Naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia

Stanisław Lewanowicz

Listopad 2009 r.

1. Naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia
2. Przykłady
3. Ekstremalna własność NFSI3
4. Oszacowanie błędu

Definicja 1. Niech będą **dane:** n, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i funkcja f.

Naturalną funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia (w skrócie **NFSI3**) nazywamy funkcję s, o własnościach

1. s, s' i s'' są ciągłe w $[a, b]$,
2. dla $k = 1, 2, \ldots, n$ funkcja s jest w przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ identyczna z pewnym wielomianem π_k, stopnia co najwyżej trzeciego:
$$s(x) = \pi_k(x) \qquad (x \in [x_{k-1}, x_k]),$$
3. $s(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$,
4. $s''(a) = s''(b) = 0$.

Twierdzenie 1. Dla dowolnych danych: $n \in \mathbf{N}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i funkcji f istnieje dokładnie jedna naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia s. W każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zachodzi wzór

$$\begin{aligned} s(x) = & h_k^{-1} \left[\frac{1}{6} M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 \right. \\ & \left. + \left(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2 \right)(x_k - x) + \left(f(x_k) - \frac{1}{6} M_k h_k^2 \right)(x - x_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

Momenty

$$M_k := s''(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ M_0 = M_n = 0)$$

spełniają układ równań liniowych

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, ..., n-1), \tag{1.1}$$

gdzie $\quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}, \quad d_k := 6 f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$.

Lemat 1. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times m}$ będzie *macierzą z dominującą przekątną*, tj. taką, że

$$|a_{kk}| > \sum_{l=1, l \neq k}^{m} |a_{kl}| \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Wówczas A jest macierzą nieosobliwą.

Lemat 2. Macierz układu równań dla momentów,

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 2 & 1-\lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą z dominującą przekątną, a więc jest nieosobliwa.

Wniosek. Układ (1.1) ma jedyne rozwiązanie $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Algorytm 1. [Rozwiązanie układu równań dla momentów] Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1,\ p_2, \ldots, p_{n-1},\ q_0,\ q_1, \ldots, q_{n-1}$, oraz $u_0,\ u_1, \ldots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$q_0 := u_0 := 0,$$

$$\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Wówczas

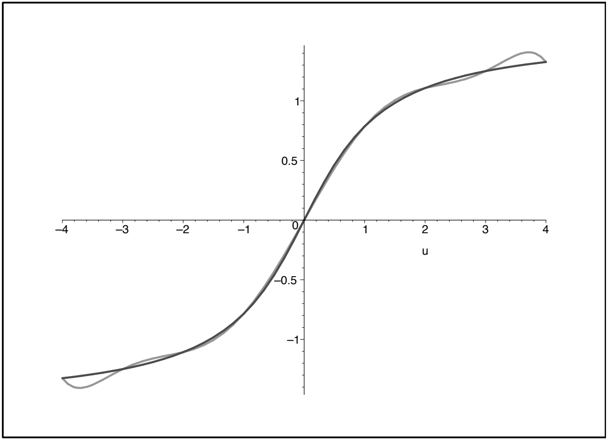
$$M_{n-1} = u_{n-1},$$

$$M_k = u_k + q_k M_{k+1} \qquad (k = n-2, n-3, \ldots, 1).$$

Funkcja arctg – węzły równoodległe

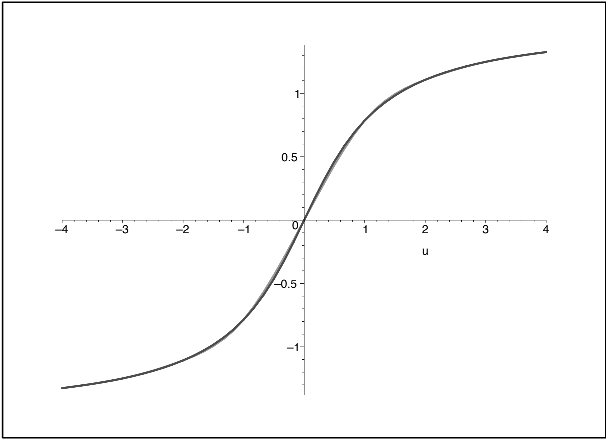
$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad (-4 \le x \le 4); \qquad x_k = k - 4 \quad (k = 0, 1, \ldots, 8)$$

