

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LUTY 2008, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ A, CZAS: 120 MIN.

*Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

ZADANIE 1

Pokaż, że dla ustalonych rzeczywistych  $a > 1, b > 0$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^b a^k = \frac{n^b a^n}{a-1} + O(n^{b-1} a^n).$$

Wsk.: Udowodnij najpierw, że  $n^b - (n-1)^b \leq b n^{b-1}$ .

ZADANIE 2

Przedstaw następującą sumę jako współczynnik dwumianowy:

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} 1.$$

ZADANIE 3

Znajdź liczbę istotnie różnych kart  $4 \times 4$  z dowolną liczbą dziurek. Karty można obracać i odwracać.

ZADANIE 4

Wylicz funkcję tworzącą ciągu  $a_n$  określonego wzorem

$$a_0 = 0, \quad a_n = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{i}.$$

POWODZENIA !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LUTY 2008, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ B, CZAS: 120 MIN.

*Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

ZADANIE 5

Mamy monetę, na której z prawdopodobieństwem  $p$  wypada orzeł (O), a z prawdopodobieństwem  $1 - p$  reszka (R). Gramy w dwie osoby, rozpoczynamy grę ze stawką 1. Za każdym razem, gdy wypadnie O, gracz pierwszy wygrywa aktualną stawkę od drugiego gracza i stawka ulega podwojeniu. Za każdym razem, gdy wypadnie R, gracz drugi wygrywa aktualną stawkę od pierwszego gracza i stawka zmniejsza się dwukrotnie. Jaka jest oczekiwana sumaryczna wygrana pierwszego gracza po  $n$  grach?

ZADANIE 6

Dany jest graf prosty spójny  $G$  oraz jego dwa wierzchołki  $x, y$ ,  $d(x), d(y) \geq 3$ . Wiemy, że graf  $G \bullet \{x, y\}$  jest 3-spójny. Pokaż, że  $G$  też jest 3-spójny.

ZADANIE 7

Wykaż, że graf pełny  $K_n$  jest sumą krawędziowo rozłącznych dróg długości 2 wtedy i tylko wtedy gdy  $n \equiv 0$  lub  $1 \pmod{4}$ .

ZADANIE 8

Wykaż, że ściany grafu płaskiego kubicznego można pokolorować trzema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ściany są ograniczone parzystą liczbą krawędzi (wymagane precyzyjne rozwiązanie).

Wsk.: Pokaż najpierw, że w grafie tym istnieje ściana o co najwyżej czterech bokach.

POWODZENIA !