Deklaracja															
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rozwiązane	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Spisane				✓	✓	✓		✓		✓	✓		✓	✓	✓

Wojna polega na wprowadzaniu w błąd. Jeśli możesz udawaj, że nie możesz; jeśli dasz znać, że chcesz wykonać jakiś ruch, nie wykonuj go; jeśli jesteś blisko, udawaj, żeś daleko; [...] Uderzaj, gdy nie jest przygotowany; zjawiaj się tam, gdzie się tego nie spodziewa.

– Sun Tzu

Zadanie 1

Zad 1

Ile jest takich rozłożeń (dowolnej liczby) pionków na szachownicy $n \times n$, że dla każdych dwóch pionków jeden z nich jest na lewo i niżej od drugiego?

Rozwiązanie: Rozwiązanie na machanie.
Wybierzmy m pionków i poustawiajmy je na planszy.
Jeżeli $m > n$ to nie da się ich poustawiać zgodnie z warunkami zadania (ZSD). Zatem $m \leqslant n$. Wybierzmy na planszy m rzędów i m kolumn. Robimy to na $\binom{n}{m}^2$ sposobów.
Wynikiem jest $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}^2 = \binom{2n}{n}$ (dowód tożsamości to zastosowanie wzoru 14a i listy 5).

Zadanie 2

Zad 2

Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$. Pokaż też, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m}$ jest liczbą Fibonacciego (którą?).

Rozwiązanie:

Lemat 1. $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$

Dowód. Dowód indukcyjny po n. Dla $n = 0, 1$ mamy:

$$F_1 = 1 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1},\ F_2 = 2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2}$$

Załóżmy prawdziwość twierdzenia dla dowolnego $k \leqslant n$. Pokażmy je dla $n+1$.

$$F_{n+2} \stackrel{zal}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i-1} = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i-1} =$$

$$= \binom{n}{0} + \left[\sum_{i=1}^{n} \binom{n-i}{i} + \binom{n-i}{i-1}\right] = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+1}{i} = \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-i+1}{i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+1}{i} = \binom{0}{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n-i+1}{i}$$

□

Lemat 2. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{m+i} = F_{m+2n}$

Dowód. Weźmy dowolne $m \in \mathbb{N}$. Przeprowadźmy dowód indukcyjny. Zauważmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 0, 1$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że dla dowolnego $k < n$ twierdzenie jest prawdziwe. Pokażmy jego prawdziwość dla n.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{m+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i} F_{m+i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i-1} F_{m+i} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i} F_{m+i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} F_{m+i} =$$

$$\binom{n-1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{m+i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} F_{m+i+1} \overset{zal}{=}$$

$$\overset{zal}{=} 0 + F_{m+2n-2} + F_{m+1+2n-2} = F_{m+2n}$$

□

Zadanie 3

Zad 3

Znajdź wzór na liczbę ciągów długości $2n$, w których każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy i takich, że sąsiednie liczby są różne.

Rozwiązanie: Rozwiązanie na machanie. Ustalmy n. Przez A_i oznaczmy zbiór takich ciągów, że i-te liczby są obok siebie w tym ciągu. Naszym rozwiązaniem będzie $\frac{(2n)!}{2^n} - |\bigcup_i A_i|$.
Policzmy ten wzór z zasady włączeń i wyłączeń. Zauważmy, że $|A_i| = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}}(2n-1)$.
Idąc dalej mamy $|\bigcap_{i=1}^{j} A_i| = \frac{(2n-j)!}{2^{n-j}}$.
Zatem końcowy wynik to

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$$

Zadanie 4

Zad 4

Znajdź zwartą postać ciągu a_n określonego wzorem:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

Udowodnijmy indukcyjnie, że $a_n = \frac{1+(-1)^n \cdot 2^{1-n}}{3}$

Dowód. Zdefiniujmy zbiór X, taki że:

$$X = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n = \frac{1 + (-1)^n \cdot 2^{1-n}}{3} \right\}$$

