Zadanie 1

Niech a będzie liczbą niewymierną, a n liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n - 1$$

Jak wygląda analogiczna równość dla powały?

Twierdzenie 1. *Niech a będzie liczbą niewymierną, a n liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że*

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n - 1$$

Dowód. Wykonajmy następujące przekształcenia arytmetyczne:

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = \lfloor an \rfloor + \lfloor n - an \rfloor = (\lfloor an \rfloor + \lfloor -an \rfloor) + n = (\lfloor an \rfloor - \lceil an \rceil) + n = n - 1$$

□

Uwaga 1. *Skorzystałem tutaj z własności* $\lfloor -an \rfloor = -\lceil an \rceil$*, która jest oczywista, bo a jest niewymierne. Jednak warto wspomnieć, że założenie o niewymierności jest w którymś miejscu dowodu potrzebne.*

Uwaga 2. *Jak wygląda odpowiednik powyższej równości dla powały?*

$$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = n + 1$$

Dowód.

$$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = \lceil an \rceil + \lceil n - an \rceil = \lceil an \rceil + n + \lceil -an \rceil = n + \lceil an \rceil - \lfloor an \rfloor = n + 1$$

□