

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LUTY 2011, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ A, CZAS: 120 MIN.
Zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 1

Niech a i b będą dowolnymi liczbami całkowitymi. Pokaż, że jeśli $a^3|b^5$, to $a|b^2$.

ZADANIE 2

W czerwonym sześciacie wybieramy cztery krawędzie i kolorujemy je na zielono. Oblicz, na ile istotnie różnych sposobów możemy to zrobić. Dwa kolorowania są istotnie różne, jeśli z jednego nie da się osiągnąć drugiego przez żaden obrót sześcianu.

ZADANIE 3

Oblicz (np. z zasady włączeń/wyłączeń) liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N,$$

gdy $0 \leq x_i \leq K$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

ZADANIE 4

Niech $F(t)$ będzie funkcją tworzącą ciągu f_n w którym $f_0 = 1$. Napisz wzór pozwalający wyliczyć wyrazy g_n ciągu, którego funkcją tworzącą jest $G(t) = 1/F(t)$. Wzór ten powinien używać do wyliczenia g_n wartości f_i i wyrazów g_i dla $i < n$. Pokaż, że jeśli wyrazy f_n są całkowite, to g_n też są całkowite.

POWODZENIA !

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LUTY 2011, PIERWSZY TERMIN, CZĘŚĆ B, CZAS: 120 MIN.
Zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

ZADANIE 5

Drabiną D_n nazywamy graf składający się z $2 \cdot (n + 1)$ wierzchołków, taki jak narysowany poniżej. Udowodnij, że liczba drzew rozpinających drabinę D_n wynosi $\lfloor (1/2 + 1/\sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$.

ZADANIE 6

Pokaż, że każdy graf prosty planarny o co najmniej czterech wierzchołkach ma co najmniej cztery wierzchołki stopnia mniejszego niż 6.

Wsk. Rozważ krawędziowo maksymalny graf płaski.

ZADANIE 7

Pokryciem cyklowym digrafu G nazywamy taki zbiór C cykli skierowanych G , że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu z C . Podaj wielomianowy algorytm, który oblicza pokrycie cyklowe danego digrafu, jeśli pokr. cykl. w tym digrafie istnieje i daje odpowiedź NIE, jeśli nie istnieje. *Wskazówka:* rozszczep każdy wierzchołek na dwa i zbuduj odpowiedni graf dwudzielny.

ZADANIE 8

Graf krawędziowy $L(G)$ grafu G ma zbiór wierzchołków $V(L(G)) = E(G)$ i dwa z tych wierzchołków są połączone krawędzią gdy odpowiadające im krawędzie mają wspólny wierzchołek. Wyraż $m(L(G))$ za pomocą stopni wierzchołków G .

POWODZENIA !