Zauważmy, że $0, 1 \in X$, ponieważ $1 = \frac{1+(-1)^0 \cdot 2^{1-0}}{3}$ oraz $0 = \frac{1+(-1)^1 \cdot 2^{1-1}}{3}$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ większe od 1. Załóżmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mniejszego od n zachodzi $k \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} = \frac{\frac{1+(-1)^{n-2} \cdot 2^{1-(n-2)}}{3} + \frac{1+(-1)^{n-1} \cdot 2^{1-(n-1)}}{3}}{2} = \frac{2 + (-1)^n \cdot 2^{2-n}}{2 \cdot 3} = \frac{1 + (-1)^n \cdot 2^{1-n}}{3}$$

Zatem $n \in X$. Na mocy zasady indukcji wnioskujemy, że $X = \mathbb{N}$, czyli żądana własność zachodzi dla dowolnego naturalnego n.

□

Zadanie 5

Zad 5

Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą metody anihilatorów:

- $$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1,\ a_0 = a_1 = 0$$
- $$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1},\ a_0 = a_1 = 1$$
- $$a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n,\ a_0 = a_1 = 1$$

Rozwiąż jedno z nich do końca.

- $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1,\ a_0 = a_1 = 0$
  Anihilatorem $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ jest $(E^2 - 2E + 1) = (E - 1)^2$, anihilatorem 3^n jest $(E - 3)$, a anihilatorem 1 jest $(E - 1)$. Zatem anihilatorem całego ciągu jest $(E - 1)^3(E - 3)$.
  Szukane rozwiązanie rekurencji jest w postaci

  $$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n + C \cdot n^2 \cdot 1^n + D \cdot 3^n$$

- $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1},\ a_0 = a_1 = 1$ Anihilatorem ciągu $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n$ jest $(E^2 - 4E + 4) = (E - 2)^2$, a anihilatorem ciągu $2 \cdot n2^n$ jest $(E - 2)^2$. Anihilatorem całości będzie $(E - 2)^4$.
  Wzór jawny ciągu a_n jest postaci:

$$a_n = \left(A + n \cdot B + C \cdot n^2 + D \cdot n^3\right) \cdot 2^n$$

Do rozwiązania dostajemy układ równań:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 24 & 72 & 216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po obliczeniach dostajemy zwartą postać ciągu:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{3} \cdot n - \frac{1}{4} \cdot n^2 + \frac{1}{12} \cdot n^3\right) \cdot 2^n$$

- $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n - a_n,\ a_0 = a_1 = 1$

  Anihilatorem ciągu $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ jest $(E^2 + E + 1)$, a ciągu 2^n jest $(E - 2)$. Anihilatorem całości jest $(E^2 + E + 1)(E - 2)$. Rozkładając całość dostajemy:

$$\left(E^2 + E + 1\right)(E - 2) = (E - 2)\left(E - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right)\left(E - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

  Czyli wzór jawny ciągu jest w postaci:

$$a_n = A \cdot 2^n + B\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^n + C\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

Zadanie 6

Zad 6

Rozwiązując zależność $a_n = a_{n-3}$ metodą anihilatorów wyraź $n\ mod\ 3$ jako kombinację liniową pierwiastków trzeciego stopnia z 1. Korzystając z tego wzoru znajdź analogiczny wzór na $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Rozwiązanie: Zdefinujmy $a_n = a\ mod\ 3$ następująco:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad n = 0 \\ 1 & \text{gdy} \quad n = 1 \\ 2 & \text{gdy} \quad n = 2 \\ a_{n-3} & \text{gdy} \quad n > 2 \end{cases}$$

Zastosujmy do równania $a_n = a_{n-3}$ metodę anihilatorów. Anihilatorem tego ciągu jest oczywiście $(E^3 - 1)$, co możemy zapisać równoważnie jako

$$\left(E^3 - 1\right) = (E - 1)\left(E - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(E - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Zatem rozwiązaniem rekurencji jest

$$a_n = A \cdot 1^n + B\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n + C\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Podstawiając $n = 0, 1, 2$ dostajemy rozwiązanie:

$$a_n = 1 \cdot 1^n + \left(\frac{-i\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{i\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Pozostało nam tylko znaleźć analogiczny wzór dla $b_n = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

$$b_n = \frac{n - a_n}{3} = \frac{n - 1 \cdot 1^n - \left(\frac{-i\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{i\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n}{3}$$

Zadanie 7

Zad 7

Ile jest ciągów n liter należących do 26-literowego alfabetu łacińskiego zawierających parzystą liczbę liter $'a'$?

