# Repetytorium z JFiZO

Jakub Michaliszyn

Zadania 31, 51, 83, 84 i jakaś redukcja

Zadanie 31. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}_* = \{w \mid \exists x. wx \in \mathcal{L} \wedge |wx| = |w|^2\}$$

jest regularny.

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $R_n : 2^Q \to 2^Q$ będzie taka, że
$R_n(S) = \{q \in Q \mid \exists s \in S \exists y. |y| = n \wedge \hat{\delta}(s, y) = q\}$.

Fakt 1. $R_{n+m} =$

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $R_n : 2^Q \to 2^Q$ będzie taka, że
$R_n(S) = \{q \in Q \mid \exists s \in S \exists y. |y| = n \wedge \hat{\delta}(s, y) = q\}$.

Fakt 1. $R_{n+m} = R_n \circ R_m$

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $R_n : 2^Q \to 2^Q$ będzie taka, że
$R_n(S) = \{q \in Q \mid \exists s \in S \exists y. |y| = n \wedge \hat{\delta}(s, y) = q\}$.

Fakt 1. $R_{n+m} = R_n \circ R_m$

**Twierdzenie**

Dla każdych $x, y$, jeśli $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$, $R_{|x|} = R_{|y|}$ i
$R_{|x|^2-|x|} = R_{|y|^2-|y|}$, to $x \sim_{\sqrt{L}} y$.

Wniosek: $\sqrt{L}$ jest regularny (z twierdzenia o indeksie).

## Twierdzenie

Dla każdych $x, y$, jeśli $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$, $R_{|x|} = R_{|y|}$ i $R_{|x|^2-|x|} = R_{|y|^2-|y|}$, to $x \sim_{\sqrt{L}} y$.

Weźmy dowolne $x, y, z$ takie, że $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$, $R_{|x|} = R_{|y|}$ i $R_{|x|^2-|x|} = R_{|y|^2-|y|}$.

### Twierdzenie

Dla każdych $x, y$, jeśli $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$, $R_{|x|} = R_{|y|}$ i $R_{|x|^2-|x|} = R_{|y|^2-|y|}$, to $x \sim_{\sqrt{L}} y$.

Weźmy dowolne $x, y, z$ takie, że $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$, $R_{|x|} = R_{|y|}$ i $R_{|x|^2-|x|} = R_{|y|^2-|y|}$.

Pokażemy, że:

1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $y \in \sqrt{\mathcal{L}}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.
3. $R_{|xz|} = R_{|yz|}$.
4. $R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|yz|^2-|yz|}$.

Wniosek: $xz \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $yz \in \sqrt{\mathcal{L}}$.

1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $y \in \sqrt{\mathcal{L}}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.
3. $R_{|xz|} = R_{|yz|}$.
4. $R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|yz|^2-|yz|}$.

Dowód 1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $R_{|x|^2-|x|}(\{\hat{\delta}(q_0, x)\}) \cap Q_F \neq \emptyset$.

1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $y \in \sqrt{\mathcal{L}}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.
3. $R_{|xz|} = R_{|yz|}$.
4. $R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|yz|^2-|yz|}$.

Dowód 1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $R_{|x|^2-|x|}(\{\hat{\delta}(q_0, x)\}) \cap Q_F \neq \emptyset$.
2 - oczywiste.

1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $y \in \sqrt{\mathcal{L}}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.
3. $R_{|xz|} = R_{|yz|}$.
4. $R_{|xz|^2 - |xz|} = R_{|yz|^2 - |yz|}$.

Dowód 1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $R_{|x|^2 - |x|}(\{\hat{\delta}(q_0, x)\}) \cap Q_F \neq \emptyset$.
2 - oczywiste.
3 - $R_{|xz|} = R_{|z|} \circ R_{|x|}$.

1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $y \in \sqrt{\mathcal{L}}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.
3. $R_{|xz|} = R_{|yz|}$.
4. $R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|yz|^2-|yz|}$.

Dowód 1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $R_{|x|^2-|x|}(\{\hat{\delta}(q_0, x)\}) \cap Q_F \neq \emptyset$.
2 - oczywiste.
3 - $R_{|xz|} = R_{|z|} \circ R_{|x|}$.
4 -
$R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|x|^2+2|x||z|+|z|^2-|x|-|z|} = R_{|x|^2-|x|} \circ R_{|z|^2-|z|} \circ R_{2|x||z|}$.

