7. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Funkcja f spełnia
$$f(x)=\begin{cases} x-ax^2+x^3 & \text{dla } x<2 \\ a+b & \text{dla } x=2 \\ \sin(\pi x/3)+be^x & \text{dla } x>2. \end{cases}$$
Dla jakich wartości a i b funkcja ta jest ciągła w punkcie 2. A w pozostałych punktach ?

2. Korzystając z trygonometrii oraz z $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ i $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ udowodnić, że funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są ciągłe w każdym punkcie.

3. Zbadać ciągłość podanych funkcji
$$f(x)=\{x\}+\frac{1}{2}\{2x\}+\frac{1}{4}\{4x\} \qquad g(x)=1/[1/x],\quad x\neq 0,\ g(0)=0$$
$$u(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx}\quad x\geqslant 0 \qquad v(x)=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\cos(2^k\pi x)\right)^{2n}$$

4. Podać przykłady funkcji określonych na $\mathbb{R}$ takich, że :

(a) $|f|$ jest ciągła w każdym punkcie podczas gdy f jest nieciągła w każdym punkcie.

(b) f jest nieciągła dokładnie w punktach $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots.$

(c) f jest nieciągła w punktach $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots.$

(d) f jest ciągła i dla każdej liczby $x_0\in\mathbb{R}$ istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0+n)$, ale nie istnieje granica $f(x)$ gdy $x\to\infty$.

5. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcje $\max(f(x),g(x))$ oraz $\min(f(x),g(x))$ są ciągłe. `Wskazówka:` $\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

6. Pokazać, że każda funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ jest różnicą dwu nieujemnych funkcji ciągłych. `Wskazówka:` $g(x)=\max(0,f(x))$, $h(x)=\max(0,-f(x))$.

7. Pokazać, że funkcja spełniająca warunek $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^p,\quad x,y\in\mathbb{R},\ p>0$, jest ciągła w każdym punkcie. Co można powiedzieć o funkcji $f(x)$ w przypadku $p>1$?

8. Znaleźć przykład funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ takiej, że $f(x)\geqslant 0$ oraz $f^{-1}(\{0\})=\{0,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots\}$.

***9.** Pokazać, że funkcja Riemanna $f(x)=\dfrac{1}{n}$ jeśli $x=\dfrac{m}{n}$, gdzie m i n są względnie pierwsze, $n\geqslant 1$, oraz $f(x)=0$, gdy x jest niewymierne jest nieciągła w punktach wymiernych i ciągła w punktach niewymiernych.

***10.** Udowodnić, że funkcja f ciągła w zerze (lub ograniczona w pewnym otoczeniu zera) spełniająca warunek $f(x+y)=f(x)+f(y),\ x,y\in\mathbb{R}$ jest postaci $f(x)=cx$.

***11.** Pokazać, że funkcja monotoniczna na przedziale ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości.

***12.** Skonstruować funkcję ściśle rosnącą, nieciągłą w punktach przeliczalnego ciągu liczb $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

13. Czy funkcja jednostajnie ciągła na przedziale $[a,b]$ jest ciągła na tym przedziale ?

14. Pokazać, że funkcja jednostajnie ciągła na ograniczonym przedziale (a,b) jest ograniczona.

15. Udowodnić, że funkcja jednostajnie ciągła na ograniczonym przedziale (a,b) posiada granice jednostronne w końcach przedziału. `Wskazówka:` Pokazać, że $f(x)$ spełnia warunek Cauchy'ego istnienia granicy jednostronnej w punktach a i b.

16. Pokazać, że suma funkcji jednostajnie ciągłych na $\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Czy iloczyn tych funkcji jest zawsze jednostajnie ciągły ? Rozstrzygnąć to samo zagadnienie dla ograniczonego przedziału (a,b).