Warum Mathematik?

Warum will ein angehender Informatiker oder eine angehende Informatikerin Mathematik lernen?
Weil er/sie Informatik = Information + Mathematik studiert!
Mathematik wird in nahezu allen Bereichen der Informatik verwendet:

- Testen von Programmen
- Laufzeitanalyse
- Robotik
- graphische Datenverarbeitung
- Datenkompression
- Kryptographie und Datensicherheit

Was ist Mathematik?

"Warum braucht man Mathematik? Sind nicht alle Integrale schon berechnet, alle Gleichungen gelöst?"
In der Mathematik geht es vor allem um das Erkennen von Strukturen und was man mit ihnen machen kann. Es geht um kreatives Problemlösen.

Teile der Mathematik

1. Logik
2. (Lineare) Algebra
3. Analysis
4. Differentialgleichungen
5. Numerik
6. Diskrete Mathematik
7. ...

In dieser Vorlesung wird uns hauptsächlich Punkt 2 beschäftigen.
(Und ein bisschen Punkt 1)

Themen dieser Vorlesung

1. Einführung in die Mathematik (Logik, Mengen, Abbildungen, Kombinatorik)
2. Algebraische Strukturen (Gruppe, Ringe, Körper)
3. Vektorräume (Analytische Geometrie)
4. Matrizen und Determinanten
5. Lineare Gleichungssysteme

Unterstützende Quellen

- Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker (kostenlos aus dem HTW-Netz)
- M. Brill: Mathematik für Informatiker
- Jedes Buch über lineare Algebra.
- Essence of linear algebra, 3Blue1Brown, Youtube

Grundbegriffe der Logik

16. Oktober 2019

Motivation

Die Sprache ist vorrangiges Mittel der Menschheit zur Kommunikation. Elemente der Kommunikation:

- Sprechinhalt
- Gestik
- Mimik
- Sprachmelodie
- Kontext

All dies führt zu der Notwendigkeit der *Interpretation*.

Beispiel

"Doch, ich bin total froh, dass deine Mutter uns besuchen kommt."

Die Mathematik muss diese Probleme der Interpretation vermeiden → Syntax in Programmiersprachen.

1. Aussagenlogik

2. Prädikatenlogik

3. Beweisverfahren

Section 1

Aussagenlogik

Aussagenlogik

Aussagen in der Aussagenlogik sind immer entweder wahr("1","w") oder falsch("0","f").

Beispiele

"Der Mensch ist ein Reptil."$\rightarrow$ f
"$32 < 70$"$\rightarrow$ w
" Es gibt nur endlich viele Primzahlen."$\rightarrow$ f
"Der Brexit ist eine gute Idee."$\rightarrow$?
"$22 + 5$"$\rightarrow$ Keine Aussage.

Aussagenlogik

Aussageformen sind Ausdrücke mit Variablen (Platzhaltern), die durch das Einsetzen von Objekten zu Aussagen werden. Der Wahrheitswert der Aussage hängt dann von dem eingesetzten Objekt ab.

Beispiele

$x + 5 = 7$ $\rightarrow$ wahr für $x = 2$, falsch sonst.
x ist eine Primzahl. $\rightarrow$ Wahr für unendlich viele Werte.
x ist größer als y. $\rightarrow$ Wahr für $x =$ *Berlin* und $y =$ *Saarbrücken*.

Aussagen und Aussageformen kürzen wir oft mit Großbuchstaben ab (etwa $A, B, A(x)$ usw.). Wir wollen oft zeigen, dass gewisse Aussagen oder Aussageformen $A(x)$ für alle Einsetzungen von x wahr sind. $\rightarrow$ Beweis.

Verknüpfung von Aussagen

Wir können Aussagen auch miteinander verknüpfen um neue Aussagen zu erhalten.
Der *UND*-Operator ($\wedge$) ist für zwei Aussagen A, B definiert durch:
$A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A wahr ist und B wahr ist.

Beispiel

A : x ist ein Säugetier., B : x kann an Land nicht überleben.
$x =$ Kreuzspinne $\rightarrow A \wedge B$ ist falsch.
$x =$ Elefant $\rightarrow A \wedge B$ ist falsch.
$x =$ Hammerhai $\rightarrow A \wedge B$ ist falsch.
$x =$ Blauwal $\rightarrow A \wedge B$ ist wahr.

$\rightarrow$ $A \wedge B$ ist komplett durch die möglichen Wahrheitswerte von A und B definiert.

Wahrheitstabelle für UND

Wir können $\wedge$ also auch über eine sogenannte Wahrheitstabelle definieren:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Wir können also weitere Verknüpfungen von Aussagen durch ihre Wahrheitstabellen definieren.

