DOWODY KOMBINATORYCZNE

1. Oznaczenia

Przypuśćmy, że dany jest zbiór skończony A. Wtedy

$$\begin{aligned} |A| &= \text{liczba elementów zbioru } A, \\ P(A) &= \{B: \ B \subseteq A\}, \\ P_k(A) &= \{B \in P(A): \ |B| = k\}. \end{aligned}$$

W szczególności

$$\begin{aligned} P_0(A) &= \{\varnothing\}, \\ P_1(A) &= \big\{\{a\}: \ a \in A\big\}, \\ P_m(A) &= \{A\}, \end{aligned}$$

gdzie $|A| = m$. Ponadto

$$\begin{aligned} [n] &= \{1, 2, \ldots, n\}, \\ [0] &= \varnothing, \\ [1] &= \{1\}, \\ [2] &= \{1, 2\}, \\ P(n) &= P([n]) = P(\{1, 2, \ldots, n\}), \\ P_k(n) &= P_k([n]) = P_k(\{1, 2, \ldots, n\}), \\ P_k(0) &= P_k(\varnothing). \end{aligned}$$

Będą potrzebne dwie funkcje. Jeśli $1 \leq k \leq n$, to

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Dla $k > n$ przyjmujemy $(n)_k = 0$. Wreszcie

$$n! = (n)_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

oraz $0! = 1$.

2. Reguła dodawania

Zauważmy bez dowodu, że jeśli A i B są zbiorami skończonymi oraz $A \cap B = \varnothing$, to

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ogólnie, jeśli dane są zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Stąd w szczególności mamy:

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)| = \\ &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = \\ &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| + |A \cap B| - |A \cap B| = \\ &= |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| + |(B \setminus A) \cup (A \cap B)| - |A \cap B| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \big(|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|\big) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

W następnym wykładzie zajmiemy się uogólnieniami tych wzorów.

Regułę dodawania możemy wysłowić w następujący sposób. Przypuśćmy, że możemy wykonać n czynności; pierwsza kończy się jednym z m_1 wyników, druga jednym z m_2 wyników i tak dalej, aż do ostatniej, kończącej się jednym z m_n wyników. Zakładamy przy tym, że wszystkie te wyniki są różne, tzn. żadne dwie z tych czynności nie mogą kończyć się tym samym wynikiem. Załóżmy następnie, że mamy wykonać jedną, dowolnie przez nas wybraną czynność. Możemy wtedy otrzymać jeden z $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ wyników.

3. Reguła mnożenia

Zaczniemy od następującej oczywistej równości

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Możemy ją wysłowić w następujący sposób. Przypuśćmy, że mamy do wykonania dwie czynności. Pierwsza kończy się jednym z m wyników, druga jednym z n wyników. Wykonanie obu, jedna po drugiej, zakończy się zatem jednym z $m \cdot n$ możliwych wyników. Przy tym sformułowaniu zakładamy, że niezależnie od wyniku pierwszej czynności, druga kończy się zawsze jednym z n **tych samych** wyników. Inaczej mówiąc, zbiór wyników drugiej czynności jest ustalony; nie zależy od tego, w jaki sposób zakończy się pierwsza czynność.

Zbiór wyników drugiej czynności może jednak zależeć od tego, jak zakończyła się pierwsza czynność. Popatrzmy na przykład. Z talii 52 kart wyciągamy kolejno dwie karty i układamy koło siebie (z zachowaniem kolejności). Pierwszą czynnością jest wyciągnięcie pierwszej karty. Może ona zakończyć się jednym z 52 wyników. Drugą czynnością jest wyciągnięcie drugiej karty. Widzimy, że zbiór możliwych wyników drugiej czynności zależy od tego, jakiej karty już nie ma w talii, czyli od wyniku pierwszej czynności.

Zauważmy jednak, że druga czynność, niezależnie od wyniku pierwszej, zakończy się jednym z 51 wyników, bo niezależnie, od tego, jaką kartę wyciągniemy, w talii pozostanie 51 kart.

Przypuśćmy zatem, że mamy do wykonania dwie czynności. Pierwsza kończy się jednym z m wyników: $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dla każdego x_k zbiór A_k możliwych wyników drugiej czynności ma zawsze n elementów:

$$|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_m| = n.$$

Wykonujemy obie czynności po kolei. Wynikiem będzie para (x, y), gdzie x jest wynikiem pierwszej czynności, a y wynikiem drugiej. Zbiór wyników ma zatem postać:

$$\{(x_k, y):\ k = 1, 2, \ldots, m, y \in A_k\}.$$

Ten zbiór możemy przedstawić w postaci sumy m zbiorów rozłącznych:

$$\{(x_k, y):\ k = 1, 2, \ldots, m, y \in A_k\} =$$
$$= \{(x_1, y):\ y \in A_1\} \cup \{(x_2, y):\ y \in A_2\} \cup \ldots \cup \{(x_m, y):\ y \in A_m\}.$$

Każdy z m zbiorów po prawej stronie ma n elementów, a więc z reguły dodawania wynika, że

$$|\{(x_k, y):\ k = 1, 2, \ldots, m, y \in A_k\}| = m \cdot n.$$

Regułę mnożenia możemy zatem wysłowić w następujący sposób. Mamy do wykonania dwie czynności. Pierwsza kończy się jednym z m wyników. Druga, niezależnie od wyniku pierwszej, kończy się jednym z n wyników (przy czym zbiory wyników drugiej mogą być różne w zależności od wyniku pierwszej). Wykonanie obu czynności po kolei zakończy się wtedy jednym z $m \cdot n$ wyników.

Regułę mnożenia możemy łatwo uogólnić na większą liczbę czynności. Dokładne jej sformułowanie pozostawię jako ćwiczenie.

4. Zliczanie funkcji i podzbiorów

Niech $|A| = m$ i $|B| = n$. Wtedy z reguły mnożenia wynika natychmiast, że

$$|A^B| = m^n.$$

Wartość $f(b)$ dla każdego elementu zbioru B wybieramy bowiem na jeden z m sposobów; tych elementów zbioru B jest n, więc dokonujemy n wyborów.

Podobnie

$$|\{f \in A^B:\ f \text{ jest } 1-1\}| = (m)_n.$$

Znów wybieramy n wartości: pierwszą wartość $f(b)$ wybieramy na jeden z m sposobów, drugą na jeden z $m-1$ sposobów i tak dalej.

Definiujemy **współczynnik dwumianowy** $\binom{m}{n}$ wzorem

$$\binom{m}{n} = |P_n(m)|.$$

5. Permutacje, kombinacje i wariacje

Niech $|A| = m$. Wtedy mamy następujące obiekty kombinatoryczne znane ze szkoły.

1) **Wariacjami n-elementowymi z powtórzeniami ze zbioru** A nazywamy ciągi $(a_1, \ldots, a_2)$ o wyrazach ze zbioru A. Wówczas
$$|\{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_1, \ldots, a_n \in A\}| = |A^{[n]}| = m^n.$$

2) **Wariacjami n-elementowymi bez powtórzeń ze zbioru** A nazywamy ciągi różnowartościowe $(a_1, \ldots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru A. Wówczas
$$|\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^{[n]} : \ a_i \neq a_j \text{ dla } i \neq j\}| = (m)_n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

3) **Permutacjami zbioru** A nazywamy m-elementowe wariacje bez powtórzeń. Wówczas
$$|\{(a_1, \ldots, a_m) \in A^{[m]} : \ a_i \neq a_j \text{ dla } i \neq j\}| = m!$$

4) **Kombinacjami n-elementowymi ze zbioru** A nazywamy n-elementowe podzbiory zbioru A. Wówczas
$$|P_n(A)| = \binom{m}{n}.$$

Zobaczymy teraz jeden ważny przykład występowania kombinacji. Niech będzie dany zbiór C składający się ze wszystkich ciągów długości m o dwóch wyrazach a i b, w których litera a występuje n razy, a litera b występuje $m - n$ razy. Otóż wtedy $|C| = \binom{m}{n}$. Każdy taki ciąg jest bowiem jednoznacznie wyznaczony przez wskazanie, które spośród m wyrazów są literami a; pozostałe są równe b. Wskazać te n wyrazów możemy właśnie na $\binom{m}{n}$ sposobów. W szczególności istnieje $\binom{m+n}{m}$ ciągów, w których jest dokładnie m wyrazów równych a i n wyrazów równych b.

Oprócz powyższych obiektów znanych ze szkoły zdefiniujemy teraz **kombinacje z powtórzeniami**. Kombinacje wskazują, które elementy zbioru A zostały wybrane, bez uwzględnienia kolejności, w jakiej te elementy były wybierane. Kombinacje z powtórzeniami wskazują ponadto, że elementy zbioru A mogły być wybrane wielokrotnie, przy czy nadal nie wskazujemy kolejności wybierania. Pokażemy teraz dwa sposoby definiowania takich kombinacji z powtórzeniami. Możemy przedstawiać je jako funkcje $c : A \to \mathbb{N}$, gdzie liczba $c(a)$ wskazuje, ile razy element a został wybrany. Zatem **kombinacjami n-elementowymi z powtórzeniami ze zbioru** A nazywamy funkcje $c : A \to \mathbb{N}$ takie, że
$$\sum_{a \in A} c(a) = n.$$

Popatrzmy na przykład. Niech $A = \{p, q, r, s, t\}$ będzie zbiorem pięcioelementowym. Funkcja $c : A \to \mathbb{N}$ określona w następujący sposób
$$c(p) = 3, \quad c(q) = 2, \quad c(r) = 1, \quad c(s) = 1, \quad c(t) = 0$$

jest kombinacją, w której element p został wybrany 3 razy, element q został wybrany 2 razy, elementy r i s po jednym razie i wreszcie element t ani razu. Tę kombinację z powtórzeniami moglibyśmy zatem zapisać w postaci ciągu $pppqqrs$. Taki właśnie sposób zapisu kombinacji z powtórzeniami będzie podstawą innej definicji. Ten drugi sposób definiowania kombinacji z powtórzeniami wymaga uporządkowania najpierw zbioru A. Przyjmijmy, że

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}.$$

Kombinacją n-elementową z powtórzeniami ze zbioru A nazwiemy teraz dowolny ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elementów zbioru A, w którym dla dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots, m$, jeśli $i < j$, to wszystkie wyrazy równe a_i występują przez wszystkimi wyrazami równymi a_j. Inaczej mówiąc, w takim ciągu najpierw występuje blok wartości a_1, potem blok wartości a_2 i tak dalej aż do ostatniego bloku wartości a_m; może się zdarzyć, że niektóre z tych bloków będą puste. W naszym przykładzie zbioru $A = \{p, q, r, s, t\}$ takie ciągi będą składać się z bloku liter p na początku, potem będą występować kolejno bloki liter q, r i s i wreszcie na końcu znajdzie się blok liter t. Przypominamy, że niektóre z tych bloków mogą być puste. Widzieliśmy wyżej przykład takiego ciągu: $pppqqrs$. W tym ciągu mieliśmy najpierw blok trzech liter p, następnie blok dwóch liter q, po nim dwa bloki jednoliterowe liter r i s i wreszcie na końcu pusty blok liter t.

Zajmiemy się teraz zliczaniem kombinacji z powtórzeniami. Zaczniemy od przykładu. Niech $|A| = 5$ i $n = 7$. Zliczamy zatem kombinacje siedmioelementowe z powtórzeniami z pięcioelementowego zbioru A. Uporządkujmy elementy zbioru A:

$$A = \{p, q, r, s, t\}.$$

Weźmy znany nam przykład kombinacji z powtórzeniami zapisanej w postaci ciągu: $pppqqrs$. Oddzielmy pionowymi kreskami bloki liter:

$$p\ p\ p \mid q\ q \mid r \mid s \mid$$

Zwracamy uwagę na kreskę na końcu. Oddziela ona jednoliterowy blok s od pustego bloku liter t. Teraz możemy zauważyć, że nie jest już potrzebne pisanie liter. Wiemy bowiem, że w pierwszym bloku muszą wystąpić litery p, w drugim litery q i tak dalej. Istotne jest tylko zaznaczenie, ile liter jest w każdym bloku. Rysujemy zatem kropki w miejscu liter. Narysujemy więc 7 kropek, oznaczających elementy wybrane podzielonych czterema pionowymi kreskami na pięć części. Wskażemy tym samym, które kropki oznaczają kolejne elementy zbioru A. W naszym przykładzie otrzymamy następujący ciąg kropek i kresek

$$\bullet\ \bullet\ \bullet \mid \bullet\,\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid$$

oznaczający, że element p został wybrany 3 razy (przed pierszą kreską są 3 kropki), element q został wybrany 2 razy (między pierwszą i drugą kreską są 2 kropki), elementy r i s zostały wybrane po jednym razie (między kolejnymi kreskami jest jedna kropka), wreszcie element t nie został wybrany ani razu (za ostanią, czwartą kreską nie ma ani jednej kropki). Podobnie zapis

$$\bullet\,\bullet \mid \mid \mid \bullet\ \bullet\ \bullet\,\bullet \mid \bullet$$

oznacza, że element p został wybrany 2 razy, elemeny q i r ani razu, element s został wybrany 4 razy i element t jeden raz. Każdy ciąg siedmiu kropek i czterech kresek odpowiada dokładnie jednej kombinacji z powtórzeniami. Mamy zatem łącznie 11 symboli: 7 kropek i 4 kreski. Z powyższych rozważań dotyczących kombinacji wynika, że istnieje $\binom{11}{4}$ różnych ciągów złożonych z 7 kropek i 4 kresek.

W ogólności mamy n kropek (wybieramy n elementów) i $m-1$ kresek (dzielą one kropki na m bloków odpowiadających m elementom zbioru A). Mamy zatem $\binom{m+n-1}{m-1}$ ciągów n kropek i $m-1$ kresek i tyle jest n-elementowych kombinacji z powtórzeniami z m-elementowego zbioru A.

Zwróćmy uwagę na dwie rzeczy. Po pierwsze, sposób kodowania kombinacji z powtórzeniami za pomocą ciągu kropek i kresek zależy od uporządkowania zbioru A. Przy innym uporządkowaniu ten sam ciąg będzie na ogół oznaczał inną kombinację. Po drugie, jeśli naszym zbiorem A jest zbiór $[m]$ z naturalnym uporządkowaniem, to kombinację z powtórzeniami możemy przedstawić jako ciąg liczb od 1 do m, w którym najpierw występują wyrazy równe 1, potem wyrazy równe 2 i tak dalej. Inaczej mówiąc, taką kombinację możemy zapisać w postaci ciągu niemalejącego długości n o wyrazach ze zbioru $[m]$. Stąd wynika, że istnieje $\binom{m+n-1}{m-1}$ niemalejących ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $[m]$. Z tego wniosku kilkakrotnie dalej skorzystamy.

6. Podstawowe własności współczynników dwumianowych

Przypominamy, że

$$\binom{m}{n} = |P_n(A)|,$$

gdzie $|A| = m$. Oczywiście dla $n > m$ mamy $P_n(A) = \varnothing$, czyli $\binom{m}{n} = 0$ dla $n > m$. Przyjmujemy ponadto, że $\binom{m}{n} = 0$ dla $n < 0$.

