

Zad 5/16

Zbiór A składa się z liczb przedziału $[0, 1]$, których rozwinięcie dziesiętne nie zawiera cyfry 9. Pokazać, że zbiór A ma miarę zero na prostej. Jaką moc ma zbiór A ?

Rozwiązanie: Będziemy konstruować zbiór A następująco. Bierzemy cały przedział $[0, 1]$ i będziemy wyrzucać z niego podprzedziały zawierające 9 na pierwszej pozycji po przecinku, potem na drugiej, na trzeciej itd.

Na początek wyrzucamy liczby typu $0.9X$, zatem wyrzuciliśmy $\frac{1}{10}$ przedziału. Następnie z tego co zostało wyrzucamy wszystkie liczby typu $0.X9Y$. Wyrzuciliśmy znowu $\frac{1}{10}$ z tego co zostało. Kontynuując ten proces zostanie nam $(1 - 1/10)(1 - 1/10)(1 - 1/10) \dots = \frac{9^n}{10^n} \rightarrow 0$. Zatem zbiór A jest miary zero.

Zbiór A jest mocy continuum. Wynika to z tego, że $|\{1, 2\}^{\mathbb{N}}| \leq |A| \leq |[0, 1]|$.

□