Deklaracja																		
Zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Rozwiązane	1	1		1			1	1	1	1	1	1						
Spisane	1			1			1	1	1	1		1						

Jest cechą głupoty dostrzegać błędy innych, a zapominać o swoich.

– Cyceron

Zadanie 1

Zad 1

Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ. Udowodnij, że istnieje wierzchołek v, taki że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$, taka że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

Dowód.

Fakt 1. *Centrum drzewa jest wierzchołek lub para wierzchołków połączonych krawędzią.*

Fakt 2. *Automorfizm grafu odwzorowuje liść na liść.*

Udowodnijmy to twierdzenie indukcyjnie. Niech $\Phi(n)$ oznacza, że w dowolnym drzewie $n \in \mathbb{N}_+$ wierzchołkowym punktem stałym automorfizmu jest centrum. Dla $n \in \{1, 2\}$ widać, że $\Phi(n)$ jest prawdą. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}_+$ i załóżmy, że dla dowolnego $k < n$ $\Phi(k)$ jest prawdą. Pokażmy, że prawdą jest również $\Phi(n)$.

Weźmy dowolne drzewo n wierzchołkowe. Usuńmy z niego wszystkie liście. Oczywiście operacja usunięcia liści nie zmieniła centrum. Teraz korzystając z założenia indukcyjnego wiemy, że centrum takiego drzewa jest punktem stałym automorfizmu. Wystarczy jeszcze zauważyć, że jeśli coś jest punktem stałym przekształcenia obciętego do pewnego poddrzewa, to jest też punktem stałym dla całego drzewa. Powyższa obserwacja kończy dowód indukcyjny.

□

Zadanie 2

Zad 1

Graf prosty G jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy gdy $n \equiv 0 \pmod 4$ lub $n \equiv 1 \pmod 4$.

Graf prosty G jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem.

Dowód. Nie wiem, bo to co tutaj mamy pokazać jest podawane wszędzie jako definicja.

□

Graf n wierzchołkowy jest samodopełniający, gdy $n \equiv 0 \pmod 4$ lub $n \equiv 1 \pmod 4$.

Dowód. Prawdą jest, że $G \cup \overline{G} = K_n$. Ponieważ $G \cong \overline{G}$, to grafy mają po tyle samo krawędzi. Stąd dostajemy:

$$\#E(G) \ + \ \#E(\overline{G}) = \#E(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} \implies \#E(G) = \frac{n(n-1)}{4}$$

Ponieważ liczba krawędzi jest liczbą całkowitą, to $n = 4k$ lub $n = 4k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

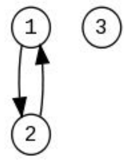
□

Zadanie 4

Zad 4

Pokaż, że digraf zawiera skierowany cykl Eulera dokładnie, gdy jest spójny (po wymazaniu skierowań łuków) i dla wszystkich $v \in V : indeg(v) = outdeg(v)$.

Rozwiązanie: Powyższe twierdzenie jest nieprawdziwe. Kontrprzykład:



Zadanie 7

Zad 7

Pokaż, ze w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2.

Dowód. Rozważmy dowolny turniej $G = (V, E)$. Przez v oznaczmy wierzchołek, którego liczba zwycięstw M jest największa (być może jest ich więcej - wtedy bierzemy dowolny z nich). Jeśli $M = \#E$, to otrzymujemy tezę. Załóżmy więc, że $M < \#E$.

Wszystkie wierzchołki, z którymi v wygrał w turnieju są od niego w odległości 1. Wystarczy zatem pokazać, że dowolny wierzchołek, z którym przegrał v jest w odległości 2, czyli $\forall u : u \mapsto v \ \exists w : (v \mapsto w \wedge w \mapsto u)$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje taki wierzchołek u, że powyższa własność nie zachodzi. To by oznaczało, że żaden z wierzchołków, które przegrały z v nie wygrały z u. Wierzchołek v również nie wygrał z u. To by oznaczało, że wierzchołek u wygrał turniej z co najmniej $M+1$ wierzchołkami, a to jest sprzeczne z tym, że M było maksymalne.

Stąd wniosek, że każdy wierzchołek jest w odległości maksymalnie 2 od wierzchołka v.

$\square$

Zadanie 8

Zad 8

Pokaż, że dowolny turniej zawiera skierowaną drogę Hamiltona.

