

Algebra - Lista 12

Niestety, pomyliłem się przy podawaniu nazw warstw: warstwy lewostronne są postaci

$$gH,$$

zaś prawostronne postaci

$$Hg.$$

Zadanie 1 Pokaż, że jeśli H jest grupą, to zbiór elementów

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$$

też jest podgrupą (podgrupa sprzężona do H). Pokaż też, że $|H| = |gHg^{-1}|$.

Zadanie 2 Znajdź grupę obrotów sześcianu.

Wskazówka: Wykorzystaj wzór $|O_x||G_x| = |G|$ wybierając za x dowolną ścianę. Wszystkie elementy mają naturalne osie obrotów, choć niektóre są nieoczywiste.

Zadanie 3 Rozpatrzmy romb, który nie jest kwadratem. Podaj grupę symetrii tej figury. Dla każdego wierzchołka podaj orbitę oraz stabilizator.

Zadanie 4 W grupie S_{10} rozpatrzmy grupy generowane przez

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
- (3) $(1, 6, 9)(2, 10)(3, 4, 5, 7, 8)$.

Dla każdego elementu ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Zadanie 5 Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, ośmiościanu, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego.

Wskazówka: $|O_x||G_x| = |G|$.

Zadanie 6 Niech grupa G działa na zbiorze X . Rozpatrzmy dwa elementy X : x, y z tej samej orbity. Udowodnij, że zbiór elementów przekształcających x na y , tj.:

$$\{g : g(x) = y\}$$

jest

- warstwą lewostronną G_x w G ;
- warstwą prawostronną G_y w G .

Zadanie 7 Niech grupa G działa na zbiorze X i $|G| = 3^k$, a $|X|$ nie jest podzielne przez 3. Pokaż, że w X istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G .

Wskazówka: $|O_x||G_x| = |G|$.

Zadanie 8 Rozpatrzmy grę w kółko i krzyżyk na planszy 5×5 ; w szczególności każde pole może być wypełnione kółkiem, krzyżykiem lub być puste. Dwie plansze są identyczne, jeśli jedną można przeprowadzić na drugą przez obrót lub symetrię. Znajdź ilość nieizomorficznych plansz.

Wskazówka: Lemat Burnside'a.

Zadanie 9 Rozpatrzmy kwadraty, w których malujemy wierzchołki na biało lub czerwono. Dwa kwadraty uznajemy za identyczne, jeśli można je przekształcić na siebie przez obrót. Ile jest rozróżnialnych kwadratów mających

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

wierzchołków białych? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli dopuścimy też symetrie kwadratu?

Wskazówka: Lemat Burnside'a.

Zadanie 10 Rozpatrzmy dziesięciokąty równoboczne, w których malujemy boki na jeden z trzech kolorów. Uznajemy dwa dziesięciokąty za równe, jeśli dadzą się na siebie przeprowadzić przez obrót. Ile jest rozróżnialnych dziesięciokątów?

Wskazówka: Lemat Burnside'a.