1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $y \in \sqrt{\mathcal{L}}$.
2. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.
3. $R_{|xz|} = R_{|yz|}$.
4. $R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|yz|^2-|yz|}$.

Dowód 1. $x \in \sqrt{\mathcal{L}}$ wtw. $R_{|x|^2-|x|}(\{\hat{\delta}(q_0, x)\}) \cap Q_F \neq \emptyset$.
2 - oczywiste.
3 - $R_{|xz|} = R_{|z|} \circ R_{|x|}$.
4 -
$R_{|xz|^2-|xz|} = R_{|x|^2+2|x||z|+|z|^2-|x|-|z|} = R_{|x|^2-|x|} \circ R_{|z|^2-|z|} \circ R_{2|x||z|}$.
Zauważmy, że $R_{2|x||z|} = R_{|x|}^{2|z|}$.

51. Każdy bezkontekstowy język nad $\{0\}$ jest regularny.

Dowód. Weźmy bezkontektowy język $L$ i niech $p$ będzie stałą dla niego z lematu o pompowaniu.

51. Każdy bezkontekstowy język nad $\{0\}$ jest regularny.

Dowód. Weźmy bezkontektowy język $L$ i niech $p$ będzie stałą dla niego z lematu o pompowaniu.

Niech $w_{k,l}$ - najkrótsze słowo takie, że $|w_{k,l}| \mod l = k$ oraz dla każdego $n$ mamy $w_{k,l}0^{nl} \in L$ lub $\emptyset$ gdy takiego nie ma.

51. Każdy bezkontekstowy język nad $\{0\}$ jest regularny.

Dowód. Weźmy bezkontektowy język $L$ i niech $p$ będzie stałą dla niego z lematu o pompowaniu.

Niech $w_{k,l}$ - najkrótsze słowo takie, że $|w_{k,l}| \mod l = k$ oraz dla każdego $n$ mamy $w_{k,l}0^{nl} \in L$ lub $\emptyset$ gdy takiego nie ma.

$$r = \sum_{w \in L : |w| \leq p} w + \sum_{k,l : 0 \leq k < l \leq p} w_{k,l}(0^l)^*$$

51. Każdy bezkontekstowy język nad $\{0\}$ jest regularny.

Dowód. Weźmy bezkontektowy język $L$ i niech $p$ będzie stałą dla niego z lematu o pompowaniu.

Niech $w_{k,l}$ - najkrótsze słowo takie, że $|w_{k,l}| \mod l = k$ oraz dla każdego $n$ mamy $w_{k,l}0^{nl} \in L$ lub $\emptyset$ gdy takiego nie ma.

$$r = \sum_{w \in L : |w| \leq p} w + \sum_{k,l : 0 \leq k < l \leq p} w_{k,l}(0^l)^*$$

Twierdzenie. $L_r = L$.

51. Każdy bezkontekstowy język nad $\{0\}$ jest regularny.

Dowód. Weźmy bezkontektowy język $L$ i niech $p$ będzie stałą dla niego z lematu o pompowaniu.

Niech $w_{k,l}$ - najkrótsze słowo takie, że $|w_{k,l}| \mod l = k$ oraz dla każdego $n$ mamy $w_{k,l}0^{nl} \in L$ lub $\emptyset$ gdy takiego nie ma.

$$r = \sum_{w \in L : |w| \leq p} w + \sum_{k,l : 0 \leq k < l \leq p} w_{k,l}(0^l)^*$$

Lemat 1. $L_r \subseteq L$. Oczywiste

51. Każdy bezkontekstowy język nad $\{0\}$ jest regularny.

Dowód. Weźmy bezkontektowy język $L$ i niech $p$ będzie stałą dla niego z lematu o pompowaniu.

Niech $w_{k,l}$ - najkrótsze słowo takie, że $|w_{k,l}| \mod l = k$ oraz dla każdego $n$ mamy $w_{k,l}0^{nl} \in L$ lub $\emptyset$ gdy takiego nie ma.

$$r = \sum_{w \in L : |w| \leq p} w + \sum_{k,l : 0 \leq k < l \leq p} w_{k,l}(0^l)^*$$

Lemat 2. $L_r \supseteq L$. Niech $w \in L$. Jeśli $|w| < p$, to teza jest oczywista. W przeciwnym razie istnieją słowa $s, z, t, y, x$ takie, że dla każdego $|zty| \leq p$ i dla każdego $d$, $sz^d ty^d x \in L$. Więc, istnieje $l$ takie, że dla każdego $d$ mamy $w0^{ld} \in L$.

