Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 14

26 stycznia 2016 r.[1]

M14.1. $\boxed{\text{0,5 punktu}}$ Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą niezerowymi liczbami zmiennopozycyjnymi. Podać oszacowanie z góry błędu

$$\left|\frac{\mathrm{fl}(x_1 x_2 \cdots x_n) - x_1 x_2 \cdots x_n}{x_1 x_2 \cdots x_n}\right|.$$

M14.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważmy

$$Q_n := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

gdzie A_k i x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ są liczbami zmiennopozycyjnymi. Załóżmy, że

$$\mathrm{fl}(f(x_k)) = f(x_k)(1 + \varepsilon_k),$$

gdzie $|\varepsilon_k| \leqslant p\mathsf{u}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ dla pewnego małego p. Sumując składniki w naturalnym porządku obliczyć $\hat{Q}_n := \mathrm{fl}(Q_n)$, a następnie oszacować błąd $|Q_n - \hat{Q}_n|$.

M14.3. $\boxed{\text{0,5 punktu}}$ r-krotne zero α funkcji $f(x)$ jest pojedynczym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$?

M14.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że wielomian $p(z)$, o współczynnikach rzeczywistych, ma czynnik kwadratowy $z^2 - uz - v$, którego pierwiastki są pojedynczymi zerami wielomianu p. Udowodnić, że w punkcie (u, v) jakobian w metodzie Bairstowa jest różny od zera.

M14.5. $\boxed{\text{0,5 punktu}}$ Niech L_n będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \exp x$ w zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jaka wartość n gwarantuje, że zachodzi nierówność

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant 10^{-5}\,?$$

M14.6. $\boxed{\text{0,5 punktu}}$ Udowodnić, że w klasie funkcji F mających ciągłą drugą pochodną w przedziale $[a, b]$ i takich, że

$$F(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{1}$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b \left[F''(x)\right]^2 dx \tag{2}$$

daje naturalna funkcja sklejana trzeciego stopnia, interpolująca funkcję f.

M14.7. $\boxed{\text{0,5 punktu}}$ Normę jednostajną funkcji $f \in C[a, b]$ podaje wzór $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_\infty^{[a,b]} := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$. Sprawdzić, że n-ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji f z przestrzeni $C[a, b]$, określony wzorem

$$E_n(f) \equiv E_n(f; [a, b]) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]},$$

ma następujące własności:

[1] zajęcia 1 lutego 2016 r.

a) $E_n(\alpha f) = |\alpha| E_n(f)$;

b) $E_n(f+g) \leqslant E_n(f) + E_n(g)$;

c) $E_n(f+w) = E_n(f)$;

d) $E_n(f) \leqslant \|f\|_\infty$,

gdzie f, g są dowolnymi funkcjami z $C[a,b]$, w jest dowolnym wielomianem stopnia $\leqslant n$, natomiast α – dowolną liczbą rzeczywistą.

M14.8. 0,5 punktu Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Wykazać, że dla dowolnego podprzedziału $[c,\ d]$ tego przedziału zachodzi nierówność $E_n(f;[c,d]) \leqslant E_n(f;[a,b])$.

M14.9. 0,5 punktu Wykazać, że kwadratura Q_n ma rząd $\geqslant n+1+m$, gdzie $m \in \{1,2,\ldots,n+1\}$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

(i) Q_n jest kwadraturą interpolacyjną,

(ii) dla każdego wielomianu $u \in \Pi_{m-1}$ zachodzi równość $I_p(\omega u) = 0$, gdzie $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$.

M14.10. 0,5 punktu Do obliczenia przybliżonej wartości całki $I := \displaystyle\int_0^2 \cos x^2 \,\mathrm{d}x$ użyto złożonego wzoru trapezów T_{200}. Bez odwoływania się do wartości całki I podać oszacowanie błędu $|I - T_{200}|$.

M14.11. 1 punkt Macierz B_ω, związana z metodą nadrelaksacji (SOR), określona jest wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

Jaki stąd wniosek?

M14.12. 1 punkt Niech $\boldsymbol{q}_j \in \mathbb{R}^m$ oznaczają wektory uzyskiwane w metodzie ortogonalizacji Gramma-Schmidta, dla danego układu liniowo niezależnych wektorów $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Udowodnić, że zachodzi równość

$$I - P_k = (I - \boldsymbol{q}_k\boldsymbol{q}_k^T)\cdots(I - \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T)(I - \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T),$$

gdzie P_k jest macierzą rzutu prostopadłego:

$$P_k := \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_j^T.$$

M14.13. 1 punkt Znaleźć rozkład QR macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

za pomocą metody Householdera. Wskazać kolejne wektory $v_1, v_2, \ldots$ określające odbicia Householdera. *Uwaga:* chodzi o rozkład, w którym $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.