	Imię i Nazwisko:	Grupa[1]:
Wersja: **A**	Maksymilian Debeściak	wt / cz; 8–10, 10–12, 12–14; 103, 105, 139, 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 13 grudnia 2013

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy zbiór czteroelementowy $A = \{a, b, c, d\}$. W prostokąt poniżej wpisz liczbę takich relacji równoważności na zbiorze A, w których klasa abstrakcji $[a]$ ma dokładnie dwa elementy.

6

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $R = \{\langle m, m+2\rangle \mid m \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

$\exists k \in \mathbb{N}\ k \geq 1 \wedge m + 2k = n$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli równość $f^{-1}(f(X) \setminus Y) = X \setminus f^{-1}(Y)$ zachodzi dla wszystkich funkcji $f : A \to B$ i wszystkich zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $X = [0, 1]$, $Y = \emptyset$

Zadanie 4 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ będzie zadana wzorem $f(x, y) = 2x + y$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz „NIE ISTNIEJE".

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $\qquad g(n) = \begin{cases} \langle \frac{n}{2}, 0\rangle, & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \langle \frac{n-1}{2}, 1\rangle, & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów, w których bywają wszystkie osoby lubiące sok *Malinowy*.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Wersja: **A**

Imię i Nazwisko: Maksymilian Debeściak

Grupa[1]:

wt	8–10	103	139
cz	10–12	105	141
	12–14		

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadaną wzorem $f(X) = \{2x \mid x \in X\}$. Udowodnij, że f jest różnowartościowa. Czy f jest bijekcją? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech R i S będą relacjami równoważności na zbiorze A. Udowodnij, że jeśli relacja SR jest symetryczna to $SR = RS$.

Zadanie 8 (5 punktów). Dla relacji binarnej $S \subseteq A \times A$ definiujemy $S^1 = S$ oraz $S^{n+1} = SS^n$ dla wszystkich $n \geq 1$. W następującym zadaniu możesz skorzystać z własności, że dla wszystkich takich relacji S zachodzi równość $SS^n = S^nS$.

Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ relacja $(R \cup R^{-1})^n$ jest symetryczna.

Rozwiązanie.
Podstawa indukcji: Dla $n = 1$ chcemy pokazać, że relacja $(R \cup R^{-1})$ jest symetryczna. Weźmy więc dowolną parę $\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1}$. Wtedy $\langle x, y\rangle \in R$ lub $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$ i mamy do rozpatrzenia dwa przypadki. Jeśli $\langle x, y\rangle \in R$ to $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$, więc $\langle y, x\rangle \in R \cup R^{-1}$. Jeśli natomiast $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, to $\langle y, x\rangle \in R$, więc $\langle y, x\rangle \in R \cup R^{-1}$. Zatem w obu przypadkach $\langle y, x\rangle \in R \cup R^{-1}$, czyli $R \cup R^{-1}$ jest symetryczna.
Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $n \geq 1$ i załóżmy, że relacja $(R \cup R^{-1})^n$ jest symetryczna. Pokażemy, że $(R \cup R^{-1})^{n+1}$ jest symetryczna. Weźmy więc dowolną parę $\langle x, y\rangle \in (R \cup R^{-1})^{n+1}$. Wtedy istnieje takie z, że $\langle x, z\rangle \in (R \cup R^{-1})$ oraz $\langle z, y\rangle \in (R \cup R^{-1})^n$. Weźmy takie z. Z założenia indukcyjnego oraz z podstawy indukcji wiemy, że obie relacje $R \cup R^{-1}$ oraz $(R \cup R^{-1})^n$ są symetryczne, więc $\langle z, x\rangle \in (R \cup R^{-1})$ oraz $\langle y, z\rangle \in (R \cup R^{-1})^n$, a to z definicji złożenia relacji oznacza, że $\langle y, x\rangle \in R^nR$. Z łączności składania relacji otrzymujemy, że $\langle y, x\rangle \in R^{n+1}$. Zatem relacja $(R \cup R^{-1})^{n+1}$ jest symetryczna.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Wersja: **B**

Imię i Nazwisko:

Maksymilian Debeściak

Grupa[1]:

wt cz	8–10 10–12 12–14	103 105	139 141

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 13 grudnia 2013

Zadanie 1 (2 punkty). Rozważmy zbiór trzyelementowy $A = \{a, b, c\}$. W prostokąt poniżej wpisz liczbę takich relacji równoważności na zbiorze A, które mają dokładnie dwie klasy abstrakcji.

3

Zadanie 2 (2 punkty). Niech $R = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |m - n| = 2\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

$\exists k{\in}\mathbb{Z}\ m{-}n = 2k$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli równość $f(f^{-1}(Y) \setminus X) = Y \setminus f(X)$ zachodzi dla wszystkich funkcji $f : A \to B$ i wszystkich zbiorów $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $X = \emptyset$, $Y = [-1, 1]$

Zadanie 4 (2 punkty). Niech funkcja $f : \mathbb{Z} \times [0, 1) \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x, y) = x + y$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz „NIE ISTNIEJE".

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times [0, 1)$, $\qquad g(x) = \langle \lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor \rangle$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów, w których bywają tylko osoby lubiące sok *Malinowy*.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Wersja:	**B**	Imię i Nazwisko: Maksymilian Debeściak	Grupa[1]:	wt / cz; 8–10 / 10–12 / 12–14; 103 139 / 105 141

Zadanie 6 (5 punktów). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadaną wzorem $f(X) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \in X\}$. Udowodnij, że f jest „na". Czy f jest bijekcją? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech R i S będą relacjami równoważności na zbiorze A. Udowodnij, że jeśli relacja SR jest przechodnia to jest też symetryczna.

Zadanie 8 (5 punktów). Rozważmy relację binarną $R \subseteq A \times A$. Definiujemy $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = RR^n$ dla wszystkich $n \geq 1$.

Udowodnij, że dla każdej relacji równoważności S zawierającej R oraz dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ relacja $(R \cup R^{-1})^n$ jest zawarta w S.

Rozwiązanie. Weźmy dowolną relację S zawierającą R. Pokażemy indukcyjnie, że $(R \cup R^{-1})^n$ jest zawarta w S. Podstawa indukcji: Dla $n = 1$ chcemy pokazać, że relacja $R \cup R^{-1}$ jest zawarta w S. Weźmy więc dowolną parę $\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1}$. Jeśli $\langle x, y\rangle \in R$ to z założenia, że S zawiera R dostajemy $\langle x, y\rangle \in S$. Jeśli natomiast $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, to $\langle y, x\rangle \in R$ i wtedy $\langle y, x\rangle \in S$, a z symetryczności S dostajemy $\langle x, y\rangle \in S$.

Krok indukcyjny: Weźmy dowolne $n \geq 1$ i załóżmy, że relacja $(R \cup R^{-1})^n$ jest zawarta w S. Pokażemy, że $(R \cup R^{-1})^{n+1}$ jest zawarta w S. Weźmy więc dowolną parę $\langle x, y\rangle \in (R \cup R^{-1})^{n+1}$. Wtedy istnieje takie z, że $\langle x, z\rangle \in R \cup R^{-1}$ oraz $\langle z, y\rangle \in (R \cup R^{-1})^n$. Weźmy takie z. Z podstawy indukcji wiemy, że $\langle x, z\rangle \in S$ a z założenia indukcyjnego, że $\langle z, y\rangle \in S$. Z przechodniości S wynika, że $\langle x, y\rangle \in S$. Zatem relacja $(R \cup R^{-1})^{n+1}$ jest zawarta w S.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.