Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 2

15 października 2015 r.

M2.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli x, y są liczbami maszynowymi takimi, że $|y| \leqslant \frac{1}{2}\mathsf{u}|x|$, to $\mathrm{fl}(x+y) = x$.

M2.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Znaleźć liczbę maszynową x (`double`, w standardzie IEEE 754), dla której $\mathrm{fl}(x \cdot \mathrm{fl}(1/x)) \neq 1$.

M2.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości wyrażeń

$$(\boldsymbol{a})\ e^x - e^{-2x}; \qquad (\boldsymbol{b})\ \cos^2 x - 1.$$

M2.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ O ile bitów zmniejsza się dokładność różnicy $x - \sin x$ dla $x = \frac{1}{2}$?

M2.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pole n-kąta foremnego ($n \geqslant 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n. Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno P_4, P_8, $P_{16}, \ldots$:

$$\begin{aligned}
&s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;\\
&s_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1}\, s_k \qquad (k = 3, 4, \ldots).
\end{aligned}$$

a) Uzasadnić powyższy algorytm.

b) Stosując wybraną arytmetykę t-cyfrową ($t \geqslant 128$) obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \ldots, 2t$.

c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

M2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f, podanej wzorem

(**a**) $f(x) = 1/(x^2 + c)$, gdzie c jest stałą; (**b**) $f(x) = (1 - \cos x)/x$ dla $x \neq 0$.

M2.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania iloczynu skalarnego $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq 0$ wektorów $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

M2.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wartość wielomianu $L(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ w punkcie x można obliczyć według następującego *schematu Hornera*:

— Oblicz wielkości pomocnicze $w_0, w_1, \ldots, w_n$ za pomocą wzorów

a) $w_n := a_n$,

b) $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0)$.

— Wynik: $L(x) = w_0$.

Zakładając, że a_0, a_1, ... , a_n oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

M2.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wartość sumy $\sum_{k=1}^{n} a_k$, gdzie $n := 2^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, można wyznaczyć stosując strategię *dziel i zwyciężaj*. Np. dla $m = 3$ obliczenia wykonywane są wówczas zgodnie z następującym diagramem:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 & & a_8 \\
\searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\
& s_{12} & & & & s_{34} & & & & s_{56} & & & & s_{78} & \\
& \searrow & & & & \swarrow & & & & \searrow & & & & \swarrow & \\
& & & s_{14} & & & & & & & & s_{58} & & & \\
& & & \searrow & & & & & & & & \swarrow & & & \\
& & & & & & & s_{18} & & & & & & &
\end{array}
$$

gdzie $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$. Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości n — dokładniejszy niż zwykły algorytm sumowania.