Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2010, termin poprawkowy, część B, czas: 125 min.
zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1
Niech $T(n) = \lceil\sqrt{n}\rceil T(\lceil\sqrt{n}\rceil) + n$ i $T(1) = T(2) = 1$.
Znajdź funkcję różniczkowalną $f(x)$, taką że $T(n) = \Theta(f(n))$.
Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2
Chcemy zbudować płot ustawiając w ciąg sztachetki. Mamy do dyspozycji nieograniczoną ilość sztachetek bezbarwnych, s żółtych, s czerwonych i s niebieskich. Na ile sposobów możemy zbudować taki płot, jeśli wśród każdych kolejnych 7 sztachet w płocie znajdą się przynajmniej jedna żóta i przynajmniej jedna niebieska sztacheta lub znajdzie się przynajmniej jedna sztacheta czerwona oraz sztachet żółtych i niebieskich musimy użyć tyle samo, powiedzmy po n, i jeśli c oznacza ilość użytych sztachet czerwonych, to chcemy aby $2n + 2c = 2s$?

Zadanie 3
Oblicz liczbę rozróżnialnych kolorowań ścian ośmiościanu foremnego na 3 kolory. Dwa kolorowania są nierozróżnialne, jeśli jedno można otrzymać z drugiego przez obrót.

Zadanie 4
W ciągu 15 tygodni semestru, po pięć dni roboczych każdy, student pojawił się w sumie na 145 godzinach ćwiczeń. W każdym dniu roboczym pojawił się na przynajmniej jednej godzinie ćwiczeń (choć drugą mógł sobie odpuścić). Udowodnij, że istniał ciąg kolejnych dni roboczych (soboty i niedziele odrzucamy), w ciągu których student pojawił się w sumie na 25 godzinach zajęć.

Powodzenia !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LUTY 2010, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ B, CZAS: 125 MIN.
zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 5
Opisz efektywny algorytm znajdujący najlżejszy cykl w grafie o nieujemnych wagach na krawedziach.

ZADANIE 6
Zbiór krawędzi S grafu G separuje r wierzchołków dokładnie wtedy, gdy w $G \setminus S$ każdy z tych r wierzchołków jest w innej składowej spójnej. Pokaż, że G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych r wierzchołków minimalna liczba krawędzi je separujących wynosi $r-1$.

ZADANIE 7
Dana jest szachownica 1×42. Na początku na pierwszym jej polu stoi biały pionek, a na drugim polu stoi pionek czarny. W jednym ruchu możemy wykonać jedną z poniższych operacji:

- przesunąć jeden pionek o jedno pole (na wolne pole);
- przesunąć jeden pionek o dwa pola (na wolne pole) pod warunkiem, że nie przeskoczy on drugiego pionka;
- zamienić pionki miejscami pod warunkiem, że stoją na sąsiednich polach.

Czy istnieje taki ciąg ruchów, że wystąpią wszystkie możliwe ustawienia pionków, a na końcu pionki wrócą do ustawienia początkowego?

ZADANIE 8
Podgraf indukowany $G[U]$ grafu $G = (V, E)$ jest zadany przez zbiór wierzchołków $U \subseteq V$, jako $G[U] = (U, \{\{u, u'\} \,:\, u, u' \in U, \{u, u'\} \in E\})$.
Pokaż, że $\chi(G) \leq \max \delta(G') + 1$, gdzie maksimum jest brane po wszystkich podgrafach indukowanych G' grafu G.

POWODZENIA !