Analiza numeryczna

Stanisław Lewanowicz

Listopad 2007 r.

Interpolacja wielomianowa

Definicje, twierdzenia, algorytmy

1 Postaci wielomianu

Oznaczenie: Symbol Π_n $(n = 0, 1, \ldots)$ będzie oznaczać zbiór wszystkich wielomianów stopnia nie wyższego niż n.

1.1 Postać naturalna (potęgowa)

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (w \in \Pi_n).$$

Algorytm 1.1 (Schemat Hornera) *Dla danej wartości argumentu x obliczamy wielkości pomocnicze $w_0, w_1, \ldots, w_n$ za pomocą wzorów*

$$\begin{aligned} &w_n := a_n, \\ &w_k := w_{k+1} \times x + a_k \qquad (k = n-1, n-2, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Otrzymujemy $w(x) = w_0$.

Twierdzenie 1.2 *Algorytm Hornera jest numerycznie poprawny.*

1.2 Postać Newtona

Dla danego układu parami różnych punktów rzeczywistych x_0, $x_1, \ldots$ określmy takie wielomiany p_0, $p_1, \ldots$, że $p_k \in \Pi_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ i że

$$p_0(x) \equiv 1, \tag{1.1}$$

$$p_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Definicja 1.3 *Niech będzie $w \in \Pi_n$. Następujący wzór podaje postać Newtona wielomianu w:*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x). \tag{1.3}$$

Algorytm 1.4 (Uogólniony schemat Hornera)

$$\begin{aligned} &w_n := b_n; \\ &w_k := w_{k+1}(x - x_k) + b_k \qquad (k = n-1, n-2, \ldots, 0); \\ &w(x) = w_0. \end{aligned}$$

1.3 Postać Lagrange'a

Dla danego układu parami różnych punktów rzeczywistych $x_0,\ x_1, \ldots x_n$ wielomian $w \in \Pi_n$ można zapisać w *postaci Lagrange'a*

$$w(t) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i w(x_i) \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (t - x_j), \tag{1.4}$$

gdzie

$$\sigma_i := 1 \Bigg/ \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x_i - x_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Stałe σ_k występujące we wzorach (1.4) oblicza się stosując następujący algorytm:

Algorytm 1.5 (Werner, 1984)

1. *Obliczamy pomocnicze wielkości* $a_k^{(i)}$ *wg wzorów*

$$a_0^{(0)} := 1, \quad a_k^{(0)} := 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\left.\begin{array}{l} a_k^{(i)} := a_k^{(i-1)}/(x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} := a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, i-1),$$

2. *Wówczas* $\sigma_k := a_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

1.4 Kombinacja liniowa wielomianów Czebyszewa

Definicja 1.6 *Wielomiany Czebyszewa (pierwszego rodzaju)* T_k *definiujemy w następujący sposób rekurencyjny:*

$$T_0(x) \equiv 1; \quad T_1(x) = x;$$
$$T_k(x) = 2xT_{k-1} - T_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Każdy wielomian $w \in \Pi_n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$w(x) = {\sum_{k=0}^{n}}{}' c_k T_k(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x). \tag{1.5}$$

Wartość wielomianu podanego w powyższej postaci można obliczać za pomocą następującego *algorytmu Clenshawa*:

Algorytm 1.7 *Aby obliczyć wartość wielomianu (1.5) w punkcie* x *określamy pomocniczo wielkości* $B_0, B_1, \ldots, B_n$ *wzorami*

$$B_{n+2} := B_{n+1} := 0;$$
$$B_k := 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0).$$

Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

2 Interpolacja Lagrange'a

2.1 Postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a. Dla danych: $n \in \mathbf{N}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(x_i \neq x_j$ dla $i \neq j)$, funkcji f określonej w punktach $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ znaleźć wielomian $L_n \in \Pi_n$, spełniający następujące warunki:

$$L_n(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{2.1}$$

Twierdzenie 2.1 *Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie, które można wyrazić wzorem*

