Repetytorium z JFiZO

Jakub Michaliszyn

Zadania 23 i 25

Zadanie 23. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}_* = \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in \mathcal{L}\}$$

jest regularny.

Zadanie 23. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}_* = \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in \mathcal{L}\}$$

jest regularny.

Rozgrzewka

$$\{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in \mathcal{L}\} = \{w \mid \exists n \leq i_{\mathcal{L}}. w^n \in \mathcal{L}\}$$

Zadanie 23. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}_* = \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in \mathcal{L}\}$$

jest regularny.

Rozgrzewka

$$\{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w^n \in \mathcal{L}\} = \{w \mid \exists n \leq i_{\mathcal{L}}. w^n \in \mathcal{L}\}$$

(w zasadzie do niczego nam się nie przyda)

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $T_x : Q \to Q$ będzie taka, że $T_x(q) = \hat{\delta}(q, x)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $T_x : Q \to Q$ będzie taka, że $T_x(q) = \hat{\delta}(q, x)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

Szkic dowodu:

$T_{xz}(q) = \hat{\delta}(q, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), v) = T_{yv}(q)$.

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $T_x : Q \to Q$ będzie taka, że $T_x(q) = \hat{\delta}(q, x)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

Szkic dowodu:

$T_{xz}(q) = \hat{\delta}(q, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), v) = T_{yv}(q)$.

Twierdzenie

Dla dowolnych słów x, y, jeśli $T_x = T_y$, to dla dowolnego v mamy $xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*$ (czyli $x \sim_{\mathcal{L}_*} y$).

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Niech $T_x : Q \to Q$ będzie taka, że $T_x(q) = \hat{\delta}(q, x)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

Szkic dowodu:
$T_{xz}(q) = \hat{\delta}(q, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), v) = T_{yv}(q)$.

Twierdzenie

Dla dowolnych słów x, y, jeśli $T_x = T_y$, to dla dowolnego v mamy $xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*$ (czyli $x \sim_{\mathcal{L}_*} y$).

Wniosek: $\mathcal{L}_*$ ma skończony indeks, więc jest regularny.

Twierdzenie

$\forall x, y, v. T_x = T_y \Rightarrow (xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

- Weźmy dowolne x, y takie, że $T_x = T_y$ i dowolne $v \in \Sigma^*$.

Twierdzenie

$\forall x, y, v. T_x = T_y \Rightarrow (xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

- Weźmy dowolne x, y takie, że $T_x = T_y$ i dowolne $v \in \Sigma^*$.
- Z obserwacji wynika, że $T_{xv} = T_{yv}$.

Twierdzenie

$\forall x, y, v. T_x = T_y \Rightarrow (xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

- Weźmy dowolne x, y takie, że $T_x = T_y$ i dowolne $v \in \Sigma^*$.
- Z obserwacji wynika, że $T_{xv} = T_{yv}$.
- Podobnie, $T_{xvxv} = T_{yvyv}$. I dla każdego k, $T_{(xv)^k} = T_{(yv)^k}$.

Twierdzenie

$\forall x, y, v. T_x = T_y \Rightarrow (xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

- Weźmy dowolne x, y takie, że $T_x = T_y$ i dowolne $v \in \Sigma^*$.
- Z obserwacji wynika, że $T_{xv} = T_{yv}$.
- Podobnie, $T_{xvxv} = T_{yvyv}$. I dla każdego k, $T_{(xv)^k} = T_{(yv)^k}$.
- Zauważny, że jeśli $T_w = T_{w'}$, to $w \in \mathcal{L} \Leftrightarrow w' \in \mathcal{L}$, bo $T_w(q_0) \in Q_F \Leftrightarrow T_{w'}(q_0) \in Q_F$.

Twierdzenie

$\forall x, y, v. T_x = T_y \Rightarrow (xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*)$.

Obserwacja

Jeśli $T_x = T_y$ oraz $T_z = T_v$, to $T_{xz} = T_{yv}$.

- Weźmy dowolne x, y takie, że $T_x = T_y$ i dowolne $v \in \Sigma^*$.
- Z obserwacji wynika, że $T_{xv} = T_{yv}$.
- Podobnie, $T_{xvxv} = T_{yvyv}$. I dla każdego k, $T_{(xv)^k} = T_{(yv)^k}$.
- Zauważny, że jeśli $T_w = T_{w'}$, to $w \in \mathcal{L} \Leftrightarrow w' \in \mathcal{L}$, bo $T_w(q_0) \in Q_F \Leftrightarrow T_{w'}(q_0) \in Q_F$.
- Zatem dla każdego n mamy $(xv)^n \in \mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(yv)^n \in \mathcal{L}$. Stąd $xv \in \mathcal{L}_* \Leftrightarrow yv \in \mathcal{L}_*$.

