ashejaq

a)

i) gilt $\exists x \forall y \varphi$, somit auch $\forall y \exists x \varphi$, da ein x existiert was für alle y φ erfüllt, weshalb für jedes y dieses x existiert, was φ erfüllt.

ii) Sei $\mathcal{A}_1$ eine σ-Struktur mit $A = \{0,1\}$ und sei $\varphi(x,y) := x = y$.

Somit gilt $\exists x \forall y$ für alle Interpretation $I = (\mathcal{A}_1, \beta)$. Jedoch gilt $\exists x \forall y \varphi = 0$, da weder 0 oder $x = 1$ gilt $\forall y \varphi$

somit existiert ein Gegenbeispiel, weshalb $\forall y \exists x \varphi \models \exists x \forall y \varphi$ nicht Allgemeingültig.

b) ii

$\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$

$\neg(\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$

$\neg\neg\psi \equiv \psi$

$\equiv \exists y(\neg E(z,y) \vee (\forall y E(x,y) \wedge \exists x E(x,y)))$

$\equiv \exists y(\neg E(z,y) \vee \neg(\forall y E(x,y) \vee \exists x E(x,y)))$

$\equiv \exists y(\neg E(x,y) \vee \neg(\neg\forall y E(x,y) \vee \exists x E(x,y)))$

b) i)

$$\varphi \equiv \exists y(\neg E(z,y) \vee (\forall y E(x,y) \wedge \neg \exists x E(x,y)))$$

$$\varphi \equiv \exists y(\neg E(z,y) \vee (\forall y E(x,y) \wedge \forall y \neg E(x,y)))$$

$$\equiv \exists y(\neg E(z,y) \vee (\forall z_1 E(x,z_1) \wedge \forall z_2 \neg E(x,z_2)))$$

$$\equiv \exists y \forall z_1 \forall z_2 (\neg E(z,y) \vee (E x, z_1) \wedge \neg E(x,z_2)))$$

$$\equiv \exists y \forall z_1 \forall z_2 \neg(\neg E(z,y) \vee (E(x_1,z_1) \wedge \neg E(x,z_2)))$$

c) <u>Beweis durch Induktion</u> aschejaq

analog zum Beweis 2.38

Zu zeigen Induktion über den Aufbau definieren wir zu jeden $\varphi \in FO[\sigma]$ (nach Satz 3.47) zwei $FO[\sigma]$-Formeln φ' und φ'' in NNF, gilt $\varphi \equiv \varphi'$ und $\neg\varphi \equiv \varphi''$

Falls $\varphi = X$ ein atomares $X \in FO[\sigma]$:

setzte $\varphi' := X$ und $\varphi'' := \neg X$.

Dann folgt (*).

IS

Falls $\varphi = \neg\psi$ für Formeln ψ:

setzte $\varphi' := \psi'' := \psi'$

Dann folgt (*), aus Induktionsannahme.

Falls $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für $FO[\sigma]$-Formeln ψ_1, ψ_2:

setze $\varphi' := (\psi_1' \wedge \psi_2')$ und

$\varphi'' := \psi_1'' \vee \psi_2''$

Nach Induktionsannahme gilt $\psi_1 \equiv \psi_1'$ und $\psi_2 \equiv \psi_2'$ somit gilt auch $\varphi \equiv \varphi'$. Zudem nach der Induktionsannahme, dass $\neg\psi_1 \equiv \psi_1''$ und $\neg\psi_2 \equiv \psi_2''$. Somit:

$\neg\varphi \equiv (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2) = (\psi_1'' \vee \psi_2'')$

somit gilt (*)

Falls $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ für $FO[\sigma]$-Formeln ψ_1, ψ_2:

setze $\varphi' := (\psi_1' \vee \psi_2')$ und $\varphi'' := (\psi_1'' \wedge \psi_2'')$.

Somit lässt sich wie bei den Beispiel:

$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, dass (*) zeigen, gilt.

Falls $\varphi = \exists x \psi$ für $FO[\sigma]$-Formel ψ:

setze $\varphi' := \exists x \psi'$ und $\varphi'' := \forall x \psi''$.

Somit gilt $\forall x$ die $FO[\sigma]$-Formel ψ'', also gilt $\neg\psi$, so existiert kein x für das $\psi' \equiv \psi$ gilt.

Falls $\varphi = \forall x \psi$ für $FO[\sigma]$-Formel ψ:

setze $\varphi' := \forall x \psi'$ und $\varphi'' := \exists x \psi''$. So wie bei dem Fall dass $\varphi = \exists x \psi$, können wir zeigen, dass (*) gilt. Somit gilt (*).

Falls $\varphi = \neg\psi$ für $FO[\sigma]$ Formel ψ: setzte $\psi' = \psi''$ und $\varphi'' := \psi'$

Dann folgt (*). Die $FO[\sigma]$ Formeln sind in NNF, weil Negationszeichen nur im Induktionsanfang verwendet ✓ dort Aussagensymbolen stehen.

d) Beweis durch Widerspruch. abgeändert

Angenommen es gibt einen $FO[\sigma]$ Satz, der die Sprache aller Worte aus $\{a,b\}^*$ beschreibt, in denen die Anzahl in ihnen vorkommenden as durch eine ungerade Anzahl (Beispiel durch 3) teilbar ist

Würde es so ein $FO[\sigma]$ Satz existieren der alle Worte aus $\{a,b\}^*$ beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as durch 3 teilbar ist, so würde auch ein $FO[\leq]$ Satz φ existieren, sodass für jede endliche lineare Ordnung B gilt: $B \models \varphi \Leftrightarrow |B|$ ist gerade. Nach Satz 3.58 solch ein Satz φ nicht existieren kann, existiert auch solch ein Satz nicht.

Weil, dass durch "rausfiltern" der bs mit der atomaren $FO\sigma_\Sigma$-Formel P_a man φ alle Worte mit der Länge teilbar durch 3 erkennen muss. Somit muss auch alle Worte mit der Länge teilbar durch 6 erkennen. Da sich der Faktor 3 vernachlässigen lässt, weil er ja Konstant ist, muss somit φ alle Worte gerader Länge akzeptieren $\square$