

6. Zadania do wykładu  
analiza 2B

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań.

$$\begin{array}{ll} y = x^3, \quad y = x^{1/3}; & y = x^2 + 1, \quad y = 2x + 9; \\ y = x^3 + 1, \quad y = (x + 1)^2; & y^2 = 6x, \quad x^2 = 6y; \\ y^2 = 2x - 5, \quad y = x - 4; & y = x + 2, \quad y = -3x + 6, \quad y = (2 - x)/3; \\ x = y^2 - y, \quad x = y - y^2; & x = y^2, \quad x = 6 - y - y^2. \end{array}$$

2. Obliczyć długość krzywych opisanych parametrycznie.

$$\begin{array}{lll} x = 3t, & y = 2t^{3/2}, & 0 \leq t \leq 3; \\ x = \frac{1}{4}t^4 + 1, & y = \frac{1}{6}t^6 - 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ x = \sin t - t \cos t, & y = t \sin t + \cos t, & 0 \leq t \leq \pi/2; \\ x = \frac{2}{3}t^{3/2}, & y = \frac{4}{9}t^{9/4}, & 0 \leq t \leq 4 \\ x = \cos^3 t, & y = \sin^3 t, & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array}$$

3. Obliczyć długość krzywych podanych równaniem we współrzędnych biegunowych.

$$\begin{array}{ll} r = 2 \cos \theta; & r = \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq 4\sqrt{2}; \\ r = 2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; & r = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \\ r = \sin^3 \frac{\theta}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; & \theta = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}), \quad 1 \leq r \leq 3. \end{array}$$

4. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót wokół osi  $x$  podanych wykresów.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt{x}, \quad [2, 6]; & f(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad [0, \sqrt{2}]; \\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}, \quad [1, \sqrt{2}]; & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \\ x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad [0, \pi/2]; & x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad [0, 2\pi]. \end{array}$$

5. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót podanych wykresów wokół osi  $x$ .

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^{3/2}, \quad [0, 1]; & f(x) = \frac{-1}{x}, \quad [-3, -2]; \\ g(x) = \sqrt{\cos x}, \quad [0, \pi/6]; & f(x) = \sqrt{x}(1 - x)^{1/4}, \quad [0, 1]. \end{array}$$

6. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi  $x$  obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

- (a)  $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}, \quad [1, 3]$ .
- (b)  $f(x) = \cos x + \sin x, \quad g(x) = \cos x - \sin x, \quad [0, \pi/4]$ .
- (c)  $f(x) = 2x - x^2, \quad g(x) = x^2 - 2x$ .
- (d)  $y = x^{1/2}, \quad y = 2x^{1/4}$ .
- (e)  $y = x^3 + 2, \quad y = x^2 + 2x + 2$ .

7. Obliczyć objętość brył opierając się na informacji o przekrojach.

- (a) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny prostokątny o ramionach  $L_1$  i  $L_2$  długości 4. Przekroje prostopadłe do  $L_1$  są półkami.

(b) Podstawą bryły jest koło o promieniu 1. Przekroje prostopadłe do ustalonej średnicy podstawy są kwadratami.

(c) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny o boku 10. Przekroje prostopadłe do ustalonej wysokości trójkąta są kwadratami.

8. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót podanych wykresów wokół osi  $y$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{x^3}, [1, 3]; & f(x) &= \sqrt{x^2 + 1}, [0, \sqrt{3}]; \\ g(x) &= \sin x^2, [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}]; & h(x) &= \sqrt{1 + \sqrt{x}}, [0, 4]. \end{aligned}$$

9. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi  $y$  obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

(a)  $f(x) = 1, g(x) = x - 2, [2, 3]$ .

(b)  $f(x) = \cos x^2, g(x) = \sin x^2, [0, \sqrt{\pi}/2]$ .

10. W kuli o promieniu 2 wydrążono otwór o promieniu 0,5. O ile zmniejszyła się objętość ?