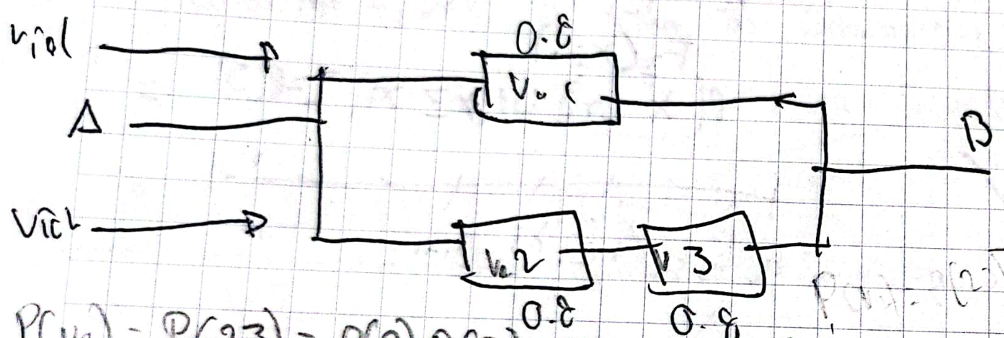
Considera un sistema de agua que fluye a través de unas válvulas de A a B. Las válvulas 1, 2 y 3 funcionan independientemente y cada una se abre correctamente con una probabilidad de 0.8. Encuentra la distribución de probabilidad para Y, el número de vías abiertas de A a B después de haber enviado la señal



$Y = (0, 1, 2)$ $\quad P(V_1) = 0.8$

$P(\bar{V_1}) = 0.2$

$Y = \#$ vías abiertas

$P(V_2) = P(23) = P(2)P(3) = (0.8)(0.8) = \underline{0.64}$

$P(\bar{V_2}) = \underline{0.36}$

Y	$P(Y = y)$
0	$P(Y=0) = P(\bar{V_1}\bar{V_2}) = P(\bar{V_1})P(\bar{V_2}) = (0.36)(0.2) = \underline{0.072}$
1	$= \underline{0.416}$
2	$= 0.512$

$\sum P(Y=y) = 1$

$Y = 1$

V_1 abierta $\quad V_2$ abierta

$V_1 = V_1\bar{V_2} \quad V_2 = \bar{V_1}V_2$

$Y = 1$

$P(V_1\bar{V_2} \cup \bar{V_1}V_2) = (0.8)(0.36) + (0.2)(0.64) = \underline{0.416}$

$Y = 2$

$P(V_1V_2) = P(V_1)P(V_2) = (0.8)(0.64) = \underline{0.512}$

Distribución Acumulada

Escaneado con CamScanner

Las v.a. X y Y son independientes si:

08/10/2024

(2) En un problema de una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide que hagan corresponder cada uno de los 3 dibujos de animales con la palabra que identifica a ese animal. Si un niño asigna aleatoriamente las 3 palabras a los 3 dibujos, encuentre la distribución de probabilidad para Y, el número de correspondencia correctas

$\#S = 6$

$3\ 3 = 9$ X: Correspondencia Correcta $Y =$

Y	$P(Y=y)$
0	$1/3$
1	$3/6 = \frac{1}{2}$
2	0
3	$1/6$

Palabras

$\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 6$

Animales

$= 12$

	A B C	Fi
	x x x	
1 =	a b c	3
2 =	a c b	1
3 =	b a c	1
4 =	b c a	0
5 =	c a b	0
6 =	c b a	1

$\to 1/6$

$$\sum P(Y=y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

(3) Cinco pelotas numeradas del 1 al 5 se encuentran en una urna. Se sacan 2 pelotas al azar y se anotan sus números. Encuentre la distribución de la probabilidad para lo siguiente

(a) El mayor de los dos números seleccionados
(b) La suma de los dos números seleccionados

$\#S = 10$

$\frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = 5 \times 2 = 10$

X: Mayor de los dos números seleccionados

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5) // espacio muestral
(2,3), (2,4), (2,5)
(3,4), (3,5), (4,5)

Y: La suma de los dos números

(a)

X	$P(X=x)$
2	$1/10$
3	$2/10 = 1/5$
4	$3/10$
5	$4/10 = 2/5$

$$\sum P(X=x) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

(b)

