Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2002, termin poprawkowy, część A, czas: 120 min.

Zadanie 1

Twierdzenie Legendre'a. Niech $10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + a_0$ będzie zapisem dziesiętnym liczby całkowitej a (a_i – kolejne cyfry dziesiętne). Pokaź, źe

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{a}{10^i} \right\rfloor = \frac{a - (a_0 + a_1 + \cdots a_k)}{9}$$

Zadanie 2

Łatwo wykazać, źe jeśli $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

Pokaź analogiczny wzór dla dowolnej zaleźności rekurencyjnej w postaci $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i b_{n-i+1}$. W jaki sposób wykorzystując ten wzór moźna obliczyć b_n uźywając $O(M(k)\log n)$ operacji arytmetycznych. W powyźszym wzorze $M(k)$ jest liczbą operacji arytmetycznych potrzebnych do pomnoźenia dwóch macierzy $k \times k$.

Zadanie 3

Znajd"x zwarty (bez $\sum$ i ...) wzór na sumę:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n.$$

Zadanie 4

W ilu zerojedynkowych macierzach $n \times n$ co najmniej jeden wiersz składa się z samych zer?

Powodzenia !