

**Zad 14 - lista 2.13 - Kapitan Ralf**

Kapitan Ralf znalazł się w kłopotach w pobliżu słonecznej strony planety Merkury. Temperatura powierzchni statku, gdy znajduje się on w punkcie  $(x, y, z)$  wynosi

$$T(x, y, z) = \exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2),$$

gdzie  $x, y, z$  są mierzone w metrach. Statek obecnie znajduje się w punkcie  $(1, 1, 1)$ .

1. W którym kierunku kapitan powinien skierować statek, aby temperatura zmniejszyła się jak najszybciej?
2. Jeśli statek porusza się w tempie  $e^8$  metrów na sekundę, jak szybko temperatura będzie spadała jeśli statek poleci w kierunku wyznaczonym w punkcie (1) ?
3. Niestety, metal z którego wykonana jest powłoka statku pęknie jeśli chłodzenie będzie szybsze niż  $\sqrt{14}e^2$  stopni na sekundę. Opisać możliwe kierunki, w których statek może się poruszać, aby obniżyć temperaturę w tempie nie przekraczającym podanej liczby.

**Rozwiązanie:**

1. Obliczmy gradient funkcji  $T$ .

$$\nabla T(x, y, z) = (-2x \exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2), -4y \exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2), -6z \exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2))$$

Funkcja  $T$  najszybciej maleje w kierunku  $-\nabla T$ .

$$-\nabla T(1, 1, 1) = \left( \frac{2}{e^6}, \frac{4}{e^6}, \frac{6}{e^6} \right)$$

$$v = \frac{-\nabla T(1, 1, 1)}{\|\nabla T(1, 1, 1)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

Odp : Kapitan Ralf powinien skierować statek w kierunku wektora  $v$ .

2. Odp : Prędkość spadania temperatury statku to  $e^8 \cdot \nabla T(1, 1, 1) \circ v = -2e^2\sqrt{14}$ .
3. Szukamy takich wektorów  $w$ , że  $e^8 \cdot \nabla T(1, 1, 1) \circ v \leq 0$  oraz  $e^8 \cdot \nabla T(1, 1, 1) \circ v \geq -\sqrt{14}e^2$ . Dodatkowo chcemy by były to wektory jednostkowe. Zostajemy zatem zbiór wektorów  $w = (x, y, z)$ , takich że :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z \geq 0 \wedge 2x + 4y + 6z \leq \sqrt{14} \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

□