Y	$P(Y=y)$
3	$1/10$
4	$1/10$
5	$2/10 = 1/5$
6	$2/10 = 1/5$
7	$2/10 = 1/5$
8	$1/10$
9	$1/10$

$$\sum P(Y=y) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

Escaneado con CamScanner

9) De las personas que llegan a un banco de sangre 1 de 3 tiene tipo sanguíneo O^+, y 1 de 15 tipo O^-. Considérese 3 donantes, seleccionados aleatoriamente del banco de sangre. Sea X el número de donantes con sangre tipo O^+ y Y el número de donantes con sangre tipo O^-. Obtén las distribuciones de probabilidad

· Obtén las distribuciones de probabilidad para X y Y. Determina también la distribución de probabilidad para X+Y el número de donantes con sangre tipo O

A: P C O^n

A_i: Donante i tiene sangre O^+

A_i^c: Donante i no tiene O^+

$A_1 A_2^c A_3^c$
$A_1^c A_2 A_3^c$
$A_1^c A_2^c A_3$

X	$P(X=x)$
0	8/27
1	12/27 = 4/9
2	6/27 = 2/9
3	1/27

$\Sigma(P(X=x)) = \frac{8}{27}+\frac{12}{27}+\frac{6}{27}+\frac{1}{27} = 1$

$3\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 3\left(\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)\right) = \frac{4}{9}$

x=0

$A_1^c A_2^c A_3^c$

$1\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = \frac{8}{27}$

x=2

$A_1 A_2 A_3^c$
$A_1 A_2^c A_3$
$A_1^c A_2 A_3$

$3\left[\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{2}{9} = \frac{6}{27}$

x=3 $(1/3)^3 = 1/27$

Para Y: donantes O^-

A_i: Donante A_i tiene sangre O^-

A_i^c: Donante A_i no tiene sangre O^-

y=0

$A_1^c A_2^c A_3^c$ $\left(\frac{14}{15}\right)\left(\frac{14}{15}\right)\left(\frac{14}{15}\right) = \left(\frac{14}{15}\right)^3 = \frac{2744}{3375}$

y=1

$A_1 A_2^c A_3^c$
$A_1^c A_2 A_3^c$
$A_1^c A_2^c A_3$

$3\left(\frac{1}{15}\left(\frac{14}{15}\right)^2\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{196}{225}\right) = \frac{196}{1125}$

y	$P(Y=y)$
0	2744/3375
1	196/1125
2	14/1125
3	1/3375

y=2

$A_1 A_2 A_3^c$
$A_1 A_2^c A_3$
$A_1^c A_2 A_3$

$3\left(\left(\frac{1}{15}\right)^2 \frac{14}{15}\right) = \frac{14}{1125}$

$\Sigma P(Y=y) = \frac{2744}{3375} + \frac{588}{3375} + \frac{42}{3375} + \frac{1}{3375} = 1$

y=3

$A_1 A_2 A_3$ $\left(\frac{1}{15}\right)^3 = \frac{1}{3375}$

A_i: Donante con sangre O

A_i^c: Donante sin sangre O

$Y+X=0$ $\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{15+3}{45} = \frac{18}{45} = \frac{3}{5}$

Y+X	$P(Y+X = y+x)$
0	27/125
1	54/125
2	36/125
3	8/125

$\Sigma(P(X=x)) = \frac{125}{125} = 1$

$3\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 3\left(\frac{9}{125}\right) = \frac{27}{125}$

1) $3\left(\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = \frac{54}{125}$

2) $3\left[\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2\right] = \frac{36}{125}$

$\frac{2}{5}$

Marginal discreta continua

Segunda

(5)

(a) ¿Cuáles de las siguientes funciones son de probabilidad discreta?

a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x=0 \\ 2/3 & x=1 \\ 0 & o.c \end{cases}$

b) $f_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} & x=0,\ldots,5 \\ 0 & o.c \end{cases}$

Se debe de cumplir con las siguientes propiedades

i) $f_X(x) \geq 0$ ii) $\{x \mid f_X(x) \neq 0\}$ iii) $\sum_x f_X(x) = 1$

el inciso (a): cumple

i)

- $f_X(0) = \frac{1}{3}$ $f_X(0) \geq 0$ ✓
- $f_X(1) = \frac{2}{3}$ $f_X(1) \geq 0$ ✓
- $f_X(2) = 0$ $f_X(2) \geq 0$ ✓

ii) Notemos que todos son valores $f_X(x) \neq 0$

iii) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0 = \frac{3}{3} = 1$ ✓

el inciso (a) es una f.d.p discreta

(b)