Wahrheitstabelle für ODER

Die Wahrheitstabelle für ODER ($\vee$) hat folgende Gestalt.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Achtung: Das logische ODER ist, entgegen dem sprachlichen, nicht ausschließend, das heißt A und B *können* auch beide wahr sein.

Äquivalenz und Implikation

Etwas schwieriger sind die folgenden logischen Verknüpfungen:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Die Äquivalenz ist also genau dann wahr, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben $\rightarrow$ A ist wahr genau dann, wenn B wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Die Implikation ist die Formalisierung der Sprechweise: Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr (vgl. if-Anweisungen).

Details zur Implikation

- Die Implikation ist nicht symmetrisch: $A \Rightarrow B$ ist nicht das gleiche wie $B \Rightarrow A$.
- Wenn A falsch ist, ist $A \Rightarrow B$ immer wahr. ("Aus Falschem folgt Beliebiges.")
- $A \Rightarrow B$ ist nur falsch, wenn A wahr und B falsch ist. (" Aus Wahrem kann nichts Falsches folgen.)
- Die Implikation wird uns sehr häufig bei Beweisen über den Weg laufen.

Negation und XOR

Die Negation ($\neg$) ist definiert durch

A	$\neg A$
0	1
1	0

Sehr wichtig ist das Zusammenspiel der Negation mit anderen Verknüpfungen $\rightarrow$ Übungsblatt.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Das XOR (oder " exclusive or") ist eher eine Entsprechung des umgangssprachlichen " Oder". In der Mathematik wird es eher selten gebraucht.

Mehrere Verknüpfungen

Natürlich können auch mehr als zwei Aussagen verknüpft werden bzw. mehrere Verknüpfungen hintereinander geschaltet werden. Dann müssen Klammern gesetzt werden um die Reihenfolge der Verknüpfungen anzuzeigen.

Beispiele

- $A \wedge (B \wedge C)$
- $\neg(A \Leftrightarrow B)$
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Schauen wir uns das letzte Beispiel einmal genauer an.

Gleichwertigkeit von Formeln

Das Beispiel $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ lässt sich ebenfalls durch eine Wahrheitstabelle auswerten:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Was fällt auf? $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ hat die gleiche Wahrheitstafel wie $A \Leftrightarrow B$! Wenn zwei Formeln die gleiche Wahrheitstafel haben, nennen wir sie auch *gleichwertig* oder *logisch gleich*($F_1 = F_2$). Wir können dann eine durch die andere frei ersetzen.

Bemerkungen

- Mittels Wahrheitstabellen kann man insbesondere prüfen, ob logische Ausdrücke immer wahr sind und ob Formeln gleichwertig sind $\rightarrow$ automatisches Beweisen mit Computern.
- Die Verknüpfung logischer Ausdrücke ist grundlegend für den Bau von elektronischen Rechenanlagen in digitaler Technik (Gatter).
- Die Verknüpfungen gehorchen gewissen "Rechengesetzen", die Grundlage der *Booleschen Algebra* sind, z.B. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Diese wird in Informatik 1 behandelt.

Beispiele

Sei x eine ganze positive Zahl.

- "$x < 8 \Rightarrow x < 9$"$\rightarrow$ Immer wahr, also *mathematisch gültig*.
- "$x < 9 \Rightarrow x < 8$"$\rightarrow$ Falsch für $x = 8$.
- "$\neg(x < 7) \Leftrightarrow x \geq 7$"$\rightarrow$ Mathematisch gültig.
- "$(x \text{ ist Primzahl } \wedge x \text{ ist gerade }) \Leftrightarrow x = 2$"$\rightarrow$ Mathematisch gültig.

Section 2

Prädikatenlogik

Quantoren

Mit Hilfe von Quantoren können wir Aussageformen weiter präzisieren, sie bilden die Grundlage der Prädikatenlogik. Wir werden hauptsächlich (wenn überhaupt) zwei Quantoren verwenden:

- Der Allquantor $\forall x : A(x)$, gelesen: "Für alle x gilt $A(x)$"
- Der Existenzquantor $\exists x : A(x)$, gelesen: " Es existiert x, sodass $A(x)$ gilt. "
- (Der Eindeutigkeitsquantor $\exists!$, gelesen: " Es existiert genau ein")

In Aussagen tauchen diese Quantoren häufiger vor; wir werden aber von der Verwendung der Symbole größtenteils absehen.

