Analiza numeryczna

Stanisław Lewanowicz

Październik 2007 r.

Równania nieliniowe

Definicje, twierdzenia, algorytmy

1 Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a_0,\, b_0]$ i że $f(a_0)f(b_0) < 0$ (ściślej, że $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$). Oczywiście $\alpha \in [a_0,\, b_0]$. W następujący sposób rekurencyjny konstruujemy taki ciąg przedziałów

$$I_k := [a_k,\, b_k] \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

że $I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \ldots$ i że $\alpha \in I_k$ dla każdego $k = 0, 1, \ldots$:

- wyznaczamy środek przedziału I_k:

$$m_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k);$$

- jeśli $f(m_k) = 0$, to $\alpha = m_k$; w przeciwnym razie przyjmujemy, że

$$I_{k+1} = [a_{k+1},\, b_{k+1}] := \begin{cases} [m_k,\, b_k] & (f(m_k) < 0), \\ [a_k,\, m_k] & (f(m_k) > 0). \end{cases}$$

W n-tym kroku metody bisekcji otrzymujemy przedział $[a_n, b_n]$, zawierający pierwiastek α, o długości $2^{-n}(b_0 - a_0)$. Zauważmy, że zbieżność metody bisekcji jest wolna (jedna cyfra dwójkowa na krok) i nie zależy od f!

Przykład 1.1 Dla $f(x) = x^2/4 - \sin x$ i $I_0 = [1.8,\, 2]$ otrzymujemy wyniki podane w tabelce.

k	a_k	b_k	m_k	$f(m_k)$
0	1.8	2	1.9	< 0
1	1.9	2	1.95	> 0
2	1.9	1.95	1.925	< 0
2	1.925	1.95	1.9375	> 0
3	1.925	1.9375	1.93125	< 0
4	1.93125	1.9375	1.934375	> 0

Dla porównania – $\alpha = \mathbf{1.933753\,762827}\ldots$, więc $|\alpha - m_4| = 0.00060\ldots$.

2 Metoda Newtona (metoda stycznych)

W metodzie Newtona tworzymy dla danego x_0 ciąg przybliżeń $x_0, x_1, \ldots$ zbieżny do α w sposób następujący: dla $n = 0, 1, \ldots$ określamy x_{n+1} jako odciętą punktu przecięcia stycznej do wykresu $y = f(x)$ w punkcie $(x_n, f(x_n))$, tj. prostej $y = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$ z osią x:

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \qquad h_n := -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

W praktyce poprzestajemy na n_ϵ-tym przybliżeniu, gdzie n_ϵ jest najmniejszą liczbą naturalną n, spełniającą nierówność $|h_n| < \epsilon$.

Przykład 2.1 Dla $f(x) = \sin x - x^2/4$, $x_0 = 1.8$ i $\epsilon = 5 \cdot 10^{-9}$ otrzymujemy:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	h_n
0	**1.8**	−0.163847 630878	1.127202 094693	0.145357 812631
1	**1.9**45357 812631	0.015436 106659	1.338543 359427	−0.011532 018406
2	**1.933**825 794225	0.000095 223283	1.322020 778469	−0.000072 028582
3	**1.933753 76**5643	0.000000 003722	1.321917 429113	−0.000000 002816
4	**1.933753 762827**			

Zauważmy, że liczba cyfr dokładnych (wytłuszczone w drugiej kolumnie) podwaja się w każdym kroku iteracyjnym. Pomimo kiepskiego przybliżenia początkowego już x_4 ma 12 cyfr dokładnych!

2.1 Zbieżność metody Newtona

Definicja 2.2 *Niech ciąg x_n będzie zbieżny do α i niech $e_n := x_n - \alpha$ $(n \geq 0)$. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C $(C > 0)$, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C,$$

to p nazywamy wykładnikiem zbieżności ciągu, *a C –* stałą asymptotyczną błędu. *Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest* ***liniowa****, dla $p = 2$ –* ***kwadratowa****, dla $p = 3$ –* ***sześcienna****.*

Załóżmy, że $f \in C^2[a, b]$, $\alpha \in (a, b)$, $f'(\alpha) \neq 0$ oraz $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$. Wprowadźmy oznaczenie

$$e_n := x_n - \alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Można wykazać, że

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)},$$

gdzie $\xi_n \in \operatorname{interv}(x_n, \alpha)$. Dla $x_n \to \alpha$ wynika stąd, że

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \to \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Zatem $e_{n+1} \approx Ce_n^2$, tj. błąd e_{n+1} jest propocjonalny do e_n^2.

Załóżmy, że ciąg określony wzorem (1) jest zbieżny do pierwiastka α. Wówczas, jak wiemy,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{e_n^2} = C, \qquad C := \frac{1}{2}\frac{|f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|}.$$

Oczywiście $C \neq 0$, jeśli $f''(\alpha) \neq 0$. Metoda Newtona jest zatem na ogół zbieżna kwadratowo.

