Klausur Mathematik 1

Name	Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

A1	A2	A3	A4	A5	A6

Punkte	Prozent	Note	Einsichtnahme

- Erlaubte Hilfsmittel: **Drei handbeschriebene A4 Blätter**.
- Verwenden Sie dokumentenechte nichtrote Stifte.
- Die Lösungswege sind vollständig mit allen nötigen Erklärungen auszuführen. Verwendete Sätze oder Ergebnisse aus der Vorlesung oder den Übungsblättern sind anzugeben. Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Lassen Sie auf jeder Seite links und rechts, oben und unten 2.5 cm Rand für Korrekturen.
- Legen Sie während der Klausur ihren Studierendenausweis zur Einsicht bereit.
- Geben Sie alle Schmier- und Hilfsblätter mit ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f((x,y)) := x + y$ auf Injektivität und Surjektivität.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Aufgabe 2 Es sei $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und eine Verknüpfung auf G definiert durch $x * y = x + y + xy$.

a) Zeigen Sie, dass G abgeschlossen ist bezüglich $*$.
Hinweis: Schreiben Sie $x + y + xy = -1$, nehmen Sie an, dass $x \neq -1$ ist und zeigen Sie, dass dann $y = -1$ gelten muss.

b) Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist mit neutralem Element 0 und zu $x \in G$ inversem Element $x^{-1} = -\frac{x}{x+1}$.

Aufgabe 3

a) Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren mit $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2.$$

b) Es seien für $k \in \mathbb{R}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$. Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren linear abhängig?

Aufgabe 4

Es seien die Vektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Schreiben Sie die kanonischen Basisvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$.

b) Es sei ϕ eine lineare Abbildung mit

$$\phi(\vec{v_1}) = \vec{v_2}, \quad \phi(\vec{v_2}) = \vec{v_1} - \vec{v_2}, \quad \phi(\vec{v_3}) = \vec{v_1} + \vec{v_2}.$$

Berechnen Sie $\phi(\vec{e_i})$ für $i = 1, 2, 3$ mit Hilfe ihrer Ergebnisse aus a) und stellen Sie die Abbildungsmatrix A_ϕ von ϕ auf.

c) Es sei eine Matrix B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von B. Was können Sie über die Dimension von Kern und Bild von der Abbildung aussagen, die B als Abbildungsmatrix hat?

Aufgabe 5

Es sei die quadratische Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?

Aufgabe 6

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 7 \\ 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 12t \\ 12t + 7 \\ 7t + 8 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

a) Für welche t ist das Gleichungssystem eindeutig/mehrdeutig/nicht lösbar? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Berechnen Sie die Lösung(en) des Gleichungssystems für $t = -1$.