Deklaracja															
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rozwiązane	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Spisane		✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓

W każdym normalnym człowieku tkwi szaleniec i próbuje wydostać się na zewnątrz.

– Terry Pratchett

Zadanie 1

Zad 1

Oblicz sumę $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ braną po wszystkich takich $k \in \mathbb{N}$, że $2, 3, 5, 7$ nie dzielą k.

Rozwiązanie:

$$\sum 2^{-k\cdot n} = \sum (2^{-n})^k = \frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n-1}$$

$$S = \sum 2^{-k} - \sum 2^{-k\cdot 2} - \sum 2^{-k\cdot 3} - \sum 2^{-k\cdot 5} - \sum 2^{-k\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 5} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 7} +$$

$$+ \sum 2^{-k\cdot 3\cdot 5} + \sum 2^{-k\cdot 3\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 5\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 5\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \sum 2^{-k\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} =$$

$$= 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{7} - \frac{32}{31} - \frac{128}{127} + \frac{64}{63} + \frac{1024}{1023} + \frac{16384}{16383} + \frac{32768}{32767} + \cdots \approx 0.5006$$

Zadanie 2

Zad 2

Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Wylicz funkcje tworzące ciągów a_{2n}, a_{3n}.

Rozwiązanie: Niech $B(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_{2n}, a $C(x)$ funkcją tworzącą ciągu a_{3n}.

Łatwo sprawdzić, że $B(x) = \frac{A(\sqrt{x})+A(-\sqrt{x})}{2}$ (podobne zadanie było na poprzedniej liście).
Spróbujmy policzyć $C(x)$. Zgadujemy, że powinno to być w takiej postaci

$$C(x) = \frac{A\left(\alpha \sqrt[3]{x}\right) + A\left(\beta \sqrt[3]{x}\right) + A\left(\gamma \sqrt[3]{x}\right)}{3}$$

Chcielibyśmy, żeby α, β, γ spełniały następujący układ (dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \alpha^{3k+1} + \beta^{3k+1} + \gamma^{3k+1} & = & 0 \\ \alpha^{3k+2} + \beta^{3k+2} + \gamma^{3k+2} & = & 0 \\ \alpha^{3k} + \beta^{3k} + \gamma^{3k} & = & 3 \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem jest $\alpha = 1, \beta = \exp\left(\frac{-i\cdot 2\pi}{3}\right), \gamma = \exp\left(\frac{i\cdot 2\pi}{3}\right)$.
Wstawiając do wyjściowego równania dostajemy:

$$C(x) = \frac{A\left(\sqrt[3]{x}\right) + A\left(\exp\left(\frac{-i\cdot 2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{x}\right) + A\left(\exp\left(\frac{i\cdot 2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{x}\right)}{3}$$

Zadanie 3

Zad 3

Oblicz

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i}$$

Rozwiązanie:

Lemat 1. *Funkcją tworzącą ciągu Fibonacciego jest* $\frac{x}{1-x-x^2}$.

Dowód. Przez $\mathcal{F}(x)$ oznaczmy szukaną funkcję tworzącą. Wtedy:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^{n+2} = x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1}$$

$$F(x) = x + x\mathcal{F}(x) + x^2 \mathcal{F}(x) \Longrightarrow \mathcal{F}(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

□

Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i} \right) x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k \right) = \mathcal{F}^2(x)$$

Oznaczmy $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Rozkładając funkcję $\frac{x}{1-x-x^2}$ na czynniki dostajemy:

$$\mathcal{F}^2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right) \right)^2 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{(1-\alpha x)^2} + \frac{1}{(1-\beta x)^2} - \frac{2}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\beta^n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n \right) \overset{wzor\ jawny}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{5} \right) (\alpha^n + \beta^n) - \frac{2(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{5(\alpha - \beta)} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{5} \right) (\alpha^n + \beta^n) - \frac{2}{5\sqrt{5}} \left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \right) \right) x^n$$

Zatem zwarty wzór ciągu a_n to

$$a_n = \left(\frac{n+1}{5} \right) \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) - \frac{2}{5\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Uwaga 1. *Można pokazać, że* $a_n = \frac{2n \cdot F_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$. *Wskazówka :* $\alpha^n + \beta^n = 2F_{n+1} - F_n$.

