Wersja: **A** Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 6 grudnia 2012

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $A \cup (B \setminus C) \cup ((C \setminus A) \cap B)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 2 (3 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podaj} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz barów, które podają tylko soki lubiane przez *Maliniaka*.

Zadanie 3 (3 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ w systemie naturalnej dedukcji.

Zadanie 4 (3 punkty). Jeśli istnieją takie indeksowane rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$, dla których zachodzi inkluzja $(\bigcup_{t\in T} A_t) \setminus (\bigcup_{t\in T} B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T}(A_t \setminus B_t)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich rodzin. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 5 (7 punktów). Dla relacji $R \subseteq A \times A$ definiujemy $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = R^n R$ dla $n \geq 1$. Rozważmy symetryczną relację R. Udowodnij, że dla wszystkich $n \geq 1$ relacja R^n jest symetryczna. Możesz przy tym skorzystać z faktu, że dla dowolnej relacji R zachodzi równość $R^i R^j = R^{i+j}$ dla wszystkich $i, j \geq 1$.

Zadanie 6 (6 punktów). Udowodnij, że jeśli rodzina $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępująca[1], to $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

[1] Dla przypomnienia: rodzina zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *wstępująca* jeśli dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $A_n \subseteq A_{n+1}$.

Wersja: C

Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Sprawdzian nr 2, 6 grudnia 2012

Rozwiązania wszystkich zadań powinny zmieścić się w odpowiednich prostokątach lub na odwrocie tej kartki.

Zadanie 1 (3 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $B \cup (C \setminus A) \cup ((A \setminus B) \cap C)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 2 (3 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podaj \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które lubią tylko soki podawane w barze *Jagódka*.

Zadanie 3 (3 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ w systemie naturalnej dedukcji.

Zadanie 4 (3 punkty). Jeśli istnieją takie indeksowane rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i $\{B_t\}_{t \in T}$, dla których zachodzi inkluzja $\bigcup_{t \in T}(A_t \setminus B_t) \subseteq (\bigcup_{t \in T} A_t) \setminus (\bigcap_{t \in T} B_t)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich rodzin. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 5 (7 punktów). Dla relacji $R \subseteq A \times A$ definiujemy $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = R^n R$ dla $n \geq 1$. Rozważmy przechodnią relację R. Udowodnij, że dla wszystkich $n \geq 1$ relacja R^n jest zawarta w relacji R.

Zadanie 6 (6 punktów). Udowodnij, że jeśli rodzina $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępująca[2], to $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

[2] Dla przypomnienia: rodzina zbiorów $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zstępująca* jeśli dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $A_{n+1} \subseteq A_n$.