Niech $k = |w| \mod l$. Wtedy $w_{k,l} \neq \emptyset$ oraz $w \in L_{w_{k,l}(0^l)*}$.

83. Każdy niepusty zbiór rekrurencyjnie przeliczalny jest zbiorem wartości pewnej całkowitej funkcji.

Weźmy dowolny niepusty zbiór rekurencyjnie przeliczalny $X$ oraz dowolne $i \in X$. Niech $\psi$ będzie programem semi-rozstrzygającym $X$.

Rozpatrzmy program $\Phi_X$:

83. Każdy niepusty zbiór rekrurencyjnie przeliczalny jest zbiorem wartości pewnej całkowitej funkcji.

Weźmy dowolny niepusty zbiór rekurencyjnie przeliczalny $X$ oraz dowolne $i \in X$. Niech $\psi$ będzie programem semi-rozstrzygającym $X$.

Rozpatrzmy program $\Phi_X$:

- wczytaj $n$
- niech $k, l$ będą maksymalne takie, że $2^k \mid n$ oraz $3^l \mid n$.
- jeśli $\psi(k)$ uruchomione na $l$ zwraca 1, zwróć $k$, inaczej zwróć $i$.

Twierdzenie. Zbiorem wartości $\Phi_X$ jest $X$.

83. Każdy niepusty zbiór rekrurencyjnie przeliczalny jest zbiorem wartości pewnej całkowitej funkcji.

Weźmy dowolny niepusty zbiór rekurencyjnie przeliczalny $X$ oraz dowolne $i \in X$. Niech $\psi$ będzie programem semi-rozstrzygającym $X$.

Rozpatrzmy program $\Phi_X$:

- wczytaj $n$
- niech $k, l$ będą maksymalne takie, że $2^k \mid n$ oraz $3^l \mid n$.
- jeśli $\psi(k)$ uruchomione na $l$ zwraca 1, zwróć $k$, inaczej zwróć $i$.

Twierdzenie. Zbiorem wartości $\Phi_X$ jest $X$. 1. $\Phi_X$ zwraca tylko elementy z $X$.

83. Każdy niepusty zbiór rekrurencyjnie przeliczalny jest zbiorem wartości pewnej całkowitej funkcji.

Weźmy dowolny niepusty zbiór rekurencyjnie przeliczalny $X$ oraz dowolne $i \in X$. Niech $\psi$ będzie programem semi-rozstrzygającym $X$.

Rozpatrzmy program $\Phi_X$:

- wczytaj $n$
- niech $k, l$ będą maksymalne takie, że $2^k \mid n$ oraz $3^l \mid n$.
- jeśli $\psi(k)$ uruchomione na $l$ zwraca 1, zwróć $k$, inaczej zwróć $i$.

Twierdzenie. Zbiorem wartości $\Phi_X$ jest $X$. 1. $\Phi_X$ zwraca tylko elementy z $X$. 2. Jeśli $\psi(x)$ zwraca 1 po $l$ krokach, to $\Phi_X(2^x 3^l)$ zwraca $x$.

84. Każdy nieskończony zbiór rekrurencyjnie przeliczalny jest zbiorem wartości pewnej różnowartościowej, całkowitej funkcji.

Weźmy dowolny nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny $X$. Rozpatrzmy program $\Psi_X$:

84. Każdy nieskończony zbiór rekrurencyjnie przeliczalny jest zbiorem wartości pewnej różnowartościowej, całkowitej funkcji.

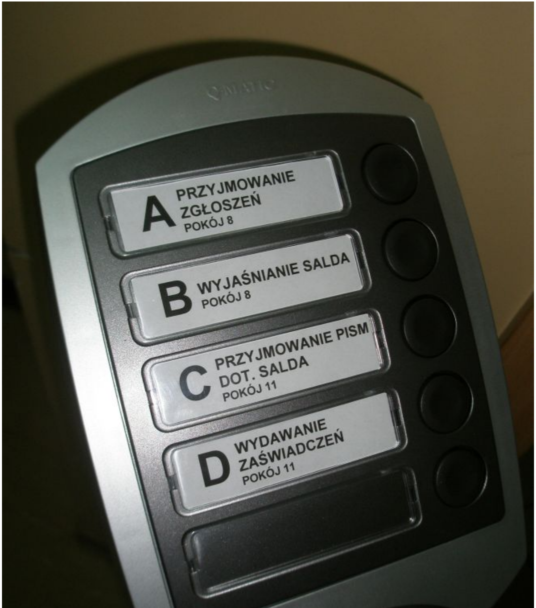
Weźmy dowolny nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny $X$. Rozpatrzmy program $\Psi_X$:

