Deklaracja															
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Rozwiązane		1	1	1	1				1	1			1	1	
Spisane		1	1		1				1	1			1	1	

W życiu bowiem istnieją rzeczy, o które warto walczyć do samego końca.

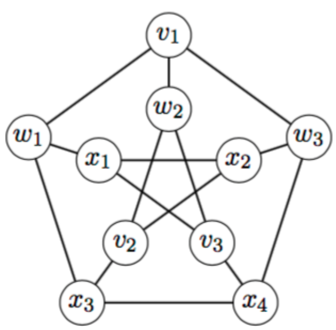
– Paulo Coelho

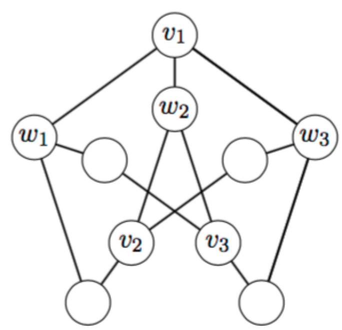
Zadanie 1

Zad 1

Pokaż, że planarny graf G po ściągnięciu krawędzi też jest planarny. Czy graf Petersena jest planarny?

Dowód. Skoro graf jest planarny to możemy go narysować na płaszczyźnie bez przecięć.
Jeżeli ściągniemy z niego krawędź to tym bardziej, ale to wymaga dokładniejszego uzasadnienia. Trzeba pobawić się i pokazać, że skoro wyjściowy graf nie zawierał $K_{3,3}$ ani K_5 to nowo utworzony graf też nie zawiera.
Graf Petersena nie jest planarny, gdyż zawiera jako minor graf $K_{3,3}$.





□

Zadanie 2

Zad 2

Załóżmy, że G jest grafem o co najmniej 11 wierzchołkach. Wykaż, że grafy G i $\overline{G}$ nie mogą być jednocześnie planarne.

Dowód. Z twierdzenia Eulera (z wykładu) wiemy, że $m \leqslant 3n - 6$. Z drugiej strony wiemy, że liczba krawędzi grafu $\overline{G}$ jest równa co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2} - m$. Skoro $\overline{G}$ również jest planarny to zachodzi nierówność $\frac{n(n-1)}{2} - m \leqslant 3n - 6$. Sumując obie nierówności dostajemy, że $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 6n - 12$, co daje nam wynik, że $n \leqslant 10$. Zatem grafy nie mogą być jednocześnie planarne.

□

Zadanie 3

Zad 3

Pokaż, że w dowolnym grafie prostym planarnym (o co najmniej trzech wierzchołkach) istnieją co najmniej trzy wierzchołki stopnia nie większego od 5.

Dowód. Ponieważ graf G jest planarny to zachodzi nierówność $m \leqslant 3n-6$. Mnożąc obie strony dostajemy $\sum_u deg(u) = 2m \leqslant 6m - 12$. Szacujmy sumę stopni od dołu. Załóżmy nie wprost, że wierzchołków stopnia nie większego niż 5 jest mniej niż 3 (weźmy dwa takie, bo jeśli ich jest mniej to tym bardziej szacowanie jest dobre). Stąd $\sum_u deg(u) \geqslant 6(n-2) + 2 \cdot 1 = 6n - 10$, co jest sprzeczne z wcześniejszą nierównością. □

Zadanie 4

Zad 4

Udowodnij, że jeśli graf G jest grafem płaskim, to $n(G) + f(G) = m(G) + k(G) + 1$, gdzie $f(G)$ jest liczbą oszarów, a $k(G)$ liczbą spójnych składowych.

