Wersja: **A**

Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 3, 10 stycznia 2013

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\{0,1,2\}) \times \{3,4,5\} \to \{0,1,2\} \times \mathcal{P}(\{3,4,5\})$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 2 (3 punkty). Rozważmy taką funkcję $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, że dla $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ funkcja $\varphi(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest zdefniniowana wzorem $(\varphi(f))(n) = f(n) + 1$. Jeśli funkcja φ ma funkcję odwrotną to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do φ. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 3 (3 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\{0,1\} \times \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \setminus [0,1])$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{2013, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\{a,b,c\}}$	$\mathcal{P}(\{0,1\})$

Zadanie 4 (3 punkty). Rozważmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowaną przez

$$x \sim y \overset{\text{df}}{\iff} x^2 = y^2.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc klasy abstracji $[2013]_{\sim}$.

Zadanie 5 (7 punktów). W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji ze zbioru $\mathbb{N}$ w zbiór $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację $\sim$ wzorem

$$f \sim g \quad \overset{\text{df}}{\iff} \quad \exists m \, \forall n{\geq}m \; f(n) = g(n).$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją przechodnią.

Zadanie 6 (6 punktów). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ daną wzorem

$$f(X) = \{\langle n, 0\rangle \mid n \in X \wedge n \geq 0\} \cup \{\langle -n, 1\rangle \mid n \in X \wedge n < 0\}.$$

Udowodnij, że f jest rożnowartościowa.

Wersja:	C	Numer indeksu:	

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 3, 10 stycznia 2013

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\{0,1\} \times \{0,1\}) \to \mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 2 (3 punkty). Rozważmy funkcję $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem $\varphi(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > 0\}$. Jeśli funkcja φ ma funkcję odwrotną to w prostokąt poniżej wpisz funkcję odwrotną do φ. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 3 (3 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N} \times \{0,1,7\}$	$\{1,2,3\} \times \{4,5\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$	$\{2013\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\{0,1\}^{\{2,3,4\}}$

Zadanie 4 (3 punkty). Rozważmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowaną przez

$$x \sim y \overset{\text{df}}{\iff} x^2 = y^2.$$

W prostokąt poniżej wpisz moc zbioru klas abstrakcji $\mathbb{R}/_{\sim}$.

Zadanie 5 (7 punktów). W zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację $\sim$ wzorem

$$X \sim Y \quad \overset{\text{df}}{\iff} \quad \exists n\, \forall m {\geq} n\; m \in X \Leftrightarrow m \in Y.$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją przechodnią.

Zadanie 6 (6 punktów). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ daną wzorem

$$f(X) = \{\langle n, 0\rangle \mid n \in X \wedge n \geq 0\} \cup \{\langle -n, 1\rangle \mid n \in X \wedge n < 0\}.$$

Udowodnij, że f jest „na".