Zauważmy następnie, że

$$P_0(A) = \{\varnothing\} \quad \text{oraz} \quad P_m(A) = \{A\}.$$

Zatem

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1. \tag{1.1}$$

Niech teraz $0 < n \leq m$. Udowodnimy, że

$$n \cdot \binom{m}{n} = m \cdot \binom{m-1}{n-1}.$$

Niech $|A| = m$. Rozpatrujemy zbiór

$$B = \{(a, N) : \ a \in N \in P_n(A)\}.$$

Zliczamy dwoma sposobami elementy zbioru B. Po pierwsze

$$B = \bigcup_{N \in P_n(A)} \{(a, N) : \ a \in N\},$$

przy czym sumowane zbiory są rozłączne dla różnych N. Z reguły dodawania mamy zatem

$$|B| = \sum_{N \in P_n(A)} |\{(a, N) :\ a \in N\}| = \sum_{N \in P_n(A)} n = n \cdot \binom{m}{n}.$$

Z drugiej strony

$$B = \bigcup_{a \in A} \{(a, N) :\ a \in N \in P_n(A)\},$$

przy czym znów sumowane zbiory są rozłączne (tym razem dla różnych a). Zatem

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{a \in A} |\{(a, N) :\ a \in N \in P_n(A)\}| = \\
&= \sum_{a \in A} |\{(a, \{a\} \cup K) :\ K \in P_{n-1}(A \setminus \{a\})\}| = \\
&= \sum_{a \in A} |\{(a, K) :\ K \in P_{n-1}(A \setminus \{a\})\}| = \\
&= \sum_{a \in A} \binom{m-1}{n-1} = \\
&= m \cdot \binom{m-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Ponieważ liczba elementów zbioru skończonego nie zależy od sposobu zliczania tych elementów, więc otrzymujemy równość

$$n \cdot \binom{m}{n} = m \cdot \binom{m-1}{n-1}, \tag{1.2}$$

z której otrzymujemy

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{n} \cdot \binom{m-1}{n-1}. \tag{1.3}$$

Zazwyczaj nie przedstawiamy dowodów tożsamości kombinatorycznych w sposób tak sformalizowany. Przedstawiamy natomiast „historyjkę”, którą można łatwo sformalizować i którą traktujemy jako dowód. Jest to tzw. **dowód kombinatoryczny**. A oto przykład historyjki będącej dowodem tożsamości (1.2).

Przypuśćmy, że w naszej firmie pracuje m osób. Chcemy wybrać spośród nich n osób ($n > 0$), które otrzymają nagrodę oraz chcemy jedną z nagrodzonych osób awansować. Na ile sposobów możemy tego dokonać?

Po pierwsze wybieramy osoby do nagrody. Możemy to zrobić na $\binom{m}{n}$ sposobów. Następnie wśród wybranych osób wskazujemy osobę przeznaczoną do awansu. Możemy to zrobić na n sposobów. Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $n \cdot \binom{m}{n}$ sposobów łącznego wyboru.

Możemy także wybrać najpierw osobę do awansu: mamy m możliwości. Tę osobę także nagradzamy, mamy więc już jedną osobę nagrodzoną. Spośród pozostałych $m - 1$ osób dobieramy jeszcze $n-1$ osób do nagrody; możemy to zrobić na $\binom{m-1}{n-1}$ sposobów. Z reguły mnożenia wynika, że mamy łącznie $m \cdot \binom{m-1}{n-1}$ sposobów wyboru.

Wreszcie, tak jak poprzednio, stwierdzamy, że liczba sposobów wyboru nie zależy od metody zliczania. Otrzymujemy zatem równość (1.2):

$$n \cdot \binom{m}{n} = m \cdot \binom{m-1}{n-1}, \tag{1.2}$$

co kończy dowód.

Tożsamość (1.3) pozwala obliczać współczynniki dwumianowe. Popatrzmy na przykład:

$$\binom{7}{4} = \frac{7}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \binom{3}{0} =$$
$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot 1 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35.$$

Przykład ten uogólniamy w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.1. Jeśli $0 \leq n \leq m$, to

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}. \tag{1.4}$$

Dowód. Stosujemy indukcję względem m. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego n i dla $n = 0$ mamy

$$\binom{m}{0} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

czyli

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!}.$$

W szczególności teza twierdzenia jest prawdziwa dla $m = 0$.

Zakładamy następnie, że dla pewnego m i dowolnego n takiego, że $0 \leq n \leq m$ prawdziwa jest równość

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}.$$

Niech teraz $0 \leq n \leq m+1$. Mamy dowieść, że

$$\binom{m+1}{n} = \frac{(m+1)!}{n! \cdot (m+1-n)!}.$$

Wiemy już, że ta równość jest prawdziwa dla $n = 0$. Niech zatem $n > 0$. Z równości (1.3) otrzymujemy

$$\binom{m+1}{n} = \frac{m+1}{n} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

Ponieważ $0 \leq n-1 \leq m$, więc z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\binom{m}{n-1} = \frac{m!}{(n-1)! \cdot \big(m-(n-1)\big)} = \frac{m!}{(n-1)! \cdot (m+1-n)!}.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}\binom{m+1}{n} &= \frac{m+1}{n} \cdot \frac{m!}{(n-1)! \cdot (m+1-n)!} = \\ &= \frac{m! \cdot (m+1)}{(n-1)! \cdot n \cdot (m+1-n)!} = \\ &= \frac{(m+1)!}{n! \cdot (m+1-n)!},\end{aligned}$$

c. b. d. o.

Twierdzenie 1.1 można udowodnić w inny sposób. Zastanówmy się, jak można utworzyć dowolną permutację ustalonego m-elementowego zbioru A. Wykonujemy trzy czynności: najpierw wybieramy n-elementowy podzbiór B zbioru A, następnie porządkujemy elementy zbioru A, wreszcie porządkujemy elementy zbioru $A \setminus B$, ustawiając je za elementami zbioru B. Nietrudno zauważyć, że w ten sposób każdą permutację zbioru A otrzymamy dokładnie jeden raz. Popatrzmy teraz, ile możliwych wyników da każda z tych trzech czynności. Pierwsza ma $\binom{m}{n}$ możliwych wyników, druga $n!$, trzecia $(m-n)!$ wyników. Z reguły mnożenia otrzymujemy zatem

$$\binom{m}{n} \cdot n! \cdot (m-n)! = m!,$$

czyli

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Pokażemy teraz dowód następującej tożsamości, podobnej do tożsamości (1.2):

$$n \cdot \binom{m}{n} = (m-n+1) \cdot \binom{m}{n-1}. \tag{1.5}$$

Niech $|A| = m$. Znów dwoma sposobami zliczamy elementy zbioru

$$B = \bigcup_{N \in P_n(A)} \{(a, N) : \ a \in N\}.$$

Tak jak poprzednio, zbiór $N \in P_n(A)$ możemy wybrać na $\binom{m}{n}$ sposobów, a jego element a możemy wybrać na n sposobów. To daje łącznie $n \cdot \binom{m}{n}$ par (a, N). Możemy postąpić inaczej. Najpierw wybieramy zbiór $N' \in P_{n-1}(A)$. Możemy to zrobić na $\binom{m}{n-1}$ sposobów. Następnie wybieramy $a \in A \setminus N'$ i przyjmujemy $N = N' \cup \{a\}$. Element a możemy wybrać na $m-n+1$ sposobów, co daje łącznie $(m-n+1)\cdot\binom{m}{n-1}$ par (a,N). W ten sposób równość (1.5) została udowodniona.

Paragraf ten zakończymy dowodem tożsamości będącej naturalnym uogólnieniem tożsamości (1.2). Udowodnimy, że

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k}=\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}. \tag{1.6}$$

Niech M będzie zbiorem m-elementowym. Będziemy zliczać na dwa sposoby elementy zbioru

$$A=\{(N,K):\ K\subseteq N\subseteq M, |K|=k, |N|=n\}.$$

Zbiór N możemy wybrać na $\binom{m}{n}$ sposobów. Następnie jego podzbiór k-elementowy K możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów. To daje łączną liczbę $\binom{m}{n}\binom{n}{k}$ sposobów wyboru.

Możemy jednak wybierać te zbiory w innej kolejności. Najpierw wybieramy zbiór K; mamy $\binom{m}{k}$ sposobów wyboru. Następnie spośród pozostałych $m-k$ elementów zbioru M wybieramy $n-k$ elementów. Łącznie z już wybranymi elementami utworzą one zbiór N. Te $n-k$ elementów możemy wybrać na $\binom{m-k}{n-k}$ sposobów. Łącznie daje to $\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$ sposobów wyboru elementów zbioru A. Znów liczba elementów zbioru A nie zależy od kolejności zliczania, co dowodzi równości (1.6).

Do tego dowodu można ułożyć historyjkę podobną do historyjki w dowodzie tożsamości (1.2). Przypuśćmy, że w naszej firmie nadal pracuje m osób. Chcemy nagrodzić n z nich oraz k nagrodzonych osób awansować. Na ile sposobów możemy to zrobić? Zliczamy te sposoby wyboru dwiema metodami. Najpierw wybieramy osoby do nagrody: na $\binom{m}{n}$ sposobów, następnie spośród nich wybieramy k osób do awansu: na $\binom{n}{k}$ sposobów. To daje lewą stronę równości (1.6). Możemy też najpierw wybrać osoby do awansu (i jednocześnie nagrody): na $\binom{m}{k}$ sposobów, a następnie dobrać brakujące $n-k$ osób do nagrody: na $\binom{m-k}{n-k}$ sposobów. To daje prawą stronę. Zauważmy także, że dla $k=1$ otrzymujemy równość (1.2).

7. Trójkąt Pascala

Ustawmy współczynniki dwumianowe w tablicy:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{0} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{0} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{0} & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Tablicę tę nazywamy **trójkątem Pascala**. Widzimy zasadę umieszczania współczynników dwumianowych w trójkącie Pascala. Liczba m we współczynniku $\binom{m}{n}$ oznacza numer wiersza, przy czym wiersze numerujemy od zera. Liczba n oznacza kolejny numer współczynnika w wierszu, przy czym znów numerujemy miejsca od zera. Zauważmy następnie, że w wierszu o numerze m mamy $m+1$ współczynników numerowanych liczbami n od zera do m. Możemy sobie oczywiście wyobrazić, że wszystkie wiersze są nieskończone i ich wyrazy są numerowane liczbami całkowitymi. Ponieważ $\binom{m}{n} = 0$ dla $n < 0$ i $n > m$, więc wszystkie współczynniki dwumianowe nieuwidocznione w trójkącie Pascala są równe zeru. Inaczej mówiąc, w trójkącie Pascala pokazujemy tylko niezerowe współczynniki dwumianowe.

Pierwsze wiersze trójkąta Pascala wyglądają następująco:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Zbadamy teraz własności trójkąta Pascala.

Zauważmy, że każdy wiersz trójkąta Pascala zaczyna się i kończy jedynką. Wynika to z równości (1.1):

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1.$$

Następnie zauważmy, że każdy wiersz jest symetryczny:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}. \tag{1.7}$$

Wynika to stąd, że jeśli $|A| = m$, to zbiory $P_n(A)$ i $P_{m-n}(A)$ są równoliczne, funkcja $f : P_n(A) \to P_{m-n}(A)$ określona wzorem $f(B) = A \setminus B$ ustala tę równoliczność. Inaczej mówiąc, wybór n elementów ze zbioru A jest tym samym, co odrzucenie pozostałych $m - n$ elementów tego zbioru A.

Wreszcie najważniejsza własność trójkąta Pascala. Każdy współczynnik dwumianowy $\binom{m}{n}$, gdzie $0 < n < m$, jest sumą dwóch współczynników stojących bezpośrednio nad nim. Tę zależność można zapisać wzorem

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}. \tag{1.8}$$

Podamy teraz trzy dowody tego wzoru.

Dowód 1. Korzystamy z równości (1.5) (podstawiając $m-1$ w miejsce m). Mamy zatem

$$n \cdot \binom{m-1}{n} = (m-n) \cdot \binom{m-1}{n-1}.$$

Teraz, korzystając również z równości (1.3), dostajemy

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \frac{m-n}{n} \cdot \binom{m-1}{n-1} = \left(1 + \frac{m-n}{n}\right) \cdot \binom{m-1}{n-1} =$$
$$= \frac{m}{n} \cdot \binom{m-1}{n-1} = \binom{m}{n}.$$

Dowód 2. Korzystamy ze wzoru (1.4). Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n} &= \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-n)!}+\frac{(m-1)!}{n!\cdot(m-n-1)!}= \\
&= \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-n-1)!\cdot(m-n)}+\frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot n\cdot(m-n-1)!}= \\
&= \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-n-1)!}\cdot\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{n}\right)= \\
&= \frac{(m-1)!}{(n-1)!\cdot(m-n-1)!}\cdot\frac{m}{(m-n)n}= \\
&= \frac{(m-1)!\cdot m}{(n-1)!\cdot n\cdot(m-n-1)!\cdot(m-n)}= \\
&= \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}=\binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

Dowód 3. Podamy teraz dowód kombinatoryczny. W naszej firmie, razem z dyrektorem, pracuje m osób. Chcemy, by na konferencję pojechało m osób. Na ile sposobów możemy je wybrać?

Mamy dwa przypadki. W pierwszym przypadku zakładamy, że dyrektor jedzie na konferencję. Wtedy z pozostałych $m-1$ osób musimy wybrać $n-1$ osób. W drugim przypadku zakładamy, że dyrektor nie jedzie na konferencję. Wtedy z pozostałych $m-1$ osób musimy wybrać n osób jadących na konferencję. Z reguły dodawania wynika teraz wzór (1.8).

To rozumowanie można łatwo sformalizować. Mianowicie zauważamy, że

$$P_n(m)=P_n(m-1)\cup\big\{A\cup\{m\}:\ A\in P_{n-1}(m-1)\big\},$$

przy czym zbiory po prawej stronie są rozłączne oraz oczywiście

$$|P_n(m-1)|=\binom{m}{n}\quad\text{oraz}\quad\big|\big\{A\cup\{m\}:\ A\in P_{n-1}(m-1)\big\}\big|=\binom{m-1}{n-1}.$$

Dopiszmy do trójkąta Pascala współczynniki $\binom{m}{n}$ dla $n<0$ i $n>m$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & & \binom{0}{-2} & & \binom{0}{-1} & & \binom{0}{0} & & \binom{0}{1} & & \binom{0}{2} & & \dots \\
& \binom{1}{-2} & & \binom{1}{-1} & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \binom{1}{2} & & \binom{1}{3} & \\
\dots & & \binom{2}{-1} & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \binom{2}{3} & & \dots \\
& \binom{3}{-1} & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{3}{4} & \\
\dots & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \dots \\
& \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}$$

Zauważmy, że w pierwszym wierszu występują same zera z wyjątkiem jednego miejsca:

$$\binom{0}{0}=1.$$

We wszystkich następnych wierszach każdy współczynnik powstaje z położonych nad nim zgodnie ze wzorem (1.8). Dlatego odtąd we wzorze (1.8) nie będziemy przyjmować żadnych założeń o m i n, poza oczywistym założeniem, że $m-1 \geq 0$, czyli $m \geq 1$.

Jeszcze jedną ważną własność trójkąta Pascala otrzymujemy z równości (1.5). Mianowicie z równości

$$n \cdot \binom{m}{n} = (m-n+1) \cdot \binom{m}{n-1} \tag{1.5}$$

wynika, że

$$\binom{m}{n} = \frac{m-n+1}{n} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

Przypuśćmy teraz, że m jest liczbą parzystą: $m = 2p$. Niech teraz $n \leq p$. Wówczas

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{2p+1}{n} - 1 \geq \frac{2n+1}{n} - 1 > \frac{2n}{n} - 1 = 1,$$

skąd wynika, że

$$\binom{m}{n} > \binom{m}{n-1}.$$

Niech teraz $n > p$, czyli $n-1 \geq p$. Wówczas

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{2p+1}{n} - 1 \leq \frac{2(n-1)+1}{n} - 1 = \frac{2n-1}{n} - 1 < \frac{2n}{n} - 1 = 1,$$

skąd wynika, że

$$\binom{m}{n} < \binom{m}{n-1}.$$

Podsumowując, jeśli $m = 2p$, to

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} < \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} < \ldots < \binom{m}{p-1} = \binom{m}{p+1} < \binom{m}{p}.$$

Przypuśćmy taraz, że m jest liczbą nieparzystą: $m = 2p+1$. Niech najpierw $n \leq p$. Wówczas

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{2p+2}{n} - 1 \geq \frac{2n+2}{n} - 1 > \frac{2n}{n} - 1 = 1,$$

skąd wynika, że

$$\frac{m}{n} > \frac{m}{n-1}.$$

Niech następnie $n = p+1$. Wtedy

$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{2p+1-p-1+1}{p+1} = \frac{p+1}{p+1} = 1,$$

skąd wynika, że
$$\binom{m}{p+1} = \binom{m}{p}.$$

Wreszcie niech $n > p+1$, czyli $p < n-1$. Wówczas
$$\frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{2p+2}{n} - 1 < \frac{2(n-1)+2}{n} - 1 = \frac{2n}{n} - 1 = 1,$$

skąd wynika, że
$$\binom{m}{n} < \binom{m}{n-1}.$$

Podsumowując, jeśli $m = 2p+1$, to
$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} < \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} < \ldots < \binom{m}{p-1} = \binom{m}{p+2} < \binom{m}{p} = \binom{m}{p+1}.$$

Paragraf ten zakończymy wzorem na sumę współczynników dwumianowych jednego wiersza trójkąta Pascala:
$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^n. \tag{1.9}$$

Dowód. Zauważmy, że, jeśli $|A| = m$, to
$$P(A) = P_0(A) \cup P_1(A) \cup \ldots \cup P_m(A),$$

przy czym zbiory po prawej stronie są rozłączne oraz
$$P_n(A) = \binom{m}{n}$$

dla $n = 0, 1, \ldots, m$. Równość (1.9) wynika teraz z reguły dodawania.

