Studiengang:

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prozentwert:

Note:

Sitzplatznummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1

Sei $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ ist gerade} \\ -\dfrac{n+1}{2}, & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$

a) Ist f injektiv? Begründen Sie!

b) Ist f surjektiv? Begründen Sie!

Hinweis: 0 ist gerade.

Aufgabe 2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung $\circ$ gemäß $a \circ b := |a-b|$ gegeben. Untersuchen Sie, welche der Gruppenaxiome G1 bis G4 gelten.

Aufgabe 4

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Längen von $\vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$.

b) Bestimmen Sie a so, dass die 3 Vektoren ein Dreieck bilden.

c) Bestimmen Sie a so, dass $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ senkrecht aufeinander stehen.

d) Berechnen Sie für $a = -7$ das Spatprodukt $\left\langle \vec{v_1} \times \vec{v_2}, \vec{v_3} \right\rangle$.

Aufgabe 5

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $\det(a)$ in Abhängigkeit von a.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A nicht invertierbar?

Aufgabe 6

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie, für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ das LGS

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

- eine eindeutige Lösung
- eine mehrdeutige Lösung
- keine Lösung

besitzt.

b) Lösen Sie das LGS für $b = -1$ und $a = 2$.

c) Bestimmen Sie für $b = -1$ die Inverse A^{-1}.