

# Analiza numeryczna (M) - Pracownia 1 - Zadanie P1.24

## Analiza numeryczna iteracyjnej metody Bairstowa

Bartosz Bednarczyk

Jan Góra

Listopad 15, 2015

### Spis treści

<b>Przegląd podstawowych zagadnień związanych z wielomianami</b>	<b>2</b>
Podstawowe definicje . . . . .	2
Postać iloczynowa wielomianu i dzielenie wielomianu . . . . .	2
Pochodna wielomianu i jej obliczanie . . . . .	3
Inne przydatne pojęcia matematyczne . . . . .	3
<b>Metoda Newtona oraz wielowymiarowa metoda Newtona</b>	<b>3</b>
Opis klasycznej metody Newtona . . . . .	3
Zastosowanie klasycznej metody Newtona do szukania zer wielomianu . . . . .	3
Metoda Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych . . . . .	4
Metoda Newtona dla funkcji zespolonych . . . . .	4
<b>Wybrane metody wyszukiwania miejsc zerowych wielomianu</b>	<b>6</b>
Metoda Laguerre’a . . . . .	6
Metoda Mullera . . . . .	6
<b>Metoda Bairstowa</b>	<b>6</b>
Opis metody Bairstowa . . . . .	6
Analiza teoretyczna metody Bairstowa . . . . .	7
Przykład rozbieżności metody Bairstowa . . . . .	7
Implementacja metody Bairstowa . . . . .	8
Proponowane usprawnienia . . . . .	8
<b>Testy numeryczne</b>	<b>9</b>
Porównanie opisanych metod . . . . .	9
Przykład działania opisanych metod . . . . .	12

### Krótki opis sprawozdania

Najprostsze metody numeryczne bardzo często okazują się być mało wydajne, dlatego matematycy dążą do uzyskania metod o bardzo niskim czasie działania. Celem tego sprawozdania jest pokazanie jednej z nich, jaką jest iteracyjna metoda Bairstowa. Na podstawie odpowiednich testów numerycznych sprawdzone zostaną dokładność, stabilność i efektywność tej metody. Poza tym pobieżnie omówione zostaną różne warianty metody Newtona, metoda Laguerre’a oraz metoda Mullera, których wydajność porównamy z metodą Bairstowa.

# Przegląd podstawowych zagadnień związanych z wielomianami

## Podstawowe definicje

**Definicja 1.** Wielomianem stopnia  $n \in \mathbb{N}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  będziemy nazywać przekształcenie  $\mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$  zadane wzorem  $W(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , gdzie  $a_i$  to pewne współczynniki z ciała  $\mathbb{K}$  oraz  $a_n \neq 0$ .

**Definicja 2.** Niech  $W$  będzie pewnym wielomianem (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ). Liczbę  $a$  taką, że  $W(a) = 0$ , będziemy nazywać pierwiastkiem wielomianu.

**Uwaga 1.** Z faktu, że wielomian  $W$  ma współczynniki z ciała  $\mathbb{K}$ , nie wynika fakt, że jego pierwiastki również będą należały do  $\mathbb{K}$ . Klasycznym przykładem jest wielomian  $x^2 + 1$ , który ma współczynniki rzeczywiste, a jego pierwiastkami są liczby zespolone.

**Uwaga 2.** Istnieją takie ciała  $\mathbb{K}$ , że dla dowolnego wielomianu stopnia większego od 0 wszystkie jego pierwiastki należą do  $\mathbb{K}$ . Ciała takie będziemy nazywać algebraicznie domkniętymi. Przykładem takiego ciała jest  $\mathbb{C}$ , czego nie będziemy dowodzić.

Podczas całego tego sprawozdania będziemy zajmować się następującym problemem:

### Problem znajdowania miejsc zerowych wielomianu

Niech  $W$  będzie wielomianem. Znaleźć zbiór  $\ker(W) = \{a \mid W(a) = 0\}$ .

Powyższy problem, choć pozornie prosty, jest sformułowany bardzo ogólnie. Na potrzeby tej pracy od tej pory ograniczymy się tylko do ciał  $\mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{C}$ , choć nic nie stało na przeszkodzie by poeksperymentować z innymi ciałami. Aktualnie nie wiemy czy każdy wielomian ma pierwiastki, a jeśli ma, to jaka jest moc ich zbioru. Nie znamy również żadnych metod rozwiązywania  $W(x) = 0$ . By lepiej zrozumieć podane zagadnienie, przejdźmy przez ciąg różnych definicji, algorytmów, twierdzeń i lematów związanych z wielomianami (warto je zrozumieć, gdyż kolejne rozdziały będą z nich korzystać).

**Twierdzenie 1.** Każdy wielomian  $W(x)$  nad  $\mathbb{C}$  stopnia  $n \in \mathbb{N}_+$  ma co najmniej jeden pierwiastek.

*Dowód.* To twierdzenie jest nazywane zasadniczym twierdzeniem algebry. Udowodnione w [1], s. 105.  $\square$

**Wniosek 1.**  $|\ker(W)| \leq n$ , gdzie  $n$  to stopień wielomianu  $W$ .

## Postać iloczynowa wielomianu i dzielenie wielomianu

**Definicja 3.** Wielomian  $W(x)$  nazywamy podzielny przez wielomian  $P(x)$ , różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian  $Q(x)$ , że  $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$ . Wielomian  $Q(x)$  nazywamy ilorazem wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$ . Mówimy, że wielomian  $P(x)$  jest dzielnikiem wielomianu  $W(x)$ .

