## Zadanie 2

**Zad 2**

Niech $cond(A) := \|A\|_p\|A^{-1}\|_p$, gdzie $p \in \{1, 2, \infty\}$ oznacza $p$-ty wskaźnik uwarunkowania macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Wykazać, że $cond(A) \geqslant 1$.
- Wykazać, że $cond(AB) \leqslant cond(A) \cdot cond(B)$.

*Dowód.* Z poprzedniej listy zadań wiemy, że dla podanych norm zachodzi nierówność $\|AB\|_p \leqslant \|A\|_p\|B\|_p$. Zatem

$$cond(A) := \|A\|_p\|A^{-1}\|_p \geqslant \|AA^{-1}\|_p = \|I\|_p = 1 \tag{1}$$

Zachodzi również:

$$cond(AB) = \|AB\|_p\|(AB)^{-1}\|_p = \|AB\|_p\|B^{-1}A^{-1}\|_p \leqslant \|A\|_p\|B\|_p\|A^{-1}\|_p\|B^{-1}\|_p =$$

$$\|A\|_p\|A^{-1}\|_p\|B\|_p\|B^{-1}\|_p = cond(A)cond(B)$$

□

## Zadanie 3

**Zad 3**

Niech $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o elementach

- $b_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \dots n)$,
- $b_{ij} = -1$ $(i < j)$,
- $b_ij = 0(i > j$

Sprawdzić, że $detB << cond_\infty(B)$. Jaki stąd wniosek?

*Dowód.* Wyznacznik macierzy jest 1, gdyż jest górno-trójkątna (wtedy jest to iloczyn elementów na przekątnej). Na przykładach sprawdzamy, że $\|B\|_\infty = n$, a $\|B^{-1}\| = 2^{n-1}$. Wtedy $cond(B) = n2^{n-1}$. Wniosek jest z tego taki, że macierz $B$ jest bardzo źle uwarunkowana i wyznacznik nie ma na to zupełnie wpływu.

□

## Zadanie 4

**Zad 4**

Jak oceniamy uwarunkowanie układu $Ax = b$, o macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix},$$

dla $0 < \epsilon \leqslant 0.01$?

**Rozwiązanie:** Trzeba policzyć po prostu $cond(A)$ dla konkretnej normy. Ja zrobię to dla normy nieskończoność, 1 oraz 2. Policzmy najpierw macierz odwrotną do $A$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon^2} & \frac{-\epsilon-1}{\epsilon^2} \\ \frac{\epsilon-1}{\epsilon^2} & \frac{1}{\epsilon^2} \end{bmatrix}$$

- Liczymy $cond_1(A)$:
  Dla przypomnienia $\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Zatem $\|A\|_1 = 2+\epsilon$, a $\|A^{-1}\|_1 = \frac{2+\epsilon}{\epsilon^2}$.
  Stąd $cond(A) = \left(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)^2$, co można oszacować jako $cond(A) \geqslant \left(\frac{2+0}{\frac{1}{100}}\right)^2 = 40000.$
- Liczymy $cond_\infty(A)$:
  Dla przypomnienia $\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Analogicznie jak wyżej liczymy $\|A\|_\infty = 2+\epsilon,\ \|A^{-1}\|_\infty = \frac{2+\epsilon}{\epsilon^2}$. Dostajemy szacowanie i wskaźnik dokładnie taki sam jak u góry.
- Liczymy $cond_2(A)$:
  Dla przypomnienia $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$, gdzie $\rho$ to największa wartość własna macierzy. Liczymy $A^TA$ oraz $(A^{-1})^TA^{-1}$ i dostajemy:

$$A^TA = \begin{bmatrix} (1-\epsilon)^2+1 & 2 \\ 2 & (\epsilon+1)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^TA^{-1} = \frac{1}{\epsilon^4} \begin{bmatrix} \epsilon^2 - 2\epsilon + 2 & -2 \\ -2 & \epsilon^2 + 2\epsilon + 2 \end{bmatrix}$$

  Liczymy wartości własne tych macierzy (to pierwiastki $\det(A-\lambda I)$) ręcznie lub wolframem. Dla pierwszej macierzy dostajemy $\lambda_1 = \epsilon^2 - 2\sqrt{\epsilon^2+1} + 2, \lambda_2 = \epsilon^2 + 2\sqrt{\epsilon^2+1} + 2$. Dla drugiej macierzy dostajemy $\lambda_1' = \frac{\epsilon^2-2\sqrt{\epsilon^2+1}+2}{\epsilon^4}, \lambda_2' = \frac{\epsilon^2+2\sqrt{\epsilon^2+1}+2}{\epsilon^4}$. Chcemy wybrać te większe, więc oczywiście wybieramy wersję z plusem.

