FUNKCJE TWORZĄCE

1. Określenie funkcji tworzących za pomocą szeregów potęgowych

Przypuśćmy, że dany jest ciąg (a_n) liczb zespolonych. **Funkcją tworzącą** dla ciągu (a_n) nazywamy funkcję $A(z)$ określoną za pomocą wzoru

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Przyjmujemy przy tym, że szereg potęgowy po prawej stronie powyższej równości ma dodatni promień zbieżności r i wtedy funkcja $A(z)$ jest określona wewnątrz koła o środku w zerze i promieniu r. Nie będziemy teraz zajmować się ciągami, dla których rozważany szereg potęgowy ma zerowy promień zbieżności (np. ciągami takimi jak $a_n = n^n$). Z teorii funkcji analitycznych wiadomo, że dla danej funkcji analitycznej $A(z)$ współczynniki definiującego ją szeregu potęgowego są wyznaczone jednoznacznie.

Wykorzystanie funkcji tworzących do znajdowania wzorów ogólnych polega na wykonaniu następujących kroków:

- zdefiniowanie funkcji tworzącej dla danego ciągu określonego rekurencyjnie,
- wykorzystanie równań rekurencyjnych do utworzenia równania na funkcję tworzącą,
- rozwiązanie równania i znalezienie wzoru funkcji tworzącej,
- rozwinięcie znalezionej funkcji tworzącej w szereg potęgowy i porównanie współczynników.

Prześledzimy teraz tę metodę na dwóch przykładach: liczb Fibonacciego i liczb Catalana.

2. Liczby Fibonacciego

Przypomnijmy definicję liczb Fibonacciego:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób można otrzymać wzór ogólny na liczby Fibonacciego, korzystając z tzw. funkcji tworzących.

Definiujemy funkcję tworzącą dla ciągu liczb Fibonacciego wzorem

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = F_0 + F_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n = 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) z^n = \\ &= 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n = 1 + z + \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{n+2} = \\ &= 1 + z + z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^n + z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = 1 + z + z \cdot \big(F(z) - 1\big) + z^2 \cdot F(z) = \\ &= 1 + z + zF(z) - z + z^2 F(z) = 1 + zF(z) + z^2 F(z). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie

$$F(z) = 1 + zF(z) + z^2F(z),$$

z którego dostajemy wzór na $F(z)$:

$$F(z) \cdot (1 - z - z^2) = 1,$$

czyli

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Teraz otrzymaną funkcję tworzącą rozwijamy w szereg potęgowy. W tym celu rozkładamy ułamek

$$\frac{1}{1 - z - z^2}$$

na ułamki proste. Najpierw znajdujemy liczby zespolone α i β takie, że

$$1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z) = 1 - (\alpha + \beta)z + (\alpha\beta)z^2.$$

W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Następnie szukamy liczb zespolonych c i d takich, że

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{c}{1 - \alpha z} + \frac{d}{1 - \beta z}.$$

Po wymnożeniu otrzymujemy

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{c(1 - \beta z) + d(1 - \alpha z)}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{c + d - (\alpha d + \beta c)z}{1 - z - z^2}.$$

Otrzymujemy następny układ równań:

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ \beta c + \alpha d = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy:

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \quad \text{oraz} \quad d = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}.$$

Mamy zatem

$$F(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\alpha z} - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\beta z}.$$

Korzystamy teraz ze znanego rozwinięcia w szereg potęgowy. Mianowicie dla dowolnej liczby zespolonej γ mamy

$$\frac{1}{1-\gamma z} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n z^n.$$

Stąd dostajemy rozwinięcie funkcji $F(z)$ w szereg potęgowy

$$F(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot z^n.$$

Korzystając z jednoznaczności rozwinięcia funkcji analitycznej w szereg potęgowy, dostajemy

$$F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Otrzymany wzór jest nazywany **wzorem Bineta**.

3. Liczby Catalana

Przypomnijmy, że liczby Catalana C_n spełniają następujące równanie rekurencyjne:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

W szczególności dla początkowych wartości n mamy:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1, \\
C_1 &= C_0^2 = 1, \\
C_2 &= C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2, \\
C_3 &= C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5, \\
C_4 &= C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 14.
\end{aligned}$$

Definiujemy funkcję tworzącą $C(z)$ dla liczb Catalana wzorem

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned}
\big(C(z)\big)^2 &= C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0) z + (C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0) z^2 + \ldots = \\
&= C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Dokładniej:

$$\big(C(z)\big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^n.$$

Zatem

$$z\cdot\big(C(z)\big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n = C(z) - C_0 = C(z) - 1.$$

Otrzymaliśmy więc równanie kwadratowe z niewiadomą $C(z)$:

$$z\cdot\big(C(z)\big)^2 - C(z) + 1 = 0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Musimy wiedzieć, jaki znak należy wziąć w liczniku. Wiemy jednak, że $C(0) = C_0 = 1$. Mamy natomiast

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = +\infty$$

oraz

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x\big(1+\sqrt{1-4x}\big)} = 1.$$

Stąd wynika, że należy wziąć znak minus:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Teraz musimy rozwinąć funkcję $C(z)$ w szereg potęgowy. Skorzystamy ze wzoru Newtona. W tym celu dla dowolnej liczby rzeczywistej α i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ definiujemy

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Przyjmujemy ponadto

$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

Wówczas mamy następujący wzór Newtona

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

przy czym szereg potęgowy po prawej stronie ma dodatni promień zbieżności (równy 1). Ze wzoru Newtona wynika, że

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4z)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n z^n,$$

skąd dostajemy

$$1 - \sqrt{1-4z} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n z^n.$$

Ostatecznie

$$C(z) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n z^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n+1} 4^{n+1} z^n.$$

Obliczymy teraz występujące w powyższym wzorze współczynniki dwumianowe:

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(1/2) \cdot (1/2-1) \cdot (1/2-2) \cdot \ldots \cdot (1/2-n+1)}{n!} = \\
&= \frac{1 \cdot (1-2) \cdot (1-4) \cdot \ldots \cdot (1-2n+2)}{2^n \cdot n!} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2-1) \cdot (4-1) \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot n! \cdot (n-1)!}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n+1} \cdot (n+1)! \cdot n!} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot (n+1) \cdot 4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Podstawiamy obliczoną wartość współczynnika dwumianowego do wzoru na $C(z)$:

$$C(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{2 \cdot (n+1) \cdot 4^n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot 4^{n+1} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} z^n.$$

Stąd ostatecznie dostajemy

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}.$$

4. Wykładnicze funkcje tworzące i liczby Bella

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem liczb zespolonych. **Wykładniczą funkcją tworzącą** dla ciągu (a_n) nazywamy funkcję $A(z)$ określoną za pomocą wzoru

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

W tym paragrafie wyprowadzimy wzór na wykładniczą funkcję tworzącą dla liczb Bella. Przypomnijmy teraz wzór rekurencyjny dla liczb Bella:

$$B_0 = 1, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Niech $B(z)$ będzie wykładniczą funkcją tworzącą dla liczb Bella:

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Mamy wówczas

$$B(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

Różniczkujemy otrzymany szereg wyraz po wyrazie:

$$\begin{aligned} B'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \cdot (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot \frac{z^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k! \cdot (n-k)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{B_k}{k!} z^k \cdot \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = B(z) \cdot \mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie

$$B'(z) = B(z) \cdot \mathrm{e}^z,$$

czyli

$$(\ln B(z))' = \mathrm{e}^z.$$

Stąd

$$B(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z + C}$$

dla pewnej stałej C. Porównując wartości dla $z = 0$, otrzymujemy $C = -1$. Ostatecznie

$$B(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1}.$$

5. Pierścień szeregów formalnych

Będziemy zajmować się zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach zespolonych $\mathbb{P} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Elementy zbioru $\mathbb{P}$ będziemy oznaczać małymi literami greckimi i nazywać **formalnymi szeregami potęgowymi** lub w skrócie **szeregami formalnymi**. Naszym zamysłem jest, by szereg α odpowiadał prawdziwemu szeregowi potęgowemu:

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots) \quad \text{odpowiada szeregowi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pojęcie szeregu **formalnego** związane jest z tym, że nie zwracamy uwagi na zbieżność szeregu. Wszelkie działania na szeregach będziemy traktować czysto formalnie, nie zastanawiając się nad tym, czy rozważane sumy odpowiadają jakimkolwiek liczbom zespolonym. Okaże się, że takie działania będą miały dobrze określony sens algebraiczny oraz szereg formalny α rzeczywiście okaże się nieskończoną sumą elementów postaci $a_n x^n$.

Zdefiniujemy trzy ważne podzbiory $\mathbb{P}$. Niech

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{P}.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, (a_n \in \mathbb{R}), \\ \alpha \in \mathbb{P}_0 &\Leftrightarrow a_0 = 0, \\ \alpha \in \mathbb{P}_1 &\Leftrightarrow a_0 = 1. \end{aligned}$$

Zbiór $\mathbb{P}$ jest więc zbiorem wszystkich szeregów formalnych o wyrazach zespolonych, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ jest jego podzbiorem składającym się z szeregów formalnych o wyrazach rzeczywistych, $\mathbb{P}_0$ i $\mathbb{P}_1$ podzbiorami składającymi się z szeregów formalnych, których wyraz wolny jest odpowiednio równy 0 lub 1.

Wprowadzimy teraz działania na szeregach formalnych w taki sposób, by nadały one zbiorowi $\mathbb{P}$ strukturę pierścienia przemiennego bez dzielników zera (czyli tzw. dziedziny całkowitości). Zaczniemy od dodawania szeregów formalnych. Niech

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \quad \text{oraz} \quad \beta = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots).$$

Sumą $\alpha + \beta$ szeregów formalnych nazwiemy szereg

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots).$$

Inaczej mówiąc, szeregi formalne dodajemy „po współrzędnych”. Nietrudno zauważyć, że działanie dodawania szeregów formalnych jest przemienne i łączne:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{oraz} \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

dla dowolnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}$. Przyjmijmy następnie

$$\zeta = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

oraz

$$-\alpha = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n, \ldots).$$

Wówczas łatwo sprawdzić, że

$$\alpha + \zeta = \zeta + \alpha = \alpha \quad \text{oraz} \quad \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = \zeta.$$

Szereg ζ jest więc zerem, a szereg $-\alpha$ jest szeregiem przeciwnym do szeregu α. Zbiór $\mathbb{P}$ jest zatem grupą abelową ze względu na działanie dodawania. Zdefiniujemy teraz mnożenie szeregów formalnych. Tak jak poprzednio, niech

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \quad \text{oraz} \quad \beta = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots).$$

Iloczynem $\alpha \cdot \beta$ szeregów formalnych nazwiemy szereg

$$\gamma = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$$

określony wzorami

$$c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \quad c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots,$$

czyli ogólnie za pomocą tzw. wzoru Cauchy'ego

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wykażemy, że zbiór $\mathbb{P}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem przemiennym. Przemienność mnożenia jest oczywista i wynika z przemienności mnożeń we wzorze Cauchy'ego. Pokażemy teraz, że mnożenie szeregów formalnych jest łączne.

