

## Spis treści

<b>Przegląd podstawowych zagadnień związanych z wielomianami</b>	<b>1</b>
Postawowe definicje . . . . .	1
Postać iloczynowa wielomianu i dzielenie wielomianu . . . . .	2
Pochodna wielomianu i jej obliczanie . . . . .	2
<b>Metoda Newtona oraz wielowymiarowa metoda Newtona</b>	<b>2</b>
Opis klasycznej metody Newtona . . . . .	2
Zastosowanie klasycznej metody Newtona do szukania zer wielomianu . . . . .	3
Metoda Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych . . . . .	3
Metoda Newtona dla funkcji zespolonych . . . . .	4
<b>Wybrane metody wyszukiwania miejsc zerowych wielomianu</b>	<b>5</b>
Metoda Laguerre’a . . . . .	5
Metoda Mullera . . . . .	6
<b>Metoda Bairstowa</b>	<b>6</b>
<b>Testy numeryczne</b>	<b>6</b>

## Przegląd podstawowych zagadnień związanych z wielomianami

### Postawowe definicje

**Definicja 1.** *Wielomianem stopnia  $n \in \mathbb{N}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  będziemy nazywać przekształcenie  $\mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}$  zadane wzorem  $W(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , gdzie  $a_i$  to pewne współczynniki z ciała  $\mathbb{K}$ .*

**Definicja 2.** *Niech  $W$  będzie pewnym wielomianem (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ). Liczbę  $a$ , taką że  $W(a) = 0$ , będziemy nazywać pierwiastkiem wielomianu.*

**Uwaga 1.** *Z faktu, że wielomian  $W$  ma współczynniki z ciała  $\mathbb{K}$ , nie wynika fakt, że jego pierwiastki również będą należeć do  $\mathbb{K}$ . Klasycznym przykładem jest wielomian  $x^2 + 1$ , który ma współczynniki rzeczywiste, a jego pierwiastkami są liczby zespolone.*

**Uwaga 2.** *Istnieją takie ciała  $\mathbb{K}$ , że dla dowolnego wielomianu stopnia większego od 0 wszystkie jego pierwiastki należą do  $\mathbb{K}$ . Ciała takie będziemy nazywać algebraicznie domkniętymi. Przykładem takiego ciała jest  $\mathbb{C}$ , czego nie będziemy dowodzić.*

Podczas całego tego sprawozdania będziemy zajmować się następującym problemem:

#### Problem znajdowania miejsc zerowych wielomianu

Niech  $W$  będzie wielomianem. Celem jest znaleźć zbiór  $\ker(W) = \{a \mid W(a) = 0\}$ .

Powyższy problem, choć pozornie prosty, jest sformułowany bardzo ogólnie. Na potrzeby tej pracy od tej pory ograniczymy się tylko do  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{C}$ , choć nic nie staje na przeszkodzie by poeksperymentować z innymi ciałami. Aktualnie nie wiemy czy każdy wielomian ma pierwiastki, a jeśli ma to czy ich zbiór jest skończony. Nie znamy również żadnych metod rozwiązywania  $W(x) = 0$ . By lepiej zrozumieć podane zagadnienie przejdźmy przez ciąg różnych definicji, algorytmów, twierdzeń i lematów związanych z wielomianami (warto je zrozumieć, gdyż kolejne rozdziały będą z nich korzystać).

**Twierdzenie 1.** *Każdy wielomian  $W(x)$  nad  $\mathbb{C}$  stopnia  $n \in \mathbb{N}_+$  ma co najmniej jeden pierwiastek.*

*Dowód.* To twierdzenie jest nazywane zasadniczym twierdzeniem algebry. Dowód [1] s. 105. □

**Wniosek 1.**  $|\ker(W)| \leq n$ , gdzie  $n$  to stopień wielomianu  $W$ .

## Postać iloczynowa wielomianu i dzielenie wielomianu

**Definicja 3.** Wielomian  $W(x)$  nazywamy podzielny przez wielomian  $P(x)$ , różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian  $Q(x)$ , że  $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$ . Wielomian  $Q(x)$  nazywamy ilorazem wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$ . Mówimy, że wielomian  $P(x)$  jest dzielnikiem wielomianu  $W(x)$ .

**Definicja 4.** Dowolny wielomian  $W(x)$  możemy zapisać jako  $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$  dla pewnych wielomianów  $P, Q, R$ . Mówimy, że wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez  $Q(x)$  jeżeli  $R(x) = 0$ .

**Twierdzenie 2.** Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $Q(x) = (x - a)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $W(a) = 0$ .

*Dowód.* W [2] □

Chcielibyśmy umieć w efektywny sposób realizować procedurę dzielenia wielomianu przez jednomiany postaci  $x - a$ . Służy do tego następujący algorytm:

1.  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
2. Niech  $\alpha = a_n$
3. Kolejno dla  $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$  wykonaj  $\alpha := a_k + x\alpha$ .
4. Wynik to  $p(x) = \alpha$ .

