9. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Wskazać punkty osobliwe i zbadać zbieżność całek niewłaściwych.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2\ln x}, \qquad \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+4x+10},$$

$$\int_{-1}^\infty \frac{x\,dx}{2x^3+x^2+1}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{2x^3+x^2+\sqrt[3]{x}}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^3+\sqrt{x}},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6+3x^2+2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}, \qquad \int_0^1 \frac{x^{3/2}\,dx}{e^{x^2}-e^{-x^2}},$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int_0^\pi \frac{\sqrt{x(\pi-x)}}{\operatorname{tg} x}\,dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{(x^2-1)dx}{\sqrt{2+x+2x^2-x^3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x-\sin x}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\ln(x^2)\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^{3/2}+x+1}.$$

2. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych.

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^1 (1-x^a)^{-b}\,dx \ (a,b>0),$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{x}{x^2+k^2}\sin ax\,dx \ (k>0),$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^k\ln x}, \qquad \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^k}, \qquad \int_0^2 \frac{dx}{\ln x},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^n},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2\cos^2 x}.$$

3. Funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w sposób ciągły na $(a,b]$, przy czym $\varphi'(x)$ jest nieograniczona w pobliżu punktu a. Funkcja $f(u)$ jest ciągła na przedziale zawierającym wszystkie wartości funkcji $\varphi(x)$. Pokazać, że całka $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ jest zbieżna do $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$.

4. Pokazać, że

$$\int_0^1 \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

5. Sformułować i udowodnić twierdzenie podobne do tego z zadania 3 tak, aby w tezie otrzymać wzór

$$\int_a^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{L} f(u)\,du,$$

gdzie $L = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$.

6. Pokazać, że

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

7. Obliczyć całki niewłaściwe:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x}\cos bx\,dx,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad (*)\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\,dx.$$

8. Zbadać zbieżność zwykłą i bezwzględna całek

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,\ \int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}(1+x)},\ \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x+\sin 2x}.$$

9. Funkcja $F(x)$ jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $(a,b]$. Załóżmy, że $F' = f$ jest funkcją rosnącą (lub malejącą) nieograniczoną w pobliżu punktu a. Pokazać, że przy oznaczeniu $x_i = a + i(b-a)/n$ zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Obliczyć granicę ciągu $\sqrt[n]{n!}/n$, stosując wzór do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $(0,1]$.

10. Funkcja $f(x)$ jest malejąca dla $x \geqslant 0$ i całka $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna. Udowodnić, że

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

11. Obliczyć granice

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^2+k^2}, \qquad \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k^3}\,e^{-n/k}.$$

$*$**12.** Pokazać, że wartość całki $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$ nie zależy od parametru α.