

Wersja:

A

Numer indeksu:

## Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 6 grudnia 2012

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach  
lub na odwrocie tej kartki.

**Zadanie 1 (3 punkty).** Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie  $W$  jest uproszczeniem wyrażenia  $W'$  jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole  $\cup, \cap, \setminus$  i nawiasy, oraz  $W$  zawiera mniej symboli niż  $W'$ . Np.  $A \setminus B$  jest uproszczeniem  $(A \cup B) \setminus B$ . Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia  $A \cup (B \setminus C) \cup ((C \setminus A) \cap B)$  to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 2 (3 punkty).** Rozważmy zbiory osób  $O$ , barów  $B$  i soków  $S$  oraz relacje  $Bywa \subseteq O \times B$ ,  $Lubi \subseteq O \times S$  i  $Podaj \subseteq B \times S$  informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę  $\varphi$ , że  $\{x \mid \varphi\}$  jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów, które podają tylko soki lubiane przez *Maliniaka*.

**Zadanie 3 (3 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii  $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$  w systemie naturalnej dedukcji.

**Zadanie 4 (3 punkty).** Jeśli istnieją takie indeksowane rodziny zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$  i  $\{B_t\}_{t \in T}$ , dla których zachodzi inkluzja  $(\bigcup_{t \in T} A_t) \setminus (\bigcup_{t \in T} B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t)$ , to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich rodzin. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 5 (7 punktów).** Dla relacji  $R \subseteq A \times A$  definiujemy  $R^1 = R$  oraz  $R^{n+1} = R^n R$  dla  $n \geq 1$ . Rozważmy symetryczną relację  $R$ . Udowodnij, że dla wszystkich  $n \geq 1$  relacja  $R^n$  jest symetryczna. Możesz przy tym skorzystać z faktu, że dla dowolnej relacji  $R$  zachodzi równość  $R^i R^j = R^{i+j}$  dla wszystkich  $i, j \geq 1$ .

**Zadanie 6 (6 punktów).** Udowodnij, że jeśli rodzina  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest wstępująca<sup>1</sup>, to  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ .

<sup>1</sup>Dla przypomnienia: rodzina zbiorów  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest wstępująca jeśli dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $A_n \subseteq A_{n+1}$ .

Wersja:

C

Numer indeksu:

## Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 6 grudnia 2012

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach  
lub na odwrocie tej kartki.

**Zadanie 1 (3 punkty).** Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie  $W$  jest uproszczeniem wyrażenia  $W'$  jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole  $\cup, \cap, \setminus$  i nawiasy, oraz  $W$  zawiera mniej symboli niż  $W'$ . Np.  $A \setminus B$  jest uproszczeniem  $(A \cup B) \setminus B$ . Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia  $B \cup (C \setminus A) \cup ((A \setminus B) \cap C)$  to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 2 (3 punkty).** Rozważmy zbiory osób  $O$ , barów  $B$  i soków  $S$  oraz relacje  $Bywa \subseteq O \times B$ ,  $Lubi \subseteq O \times S$  i  $Podaj \subseteq B \times S$  informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę  $\varphi$ , że  $\{x \mid \varphi\}$  jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które lubią tylko soki podawane w barze *Jagódka*.

**Zadanie 3 (3 punkty).** W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii  $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$  w systemie naturalnej dedukcji.

**Zadanie 4 (3 punkty).** Jeśli istnieją takie indeksowane rodziny zbiorów  $\{A_t\}_{t \in T}$  i  $\{B_t\}_{t \in T}$ , dla których zachodzi inkluzja  $\bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) \subseteq (\bigcup_{t \in T} A_t) \setminus (\bigcap_{t \in T} B_t)$ , to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich rodzin. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

**Zadanie 5 (7 punktów).** Dla relacji  $R \subseteq A \times A$  definiujemy  $R^1 = R$  oraz  $R^{n+1} = R^n R$  dla  $n \geq 1$ . Rozważmy przechodnią relację  $R$ . Udowodnij, że dla wszystkich  $n \geq 1$  relacja  $R^n$  jest zawarta w relacji  $R$ .

**Zadanie 6 (6 punktów).** Udowodnij, że jeśli rodzina  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zstępująca<sup>2</sup>, to  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ .

<sup>2</sup>Dla przypomnienia: rodzina zbiorów  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zstępująca jeśli dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $A_{n+1} \subseteq A_n$ .