

Naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia

Stanisław Lewanowicz

Listopad 2009 r.

1 Naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia

2 Przykłady

3 Ekstremalna własność NFSI3

4 Oszacowanie błędu

Definicja 1. Niech będą dane: n , $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i funkcja f .

Naturalną funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia (w skrócie **NFSI3**) nazywamy funkcję s , o własnościach

- ❶ s , s' i s'' są ciągłe w $[a, b]$,
- ❷ dla $k = 1, 2, \dots, n$ funkcja s jest w przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ identyczna z pewnym wielomianem π_k , stopnia co najwyżej trzeciego:

$$s(x) = \pi_k(x) \quad (x \in [x_{k-1}, x_k]),$$

- ❸ $s(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$,
- ❹ $s''(a) = s''(b) = 0$.

Twierdzenie 1. Dla dowolnych danych: $n \in \mathbf{N}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i funkcji f istnieje dokładnie jedna naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia s . W każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) zachodzi wzór

$$s(x) = h_k^{-1} \left[\frac{1}{6} M_{k-1} (x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 \right. \\ \left. + \left(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2 \right) (x_k - x) + \left(f(x_k) - \frac{1}{6} M_k h_k^2 \right) (x - x_{k-1}) \right]$$

Momenty

$$M_k := s''(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n; \quad M_0 = M_n = 0)$$

spełniają układ równań liniowych

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.1)$$

gdzie $\lambda_k := h_k / (h_k + h_{k+1})$, $h_k := x_k - x_{k-1}$, $d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$.

Lemat 1. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times m}$ będzie macierzą z dominującą przekątną, tj. taką, że

$$|a_{kk}| > \sum_{l=1, l \neq k}^m |a_{kl}| \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Wówczas A jest macierzą nieosobliwą.

Lemat 2. Macierz układu równań dla momentów,

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 - \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 2 & 1 - \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą z dominującą przekątną, a więc jest nieosobliwa.

Wniosek. Układ (1.1) ma jedyne rozwiązanie M_1, \dots, M_{n-1} .

Algorytm 1. [Rozwiązanie układu równań dla momentów] Obliczamy pomocnicze wielkości p_1, p_2, \dots, p_{n-1} , q_0, q_1, \dots, q_{n-1} , oraz u_0, u_1, \dots, u_{n-1} w następujący sposób rekurencyjny:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &:= u_0 := 0, \\ p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

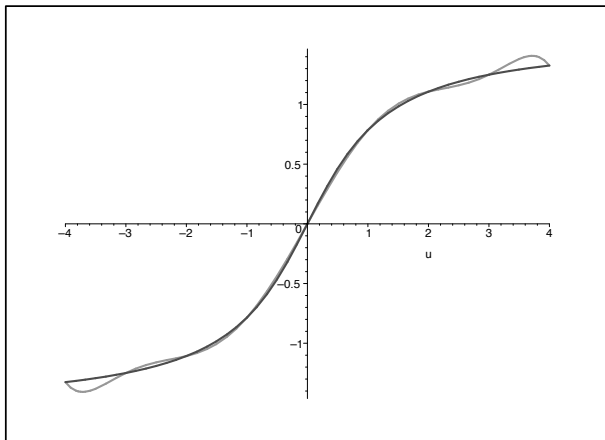
Wówczas

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= u_{n-1}, \\ M_k &= u_k + q_k M_{k+1} \quad (k = n-2, n-3, \dots, 1). \end{aligned}$$

Funkcja arctg – węzły równoodległe

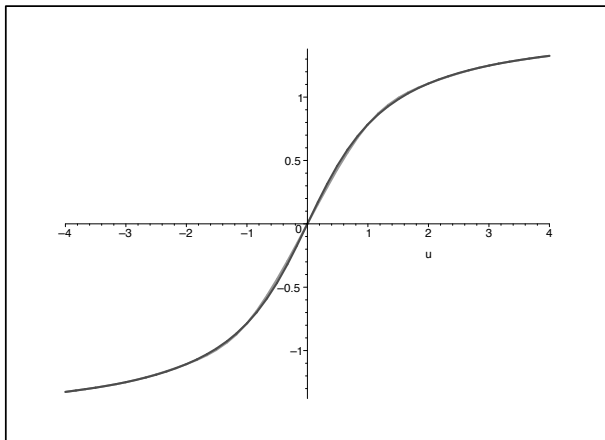
$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad (-4 \leq x \leq 4); \quad x_k = k - 4 \quad (k = 0, 1, \dots, 8)$$

