中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 11 期: 1467 ～ 1480
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
综 述

Kazhdan-Lusztig 理论: 起源、发展、影响和一些待解决的问题

献给万哲先教授 90 华诞

席南华

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190
E-mail: nanhua@math.ac.cn

收稿日期: 2016-12-29; 接受日期: 2017-01-24; 网络出版日期: 2017-07-27
国家自然科学基金 (批准号: 11621061) 资助项目

摘要 Kazhdan-Lusztig 理论是代数群表示论近 40 年来最重要的发展之一. 该理论在很多重要问题的解决上起关键作用, 如有限 Lie 型群的不可约特征标的分类和 Lie 理论中某些不可约表示的特征标的确定等. 同时该理论开创了很多有活力的研究课题, 如 Kazhdan-Lusztig 多项式的研究、Coxeter 群的胞腔的研究及 Coxeter 群与相交上同调和 K 理论的联系等. 本文将简要介绍这一理论的起源、发展、影响和一些未解决的问题.

关键词 Kazhdan-Lusztig 理论 Coxeter 群 Hecke 代数 Kazhdan-Lusztig 多项式 Kazhdan-Lusztig 基
MSC (2010) 主题分类 20C08

1 引言

1979 年, Kazhdan 和 Lusztig [1] 发表了论文 “Representations of Coxeter groups and Hecke algebras”. 此文一出即引起广泛的关注, 美国数学会的《数学评论》对此文的评述是不寻常地长. 近 40 年的时间过去了, 此文给代数群的表示理论及相关方向带来了巨大的进展, 也开启了很多研究方向, 形成了所谓的 Kazhdan-Lusztig 理论 (简称 KL 理论). 现在人们对此文的重要性有了更清晰的认识, 也证明了当初的重视是慧眼识文. 本文将简要介绍 KL 理论的起源、发展、影响和一些待解决的问题. 受作者学识的局限, 还受作者时间和精力的限制, 这个介绍无疑是很不全面的, 若干观点或许是片面的, 但读后应该有收获.

自然, KL 理论源于前面提到的文献 [1]. 文献 [1] 背后的动机是清晰构造 Weyl 群及其 Hecke 代数表示的一些好的基[1]). Springer [2] 关于 Green 函数和 Weyl 群表示的工作, 以及 Jantzen [3] 和

[1]) 说起来, 寻找好的基这个问题在线性代数中就是一个极其重要的问题, Jordan 标准形与这个问题密切相关. 对线性空间上的线性算子, 主要问题就是寻找适当的基使得算子的矩阵尽可能简单.

英文引用格式: Xi N H. Kazhdan-Lusztig theory: Origin, development, influence, and some problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1467–1480, doi: 10.1360/N012016-00245

Joseph [4, 5] 关于普遍包络代数的本原理想的工作都出现了 Weyl 群表示的一些很有意思的基, 对 Kazhdan 和 Lusztig 的工作有启发推动作用. Springer 的工作 [2] 建立了代数群幺幂类与 Weyl 群表示之间的联系, 即著名的 Springer 对应.

2 Coxeter 群和 Hecke 代数

如同 Kazhdan 和 Lusztig 的论文标题所示, KL 理论是关于 Coxeter 群和 Hecke 代数的一个理论.

定义 2.1 称群 W 为 Coxeter 群, 如果它有一个生成元集 $S=\{s_i\}_{i\in I}$ 和生成关系

$$s_i^2=1,\quad (s_is_j)^{m_{ij}}=1,\quad i\neq j,$$

其中 m_{ij} 属于 $\{2,3,4,\dots,\infty\}$. 生成元集 S 常称为单反射集. 为了强调单反射集的作用, Coxeter 群 W 常记为 (W,S).

Coxeter 群 W 中每个元素 w 都可以表成单反射 (即 S 中的元素) 的乘积. 在 w 的所有的单反射乘积表达式中, 一定有某些乘积所含的单反射的个数最小, 这些表达式称为 w 的约化 (或简约) 表达式, 所含的单反射的个数称为 w 的长度, 记作 $l(w)$. Coxeter 群 W 上的 Bruhat 序 "$\leqslant$" 定义如下: 对 $y,w\in W$, 记 $y\leqslant w$, 如果存在约化表达式 $w=s_1s_2\cdots s_m$ 和 $1,2,\dots,m$ 的子序列 $i_1,i_2,\dots,i_k$ 使得 $y=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$. 单反射就是长度为 1 的元素, 单位元是长度为 0 的元素.

例 2.2 (i) 二面体群 D_n. 生成元集由两个元素 s_1 和 s_2 组成, s_1s_2 的阶为 $n\in\{2,3,4,\dots,\infty\}$.

(ii) $1,2,\dots,n$ 的置换群 $\mathfrak{S}_n$. 集合 S 由对换 $(12),(23),(34),\dots,(n-1,n)$ 组成.

(iii) Weyl 群和仿射 Weyl 群. 它们是 Lie 理论中最重要的 Coxeter 群, 定义如下.

设 G 是代数闭域 k 上的简约代数群, 如一般线性群 $\mathrm{GL}_n(k)$、特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(k)$、辛群 $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ 和特殊正交群 $\mathrm{SO}_n(k)$ 等. 命 T 为 G 的一个极大环面, 对刚才所列的群, 可取 T 为 G 中的对角矩阵形成的群, 那么 T 是其正规化子 $N_G(T)$ 的正规子群. 称群

$$W=N_G(T)/T$$

为 G 的 Weyl 群. 当 G 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(k)$ 或特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(k)$ 时, W 就是对称群 $\mathfrak{S}_n$.

所有的代数群同态 $T\to k^*$ 形成的群 $X=\mathrm{Hom}\,(T,k^*)$ 称为 T 的特征标群, 这是一个自由 Abel 群, 对 $\mathrm{GL}_n(k)$、$\mathrm{SL}_n(k)$、$\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ 和 $\mathrm{SO}_n(k)$, 这个 Abel 群的秩分别是 n、$n-1$、n 和 $n/2$ 的整数部分. 由于 $N_G(T)$ 通过共轭作用在 T 上, 而 T 是交换的, 所以, W 作用在特征标群 X 上, 从而可以形成半直积

$$\tilde{W}=W\ltimes X,$$

它称为扩张仿射 Weyl 群. 当 G 是伴随型的半单代数群时 (如射影线性群 $\mathrm{PGL}_n(k)=\mathrm{GL}_n(k)/Z$ (其中 Z 是群 $\mathrm{GL}_n(k)$ 的中心)、射影辛群 $\mathrm{PSp}_{2n}(k)$ 和射影特殊正交群 $\mathrm{PSO}_n(k)$ 等), 群 $\tilde{W}$ 称为仿射 Weyl 群. 仿射 Weyl 群是 Coxeter 群. 对一般的扩张仿射 Weyl 群 $\tilde{W}$, 存在一个仿射 Weyl 群 $W_a\subset\tilde{W}$ 和交换群 Ω 使得 $\tilde{W}=\Omega\ltimes W_a$.

定义 2.3 Coxeter 群 (W,S) 的 Hecke 代数 H 是一个自由 $\mathcal{A}=\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]$ 模 (q 为不定元), 基为 $\{T_w\}_{w\in W}$, 乘法关系是

$$(T_s-q)(T_s+1)=0,\quad 如果\ s\in S,$$

$$T_wT_u=T_{wu},\quad 如果\ l(wu)=l(w)+l(u),$$

其中 $l: W \to \mathbb{N}$ 是长度函数.

Hecke 代数由 Iwahori [6] 引进, 最初仅定义了 Weyl 群的 Hecke 代数, 后来对仿射 Weyl 群定义了 Hecke 代数[7], 一般的 Coxeter 群的 Hecke 代数的定义最早出现在文献 [8, 第 4 章第 2 节例 34]. Hecke 代数可以看作 W 在 $\mathcal{A}$ 上的群代数的形变: 取 $q=1$, 就得到了 W 的群代数 $\mathbb{Z}[W]$. 还可以定义多参数的 Hecke 代数, 多参数的 Hecke 代数上的 KL 理论 (等价地, 带权的 Coxeter 群理论) 还没有充分发展, 有一大片待开垦的域地, 最重要的文献当属文献 [9]. 限于篇幅, 本文没有讨论这个方向.

