换 $t=\cos x$,$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(ii)若有 $R(-\cos x,\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$,则可用替换 $t=\sin x$,$x\in(0,\pi)$.

(iii)若有 $R(-\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则可用替换 $t=\tan x$,$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

注 2 对于不定积分 $\int\sin^p x\cdot\cos^q x\,\mathrm{d}x$,$p,q\in\mathbf{Q}$,可用替换 $t=\sin x$ 或 $t=\cos x$,总能将其化

为二项式微分型之不定积分.

例 6.3.8　试求下列不定积分:

(1) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\tan x}$.　　(2) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

(3) $I=\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.　　(4) $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{5+3\sin x+4\cos x}$.

(5) $I=\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.　　(6) $I=\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $\tan x=t$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/(1+t^2)$.故知

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{1}{a+bt}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\,\frac{1}{a+bt}+\frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{a-bt}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{b}\ln|a+bt|-\frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{b}{2}\ln(1+t^2)+\frac{a}{a^2+b^2}\arctan t+C\\
&=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+b\tan x}{\sec x}\right|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C\\
&=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C.
\end{aligned}$$

(2) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,有

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{1}{1-2t/(1+t^2)}\,\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int \frac{2\mathrm{d}t}{(1-t)^2}\\
&=\frac{2}{1-t}+C=\frac{2}{1-\tan(x/2)}+C.
\end{aligned}$$

(3) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,有

$$\begin{aligned}
I&=4\int \frac{t}{(1+t)^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=4\int\left\{\frac{-1}{2(1+t)^2}+\frac{1}{2(1+t^2)}\right\}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{1+t}+2\arctan t+C=\frac{2}{1+\tan(x/2)}+2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\\
&=\frac{2}{1+\tan(x/2)}+x+C.
\end{aligned}$$

(4) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,有

$$\begin{aligned}
I&=2\int \frac{\mathrm{d}t}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)}=2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+6t+9}\\
&=2\int (t+3)^{-2}\mathrm{d}t=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\tan\frac{x}{2}}+C.
\end{aligned}$$

(5) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,有

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^2}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+t+\frac{t^2}{4}+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

(6) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,有

$$I=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\int\frac{t+1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
$$=-\ln|t+1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t+C$$
$$=\ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}+\arctan t+C$$
$$=\ln\left|\sec\frac{x}{2}\Big/\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right|+\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C$$
$$=\frac{x}{2}-\ln\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

例 6.3.9　解答下列问题:

(1) 试给出不定积分 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\cos x+b\sin x)^n}$ 的递推公式.

(2) 试求 A,B,C,使得等式

$$\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x+c_1}{a\cos x+b\sin x+c}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\cos x+b\sin x+c|$$
$$+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x+c}\qquad(a^2+b^2\neq0)$$

成立.

解　(1) $I_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left\{\frac{a\sin x-b\cos x}{(a\cos x+b\sin x)^{n-1}}+(n-2)I_{n-2}\right\}$.

(2) $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$,　$B=\frac{ba_1+ab_1}{a^2+b^2}$,　$C=c_1-c\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$.

注 1　有许多初等函数的不定积分不能用初等函数表出,即非初等可积.例如 J.E.Ritt 在 *Integration in finite terms* (Columbia Univ. Press. New York,1948)中已指出,不定积分

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad\int\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

非初等可积.实际上,不定积分

$$\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\ \int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x,\ \int\ln\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$\int\sqrt{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x,\ \int e^{-(ax^2+bx+c)}\mathrm{d}x\quad(a>0),$$
$$\int e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}},\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\cos x}}$$

等也非初等可积.

注 2　D.Richardson 在 *Some indecidable problems involving elementary functions of a real variable*（*J.Symbolic logic*,33(1968),514～520)中指出,不存在一种算法可判决:对给定初等函数是初等可积的.

注 3　在 17、18 世纪,许多数学家曾全力以赴地寻找能够明显地被积出来(表为初等函数)的各种初等函数,并发现了许多巧妙的方法,增加了人们对反导数运算的知识.后来,当大家认识到不是所有的初等函数都可被显式积出来时,上述目的就淡化了.实际上,初等函数优越之处在于其性质很容易被认识且易算其值(或近似值),但我们限制积分学的目标不能因此而止.当一个函数的积分不能通过已知的函数来表示时,我们不妨就把这一积分作为一个新的“高等”函数引进来(实际上,这只是换一个名称而已).这一新函数的研究价值取决于它在理论和实用中的地位和作用,前文提到过的椭圆函数正是这方面的范例.

补　　记

这次修订与第一版比较,增添了许多新的范例,改变了个别章节的编序,也改正了若干笔误.这必将会更加提高读者的阅读兴趣.

作　者

2010 年