Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 3

22 października 2015 r.

M3.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ *Uproszczoną* metodę Newtona

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

stosujemy do wyznaczenia pojedynczego zera funkcji f. Jaki jest rząd zbieżności tej metody?

M3.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie podwójnym zerem funkcji $f \in C^2[a, b]$. Wykazać, że jeśli metoda Newtona jest zbieżna, to wówczas jest zbieżna liniowo.

M3.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzieleń, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - c\,x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$. Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M3.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0.

M3.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie r-krotnym zerem funkcji $f \in C^2[a, b]$. Rozważamy zmodyfikowaną metodę Newtona

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Wykazać, że jeśli metoda ta jest zbieżna, to wówczas jest zbieżna kwadratowo.

M3.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że metoda iteracyjna

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jeśli

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to wykładnik zbieżności tej metody jest równy p.

M3.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Równanie $\sin x = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek $x = 0$ w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$. Stosujemy metodę Newtona zaczynąc od przybliżenia x_0, o własności $\tan x_0 = 2x_0$. Wykazać, że otrzymany ciąg przybliżeń jest cykliczny.

M3.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić poprawność następującego schematu Hornera zastosowanego do obliczenia wartości $p(z)$ i $p'(z)$ dla danego wielomianu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

— Niech $\alpha := a_n$ oraz $\beta := 0$.

— Kolejno dla $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ wykonaj

  — $\beta := \alpha + z\beta$

  — $\alpha := a_k + z\alpha$

— Wynik to $p(z) = \alpha$, $p'(z) = \beta$.