Wrocław, 28 stycznia 2015

KILKA ZADAŃ DO TRENINGU PRZED EGZAMINEM

1. Dowieść, że równanie
$$x^{1000000}+2=(1,000001)^x$$
ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

2. Dowieść, że równanie
$$x^2=25\pi^2\cdot\cos\left(x^3\right)$$
ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

3. Pokaż, że funkcja $\operatorname{tgh} x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$ jest odwracalna na całej prostej. Znajdź funkcje pochodne funkcji tgh i jej odwrotnej.

4. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=\log_4(2^x+8^x)$$

5. Oblicz
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$$

6. Wyznacz przedział zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}50^n x^{2n+5}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!x^n}{(n!)^3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+7}x^{6n}}{\sqrt{n}}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^{2^n}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{n^2}x^{n^3}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\binom{3n}{n}x^n}{n^2}$

7. Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^{n^2}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+10}{n}x^n$

8. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

9. Niech $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$. Oblicz z definicji $f'(3)$.

10. Oblicz granice:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{e^x}-e}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-x^2-2}{x\sin x-x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^x-4}{x-2}$

11. Czy funkcja $f(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(x>0)$, $f(0)=0$ jest różniczkowalna? Czy jest klasy C^1 (pochodna ciągła)?

Marcin Preisner [preisner@math.uni.wroc.pl] .

12. Rozwiń w szereg Taylora w punkcie $x = 0$ funkcje

$$x^3 \cos(x^2)$$

$$\ln(1+x^4)$$

$$f(x) = \frac{2\cos x - 2}{x^2} \qquad (f(0) = 0)$$

13. Oszacuj błąd przybliżenia

$$e^x \simeq 1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/(n!) \quad (x \in [0,1])$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x \in [0,1])$$

14. Znajdź wymiary prostokąta bez jednego boku, który ma długość trzech boków równą 60 cm oraz największą możliwą powierzchnię (po domknięciu).

15. Rysujemy prostokąt pod wykresem sinusoidy na odcinku $[0,\pi]$ i nad osią Ox. Znajdź największe możliwe pole takiego prostokąta.

16. Zbadaj zbieżność jesdnostajną szeregów funkcyjnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}x^4}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2|x|}$$

17. Udowodnij, że funkcja ciągła, która ma granice w $\pm\infty$ jest jednostajnie ciągła.

18. Policz granicę

$$\lim_{n\to\infty} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\left(\frac{e}{2n}\right)^n$$

19. Oblicz z definicji całki:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$\int_2^5 (x^2 - x)\,dx$$

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$$

20. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

21. Udowodnij oszacowania

(a) $2\sqrt{2} < \int\limits_2^4 x^{1//x}\,dx$

(b) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx < \frac{3}{4}$

22. Oblicz

$$\frac{d}{dx}\int_{\ln(\sin x^2)}^{e^{e^x}} e^{\sin\sqrt[3]{x}}\,dx$$

23. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \ldots + \frac{n}{50n^2}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(e^{\sqrt{\frac{1}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{2}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{3}{n}}} + \ldots + e^{\sqrt{\frac{n}{n}}})$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n}\cdot(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\ldots+\sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

24. Oblicz całki nieoznaczone z funkcji

(a) $x^3 e^{5x}$

(b) $e^x \sin^2 x$

(c) $\sqrt{e^x - 1}$

(d) $e^{3x} \sin 2x$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}}$

(f) $\dfrac{x^4}{x^{15}-1}$

(g) $\sin^3 x \cos^8 x$

(h) $\sin^6 x \cos^2 x$

(i) $\sin(3x)\cos(2x)$

25. Znajdź wzór rekurencyjny na

$$\int x^n e^{x^2}\, dx$$

$$\int \sin^n(x)\, dx$$