Zad 10 - ekstrema lokalne funkcji

Znajdź ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x + y - 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Rozwiązanie: Obliczmy gradient funkcji f.

$$\nabla f(x,y) = \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ 1 - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Jeśli funkcja f ma lokalne ekstremum, to jej pochodna w tym punkcie się zeruje.
Dostajemy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} 0 = & 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 = & 1 - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{2} = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Podstawiając $x = y$ do układu dostajemy sprzeczność. Zatem układ nie ma rozwiązań, gradient się nie zeruje, więc funkcja nie ma ekstremów lokalnych. Wszystko by było fajnie, ale może być tak, że ekstremum jest w punkcie w którym gradient nie istnieje. Pokażmy, że punkt $(0,0)$ jest ekstremum lokalnym.
Wystarczy pokazać, że nasza funkcja $f(x,y)$ jest niedodatnia. Sprowadza to się do pokazania nierówności

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \frac{x+y}{2}$$

Jeśli $(x+y)$ jest ujemne, to nierówność jest prawdziwa. Dla zera również. Załóżmy, że $x+y$ jest dodatnie i podnieśmy obie strony nierówności do kwadratu. Dostajemy

$$x^2 + y^2 \geqslant \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}$$

$$\frac{3}{4}(x^2+y^2) \geqslant \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \frac{3}{2}xy \geqslant xy$$

co dowodzi tego, że $f(x,y) \leqslant 0$ dla dowolnych x, y.
Zatem jedynym punktem ekstremalnym f jest punkt $(0,0)$.

□