**Twierdzenie 2.** Dowolny wielomian  $W(x)$  możemy zapisać jako  $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$  dla pewnych wielomianów  $P, Q, R$ . Mówimy, że wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez  $Q(x)$ , jeżeli  $R(x) = 0$ .

**Twierdzenie 3.** Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $Q(x) = (x - a)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $W(a) = 0$ .

*Dowód.* Udowodnione w [2], s. 198-199.  $\square$

Chcielibyśmy umieć w efektywny sposób realizować procedurę dzielenia wielomianu przez jednomiany postaci  $x - a$ . Służy do tego następujący algorytm:

1.  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

2. Niech  $\alpha = a_n$ .
3. Kolejno dla  $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$  wykonaj  $\alpha := a_k + x\alpha$ .
4. Wynik to  $p(x) = \alpha$ .

Dokładny opis metody oraz jej analizę możemy znaleźć w [3], s. 103.

## Pochodna wielomianu i jej obliczanie

**Definicja 4.** Pochodną wielomianu  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  będziemy nazywać wielomian  $p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ .

Wyznaczanie wielomianu w punkcie  $x_0$  możemy zrealizować za pomocą schematu Hornera:

1.  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ .
2. Niech  $\alpha := a_n, \beta := 0$ .
3. Kolejno dla  $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$  wykonaj  $\beta := \alpha + x\beta, \alpha := a_k + x\alpha$ .
4. Wynik to  $p'(x) = \beta$ .

## Inne przydatne pojęcia matematyczne

Oprócz wymienionych w rozdziale pojęć związanych z wielomianami, zakładać będziemy u czytelnika znajomość wielowymiarowego rachunku różniczkowego, definicji funkcji holomorficznej oraz podstawowych pojęć związanych z analizą błędów. Pojęcia te można doczytać w [1] i [3].

## Metoda Newtona oraz wielowymiarowa metoda Newtona

### Opis klasycznej metody Newtona

Klasyczną metodą Newtona zastosowaną dla pewnego punktu startowego  $p$  oraz funkcji  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  klasy  $C^1$  nazywać będziemy metodę iteracyjną postaci:

$$x_n = \begin{cases} p, & \text{gdy } n = 0 \\ x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Można pokazać, że  $x_n$  zbiega do pewnego pierwiastka funkcji  $f$ . Analizę klasycznej metody Newtona można znaleźć w [3], s. 71-81.

### Zastosowanie klasycznej metody Newtona do szukania zer wielomianu

Jeśli mamy wielomian o współczynnikach i pierwiastkach rzeczywistych, możemy policzyć jego pierwiastki za pomocą klasycznej metody Newtona. Podstawiamy za  $f$  z poprzedniego opisu nasz wielomian, a  $f'$  to jego pochodna. Po znalezieniu jednego pierwiastka (nazwijmy go  $a$ ) dzielimy nasz wielomian przez  $x - a$  i uruchamiamy program dla otrzymanego wielomianu. Proces kontynuujemy tak długo, aż dojdziemy do wielomianu o stopniu 0.

**Uwaga 3.** Poniżej przedstawiamy przykładową implementację metody Newtona w języku Julia. Wartość w punkcie wielomianu i jego pochodnej możemy wyznaczyć z pomocą schematu Hornera, który był omówiony wcześniej (w kodzie przykładowym skorzystaliśmy z funkcji bibliotecznych dla większej czytelności).

```

1 using Polynomials
2 # W - wielomian, n - stopień wielomianu, p - punkt startowy, eps - dokładność
3
4 function klasyczna_metoda_newtona(W, n, p, eps)
5     dW = polyint(W) # oblicza pochodną wielomianu
6     x'n = p
7
8     while bigger(abs(polyval(W, x'n)), eps)
9         x'n = x'n - (polyval(W, x'n)/polyval(dW, x'n))
10    end
11
12    return x'n # zwroc szukany pierwiastek
13 end

```

**Uwaga 4.** Powyższa metoda nie nadaje się do obliczania miejsc zerowych wielomianu, którego pierwiastki są zespolone (z powodu tego, że operujemy tutaj na tylko rzeczywistych przybliżeniach  $x_n$ ).

## Metoda Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych

Załóżmy, że mamy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

gdzie  $f_i \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$ .

Każdą z tych funkcji możemy rozisać ze wzoru Taylora jako:

$$0 = f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \approx f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Powyższy układ możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Aby nieco skrócić ten układ, będziemy go zapisywać jako  $F(X) = -J \cdot H$ . Jeśli macierz  $J$  jest nieosobliwa, to układ ma rozwiązanie w postaci:

$$-J^{-1} \cdot F(X) = H$$

Ostatecznie wzór Newtona dla układu funkcji wielu zmiennych możemy wyrazić wzorem:

$$X_{k+1} = X_k + H_k = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$$

## Metoda Newtona dla funkcji zespolonych

**Lemat 1.** Dowolną funkcję analityczną  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  możemy zapisać jako

$$f(z) = f(x + yi) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $P(x, y) \in \mathbb{R}$ ,  $Q(x, y) \in \mathbb{R}$

**Przykład 1.**

$$f(z) = z^3 - 2z = f(x + iy) = (x + iy)^3 - 2(x + iy) = (x^3 - 3xy^2 - 2x) + i(3x^2y - y^3 - 2y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Niech  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ . Równanie  $f(z) = 0$  możemy sprowadzić do układu równań  $Q(x, y) = 0$  i  $P(x, y) = 0$ . Taki układ równań rozwiązujemy za pomocą metody Newtona dla funkcji wielu zmiennych.