Niech dane będą trzy szeregi formalne α, β i γ:

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \\ \beta &= (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots), \\ \gamma &= (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots). \end{aligned}$$

Chcemy udowodnić, że

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

W tym celu definiujemy następujące szeregi formalne:

$$\begin{aligned} \delta = \alpha \cdot \beta &= (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots), \\ \varepsilon = \delta \cdot \gamma &= (e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots), \\ \varphi = \beta \cdot \gamma &= (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots), \\ \eta = \alpha \cdot \varphi &= (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots), \end{aligned}$$

gdzie zgodnie ze wzorem Cauchy'ego mamy

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad e_n = \sum_{k=0}^{n} d_k c_{n-k}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}, \quad h_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_{n-k}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Naszym celem jest udowodnienie, że $\varepsilon = \eta$, czyli, że $e_n = h_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ W tym celu skorzystamy z równości pomocniczej:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} p_{k,l} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n} p_{k,l} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l} p_{k+l,l} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} p_{k+l,k}.$$

Dowód tej tożsamości pozostawimy jako ćwiczenie. Mamy teraz:

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} d_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) \cdot c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} a_k b_l c_{n-k-l}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Z drugiej strony mamy

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\sum_{l=0}^{n-k} b_l c_{n-k-l} \right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} a_k b_l c_{n-k-l} = e_n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ W ten sposób dowód łączności mnożenia jest zakończony.
Definiujemy teraz szereg formalny ι wzorem

$$\iota = (i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots) = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

czyli

$$i_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad i_n = 0$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nietrudno zauważyć teraz, że

$$\iota \cdot \alpha = \alpha \cdot \iota = \alpha$$

dla dowolnego szeregu formalnego α. Szereg ι jest zatem jedynką w zbiorze $\mathbb{P}$. Dowodzimy teraz rozdzielności mnożenia względem dodawania. Niech

$$\begin{aligned}
\alpha &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \\
\beta &= (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots), \\
\gamma &= (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots).
\end{aligned}$$

Wówczas równość

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

wynika z równości

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Zbiór $\mathbb{P}$ jest zatem pierścieniem przemiennym z jedynką. Pozostaje wykazać, że jest dziedziną całkowitości. Niech więc $\alpha \neq \zeta$ oraz $\beta \neq \zeta$, gdzie

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \quad \text{oraz} \quad \beta = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots).$$

Chcemy pokazać, że $\alpha \cdot \beta \neq \zeta$. Niech $\gamma = \alpha \cdot \beta$, gdzie

$$\gamma = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots).$$

Ponieważ $\alpha \neq \zeta$, więc istnieje liczba n taka, że $a_n \neq 0$. Niech n_0 będzie najmniejszą taką liczbą n:

$$a_{n_0} \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a_0 = a_1 = \ldots = a_{n_0-1} = 0.$$

Podobnie istnieje liczba m_0 taka, że

$$b_{m_0} \neq 0 \quad \text{oraz} \quad b_0 = b_1 = \ldots = b_{m_0-1} = 0.$$

Mamy teraz

$$c_{n_0+m_0} = \sum_{k=0}^{n_0+m_0} a_k b_{n_0+m_0-k} = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k b_{n_0+m_0-k} + a_{n_0} b_{m_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+m_0} a_k b_{n_0+m_0-k}.$$

Dla $k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$ mamy $a_k = 0$, a więc

$$\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k b_{n_0+m_0-k} = 0.$$

Następnie

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+m_0} a_k b_{n_0+m_0-k} = \sum_{k=1}^{m_0} a_{n_0+k} b_{m_0-k} = \sum_{k=0}^{m_0-1} a_{n_0+m_0-k} b_k.$$

Ponieważ dla $k = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$ mamy $b_k = 0$, więc

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+m_0} a_k b_{n_0+m_0-k} = \sum_{k=0}^{m_0-1} a_{n_0+m_0-k} b_k = 0.$$

Zatem

$$c_{n_0+m_0} = a_{n_0} \cdot b_{m_0} \neq 0,$$

co dowodzi, że $\gamma \neq \zeta$. Pierścień $\mathbb{P}$ nie ma zatem dzielników zera, a więc jest dziedziną całkowitości. Zerem tego pierścienia jest szereg formalny ζ, a jedynką szereg formalny ι. Pokażemy teraz, że ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ może być traktowane jako podciało pierścienia $\mathbb{P}$.

6. Włożenie $\mathbb{C}$ w $\mathbb{P}$

Definiujemy przekształcenie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{P}$ wzorem

$$h(z) = (z, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Inaczej mówiąc, $h(z)$ jest szeregiem α_z zdefiniowanym wzorami

$$\alpha_z = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

gdzie

$$a_0 = z \quad \text{oraz} \quad a_n = 0$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. W szczególności $\zeta = h(0)$ oraz $\iota = h(1)$. Przekształcenie h jest oczywiście różnowartościowe. Nietrudno pokazać, że jest ono homomorfizmem $\mathbb{C}$ w $\mathbb{P}$. Utożsamiając liczbę zespoloną z z szeregiem formalnym $h(z)$ możemy przyjąć, że ciało liczb zespolonych jest podciałem pierścienia $\mathbb{P}$. Od tej pory zamiast szeregu formalnego α_z będziemy pisać po prostu z. W szczególności zamiast ζ będziemy pisać 0, a zamiast ι będziemy pisać 1.

Odnotujmy jeszcze jedną własność omawianego włożenia, z której będziemy często korzystać. Niech

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Wówczas dla dowolnej liczby zespolonej z mamy

$$z \cdot \alpha = (za_0, za_1, za_2, \ldots, za_n, \ldots).$$

Wzór ten wynika natychmiast ze wzoru Cauchy'ego.

7. Rodziny sumowalne

Przypuśćmy, że mamy dany ciąg $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ szeregów formalnych:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= (a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}, \ldots),\\
\alpha_1 &= (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots),\\
\alpha_2 &= (a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}, \ldots),\\
\ldots & \quad \ldots\\
\alpha_m &= (a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}, \ldots),\\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}$$

dla $m = 0, 1, 2, \ldots$ Mówimy, że ten ciąg tworzy **rodzinę sumowalną**, jeśli dla każdego n istnieje tylko skończenie wiele liczb m takich, że $a_n^{(m)} \neq 0$. Wówczas dla każdego n definiujemy a_n wzorem

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(m)}.$$

Suma po prawej stronie ma sens, bo tylko dla skończenie wielu indeksów m sumowany składnik jest różny od zera. Definiujemy teraz

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Inaczej:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_0^{(m)}, \sum_{m=0}^{\infty} a_1^{(m)}, \sum_{m=0}^{\infty} a_2^{(m)}, \ldots, \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(m)}, \ldots \right).$$

Zauważmy, że suma rodziny sumowalnej nie zależy od kolejności sumowania. To znaczy, że jeśli mamy dane dwa ciągi szeregów formalnych różniące się tylko kolejnością wyrazów (tzn. jeden jest permutacją drugiego), to sumy obu ciągów będą równe.

8. Szeregi potęgowe

Definiujemy szereg formalny ξ wzorem

$$\xi = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

czyli

$$\xi = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

gdzie

$$x_0 = 0, \quad , x_1 = 1, \quad x_n = 0 \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots), \\ \xi^3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots), \\ \xi^4 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \end{aligned}$$

i tak dalej. Ogólnie

$$\xi^m = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

gdzie

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = m, \\ 0 & \text{gdy } n \neq m \end{cases}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $m = 1, 2, 3, \ldots$. Przyjmujemy również $\xi^0 = 1$. Przypuśćmy teraz, że dany jest szereg formalny α:

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Przyjmijmy następnie

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 \cdot \xi^0 = (a_0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots), \\ \alpha_1 &= a_1 \cdot \xi^1 = (0, a_1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots), \\ \alpha_2 &= a_2 \cdot \xi^2 = (0, 0, a_2, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \end{aligned}$$

i tak dalej. Ogólnie

$$\alpha_m = a_m \cdot \xi^m = (a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}, \ldots),$$

gdzie

$$a_n^{(m)} = \begin{cases} a_n & \text{gdy } n = m, \\ 0 & \text{gdy } n \neq m \end{cases}$$

dla $n, m = 0, 1, 2, \ldots$

Nietrudno zauważyć, że rodzina $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ jest sumowalna oraz

$$\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \xi^m.$$

Szereg formalny α może więc być traktowany jako suma szeregu potęgowego, w którym współczynnikami przy kolejnych potęgach ξ są wyrazy szeregu formalnego α.

W odróżnieniu od szeregów potęgowych zmiennej zespolonej, nie wolno nam podstawiać w miejsce ξ liczb zespolonych. Otrzymalibyśmy bowiem sumę nieskończenie wielu szeregów formalnych (niekoniecznie sumowalną) lub nieskończenie wielu liczb zespolonych (przy czym szereg nie musiałby być zbieżny). Jedynym wyjątkiem jest podstawienie zera. Formalizuje się to podstawienie za pomocą homomorfizmu $Z : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ określonego wzorem

$$Z(\alpha) = a_0, \quad \text{gdzie } \alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Sprawdzenie, że przekształcenie Z rzeczywiście jest homomorfizmem, pozostawiamy jako ćwiczenie.

