Zadanie 14

Wykaż prawdziwość równości (F. Lucas, 1842-1891):

- $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$,
- $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$ dla $n \geqslant 1$,
- $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$,
- $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$

Twierdzenie 1. $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

Dowód. Przeprowadźmy dowód indukcyjny względem n. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1\}$. Zauważmy, że $0 \in X$, ponieważ $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1 = F_{0+2} - 1$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$ i pokażmy, że $n + 1 \in X$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} F_i \overset{zal}{=} F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1$$

Z powyższych rachunków wynika, że $n + 1 \in X$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej $X = \mathbb{N}$, czyli twiedzenie 1 jest prawdziwe dla dowolnego naturalnego n. □

Twierdzenie 2. $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$ *dla* $n \geqslant 1$

Dowód. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$. Wiemy, że $F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$. Zatem:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} = \underline{0 + F_1} + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} = \underline{F_2 + F_3} + F_5 + \ldots + F_{2n-1} =$$
$$= \underline{F_4 + F_5} + F_7 + \ldots + F_{2n-1} = \underline{F_6 + F_7} + F_9 + \ldots + F_{2n-1} = \ldots = \underline{F_{2n-2} + F_{2n-1}} = F_{2n}$$

□

Twierdzenie 3. $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Dowód. Indukcyjnie względem n. Zdefiniujmy X jako $\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}\}$.
$0 \in X$, ponieważ $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = F_0 F_{0+1}$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}^2 + \sum_{i=0}^{n} F_i^2 \overset{zal}{=} F_{n+1}^2 + F_n F_{n+1} = F_{n+1} \cdot (F_{n+1} + F_n) = F_{n+1} F_{n+2}$$

$n + 1 \in X$. Zatem z zasady indukcji wiemy, że $X = \mathbb{N}$, co pociąga za sobą prawdziwość twierdzenia nr 3.

□

Twierdzenie 4. $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$

Dowód. Przeprowadźmy dowód indukcyjnie. n. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}\}$. Zauważmy że $0 \in X$, ponieważ $F_0 F_{n+2} = 0 = 1^2 - 1 = F_{0+1}^2 + (-1)^{0+1}$.
Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$.

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n+1} F_n - F_{n+1}^2 =$$

$$= F_n^2 - F_{n+1} (F_{n+1} - F_n) = F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = -1 \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$$

$n + 1 \in X$, zatem podany wzór jest prawdziwy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

□