Coxeter 群及其 Hecke 代数在如下的研究中起关键作用: 各类域 (如有限域、代数闭域和 p-adic 域等) 上的代数群的结构和表示; Kac-Moody 代数的结构和表示; 纽结理论; 量子群等. 它们还与相交上同调和 K 理论有深刻的联系. Weyl 群和仿射 Weyl 群及其 Hecke 代数是研究得最为深入的 Coxeter 群和 Hecke 代数. 我们举一些例子.

设 G 是代数闭域 k 上的简约代数群, B 是一个 Borel 子群 (对 $\mathrm{GL}_n(k)$ 可取 B 为可逆上三角矩阵全体), T 是 B 中的一个极大环面. 对 Weyl 群 $W=N_G(T)/T$ 中的每个元素 w, 取它的一个代表元 $\dot{w}\in N_G(T)$, 那么 G 有如下的分解:

$$G=\bigcup_{w\in W} B\dot{w}B,$$

而且, 如果 w 和 u 是 W 中两个不同的元素, 则 $B\dot{w}B$ 和 $B\dot{u}B$ 的交集为空集. 这个分解称为 Bruhat 分解. 对 p-adic 域上的简约代数群, 如果用 Iwahori 子群代替 Borel 子群, 仍有类似的分解, 不过这时双陪集由某个扩张仿射 Weyl 群参数化.

在 T 的特征标群 $X=\mathrm{Hom}\,(T,k^*)$ 中取支配权 λ (即对每一个单根 α, 有 $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\geqslant 0$), 则有 Weyl 模 $V(\lambda)$, 其特征标由如下公式给出:

$$\mathrm{ch}\,V(\lambda)=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e_{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e_{w(\rho)}}, \tag{2.1}$$

其中 e_μ 是群代数 $\mathbb{Z}[X]$ 中对应到 $\mu\in X$ 的元素, ρ 是 W 的根系的正根和之半 (参见文献 [10]). 对紧 Lie 群和复数域上半单 Lie 代数, 有类似的公式. Weyl 特征标公式后来进一步推广到可对称化的 Kac-Moody 代数上去 (参见文献 [10]).

设 G 是有限域上的简约代数群, 如 q_0 元域 $\mathbb{F}_{q_0}$ 上的一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{q_0})$ 等. 取 G 的一个 Borel 子群 B. 对 B 在复数域上的平凡表示 1_B. 考虑诱导表示 $\mathrm{Ind}_B^G 1_B$. 它的自同态环 $\mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_B^G 1_B)$ 就是 G 的 Weyl 群 W 的一个 Hecke 代数. 更确切地, 有同构

$$\mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_B^G 1_B)\simeq H\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{C},$$

其中 $\mathbb{C}$ 通过同态 $\mathcal{A}\to\mathbb{C}$, $q\to q_0$ 看作 $\mathcal{A}$ 模. 所以, 这个诱导表示的研究在很大程度上可以归结为 Weyl 群的 Hecke 代数的研究. 对 p-adic 域上的简约代数群, 如果用 Iwahori 子群代替 Borel 子群, 则仍有类似的结果, 不过这时 Weyl 群由某个扩张仿射 Weyl 群代替 (参见文献 [11,12]).

3　Kazhdan-Lusztig 多项式和 Kazhdan-Lusztig 基

在 KL 理论中起中心作用的概念是 Kazhdan-Lusztig 多项式和 Kazhdan-Lusztig 基. 为引入这些概念, 需要考虑 Hecke 代数 H 的一个 (环) 对合 (即二阶自同构). 令

$$\overline{\sum a_w T_w}=\sum \bar{a}_w T_{w^{-1}}^{-1},\quad a_w\in\mathcal{A},$$

其中 $\bar{a}_w = \sum \alpha_n q^{-\frac{n}{2}}$, 如果 $a_w = \sum \alpha_n q^{\frac{n}{2}}$, $\alpha_n \in \mathbb{Z}$. 这定义了 H 的对合 $\bar{\ }: H \to H$.

定理 3.1 [1] 对 W 中的每一个元素 w, 在 H 中有唯一的元素 C_w 满足下面两个等式:

$$C_w = \bar{C}_w, \quad C_w = q^{-\frac{l(w)}{2}} \sum_{y \leqslant w} P_{y,w} T_y,$$

其中 $P_{y,w}$ 是 q 的多项式. 如果 $y < w$, 其次数小于或等于 $\frac{1}{2}(l(w) - l(y) - 1)$, $P_{w,w} = 1$.

上面的定理等价于下面的结论.

定理 3.1′ [1] 对 W 中的每一个元素 w, 存在 H 中唯一的元素 C_w 满足下面两个条件:

$$C'_w = \bar{C}'_w, \quad C'_w = q^{\frac{l(w)}{2}} \sum_{y \leqslant w} (-1)^{l(w)-l(y)} q^{-l(y)} P_{y,w}(q^{-1}) T_y,$$

其中 $P_{y,w}$ 是 q 的多项式. 如果 $y < w$, 其次数小于或等于 $\frac{1}{2}(l(w) - l(y) - 1)$, $P_{w,w} = 1$.

等价的原因是映射 $j: H \to H$, $\sum a_w T_w \to \sum (-q)^{-l(w)} \bar{a}_w T_w$ 为 (环) 自同构, 与对合 $\bar{\ }$ 是交换的, 且 $j(C_w) = (-1)^{l(w)} C'_w$.

元素 C_w ($w \in W$) 形成 H 的一个 $\mathcal{A}$ 基, 称为 H 的 Kazhdan-Lusztig 基 (简称 KL 基). 元素 C'_w ($w \in W$) 也形成 H 的一个 $\mathcal{A}$ 基, 也称为 H 的 Kazhdan-Lusztig 基 (简称 KL 基). $P_{y,w}$ 就是著名的 Kazhdan-Lusztig 多项式 (简称 KL 多项式). 约定 $P_{y,w} = 0$, 如果 $y \nleqslant w$.

例 3.2 对 Coxeter 群中的单反射 s, 有

$$C_s = q^{-\frac{1}{2}} T_s + q^{-\frac{1}{2}}.$$

例 3.3 (1) 对于二面体群, 如果 $y \leqslant w$, 则 $P_{y,w} = 1$. 这时 KL 多项式没有特别之处.

(2) 假设 W 是对称群 $\mathfrak{S}_4$. 命 $s_1 = (1\ 2)$, $s_2 = (2\ 3)$, $s_3 = (3\ 4)$, 则有

$$P_{s_2, s_2 s_1 s_3 s_2} = 1 + q, \quad P_{s_1 s_3, s_1 s_3 s_2 s_3 s_1} = 1 + q.$$

KL 多项式和 KL 基含有非常丰富的表示论信息, 也与几何中的奇点有着深刻的联系.

4 若干不可约模的特征标

KL 多项式在理解表示理论中若干困难的不可约特征标起了关键的作用. 第一个令人惊诧的应用是关于复半单 Lie 代数的某些无限维最高权模的特征标公式.

设 $\mathfrak{g}$ 是复数域上的半单 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, $\rho: \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $\rho(\alpha^\vee) = 1$, 对每一个余单根 $\alpha^\vee$. 令 W 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群. 对 $w \in W$, 命 M_w 为具有最高权 $-w(\rho) - \rho$ 的 Verma 模, 而 L_w 是 M_w 的唯一不可约商模.

