Zad 7 - lista 2.9

Oblicz całkę

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Rozwiązanie: Dla $n=0$ całka jest rozbieżna. Załóżmy, że $n \geqslant 1$. Zacznijmy od pomocniczego lematu :

Lemat 1. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N} > 0$ zachodzi*

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{x+k}$$

Dowód.

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \ldots + \frac{A_n}{x+n}$$

Skoro to jest tożsamość, to żeby znaleźć k-ty współczynnik to mnożymy całość przez $(x+k)$, podstawiamy do otrzymanego równania $x=-k$ i dostajemy powyższe wyniki. □

Korzystając z lematu rozbijamy całkę na ułamki proste. Obliczając całkę nieoznaczoną dostajemy :

$$\int f(x)\,dx = F(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln(x+k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\ln(\,(x+k)^{(-1)^k\binom{n}{k}}\,) = \frac{1}{n!}\ \ln(\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k\binom{n}{k}}\,)$$

$$n!\cdot F(\infty) = \lim_{x\to\infty}\ln(\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k\binom{n}{k}}\,) = \ln(\lim_{x\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k\binom{n}{k}}\,) = \ln(\lim_{x\to\infty}\prod_{k=0}^{n/2}\frac{(x+2k)^{\binom{n}{2k}}}{(x+2k+1)^{\binom{n}{2k+1}}}\,) =$$

Załóżmy, że n jest parzyste - kiedy jest nieparzyste to robimy to analogicznie.

$$= \ln(\lim_{x\to\infty}\prod_{k=0}^{n/2}\frac{x^{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\,\dots\,\binom{n}{n}}(1+\frac{\dots}{x}+\frac{\dots}{x^2}\dots)}{x^{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\,\dots\,\binom{n}{n-1}}(1+\frac{\dots}{x}+\frac{\dots}{x^2}\dots)}) = \dots$$

Suma współczynników dla k parzystych i dla k nieparzystych jest równa, zatem

$$F(\infty) = \frac{1}{n!}\cdot\ln(1) = 0$$

Wracając do naszej całki :

$$\int_1^\infty f(x) = F(\infty) - F(1) = -\frac{1}{n!}\ \ln(\prod_{k=0}^{n}(k+1)^{(-1)^k\binom{n}{k}}\,)$$

□