Rozwiązania około dwustu trudnych zadań z języków formalnych i złożoności obliczeniowej (i jednego chyba łatwego)

Bartosz Bednarczyk

Ćwiczenia #1 – 23 luty 2017

Zadanie 1*. Rozważmy język $L = \{w0s : |s| = 9\}$, złożony z tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$ których dziesiąty symbol od końca to 0. Udowodnij, że DFA rozpoznający ten język ma co najmniej 1024 stany.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że istnieje DFA $\mathcal{A}$ o mniej niż 1024 stanach, rozpoznający język L z treści zadania.

Rozważmy zbiór S złożony z wszystkich słów o długości 10 nad alfabetem $\{0, 1\}$. Ponieważ automat $\mathcal{A}$ ma mniej niż 1024 stany, to istnieją dwa różne słowa $u, v \in S$, po przeczytaniu których, automat $\mathcal{A}$ kończy pracę w tym samym stanie. W związku z tym również dla dowolnych dwóch słów, których prefiksami jest u i v, automat $\mathcal{A}$ zakończy pracę w tym samym stanie.

Ustalmy najmniejsze takie k, że słowa u oraz v różnią się na k-tej pozycji. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że k-tą literą słowa u jest 0. Zauważmy, że słowo $u' = u0^{10-k}$ należy do języka L, natomiast słowo $v' = v0^{10-k}$ już nie, gdyż 10-tą literą od końca w słowie v jest 1. Jednakże jest to niemożliwe, ponieważ automat $\mathcal{A}$ dla obu słów skończył pracę w tym samym stanie. $\lightning$

Zatem nie istnieje DFA rozpoznający język L o mniej niż 1024 stanach.

Zadanie 2*. Jaką minimalną liczbę stanów musi mieć deterministyczny automat skończony rozpoznający zbiór tych wszystkich słów nad alfabetem $\{a, b, c\}$, które wśród ostatnich trzech znaków mają po jednym wystąpieniu każdej z liter alfabetu?

Zadanie 5*. Niech L będzie dowolnym podzbiorem $L(0^*)$. Udowodnij, że L^* jest językiem regularnym.

Zadanie 6*. Udowodnij, że język L tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które są zapisem binarnym liczby pierwszej, nie jest regularny.

Rozwiązanie:
Załóżmy nie wprost, że język L jest językiem regularnym i skorzystajmy z lematu o pompowaniu. Przez n oznaczmy stałą z lematu o pompowaniu oraz niech p będzie dowolną liczbą pierwszą większą od 2^n (liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, więc z pewnością taka istnieje).

Przez $\overline{w}$ będziemy zapisywać wartość liczby reprezentowanej binarnie przez słowo w.

Zapiszmy liczbę p binarnie i skorzystajmy z tego, że lemat o pompowaniu gwarantuje nam podział tego słowa na trzy części: x, y, z (gdzie $y \neq \varepsilon$), takie że $p = \overline{xyz}$. Dla tak ustalonego podziału, liczbę p możemy opisać jako $p = \overline{z} + 2^{|z|}\overline{y} + 2^{|y|+|z|}\overline{x}$.

Niech $q = \overline{xy^pz}$. Na mocy lematu o pompowaniu słowo xy^pz należy do języka L, a zatem liczba q jest pierwsza. Pokażemy, że w tak być nie może, gdyż liczba q jest podzielna przez p. Wyliczmy, że:

$$q = \overline{z} + 2^{|z|}\overline{y}\left(1 + 2^{|y|} + \ldots + 2^{(p-1)|y|}\right) + 2^{p|y|+|z|}\overline{x} \overset{\text{nudy}}{=} \overline{z} + 2^{|z|}\overline{y}\left(\frac{(2^p)^{|y|} - 1}{2^p - 1}\right) + (2^p)^{|y|}2^{|z|}\overline{x}$$

Korzystając z faktu, że $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ (patrz: MTF), możemy z łatwością wyliczyć, że:

$$q \equiv \overline{z} + 2^{|z|}\overline{y}\left(\frac{2^{|y|} - 1}{2^p - 1}\right) + 2^{|y|}2^{|z|}\overline{x} = p \equiv 0 \pmod{p}$$

Zatem liczba q nie jest pierwsza, co jest sprzeczne z tym, że jej zapis binarny należy do języka L. Stąd L nie jest regularny. ■

Zadanie 7*. Czy język $L = \{ww^R x : w, x \in \{0,1\}^* \text{ i } w, x \neq \epsilon\}$ jest regularny? Czy język $L = \{xwx : w, x \in \{0,1\}^* \text{ i } x \neq \epsilon\}$ jest regularny?

Zadanie 9*. (Twierdzenie o indeksie) Niech $L \subseteq \mathcal{A}^*$. Relację $\sim_L \subseteq \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ definiujemy w następujący sposób: $w \sim_L w'$ w.t.w gdy $\forall v \in \mathcal{A}^* (wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L)$. Udowodnij następujące *twierdzenie o indeksie*: L jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy liczba klas abstrakcji relacji $\sim_L$ jest skończona. Minimalna liczba stanów DFA rozpoznającego L jest wtedy równa liczbie tych klas abstrakcji.

Zadanie 10*. Udowodnij, że jeśli jedna z liczb i_L, i_L^{inf} jest skończona, to obie są skończone (z Twierdzenia o Indeksie wiemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy gdy L jest regularny). Dokładniej mówiąc:

a. udowodnij, że $i_L \leqslant i_L^{inf}$

b. udowodnij, że $i_L^{inf} \leqslant i_L^{i_L}$