Analiza numeryczna

Stanisław Lewanowicz

Listopad 2007 r.

Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych

DEFINICJE, TWIERDZENIA, ALGORYTMY

1 Naturalne funkcje sklejane interpolacyjne III stopnia

Definicja 1.1 Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$) i danej funkcji f ***naturalną funkcją sklejaną interpolującą III stopnia*** nazywamy funkcję s, określoną w przedziale $[a, b]$ i spełniającą następujące warunki:

1° s, s' i s'' są ciągłe w $[a, b]$;

2° w każdym przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) s jest identyczna z pewnym wielomianem p_k, stopnia co najwyżej trzeciego;

3° $s(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$;

4° $s''(a) = s''(b) = 0$.

Twierdzenie 1.2 *Dla dowolnych danych: $n \in \mathbf{N}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i funkcji f istnieje dokładnie jedna naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia s. W każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) funkcja s wyraża się wzorem*

$$
\begin{aligned}
(1.1) \qquad s(x) \;=\; & h_k^{-1}\left[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3\right. \\
& \left. + \left(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\right)(x_k - x) + \left(f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2\right)(x - x_{k-1})\right].
\end{aligned}
$$

Wartości

$$M_k := s''(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ M_0 = M_n = 0)$$

wyznaczamy jako rozwiązanie układu równań liniowych

$$(1.2) \qquad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, ..., n-1),$$

gdzie

$$\lambda_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}, \qquad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Dla ustalonej funkcji f wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$y_k := f(x_k) \qquad (k = 0, 1 \ldots, n).$$

Funkcja określona w twierdzeniu 1.2 ma następującą własność ekstremalną:

Twierdzenie 1.3 (Holladay) *W klasie funkcji F mających ciągłą drugą pochodną w przedziale $[a, b]$ i takich, że*

$$F(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b [F''(x)]^2 \, dx$$

daje funkcja sklejana s z twierdzenia 1.2 i tylko ona. Przy tym

$$\int_a^b [s''(x)]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])\, M_k.$$

Wielkości $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, spełniające układ (1.2), można obliczyć za pomocą następującego algorytmu:

Algorytm 1.4 Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$, $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$\begin{aligned} &q_0 := u_0 := 0, \\ &\left.\begin{aligned} &p_k := \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ &q_k := (\lambda_k - 1)/p_k, \\ &u_k := (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

gdzie

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= u_{n-1}, \\ M_k &= u_k + q_k M_{k+1} \qquad (k = n-2, n-3, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Twierdzenie 1.5 *Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną III stopnia interpolującą funkcję $f \in C^2[a, b]$ w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $n \in \mathbf{N}$). Wówczas*

$$\max_{a \le x \le b} |f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x)| \le C_r\, h^{4-r} \max_{a \le x \le b} |f^{(r)}(x)| \qquad (r = 0, 1, 2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} &C_0 := 5/384, \qquad C_1 := 1/24, \qquad C_2 := 3/8, \\ &h := \max_{1 \le i \le n} h_i, \qquad h_i := x_i - x_{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

2 Okresowe funkcje sklejane interpolacyjne III stopnia[1]

Twierdzenie 2.1 *Dla danej liczby naturalnej* n*, danych węzłów* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *(*$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$*) i danej funkcji* f *istnieje dokładnie jedna funkcja* $\tilde{s} \in C^2[a, b]$*, zwana* ***okresową funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia****, spełniająca następujące warunki:*

1* *w każdym z podprzedziałów* $[x_{k-1}, x_k]$ *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*) funkcja* $\tilde{s}$ *jest identyczna z pewnym wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego;*

2* $\tilde{s}(x_k) = f(x_k)$ *(*$k = 0, 1, \ldots, n$*);*

3* $\tilde{s}^{(i)}(a + 0) = \tilde{s}^{(i)}(b - 0)$ *(*$i = 0, 1, 2$*).*

(Łatwo zauważyć, że warunek 3* *pociąga za sobą równość* $f(x_n) = f(x_0)$*). W każdym z przedziałów* $[x_{k-1}, x_k]$ *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*) jest*

$$\begin{aligned}\tilde{s}(x) &= h_k^{-1}\left\{\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3\right.\\ &\left.+\left[f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\right](x_k - x) + \left[f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2\right](x - x_{k-1})\right\}.\end{aligned}$$

Wartości $M_k := \tilde{s}''(x_k)$ *(*$k = 0, 1, \ldots, n$*) spełniają układ*

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3}$$

gdzie $M_{n+1} := M_1$*,* $M_0 = M_n$ *oraz*

$$\left.\begin{aligned} d_k &:= \frac{6}{h_k + h_{k+1}}\left[\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h_{k+1}} - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k}\right],\\ \lambda_k &:= h_k/(h_k + h_{k+1})\end{aligned}\right\}(k = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie z kolei użyto oznaczeń $f(x_{n+1}) := f(x_1)$ *i* $h_{n+1} := h_1$.

Nietrudno uzasadnić następujący ***algorytm rozwiązywania układu*** (2.3).

Algorytm 2.2 *Obliczamy pomocnicze wielkości* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$*,* $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$*,* $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ *i* $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ *w następujący sposób rekurencyjny:*

$$\begin{aligned} &q_0 := u_0 := 0, \quad s_0 := 1,\\ &\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2,\\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k,\\ s_k &:= -\lambda_k s_{k-1}/p_k,\\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k\end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).\end{aligned}$$

(Zauważmy, że $n - 1$ *początkowych równań układu* (2.3) *można zapisać jako*

$$M_k = q_k M_{k+1} + s_k M_n + u_k \quad \textit{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Następnie definiujemy $t_0, t_1, \ldots, t_n$ *i* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *za pomocą wzorów*

$$\begin{aligned} &t_n := 1, \quad v_n := 0,\\ &\left.\begin{aligned} t_k &:= q_k t_{k+1} + s_k,\\ v_k &:= q_k v_{k+1} + u_k\end{aligned}\right\} \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 1).\end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} M_n &= [d_n - (1 - \lambda_n)v_1 - \lambda_n v_{n-1}]/[2 + (1 - \lambda_n)t_1 + \lambda_n t_{n-1}],\\ M_k &= v_k + t_k M_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).\end{aligned}$$

[1] Materiał dodatkowy, przydatny w realizacji niektórych zadań na pracownię.