
Analiza numeryczna

Stanisław Lewanowicz

Grudzień 2007 r.

APROKSYMACJA FUNKCJI

1 Pojęcia wstępne

Definicja 1.1 Przestrzeń liniową X (nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbf{R}) nazywamy **unormowaną**, jeśli jest określona w niej funkcja o wartościach rzeczywistych, zwana normą, $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$, która spełnia następujące warunki:

1. $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$;
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

dla dowolnych $f, g \in X$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Przykład 1.2 W przestrzeni funkcji ciągłych w ustalonym przedziale domkniętym $[a, b]$, oznaczanej symbolem $C[a, b]$, normę funkcji $f \in C[a, b]$ oznaczamy i określamy tak:

$$\|f\|_{\infty} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Przykład 1.3 Niech p będzie **funkcją wagową**, tj. ciągłą w przedziale $[a, b]$, dodatnią w (a, b) i taką, że całki $\int_a^b x^k p(x) dx$ istnieją dla wszystkich $k = 0, 1, \dots$. Symbolem $C_p[a, b]$ oznaczmy przestrzeń funkcji ciągłych w przedziale $[a, b]$, z normą

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}.$$

Ograniczamy się do aproksymacji za pomocą wielomianów. Najważniejsze w teorii i praktyce są

1. **aproksymacja jednostajna** z błędem $\|f - w\|_{\infty}$; stosuje się ją do dowolnych funkcji ciągłych w przedziale $[a, b]$;
2. **aproksymacja średniokwadratowa** z błędem $\|f - w\|_2$; stosuje się ją do funkcji z przestrzeni $C_p[a, b]$.

Dla danej funkcji f i danego $n \in \mathbf{N}$ wprowadźmy wielkość

$$(1.1) \quad E_n(f) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|.$$

Wielomian $w_n^* \in \Pi_n$ o własności $\|f - g^*\| = E_n(f)$ nazywamy ***n*-tym wielomianem optymalnym** dla f . Jeśli on istnieje, to wielkość (1.1) nazywamy ***n*-tym błędem aproksymacji optymalnej**.

2 Aproksymacja średniokwadratowa

Definicja 2.1 Przestrzeń liniową X nad ciałem \mathbf{R} liczb rzeczywistych nazywamy **unitarną**, jeśli w $X \times X$ określone jest odwzorowanie, zwane **iloczynem skalarnym**, które każdej parze $f, g \in X$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\langle f, g \rangle$ i spełnia warunki:

- (i) dla każdego $f \in X$ jest $\langle f, f \rangle \geq 0$; $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
- (ii) dla każdych $f, g \in X$ jest $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,
- (iii) dla każdych $f, g \in X$ i $\alpha \in \mathbf{R}$ jest $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$,
- (iv) dla każdych $f, g, h \in X$ jest $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.

Przykład 2.2 Można sprawdzić, że wzór

$$(2.1) \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx$$

definiuje iloczyn skalarny w przestrzeni $C_p[a, b]$.

Twierdzenie 2.3 Jeśli X jest przestrzenią unitarną, to $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ jest normą w X .

Definicja 2.4 Elementy f, g przestrzeni unitarnej X nazywamy **ortogonalnymi**, jeśli iloczyn $\langle f, g \rangle$ jest równy zeru. Niepusty zbiór $A \subset X$ nazywamy **układem ortogonalnym**, gdy $0 \notin A$ i gdy każde dwa elementy $f, g \in A$ ($f \neq g$) są ortogonalne. Jeśli prócz tego $\|f\| = 1$ dla każdego $f \in A$, to układ A nazywamy **ortonormalnym**.

Twierdzenie 2.5 Jeśli $A = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni unitarnej X , to elementy f_1, f_2, \dots, f_m są liniowo niezależne.

Najczęstsze w praktyce zadania aproksymacyjne w przestrzeniach unitarnych dotyczą przestrzeni $C_p[a, b]$, a funkcjami przybliżającymi są przeważnie wielomiany. Szczególnie ważne są więc układy ortogonalne wielomianów. Znajdują one zastosowanie w wielu działach analizy numerycznej.

Definicja 2.6 Ciąg $\{P_k\}$, gdzie dla $k = 0, 1, \dots$ P_k jest wielomianem stopnia k -tego, nazywamy **ciągami wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$ z wagą p** , jeśli $\{P_k\}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $C_p[a, b]$.

Twierdzenie 2.7 Wielomiany ortogonalne P_0, P_1, \dots, P_n ($n \in \mathbf{N}$) tworzą bazę przestrzeni Π_n :

$$\Pi_n = \text{lin}\{P_0, P_1, \dots, P_n\}.$$

Twierdzenie 2.8 Niech $\{\bar{P}_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych o współczynnikach wiodących równych 1: $\bar{P}_k(x) = x^k + \dots$ ($k = 0, 1, \dots$). Zachodzi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(x) &= 1, \\ \bar{P}_1(x) &= x - c_1, \\ \bar{P}_k(x) &= (x - c_k)\bar{P}_{k-1}(x) - d_k\bar{P}_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_k &= \langle x\bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1} \rangle / \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1} \rangle \quad (k = 1, 2, \dots), \\ d_k &= \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1} \rangle / \langle \bar{P}_{k-2}, \bar{P}_{k-2} \rangle \quad (k = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Dla pewnych przedziałów $[a, b]$ i funkcji wagowych p wielomiany ortogonalne wyrażają się jawnymi wzorami.

