Zadanie 9

Rozwiąż następujące zależności :

- $f(1) = 1,\ f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1$
- $g(0) = 0,\ g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + \lfloor log_2(n) \rfloor$

Rozwiazanie:

- Rozpisując sobie kilka przykładowych elementów tego ciągu zauważamy, że wygląda on następująco $\{f_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots$ Twierdzę iż każdy element ciągu $f(n)$ mogę zapisać jako $f(n) = 2(n-1) + 1$. Potwierdzę tę hipotezę indukcyjnie.

  Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid f(n) = 1 + 2(n-1)\}$. Zauważmy, że $1 \in X$, ponieważ $1 = 1 + 0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1 + 2 \cdot (1-1)$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że $\forall_{\mathbb{N}_+ \ni k < n} k \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

  $$f_n = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1 = 2(\lfloor n/2 \rfloor - 1) + 1 + 2(\lceil n/2 \rceil - 1) + 1 + 1 = L$$

  1. $n = 2m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Dostajemy wtedy

     $$L = 2(m-1) + 1 + 2(m-1) + 1 + 1 = 4m - 1 = 4m - 2 + 1 = 2(2m-1) + 1 = 2(n-1) + 1$$

  2. $n = 2m + 1$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Dostajemy wtedy

     $$L = f(m+1) + f(m) + 1 = 2((m+1)-1) + 2(m-1) + 1 = 4m - 1 = 2(2m+1-1) - 1 = 2(n-1) - 1$$

     Zatem $n \in X$, co wraz zasadą indukcji dowodzi wyjściowego wzoru.

  $\square$

- Rozwiązaniem równania jest $g(0) = 0,\ g(n) = g\left(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} i$.

  1. Pokażmy najpierw, że $g(2^i) = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + i$, dla $i \in \mathbb{N}$.

     Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid g(2^n) = \sum_{i=0}^{n} i\}$.
     Oczywiście $0 \in X$, ponieważ $g(2^0) = g(1) = g(0) + \log_2 2^0 = 0$.
     Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, że $n + 1 \in X$.

     $$g(2^{n+1}) = g(2^n) + \log_2 2^{n+1} = (0 + 1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i$$

     Zatem $(n+1) \in X$. Na mocy zasady indukcji wzór $g(2^n) = \sum_{i=0}^{n} i$ jest prawdziwy dla dowolnego naturalnego n. $\square$

  2. Ostatnią rzeczą do pokazania jest $g(n) = g\left(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right)$ dla $n > 0$.

     Dowód. Będziemy tego dowodzić również indukcyjnie względem zmiennej n. Niech

     $$X = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid g(n) = g\left(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right)\}.$$

     Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że dla dowolnego $\forall_{\mathbb{N} \ni k < n} k \in X$. Obliczmy $g(n)$.

$$g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + \lfloor log_2(n) \rfloor = \sum_{i=0}^{log_2 \lfloor n/2 \rfloor} i + \lfloor log_2(n) \rfloor$$

Przez c oznaczmy $\lfloor log_2 n \rfloor$. Wtedy $log_2 \lfloor n/2 \rfloor = c - 1$, a powyższy wzór sprowadzamy do postaci:

$$g(n) = \sum_{i=1}^{c-1} i + c = \sum_{i=1}^{c} i = \sum_{i=1}^{\lfloor log_2 n \rfloor} i$$

Stąd wniosek, że $n \in X$, a to pociąga za sobą poprawność wzoru dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

$\square$