Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

6 lutego 2015

Zadanie 1 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej formuł, które są równoważne formule $p \Leftrightarrow (q \vee r)$. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(p \wedge (q \vee r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	TAK	$(\neg p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee r) \Rightarrow p)$	TAK
$(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$	NIE	$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee (\neg q \wedge \neg r))$	TAK

Zadanie 2 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w te pola poniższej tabelki, które odpowiadają zupełnym zbiorom spójników logicznych. W pozostałe pola wpisz słowo „NIE”.

$\{\wedge, \vee, \neg, \Leftrightarrow\}$	$\{\vee, \neg, \Leftrightarrow\}$	$\{\wedge\}$	$\{\wedge, \neg, \Rightarrow\}$	$\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$	$\{\wedge, \Rightarrow\}$	$\{\wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$	$\{\wedge, \vee\}$
TAK	TAK	NIE	TAK	NIE	NIE	NIE	NIE

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

TAK

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \dots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \dots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall n \Big((\exists k \;\; kx = n \wedge \exists k \;\; ky = n) \Rightarrow z \leq n \Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$\forall n \forall k_1 \forall k_2 \;\; k_1 x = n \wedge k_2 x = n \Rightarrow z \leq n$

Wskazówka: ta formuła interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że liczba z jest nie większa od najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb x i y.

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$((A \cup B) \setminus C) \cup (A \;\; \cap C) = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$$

to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$A = B = C = \{1\}$

Zadanie 6 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{n\}$. Jeśli zbiór $\bigcap\limits_{m=17}^{42} \bigcup\limits_{n=5}^{m+10} A_n$ ma największy element to w prostokąt poniżej wpisz największy element tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz słowa „NIE MA”.

27

Zadanie 7 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $(\forall x\ \varphi(x) \land \psi(x)) \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ w systemie naturalnej dedukcji.

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \forall x\,\varphi(x) \land \psi(x) \quad \text{założenie} \\ \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad \text{świeża zmienna} \\ \dfrac{\dfrac{\forall x\,\varphi(x) \land \psi(x)}{\varphi(x_0) \land \psi(x_0)}\,(\forall \mathrm{e})}{\varphi(x_0)}\,(\land \mathrm{e}_1) \end{array}} \\ \dfrac{}{\forall x\,\varphi(x)}\,(\forall \mathrm{i}) \end{array}}}{(\forall x\,\varphi(x) \land \psi(x)) \Rightarrow (\forall x\,\varphi(x))}\,(\Rightarrow \mathrm{i})$$

Zadanie 8 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \lor q,\ \neg q \lor \neg r,\ p \lor q,\ \ p \lor r,\ \ \neg p \lor \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 9 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kin K i filmów F oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times K$, $\mathit{Obejrzał} \subseteq O \times F$ i $\mathit{Wyświetla} \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x{\in}O \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które obejrzały wszystkie filmy wyświetlane w jakimś kinie, w którym bywają.

$$\exists k\ \mathit{Bywa}(x,k) \land \Big(\forall f\ \ \mathit{Wyświetla}(k,f) \Rightarrow \mathit{Obejrzał}(x,f)\Big)$$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 10 (4 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $A \times B = B \times A$ to $A{=}\emptyset \vee B{=}\emptyset \vee A{=}B$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że $\boxed{A \times B = B \times A}$ oraz że nieprawdą jest $\boxed{A{=}\emptyset \vee B{=}\emptyset \vee A{=}B}$, czyli zachodzi $\boxed{A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B}$.

Ponieważ $A \neq \emptyset$, możemy wybrać element $\boxed{a \in A}$. Podobnie, ponieważ $B \neq \emptyset$, możemy wybrać element $\boxed{b \in B}$. Wiemy, że $A \neq B$, a zatem istnieje element $x \in (A \setminus B)$ lub istnieje element $\boxed{x \in (B \setminus A)}$. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

(i) Istnieje $\boxed{x \in (A \setminus B)}$. Wtedy $\boxed{\langle x, b\rangle \in A{\times}B}$ i $\boxed{\langle x, b\rangle \notin B{\times}A}$, co przeczy założeniu $\boxed{A \times B = B \times A}$.