8. Wzór dwumianowy Newtona

W tym paragrafie podamy dwa dowody wzoru znanego (przynajmniej częściowo) ze szkoły. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.10}$$

Wzór (1.10) nazywamy zazwyczaj **wzorem dwumianowym** Newtona.

Dowód 1. Stosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ mamy
$$P = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1 = L.$$

Przypuśćmy następnie, że dla pewnej liczby naturalnej n równość (1.10) jest prawdziwa:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Mamy udowodnić, że

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Skorzystamy w tym celu z równości (1.8):

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a+b) = \\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k} b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k} b^k,
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Dowód 2. Przyjrzyjmy się lewej stronie:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ czynników}}.$$

Po wymnożeniu czynników w n nawiasach otrzymamy sumę iloczynów: dla każdego wyboru a lub b z kolejnego czynnika otrzymamy jeden składnik sumy. Mamy zatem łącznie 2^n składników; każdy z nich jest postaci $a^{n-k}b^k$ dla pewnego k. Składnik $a^{n-k}b^k$ powstaje w wyniku wyboru b z k czynników $a+b$; z pozostałych $n-k$ czynników wybieramy a. Ponieważ mamy $\binom{n}{k}$ możliwości k wyborów b z n czynników $a+b$, więc składnik $a^{n-k}b^k$ pojawi się $\binom{n}{k}$ razy w naszej sumie. Zatem po uproszczeniu jednomian $a^{n-k}b^k$ wystąpi ze współczynnikiem $\binom{n}{k}$. Ponieważ k jest oczywiście jedną z liczb od 1 do n, więc ostatecznie otrzymujemy sumę występującą po prwej stronie wzoru (1.10), c. b. d. o.

9. Cztery dowody jednej tożsamości

W tym paragrafie udowodnimy następującą tożsamość dla $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}. \tag{1.11}$$

Podamy cztery dowody tej tożsamości.

Dowód 1. Skorzystamy najpierw ze wzoru (1.2). Wiemy, że:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}.$$

Teraz wystarczy skorzystać z równości (1.9):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1},$$

skąd wynika równość (1.11).

Dowód 2. Prowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n. Niech najpierw $n = 1$. Mamy wtedy

$$\sum_{k=0}^{1} k \cdot \binom{1}{k} = 0 \cdot \binom{1}{0} + 1 \cdot \binom{1}{1} = 1$$

oraz

$$1 \cdot 2^{1-1} = 1,$$

co dowodzi, że wzór (1.11) jest prawdziwy dla $n = 1$.

Załóżmy teraz, że równość (1.11) jest prawdziwa dla pewnej liczby n. Wykażemy, że jest ona też prawdziwa dla liczby $n + 1$. Mamy zatem udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot \binom{n+1}{k} = (n+1) \cdot 2^n.$$

W dowodzie skorzystamy ze wzoru (1.8):

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

A oto obliczenia:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k\cdot\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n+1}{k} + n + 1 = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k-1} + n + 1 = \\
&= n\cdot 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot\binom{n}{k} + n + 1 = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k\cdot\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + n\cdot 2^{n-1} + n + 1 = \\
&= n\cdot 2^{n-1} - n + 2^n - 1 + n\cdot 2^{n-1} + n + 1 = \\
&= (n+1)\cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Dowód 3. Skorzystamy z prostego wniosku ze wzoru dwumianowego Newtona. Mianowicie dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k.$$

Po obu stronach znaku równości mamy więc dwie funkcje, których wartości w każdym punkcie są równe. Są to wielomiany, a więc funkcje różniczkowalne. Ich pochodne są więc też równe. Popatrzmy więc na te pochodne:

$$\big((1+x)^n\big)' = n\cdot(1+x)^{n-1}$$

oraz

$$\left(1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k}\cdot x^{k-1}.$$

Zatem mamy równość

$$n\cdot(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k}\cdot x^{k-1},$$

w której wystarczy podstawić $x = 1$.

Dowód 4. Jest to dowód kombinatoryczny. Zauważmy najpierw, że wzór (1.11) można zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}. \tag{1.11}$$

Przypuśćmy zatem, że w naszej firmie pracuje n osób. Chcemy nagrodzić pewne osoby i jedną z nagrodzonych osób dodatkowo chcemy awansować. Na ile sposobów możemy to uczynić?

Różne wybory tych osób będziemy zliczać dwiema metodami. Po pierwsze, możemy najpierw zdecydować, ile osób nagradzamy, potem wybrać osoby, które nagrodzimy i na końcu wybierzemy jedną z tych nagrodzonych osób, by ją awansować. Przypuśćmy więc, że zdecydowaliśmy się nagrodzić k osób. Oczywiście k jest jedną z liczb od 0 (gdy nikogo nie chcemy nagrodzić) do n (gdy chcemy nagrodzić wszystkich). Osoby do nagrody możemy teraz wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów. Przy każdym takim wyborze jedną osobę do awansu możemy wybrać na k sposobów. Dla danej liczby k mamy więc $k \cdot \binom{n}{k}$ sposobów wykonania zadania. Liczba wszystkich sposobów jest zatem równa

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}.$$

Możemy też popatrzeć na to samo zadanie z drugiej strony. Najpierw wybierzmy jedną osobę do awansu, a potem z pozostałych $n-1$ osób wybierzmy niektóre do nagrody. Tę jedną osobę do awansu możemy oczywiście wybrać na n sposobów. A pewną liczbę pozostałych osób do nagrody możemy wybrać na 2^{n-1} sposobów – bo tyle jest podzbiorów zbioru liczącego $n-1$ elementów. Łącznie mamy $n \cdot 2^{n-1}$ sposobów wykonania zadania. To kończy dowód równości (1.11).

10. Tożsamość Cauchy'ego (tożsamość Vandermonde'a)

W tym paragrafie udowodnimy tożsamość, z której kilkakrotnie skorzystamy w dalszym ciągu. Udowodnimy mianowicie, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n i k zachodzi równość

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}. \tag{1.12}$$

Tożsamość (1.12) nosi nazwę **tożsamości Cauchy'ego** (lub **tożsamości Vandermonde'a**). Pokażemy teraz trzy dowody tożsamości Cauchy'ego.

Dowód 1. Zastosujemy indukcję względem m. Pokażemy, że jeśli m jest dowolną liczbą naturalną, to dla dowolnych liczb naturalnych n i k zachodzi równość (1.12). Sprawdzamy najpierw, że ta równość zachodzi dla $m = 0$ i dowolnych n i k, tzn.

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{0}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n}{k}.$$

Zauważmy, że dla $j \neq 0$ mamy $\binom{0}{j} = 0$. Zatem suma po lewej stronie składa się tylko z jednego składnika dla $j = 0$. Mamy zatem dowieść, że

$$\binom{0}{0}\binom{n}{k-0} = \binom{n}{k},$$

co jest oczywiste.

Przeprowadzimy teraz krok indukcyjny. Przypuśćmy więc, że tożsamość Cauchy'ego zachodzi dla pewnej liczby m i wszystkich liczb naturalnych n i k:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

Pokażemy, że wtedy dla dowolnych n i k zachodzi równość

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m+1}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n+1}{k}.$$

A oto obliczenia:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} \binom{m+1}{j}\binom{n}{k-j} &= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1}\right)\binom{n}{k-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} + \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j-1}\binom{n}{k-j} = \\
&= \binom{m+n}{k} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j-1} = \\
&= \binom{m+n}{k} + \binom{m+n}{k-1} = \\
&= \binom{m+n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Dowód 2. Jeszcze raz wykorzystamy równość

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Popatrzmy na następujący iloczyn wielomianów:

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right).$$

Po lewej stronie równości mamy oczywiście wielomian stopnia $m+n$. Po prawej stronie mamy iloczyn dwóch wielomianów, jeden stopnia m i drugi stopnia n, a więc jest to także wielomian stopnia $m+n$. Porównajmy współczynniki stojące przy x^k w obu wielomianach. Po lewej stronie mamy zgodnie ze wzorem dwumianowym składnik $\binom{m+n}{k}x^k$. Po prawej stronie, zgodnie ze wzorem na mnożenie wielomianów, mamy

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} x^j \cdot \binom{n}{k-j} x^{k-j},$$

czyli

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} x^k.$$

Porównując te współczynniki w obu wielomianach otrzymamy dowodzoną równość.

Dowód 3. Znów kończymy dowodem kombinatorycznym. W naszej firmie pracuje $m+n$ osób: m kobiet i n mężczyzn. Chcemy nagrodzić k osób. Oczywiście osoby do nagrody możemy wybrać na $\binom{m+n}{k}$ sposobów. Tę liczbę sposobów możemy jednak otrzymać w wyniku innego rozumowania. Najpierw zdecydujmy, ile kobiet powinno dostać nagrodę. Niech j oznacza liczbę nagrodzonych kobiet. Oczywiście j jest jedną z liczb od 0 (gdy nie nagrodzimy żadnej kobiety) do k (gdy nagrodzimy same kobiety). Dla każdej wartości j kobietom możemy przyznać nagrody na $\binom{m}{j}$ sposobów. Gdy rozdzielimy już nagrody między kobiety, zostanie nam $k-j$ „wolnych" nagród do rozdziału między mężczyzn. Tych mężczyzn do nagrody oczywiście możemy wybrać na $\binom{n}{k-j}$ sposobów. Łącznie, dla każdej wartości k mamy $\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ sposobów przydziału k nagród. Teraz wystarczy zsumować otrzymane liczby sposobów ze względu na j, by otrzymać wzór (1.12).

Interesującym wnioskiem z tożsamości Cauchy'ego jest równość

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}, \tag{1.13}$$

którą otrzymujemy przyjmując $m = n = k$. Mamy wtedy

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2.$$

11. Wybory ze zbiorów uporządkowanych

W dowodach kombinatorycznych, które widzieliśmy do tej pory, wybieraliśmy na początku dowolny zbiór skończony i nie była istotna żadna jego dodatkowa struktura. W tym paragrafie pokażemy kilka dowodów kombinatorycznych, w których istotne będzie to, że wybierzemy zbiór uporządkowany. Dla ustalenia uwagi będzie to zbiór $[n]$ dla pewnej liczby naturalnej n z naturalnym porządkiem.

Udowodnimy najpierw, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{n} = \binom{m+n+1}{n+1}. \tag{1.14}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P_{n+1}(m+n+1) &= \bigcup_{k=0}^{m} \big\{A :\ |A| = n+1 \ \text{ oraz } \ \max(A) = k+n+1\big\} = \\ &= \bigcup_{k=0}^{m} \big\{A :\ k+n+1 \in A \ \text{ oraz } \ |A \cap [k+n]| = n\big\}. \end{aligned}$$

Zbiory będące składnikami sumy po prawej stronie oczywiście są rozłączne oraz

$$\left|\left\{A:\ k+n+1\in A \ \text{ oraz } \ |A\cap[k+n]|=n\right\}\right|=\binom{k+n}{k}.$$

Równość (1.14) wynika zatem z reguły dodawania.

Ten dowód można opisać słownie w następujący sposób. Mamy wybrać $n+1$ elementów ze zbioru $[m+n+1]$. Najpierw wybieramy największy element naszego zbioru. Niech będzie nim liczba l. Następnie ze zbioru $[l-1]$ wybieramy pozostałe n elementów. Zauważmy, że $n+1 \le l \le m+n+1$. Liczbę l możemy zatem zapisać w postaci $l=k+n+1$, gdzie $0\le k\le m$. A więc: najpiew wybieramy liczbę $k+n+1$, gdzie $k\in\{0,\dots,m\}$, a następnie ze zbioru $[k+n]$ wybieramy n elementów.

Podstawiając $m-n$ w miejsce m i zmieniając granice sumowania we wzorze (1.14) otrzymujemy jego postać równoważną:

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\binom{m+1}{n+1}. \tag{1.15}$$

Popatrzmy na kilka przykładów tego wzoru:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}. \tag{1.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}. \tag{1.17}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}. \tag{1.18}$$

Ze wzorów tych skorzystamy w następnym paragrafie.

Udowodnimy teraz następujący wzór:

$$\sum_{k=0}^{n}k(n-k)=\binom{n+1}{3}. \tag{1.19}$$

Mianowicie

$$P_3(n+1)=\bigcup_{k=0}^{n}\left\{\{a,b,c\}:\ a\in[k],\quad b=k+1,\quad c\in[n+1]\setminus[k+1]\right\}.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że zbiory występujące w sumie po prawej stronie są rozłączne oraz

$$\left|\left\{\{a,b,c\}:\ a\in[k],\quad b=k+1,\quad c\in[n+1]\setminus[k+1]\right\}\right|=k(n-k).$$

Inaczej mówiąc, trzy elementy a, b i c zbioru $[n+1]$ wybieramy w następujący sposób:

- najpierw ustalamy liczbę $k = 0, \ldots, n$,
- potem wybieramy a spośród k najmniejszych liczb zbioru $[n+1]$ (tzn. spośród liczb $1, \ldots, k$),
- następnie wybieramy $b = k + 1$,
- wreszcie wybieramy c spośród $n - k$ największych elementów zbioru $[n + 1]$ (tzn. spośród liczb $k + 2, \ldots, n + 1$).

Paragraf ten zakończymy dowodem następującej tożsamości:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n. \tag{1.20}$$

Rozpatrujemy zbiór $P(2n + 1)$. Możemy przedstawić go w postaci sumy

$$P(2n + 1) = P_+(2n + 1) \cup P_-(2n + 1),$$

gdzie

$$P_+(2n+1) = \{A \in P(2n+1) : \ |A| \geq n+1\}, \quad P_-(2n+1) = \{A \in P(2n+1) : \ |A| \leq n\}.$$

Zauważmy, że dla dowolnego zbioru $A \in P(2n + 1)$

$$A \in P_+(2n + 1) \ \Leftrightarrow \ [2n + 1] \setminus A \in P_-(2n + 1).$$

Stąd wynika, że

$$|P_+(2n + 1)| = |P_-(2n + 1)| = \frac{1}{2} \cdot |P(2n + 1)| = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} = 4^n.$$

Zbiory A należące do $P_+(2n + 1)$ mają co najmniej $n + 1$ elementów. Będzie nas interesować położenie elementu $(n + 1)$-go w zbiorze A (licząc od najmniejszego elementu, w kolejności rosnącej). Zauważmy, że

$$P_+(2n + 1) = \bigcup_{k=0}^{n} \big\{A \in P_+(2n + 1) : \ 2n - k + 1 \in A \ \text{ oraz } \ |A \cap [2n - k]| = n\big\}.$$

Inaczej mówiąc: mamy wybrać co najmniej $n+1$ elementów ze zbioru $[2n+1]$. Najmniejsze n elementów wybieramy ze zbioru $[2n - k]$, potem wybieramy element $2n - k + 1$ i wreszcie dopełniamy dowolnymi elementami wybranymi ze zbioru $[2n+1] \setminus [2n-k+1]$, czyli spośród k największych elementów zbioru $[2n + 1]$. Zatem oczywiście

$$\big|\big\{A \in P_+(2n + 1) : \ 2n - k + 1 \in A \ \text{ oraz } \ |A \cap [2n - k]| = n\big\}\big| = \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k.$$

Ponadto zbiory występujące w sumie po prawej stronie są rozłączne. Do zakończenia dowodu wystarczy sprawdzić, jaki jest zakres zmienności parametru k. Otóż oczywiście

$2n-k \le 2n$, skąd wynika, że $k \ge 0$. Ponadto $2n-k \ge n$, skąd wynika, że $k \le n$. Zatem $k \in \{0, \ldots, n\}$. To kończy dowód.

