

Spis treści

Przegląd podstawowych zagadnień związanych z wielomianami	1
Postawowe definicje	1
Postać iloczynowa wielomianu i dzielenie wielomianu	2
Pochodna wielomianu i jej obliczanie	2
Metoda Newtona oraz wielowymiarowa metoda Newtona	2
Opis klasycznej metody Newtona	2
Zastosowanie klasycznej metody Newtona do szukania zer wielomianu	2
Metoda Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych	3
Metoda Newtona dla funkcji zespolonych	4

Przegląd podstawowych zagadnień związanych z wielomianami

Postawowe definicje

Definicja 1. Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem \mathbb{K} będziemy nazywać przekształcenie $\mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}$ zadane wzorem $W(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, gdzie a_i to pewne współczynniki z ciała \mathbb{K} .

Definicja 2. Niech W będzie pewnym wielomianem (nad ciałem \mathbb{K}). Liczbę a , taką że $W(a) = 0$, będziemy nazywać pierwiastkiem wielomianu.

Uwaga 1. Z faktu, że wielomian W ma współczynniki z ciała \mathbb{K} , nie wynika fakt, że jego pierwiastki również będą należeć do \mathbb{K} . Klasycznym przykładem jest wielomian $x^2 + 1$, który ma współczynniki rzeczywiste, a jego pierwiastkami są liczby zespolone.

Uwaga 2. Istnieją takie ciała \mathbb{K} , że dla dowolnego wielomianu stopnia większego od 0 wszystkie jego pierwiastki należą do \mathbb{K} . Ciała takie będziemy nazywać algebraicznie domkniętymi. Przykładem takiego ciała jest \mathbb{C} , czego nie będziemy dowodzić.

Podczas całego tego sprawozdania będziemy zajmować się następującym problemem:

Problem znajdowania miejsc zerowych wielomianu

Niech W będzie wielomianem. Celem jest znaleźć zbiór $\ker(W) = \{a \mid W(a) = 0\}$.

Powyższy problem, choć pozornie prosty, jest sformułowany bardzo ogólnie. Na potrzeby tej pracy od tej pory ograniczymy się tylko do \mathbb{R} oraz \mathbb{C} , choć nic nie staje na przeszkodzie by poeksperymentować z innymi ciałami. Aktualnie nie wiemy czy każdy wielomian ma pierwiastki, a jeśli ma to czy ich zbiór jest skończony. Nie znamy również żadnych metod rozwiązywania $W(x) = 0$. By lepiej zrozumieć podane zagadnienie przejdźmy przez ciąg różnych definicji, algorytmów, twierdzeń i lematów związanych z wielomianami (warto je zrozumieć, gdyż kolejne rozdziały będą z nich korzystać).

Twierdzenie 1. Każdy wielomian $W(x)$ nad \mathbb{C} stopnia $n \in \mathbb{N}_+$ ma co najmniej jeden pierwiastek.

Dowód. To twierdzenie jest nazywane zasadniczym twierdzeniem algebry. Dowód [1] s. 105. □

Wniosek 1. $|\ker(W)| \leq n$, gdzie n to stopień wielomianu W .

Postać iloczynowa wielomianu i dzielenie wielomianu

Definicja 3. Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielny przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Definicja 4. Dowolny wielomian $W(x)$ możemy zapisać jako $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$ dla pewnych wielomianów P, Q, R . Mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $Q(x)$ jeżeli $R(x) = 0$.

Twierdzenie 2. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = (x - a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$.

Dowód. W [2] □

Chcilibyśmy umieć w efektywny sposób realizować procedurę dzielenie wielomianu przez jednomiany postaci $x - a$. Służy do tego następujący algorytm:

1. $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
2. Niech $\alpha = a_n$
3. Kolejno dla $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ wykonaj $\alpha := a_k + x\alpha$.
4. Wynik to $p(x) = \alpha$.

Dokładny opis metody oraz jej analizę możemy znaleźć w [3] (s 103).

Pochodna wielomianu i jej obliczanie

TUTAJ DODAC OPIS DOTYCZĄCY POCHODNYCH I OBLICZANIA ICH DLA WIELOMIANU.

Metoda Newtona oraz wielowymiarowa metoda Newtona

Opis klasycznej metody Newtona

Klasyczną metodą Newtona zastosowaną dla pewnego punktu startowego p oraz funkcji $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywać będziemy metodę iteracyjną postaci:

$$x_n = \begin{cases} p, & \text{gdy } n = 0 \\ x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Analizę klasycznej metody Newtona można znaleźć w [3] na stronach 71-81.

