1. Zadania do wykładu
Analiza IB
R. Szwarc

1. Dowieść, że
$$|a\sin\alpha + b\cos\alpha| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

2. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić następujące równości:
$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

3. Udowodnić nierówność Bernoulli'ego:
$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$
gdzie x_1, x_2, ..., x_n są liczbami tego samego znaku większymi od -1. Wywnioskować, że
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$
dla $x > -1$.

3. Wykazać, że
$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$
Wskazówka. Użyć nierówności
$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geqslant 2.$$

4. Pewne stwierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ spełnia: z $T(n)$ wynika $T(n+2)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-3)$. Ponadto $T(1)$ jest prawdziwe. Pokazać prawdziwość $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n.

$*$**5.** Pewne stwierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ ma następujące własności. Z $T(n)$ wynika $T(2n)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-5)$ dla $n \geqslant 6$. Ponadto $T(1)$ jest prawdziwe. Czy $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n ?

$*$**6.** Pewne stwierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ ma następujące własności. Z $T(n)$ wynika $T(2n)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-5)$ dla $n \geqslant 6$. Ponadto $T(1)$ i $T(5)$ są prawdziwe. Pokazać prawdziwość $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n. `Wskazówka:` Pokazać, że każdą liczbę naturalną n niepodzielną przez 5 można przedstawić w postaci $2^k - 5l$ dla pewnych liczb całkowitych $k \geqslant 1$ i $l \geqslant 0$.

7. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru ułamków dziesiętnych postaci $0,88\ldots8$. Czy zbiór ten posiada element największy ?

8. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru liczb postaci
$$\frac{(n+m)^2}{2^{nm}},$$
gdzie n i m są liczbami naturalnymi? Czy zbiór ten posiada element największy ?

9. Udowodnić, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat wynosi 6. Które liczby naturalne są kwadratami liczb wymiernych ?

10. Pokazać, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

11. Pokazać, że liczba $\sqrt{n}+\sqrt{m}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, jest wymierna tylko wtedy, gdy składniki są liczbami wymiernymi.

∗12. Pokazać, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna. `Wskazówka:` Podnieść dwukrotnie do kwadratu.

∗13. Pokazać, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

14. Pokazać, że suma liczby niewymiernej i wymiernej jest liczbą niewymierną. Czy suma liczb niewymiernych musi być niewymierna?

15. Czy liczba $\log_2 3$ jest wymierna ? A liczba $\log_{\sqrt{5}-2}(4\sqrt{5}+9)$?

16. Znaleźć liczbę niewymierną pomiędzy $2/3$ i $3/4$. Ogólniej, wskazać liczbę niewymierną pomiędzy p/q i r/s, gdzie $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ oraz $ps < rq$.

17. Wskazać liczbę wymierną pomiędzy $1/(2\sqrt{3})$ oraz $1/\sqrt{5}$ oraz liczbę niewymierną pomiędzy $2/\sqrt{5}$ i $3/\sqrt{10}$.

18. Pokazać, że pomiędzy dwiema liczbami niewymiernymi znajduje się liczba wymierna i oraz niewymierna.

∗19. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n niepodzielnej przez 2 i 5 pewna liczba postaci $99\ldots9$ jest podzielna przez n. `Wskazówka:` Zbadać reszty z dzielenia przez n liczb 10^k, dla zmieniającego się wykładnika $k \geqslant 0$. Wskazać tę liczbę dla $n = 7$. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n niepodzielnej przez 2 i 5 pewna liczba postaci $11\ldots1$ jest podzielna przez n.

20. Pokazać, że poniższe rozwinięcia dziesiętne odpowiadają liczbom niewymiernym.

$$0,101001000100001\ldots, \quad 0,123\ldots8910111213\ldots192021\ldots$$