6. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Zamienić kolejność całkowania, naszkicować obszary całkowania i obliczyć całki.

$$\int_0^1\int_x^1 xy\,dy\,dx,\qquad \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\cos\theta\,dr\,d\theta,$$
$$\int_0^1\int_1^{2-y}(x+y)^2\,dx\,dy,\quad \int_a^b\int_a^y \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\,dx\,dy.$$

2. Obliczyć całki

$$\int_{-1}^1\int_{|y|}^1(x+y)^2\,dx\,dy,\quad \int_{-3}^1\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}x^2\,dx\,dy,$$
$$\int_0^4\int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dx\,dy,\qquad \int_0^1\int_{\arctan y}^{\pi/4}\sec^5 x\,dx\,dy.$$

3. Pokazać, że

$$\frac{1}{e}\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]}e^{\sin(x+y)}\,dx\,dy\leqslant e,$$
$$-\frac{1}{2}\leqslant\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{\sin x}{1+(xy)^4}\,dx\,dy\leqslant 1,$$
$$1\leqslant\int_{[-1,1]\times[-1,2]}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}\leqslant 6.$$

4. Pokazać, że

$$\frac{1}{6}\leqslant\int_D\frac{dx\,dy}{y-x+3}\leqslant\frac{1}{4},$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$ i $(1,0)$.

5. Obliczyć $\int_D y^3(x^2+y^2)^{-3/2}\,dx\,dy$, gdzie D jest obszarem wyznaczonym warunkami $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$ oraz $x^2+y^2\leqslant 1$.

6. Pokazać, że

$$2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)\,dy\,dx=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2.$$

`Wskazówka:` $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2=\int_{[a,b]\times[a,b]}f(x)f(y)\,dx\,dy.$

7. Pokazać, że
$$\frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(x,y,z)\,dz\,dy=\int_c^d f(x,x,z)\,dz+\int_a^x\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dz\,dy.$$

8. Odwzorowanie T jest określone na $D^*=[0,1]\times[0,1]$ wzorem $T(u,v)=(-u^2+4u,v)$. znaleźć $D=T(D^*)$. Czy T jest różnowartościowe ?

9. D^* jest równoległobokiem ograniczonym prostymi $y=3x-4$, $y=3x$, $y=\frac{1}{2}x$ i $y=\frac{1}{2}(x+4)$. Niech $D=[0,1]\times[0,1]$. Znaleźć odwzorowanie T takie, że $T(D^*)=D$.

10. Odwzorowanie T jest określone na $D^*=[0,1]\times[0,1]$ wzorem $T(u,v)=(uv,u)$. Znaleźć obraz zbioru D^*. Czy T jest różnowartościowe ? Jeśli nie, czy można usunąć pewien podzbiór z D^* tak, aby na pozostałej części T było różnowartościowe ?

11. Niech D^* będzie równoległobokiem o wierzchołkach w $(-1,3)$, $(0,0)$, $(2,-1)$ i $(1,2)$. Niech $D=[0,1]\times[0,1]$. Znaleźć odwzorowanie T takie, że $T(D^*)=D$.

12. Niech D będzie kołem jednostkowym. Obliczyć $\int_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ przez zamianę zmiennych na współrzędne biegunowe.

13. Niech D będzie obszarem $0 \leqslant y \leqslant x$ i $0 \leqslant x \leqslant 1$. Obliczyć $\int_D (x+y)\,dx\,dy$ przez zamianę współrzędnych $x = u + v,\ y = u - v$. Sprawdzić wynik całkując bezpośrednio przy zastosowaniu całki iterowanej.

14. Określmy $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Niech D^* będzie zbiorem punktów (u,v) określonym warunkami $u^2 + v^2 \leqslant 1,\ u,v \geqslant 0$. Znaleźć $D = T(D^*)$. Obliczyć

$$\int_D dx\,dy \qquad \text{oraz} \qquad \int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

15. Rozwiązać zadanie 10 z listy 5, przy użyciu współrzędnych biegunowych i porównać efektywność każdej z metod.

16. Obliczyć $\int_D (x+y)^2 e^{x-y}\,dx\,dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym przez proste $x + y = 1,\ x + y = 4,\ x - y = -1$ i $x - y = 1$.

17. D jest obszarem wewnątrz $x^2 + y^2 = 1$ ale na zewnątrz $x^2 + y^2 = 2y$, oraz $x, y \geqslant 0$. Naszkicować ten obszar. Niech $u = x^2 + y^2,\ v = x^2 + y^2 - 2y$. Naszkicować obszar D^* na płaszczyźnie uv, otrzymany z D w wyniku zmiany współrzędnych. Obliczyć $\int_D xe^y\,dx\,dy$.