

# Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 7

26 listopada 2015 r.

**M7.1.** 1 punkt Wykazać, że wielomiany Czebyszewa  $T_k$  spełniają równości

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l; k, l = 0, 1, \dots),$$
$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} [T_k(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi & (k=0), \\ \pi/2 & (k=1, 2, \dots). \end{cases}$$

Co one oznaczają?

**M7.2.** 1 punkt

- a) Wykazać, że dla ustalonej funkcji wagowej  $p(x)$  i ustalonego przedziału  $[a, b]$  ciąg wielomianów ortogonalnych jest określony jednoznacznie, z dokładnością do stałych mnożników.
- b) Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale  $[a, b]$  z wagą  $p(x)$ . Wykazać, że wielomiany  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) tworzą bazę przestrzeni  $\Pi_n$ .
- c) Niech  $P_k$  będzie  $k$ -tym ( $k > 0$ ) wielomianem ortogonalnym. Wówczas dla dowolnego wielomianu  $Q \in \Pi_{k-1}$  jest  $\langle Q, P_k \rangle = 0$ .

**M7.3.** 1 punkt Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale  $[a, b]$ , z wagą  $p(x)$ . Wykazać, że dla każdego  $n = 1, 2, \dots$  wszystkie zera wielomianu  $P_n$  są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale otwartym  $(a, b)$ .

**M7.4.** 1 punkt Udowodnić twierdzenie Pitagorasa, tzn. jeśli  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  jest układem ortogonalnym, to

$$\left\| \sum_{j=0}^n c_j f_j \right\|_2^2 = \sum_{j=0}^n |c_j|^2 \|f_j\|_2^2.$$

**M7.5.** 1 punkt Udowodnić, że wielomian  $w_n^* \in \Pi_n$  jest  $n$ -tym wielomianem optymalnym dla funkcji  $f \in C_p[a, b]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielomianu  $w_n \in \Pi_n$  zachodzi równość

$$\langle f - w_n^*, w_n \rangle = 0.$$

**M7.6.** 1 punkt Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian optymalny  $w_n^* \in \Pi_n$  w sensie normy średniokwadratowej.

**M7.7.** 1 punkt Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy  $S$  jest funkcją liniową temperatury  $T$ :

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary  $S$  w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

$T$	0	10	20	30	40	80	90	95
$S$	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznaczyć prawdopodobne wartości stałych  $a, b$ .

**M7.8.** 1 punkt Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \alpha_0, & P_1(x) &= (\alpha_1 x - \beta_1)P_0(x), \\ P_k(x) &= (\alpha_k x - \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  są danymi stałymi. Uzasadnić następujący *uogólniony algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n$$

o danych współczynnikach  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Obliczamy pomocnicze wielkości  $V_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n+2$ ) według wzorów

$$V_k = a_k + (\alpha_{k+1}x - \beta_{k+1})V_{k+1} - \gamma_{k+2}V_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0),$$

gdzie  $V_{n+1} = 0, V_{n+2} = 0$ .

Wynik:  $s_n(x) = \alpha_0 V_0$ .