Studiengang:

Name:

Vorname:

Mat.-Nr.:

1	2	3	4	5	6	Σ	Note

Aufgabe 1:

Gegeben sind die beiden Funktionen $f:[0,2]\to[0,3], f(x)=\sqrt{4-x^2}$ sowie $g:[0,1]\to[0,2], g(x)=2\cdot x$.

a) Prüfen Sie mittels der entsprechenden Definition die Funktion f(x) auf *injektiv* und *surjektiv*.

b) Welche der Verkettungen $f\circ g$ bzw. $g\circ f$ sind definiert? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2:

a) Entwickeln Sie nach dem Binomischen Lehrsatz für $x\in\mathbb{R}$ den Term $(x+1)^5$ in eine Summe.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: n^5-n ist (ohne Rest) durch 5 teilbar.

Aufgabe 3:

Sei $M:=\{a+b\cdot\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}\setminus\{0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ gegeben. Die Elemente von M werden bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{R}$ miteinander verknüpft.

a) Welches Element von M ergibt die Verknüpfung $(2+1\cdot\sqrt{2})\cdot(3+2\cdot\sqrt{2})$?

b) Zeigen Sie, dass eine innere Verknüpfung vorliegt, d. h., dass M bzgl. der Multiplikation abgeschlossen ist. Sie dürfen bei Ihrem Beweis benutzen, dass das Produkt zweier reeller Zahlen nur 0 sein kann, wenn mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist.

c) Man kann sich überlegen, dass zu jedem Element $z=a+b\cdot\sqrt{2}\in M$ das Element $w=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\cdot\sqrt{2}\in M$ existiert (das müssen Sie <u>nicht</u> zeigen). <u>Zeigen Sie</u>, dass w zu z invers ist.

d) Folgern Sie unter Verwendung von b) und c), dass $(M,\cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R},\cdot)$ ist.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Matrix A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 8 & a \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von der reellen Zahl a an.
b) Sei a=0. Geben Sie Dimension und eine Basis des Bildes an, welches durch die Abbildung erzeugt wird, die A als Abbildungsmatrix hat.

Aufgabe 5:

Eine Matrix A heisst idempotent wenn gilt $A \cdot A = A$. Bestimmen Sie die Bedingungen für die reellen Zahlen a und b, damit die Matrix A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ idempotent ist.

Aufgabe 6:

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -y+3z &= a \\ x-y+4z &= b \\ -3x-2y+3z &= c \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise.
b) Ermitteln Sie über das Gauss-Verfahren die Beziehung, in der die reellen Koeffizienten a, b und c stehen müssen, damit das Gleichungssystem Lösungen besitzt.
c) Berechnen Sie die Lösung für $a=1$, $b=-1$ und $c=8$.