12. Sumy potęg liczb naturalnych

Przyjmijmy oznaczenie

$$S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k = 1^k + \ldots + n^k,$$

gdzie $n, k \ge 1$. W tym paragrafie wyprowadzimy wzory na $S_k(n)$ dla $k = 0, 1, 2, 3$. Pokażemy mianowicie, że

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n,\\
S_1(n) &= \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2},\\
S_2(n) &= \frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
S_3(n) &= \binom{n+1}{2}^2 = S_1(n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

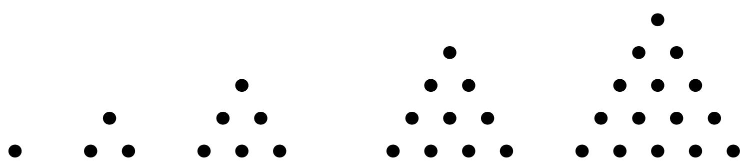
Równość $S_0(n) = n$ jest oczywista. W poprzednim paragrafie udowodniliśmy równość (1.16):

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}.$$

Mamy zatem

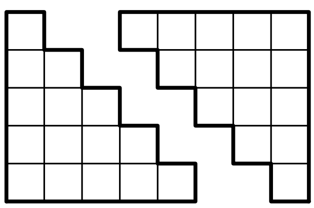
$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.21}$$

Liczby $T_n = S_1(n)$ nazywamy **liczbami trójkątnymi**. Tożsamość (1.21) wraz z następującym rysunkiem tłumaczy tę nazwę:

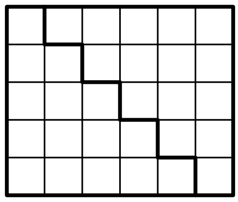


T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

Inny dowód tożsamości (1.21) pokażemy na przykładzie. Dwie „piramidki" mające po T_5 kwdratów ustawiamy obok siebie tak jak na rysunku:



Po połączeniu ich otrzymujemy prostokąt o wymiarach 6×5:



Ogólnie $2T_n = (n+1) \cdot n$, skąd dostajemy

$$S_1(n) = T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Następnie udowodnimy, że:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.22}$$

Skorzystamy tym razem z równości (1.17):

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Mamy bowiem

$$\binom{n+1}{3} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2},$$

skąd dostajemy

$$2 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k),$$

czyli

$$\begin{aligned} S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \sum_{k=1}^{n} k = \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} \cdot \big(2(n-1)+3\big) = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Pokażemy teraz dowód kombinatoryczny równości

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{3}. \tag{1.23}$$

Z niej dostajemy natychmiast

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{3} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)}{4 \cdot 6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Definiujemy dwa zbiory:

$$A = \{(i,j,k) :\ 1 \le i,j \le k \le n\},$$

oraz

$$B = \{(i,j,k) :\ 1 \le i \le j \le k \le 2n\}.$$

Pokażemy najpierw, że $|A| = S_2(n)$. Mianowicie

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \{(i,j,k) :\ i,j \in [k]\}$$

oraz zbiory

$$A_k = \{(i,j,k) :\ i,j \in [k]\}$$

dla różnych k są rozłączne. Zauważmy ponadto, że $|A_k| = k^2$; z reguły dodawania wynika zatem, że $|A| = S_2(n)$. Wykażemy teraz, że

$$|B| = \binom{2n+2}{3}.$$

Zauważmy, że zbiór B jest zbiorem wszystkich niemalejących ciągów długości 3 o wyrazach ze zbioru $[2n]$. Z rozważań dotyczących kombinacji z powtórzeniami wynika, że takich ciągów jest tyle, ile 3-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru $(2n)$-elementowego, czyli właśnie $\binom{2n+2}{2}$.

Definiujemy teraz funkcję $f : B \to A$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
f(2i,2j,2k) &= (i,j,k),\\
f(2i,2j,2k-1) &= (j+1,i,k),\\
f(2i,2j-1,2k) &= (j,i,k),\\
f(2i,2j-1,2k-1) &= (j,i,k),\\
f(2i-1,2j,2k) &= (i,j,k),\\
f(2i-1,2j,2k-1) &= (j+1,i,k),\\
f(2i-1,2j-1,2k) &= (i,j,k),\\
f(2i-1,2j-1,2k-1) &= (i,j,k).
\end{aligned}$$

Sprawdzenie, że $f(i,j,k) \in A$ dla $(i,j,k) \in B$ pozostawiamy jako ćwiczenie. Na przykład

$$f(1,4,6) = (1,2,3).$$

Można też łatwo pokazać, że jeśli $i \le j$, to

$$f^{-1}\big((i,j,k)\big) = \big\{(2i,2j,2k),(2i-1,2j,2k),(2i-1,2j-1,2k),(2i-1,2j-1,2k-1)\big\}$$

oraz jeśli $i > j$, to

$$f^{-1}\big((i,j,k)\big) = \big\{(2j,2i-1,2k-1),(2j,2i-1,2k),(2j,2i-2,2k-1),(2j-1,2i-2,2k-1)\big\}.$$

Na przykład

$$f^{-1}\big((1,2,3)\big) = \big\{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,6),(2,4,6)\big\}.$$

Podobnie

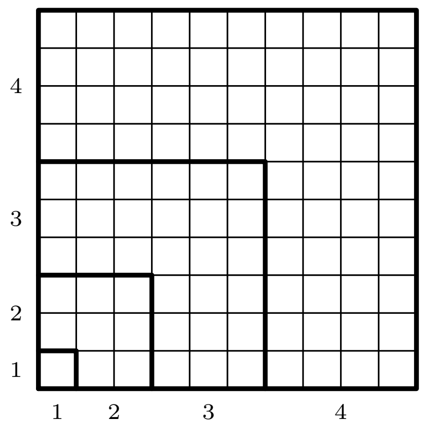
$$f^{-1}\big((2,1,3)\big) = \big\{(1,2,5),(2,2,5),(2,3,5),(2,3,6)\big\}.$$

Z tej własności funkcji f wynika, że $4 \cdot |A| = |B|$, co kończy dowód tożsamości (1.23).

Na zakończenie udowodnimy tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{1.24}$$

Kwadrat o boku długości T_n podzielmy na T_n^2 kwadratów jednostkowych, a następnie na n części tak jak na rysunku (dla $n = 4$):



Długości odcinków, na jakie podzieliliśmy lewy i dolny bok kwadratu wynoszą kolejno: $1, 2, \ldots, n$. Niech G_k oznacza liczbę kwadratów jednostkowych zawartych w k-tej części. Wtedy nietrudno zauważyć, że

$$G_k = T_k^2 - T_{k-1}^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{k^2(k-1)^2}{4} = \frac{k^2}{4}\cdot\big((k+1)^2-(k-1)^2\big) = \frac{k^2}{4}\cdot 4k = k^3.$$

Stąd wynika, że

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} G_k = T_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

co kończy dowód tożsamości (1.24).

Naszkicujemy jeszcze jeden dowód kombinatoryczny tożsamości (1.24). Definiujemy dwa zbiory

$$A = \big\{(i,j,k,l):\ 0 \le i,j,k < l \le n\big\}$$

oraz

$$B = \big\{\big((i,j),(k,l)\big):\ 0 \le i < j \le n,\ 0 \le k < l \le n\big\}.$$

Pozostawiamy jako ćwiczenie wykazanie, że

$$|A| = S_3(n) \quad \text{oraz} \quad |B| = \binom{n+1}{2}^2.$$

Następnie definiujemy funkcję $f : A \to B$ wzorem

$$f(i,j,k,l) = \begin{cases} \big((i,j),(k,l)\big) & \text{jeśli } i < j, \\ \big((k,l),(j,i)\big) & \text{jeśli } i > j, \\ \big((j,l),(k,l)\big) & \text{jeśli } i = j. \end{cases}$$

Na przykład

$$\begin{aligned} f(1,2,3,4) &= \big((1,2),(3,4)\big), \\ f(2,1,3,4) &= \big((3,4),(1,2)\big), \\ f(1,1,3,4) &= \big((1,4),(3,4)\big). \end{aligned}$$

Pozostawiamy również jako ćwiczenie sprawdzenie, że funkcja f przekształca zbiór A wzajemnie jednoznacznie na zbiór B.

13. Sumy naprzemienne współczynników dwumianowych

Udowodnimy teraz, że jeśli $n \ge 1$, to

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0. \tag{1.25}$$

Dowód. Zdefiniujmy najpierw dwa zbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{n \in \mathbb{N}:\ 2 \mid n\}, \\ \mathcal{N} &= \{n \in \mathbb{N}:\ 2 \nmid n\}. \end{aligned}$$

Tożsamość (1.25) możemy teraz zapisać w postaci

$$\sum_{k \in [n] \cap \mathcal{P}} \binom{n}{k} = \sum_{k \in [n] \cap \mathcal{N}} \binom{n}{k},$$

czyli

$$\Big| \bigcup_{k \in [n] \cap \mathcal{P}} P_k(n) \Big| = \Big| \bigcup_{k \in [n] \cap \mathcal{N}} P_k(n) \Big|.$$

Nietrudno zauważyć, że funkcja

$$f : P(n) \to P(n)$$

określona wzorem

$$f(A) = A \dot{-} \{n\} = \begin{cases} A \setminus \{n\} & \text{jeśli } n \in A, \\ A \cup \{n\} & \text{jeśli } n \notin A \end{cases}$$

dla $A \in P(n)$ jest funkcją przekształcającą wzajemnie jednoznacznie zbiór $\bigcup\limits_{k\in[n]\cap\mathcal{P}} P_k(n)$ na zbiór $\bigcup\limits_{k\in[n]\cap\mathcal{N}} P_k(n)$ i na odwrót (zauważmy bowiem, że $f^{-1} = f$).

Oczywiście, jeśli $n = 0$, to

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \cdot \binom{0}{k} = (-1)^0 \cdot \binom{0}{0} = 1. \tag{1.26}$$

Na zakończenie udowodnimy, że jeśli $n \geq 1$ i $m \geq 0$, to

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m}. \tag{1.27}$$

Rozpatrujemy tę samą funkcję $f : P(n) \to P(n)$ określoną wzorem $f(A) = A \dot{-} \{n\}$ dla $A \in P(n)$. Wiemy, że funkcja f jest różnowartościowa. Będziemy rozpatrywać teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. $m = 2p$. Tożsamość (1.27) przyjmuje postać

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{2k+1} = \binom{n-1}{2p},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} - \binom{n-1}{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{2k+1}. \tag{1.27a}$$

Zdefiniujmy trzy zbiory:

$$P = \bigcup_{k=0}^{p} P_{2k}(n),$$
$$N = \bigcup_{k=0}^{p-1} P_{2k+1}(n),$$
$$R = P_{2p}(n-1) = \{A \in P_{2p}(n) : \ n \notin A\}.$$

Zauważmy teraz, że $f(P \setminus R) = N$, co dowodzi tożsamości (1.27a).

Przypadek 2. $m = 2p + 1$. Tożsamość (1.27) przyjmuje teraz postać

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k+1} = -\binom{n-1}{2p+1},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} + \binom{n-1}{2p+1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{2k+1}. \tag{1.27b}$$

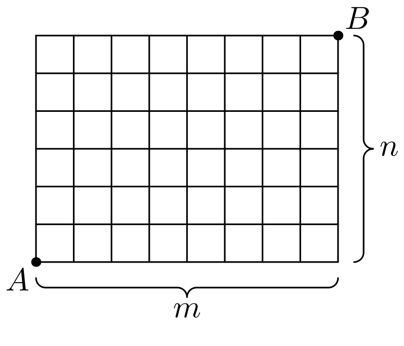
Zdefiniujmy trzy zbiory:

$$P = \bigcup_{k=0}^{p} P_{2k}(n),$$
$$N = \bigcup_{k=0}^{p-1} P_{2k+1}(n),$$
$$R = P_{2p+1}(n-1) = \{A \in P_{2p+1}(n) : \ n \notin A\}.$$

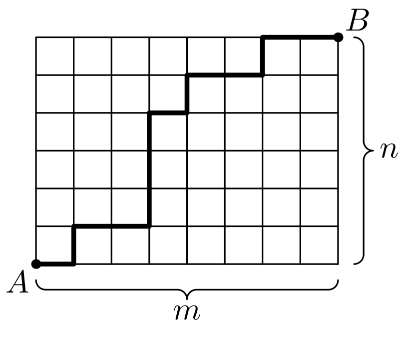
Zauważmy teraz, że $f(P) = N \setminus R$, co dowodzi tożsamości (1.27b). W ten sposób dowód tożsamości (1.27) został zakończony.

14. Zliczanie dróg

Mamy dany prostokąt o wymiarach $m \times n$ podzielony na mn kwadratów jednostkowych. Chcemy obliczyć liczbę dróg prowadzących z punktu A do punktu B, spełniających założenie: w czasie przechodzenia drogi wolno poruszać się tylko w prawo i do góry.



Przykład takiej drogi widzimy na następnym rysunku:



Każdą taką drogę możemy zakodować za pomocą $m+n$ znaków: m poziomych i n pionowych kresek. Kolejność tych kresek odpowiada przechodzonym odcinkom poziomym i pionowym od punktu A do punktu B. Powyższą drogę możemy zatem zakodować za pomocą ciągu

$$- \quad | \quad - \quad - \quad | \quad | \quad | \quad - \quad | \quad - \quad - \quad | \quad - \quad -$$

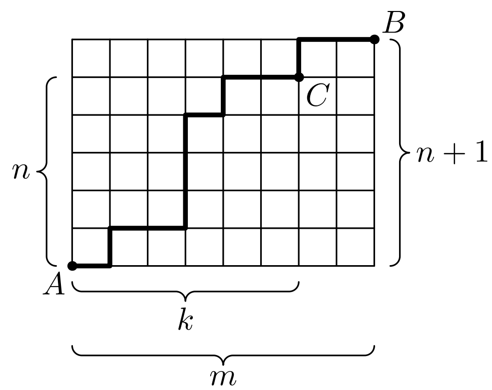
Oczywiste jest też, że każdy taki ciąg koduje dokładnie jedną drogę. Ciąg skład się z $m+n$ znaków. Jest on wyznaczony jednoznacznie po wskazaniu, na których miejscach znajdują się kreski poziome (równoważnie: kreski pionowe). Zatem istnieje $\binom{m+n}{m}$ (równoważnie: $\binom{m+n}{n}$) takich ciągów, a więc i tyle rozważanych dróg. Mamy zatem

$$\text{liczba dróg z } A \text{ do } B = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}. \tag{1.28}$$

Tę interpretację kombinatoryczną współczynnika dwumianowego jako liczby dróg można wykorzystać do dowodu tożsamości kombinatorycznych. Udowodnimy najpierw tożsamość (1.14):

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{n} = \binom{m+n+1}{n+1}. \tag{1.14}$$

Weźmy prostokąt o wymiarach $m \times (n+1)$. Każda droga prowadząca z A do B w dokładnie jednym miejscu przechodzi z przedostatniej na ostatnią linię poziomą (i dalej już poziomo zmierza do B). Niech punkt C będzie ostatnim punktem naszej drogi znajdującym się na przedostatniej linii:



Niech odległość punktu C od lewego skraju prostokąta wynosi k kratek. Wtedy istnieje dokładnie $\binom{k+n}{n}$ dróg prowadzących z A do C. Ponieważ każda droga z A do B prowadzi przez jeden taki punkt C, z którego następnie przechodzi do ostatniej poziomej linii i dalej poziomo do B, więc łączna liczba dróg jest równa sumie

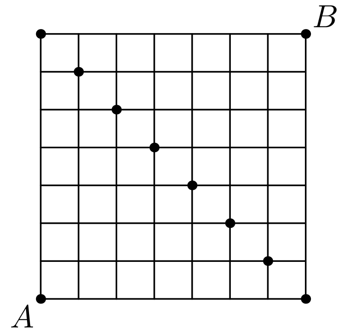
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{n}.$$

Z drugiej strony, ze wzoru (1.28) wynika, że ta liczba dróg jest równa $\binom{m+n+1}{n+1}$, co kończy dowód.

