Programowanie

Egzamin zasadniczy

14 czerwca 2002

Za każde zadanie można otrzymać od −25 do 25 punktów. Dodatkowo w zadaniu 2 można otrzymać bonus 5 pkt. Egzamin trwa trzy godziny zegarowe.

Zadanie 1. Funkcję *hiperwykładniczą* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy indukcyjnie:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(n+1) &= 2^{h(n)} \end{aligned}$$

Udekoruj poniższy program w języku D asercjami w taki sposób, by utworzyły one dowód jego poprawności.

```
{X = n ∧ n ≥ 0}
S = 1;
while (X>0) (
   T = S;
   S = 1;
   while (T!=0) (
      S = 2 * S;
      T = T - 1;
   )
   X = X - 1;
)
{S = h(n)}
```

Zadanie 2. Zdefiniuj gramatykę typu 0 generującą język $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a\}$. Uzasadnij, że generuje ona właśnie ten język. *Bonus 5 pkt.*, jeżeli zamiast języka $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ opiszesz język $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.

Zadanie 3. Podczas wybuchu supernowej tworzą się długie ciągi złożone z cząstek materii m i antymaterii a. Gdy cząstki materii i antymaterii znajdą się w bezpośrednim sąsiedztwie, następuje ich anihilacja (znikają). Po pewnym czasie ciągi zawierają wyłącznie cząstki jednego rodzaju. W tym zadaniu sformalizujemy opisany wyżej proces. Ciągi cząstek będziemy reprezentować jako słowa nad alfabetem $\{m, a\}$. Binarna relacja R na słowach jest *monotoniczna*, jeżeli dla dowolnych słów $u, v, x, y \in \{m, a\}^*$, jeśli uRv, to $(xuy)R(xvy)$. Niech $\to$ będzie najmniejszą relacją monotoniczną, taką, że $ma \to \epsilon$ i $am \to \epsilon$, relacja $\xrightarrow{*}$ będzie zwrotnym i przechodnim domknięciem $\to$, zaś $\sim$ będzie zwrotnym, symetrycznym i przechodnim domknięciem $\to$.

Udowodnij, że relacja $\xrightarrow{*}$ posiada następującą własność, zwaną *własnością Churcha-Rosera*: dla wszelkich słów $u, v, w \in \{m, a\}^*$, jeżeli $u \xrightarrow{*} v$ i $u \xrightarrow{*} w$, to istnieje słowo $z \in \{m, a\}^*$, takie, że $v \xrightarrow{*} z$ i $w \xrightarrow{*} z$.

Słowo $u \in \{m, a\}^*$ jest *w postaci normalnej*, jeżeli nie istnieje słowo $v \in \{m, a\}^*$, takie, że $u \to v$. Dla danego słowa *u postacią normalną u* nazywamy każde słowo v będące w postaci normalnej, takie, że $u \xrightarrow{*} v$. Pokaż, że każde słowo posiada dokładnie jedną postać normalną.

Zdefiniowane wyżej relacje można traktować jak semantykę operacyjną naszego języka cząstek. Zadaj odpowiadającą jej semantykę denotacyjną, tj. dobierz odpowiednią dziedzinę interpretacji D i odwzorowanie $[\![\cdot]\!] : \{m, a\}^* \to D$, takie, by dla wszystkich słów $u, v \in \{m, a\}^*$ zachodziło $u \sim v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\![u]\!] = [\![v]\!]$.

Zadanie 4. Niech Σ będzie sygnaturą jednogatunkową, zaś $\mathcal{X}$ zbiorem zmiennych. Rozważmy dwa rodzaje par termów: *równości*, zapisywane w postaci $s = s'$ i *nierówności*, zapisywane w postaci $t \neq t'$. *Rozwiązaniem* zadania

$$\{s_i = s'_i\}_{i=1}^n \cup \{t_j \neq t'_j\}_{j=1}^m$$

jest podstawienie θ, takie, że $s_i\theta = s'_i\theta$, dla $i = 1, \ldots, n$, oraz $t_j\theta \neq t'_j\theta$, dla $j = 1, \ldots, m$. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem rozwiązań powyższego zadania. Pokaż, że jeżeli $\mathcal{R} \neq \emptyset$, to istnieje w $\mathcal{R}$ rozwiązanie najbardziej ogólne, tj. istnieje takie $\theta_0 \in \mathcal{R}$, że dla każdego $\theta \in \mathcal{R}$ zachodzi $\theta_0 \leq \theta$. Podaj przykład ilustrujący, iż — w odróżnieniu od zwykłej unifikacji — jeśli $\theta_0 \in \mathcal{R}$ jest najbardziej ogólnym rozwiązaniem, to istnieją podstawienia $\theta \geq \theta_0$, które nie należą do $\mathcal{R}$.

Opisz algorytm znajdowania najogólniejszego rozwiązania powyższego zadania i uzasadnij, że jest on poprawny. *Uwaga:* możesz korzystać z własności podstawień, które były omówione na wykładzie lub udowodnione na ćwiczeniach oraz ze zwykłego algorytmu unifikacji.