

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ  
LUTY 2008, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ A, CZAS: 120 MIN.  
*Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

ZADANIE 1

Pokaż, że  $2008 \mid a^{251} - a$  dla dowolnego naturalnego  $a$ .

ZADANIE 2

Oblicz

$$\sum_{A, B \subseteq X} |A \cup B|,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich podzbiorach  $n$  elementowego zbioru  $X$ .

ZADANIE 3

Oblicz (np. z zasady włączeń i wyłączeń) liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 123$$

spełniających warunek  $1 \leq x_i \leq 40$ .

ZADANIE 4

Napisz funkcję tworzącą ciągu  $a_n$  wyrażającego liczbę pokryć prostokąta  $3 \times n$  kostkami „domina”  $1 \times 3$ .

POWODZENIA !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LUTY 2008, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ B, CZAS: 120 MIN.

*Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

ZADANIE 5

Rozważmy permutację  $n$  elementową  $\sigma$ . Mówimy, że  $i$  jest w tej permutacji widoczne, jeśli  $\forall j > i \ \sigma(j) < \sigma(i)$  lub  $\forall j < i \ \sigma(j) < \sigma(i)$ . Losujemy jednostajnie permutację  $\sigma$ . Jaka jest oczekiwana liczba pozycji widocznych?

ZADANIE 6

Pokaż, że graf 3-regularny unikalnie 3-krawędziowo kolorowalny ma cykl Hamiltona.

ZADANIE 7

Wykaż, że regularny spójny graf dwudzielny stopnia większego niż 1 nie posiada mostu.

ZADANIE 8

Pokrycie wierzchołkowe  $G$  to zbiór  $W$  takich wierzchołków, że każda krawędź  $G$  ma (przynajmniej) jeden z końców w  $W$ . Podaj wielomianową redukcję problemu istnienia klikki rozmiaru  $k$  w grafie  $G$  do problemu istnienia pokrycia wierzchołkowego rozmiaru  $k'$  w grafie  $G'$ .

POWODZENIA !