Zadanie 4

Zad 4

Korzystając ze wzoru Taylora pokaż, że dla $a \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{n!} x^n$$

Dowód. Twierdzenie Taylora mówi, że $f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n$.
Niech $f(x) = x^a$. Podstawiając we wzorze $h := x$ oraz $x := 1$ dostajemy:

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^a)^{(n)}(1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} x^n \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{n!} x^n$$

□

Zadanie 5

Zad 5

Wylicz funkcje tworzące ciągów określonych rekurencyjnie:

- $$a_0 = a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$$
- $$b_0 = 0, b_1 = 1, \; b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1}$$
- $$c_0 = 1, c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{k!}$$

Rozwiązanie: Funkcje tworzące z zadania będziemy nazywać odpowiednio $A(x), B(x), C(x)$.

- $a_0 = a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n \overset{def}{=} 1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (1 + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \, x^{n+3} =$$

$$1 + x + x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} =$$

$$= \frac{1}{1-x} + x^3 A(x) + x^2 \left(A(x) - a_0\right) + x \left(A(x) - a_0 - a_1 x\right) = \left(-x - 2x^2 + \frac{1}{1-x}\right) + A(x) \left(x + x^2 + x^3\right)$$

Stąd

$$A(x) = \frac{\frac{1}{1-x} - x - 2x^2}{1 - x - x^2 - x^3} = \frac{2x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)}$$

- $b_0 = 0, b_1 = 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1}$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} x^{n+2} \overset{def}{=} x + \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_{n+1} + b_n + \frac{1}{n+1} \right) x^{n+2} =$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+2} = x + x\left(B(x) - b_0\right) + x^2 B(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} =$$

$$= x + xB(x) + x^2 B(x) + x \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = x + xB(x) + x^2 B(x) + x\left(-\log\left(1-x\right)\right)$$

Zatem zwarta postać funkcji tworzącej ciągu b_n to :

$$B(x) = \frac{x \log(1-x) - x}{x^2 + x - 1}$$

- $c_0 = 1, c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{k!}$

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{k!} \right) x^{n+1} = 1 + x \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$C(x) = 1 + xC(x) \cdot e^x \Longrightarrow C(x) = \frac{1}{1 - xe^x}$$

Zadanie 6

Zad 6

Nieporządkiem nazywa się taką permutacje elementów, w której żaden element i nie znajduje się na pozycji i-tej. Niech d_n oznacza taką liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź zależność rekurencyjną $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności? Pokaż też przez indukcję, że $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$. Jak z tego ostatniego wzoru wynika wzór ogólny na d_n.

Rozwiązanie: Prawdziwy jest wzór rekurencyjny $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

Dowód. Załóżmy, że umiemy policzyć ile jest nieporządków o $n-1$ oraz n elementach.
Zauważmy, że dokładając element do nieporządku o n elementach wystarczy zamienić $n+1$ z którymś z pozostałych elementów. Taką parę elementów możemy wybrać na n sposób. Z drugiej strony możemy wziąć n elementów, z nich wybrać jeden element na n sposobów, a z reszty utworzyć nieporządek. Następnie połączyć $n+1$ element z wybranym wcześniej otrzymując nieporządek o $n+1$ elementach. Zatem możliwa liczba nieporządków o $n+1$ elementach to $nd_n + nd_{n-1}$. □

Pokażmy, że $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ dla $n > 1$.

