13. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie różniczkowalna oraz $g(x) = \sin \|f(x)\|^2$. Obliczyć $Dg(x)$.

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Niech $c(t)$ będzie krzywą na płaszczyźnie spełniającą $c(0) = (0, 0)$ i $c'(0) = (1, 1)$. Znaleźć wektor styczny do obrazu krzywej przez funkcję f w punkcie $t = 0$.

3. Korzystając z reguły łańcucha pokazać, że

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x, y)\, dy = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

$*$**4.** W podręcznikach z termodynamiki występuje wzór

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1.$$

Wyjaśnić znaczenie tego wzoru i udowodnić jego prawdziwość. `Wskazówka:` Założyć, że x, y, z są związane warunkiem $F(x, y, z) = 0$, z którego można określić każdą ze zmiennych jako funkcję dwu pozostałych: $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ i $z = h(x, y)$.

5. Wyjaśnić, gdzie jest błąd w następującym rozumowaniu. Załóżmy, że $w = f(x, y, z)$ oraz $z = g(x, y)$. Wtedy z reguły łańcucha

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Zatem $0 = \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$, czyli $\partial w/\partial z = 0$ lub $\partial z/\partial x = 0$, co jest ogólnie nieprawdą.

6. Używając wzoru

$$f(x + h_1, y + h_1) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$$

znaleźć przybliżone wartości wyrażeń

(a) $(0,99e^{0,02})^8$,
(b) $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01)$,
(c) $\sqrt{(4,01)^2 + (3,98)^2 + (2,02)^2}$.

7. Obliczyć gradient dla podanych funkcji

(a) $f(x, y, x) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$,
(b) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$,
(c) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$

8. Dla funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ obliczyć $\nabla f(0, 0, 1)$.

9. Dla funkcji $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ obliczyć $\nabla f(1, 0, 1)$.

10. Funkcje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Pokazać, że $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

$*$**11.** Znaleźć funkcję $f(x, y)$ nieciągłą w $(0, 0)$, posiadającą pochodne cząstkowe w każdym punkcie.

$*$**12.** Znaleźć funkcję $f(x, y)$ nieciągłą w $(0, 0)$, posiadającą wszystkie pochodne kierunkowe.

13. Znaleźć pochodne kierunkowe funkcji w podanych punktach w kierunku równoległym do podanego wektora.

(a) $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0) = (e, e)$, $v = (5, 12)$;
(b) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$,
$v = (1, -1, 1)$;
(c) $f(x, y, z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$, $v = (1, 0, -1)$.

14. Kapitan Ralf znalazł się w kłopotach w pobliżu słonecznej strony planety Merkury. Temperatura powierzchni statku, gdy znajduje się on w punkcie (x, y, z) wynosi $T(x, y, z) = \exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2)$, gdzie x, y, z mierzone są w metrach. Statek znajduje się obecnie w punkcie $(1, 1, 1)$.

(a) W którym kierunku kapitan powinien skierować statek, aby temperatura zmniejszyła się jak najszybciej ?

(b) Jeśli statek porusza się w tempie e^8 metrów na sekundę, jak szybko temperatura będzie spadała jeśli statek poleci w kierunku wyznaczonym w a) ?

(c) Niestety, metal z którego wykonana jest powłoka statku pęknie jeśli chłodzenie będzie szybsze niż $\sqrt{14}e^2$ stopni na sekundę. Opisać możliwe kierunki, w których statek może się poruszać, aby obniżyć temperaturę w tempie nie przekraczającym podanej liczby.