Wersja: **A**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

| | | |
|---|---|---|
| 8–10 s. 5 | 8–10 s.103 | 8–10 s.104 |
| 8–10 s.105 | 8–10 s.140 | 12–14 zaaw |
| 12–14 LPA | 14–16 s.105 | 14–16 s.139 |

# Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 16 stycznia 2015
czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Rozważmy zbiór trzyelementowy $A = \{a, b, c\}$. W prostokąt poniżej wpisz (jeśli wolisz, możesz je narysować) wszystkie podziały zbioru $A$ odpowiadające relacjom o dokładnie dwóch klasach abstrakcji.

$\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\}$, $\{\{c\}, \{a, b\}\}$

**Zadanie 2 (2 punkty).** Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

| $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}\times\{n\}$ | $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0,1,2\})$ | $\{0,1\}^{\mathbb{Q}}$ | $\mathbb{R}^{\{0,1\}}$ | $(\{1\}\times\{2,3\})^{\{4,5\}}$ | $(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N})$ | $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ | $\mathcal{P}(\mathbb{Q}\cap[0,1))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Zadanie 3 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$f : A^C \times B^C \to (A \times B)^C, \qquad g_1 : C \to A,$$
$$g_2 : C \to B, \qquad h : A \times B \to C$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A^C \times B^C)$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(f(g_1, g_2))(c)$ TAK

$f(g_1(c), g_2(c))$ NIE

$\langle h(a), h(b)\rangle$ NIE

$g_1(h(a, b))$ TAK

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle m, n \rangle \approx \langle m', n' \rangle \overset{\text{df}}{\iff} \min(m, n) = \min(m', n').$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[\langle 42, 17 \rangle]_\approx$ oraz taką formułę $\varphi$, że $[\langle 42, 17 \rangle]_\approx = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$. W formule $\varphi$ nie wolno użyć symbolu $\approx$.

$|[\langle 42, 17 \rangle]_\approx| = \boxed{\aleph_0}$ $\varphi = \boxed{\min(m, n) = 17}$

**Zadanie 5 (2 punkty).** Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(n, i) = 2n + i$. Jeśli $f$ ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną $f$. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

| Wersja: | **A** | Numer indeksu: 000000 |
|---|---|---|

Grupa[1]:

| | | |
|---|---|---|
| 8–10 s. 5 | 8–10 s.103 | 8–10 s.104 |
| 8–10 s.105 | 8–10 s.140 | 12–14 zaaw |
| 12–14 LPA | 14–16 s.105 | 14–16 s.139 |

**Zadanie 6 (5 punktów).** W tym zadaniu div : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oznacza (pisaną infiksowo) operację dzielenia całkowitego w zbiorze liczb naturalnych, np. $5 \text{ div } 2 = 2$. Na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$m \simeq n \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} m \text{ div } 2 = n \text{ div } 2$$

a następnie definiujemy funkcję $f$ i relację $\preceq$ działające na klasach abstrakcji relacji $\simeq$ wzorami

$$f([x]_{\simeq}) = [x+2]_{\simeq} \quad (1)$$

$$[x_1]_{\simeq} \preceq [x_2]_{\simeq} \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} x_1 \leq x_2 \quad (2)$$

Które z tych dwóch definicji (mamy tu na myśli definicje (1) i (2)) są poprawne? Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych wprowadzamy relację binarną $R$ wzorem

$$R(X, Y) \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n\ m \in X \Leftrightarrow m \in Y.$$

Czy $R$ jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację binarną $R$ wzorem

$$R(f, g) \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \forall n > 2015\ \ f(n) = g(n).$$

Łatwo zauważyć, że $R$ jest relacją równoważności; w rozwiązaniu tego zadania nie trzeba tego dowodzić. Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji $R$ są równoliczne.

[1]Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

Wersja: **B**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

| | | |
|---|---|---|
| 8–10 s. 5 | 8–10 s.103 | 8–10 s.104 |
| 8–10 s.105 | 8–10 s.140 | 12–14 zaaw |
| 12–14 LPA | 14–16 s.105 | 14–16 s.139 |

Logika dla informatyków

Kolokwium nr 3, 16 stycznia 2015
czas pisania: 30+60 minut

**Zadanie 1 (2 punkty).** Rozważmy zbiór czteroelementowy $A = \{a, b, c, d\}$. W prostokąt poniżej wpisz (jeśli wolisz, możesz je narysować) wszystkie podziały zbioru $A$ odpowiadające relacjom, których każda klasa abstrakcji ma parzystą liczbę elementów.