(ii) Istnieje $\boxed{x \in (B \setminus A)}$. Wtedy $\boxed{\langle a, x\rangle \in A{\times}B}$ i $\boxed{\langle a, x\rangle \notin B{\times}A}$, co przeczy założeniu $\boxed{A \times B = B \times A}$.

W obu przypadkach otrzymaliśmy sprzeczność, co kończy dowód twierdzenia.

Zadanie 11 (2 punkty). Niech $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \leq 5\}$ i $S = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \varphi\}$ jest złożeniem SR relacji R i S.

$$\boxed{\exists z\ x + z \ \leq 5 \wedge z = 2y}$$

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times [0, 1)$ daną wzorem $f(x) = \langle x, x - \lfloor x \rfloor\rangle$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

f nie jest „na”. Żadna liczba rzeczywista nie przechodzi na parę $\langle 7, \frac{17}{42}\rangle$

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, które *nie są* różnowartościowe. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE”.

$$\boxed{G(f) = f}$$

Zadanie 14 (2 punkty). Rozważmy relację równoważności R na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowaną wzorem $R(x,y) \overset{\text{df}}{\iff} x^2 = y^2$. Jeśli istnieją dwie klasy abstrakcji tej relacji mające różną moc, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie dwie klasy abstrakcji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie klasy abstrakcji nie istnieją.

$$[0]_R = \{0\}, \qquad [1]_R = \{1, -1\}$$

Zadanie 15 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N} \times \{0,1\}$	$\{1,2,3\} \times \{4,5\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0,1\})$	$\{2015\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\{0,1\}^{\{2,3,4\}}$
$\aleph_0$	6	$\aleph_0$	$\mathfrak{c}$	1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	8

Zadanie 16 (2 punkty). W prostokącie poniżej narysuj diagram Hassego dla porządku $\langle \{n \in \mathbb{N} \,:\, 2 \leq n \wedge n \leq 10\}, |\rangle$.

Zadanie 17 (2 punkty). Rozważmy naturalny porządek $\leq$ na zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz dualny do niego porządek $\geq$. Jeśli zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{Q} \cap (0,1], \leq \rangle$ oraz $\langle \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}, \geq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

$$f : \mathbb{Q} \cap (0,1] \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1\}, \qquad f(x) = \tfrac{1}{x}$$

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja R, że $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ jest porządkiem regularnym, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$$R(x,y) \overset{\text{df}}{\iff} (x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq y) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0 \wedge x \geq y)$$

Zadanie 19 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(x, g(y), a) \overset{?}{=} f(z, g(y), x)$	$[x/a, z/a]$	$f(x, g(x), z) \overset{?}{=} f(z, z, z)$	NIE
$f(x, g(y), a) \overset{?}{=} f(z, z, z)$	NIE	$f(x, g(y), z) \overset{?}{=} f(z, z, z)$	$[x/g(y), z/g(y)]$

Numer indeksu: WZORCOWY

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część druga)

6 lutego 2015

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów[1].

Zadanie 20. Niech $\mathbb{N}_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$. Rozważmy funkcję $\mathsf{nwd} : \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ zdefiniowaną wzorem

$$\mathsf{nwd}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jeśli} \quad x = y \\ \mathsf{nwd}(x - y, y) & \text{jeśli} \quad x > y \\ \mathsf{nwd}(x, y - x) & \text{wpp} \end{cases}$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich liczb naturalnych $x, y \geq 1$ obliczanie funkcji $\mathsf{nwd}(x, y)$ się nie zapętla.

Zadanie 21. Czy istnieją takie dwie różne relacje równoważności R i S na zbiorze liczb naturalnych, że SR jest relacją porządku? Uzasadnij odpowiedź (tzn. skonstruuj takie dwie relacje lub udowodnij, że nie istnieją).

Zadanie 22. Rozważmy funkcję $f : X \to X$ dla pewnego niepustego zbioru X. Udowodnij, że f jest „na" wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dokładnie jedna taka funkcja $g : X \to X$, że $gf = f$.

[1] Algorytm oceniania jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.