Dowód. Udowodnijmy to twierdzenie indukcyjnie względem m. Dla 0 krawędzi działa (podstawiamy do wzoru). Załóżmy prawdziwość tezy dla m i sprawdźmy dla $m + 1$. Usuńmy dowolną krawędź z grafu. Teraz mamy dwa przypadki. Pierwszy przypadek jest taki, że zwiększa się nam liczba spójnych składowych. Wtedy $n' = n$, $f' = f$, $m' = m - 1$ i $k' = k + 1$. Korzystając z założenia dostajemy tezę. W drugim przypadku liczba spójnych składowych się nam nie zmieniła. Wtedy $n' = n, f' = f - 1, m = m - 1, k' = k$. Analogicznie jak wyżej dostajemy tezę. □

Zadanie 5

Zad 5

Udowodnij, że jeśli G jest spójnym grafem płaskim, w którym najkrótszy cykl ma długość r, to spełniona jest nierówność $(r-2)m \leqslant r(n-2)$. Kiedy nierówność ta staje się równością?

Dowód. Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołakch, m krawędziach i najkrótszym cyklu długości r. Niech F będzie zbiorem wszystkich obszarów, a $d(f)$ stopniem obszaru (liczba krawędzi w cyklu wyznaczającym obszar). Wtedy $\sum_{f \in F} \leqslant 2m$ (bo każdą krawędź w cyklach obszarowych będziemy liczbyć dwa razy i do tego mogą jeszcze dojśc krawędzie które nie są w żadnym cyklu). Ponieważ r jest najkrótszym cyklem w G to r jest najmniejszym stopniem obszaru. Stąd $\sum_{f \in F} d(f) \geqslant r|F|$. Stąd $2m \geqslant r|F|$. Teraz korzystając ze wzoru Eulera ($|F| = m + n - 2$) dostajemy nierówność $2m \geqslant r(m - n + 2)$ co po przekształceniu daje nam nierówność z zadania. Równość zachodzi kiedy każdy cykl ma taką samą długość. □

Zadanie 9

Zad 9

Pokaż, że dwa kolory wystarczą do pokolorowania ścian eulerowskiego grafu płaskiego.

Dowód. Niech $G = (V, E)$ będzie eulerowskim grafem płaskim. Przez $G^\star$ oznaczmy graf dualny do niego, a przez $G^{\star\star}$ graf dualny do grafu dualnego grafu G. Wiemy, że $G \simeq G^{\star\star}$ (z wykładu albo Wilson s. 100). Wystarcz pokazać, że $G^\star$ jest grafem dwudzielnym (wtedy jest dwukolorowalny), co pociąga za sobą dwukolorowalność grafu G.
Załóżmy nie wprost, że graf $G^\star$ nie jest dwudzielny. Skoro nie jest dwudzielny to zawiera jakiś cykl nieparzystej długości. Jak popatrzymy na ścianę wewnątrz tego cyklu to zauważymy, że ma ona nieparzystą liczbę krawędzi.

Teraz konstruując graf dualny do $G^\star$ dostajemy sprzeczność, gdyż $G^{\star\star}$ jest eulerowski, a w poprzednim przypadku zawierałby nieparzyście wiele krawędzi w cyklu. Zatem $G^\star$ jest dwudzielny, więc można go pokolorować dwoma kolorami.

□

Fakt 1. $G \simeq G^{\star\star}$

Dowód. Każda ściana grafu $G^\star$ reprezentowana jest jednym wierzchołkiem $G^{\star\star}$. Z drugiej strony, w każdej ścianie grafu $G^\star$ znajduje się dokładnie jeden wierzchołek grafu G. Ponadto, jeśli wierzchołki v_1, v_2 grafu G są sąsiednie, to ściany $f_1^\star, f_2^\star$ grafu $G^\star$ zawierające odpowiednio v_1, v_2 graniczą ze sobą. To z kolei oznacza, że wierzchołki $v_1^{\star\star}, v_2^{\star\star}$ grafu $G^{\star\star}$ odpowiadające ścianą $f_1^\star, f_2^\star$ są sąsiednie. Oczywiście, przy przejściu G do $G^\star$ i potem do $G^{\star\star}$ wierzchołki v_1, v_2 przechodzą na $v_1^{\star\star}, v_2^{\star\star}$. Analogicznie jeżeli $v_1^{\star\star}$ jest połączony krawędzią z $v_2^{\star\star}$ w $G^{\star\star}$, to również v_1 z v_2 w G. □

