Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 11

6 stycznia 2016 r.[1]

M11.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Gaussa-Czebyszewa spełniają równość

$$A_k^{(n)} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(t_k)\, T_{n+2}(t_k)},$$

gdzie T_j oznaczają wielomiany Czebyszewa, a t_k — zera wielomianu T_{n+1}.

M11.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n.

M11.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste}, \\ \dfrac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste}. \end{cases}$$

M11.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że wzór

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' f(\cos(k\pi/n)) \qquad (1)$$

jest dokładny dla $f \in \Pi_{2n-1}$.

M11.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać przykład wielomianu $f \in \Pi_{2n}$, dla którego wzór (1) jest niedokładny. Co z tego wynika?

M11.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C, żeby równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\, dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 5$. Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

M11.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Do obliczania przybliżenia całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ może być użyta kwadratura interpolacyjna Q_n^C z węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ będącymi zerami $(n+1)$-szego wielomianu Czebyszewa. Wykazać, że

$$Q_n^C(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, f(x_k),$$

gdzie

$$A_k = \frac{4}{n+1} \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \frac{T_{2i}(x_k)}{1-4i^2} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

a $\sum'$ oznacza sumę z połowionym pierwszym składnikiem.

[1] zajęcia 13 stycznia 2016 r.

M11.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Uzasadnić poprawność poniższej procedury, zapisanej w języku Matlab, do obliczania całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury Clenshawa-Curtisa.

```
function I = clenshaw_curtis(f,n)
% Computes the integral I of f over [-1,1] by the
% Clenshaw-Curtis quadrature rule with n+1 nodes.

% Chebyshev extreme points
x = cos(pi*(0:n)'/n);
fx = feval(f,x)/(2*n);

% Fast Fourier transform
g = real(fft(fx([1:n+1 n:-1:2])));

% Chebyshev coefficients
a = [g(1); g(2:n)+g(2*n:-1:n+2); g(n+1)];
w = 0*a'; w(1:2:end) = 2./(1-(0:2:n).^2);
I = w*a;
```

Jaka jest złożoność tej procedury?

M11.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Poeksperymentować z metodą adaptacyjną Simpsona

```
function AdaptiveSimpson(f,a,b; abstol=1.0e-8)
  nf = 3;
  ff = f([a, (a+b)/2, b]);
  nf = 3; # Initial Simpson approximation
  I1 = (b-a)*dot([1, 4, 1], ff)/6;
  function adaptrec(f,a,b,ff,I1,tol,nf)
    h = (b-a)/2;
    fm = f([a+h/2, b-h/2]);
    nf = nf + 2;
    # Simpson approximations for left and right subinterval
    fR = [ff[2], fm[2], ff[3]];
    fL = [ff[1], fm[1], ff[2]];
    IL = h*dot([1, 4, 1],fL)/6;
    IR = h*dot([1, 4, 1],fR)/6;
    I2 = IL + IR;
    I = I2 + (I2 - I1)/15;
    # Extrapolated approximation
    if (abs(I-I2) > tol)
      IL,nf = adaptrec(f,a,a+h,fL,IL,tol/2,nf);
      IR,nf = adaptrec(f,b-h,b,fR,IR,tol/2,nf);
      I = IL + IR;
    end
    return I,nf;
  end
  return adaptrec(f,a,b,ff,I1,abstol,nf);
end;
```

Podać przykład funkcji $f \in C^{\infty}[-1,1]$, dla której obliczanie całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, z dokładnością `abstol`$=10^{-6}$, wymaga co najmniej 1000 wywołań funkcji f.