

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LUTY 2007, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ A, CZAS: 120 MIN.

Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 1

Pokaż, że równanie $ax + by = c$, dla a, b dodatnich, względnie pierwszych i $c > ab$, ma rozwiązanie.

ZADANIE 2

Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Jaka jest maksymalna moc rodziny podzbiorów X , o takiej własności, że dla dowolnych należących do niej zbiorów A, B zachodzi $A \cap B \neq \emptyset$? Zbuduj taką rodzinę o maksymalnej mocy i uzasadnij, że liczniejszej nie da się zbudować.

ZADANIE 3

Niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników k . Pokaż, że

$$\sum_{k=1}^n d(k) = n \ln n + O(n).$$

ZADANIE 4

Ile jest takich permutacji liczb $1, 2, \dots, 2n$, w których żadne dwie liczby $2k - 1$ i $2k$ nie są obok siebie?

POWODZENIA !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LUTY 2007, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ B, CZAS: 120 MIN.

Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 5

W urnie jest 1 los wygrywający, p przegrywających i r remisujących, tj. jeśli wylosujemy los remisujący, to go drzemy, wyrzucamy i losujemy jeszcze raz z urny. Losujemy tak długo, aż wyciągniemy los przegrywający albo los wygrywający. Jakie jest prawdopodobieństwo skończenia losowania z losem wygrywającym?

ZADANIE 6

Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ . Udowodnij, że istnieje wierzchołek v , taki że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$, taka że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

ZADANIE 7

Niech G będzie grafem zawierającym cykl C i drogę długości k łączącą wierzchołki C . Pokaż, że G zawiera cykl długości przynajmniej \sqrt{k} .

ZADANIE 8

Ścieżką powiększającą skojarzenie M grafu G nazywamy taką drogę v_1, v_2, \dots, v_{2k} , że dla wszystkich $i \in 1, 2, \dots, k-1$ mamy $\{v_{2i}, v_{2i+1}\} \in M$, i do v_1, v_{2k} nie są incydentne krawędzie z M . W jaki sposób mając ścieżkę powiększającą można powiększyć M do większego skojarzenia M' ? Pokaż, że ścieżka powiększająca istnieje dla każdego skojarzenia M , które nie jest największe, w dowolnym grafie G . Zaproponuj wielomianowy algorytm znajdowania największego skojarzenia w dowolnym grafie. Jaką złożoność ma Twój algorytm?

POWODZENIA !