Zadanie 10

Zad 10

Na płaszczyźnie rozłożono pewną liczbę monet o jednakowej średnicy, z których żadne dwie nie nachodzą na siebie. Monety te kolorujemy tak. by te które się stykają miały różne kolory. Nie korzystając z twierdzenia o czterech barwach pokaż, że cztery kolory zawsze wystarczą a trzy nie zawsze.

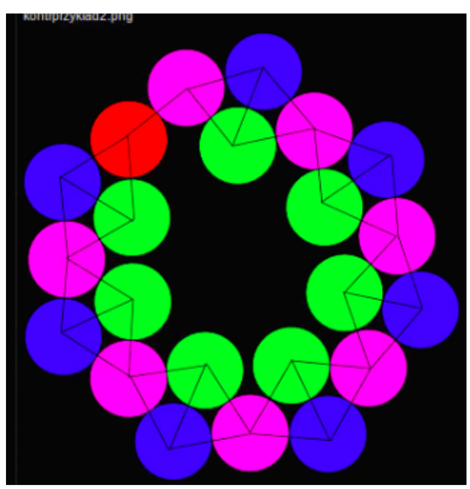
Dowód. Układ złożony z jednej monety zawsze możemy pokolorować za pomocą czterech kolorów. Załóżmy, że umiemy za pomocą czterech kolorów pokolorować dowolny układ n-monetowy. Weźmy dowolny układ $n+1$ monetowy.

Fakt 2. *W układzie monet zawsze istnieje moneta stykająca się z maksymalnie trzema monetami.*

Dowód. Bierzemy monetę najbardziej na lewo i najbardziej w dół. Ona jest połączona z maksymalnie trzema innymi.

□

Skoro taki wierzchołek istnieje to zdejmujemy go z grafu, kolorujemy powstały graf z założenia indukcyjnego, a następnie kolorujemy wybrany wcześniej wierzchołek na dowolny z dostępnych kolorów. Stąd wynika, że nasz graf jest cztero-kolorowalny.
Dlaczego graf nie jest trzy-kolorowalny? Kontrprzykład:



□

Zadanie 13

Zad 13

Wykaż, że liczba krawędzi dowolnego grafu wynosi co najmniej $\frac{\chi(G)\cdot(\chi(G)-1)}{2}$.

Dowód. Załóżmy, że $\chi(G) = k > 1$ (w innym przypadku zadanie jest trywialne). Wtedy dla dowolnych kolorów np. zielonego i niebieskiego istnieje krawędź łącząca wierzchołki pomalowane na te kolory (gdyby nie istniała to mielibyśmy jeden zbędny kolor, co przeczy minimalności $\chi(G)$). Wtedy łącznie mamy przynajmniej $\binom{k}{2}$ par kolorów co jest większe równe liczbie wszystkich krawędzi. Wystarczy tylko dodać, że $\binom{k}{2} = \frac{\chi(G)\cdot(\chi(G)-1)}{2}$ □

Zadanie 14

Zad 14

Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geqslant \#V$.

Dowód. Zauważmy, że $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{\chi(G)}$, gdzie V_i to zbiór wierzchołków pokolorowanych na i-ty kolor.
Wierzchołki z V_i będą tworzyć w $\overline{G}$ graf pełny, więc by je pokolorować potrzebujemy dokładnie $\#V_i$ kolorów.
Stąd wniosek, że $\chi(\overline{G}) = \max_{1\leqslant i \leqslant \chi G} \ \#V_i \geqslant \frac{n}{\chi(G)}$, co daje tezę zadania.

□