Zad 8 - przykład funkcji 2-13/11

Podaj przykład funkcji $f(x,y)$, która jest nieciągła w $(0,0)$, ale posiada pochodne cząstkowe w każdym punkcie.

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję f zdefiniowaną następująco :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Widać, że funkcja f jest ciągła (bo jest to iloraz dwu funkcji ciągłych) poza punktem $(0,0)$. By to zobaczyć wystarczy przyjąć $x_n = \frac{1}{n} = y_n$. Wtedy $f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.
Gradient możemy policzyć bezpośrednio w każdym punkcie, w którym funkcja f jest ciągła.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2xy^7}{(x^2+y^4)^2}, \frac{x^2(3x^2y^2 - y^6}{(x^2+y^4)^2} \right)$$

Pokażmy, że pochodne cząstkowe istnieją też w punkcie $(0,0)$. Skorzystajmy z definicji :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \ \dots \ = 0$$

Dostajemy, że $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Podany przykład funkcji spełnia warunki zadania.

$\square$