Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 8

3 grudnia 2015 r.

M8.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $p_n, q_n \in \Pi_n$ będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej f na odcinku $[a,b]$ w sensie normy jednostajnej. Udowodnić, że $p_n \equiv q_n$. Co z tego wynika?

M8.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ (Część twierdzenia Czebyszewa o alternansie) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a,b]$, a w_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n+2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a,b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

(i) $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})] \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$,

(ii) $|f(x_k) - w_n(x_k)| = ||f - w_n||_\infty \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$,

to w_n jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f.

M8.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ (Charles Jean de la Vallée-Poussin) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a,b]$, a p_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n+2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a,b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

$$\operatorname{sign}(f(x_j) - p_n(x_j)) = \lambda(-1)^j \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

gdzie $\lambda \in \{-1, 1\}$ jest ustaloną liczbą, to dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi nierówność

$$\min_{0 \leqslant j \leqslant n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leqslant \|f - w_n\|_\infty.$$

Wywnioskować, stąd, że

$$\min_{0 \leqslant j \leqslant n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leqslant \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty.$$

M8.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $X_k = \{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)}\} \subset [a,b]$ będzie ciągiem zbiorów punktów konstruowanych w algorytmie Remeza. Udowodnić, że kolejne dwa elementy w tych zbiorach, nie mogą być zbyt bliskie, tzn. że istnieje taka liczba $\eta > 0$, dla której

$$x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} \geqslant \eta \qquad (0 \leqslant i \leqslant n, \quad k \geqslant 0).$$

M8.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0,1]$.

M8.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x + a_{n+1}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1;\ a_1, \ldots, a_{n+1}$ – dane stałe) i niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$, leżących w przedziale $[-1,1]$. Jak należy wybrać te węzły, żeby wyrażenie $\|f - L_n\|_\infty^{[-1,1]}$ było możliwie najmniejsze? Uzasadnić odpowiedź.

M8.7. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech dla $f \in C[a,b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a,b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

M8.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x_k	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259