Twierdzenie 2.9 Niech f będzie funkcją należącą do $C_p[a, b]$. Jeśli ciąg $\{P_k\}$ jest ciągiem wielomianów ortogonalnych, to n -ty wielomian optymalny w_n^* dla f istnieje, jest określony jednoznacznie i wyraża się wzorem

$$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k,$$

a n -ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji f jest równy

$$\|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}.$$

3 Aproksymacja jednostajna

Aproksymacją jednostajną nazywamy aproksymację w przestrzeni $C(T)$ funkcji rzeczywistych ciągłych na zbiorze domkniętym i ograniczonym $T \subset \mathbf{R}^1$, z normą

$$\|f\|_\infty \equiv \|f\|_\infty^T := \max_{x \in T} |f(x)|,$$

zwaną **normą jednostajną**. Zasadnicze zadanie aproksymacji jednostajnej za pomocą wielomianów brzmi następująco.

Dla ustalonej funkcji f z przestrzeni $C(T)$ znaleźć taki wielomian $w_n^* \in \Pi_n$, że

$$\|f - w_n^*\|_\infty = E_n(f).$$

gdzie wielkość $E_n(f)$ definiujemy wzorem

$$E_n(f) \equiv E_n(f; T) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty.$$

Wielomian w_n^* nazywamy **n -tym wielomianem optymalnym dla funkcji f na zbiorze T** , a $E_n(f)$ – **n -tym błędem aproksymacji optymalnej funkcji f na zbiorze T** .

Twierdzenie 3.1 Dla dowolnej funkcji $f \in C(T)$ i dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ istnieje dokładnie jeden n -ty wielomian optymalny.

Twierdzenie 3.2 (twierdzenie Czebyszewa o alternansie) Niech $n \in \mathbf{N}$ i niech zbiór T zawiera co najmniej $n + 2$ punkty. Na to, by wielomian w_n był n -tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C(T)$ potrzeba i wystarcza, żeby istniały takie punkty $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in T$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$), że dla $e_n := f - w_n$ jest

$$\begin{aligned} e_n(x_k) &= -e_n(x_{k-1}) & (k = 0, 1, \dots, n+1), \\ |e_n(x_j)| &= \|e_n\|_\infty^T & (j = 0, 1, \dots, n+1). \end{aligned}$$

Zbiór punktów x_0, x_1, \dots, x_{n+1} , w których różnica e_n przyjmuje wartość $\|e_n\|_\infty^T = \max_{x \in T} |e_n(x)|$ z naprzemiennymi znakami, nazywamy **n -tym alternansem funkcji f (związany z zbiorem T)**.

Twierdzenie 3.3 Niech s będzie funkcją określoną w zbiorze $T = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ (gdzie $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$) i taką, że $s(x_k) = (-1)^k$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$). n -ty wielomian optymalny dla funkcji f na zbiorze T wyraża się wzorem

$$w_n(x) = d(x_0) + d[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + d[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

gdzie

$$d := f - \varepsilon s, \quad \varepsilon = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]}{s[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]}.$$

(Oczywiście jest $|\varepsilon| = E_n(f; T)$.)

Twierdzenie 3.4 *n -tym wielomianem optymalnym dla jednomianu x^{n+1} w przedziale $[-1, 1]$ jest wielomian $x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$, a n -ty błąd aproksymacji optymalnej tej funkcji jest równy 2^{-n} . Spośród wszystkich wielomianów postaci $x^{n+1} + a_1x^n + \dots + a_{n+1}$ (z dowolnymi współczynnikami a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) najmniejszą normę $\|\cdot\|_\infty^{[-1, 1]}$, równą 2^{-n} , ma wielomian $\tilde{T}_{n+1} := 2^{-n}T_{n+1}$.*

Twierdzenie 3.5 (Weierstraß) *Jeśli funkcja f jest ciągła na zbiorze domkniętym T , to*

1. *dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian w taki, że $\|f - w\|_\infty < \varepsilon$,*
2. *istnieje ciąg wielomianów $\{W_m\}$ zbieżny jednostajnie do f na T ,*
3. *zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$.*

Ze względu na trudności wynikające przy obliczaniu wielomianów optymalnych często z góry rezygnujemy z nich, zadowalając się **wielomianami prawie optymalnymi**, które oblicza się łatwo. Przykładem wielomianu prawie optymalnego jest wielomian