9. Elementy odwracalne pierścienia $\mathbb{P}$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. Szereg formalny α jest odwracalny w pierścieniu $\mathbb{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = Z(\alpha) \neq 0$ (czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \notin \mathbb{P}_0$).

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że szereg formalny α jest odwracalny. Niech β będzie takim szeregiem formalnym, że $\alpha \cdot \beta = 1$. Wtedy

$$Z(\alpha) \cdot Z(\beta) = Z(\alpha \cdot \beta) = Z(1) = 1,$$

skąd wynika, że $Z(\alpha) \neq 0$.

Przypuśćmy teraz, że na odwrót, $Z(\alpha) \neq 0$. Niech

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Definiujemy szereg formalny $\beta = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
&b_0 = (a_0)^{-1}, \\
&b_1 = (-a_1 b_0) \cdot (a_0)^{-1}, \\
&b_2 = (-a_2 b_0 - a_1 b_1) \cdot (a_0)^{-1}, \\
&\ldots \quad \ldots \\
&b_n = (-a_n b_0 - a_{n-1} b_1 - \ldots - a_1 b_{n-1}) \cdot (a_0)^{-1}, \\
&\ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

Nietrudno teraz zauważyć, że $a_0 b_0 = 1$ oraz

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 = 0,$$

co dowodzi, że $\alpha \cdot \beta = 1$.

Szereg β oznaczamy symbolem α^{-1} i nazywamy **szeregiem odwrotnym** do α. Ponieważ dla dowolnych szeregów formalnych α i β zachodzi równość

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (\alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}) = 1,$$

więc mamy równość

$$(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}.$$

Popatrzmy teraz na przykłady szeregów formalnych odwracalnych. Niech szereg α będzie dany wzorem

$$\alpha = 1 - a\xi = (1, -a, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

gdzie $a \in \mathbb{C}$. Niech następnie

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \xi^n = (1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots).$$

Ponieważ $Z(\alpha) = Z(\beta) = 1 \neq 0$, więc szeregi α i β są odwracalne. Niech szereg

$$\gamma = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$$

będzie ich iloczynem: $\gamma = \alpha \cdot \beta$. Mamy wówczas

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

oraz

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 1 \cdot a^n + (-a) \cdot a^{n-1} = a^n - a^n = 0$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ A więc $\alpha \cdot \beta = 1$, czyli

$$(1 - a\xi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a^n \xi^n = 1.$$

Inaczej mówiąc

$$1 + a\xi + a^2\xi^2 + a^3\xi^3 + \ldots + a^n\xi^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \xi^n = (1 - a\xi)^{-1}. \tag{5.1}$$

Udowodnimy następnie, że dla dowolnego $d \geq 1$ zachodzi równość

$$(1 - a\xi)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} a^n \xi^n. \tag{5.2}$$

Tej równości będziemy dowodzić przez indukcję względem d. Dla $d = 1$ mamy pokazać, że

$$(1 - a\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} a^n \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \xi^n.$$

To jest dokładnie równość udowodniona wyżej.

W kroku indukcyjnym mamy wykazać, że

$$(1 - a\xi)^{-d-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n,$$

czyli

$$(1 - a\xi)^{-d} \cdot (1 - a\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n.$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$$(1 - a\xi)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} a^n \xi^n.$$

Musimy zatem udowodnić, że

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} a^n \xi^n \right) \cdot (1 - a\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n,$$

czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} a^n \xi^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n \right) \cdot (1 - a\xi).$$

Przekształcamy prawą stronę:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n \right) \cdot (1 - a\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^{n+1} \xi^{n+1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{d+n-1}{d} a^n \xi^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} a^n \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d} a^n \xi^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{d+n}{d} - \binom{d+n-1}{d} \right) a^n \xi^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} a^n \xi^n,
\end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

10. Równania rekurencyjne liniowe jednorodne o stałych współczynnikach – przykład

W tym paragrafie pokażemy na przykładzie, w jaki sposób za pomocą funkcji tworzących możemy otrzymać wzór ogólny ciągu określonego równaniem rekurencyjnym liniowym jednorodnym o stałych współczynnikach. Wybrany przykład będzie pokazywał wszystkie istotne fragmenty dowodu ogólnego, który pokażemy w następnym paragrafie.

Mamy dany ciąg (a_n) zdefiniowany równaniem rekurencyjnym szóstego rzędu:

$$a_{n+6} - 5a_{n+5} - 15a_{n+4} + 85a_{n+3} + 10a_{n+2} - 372a_{n+1} + 360a_n = 0 \tag{5.3}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Poszukujemy rozwiązania ogólnego. Przyjrzyjmy się najpierw równaniu charakterystycznemu naszego równania rekurencyjnego:

$$x^6 - 5x^5 - 15x^4 + 85x^3 + 10x^2 - 372x + 360 = 0$$

lub inaczej

$$(x-2)^3 \cdot (x+3)^2 \cdot (x-5) = 0.$$

Równanie charakterystyczne ma 3 pierwiastki: pierwiastek potrójny $x = 2$, pierwiastek podwójny $x = -3$ i pierwiastek pojedynczy $x = 5$. Pokażemy, że rozwiązanie ogólne równania rekurencyjnego (5.3) ma następującą postać:

$$a_n = (u_0 + u_1 n + u_2 n^2) \cdot 2^n + (v_0 + v_1 n) \cdot (-3)^n + w_0 \cdot 5^n \quad \text{dla } n \geq 0, \tag{5.4}$$

gdzie $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, w_0 \in \mathbb{C}$. Wprowadźmy wygodne oznaczenie: $\mathbb{C}_d[x]$ oznacza zbiór wielomianów zmiennej zespolonej x stopnia mniejszego od d (a więc stopnia co najwyżej $d-1$). Podobnie $\mathbb{C}_d[\xi]$ oznacza zbiór wielomianów stopnia mniejszego od d zmiennej ξ (jako podzbiór pierścienia wszystkich szeregów formalnych $\mathbb{P}$):

$$C_d[\xi] = \{\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{P} : \ \forall n \geq d\, (a_n = 0)\}.$$

Wtedy rozwiązanie ogólne równania (5.3) można przedstawić w postaci

$$a_n = u(n) \cdot 2^n + v(n) \cdot (-3)^n + w(n) \cdot 5^n \quad \text{dla } n \geq 0,$$

gdzie $u(x) \in \mathbb{C}_3[x]$, $v(x) \in \mathbb{C}_2[x]$ i $w(x) \in \mathbb{C}_1[x]$. Zwracamy uwagę na związek między krotnościami pierwiastków równania charakterystycznego a stopniami wielomianów $u(x)$, $v(x)$ i $w(x)$.

Będziemy w dalszym ciągu traktować pierścień $\mathbb{P}$ szeregów formalnych jak przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Zdefiniujemy cztery podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{P}$. Oto pierwsza z nich:

$$V_1 = \{\alpha = (a_n) \in \mathbb{P} : \ a_{n+6} - 5a_{n+5} - 15a_{n+4} + 85a_{n+3} + 10a_{n+2} - 372a_{n+1} + 360a_n = 0\}.$$

W poprzednim wykładzie sprawdziliśmy, że ciągi spełniające równanie rekurencyjne liniowe jednorodne o stałych współczynnikach rzeczywiście tworzą podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich ciągów o wyrazach zespolonych, a więc przestrzeni $\mathbb{P}$. Ponieważ pierwsze 6 wyrazów ciągu α można dobierać dowolnie, a wszystkie następne są przez nie wyznaczone jednoznacznie, więc

$$V_1 \cong \mathbb{C}^6,$$

czyli

$$\dim V_1 = 6.$$

Przed zdefiniowaniem drugiej podprzestrzeni wybierzmy dwa szeregi formalne:

$$\begin{aligned}\delta &= (1, -5, -15, 85, 10, -372, 360, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) = \\ &= 1 - 5\xi - 15\xi^2 + 85\xi^3 + 10\xi^4 - 372\xi^5 + 360\xi^6 = \\ &= (1 - 2\xi)^3 \cdot (1 + 3\xi)^2 \cdot (1 - 5\xi)\end{aligned}$$

oraz

$$\gamma = \delta^{-1} = (1-5\xi-15\xi^2+85\xi^3+10\xi^4-372\xi^5+360\xi^6)^{-1} = (1-2\xi)^{-3}(1+3\xi)^{-2}(1-5\xi)^{-1}.$$

Teraz definiujemy

$$V_2 = \{\alpha \in \mathbb{P} :\ \exists \pi \in \mathbb{C}_6[\xi]\, (\alpha = \pi \cdot \gamma)\} = \{\alpha \in \mathbb{P} :\ \alpha\delta \in \mathbb{C}_6[\xi]\}.$$

Sprawdzenie, że V_2 jest podprzestrzenią $\mathbb{P}$ pozostawimy jako ćwiczenie. Ponieważ elementy V_2 są wyznaczone jednoznacznie przez elementy $\mathbb{C}_6[\xi]$, więc łatwo pokazujemy, że

$$V_2 \cong \mathbb{C}^6,$$

czyli

$$\dim V_2 = 6.$$

Mamy dwie przestrzenie liniowe tego samego wymiaru. Pokażemy, że $V_2 \subseteq V_1$. Przypuśćmy zatem, że mamy dany szereg formalny