Rozwiązanie: Przez a_n oznaczmy n-elementowe ciągi alfabetu łacińskiego zawierających parzystą liczbę liter 'a'. Takie ciągi będziemy nazywać *poprawnymi*. Widać, że $a_1 = 25$ oraz $a_2 = 25^2 + 1$.
Spróbujmy wyznaczyć a_n w zależności do wcześniejszych wyrazów. Wtedy możemy wziąć wszystkie niepoprawne ciągu $n-1$ elementowe (jest ich $26^{n-1} - a_{n-1}$) i dodać do nich na koniec jedno $'a'$. Możemy też do ciągu a_{n-1} dopisać na koniec jedną literę różną od 'a'.
Dostajemy zależność rekurencyjną: $a_n = (26^{n-1} - a_{n-1}) + 25a_{n-1} = 26^{n-1} - 24a_{n-1}$. Anihilatorem tego ciągu jest $(E-24)(E-26)$. Korzystając z metody anihilatorów dochodzimy do wzoru jawnego:

$$\frac{1}{2} \cdot 24^n + \frac{1}{2} \cdot 26^n.$$

Zadanie 8

Zad 8

Za pomocą metody anihilatorów oblicz $\sum_{i=1}^{n} i2^i$ rozwiązując zależność $s_n = s_{n-1} + n2^n$.

Rozwiązanie: Anihilatorem ciągu $s_n - s_{n-1}$ jest $(E-1)$, ciągu $n2^n$ jest $(E-2)^2$. Zatem anihilatorem całego wyrażenia jest $(E-1)(E-2)^2$. Podstać zwarta sumy będzie w postaci: $s_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot n2^n$. Podstawiając $n = 0, 1, 2$ i rozwiązując układ równań dochodzimy do końcowej postaci:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i2^i = 2 \cdot 1^n + (-2) \cdot 2^n + 2 \cdot n2^n = 2 - 2^{n+1} + n2^{n+1} = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Zadanie 9

Zad 9

Niech c_n oznacza liczbę ciągów n znaków ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ nie zawierających dwóch sąsiednich jedynek ani dwóch sąsiednich dwójek. Ułóż zależność rekurencyjną i rozwiąż ją wyznaczając jawny wzór na c_n.

Przez d_n oznaczmy liczbę poprawnych ciągów n-elementowych kończących się na 0, e_n liczbę ciągów kończących się na 1, a f_n liczbę ciągów kończących się na 2.
Zauważmy, że $c_n = d_n + e_n + f_n$.
Zachodzi również $d_n = d_{n-1} + e_{n-1} + f_{n-1},\ e_n = d_{n-1} + f_{n-1},\ f_n = d_{n-1} + e_{n-1}$.
Podstawiając do wyjściowego wzoru dostajemy, że:

$$c_n = 3d_{n-1} + 2e_{n-1} + 2f_{n-1} = d_{n-1} + 2c_{n-1} = 2c_{n-1} + c_{n-2}$$

Taki układ rozwiązujemy metodą anihilatorów (anihilatorem jest $(E^2 - 2E - 1)$ i dostajemy rozwiązanie:

$$c_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot (1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot (1+\sqrt{2})^n$$

Zadanie 10

Zad 10

Przez linię komunikacyjną przesyłamy 0 lub 1. Prawdopodobieństwo, że adresat dostanie oryginalną wiadomość wynosi $1-p$, a prawdopodobieństwo, że dostanie jej negację wynosi p. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem otrzymania 0 po przesłaniu 0 przez n kolejnych linii komunikacyjnych. Znajdź zależność rekurencyjną na p_n i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.