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k[f] T_k(x),$$

gdzie

$$a_k[f] := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) (1-x^2)^{-1/2} dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

który poznaliśmy jako n -ty wielomian optymalny w sensie aproksymacji w przestrzeni $L^2(-1, 1, (1-x^2)^{-1/2})$, z normą

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 f^2(x) (1-x^2)^{-1/2} dx \right)^{1/2}.$$

Udowodniono, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dla każdej funkcji f ciągłej w przedziale $[-1, 1]$ jest

$$\|f - S_n\|_\infty \leq K_n E_n(f),$$

gdzie

$$K_n := \frac{2n+2}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n k^{-1} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Czynnik K_n określa pogorszenie dokładności aproksymacji zachodzące wtedy, gdy zastępuje się wielomian optymalny w_n (taki, że $\|f - w\|_\infty = E_n(f)$) wielomianem S_n . Okazuje się, że $K_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$; np. $K_5 = 2.961$, $K_{10} = 3.223$, $K_{20} = 3.494$, $K_{100} = 4.139$.

Aproksymując funkcję za pomocą wielomianu interpolacyjnego korzystamy często z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.6 *Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$ -szą pochodną, a wielomian $w \in \Pi_n$ spełnia warunki interpolacyjne*

$$w(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

gdzie $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, to

$$(3.1) \quad \|f - w\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty,$$

gdzie $\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, przy czym $\|\cdot\|_\infty \equiv \|\cdot\|_\infty^{[a,b]}$.

Jeśli $[a, b] = [-1, 1]$, to prawa strona nierówności (3.1) jest najmniejsza i równa

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^{[-1,1]}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega = 2^{-n}T_{n+1}$, tj. gdy węzłami x_0, x_1, \dots, x_n są punkty

$$(3.2) \quad t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

(zera $(n+1)$ -go wielomianu Czebyszewa T_{n+1}).

Wielomian interpolacyjny I_n z węzłami (3.2), o którym mówi ostatnia część twierdzenia 3.6, wyraża się wzorami

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{1}{n+1} T_{n+1}(x) \sum_{j=0}^n (-1)^j f(t_{n+1,j}) \frac{\sin \frac{2j+1}{2n+2} \pi}{x - t_{n+1,j}} \\ &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n f(t_{n+1,j}) T_i(t_{n+1,j}) \right) T_i(x). \end{aligned}$$

Można wykazać, że

$$\|f - I_n\|_\infty \leq L_n E_n(f),$$

gdzie

$$L_n := 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \operatorname{tg} \frac{2k+1}{4n+4} \pi \sim \ln n.$$

Zatem czynnik L_n rośnie wolno wraz z n . Np. $L_5 = 3.104$, $L_{10} = 3.489$, $L_{20} = 3.901$, $L_{100} = 4.901$.

Poznamy jeszcze **metodę Remeza** wyznaczania n -tego wielomianu optymalnego z (teoretycznie) dowolnie dobrą dokładnością.

Algorytm 3.7 (Remez) Dane są: zbiór domknięty T zawierający co najmniej $n+2$ punkty i funkcja f , która na T jest ciągła i nie jest tam wielomianem klasy Π_n . Niech dla $m = 0, 1, \dots$ $w_n^{(m)}$ będzie n -tym wielomianem optymalnym dla funkcji f na podzbiorze

$$D_m = \{x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{m,n+1}\} \quad (x_{m0} < x_{m1} < \dots < x_{m,n+1})$$

zbioru T , określonym w następujący sposób:

1. Podzbiór D_0 jest dowolny.
2. Niech $m \geq 1$. Jeśli $E_n(f; D_{m-1}) = \|f - w_n^{(m-1)}\|_\infty^T$, to wielomian $w_n^{(m-1)}$ jest n -tym wielomianem optymalnym dla funkcji f na zbiorze T ; w przeciwnym wypadku podzbiór D_m określamy tak, żeby

(R1) różnice $f(x_{mk}) - w_n^{(m-1)}(x_{mk})$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$) są na przemian dodatnie i ujemne,

(R2) $|f(x_{mk}) - w_n^{(m-1)}(x_{mk})| \geq E_n(f; D_{m-1})$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$),

(R3) $\max_{0 \leq k \leq n+1} |f(x_{mk}) - w_n^{(m-1)}(x_{mk})| = \|f - w_n^{(m-1)}\|_\infty^T$.

Jeśli powyższy algorytm określa ciąg nieskończony $\{w_n^{(m-1)}\}$, to jest on zbieżny do n -tego wielomianu optymalnego w_n dla funkcji f na zbiorze T .

Zauważmy, że wersje algorytmu Remeza mogą różnić się krokiem 2, tj. sposobem wymiany punktów $\{x_{m-1,k}\}$ na $\{x_{mk}\}$. **Uproszczony algorytm** polega na wymianie tylko jednego punktu zbioru D_{m-1} . **Pełny algorytm** wymaga wymiany wszystkich punktów tego zbioru na nowe; przyspiesza to istotnie zbieżność procesu.