猜想 4.1 [1]

$$\mathrm{ch} L_w = \sum_{y \leqslant w} (-1)^{l(w)-l(y)} P_{y,w}(1) \mathrm{ch} M_y, \quad \mathrm{ch} M_w = \sum_{y \leqslant w} P_{w_0 w, w_0 y}(1) \mathrm{ch} L_y,$$

其中 $\mathrm{ch}M$ 表示模 M 的特征标, $P_{y,w}(1)$ 记其在 1 处的值.

这些公式推广了著名的 Weyl 特征标公式. 在这个猜想之前, 人们对 L_w 的特征标没有什么办法, 对猜想中出现的系数连有启示的一般性结果都没有. 该猜想一提出来即引起人们极大的兴趣, 且很快

被 Beilinson 和 Bernstein [13] 及 Brylinski 和 Kashiwara [14] 证明, 为以后的发展指出方向: 表示论中很多的问题与几何尤其是代数几何有非常深刻的联系, 把表示论的问题用几何语言表述, 从而转化成几何问题, 对解决表示论的问题是极其有益的.

猜想 4.1 中的公式后被 Kashiwara 和 Tanisaki 推广到可对称化的 Kac-Moody 代数的情形, 包括有理权的情形 (参见文献 [15–17]). 故事远没有结束. KL 多项式在认识特征 p 上的代数群、单位根处的量子群和仿射 Lie 代数的某些不可约特征标上起了关键的作用. Soergel [18–20] 的工作表明 KL 多项式对认识倾斜模的特征标同样是至关重要的.

对正特征代数闭域 k 上的代数群 G, Chevalley 早在 20 个世纪 50 年代就证明了 G 的有理不可约表示的同构类与 G 的支配权一一对应. 这与特征 0 的情形没有差别. 但有理不可约表示更进一步的性质却知道得很少, 如维数和特征标等. 对支配权 λ, G 的相应的有理不可约表示 $L(\lambda)$ 是 Weyl 模 $V(\lambda)$ 的商模, 而且 $L(\lambda)$ 的特征标是一些 Weyl 模的特征标的线性组合, Weyl 模的特征标由 Weyl 的特征标公式给出, 参见公式 (2.1). 所以, 确定 $L(\lambda)$ 的特征标可以归结为确定这个线性组合的系数. 令人沮丧的是这些系数难以捉摸. 受猜想 4.1 的激励, 加上 Jantzen 对秩 2 和 $\mathrm{SL}_4(k)$ 的计算结果, 1980 年, Lusztig [21] 对 G 的有理不可约表示的特征标也提出一个猜想.

先引进一些记号. 不失一般性, 可假设 G 是单连通的单代数群 ($\mathrm{SL}_n(k)$ 就是一个好例子). 取 G 的极大环面 T, $X=\mathrm{Hom}\,(T,k^*)$ 是 T 的特征标群. 群 G 的根系 R 落在 X 中. 设 k 的特征是 p, 那么 G 的 Weyl 群 $W=N_G(T)/T$ 作用在 $p\mathbb{Z}R$ 上. 令 $W_a=W\ltimes p\mathbb{Z}R$. 这是一个仿射 Weyl 群, 自然作用在 X 上. 令 ρ 是正根和之半. 称 $w\in W_a$ 是支配的, 如果 $-w\rho-\rho$ 是支配权, 即对每一个单根 α, 有 $\langle -w\rho-\rho,\alpha^\vee\rangle\geqslant 0$. 对支配的 w, 令 L_w 为 G 的以 $-w\rho-\rho$ 为最高权的有理不可约表示, V_w 为 G 的以 $-w\rho-\rho$ 为最高权的 Weyl 表示.

猜想 4.2 [21] 假设 $w\in W_a$ 是支配的, 且满足 Jantzen 条件 $\langle -w\rho,\alpha_0^\vee\rangle\leqslant p(p-h+2)$, 其中 α_0 是最高短根, h 是根系 R 的 Coxeter 数, h 是根系 R 的 Coxeter 数, 那么,

$$\mathrm{ch}L_w=\sum_{y\in W_a,\text{支配}_{y\leqslant w}}(-1)^{l(w)-l(y)}P_{y,w}(1)\mathrm{ch}V_y,$$

其中 $\mathrm{ch}M$ 表示模 M 的特征标, $P_{y,w}(1)$ 是 $P_{y,w}$ 在 $q=1$ 处的取值.

这个猜想提出后就成为正特征域上代数群表示理论的一个中心问题. 以后代数群的有理表示的工作很大程度上是围绕着这个猜想进行的. 不过也值得一提的是, 20 世纪 80 年代初, 是层上同调的方法完全证明了代数群模表示的连接原理和平移原理 (参见文献 [22,23]).

进展是缓慢的. 1985 年, Kato [24] 证明了猜想 4.2 与 Steinberg 张量积定理是相容的; Jantzen [3] 证明了猜想 4.2 蕴含猜想 4.1. 这些结果当然更坚定了人们对猜想 4.2 的信心. 直到量子群的出现, 事情才有了转机.

量子群是一类非交换 Hopf 代数, 源于量子可积系统中的量子反散射方法 (quantum inverse scattering method), 主要的学派是苏联列宁格勒的 Faddeev 学派, 还有京都数理解析研究所的京都学派. 一般认为 Drinfeld [25] 和 Jimbo [26,27] 是量子群的创立人, 前期 (Kulish-Reshetikhin1980, Sklyanin1981-2) 对最简单的情形 $U_q(su(2))$ 进行了研究.

1989 年, Lusztig 在文献 [28, 第 8.2 节] 中对某些单位根处的量子群的有限维不可约表示提出了一个类似于猜想 4.2 的猜想. 1990 年, 他在文献 [29, 猜想 2.5(b)] 中进一步推广了 1989 年提出的猜想, 并对仿射 Lie 代数某些具有负的中心标量 (central charge) 不可约表示的特征标也提出了一个猜想 (参

见文献 [29, 猜想 2.5(c)]), 其中起核心作用的仍是 KL 多项式. 他还在文献 [28, 2.3] 中猜想了关于量子群的猜想和关于仿射 Lie 代数的猜想涉及的范畴是等价的, 从而关于特征标的猜想也是等价的.

Lusztig 的这些猜想是富有洞察力的. 1994 年, Kazhdan 和 Lusztig [30] 及 Lusztig [31] 证明了关于量子群的猜想和关于仿射 Lie 代数的猜想涉及的范畴是等价的; Kashiwara 和 Tanisaki [32, 33] 证明了关于仿射 Lie 代数某些具有负的中心标量不可约表示的特征标猜想; 当 p 充分大时, Andersen 等 [34] 证明了猜想 4.2 与 Lusztig 关于单位根处的不可约特征标的猜想之间的等价性. 至此, Lusztig 关于单位根处的量子群的有限维不可约表示的猜想和关于仿射 Lie 代数某些具有负的中心标量不可约表示的特征标猜想获得证明. 对特征 p 上的代数群的有理不可约表示的特征标的猜想则是在 p 充分大时成立, 但没有清晰的下界.

2004 年, Arkhipov 等 [35] 直接证明了 Lusztig 关于量子群的不可约特征标的猜想. Fiebig [36, 37] 直接证明了 Lusztig 关于代数群的特征标猜想, 并给出了明确的下界. Fiebig [36] 的方法也给出了 Lusztig 关于单位根处的量子群的不可约表示猜想的证明. Fiebig 采用的路线是 Soergel [38] 提出的. Soergel 的工作 [38] 对后面的发展影响很大, 第 6 节我们还会提到. 最近, Williamsons 通过研究 Schubert 簇的整相交上同调的 p 挠 (p-torsion) 部分证明了 Lusztig 关于代数群的特征标公式的猜想原来的界是不正确的, 下界至少是代数群的秩的指数 [39]. 看来, Schubert 簇的整相交上同调蕴含十分丰富的表示论信息, 只是其研究更为困难, 成为现在一个很有挑战性的问题.

5 与相交上同调的联系

Beilinson 和 Bernstein 及 Brylinski 和 Kashiwara 关于猜想 4.1 的证明都依赖 KL 多项式与相交上同调的联系. 这个联系是 KL 理论中另一个让人感到吃惊的结果.