Dokładny opis metody oraz jej analizę możemy znaleźć w [3] (s. 103).

## Pochodna wielomianu i jej obliczanie

TUTAJ DODACĆ OPIS DOTYCZĄCY POCHODNYCH I OBLICZANIA ICH DLA WIELOMIANU.

## Metoda Newtona oraz wielowymiarowa metoda Newtona

### Opis klasycznej metody Newtona

Klasyczną metodą Newtona zastosowaną dla pewnego punktu startowego  $p$  oraz funkcji  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  klasy  $C^1$  nazywać będziemy metodę iteracyjną postaci:

$$x_n = \begin{cases} p, & \text{gdy } n = 0 \\ x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Można pokazać, że  $x_n$  zbiega do pewnego pierwiastka funkcji  $f$ . Analizę klasycznej metody Newtona można znaleźć w [3] na stronach 71-81.

## Zastosowanie klasycznej metody Newtona do szukania zer wielomianu

Jeśli mamy wielomian o współczynnikach i pierwiastkach rzeczywistych możemy policzyć jego pierwiastki za pomocą klasycznej metody Newtona. Podstawiamy za  $f$  z poprzedniego opisu nasz wielomian, a  $f'$  to jego pochodna. Po znalezieniu jednego pierwiastka (nazwijmy go  $a$ ) dzielimy nasz wielomian przez  $x - a$  i uruchamiamy program dla otrzymanego wielomianu. Proces kontynuujemy tak długo, aż dojdziemy do wielomianu o stopniu 0.

**Uwaga 3.** Wartość w punkcie wielomianu i jego pochodnej możemy wyznaczyć z pomocą schematu Hornera, który był omówiony wcześniej (w kodzie przykładowym skorzystaliśmy z funkcji bibliotecznych dla większej czytelności).

```
using Polynomials
# W – wielomian, n – stopień wielomianu, p – punkt startowy, eps – dokładność

function klasyczna_metoda_newtona(W, n, p, eps)
    dW = polyint(W)          # oblicza pochodną wielomianu
    x_n = p

    while abs(polyval(W, x_n)) >= eps      # dopóki błąd >= precyzja
        x_n = x_n - (polyval(W, x_n)/polyval(dW, x_n))
    end

    return x_n                # zwróć szukany pierwiastek
end
```

**Uwaga 4.** Powyższa metoda nie nadaje się do obliczania miejsc zerowych wielomianu, którego pierwiastki są zespolone (z powodu tego, że operujemy tutaj na tylko rzeczywistych przybliżeniach  $x_n$ ).

## Metoda Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych

Założmy, że mamy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

gdzie  $f_i \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$ .

Każdą z tych funkcji możemy rozpisać ze wzoru Taylora jako:

$$0 = f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \approx f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Powyższy układ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Aby nieco skrócić ten układ, będziemy go zapisywać jako  $F(X) = -J \cdot H$ . Jeśli macierz  $J$  jest nieosobliwa, to układ ma rozwiązanie w postaci:

$$-J^{-1} \cdot F(X) = H$$

Ostatecznie wzór Newtona dla układu funkcji wielu zmiennych możemy wzorem:

$$X_{k+1} = X_k + H_k = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$$

## Metoda Newtona dla funkcji zespolonych

**Lemat 1.** *Dowolną funkcję analityczną  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  możemy zapisać jako*

$$f(z) = f(x + yi) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $P(x, y) \in \mathbb{R}$ ,  $Q(x, y) \in \mathbb{R}$

**Przykład 1.**

$$f(z) = z^3 - 2z = f(x + iy) = (x + iy)^3 - 2(x + iy) = (x^3 - 3xy^2 - 2x) + i(3x^2y - y^3 - 2y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Niech  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ . Równanie  $f(z) = 0$  możemy sprowadzić do układu równań  $Q(x, y) = 0$  i  $P(x, y) = 0$ . Taki układ równań rozwiązujemy za pomocą metody Newtona dla funkcji wielu zmiennych.

