Przykład złego uwarunkowania zadania: Zera „perfidnego” wielomianu Wilkinsona

Stanisław Lewanowicz

14 października 2007 r.

Definicja 1. Jeśli niewielkie względne zmiany danych zadania powodują duże względne zmiany jego rozwiązania, to takie zadanie nazywamy ***źle uwarunkowanym***.

Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na odkształcenia rozwiązania nazywamy ***wskaźnikami uwarunkowania zadania***.

Wielomian

$$w(x) = a_0x^{20} + a_1x^{19} + \ldots + a_{20}, \tag{1}$$

gdzie

k	a_k	k	a_k
0	1		
1	−210	11	−10 14229 98655 11450
2	20615	12	63 03081 20992 94896
3	−12 56850	13	−311 33364 31613 90640
4	533 27946	14	1206 64780 37803 73360
5	−16722 80820	15	−3599 97951 79476 07200
6	4 01717 71630	16	8037 81182 26450 51776
7	−75 61111 84500	17	−12870 93124 51509 88800
8	1131 02769 85381	18	13803 75975 36407 04000
9	−13558 51828 99530	19	−8752 94803 67616 00000
10	1 30753 50105 40395	20	2432 90200 81766 40000

nazywany ***„perfidnym" wielomianem Wilkinsona***, ma zera równe $1, 2, \ldots, 20$.

Rozważmy wielomian

$$w_\varepsilon(x) := w(x) - \varepsilon x^{19} = \tag{2}$$

$$= a_0x^{20} + (a_1 - \varepsilon)x^{19} + a_2x^{18} \ldots + a_{19}x + a_{20},$$

gdzie ε jest ***małą liczbą dodatnią***. Oczywiście jest

$$a_1 - \varepsilon = a_1(1 + \delta),$$

gdzie

$$\delta = -\frac{\varepsilon}{a_1} = \frac{\varepsilon}{210}.$$

Zobaczmy, jak – niewielka przecież – zmiana jednego tylko współczynnika wielomianu (1) wpływa na położenie jego pierwiastków.

Połóżmy najpierw

$$\varepsilon = 2^{-55} \approx 2.8 \cdot 10^{-17}; \quad \text{wówczas} \quad \delta = 2^{-55}/210 \approx 1.3 \cdot 10^{-19}.$$

Wielomian w_ε ma 20 pierwiastków rzeczywistych, niewiele różniących się od odpowiednich pierwiastków wielomianu w).

Dokładne pierwiastki wielomianu w_ε dla $\varepsilon = 2^{-55}$

1.00000 0000	6.00000 0000	10.99999 9999	16.00000 0067
2.00000 0000	7.00000 0000	12.00000 0006	16.99999 9947
3.00000 0000	8.00000 0000	12.99999 9983	18.00000 0028
4.00000 0000	9.00000 0000	14.00000 0037	18.99999 9991
5.00000 0000	10.00000 0000	14.99999 9941	20.00000 0001