Dowód. Należy przyjąć warunki początkowe $d_0 = 1, d_1 = 0$.

$$X = \{n \in \mathbb{N}_+ \ : \ d_n = nd_{n-1} + (-1)^n\}$$

Zauważmy, że $1 \in X$, bo $d_1 = 0 = 1 \cdot 1 + (-1)^1 = 1 \cdot d_0 + (-1)^1$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_+$ mniejszego od n zachodzi $k \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \overset{zal}{=} (n-1)\left((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1} + d_{n-2}\right) =$$

$$(n-1)(nd_{n-2} + (-1)^{n-1}) = n^2 d_{n-2} + n(-1)^{n-1} - nd_{n-2} + (-1)^n = n(nd_{n-2} - d_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n =$$

$$= n\left((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1}\right) + (-1)^n \overset{zal}{=} nd_{n-1} + (-1)^n$$

Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}_+$, czyli podany wyżej wzór jest poprawny dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

□

Wzór ogólny na ciąg d_n to $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Dowód. Porównując odpowiednie współczynniki dostajemy:

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n = n \cdot \left((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1}\right) + (-1)^n =$$

$$= n \cdot \left((n-1)((n-2)d_{n-3} + (-1)^{n-2}) + (-1)^{n-1}\right) + (-1)^n = \ldots =$$

$$= \ldots = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

□

Zadanie 7

Zad 7

Zastosuj wykładniczą funkcję tworzącą do rozwiązania zależności

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}), \quad d_0 = 1, d_1 = 0.$$

Rozwiązanie: Przez $D(x)$ oznaczmy wykładniczą funkcje tworzącą ciągu d_n.

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$$

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d_n x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n d_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n d_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1} x^n}{n!}$$

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1} x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n d_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n d_{n-1} x^n}{n!} = xD'(x) + xD(x)$$

Dostajemy do rozwiązania równanie różniczkowe:

$$D'(x) = xD'(x) + xD(x)$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{D'(x)}{D(x)} = (\log(D(x)))'$$

Zatem rozwiązaniem równania jest:

$$D(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{t}{1-t}dt\right) = \exp\left(-x - \log\left(1-x\right)\right) = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

a rozwiązaniem zadania $D^{(n)}(0)$.

Zadanie 8

Zad 8

Dana jest zależność rekurencyjna $a_{n+1} = n(a_n+a_{n-1})$ z warunkami początkowymi $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$. Znajdź rozwiązanie tej zależności korzystając z faktu, że d_n i $n!$ spełniają tę zależność (być może z innymi warunkami początkowymi).

Rozwiązanie: Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową ciągów określonych powyższym wzorem. Wiemy, że $dim(V) = 2$, bo jest on wyznaczony jednoznacznie przez 2 pierwsze elementy. Niech v_0, v_1 będą bazą tej przestrzeni. Naszym zadaniem jest ją znaleźć korzystając z faktu, że $n!, !n \in \mathbb{V}$.
Skoro przestrzeń $\mathbb{V}$ ma wymiar 2 to $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^2$ dlatego o bazie możemy myśleć jako o wektorach z $\mathbb{R}^2$. Ponieważ $n!$ i $!n$ są ciągami tej przestrzeni to dobrym kandydatem na bazę będzie $(0!, 1!) = (1, 1)$ i $(!0, !1) = (1, 0)$. Ten układ jest liniowo niezależny i ma tyle wektorów co wymiar przestrzeni, więc jest bazą.
Weźmy dowolny ciąg $a_n \in \mathbb{V}$. Wtedy $a_n = x(1, 1) + y(1, 0)$.
Korzystając z własności tej przestrzeni obliczamy kilka początkowych wyrazów:

$$\begin{aligned}
a_0 &= x + y \\
a_1 &= x \\
a_2 &= 1(a_1 + a_0) = 2x + y \\
a_3 &= 2(a_2 + a_1) = 6x + 2y \\
a_4 &= 3(a_3 + a_2) = 24x + 9y \\
&\vdots \\
a_n &\stackrel{?}{=} n! \cdot x + !n \cdot y
\end{aligned}$$

Wystarczy tylko upewnić się czy te współczynniki napisane powyżej to rzeczywiście $n!$ i $!n$. Ale tak jest, ponieważ po podstawieniu $x = 1, y = 0$ dostaniemy $a_n = n!$, a po podstawieniu $x = 0, y = 1$ dostaniemy $a_n = !n$. Zatem dowolne rozwiązanie rekurencji z zadania możemy zapisać jako $\alpha \cdot n! + !n \cdot \beta$.

