12. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Wykazać, że dla $x \neq y$, $x, y > 0$ zachodzi

$$\min(x,y) \leqslant \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leqslant \max(x,y)$$
$$\min(x,y) \leqslant \left(\frac{n}{m}\frac{x^m - y^m}{x^n - y^n}\right)^{1/(m-n)} \leqslant \max(x,y).$$

2. Wykazać nierówności.

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},\ (x \neq 0) \qquad \sin x > x - \frac{x^3}{6},\ (x > 0),$$
$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2},\ (x > 0) \qquad e^x \geqslant \left(\frac{ex}{n}\right)^n,\ (x \geqslant 0).$$

3. Niech $h(x) = f(x)g(x)$. Wyrazić drugą pochodną funkcji $h(x)$ za pomocą funkcji $f(x)$ i $g(x)$ oraz ich pochodnych. Wyprowadzić wzór na n-tą pochodną funkcji $h(x)$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

przy czym $f^{(0)}(x) = f(x)$.

4. Znaleźć wzór na n-tą pochodną funkcji $x^{-1}\ln x$ i $e^x \cos x$.

5. Gracz baseballa biegnie po linii prostej, aby schwytać piłkę przy środku ogrodzenia boiska. Prędkość gracza w stopach na sekundę wynosi

$$v(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{11}{10}x + 25$$

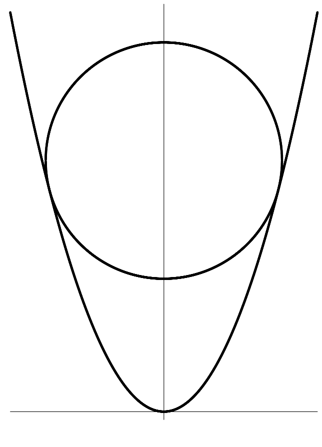
gdy znajduje się w odległości x stóp od środka ogrodzenia. Jakie jest przyśpieszenie gracza, gdy znajduje się w odległości 1 stopy od środka płotu ?

6. Zastosować różniczkowanie niejawne, aby obliczyć dy/dx w podanym punkcie.

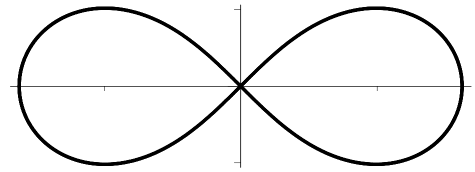
$$x^2 + xy + 2y^2 = 4;\ (-1,-1) \qquad (\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+2) = 8;\ (1,4)$$

7. Znaleźć styczną do wykresu $x^3 + y^3 = 3xy$ w punkcie $(3/2, 3/2)$.

8. Okrąg o promieniu 1 i środku na osi y jest wpisany w parabolę $y = 2x^2$. Znaleźć punkty, w których parabola i okrąg stykają się. `Wskazówka:` W tych punktach okrąg i parabola mają wspólne styczne.



9. Lemniskata na rysunku poniżej zadana jest wzorem $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. Znaleźć punkty wykresu, w których styczna jest pozioma.



10. Obliczyć d^2y/dx^2 w poniższych przykładach.

$$x^2 - y^4 = 6 \qquad\qquad x^2 \sin 2y = 1$$

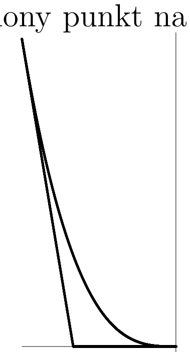
11. W poniższych przykładach x i y są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej t. Wyrazić dy/dt za pomocą x, y oraz dx/dt.

$$x \sin y = 2 \qquad x^2 + y^3 = x \qquad y = \cos xy^2 \qquad \frac{2x+y}{xy^2} = 2$$

12. Znak drogowy w kształcie kwadratu o boku 50 cm i zaniedbywalnej grubości obraca się wokół swojej osi pionowej przechodzącej przez środek w tempie 10 obrotów na minutę. Osoba obserwująca znak z dużej odległości widzi go jako prostokąt o zmieniającej się szerokości. Jak szybko zmienia się szerokość znaku, gdy robi wrażenie prostokąta o szerokości 30 cm i szerokość się powiększa ? `Wskazówka:` Rozważyć kąt jaki tworzy płaszczyzna znaku z linią łącząca go z obserwatorem.

13. Woda jest wypuszczana ze stożkowego pojemnika o wysokości 120 cm i promieniu 40 cm do pojemnika w kształcie prostopadłościanu, którego pole podstawy wynosi 1000 cm^2. Gdy wysokość poziomu wody w stożku wynosi x cm wysokość ta maleje w tempie $100 - x$ cm na minutę. W jakim tempie podnosi się poziom wody w dolnym pojemniku, gdy wysokość wody w górnym pojemniku będzie równa 10 cm ?

14. Nocna łódź patrolowa zbliża się do punktu $(0,0)$ na brzegu wzdłuż krzywej $y = -\frac{1}{2}x^3$, $x < 0$. Oś x utożsamiamy z brzegiem. Łódź porusza się tak, że $dx/dt = -x$, jej reflektor jest skierowany na wprost. Jak szybko przesuwa się oświetlony punkt na brzegu, gdy $x = -2$?



15. Podać przybliżone wartości liczb używając wzoru $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

$$\sqrt{101} \qquad \sqrt[3]{29} \qquad (28)^{4/3} \qquad \cos 2\pi/13 \qquad \operatorname{tg} 99\pi/100$$