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J^{-1} \begin{pmatrix} P(x_n, y_n) \\ Q(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(x_n, y_n) \\ Q(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Ponieważ wielomian jest funkcją holomorficzną, to zachodzi równanie Cauchy'ego-Riemanna:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Oznaczając  $P = P(x_n, y_n)$ ,  $Q = Q(x_n, y_n)$ ,  $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}(x_n, y_n)$ ,  $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_n, y_n)$  oraz korzystając ze wzoru na macierz odwrotną możemy uprościć wzór na metodę Newtona do postaci:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - \frac{PP_x + QQ_x}{P_x^2 + Q_x^2} \\ y_n - \frac{PP_y + QQ_y}{P_x^2 + Q_x^2} \end{pmatrix}$$

**Uwaga 5.** Implementacja zespolonej metody Newtona jest nieco problematyczna. Musimy potrafić zaimplementować operacje na funkcjach wielu zmiennych oraz ich różniczkowanie. Przykładowy kod w języku Julia możemy otrzymać dzięki zastosowaniu biblioteki MultiPoly. Wymieniona biblioteka dostarcza nam sposobu na tworzenie nowych zmiennych wielomianu (metoda generators), obliczania wartości w danym punkcie (evaluate) oraz efektywnego różniczkowania wielomianu po zadanej zmiennej (diff).

```

1 using MultiPoly # biblioteka dla wielomianow wielu zmiennych
2
3 # a - tablica wspolczynnika, x0+i*y0 -punkt startowy, eps - precyzja
4 function complex'newton(a, n::Int, x0::Float64, y0::Float64, eps::Float64)
5
6     if n == 0
7         return
8     elseif n == 1
9         w = Complex128(-W[1])/Complex128(W[2])
10        @printf("%.16lf + "t %.16lf i "n ", real(w), imag(w))
11        return
12    end
13    # x, y - zmienne w wielomianie
14    x, y = generators(MPoly-Float64", :x, :y); p = zero(MPoly-Complex128")
15
16    for i in 1:(n+1) # zamiana zespolonego wielomianu na funkcje dwu zmiennych
17        p = p + W[i] * (x+y*im)^(i-1)
18    end
19
20    xn = x0; yn = y0; P = real(p); Q = imag(p-P)
21    Px = diff(P, :x); Py = diff(P, :y); Qx = diff(Q, :x); Qy = diff(Q, :y)
22
23    while( bigger(abs( evaluate(p, xn, yn) ),eps )
24        eP = evaluate(P, xn, yn); eQ = evaluate(Q, xn, yn); ePx = evaluate(Px, xn, yn);
25        eQy = evaluate(Qy, xn, yn); ePy = evaluate(Py, xn, yn); eQx = evaluate(Qx, xn, yn)
26        xn = xn - (eP * ePx + eQ * eQx)/(ePx^2 + eQx^2); yn = yn - (eP * ePy + eQ * eQy)/(ePx^2 + eQx^2)
27    end
28
29    @printf("%.16lf + "t %.16lf i "n ", xn, yn)
30    complex'newton(divide(W, complex(xn, yn)), n-1, x0, y0, eps)
31 end

```

## Wybrane metody wyszukiwania miejsc zerowych wielomianu

### Metoda Laguerre'a

Jedną z metod iteracyjnych wyszukiwania pierwiastków wielomianu używanych w nowoczesnych systemach informatycznych jest metoda Laguerre'a.

Niech  $p(z)$  będzie wielomianem stopnia  $n$ , którego pierwiastki mamy znaleźć. Kolejne kroki w metodzie wykonujemy za pomocą następujących wzorów:

$$A = \frac{-p'(z)}{p(z)}, \quad B = A^2 - \frac{p''(z)}{p(z)}, \quad C = \frac{A \pm \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}, \quad z_{\text{nowe}} = z + \frac{1}{C}$$

Metoda Laguerre'a jest bardzo efektywnym algorytmem, ponieważ w okolicach pojedynczego pierwiastka wielomianu  $p$  jest zbieżna sześciennie. Dokładną analizę tej metody pozostawiamy czytelnikowi do przeczytania w [3], s. 112-116.

### Metoda Mullera

Metoda Mullera jest modyfikacją metody stycznych. Zamiast przybliżać nasz wielomian  $f$  funkcją liniową, będziemy go aproksymować funkcją kwadratową.

Rozważmy trzy punkty  $x_0, x_1, x_2$  wraz z wartościami funkcji  $f$  w tych punktach. Przyjmujemy, że  $x_2$  jest aktualnym przybliżeniem rozwiązania. Oznaczmy  $z = x - x_2$ ,  $h_0 = x_0 - x_2$ ,  $h_1 = x_1 - x_2$ .

