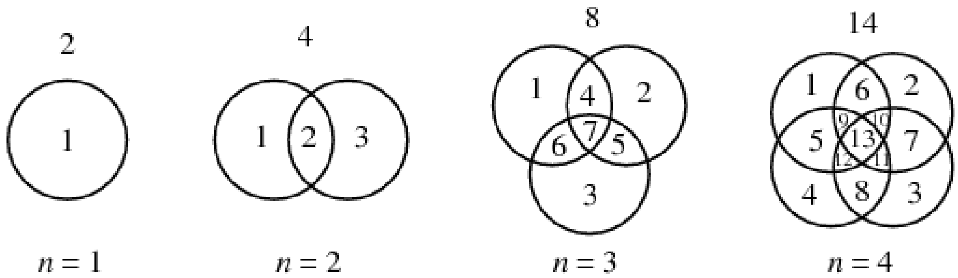
Zadanie 11

Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę? Rozwiąż zadanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.



Rozwiazanie: Weźmy dowolne naturalne $n > 0$. Przez $C(k)$ oznaczmy maksymalną liczbę obszarów, które mogą utworzyć okręgi z zadania. Z rysunku widzimy, że $R(1) = 2$.
Załóżmy, że mamy n okręgów, które tworzą $R(n)$ obszarów. Zauważmy, że dokładając $n+1$-wszy okrąg może on przeciąć każdy z tych n okręgów maksymalnie w 2 punktach, zatem maksymalna liczba obszarów jakie dostaniemy to $R(n) + 2n$. Daje to nam prosty wzór rekurencyjny:

$$R(n + 1) = R(n) + 2n$$

Indukcyjnie można pokazać, że $R(n) = n^2 - n + 2$.

Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid R(n) = n^2 - n + 2$. Zauważmy, że $1 \in X$, ponieważ $1^2 - 1 + 2 = 2 = R(1)$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$.
Wtedy

$$R(n + 1) = R(n) + 2n = n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$$

Zatem $n + 1 \in X$, co na mocy zasady indukcji pociąga za sobą poprawność wzoru $R(n) = n^2 - n + 2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

$\square$