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in V_2.$$

Zatem $\pi = \alpha\delta \in \mathbb{C}_6[\xi]$. Niech zatem

$$\pi = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

(tzn. $p_n = 0$ dla $n \geq 6$). Mamy zatem równość

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \cdot (1, -5, -15, 85, 10, -372, 360, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) = \\ &\qquad = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}1 \cdot a_6 - 5 \cdot a_5 - 15 \cdot a_4 + 85 \cdot a_3 + 10 \cdot a_2 - 372 \cdot a_1 + 360 \cdot a_0 = p_6 = 0,\\ 1 \cdot a_7 - 5 \cdot a_6 - 15 \cdot a_5 + 85 \cdot a_4 + 10 \cdot a_3 - 372 \cdot a_2 + 360 \cdot a_1 = p_7 = 0\end{aligned}$$

i ogólnie

$$1 \cdot a_{n+6} - 5 \cdot a_{n+5} - 15 \cdot a_{n+4} + 85 \cdot a_{n+3} + 10 \cdot a_{n+2} - 372 \cdot a_{n+1} + 360 \cdot a_n = p_{n+6} = 0$$

dla $n \geq 0$. A więc $\alpha \in V_1$. Pokazaliśmy zatem, że

$$V_2 \subseteq V_1 \quad \text{oraz} \quad \dim V_1 = \dim V_2,$$

czyli $V_1 = V_2$.
Definiujemy trzecią podprzestrzeń $\mathbb{P}$:

$$V_3 = \left\{\alpha \in \mathbb{P} : \ \exists \pi, \rho, \sigma \left(\alpha = \pi \cdot (1-2\xi)^{-3} + \rho \cdot (1+3\xi)^{-2} + \sigma \cdot (1-5\xi)^{-1}\right)\right\},$$

przy czym $\pi \in \mathbb{C}_3[\xi]$, $\rho \in \mathbb{C}_2[\xi]$ oraz $\sigma \in \mathbb{C}_1[\xi]$. Nietrudno pokazać, że

$$V_3 \cong \mathbb{C}_3[\xi] \times \mathbb{C}_2[\xi] \times \mathbb{C}_1[\xi] \cong \mathbb{C}^6,$$

a więc V_3 jest też podprzestrzenia przestrzeni $\mathbb{P}$ oraz $\dim V_3 = 6$. Pokażemy, że $V_3 \subseteq V_2$. Przypuśćmy zatem, że

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in V_3.$$

Zatem

$$\alpha = \pi \cdot (1-2\xi)^{-3} + \rho \cdot (1+3\xi)^{-2} + \sigma \cdot (1-5\xi)^{-1}$$

dla pewnych

$$\pi = (p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2) \in \mathbb{C}_3[\xi], \quad \rho = (r_0 + r_1\xi) \in \mathbb{C}_2[\xi], \quad \sigma = s_0 \in \mathbb{C}_1[\xi].$$

Chcemy pokazać, że $\alpha\delta \in \mathbb{C}_6[\xi]$. Mamy

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \delta &= \left(\pi \cdot (1-2\xi)^{-3} + \rho \cdot (1+3\xi)^{-2} + \sigma \cdot (1-5\xi)^{-1}\right) \cdot (1-2\xi)^3(1+3\xi)^2(1-5\xi) =\\ &= \pi(1+3\xi)^2(1-5\xi) + \rho(1-2\xi)^3(1-5\xi) + \sigma(1-2\xi)^3(1+3\xi)^2 =\\ &= \pi(1+\xi-21\xi^2-45\xi^3) + \rho(1-11\xi+42\xi^2-68\xi^3+40\xi^4) +\\ &\quad + \sigma(1-15\xi^2+10\xi^3+60\xi^4-72\xi^5) =\\ &= (p_0+p_1\xi+p_2\xi^2) \cdot (1+\xi-21\xi^2-45\xi^3) +\\ &\quad + (r_0+r_1\xi) \cdot (1-11\xi+42\xi^2-68\xi^3+40\xi^4) +\\ &\quad + s_0 \cdot (1-15\xi^2+10\xi^3+60\xi^4-72\xi^5) =\\ &= (p_0+r_0+s_0) + (p_0+p_1-11r_0+r_1)\xi +\\ &\quad + (-21p_0+p_1+p_2+42r_0-11r_1-15s_0)\xi^2 +\\ &\quad + (-45p_0-21p_1+p_2-68r_0+42r_1+10s_0)\xi^3 +\\ &\quad + (-45p_1-21p_2+40r_0-68r_1+60s_0)\xi^4 + (-45p_2+40r_1-72s_0)\xi^5 \in \mathbb{C}_6[\xi].\end{aligned}$$

Zatem $\alpha \in V_2$. Pokazaliśmy więc, że $\alpha \in V_2$ i tym samym pokazaliśmy, że $V_3 \subseteq V_2$. Ponieważ $\dim V_2 = \dim V_3 = 6$, więc $V_2 = V_3$.

Definiujemy czwartą podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{P}$:

$$V_4 = \big\{\alpha = (a_n) \in \mathbb{P} :\ \exists u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, w_0 \in \mathbb{C}\\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big(a_n = (u_0 + u_1 n + u_2 n^2) \cdot 2^n + (v_0 + v_1 n) \cdot (-3)^n + w_0 \cdot 5^n\big)\big\}.$$

Dowód, że V_4 rzeczywiście jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{P}$ zostawiamy jako ćwiczenie. Ponieważ każdy szereg $\alpha \in V_4$ jest wyznaczony jednoznacznie przez liczby zespolone u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, w_0, więc $V_4 \cong \mathbb{C}^6$, czyli $\dim V_4 = 6$. Pokażemy, że $V_3 \subseteq V_4$. Niech zatem $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in V_3$. Istnieją $\pi \in \mathbb{C}_3[\xi]$, $\rho \in \mathbb{C}_2[\xi]$ i $\sigma \in \mathbb{C}_1[\xi]$ takie, że

$$\alpha = \pi \cdot (1-2\xi)^{-3} + \rho \cdot (1+3\xi)^{-2} + \sigma \cdot (1-5\xi)^{-1}.$$

Korzystamy teraz z równości (5.1) i (5.2):

$$\begin{aligned}
(1-2\xi)^{-3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \cdot 2^n \xi^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^n, \\
(1+3\xi)^{-2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \cdot (-3)^n \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (-3)^n \xi^n, \\
(1-5\xi)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \xi^n.
\end{aligned}$$

Niech następnie $\pi = p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2$, $\rho = r_0 + r_1\xi$ oraz $\sigma = s_0$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\pi \cdot (1-2\xi)^{-3} &= \frac{1}{2} \cdot (p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^n = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_1(n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^{n+1} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_2(n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^{n+2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_1 n(n+1) \cdot 2^{n-1} \xi^n + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} p_2 n(n-1) \cdot 2^{n-2} \xi^n = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n+1)(n+2) \cdot 2^n \xi^n + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_1 n(n+1) \cdot 2^n \xi^n + \\
&\quad + \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_2 n(n-1) \cdot 2^n \xi^n = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \big(4p_0(n+1)(n+2) + 2p_1 n(n+1) + p_2 n(n-1)\big) \cdot 2^n \xi^n.
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\cdot\big(4p_0(n+1)(n+2)+2p_1n(n+1)+p_2n(n-1)\big) &= \\ &= \frac{1}{8}\cdot\big(4p_0(2+3n+n^2)+2p_1(n+n^2)+p_2(-n+n^2)\big) = \\ &= \frac{1}{8}\cdot\big(8p_0+(12p_0+2p_1-p_2)n+(4p_0+2p_1+p_2)n^2\big) = \\ &= u_0+u_1n+u_2n^2,\end{aligned}$$

gdzie

$$u_0=p_0,\quad u_1=\frac{12p_0+2p_1-p_2}{8},\quad u_2=\frac{4p_0+2p_1+p_2}{8},$$

więc

$$\pi\cdot(1-2\xi)^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(u_0+u_1n+u_2n^2)\cdot 2^n\xi^n.$$

Podobnie

$$\begin{aligned}\rho\cdot(1+3\xi)^{-2} &= (r_0+r_1\xi)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot(-3)^n\xi^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}r_0(n+1)\cdot(-3)^n\xi^n+\sum_{n=0}^{\infty}r_1(n+1)\cdot(-3)^n\xi^{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}r_0(n+1)\cdot(-3)^n\xi^n+\sum_{n=1}^{\infty}r_1n\cdot(-3)^{n-1}\xi^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}r_0(n+1)\cdot(-3)^n\xi^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}r_1n\cdot(-3)^n\xi^n = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\big(3r_0(n+1)-r_1n\big)\cdot(-3)^n\xi^n = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\big(3r_0+(3r_0-r_1)n\big)\cdot(-3)^n\xi^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(v_0+v_1n)\cdot(-3)^n\xi^n,\end{aligned}$$

gdzie

$$v_0=r_0,\quad v_1=\frac{3r_0-r_1}{3}.$$

Wreszcie

$$\sigma\cdot(1-5\xi)^{-1}=s_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}5^n\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}w_0\cdot 5^n\xi^n,$$

gdzie $w_0 = s_0$.
Łącznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n = \\ &= \pi \cdot (1-2\xi)^{-3} + \rho \cdot (1+3\xi)^{-2} + \sigma \cdot (1-5\xi)^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((u_0 + u_1 n + u_2 n^2) \cdot 2^n + (v_0 + v_1 n) \cdot (-3)^n + w_0 \cdot 5^n\big)\xi^n,\end{aligned}$$

skąd wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = (u_0 + u_1 n + u_2 n^2) \cdot 2^n + (v_0 + v_1 n) \cdot (-3)^n + w_0 \cdot 5^n.$$

Zatem $\alpha \in V_4$. Pokazaliśmy więc, że $V_3 \subseteq V_4$. Ponieważ $\dim V_3 = \dim V_4 = 6$, więc $V_3 = V_4$.
Wszystkie cztery zdefiniowane podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{P}$ są równe. W szczególności $V_1 = V_4$, co dowodzi, że ciągi (a_n) spełniające równanie rekurencyjne (5.3), a więc należące do V_1 należą również do V_4. To zaś znaczy, że ciągi te są określone wzorem ogólnym (5.4):

$$a_n = (u_0 + u_1 n + u_2 n^2) \cdot 2^n + (v_0 + v_1 n) \cdot (-3)^n + w_0 \cdot 5^n$$

dla pewnych liczb zespolonych u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, w_0. To kończy dowód.

11. Równania rekurencyjne liniowe jednorodne o stałych współczynnikach – twierdzenie ogólne

W tym paragrafie udowodnimy twierdzenie o postaci rozwiązań równań rekurencyjnych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach.