Oznaczmy szukaną parabolę przez  $g(z) = az^2 + bz + c$ . Z definicji paraboli w punkcie  $z = x_k$  dostajemy, że

$$2a = f''(x_k), \quad b = f'(x_k), \quad c = f(x_k),$$

co prowadzi do wzoru

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + \operatorname{sgn}(f'(x_k)) \cdot \sqrt{(f'(x_k))^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}}$$

Więcej na temat tej metody oraz jej modyfikacji można poczytać w skrypcie [8].

## Metoda Bairstowa

### Opis metody Bairstowa

Ostatnią i zarazem najważniejszą metodą, którą omówimy w sprawozdaniu, będzie metoda Bairstowa. Wiemy, że nawet jeśli wielomian ma współczynniki rzeczywiste, to może mieć pierwiastki zespolone (np.  $x^2 + 1$ ). Metoda Bairstowa pozwala na obliczenie wszystkich pierwiastków bez użycia arytmetyki zespolonej.

**Lemat 2.** *Jeżeli  $w$  jest pierwiastkiem nierzeczywistym wielomianu  $p(z)$ , a  $p(z)$  jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to pierwiastkiem  $p(z)$  jest również  $\bar{w}$ . Iloczyn  $(x - w)(x - \bar{w})$  jest czynnikiem kwadratowym o współczynnikach rzeczywistych.*

*Dowód.* Udowodnione w [3], s. 108. □

Zauważmy, że pierwiastki zespolone możemy wyszukiwać parami. Zamiast wyszukiwać pierwiastki pojedynczo, będziemy wyszukiwać dwumianu postaci  $z^2 - uz - v$ .

**Lemat 3.** *Dowolny wielomian  $p(z) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  możemy zapisać w postaci:*

$$p(z) = (b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_3 z + b_2) (z^2 - uz - v) + b_1 (z - u) + b_0$$

Wielomian  $(b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_3 x + b_2)$  będziemy dalej oznaczać jako  $Q(z, u, v)$ . Powyższe współczynniki możemy obliczać rekurencyjnie według wzorów:

$$b_{n+1} = b_{n+2} = 0, \quad b_k = ub_{k+1} + vb_{k+2} \quad (n \geq k \geq 0).$$

*Dowód.* Dowód w [3], s. 109. □

Chcemy, by nasz wyjściowy wielomian był podzielny przez  $z^2 - uz - v$ . Zatem musi zachodzić  $b_0 = b_1 = 0$ . Potraktujmy podane współczynniki jako funkcje zmiennych  $u, v$ . Wtedy dostajemy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} b_0(u + h_1, v + h_1) = 0 \\ b_1(u + h_2, v + h_2) = 0 \end{cases}$$

Podany układ możemy rozwiązać przedstawioną wcześniej metodą Newtona dla wielu funkcji wielu zmiennych. Po znalezieniu współczynników  $u, v$  dzielimy wyjściowy wielomian przez otrzymany dwumian i kontynuujemy proces wyszukiwania pierwiastków dla mniejszego wielomianu (z uwzględnieniem tego, że przypadki dla wielomianu stopnia 0 i 1 traktujemy osobno).

## Analiza teoretyczna metody Bairstowa

**Lemat 4.** *Metoda Bairstowa jest zbieżna lokalnie.*

*Dowód.* Wynika to bezpośrednio z tego, że metoda Newtona jest zbieżna lokalnie. □

Głównym założeniem w lokalnej zbieżności metody Bairstowa jest to, że jacobian wyliczany przy metodzie Newtona się nie zeruje dla podanych wcześniej punktów startowych i kolejnych przybliżeń. Zastanówmy się w jaki sposób zerowanie się jacobianu zależy od punktów startowych oraz pierwiastków wielomianu.

**Twierdzenie 4.** *Niech  $u, v$  będą dowolnie wybranymi liczbami rzeczywistymi. Jacobian dla algorytmu Bairstowa jest macierzą odwracalną wtedy i tylko wtedy, gdy  $z^2 - uz - v$  oraz wielomian  $Q(z, u, v)$  nie mają wspólnych pierwiastków. Rząd jacobianu jest jeden wtedy i tylko wtedy, kiedy liczba wspólnych pierwiastków (z krotnościami) jest równa jeden. Jacobian się zeruje wtedy i tylko wtedy, gdy  $z^2 - uz - z$  dzieli  $Q(z, u, v)$ .*

**Twierdzenie 5.** *Załóżmy, że  $P(z) = Q(z, u, v)(x^2 - u^*z - v^*)$  i załóżmy, że wyrażenia po prawej stronie nie mają wspólnego pierwiastka. Wtedy istnieje dodatnia liczba  $d$  taka, że ciąg  $(u_k, v_k)$  generowany przez metodę Bairstowa jest zbieżny kwadratowo do  $(u^*, v^*)$ , gdzie  $|u_0 - u^*| < d \wedge |v_0 - v^*| < d$ .*

*Dowód.* Twierdzenia te zostały udowodnione przez autorów Tibora Fiałę oraz Annę Krebsz w 1987 roku. Kompletne dowody można przeczytać w [5]. □

Analiza zbieżności oraz rozbieżności metody Bairstowa stanowiła podstawę do napisaniu kilku (choć niestety niewielu) prac naukowych. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do [5], [6] oraz [7].

