Deklaracja															
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rozwiązane		1	1	1		1					1				
Spisane		1	1	1		1					1				

Dopóki nie skorzystałem z Internetu, nie wiedziałem, że na świecie jest tylu idiotów.

– Stanisław Lem

Zad 2

Podaj przykłady (o ile istnieją):

- grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków $1, 2, 2, 3, 3$
- grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków $1, 1, 1, 3, 4$
- grafu prostego dwudzielnego o ciągu stopni wierzchołków $2, 2, 2, 2, 2$

Rozwiązanie: Nie istnieje graf spełniający jakikolwiek z powyższych przykładów.

- Suma stopni jest nieparzysta (sprzeczne z lematem o uściskach dłoni).
- Weźmy wierzchołek v o stopniu 4. Jest on połączony z każdym pozostałym wierzchołkiem. Wtedy wierzchołek w o stopniu 3 musi być połączony z pewnymi dwoma wierzchołkami różnymi od v. Ale wtedy nie będą miały one stopnia 1.
- Gdyby istniał taki graf, to wierzchołki podzielone byłyby na grupy 2 i 3 elementowe. Łącząc wierzchołki z jednej części grafu z drugą dojdziemy do sytuacji kiedy jeden z wierzchołków będzie miał zbyt mały stopnień, a nie będziemy mogli go połączyć, bo stopień pozostałych wzrośnie powyżej 2.

Zad 3

Średnicą $d(G)$ grafu G nazywamy maksymalną odległość między wierzchołkami grafu, to znaczy $d(G) = max\{d(x, y) \mid x, y \in V\}$. Udowodnij, że jeżeli $d(G) > 3$, to $d(\overline{G}) < 3$.

Dowód. Weźmy dowolne wierzchołki $u, v \in V(G)$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $(u, v) \in E(G)$.

   Pokażmy, że istnieje taki wierzchołek w, że $d(u, w) > 1$, czyli $\exists w : (u, w) \notin E(G) \wedge (v, w) \notin E(G)$.

   Dowód. Przeprowadźmy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\forall w : (u, w) \in E(G) \vee (v, w) \in E(G)$. To by znaczyło, że maksymalna odległość w grafie jest równa 3, ale z założenia jest ona > 3. Sprzeczność. □

   Skoro wiemy już, że taki wierzchołek istnieje, to $(w, u) \in E(\overline{G})$ i $(w, v) \in E(\overline{G})$. Czyli $d(u, v) = 2$.

2. $(u, v) \notin E(G)$. Wtedy $(u, v) \in E(\overline{G})$, czyli $d(u, v) = 1$.

W każdym przypadku dostajemy, że $d(u, v) < 3$. Ponieważ u, v były dowolnie wybrane, to $d(G) < 3$.

□

Zad 4

Udowodnij, że jeżeli $d(G) = 2$ i $max\{deg(v) \mid v \in V(G)\} = n - 2$, to $m \geqslant 2n - 4$.

Dowód. Przez v oznaczmy dowolny wierzchołek dla którego zachodzi $deg(v) = n-2$. Wtedy jest on połączony z $n-1$ wierzchołkami. Istnieje też wierzchołek w taki, że $d(v, w) = 2$. Ponieważ wtedy maksymalna odległość w grafie wynosi 3, to musimy dodać krawędzie tak, by ją zmniejszyć, czyli połączyć sąsiadów v z w lub połączyć sąsiadów v między sobą. Czyli potrzebujemy dodać $n - 3$ krawędzi. Podsumowując, liczba krawędzi w grafie jest równa przynajmniej $(n - 2) + (n - 3) + 1 = 2n - 1$.

□

Zad 6

W drzewie mamy dane wierzchołki a, b, c, d. Pokaż, że jeśli drogi łączące a z b i c z d nie mają wspólnego wierzchołka, to mają wspólny wierzchołek drogi łączące a z c i b z d.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że w drzewie jest para rozłącznych dróg $a \rightsquigarrow b$ i $c \rightsquigarrow d$ oraz rozłączne drogi $a \rightsquigarrow c$ i $b \rightsquigarrow d$. Załóżmy, że droga $a \rightsquigarrow d$ przechodzi przez b. Wtedy nie możemy dojść do c przed dojściem do b (bo droga $a \rightsquigarrow b$ jest rozłączna z $c \rightsquigarrow d$). Wiemy też, że $b \rightsquigarrow d$ nie przechodząc przez c. Możemy teraz iść z b drogą $d \rightsquigarrow c$ a potem $c \rightsquigarrow a$. Doszliśmy do a, a to oznacza, że nasz graf jest cykliczny, co jest sprzeczne z definicją grafu.

□

Zad 11

Losujemy drzewo o wierzchołkach z $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (każde drzewo jest tak samo prawdopodobne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek 1 jest liściem?
Do czego prawdopodobieństwo to dąży przy $n \to \infty$?

Rozwiązanie: Ustalmy $n > 2$. Wiemy, że wszystkich drzew numerowanych o n wierzchołkach jest n^{n-2} (twierdzenie Cayleya). Stąd wniosek, że $\#\Omega_n = n^{n-2}$. Niech X_n będzie zdarzeniem takim, że drzewo n-elementowe ma liść z numerem 1. Weźmy dowolne takie drzewo i usuńmy z niego wierzchołek z numerem 1. Dostajemy pewne drzewo o $n-1$ wierzchołkach. Różnych takich drzew jest $(n-1)^{(n-3)}$. Wierzchołek z numerem 1 został odłączony od pewnego wierzchołka o numerze $2, 3, \ldots, n$. Zatem

$$\#X_n = (n-1) \cdot (n-1)^{(n-3)} = (n-1)^{(n-2)}$$

Zatem prawdopodobieństwo, że losowe drzewo numerowane o n wierzchołkach ma liść z numerem 1 jest równe

$$\mathbb{P}(X_n) = \frac{\#X_n}{\#\Omega_n} = \frac{(n-1)^{(n-2)}}{n^{n-2}}$$

Dodatkowo mamy policzyć do czego zbiega to prawdopodobieństwo przy $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#X_n}{\#\Omega_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{(n-2)}}{n^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} \right)^{\frac{n-2}{-n}} = \frac{1}{e}$$