Structures géométriques sur les variétés

Achemlal Houdayfa

Mes notes de stage sur les variétés localement homogènes.

Table des matières

1 Motivation

Motivé par l'idée de Felix Klein selon laquelle la géométrie est régie par son groupe de transformations de symétrie, Charles Ehresmann a initié l'étude des structures géométriques sur les espaces topologiques localement modelés sur un espace homogène d'un groupe de Lie. Ces espaces localement homogènes ont ensuite constitué le cadre du programme de géométrisation en dimension 3 de Thurston.

Le problème fondamental est, pour une topologie donnée Σ et une géométrie $X = G/H$, de classifier toutes les manières possibles d'introduire la géométrie locale de X dans Σ. Par exemple, une sphère n'admet aucune géométrie euclidienne locale : il n'existe pas d'atlas euclidien de la Terre qui soit métriquement précis. On développe alors un espace dont les points sont des classes d'équivalence de structures géométriques sur Σ, lequel présente en lui-même une riche géométrie et des symétries issues des symétries topologiques de Σ.

2 Géométrie de Klein

Définition 1 (Une géométrie de Klein). Une géométrie de Klein est la donnée d'un couple $(G, G/H)$, où G, le groupe principal est un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé (de manière équivalente un sous-groupe de Lie), tel que l'action naturelle de G sur $X = G/H$ est transitive.
On appelle l'espace homogène X l'espace de la géométrie, ou par abus de langage la géométrie de Klein, il vient de la définition et de la topologie quotient que X est connexe.
Comme H est fermé, X hérite une structure topologique de variété topologique.

Définition 2. Soit $U \subset X$ un ouvert, on dit qu'un morphisme $f : U \to X$ est localement-G si pour toute composante connexe C de U, il existe $g \in G$ tel que $f_{|C} = g_{|C}$

Les exemples classiques des géométries sont la géométrie euclidienne $(O_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la géométrie affine $(GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et la géométrie complexe $(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Définition 3. Étant donné une géométrie (G, X) et une variété M de même dimension que X. Une G/H-structure sur M est un atlas maximal $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ tel que :

- $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M.
- Les morphismes $\varphi_i : U_i \to X$ sont des plongements ouverts.
- Les applications de changement de cartes :

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_i) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

  sont localement-G.

Une variété munie d'une telle structure est dite une G/H-variété.

Exemple 1. *Pour toute géométrie (G, X), l'espace X est tautologiquement une (G, X)-variété telle que le morphisme identité est une carte globale. Plus généralement, pour tout ouvert U de X, U est une (G, X)-variété avec l'identité comme carte globale.*

Exemple 2. *On considère le groupe des biholomorphismes $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$, soit Λ un réseau, par exemple $\mathbb{Z}[i]$, on définit alors le tore complexe $T_\mathbb{C} = \mathbb{C}/\Lambda$, alors $\mathbb{C}$ est un revêtement universel sur $T_\mathbb{C}$ ce qui donne au tore une $(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$-structure.*

Soient M et N deux (G, X)-variétés et $f : M \to N$ une application. On dit que f est une (G, X)-application si pour toutes deux cartes de M et N :

$$\varphi_i : U_i \to X \quad , \quad \psi_j : V_j \to X$$

la restriction de $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ à $\varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j))$ est localement-G. En particulier, on considère les (G, X)-applications qui sont des difféomorphismes locales. L'ensemble des (G, X)-automorphismes $M \to N$ est un groupe que l'on notera $\mathrm{Aut}_{(G,X)}(M)$.

2.1 Le pseudogroupe des applications locales

Les applications localement-G satisfont la propriètè d'extension unique :
Si $U \subset X$ est un ouvert connexe non vide et $f : U \to X$ est localement-G, alors il existe un unique élément $g \in G$ qui est une restriction de f.

D'abord, on peut regarder M comme l'espace quotient de :

$$\mathcal{M} = \coprod_i U_i$$

par la relation d'équivalence $\sim$: un point $u \in U_i \cap U_j$ détermine les éléments correspondants $u_i \in U_i$ et $u_j \in U_j$, et on définit la relation d'équivalence par $u_i \sim u_j$. Alors le changement de coordonnées

$$\varphi_\beta\big(U_\alpha \cap U_\beta\big) \xrightarrow{\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1}} \varphi_\alpha\big(U_\alpha \cap U_\beta\big)$$

est localement-G. Par la propriété d'extension unique, il existe un unique

$$g_{ij} \;:\; U_i \cap U_j \;\longrightarrow\; G$$

est localement constant tel que, pour tout $u \in U_i \cap U_j$,

$$\varphi_i(u) \;=\; g_{ij}(u)\,\big[\varphi_j(u)\big].$$

On peut alors décrire la variété (G, X)-structure M comme le quotient du *recollement disjoint*

$$\mathcal{M}_\Phi \;:=\; \bigsqcup_\alpha \varphi_i(U_i)$$

par la relation d'équivalence $\sim_\Phi$: pour tout $u \in U_i \cap U_j$,

$$\varphi_i(u) \;\sim_\Phi\; \varphi_j\big(u\big) \quad\iff\quad \varphi_i(u) \;=\; g_{ij}(u)\,\big[\varphi_i(u)\big].$$

