Zadanie 1

Zad 1

Obliczmy całkę $I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x)dx$, gdzie p jest ustaloną funkcją nieujemną w przedziale $[a,b]$, stosując kwadratury $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$. Korzystając z twierdzenia o warunkach koniecznych i dostatecznych zbieżności ciągu $\{Q_n\}$ do $I_p(f)$ dla dowolnej funkcji f ciągłej na przedziale $[a,b]$ wykazać, że jeżeli dla dowolnego k, n $A_k^n \geqslant 0$ to dwa zadania są równoważne:

1. ciąg $\{Q_n(f)\}$ jest zbieżny do całki $I_p(f)$ dla każdej funkcji f ciągłej na $[a,b]$.
2. ciąg $\{Q_n(w)\}$ jest zbieżny do $I_p(w)$ dla dowolnego wielomianu w.

Dowód.

Twierdzenie 1. *Ciąg $\{Q_n(f)\}$ jest zbieżny do $I_p(f)$ wtw* $\forall w \lim_{n\to\infty} Q_n(w) = I(w) \land \exists K \forall n \sum_{i=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K$.
Przechodząc do tego co mamy udowodnić:

- (1) $\Rightarrow$ (2) - oczywiste.
- (2) $\Rightarrow$ (1).

  Skoro dowolny wielomian $w(x)$ zbiega do $I_p(w)$ to również $w(x) \equiv 1$ zbiega. Stąd $\sum_{i=0}^{n} A_k^{(n)} \to I_p(1) < \infty$. Zatem $I_p(1)$ jest ograniczona. Ponieważ $A_k^{(n)}$ są dodatnie, to stosując twierdzenie 1 dostajemy tezę.

□

Zadanie 2

Zad 2

Sprawdzić, że $S_n(f) = \frac{1}{3}(4T_n(f) - T_{n/2}(f))$. Jakie jest związek tej obserwacji z metodą Romberga?

Dowód.

$$S_n(f) = \frac{h}{3}(f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + 4f(t_3) + \ldots + 2f(t_{2m-2}) + 4f(t_{2m-1}) + f(t_{2m})) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(2\sum_{k=0}^{n/2}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(t_{2k-1})\right) = \frac{1}{3}(4T_n - T_{n/2})$$

□

Zadanie 3

Zad 3

Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a,b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \mapsto \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x)f(x)dx$.

Dowód. Wiemy, że kwadratury $Q_n(w) \infty Ip(w)$. Dodatkowo współczynniki kwadratury Gaussa są dodatnie (bierzemy wielomiany $p^2(x) = ((x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n))^2$, gdzie x_i to zera wielomianu ortogonalnego i dostajemy, że $0 < \int_a^b p^2 A_i$). Zatem z zadania 1 mamy tezę. □

Zadanie 5

Zad 5

Udowodnij, że spośród wszystkich wielominaów stopnia n-tego postaci $w_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ najmniejszą wartość całki $\int_a^b p(x) w_n^2(x) dx$ daje n-ty standardowy wielomian ortogonalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x)$.

Dowód. Niech $\langle f,\ g\rangle = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$. Wiemy, że dowolny wielomian n-tego stopnia postaci takiej jak w treści zadania możemy zapisać jako $w_n = w_n^\star + w_{n-1}$, gdzie $w_n^\star$ to n-ty wielomian ortogonalny, a w_{n-1} to pewny wielomian stopnia co najwyżej $n-1$.

$$\int_a^b p(x)(w_n^\star + w_{n-1})^2 dx = \int_a^b p(x)(w_n^\star)^2 dx \ + \ \int_a^b p(x)(w_{n-1})^2 dx \ + \ 2\int_a^b p(x) w_n^\star w_{n-1} dx =^{1}$$

$$= \int_a^b p(x)(w_n^\star)^2 dx \ + \ \int_a^b p(x)(w_{n-1})^2 dx = \|w_n^\star\|^2 + \|w_{n-1}\|^2$$

Ponieważ $\|w_{n-1}\|$ to całka z iloczynu funkcji nieujemnych, to zeruje się wtedy i tylko wtedy, gdy $w_{n-1} = 0$. Zatem najmniejszą wartość całki $\int_a^b p(x)w_n^2(x)dx$ daje n-ty standardowy wielomian ortogonalny.

□

Zadanie 6

Zad 6

Znaleźć liczby c_j, dla których wielomian trygonometryczny $w_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki $\int_0^{pi} (\pi - x^2 - w_n(x))^2 dx$.