设 G 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的半单代数群, 其 Lie 代数是 $\mathfrak{g}$. 设 B 是 G 的一个 Borel 子群, T 是 B 的一个极大环面. G 的 Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群. Bruhat 分解 $G = \bigcup_{w\in W} BwB$ 给出旗簇 $\mathcal{B} = G/B$ 的一些重要子簇. 首先是 Schubert 胞腔 $\mathcal{B}_w = BwB/B$, 然后是它的闭包 Schubert 簇 $\bar{\mathcal{B}}_w$. 对 $y, w \in W$, 我们有 $y \leqslant w$ 当且仅当 $\mathcal{B}_y \subset \bar{\mathcal{B}}_w$.

命 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{B}_w$ 上的局部系统 $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}^\#$ 为 $\mathcal{L}$ 到 $\bar{\mathcal{B}}_w$ 的 IC (相交上同调) 扩张. 对 $y \leqslant w$, 令 $n_{y,w,i} = \dim \mathcal{H}^i_x\mathcal{L}^\#$ ($\mathcal{H}^i\mathcal{L}^\#$ 在 x 处的茎的维数, 其中 $x \in \mathcal{B}_y$).

定理 5.1 [40] $P_{y,w}(q^2) = \sum_i n_{y,w,i}q^i$.

在同一篇文献中, Kazhdan 和 Lusztig 还对仿射 Weyl 群证明了类似的结果. Kazhdan-Lusztig 猜想和 KL 多项式与相交上同调的联系对代数群及其表示理论和相关方向的发展影响是巨大的, 是现在非常活跃的几何表示论的一个重要起源. 另外, 两个重要的起源是 Deligne 和 Lusztig 关于有限简约群表示的工作 [41] 以及前面提到的 Springer 关于 Green 函数和 Weyl 群表示的工作 [2].

相交 (上) 同调理论由 Goresky 和 MacPherson [42] 于 1980 年建立, 这是针对有奇点的空间的上同调理论. 对没有奇点的空间, 相交上同调与普通的上同调是一致的. 一般而言, 对带奇点的空间, 计算相交上同调是很不容易的事情. 定理 5.1 说 Schubert 簇的相交上同调可用 KL 多项式计算, 这表明 Schubert 簇的奇点含有丰富的表示论信息. 上节已经提到, Williamson 的工作 [39] 表明 Schubert 簇的整相交上同调含有更丰富的表示论的信息.

相交上同调的层论语言由 Beilinson 等 [43] 建立, 即反常层 (perverse sheaf) 理论. 反常层理论现在已成为几何表示理论的一个强有力的基本工具. 几何表示论中常用的几何工具还包括 D 模理论、Borel-Moore (上) 同调和 K 理论等. 当然层上同调很久以前就用于研究表示论, 有著名的 Borel-Bott-Weil

定理.

KL 多项式不仅与相交上同调的联系密切深刻, 其系数与表示论的联系也是让人赞叹的. Vogan 证明了猜想 3.4 等价于下列等式 (参见文献 [1]):

$$P_{y,w}(q)=\sum_{i\geqslant 0} q^i \dim \mathrm{Ext}^{l(w)-l(y)-2i}(M_y, L_w).$$

更进一步, KL 多项式的系数与复半单 Lie 代数 Verma 模的 Jantzen 滤过的子商的合成因子是密切相关的, 参见文献 [44,45]. 在代数群与单位根处的量子群情形, 有类似的结果, 参见文献 [46].

KL 多项式是连接几何与表示论的桥梁, 无疑其性质的研究就是一个重要课题.

6　KL 多项式

定理 3.5 表明, 对于 Weyl 群, KL 多项式的系数是非负的, 因为这些系数都是一些相交上同调的维数. 基于这个结论和一些其他迹象, Kazhdan 和 Lusztig 提出如下的猜想:

猜想 6.1 [1]　对任意的 Coxeter 群, KL 多项式的系数都是非负的.

晶体 Coxeter 群 (即定义 2.1 中的阶数 m_{ij} 取值于 2、3、4、6 或 ∞) 是 Kac-Moody 代数的根系给出的 Coxeter 群, 此时 KL 多项式仍计算了某些广义的 Schubert 簇的相交上同调, 所以系数是非负的[47]. 一般情形, 这个猜想是很困难的. 很容易看出, KL 多项式的常数项总是 1. Dyer [48] 证明了这个猜想对一次项的系数成立. 1990 年开始, Soergel [38] 提出了解决这个问题的一个方案. 首先, Soergel [38] 对猜想 4.1 给出了另一个证明, 利用旗簇的上同调环的某些模. 在 1992 年, Soergel [49] 又引进了这些模的等变版本, 现称为 Soergel 双模, 并指出可以对任意的 Coxeter 群构造 Soergel 双模. 可以定义 Soergel 双模的幺半群范畴 (monoidal category), 其分裂 Grothendieck 群典范同构于 Coxeter 群的 Hecke 代数 (一个加性范畴 $\mathcal{C}$ 的分裂 Grothendieck 群 $[\mathcal{C}]$ 是一个加法群, 由符号 $[C]$ $(C\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C})$ 生成, 生成关系是 $[C]=[C']+[C'']$ 当且仅当 $C\simeq C'\oplus C''$). 于是, 猜想 6.1 的证明就归结证明对应到 KL 基元素的不可分解 Soergel 双模的存在性. 最终在 2014 年 Elias 和 Williamson [50] 证明了这个存在性, 从而证明了猜想 6.1. 这是 KL 理论最近的一个重大进展. 文献 [50] 还给出了猜想 4.1 的一个代数证明, 这也是人们追求多年的一个结果.

KL 多项式的组合性质也是非常有意思的. 设 (W,S) 为 Coxeter 群. 对 $y,w\in W$, 如果 $y<w$, 置

$$P_{y,w}=\mu(y,w)q^{\frac{1}{2}(l(w)-l(y)-1)}+\text{低次项}. \tag{6.1}$$

假设 $s\in S$ 使得 $sw\leqslant w$, 则有如下的递推公式 (参见文献 [1]):

$$P_{y,w}=q^{1-c}P_{sy,sw}+q^cP_{y,sw}-\sum_{\substack{u\\ y\leqslant u<sw\\ su\leqslant u}}\mu(u,sw)q^{\frac{1}{2}(l(w)-l(u))}P_{y,u}, \tag{6.2}$$

其中 $c=1$, 如果 $sy<y$; 否则 $c=0$.

这个递归公式显示, 某些 KL 多项式的最高次项的系数 $\mu(y,w)$ 对认识 KL 多项式有独特的价值. 事实上, 系数 $\mu(y,w)$ 有表示论的意义, 在有限群的表示理论中与某些上同调的维数的界密切相关, 在代数群的表示理论中也是如此. 所以, $\mu(y,w)$ 的计算是人们感兴趣的一个问题. 关于 $\mu(y,w)$ 目前有如下结论.

存在 $y,w\in\mathfrak{S}_{13},\mathfrak{S}_{16}$ 使得 $\mu(y,w)>1$ (参见文献 [51]). 于是, $(0,1)$ 猜想 (即在对称群的情形 μ 总是取值 0 或 1) 的答案是否定的. 但 Xi [52] 证明了有很多的情形 μ 总是取值 0 或 1.

问题 6.2 对 $\mathfrak{S}_n$, 若 n 趋于无穷大, 则 μ 的上界是否也趋于无穷大?

对仿射 Weyl 群 $\tilde{\mathfrak{S}}_n$, Scott 和 Xi [53] 证明了存在 $y,w\in\tilde{\mathfrak{S}}_n$ 使得 $\mu(y,w)=n+1$. 从而, μ 函数不存在与 n 无关的上界. 对 $\tilde{B}_2$ 型仿射 Weyl 群, Lusztig [54] 计算了一些 μ 值, 在 Lusztig 工作的基础上, Wang [55] 作了进一步的工作, 几乎计算了 $\tilde{B}_2$ 型仿射 Weyl 群中所有的 μ 值, 但还有少数情形不能处理.

