Egzamin z matematyki dyskretnej

LUTY 2009, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ A, CZAS: 120 MIN.

Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1

Jak wiele z pierwszych 1000 liczb naturalnych może być przedstawionych w postaci

$$|x| + |2x| + |3x| + |4x| +$$

Zadanie 2

Na szachownicy $n \times m$ dla $n \leq m$ umieszczono (m-1)k+1 wież. Pokaż, że istnieje takich k wież które nie atakują się wzajemnie.

Zadanie 3

Tablicę 2n elementową wypełniamy liczbami naturalnymi z przedziału [1, n] tak, aby elementy na pozycjach parzystych tworzyły ciąg niemalejący. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Zadanie 4

W tablicy prostokątnej $n \times m$ zaznaczamy p pól. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli chcemy, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie jakieś pole było zaznaczone?

POWODZENIA!

EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LUTY 2009, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ B, CZAS: 120 MIN. Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5

Dany jest ciąg t_n określony jak następuje

$$t_0 = t_1 = 1, t_n = 3t |n/2| + 7n \text{ dla } n > 1.$$

Wylicz funkcje F(x), dla której funkcja tworząca T(x) ciągu t_n spełnia zależność

$$T(x) = 3(x+1)T(x^2) + F(x)$$

Zadanie 6

Ciąg 01110100 można potraktować jako cykliczny "sklejając" oba jego końce. Zauważmy, że każda z możliwych trójek binarnych: 000,001,011,...,111 występuje dokładnie raz w tym ciągu cyklicznym. Czy można skonstruować analogiczne ciągi cykliczne długości 16 dla czwórek binarnych i długości 32 dla piątek?

Wsk.: Problem może być wyrażony jako problem istnienia cyklu Eulera w pewnym grafie.

Zadanie 7

Mówimy, że wierzchołek w turnieju jest królem, jeśli do każdego innego wierzchołka można z niego dojść po drodze długości 2 lub mniejszej. Pokaż, że jeśli wierzchołek x ma krawędzie wchodzące to istnieje wierzchołek y, taki że y jest przodkiem x i y jest królem.

Zadanie 8

Pokaż, że graf G jest dwuspójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich trójek (uporządkowanych) wierzchołków (x,y,z) istnieje droga z x do z przechodząca przez y.

POWODZENIA!