## Przykład rozbieżności metody Bairstowa

Rozważmy wielomian postaci  $P(x) = (x^2 + ux + v)(x^2 + ux + w) + (w - v)^2$ . Jacobian dla metody Bairstowa w punkcie  $(u, v)$  będzie wyglądał następująco:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} v - w & 0 \\ 0 & v - w \end{pmatrix}$$

Jeśli uruchomimy metodę Bairstowa dla np.  $u = 3, v = 1, w = 2$  to dostaniemy wielomian  $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 3$ , dla którego ciąg przybliżeń pierwiastka będzie cykliczny.

Tabela 1: Metoda Bairstowa dla powyższej funkcji

Iteracja	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-2.6180339884	-3.8196601113e-01	-2.6180339884	-3.8196601113e-01
2	-2.0	-1.0	-2.0	-1.0
3	-2.6180339884	-3.8196601113e-01	-2.6180339884	-3.8196601113e-01
4	-2.0	-1.0	-2.0	-1.0

## Implementacja metody Bairstowa

Jeżeli oznaczymy sobie  $c_k := \frac{\partial b_k}{\partial u}$ ,  $d_k := \frac{\partial b_{k-1}}{\partial v}$  to dostajemy związki:

$c_k = d_{k+1} + uc_{k+1} + vc_{j+2}$  ( $c_{n+1} = c_n = 0$ ) oraz  $d_k = b_{k+1} + ud_{k+1} + vd_{k+2}$  ( $d_{n+1} = d_n = 0$ ).

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v = 0 \\ b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest

$$\delta u = (c_1 b_1 - c_2 b_0)/J, \quad \delta v = (c_1 b_0 - c_0 b_1)/J, \quad J = c_0 c_2 - c_1^2$$

Metodę Bairstowa możemy zapisać w postaci listy kroków:

1.  $b_n := a_n$
2.  $c_n := 0$
3.  $c_{n-1} := a_n$
4. for  $j = 1$  to  $M$  do
  - (a)  $b_{n-1} := a_{n-1} + ub_n$
  - (b) for  $k = n - 2$  to  $0$  step  $-1$  do
    - i.  $b_k := a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$
    - ii.  $c_k := b_{k+1} + uc_{k+1} + vc_{k+2}$
  - (c) end do
  - (d)  $J := c_0 c_2 - c_1^2$
  - (e)  $u := u + (c_1 b_1 - c_2 b_0)/J$
  - (f)  $v := v + (c_1 b_0 - c_0 b_1)/J$
  - (g) output  $j, u, v, b_0, b_1$
5. end do

Pseudokod zapożyczony z opisu metody Bairstowa z [3].

## Proponowane usprawnienia

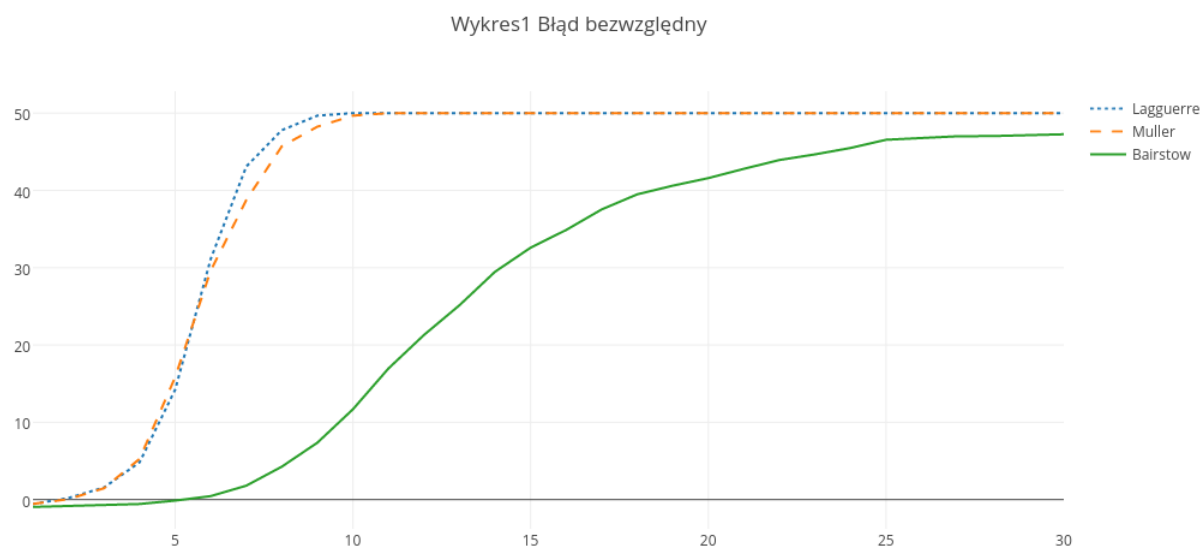
- W przypadku, kiedy po podanej liczbie iteracji nasz  $(u, v)$  nie "wyzerował" dostatecznie współczynników  $b_0$  oraz  $b_1$  to możemy wylosować nowy punkt startowy  $(u^*, v^*)$  i zacząć metodę od początku. Ominiemy wtedy przypadek, że dla podanych początkowych punktów metoda się zapętla (patrz: s. 7).
- Jeżeli w danej iteracji jacobian się zeruje, a  $b_1, b_0$  nie są "wyzerowane", to możemy również wylosować nowy punkt i zacząć metodę od początku.



