Numer indeksu: WZORCOWY

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

20 lutego 2015

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuły $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ i $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, w którym te formuły mają różne wartości.

$\sigma(p) = \mathsf{F}$, $\sigma(q) = \mathsf{T}$, $\sigma(r) = \mathsf{F}$

Zadanie 2 (2 punkty). W prostokąty poniżej wpisz dwie formuły równoważne formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, odpowiednio w koniunkcyjnej oraz dysjunkcyjnej postaci normalnej.

CNF $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

DNF $(p \wedge \neg q) \vee r$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli formuła $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej tautologii w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 4 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \dots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \dots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall n \Big((\exists d \;\; nd = x \wedge \exists d \;\; nd = y) \Rightarrow n \leq z \Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$\forall n \forall k_1 \forall k_2 \;\; (k_1 n = x) \;\wedge\; (k_2 n = y) \Rightarrow n \leq z$

Wskazówka: ta formuła interpretowana w zbiorze liczb naturalnych mówi, że liczba z jest nie nie mniejsza od największego wspólnego dzielnika liczb x i y.

Zadanie 5 (2 punkty). *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco: $A \dot{-} B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Jeśli dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzi równość $A \dot{-} (B\cap C) = (A \dot{-} B)\cap(A \dot{-} C)$ to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$A = B = \{1\},\ C = \emptyset$

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t) \supseteq \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$ zachodzi dla wszystkich zbiorów indeksów T oraz wszystkich indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ oraz $\{B_t\}_{t\in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$T = \{1,2\},\ A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ B_1 = \{2\},\ B_2 = \{1\}$

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p\vee q\vee\neg r,\ p\vee\neg r,\ q\vee r,\ \neg q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, kin K i filmów F oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times K$, $\mathit{Obejrzał} \subseteq O \times F$ i $\mathit{Wyświetla} \subseteq K \times F$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich kinach, jakie osoby obejrzały jakie filmy oraz jakie kina wyświetlają jakie filmy. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x\in O \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które bywają tylko w kinach wyświetlających (niekoniecznie wszystkie) filmy, które te osoby już obejrzały.

$$\forall k\ \mathit{Bywa}(x,k) \Rightarrow \Big(\exists f\ \ \mathit{Wyświetla}(k,f) \wedge \mathit{Obejrzał}(x,f)\Big)$$

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli istnieje najmniejsza (ze względu na inkluzję $\subseteq$) relacja równoważności na zbiorze $\{0,1,2\}$, która zawiera parę $\langle 1,2\rangle$, to w prostokąt poniżej wpisz tę relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

$\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

Numer indeksu: WZORCOWY

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy funkcje $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$. W prostokąt poniżej wpisz formułę mówiącą, że złożenie funkcji f i g nie jest funkcją „na".

$$\exists c \in C\ \forall a \in A\ \ g(f(a)) \neq c$$

Zadanie 11 (2 punkty). Nie używając słów języka naturalnego (czyli używając jedynie formuł) uzupełnij poniższy tekst tak, aby otrzymać poprawny dowód następującego twierdzenia: Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $B \subseteq A$ to $(A \setminus B) \cup B \subseteq A$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy *wprost*. Rozważmy dowolne zbiory A i B i załóżmy, że $\boxed{B \subseteq A}$.

Weźmy dowolny element x ze zbioru $\boxed{(A \setminus B) \cup B}$. Wtedy $\boxed{x \in A \setminus B}$ lub $\boxed{x \in B}$. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

(i) $\boxed{x \in A \setminus B}$. Wtedy $\boxed{x \in A}$ oraz $\boxed{x \notin B}$, zatem w szczególności $\boxed{x \in A}$.

(ii) $\boxed{x \in B}$. Wtedy z założenia $\boxed{B \subseteq A}$ dostajemy, że $\boxed{x \in A}$.

W obu przypadkach otrzymaliśmy, że x należy do zbioru $\boxed{A}$, co kończy dowód inkluzji $\boxed{(A \setminus B) \cup B \subseteq A}$.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,2]) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ daną wzorem $f(X, n) = \langle n, \{\frac{x}{2} \mid x \in X\}\rangle$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

$$f : \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0,2]) \times \mathbb{N}, \qquad f(n, X) = \langle\{2x \mid x \in X\}, n\rangle$$

Zadanie 13 (2 punkty). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, które *nie są* „na". Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc nie większą niż $\aleph_0$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $F : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ ma moc co najmniej continuum, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną funkcję różnowartościową $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}$. A jeśli żaden z tych przypadków nie zachodzi, wpisz słowo „NIE".

$$(G(X))(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n \in X \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Zadanie 14 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}}$	$\{1,2,3\}\times\mathbb{Q}$	$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\{1,2,3\})$	$(\{1,2,3\}\times\{1,2\})^{\{1,2\}}$	$\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$	$\mathcal{P}(\{1,2,3\})\cap\mathcal{P}(\mathbb{R})$
$\mathfrak{c}$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\mathfrak{c}$	8	36	$\aleph_0$	8

Zadanie 15 (2 punkty). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} f = g \vee \exists n\ (f(n) < g(n) \wedge \forall i < n\ \ f(i) = g(i))$.

Niech $f_i(n) = \begin{cases} n & \text{dla } n = i \\ 0 & \text{dla } n \neq i \end{cases}$ i niech $X = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wpisz w prostokąty poniżej funkcje będące odpowiednio najmniejszym i największym elementem zbioru X w tym porządku lub słowo „NIE", jeśli odpowiedni element nie istnieje.

$\min X$	f_0	$\max X$	f_1

Zadanie 16 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = x^2$. W prostokąty poniżej wpisz odpowiednio obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów w odwzorowaniu f.

$f[[1,2]] =$	$[1,4]$	$f[[-5,4]] =$	$[0,25]$
$f^{-1}[[1,2]] =$	$[-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}]$	$f^{-1}[[-5,4]] =$	$[-2,2]$

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokącie poniżej narysuj diagram Hassego dla porządku $\langle \{0,1\} \times \{2,3\}, \leq_{lex} \rangle$.

Zadanie 18 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech parami nieizomorficznych porządków.

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle, \quad \langle \mathbb{N}^*, \leq_{lex} \rangle, \quad \langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq \rangle$

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli porządek leksykograficzny na skończonych ciągach zero-jedynkowych $\langle \{0,1\}^*, \leq_{lex} \rangle$ jest regularny, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „REGULARNY". W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego ten porządek nie jest regularny.

Zbiór $\{0^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie ma elementu minimalnego

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE".

$f(g(y), a) \overset{?}{=} f(z, z)$	NIE	$f(g(y), g(x)) \overset{?}{=} f(z, z)$	$[x/y, z/g(y)]$
$f(x, g(y)) \overset{?}{=} f(z, z)$	$[x/g(y), z/g(y)]$	$f(x, g(x)) \overset{?}{=} f(z, z)$	NIE