Rachunek prawdopodobieństwa dla informatyków – lista 3

1. (10p) Rozważmy rodzinę z trojgiem dzieci. Niech „c" oznacza chłopca, „d" – dziewczynkę. Płeć dziecka jest jednakowo prawdopodobna. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że rodzina ma dzieci obu płci, B – jest co najwyżej jedna dziewczynka, C – jest co najwyżej jeden chłopiec.

   a) Czy zdarzenia A, B i C są wzajemnie niezależne?
   b) Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzeń $A \cup B$, $B \cap C'$, A'?

2. (10p) Z badań ankietowych wynika, że w pewnym mieście 80% rodzin ma telewizor, 72% ma samochód, 80% ma radio, 47% ma telewizor i samochód, 55% ma samochód i radio, 70% ma radio i telewizor, 40% rodzin ma radio, telewizor i samochód. Wybrano na chybił trafił jedną z rodzin. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie miała przynajmniej jedno z tych urządzeń.

3. (10p) W pierwszym pudełku są trzy losy wygrywające i siedem przegrywających, w drugim cztery wygrywające i sześć przegrywających, w trzecim pięć wygrywających i pięć przegrywających. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie liczba nieparzysta, to losujemy z pierwszego pudełka, jeśli szóstka – z drugiego pudełka, w pozostałych przypadkach losujemy z trzeciego pudełka. Znaleźć prawdopodobieństwo, że

   a) losowo wybrany los jest przegrany,
   b) losowo wybrany los pochodzi z drugiego pudełka, jeśli wiadomo, że jest przegrany,
   c) losowo wybrany los pochodzi z trzeciego pudełka, jeśli jest wygrany.

4. (10p) Dane dla 50 firm, dotyczące czasu istnienia firmy i ich rentowności są następujące:

Firma rentowna	Czas istnienia firmy		
	krócej niż dwa lata	2 – 5 lat	powyżej 5 lat
tak	2	8	16
nie	14	7	3

Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana firma:

   a) nie jest rentowna,
   b) pracuje od 2 do 5 lat, jeśli wiadomo, że jest rentowna,
   c) istnieje przynajmniej dwa lata,
   d) jest rentowna, jeśli czas jej istnienia nie przekracza 5 lat.

5. (10p) W urnie znajduje się dziesięć kul: sześć białych i cztery czarne. Z urny losujemy trzy razy po jednej kuli. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A oznaczającego, że wylosujemy dwie kule białe i jedną kulę czarną, jeśli losowanie odbywa się:

   a) ze zwracaniem,
   b) bez zwracania.

Niech B oznacza zdarzenie, że za pierwszym razem wylosujemy białą kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B.

6. (10p) Niech A oznacza zdarzenie, że rodzina ma samochód, B1 B2, B3, oznaczają odpowiednio zdarzenia, że roczny dochód rodziny jest niższy niż 20 tys. zł, od 20 – 40 tys. zł i powyżej 40 tys. zł. Znane są prawdopodobieństwa $P(A) = 0.5$, $P(B2) = 0.4$, $P(B3) = 0.1$, $P(B1|A) = 0.25$, $P(B2\cap A) = 0.3$. Obliczyć jakie jest prawdopodobieństwo, że rodzina:
   a) ma samochód lub dochód wyższy niż 40 tys. zł,
   b) nie ma samochodu, jeśli wiadomo, że dochody w tej rodzinie są od 20 do 40 tys. zł.

7. (10p) Pewna drużyna koszykarska rozgrywa 70% meczów po południu, a 30% późnym wieczorem. Wiadomo ponadto, że wygrywa 50% meczów rozgrywanych po południu i 90% meczów wieczornych. Drużyna wygrała mecz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to mecz grany późnym wieczorem?

8. (10p) Wybranej grupie studentów zadano pytanie, czy ściągają na kolokwiach z rachunku prawdopodobieństwa. Wielu studentów nie chciało udzielić odpowiedzi, dlatego zastosowano metodę „odpowiedzi losowej", polegającej na rzucie monetą. Jeżeli wypadnie orzeł i student nie ściąga, powinien odpowiedzieć „nie", w pozostałych wypadkach mówi „tak".
   a) załóżmy, że 70 % studentów nie ściąga na egzaminie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba odpowie „nie" na zadane pytanie?
   b) jak oszacować procent ściągających studentów, jeżeli w wybranej grupie było 39% odpowiedzi „nie"?

