Zadanie 6

Rozwiąż zależnośći rekrencyjne:

- $y_0 = y_1 = 1,\ y_n = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}}$
- $z_0 = 1,\ z_1 = 2,\ z_n = \frac{z_{n-1}^2 - 1}{z_{n-2}}$
- $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4}$

Rozwiązanie: Będziemy zgadywać rozwiązania, a potem dowodzić ich indukcyjnie.

- $y_n = 1$

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid y_n = 1$. Zauważmy, że $0, 1 \in X$. Weźmy dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla dowolnego k mniejszego od n zachodzi $k \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

  Obliczmy $y_n = \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-2}}{y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{1+1}{1+1} = 1$. Zatem $n \in X$. Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, czyli żądana własność zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

  □

- $z_n = n + 1$.

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid z_n = n + 1$. Zauważmy, że $0, 1 \in X$. Weźmy dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla dowolnego k mniejszego od n zachodzi $k \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

  Obliczmy $z_n = \frac{z_{n-1}^2 - 1}{z_{n-2}} = \frac{n^2 - 1}{n-2+1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = n + 1$.

  Zatem $n \in X$. Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, czyli żądana własność zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. □

- $t_n = n^2$.

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid t_n = n^2$. Zauważmy, że $0, 1 \in X$. Weźmy dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla dowolnego k mniejszego od n zachodzi $k \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

  Obliczmy $t_n = \frac{(t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2}{4} = \frac{((n-1)^2 - (n-2)^2 + 3)^2}{4} = \frac{4n^2}{4} = n^2$

  Zatem $n \in X$. Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, czyli żądana własność zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. □