Problème du cercle

Achemlal Houdayfa

Dans toute la suite, $G(S, A)$ est un graphe où S est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes. Le degré d'un sommet est le nombre de ses voisins par arête et une face d'un graphe planaire est une zone du plan délimitée par des arêtes.

Théorème 1 (Formule d'Euler)**.** *Soit $G(S, A)$ un graphe planaire et connexe de s sommets, de a arêtes et de f faces. Alors :*

$$s - a + f = 2$$

Preuve. Nous allons procéder par induction sur le nombre des arêtes a :

Pour $a = 1$, $G(S, A) = K_2$ (le graphe complet de deux sommets et une arête), dans ce cas, le nombre de faces est égal à 1, et on obtient :

$$s - a + f = 2 - 1 + 1 = 2$$

Supposons alors que la propriété est vraie pour a, et montrons qu'elle est vraie pour $a + 1$. Si le graphe est un arbre, le nombre de sommets d'un arbre de $a + 1$ arêtes est égal à $a + 2$, et le nombre des faces est égal à 1. Donc :

$$s - a + f = a + 2 - (a + 1) + 1 = 2$$

Si le graphe n'est pas un arbre, comme le graphe est connexe, alors il existe une arête qui forme un cycle. Si on brise cette arête, on perd une face et une arête, et on obtient un graphe de a arêtes, alors par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} s - (a - 1) + (f - 1) &= 2 \\ s - a + f &= 2 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $a + 1$. On en conclut, par principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tout a.

Lemme 1 (Lemme des poignées de main). *Soit $G(S, A)$ un graphe. Alors :*

$$2|A| = \sum_{s \in S} \deg(s)$$

Le principe de ce lemme traduit le fait qu'additionner les degrés des sommets revient à compter deux fois une arête.

Problème

On considère D_n le disque avec n points sur sa frontière ∂D_n, on lie tous les points avec des cordes, et on suppose que pour tout ensemble de trois cordes distinctes, les cordes de cet ensemble ne sont pas concourantes.

Ces cordes coupent le disque en f faces, on cherche à déterminer f.

Solution

On considère $G_n(S, A)$ le graphe planaire d'ordre n associé à D_n dont les sommets sont les points d'intersection (des cordes entre eux, et des cordes avec ∂D_n), et dont les arêtes sont les segments qui lient deux sommets.

On regroupe les sommets en deux ensembles disjoints : l'ensemble des sommets sur la frontière du disque que l'on note F, et l'ensemble des sommets à l'intérieur du disque que l'on note I.

On a donc :

$$|S| = |F| + |I|$$

D'après l'hypothèse, le cardinal de F est égal à n. Et un sommet de I est obtenu par l'intersection de deux segments qui sont obtenus par 4 points dans ∂D. Chaque sommet intérieur correspond alors à un choix de 4 points distincts, et ainsi à une partie de F à 4 sommets. Soit $P_4(F)$ l'ensemble des parties à 4 sommets. Alors :

$$\begin{aligned} |I| &= |P_4(F)| \\ &= \binom{n}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |S| &= |F| + |I| \\ &= n + \binom{n}{4} \end{aligned}$$

Le degré de tout sommet dans F est égal à $n-1$, et le degré des sommets de I est égal à 4. D'après le lemme des poignées de main, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
|A| &= \frac{1}{2}\sum_{s\in S}\deg(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{s\in F}\deg(s) + \sum_{s\in I}\deg(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{s\in F}(n-1) + \sum_{s\in I}4\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n(n-1) + 4\times\binom{n}{4}\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + 2\times\binom{n}{4}
\end{aligned}$$

Et en considérant les n faces entre le graphe et la frontière du disque, et en annulant la face à l'extérieur du disque, on obtient par la formule d'Euler le nombre des faces dans le disque :

$$\begin{aligned}
f &= 2 + |A| - |S| - 1 + n \\
&= 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}
\end{aligned}$$