Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 4

29 października 2015 r.

M4.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać przykład funkcji $f \in C[a, b]$ dla której metoda regula-falsi jest zbieżna liniowo.

M4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać wzory na kolejne przybliżenia, jakie otrzymujemy w metodzie Newtona zastosowanej do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^3 + y - 1 & = 0, \\ y^3 - x + 1 & = 0. \end{cases}$$

Uzyskane wzory powinny zawierać jedynie podstawowe operacje arytmetyczne.

M4.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyprowadzić wzroy na metodę Newtona w dziedzinie liczb zespolonych dla funkcji

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Załóżmy, że przybliżenie początkowe, to liczba zespolona $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory na kolejne przybliżenia $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, w których wykonywane są operacje arytmetyczne tylko na liczbach rzeczywistych.

M4.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Rozważmy metodę iteracyjną określoną przez

$$F(x) = x + f(x)g(x),$$

gdzie $f(\alpha) = 0$ oraz $f'(\alpha) \neq 0$. Jakie warunki powinna spełniać funkcja g, aby dla dostatecznie bliskich wartości początkowych, metoda była zbieżna sześciennie do α?

M4.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać dla metody siecznych, że jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = q$ oraz $f'(q) \neq 0$, to q jest zerem funkcji f.

M4.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnij, że metoda iteracyjna:

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3R\right)}{3x_n^2 + R}$$

jest zbieżna sześciennie do $\sqrt{R}$.

M4.7. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Rozważmy metodę Olvera,

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)[f(c_n)]^2}{[f'(c_n)]^3},$$

która służy do rozwiązywania równań nieliniowych. Pokaż, że przy pewnych założeniach jej zbieżność jest co najmniej sześcienna.

M4.8. 1 punkt *Metoda Halleya* rozwiązywania równania $f(x) = 0$ korzysta ze wzoru iteracyjnego

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\, f(x_n)'}{(f(x_n)')^2 - (f(x_n) f(x_n)'')/2}.$$

Wykazać, że jest to metoda równoważna metodzie Newtona zastosowanej do funkcji $f/\sqrt{f'}$.

M4.9. 1,5 punktu Włącz komputer Rozważmy wielomian

$$w(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4.$$

Zastosować metodę Bairstowa do znalezienia wszystkich pierwiastków wielomianu w. Za przybliżenia początkowe należy przyjmować $u = 0.1$ i $v = 0.1$, a następnie wykonać maksymalnie 10 iteracji w arytmetyce 128 bitowej. Podać uzyskane czynniki kwadratowe, w postaci $z^2 - uz - z$, przez które dzieli się wielomian w. Podać przybliżenia otrzymanych pierwiastków z dokładnością do 16 cyfr dziesiętnych. Porównać otrzymane wyniki z tym, co daje metoda `roots` z pakietu `Polynomials`.