

Deklaracja															
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rozwiązane															
Spisane															

W każdym normalnym człowieku tkwi szaleniec i próbuje wydostać się na zewnątrz.

– Terry Pratchett

Zadanie 1

Zad 1

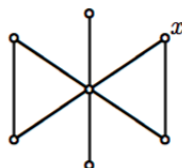
Problem przewoźnika. Przewoźnikowi powierzono przewiezienie przez rzekę wilka, kozy i kosza z kapustą. Oprócz przewoźnika łódka może pomieścić tylko jeden z tych przedmiotów. Jak musi postąpić przewoźnik, jeżeli nie może pozostawić samych ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą? Narysuj graf ilustrujący rozwiązanie tego problemu.

TODO.

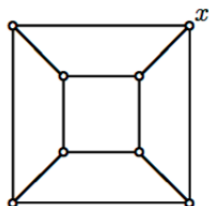
Zadanie 2 i 3

Zad 2, 3

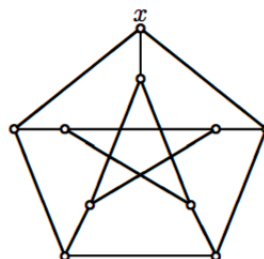
Oblicz rzędy grup automorfizmów G grafów z poniższych rysunków. W tym celu oblicz $|G_x|$ i $|O_x|$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

TODO.

Zadanie 4

Zad 4

Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieją dokładnie cztery grafy z trzema wierzchołkami i jedenaście z czterema wierzchołkami.

TODO.

Zadanie 5

Zad 5

Narysuj wszystkie nieizomorficzne sześciowierzchołkowe grafy 3-regularne.

TODO.

Zadanie 6

Zad 6

Przez Q_k oznaczmy graf k -wymiarowej kostki, tj. wierzchołkami w Q_k są wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek, oraz dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że $n(Q_k) = 2^k$ i $m(Q_k) = k2^{k-1}$. Udowodnij, że Q_k jest grafem dwudzielnym.

TODO.

Zadanie 7

Zad 7

Niech $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Określ liczbę nieidentycznych

- (a) grafów prostych o zbiorze wierzchołków V .
- (b) grafów o zbiorze wierzchołków V i m krawędziach, jeśli dopuszczamy pętle i krawędzie wielokrotne.
- (c) digrafów jak w poprzednim podpunkcie.

TODO.

Zadanie 8

Zad 8

Udowodnij, że w grafie dwudzielnym o n wierzchołkach, liczba krawędzi jest równa co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

TODO.

Zadanie 9

Zad 9

Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów G, \overline{G} jest spójny.

TODO.

Zadanie 10

Zad 10

Udowodnij, że graf prosty $G = (V, E)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy G_v , będące wynikiem usunięcia z G wierzchołka v z przyległymi, są spójne ($n(G) > 2$).

TODO.

Zadanie 11

Zad 11

Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi proste mają wspólny wierzchołek.

TODO.

Zadanie 12

Zad 12

Udowodnij, że graf prosty o n wierzchołkach ma co najwyżej $\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ krawędzi, gdzie p jest liczbą składowych spójności. Ile ma on co najmniej krawędzi przy p składowych spójności?

TODO.

Zadanie 13

Zad 13

Każdą cząsteczkę węglowodoru o wzorze sumarycznym C_kH_{2k+2} można przedstawić w postaci grafu (spójnego). W grafie tym krawędzie oznaczają wiązania chemiczne. Każdy atom wodoru (H) związany jest z jednym innym atomem, a każdy atom węgla (C) związany jest z czterema innymi atomami. Pokaż, że graf ten dla węglowodoru C_kH_{2k+2} jest drzewem. Każde dwa nieizomorficzne grafy tego typu wyznaczają różne izomery. Ile jest różnych izomerów C_5H_{12} ?

TODO.

Zadanie 14

Zad 14

Niech d_1, d_2, \dots, d_n będzie ciągiem liczb naturalnych (dodatnich). Pokaż, że d_i jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa **wtedy i tylko wtedy**, gdy $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.

TODO.

Zadanie 15

Zad 15

Niech l_1 oznacza liczbę wierzchołków wiszących drzewa, a l_2 liczbę wierzchołków stopnia większego niż dwa. Pokaż, że $l_1 \geq l_2 + 2$. Opisz drzewa dla których zachodzi równość.

TODO.