EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LUTY 2012, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ B, CZAS: 125 MIN.
zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 1

Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych nieujemnych x i y , że

$$n = \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + x.$$

ZADANIE 2

Niech $m \geq 1$. Zdefiniujmy ciąg rekurencyjny

$$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_m}.$$

Niech $A_m(x)$ będzie funkcją tworzącą tego ciągu. Znajdź równanie, które spełnia $A_m(x)$.

ZADANIE 3

Literą M nazywamy figurę geometryczną złożoną z dwóch półprostych, których końce połączone są łamaną złożoną z dwóch odcinków. Na ile maksymalnie obszarów dzieli płaszczyznę n liter M?

ZADANIE 4

Danych mamy k nierozróżnialnych kul i n rozróżnialnych szuflad (ponumerowanych od 1 do n). Na ile sposobów możemy umieścić kule w szufladach tak, aby w każdej szufladzie parzystej była nieparzysta liczba kul a w każdej szufladzie nieparzystej parzysta liczba?

POWODZENIA !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2012, termin poprawkowy, część B, czas: 125 min.
zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5
Dany mamy spójny graf G o $2k$ krawędziach. Pokaż, że G można rozłożyc na k rozłącznych krawędziowo ścieżek o długości dwa (tzn. każda krawędź G znajdzie się w dokładnie jednej ścieżce o długości dwa).

Zadanie 6
Graf jest k-krawędziowo spójny jeśli jest spójny i usunięcie dowolnych $k-1$ krawędzi go nie rozspójnia. Pokaż, że jeśli z grafu k-krawędziowo spójnego usuniemy dowolnych k krawędzi, to otrzymany graf ma co najwyżej dwie składowe spójne. Pokaż też, że jeśli G jest k-krawędziowo spójny, to $m \geq kn/2$.

Zadanie 7
Niech $L(G)$ będzie grafem krawędziowym prostego grafu G. Czy prawdą jest, że jeśli G jest grafem Hamiltonowskim, to również $L(G)$ jest grafem Hamiltona? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8
Orientacją grafu nieskierowanego grafu G nazywamy taki graf skierowany G' na tych samych wierzchołkach, że

- spośród krawędzi (u, v), (v, u) najwyżej jedna jest w grafie G'
- w G' istnieje któraś z krawędzi (u, v), (v, u) wtedy i tylko wtedy gdy $\{u, v\}$ należy do G.

Pokaż, że graf ma orientaję silnie spójną dokładnie wtedy gdy nie ma mostów.

Powodzenia !