Zadanie 15

Pokaż, że

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Dla jakich n mamy

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor + \frac{1}{2}?$$

Twierdzenie 1.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Dowód. Wiemy z algebry (albo dowodzimy indukcyjnie), że zachodzi równość :
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}$

Diagonalizujemy macierz $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Po długich i żmudnych rachunkach dostaniemy :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}$$

Jak to zrobić?

- Obliczamy wielomian charakterystyczny macierzy. Wychodzi on $x^2 - x - 1$ i ma pierwiastki odpowiednio $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Dla każdej wartości własnej szukamy wektora własnego (bierzemy np. te które napisałem w macierzy).
- Otrzymaną macierz odwracamy i zapisujemy całość w postaci ABA^{-1}, gdzie macierz A to macierz której kolumnami są wektory własne, a macierz B to macierz diagonalna z odpowiadającymi wartościami własnymi na przekątnej.

Teraz wystarczy tylko brutalnie obliczyć wynik.

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)^n & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)^n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\end{pmatrix}$$

Stąd już wniosek o tym, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

□

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor + \frac{1}{2}$$

Dowód. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Pokażmy, że zachodzi nierówność

$$F_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} < 1 + F_n$$

Następnie z definicji podłogi dostaniemy tezę.

$$1 + F_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) > \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$1 > \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\sqrt{5} \cdot 2^n > \left(1 - \sqrt{5}) \right)^n$$

Ostatnia linijka jest prawdą, ponieważ $1 - \sqrt{5} \approx -1.24$. Została nam do pokazania tylko druga nierówność.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2}$$

Przekształcając powyższą nierónowść do postaci $-(1-\sqrt{5})^n \leqslant 2^{n-1} \cdot \sqrt{5}$, bo $-(1-\sqrt{5})^n \leqslant 2^n \leqslant 2^{n-1} \cdot \sqrt{5}$, co wiemy z poprzednich szacowań. □