Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 12

14 stycznia 2016 r.[1]

M12.1. $\boxed{\text{0 punktów}}$ Znaleźć rozkład LU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & 4 \\ 35 & 10 & 13 & 22 \\ 21 & 13 & 15 & 18 \\ 63 & 49 & 63 & 68 \end{bmatrix}.$$

M12.2. $\boxed{\text{0,5 punkta}}$ Niech $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{\mathrm{T}}$ będzie danym wektorem oraz niech $a_k \neq 0$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Określmy macierz $M^{(k)} \in \mathbb{L}_n^{(1)}$ wzorem

$$M^{(k)} := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & m_{nk} & & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie $m_{ik} := -a_i/a_k$, $(i = k+1, k+2, \ldots, n)$. Udowodnić, że $M^{(k)}\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k \text{ razy}}]^{\mathrm{T}}$, tj. przekształcenie $M^{(k)}$ zachowuje bez zmian k początkowych składowych, a zeruje $n-k$ ostatnich elementów wektora $\boldsymbol{a}$.

M12.3. $\boxed{\text{0,5 punkta}}$ Udowodnić, że macierz odwrotna do macierzy $M^{(k)}$ (zob. (1)) ma postać

$$\left[M^{(k)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1,k} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -m_{nk} & & 1 \end{bmatrix}.$$

M12.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Sprawdzić, że wzór

a) $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$,

definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

M12.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$, wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)},$$

gdzie *promień spektralny* $\varrho(A^T A)$ macierzy $A^T A$ jest z definicji jej największą wartością własną.

[1] zajęcia 20 stycznia 2016 r.

M12.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

a) $\quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$;

b) $\quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$;

c) $\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1$.

M12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

M12.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E \coloneqq \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n\times n}$, zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

M12.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) tego samego stopnia jest macierzą trójkątną dolną (górną).

M12.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Wykazać, że jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

b) Opracować metodę wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy trójkątnej dolnej L, z jedynkami na przekątnej głównej.

M12.11. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że nieosobliwa macierz $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczna, tj. $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Załóżmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) Wykazać, że wówczas wielkości $a_{ij}^{(k)}$, otrzymywane w tej metodzie kolejno dla $k = 2, 3, \ldots, n$, są takie, że $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ dla $i, j = k, k+1, \ldots, n$.

b) Wskazać, jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

M12.12. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie *macierzą dominującą przekątniowo*, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych zachowuje tę własność, tzn. że wszystkie macierze $A^{(k)}$ są dominujące przekątniowo. Wywnioskować stąd, że każda macierz dominująca przekątniowo jest nieosobliwa i posiada rozkład LU.