

Sprawdzian nr 2

16 stycznia 2009

Zadanie 1

Niech będzie dana funkcja $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) oraz wielomian stały $w_0(x) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że nie istnieje żaden wielomian w_1 stopnia pierwszego o własności

$$\|f - w_1\|_{\infty}^{[-1,1]} < \|f - w_0\|_{\infty}^{[-1,1]}$$

Wskazówka: naszkicować wykres różnicy $e(x) := f(x) - w_0(x)$ w przedziale $[-1, 1]$

Zadanie 2

Wyznaczyć takie stałe rzeczywiste a i b , żeby wyrażenie

$$E(a, b) = \sqrt{\int_0^1 [x\sqrt{x} - (ax + b)]^2 dx}$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

Zadanie 3

Za pomocą metody Romberga zbudowano następujący segment trójkątnej tablicy przybliżeń $\{T_{mk}\}$ całki $\int_a^b f(x)dx$

$$\begin{array}{cccccc} T_{00} & & & & & \\ T_{01} & T_{10} & & & & \\ T_{02} & T_{11} & T_{20} & & & \\ T_{03} & T_{12} & T_{21} & T_{30} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ T_{07} & T_{16} & T_{25} & T_{34} & \dots & T_{70} \end{array}$$

W ilu punktach przedziału $[a, b]$ trzeba obliczyć wartości funkcji podcałkowej f , żeby móc wyznaczyć wszystkie $\{T_{mk}\}$ występujące w powyższym segmencie tablicy? Uzasadnić odpowiedź.