Zadanie 7

Rozwiąż zależności rekurencyjne

- $a_0 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n + 1,$
- $b_0 = \frac{1}{2},\ b_n = \frac{(n-2)b_{n-1}+1}{n},$
- $c_0 = 0,\ c_n = \frac{(n+2)c_{n-1}+n+2}{n},$
- $d_0 = 1,\ d_1 = 2,\ d_n = \frac{(n-2)!d_{n-1}d_{n-2}}{n}$

Rozwiązanie: Zgadnijmy rozwiązania powyższych zależności i uzasadnijmy je indukcyjnie.

- $a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!}$

  Dowód. Niech $X\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!}$. Zauważmy, że $0 \in X$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n+1 \in X$.

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + 1 = (n+1)\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!}\right) + 1 = 1 + \left((n+1) + (n+1)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!}\right) =$$

$$= 1 + \left((n+1) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{i!}\right) = 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)!}{i!}$$

  Zatem $n+1 \in X$. Na mocy zasady indukcji dostajemy $X = \mathbb{N}$. Zatem podany wzór jest prawdziwy dla dowolnego naturalnego n.

  □

- $b_n = \frac{1}{2}$

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = \frac{1}{2}\}$. Oczywiście $0 \in X$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n \in X$ i pokażmy, że $n+1 \in X$.

$$b_{n+1} = \frac{(n-1)b_n + 1}{n+1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (n-1) + 1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

  $n+1 \in X$, a zatem na mocy zasady indukcji matematycznej podany wzór jest prawdziwy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

  □

- $c_n = n^2 + 2n$

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid c_n = n^2 + 2n\}$. Oczywiście $0 \in X$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n \in X$ i pokażmy, że $n+1 \in X$.

$$c_{n+1} = \frac{(n+1+2)c_n + n + 1 + 2}{n+1} = \frac{(n+3)(n^2+2n) + n + 3}{n+1} =$$

$$= \frac{(n+3)(1+n^2+2n)}{n+1} = (n+1)(n+3) = (n+1)^2 + 2(n+1)$$

Z powyższych rachunków wynika, że $n + 1 \in X$, a zatem na mocy zasady indukcji matematycznej podany wzór jest prawdziwy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

- $d_n = \frac{2^{F_n}}{n!}$

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid d_n = \frac{2^{F_n}}{n!}\}$. Zauważmy, że $0, 1 \in X$. Weźmy dowolne $2 < n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że wszystkie $k < n$ należą do zbioru X. Obliczmy d_n.

  $$d_n = \frac{(n-2)!d_{n-1}d_{n-2}}{n} = \frac{(n-2)! \cdot \frac{2^{F_{n-1}}}{(n-1)!} \cdot \frac{2^{F_{n-2}}}{(n-2)!}}{n} = \frac{2^{F_{n-1}} \cdot 2^{F_{n-2}}}{n!} = \frac{2^{F_n}}{n!}$$

  Zatem $n \in X$. Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, czyli dla każdego naturalnego n prawdą jest $d_n = \frac{2^{F_n}}{n!}$.

  $\square$