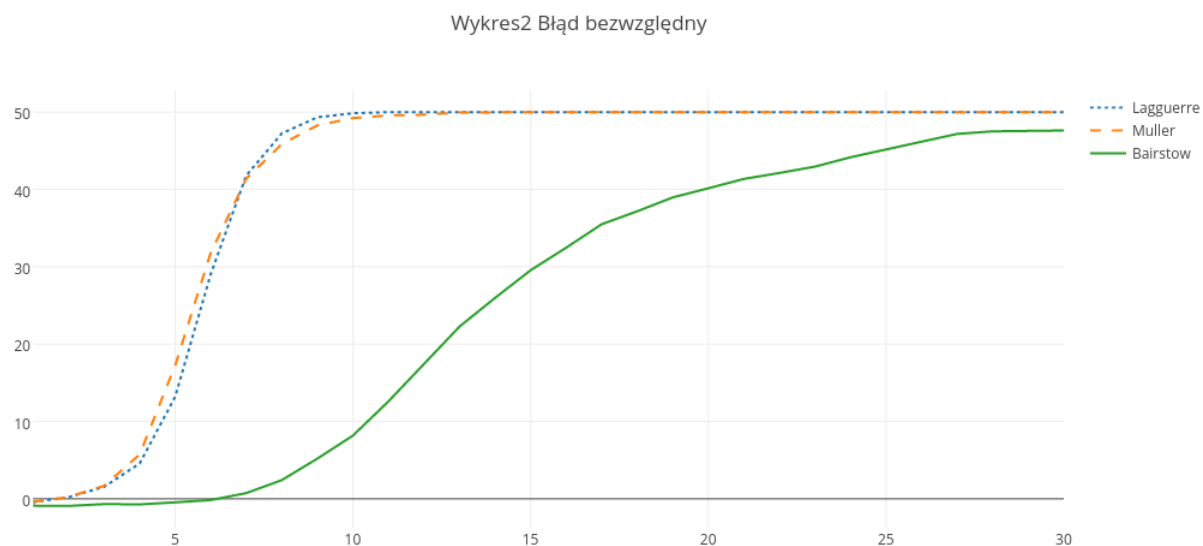
## Testy numeryczne

### Porównanie opisanych metod

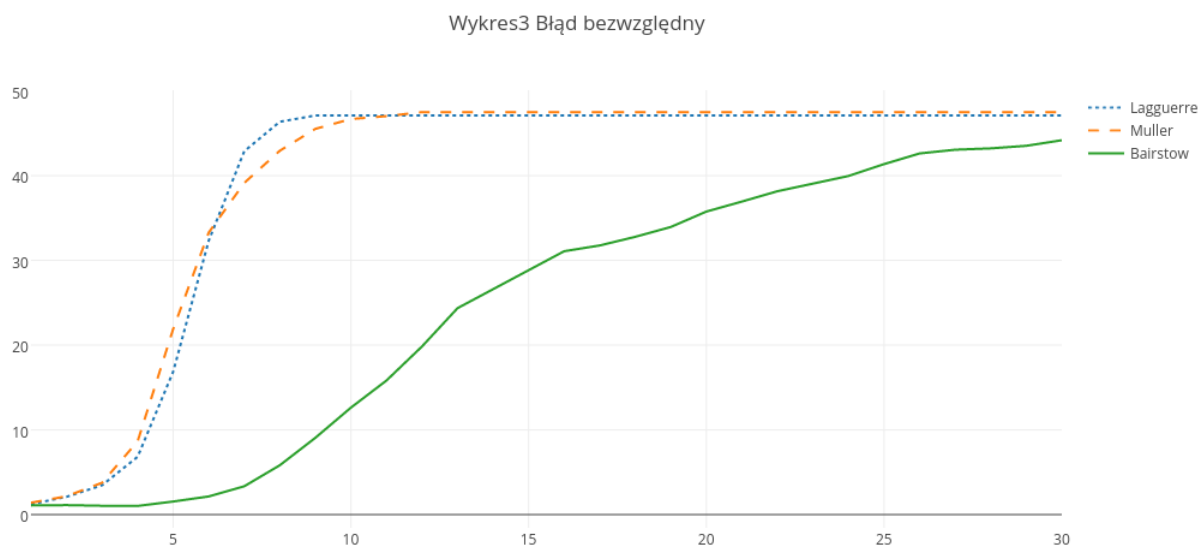
Poniższe wykresy prezentują obserwację zmiany błędu bezwzględnego pierwiastka wielomianu i przybliżenia zadanego przez opisaną metodą w kolejnych iteracjach na podstawie różnych danych wejściowych. Na wykresie oś Y przedstawia błąd bezwzględny w postaci  $10^{-y}$ .



