

# Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

## Lista M 2

15 października 2015 r.

**M2.1.** 1 punkt Wykazać, że jeśli  $x, y$  są liczbami maszynowymi takimi, że  $|y| \leq \frac{1}{2}u|x|$ , to  $\text{fl}(x + y) = x$ .

**M2.2.** 2 punkty Znaleźć liczbę maszynową  $x$  (`double`, w standardzie IEEE 754), dla której  $\text{fl}(x \cdot \text{fl}(1/x)) \neq 1$ .

**M2.3.** 1 punkt Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości wyrażeń

$$(a) e^x - e^{-2x}; \quad (b) \cos^2 x - 1.$$

**M2.4.** 1 punkt O ile bitów zmniejsza się dokładność różnicy  $x - \sin x$  dla  $x = \frac{1}{2}$ ?

**M2.5.** 1 punkt Pole  $n$ -kąta foremnego ( $n \geq 4$ ) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2}n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość  $P_n$  jest przybliżeniem liczby  $\pi$  – tym lepszym, im większe jest  $n$ . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno  $P_4, P_8, P_{16}, \dots$ :

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$
$$s_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots).$$

a) Uzasadnić powyższy algorytm.

b) Stosując wybraną arytmetykę  $t$ -cyfrową ( $t \geq 128$ ) obliczyć  $P_{2^k}$  dla  $k = 2, 3, \dots, 2t$ .

c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

**M2.6.** 1 punkt Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji  $f$ , podanej wzorem

$$(a) f(x) = 1/(x^2 + c), \quad \text{gdzie } c \text{ jest stałą}; \quad (b) f(x) = (1 - \cos x)/x \quad \text{dla } x \neq 0.$$

**M2.7.** 1 punkt Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania iloczynu skalarnego  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{k=1}^n a_k b_k \neq 0$  wektorów  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$ .

**M2.8.** 1 punkt Wartość wielomianu  $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  w punkcie  $x$  można obliczyć według następującego schematu Hornera:

— Oblicz wielkości pomocnicze  $w_0, w_1, \dots, w_n$  za pomocą wzorów

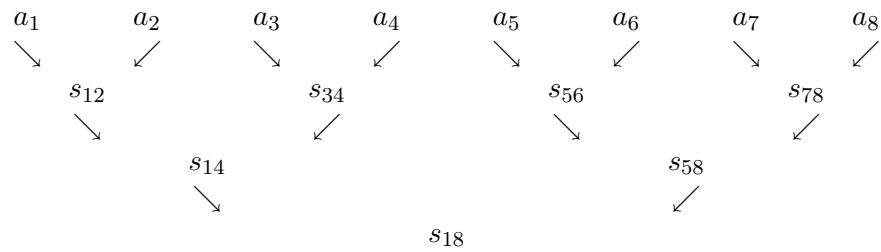
a)  $w_n := a_n$ ,

b)  $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0)$ .

— Wynik:  $L(x) = w_0$ .

Zakładając, że  $a_0, a_1, \dots, a_n$  oraz  $x$  są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

**M2.9.** 1 punkt Wartość sumy  $\sum_{k=1}^n a_k$ , gdzie  $n := 2^m$  dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ , można wyznaczyć stosując strategię *dziel i zwyciężaj*. Np. dla  $m = 3$  obliczenia wykonywane są wówczas zgodnie z następującym diagramem:



gdzie  $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ . Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości  $n$  — dokładniejszy niż zwykły algorytm sumowania.