Twierdzenie 5.2. Mamy dane równanie rekurencyjne liniowe jednorodne rzędu d

$$a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \ldots + c_{d-1} a_{n+1} + c_d a_n = 0 \tag{5.5}$$

o stałych współczynnikach $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ (przyjmujemy, że $c_d \neq 0$; w przeciwnym razie równanie miałoby rząd niższy niż d). Przypuśćmy, że równanie charakterystyczne

$$z^d + c_1 z^{d-1} + c_2 z^{d-2} + \ldots + c_{d-1} z + c_d = 0$$

ma m pierwiastków zespolonych $r_1, \ldots, r_m$ odpowiednio krotności $d_1, \ldots, d_m$; oczywiście

$$d_1 + \ldots + d_m = d.$$

Wówczas istnieją wielomiany

$$q_1 \in \mathbb{C}_{d_1}[X], \ldots, q_m \in \mathbb{C}_{d_m}[X]$$

takie, że

$$a_n = q_1(n) \cdot r_1^n + \ldots + q_m(n) \cdot r_m^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dowód. Dowód zaczniemy od przekształcenia równania charakterystycznego. Oczywiście równanie charakterystyczne możemy zapisać w postaci

$$(z - r_1)^{d_1} \cdot (z - r_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (z - r_m)^{d_m} = 0.$$

Ponieważ $c_d \neq 0$, więc pierwiastki równania charakterystycznego są różne od zera. podstawmy zatem $\frac{1}{z}$ w miejsce z i pomnóżmy obie strony równania przez z^d, otrzymując kolejno

$$\left(\frac{1}{z} - r_1\right)^{d_1} \cdot \left(\frac{1}{z} - r_2\right)^{d_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{z} - r_m\right)^{d_m} = 0,$$
$$(1 - r_1 z)^{d_1} \cdot (1 - r_2 z)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m z)^{d_m} = 0.$$

Otrzymane równanie jest oczywiście równoważne równaniu

$$\frac{1}{z^d} + c_1 \cdot \frac{1}{z^{d-1}} + \ldots + c_{d-1} \cdot \frac{1}{z} + c_d = 0,$$

czyli

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{d-1} z^{d-1} + c_d z^d = 0.$$

Inaczej mówiąc, zachodzi równość wielomianów

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{d-1} z^{d-1} + c_d z^d = (1 - r_1 z)^{d_1} \cdot (1 - r_2 z)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m z)^{d_m}.$$

Teraz, postępując tak jak w przykładzie, definiujemy cztery podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{P}$. Oto pierwsza z nich:

$$V_1 = \{\alpha = (a_n) \in \mathbb{P} : \; a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \ldots + c_{d-1} a_{n+1} + c_d a_n = 0\}.$$

Sprawdzenie, że V_1 jest rzeczywiście podprzestrzenią $\mathbb{P}$ zostawiamy jako ćwiczenie. Ponieważ pierwsze d wyrazów ciągu α możemy wybrać dowolnie, a pozostałe są wyznaczone jednoznacznie przez równanie (5.5), więc $V_1 \cong \mathbb{C}^d$, czyli $\dim V_1 = d$.

Następnie definiujemy szereg formalny δ wzorem

$$\delta = (1, c_1, c_2, \ldots, c_d, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Inaczej mówiąc, ciąg współczynników $c_1, c_2, \ldots, c_d$ rozszerzamy, przyjmując

$$C_0 = 1, \quad c_n = 0 \quad \text{dla } n = d+1, d+2, d+3, \ldots$$

Z rozważań przeprowadzonych na początku dowodu wynika, że

$$\delta = 1 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \ldots + c_{d-1}\xi^{d-1} + c_d\xi^d = (1 - r_1\xi)^{d_1} \cdot (1 - r_2\xi)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m\xi)^{d_m}.$$

Następnie definiujemy

$$\gamma = \delta^{-1} = (1 - r_1\xi)^{-d_1} \cdot (1 - r_2\xi)^{-d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m\xi)^{-d_m}.$$

Teraz możemy zdefiniować drugą podprzestrzeń:

$$V_2 = \{\alpha \in \mathbb{P} : \; \exists \pi \in \mathbb{C}_d[\xi] \, (\alpha = \pi \cdot \gamma)\} = \{\alpha \in \mathbb{P} : \; \alpha \cdot \delta \in \mathbb{C}_d[\xi]\}.$$

Znów łatwo sprawdzamy, że V_2 jest podprzestrzenią $\mathbb{P}$ oraz $V_2 \cong \mathbb{C}_d[\xi] \cong \mathbb{C}^d$, czyli $\dim V_2 = d$. Pokazujemy następnie, że $V_2 \subseteq V_1$.
Niech zatem $\alpha \in V_2$. Wówczas $\pi = \alpha \cdot \delta \in C_d[\xi]$. Niech

$$\pi = (p_0, p_1, \ldots, p_d, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Wówczas

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \cdot (c_0, c_1, \ldots, c_d, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) = (p_0, p_1, \ldots, p_d, 0, 0, 0, \ldots, 0),$$

czyli

$$\sum_{k=0}^{d} c_k a_{n-k} = 0$$

dla $n \geq d$. Podstawiając $n + d$ w miejsce n, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{d} c_k a_{n+d-k} = 0$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Inaczej mówiąc

$$c_0 a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \ldots + c_{d-1} a_{n+1} + c_d a_n = 0,$$

czyli

$$a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \ldots + c_{d-1} a_{n+1} + c_d a_n = 0$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zatem $\alpha \in V_1$. Stąd wynika, że $V_2 = V_1$.
Teraz definiujemy trzecią podprzestrzeń:

$$V_3 = \{\alpha \in \mathbb{P} : \; \exists \pi_1, \ldots, \pi_m \, (\alpha = \pi_1 \cdot (1 - r_1\xi)^{-d_1} + \ldots + \pi_m \cdot (1 - r_m\xi)^{-d_m})\},$$

gdzie $\pi_1 \in \mathbb{C}_{d_1}[\xi], \ldots, \pi_m \in \mathbb{C}_{d_m}[\xi]$. Wówczas nietrudno zauważyć, że

$$V_3 \cong \mathbb{C}_{d_1}[\xi] \times \ldots \times \mathbb{C}_{d_m}[\xi] \cong \mathbb{C}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{C}_{d_m}[\xi] \cong \mathbb{C}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{d_m} \cong \mathbb{C}^d.$$

Zatem $\dim V_3 = d$. Tak jak w przykładzie w poprzednim paragrafie, pokazujemy, że $V_3 \subseteq V_2$.

Niech zatem $\alpha \in V_3$. Mamy pokazać, że $\alpha \cdot \delta \in \mathbb{C}_d[\xi]$, czyli, że $\alpha \cdot \delta$ jest wielomianem stopnia niższego niż d. Zauważmy w tym celu, że

$$\alpha \cdot \delta = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \cdot (1 - r_k\xi)^{-d_k} \cdot \delta,$$

czyli

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \delta = {} & \pi_1 \cdot (1 - r_2\xi)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m\xi)^{d_m} + \\ & + \pi_2 \cdot (1 - r_1\xi)^{d_1} \cdot (1 - r_3\xi)^{d_3} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m\xi)^{d_m} + \\ & + \ldots + \\ & + \pi_1 \cdot (1 - r_1\xi)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (1 - r_{k-1}\xi)^{d_{k-1}} \cdot (1 - r_{k+1}\xi)^{d_{k+1}} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m\xi)^{d_m} + \\ & + \ldots + \\ & + \pi_1 \cdot (1 - r_1\xi)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (1 - r_{m-1}\xi)^{d_{m-1}}.\end{aligned}$$

Pokażemy, że każdy składnik sumy po prawej stronie jest wielomianem stopnia niższego niż d. Bez straty ogólności można ograniczyć się do piewszego składnika (każdy składnik może być wybrany jako pierwszy po odpowiednim przenumerowaniu pierwiastków równania charakterystycznego). Mamy zatem wielomian

$$\pi_1 \cdot (1 - r_2\xi)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - r_m\xi)^{d_m}.$$

Jego stopień jest równy

$$\deg \pi_1 + d_2 + \ldots + d_m = \deg \pi_1 + d - d_1 < d_1 + d - d_1 = d,$$

bo stopień wielomianu π_1 jest mniejszy od d_1. Stąd wynika, że $\deg(\alpha \cdot \delta) < d$, czyli $\alpha \cdot \delta \in \mathbb{C}_d[\xi]$. A więc $\alpha \in V_2$. Tak jak poprzednio, dostajemy stąd równość $V_2 = V_3$.
Wreszcie definiujemy czwartą podprzestrzeń:

$$V_4 = \{\alpha = (a_n) \in \mathbb{P} : \exists q_1 \in \mathbb{C}_{d_1}[X] \ \ldots \ \exists q_m \in \mathbb{C}_{d_m}[X] \ \forall n \, (a_n = q_1(n) \cdot r_1^n + \ldots + q_m(n) \cdot r_m^n)\}$$

i tak jak poprzednio zauważamy, że

$$V_4 \cong \mathbb{C}_{d_1}[X] \times \ldots \times \mathbb{C}_{d_m}[X] \cong \mathbb{C}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{d_m} \cong \mathbb{C}^d.$$

Zatem $\dim V_3 = d$ i znów tak jak w poprzednim paragrafie, pokazujemy, że $V_3 \subseteq V_4$.
Niech więc $\alpha \in V_3$. Wówczas

$$\alpha = \beta_1 + \ldots + \beta_m,$$

gdzie

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \pi_1 \cdot (1 - r_1\xi)^{-d_1}, \quad \text{gdzie } \pi_1 \in \mathbb{C}_{d_1}[\xi], \\ \ldots & \quad \ldots \\ \beta_k &= \pi_k \cdot (1 - r_k\xi)^{-d_k}, \quad \text{gdzie } \pi_k \in \mathbb{C}_{d_k}[\xi], \\ \ldots & \quad \ldots \\ \beta_m &= \pi_m \cdot (1 - r_m\xi)^{-d_m}, \quad \text{gdzie } \pi_m \in \mathbb{C}_{d_m}[\xi].\end{aligned}$$

Niech $1 \leq k \leq m$ i niech

$$\pi_k = p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2 + \ldots + p_{d_k-1}\xi^{d_k-1},$$

czyli

$$\pi_k = p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2 + \ldots + p_{d_k-1}\xi^{d_k-1} + p_{d_k}\xi^{d_k} + \ldots + p_n\xi^n + \ldots,$$

gdzie $p_n = 0$ dla $n \geq d_k$. Korzystamy następnie ze wzoru (5.2):

$$(1 - r_k\xi)^{-d_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + d_k - 1}{d_k - 1} \cdot r_k^n \cdot \xi^n.$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \pi_k \cdot (1 - r_k\xi)^{-d_k} = \\
&= (p_0 + p_1\xi + \ldots + p_{d_k-1}\xi^{d_k-1}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + d_k - 1}{d_k - 1} \cdot r_k^n \cdot \xi^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} p_j \binom{n - j + d_k - 1}{d_k - 1} \cdot r_k^{n-j} \right) \xi^n.
\end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz nowe oznaczenie. Przypomnijmy, że symbolem $(x)_n$ oznaczaliśmy wielomian

