Matematyka Dyskretna, II Rok Informatyki,
luty 1997, termin: 2, część: 1, czas: 120 min.

Zadanie 1

Pokaż, że następujący algorytm Euklidesa oblicza dla nieujemnych $a, b$ wartość $\gcd(a, b)$ oraz takie $m, n$ całkowite, że $ma + nb = \gcd(a, b)$:

```
procedure euklides(a, b; var m, n, gcd);
var m1, n1;
begin if a mod b = 0
      then (m, n, gcd) ← (0, 1, b)
      else begin euklides(b, a mod b, m1, n1, gcd);
                 (m, n) ← (n1, m1 − (a div b) · n1);
           end;
end;
```

Pokaż, że jeżeli $a, b > 0$ i jedna z tych liczb jest różna od 1, to algorytm ten oblicza takie wartości $m, n$, że $|m| < b$ i $|n| < a$. Pokaż następnie, że przy wywołaniu algorytmu Euklidesa wszystkie wartości wyliczane w trakcie jego dzialania są niewiększe od $\max(a, b)$.

Zadanie 2

Rozwiąż zależność rekurencyjną:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}, \text{ gdy } a_0 = a_1 = 1$$

Zadanie 3

Pokaż, że relacja $f \prec g \leftrightarrow f = o(g)$ jest relacją quasiporządku i uporządkuj wg. tej relacji następujące funkcje (wszystkie logarytmy mają podstawę 2):

$$\log n, (\log n)^n, n^{\log n}, \log(n^n), 3^{\log n}, n, n^2, 2^{\sqrt{n}}, 1.01^n, 0.99^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Zadanie 4

Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że żadna z liczb $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ nie znajdzie się na pozycji $i$?

Powodzenia !

# Matematyka Dyskretna, II Rok Informatyki,
## luty 1997, termin: 2, część: 2, czas: 120 min.

### Zadanie 1
Oblicz liczbę różnych rozłożeń ośmiu wzajemnie nieatakujących się wież na szachownicy $8\times 8$. Rozłożenia uważamy za różne, jeśli nie są identyczne i jednego nie da się przeprowadzić na drugie ani przez obrót, ani przez lustrzane odbicie.

Wsk.: Użyj Lematu Burnside'a.

### Zadanie 2
Ideałem zbioru częściowo uporządkowanego $P = (X, \leq)$ nazywamy podzbiór $I \subseteq X$ spełniający warunek:

$$\bigwedge_{x \in I} y \leq x \Rightarrow y \in I.$$

Pokaż, że $Q = (\mathcal{I}, \subseteq)$, gdzie $\mathcal{I}$ oznacza zbiór wszystkich ideałów posetu $P$, jest kratą. Czy musi to być krata rozdzielna?

### Zadanie 3
Pokaż, że $n$-wierzchołkowy graf nie zawiarający trójkątów ma co najwyżej $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ krawędzi.

### Zadanie 4
Pokaż, że jeśli istnieje wielomianowy algorytm rozstrzygający problem istnienia cyklu Hamiltona w grafach nieskierowanych, to istnieje rownież taki algorytm dla grafów skierowanych.

Powodzenia !