Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 10

26 grudnia 2015 r.[1]

M10.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczamy całkę

(1) $$I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x)\,dx,$$

gdzie p jest ustaloną funkcją nieujemną w przedziale $[a, b]$, stosując kwadratury

(2) $$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Korzystając z twierdzenia o warunkach koniecznych i dostatecznych zbieżności ciągu $\{Q_n(f)\}$ do $I_p(f)$ dla dowolnej funkcji ciągłej w przedziale $[a,\ b]$ wykazać, że jeśli

$$A_k^{(n)} \geqslant 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, \ldots),$$

to następujące dwa zdania są równoważne:

a) ciąg $\{Q_n(f)\}$ jest zbieżny do całki $I_p(f)$ dla każdej funkcji f ciągłej na odcinku $[a,\ b]$;

b) ciąg $\{Q_n(w)\}$ jest zbieżny do $I_p(w)$ dla dowolnego wielomianu w.

M10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \ldots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów. Jaki jest związek tej obserwacji z metodą Romberga?

M10.3. $\boxed{\text{1 punktu}}$ Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a, b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \to \infty$ zbieżny do całki $\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\,dx$.

M10.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}' a_k\, T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa, a $\sum'$ oznacza sumę z połowionym pierwszym składnikiem. Wykazać, że

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}.$$

M10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że spośród wszystkich wielomianów stopnia n-tego postaci $w_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, najmniejszą wartość całki $\int_a^b p(x)w_n^2(x)\,dx$ daje n-ty standardowy wielomian ortogonalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x)$.

M10.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczby c_j, dla których *wielomian trygonometryczny* $w_n(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^{\pi} (\pi - x^2 - w_n(x))^2\,dx.$$

[1] termin realizacji: 5 stycznia 2016 r.

M10.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia $\leqslant 3$ zachodziła równość $\int_0^1 (1+x^2) f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

M10.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Do obliczania całki

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

można użyć *kwadratury Gaussa-Legendre'a*, tj. kwadratury interpolacyjnej

$$GL_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

której węzły x_0, x_1, $\ldots$, x_n są zerami $(n+1)$-szego wielomianu ortogonalnego Legendre'a. Obliczyć całkę $\int_0^1 t^4 \sin^2 \pi t\,dt$ stosując kolejno cztero-, sześcio- i ośmiopunktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a.

Uwaga: Tablice węzłów i współczynników kwadratur Gaussa-Legendre'a są dostępne np. pod adresem `http://www.convertit.com/Go/ConvertIt/Reference/AMS55.ASP?Res=150&Page=916&Submit=Go` lub `http://dlmf.nist.gov/3.5#v`.