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x - n + 1)$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Oznaczmy również $(x)_0 = 1$. Zdefiniujmy wielomian $\binom{x}{n}$ wzorem:

$$\binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ponieważ wielomian $(x)_n$ ma stopień n, więc $\binom{x}{n}$ jest też wielomianem stopnia n. Stąd wynika, że

$$\binom{X - j + d_k - 1}{d_k - 1} = \frac{1}{(d_k - 1)!} \cdot (X - j + d_k - 1)(X - j + d_k - 2) \cdot \ldots \cdot (X - j + d_k - (d_k - 1))$$

jest wielomianem stopnia $d_k - 1$ zmiennej X. Definiujemy teraz wielomian $q_k(X)$ wzorem:

$$q_k(X) = \sum_{j=0}^{n} p_j \binom{X - j + d_k - 1}{d_k - 1}.$$

Oczywiście wielomian $q_k(X)$ ma stopień co najwyżej równy $d_k - 1$. Niech ponadto

$$\beta_k = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots).$$

Wówczas
$$\beta_k = \sum_{n=0}^{\infty} q_k(n) \cdot r_k^n \xi^n,$$
czyli
$$b_n = q_k(n) \cdot r_k^n$$
dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Z równości $\alpha = \beta_1 + \ldots + \beta_m$ wynika teraz, że
$$a_n = q_1(n) \cdot r_1^n + \ldots + q_m(n) \cdot r_k^n$$
dla $n \geq 0$. To dowodzi, że $\alpha \in V_4$.

Zatem $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$. Stąd wynika, że każdy ciąg $\alpha = (a_n) \in \mathbb{P}$ spełniający równanie rekurencyjne(5.5) należy do przestrzeni V_4. Istnieją zatem wielomiany
$$q_1 \in \mathbb{C}_{d_1}[X], \ldots, q_m \in \mathbb{C}_{d_m}[X]$$
o tej własności, że ciąg $\alpha = (a_n)$ jest określony wzorem ogólnym
$$a_n = q_1(n) \cdot r_1^n + \ldots + q_m(n) \cdot r_k^n$$
dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ To kończy dowód twierdzenia 5.2.

12. Pierwiastki kwadratowe

Przypuśćmy, że dany jest szereg formalny
$$\alpha = (1, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{P}_1.$$
Wyznaczymy teraz szereg formalny
$$\beta = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$
taki, że $\beta = \alpha^2$. Mamy kolejno
$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 \cdot 1 = 1, \\
b_1 &= 1 \cdot a_1 + a_1 \cdot 1 = 2a_1, \\
b_2 &= 1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_1 + a_1 \cdot 1 = 2a_2 + a_1^2, \\
b_3 &= 1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot 1 = 2a_3 + 2a_1a_2, \\
b_4 &= 1 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_1 + a_4 \cdot 1 = 2a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2
\end{aligned}$$
i ogólnie
$$b_n = 2a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_1 = 2a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

Powyższe wzory pozwalają rozwiązać zadanie odwrotne. Niech będzie dany szereg formalny $\beta \in \mathbb{P}_1$. Istnieje wówczas dokładnie jeden szereg formalny $\alpha \in \mathbb{P}_1$ taki, że $\alpha^2 = \beta$. Wykażemy najpierw jednoznaczność.

Przypuśćmy bowiem, że mamy dane dwa szeregi formalne $\alpha, \gamma \in \mathbb{P}_1$ takie, że

$$\alpha^2 = \gamma^2 = \beta.$$

Wówczas $\alpha^2 - \gamma^2 = 0$, czyli $(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) = 0$. Zatem $\alpha = \gamma$ lub $\alpha = -\gamma$. Ale $\alpha, \gamma \in \mathbb{P}_1$, czyli $Z(\alpha) = Z(\gamma) = 1$. Gdyby $\alpha = -\gamma$, to mielibyśmy $Z(\alpha) = -Z(\gamma) = -1$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $\alpha = \gamma$.

Szereg formalny α taki, że $\alpha^2 = \beta$ definiujemy przez indukcję:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= \frac{b_1}{2},\\
a_2 &= \frac{b_2 - a_1^2}{2},\\
\ldots & \quad \ldots\\
a_n &= \frac{b_n - (a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_1)}{2} = \frac{b_n}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k}.
\end{aligned}$$

Z poprzednio wyprowadzonych wzorów wynika, że rzeczywiście $\alpha^2 = \beta$.

Jeśli $\beta \in \mathbb{P}_1$, to szereg $\alpha \in \mathbb{P}_1$ taki, że $\alpha^2 = \beta$ nazywamy **pierwiastkiem kwadratowym** szeregu β i oznaczamy symbolem $\sqrt{\beta}$ lub $\beta^{\frac{1}{2}}$.

Pokażemy teraz jeden przykład pierwiastka kwadratowego. Ten przykład będzie wykorzystany w dalszej części tego wykładu. Niech

$$\beta = (1 - 4\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \xi^n = (1, 4, 4^2, \ldots, 4^n, \ldots).$$

Oczywiście $\beta \in \mathbb{P}_1$. Obliczymy kolejne wyrazy szeregu

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{P}_1$$

takiego, że $\alpha^2 = \beta$. Mamy kolejno:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= \frac{b_1}{2} = 2,\\
a_2 &= \frac{b_2 - a_1^2}{2} = \frac{4^2 - 2^2}{2} = 6,\\
a_3 &= \frac{b_3 - 2a_1 a_2}{2} = \frac{4^3 - 2 \cdot 2 \cdot 6}{2} = 20,\\
a_4 &= \frac{b_4 - 2a_1 a_3 - a_2^2}{2} = \frac{4^4 - 2 \cdot 2 \cdot 20 - 6^2}{2} = 70.
\end{aligned}$$

Otrzymane liczby wyglądają znajomo, jeśli przypomnimy sobie początkowe wiersze trójkąta Pascala:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

Narzuca się hipoteza:

$$a_n = \binom{2n}{n} \quad \text{dla } n \geq 0,$$

czyli

$$(1 - 4\xi)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \xi^n.$$

W następnych paragrafach udowodnimy tę hipotezę.

„Tożsamość 4^n"

W tym paragrafie pokażemy trzy dowody następującej tożsamości kombinatorycznej:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n. \tag{5.6}$$

Dowód I. Definiujemy funkcje $S_n(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ wzorem:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^k$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Różniczkując obie strony otrzymujemy:

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^{k-1}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Zmieniając kolejność sumowania (czyli podstawiając $k := n - k$), otrzymujemy

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^{n-k},$$

skąd dostajemy

$$x^n \cdot S_n(x^{-1}) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^{k-n} = S_n(x).$$

Następnie różniczkujemy obie strony równości

$$S_n(x) = x^n \cdot S_n(x^{-1}).$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_n'(x) &= (x^n)' \cdot S_n(x^{-1}) + x^n \cdot \left(S_n(x^{-1})\right)' = nx^{n-1}S_n(x^{-1}) + x^n \cdot S_n'(x^{-1}) \cdot (-x^{-2}) = \\ &= nx^{n-1} \cdot S_n(x^{-1}) - x^{n-2} \cdot S_n'(x^{-1}). \end{aligned}$$

Podstawiając teraz $x = 1$, otrzymujemy

$$S_n'(1) = x \cdot S_n(1) - S_n'(1),$$

czyli

$$S_n'(1) = \frac{n}{2} \cdot S_n(1).$$

Z drugiej strony

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2k}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k} x^k,$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_{n+1}'(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{2k}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{2k}{k}\binom{2n+2-2k}{n+1-k} x^{k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{2k+2}{k+1}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot \frac{2k+2}{k+1} \cdot \binom{2k+1}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (2k+2) \cdot \binom{2k+1}{k+1}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (2k+2) \cdot \frac{2k+1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2(2k+1) \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= 4 \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= 4x \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^{k-1} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^k = \\ &= 4x \cdot S_n'(x) + 2 \cdot S_n(x). \end{aligned}$$

Teraz podstawiamy $x = 1$:

$$S'_{n+1}(1) = 4 \cdot S'_n(1) + 2 \cdot S_n(1) = 4 \cdot \frac{n}{2} \cdot S_n(1) + 2 \cdot S_n(1) = (2n+2) \cdot S_n(1).$$

Ponieważ także

$$S'_{n+1}(1) = \frac{n+1}{2} \cdot S_{n+1}(1),$$

więc

$$\frac{n+1}{2} \cdot S_{n+1}(1) = (2n+2) \cdot S_n(1),$$

czyli

$$S_{n+1}(1) = 4 \cdot S_n(1).$$

Ponieważ

$$S_0(1) = \sum_{k=0}^{0} \binom{2k}{k}\binom{0-2k}{0-k} 1^k = 1,$$

więc przez indukcję $S_n(1) = 4^n$. Zatem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = S_n(1) = 4^n,$$

co kończy dowód.

Dowód II. Przypomnijmy tożsamość Cauchy'ego:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

Przypomnijmy oznaczenia, których niedawno używaliśmy: symbolem $(x)_n$ oznaczaliśmy wielomian

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Przyjmujemy również $(x)_0 = 1$. Wprowadziliśmy także oznaczenie:

$$\binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Niech teraz

$$W(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{x}{j}\binom{n}{k-j}$$

oraz

$$V(x) = \binom{x+n}{k}.$$

Wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ przyjmują te same wartości dla nieskończenie wielu argumentów: $W(m) = V(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem są identyczne; w szczególności $W(x) = V(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Weźmy teraz dowolną liczbę $r \in \mathbb{R}$ i rozważmy wielomiany zmiennej y:

$$U(y) = \sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{y}{k-j}$$

oraz

$$T(y) = \binom{r+y}{k}.$$

Wielomiany $U(y)$ i $T(y)$ przyjmują te same wartości dla nieskończenie wielu argumentów: $U(n) = T(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem są identyczne, czyli dla dowolnej liczby rzeczywistej s zachodzi równość $U(s) = T(s)$. To znaczy, że dla dowolnych $r, s \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}.$$

Uwaga. Można udowodnić (co pozostawiamy jako ćwiczenie), że jeśli dwa wielomiany $W(x, y)$ i $V(x, y)$ dwóch zmiennych x i y przyjmują te same wartości dla wszystkich $r, s \in \mathbb{R}$ (tzn. $W(r, s) = V(r, s)$), to są identyczne: $W(x, y) = V(x, y)$.