Zadanie 9

Zad 9

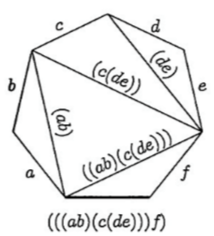
Udowodnij, że liczba sposobów, w jaki n-kąt wypukły na płaszczyźnie można podzielić na rozłączne trójkąty za pomocą $n-3$ przekątnych nie przecinających się wewnątrz tego wielokąta jest równa liczbie Catalana c_{n-2}. Pokaż też, że liczba triangulacji, w których jest wybrana przekątna wynosi $c_{i-1}c_{n-i-1}$, gdzie i zależy od przekątnej. Suma tych wyrażeń po wszystkich przekątnych jest $(n-3)$ razy większa od liczby wszystkich triangulacji, czyli

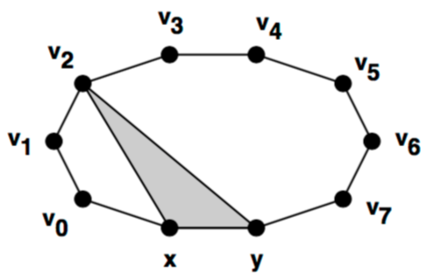
$$\frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1}c_{n-i-1} = (n-3)c_{n-2}$$

Jak z powyższego wzoru wynika, że $nc_{n-1} = 2(2n-3)c_{n-2}$?
Wyprowadź z tego zależność, że $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Rozwiązanie: Rozwiązanie niedokończone. Przedstawiam raczej idee, które trzeba rozwinąć przy tablicy:

1. Fakt, że liczba triangulacji n kąta wypukłego jest równa pewnej liczbie Catalana wnioskujemy podobnie jak w zadaniu 10 - pokazujemy równoważność problemu nawiasowania oraz triangulacji. Jak to zrobić łatwiej opisać rysunkami:





Wybieramy jeden bok wielokąta, a resztę boków oznaczamy kolejnymi literami. Następnie "nazywamy" przekątne tego wielokąta analogicznie jak na pierwszym rysunku. Szukanym nawiasowaniem będzie to, które pojawi się nam na wybranym na samym początku boku. Nawiasowanie to jest poprawne, bo przekątne tego wielokąta nie przecinały się.
W drugą stronę jest nieco trudniej. Załóżmy, że mamy jakiś wielokąt o $n+2$ wierzchołkach, który nie został jeszcze podzielony na trójkąty i poprawne nawiasowanie postacie $(\alpha)\ \beta$. Wybieramy wtedy pewne wierzchołki (na rysunku x, y), a pozostałe numerujemy sobie w jakiś sposób. Następnie wybieramy wierzchołek z i tworzymy $\triangle xyz$. Wtedy rekurencyjnie nawiasujemy lewy wielokąt i prawy wielokąt nawiasami wewnątrz odpowiednio α i β. Można też to argumentować inaczej i powiedzieć, że sposób w który przypisywaliśmy wielokątowi litery w pierwszej części można odwrócić i takie przypisanie jest różnowartościowe. Zatem taka funkcja jest bijekcją.

   Wystarczy jeszcze zauważyć, że nawiasów mamy o 1 więcej niż przekątnych (a ich jest $n-3$) zatem rozwiązaniem zadania będzie liczba Catalana C_{n-2}.

2. Pokaż też, że liczba triangulacji, w których jest wybrana przekątna wynosi $c_{i-1}c_{n-i-1}$, gdzie i zależy od przekątnej.

   To jest raczej oczywiste. Popatrzmy na rysunek wyżej (po prawej stronie). Dowolny wielokąt dzielimy w pewien sposób na dwie części (i-tą przekątną). Wtedy w pierwszej części mamy $i-1+2$ wierzchołków a w drugiej $n-i-1+2$ wierzchołki. Zatem liczba sposób na triangulację pierwszego to c_{i-1}, a drugiego c_{n-i-1}. Ponieważ chcemy policzyć łączną liczbę triangulacji to podane wyniki mnożymy.