**Zadanie 2 (2 punkty).** Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

| $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$ | $\mathbb{N}^{\{0,1,2\}}$ | $\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ | $\mathbb{R}^{\{0\}}$ | $\{0,1,2\}^{\{3,4\}}$ | $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})$ | $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}\cup\{\pi\}}$ | $\mathcal{P}(\{a,b\} \times \{c\})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Zadanie 3 (2 punkty).** Rozważmy funkcje

$$f : A^C \times B^C \to C^{(A\times B)}, \qquad g_1 : C \to A,$$
$$g_2 : C \to B, \qquad h : A \times B \to C$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. W tym zadaniu uznamy wyrażenie za poprawne jeśli dla każdej użytej w nim funkcji jej argument należy do dziedziny tej funkcji. Np. wyrażenie $f(a)$ nie jest poprawne, bo $a \notin (A^C \times B^C)$. Wpisz słowo „TAK" w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE".

$f(h(a,b))$ NIE

$h\Big(g_1(h(a,b)), g_2(h(a,b))\Big)$ TAK

$(f(g_1, g_2))(a,b)$ TAK

$(f(h))(c)$ NIE

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.

**Zadanie 4 (2 punkty).** Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\approx$ wzorem

$$\langle m, n \rangle \approx \langle m', n' \rangle \stackrel{\text{df}}{\iff} \max(m, n) = \max(m', n').$$

W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio moc klasy abstrakcji $[\langle 42, 17 \rangle]_{\approx}$ oraz taką formułę $\varphi$, że $[\langle 42, 17 \rangle]_{\approx} = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$. W formule $\varphi$ nie wolno użyć symbolu $\approx$.

$|[\langle 42, 17 \rangle]_{\approx}| = \boxed{85}$ $\qquad \varphi = \boxed{\max(m, n) = 42}$

**Zadanie 5 (2 punkty).** Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych, daną wzorem $f(k) = \begin{cases} \langle k-1, 0 \rangle & \text{dla} \quad k > 0 \\ \langle -k, 1 \rangle & \text{dla} \quad k \leq 0 \end{cases}$. Jeśli $f$ ma funkcję odwrotną, to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną $f$. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Wersja: **B**

Numer indeksu: 000000

Grupa[1]:

| | | |
|---|---|---|
| 8–10 s. 5 | 8–10 s.103 | 8–10 s.104 |
| 8–10 s.105 | 8–10 s.140 | 12–14 zaaw |
| 12–14 LPA | 14–16 s.105 | 14–16 s.139 |

**Zadanie 6 (5 punktów).** W tym zadaniu div : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oznacza (pisaną infiksowo) operację dzielenia całkowitego w zbiorze liczb naturalnych, np. $5 \text{ div } 2 = 2$. Na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację równoważności $\simeq$ wzorem

$$m \simeq n \stackrel{\text{df}}{\iff} m \text{ div } 2 = n \text{ div } 2$$

a następnie definiujemy funkcje $f$ i $\oplus$ działające na klasach abstrakcji relacji $\simeq$ wzorami

$$f([x]_\simeq) = [x \text{ div } 2]_\simeq \qquad (1)$$

$$[x_1]_\simeq \oplus [x_2]_\simeq = [x_1 + x_2]_\simeq \qquad (2)$$

Które z tych dwóch definicji (mamy tu na myśli definicje (1) i (2)) są poprawne? Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 7 (5 punktów).** Na zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację binarną $R$ wzorem

$$R(f, g) \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n{\in}\mathbb{N}\ \exists m{>}n\ f(m) = g(m).$$

Czy $R$ jest relacją równoważności? Uzasadnij odpowiedź.

**Zadanie 8 (5 punktów).** Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych wprowadzamy relację binarną $R$ wzorem

$$R(X, Y) \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n{>}2014\ \ n \in X \Leftrightarrow n \in Y.$$

Łatwo zauważyć, że $R$ jest relacją równoważności; w rozwiązaniu tego zadania nie trzeba tego dowodzić. Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji $R$ są równoliczne.

[1] Proszę zakreślić dzień tygodnia, godzinę i numer sali, w której odbywają się ćwiczenia.