Funkcja arctg – węzły równoodległe



Wielomian L_8 i $\operatorname{arctg} x$

Funkcja arctg – węzły równoodległe

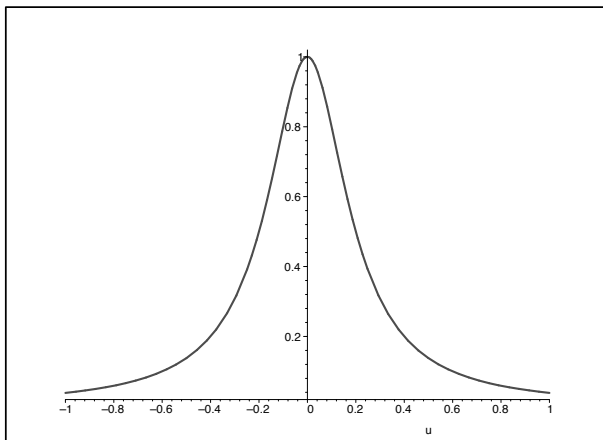


NFSI3 i $\operatorname{arctg} x$

Funkcja Rungego – węzły równoodległe

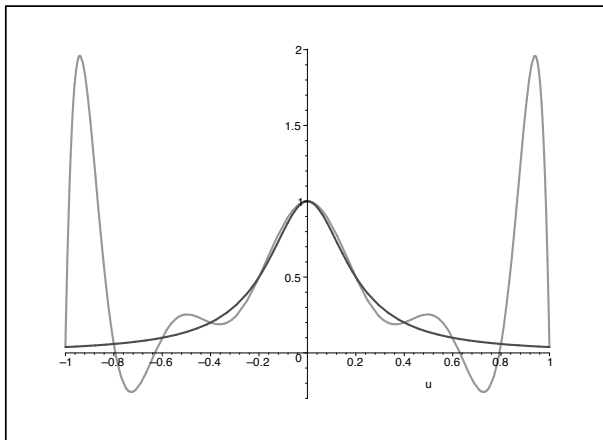
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1); \quad x_k = -1 + \frac{2k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



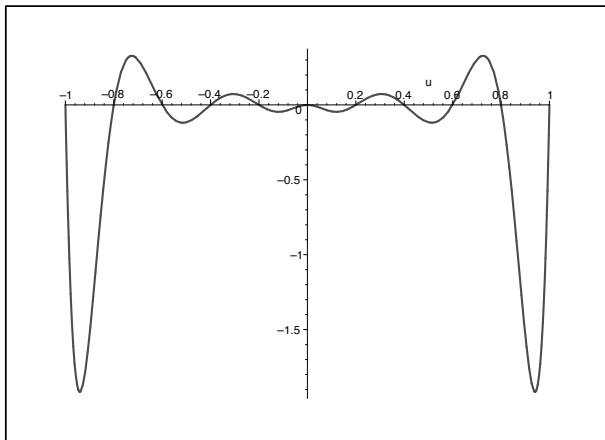
Funkcja Rungego

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



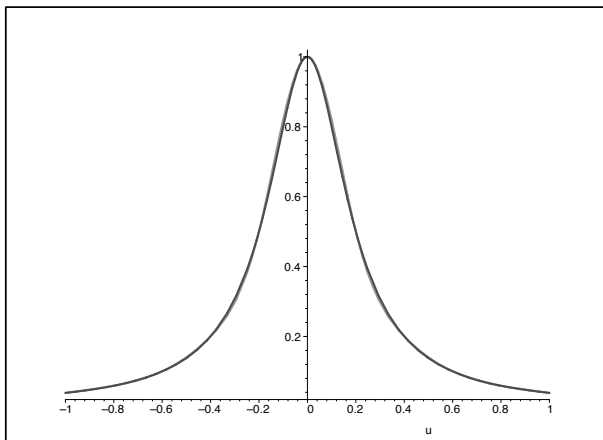
Wypadek $n = 10$: wielomian L_n i funkcja Rungego

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



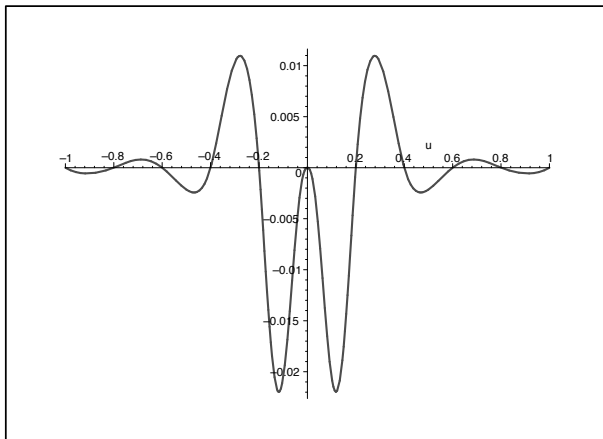
Funkcja błędu $R_{10} = f - L_{10}$

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



Wypadek $n = 10$: NFSI3 i funkcja Rungego

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



Wypadek $n = 10$: funkcja błędu $f - NFSI3$

Twierdzenie 2 [Holladay] Niech f będzie ustaloną funkcją określoną w przedziale $[a, b]$. W klasie funkcji F mających ciągłą drugą pochodną w przedziale $[a, b]$ i takich, że

$$F(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b [F''(x)]^2 dx$$

daje NFSI3 $s(x)$ i tylko ona. Przy tym zachodzi wzór

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) M_k.$$

Twierdzenie 3. Niech będzie dana funkcja $f \in C^3[a, b]$. Dla danej liczby naturalnej n niech s będzie naturalną funkcją sklejaną III stopnia interpolującą funkcję f w danych węzłach $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Wówczas

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f'(x) - s'(x)| \leq \frac{1}{24} h^3 \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|,$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f''(x) - s''(x)| \leq \frac{3}{8} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|,$$

gdzie

$$h := \max_i h_i, \quad h_i := x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Przykład

W wypadku funkcji Rungego $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$ ($-1 \leq x \leq 1$) i równoodległych węzłów uzyskano następujące wyniki:

n	10	20	40	80	160
h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.0125
$\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) - s(x) $	0.022	0.0032	$2.77 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$9.63 \cdot 10^{-7}$

Uwagi

- 1 Wielomian interpolacyjny $L_n(x)$ i funkcję sklejaną $s(x)$ otrzymujemy na podstawie tej samej informacji: n , x_0, \dots, x_n oraz $f(x_0), \dots, f(x_n)$.
- 2 Inaczej niż w wypadku wielomianu $L_n(x)$, duża wartość n nie stanowi żadnego ograniczenia w konstrukcji i użyciu funkcji sklepanej $s(x)$.
- 3 Wykres funkcji sklepanej $s(x)$ jest zwykle zdecydowanie lepiej dopasowany do wykresu funkcji $f(x)$ niż wykres wielomianu $L_n(x)$ (**twierdzenie Holladaya!**).