3. Suma tych wyrażeń po wszystkich przekątnych jest $(n-3)$ razy większa od liczby wszystkich triangulacji, czyli $\frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1}c_{n-i-1} = (n-3)c_{n-2}$. Jak z powyższego wzoru wynika, że $nc_{n-1} = 2(2n-3)c_{n-2}$?

$$\frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1}c_{n-i+1} = (n+3)c_{n-2}$$

$$n\sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1}c_{n-i+1} = 2(n+3)c_{n-2} \quad / + 2nc_{n-2}$$

$$n\left(\sum_{i=2}^{n-2} c_{i-1}c_{n-i+1} + 2c_{n-2}\right) = 2(2n-3)c_{n-2}$$

$$n\left(\sum_{i=0}^{n-2} c_{i}c_{n-i-2}\right) = 2(2n-3)c_{n-2}$$

$$nc_{n-1} = 2(2n-3)c_{n-2}$$

4. Wyprowadź z tego zależność, że $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

   Tutaj prosta indukcja.

Zadanie 10

Zad 10

Danych jest $2n$ punktów na okręgu. Na ile sposobów można te punkty połączyć n nieprzecinającymi się odcinkami, takimi że każdy z punktów jest końcem dokładnie jednego odcinka?

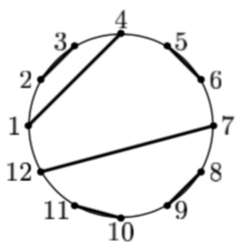
Rozwiązanie: Pokażemy transformację problemu problemu z zadania do problemu nawiasowania.

1. Problem okręgu $\Rightarrow$ nawiasowanie.
   Weźmy dowolne n i dowolne ustawienie $2n$ punktów na okręgu. Załóżmy, że rozmieszczenie punktów i siecznych jest poprawne. Niech ciąg N_{2n} będzie nawiasowaniem określonym następująco - dla dowolnych dwóch punktów $a < b$ połączonych sieczną ustawiamy $N_a =$ "(" oraz $N_b =$ ")". Pokażmy, że tak zdefiniowane nawiasowanie jest poprawne. Gdyby takie nawiasowanie nie było poprawne, to wewnątrz pewnej pary nawiasów o numerach $a' =$ "(", $b' =$ ")" istniałby nawias otwierający bez pary lub nawias zamykający bez pary. Ustawialiśmy te nawiasy tak, że dla każdego nawiasu istniała para. Skoro nawias nie ma pary wewnątrz a', b' to musi mieć parę poza przedziałem. Ale to jest równoważne temu, że pewne dwie sieczne się przecinają. Ponieważ nasze ustawienie punktów było prawidłowe, to takiej sytuacji nie ma.

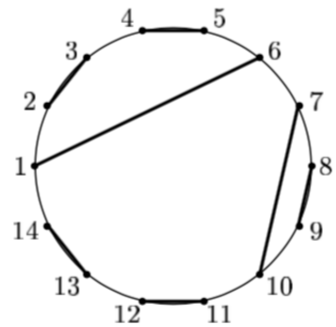
2. Nawiasowanie $\Rightarrow$ problem okręgu.
   Weźmy dowolne poprawne nawiasowanie o rozmiarze $2n$. Ponumerujmy nawiasy kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do $2n$. Pokażemy, że jeśli ustawimy punkty $1, 2, 3, \ldots 2n$ na okręgu w dokładnie takiej kolejności jak numery nawiasów w ciągu i połączymy je siecznymi zgodnie z podanym wcześniej nawiasowaniem to takie ustawienie na okręgu będzie poprawne. Załóżmy, że nasze rozmieszczenie

