Wersja: **A** Numer indeksu: 000000

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 8 listopada 2012

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $(p \Rightarrow q) \land \neg(r \lor \neg q)$

Zadanie 2 (3 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę w koniunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $p \Rightarrow (q \land r)$

Zadanie 3 (3 punkty). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ. W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \lor q \lor r) \land ((p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor q)$ lub słowo „NIE", jeśli taka formuła nie istnieje.

Zadanie 4 (3 punkty). Jeśli formuły $(p \Rightarrow q) \land r$ oraz $(p \land q) \Rightarrow (p \land r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 5 (7 punktów). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych, spójników $\neg, \land, \lor$ i nawiasów. Rozważmy funkcję $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ zdefiniowaną indukcyjnie

$$\begin{aligned}
\tau(p) &= p \\
\tau(\neg\varphi) &= \neg\tau(\varphi) \\
\tau(\varphi_1 \lor \varphi_2) &= \tau(\varphi_1) \lor \tau(\varphi_2) \\
\tau(\varphi_1 \land \varphi_2) &= \neg(\neg\tau(\varphi_1) \lor \neg\tau(\varphi_2))
\end{aligned}$$

Udowodnij, że dla wszystkich formuł $\varphi \in \mathcal{F}$ formuły φ oraz $\tau(\varphi)$ są równoważne.

Zadanie 6 (6 punktów). Udowodnij, że jeśli $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ jest spełnialną formułą rachunku zdań to $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ nie jest tautologią.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ jest spełnialna. Weźmy takie wartościowanie σ, że $\hat{\sigma}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathsf{T}$ i rozważmy dwa przypadki. Jeśli $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{F}$ to oczywiście $\hat{\sigma}(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \mathsf{F}$. Jeśli natomiast $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}$ to z faktu, że $\hat{\sigma}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathsf{T}$ wnioskujemy, że $\hat{\sigma}(\varphi_2) = \mathsf{T}$, a stąd $\hat{\sigma}(\neg\varphi_2) = \mathsf{F}$ i $\hat{\sigma}(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \mathsf{F}$. W obu przypadkach $\hat{\sigma}(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \mathsf{F}$, co oznacza, że $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ nie jest tautologią.

Wersja: C Numer indeksu: 000000

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 8 listopada 2012

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $\neg((p \vee q) \Rightarrow (\neg r \wedge p))$

Zadanie 2 (3 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę w koniunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $p \vee \neg(q \Rightarrow r)$

Zadanie 3 (3 punkty). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ. W prostokąt poniżej wpisz formułę będącą uproszczeniem formuły $(p \wedge q \wedge r) \vee ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge q)$ lub słowo „NIE”, jeśli taka formuła nie istnieje.

Zadanie 4 (3 punkty). Jeśli formuły $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ oraz $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 5 (7 punktów). Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór formuł zbudowanych ze zmiennych zdaniowych, spójników $\neg, \wedge, \vee$ i nawiasów. Rozważmy funkcję $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ zdefiniowaną indukcyjnie

$$\begin{array}{rcl} \tau(p) & = & \neg p \\ \tau(\neg\varphi) & = & \varphi \\ \tau(\varphi_1 \vee \varphi_2) & = & \tau(\varphi_1) \wedge \tau(\varphi_2) \\ \tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2) & = & \tau(\varphi_1) \vee \tau(\varphi_2) \end{array}$$

Udowodnij, że dla wszystkich formuł $\varphi \in \mathcal{F}$ formuły $\neg\varphi$ oraz $\tau(\varphi)$ są równoważne.

Zadanie 6 (6 punktów). Udowodnij, że jeśli formuła $\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2$ nie jest tautologią rachunku zdań to formuła $\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1$ jest spełnialna.