Zadanie 10

Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego na mniejszym. Ile kroków potrzebnych jest by przenieść wieżę z pręta A na B, gdy krążki równej długości nie są rozróżnialne?

Rozwiazanie: Traktujmy na chwilę dwa krążki o takim samym rozmiarze jako jeden krążek. Wtedy zadanie sprowadza się klasycznego problemu wież Hanoi, który został rozwiązany na wykładzie. Algorytm jest następujący:

1. Przenieś (rekurencyjnie) $n-1$ krążków ze słupka A na słupek B posługując się słupkiem C.
2. Przenieś jeden krążek ze słupka A na słupek C,
3. Przenieś (rekurencyjnie) $n-1$ krążków ze słupka B na słupek C posługując się słupkiem A

Jeżeli przez $L(n)$ oznaczymy minimalną liczbę ruchów potrzebną do przeniesienia całej wieży, to spełnia ona zależnośc rekurencyjną $L(n-1)+1+L(n-1)=L(n)$ (dowód był na wykładzie).
Zauważmy, że nasz problem to dokładnie to samo. Pozbywając się dodatkowego założenia, że dwa krążki są jednym krążkiem musimy zmodyfikować tylko początkową sytuację. Minimalną liczbę ruchów w zmodyfikowanym problemie oznaczmy, przez $K(n)$. Oczywiście, że $L(1)=2$.
Ponieważ krążki o tym samym rozmiarze są nierozróżnialne to wzór rekurencyjny na K będzie analogiczny jak na L. Zatem $K(n)=K(n-1)+2+K(n-1)$.

Indukcyjnie można pokazać, że $K(n)=2*2^n-2=2L(n)$. Dla $n=1$ rowność zachodzi. Weźmy dowolne naturalne n i załóżmy, że dla niego powyższe zadanie jest prawdą. Wtedy $K(n+1)=K(n)+1+K(n)=2*K(n)+1=2*(2^{n+1}-2)+2=2^{n+2}-2$. Zatem wzór $K(n)=2*2^n-2=2L(n)$ jest prawdziwy dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.
Wrając do zadania - do przeniesienia wieży z pręta a na B jest potrzebne $2^{n+1}-2$ kroków.