Deklaracja																		
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Rozwiązane	1						1	1							1			
Spisane																		

Życie jest niekończącym się pasmem numerków i dyskretnej.

– Bartosz Bednarczyk

Zadanie 1

Zad 1

Co można powiedzieć o macierzy sąsiedztwa grafu i jego dopełnienia? Podaj interpretację wektorów AI i $A^2 I$, gdzie I jest wektorem jednostkowym oraz A jest macierzą sąsiedztwa grafu G.

Rozwiązanie: Łatwo udowodnić (indukcyjnie), że jak popatrzymy sobie na A^k, gdzie A to macierz sąsiedztwa grafu, to $A^k[i][j]$ to liczba dróg o długości k z wierzchołka i do wierzchołka j. Jak nałożymy na to wektor jednostkowy, który ma jedynkę na i-tej pozycji, to $A^k \cdot I$ to wektor, który w j-tym miejscu ma liczbę dróg z i do j (mam nadzieję, że nie pomyliłem indeksów, ale idea dobra).
Co do pytania „co można powiedzieć o macierzy sąsiedztwa grafu i jego dopełnienia” to wydaje mi się, że tu można wcisnąć cokolwiek np. że suma tych macierzy daje macierz o samych jedynkach albo że macierz dopełnienia to „zanegowana” zwykła macierz sąsiedztwa.

Zadanie 7

Zad 7

W niektórych krajach mężczyzna może mieć do czterech żon. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w takim kraju na to, aby n dziewcząt mogło znaleźć mężów, jest to by każde k z nich znało w sumie przynajmniej $\frac{k}{4}$ chłopców.

Dowód. Oznaczmy mężczyzn odpowiednio $m_1, m_2, \dots m_M$ i kobiety $k_1, k_2, \dots k_N$.
Niech $V = \{m_i^{(1)}, m_i^{(2)}, m_i^{(3)}, m_i^{(4)} \mid 1 \leqslant i \leqslant N\}$. Zbiór E zdefiniujmy jako zbiór par dla dowolnego j, $(m_i^{(j)}, k_{i'}) \in E$, gdy m_i zna $k_{i'}$ (zakładamy, że relacja jest przechodnia). Skonstruujmy graf nieskierowany G taki że $G = (V, E)$. Z twierdzenia Halla w takim grafie istnieje perfect-matching wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne W dziewczyn zna W chłopców. Stąd wniosek, że w wyjściowym problemie musi zachodzić fakt, że każde k dziewcząt zna $k/4$ chłopców. □

Zadanie 8

Zad 8

Pokaż, że drzewo ma co najwyżej jedno pełne skojarzenie.

Dowód. Weźmy dowolne drzewo $T = (V, E)$ i załóżmy, że ma dwa perfect-matchingi M oraz M'. Popatrzmy na graf $T' = (V, M \cup M')$. Ponieważ M i M' pokrywają wszystkie wierzchołki V to w grafie T' jest wspólna krawędź (należąca jednocześnie do M i M') lub cykl. Ponieważ w T nie ma cykli, to $M = M'$. □

Dowód. Przeprowadźmy dowód indukcyjnie. Drzewo o jednym wierzchołku nie ma matchingu (czyli jest co najwyżej jeden perfect-matching w grafie). Załóżmy, że w dowolnym drzewie o $k \leqslant n$ wierzchołkach jest co najwyżej jeden perfect-matching. Weźmy dowolne drzewo o $n+1$ wierzchołkach. Łatwo zauważyć, że liść ma tylko jedną opcję by być zmatchowanym. Zmatchujmy liść z jego ojcem i ściągnijmy tę krawędź z grafu. Z założenia indukcyjnego powstały graf ma co najwyżej jeden perfect-matching, czyli wyjściowy graf również. $\square$

Zadanie 14

Zad 14

Pokaż wielomianową redukcję problemu istnienia w grafie G pokrycia wierzchołkowego rozmiaru k do problemu istnienia w grafie H kliki rozmiaru k'.

Rozwiązanie: TODO.

Zadanie 15

Zad 15

Pokaż, że jeśli można rozstrzygnąć, czy dowolny graf jest 4-kolorowalny w czasie wielomianowym, to da się również rozstrzygnąć, czy dowolny graf jest 3-kolorowalny w czasie wielomianowym.

Dowód. Tezę możemy zapisać jako: $4COL \in PTIME \Rightarrow 3COL \in PTIME$.
Załóżmy, że $4COL \in PTIME$, a procedurę sprawdzającą czy podany graf jest 4-kolorowalny nazwijmy IS-4COL. W takim wypadku procedurę IS-3COL możemy zapisać:

Algorithm 1 Redukcja $3COL$ do $4COL$

```
1: procedure IS-3COL(G(V,E))
2:     H(V,E) ← (V ∪ {v_0}, E ∪ {(v_0, v) | v ∈ V})
3:     if IS − 4COL(H) then return „YES”.
4:     else return „NO”.
```

$\square$

Lemat 1. *Algorytm jest $PTIME$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że IS-4COL $\in PTIME$ oraz że graf H konstruujemy w czasie wielomianowym (np. wstawiamy jedynki w macierzy sąsiedztwa albo dopisujemy coś do listy sąsiedztwa). $\square$

Lemat 2. *Algorytm jest poprawny.*

Dowód. Dodanie wierzchołka v_0 powoduje zmianę liczby chromatycznej grafu G o jeden. Łącząc to z faktem, że algorytm IS-4COL jest poprawny, dowodzimy poprawności algorytmu IS-3COL. $\square$