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x), \tag{2.2}$$

gdzie

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n). \tag{2.3}$$

Definicja 2.2 *Wielomian L_n nazywamy* wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a*. Wzór (2.2) nazywamy* wzorem interpolacyjnym Lagrange'a*.*

2.2 Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego

Definicja 2.3 *Niech funkcja f będzie określona w parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots$* Iloraz różnicowy k-tego rzędu *(krócej: k-ty* iloraz różnicowy*) $(k = 0, 1, \ldots)$ funkcji f w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_k$ oznaczamy symbolem $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ i określamy następującym wzorem:*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] := \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k}(x_i - x_j)}. \tag{2.4}$$

2.3 Własności ilorazów różnicowych

1. Iloraz $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ jest symetryczną funkcją zmiennych $x_0, x_1, \ldots, x_k$.
2. Iloraz różnicowy zależy liniowo od funkcji, dla której został utworzony, tj. jeśli $f = g + ch$ (c - stała), to $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = g[x_0, x_1, \ldots, x_k] + ch[x_0, x_1, \ldots, x_k]$.
3. Jeśli $w \in \Pi_m \setminus \Pi_{m-1}$, to $w[x, x_1, \ldots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $(m - k)$-tego zmiennej x; w szczeg. iloraz $w[x, x_1, \ldots, x_m]$ jest stałą, a $w[x, x_1, \ldots, x_{m+1}]$ jest zerem.
4. Prawdziwy jest związek rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

gdzie $f[x_j] := f(x_j)$ $(j \geq 0)$.

Wzór interpolacyjny Newtona:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}). \tag{2.6}$$

Wartość wielomianu L_n wyrażonego za pomocą wzoru Newtona (2.6) obliczać stosując uogólniony schemat Hornera (zob. algorytm 1.4).

Schemat obliczeń wszystkich ilorazów $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ ilustruje następujący diagram:

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & \underline{f(x_0)} & \searrow & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & \to & \underline{f[x_0, x_1]} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2] & & & & \\
\multicolumn{8}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & \searrow & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & \cdots & \underline{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]} & \searrow & \\
x_n & f(x_n) & \to & f[x_{n-1}, x_n] & \cdots & f[x_1, x_2, \ldots, x_n] & \to & \underline{f[x_0, x_1, \ldots, x_n]}
\end{array} \tag{2.7}$$

Strzałki wskazują, które obliczone wcześniej ilorazy wykorzystuje się przy tworzeniu następnych. Zauważmy, że we wzorze (2.6) występują tylko ilorazy z przekątnej głównej tabeli (podkreślone), lecz dla ich obliczenia trzeba wyznaczyć również pozostałe ilorazy.

2.4 Reszta wzoru interpolacyjnego

Twierdzenie 2.4 *Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $[a,b]$, niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ będą parami różne i niech wielomian $L_n \in \Pi_n$ spełnia warunki*

$$L_n(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{2.8}$$

Wówczas dla każdego $x \in < a, b > \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zachodzi równość

$$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] p_{n+1}(x), \tag{2.9}$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a,b]$ ciągłą $(n+1)$-szą pochodną, wówczas wzór (2.9) można zapisać w postaci

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x), \tag{2.10}$$

gdzie ξ_x jest pewną liczbą (zależną od x) z przedziału (a,b).

Twierdzenie 2.5 *Jeśli $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x, x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, że*

$$f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

2.5 Wybór węzłów interpolacyjnych

Rozważania powyższe wskazują, że wielkość błędu interpolacji $|f(x) - L_n(x)|$ zależy od wielkości $\max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$, a także od wielkości $\max_{a \le x \le b} |p_{n+1}(x)|$, związanej z rozkładem węzłów w przedziale $[a,\, b]$.