Cette relation est une équivalence d'après les identités de cocycle :

$$\begin{aligned} g_{ii}(u_i) &= 1, \\ g_{ij}(u_\beta)\,g_{ji}(u_i) &= 1, \\ g_{ij}(u_j)\,g_{jk}(u_k)\,g_{ki}(u_i) &= 1, \end{aligned}$$

valables pour $u_i \in U_i, u_j \in U_i \cap U_j, u_k \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

2.2 Les (G, X)-automorphismes

Si Ω est un ouvert connexe non vide, un (G, X)-automorphisme $f : \Omega \to \Omega$ est la restriction d'un élément unique $g \in G$ préservant Ω :

$$\mathrm{Aut}(\Omega) \cong \mathrm{Stab}(\Omega) = \{g \in G : g\dot{\Omega} = \Omega\}$$

On suppose maintenant $f : M \to \Omega$ un difféomorphisme local. Il existe un homomorphisme :

$$f_* : \mathrm{Aut}_{(G,X)}(\Omega) \to \mathrm{Aut}_{(G,X)}(\Omega)$$

dont le noyau est l'ensemble des applications $h : M \to M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, "f"] & \Omega \end{tikzcd}$$

2.3 Application développante

Soit M une (G, X)-variété. Soit $p : \tilde{M} \to M$ un revêtement universel de groupe fondamental $\pi = \pi_1(M)$. p induit une (G, X)-structure sur $\tilde{M}$ sur laquelle π agit par (G, X)-automorphismes. La propriété d'extension unique entraîne :

Proposition 1. *Soit M une (G, X)-variété simplement connexe. Alors il existe une (G, X)-application $f : M \to X$*

Définition 4. On dit qu'une (G, X)-variété M est complète si l'application développante est un revêtement.

Proposition 2 (Le groupe d'holonomie caractérise la variété)**.** *Si G est un groupe qui agit analytiquement par difféomorphismes sur un espace topologique simplement connexe X, toute (G, X)-variété complète peut être construite de son groupe d'holonomie Γ comme l'espace quotient X/Γ*

Démonstration. Comme X est simplement connexe, et M complète, alors par unicité du revêtement universel :

$$\tilde{M} \cong X$$

Le développement étant un difféomorphisme, l'action du groupe fondamental sur $\tilde{M}$ se transporte via dev sur X telle que pour tout $x \in X, \gamma \in \pi_1(M)$, on a :

$$\gamma \cdot x = \mathrm{dev}(\gamma \cdot \mathrm{dev}^{-1}(x)) = \mathrm{hol}(\gamma) \cdot x$$

Par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[r, "\mathrm{dev}"] \arrow[d, "\gamma"'] & X \arrow[d, "\mathrm{hol}(\gamma)"] \arrow[dl, "\mathrm{dev}^{-1}"'] \\
\tilde{M} \arrow[r, "\mathrm{dev}"] & X
\end{tikzcd}$$

Ainsi l'action du groupe d'holonomie coïncide avec celle du groupe fondamental qui est fidèle. Ainsi l'holonomie est injective, par le théorème d'isomorphisme :

$$M \cong X/\pi_1(M) \cong X/\Gamma$$

□

Lemme 1. *(principe d'Eckmann-Hilton)*

— *On suppose qu'un ensemble X est muni de deux structures de magma unifère $*$ et $\cdot$, et tel que pour $x, x', y, y' \in X$ on a :*

$$(x \cdot x') * (y \cdot y') = (x * y) \cdot (x' * y')$$

alors les deux lois coïncident et X est un manoïde commutatif.

En particulier, le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien.

Démonstration. On prend $x = y' = 1_*$ et $x' = y = 1.$, cela donne $1 \doteq 1_* = 1$. On prend maintenant $x' = y = 1$, cela donne :

$$x * y' = x \cdot y'$$

Ainsi $* = \cdot$, on en déduit alors l'associativité et la commutativité :

$$x = 1 \Rightarrow x' * (y * y') = y * (x' * y')$$

$$x = y' = 1 \rightarrow x'sty = y * x'$$

Ainsi X est muni d'une structure de manoïde commutatif.
Montrons que le groupe fondamental $\pi = \pi_1(G)$ d'un groupe topologique $(G, \cdot)$ est abélien. La loi de G induit sur π une seconde loi (à la concaténation $+$), pour γ, δ deux lacets dans G :

$$\gamma * \delta : t \mapsto \gamma(t) \cdot \delta(t)$$

Cette loi est bien défini comme la multiplication de G est continue. Si bien que :

$$[\gamma * \delta] = [t \mapsto \gamma(t) \cdot \delta(t)] = [t \mapsto \gamma(t)] * [t \mapsto \delta(t)] = [\gamma] * [\delta]$$

Soit $a, b, c, d \in \pi$, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)*(c+d) &= t \mapsto (a+b)(t)\cdot(c+d)(t)\\ &= (t \mapsto a(t)\cdot c(t)) + (t \mapsto b(t)\cdot d(t))\end{aligned}$$

Par Eckmann-Hilton π est abélien.

