Wersja: **A** Numer indeksu: 000000

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 3 listopada 2011

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (4 punkty). W prostokąt opniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $\neg(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \neg q)$

$(p \wedge \neg q)$

Zadanie 2 (4 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ w systemie naturalnej dedukcji.

[Złożenie tego w LaTeX-u jest zbyt czasochłonne]

Zadanie 3 (4 punkty). Jeśli dla wszystkich formuł φ i ψ logiki pierwszego rzędu formuły $\exists x\,(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ oraz $(\exists x\,\varphi) \Leftrightarrow (\exists x\,\psi)$ są równoważne, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum: $\mathbb{R}$; $\varphi = (x \leq 7)$; $\psi = (x > 7)$

Zadanie 4 (4 punkty). Udowodnij, że jeśli $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ jest formułą sprzeczną to $\neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ jest tautologią.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ jest formułą sprzeczną. Weźmy dowolne wartościowanie σ i rozważmy dwa przypadki. Jeśli $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{F}$ to oczywiście $\hat{\sigma}(\neg\varphi_1) = \mathsf{T}$ i $\hat{\sigma}(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathsf{T}$. Jeśli natomiast $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}$ to z faktu, że $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ jest formułą sprzeczną wnioskujemy, że $\hat{\sigma}(\neg\varphi_2) = \mathsf{F}$, a stąd $\hat{\sigma}(\varphi_2) = \mathsf{T}$ i $\hat{\sigma}(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathsf{T}$. W obu przypadkach $\hat{\sigma}(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathsf{T}$, co oznacza, że $\neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ jest tautologią.

Zadanie 5 (4 punkty). Udowodnij indukcyjnie[1] (względem głębokości φ), że dla każdej formuły φ rachunku zdań istnieje równoważna jej formuła, w której nie występuje symbol $\Leftrightarrow$.

Rozwiązanie.
Podstawa indukcji: Formuły głębokości 1 to zmienne zdaniowe — nie występują w nich więc spójniki $\Leftrightarrow$ i nie ma czego dowodzić.
Krok indukcyjny: Załóżmy, że dla każdej formuły o głębokości nie większej niż n istnieje równoważna jej formuła, w której nie występuje symbol $\Leftrightarrow$. Pokażemy, że dla każdej formuły o głębokości $n+1$ istnieje równoważna jej formuła, w której nie występuje symbol $\Leftrightarrow$.

Rozważmy dowolną formułę φ o głębokości $n+1$. Wtedy φ jest postaci $\neg\varphi_1$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ lub $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, przy czym odpowiednio formuły φ_1 lub φ_1 i φ_2 mają głębokość nie większą niż n i z założenia indukcyjnego istnieją rownoważne im formuły φ_1' lub φ_1' i φ_2' bez wystąpień spójnika $\Leftrightarrow$. W pierwszych czterech przypadkach odpowiednio $\neg\varphi_1'$, $\varphi_1' \wedge \varphi_2'$, $\varphi_1' \vee \varphi_2'$ lub $\varphi_1' \Rightarrow \varphi_2'$ jest równoważną φ formułą nie zawierającą spójnika $\Leftrightarrow$. W ostatnim przypadku, tj. gdy $\varphi = \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, formuła $(\varphi_1' \Rightarrow \varphi_2') \wedge (\varphi_2' \Rightarrow \varphi_1')$ jest równoważną φ formułą nie zawierającą spójnika $\Leftrightarrow$.

[1] To jest zadanie z indukcji. Nie interesują nas żadne inne dowody tej własności.

Wersja: **C** Numer indeksu: 000000

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 1, 3 listopada 2011

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (4 punkty). W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $(p \lor q) \land \neg(r \land p)$

$$(p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \lor (q \land \neg p)$$

Zadanie 2 (4 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód reguły dowodzenia nie wprost, czyli tautologii $(\neg p \Rightarrow \bot) \Rightarrow p$ w systemie naturalnej dedukcji.