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Wniosek 2.6 *Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a,\, b]$ ciągłą $(n+1)$-szą pochodną, to*

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1} P_{n+1}}{(n+1)!}, \tag{2.11}$$

gdzie

$$M_{n+1} := \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|,$$
$$P_{n+1} := \max_{a \le x \le b} |p_{n+1}(x)|.$$

Prawa strona nierówności (2.11) *jest najmniejsza i równa*

$$2 \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \tag{2.12}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p_{n+1}(x) = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} T_{n+1}(t), \qquad t = \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right),$$

tj. gdy węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są punkty

$$x_k^* = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_{n+1,k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{2.13}$$

gdzie z kolei

$$t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.14}$$

(zera $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa T_{n+1}).

W wypadku węzłów równoodległych $x_k = a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ h := (b-a)/n)$ mamy

$$\frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{b-a}{e} \right)^{n+1} \le P_{n+1} \le n! \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1},$$

przy czym lewa nierówność zachodzi dla dostatecznie dużego n, natomiast w wypadku węzłów Czebyszewa (2.13) mamy

$$P_{n+1} = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}.$$

2.6 Zbieżność ciągu wielomianów interpolacyjnych

Niech $\{x_{nk}\}$ będą punktami przedziału $[a, b]$ wypełniającymi tablicę trójkątną

$$\begin{array}{lllll} x_{00} \\ x_{10} & x_{11} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Niech będzie $x_{ni} \neq x_{nj}$ $(i \neq j;\ n = 1, 2, \ldots)$. Ponadto niech $\{L_n\}$ będzie ciągiem wielomianów interpolacyjnych określonych tak, by dla ustalonej funkcji f zachodziły warunki

$$L_n(x_{nk}) = f(x_{nk}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, \ldots).$$

Pytanie. Czy dla dowolnego $x \in [a, b]$ jest

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x)?$$

Twierdzenie 2.7 (Runge) *Niech będzie* $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $[a, b] = [-1, 1]$, $x_{nk} = -1 + \frac{2k}{n}$ *(*$k = 0, 1, \ldots, n;\ n > 0$*). Ciąg* $\{L_n(x)\}$ *jest zbieżny do* $f(x)$ *tylko dla* $|x| \leq 0.72668\ldots$ *i rozbieżny dla* $|x| > 0.72668\ldots$

Węzły $\{x_{nk}\}$ były równoodległe (dla ustalonego n). Może dałoby się wybrać je tak zręcznie, by proces interpolacji był zbieżny? Niestety, następne twierdzenie zawiera pesymistyczną odpowiedź.

Twierdzenie 2.8 (Faber) *Dla każdej tablicy węzłów* $\{x_{nk}\}$ *istnieje taka funkcja ciągła w przedziale* $[a, b]$*, do której ciąg wielomianów interpolacyjnych nie jest zbieżny jednostajnie (tj. taka, że* $\max_{a\leq x\leq b} |f(x) - L_n(x)| \not\to 0$*).*

Dla specyficznych „Czebyszewowskich” węzłów interpolacyjnych

$$x_{nk} := \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, \ldots) \tag{2.15}$$

można dla dostatecznie regularnych funkcji zagwarantować zbieżność, mianowicie zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.9 (Kryłow) *Niech dana będzie funkcja* $f \in C^1[-1, 1]$ *i niech* $\{L_n\}$ *będzie ciągiem wielomianów interpolujących funkcję* f *w węzłach (2.15). Wówczas dla każdego* $x \in [-1, 1]$ *jest*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x).$$

Można zapytać, czy - wobec braku zbieżności ciągu $\{L_n(x)\}$ do $f(x)$ - interpolacja jest przydatna w praktyce? Odpowiedź brzmi: ZWYKLE JEST, bowiem najczęściej błąd $|f(x) - L_n(x)|$ maleje dla $n = 1, 2, \ldots, n_{crit}$. Dla $n \leq n_{crit}$ można otrzymać dobre przybliżenia, natomiast dla dużych n ODRADZA się stosowanie interpolacji.