$\square$

On remplacer l'espace X par son revêtement universel quand X n'est pas simplement connexe. Il existe un groupe de revêtement $\tilde{G}$ agissant sur $\tilde{X}$ par homéomorphismes. On peut alors décrire $\tilde{G}$ par l'extension :

$$1 \to \pi_1(X) \to \tilde{G} \to G \to 1$$

On dit qu'un groupe G admet une section locale (local cross-section) par rapport à un sous-groupe fermé $H < G$ si on a la donnée :

- un voisinage $U \subset G/H$ de l'identité.
- un sous-ensemble $S \subset G$ tel que la projection canonique restreint à S soit un homéomorphisme sur U. On appellera la section locale l'application $\sigma : U \to G$ telle que $\pi(\sigma(gH)) = gH$ et $\sigma(1H) = 1$.

Cela signifie que localement autour de la classe neutre, on peut choisir de façon continue un représentant unique de chaque classe gH. On étudie alors la structure de $\pi_1(X)$ quand X n'est pas simplement connexe :

- Soit X une variété et $G \subset \mathrm{Homeo}(X)$ transitivement, soit $x \in X$ et G_x son stabilisateur (fermé dans G), supposons que G admet une section locale par rapport à G_x et que le morphisme $\rho : g \mapsto gx$ est ouvert. On construit un homéomorphisme $\phi : \pi_1(X) \to \pi_0(G_x)$. Et on montrera que le noyau de ϕ est central. En particulier, si G_x est connexe par arcs alors $\pi_1(X)$ est abélien.

Démonstration. $\square$

Lemme 2. *Si G est un groupe de Lie, tout sous groupe fermé (i.e de Lie) a une section locale. L'application ρ est ouverte.*

Démonstration. $\square$

3 Groupes discrets et théorème de Bierberbach

Selon la caractérisation des variétés par leurs groupes d'holonomie. Quand G est un groupe qui agit analytiquement par difféomorphismes sur une variété simplement connexe X, les (G, X)-variétés complètes sont en correspondance à isomorphisme près avec certains sous-groupes de G à conjugaison près.

On va considérer les groupes qui agissent effectivement (i.e seul l'élément neutre agit trivialement sur X)

Proposition 3. *Soit Γ un groupe qui agit librement sur une variété connexe et Hausdorff X et supposons que l'action est errante. Alors X/Γ est une variété et l'injection canonique est un revêtement.*

Démonstration. Soit $x \in X$, comme l'action est errante et libre et X est Hausdorff, on peut trouver un voisinage U de x tel que les γU sont tous disjoints. □

L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(2x, 1/2x)$ est errante mais le quotient est non-Hausdorff.

Proposition 4. *Soit Γ ungroupe qui agit sur une variété X. Alors X/Γ est une variété et la projection canonique est un revêtement si et seulement si l'action est proprement discontinue et libre.*

3.1 Théorème de Bieberbach

Définition 5 (groupe crystallographique/groupe de Bieberbach). Un n-dimensionnel groupe crystallographique (ou de Bieberbach) est un sousgroupe discret cocompact de $O_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$

Théorème 1.
- *Un groupe Γ est isomorphe à un groupe discret de $O_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ si et seulement si Γ contient un sousgroupe abélien libre de rang fini et d'indice fini dans Γ.*
- *Un groupe crystallographique de dimension m contient un sous-groupe normal d'indice fini qui est un groupe libre abélien de rang m et est égal à son centralisateur.*

  Réciproquement, si Γ est un groupe qui contient un sous-groupe normal d'indice fini qui est abélien libre de rang m et est égal à son centralisateur. Alors Γ est isomorphe à un groupe crystallographique de dimension m. Demander que Γ ait un sous-groupe normal et soit égal à son centralisateur est équivalent à demander qu'il soit sans torsion.
- *Si Γ et Γ' sont deux groupes crystallographiques de dimensions respectives m et m' qui soient isomorphes, alors $m = m'$ et il existe un isomorphisme affine $a : E^m \to E^m$ qui envoie par conjugaison Γ à Γ'.*

— *Pour m donné, il existe un nombre fini de groupes cristallographiques de dimension m à isomorphisme affine près.*

Corollaire (Classification des variétés euclidiennes). Les classes de difféomorphismes des variétés euclidiennes compactes de dimension m sont en correspondance, via leurs groupes fondamentaux, avec les groupes sans torsion contenant un sous-groupe d'indice fini qui soit isomorphe à $\mathbb{Z}^m$