Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2004, pierwszy termin, część A, czas: 120 min.

Zadanie 1
Posortuj następujące funkcje od najwolniej do najszybciej rosnącej. Każda poprzednia ma być o-małe od następnej. Wszystkie logarytmy mają podstawę 2.

$$\sqrt{3}^{\log n}, 3^{\sqrt{\log n}}, \sqrt{n}^3, 3^{\log n}, \log\left(n^{\sqrt{n}}\right), n, \log\left(\sqrt{n}^n\right), \left(\sqrt{\log 3}\right)^n, \log\left(\sqrt{n^3}\right), n^{\sqrt{\log n}}, (\log 3)^{\sqrt{n}}.$$

Zadanie 2
Liczba 20042005 ma rozkład na czynniki: $5 \cdot 59 \cdot 67939$. Oblicz $2^{15761615}$ w pierścieniu reszt modulo 20042005.

Zadanie 3
Znajdź funkcję tworzącą ciągu $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$.

Zadanie 4
Podaj zwarty (bez symboli $\sum$ i $\cdots$) wzór na $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$.

Powodzenia !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LUTY 2004, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ B, CZAS: 120 MIN.
Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 5
Przypuśćmy, że zbiór Ω ze zbiorem zdarzeń $\mathcal{Z}$ i prawdopodobieństwem P tworzą przestrzeń probabilistyczną a $X : \Omega \to R$ jest zmienną losową, której wartości są liczbami naturalnymi i która ma wartość oczekiwaną $E(X)$. Wyprowadź z definicji wartości oczekiwanej, że

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq n\}).$$

ZADANIE 6
W drzewie mamy dane wierzchołki a, b, c, d. Pokaż, że jeśli drogi łączące a z b i c z d nie mają wspólnego wierzchołka, to mają wspólny wierzchołek drogi łączące a z c i b z d (oceniana będzie precyzja dowodu).

ZADANIE 7
Pokaż, że w dowolnym grafie prostym planarnym istnieją co najmniej trzy wierzchołki stopnia niewiększego od 5.

ZADANIE 8
Wierzchołkami grafu G są wszystkie ciągi złożone z jednej litery a, jednej litery b i czterech liter c. Dwa wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się transpozycją dwóch sąsiednich liter. Pokaż, że G ma drogę Hamiltona, ale nie ma cyklu Hamiltona.

POWODZENIA !