对一般的 Coxeter 群, Jones [56] 和 Green [57] 证明了对某些特殊对 (y,w), 有 $\mu(y,w)\leqslant 1$. 一般的情形, μ 值的计算还是很不容易的问题.

7 胞腔

KL 多项式的系数 $\mu(y,w)$ 还被用于定义 Coxeter 群中的一些等价类, 称为胞腔. 这些等价类自然构造了 Coxeter 群及其 Hecke 代数的表示, 对有限 Lie 型群的表示研究也是十分重要的 (参见文献 [58]). 关于胞腔, 甚至对仿射 Weyl 群, 仍有很多的问题没有解决, 更不用说一般的 Coxeter 群.

设 (W,S) 为 Coxeter 群, $y,w\in W$. 记 $y\underset{L}{\leqslant}w$, 如果存在 W 中的序列 $y=y_0,y_1,\dots,y_k=w$ 和元素 $s_i\in S$ 使得

(1) $\mu(y_i,y_{i+1})\neq 0$ 或 $\mu(y_{i+1},y_i)\neq 0$, 其中 $i=0,1,2,\dots,k-1$;

(2) 对于 $i=0,1,2,\dots,k-1$, $s_iy_i\leqslant y_i$, 但 $s_iy_{i+1}\geqslant y_{i+1}$.

记 $y\underset{R}{\leqslant}w$, 如果 $y^{-1}\underset{L}{\leqslant}w^{-1}$. 记 $y\underset{LR}{\leqslant}w$, 如果存在 W 中的序列 $y=y_0,y_1,\dots,y_k=w$ 使得对于 $i=0,1,2,\dots,k-1$, $y_i\underset{L}{\leqslant}y_{i+1}$ 或 $y_i\underset{R}{\leqslant}y_{i+1}$. 二元关系 $\underset{L}{\leqslant}$、$\underset{R}{\leqslant}$ 和 $\underset{LR}{\leqslant}$ 是 W 的前序 (preorder), 相应的等价关系记作 $\underset{L}{\sim}$、$\underset{R}{\sim}$ 和 $\underset{LR}{\sim}$. 这些等价关系的等价类分别称为 W 的左胞腔、右胞腔和双边胞腔.

取 $h,h'\in H$ 和 $w\in W$, 则

$$hC_w=\sum_{u\underset{L}{\leqslant}w}a_uC_u,\quad a_u\in\mathcal{A},$$

$$C_wh=\sum_{u\underset{R}{\leqslant}w}b_uC_u,\quad b_u\in\mathcal{A},$$

$$hC_wh'=\sum_{u\underset{LR}{\leqslant}w}c_uC_u,\quad c_u\in\mathcal{A}.$$

从而, 每个左胞腔 (右胞腔、双边胞腔) 产生一个 H 的左 (右、双) 模, 当然也产生一个 W 的左 (右、双) 模. KL 基给出了这个模的基, 具有特别好的性质, 也就是 Kazhdan 和 Lusztig 开始时希望的性质.

Weyl 群的胞腔给出的表示在 Lusztig 关于有限 Lie 型群的不可约表示的分类工作中起了重要的作用 (参见文献 [58]).

定理 7.1 [1] 对 $\mathfrak{S}_n$, 每个左胞腔给出一个不可约 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ 模.

一般而言, 此结论不正确. 对 Weyl 群的胞腔给出的模, Lusztig [58] 有深入的研究. 对仿射 Weyl 群, 秩 2 的情形是 Lusztig [47] 确定的. Shi [59] 确定了仿射 A 型的胞腔, 对其他型, Shi 也有很多深入的结果. 目前已知的情形还有 $\tilde{B}_3$、$\tilde{B}_4$、$\tilde{C}_3$、$\tilde{C}_4$、$\tilde{D}_4$、$\tilde{D}_5$ 和 $\tilde{F}_4$ 等型, 参见文献 [60–66]. 但对其他一般的情形, 仅有零星的部分结果.

8 KL 基与 a- 函数

KL 基一方面通过胞腔给出了 Hecke 代数的一些模的好基, 另一方面, KL 基同样与几何有深刻的联系. 设 W 是复简约群 G 的 Weyl 群, $\mathcal{B}$ 为 G 的旗簇. Springer 把 W 的 Hecke 代数 H 的乘法解释为 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上的层复形的运算 (逆像、张量积和顺像). 此时, 元素 C_w 对应到某些反常层 (perverse sheaf). 推论之一如下:

定理 8.1 [67] 令 $C_wC_u=\sum_v h_{w,u,v}C_v$, $h_{w,u,v}\in\mathcal{A}$, 则 $h_{w,u,v}$ 属于 $\mathbb{N}[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]$.

这个定理说的是结构常数 $h_{w,u,v}$ 作为 $q^{\frac{1}{2}}$ 的 Laurent 多项式, 系数都是非负的. 这是一个很重要的性质, 然后进一步推广到晶体 Coxeter 群的情形 (参见文献 [47]), 而一般情形的证明则是 Elias 和 Williamson [50] 完成的. 设 $w,u\in W$. 命

$$C_wC_u=\sum_{v\in W}h_{w,u,v}C_v,\quad h_{w,u,v}\in\mathcal{A}.$$

对 $v\in W$, 定义

$$a(v)=\min\{i\in\mathbb{N}\mid q^{-\frac{i}{2}}h_{w,u,v}\in\mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}],\text{对所有的 } w,u\in W\}.$$

如果这样的 i 不存在, 则置 $a(v)=\infty$. 函数 $a:W\to\mathbb{N}$ 常称为 Lusztig 的 a 函数, 它是研究 KL 多项式和胞腔的重要工具.

当 W 是有限群时, 函数 a 当然是有界的. 一个不平凡的结果是, 对仿射 Weyl 群, 函数 a 仍是有界的 (参见文献 [47]). 这个结论对研究仿射 Weyl 群的胞腔是至关重要的 (参见文献 [47,68,69]). 1994 年, Xi 在文献 [70, 1.13(iv)] 中揣测, 只要单反射的个数有限, 这个函数很可能是有界的. 后来, Lusztig [9] 猜想, 对带权 (即带参数) 的 Coxeter 群, 如果单反射的个数有限, 则 a 函数总是有界的. 一个特殊情况就是如下猜想:

猜想 8.2 (Lusztig, 1997) 假设 (W,S) 是 Coxeter 群, S 的元素个数有限, 则 a- 函数有界.

当 (W,S) 的 Coxeter 图是完全图 (complete graph) 时, 猜想成立 (参见文献 [71]). Zhou [72] 对秩 3 的 Coxeter 群证明了这个猜想. 对非等参数的情形, 则是 Shi 和 Yang [73] 证明的. Gao [74] 把周培培的结果推广到非等参数的情形. 这个猜想如果成立, 对研究 Coxeter 群的胞腔是很有意义的, 例如, 文献 [71] 证明了这时有最低双边胞腔, 最低双边胞腔有很多独特的性质, 在仿射 Weyl 群已经显示 (也可参见文献 [75–77]).

函数 a 的一个重要用处是定义双边胞腔的基环. 假设函数 a 在 Coxeter 群 W 上是有界的. 回顾

$$C_xC_y=\sum_{z\in W}h_{x,y,z}C_z,\quad h_{x,y,z}\in\mathcal{A}.$$

命

$$h_{x,y,z}=\gamma_{x,y,z}q^{\frac{a(z)}{2}}+\text{低次项}.$$

设 J 是自由 $\mathbb{Z}$- 模, 基为 $\{t_w\}_{w\in\tilde{W}}$. 定义

$$t_xt_y=\sum_{z\in\tilde{W}}\gamma_{x,y,z}t_z.$$

这个乘法是结合的 (参见文献 [68]), 从而 J 是一个环 (不一定有 1).