Zastosowanie klasycznej metody Newtona do szukania zer wielomianu

Jeśli mamy wielomian o współczynnikach i pierwiastkach rzeczywistych możemy policzyć jego pierwiastki za pomocą klasycznej metody Newtona. Podstawiamy za f z poprzedniego opisu nasz wielomian, a f' to jego pochodna. Po znalezieniu jednego pierwiastka (nazwijmy go a) dzielimy nasz wielomian przez $x - a$ i uruchamiamy program dla otrzymanego wielomianu. Proces kontynuujemy tak długo, aż dojdziemy do wielomianu o stopniu 0.

Uwaga 3. Wartość w punkcie wielomianu i jego pochodnej możemy wyznaczyć z pomocą schematu Hornera, który był omówiony wcześniej (w kodzie przykładowym skorzystaliśmy z funkcji bibliotecznych dla większej czytelności).

```

using Polynomials
# W – wielomian, n – stopień wielomianu, p – punkt startowy, eps – dokładność

function klasyczna_metoda_newtona(W, n, p, eps)
    dW = polyint(W)          # oblicza pochodną wielomianu
    x_n = p

    while abs(polyval(W, x_n)) >= eps    # dopóki błąd >= precyzja
        x_n = x_n - (polyval(W, x_n)/polyval(dW, x_n))
    end

    return x_n    # zwróć szukany pierwiastek
end

```

Uwaga 4. Powyższa metoda nie nadaje się do obliczania miejsc zerowych wielomianu, którego pierwiastki są zespolone (z powodu tego, że operujemy tutaj na tylko rzeczywistych przybliżeniach x_n).

Metoda Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych

Załóżmy, że mamy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

gdzie $f_i \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ jest klasy C^1 .

Każdą z tych funkcji możemy rozpiszać ze wzoru Taylora jako:

$$0 = f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \approx f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Powyższy układ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Aby nieco skrócić ten układ, będziemy go zapisywać jako $F(X) = -J \cdot H$. Jeśli macierz J jest nieosobliwa, to układ ma rozwiązanie w postaci:

$$-J^{-1} \cdot F(X) = H$$

Ostatecznie wzór Newtona dla układu funkcji wielu zmiennych możemy wzorem:

$$X_{k+1} = X_k + H_k = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$$

Metoda Newtona dla funkcji zespolonych

Lemat 1. Dowloną funkcję analityczną $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ możemy zapisać jako

$$f(z) = f(x + yi) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, $P(x, y) \in \mathbb{R}$, $Q(x, y) \in \mathbb{R}$

Przykład 1.

$$f(z) = z^3 - 2z = f(x + iy) = (x + iy)^3 - 2(x + iy) = (x^3 - 3xy^2 - 2x) + i(3x^2y - y^3 - 2y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Niech $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Równanie $f(z) = 0$ możemy sprowadzić do układu równań $Q(x, y) = 0$ i $P(x, y) = 0$. Taki układ równań rozwiązujemy za pomocą metody Newtona dla funkcji wielu zmiennych.

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J^{-1} \begin{pmatrix} P(x_n, y_n) \\ Q(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(x_n, y_n) \\ Q(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Ponieważ wielomian jest funkcją holomorficzną, to zachodzi równanie Cauchy'ego-Riemanna:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Oznaczając $P = P(x_n, y_n)$, $Q = Q(x_n, y_n)$, $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}(x_n, y_n)$, $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_n, y_n)$ oraz korzystając ze wzoru na macierz odwrotną możemy uprościć wzór na metodę Newtona do postaci:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - \frac{PP_x + QQ_x}{P_x^2 + Q_x^2} \\ y_n - \frac{PP_y + QQ_y}{P_x^2 + Q_x^2} \end{pmatrix}$$

Literatura

- [1] Leja, Franciszek. *Funkcje zespolone*, Warszawa : PWN, 1976
- [2] Aleksiej I., Kostrikin *Wstęp do algebry. Podstawy algebry*, Warszawa : PWN, 2008
- [3] David Kincaid, Ward Cheney *Analiza numeryczna*, Warszawa : WNT, 2006
- [4] Lily Yau, Adi Ben-Israel *The Newton and Halley Methods for Complex Roots*, The American Mathematical Monthly 105(1998), 806–818