9. (10p) Wiadomo, że 37% pewnej populacji ma grupę krwi A, 13% grupę krwi B, 44% grupę 0 i 6% grupę krwi AB. Osoba z grupą krwi B może otrzymać podczas transfuzji krew grupy B lub 0.
   a) obliczyć prawdopodobieństwo, że mąż może być dawcą krwi dla żony, która ma grupę krwi B.
   b) obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowo wybranej parze małżeńskiej żona ma grupę krwi B, a mąż grupę A.
   c) obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym małżeństwie jedno z małżonków ma grupę krwi A, a drugi B.
   d) obliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedno z małżonków ma grupę krwi 0.

10. (5p) Z grupy składającej się z dziesięciu kobiet i pięciu mężczyzn wybrano w sposób losowy delegację 3-osobową. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w skład delegacji wchodzą mężczyźni i kobiety?

11. (10p) W szpitalu na oddziale wewnętrznym przebywa rocznie średnio 2000 chorych. Wśród leczonych było 800 cierpiących na chorobę K1, 600 na chorobę K2, 400 na chorobę K3 i 200 na chorobę K4. Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia z chorób wynosiło 0.9, 0.8, 0.7, 0.5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
   a) losowo wybrany pacjent jest całkowicie wyleczony,
   b) wypisany pacjent jest całkowicie wyleczony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cierpiał na chorobę K2?

12. (10p) Mamy 20 kartek ponumerowanych liczbami od 0 do 19. Wybieramy losowo jedna z nich. Niech X oznacza sumę cyfr na wylosowanej kartce. Podać rozkład zmiennej losowej X, jej dystrybuantę. Sporządzić wykres dystrybuanty.

13. (10p) Dystrybuanta zmiennej losowej X jest postaci

$$F(t) = \begin{cases} 0 : t < 0 \\ 1/2 : 0 \le t < 1; \\ 1 : t \ge 1 \end{cases}$$

Znaleźć rozkład X. Obliczyć P(X<1/2), PX(<=1/2), P(X<1), P(X<=1), P(X=1), P(X=1/2), P(X>3/4), P(0<X<2/3).

14. (10p) Zmienna losowa X ma rozkład postaci

$$P(X=n)=\frac{c}{n(n+1)} \text{ dla n=1,2,...}$$

Wyznacz wartość *c*. Oblicz P(X>m) dla m=0,1,... .

15. (10p) Prawdopodobieństwo uszkodzenia pracującego komputera podczas przepięcia w sieci elektrycznej wynosi 1/4. W trakcie przepięcia włączonych było 5 komputerów. Jaka jest szansa, że awarii uległo
    a) dokładnie k komputerów, k=0,1,...,5
    b) co najmniej k komputerów, k=0,1,...,5
    c) co najwyżej k komputerów, k=0,1,...,5
16. (10p) Wiadomo z obserwacji, że 5% nowo wyprodukowanych komputerów ulega awarii tuż po zainstalowaniu systemu operacyjnego. Firma produkująca komputery dostała zamówienie na zainstalowanie sieci 50 komputerów w odległym mieście. Postanowiono zabrać na montaż 52 komputery. Jaka jest szansa, że uda się uruchomić sieć? Ile komputerów należałoby zabrać aby mieć pewność 99% ?
17. (10p) Wiadomo, że prawdopodobieństwo poprawnego przesłania pakietu w trakcie pojedynczej sesji wynosi *p*. Jaka jest najbardziej prawdopodobna ilość poprawnie przesłanych pakietów, gdy przesłano niezależnie ich n?
18. (10p) Jak długi powinien być ciąg cyfr losowych aby prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej raz cyfry 5 wynosiło co najmniej 95%? Jakie jest prawdopodobieństwo, że cyfra 5 pojawi się po raz pierwszy jako piąty element?
19. (5p) Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie przyjmującym wartości 1,2,3,4 z prawdopodobieństwami 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 odpowiednio. Znajdź rozkład X+Y. Oblicz *E(X), E(XY).*
20. (5p) Niech *X,Y* będą niezależnymi dyskretnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości ze zbioru liczb naturalnych. Udowodnić (z definicji), że dla wszystkich *i,j* naturalnych *P(X=i;Y=j)=P(X=i)P(Y=j).*
21. (5p) Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej z zadania 14.
22. (5p) Niech X będzie nieujemną zmienną losową o gęstości f(.) i skończonej wartości oczekiwanej. Wykazać, że

$$E(X)=\int_0^\infty P(X>t)\,dt$$

.