设 c 是 W 的双边胞腔, 命 J_c 由所有的 t_x $(x\in c)$ 张成, 则 J_c 是 J 的双边理想, 而且 $J=\bigoplus_c J_c$, 其中 c 跑遍 $\tilde{W}$ 的双边胞腔.

当 W 的左胞腔只有有限个时, J 是有 1 的结合环. 特别地, 对 Weyl 群和仿射 Weyl 群, 这个结论成立. 这时 J_c 也是有 1 的结合环, Lusztig [69,78] 对其结构提出的猜想表明其结构十分有意思, 与 K 理论密切相关. 在 Weyl 群的情形, Lusztig 的这个猜想由 Bezrukavnikov 等[79] 解决, 对仿射 Weyl 群的情形, 下一节将叙述已知的结果.

9 仿射 Weyl 群和 K 理论

仿射 Weyl 群在 KL 理论中有重要的地位, 因为这里的结果丰富深刻, 应用甚广, 如仿射 Weyl 群的 KL 多项式在代数群的模表示、仿射 Lie 代数的某些不可约表示、单位根处的量子群的不可约表示中都起了关键的作用, 又如仿射 Hecke 代数与 p 进群表示的联系. 仿射 Weyl 群与 K 理论的联系是值得特别说一说的事情.

先回顾 (扩张) 仿射 Weyl 群的定义. 设 G 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的连通简约代数群, T 是 G 的一个极大环面, $W = N_G(T)/T$ 是 G 的 Weyl 群. 命 $X = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$ 为 T 的特征标群, 那么 $\tilde{W} = W \ltimes X$ 是扩张仿射 Weyl 群. 记 $\tilde{W}$ 的 Hecke 代数为 $\tilde{H}$, 称为仿射 Hecke 代数.

关于仿射 Weyl 群的 a 函数, Lusztig [47] 证明了 $a(w_0)$ 是一个上界, 其中 w_0 是 W 的最长元. 而且, 在 $\tilde{W}$ 的双边胞腔上取常值. 关于仿射 Weyl 群的胞腔理论, 最深刻的一个结果可能是 Lusztig [69] 建立的一个双射:

$$\{\tilde{W} \text{ 的双边胞腔}\} \underset{\text{双射}}{\longleftrightarrow} \{G \text{ 的幺幂类}\}.$$

这是因为, 与这个双射相连的是一系列漂亮的性质. 首先, 假设 c 是 $\tilde{W}$ 的双边胞腔, $\mathcal{U}$ 是相应的幺幂类, $u \in \mathcal{U}$. 命 $\mathcal{B}_u$ 为 G 中含 u 的 Borel 子群全体, 则 $a(c) = \dim \mathcal{B}_u$. 其次, Lusztig 猜想这个双射与两边集合的偏序是相容的. 这个猜想后被 Bezrukavnikov [80] 证明, 在证明中, Lusztig 和 Xi [81] 合作发现的典范左胞腔是一个关键角色. 再者, 利用这个双射, 启示于 Satake 同构 (参见文献 [82]) 等结论, Lusztig 对 $\tilde{W}$ 的双边胞腔的基环的结构给出了猜想.

猜想 9.1 [69]　假设 G 是单连通单代数群, c 是 $\tilde{W}$ 的双边胞腔, $\mathcal{U}$ 是相应的幺幂类, $u \in \mathcal{U}$. 命 J_c 是 c 的基环, F_c 是 $C_G(u)$ 的一个极大简约子群, 那么存在有限集 Y, F_c 作用在其上, 使得

(1) 存在双射 $\pi:\ c \to\ \{Y \times Y$上的不可约的 F_c- 等变向量丛的同构类$\}$;

(2) 双射 π 诱导了环同构 $J_c \ \simeq\ K_{F_c}(Y \times Y)$, $t_w \to \pi(w)$, 其中 $K_{F_c}(Y \times Y)$ 的乘法由卷积给出.

定理 9.2　(1) 对 $G = \mathrm{SL}_3$, $G = \mathrm{Sp}_4$, $G = G_2$, 猜想成立 (参见文献 [70]);

(2) 对 $G = \mathrm{GL}_n$, $G = \mathrm{SL}_n$, 猜想成立 (参见文献 [83]).

Bezrukavnikov 和 Ostrik [84] 证明了一个较猜想弱的结果. Nakajima [85] 用量子群对 $G = \mathrm{GL}_n$ 的情形给了另一个证明. 一般情形尚未证明. Bezrukavnikov 等[79] 还把此猜想与特征标层的分类联系起来. 对其他情形, 该猜想尚未证明. 另外, 对非单连通的情形, 这个猜想不成立 (参见文献 [83]), 有迹象表明, 一般情形应把 Y 换成 $\mathcal{B}_u^{\mathbb{C}^*}$.

如果 Γ 是 c 的典范左胞腔, Bezrukavnikov [86] 证明了 $J_{\Gamma\cap\Gamma^{-1}}$ 与 F_c 的表示环同构.

由于从仿射 Hecke 代数 $\tilde{H}$ 到 $\tilde{W}$ 的基环有一个自然的代数同态 $H \to J \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$, 所以基环可以用于讨论仿射 Hecke 代数的表示. 仿射 Hecke 代数表示的意义之一是与 p 进群表示的联系. 对 $q_0 \in \mathbb{C}^*$, 置

$$\tilde{H}_{q_0} = \tilde{H} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}, \quad q^{\frac{1}{2}} \to q_0^{\frac{1}{2}}.$$

定理 9.3 [11,12] 假设 q_0 是一个素数的幂, K 是局部域, 剩余域为 $\mathbb{F}_{q_0}$, 那么 $G^\vee(K)$ 的有非零向量被某个 Iwahori 子群固定的允许不可约表示的同构类与 $\tilde{H}_{q_0}$ 的复不可约表示的同构类有自然的一一对应, 其中 $G^\vee$ 是 G 的 Langlands 对偶.

Deligne-Langlands 猜想给出了这类允许不可约表示的一个分类. 由于定理 9.3, Deligne-Langlands 猜想就成了某些参数的仿射 Hecke 代数的不可约表示分类的猜想. 这个猜想最后在 1987 年被 Kazhdan 和 Lusztig 证明.

定理 9.4 [87] 当 q_0 不是单位根时, Deligne 和 Langlands 关于 $\tilde{H}_{q_0}$ 的不可约表示分类的猜想成立.

他们的证明在方法有很大的创新, 以 K 理论为主要工具. 一个关键的定理是仿射 Hecke 代数的 K 理论实现. 在仿射 Hecke 代数表示的研究中, 最早利用 K 理论的是 Lusztig [88].

假设 G 的导群是单连通的, $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数. $\mathcal{B}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的所有 Borel 子代数形成的簇. $\mathcal{N}$ 记 $\mathfrak{g}$ 的所有幂零元形成的簇. 令 $Z=\{(N,\mathfrak{b},\mathfrak{b}')\mid \mathfrak{b},\mathfrak{b}'\in\mathcal{B}, N\in\mathcal{N}\cap\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'\}$, 那么 $G\times\mathbb{C}^*$ 作用在 Z 上, $(g,x):(N,\mathfrak{b},\mathfrak{b}')\to(x^{-2}g.N,g.\mathfrak{b},g.\mathfrak{b}')$, 其中 g 的作用是伴随作用. 可在等变 K 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$ (连贯层 (coherent sheaf) 范畴的 Grothendieck 群) 上通过卷积定义一个乘法.

定理 9.5 [87,89–91] 作为代数有同构 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)\simeq\tilde{H}$.

利用 Lusztig 建立的单射 $\tilde{H}_{q_0}\to J\otimes\mathbb{C}$, 可以证明如下结论. 这个定理的证明需要用到 Steinberg 的工作 [92], 那里要求群 G 的导群是单连通的.

