Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 5

12 listopada 2015 r.

M5.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wielomian interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$ można podać wzorem

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x), \tag{1}$$

gdzie

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n). \tag{2}$$

Wykazać, że wielomiany (2) spełniają równości

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0)x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$

M5.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać poprawność algorytmu Wernera obliczania stałych

$$\sigma_k \equiv \sigma_k^{(n)} := 1/p'_{n+1}(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{3}$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Algorytm 1 (Werner, 1984)**.**

a) Obliczamy pomocnicze wielkości $a_k^{(i)}$ wg wzorów

$$\begin{aligned} &a_0^{(0)} := 1, \quad a_k^{(0)} := 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ &\left.\begin{aligned} a_k^{(i)} &:= a_k^{(i-1)}/(x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} &:= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, i-1), \end{aligned}$$

b) Wówczas

$$\sigma_k := a_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

M5.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić następującą *postać barycentryczną* wielomianu (1):

$$L_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - x_i} f(x_i) \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - x_i} & (t \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}), \\ f(x_k) & (t = x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n), \end{cases}$$

gdzie użyto oznaczenia (3).

M5.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

przy czym $f[x_j] = f(x_j)$.

M5.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dowieść, że jeśli p jest wielomianem stopnia n, to $q(x) := p[x, x_1, \ldots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $n-k$, z takim współczynnikiem przy x^{n-k}, jaki stoi w p przy x^n.

M5.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć wielomian p o następujących wartościach:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

Korzystając z tego wyniku podać wielomian q, który ma następujące wartości:

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

M5.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$ i że $h = (b-a)/n > 0$. Wykazać, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \tfrac{1}{4} n! h^{n+1}.$$

M5.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $L_1 \in \Pi_1$ interpoluje funkcję f w puntach x_0 i x_1. Wykazać, że dla każdego $x \in [x_0, x_1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2 M_2,$$

gdzie $M_2 := \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |f''(x)|$.