Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2007, termin poprawkowy, część A, czas: 120 min.

Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1

Niech

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Załóżmy, że istnieje taka liczba pierwsza p, że p jest dzielnikiem dokładnie jednej spośród liczb $a_1, \ldots, a_n$. Pokaż, że wtedy S nie jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2

Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Niech $S_n = \sum_{A \subseteq X} \max(A)$, gdzie $\max(A)$ oznacza największy element w zbiorze A (przyjmujemy, że $\max(\emptyset) = 0$). Podaj jawny wzór na S_n.

Zadanie 3

Ile jest takich słów złożonych z liter a, b, c, d długości n, w których nie ma podsłów bb, cc, dd?

Zadanie 4

Niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$. Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} H_n 2^{-n}$.

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2007, termin poprawkowy, część B, czas: 120 min.
Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5
Losujemy liczbę $x \in [0,1]$ z rozkładem jednostajnym. Następnie losujemy liczbę $y \in [0,x]$ z rozkładem jednostajnym, a następnie liczbę $z \in [0,y]$, również z rozkładem jednostajnym. Oblicz wartość oczekiwaną $x+y+z$.

Zadanie 6
Hiperkostką wymiaru k nazywamy graf $G=(V,E)$, gdzie $V=\{0,1\}^k$ (tj. są to ciągi k-bitowe) oraz krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ich zapis binarny różni się na dokładnie jednej pozycji. Pokaż, że między dwoma różnymi wierzchołkami k-wymiarowej hiperkostki istnieje k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.

Zadanie 7
Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1,2,\ldots,n$, w których nie ma pętli i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

Zadanie 8
Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n>1$, to może być to zrobione na co najmniej 2 sposoby.

Powodzenia !