定理 9.6 (1) 当 $\sum_{w\in W}q_0^{l(w)}\neq 0$ 时, Deligne-Langlands 猜想成立 (参见文献 [93]);

(2) 当 $\sum_{w\in W}q_0^{l(w)}=0$ 时, Deligne-Langlands 猜想不成立 (参见文献 [70]).

仿射 Hecke 代数的 K 理论实现引出一些有意思的问题. 设 Y 是幂零锥 $\mathcal{N}$ 的闭子簇. 命 $Z_Y=\{(N,\mathfrak{b},\mathfrak{b}')\in Z\mid N\in Y\}$, 那么 Z_Y 是 $G\times\mathbb{C}^*$ 不变的. 考虑嵌入 $i_Y: Z_Y\to Z$. 它诱导了映射 $(i_Y)_*: K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z_Y)\to K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$. 对 $\tilde{W}$ 的双边胞腔 c, 命 $\mathcal{C}$ 是相应的幂零类, Y 是 $\mathcal{C}$ 的闭包, 则有下面的命题:

猜想 9.7 [94] $\mathrm{Im}(i_Y)_*$ 是自由 $\mathcal{A}$ 模, 由所有的 C_u $(u\underset{LR}{\leqslant}c)$ 张成.

Tanisaki 和 Xi [95] 证明了这个猜想对 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是成立的. 2011 年, Xi [96] 证明了 $\mathrm{Im}(i_Y)_*\otimes\mathbb{Q}$ 是自由 $\mathbb{Q}[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]$ 模, 由所有的 C_u, $(u\underset{LR}{\leqslant}c)$ 张成.

如果 $K^{F_c}(\mathcal{B}_u)$ 是自由 Abel 群, 那么 Ginzburg 猜想成立 (参见文献 [96]). 对 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 和秩 2 的情形, Xi [97] 计算了 $K^{F_c}(\mathcal{B}_u)$. 对一般的情形, 这个 K 群的计算和 $K^{F_c}(\mathcal{B}_u\times\mathcal{B}_u)$ 的代数结构还没有弄清楚, 它们对仿射 Hecke 代数表示的研究是有价值的. 更一般地, 对一个光滑的 G 射影簇 X, K 群 $K^G(X\times X)$ 的结构似乎还没有系统研究.

致谢 十分感谢审稿人仔细阅读了本文并提出很多有益的建议.

参考文献

1 Kazhdan D, Lusztig G. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. Invent Math, 1979, 53: 165–184

2 Springer T A. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Invent Math, 1976, 36: 173–207

3 Jantzen J C. Moduln mit einem höchsten Gewicht. Lecture Notes in Mathematics, vol. 750. Berlin: Springer, 1979

4 Joseph A. A characteristic variety for the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra. In: Noncommutative Harmonic Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 587. Berlin: Springer, 1977, 102–118

5 Joseph A. W-module structure in the primitive spectrum of the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra. In: Noncommutative Harmonic Analysis, vol. 728. Berlin: Springer, 1979, 116–135

6 Iwahori I. On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field. J Fac Sci Uni Tokyo Sect IA, 1964, 10: 215–236

7 Iwahori I, Matsumoto H. On some Bruhat decomposition and the structure of Hecke rings of p-adic Chevalley groups. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1965, 25: 5–48

8 Bourbaki N. Groupes et Algébres, Chapitres 4, 5, 6. Paris: Herman, 1968

9 Lusztig G. Hecke Algebras with Unequal Parameters. CRM Monograph Series, vol. 18. Providence: Amer Math Soc, 2003

10 Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebra, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994

11 Borel A. Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. Invent Math, 1976, 35: 233–259

12 Matsumoto H. Analyse Harmonique dans les Systémes de Tits Bornologiques de Type Affine. Lecture Notes in Mathematics, vol. 590. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977

13 Beilinson A, Bernstein J. Localisation de g-modules. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1981, 292: 15–18

14 Brylinski J L, Kashiwara M. Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. Invent Math, 1981, 64: 387–410

15 Kashiwara M. Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra. In: The Grothendieck Festschrift, vol. II. Boston: Birkhäuser, 1990, 407–433

16 Kashiwara M, Tanisaki T. Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra, II: Intersection cohomologies of Schubert varieties. In: Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory (Paris, 1989), vol. 92. Boston: Birkhäuser, 1990, 159–195

17 Kashiwara M, Tanisaki T. Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras, III: Positive rational case. Asian J Math, 1998, 2: 779–832

18 Soergel W. Kazhdan-Lusztig-Polynome and eine Kombinatorik für Kipp-Moduln. Represent Theory, 1997, 1: 37–68

19 Soergel W. Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatorics for tilting modules. Represent Theory, 1997, 1: 83–114

20 Soergel W. Character formulas for tilting modules over Kac-Moody algebras. Represent Theory, 1998, 2: 432–448

21 Lusztig G. Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups. Proc Sympos Pure Math, 1980, 37: 313–317

22 Andersen H H. The strong linkage principle. J Reine Angew Math, 1980, 315: 53–59

23 Andersen H H. On the structure of the cohomology of line bundles on G/B. J Algebra, 1981, 71: 245–258

24 Kato S. On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups. Adv Math, 1985, 55: 103–130

25 Drinfeld V G. Quantum groups. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vols. 1, 2. Providence: Amer Math Soc, 1987, 798–820

26 Jimbo M. A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation. Lett Math Phys, 1985, 10: 63–69

27 Jimbo M. A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. Lett Math Phys, 1986, 11: 247–252

28 Lusztig G. Modular representations and quantum groups. Contemp Math, 1989, 82: 59–77

29 Lusztig G. On quantum groups. J Algebra, 1990, 131: 466–475

30 Kazhdan D, Lusztig G. Tensor structures arising from affine Lie algebras I–IV. J Amer Math Soc, 1993, 6: 905–947, 949–1011; 1994, 7: 335–381, 383–453

31 Lusztig G. Monodromic systems on affine flag manifolds. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1994, 445: 231–246

32 Kashiwara M, Tanisaki T. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. Duke Math J, 1995, 77: 21–62

33 Kashiwara M, Tanisaki T. Toshiyuki Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level, II: Nonintegral case. Duke Math J, 1996, 84: 771–813

34 Andersen H H, Jantzen J C, Soergel W. Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p: Independence of p. Astérisque, 1994, 220: 321–321

35 Arkhipov S, Bezrukavnikov R, Ginzburg V. Quantum groups, the loop Grassmannian, and the Springer resolution. J Amer Math Soc, 2004, 17: 595–678

36 Fiebig P. Sheaves on affine Schubert varieties, modular representations, and Lusztig's conjecture. J Amer Math Soc, 2011, 24: 133–181

37 Fiebig P. An upper bound on the exceptional characteristics for Lusztig's character formula. J Reine Angew Math, 2012, 673: 1–31

38 Soergel W. Kategorie O, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe. J Amer Math Soc, 1990, 3: 421–445

39 Williamson G. On torsion in the intersection cohomology of Schubert varieties. ArXiv:1512.08295, 2017

40 Kazhdan D, Lusztig G. Schubert varieties and Poincaré duality. In: Geometry of the Laplace Operator. Providence: Amer Math Soc, 1980, 185–203

41 Deligne P, Lusztig G. Representations of reductive groups over finite fields. Ann of Math (2), 1976, 103: 103–161

42 Goresky M, MacPherson R. Intersection homology theory, I; II. Topology, 1980, 19: 135–162; Invent Math, 1983, 72: 77–129

43 Beilinson A A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux pervers. In: Analysis and Topology on Singular Spaces, I (Luminy, 1981). Astérisque, 100. Paris: Soc Math France, 1982, 5–171

44 Beilinson A, Bernstein J. A proof of Jantzen conjectures. In: Advances in Soviet Mathematics, vol. 16, Part 1. Providence: Amer Math Soc, 1993, 1–50

45 Gabber O, Joseph A. Towards the Kazhdan-Lusztig conjecture. Ann Sci École Norm Sup (4), 1981, 14: 261–302

46 Andersen H H. An inversion formula for the Kazhdan-Lusztig polynomiaals for affine Weyl groups. Adv Math, 1986, 60: 125–153