punktów na okręgu nie jest poprawne. Wtedy istnieją przynajmniej dwie pary punktów $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$, że sieczna łącząca punkty o numerach a_1 i b_1 przecina się z sieczną łączącą punkty o numerach a_2, b_2. Ponieważ nasze nawiasowanie było poprawne to $a_1 < b_1$ oraz $a_2 < b_2$. Wtedy zachodzi nierówność $a_1 < a_2 < b_1$ lub $a_2 < a_1 < b_2$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że prawdziwa będzie ta pierwsza. Oznacza to, że mamy sytuację "(... (...)". Ale ten nawias w środku ma parę dopiero za b_1, co oznacza że nawiasowanie jest niepoprawne. Sprzeczność. Zatem nasze ustawienie siecznych i punktów na okręgu jest prawidłowe.

Dla lepszego zrozumienia powyższego rozumowania warto spojrzeć na poniższy rysunek:



(i)



(ii)

(	(	)	)	(	)	(	(	)	(	)	)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(	(	)	(	)	)	(	(	)	)	(	)	(	)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Skoro te problemy są równoważne, to liczba ich rozwiązań jest taka sama.
Z wykładu wiemy, że jest ich $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{n}{2n}$.

Uwaga 2. *Trzeba jeszcze pomachać, że te funkcje z opisu są różnowartościowe, bo inaczej zadanie nie działa.*

Zadanie 11

Zad 11

Wylicz funkcje tworzące dla liczby podziałów liczby n (rozkładów na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

- na składnika parzyste,
- na składniki mniejsze od m,
- na różne składniki nieparzyste,
- na różne potęgi dwójki

Rozwiązanie: Oznaczmy funkcje tworzące odpowiednio $A(x), B(x), C(x), D(x)$.
Korzystając ze wzorów na podział liczby na (różne) składniki (z wykładu) dostajemy:

$$A(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2i}}$$

$$B(x) = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1 - x^{i}}$$

$$C(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + x^{2i+1}\right)$$

$$D(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + x^{2^i}\right)$$

Zadanie 12

Zad 12

Niech p_n i r_n będą odpowiednio liczbami wszystkich podziałów n i podziałów n na różne składniki. Niech $P(x)$ i $R(x)$ będą ich funkcjami tworzącymi. Pokaż, że $P(x) = R(x)P(x^2)$.

Dowód. Z wykładu wiemy, że

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \quad R(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + x^i\right)$$

Zatem

$$R(x) \cdot P(x^2) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i}} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + x^i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x^i}{1-x^{2i}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x^i}{\left(1+x^i\right)\left(1-x^i\right)} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = P(x)$$

□

Zadanie 13

Zad 13

Permutację nazywamy inwolucją, gdy złożenie jej ze sobą jest identycznością. Niech a_n będzie liczbą inwolucji n-elementowych. Pokaż, że wykładniczą funkcje tworzącą ciągu a_n jest $e^{x+x^2/2}$.

Rozwiązanie:

Lemat 2. *Inwolucja w rozkładzie na cykle ma tylko cykle jedno lub dwuelementowe.*

Dowód. To, że inwolucja może mieć cykle jedno lub dwuelementowe jest oczywiste. Jeśli miałby cykl o większej długości to przy złożeniu permutacji samej z sobą istnieje element nie przejdzie na samego siebie. □

Widać, że $a_0 = a_1 = 1$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ większe od 2 i załóżmy, że znamy a_{n-1}, a_n. Chcielibyśmy znaleźć wzór na a_{n+1}. Zauważmy, że możemy wziąć wszystkie możliwe cykle z a_n i dodać do niej cykl jednoelementowy $((n+1) \to (n+1))$ albo wziąć rozkład inwolucji $n-1$ elementowej i dołożyć cykl dwuelementowy (różnych możliwości takiego dołożenia jest n). Dostajemy wzór rekurencyjny $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$.
Analogiczne do zad 7:

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_{n-1}}{n!} x^n$$

$$A'(x) = A(x) + xA(x) \Longrightarrow \frac{A'(x)}{A(x)} = x + 1 \Longrightarrow A(x) = \exp\left(\int_0^x t + 1 dt\right) = e^{x+x^2/2}$$