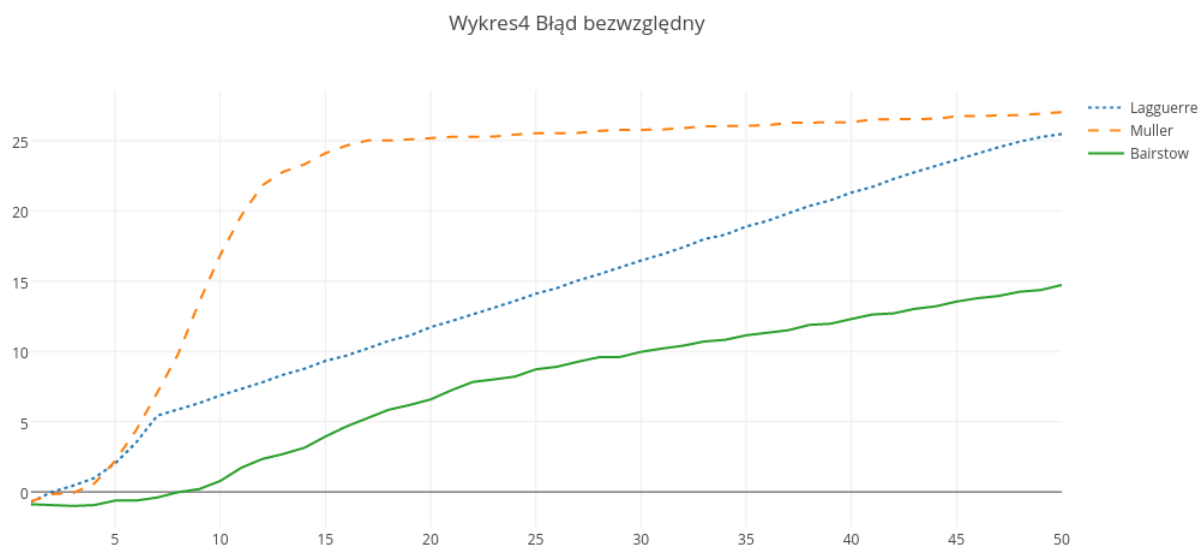
Wykres 1: Próba 100 wielomianów 10-tego stopnia o losowych pierwiastkach typu *BigFloat* (o precyzji  $10^{-30}$ ) w zakresie  $[-7; 7]$  w zerowych punktach początkowych.



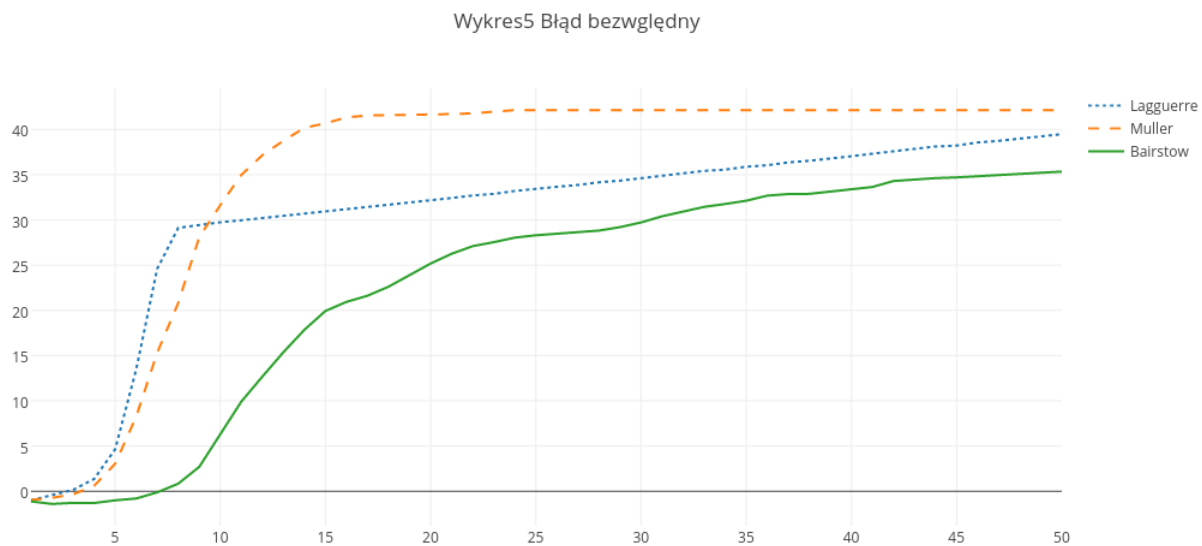
Wykres 2: Próba 100 wielomianów 10-tego stopnia o losowych pierwiastkach typu *BigFloat* (o precyzji  $10^{-30}$ ) w zakresie  $[-7; 7]$  w zerowych punktach początkowych.