Rozwiązanie: Przez a_n oznaczmy prawdopodobieństwo, że po wysłaniu zera przez n kolejnych linii komunikacyjnych dostaniemy na końcu zero. Analogicznie przez b_n będziemy oznaczać prawdopodobieństwo, że po n krokach dostaniemy 1.
Zauważmy, że $b_n = 1 - a_n$ bo to są zdarzenia przeciwne. Zauważmy też, że a_n jest naszym p_n z treści zadania.
Zachodzi związek rekurencyjny:

$$p_{n+1} = a_n \cdot (1-p) + p \cdot b_n = p_n \cdot (1-p) + p(1-p_n)$$

Rozwiążmy tę rekurencję metodą anihilatorów. Możemy napisać, że:

$$p_{n+1} - p_n(1-2p) = p$$

Anihilatorem lewej strony jest $(E - (1-2p))$, a prawej $(E-1)$. Stąd wniosek, że:

$$p_n = A \cdot 1^n + B \cdot (1-2p)^n$$

Podstawiając $p_1 = 1-p$ oraz $p_2 = 2p^2 - 2p + 1$ dostajemy rozwiązanie zadania, którym jest wzór

$$p_n = \frac{1}{2} \cdot 1^n + \frac{1}{2} \cdot (1-2p)^n$$

Zadanie 11

Zad 11

(Problem ruiny gracza). Gracz A ma k złotych, a gracz B ma $N-k$ złotych. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez gracza A wynosi p (przegrywający przekazuje wygrywającemu złotówkę). Gra kończy się w momencie gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Napisz zależność rekurencyjną na prawdopodobieństwo p_k wygranej gracza A i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.

Rozwiązanie: Przez P_k oznaczmy prawdopodobieństwo, że osoba z k monetami wygra. Prawdą jest, że $P_N = 1$ oraz $P_0 = 0$. Zauważmy, że zachodzi zależność rekurencyjna $P_k = p \cdot P_{k+1} + (1-p) \cdot P_{k-1}$. Możemy to przekształcić do postaci:

$$P_k - \frac{1}{p} \cdot P_{k-1} + \frac{1-p}{p} \cdot P_{k-2} = 0$$

Anihilatorem tego ciągu jest $(E^2 - \frac{1}{p} \cdot E + \frac{1-p}{p})$ Zatem postać zwarta ciągu P_k jest postaci:

$$P_k = A \cdot 1^k + B \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right)^k$$

Podstawiając $k = 0$ oraz $k = N$ i wyliczając współczynniki A, B dostajemy rozwiązanie:

$$P_k = \frac{1}{1 - (\frac{1}{p} - 1)^N} + \frac{1}{(\frac{1}{p} - 1)^N - 1} \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right)^k$$

Zadanie 12

Zad 12

Policz sumę:

- $$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)2^k$$
- $$\sum_{k=1}^{n} k^2(-1)^k$$
- $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Rozwiązanie:

- Zauważmy, że $s_{n+1} = s_n + 2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot 2^n s_n + 2(2^n + n2^n + n^2 2^n)$. Anihilatorem tego ciągu jest $(E-1)(E-2)^3$. Po podstawieniu początkowych wartości dostajemy zwartą postać : $2(2^n n^2 - 3 \cdot 2^n n + 2^{n+2} - 4)$.

- Zauważmy, że $s_n = s_{n-1} + n^2 \cdot (-1)^n$. Anihilatorem jest $(E-1) \cdot (E+1)^3$.
  Wzór zwarty to : $\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot n$

- Udowodnijmy indukcyjnie, że $s_n = \frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)}$

  Niech $X = \left\{ n \in \mathbb{N}_+ \mid a_n = \frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)} \right\}$. Zauważmy, że $1 \in X$, bo $\frac{1}{(1+1)(1+2)(1+3)} = \frac{1}{24} = \frac{1(1+5)}{12(1+2)(1+3)}$. Załóżmy, że $n \in X$ i pokażmy, że $n+1 \in X$.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \overset{zal}{=} \frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} = \ldots = \frac{(n+1)(n+6)}{12(n+3)(n+4)}$$