Zadanie 14

Zad 14

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju $\left[{n \atop k}\right]$ definiujemy jako liczbę permutacji n-elementowych , które rozkładają się na k cykli. Pokaż, że $\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$. Posługując się tą zależnością rekurencyjną udowodnij, że

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Rozwiązanie: Uzasadnijmy najpierw wzór rekurencyjny z treści zadania.
Jeżeli mamy $n-1$ elementową permutację o $k-1$ cyklach to dodając element połączony sam ze sobą tworzymy permutację o k cyklach i n elemenentach. Jeżeli chcemy dodać element, który nie przechodzi sam na siebie to możemy go "włożyć" w pewien cykl permutacji $n-1$ elementowej o k cyklach (możemy zrobić to na n sposobów). Po zsumowaniu dostajemy wzór z zadania.
Przyjmujemy dodatkowe założenia na "brzegowe" wartości liczb Stirlinga pierwszego rodzaju:

- $\left[{n \atop 0}\right] = 0$ dla $n \neq 0$.
- $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dla $k > n$.

Udowodnijmy indukcyjnie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $\sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^k = x^{\overline{n}}$.

Dowód.

$$\text{Niech } X = \left\{ n \in \mathbb{N}_+ \ : \ \forall x \in \mathbb{R} \ \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x^{\overline{n}} \right\}.$$

Weźmy dowolny $x \in \mathbb{R}$.
Pokażmy najpierw, że $1 \in X$. Jest to równoważne pokazaniu, że $x^{\overline{1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{1 \atop k}\right] x^k$.
Z własności wyżej wiemy, że dla $k > 1$ składniki tej sumy będą zerami. Stąd :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = x = x^{\overline{1}}$$

Zatem $1 \in X$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$. Załóżmy, że $\forall\ n' < n \in \mathbb{N}_+\ n' \in X$. Pokażmy, że $n \in X$.

$$x^{\overline{n}} = x \cdot x^{\overline{n-1}} + (n-1) \cdot x^{\overline{n-1}} \overset{zal}{=} x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k + (n-1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Zatem $n \in X$. Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}_+$, czyli powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnego dodatniego naturalnego n.

□

Zadanie 15

Zad 15

Pokaż, że wykładnicza funkcja tworząca $G_e(z)$ dla dowolnego ciągu jest powiązana ze zwykłą funkcją tworzącą $G(z)$ za pomocą równania

$$\int_0^\infty G_e(zt)e^{-t}dt = G(z)$$

jeśli tylko całka ta istnieje.

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad G_e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

Lemat 3. $\Gamma(n+1) = n!$ *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$*.*

Dowód. Całkując funkcję $\Gamma(z+1)$ przez części dostajemy równanie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Wystarczy pokazać, że $\Gamma(1) = 0!$, a reszta będzie już wynikać z rozumowania indukcyjnego. Policzmy całeczkę:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{k \to +\infty} e^{-t}|_0^k = -0 - (-1) = 1 = 0!$$

Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \Gamma(n+1) = n!\}$. Wiemy, że $0 \in X$, co pokazaliśmy chwilę temu.
Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n \in X$. Pokażmy, żę $n+1 \in X$.
Liczymy:

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) \overset{zal}{=} (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Na mocy zasady indukcji $X = \mathbb{N}$, czyli wzór $\Gamma(n+1) = n!$ jest prawdziwy dla dowolnego naturalnego n. $\square$

Rozwiązanie: Korzystając z podstawowych własności całkowania oraz własności funkcji Gamma dostajemy, że :

$$\int_0^\infty G_e(zt) \cdot e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(zt)^n dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} \cdot \frac{a_n}{n!} \cdot t^n \cdot z^n dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left(e^{-t} \cdot t^n\right) z^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot z^n}{n!} \int_0^\infty \left(e^{-t} \cdot t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot z^n}{n!} \cdot \Gamma(n+1) \overset{wlasnosc\ \Gamma}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot z^n}{n!} \cdot n! = G(z)$$