Zadanie 4

Rozwiąż następujące zależności :

- $f_n = f_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $f_1 = 3$.
- $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
- $l_n = l_{n-1} l_{n-2}$ dla $n > 2$ i $l_1 = l_2 = 2$.

Rozwiazanie:

- $f_n = 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.

  Dowód. Udowodnijmy tę zależność indukcyjnie względem n. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid f_n = \frac{3}{2}(3^n - 1)\}$. Zauważmy, że $1 \in X$, bo $3 = \frac{3}{2}(2) = \frac{3}{2}\left(3^1 - 1\right)$.

  Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. Wtedy

  $$f_{n+1} = 3^{n+1} + f_n = 3^{n+1} + \frac{3}{2}(3^n - 1) = \frac{3^{n+2}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$$

  □

  Z powyższych rachunków wynika, że $n+1 \in X$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej wynika, że $X = \mathbb{N}_+$, co dowodzi że wzór $f_n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ zachodzi dla dowolnego naturalnego $n > 0$.

- $h_n = (-1)^{n+1} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid h_n = (-1)^{n+1} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$. $1 \in X$, ponieważ $(-1)^{1+1} \cdot \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1 \cdot 1 = 1 = h_1$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$.

  1. Załóżmy, że $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

     $$h_{n+1} = h_n + (-1)^{n+2} \cdot (n+1) = (-1)^{n+1} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil + (-1)^{n+2} \cdot (n+1) = (-1)^{2k+1+1} \cdot \lceil \frac{2k+1}{2} \rceil + (-1)^{2k+1+2} \cdot (2k+1+1) =$$

     $$= (k+1) - 2k - 2 = -k - 1 = -(k+1) = (-1)^{(2k+1+1)+1} \lceil \frac{2k+2}{2} \rceil = (-1)^{(n+1)+1} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$$

  2. Załóżmy, że $n = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

     $$h_{n+1} = h_n + (-1)^{n+2} \cdot (n+1) = (-1)^{n+1} \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil + (-1)^{n+2} \cdot (n+1) = (-1)^{2k+1} \cdot \lceil \frac{2k}{2} \rceil + (-1)^{2k+2} \cdot (2k+1) =$$

     $$= -k + 2k + 1 = k + 1 = (-1)^{(2k+1)+1} \lceil \frac{2k+1}{2} \rceil = (-1)^{(n+1)+1} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$$

  Zatem $n + 1 \in X$, co pociąga za sobą (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$) równość z pierwszej linijki rozwiązania.

  □

- $l_n = 2^{F(n)}$, gdzie $F(n)$ oznacza n-tą liczbę Fibonacciego.

  Dowód. Analogicznie jak wyżej skorzystamy z indukcji. $X = \{0 < n \in \mathbb{N} \mid 2^{F(n)} = l_n$. Z treści zadania wiemy, że $l_1 = l_2 = 2 = 2^1 = 2^{F(1)} = 2^{F(2)}$, a zatem $1, 2 \in X$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $n > k \in X$. Wtedy $l_n = l_{n-1} \cdot l_{n-2} = 2^{F(n-1)} \cdot 2^{F(n-2)} = 2^{F(n-1)+F(n-2)} = 2^{F(n)}$. To oznacza, że $n \in X$. Zatem z zasady indukcji wiemy, że równość $2^{F(n)} = l_n$ zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. □