Zadanie 5

Rozwiąż następujące zależności :

- $a_0 = 1,\ a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$,
- $b_0 = 0,\ b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}}$,
- $c_0 = 1,\ c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$,
- $d_0 = 1,\ d_1 = 2,\ d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$

Rozwiazanie:

- Zauważmy, że $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 1, 2, \ldots\}$. Zatem $a_{2k} = 1 \wedge a_{2k+1} = 2$, dla $k \in \mathbb{N}$.

  Dowód. Indukcyjnie względem n. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid (a_n = 1\ n \equiv\ 0\ (mod\ 2)) \vee (a_n = 2\ (n \equiv\ 1\ (mod\ 2))\}$. Oczywiście $0, 1 \in X$ (patrz dwie linijki wyżej).

  Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$. Jeśli n jest parzyste, to $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} \stackrel{zal}{=} \frac{2}{1} = 2$, czyli $n + 1 \in X$. W przeciwnym wypadku $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} \stackrel{zal}{=} \frac{2}{2} = 1$, co również oznacza, że $(n + 1) \in X$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej $X = \mathbb{N}$, a ciąg a_n ma żądaną postać. □

- $b_n = \frac{F(n)}{F(n+1)}$, gdzie $F(n)$ to n-ta liczba Fibonacciego

  Dowód. Analogicznie jak w poprzednim podpunkcie indukcja przebiegać będzie względem zmiennej n.

  $$X = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = \frac{F(n)}{F(n+1)}\}.$$

  Zauważmy, że $0 \in X$, ponieważ $b_0 = 0 = \frac{0}{1} = \frac{F(0)}{F(1)}$. Weźmy dowolne $\in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$.

  $$b_{n+1} = \frac{1}{1 + b_n} = \frac{1}{1 + \frac{F(n)}{F(n+1)}} = \frac{F(n+1)}{F(n) + F(n+1)} = \frac{F(n+1)}{F(n+2)}$$

  Zatem $n + 1 \in X$. Zgodnie z zasadą indukcji żądana własność zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

  □

- Rozwiązaniem jest $c_0 = 1$ oraz $c_n = 2^{n-1}$ dla $n > 0$.

  Dowód. Znowu tak samo... W skrócie: Załóżmy, że $c_n = 2^{n-1}$. Wtedy $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i = c_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \stackrel{def}{=} c_n + c_n = 2c_n \stackrel{zal}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, co dowodzi poprawności wyprowadzonego wzoru. □

- Zwartą postacią d_n jest 2^n.

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid d_n = 2^n\}$. Zauważmy, że $d_0 = 1 = 2^0$ oraz $d_1 = 2 = 2^1$. Stąd wniosek, że $0, 1 \in X$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $n - 1, n - 2 \in X$.

  $$d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}} = \frac{2^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} = 2^n.$$

  Zatem $n \in X$. Zgodnie z zasadą indukcji matematycznej $X = \mathbb{N}$, czyli $\forall_{n\in\mathbb{N}} d_n = 2^n$. □