9. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Wykazać, że ciąg funkcji $f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$ dla $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $a_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ jest zbieżny do zera.

2. Ciąg funkcji $f_n(x)$ na przedziale $[0,1]$ jest zbieżny jednostajnie do zera. Niech x_n będzie dowolnym ciągiem liczb z przedziału $[0,1]$. Udowodnić, że $\lim_n f_n(x_n) = 0$.

3. Ciąg funkcji $f_n(x)$ na przedziale $[0,1]$ jest zbieżny punktowo do zera. Załóżmy, że dla pewnej dodatniej liczby δ istnieje ciąg $x_n \in [0,1]$ spełniający $f_n(x_n) \geqslant \delta$. Czy ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do zera ?

4. Czy ciąg $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$ jest zbieżny jednostajnie do zera na przedziale $[0,1]$? `Wskazówka:` $x_n = 1 - (1/n)$.

5. Zbadać zbieżność jednostajną ciągów funkcji na przedziale $[0,1]$.

$$f_n(x) = \frac{x}{1+\sqrt{nx}} \qquad f_n(x) = (1-x)^n \qquad f_n(x) = (1-0,5x)^n \qquad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
$$f_n(x) = x^n - x^{2n} \qquad f_n(x) = x(1-x)^n \qquad f_n(x) = nx(1-x)^n \qquad f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^n}$$

6. Zbadać zbieżność jednostajną ciągów funkcji na podanych zbiorach.

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n},\ x > 0; \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}},\ x \in \mathbb{R}; \qquad f_n(x) = e^{-nx^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n},\ 0 \leqslant x \leqslant 2; \qquad f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R};$$

`Wskazówka:` W obu poprzednich zadaniach obliczyć granicę punktową f. Następnie w zależności od sytuacji: (a) oszacować $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, (b) znaleźć punkty x_n, że $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \delta > 0$, (c) skorzystać z twierdzenia Dini'ego, (d) skorzystać z nieciągłości funkcji $f(x)$.

7. Ciąg funkcji ciągłych $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że dla pewnej stałej liczby $M > 0$ zachodzi

$$|f_n(x)| \leqslant M, \qquad n \in \mathbb{N},\ a \leqslant x \leqslant b.$$

8. Funkcja ciągła $f(x)$ zmienia znak w przedziale $[a,b]$ przynajmniej raz. Pokazać, że jeśli ciąg funkcji ciągłych f_n jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na tym przedziale, to dla dostatecznie dużych n każda z funkcji f_n zeruje się w w $[a,b]$.

9. Zbadać zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych korzystając z twierdzenia Weierstrassa o majoryzacji.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x},\ x \geqslant 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4},\ x \in \mathbb{R}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)},\ x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^2+n\ln^2 n},\ |x| \leqslant 1; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\ x \geqslant 0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3},\ x \in \mathbb{R}$$

∗10. Dowieść, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ jest ciągła we wszystkich punktach , w których jest określona (tzn. $x \neq \pm n$).

∗11. Sprawdzić, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} e^{-n^2 x}$ jest ciągła w przedziale $x > 0$ i nieciągła w $x = 0$.

12. Znaleźć ciągi funkcji $\{f_n(x)\}$ i $\{g_n(x)\}$, które są zbieżne jednostajnie na prostej, a ciąg $\{f_n(x)g_n(x)\}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

13. Ciąg liczb dodatnich a_n jest malejący i zbieżny do zera. Ciąg funkcji $b_n(x)$ spełnia

$$|s_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M, \quad x \in A.$$

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny. `Wskazówka:` Przeanalizować dowód twierdzenia Dirichleta.

14. Pokazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

są jednostajnie zbieżne dla $x \in [\varepsilon, \pi]$ dla dowolnej liczby $0 < \varepsilon < \pi$.

15. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$ jest jednostajnie zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$?

`Wskazówka:` Pokazać, że $|s_n(x) - s(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

16. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ nie jest bezwzględnie zbieżny dla żadnej liczby $x \neq k\pi$. `Wskazówka:` $2|\sin nx| \geqslant 2\sin^2 nx = 1 - \cos 2nx$.

17. Obliczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5^n) x^{2n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2^{-n}) x^{4n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 3^{-n}) x^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^{[n!\sqrt{2}]}$$

Zbadać zachowanie się szeregów na brzegu przedziału zbieżności.