Twierdzenie 2.3 *Załóżmy, że* I *jest takim otoczeniem pierwiastka* α*, że dla pewnej stałej* $m > 0$ *jest*

$$\frac{1}{2}\frac{|f''(y)|}{|f'(x)|} \le m \quad \textit{dla dowolnych } x,\ y \in I.$$

Jeśli przybliżenie x_0 *jest dostatecznie bliskie pierwiastka* α*:*

$$|me_0| = m|x_0 - \alpha| < 1, \tag{3}$$

to metoda Newtona jest zbieżna do α*.*

W praktyce trudno sprawdzić warunek (3). Bardziej przydatne są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2.4 *Niech dla danego* x_0 *ciąg* $\{x_n\}$ *bedzie określony wzorem* (1)*. Niech* I_0 *będzie przedziałem o końcach* x_0 *i* $x_0{+}2h_0$*, ponadto niech* $M := \max_{x\in I_0}|f''(x)|$*. Jeśli zachodzi nierówność* $2|h_0|M \le |f'(x_0)|$*, to* $x_n \in I_0$ *dla każdego* $n \in \mathbf{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$*, gdzie* α *jest jedynym pierwiastkiem równania* $f(x) = 0$ *w przedziale* I_0*.*

Twierdzenie 2.5 *Załóżmy, że* $f'(x) \ne 0$ *i* $f''(x) > 0$ *(lub* < 0*) dla dowolnego* $x \in [a, b]$ *i że* $f(a)f(b) < 0$*. Jeśli*

$$|f(a)/f'(a)| < b - a, \qquad |f(b)/f'(b)| < b - a,$$

to metoda Newtona jest zbieżna dla dowolnego $x_0 \in [a, b]$*.*

3 Metoda siecznych

Zastępując we wzorze (1) pochodną $f'(x_n)$ **ilorazem różnicowym**

$$f[x_{n-1}, x_n] := \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

otrzymujemy ***metodę siecznych***:

$$x_{n+1} := x_n + h_n, \quad h_n := -f_n\frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{4}$$

gdzie $f_n := f(x_n)$, $f_n \ne f_{n-1}$, a x_0 i x_1 są dane. Geometryczna interpretacja metody siecznych jest następująca: x_{n+1} jest odciętą punktu przecięcia siecznej krzywej $y = f(x)$, przechodzącej przez punkty (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n) z osią x-ów.
Przykład 3.1 Dla funkcji $f(x) = x^2/4 - \sin x$ i dla $x_0 = 1.5$, $x_1 := 2$ otrzymujemy następujące wyniki.

n	x_n	$f(x_n)$	h_n
0	1.5	−0.434994 986604	
1	2.0	0.090702 573174	−0.086268 778965
2	**1.9**13731 221035	−0.026180 060742	0.019322 989205
3	**1.933**054 210240	−0.000924 399645	0.000707 253882
4	**1.9337**61 464122	0.000010 180519	−0.000007 704220
5	**1.933753 759**902	−0.000000 003867	0.000000 002975
6	**1.933753 762827**		

Metoda siecznych jest w tym przykładzie niemal tak szybko zbieżna jak metoda Newtona: x_5 ma osiem cyfr dokładnych, a x_6 — dwanaście. Dobry rezultat zawdzięczamy bliskości x_1 i α.

Jeśli metoda siecznych jest zbieżna ($e_n \to 0$), to dla dużych wartości n jest $\xi_n \approx \alpha$, $\eta_n \approx \alpha$ i

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n||e_{n-1}|, \tag{5}$$

gdzie $C := \frac{1}{2}|f''(\alpha)|/|f'(\alpha)|$. Stąd można wywnioskować, że

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}} = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}}$$

Oznacza to, że rząd metody wynosi $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618$.

4 Metoda *regula falsi*

Regula falsi jest wariantem metody siecznych, w którym – inaczej niż w tamtej metodzie – prowadzi się sieczną przez punkty $(x_n,\, f_n)$ i $(x_{n'},\, f_{n'})$, gdzie n' jest takim największym wskaźnikiem mniejszym od n, że $f_{n'}f_n < 0$. Początkowe przybliżenia x_0 i x_1 trzeba oczywiście wybrać tak, żeby $f_0f_1 < 0$. Zaletą metody *regula falsi* jest to, ze jest ona zawsze zbieżna dla ciągłej funkcji f. Natomiast wadą jest to, że w przeciwieństwie do metody siecznych ma ona na ogół *wykładnik zbieżności równy 1*! Łatwo się przekonać, że tak jest w wypadku, gdy f jest wypukła na odcinku $[x_0,\, x_1]$. Wszystkie kolejne sieczne przechodzą wówczas przez (x_0, f_0), tj. ten punkt jest używany w każdym przybliżeniu i wobec tego związek (5) przybiera postać

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n||e_0|,$$

skąd

$$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = C|e_0| = C',$$

co oznacza zbieżność liniową.

Przykład 4.1 Dla funkcji $f(x) = x^2/4 - \sin x$ i dla $x_0 = 1.5$, $x_1 := 2$ otrzymujemy następujące wyniki.

n	x_n	$f(x_n)$	h_n
0	1.5	−0.434994 986604	
1	2.0	0.090702 573174	−0.086268 778965
2	**1.9**13731 221035	−0.026180 060742	0.019322 989205
3	**1.933**054 210240	−0.000924 399645	0.000707 253882
4	**1.93372**9 608132	−0.000031 930094	0.000023 321005
5	**1.933752** 929137	−0.000001 102069	0.000000 804916
6	**1.933753 7**34053		

Zauważmy, że x_2 i x_3 są takie same jak w metodzie siecznych. W każdym następnym kroku użyto punktu $x_1 = 2$, co spowolniło zbieżność do liniowej.