Funkcja arctg – węzły równoodległe



Wielomian L_8 i $\operatorname{arctg} x$

Funkcja arctg – węzły równoodległe

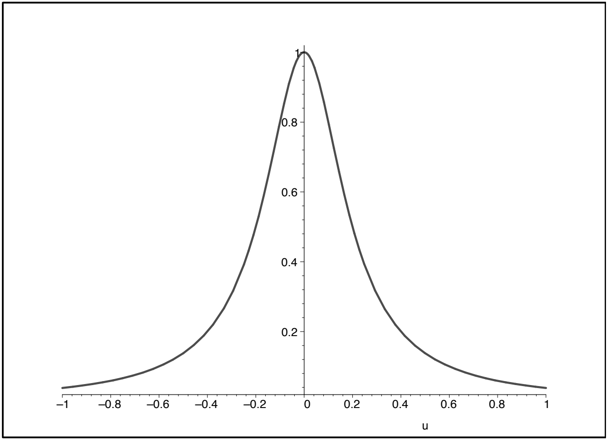


NFSI3 i $\operatorname{arctg} x$

Funkcja Rungego – węzły równoodległe

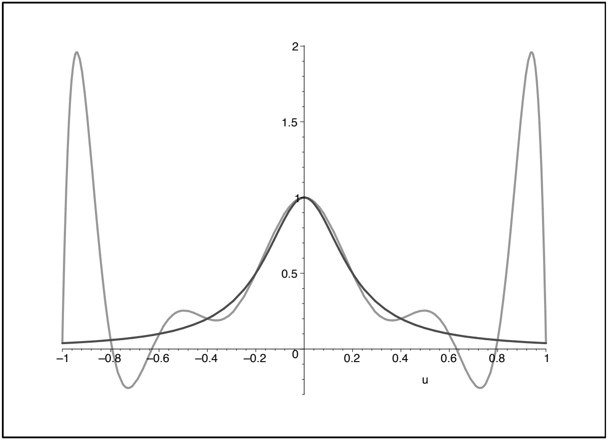
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad (-1 \le x \le 1); \qquad x_k = -1 + \frac{2k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



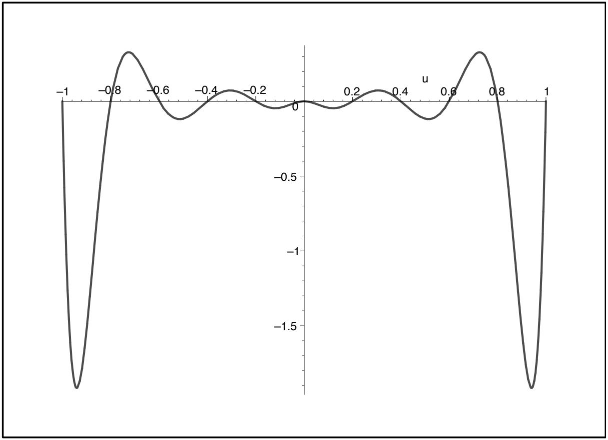
Funkcja Rungego

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



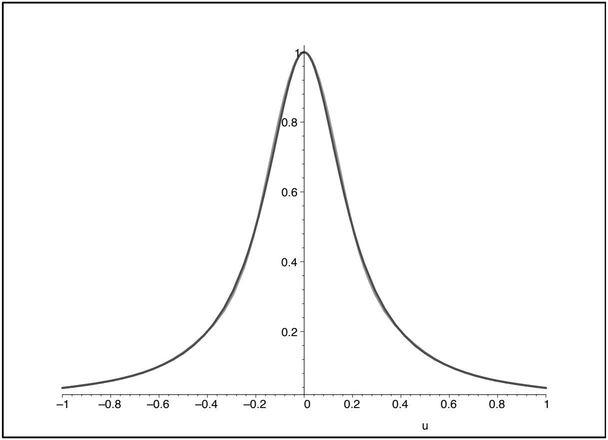
Wypadek $n = 10$: wielomian L_n i funkcja Rungego