$f_X(0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{5-0} = 0.004115$

$f_X(1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}$

$f_X(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$

$f_X(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$

$f_X(4) = \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{80}{243}$

$f_X(5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5(1) = \frac{32}{243}$

iii) $\sum_x f_X(x) = \frac{10}{243} + \frac{40}{243} + \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{2}{3}$

$\therefore \sum_x f_X(x) \neq 1$ b no es una f.d.p discreta

X: demanda de un producto por día

X	P(X=x)
-1	1/5
0	1/10
1	2/5
2	3/10

$E(x) = \sum_x x f_x(x) = \sum_x x P(X=x)$

$E(x) = (-1) f_x(-1) + (0) f_x(0) + 1 f_x(1) + 2 f_x(2)$

$= (-1)\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{5} + 2\left(\frac{3}{10}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

$= 4/5 = 0.8$ Esperanza

$E(x) = 0.8$

Varianza

1) $V(x) = E(x - \mu)^2$

2) $V(x) = E(x^2) - \mu^2$

$x = -1$

$x^2 = (-1)^2$

$E(x^2) = \sum_x x^2 f_x(x) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{5} + 4\left(\frac{3}{10}\right)$

$E(x^2) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$

$E(x)^2 = 0.64$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 1.8 - 0.64 = 1.16$

ⓐ Determina el valor de K

$f_X(x) = K\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x = 1, 2, 3$

x	$f_X = x$
1	$K\left(\frac{1}{2}\right) = K/2$
2	$K/4$
3	$K/8$

$\sum_x f_X(x) = 1$

$1 = \frac{K}{2} + \frac{K}{4} + \frac{K}{8} = \frac{4K}{8} + \frac{2K}{8} + \frac{K}{8}$

$1 = \frac{7K}{8}$

$\frac{8}{7} = K$

$x=1 \quad \frac{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{7}$

$x=2 \quad \frac{8}{7}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{7}$

$x=3 \quad \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8}\right) = 1/7$

X	$P(X=x)$
1	4/7
2	2/7
3	1/7

ⓑ Encuentra la media y Varianza

$E(x) = \sum_x x f_X(x) = 1 f_X(1) + 2 f_X(2) + 3 f_X(3) = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{11}{7}$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = \frac{4}{7} + 4\left(\frac{2}{7}\right) + 9\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{4}{7} + \frac{8}{7} + \frac{9}{7} = \frac{21}{7}$

$[E(x)]^2 = \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{121}{49}$

$V(x) = \frac{21}{7} - \frac{121}{49} = 0.53 = \frac{26}{49}$

ⓒ $x<1 \quad F_X(x) = 0$ para $x<1$

$1 \le x < 2 \quad F_X(x) = P(X \le 1) = 4/7$

$2 \le x < 3 \quad F_X(x) = P(x \le 2) = f_X(1) + f_X(2) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

$x \ge 3 \quad F_X(x) = P(x \le 3) = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{4}{7} & 1 \le x < 2 \\ \frac{6}{7} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

~~A~~ (a) X sea par

a $P(x \text{ sea par}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$

serie geométrica

$a = \frac{1}{4} \qquad r = \frac{1}{4}$

$P(x \text{ sea par}) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

(b) $P(x \geq 5)$?

$P(x \geq 5) = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{2^k} \qquad S = \frac{a}{1-r} \qquad a = \frac{1}{32}$

$r = \frac{1}{2}$

$S = \frac{\frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

(c) $P(X \text{ divisible entre } 3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \ldots$

$a = \frac{1}{8} \quad r = \frac{1}{8}$

$S = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$

$X \sim H(x; r_1, r_2, n)$

$r_1 = 5$

$r_2 = 5$

$r = 10$

$n = 4$

$f_X(x) = \dfrac{\binom{r_1}{x}\binom{r_2}{n-x}}{\binom{r}{n}}$

max

$f_X(0) = \dfrac{\binom{5}{0}\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{1}{42}$

$f_X(1) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{10}{42} = \dfrac{5}{21}$

$f_X(2) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{20}{42} = \dfrac{10}{21}$

$f_X(3) = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{5}{1}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{10}{42} = \dfrac{5}{21}$

$f_X(4) = \dfrac{\binom{5}{4}\binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{1}{42}$