Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 9

10 grudnia 2015 r.

M9.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f\,(a + kh)\,.$$

Wykazać, że

$$A_k = h(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j=0,\,j\neq k}^{n} (t-j)\,\mathrm{d}t \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

M9.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A_0, A_1, \ldots, A_n$ będą podane wzorem (1) i niech będzie $B_k := A_k/(b-a)$ $(k = 0,\ 1, \ldots, n)$. Sprawdzić, że

a) wielkości B_k są liczbami wymiernymi;

b) $B_k = B_{n-k}$ $\ (k = 0,\ 1, \ldots, n)$

M9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ (Włączyć komputer!) Czy liczby B_k z poprzedniego zadania zawsze są dodatnie? Jeśli nie, to podać minimalną wartość n, dla której nie wszystkie współczynniki B_k są dodatnie. Sprawdzić, czy $\sigma_n := \sum_{k=0}^{n} |B_k|$ rośnie wraz ze wzrostem n. Podać wartość n dla której $\sigma_n > 1000$.

M9.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczyć $Q_n^{NC}(f)$ dla $n = 2, 4, 6, 8, 10$ dla całki

$$\int_{-4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,4.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

M9.5. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 2$, tj. za pomocą wzoru Simpsona. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\eta \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5 \qquad (h := (b-a)/2).$$

M9.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5 \qquad (h := (b-a)/3).$$

M9.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,\ b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

M9.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x\,dx$ z błędem $\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n?