  Zatem nasze $cond(A) = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2'} = \sqrt{\frac{\left(\epsilon^2+2\sqrt{\epsilon^2+1}+2\right)^2}{\epsilon^4}} = \frac{\epsilon^2+2\sqrt{\epsilon^2+1}+2}{\epsilon^2} \geqslant \frac{0^2+2\sqrt{0^2+1}+2}{\frac{1}{100}^2} = 40000$

## Zadanie 5

**Zad 5**

Niech $\widetilde{x}$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układy $Ax = b$, gdzie $detA \neq 0, b \neq 0$. Niech $r := b - A\widetilde{x}$ oznacza resztę. Wykazać, że wówczas zachodzą nierówności

- $\|x - \widetilde{x}\| \leqslant cond(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|A\|}$
- $\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant cond(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$,

gdzie $x := A^{-1}b$ jest dokładnym rozwiązaniem.

**Rozwiązanie:** Zacznijmy od pierwszej nierówności, czyli $\|x - \widetilde{x}\| \leqslant cond(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|A\|}$. Podstawiając $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ do nierówności i skracając otrzymujemy równoważną postać:

$$\|A^{-1}\|\|r\| \geqslant \|x - \widetilde{x}\|$$

Stosując nierówność $\|A\|\|v\| \geqslant \|Av\|$ dostajemy:

$$\|A^{-1}\|\|r\| \geqslant \|A^{-1}r\| = \|A^{-1}\left(b - A\widetilde{x}\right)\| = \|A^{-1}b - A^{-1}A\widetilde{x}\| = \|x - \widetilde{x}\|$$

Druga nierówność do pokazania to $\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant cond(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$. Przekształcamy to do postaci:

$$\|x - \widetilde{x}\|\ \|b\| \leqslant \|A\|\ \|x\|\ \|A^{-1}\|\ \|r\|$$

Korzystając znowu z nierówności $\|A^{-1}\|\|r\| \geqslant \|x - \widetilde{x}\|$ otrzymujemy:

$$\|A\|\ \|x\|\ \|A^{-1}\|\ \|r\| \geqslant \|Ax\|\ \|A^{-1}r\| = \|b\|\|A^{-1}\left(b - A\widetilde{x}\right)\| = \|b\|\ \|x - \widetilde{x}\|$$

## Zadanie 6

**Zad 6**

Wykazać, że jeśli dowolna norma macierzy $B$ jest mniejsza od 1, to ciąg $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ określony wzorem $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ jest zbieżny dla pewnego wektora $x^*$, niezależnie od wyboru $x^{(0)}$, przy czym - przy naturalnym założeniu (jakim?) - zachodzi nierówność $\|x^* - x^{(k)}\| \leqslant \|B\|^k \|x^* - x^{(0)}\|$.

*Dowód.*

**Lemat 1.** *Istnieje taki $x^*$, że $x^* = Bx^* + c$.*

*Dowód.* Na wykładzie podany był fakt, że jeżeli $\|B\| < 1$, to macierz $I - B$ jest nieosobliwa.
Wtedy równanie $x^* (I - B) = c$ ma rozwiązanie. □

Weźmy ten $x^*$, o którym mowa wyżej. Pokażmy, że $\|x^{(k+1)} - x^*\| = e_{k+1} \longrightarrow 0$.

$$e_{k+1} = \|x^{(k+1)} - x^*\| = \|Bx^{(k)} + c - x^*\| = \|Bx^{(k)} + c - Bx^* + c\| = \|B\left(x^{(k-1)} - x^*\right)\| = \ldots = \|B^k\left(x^{(0)} - x^*\right)\|$$

Z poniższego lematu dostajemy, że całość dąży do 0.

**Lemat 2.** $\|A\| < 1 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0$

*Dowód.* Z submultiplikatywności (chyba to tak się nazywa) normy mamy, że $0 \leqslant \|A^k\| = \|A \cdot A \cdot \ldots \cdot A\| \leqslant \|A\|^k \to 0$. Z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy, że norma $\|A^k\|$ dąży do 0. Ponieważ jest to norma, to jest zerem tylko dla macierzy zerowej. □

Gdybyśmy dodali warunek, że normy są zgodne, to otrzymalibyśmy

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leqslant \|B\|^k \|x^* - x^0\|$$

□

## Zadanie 7

**Zad 7**

Wykazać, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz dowolnej normy macierzowej $\|\cdot\|$ indukowanej przez pewną normę wektorową, zachodzi nierówność $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

*Dowód.* Niech $\lambda_{max}$ będzie największą wartością własną, a $v$ odpowiadającym jej wektorem własnym. Wtedy

$$|\lambda_{max}|\|v\| = \|\lambda_{max} v\| = \|Av\| \leqslant \|A\|\|v\|$$

Dzieląc obustronnie przez $\|v\|$ dostajemy tezę.

□