- wczytaj $n$
- niech $Z \leftarrow \emptyset$
- dla $i = 1, 2, \ldots$
- $\quad x \leftarrow \Phi_X(i)$
- $\quad$ jeśli $x \notin Z$ oraz $|Z| = n$ to zwróć $x$
- $\quad Z \leftarrow Z \cup \{x\}$

Twierdzenie. $\Psi_X$ jest jak trzeba.

## Automat kolejkowy.

# Automat kolejkowy.



Automat kolejkowy.

$(\Gamma, Q, q_0, \delta, q_f)$ gdzie $\delta \subseteq Q \times \Gamma \cup \{\perp\} \times Q \times \Gamma^*$.

Intuicja: $\delta(q, s, q', s_1 \ldots s_n)$ oznacza „jeśli jesteś w stanie $q$ a kolejka jest postaci $sk_1 \ldots k_l$ dla pewnych $k_1, ..., k_l$, to przejdź do stanu $q'$ i kolejki $k_1 \ldots k_l s_1 \ldots s_n$ ($\perp$ - pusta kolejka).

Automat kolejkowy.

$(\Gamma, Q, q_0, \delta, q_f)$ gdzie $\delta \subseteq Q \times \Gamma \cup \{\perp\} \times Q \times \Gamma^*$.

Intuicja: $\delta(q, s, q', s_1 \dots s_n)$ oznacza „jeśli jesteś w stanie $q$ a kolejka jest postaci $sk_1 \dots k_l$ dla pewnych $k_1, ..., k_l$, to przejdź do stanu $q'$ i kolejki $k_1 \dots k_l s_1 \dots s_n$ ($\perp$ - pusta kolejka).
Twierdzenie. Problem stopu dla automatu kolejkowego jest nierozstrzygalny.

Dowód. Zredukujemy problem stopu maszyny Turinga.

Automat kolejkowy.

$(\Gamma, Q, q_0, \delta, q_f)$ gdzie $\delta \subseteq Q \times \Gamma \cup \{\perp\} \times Q \times \Gamma^*$.

Intuicja: $\delta(q, s, q', s_1 \dots s_n)$ oznacza „jeśli jesteś w stanie $q$ a kolejka jest postaci $sk_1 \dots k_l$ dla pewnych $k_1, \dots, k_l$, to przejdź do stanu $q'$ i kolejki $k_1 \dots k_l s_1 \dots s_n$ ($\perp$ - pusta kolejka).
Twierdzenie. Problem stopu dla automatu kolejkowego jest nierozstrzygalny.

Dowód. Zredukujemy problem stopu maszyny Turinga. Niech $M$ będzie maszyną a $x$ dowolnym wejściem, skonstruujemy automat, który staje wtw., gdy $M(x)$ staje.

Idea na tablicy.

$(q_0, \perp, (q_0^M, szukaj), \$x£B\#)$

Automat kolejkowy.

$(\Gamma, Q, q_0, \delta, q_f)$ gdzie $\delta \subseteq Q \times \Gamma \cup \{\perp\} \times Q \times \Gamma^*$.

Intuicja: $\delta(q, s, q', s_1 \dots s_n)$ oznacza „jeśli jesteś w stanie $q$ a kolejka jest postaci $sk_1 \dots k_l$ dla pewnych $k_1, ..., k_l$, to przejdź do stanu $q'$ i kolejki $k_1 \dots k_l s_1 \dots s_n$ ($\perp$ - pusta kolejka).
Twierdzenie. Problem stopu dla automatu kolejkowego jest nierozstrzygalny.

Dowód. Zredukujemy problem stopu maszyny Turinga. Niech $M$ będzie maszyną a $x$ dowolnym wejściem, skonstruujemy automat, który staje wtw., gdy $M(x)$ staje.

Idea na tablicy.

$(q_0, \perp, (q_0^M, szukaj), \$x£B\#)$

Czy dla deterministycznych automatów problem jest rozstrzygalny?