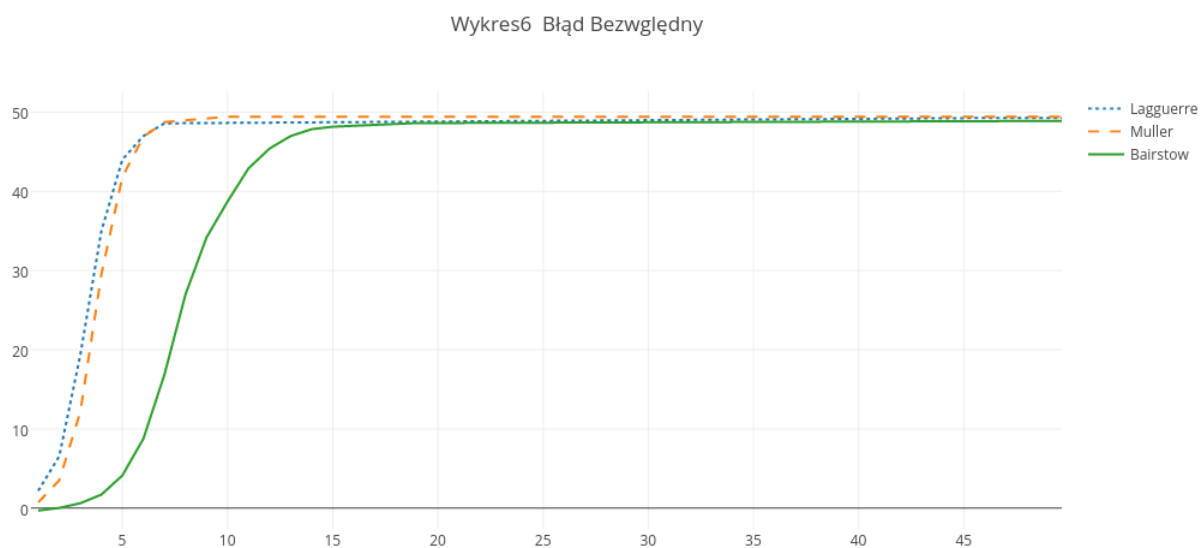
Wykres 3: Próba 50 wielomianów 10-tego stopnia o losowych pierwiastkach typu *BigFloat* (o precyzji  $10^{-30}$ ) w zakresie  $[0; 1)$  w zerowych punktach początkowych.



Wykres 4: Próba 50 wielomianów 10-tego stopnia o losowych pierwiastkach typu *Int64* w zakresie  $[-10; 10]$  w zerowych punktach początkowych.



Wykres 5: Próba 50 wielomianów 10-tego stopnia o losowych pierwiastkach typu  $Int64$  w zakresie  $[-30, 30]$  w zerowych punktach początkowych.



Wykres 6: Próba 50 wielomianów 3-tego stopnia o losowych pierwiastkach typu  $Int64$  w zakresie  $[-30, 30]$  w zerowych punktach początkowych.

**Wniosek 2.** Wykresy 1 i 2 oparte były na podobnych danych. Zauważamy, że funkcje na różnych wielomianach o tym samym typie zbiegają mniej-więcej w ten sam sposób. Widzimy, że metoda Bairstowa jest zdecydowanie wolniej zbieżna od dwóch pozostałych metod.

Na wykresie 3 widać, że pomimo pozornie bliskich pierwiastków wielomianu  $([0, 1])$  metody są równie szybko zbieżne.

Na wykresie 4 widzimy, że bliskie pierwiastki są dużym utrudnieniem dla metod. Błąd bezwzględny przy 50 iteracjach nie przekroczył  $10^{-30}$ , podczas gdy w poprzednich przykładach już po 30 iteracjach metody osiągnęły maksymalną dokładność.

Po zwiększeniu przedziału do  $[-30; 30]$  metody znów szybko osiągnęły dobrą dokładność.

Ostatni wykres prezentuje zachowanie metod na bardzo małych danych wejściowych. Widać, że wszystkie metody są bardzo szybko zbieżne.

## Przykład działania opisanych metod

**Przykład 2.** Metoda Bairstowa zastosowana do wielomianu

$$168 + 10x - 37x^2 + 2x^3 + x^4 = (x + 2)(x - 3)(x + 7)(x - 4)$$

1. Iteracja nr 1:

-1.917879829307739159294843574606, 2.441230459404106839057630824421,  
-7.164414002968976450250192381454, 5.164414002968976450250192381454

2. Iteracja nr 2:

-2.009530033377617967339383794074, 2.900360110039499302979214698574  
-6.970374011038727308629332841661, 4.447023380942359628866545591846

3. Iteracja nr 3:

-2.001038440292382015085002297150, 2.994714506062211330442943300673  
-6.984875797781202526521865011540, 4.094045721119321190882034107040

4. Iteracja nr 4:

-2.000004229190859710286686827364, 2.999983492821811977876729816709  
-6.998950445144011486784616660300, 4.005274379374182171426675656777

5. Iteracja nr 5:

-2.000000000049071271087627181384, 2.999999999847921708048370785679  
-6.999996192489175048447504955397, 4.000016928858222780857461966052



- [4] Lily Yau, Adi Ben-Israel, *The Newton and Halley Methods for Complex Roots*, The American Mathematical Monthly 105, 1998, s. 806–818.
- [5] Tibor Fiala, Anna Krebsz, *On the Convergence and Divergence of Bairstow's Method*, Journal Numerische Mathematik, Volume 50 Issue 4, 1987, s. 477-482.
- [6] Wolfgang Gabler *Invariances and convergence properties of Bairstow's method*, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 27 No. 4, 2006, s. 523-576.
- [7] Sofo, Anthony and Glasson, Alan, *Singularities in Bairstow's method*, Gazette of the Australian Mathematical Society, 37 (2), s. 93-100.
- [8] Piotr Tatjewski, *Równania nieliniowe i zera wielomianów*, Skrypt do wykładu Metody Numeryczne.