

Algebra — Egzamin, II termin

Czas: 200 minut.

W rozwiązaniach zaleca się podawanie kroków pośrednich obliczeń, tak aby były one weryfikowalne nawet w przypadku błędu rachunkowego.

Proszę podpisać wszystkie kartki! (Ta kartka jest przeznaczona na brudnopis).

Numer indeksu:.....

Zadanie 1 Niech M będzie macierzą odwracalną. Pokaż, że M oraz M^{-1} mają takie same wektory własne.

Numer indeksu:.....

Zadanie 2 Rozważmy permutację:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Podaj permutację odwrotną σ^{-1} . Rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Czy σ jest permutacją parzystą, czy nieparzystą?

Udowodnij, że jeśli permutacja τ jest parzysta, to również τ^{-1} jest.

Numer indeksu:.....

Zadanie 3 Niech M, N będą macierzami diagonalnymi rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:

- $M + N$ jest macierzą diagonalną;
- MN jest macierzą diagonalną;
- jeśli M jest odwracalna, to również M^{-1} jest macierzą diagonalną.

Numer indeksu:.....

Zadanie 4 Rozważmy poniższy układ równań nad ciałem \mathbb{Z}_5 . Ile ma on rozwiązań, w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_5$?

$$\begin{cases} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{cases}.$$

Wskazówka: Zauważ, że możliwych wartości (x_1, x_2, x_3) jest 125.

Numer indeksu:.....

Zadanie 5 Dla wielomianów $f = 6x^5 - 19x^4 - 19x^3 + 77x^2 - 27x - 18$, $g = 6x^4 - x^3 - 17x^2 + 16x - 4$ z $\mathbb{R}[X]$ podziel (z resztą) f przez g . Oblicz też $\gcd(f, g)$ i przedstaw je w postaci $af + bg$ dla odpowiednich wielomianów $a, b \in \mathbb{R}[X]$.

Numer indeksu:.....

Zadanie 6 Dla przestrzeni liniowych $S = \text{LIN}(\{(3, 0, 3, 3, 2, 0), (3, 1, 3, 2, 3, 1)\})$ oraz $T = \text{LIN}(\{(1, 1, 1, 0, 3, 1), (0, 3, 0, -3, -1, 3)\})$ oblicz $\dim(S + T)$ oraz $\dim(S \cap T)$. Podaj dowolną bazę $S + T$.

Numer indeksu:.....

Zadanie 7 Rozważmy kwadrat i jego grupę obrotów i symetrii (odbić).

Malujemy każdy bok (bez końców), każdą przekątną (bez końców i punktów przecięć przekątnych) i każdy wierzchołek tego kwadratu, na jeden z 7 kolorów. Dwa takie malowania są nierozróżnialne, jeśli można je przeprowadzić na siebie przy użyciu obrotu lub symetrii tego kwadratu. Ile jest rozróżnialnych pokolorowań tego kwadratu?

Numer indeksu:.....

Zadanie 8 Niech G_1, G_2 będą dwoma podgrupami G , zaś N_1, N_2 ich podgrupami normalnymi, tzn. $N_1 \trianglelefteq G_1 \leq G$, $N_2 \trianglelefteq G_2 \leq G$. Pokaż, że przecięcie N_1 i N_2 jest podgrupą normalną przecięcia G_1 i G_2 , tj.:

$$N_1 \cap N_2 \trianglelefteq G_1 \cap G_2.$$

Wskazówka: Podobne zadanie było na pierwszym terminie.

Numer indeksu:.....

Zadanie 9 Dla standardowego iloczynu skalarnego w \mathbb{R}^5 zortonormalizuj podany układ wektorów. Podaj wektor prostopadły do każdego wektora z podanego układu.

$$\{(2, 0, 0, 0, 0); (2, 1, -1, 1, -1); (3, 1, -3, 3, -1)\} \ .$$

Wskazówka: Dla dobra Nas wszystkich: nie zmieniaj kolejności wektorów.