Zadanie 25. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}/2 = \{w \mid \exists v. |v| = |w| \wedge vw \in \mathcal{L}\}$$

jest regularny.

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.

Zadanie 25. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}/2 = \{w \mid \exists v.|v| = |w| \wedge vw \in \mathcal{L}\}$$

jest regularny.

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.
Niech $T_x : Q \to Q$ będzie jak wcześniej, oraz
$R_x = \{q \in Q \mid \exists y.|y| = |x| \wedge \hat{\delta}(q_0, y) = q\}$.

Zadanie 25. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem regularnym. Wtedy język

$$\mathcal{L}/2 = \{w \mid \exists v. |v| = |w| \wedge vw \in \mathcal{L}\}$$

jest regularny.

Niech $A = (\Sigma, Q, q_0, Q_F, \delta)$ będzie DFA takim, że $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$.
Niech $T_x : Q \to Q$ będzie jak wcześniej, oraz
$R_x = \{q \in Q \mid \exists y. |y| = |x| \wedge \hat{\delta}(q_0, y) = q\}$.

Twierdzenie

Dla każdych x, y, jeśli $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$, to $x \sim_{L/2} y$.

Wniosek: $L/2$ jest regularny.

Twierdzenie

Dla każdych x, y, jeśli $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$, to $x \sim_{L/2} y$.

Weźmy dowolne x, y, z takie, że $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$.

Zauważmy, że $T_{xz} = T_{yz}$ i $R_{xz} = R_{yz}$.

Twierdzenie

Dla każdych x, y, jeśli $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$, to $x \sim_{L/2} y$.

Weźmy dowolne x, y, z takie, że $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$.

Zauważmy, że $T_{xz} = T_{yz}$ i $R_{xz} = R_{yz}$.

Pokażemy, że $xz \in \mathcal{L}/2$ jest równoważne $yz \in \mathcal{L}/2$, czyli:
$\exists v.|v| = |xz| \wedge vxz \in \mathcal{L}$ w.t.w., gdy $\exists v'.|v'| = |yz| \wedge v'yz \in \mathcal{L}$

Twierdzenie

Dla każdych x, y, jeśli $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$, to $x \sim_{L/2} y$.

Weźmy dowolne x, y, z takie, że $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$.

Zauważmy, że $T_{xz} = T_{yz}$ i $R_{xz} = R_{yz}$.

Pokażemy, że $xz \in \mathcal{L}/2$ jest równoważne $yz \in \mathcal{L}/2$, czyli:
$\exists v.|v| = |xz| \wedge vxz \in \mathcal{L}$ w.t.w., gdy $\exists v'.|v'| = |yz| \wedge v'yz \in \mathcal{L}$

- Niech v będzie takie, że $|v| = |xz|$ i $vxz \in \mathcal{L}$.
- Wtedy $\hat{\delta}(q_0, v) \in R_{xz}$. Skoro $R_{xz} = R_{yz}$, to istnieje v' takie, że $|v'| = |yz|$ i $\hat{\delta}(q_0, v) = \hat{\delta}(q_0, v')$.

Twierdzenie

Dla każdych x, y, jeśli $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$, to $x \sim_{L/2} y$.

Weźmy dowolne x, y, z takie, że $T_x = T_y$ i $R_x = R_y$.

Zauważmy, że $T_{xz} = T_{yz}$ i $R_{xz} = R_{yz}$.

Pokażemy, że $xz \in \mathcal{L}/2$ jest równoważne $yz \in \mathcal{L}/2$, czyli:
$\exists v.|v| = |xz| \wedge vxz \in \mathcal{L}$ w.t.w., gdy $\exists v'.|v'| = |yz| \wedge v'yz \in \mathcal{L}$

- Niech v będzie takie, że $|v| = |xz|$ i $vxz \in \mathcal{L}$.
- Wtedy $\hat{\delta}(q_0, v) \in R_{xz}$. Skoro $R_{xz} = R_{yz}$, to istnieje v' takie, że $|v'| = |yz|$ i $\hat{\delta}(q_0, v) = \hat{\delta}(q_0, v')$.
- Zauważmy, że $T_{xz}(\hat{\delta}(q_0, v)) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, v), xz) \in Q_F$.
- Skoro $T_{xz} = T_{yz}$, to $T_{xz}(\hat{\delta}(q_0, v)) = T_{yz}(\hat{\delta}(q_0, v'))$, więc $\hat{\delta}(q_0, v'yz) \in \mathcal{L}$.

Uf