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} (\neg p \Rightarrow \bot) \quad \text{założenie} \\ \boxed{\begin{array}{c} \neg p \quad \text{założenie} \\ \dfrac{\neg p \Rightarrow \bot \quad \neg p}{\bot}\,(\Rightarrow \text{e}) \end{array}} \\ \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg p}\,(\neg \text{i})}{p}\,(\neg\neg \text{e}) \end{array}}}{(\neg p \Rightarrow \bot) \Rightarrow p}\,(\Rightarrow \text{i})$$

Zadanie 3 (4 punkty). Jeśli dla wszystkich formuł φ i ψ logiki pierwszego rzędu formuły $\forall x\,(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ oraz $(\forall x\,\varphi) \Leftrightarrow (\forall x\,\psi)$ są równoważne, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Uniwersum: $\mathbb{R}$; $\varphi = (x = 2)$; $\psi = (x > 7)$

Zadanie 4 (4 punkty). Rozważmy dowolny zbiór klauzul $\mathcal{F}$.

(a) Rozważmy taki ciąg klauzul $C_1, \ldots, C_n$, że dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ $C_i \in \mathcal{F}$ lub istnieją takie $j, k < i$, że C_i jest rezolwentą C_j i C_k. Udowodnij, że dla wszystkich i klauzula C_i jest logiczną konsekwencją zbioru klauzul $\mathcal{F}$. Możesz przy tym skorzystać z udowodnionego na ćwiczeniach faktu, że dla dowolnych klauzul C i D oraz dowolnej zmiennej zdaniowej p rezolwenta $C \lor D$ jest logiczną konsekwencją zbioru $\{C \lor p, D \lor \neg p\}$.

(b) Udowodnij, że jeśli istnieje rezolucyjny dowód sprzeczności zbioru $\mathcal{F}$, to $\mathcal{F}$ jest zbiorem sprzecznym. Możesz przy tym skorzystać z poprzedniego punktu, nawet jeśli go nie udowodniłeś.

Rozwiązanie.

(a) Dowód indukcyjny względem numeru klauzuli w dowodzie.

Podstawa indukcji: Klauzula C_1 należy do zbioru $\mathcal{F}$, jest więc oczywiście jego konsekwencją (każde wartościowanie spełniające wszystkie klauzule z $\mathcal{F}$ spełnia w szczególności klauzulę C_1).

Krok indukcyjny: Załóżmy, że wszystkie klauzule o numerach od 1 do i są konsekwencjami $\mathcal{F}$. Pokażemy, że także C_{i+1} jest konsekwencją $\mathcal{F}$. Mamy dwa przypadki:

- $C_{i+1} \in \mathcal{F}$: podobnie jak w podstawie indukcji, C_{i+1} w oczywisty sposób jest konsekwencją $\mathcal{F}$.
- C_{i+1} jest rezolwentą C_j, C_k. Rozważmy dowolne wartościowanie σ spełniające wszystkie klauzule z $\mathcal{F}$. Z założenia indukcyjnego σ spełnia C_j oraz C_k, a z faktu udowodnionego na ćwiczeniach spełnia także C_{i+1}. Zatem C_{i+1} jest konsekwencją $\mathcal{F}$.

(b) Załóżmy, że $C_1, \ldots, C_n$ jest rezolucyjnym dowodem sprzeczności zbioru $\mathcal{F}$. Wtedy $C_n = \perp$. Z poprzedniego punktu wnioskujemy, że każde wartościowanie spełniające $\mathcal{F}$ spełnia także $\perp$. Ponieważ jednak nie ma wartościowań spełniających $\perp$, więc nie ma wartościowań spełniających $\mathcal{F}$. Zatem $\mathcal{F}$ jest zbiorem sprzecznym.

Zadanie 5 (4 punkty). Udowodnij, że jeśli $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ jest tautologią rachunku zdań to $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ jest formułą sprzeczną.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ jest tautologią. Weźmy dowolne wartościowanie σ i rozważmy dwa przypadki. Jeśli $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{F}$ to oczywiście $\hat{\sigma}(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \mathsf{F}$. Jeśli natomiast $\hat{\sigma}(\varphi_1) = \mathsf{T}$ to z faktu, że $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ jest tautologią wnioskujemy, że $\hat{\sigma}(\varphi_2) = \mathsf{T}$, a stąd $\hat{\sigma}(\neg\varphi_2) = \mathsf{F}$ i $\hat{\sigma}(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \mathsf{F}$. W obu przypadkach $\hat{\sigma}(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \mathsf{F}$, co oznacza, że $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ jest formułą sprzeczną.