

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ  
STYCZEŃ 2010, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ A, CZAS: 125 MIN.  
*zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

ZADANIE 1

Dla jakich  $\alpha$  ciąg  $a_n$  zadany przez warunek początkowy  $a_0 = 1$  oraz równanie rekurencyjne

$$a_n = (\alpha^2 - 2\alpha + 2)a_{n-1} + \alpha^n + \left(\frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{4}}\right)^n$$

spełnia  $a_n = \mathcal{O}(2^n)$ .

ZADANIE 2

Udowodnij, że w ciągu  $n$  różnych liczb istnieje ciąg monotoniczny o długości  $\lceil \sqrt{n} \rceil$ .

ZADANIE 3

Ile jest rozdań w brydżu, przy których każdy gracz ma jakiegoś pika?

ZADANIE 4

Ile jest  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  takich, że jeśli  $a$  i  $b$  należą do jednego podzbioru, to  $|a - b| > r$ ? ( $r$  jest liczbą naturalną.)

POWODZENIA !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ  
STYCZEŃ 2010, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ B, CZAS: 125 MIN.  
*zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

ZADANIE 5

Dla ustalonego  $m$  napisz funkcję tworzącą ciąg  $a_n$  określającego liczbę podziałów  $n$  na dokładnie  $m$  składników.

ZADANIE 6

Dany jest graf 3-regularny  $G$ . Udowodnij, że dla każdego  $k$  graf  $G$  jest  $k$ -spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest  $k$ -krawędziowo spójny.

ZADANIE 7

Nie korzystając z twierdzenia o czterech barwach udowodnij, że liczba chromatyczna spójnego grafu planarnego bez trójkątów (podgrafów  $K_3$ ) wynosi co najwyżej 4.

ZADANIE 8

Mamy dane dwa skojarzenia  $M, M'$  w grafie dwudzielnym o zbiorach partycji  $A$  i  $B$ . Przypuśćmy, że zbiór  $A'$  zawarty w  $A$  jest pokryty przez  $M$ , a zbiór  $B'$  zawarty w  $B$  jest pokryty w  $M'$ . Pokaż, że istnieje skojarzenie  $M''$ , w którym  $A' \cup B'$  jest pokryte.

POWODZENIA !