Rozwiązanie: Niech $< f, g >= \int_0^\pi f(x)g(x)dx$.
Niech $V = Lin\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ oraz $V > W_n = Lin\{1, \cos(x), \cos(2x), \dots, cos(nx)\}$.
Chcemy znaleźć taki $w \in W_n$, że $\|(\pi - x^2) - w\|^2$ jest jak najmniejsza. Z definicji jest to rzut wektora na podprzestrzeń W_n. Łatwo możemy go policzyć ze wzoru:

$$P_{W_n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle v, bk\rangle}{\langle b_k, b_k\rangle} b_k = \sum_{k=0}^n \frac{\int_0^\pi (\pi - x^2) cos(kx)\ dx}{\int_0^\pi (\cos(kx))^2\ dx} \cos(kx)$$

Po prostych przekształceniach i policzeniu paru całek dostajemy, że:

$$P_{W_n}(x) = \frac{(3-\pi)\pi}{3} + 2\sum_{k=1}^n \frac{(2 - (\pi - 1)\pi k^2)\sin(\pi n) - 2\pi k \cos(\pi k)}{k^3 \cdot \pi}$$

Zadanie 7

Zad 7

Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia $\leqslant 3$ zachodziła równość $\int_0^1 (1 + x^2) f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

[1] Wynika z ortogonalności.

Rozwiązanie: Skoro wzór ma być dokładny dla wszystkich wielomianów z przestrzeni Π_3, to musi być dokładny również dla wielomianów $1, x, x^2, x^3$. Podstawiając podane wielomiany do wzoru otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \int_0^1 (1+x^2)\cdot 1 \; dx = & \frac{4}{3} & = & A_0 + A_1 \\ \int_0^1 (1+x^2)\cdot x \; dx = & \frac{3}{4} & = & A_0x_0 + A_1x_1 \\ \int_0^1 (1+x^2)\cdot x^2 \; dx = & \frac{8}{15} & = & A_0x_0^2 + A_1x_1^2 \\ \int_0^1 (1+x^2)\cdot x^3 \; dx = & \frac{5}{12} & = & A_0x_0^3 + A_1x_1^3 \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że przykładowym rozwiązaniem jest :

$$A_0 = \frac{2}{3} - \frac{67\sqrt{\frac{5}{4873}}}{24}, A_1 = \frac{2}{3} + \frac{67\sqrt{\frac{5}{4873}}}{24}, x_0 = \frac{56}{107} - \frac{\sqrt{\frac{4873}{5}}}{107}, x_1 = \frac{56}{107} + \frac{\sqrt{\frac{4873}{5}}}{107}$$

Ponieważ wzór $A_0f(x_0) + A_1f(x_1)$ jest poprawny dla bazy przestrzeni Π_3 to jest również poprawny dla dowolnej kombinacji liniowej jej elementów (bo całka jest przekształceniem liniowym).
Dodatkowo przeliczyłem w Mathematice i działa.

Zadanie 8

```
from math import *

def f(x):
    return 0.5 * (((x+1)/2)**4) * sin(pi * (x+1)/2)**2

# n = 4

X4 = [0.339981043584856, -0.339981043584856, 0.861136311594053, -0.861136311594053]
W4 = [0.652145154862546, 0.652145154862546, 0.347854845137454, 0.347854845137454]

Q4 = 0.0
for i in range(0,4): Q4 += f(X4[i])*W4[i]
print(Q4) # 0.0576532452794

# n = 6

X6 = [0.238619186083197, -0.238619186083197, 0.661209386466265, -0.661209386466265, 0.932469514203152,
    -0.932469514203152]
W6 = [0.467913934572691, 0.467913934572691, 0.360761573048139, 0.360761573048139, 0.171324492379170,
    0.171324492379170]

Q6 = 0.0
for i in range(0,6): Q6 += f(X6[i])*W6[i]
print(Q6) # 0.057038390375

# n = 8

X8 = [0.183434642495650, -0.183434642495650, 0.525532409916329, -0.525532409916329, 0.796666477413627,
    -0.796666477413627, 0.960289856497536, -0.960289856497536]
W8 = [0.362683783378362, 0.362683783378362, 0.313706645877887, 0.313706645877887, 0.222381034453374,
    0.222381034453374, 0.101228536290376, -0.101228536290376]


Q8 = 0.0
for i in range(0,8): Q8 += f(X8[i])*W8[i]
print(Q8) # 0.057038894077
```