# Zadanie 3 (2012Z)

Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucając $n$ razy dwoma kostkami do gry uzyskamy wszystkie pary $(i, i)$, gdzie $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

# Zadanie 2 (2012P)

Niech $m \geqslant 1$. Zdefiniujmy ciąg:

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sum_{i=0}^{m} \left( \sum_{k1,\ldots,k_m \ :\ k_1+k_2+\ldots+k_m=n} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_m} \right)$$

Niech $A_m(x)$ będzie funkcją tworzącą tego ciągu. Znajdź równanie, które spełnia $A_m(x)$.

# Zadanie 4 (2011P)

Niech $s(n)$ będzie liczba skończonych ciągów $(x_1, x_2, \ldots)$ liczb całkowitych dla których $2x_{i+1} \leqslant x_i$ i $1 \leqslant x_i \leqslant n$. Podaj zależność rekurencyjną:

$$s(n) = s(n-1) + s(\lfloor n/2 \rfloor),\ s(1) = 1$$

Pokaż, że funkcja tworząca ciągu $s(n)$ spełnia równanie:

$$(1-t)S(t) = (1+t)S(t^2)$$

# Zadanie 1 (2010P)

Niech $T(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil T(\lceil \sqrt{n} \rceil) + n$ i $T(1) = T(2) = 1$. Znajdź funkcję różniczkowalną $f(x)$, taką że $T(n) = \Theta(f(n))$. Odpowiedź uzasadnij.

## Zadanie 1 (2009P)

Jak wiele liczb pierwszych z 1000 liczb naturalnych może być przedstawionych w postaci

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \ldots$$

# Zadanie 5 (2009P)

Dany jest ciąg $t_n$ określony jak następuje

$$t_0 = t_1 = 1,\ t_n = 3t\lfloor n/2 \rfloor + 7n$$

Wylicz funkcję $F(x)$, dla której funkcja tworząca $T(x)$ ciągu $t_n$ spełnia zależność:

$$T(x) = 3(x+1)T(x^2) + F(x)$$

## Zadanie 2 (2008P)

Przedstaw następującą sumę jako współczynnik dwumianowy:

$$\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{i_1}\sum_{i_3=1}^{i_2}\dots\sum_{i_n=1}^{i_{n-1}}1$$

## Zadanie 4 (2008P)

Wylicz funkcję tworzącą ciągu $a_n$ określonego wzorem:

$$a_0 = 0, a_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{i}$$

## Zadanie 4 (2007P)

Niech $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} H_n 2^{-n}$.

## Zadanie 3 (2003P)

Niech $p_n$ i $d_n$ będą odpowiednio liczbami wszystkich podziałów $n$ i podziałów $n$ na różne składniki. Niech $P(x)$ i $D(x)$ będą ich funkcjami tworzącymi. Pokaż, że $P(x) = D(x)P(x^2)$.

## Zadanie 3 (2002P)

Podaj wzór zwarty na sumę $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$.

## Zadanie 1 (2000Z)

Rozwiąż zależność rekurencyjną:

$$a_0 = a_1 = 0,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + 1}{2}$$

## Zadanie 2 (2000Z)

Pokaż, że dla liczb Fibonacciego zachodzi

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots$$

## Zadanie 2 (1997Z)

Rozwiąż zależność rekurencyjną

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$$

## Zadanie 4 (2011Z)

Niech $F(t)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $f_n$, w którym $f_0 = 1$. Napisz wzór pozwalający wyliczyć wyrazy $g_n$ ciągu, którego funkcją tworzącą jest $G(t) = \frac{1}{F(t)}$. Wzór ten powinien używać do wyliczenia $g_n$ wartości $f_i$ i wyrazów $g_i$ dla $i < n$. Pokaż, że wyrazy $f_n$ są całkowite, to $g_n$ też są całkowite.

## Zadanie 1 (2010Z)

Dla jakich $\alpha$ zadany przez warunek początkowy $a_0 = 1$ oraz równanie rekurencyjne

$$a_n = \left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right) a_{n-1} + \alpha^n + \left(\frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{4}}\right)^n$$

spełnia warunek $a_n = O(2^n)$.

## Zadanie 5 (2010Z)

Dla ustalonego $m$ napisz funkcję tworzącą ciągu $a_n$ określającego liczbę podziałów $n$ na dokładnie $m$ składników.

## Zadanie 3 (2004Z)

Znajdź funkcję tworzącą ciągu $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

## Zadanie 4 (2004Z)

Podaj wzór zwarty na sumę $\sum_{i=1}^{n} (-1)^k k^2$.

## Zadanie 1 (2004Z)

Pokaż, ze

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \log_2(k)} = \log 2 \log \log n + O(1)$$

## Zadanie 1 (2013P)

Policz sumę

$$\sum_k k^2 \binom{n}{k} 3^{2k}$$

## Zadanie 1 (2013Z)

Niech $a_n$ oznacza liczbę sposobów na jakie można złożyć odcinek długości $n$ z białych i czarnych odcinków o długości 2 i czerwonych, niebieskich i zielonych odcinków o długości 3. Podaj wzór zwarty na $a_n$.