Wersja: **A**

Imię i Nazwisko: Maksymilian Debeściak

Grupa[1]:

wt s.103	cz 8–10 s.103
wt s.139	cz 8–10 s.139
wt s.141	cz12–14 s.103
zaaw.	cz12–14 s.139

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 17 stycznia 2014

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja binarna na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, która jest symetryczna i przechodnia, ale nie zwrotna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE”

$\{\langle m,n\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m>42 \wedge n>42\}$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{N}^{[0,1]} \to \mathbb{N}^{[2,3]}$, która dla argumentów $f \in \mathbb{N}^{[0,1]}$ przyjmuje takie wartości $\varphi(f) : [2,3] \to \mathbb{N}$, że $(\varphi(f))(x) = f(x-2) \bmod 3$. Jeśli funkcja φ ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do φ. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

φ nie jest „na”, np nie przyjmuje takiej wartości $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ że $f(n) = 42$

Zadanie 3 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$	$\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q}\times\{0,1\})$	$\mathbb{R}^{\{0,1\}}$	$\{0,1,2\}^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\{a,b,c\})$

Zadanie 4 (2 punkty). W zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle m,n\rangle \approx \langle m',n'\rangle \stackrel{\text{df}}{\iff} \min(m,n)=\min(m',n') \wedge \max(m,n)=\max(m',n').$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji pary $\langle 17,42\rangle$ oraz moc zbioru klas abstrakcji relacji $\approx$.

$|[\langle 17,42\rangle]_{\approx}| =$ 2

$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\approx}| =$ $\aleph_0$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: (A\times B)^C \to A^{B\times C},\\ g &: B\times C \to A,\\ h &: C \to A\times B \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A\times B)^C$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$g(f(h))$ NIE

$(f(g))(a)$ NIE

$f(h(c))$ NIE

$(f(h))(b,c)$ TAK

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **A**

Imię i Nazwisko: Maksymilian Debeściak

Grupa[1]:

wt s.103	cz 8–10 s.103
wt s.139	cz 8–10 s.139
wt s.141	cz12–14 s.103
zaaw.	cz12–14 s.139

Zadanie 6 (5 punktów). W zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$f \simeq g \stackrel{\text{df}}{\iff} f(42) = g(42).$$

Jaką moc ma zbiór klas abstrakcji $\mathbb{N}^\mathbb{N}/_\simeq$ relacji $\simeq$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Niech A, B i C będą niepustymi zbiorami. Udowodnij, że jeśli $|A| \leq |B|$ to $|C^A| \leq |C^B|$.

Zadanie 8 (5 punktów). Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ jest różnowartościowa}\}$$

ma moc continuum.

[1] Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **B**

Imię i Nazwisko: Maksymilian Debeściak

Grupa[1]:

wt s.103	cz 8–10 s.103
wt s.139	cz 8–10 s.139
wt s.141	cz12–14 s.103
zaaw.	cz12–14 s.139

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 17 stycznia 2014

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja binarna na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, która jest zwrotna i symetryczna, ale nie przechodnia, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE ISTNIEJE”

$$\{\langle m,n\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid |m-n| < 42\}$$

Zadanie 2 (2 punkty). Rozważmy funkcję $\varphi : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [2,3]^{\mathbb{N}}$, która dla argumentów $f \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ przyjmuje takie wartości $\varphi(f) : \mathbb{N} \to [2,3]$, że $(\varphi(f))(n) = f(n \bmod 3) + 2$. Jeśli funkcja φ ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do φ. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

φ nie jest różnowartościowa. Dla $f_1(n) = 0$ i $f_2(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ mamy $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$

Zadanie 3 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q})$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	$\{0,1\}\times\mathbb{Q}$	$\{a,b,c\}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{R}\setminus[0,1]$	$\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$	$\mathbb{N}^{\{0,1\}}$

Zadanie 4 (2 punkty). W zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle m,n\rangle \approx \langle m',n'\rangle \overset{\text{df}}{\iff} m+n = m'+n'.$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji pary $\langle 0,42\rangle$ oraz moc zbioru klas abstrakcji relacji $\approx$.

$|[\langle 0,42\rangle]_{\approx}| =$ 43

$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\approx}| =$ $\aleph_0$

Zadanie 5 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: (A\times B)^C \to C^{A\times B}, \\ g &: A\times B \to C, \\ h &: C \to A\times B \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A\times B)^C$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(f(h))(a,b)$	TAK	$(f(c))(a,b)$	NIE
$(f(h))(h(c))$	TAK	$g(f(h))$	NIE

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.

Wersja: **B**

Imię i Nazwisko: Maksymilian Debeściak

Grupa[1]:

wt s.103	cz 8–10 s.103
wt s.139	cz 8–10 s.139
wt s.141	cz12–14 s.103
zaaw.	cz12–14 s.139

Zadanie 6 (5 punktów). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$f \simeq g \overset{\text{df}}{\iff} f(42) = g(42).$$

Rozważmy funkcję identycznościową $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(n) = n$. Jaką moc ma klasa abstrakcji $[id]_{\simeq}$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 7 (5 punktów). Udowodnij, że jeśli $|A| \leq |B|$ to $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

Zadanie 8 (5 punktów). Udowodnij, że zbiór

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ jest „na”}\}$$

ma moc continuum.

[1]Proszę zakreślić właściwą grupę ćwiczeniową.