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J^{-1} \begin{pmatrix} P(x_n, y_n) \\ Q(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(x_n, y_n) \\ Q(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Ponieważ wielomian jest funkcją holomorficzną, to zachodzi równanie Cauchy'ego-Riemanna:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Oznaczając  $P = P(x_n, y_n)$ ,  $Q = Q(x_n, y_n)$ ,  $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}(x_n, y_n)$ ,  $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_n, y_n)$  oraz korzystając ze wzoru na macierz odwrotną możemy uprościć wzór na metodę Newtona do postaci:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - \frac{PP_x + QQ_x}{Px^2 + Qx^2} \\ y_n - \frac{PP_y + QQ_y}{Px^2 + Qx^2} \end{pmatrix}$$

```
using MultiPoly
#### a - lista współczynników wielomianu (np. [1,2,3] reprezentuje wielomian 1 + 2x + 3x^2)
# Funkcja dzieląca wielomian przez pierwiastek używając schematu Hornera

function horner(a, x0)
    n = length(a) - 1
    b = Array{Complex{BigFloat}, n}
    b[n] = a[n+1]
    for _k in 0:(n-2)
        i = n - _k
        b[i-1] = a[i] + b[i]*x0
    end
    return b
end
```

```

# W – współczynniki wielomianu jw, n – stopień wielomianu, x0 + i y0 – punkt startowy, eps
function complex_newton(W, n::Int, x0::Float64, y0::Float64, eps::Float64)

    if n == 0
        return
    elseif n == 1
        w = Complex128(-W[1])/Complex128(W[2])
        @printf("%.16lf_+\\t_%.16lf_i\\n_", real(w), imag(w))
        return
    end

    x, y = generators(MPoly{Float64}, :x, :y) # zmienne w wielomianie
    p = zero(MPoly{Complex128})

    for i in 1:(n+1)
        p = p + W[i] * (x+y*im)^(i-1)
    end

    xn = x0; yn = y0; P = real(p); Q = imag(p-P)
    Px = diff(P, :x); Py = diff(P, :y)
    Qx = diff(Q, :x); Qy = diff(Q, :y)

    while( abs( evaluate(p, xn, yn) ) >= eps )
        eP = evaluate(P, xn, yn); eQ = evaluate(Q, xn, yn)
        ePx = evaluate(Px, xn, yn); eQy = evaluate(Qy, xn, yn)
        ePy = evaluate(Py, xn, yn); eQx = evaluate(Qx, xn, yn)
        xn = xn - (eP * ePx + eQ * eQx)/(ePx^2 + eQx^2)
        yn = yn - (eP * ePy + eQ * eQy)/(ePx^2 + eQx^2)
    end

    @printf("%.16lf_+\\t_%.16lf_i\\n_", xn, yn)
    complex_newton(horner(W, complex(xn, yn)), n-1, x0, y0, eps)
end

```

## Wybrane metody wyszukiwania miejsc zerowych wielomianu

### Metoda Laguerre’a

Jedną z metod iteracyjnych wyszukiwania pierwiastków wielomianu używanych w nowoczesnych systemach informatycznych jest metoda Laguerre’a.

Niech  $p(z)$  będzie wielomianem stopnia  $n$ , którego pierwiastki mamy znaleźć. Kolejne kroki w metodzie obliczamy za pomocą następujących wzorów:

$$A = \frac{-p'(z)}{p(z)}, \quad B = A^2 - \frac{p''(z)}{p(z)}, \quad C = \frac{A \pm \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}, \quad z_{\text{nowe}} = z + \frac{1}{C}$$

Metoda Laguerre’a jest bardzo efektywnym algorytmem, ponieważ w okolicach pojedynczego pierwiastka wielomianu  $p$  jest zbieżna sześciennie. Dokładną analizę tej metody pozostawiamy czytelnikowi do przeczytania w [3] (s 112-116).

## Metoda Mullera

Metoda Newtona jest modyfikacją metody stycznych. Zamiast przybliżać nasz wielomian  $f$  funkcją liniową będziemy go aproksymować funkcją kwadratową.

Rozważmy trzy punkt  $x_0, x_1, x_2$  wraz z wartościami funkcji  $f$  w tych punktach. Przyjmujemy, że  $x_2$  jest aktualnym przybliżeniem rozwiązania. Oznaczmy  $z = x - x_2$ ,  $h_0 = x_0 - x_2$ ,  $h_1 = x_1 - x_2$ .

Oznaczmy szukaną parabolę przez  $g(z) = az^2 + bz + c$ . Z definicji paraboli w punkcie  $z = x_k$  dostajemy, że

$$2a = f''(x_k), \quad b = f'(x_k), \quad c = f(x_k),$$

co prowadzi do wzoru

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + \operatorname{sgn}(f'(x_k)) \cdot \sqrt{(f'(x_k))^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}}$$

## Metoda Bairstowa

## Testy numeryczne

## Literatura

- [1] Leja, Franciszek. *Funkcje zespolone*, Warszawa : PWN, 1976
- [2] Aleksiej I., Kostrikin *Wstęp do algebry. Podstawy algebry*, Warszawa : PWN, 2008
- [3] David Kincaid, Ward Cheney *Analiza numeryczna*, Warszawa : WNT, 2006
- [4] Lily Yau, Adi Ben-Israel *The Newton and Halley Methods for Complex Roots*, The American Mathematical Monthly 105(1998), 806–818