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



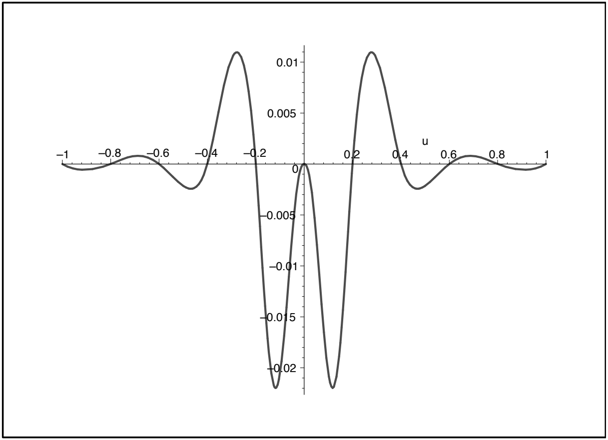
Funkcja błędu $R_{10} = f - L_{10}$

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



Wypadek $n = 10$: NFSI3 i funcja Rungego

Funkcja Rungego – węzły równoodległe



Wypadek $n = 10$: funkcja błędu $f - NFSI3$

Twierdzenie 2 [Holladay] Niech f będzie ustaloną funkcją określoną w przedziale $[a, b]$. W klasie funkcji F mających ciągłą drugą pochodną w przedziale $[a, b]$ i takich, że

$$F(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b [F''(x)]^2 \, dx$$

daje NFSI3 $s(x)$ i tylko ona. Przy tym zachodzi wzór

$$\int_a^b [s''(x)]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k.$$

Twierdzenie 3. Niech będzie dana funkcja $f \in C^3[a, b]$. Dla danej liczby naturalnej n niech s będzie naturalną funkcją sklejaną III stopnia interpolującą funkcję f w danych węzłach $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Wówczas

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)| \le \frac{5}{384} h^4 \max_{a \le x \le b} |f(x)|,$$

$$\max_{a \le x \le b} |f'(x) - s'(x)| \le \frac{1}{24} h^3 \max_{a \le x \le b} |f'(x)|,$$

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x) - s''(x)| \le \frac{3}{8} h^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|,$$

gdzie

$$h := \max_i h_i, \qquad h_i := x_i - x_{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Przykład

W wypadku funkcji Rungego $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$ $(-1 \le x \le 1)$
i równoodległych węzłów uzyskano następujące wyniki:

n	10	20	40	80	160
h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.0125
$\max\limits_{-1\le x\le 1} \lvert f(x) - s(x)\rvert$	0.022	0.0032	$2.77 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	$9.63 \cdot 10^{-7}$

Uwagi

1. Wielomian interpolacyjny $L_n(x)$ i funkcję sklejaną $s(x)$ otrzymujemy na podstawie tej samej informacji: n, $x_0, \ldots, x_n$ oraz $f(x_0), \ldots, f(x_n)$.
2. Inaczej niż w wypadku wielomianu $L_n(x)$, duża wartość n nie stanowi żadnego ograniczenia w konstrukcji i użyciu funkcji sklejanej $s(x)$.
3. Wykres funkcji sklejanej $s(x)$ jest zwykle zdecydowanie lepiej dopasowany do wykresu funkcji $f(x)$ niż wykres wielomianu $L_n(x)$ (**twierdzenie Holladaya!**).