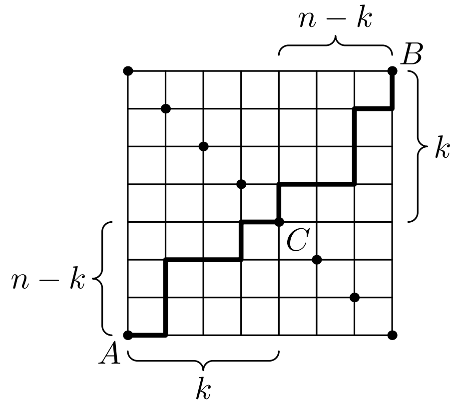
Udowodnimy teraz tożsamość (1.13).

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \tag{1.13}$$

Weźmy kwadrat o boku długości n kratek. Każda droga z A do B przechodzi przez dokładnie jeden zaznaczony punkt leżący na przekątnej kwadratu.



Przypuśćmy, że nasza droga przechodzi przez punkt C położony w odległości k kratek od lewego boku kwadratu. Wtedy ten punkt leży także w odległości k kratek od boku górnego.



Każdą drogę z A do B przechodzącą przez punkt C dzielimy na dwie drogi: z A do C i z C do B. Droga z A do C znajduje się wewnątrz prostokąta o wymiarach $k \times (n-k)$; jest zatem $\binom{n}{k}$ takich dróg. Droga z C do B znajduje się wewnątrz prostokąta o wymiarach $(n-k) \times k$; takich dróg jest też $\binom{n}{k}$. Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $\binom{n}{k}^2$ dróg z A do B przechodzących przez punkt C. Sumując te liczby dróg dla $k = 0, 1, \ldots, n$, otrzymujemy tożsamość (1.13).

15. Zliczanie funkcji monotonicznych

W tym paragrafie zajmiemy się zliczaniem funkcji monotonicznych $f : [m] \to [n]$. Najpierw rozpatrujemy funkcje rosnące. Zauważmy, że funkcję rosnącą wyznacza jej zbiór wartości. Stąd wynika, że liczba funkcji rosnących $f : [m] \to [n]$ jest równa $\binom{n}{m}$. Oczywiście takie funkcje istnieją, o ile $1 \leq m \leq n$. Nietrudno zauważyć, że funkcji malejących jest tyle samo.

Następnie zajmiemy się funkcjami niemalejącymi. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2. Niech $m, n \geq 1$. Liczba niemalejących funkcji $f : [m] \to [n]$ jest równa $\binom{m+n-1}{m}$.

Dowód 1. Dla dowolnej funkcji $f : [m] \to [n]$ definiujemy funkcję $g : [m] \to [m+n-1]$ wzorem

$$g(k) = f(k) + k - 1$$

dla $k = 1, \ldots m$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1), \\ g(2) &= f(2) + 1, \\ g(3) &= f(3) + 2, \\ \ldots & \quad \ldots \\ g(m-1) &= f(m-1) + m - 2, \\ g(m) &= f(m) + m - 1. \end{aligned}$$

Ponieważ $1 \leq f(k) \leq n$ dla $k \in [m]$, więc

$$1 \leq f(k) \leq f(k) + k - 1 = g(k) \leq f(k) + m - 1 \leq m + n - 1.$$

Zatem rzeczywiście $g : [m] \to [n]$. Teraz pokazujemy, że funkcja f jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja g jest rosnąca. Przypuśćmy zatem, że funkcja f jest niemalejąca oraz $1 \leq k < l \leq m$. Wtedy $f(k) \leq f(l)$, skąd wynika, że

$$g(k) = f(k) + k - 1 \leq f(l) + k - 1 < f(l) + l - 1 = g(l).$$

Na odwrót, przypuśćmy, że funkcja g jest rosnąca oraz $1 \leq k \leq m$. Wtedy $g(k) < g(k+1)$, czyli

$$f(k) + k - 1 < f(k+1) + (k+1) - 1.$$

Zatem

$$f(k) + k - 1 < f(k+1) + k,$$

czyli

$$f(k) < f(k+1) + 1.$$

Stąd dostajemy $f(k) \leq f(k+1)$. Z dowolności k wynika, że funkcja f jest niemalejąca. Wreszcie pokazujemy, że każda funkcja rosnąca $g : [m] \to [m+n-1]$ powstaje w ten sposób z pewnej funkcji f. Otóż funkcję f definiujemy wzorem

$$f(k) = g(k) - k + 1$$

dla $k = 1, \ldots, m$. Szczegóły dowodu, że $f : [m] \to [n]$ oraz że f jest niemalejąca, pozostawiamy jako ćwiczenie. Do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że istnieje $\binom{m+n-1}{m}$ funkcji rosnących z $[m]$ do $[m+n-1]$.

Dowód 2. Funkcja niemalejąca $f : [m] \to [n]$ jest po prostu ciągiem niemalejącym długości m o wyrazach ze zbioru $[n]$. Przypominamy, że za pomocą takich ciągów definiowaliśmy kombinacje z powtórzeniami. Zatem liczba tych ciągów jest równa liczbie m-elementowych kombinacji z powtórzeniami z n-elementowego zbioru $[n]$, a więc jest równa $\binom{m+n-1}{n-1}$, czyli $\binom{m+n-1}{m}$. Każdą taką kombinację kodowaliśmy za pomocą ciągu kropek i kresek. Ze względu na znaczenie tego kodowania przypomnijmy je w kontekście kodowania funkcji niemalejących.

Każdą funkcję niemalejącą $f : [m] \to [n]$ kodujemy za pomocą ciągu $m+n-1$ symboli: m kropek i $n-1$ pionowych kresek. Popatrzmy na przykład. Niech $m = 8$ i $n = 7$. Weźmy funkcję $f : [8] \to [7]$ zdefiniowaną następująco:

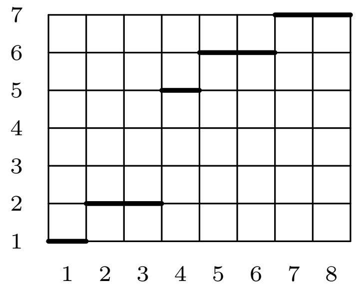
$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(2) &= 2, \\ f(3) &= 2, \\ f(4) &= 5, \\ f(5) &= 6, \\ f(6) &= 6, \\ f(7) &= 7, \\ f(8) &= 7. \end{aligned}$$

Kodem tej funkcji będzie ciąg ośmiu kropek i sześciu kresek:

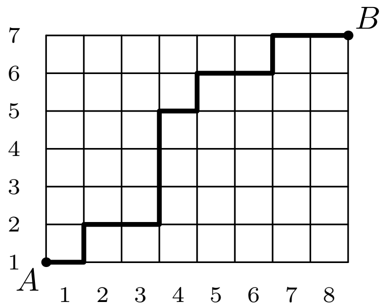
$$\bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad | \quad | \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet$$

Pionowe kreski dzielą ciąg na 7 części odpowiadających możliwym wartościom funkcji f. Kolejne kropki odpowiadają argumentom. Jeśli k-ta kropka leży w l-tej części, to $f(k) = l$. Zatem pierwsza kropka leży w pierwszej części, druga i trzecia w drugiej części, czwarta w piątej części, piąta i szósta w szóstej części i wreszcie siódma i ósma w siódmej części. Ogólnie mamy m kropek odpowiadających argumentom i $n-1$ kresek dzielących ciąg na n części odpowiadających możliwym wartościom. Teraz wystarczy zauważyć, że każdy taki ciąg koduje dokładnie jedną funkcję niemalejącą i na odwrót, każda funkcja niemalejąca ma dokładnie jeden kod. Wreszcie zauważmy, że kod jest całkowicie wyznaczony, gdy wskażemy, na których miejscach znajdują się kropki; jest zatem $\binom{m+n-1}{m}$ takich kodów i tyle jest funkcji niemalejących $f : [m] \to [n]$.

Dowód 3. Wykorzystamy prostokąt o wymiarach $m \times (n-1)$ do sporządzenia wykresu funkcji. Na dolnym boku prostokąta numerujemy kolejne kratki liczbami od 1 do m. Na lewym boku numerujemy linie tworzące kratki liczbami od 1 do n. Następnie zaznaczamy pogrubioną linią m poziomych odcinków jednostkowych. Jeśli $f(k) = l$, to w k-tej kolumnie zaznaczamy odcinek znajdujący się na l-tej linii poziomej. Zwracamy uwagę na to, że powstaje wykres funkcji, w którym wartości nie są punktami, ale odcinkami. Oto przykład takiego wykresu dla $m = 8$ i $n = 7$ i funkcji f określonej w dowodzie 2:



Poziome odcinki łączymy następnie odcinkami pionowymi, otrzymując tym samym drogę z punktu A do punktu B, spełniającą warunek sformułowany w poprzednim paragrafie. Oto droga utworzona z wykresu naszej funkcji f:



Zauważmy teraz, że każda funkcja niemalejąca definiuje w ten sposób dokładnie jedną drogę z A do B i na odwrót: każda droga z A do B spełniająca warunek z poprzedniego paragrafu definiuje dokładnie jedną funkcję niemalejącą. Stąd wynika, że istnieje $\binom{m+n-1}{m}$ takich funkcji. To kończy dowód twierdzenia.

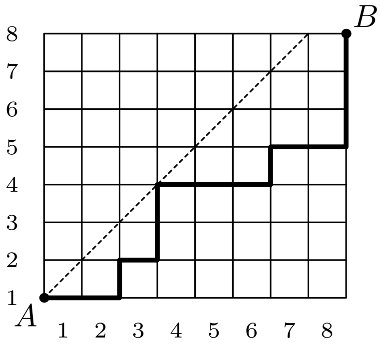
16. Liczby Catalana

W tym paragrafie rozwiążemy następujące zadanie:

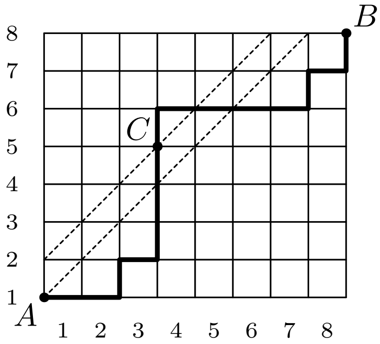
Zadanie. Oblicz, ile jest funkcji niemalejących $f : [n] \to [n]$ spełniających warunek

$$f(k) \leq k \quad \text{dla } k = 1, \ldots, n. \tag{$*$}$$

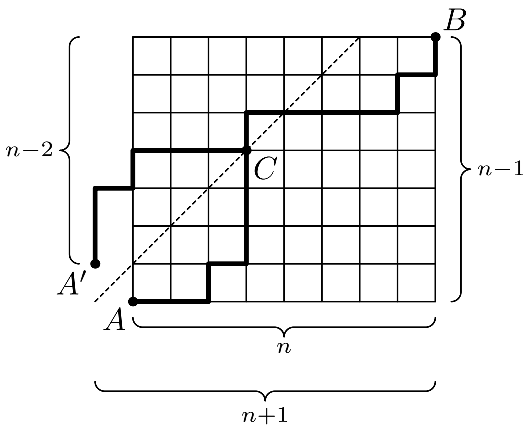
W rozwiązaniu tego zadania wykorzystamy kodowanie funkcji niemalejących za pomocą dróg. Niech zatem dany będzie prostokąt wymiaru $n \times (n-1)$. Na dolnym boku numerujemy kratki liczbami od 1 do n, na lewym boku numerujemy linie od 1 do n. Wiemy już, że każda funkcja niemalejąca $f : [n] \to [n]$ definiuje dokładnie jedną drogę z punktu A do punktu B. Dodatkowy warunek $(*)$ nałożony na funkcje f oznacza, że droga odpowiadająca funkcji f nie może przekroczyć przerywanej linii zaznaczonej na rysunku (gdzie przyjęto $n = 8$):



Interesujące nas drogi z A do B nieprzekraczające przerywanej linii zliczymy inaczej: od liczby $\binom{2n-1}{n-1}$ wszystkich dróg z A do B odejmiemy liczbę dróg przekraczających tę linię. Narysujmy więc nową przerywaną linię, położoną o jedną kratkę wyżej. Droga przekraczająca dolną linię przerywaną musi mieć punkt wspólny z wyższą linią przerywaną. Niech C będzie pierwszym punktem na drodze z A do B położonym na tej wyższej linii przerywanej.



Część drogi od punktu A do punktu C odbijamy teraz symetrycznie względem wyższej linii przerywanej. Otrzymujemy drogę z punktu A' do punktu B.



Odwrotnie, każda droga z punktu A' do punktu B musi przeciąć tę wyższą linię przerywaną. Niech C będzie pierwszym punktem wspólnym drogi i tej linii przerywanej. Odbijając symetrycznie część $A'C$ tej drogi względem linii przerywanej, otrzymujemy drogę z A do B przekraczającą dolną linię przerywaną. Zatem interesująca nas liczba

dróg z A do B przekraczających dolną linię przerywaną jest równa liczbie dróg z A' do B, czyli $\binom{2n-1}{n-2}$.
Liczba funkcji $f : [n] \to [n]$ spełniających warunek $(*)$ jest zatem równa

$$\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}.$$

Skorzystamy teraz ze wzoru (1.5):

$$n \cdot \binom{m}{n} = (m-n+1) \cdot \binom{m}{n-1}. \tag{1.5}$$

Mamy wówczas

$$(n-1) \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \big(2n-1-(n-1)+1\big) \cdot \binom{2n-1}{n-2} = (n+1) \cdot \binom{2n-1}{n-2},$$

czyli

$$\binom{2n-1}{n-2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \binom{2n-1}{n-1}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} &= \binom{2n-1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \\ &= \frac{2}{n+1} \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n}{n} \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Liczby

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

nazywamy **liczbami Catalana**. Oto kilka początkowych liczb Catalana:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad C_7 = 429.$$

17. Podział zbioru na bloki równoliczne

Następne zadanie kombinatoryczne, którym będziemy się zajmować, polega na zliczaniu podziałów zbioru na równe części. Przypuśćmy, że dany jest mn-elementowy zbiór A. Chcemy wiedzieć, iloma sposobami możemy podzielić go na m zbiorów n-elementowych:

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m, \quad |A_1| = \ldots = |A_m| = n.$$

Każdy taki podział możemy łatwo otrzymać z pewnej permutacji całego zbioru A. Mianowicie jako pierwszy zbiór podziału (czyli A_1) bierzemy zbiór składający się z elementów stojących na pierwszych n miejscach, jako drugi zbiór (czyli A_2) bierzemy zbiór elementów stojących na następnych n miejscach itd. Wreszcie zbiór A_m składa się z elementów stojących na ostatnich n miejscach. Oczywiście ten sam podział otrzymamy na ogół z różnych permutacji całego zbioru A.

Liczbę podziałów wyznaczymy dzieląc liczbę wszystkich permutacji przez liczbę permutacji dających ten sam podział zbioru A. Wszystkich permutacji jest oczywiście $(mn)!$. Ten sam podział otrzymamy z permutacji różniących się porządkiem elementów w każdym bloku n-elementowym oraz różniących się porządkiem tych bloków. Każdy blok n-elementowy możemy uporządkować na $n!$ sposobów. Takich bloków jest m, więc łącznie mamy $(n!)^m$ sposobów uporządkowania elementów wewnątrz każdego bloku. Wreszcie mamy $m!$ sposobów uporządkowania tych m bloków. To ostatecznie daje liczbę $(n!)^m \cdot m!$ permutacji wyznaczających ten sam podział zbioru A. Zatem liczba podziałów wynosi

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m \cdot m!}.$$

Wyprowadzimy stąd następujący wniosek. Ponieważ liczba podziałów zbioru jest liczbą całkowitą, więc

$$(n!)^m \cdot m! \mid (mn)!$$

Otrzymany wniosek pozwoli nam łatwo rozwiązać następujące zadanie teorioliczbowe (XLIII Olimpiada Matematyczna, zawody III stopnia, zadanie 6).

