14. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Sprawdzić zbieżność szeregów i zbadać różniczkowalność sumy.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2x}{2^n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(nx^2+1)}{n\sqrt{n}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(n^2x^2)\right)$$

2. Obliczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych oraz szeregów pochodnych.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}x^n\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}x^n\qquad \sum_{n=1}^{\infty}4^n x^{n^2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}x^n$$

3. Rozłożyć wielomian $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ względem potęg dwumianu $x+1$.

4. Rozłożyć funkcje względem potęg zmiennej x do podanego rzędu włącznie.

$$f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2};\quad x^4\qquad g(x)=e^{2x-x^2};\ x^5\qquad h(x)=\sqrt[3]{1-2x-x^3};\quad x^3$$
$$u(x)=\ln(\cos x);\ x^6\qquad v(x)=\sin(\sin x);\quad x^4$$

Obliczyć $f^{(4)}(0),\ g^{(3)}(0),\ h''(0),\ u^{(5)}(0),\ v^{(3)}(0)$.

5. Znaleźć rozkład funkcji $f(h)=\ln(x+h),\ (x>0)$, względem potęg h do miejsca h^n.

6. Funkcja f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna i $f^{(n+1)}$ jest funkcją ciągłą. Niech

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h)\quad (0<\theta(h)<1)$$

przy czym $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Pokazać, że $\theta(h)\to\frac{1}{n+1}$, gdy $h\to 0$.

7. Załóżmy, że $f(x)=1+kx+g(x)$ oraz $\lim_{x\to 0}(g(x)/x)=0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to 0}f(x)^{1/x}=e^k$.

8. Funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na odcinku $[0,1]$ oraz $f(0)=f(1)=0$, $|\,f''(x)\,|\leqslant A$ dla $x\in(0,1)$. Pokazać, że $|\,f'(x)\,|\leqslant A/2$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$.

9. Niech $f(x)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na półprostej dodatniej i $M_n=\sup\limits_x|\,f^{(n)}(x)\,|$ dla $n=0,\,1,\,2$. Udowodnić nierówność $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$.

∗10. Niech $f(x)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na prostej i $M_n=\sup\limits_x|\,f^{(n)}(x)\,|$ dla $n=0,\,1,\,2$. Udowodnić nierówność $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

11. Obliczyć wielkości z podaną dokładnością.

$$e;\ 10^{-9}\qquad \sin 1^\circ;\ 10^{-8}\qquad \sqrt{5};\ 10^{-4}\qquad \log_{10}11;\ 10^{-5}$$

12. Znaleźć szereg Taylora dla podanych funkcji w punkcie a.

$$f(x)=\sin 2x;\ a=0\quad f(x)=\ln 3x;\ a=1\quad g(x)=x\ln(1+x^2);\ a=0\quad h(x)=\sin^2 x;\ a=0$$

13. Znaleźć szereg Taylora dla funkcji

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-x}{x^3} & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{6} & x=0\end{cases}$$

***14.** Niech a_n będzie ciągiem Fibonacciego określonym przez $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \geqslant 1$.

(a) Pokazać, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ wynosi przynajmniej $1/2$. `Wskazówka:` Pokazać, że $0 \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$, czyli $a_n \leqslant 2^n$.

(b) Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2} \text{ dla } |x| < \frac{1}{2}.$$

`Wskazówka:` Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x$$

15. Znaleźć punkt na wykresie funkcji $y = x^{1/2}$ położony najbliżej punktu $(4, 0)$.

16. Pojemnik w kształcie cylindra jest wypełniony wodą do wysokości H. Na poziomie h m poniżej poziomu wody znajduje się mały otwór. Według prawa Torricelliego prędkość (pozioma) wody przepływającej przez otwór wynosi $\sqrt{2gh}$. Strumień wody spada w pewnej odległości R od dolnej krawędzi cylindra. Wyznaczyć wartość h dla której R jest maksymalne. Następnie obliczyć maksymalną wartość R.