Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 1

8 października 2015 r.

M1.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech B będzie liczbą naturalną większą od 1. Wykazać, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w *postaci znormalizowanej* $x = smB^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą (*cechą*), a m – liczbą z przedziału $[1, B)$, zwaną *mantysą*.

M1.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danych: naturalnej liczby t oraz niezerowej liczby rzeczywistej $x = s\,m\,2^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą, a m – liczbą z przedziału $[1, 2)$, o rozwinięciu dwójkowym $m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k}$, w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ dla $k \geqslant 1$, definiujemy *zaokrąglenie liczby* x do $t+1$ cyfr za pomocą wzoru

$$\mathrm{rd}\,(x) := s\,\bar{m}\,2^c,$$

gdzie $\bar{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t}$.
Wykazać, że

$$|\mathrm{rd}\,(x) - x| \leqslant 2^c\mathsf{u},$$

gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$ jest *precyzją arytmetyki.*

M1.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech x będzie dowolną niezerową liczbą rzeczywistą. Wykazać, że błąd względny zaokrąglenia liczby x nie przekracza $\mathsf{u}/(1 + \mathsf{u})$.

M1.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ile jest liczb zmiennopozycyjnych w arytmetyce *single*, a ile w arytmetyce *double* (wg standardu IEEE 754)?

M1.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ i $\rho_j \in \{-1, +1\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 1$, gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$.
Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + \alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n,$$

gdzie θ_n jest wielkością spełniającą nierówność $|\theta_n| \leqslant \gamma_n$, gdzie z kolei

$$\gamma_n := \frac{n\mathsf{u}}{1 - n\mathsf{u}}.$$

M1.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 0.01$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + \alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leqslant 1.01n\mathsf{u}.$$

M1.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi, tzn. $\mathrm{rd}\,(x) = x, \mathrm{rd}\,(y) = y$, takimi, że $0 < y < x$. Wykazać, że jeśli

$$2^{-q} \leqslant 1 - \frac{y}{x} \leqslant 2^{-p}$$

(p i q są całkowite), to

$$p \leqslant \text{liczba bitów straconych przy odejmowaniu } x - y \leqslant q.$$