Zadanie. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej k

$$(k!)^{k^2+k+1} \mid (k^3)!$$

Rozwiązanie. Najpierw podstawimy $m = n = k$ i otrzymamy

$$(k!)^k \cdot k! \mid (k^2)!$$

czyli

$$(k!)^{k+1} \mid (k^2)!$$

Następnie podstawimy $m = k^2$ oraz $n = k$ i otrzymamy

$$(k!)^{k^2} \cdot (k^2)! \mid (k^3)!$$

Łącząc ze sobą ostatnie dwie zależności łatwo otrzymamy

$$(k!)^{k^2} \cdot (k!)^{k+1} \mid (k^3)!$$

czyli ostatecznie

$$(k!)^{k^2+k+1} \mid (k^3)!$$

18. Operator różnicowy

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $\Delta f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Operator Δ tworzący z funkcji f funkcję Δf nazywamy **operatorem różnicowym**. Ten operator różnicowy można iterować. Definiujemy mianowicie ciąg funkcji $\Delta^k f$ dla $k = 1, 2, \ldots$ wzorami:

$$\begin{aligned} \Delta^1 f &= \Delta f, \\ \Delta^{k+1} f &= \Delta(\Delta^k f), \end{aligned}$$

Czasami definiujemy ponadto $\Delta^0 f = f$. Popatrzmy teraz na kilka przykładów.

$$\begin{aligned} (\Delta^1 f)(x) &= (\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x), \\ (\Delta^2 f)(x) &= (\Delta(\Delta^1 f))(x) = (\Delta f)(x+1) - (\Delta f)(x) = \\ &= (f(x+2) - f(x+1)) - (f(x+1) - f(x)) = \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x), \\ (\Delta^3 f)(x) &= (\Delta(\Delta^2 f))(x) = (\Delta^2 f)(x+1) - (\Delta^2 f)(x) = \\ &= (f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1)) - (f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)) = \\ &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x), \\ (\Delta^4 f)(x) &= (\Delta(\Delta^3 f))(x) = (\Delta^3 f)(x+1) - (\Delta^3 f)(x) = \\ &= (f(x+4) - 3f(x+3) + 3f(x+2) - f(x+1)) - \\ &\quad - (f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)) = \\ &= f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + f(x) \end{aligned}$$

i tak dalej. Udowodnimy teraz twierdzenie ogólne.

Twierdzenie 1.3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego $k \geq 1$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(\Delta^k f)(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j). \tag{1.29}$$

Dowód. Stosujemy indukcję względem k. Dla $k = 1$ mamy

$$L = (\Delta^1 f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

oraz

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=0} 1(-1)^{1-j} \binom{1}{j} f(x+j) = \\ &= (-1)^{1-0} \binom{1}{0} f(x+0) + (-1)^{1-1} \binom{1}{1} f(x+1) = \\ &= (-1) \cdot f(x) + f(x+1) = f(x+1) - f(x) = \\ &= L. \end{aligned}$$

W kroku indukcyjnym zakładamy, że dla pewnego k mamy

$$(\Delta^k f)(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j)$$

i dowodzimy, że

$$(\Delta^{k+1} f)(x) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} f(x+j).$$

Zaczynamy od lewej strony:

$$\begin{aligned}
L &= (\Delta^{k+1} f)(x) = (\Delta(\Delta^k f))(x) = (\Delta^k f)(x+1) - (\Delta^k f)(x) = \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+1+j) - \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j) = \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j-1} f(x+j) + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j} f(x+j) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j-1} f(x+j) + (-1)^{k-(k+1)+1} \binom{k}{k} f(x+k+1) + \\
&\quad + (-1)^{k-0+1} \binom{k}{0} f(x+0) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j} f(x+j) = \\
&= (-1)^{k+1-0} \binom{k}{0} f(x+0) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+1-j} \left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right) f(x+j) + \\
&\quad + (-1)^{k+1-(k+1)} \binom{k}{k} f(x+k+1) = \\
&= (-1)^{k+1-0} \binom{k+1}{0} f(x+0) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} f(x+j) + \\
&\quad + (-1)^{k+1-(k+1)} \binom{k+1}{k+1} f(x+k+1) = \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{k+1}{j} f(x+j) = \\
&= P,
\end{aligned}$$

c. b. d. o.

Operatory różnicowe Δ i Δ^n można stosować także do ciągów o wyrazach rzeczywistych. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definiujemy wtedy

$$(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n)$$

oraz

$$\Delta^1 f = \Delta f,$$
$$\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f).$$

Z twierdzenia 1.3 otrzymujemy wtedy następujący wniosek:

Wniosek 1.4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego $k \geq 1$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(\Delta^k f)(x-k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x-j). \tag{1.30}$$

Dowód otrzymujemy zmianiając najpierw kolejność sumowania:

$$\begin{aligned}(\Delta^k f)(x) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j) = \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{k-j} f(x+k-j) = \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x+k-j),\end{aligned}$$

a następnie podstawiając $x-k$ w miejsce x.

Wniosek 1.5. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego $k \geq 1$ i dowolnego $n \geq 0$ mamy

$$(\Delta^k f)(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(n+j). \tag{1.31}$$

W szczególności dla $n = 0$ dostajemy

$$(\Delta^k f)(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j). \tag{1.32}$$

Dla dowodu wystarczy rozszerzyć funkcję f na cały zbiór $\mathbb{R}$, przyjmując na przykład

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ f([x]) & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x.

19. Zastosowania operatora różnicowego

Zaczniemy od wykazania, że operator różnicowy jest operatorem liniowym. Przypuśćmy zatem, że mamy dane dwie funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i dwie liczby rzeczywiste a i b. Definiujemy funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$h(x) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\begin{aligned}(\Delta h)(x) &= h(x+1) - h(x) = a \cdot f(x+1) + b \cdot g(x+1) - a \cdot f(x) - b \cdot g(x) = \\ &= a \cdot (\Delta f)(x) + b \cdot (\Delta g)(x)\end{aligned}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Inaczej mówiąc

$$\big(\Delta(a \cdot f + b \cdot g)\big)(x) = \big(a \cdot (\Delta f) + b \cdot (\Delta g)\big)(x)$$

dla $x \in \mathbb{R}$, czyli

$$\big(\Delta(a \cdot f + b \cdot g)\big) = \big(a \cdot (\Delta f) + b \cdot (\Delta g)\big).$$

Stąd łatwo wynika przez indukcję, że

$$\big(\Delta^k(a \cdot f + b \cdot g)\big) = \big(a \cdot (\Delta^k f) + b \cdot (\Delta^k g)\big)$$

dla $k \geq 1$.

Niech teraz funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x) = x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem funkcja Δf jest wielomianem stopnia $n-1$. Stąd i z liniowości operatora Δ wynika, że jeśli f jest wielomianem stopnia n, to Δf jest wielomianem stopnia $n-1$. Przez indukcję względem k łatwo dowodzimy, że $\Delta^k f$ jest wielomianem stopnia $n-k$ dla $k = 1, \ldots, n$. W szczególności Δ^n jest wielomianem stałym. Stąd następnie wynika, że dla $k \geq n+1$ funkcja $\Delta^k f$ jest tożsamościowo równa 0.

Udowodnimy teraz przez indukcję, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $(\Delta^n f)(x) = n!$ dla $x \in \mathbb{R}$. Tę równość będziemy zapisywać w skrócie jako $\Delta^n x^n = n!$.

Dla $n = 1$ mamy $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem

$$(\Delta^1 f)(x) = f(x+1) - f(x) = x + 1 - x = 1 = 1!$$

Załóżmy teraz, że dane są funkcje $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f_k(x) = x^k$ dla $k \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}$. Załóżmy także, że $\Delta^n f_n = n!$. Pamiętamy również, że $\Delta^n f_k = 0$ dla $k < n$. Chcemy udowodnić, że $\Delta^{n+1} f_{n+1} = (n+1)!$. Otóż zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned}(\Delta f_{n+1})(x) &= f_{n+1}(x+1) - f_{n+1}(x) = (x+1)^{n+1} - x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f_k \right)(x)\end{aligned}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\Delta f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f_k.$$

Stąd dostajemy

$$(\Delta^{n+1} f_{n+1}) = (\Delta^n(\Delta f_{n+1})) = \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+1}{k} (\Delta^n f_k) \right) =$$

$$= \binom{n+1}{n} (\Delta^n f_n) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Pokażemy teraz kilka przykładów wykorzystania twierdzenia 1.3 oraz wniosków 1.4 i 1.5 do dowodu tożsamości kombinatorycznych.

Przykład 1. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $n \geq 1$ mamy $\Delta^n f = 0$ i z tożsamości (1.30) dostajemy

$$(\Delta^n f)(x-n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k},$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Jest to tożsamość (1.25).

Przykład 2. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $n \geq 2$ mamy $\Delta^n f = 0$ i z tożsamości (1.30) dostajemy

$$(\Delta^n f)(x-n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k),$$

czyli dla $x = n$ mamy

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k) = 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} n - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k = \\ &= n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}. \\ &= - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

więc

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0. \tag{1.33}$$

Nietrudno obliczyć, że

$$\sum_{k=0}^{1}(-1)^k k\binom{1}{k} = 1 \tag{1.34}$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k\binom{0}{k} = 0. \tag{1.35}$$

Przykład 3. Niech $n \geq 1$. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $\Delta^n f = n!$ i z tożsamości (1.30) dostajemy

$$(\Delta^n f)(x-n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x-k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n,$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n = n!. \tag{1.36}$$

Nietrudno sprawdzić, że ta tożsamość jest prawdziwa także dla $n = 0$.

Przykład 4. Weźmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(n) = 2^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy nietrudno zauważyć, że $\Delta^n f = f$ dla $n \geq 1$ i z tożsamości (1.32) dostajemy

$$(\Delta^n f)(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}2^k,$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}2^k = 1. \tag{1.37}$$

Ta tożsamość jest też prawdziwa dla $n = 0$.

Przykład 5. Niech dana będzie liczba naturalna m. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(n) = \binom{m+n}{m}$$

dla $n \geq 0$. Z równości (1.32) dla ciągu f otrzymujemy

$$(\Delta^k f)(0) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(j),$$

czyli

$$\begin{aligned}(\Delta^k f)(0) &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\binom{m+j}{m} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{k-j}\binom{m+k-j}{m} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}\binom{m+k-j}{m}.\end{aligned}$$

Z drugiej strony udowodnimy przez indukcję, że

$$(\Delta^k f)(n) = \binom{m+n}{m-k}.$$

Dla $k = 1$ mamy

$$\begin{aligned}(\Delta^k f)(n) &= (\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n) = \binom{m+n+1}{m} - \binom{m+n}{m} = \\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n}{m-1} - \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{m-1}.\end{aligned}$$

W kroku indukcyjnym załóżmy, że

$$(\Delta^k f)(n) = \binom{m+n}{m-k}.$$

Mamy udowodnić, że

$$(\Delta^{k+1} f)(n) = \binom{m+n}{m-k-1}.$$

Otóż

$$\begin{aligned}(\Delta^k f)(n) &= (\Delta(\Delta^k f))(n) = (\Delta^k f)(n+1) - (\Delta^k f)(n) = \\ &= \binom{m+n+1}{m-k} - \binom{m+n}{m-k} = \binom{m+n}{m-k} + \binom{m+n}{m-k-1} - \binom{m+n}{m-k} = \\ &= \binom{m+n}{m-k-1}.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równość

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{m+k-j}{m} = \binom{m}{m-k}. \tag{1.38}$$

Przyjmując teraz $m = n + k$, otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n+2k-j}{n+k} = \binom{n+k}{n}. \tag{1.39}$$

Przykład 6. Niech teraz p i q będą dowolnymi liczbami naturalnymi i przyjmijmy

$$f(n) = \binom{p-n}{q}$$

dla $n \geq 0$. Z równości (1.32) dla ciągu f otrzymujemy

$$(\Delta^i f)(0) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f(j),$$

czyli

$$\begin{aligned}(\Delta^i f)(0) &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{p-j}{q} = \\ &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \binom{p-j}{q}.\end{aligned}$$

Z drugiej strony udowodnimy przez indukcję, że

$$(\Delta^i f)(n) = (-1)^i \cdot \binom{p-n-i}{q-i}.$$

Dla $i = 1$ mamy

$$\begin{aligned}(\Delta^i f)(n) = (\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n) = \binom{p-n-1}{q} - \binom{p-n}{q} = \\ = \binom{p-n-1}{q} - \left(\binom{p-n-1}{q} + \binom{p-n-1}{q-1}\right) = -\binom{p-n-1}{q-1}.\end{aligned}$$

W kroku indukcyjnym załóżmy, że

$$(\Delta^i f)(n) = \binom{p-n-i}{q-i}.$$

Mamy udowodnić, że

$$(\Delta^{i+1} f)(n) = \binom{p-n-i-1}{q-i-1}.$$

Otóż

$$\begin{aligned}(\Delta^i f)(n) &= (\Delta(\Delta^i f))(n) = (\Delta^i f)(n+1) - (\Delta^i f)(n) = \\ &= \binom{p-n-i-1}{q-i} - \binom{p-n-i}{q-i} = \\ &= \binom{p-n-i-1}{q-i} - \left(\binom{p-n-i-1}{q-i} + \binom{p-n-i-1}{q-i-1}\right) = \\ &= \binom{p-n-i-1}{q-i-1}.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równość

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{p-j}{q} = (-1)^i \cdot \binom{p-i}{q-i}. \tag{1.40}$$

Dzieląc obie strony przez $(-1)^i$ i korzystając z tego, że $(-1)^{-j} = (-1)^j$, otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j}\binom{p-j}{q} = \binom{p-i}{q-i}.$$

Przyjmując teraz $p = n + 2k$ i $q = n$, otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j}\binom{n+2k-j}{n} = \binom{n+2k-i}{n-i} = \binom{n+2k-i}{2k}. \tag{1.41}$$

19. Tożsamość Li Żeń-Szua

W książce opublikowanej w Nankinie w 1867 roku chiński matematyk Li Żeń-Szua podał szereg interesujących tożsamości – zgodnie z chińską tradycją bez dowodu. Wśród tych tożsamości znalazła się następująca:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n+2k-i}{2k} = \binom{n+k}{k}^2. \tag{1.42}$$

Tożsamość tę nazywamy dzisiaj **tożsamością Li Żeń-Szua**. W tym paragrafie udowodnimy tę tożsamość, korzystając z wyników uzyskanych w poprzednim paragrafie. Najpierw jednak udowodnimy dwie tożsamości pomocnicze.

Niech k i j będą liczbami naturalnymi takimi, że $j \le k$. Wtedy

$$\sum_{i=j}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{i}{j} = \binom{k}{j}\binom{2k-j}{k}. \tag{1.43}$$

Mianowicie

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{i}{j} &= \sum_{i=j}^{k} \binom{k}{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=j}^{k} \binom{k}{i}\binom{k}{j}\binom{k-j}{i-j} = \\
&= \binom{k}{j}\sum_{i=j}^{k} \binom{k}{i}\binom{k-j}{i-j} = \binom{k}{j}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{k-j}{i-j} = \\
&= \binom{k}{j}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{k-j}{k-i} = \binom{k}{j}\binom{2k-j}{k}.
\end{aligned}$$

Druga tożsamość ma postać:

$$\binom{n+2k-j}{n}\binom{2k-j}{k} = \binom{n+2k-j}{n+k}\binom{n+k}{k}. \tag{1.44}$$

Udowodnimy ją korzystając kilkakrotnie z tożsamości (1.5). Mianowicie

$$\begin{aligned}\binom{n+2k-j}{n}\binom{2k-j}{k} &= \binom{n+2k-j}{2k-j}\binom{2k-j}{k} = \\ &= \binom{n+2k-j}{k}\binom{(n+2k-j)-k}{(2k-j)-k} = \\ &= \binom{n+2k-j}{k}\binom{n+k-j}{k-j} = \\ &= \binom{n+2k-j}{k}\binom{n+k-j}{n} = \\ &= \binom{n+2k-j}{k}\binom{(n+2k-j)-k}{(n+k)-k} = \\ &= \binom{n+2k-j}{n+k}\binom{n+k}{k}.\end{aligned}$$

Dowodzimy teraz tożsamości Li Żeń-Szua.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{n+2k-i}{2k} &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{n+2k-j}{n} = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{k}{i}^2\binom{i}{j}\binom{n+2k-j}{n} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}(-1)^j\binom{k}{i}^2\binom{i}{j}\binom{n+2k-j}{n} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+2k-j}{n}\sum_{i=j}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{i}{j} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+2k-j}{n}\binom{k}{j}\binom{2k-j}{k} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n+2k-j}{n}\binom{2k-j}{k} = \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n+2k-j}{n+k}\binom{n+k}{k} = \\ &= \binom{n+k}{k}\cdot\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n+2k-j}{n+k} = \\ &= \binom{n+k}{k}\cdot\binom{n+k}{n} = \\ &= \binom{n+k}{k}^2.\end{aligned}$$

W dowodzie korzystaliśmy najpierw z tożsamości (1.41), potem z (1.43), następnie z (1.44) i wreszcie z (1.39).