Podstawmy teraz $r = s = -\frac{1}{2}$. Otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{-\frac{1}{2}}{k-j} = \binom{-1}{k}.$$

Obliczymy teraz współczynniki dwumianowe występujące po obu stronach powyższej równości.

Pokażemy najpierw, że dla dowolnego $n = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$\binom{-1}{n} = (-1)^n.$$

Dla $n = 0$ ta równość jest oczywista. Niech $n \geq 1$. Mamy teraz

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)_n}{n!} = \frac{(-1)\cdot(-1-1)\cdot(-1-2)\cdot\ldots\cdot(-1-n+1)}{n!} =$$
$$= \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n.$$

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $n = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Znów dla $n = 0$ równość jest oczywista. Niech zatem $n \geq 1$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot\left(-(2n-1)\right)}{2^n\cdot n!} = \\
&= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!} = \\
&= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{(-1)^n\cdot(2n)!}{2^n\cdot n!\cdot 2^n\cdot n!} = \\
&= \frac{(-1)^n\cdot(2n)!}{4^n\cdot n!\cdot n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

Podstawmy teraz obliczone wartości do równości

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{-\frac{1}{2}}{k-j} = \binom{-1}{k}.$$

Otrzymamy

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{4^j}\cdot\binom{2j}{j}\cdot\frac{(-1)^{k-j}}{4^{k-j}}\cdot\binom{2k-2j}{k-j} = (-1)^k,$$

czyli

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\binom{2j}{j}\cdot\binom{2k-2j}{k-j} = (-1)^k.$$

Zatem

$$\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{2j}{j}\binom{2k-2j}{k-j} = (-1)^k,$$

czyli

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{2j}{j}\binom{2k-2j}{k-j} = 4^k,$$

co kończy dowód.

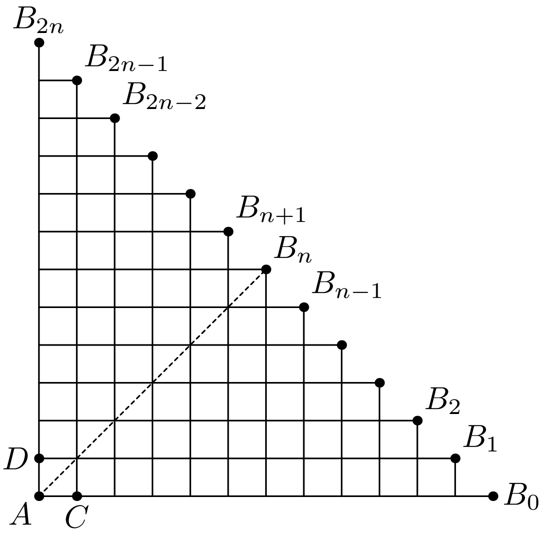
Dowód III. Przeprowadzimy dowód kombinatoryczny.

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

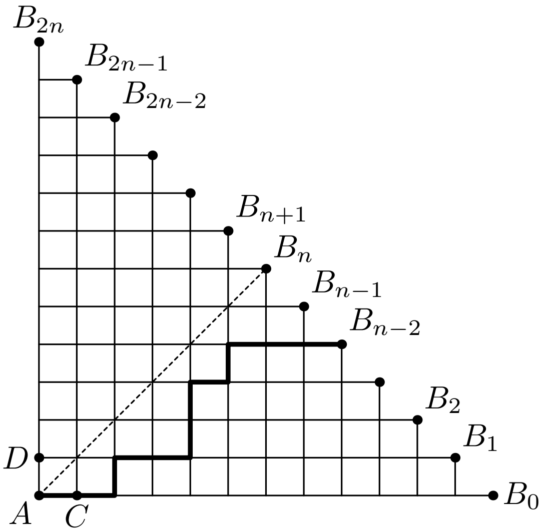
Lemat 5.3. Istnieje $\binom{2n}{n}$ ciągów f długości $2n$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, mających następującą własność: dla każdej liczby $k \in [2n]$

$$|\{i \in [k] :\ f(i) = 0\}| \neq |\{i \in [k] :\ f(i) = 1\}|.$$

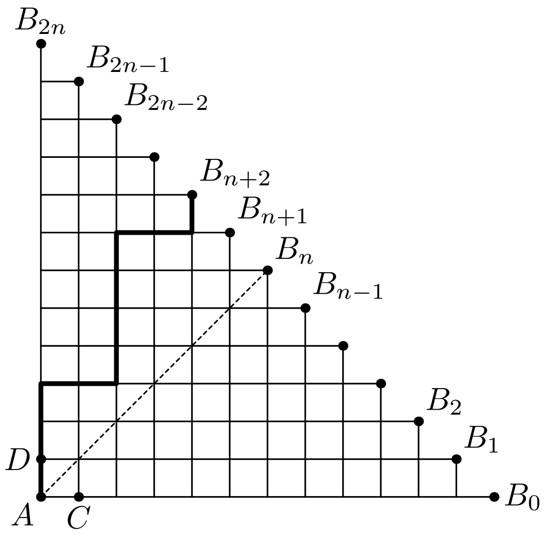
Dowód. Popatrzmy najpierw na ilustrację graficzną naszego lematu. Ciągi zerojedynkowe (tzn. o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$) kodujemy za pomocą dróg na papierze w kratkę. Wyrazowi 0 odpowiada odcinek poziomy, wyrazowi 1 odpowiada odcinek pionowy; wyrauszamy z ustalonego punktu A i poruszamy się wyłącznie w prawo i do góry.



Zauważmy, że droga długości $2n$ zakończy się w jednym z punktów $B_0, B_1, \ldots, B_{2n}$; są to punkty leżące na odcinku łączącym punkty B_0 i B_{2n} oddalone od punktu A o $2n$ kratek. Warunek sformułowany w lemacie oznacza, że poprowadzona droga nigdzie (poza punktem wyjścia A) nie dotknie przekątnej: linii łączącej punkt A z punktem B_n. Takie drogi będziemy nazywać drogami **omijającymi przekątną**. Przykład drogi omijającej przekątną widzimy na następnym rysunku:



Drogi omijające przekątną dzielą się na dwa zbiory: drogi zaczynające się od kroku w prawo (czyli do punktu C) i drogi zaczynające się od kroku w górę (do punktu D). Oczywiście drogi omijające przekątną i przechodzące przez punkt C muszą zakończyć się w jednym z punktów $B_0, \ldots, B_{n-1}$. Drogi omijające przekątną i przechodzące przez punkt D zakończą się w jednym z punktów $B_{n+1}, \ldots, B_{2n}$. Na następnym rysunku widzimy jedną z takich dróg przechodzących przez punkt D.

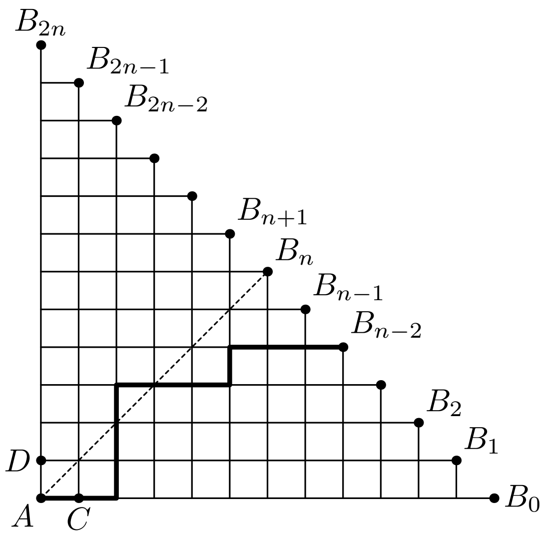


Ze względu na symetrię liczba dróg omijających przekątną i przechodzących przez punkt C jest równa liczbie dróg omijających przekątną i przechodzących przez punkt D. Policzymy te pierwsze drogi. Pomysł polega na tym, by od liczby wszystkich dróg odjąć liczbę dróg, które nie omijają przekątnej.

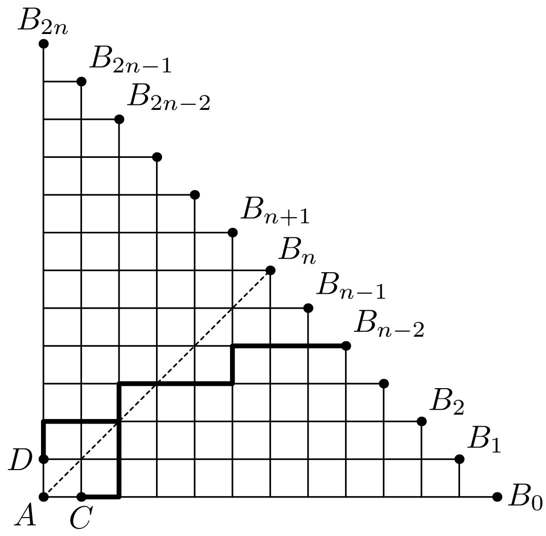
Wprowadźmy wygodne oznaczenie. Jeśli X i Y są dwoma punktami kratowymi, to symbolem $d(X, Y)$ będziemy oznaczać liczbę dróg z X do Y zgodnych z zasadami poruszania się po kratkach (tzn. tylko w prawo i do góry). Wiemy już, że drogi omijające przekątną i przechodzące przez punkt C kończą się w jednym z punktów $B_0, \ldots, B_{n-1}$. Liczba wszystkich dróg z A przez C do jednego z tych n punktów jest zatem równa

$$\sum_{k=0}^{n-1} d(C, B_k).$$

Odejmijmy od tej liczby liczbę dróg „złych”: prowadzących z A przez C do jednego z tych n punktów, ale nie omijających przekątnej. Oto przykład takiej drogi:



Droga „zła" w co najmniej jednym punkcie dotyka przekątnej. Fragment tej drogi od punktu C do pierwszego punktu na przekątnej odbijamy symetrycznie względem przekątnej. Otrzymujemy drogę z punktu D do jednego z punktów $B_1, \ldots, B_{n-1}$ (zauważmy, że jedyna droga z C do B_0 nie dotyka przekątnej; dlatego pomijamy punkt B_0 jako jeden z punktów końcowych dróg „złych"):



Odwrotnie, każda droga z punktu D do jednego z punktów $B_1, \ldots, B_{n-1}$ musi przeciąć przekątną, a więc powstaje z dokładnie jednej drogi „złej" przez odbicie symetryczne. Stąd wynika, że liczba dróg „złych" jest równa

$$\sum_{k=1}^{n-1} d(D, B_k).$$

Zauważmy następnie, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$ mamy równość

$$d(D, B_k) = d(C, B_{k-1}).$$

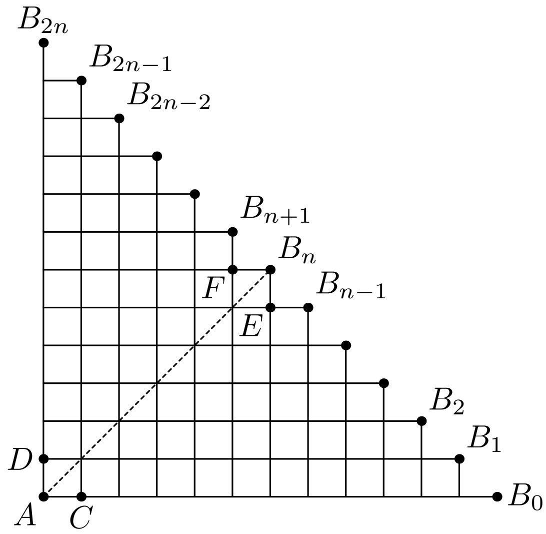
Mianowicie każdą drogę z D do B_k przesuwamy o jedną kratkę w prawo i jedną w dół, otrzymując w ten sposób drogę z C do B_{k-1}; to przekształcenie dróg jest oczywiście wzajemnie jednoznaczne. Stąd wynika, że liczba dróg „złych" z C do punktów $B_1, \ldots, B_{n-1}$ jest równa

$$\sum_{k=1}^{n-1} d(D, B_k) = \sum_{k=1}^{n-1} d(C, B_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-2} d(C, B_k).$$

Liczba dróg z A przez C omijających przekątną jest zatem równa

$$\sum_{k=0}^{n-1} d(C, B_k) - \sum_{k=0}^{n-2} d(C, B_k) = d(C, B_{n-1}).$$

Zauważamy następnie, że
$$d(C, B_{n-1}) = d(A, E).$$
Mianowicie każdą drogę z C do B_{n-1} przesuwamy o jedną kratkę w lewo.



Otrzymujemy wniosek: liczba dróg z A przez C omijających przekątną jest równa $d(A, E)$. Przez symetrię, liczba dróg z A przez D omijających przekątną jest równa $d(A, F)$. A więc liczba wszystkich dróg wychodzących z A i omijających przekątną jest równa
$$d(A, E) + d(A, F) = d(A, B_n) = \binom{2n}{n},$$
co kończy dowód lematu.

Możemy teraz przystąpić do dowodu tożsamości (5.6):
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n. \tag{5.6}$$

Niech A będzie zbiorem wszystkich zerojedynkowych ciągów f długości $2n$:
$$A = [2]^{[2n]} = \{f = (f_1, f_2, \ldots, f_{2n}) : \ f_1, f_2, \ldots, f_{2n} \in [2]\}.$$
Definiujemy następnie zbiory A_k dla $k = 0, 1, \ldots, n$:
$$A_k = \big\{f \in A : \max\{j \in [n] : \ |f^{-1}(0) \cap [2j]| = |f^{-1}(1) \cap [2j]| = j\} = k\big\}.$$
Inaczej mówiąc, ciąg $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ jest najdłuższym odcinkiem początkowym ciągu f, w którym jest tyle samo zer co jedynek. Wtedy
$$4^n = 2^{2n} = |A| = \sum_{k=0}^{n} |A_k|.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli $f \in A_k$, to ciąg f można podzielić jednoznacznie na dwa ciągi: ciąg $f|[2k]$, w którym jest po k zer i jedynek (jest $\binom{2k}{k}$ takich ciągów) i ciąg $f|\{2k+1, \ldots, 2n\}$, kodowany za pomocą drogi omijającej przekątną (jest $\binom{2n-2k}{n-k}$ takich dróg). Zatem

$$|A_k| = \binom{2n-2k}{n-k},$$

skąd wynika, że

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n,$$

co kończy dowód.

13. Przykład pierwiastka kwadratowego

Rozważmy szereg formalny α zdefiniowany wzorem

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) = \left(1, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{2n}{n}, \ldots\right),$$

czyli

$$a_n = \binom{2n}{n}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Oczywiście $\alpha \in \mathbb{P}_1$. Obliczmy teraz $\beta = \alpha^2$. Niech zatem

$$\beta = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots).$$

Wówczas ze wzoru Cauchy'ego i z „tożsamości 4^n" wynika, że

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Zatem

$$\beta = (1-4\xi)^{-1},$$

czyli

$$\alpha^2 = (1-4\xi)^{-1}.$$

Ponieważ $\alpha \in \mathbb{P}_1$, więc zgodnie z przyjętą konwencją możemy napisać, że

$$\alpha = \sqrt{(1-4\xi)^{-1}} = (1-4\xi)^{-1/2}.$$

Niech teraz szereg γ będzie zdefiniowany wzorem $\gamma = 1 - 4\xi$. Oczywiście $\gamma \cdot \beta = 1$ oraz $\gamma \in \mathbb{P}_1$. Niech zatem $\delta \in \mathbb{P}_1$ będzie szeregiem takim, że $\delta^2 = \gamma$ (czyli $\delta = \sqrt{1-4\xi}$). Mamy wówczas

$$\alpha^2 \cdot \gamma^2 = \beta \cdot \gamma \cdot \gamma = \gamma = \delta^2,$$

skąd wynika, że $\alpha \cdot \gamma = \delta$. Stąd otrzymujemy

$$\delta = (1 - 4\xi) \cdot \alpha = \alpha - 4 \cdot \xi \cdot \alpha.$$

Niech

$$\delta = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots).$$

Wówczas

$$d_0 = a_0 \quad \text{oraz} \quad d_n = a_n - 4a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Zatem $d_0 = 1$ oraz

$$\begin{aligned}
d_n = a_n - 4a_{n-1} &= \binom{2n}{n} - 4 \cdot \binom{2n-2}{n-1} = \frac{2n}{n} \cdot \binom{2n-1}{n-1} - 4 \cdot \binom{2n-2}{n-1} = \\
&= 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1} - 4 \cdot \binom{2n-2}{n-1} = 2 \cdot \left(\binom{2n-1}{n-1} - 2 \cdot \binom{2n-2}{n-1}\right) = \\
&= 2 \cdot \left(\binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2} - 2 \cdot \binom{2n-2}{n-1}\right) = \\
&= 2 \cdot \left(\binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-2}{n-1}\right) = 2 \cdot \left(\frac{n-1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-1}\right) = \\
&= -\frac{2}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\sqrt{1 - 4\xi} = \delta = 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^n.$$

14. Liczby Catalana

Przypomnijmy, że ciąg liczb Catalana C_n spełniał następujące równanie rekurencyjne:

$$C_0 = 1, \quad C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Niech γ będzie szeregiem formalnym zdefiniowanym w następujący sposób:

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n,$$

czyli

$$\gamma = (C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots).$$

Wówczas ze wzoru Cauchy'ego wynika, że

$$\gamma^2 = C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0)\xi + (C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0)\xi^2 + \ldots$$

Dokładniej, przyjmijmy

$$\alpha = \gamma^2 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Wówczas

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Stąd wynika, że

$$1 + \xi \cdot \alpha = \gamma,$$

czyli

$$\xi \cdot \gamma^2 = \gamma - 1.$$

Pomnóżmy obie strony ostatniej równości przez ξ:

$$(\xi \cdot \gamma)^2 = \xi \cdot \gamma - \xi.$$

Przyjmijmy następnie $\beta = \xi \cdot \gamma$. Wtedy oczywiście $\beta \in \mathbb{P}_0$ oraz

$$\beta^2 - \beta + \xi = 0.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie w pierścieniu $\mathbb{P}$. Mamy najpierw

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \xi = 1 - 4\xi.$$

Oczywiście $\Delta \in \mathbb{P}_1$. Niech zatem $\delta = \sqrt{\Delta}$ i niech $\delta \in \mathbb{P}_1$. Nasze równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki:

$$\beta_1 = (1 - \delta) \cdot 2^{-1} \quad \text{oraz} \quad \beta_2 = (1 + \delta) \cdot 2^{-1}.$$

Mamy wówczas

$$Z(\beta_1) = Z(1 - \delta) \cdot 2^{-1} = (1 - Z(\delta)) \cdot 2^{-1} = (1 - 1) \cdot 2^{-1} = 0$$

oraz

$$Z(\beta_2) = Z(1 + \delta) \cdot 2^{-1} = (1 + Z(\delta)) \cdot 2^{-1} = (1 + 1) \cdot 2^{-1} = 1.$$

Ponieważ $\beta \in \mathbb{P}_0$, więc $\beta = \beta_1$. Zatem

$$\beta = (1 - \delta) \cdot 2^{-1} = (1 - \sqrt{1 - 4\xi}) \cdot 2^{-1}.$$

Z poprzedniego paragrafu wiemy, że

$$\sqrt{1 - 4\xi} = 1 - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^n,$$

czyli

$$1 - \sqrt{1-4\xi} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^n.$$

Zatem

$$\beta = (1 - \sqrt{1-4\xi}) \cdot 2^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^n = \xi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^{n-1}.$$

Ponieważ $\beta = \xi \cdot \gamma$, więc

$$\xi \cdot \gamma = \xi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^{n-1}.$$

Z prawa skracania wynika zatem, że

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \xi^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \xi^n,$$

skąd ostatecznie dostajemy

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}.$$