  Zatem na mocy indukcji matematycznej podany wzór jest prawdziwy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Zadanie 13

Zad 13

Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Wylicz funkcje tworzące ciągów:

- $$b_n = n \cdot a_n$$
- $$c_n = \frac{a_n}{n}, \; c_0 = 0$$
- $$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
- $$d_n = \begin{cases} a_n, & \text{gdy} \quad n = 2k \\ 0, & \text{gdy} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Niech $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

- $b_n = na_n$

$$B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1} = x \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot x^k\right)' = xA'(x)$$

- $c_n = \frac{a_n}{n}, \; c_0 = 0$

$$\int_0^x \frac{A(t) - a_0}{t} dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^k}{k} = C(x)$$

- $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 1 \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k \right) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}$$

- $d_n = \begin{cases} a_n, & \text{gdy} \quad n = 2k \\ 0, & \text{gdy} \quad n = 2k+1 \end{cases}$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \; + \; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k x^k}{2} = \frac{2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cdot x^{2k}}{2} = D(x)$$

Zadanie 14

Zad 14

Wylicz funkcje tworzące ciągów:

- $$a_n = n^2$$
- $$a_n = n^3$$
- $$a_n = \binom{n+k}{k}$$

Rozwiązanie:

- $a_n = n^2$

  Niech $c_n = 1,\ b_n = n \cdot 1,\ a_n = n^2$. Zauważmy, że $a_n = n \cdot b_n \cdot c_n$. Możemy skorzystać z zadania 13a. Zatem $C(x) = \frac{1}{1-x},\ B(x) = xC'(x) = \frac{x}{(1-x)^2},\ A(x) = xB'(x) = -\frac{x\cdot(x+1)}{(x-1)^3}$.

- $a_n = n^3$.

  Analogicznie jak w poprzednim zadaniu $A(x) = x \cdot \left(-\frac{x\cdot(x+1)}{(x-1)^3}\right)' = \frac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}$.

- Pokażę, że $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = D(x)$

  Dowód. Zauważmy, że $D^{(i)}(x) = (k+1)(k+2)\ldots(k+i-1)(1-x)^{-k-i-1}$. Współczynnik przy n-tej pochodnej podzielony przez $n!$ jest szukanym wzorem jawnym. Stąd $\frac{D^{(n)}(0)}{n!} = \binom{n+k}{k}$. □

Zadanie 15

Zad 15

Oblicz funkcje tworzące ciągów:

- $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = \frac{1}{n}$ dla nieparzystych n.
- $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(H_0 = 0)$

Rozwiązanie: Z zadania 13 możemy w łatwy sposób obliczyć funkcje tworzące dla ciągów $f_n = n$ oraz $g_n = \frac{1}{n}$. Będą to odpowiednio $F(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ i $G(x) = \int_0^x \frac{\frac{1}{1-t} - 1}{t} dt = -\log(1-x)$. Przejdźmy do właściwego zadania.

- $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = \frac{1}{n}$ dla nieparzystych n. Niech $a_n = c(n) + g(n)$, gdzie:

$$c(n) = \begin{cases} n & \text{gdy} \quad n = 2k \\ 0 & \text{gdy} \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad d(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{gdy} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{gdy} \quad n = 2k \end{cases}$$

  Wtedy $A(x) = C(x) + D(x)$. Korzystając z własności, że $C(x) = \frac{F(x)+F(-x)}{2}$ oraz $D(x) = \frac{G(x)-G(-x)}{2}$ dostajemy, że $A(x) = \frac{F(x)+F(-x)+D(x)-D(-x)}{2} = \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{-x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

- H_n

  Zauważmy, że $H_n = \sum_{k=1}^{n} g_n$. Wtedy możemy skorzystać z podpunktu trzeciego z zad 13. Dostajemy funkcję tworzącą $\frac{G(x)}{1-x} = \frac{-\log(1-x)}{1-x}$.