20. Współczynniki wielomianowe

Współczynnik dwumianowy $\binom{m}{n}$ jest równy liczbie n-elementowych pozdbiorów zbioru m-elementowego. Inaczej mówiąc, jest on równy liczbie podziałów zbioru m-elementowego na dwa zbiory: pierwszy n-elementowy i drugi $(m-n)$-elementowy. Należy tu zwrócić uwagę na ustaloną kolejność zbiorów. Ta definicja współczynnika dwumianowego ma naturalne uogólnienie.

Przypuśćmy, że dany jest ciąg liczb $(n_1, \ldots, n_k)$ takich, że $n_1 + \ldots + n_k = m$. **Współczynnikiem wielomianowym** $\binom{m}{n_1,\ldots,n_k}$ nazywamy liczbę ciągów $(A_1, \ldots, A_k)$ takich, że:

- $A_1, \ldots, A_k \subseteq [m]$,
- zbiory $A_1, \ldots, A_k$ są parami rozłączne,
- $A_1 \cup \ldots \cup A_k = [m]$,
- $|A_1| = n_1, \ldots, |A_k| = n_k$.

W szczególności dla $k = 2$ mamy $\binom{m}{n_1,n_2} = \binom{m}{n_1}$, gdzie po lewej stronie mamy współczynnik wielomianowy, a po prawej znany nam współczynnik dwumianowy.

Rodzinę parami rozłącznych podzbiorów zbioru A, dających w sumie cały zbiór A, nazywamy **podziałem** tego zbioru A. Jeśli ustalimy kolejność zbiorów w tej rodzinie, czyli jeśli mamy do czynienia z ciągiem (a nie zbiorem) podzbiorów zbioru A, to będziemy mówić o **uporządkowanych** podziałach zbioru A. Współczynnik wielomianowy $\binom{m}{n_1,\ldots,n_k}$ jest zatem równy liczbie uporządkowanych podziałów zbioru $[m]$ na k podzbiorów, z których pierwszy ma n_1 elementów, drugi ma n_2 elementów i tak dalej, aż wreszcie ostatni ma n_k elementów.

Inaczej mówiąc, współczynnik wielomianowy $\binom{m}{n_1,\ldots,n_k}$ (gdzie $n_1 + \ldots + n_k = m$) jest liczbą ciągów $(x_1, \ldots, x_m)$ długości m o wyrazach ze zbioru $[k]$, mających n_1 wyrazów równych 1, n_2 wyrazów równych 2, $\ldots$ i wreszcie mających n_k wyrazów równych k. Symbolicznie możemy to zapisać w następujący sposób:

$$\left|\left\{f \in [k]^{[m]} : \ |f^{-1}(1)| = n_1, \ldots, |f^{-1}(k)| = n_k\right\}\right| = \binom{m}{n_1, \ldots, n_k}.$$

Współczynniki wielomianowe mają następującą własność (która może być wykorzystana także do zdefiniowania ich przez indukcję względem k):

$$\binom{m}{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}} = \binom{m}{n_{k+1}} \cdot \binom{m - n_{k+1}}{n_1, \ldots, n_k}. \tag{1.45}$$

Aby bowiem podzielić zbiór $[m]$ na $k+1$ zbiorów, wybieramy najpierw n_{k+1}-elementowy zbiór A_{k+1}, a następnie zbiór mający pozostałe $m - n_{k+1}$ elemenów dzielimy na k podzbiorów. Stąd wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.6. Jeśli $n_1 + \ldots + n_k = m$, to

$$\binom{m}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{m!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{1.46}$$

Dowód. Stosujemy indukcję względem k. Dla $k = 2$ mamy $n_1 + n_2 = m$, skąd dostajemy $n_2 = m - n_1$. Mamy teraz

$$\binom{m}{n_1, n_2} = \binom{m}{n_1} = \frac{m!}{n_1! \cdot (m - n_1)!} = \frac{m!}{n_1! \cdot n_2!}.$$

W kroku indukcyjnym mamy natomiast

$$\begin{aligned}\binom{m}{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}} &= \binom{m}{n_{k+1}} \cdot \binom{m - n_{k+1}}{n_1, \ldots, n_k} = \\ &= \frac{m!}{n_{k+1}! \cdot (m - n_{k+1})!} \cdot \frac{(m - n_{k+1})!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \\ &= \frac{m!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k! \cdot n_{k+1}!},\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Z tożsamości (1.45) wynika, że

$$\binom{m}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{m}{n_1} \cdot \binom{m - n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{m - n_1 - \ldots - n_{k-1}}{n_k}. \qquad (1.47)$$

Paragraf ten zakończymy podaniem uogólnienia wzoru dwumianowego Newtona. Ten wzór tłumaczy nazwę współczynnika wielomianowego. Mamy mianowicie wzór

$$(a_1 + \ldots + a_k)^m = \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_k) \\ n_1 + \ldots + n_k = m}} \binom{m}{n_1, \ldots, n_k} \cdot a_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k}. \qquad (1.48)$$

Dowód tego wzoru, podobny do dowodu wzoru (1.10), pozostawiamy jako ćwiczenie.

21. Jeszcze jeden dowód tożsamości Li Żeń-Szua

Przypomnijmy tożsamość Li Żeń-Szua:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \binom{n + 2k - i}{2k} = \binom{n + k}{k}^2. \qquad (1.42)$$

Udowodnimy ją przy dodatkowym założeniu, że $k \leq n$. Dokładniej mówiąc, pokażemy dowód kombinatoryczny tożsamości nieco ogólniejszej. Przypuśćmy zatem, że $k \leq l$ oraz $k \leq n$. Wówczas

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{l}{i} \binom{n + k + l - i}{k + l} = \binom{n + k}{k} \binom{n + l}{l}. \qquad (1.49)$$

Pomnóżmy obie strony tej tożsamości przez $\binom{k+l}{k}$. Otrzymamy

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{l}{i} \binom{n + k + l - i}{k + l} \binom{k + l}{k} = \binom{n + k}{k} \binom{n + l}{l} \binom{k + l}{k}. \qquad (1.50)$$

Skorzystamy teraz ze współczynników wielomianowych. Stosując kilkakrotnie tożsamość (1.45), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\binom{n+k+l-i}{k-i,l-i,n-i,i,i} &= \binom{n+k+l-i}{n-i}\cdot\binom{k+l}{k-i,l-i,i,i} = \\ &= \binom{n+k+l-i}{k+l}\cdot\binom{k+l}{i}\cdot\binom{k+l-i}{k-i,l-i,i} = \\ &= \binom{n+k+l-i}{k+l}\cdot\binom{k+l}{i}\cdot\binom{k+l-i}{k-i}\cdot\binom{l}{l-i,i} = \\ &= \binom{n+k+l-i}{k+l}\cdot\binom{k+l}{i}\cdot\binom{k+l-i}{k-i}\cdot\binom{l}{i} = \\ &= \binom{n+k+l-i}{k+l}\cdot\binom{l}{i}\cdot\binom{k+l}{i}\cdot\binom{k+l-i}{k-i} = \\ &= \binom{n+k+l-i}{k+l}\cdot\binom{l}{i}\cdot\binom{k+l}{k}\cdot\binom{k}{i}\end{aligned}$$

Tożsamość (1.50) jest zatem równoważna tożsamości

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+k+l-i}{k-i,l-i,n-i,i,i} = \binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}\binom{k+l}{k}. \tag{1.51}$$

Udowodnimy teraz tożsamość (1.51) przy założeniu, że $k=\min\{k,l,n\}$.

Niech A będzie zbiorem wszystkich trójek (π,ρ,σ), gdzie:

- π jest dowolnym ciągiem długości $k+l$ mającym k wyrazów równych 1 i l wyrazów równych 2.
- ρ jest dowolnym ciągiem długości $l+n$ mającym l wyrazów równych 2 i n wyrazów równych 3.
- σ jest dowolnym ciągiem długości $k+n$ mającym k wyrazów równych 1 i n wyrazów równych 3.

Inaczej mówiąc, $A = A_1\times A_2\times A_3$, gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \bigl\{\pi\in\{1,2\}^{[k+l]}:\ |\pi^{-1}(1)|=k, |\pi^{-1}(2)|=l\bigr\},\\ A_2 &= \bigl\{\rho\in\{2,3\}^{[l+n]}:\ |\rho^{-1}(2)|=l, |\rho^{-1}(3)|=n\bigr\},\\ A_3 &= \bigl\{\sigma\in\{1,3\}^{[k+n]}:\ |\sigma^{-1}(1)|=k, |\sigma^{-1}(3)|=n\bigr\}.\end{aligned}$$

Oczywiście istnieje $\binom{k+l}{k}$ ciągów π, $\binom{n+l}{l}$ ciągów ρ oraz $\binom{n+k}{k}$ ciągów σ:

$$|A_1| = \binom{k+l}{k},\quad |A_2| = \binom{l+n}{l},\quad |A_3| = \binom{k+n}{k}.$$

Zatem

$$|A| = \binom{n+k}{k}\cdot\binom{n+l}{l}\cdot\binom{k+l}{k}.$$

Niech teraz B będzie zbiorem wszystkich ciągów τ długości $n+k+l-i$, (gdzie i przebiega zbiór $\{0,1,\ldots,k\}$) mających:

- $k-i$ wyrazów równych 1,
- $l-i$ wyrazów równych 2,
- $n-i$ wyrazów równych 3,
- i wyrazów równych 4,
- i wyrazów równych 5.

Inaczej mówiąc, niech X oznacza zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach w zbiorze [5]. Wtedy

$$B = \bigcup_{i=0}^{k} B_i,$$

gdzie

$$B_i = \left\{\tau \in X : |\tau^{-1}(1)| = k-i, |\tau^{-1}(2)| = l-i, |\tau^{-1}(3)| = n-i, |\tau^{-1}(4)| = i, |\tau^{-1}(5)| = i\right\}$$

dla $i = 0,1,\ldots,k$. Oczywiście jeśli $\tau \in B_i$, to $\tau : [n+k+l-i] \to [5]$. Wprost z definicji współczynników wielomianowych wynika, że

$$|B_i| = \binom{n+k+l-i}{k-i, l-i, n-i, i, i},$$

dla $i = 0,1,\ldots,k$. Zatem

$$|B| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k+l-i}{k-i, l-i, n-i, i, i}.$$

Wystarczy teraz dowieść, że zbiory A i B mają tyle samo elementów. W tym celu pokażemy, w jaki sposób można z trójki ciągów $(\pi,\rho,\sigma) \in A$ utworzyć ciąg $\tau \in B$ tak, by otrzymana odpowiedniość była wzajemnie jednoznaczna.

Przypuśćmy zatem, że mamy trójkę ciągów $(\pi,\rho,\sigma) \in A$. Pamiętajmy, że ciągi π i ρ mają po k wyrazów równych 1, ciągi ρ i σ mają po l wyrazów równych 2 oraz ciągi π i σ mają po n wyrazów równych 3. Niech ε oznacza ciąg pusty. Przyjmijmy na początku, że $\tau = \varepsilon$. W kolejnych krokach będziemy dopisywać wyrazy na końcu ciągu τ, skreślając przy tym pewne wyrazy ciągów π, ρ, σ. Robimy to, kierując się następującymi regułami:

1) jeśli $\pi_1 = \sigma_1 = 1$, to z każdego z ciągów π i σ usuwamy pierwszy wyraz i na końcu ciągu τ dopisujemy 1;
2) jeśli $\pi_1 = \rho_1 = 2$, to z każdego z ciągów π i ρ usuwamy pierwszy wyraz i na końcu ciągu τ dopisujemy 2;
3) jeśli $\rho_1 = \sigma_1 = 3$, to z każdego z ciągów ρ i σ usuwamy pierwszy wyraz i na końcu ciągu τ dopisujemy 3;
4) jeśli $\pi_1 = 1$, $\rho_1 = 2$ i $\sigma_1 = 3$, to z każdego z ciągów π, ρ i σ usuwamy pierwszy wyraz i na końcu ciągu τ dopisujemy 4;
5) jeśli $\pi_1 = 2$, $\rho_1 = 3$ i $\sigma_1 = 1$, to z każdego z ciągów π, ρ i σ usuwamy pierwszy wyraz i na końcu ciągu τ dopisujemy 5.

Nietrudno zauważyć, że jeśli wszystkie ciągi π, ρ i σ są niepuste, to zachodzi dokładnie jeden warunek opisany w punktach od 1) do 5) powyżej. Musimy zastanowić się, jak wyglądają dwa pozostałe ciągi, jeśli jeden z nich stanie się pusty (w wyniku dokonywanych skreśleń pierwszych wyrazów). Przypuśćmy zatem, że w pewnym momencie w czasie konstrukcji ciągu τ usuwamy jedyny wyraz któregoś z ciągów, np. z ciągu σ. Przypuśćmy, że do tego momentu włącznie i razy stosowaliśmy regułę 4) (usuwając pierwszy wyraz każdego ciągu), j razy stosowaliśmy regułe 5) oraz p, q i r razy stosowaliśmy odpowiednio reguły 1), 2) i 3). Zatem:

- z ciągu π usunęliśmy $i+p$ wyrazów równych 1 i $j+q$ wyrazów równych 2;
- z ciągu ρ usunęliśmy $i+q$ wyrazów równych 2 i $j+r$ wyrazów równych 3;
- z ciągu σ usunęliśmy $j+p$ wyrazów równych 1 i $i+r$ wyrazów równych 3.

Ponieważ z ciągu σ usunęliśmy wszystkie wyrazy, więc $j+p=k$ oraz $i+r=n$. W ciągu π pozostało zatem $k-(i+p)=(j+p)-(i+p)=j-i$ wyrazów równych 1 oraz $l-(j+q)$ wyrazów równych 2. W ciągu ρ pozostało natomiast $l-(i+q)$ wyrazów równych 2 oraz $n-(j+r)=(i+r)-(j+r)=i-j$ wyrazów równych 3. Zauważmy jednak, że $i-j=-(j-i)$. Jeśli $i \neq j$, to jedna z liczb $i-j$ i $j-i$ jest ujemna, co jest niemożliwe. Zatem $i=j$. To pokazuje, że w chwili, gdy usuniemy wszystkie wyrazy ciągu σ, w pozostałych ciągach pozostaną już tylko wyrazy równe 2. Ponadto liczba czwórek dopisanych do ciągu τ jest równa liczbie dopisanych piątek. Ponieważ $l-(j+q)=l-(i+q)$, więc w ciągach π i ρ zostało tyle samo dwójek. To znaczy, że od tej chwili będziemy stosować już tylko regułę 2), do ciągu τ dopisując $l-(j+q)$ dwójek.