Beispiele

- $\forall x : x$ ist Produkt von endlich vielen Primzahlen.
  - Gelesen: Für alle x gilt: x ist Produkt von endlich vielen Primzahlen.
- $\exists x : x > 1000$
  - Gelesen: Es existiert ein x, sodass: $x > 1000$
- $\forall x \exists y : x < y$
  - Gelesen: Für alle x existiert ein y, sodass gilt: $x < y$.

Achtung: Die Reihenfolge der Quantoren ist wichtig!

Negation von Quantoren

Wollen wir eine Aussage, die einen Quantor beinhaltet negieren, so "ziehen wir die Negation durch die gesamte Aussage". Dabei:

- wird der Allquantor zum Existenzquantor und umgekehrt
- wird eine Aussage A zu $\neg A$.

Zum Beispiel: $\neg(\forall x \exists y : x < y) = \exists x \forall y : x \geq y$.

Section 3

Beweisverfahren

Mathematisches Beweisen

Angenommen, wir haben eine Aussage A oder eine Aussageform $A(x)$.
Beweis: Zeigen, dass A wahr ist, bzw. $A(x)$ wahr ist für jede Einsetzung. ("Mathematisch gültig")
Achtung: Beweise kann (und sollte) man üben!

Hilfreiche Methoden beim Beweisen

- Sich alle Definitionen genau klarmachen
- Alles hinschreiben, was man weiß
- Hinschreiben, wo es hin gehen soll
- Im Skript nach passenden Sätzen schauen
- Mit anderen darüber reden
- Herumprobieren!

Der letzte Punkt ist mit Abstand der wichtigste!

Der direkte Beweis

Betrachte die Implikation:

Sind x und y gerade Zahlen, dann ist auch $x + y$ gerade.

Beweis.

x gerade: $x = 2n$ für eine Zahl n. Genauso: $y = 2m$.
Wir wollen zeigen: $x + y = 2k$ für eine Zahl k. Also:

$$x + y = 2n + 2m = 2(n + m).$$

Mit $k = n + m$ erhalten wir das Ergebnis. $\square$

Das Kästchen zeigt an, dass der Beweis beendet ist.

Die Kontraposition

Beruht auf der logischen Gleichheit $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
Aussage:

Ist x^2 ungerade, so ist auch x ungerade.

Beweis.

Zeige stattdessen: Ist x gerade, so ist x^2 gerade. Also:

$$x = 2m \Rightarrow x^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2).$$

Mit $k = 2m^2$ gilt also $x^2 = 2k$. □

Oftmals kann die Kontraposition leichter zu zeigen sein.

Beweis durch Widerspruch

- Will zeigen: Aussage A ist wahr.
- Nehme an: Aussage $\neg A$ ist wahr.
- Führe dies zu einem Widerspruch.
- $\neg A$ ist falsch, also ist A wahr.

Beweis durch Widerspruch: Beispiel

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, d.h. es gibt keine Zahlen p, q sodass, $(\frac{p}{q})^2 = 2$ ist.

Beweis.

Angenommen, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ und der Bruch ist perfekt gekürzt. Dann gilt $2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $2q^2 = p^2$. Also ist p^2 eine gerade Zahl, dann muss auch $p = 2n$ eine gerade Zahl sein. Dann gilt aber $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4n^2}{2} = 2n^2$. Also ist auch q^2 und damit auch q eine gerade Zahl. Widerspruch zu: $\frac{p}{q}$ perfekt gekürzt. $\square$

Beweis durch Widerspruch kann sehr mächtig und praktisch sein!

Äquivalenzen

Wir haben gesehen: $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Um also eine Äquivalenz (eine genau dann, wenn-Aussage) zu zeigen:

- Zeige $A \Rightarrow B$ (Hinrichtung)
- Zeige $B \Rightarrow A$ (Rückrichtung)

Beispiel

x ist eine gerade Zahl genau dann, wenn x^2 eine gerade Zahl ist. Zeige also:

- x ist eine gerade Zahl, dann ist x^2 eine gerade Zahl.
- x^2 ist eine gerade Zahl, dann ist x eine gerade Zahl.

Der Ringschluss

Beweisen von $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n$:

- Zeige $A_1 \Rightarrow A_2$
- Zeige $A_2 \Rightarrow A_3$

$\vdots$

- Zeige $A_{n-1} \Rightarrow A_n$
- Zeige $A_n \Rightarrow A_1$

Die Reihenfolge der Aussagen kann hier beliebig gewählt werden. Wichtig ist nur von jeder Aussage zu jeder Aussage kommen zu können.

Letzte Folie

Jetzt kann man nur noch eines sagen: Üben, üben, üben!$\rightarrow$ Übungsblätter!