10. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Sprawdzić różniczkowalność funkcji w podanych punktach.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \ x = 0; \qquad f(x) = \begin{cases} 2^x + 3x^2 & \text{dla } x < 2 \\ \log_{\sqrt{2}} x + 7x & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}, x = 2.$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \ x = 0; \qquad f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - \dfrac{1}{\pi} \sin \pi x & \text{dla } x \leqslant 1 \\ x^5 + x & \text{dla } x > 1; \end{cases}, \ x = 1;$$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 & \text{dla } x < 1 \\ \ln x^3 + \dfrac{1}{\ln 3} 3^x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}, \ x = 1; \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}, \ x = 0;$$

2. Obliczyć granice korzystając z pochodnych odpowiednich funkcji.

$$\lim_n n^3[\cos(2n^{-3}) - 1] \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x[e^{-1/ln^3 x} - 1] \qquad \lim_n \left[2^n \sin^4\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2^n}\right) - 9 \cdot 2^{n-4}\right]$$

3. Obliczyć pochodne funkcji.

$$\frac{1}{\cos x} \qquad \cos(\ln \sin x) \qquad \frac{1}{x\sqrt{5-2x}} \qquad e^{\sin^4 x + \cos^4 x} \qquad (12x^3 - 3x + 4)^{-68} \qquad \operatorname{tg}^5(\operatorname{ctg}^2 x)$$

4. Obliczyć pochodne funkcji, korzystając ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

$$\arcsin x \qquad \arccos x \qquad \operatorname{arctg} x \qquad \ln x$$

5. Obliczyć pochodne podanych funkcji tam, gdzie to jest możliwe.

$$\frac{x^p(1-x)^q}{1+x} \qquad x^{1/x} \qquad e^x(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x$$

$$\arcsin(\sin x) \qquad (\cos x)^{\sin x} \qquad \ln_x e \qquad \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

6. Obliczyć pochodną logarytmiczną: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{d}{dx} \log \mid f(x) \mid$ funkcji:

$$f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n, \qquad f(x) = (x-a_1)^{b_1}(x-a_2)^{b_2}\dots(x-a_n)^{b_n}.$$

Obliczyć $f'(0)$ dla $f(x) = x(x-1)\dots(x-n)$.

7. Obliczyć pochodne funkcji i ich funkcji odwrotnych.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ x > 0.$$

`Wskazówka:` $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

8. Funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna, posiada funkcję odwrotną $x = g(y)$ i spełnia równanie

$$x^3 = y^4 + x^2 \sin y + 1.$$

Zakładając, że $f(1) = 0$ znaleźć $f'(1)$ oraz pochodną funkcji odwrotnej w punkcie 0. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ i funkcji odwrotnej $g(y)$ w punktach $(1,0)$ i $(0,1)$ odpowiednio.

9. Udowodnić, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b)$, różniczkowalną na (a,b) oraz $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = c$, to $f(x)$ ma prawostronną pochodną w punkcie a równą c. Czy funkcja $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ ma ciągłą pochodną w zerze?