# Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 13

22 stycznia 2016 r.[1]

**M13.1.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie *macierzą dominującą przekątniowo*, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych zachowuje tę własność, tzn. że wszystkie macierze $A^{(k)}$ są dominujące przekątniowo. Wywnioskować stąd, że każda macierz dominująca przekątniowo jest nieosobliwa i posiada rozkład $LU$.

**M13.2.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\operatorname{cond}(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ ($p \in \{1, 2, \infty\}$) oznacza $p$-ty wskaźnik uwarunkowania macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Wykazać, że $\operatorname{cond}(A) \geqslant 1$.

b) Wykazać, że $\operatorname{cond}(AB) \leqslant \operatorname{cond}(A)\operatorname{cond}(B)$.

**M13.3.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1 && (i = 1, 2, \ldots, n),\\ b_{ij} &= -1 && (i < j),\\ b_{ij} &= 0 && (i > j). \end{aligned}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \operatorname{cond}_\infty(B)$, gdzie $\operatorname{cond}_\infty(B) := \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$. Jaki stąd wniosek?

**M13.4.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jak ocenimy uwarunkowanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix},$$

dla $0 < \varepsilon \leqslant 0.01$?

**M13.5.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdzie $\det A \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{\theta}$. Niech $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza *resztę*. Wykazać, że wówczas zachodzą nierówności

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|A\|}, \qquad \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

gdzie $\boldsymbol{x} := A^{-1}\boldsymbol{b}$ jest dokładnym rozwiązaniem.

**M13.6.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli dowolna norma macierzy $B$ jest mniejsza od 1, to ciąg $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ określony wzorem

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

jest zbieżny do pewnego wektora $\boldsymbol{x}^*$, niezależnie od wyboru $\boldsymbol{x}^{(0)}$, przy czym – przy naturalnym założeniu (jakim?) – zachodzi nierówność

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leqslant \|B\|^k \, \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(0)}\| \qquad (k \geqslant 1).$$

[1] zajęcia 27 stycznia 2016 r.

**M13.7.** $\boxed{\text{0,5 punkta}}$ Wykazać, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz dowolnej normy macierzowej $\|\cdot\|$, indukowanej przez pewną normę wektorową, zachodzi nierówność

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

**M13.8.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza rozwiązanie układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o danej macierzy nieosobliwej $A$, otrzymane metodą eliminacji, w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Dokładność rozwiązania $\tilde{\boldsymbol{x}}$ można poprawić w następujący sposób.

Krok 1 Oblicz wektor $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Krok 2 Oblicz rozwiązanie $\boldsymbol{h}$ układu $A\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}$.

Krok 3 Oblicz poprawione rozwiązanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ według wzoru $\boldsymbol{x}' := \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}$.

a) Dlaczego w kroku **1** warto obliczyć wektor $\boldsymbol{r}$ z podwójną precyzją?

b) Jak obliczyć możliwie małym kosztem wektor $\boldsymbol{h}$ w kroku **2**?

**M13.9.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że wszystkie wartości własne $\lambda_i$ macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda iteracyjna Richardsona

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \tau A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \tau\boldsymbol{b} \qquad (k \geqslant 0),$$

zastosowana do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jest zbieżna, jeśli $0 < \tau < 2/\beta$.

**M13.10.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Mówimy, że $A$ jest macierzą z przekątną dominującą <u>kolumnowo</u>.)
Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy $A$, jest zbieżna.