Zad 1 - całka z parametrem (2-9/12)

Pokaż, że wartość całki nie zależy od parametru α.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

Dowód. Podstawmy za $x = tg(t)$. Wtedy $dx = (1 + tg^2(t))\ dt$. Wtedy dostajemy całkę :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+tg^2(t))\ dt}{(1+tg(t)^2)(1+tg(t)^\alpha)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+tg(t)^\alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)^\alpha dt}{\cos(t)^\alpha+\sin(t)^\alpha}$$

Zauważmy, że $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)^\alpha dt}{\cos(t)^\alpha+\sin(t)^\alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)^\alpha dt}{\cos(t)^\alpha+\sin(t)^\alpha}$ - wystarczy zastosować podstawienie $(t = \pi/2 - x)$. Suma tych całek to całka ich sumy, czyli $\int_0^{\pi/2} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$. Stąd wynika, że nasza wyjściowa całka jest równa $\frac{\pi}{2}$ i to nie zależnie od parametru α.

$\square$