47 Lusztig G. Cells in affine Weyl groups. In: Algebraic Groups and Related Topics. Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 6. Tokyo: Kinokuniya and North Holland, 1985, 255–287

48 Dyer M J. Representation theories from Coxeter groups. In: Representations of Groups. Providence: Amer Math Soc, 1995, 105–139

49 Soergel W. The combinatorics of Harish-Chandra bimodules. J Reine Angew Math, 1992, 429: 49–74

50 Elias B, Williamson G. The Hodge theory of Soergel bimodules. Ann of Math (2), 2014, 180: 1089–1136

51 McLarnan T, Warrington G. Counterexamples to the $0,1$-conjecture. Represent Theory, 2003, 7: 181–195

52 Xi N. The leading coefficient of certain Kazhdan-Lusztig polynomials of the permutation group $\mathfrak{S}_n$. J Algebra, 2005, 285: 136–145

53 Scott L, Xi N. Some non-trivial Kazhdan-Lusztig coefficients of an affine Weyl group of type $\tilde{A}_n$. Sci China Math, 2010, 53: 1919–1930

54 Lusztig G. Nonlocal finiteness of a W-graph. Represent Theory, 1996, 1: 25–30

55 Wang L P. Kazhdan-Lusztig coefficients for an affine Weyl group of type $\tilde{B}_2$. J Algebra, 2011, 330: 22–47

56 Jones B C. Leading coefficients of Kazhdan-Lusztig polynomials for Deodhar elements. J Algebraic Combin, 2009, 29: 229–260

57 Green R M. Leading coefficients of Kazhdan-Lusztig polynomials and fully commutative elements. J Algebraic Combin, 2009, 30: 165–171

58 Lusztig G. Characters of Reductive Groups Over a Finite Field. Annals of Mathematics Studies, 107. Princeton: Princeton University Press, 1984

59 Shi J Y. Kazhdan-Lusztig Cells of Certain Affine Weyl Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1986

60 Bédard R. Cells for two Coxeter groups. Comm Algebra, 1986, 14: 1253–1286

61 Chen C D. The left cells of the affine Weyl group of type $\tilde{D}_5$. Comm Algebra, 2001, 29: 11–30

62 Du J. The decomposition into cells of the affine Weyl group of type $\tilde{B}_3$. Comm Algebra, 1988, 16: 1383–1409

63 Shi J Y. Left cells of the affine Weyl group $W_a(\tilde{D}_4)$. Osaka J Math, 1994, 31: 27–50

64 Shi J Y. Left cells in the affine Weyl group of type $\tilde{F}_4$. J Algebra, 1998, 200: 173–206

65 Shi J Y. Left cells in the affine Weyl group of type $\tilde{C}_4$ (English summary). J Algebra, 1998, 202: 745–776

66 Zhang X F. Cells decomposition in the affine Weyl group $W_a(\tilde{B}_4)$. Comm Algebra, 1994, 22: 1955–1974

67 Springer T A. Quelques applications de la cohomologie d'intersection. Séminaire Bourbaki, 1982, 24: 249–273

68 Lusztig G. Cells in affine Weyl groups, II. J Algebra, 1987, 109: 536–548

69 Lusztig G. Cells in affine Weyl groups, IV. J Fac Sci Univ Tokyo Sect IA Math, 1989, 36: 297–328

70 Xi N. Representations of Affine Hecke Algebras. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1587. Berlin: Springer-Verlag, 1994

71 Xi N. Lusztig's a-function for Coxeter groups with complete graphs. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2012, 7: 71–90

72 Zhou P P. Lusztig's a-function for Coxeter groups of rank 3. J Algebra, 2013, 384: 169–193

73 Shi J Y, Yang G. The boundedness of the weighted Coxeter group with complete graph. Proc Amer Math Soc, 2016, 144: 4573–4581

74 Gao J W. The boundness of weighted Coxeter groups of rank 3. ArXiv:1607.02286, 2016

75 Shi J Y. A two-sided cell in an affine Weyl group, I. J Lond Math Soc (2), 1987, 37: 407–420

76 Shi J Y. A two-sided cell in an affine Weyl group, II. J Lond Math Soc (2), 1988, 38: 235–264

77 Xi N. The based ring of the lowest two-sided cell of an affine Weyl group. J Algebra, 1990, 134: 356–368
78 Lusztig G. Leading coefficients of character values of Hecke algebras. Proc Sympos Pure Math, 1987, 47: 235–262
79 Bezrukavnikov R, Finkelberg M, Ostrik V. On tensor categories attached to cells in affine Weyl groups, III. Israel J Math, 2009, 170: 207–234
80 Bezrukavnikov R. Perverse sheaves on affine flags and nilpotent cone of the Langlands dual group. Israel J Math, 2009, 170: 185–206
81 Lusztig G, Xi N. Canonical left cells in affine Weyl groups. Adv Math, 1988, 72: 284–288
82 Lusztig G. Singularities, character formulas and a q-analog of weight multiplicities. Astérisque, 1983, 101: 208–229
83 Xi N. The Based Ring of Two-Sided Cells of Affine Weyl Groups of Type $\tilde{A}_{n-1}$. Providence: Amer Math Soc, 2002
84 Bezrukavnikov R, Ostrik V. On tensor categories attached to cells in affine Weyl groups, II. Adv Stud Pure Math, 2004, 40: 101–119
85 Nakajima H. Cells in quantum affine algebras. Algebra Colloq, 2004, 11: 141–154
86 Bezrukavnikov R. On tensor categories attached to cells in affine Weyl groups. Adv Stud Pure Math, 2004, 40: 69–90
87 Kazhdan D, Lusztig G. Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras. Invent Math, 1987, 87: 153–215
88 Lusztig G. Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras. Proc Amer Math Soc, 1985, 94: 337–342
89 Chriss N, Ginzburg V. Representation Theory and Complex Geometry. Boston: Birkhäuser, 1997
90 Ginzburg V. Lagrangian construction of representations of Hecke algebras. Adv Math, 1987, 63: 100–112
91 Lusztig G. Bases in equivariant K-theory. Represent Theory, 1998, 2: 298–369
92 Steinberg R. On a theorem of Pittie. Topology, 1975, 14: 173–177
93 Xi N. Representations of affine Hecke algebras and based rings of affine Weyl groups. J Amer Math Soc, 2007, 20: 211–217
94 Ginzburg V. Geometrical aspects of representation theory. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. 1. Providence: Amer Math Soc, 1987, 840–848
95 Tanisaki T, Xi N. Kazhdan-Lusztig basis and a geometric filtration of an affine Hecke algebra. Nagoya Math J, 2006, 182: 285–311
96 Xi N. Kazhdan-Lusztig basis and a geometric filtration of an affine Hecke algebra, II. J Eur Math Soc (JEMS), 2011, 13: 207–217
97 Xi N. A partition of the Springer fibers B_N for type A_{n-1}, B_2, G_2 and some applications. Indag Math (NS), 1999, 10: 307–320

Kazhdan-Lusztig theory: Origin, development, influence, and some problems

XI NanHua

Abstract Kazhdan-Lusztig theory is one of the most important progresses in the representation theory of algebraic groups in the past four decades. This theory plays a crucial role in settling up many important problems in Lie theory, for example, the classification of irreducible characters of finite groups of Lie type, and characters of certain irreducible representations in Lie theory. Meanwhile, this theory opens up many dynamic research topics such as Kazhdan-Lusztig polynomials, cells in Coxeter groups, relations among Coxeter groups, intersection cohomology theory and K-theory. In this article we will briefly introduce the origin, development, influence and some unsolved problems of the theory.

Keywords **Kazhdan-Lusztig theory, Coxeter group, Hecke algebra, Kazhdan-Lusztig polynomial, Kazhdan-Lusztig basis**

MSC(2010) **20C08**

doi: 10.1360/N012016-00245