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie indukcyjnie. Niech $\Phi(n)$ oznacza, że dowolny turniej o n wierzchołkach ma skierowaną drogę Hamiltona. Oczywiście dla $n = 2$ jest to prawda. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ większe od 1 i załóżmy, że $\Phi(n)$ jest prawdą. Pokażmy, że prawdą jest również $\Phi(n + 1)$.
Weźmy dowolny turniej o $n + 1$ wierzchołkach. Ściągnijmy z niego dowolny wierzchołek v. Wtedy w takim grafie istnieje droga Hamiltona $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$. Wróćmy do oryginalnego grafu. Jeżeli istnieje krawędź $v \to v_1$, to dostajemy tezę zadania. W przeciwnym wypadku weźmy najmniejsze i, takie że $v \to v_i$. Ponieważ to i było najmniejsze, to $v \not\to v_{i-1}$, czyli $v_{i-1} \to v$. Zastępując w naszej drodze Hamiltona fragment $v_{i-1} \to v_i$ ciągiem $v_{i-1} \to v \to v_i$ dostajemy szukaną drogę Hamiltona.
Na mocy zasady indukcji matematycznej $\Phi(n)$ jest prawdziwe dla dowolnego $n \geqslant 2$, co implikuje tezę zadania. $\square$

Zadanie 9

Zad 9

Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5×5 ruchem konika szachowego ? A co jeśli wymagamy żeby po obejściu szachownicy konik wrócił na to samo pole?

Dowód. Przykładowy sposób obejścia szachownicy:

01|24|19|14|03
18|13|02|09|20
23|08|25|04|15
12|17|06|21|10
07|22|11|16|05

W podanym grafie nie istnieje cykl Hamiltona. Pokolorujmy szachownicę w standardowy sposób. Każdy ruch konika szachowego zmienia nam kolor szachownicy na przeciwny - z białego skaczemy na czarne i z na odwrót. Cały cykl zająłby nam 25 skoków. Ponieważ liczba pól jest nieparzysta, to nie uda nam się wrócić na pole o tym samym kolorze. $\square$

Zadanie 10

Zad 10

Niech wierzchołkami grafu G będą wszystkie ciągi złożone z trzech liter a i trzech liter b. Dwa wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się transpozycją dwóch sąsiednich liter. Znajdź drogę Hamiltona w G.

Rozwiązanie: Szukaną drogą Hamiltona jest
aaabbb, aababb, aabbab, aabbba, ababba, baabba, baabab, baabbb,
abaabb, ababab, abbaab, abbaba, abbaa, babbaa, bababa, babaab, bbaaab, bbaaba, bbabaa, bbbaaa

Zadanie 11

Zad 11

Wierzchołkami grafu G są wszystkie ciągi złożone z jednej litery a, jednej b i czterech liter c. Dwa wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się transpozycją dwóch sąsiednich liter. Pokaż, że G ma drogą Hamiltona, ale nie ma cyklu Hamiltona.

Rozwiązanie: Szukaną drogą Hamiltona jest
[[c, b, c, c, c, a], [c, c, b, c, c, a], [c, c, c, b, c, a], [c, c, c, c, b, a], [c, c, c, c, a, b], [c, c, c, a, c, b], [c, c, a, c, c, b], [c, a, c, c, c, b], [a, c, c, c, c, b], [a, c, c, c, b, c], [c, a, c, c, b, c], [c, c, a, c, b, c], [c, c, c, a, b, c], [c, c, c, b, a, c], [c, c, b, c, a, c], [c, b, c, c, a, c], [b, c, c, c, a, c], [b, c, c, a, c, c], [c, b, c, a, c, c], [c, c, b, a, c, c], [c, c, a, b, c, c], [c, a, c, b, c, c], [a, c, c, b, c, c], [a, c, b, c, c, c], [c, a, b, c, c, c], [c, b, a, c, c, c], [b, c, a, c, c, c], [b, a, c, c, c, c], [a, b, c, c, c, c], [a, b, c, c, c, c]]
Pozostało pokazać, że w grafie nie ma cyklu Hamiltona. Nie mam niestety innego pomysłu niż sprawdzanie wszystkich możliwości (da się, ale to ciężkie).

Zadanie 12

Zad 12

Dany jest graf prosty G, w którym $n = |V(G)| > 3$ i dla dowolnych trzech wierzchołków istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}$. Wykaż, że w G istnieje cykl Hamiltona.

Dowód. Jeżeli G jest grafem pełnym to teza jest oczywista. Weźmy dowolne dwa wierzchołki u, v, które nie są połączone krawędzią. Wtedy dla dowolnego wierzchołka w mamy, że $(u, w) \in E \wedge (v, w) \in E$. Zatem $deg(u)+deg(v) = n - 2 + n - 2 = 2n - 4 \geqslant n$, co na podstawie twierdzenia Orego daje tezę. $\square$