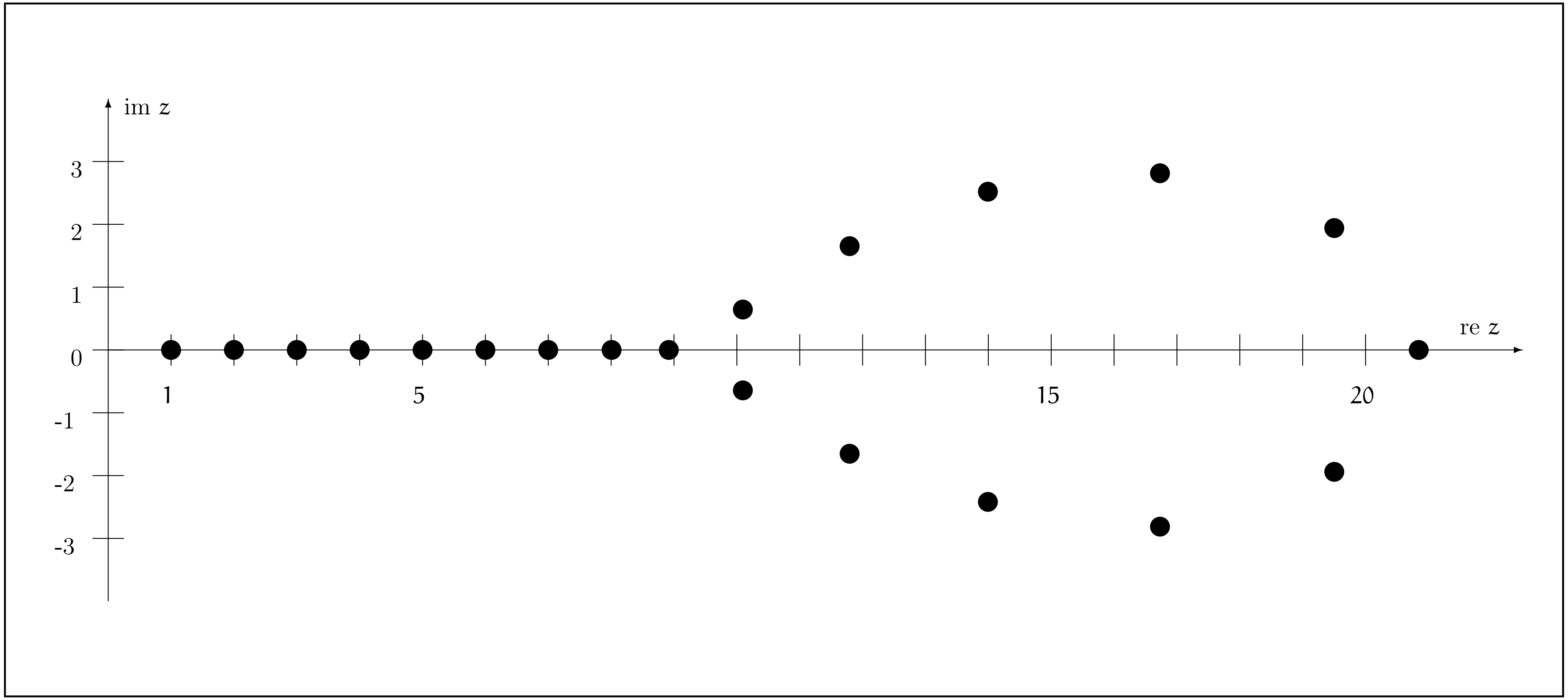
Sytuacja zmienia się dramatycznie dla

$$\varepsilon = 2^{-23} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}; \quad \text{wówczas} \quad \delta = 2^{-23}/210 \approx 5.7 \cdot 10^{-10}.$$

Wielomian (2) ma w tym wypadku tylko 10 pierwiastków rzeczywistych; ponadto pojawia się ***5 par pierwiastków zespolonych***!

Dokładne pierwiastki wielomianu w_ε dla $\varepsilon = 2^{-23}$

1.00000 0000	10.09526 6145 ± 0.64350 0904i
2.00000 0000	11.79363 3881 ± 1.65232 9728i
3.00000 0000	13.99235 8137 ± 2.51883 0070i
4.00000 0000	16.73073 7466 ± 2.81262 4894i
4.99999 9928	19.50243 9400 ± 1.94033 0347i
6.00000 6944	
6.99969 7234	
8.00726 7603	
8.91725 0249	
20.84690 8101	



Rozkład pierwiastków $w_\varepsilon(x)$ *dla* $\varepsilon = 2^{-23}$

Próba analizy

Niech r będzie jednym z pierwiastków wielomianu (1), a $r+h$ – odpowiadającym mu pierwiastkiem wielomianu w_ε (zob. (2)):

$$w_\epsilon(r+h) = w(r+h) - \epsilon p(r+h) = 0,$$

gdzie $p(x) := x^{19}$. Stosując rozwinięcie Taylora, dostajemy

$$[w(r) + hw'(r) + \frac{1}{2}h^2 w''(\xi)] - \varepsilon[p(r) + hp'(r) + \frac{1}{2}h^2 p''(\eta)] = 0.$$

Odrzucając składniki zawierające h^2 i biorąc pod uwagę $w(r) = 0$, mamy

$$h \approx \frac{\varepsilon p(r)}{w'(r) - \varepsilon p'(r)} \approx \frac{\varepsilon p(r)}{w'(r)},$$

stąd

$$|h| \approx K_r \, \varepsilon,$$

gdzie

$$K_r := \left| \frac{p(r)}{w'(r)} \right|$$

jest ***r-tym wskaźnikiem uwarunkowania***.

Dla przykładu,

$$K_1 = \left|\frac{p(1)}{w'(1)}\right| = \frac{1}{19!} \approx 8.2 \cdot 10^{-18};$$

$$K_{20} = \left|\frac{p(20)}{w'(20)}\right| = \frac{20^{19}}{19!} \approx 4.3 \cdot 10^{7}.$$

Oznacza to, że

1. zadanie obliczania pierwiastka 1 jest **dobrze** uwarunkowane;
2. zadanie obliczania pierwiastka 20 jest **źle** uwarunkowane.
   Np. dla $\varepsilon = 2^{-55} = 2.8 \cdot 10^{-17}$ jest $h \approx 10^{-9}$, natomiast dla $\varepsilon = 2^{-23} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$ zmiana rozwiązania h może być rzędu 5.