13. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Obliczyć granice

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg} x}{x^2}\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{\ln x}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(\ln x)}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{4^x-3^x-1}{x^3-1}\qquad \lim_{x\to\pi/2}(\pi^2-4x^2)\operatorname{tg} x\qquad \lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\qquad \lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)\qquad \lim_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$$

2. Obliczyć granice

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\qquad \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-x^{-1})\qquad \lim_{x\to 0}(x^{-2}-\operatorname{ctg}^2 x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon},\ (\varepsilon>0)\qquad \lim_{x\to 0}x^{-100}e^{-1/x}\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{2006}}{\ln^{1003}(x^2+1)}$$

3. Obliczyć granice ciągów.

$$\lim_n n(5^{1/n}-3^{1/n})\qquad \lim_n n^{1-\sqrt{2}}[(n+1)^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{2}}]\qquad \lim_n\frac{e^{1/n^2}-1}{e^{1/n}-1}\qquad \lim_n\frac{\log_4 n}{\sqrt{n}}$$

4. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x^2-\pi^2/4} & x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] -\dfrac{1}{\pi} & x=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Pokazać, że funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w punktach $-\pi/2$ i $\pi/2$.

5. (a) Pokazać, że $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{(x^x)}=0$.

(b) Pokazać, że $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x)^x=1$.

6. Sprawdzić efekt zastosowania reguły de l'Hospitala do granicy $\lim_{x\to 0}e^{-1/x^2}x$.

7. Pokazać, że założenia twierdzenie Cauchy'ego, które służy do wyprowadzenia reguły de l'Hospitala, można osłabić zastępując żądanie $g'(x)\neq 0$ dla $a<x<b$ przez $g(b)\neq g(a)$ oraz $g'(x)\neq 0$ dla każdego x, dla którego $f'(x)=0$.

8. Niech R będzie prostokątem leżącym w pierwszej ćwiartce, którego podstawa leży na osi x, jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu, a przeciwny wierzchołek leży na wykresie funkcji $y=e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ pole R jest mniejsze niż ε, jeśli podstawa prostokąta jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że prostokąt o największym możliwym polu ma podstawę równą 1.

9. Trójkąt prostokątny T leży w pierwszej ćwiartce. Przyprostokątne znajdują się na osiach, a przeciwprostokątna jest styczna do wykresu $y=e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla $\varepsilon>0$ pole trójkąta T jest mniejsze niż ε jeśli podstawa jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że podstawa trójkąta o największym polu jest równa 2.