Podobnie będzie, gdy wyczerpiemy wszystkie wyrazy ciągu π lub ρ. Jeśli zatem usuniemy wszystkie wyrazy któregoś z trzech ciągów, to od tego momentu do końca będziemy stosować reguły od 1) do 3). Może się też okazać, że usuniemy jednocześnie pierwsze wyrazy z trzech ciągów długości 1; wtedy jednocześnie wszystkie trzy ciągi staną się puste. Poprzednie rozumowanie obejmuje także ten przypadek; nigdzie nie zakładaliśmy, że liczba pozostałych dwójek jest różna od zera. Wykazaliśmy przy tym, że w otrzymanym ciągu τ liczba czwórek jest równa liczbie piątek. Jeśli i razy dopisaliśmy do ciągu τ czwórkę i tyle samo razy piątkę, to także $k-i$ razy dopisaliśmy jedynkę (bo jeszcze tyle jedynek musieliśmy usunąć z ciągu π), $l-i$ razy dopisaliśmy dwójkę i $n-i$ razy trójkę. Otrzymany ciąg τ należy zatem do zbioru B.

Popatrzmy teraz na trzy przykłady zastosowania opisanej procedury. W kolejnych wierszach wyrazy usuwane z ciągów π, ρ i σ i dopisywane do ciągu τ są wytłuszczone. We wszystkich przykładach $k=2$, $l=3$ i $n=4$. A oto pierwszy przykład:

π	ρ	σ	τ
$(\mathbf{1},2,1,2,2)$	$(3,2,2,3,3,2,3)$	$(\mathbf{1},3,1,3,3,3)$	$(\mathbf{1})$
$(2,1,2,2)$	$(\mathbf{3},2,2,3,3,2,3)$	$(\mathbf{3},1,3,3,3)$	$(1,\mathbf{3})$
$(\mathbf{2},1,2,2)$	$(\mathbf{2},2,3,3,2,3)$	$(1,3,3,3)$	$(1,3,\mathbf{2})$
$(\mathbf{1},2,2)$	$(2,3,3,2,3)$	$(\mathbf{1},3,3,3)$	$(1,3,2,\mathbf{1})$
$(\mathbf{2},2)$	$(\mathbf{2},3,3,2,3)$	$(3,3,3)$	$(1,3,2,1,\mathbf{2})$
(2)	$(\mathbf{3},3,2,3)$	$(\mathbf{3},3,3)$	$(1,3,2,1,2,\mathbf{3})$
(2)	$(\mathbf{3},2,3)$	$(\mathbf{3},3)$	$(1,3,2,1,2,3,\mathbf{3})$
$(\mathbf{2})$	$(\mathbf{2},3)$	(3)	$(1,3,2,1,2,3,3,\mathbf{2})$
ε	$(\mathbf{3})$	$(\mathbf{3})$	$(1,3,2,1,2,3,3,2,\mathbf{3})$

Z ciągów $\pi = (1, 2, 1, 2, 2)$, $\rho = (3, 2, 2, 3, 3, 2, 3)$ i $\sigma = (1, 3, 1, 3, 3, 3)$ otrzymaliśmy ciąg $\tau = (1, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 2, 3)$. Zauważmy, że w ciągu τ nie ma ani jednej czwórki i piątki; za każdym razem korzystaliśmy bowiem z reguł od 1) do 3). Gdy skreśliliśmy wszystkie wyrazy ciągu π, w dwóch pozostałych ciągach mieliśmy po jednej trójce. A teraz drugi przykład:

π	ρ	σ	τ
$(2, 2, 1, 2, 1)$	$(\mathbf{3}, 2, 3, 2, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{3}, 1, 1, 3, 3, 3)$	$(\mathbf{3})$
$(\mathbf{2}, 2, 1, 2, 1)$	$(\mathbf{2}, 3, 2, 3, 3, 2)$	$(1, 1, 3, 3, 3)$	$(3, \mathbf{2})$
$(\mathbf{2}, 1, 2, 1)$	$(\mathbf{3}, 2, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{1}, 1, 3, 3, 3)$	$(3, 2, \mathbf{5})$
$(\mathbf{1}, 2, 1)$	$(2, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{1}, 3, 3, 3)$	$(3, 2, 5, \mathbf{1})$
$(\mathbf{2}, 1)$	$(\mathbf{2}, 3, 3, 2)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 2, 5, 1, \mathbf{2})$
(1)	$(\mathbf{3}, 3, 2)$	$(\mathbf{3}, 3, 3)$	$(3, 2, 5, 1, 2, \mathbf{3})$
(1)	$(\mathbf{3}, 2)$	$(\mathbf{3}, 3)$	$(3, 2, 5, 1, 2, 3, \mathbf{3})$
$(\mathbf{1})$	$(\mathbf{2})$	$(\mathbf{3})$	$(3, 2, 5, 1, 2, 3, 3, \mathbf{4})$

Tym razem z ciągów $\pi = (2, 2, 1, 2, 1)$, $\rho = (3, 2, 3, 2, 3, 3, 2)$ i $\sigma = (3, 1, 1, 3, 3, 3)$ otrzymaliśmy ciąg $\tau = (3, 2, 5, 1, 2, 3, 3, 4)$. Po jednym razie korzystaliśmy z reguł 4) i 5); to dało po jednym wyrazie 4 i 5. Zauważmy, że w tym przykładzie jednocześnie wyczerpaliśmy wszystkie wyrazy trzech ciągów. Wreszcie popatrzmy na trzeci przykład:

π	ρ	σ	τ
$(1, 1, 2, 2, 2)$	$(\mathbf{3}, 2, 2, 3, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{3}, 3, 3, 1, 3, 1)$	$(\mathbf{3})$
$(\mathbf{1}, 1, 2, 2, 2)$	$(\mathbf{2}, 2, 3, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{3}, 3, 1, 3, 1)$	$(3, \mathbf{4})$
$(\mathbf{1}, 2, 2, 2)$	$(\mathbf{2}, 3, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{3}, 1, 3, 1)$	$(3, 4, \mathbf{4})$
$(\mathbf{2}, 2, 2)$	$(\mathbf{3}, 3, 3, 2)$	$(\mathbf{1}, 3, 1)$	$(3, 4, 4, \mathbf{5})$
$(2, 2)$	$(\mathbf{3}, 3, 2)$	$(\mathbf{3}, 1)$	$(3, 4, 4, 5, \mathbf{3})$
$(\mathbf{2}, 2)$	$(\mathbf{3}, 2)$	$(\mathbf{1})$	$(3, 4, 4, 5, 3, \mathbf{5})$
$(\mathbf{2})$	$(\mathbf{2})$	ε	$(3, 4, 4, 5, 3, 5, \mathbf{2})$

W tym przykładzie z ciągów $\pi = (1, 1, 2, 2, 2)$, $\rho = (3, 2, 2, 3, 3, 3, 2)$ i $\sigma = (3, 3, 3, 1, 3, 1)$ otrzymaliśmy ciąg $\tau = (3, 4, 4, 5, 3, 5, 2)$. Zauważmy, że w ciągu τ nie występuje wyraz równy 1; mianowicie w tym przykładzie $i = k = 2$.

Z każdego ciągu $\tau \in B$ możemy w jednoznaczny sposób otrzymać trójkę ciągów (π, ρ, σ) należącą do zbioru A. Najpierw przyjmujemy $\pi = \rho = \sigma = \varepsilon$. Później kierujemy się następującymi regułami:

1) jeśli $\tau_1 = 1$, to na końcu ciągów π i σ dopisujemy jedynkę,
2) jeśli $\tau_1 = 2$, to na końcu ciągów π i ρ dopisujemy dwójkę,
3) jeśli $\tau_1 = 3$, to na końcu ciągów ρ i σ dopisujemy trójkę,
4) jeśli $\tau_1 = 4$, to na końcu ciągów π, ρ i σ odpowiednio dopisujemy jedynkę, dwójkę i trójkę,
5) jeśli $\tau_1 = 5$, to na końcu ciągów π, ρ i σ odpowiednio dopisujemy dwójkę, trójkę i jedynkę,
6) za każdym razem z ciągu τ usuwamy pierwszy wyraz.

Działanie tej procedury zilustrujemy przykładami. Niech $\tau = (1,3,2,1,2,3,3,2,3)$. Tak jak poprzednio wyrazy usuwane z ciągu τ i dopisywane do ciągów π, ρ i σ są wytłuszczone:

τ	π	ρ	σ
$(\mathbf{1},3,2,1,2,3,3,2,3)$	$(\mathbf{1})$	ε	$(\mathbf{1})$
$(\mathbf{3},2,1,2,3,3,2,3)$	(1)	$(\mathbf{3})$	$(1,\mathbf{3})$
$(\mathbf{2},1,2,3,3,2,3)$	$(1,\mathbf{2})$	$(3,\mathbf{2})$	$(1,3)$
$(\mathbf{1},2,3,3,2,3)$	$(1,2,\mathbf{1})$	$(3,2)$	$(1,3,\mathbf{1})$
$(\mathbf{2},3,3,2,3)$	$(1,2,1,\mathbf{2})$	$(3,2,\mathbf{2})$	$(1,3,1)$
$(\mathbf{3},3,2,3)$	$(1,2,1,2)$	$(3,2,2,\mathbf{3})$	$(1,3,1,\mathbf{3})$
$(\mathbf{3},2,3)$	$(1,2,1,2)$	$(3,2,2,3,\mathbf{3})$	$(1,3,1,3,\mathbf{3})$
$(\mathbf{2},3)$	$(1,2,1,2,\mathbf{2})$	$(3,2,2,3,3,\mathbf{2})$	$(1,3,1,3,3)$
$(\mathbf{3})$	$(1,2,1,2,2)$	$(3,2,2,3,3,2,\mathbf{3})$	$(1,3,1,3,3,\mathbf{3})$

Z ciągu $\tau = (1,3,2,1,2,3,3,2,3)$ odtworzyliśmy zatem tę samą trójkę ciągów (π,ρ,σ), którą widzieliśmy w pierwszym przykładzie. Przykład ten ilustruje zatem procedurę odwrotną do pierwszego przykładu. Następne przykłady będą w tym sensie odwrotne do przykładu drugiego i trzeciego. A oto przykład drugi:

τ	π	ρ	σ
$(\mathbf{3},2,5,1,2,3,3,4)$	ε	$(\mathbf{3})$	$(\mathbf{3})$
$(\mathbf{2},5,1,2,3,3,4)$	$(\mathbf{2})$	$(3,\mathbf{2})$	(3)
$(\mathbf{5},1,2,3,3,4)$	$(2,\mathbf{2})$	$(3,2,\mathbf{3})$	$(3,\mathbf{1})$
$(\mathbf{1},2,3,3,4)$	$(2,2,\mathbf{1})$	$(3,2,3)$	$(3,1,\mathbf{1})$
$(\mathbf{2},3,3,4)$	$(2,2,1,\mathbf{2})$	$(3,2,3,\mathbf{2})$	$(3,1,1)$
$(\mathbf{3},3,4)$	$(2,2,1,2)$	$(3,2,3,2,\mathbf{3})$	$(3,1,1,\mathbf{3})$
$(\mathbf{3},4)$	$(2,2,1,2)$	$(3,2,3,2,3,\mathbf{3})$	$(3,1,1,3,\mathbf{3})$
$(\mathbf{4})$	$(2,2,1,2,\mathbf{1})$	$(3,2,3,2,3,3,\mathbf{2})$	$(3,1,1,3,3,\mathbf{3})$

Wreszcie trzeci przykład:

τ	π	ρ	σ
$(\mathbf{3},4,4,5,3,5,2)$	ε	$(\mathbf{3})$	$(\mathbf{3})$
$(\mathbf{4},4,5,3,5,2)$	$(\mathbf{1})$	$(3,\mathbf{2})$	$(3,\mathbf{3})$
$(\mathbf{4},5,3,5,2)$	$(1,\mathbf{1})$	$(3,2,\mathbf{2})$	$(3,3,\mathbf{3})$
$(\mathbf{5},3,5,2)$	$(1,1,\mathbf{2})$	$(3,2,2,\mathbf{3})$	$(3,3,3,\mathbf{1})$
$(\mathbf{3},5,2)$	$(1,1,2)$	$(3,2,2,3,\mathbf{3})$	$(3,3,3,1,\mathbf{3})$
$(\mathbf{5},2)$	$(1,1,2,\mathbf{2})$	$(3,2,2,3,3,\mathbf{3})$	$(3,3,3,1,3,\mathbf{1})$
$(\mathbf{2})$	$(1,1,2,2,\mathbf{2})$	$(3,2,2,3,3,3,\mathbf{2})$	$(3,3,3,1,3,1)$

Nietrudno zauważyć, że z dowolnego ciągu $\tau \in B$ otrzymamy rzeczywiście trójkę ciągów (π,ρ,σ) należącą do zbioru A i że opisane dwie procedury są odwrotne do siebie. Szczegóły dowodu pozostawiamy jako ćwiczenie. Widzimy zatem, że zbiory A i B są równoliczne i w ten sposób dowód uogólnionej tożsamości Li Żeń-Szua (1.44) jest zakończony.

Spis tożsamości kombinatorycznych

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1. \tag{1.1}$$

$$n \cdot \binom{m}{n} = m \cdot \binom{m-1}{n-1}, \tag{1.2}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{n} \cdot \binom{m-1}{n-1}. \tag{1.3}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}. \tag{1.4}$$

$$n \cdot \binom{m}{n} = (m-n+1) \cdot \binom{m}{n-1}. \tag{1.5}$$

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}. \tag{1.6}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}. \tag{1.7}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}. \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^n. \tag{1.9}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 1. \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}. \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}, \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{n} = \binom{m+n+1}{n+1}. \tag{1.14}$$

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}. \tag{1.15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}. \tag{1.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}. \tag{1.17}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}. \tag{1.18}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \binom{n+1}{3}. \tag{1.19}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n. \tag{1.20}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.21}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.22}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{4} \cdot \binom{2n+2}{3}. \tag{1.23}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{1.24}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1. \tag{1.25}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 1 \quad \text{dla } n = 0. \tag{1.26}$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m}. \tag{1.27}$$

$$\text{liczba dróg z } A \text{ do } B = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}. \tag{1.28}$$

$$(\Delta^k f)(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j). \tag{1.29}$$

$$(\Delta^k f)(x-k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} f(x-j). \tag{1.30}$$

$$(\Delta^k f)(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(n+j). \tag{1.31}$$

$$(\Delta^k f)(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j). \tag{1.32}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } n \geq 2. \tag{1.33}$$

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k k \binom{1}{k} = 1 \tag{1.34}$$

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k k \binom{0}{k} = 0. \tag{1.35}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n = n!. \tag{1.36}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 2^k = 1. \tag{1.37}$$

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{m+k-j}{m} = \binom{m}{m-k}. \tag{1.38}$$

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n+2k-j}{n+k} = \binom{n+k}{n}. \tag{1.39}$$

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{p-j}{q} = (-1)^i \cdot \binom{p-i}{q-i}. \tag{1.40}$$

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{n+2k-j}{n} = \binom{n+2k-i}{n-i} = \binom{n+2k-i}{2k}. \tag{1.41}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{n+2k-i}{2k}=\binom{n+k}{k}^2. \tag{1.42}$$

$$\sum_{i=j}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{i}{j}=\binom{k}{j}\binom{2k-j}{k}. \tag{1.43}$$

$$\binom{n+2k-j}{n}\binom{2k-j}{k}=\binom{n+2k-j}{n+k}\binom{n+k}{k}. \tag{1.44}$$

$$\binom{m}{n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}}=\binom{m}{n_{k+1}}\cdot\binom{m-n_{k+1}}{n_1,\ldots,n_k}. \tag{1.45}$$

$$\binom{m}{n_1,\ldots,n_k}=\frac{m!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}. \tag{1.46}$$

$$\binom{m}{n_1,\ldots,n_k}=\binom{m}{n_1}\cdot\binom{m-n_1}{n_2}\cdot\ldots\cdot\binom{m-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}. \tag{1.47}$$

$$(a_1+\ldots+a_k)^m=\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\\ n_1+\ldots+n_k=m}}\binom{m}{n_1,\ldots,n_k}\cdot a_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{n_k}. \tag{1.48}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{n+k+l-i}{k+l}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}. \tag{1.49}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{n+k+l-i}{k+l}\binom{k+l}{k}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}\binom{k+l}{k}. \tag{1.50}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+k+l-i}{k-i,l-i,n-i,i,i}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}\binom{k+l}{k}. \tag{1.51}$$