Studiengang:

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prozentwert:

Note:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion)

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(3\cdot k-2)=\frac{3\cdot n^2-n}{2}.$$

b) Um welchen Wert unterscheidet sich der Term $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot k-2$ für eine natürliche Zahl n von der Summe aus a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Gruppenaxiome)

Die Menge M bestehe aus allen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit reellen Zahlen a und b, wobei $a^2+b^2=1$ gilt. Die Elemente werden mit der Verknüpfung $\bullet$ betrachtet, die die übliche Matrizenmultiplikation darstellt.

a) Zeigen Sie, dass M bzgl. $\bullet$ abgeschlossen ist, d. h., dass die Matrizenmultiplikation zweier Elemente aus M als Ergebnis stets ein Element aus M liefert.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ die Inverse zu einem Element $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist und erläutern Sie, dass die Inverse zu M gehört.

c) Wie kann man einfach begründen, dass auch die Gruppenaxiome „Existenz eines neutralen Elements in M“ und „Assoziativgesetz“ erfüllt sind, so dass $(M,\bullet)$ eine Gruppe bildet?

Aufgabe 3 (Lineare Algebra)

a) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Es gelte $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$ und $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Welche Bedingung müssen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dann erfüllen?

b) Für welche Werte k sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3-k\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3-k\end{pmatrix}$ linear abhängig?

Aufgabe 4 (Matrixoperationen)

Gegeben sei die Matrix $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{B} = 3\mathrm{A}^{-1} + 3\mathrm{A} - 2\mathrm{E}$, mit E als zugehöriger Einheitsmatrix.

b) Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4. Welche Gestalt hat vermutlich A^n ?

Aufgabe 5 (Determinante)

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (Lineare Gleichungssysteme)

Es sei das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte des Parameters a besitzt das Gleichungssystem Lösungen? Geben Sie jeweils den Lösungsvektor $\vec{x}$ an.