ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Уравнение от вида $\boldsymbol{y' + A(x)y = f(x)}$, се нарича **линейно**. Неговото решение се задава с формулата:

$$\boldsymbol{y = e^{-\int A(x)dx}\left(C + \int f(x)e^{\int A(x)dx}dx\right)}$$

1. **Решете линейните диференциални уравнения:**

1.1. $y' - y = e^x$

Решение:

$$y' - y = e^x$$

Определяме функциите $A(x)$и $f(x)$:

$$y' - y = e^x$$

Определяме функциите $A(x)$и $f(x)$:

$A(x) = -1;\ f(x) = e^x$

$$\boldsymbol{y = e^{-\int A(x)dx}\left(C + \int f(x)e^{\int A(x)dx}dx\right)}$$

$$\int dx = x + C$$

$$y = e^{-\int(-1)dx}\left(C + \int e^x e^{\int(-1)dx}dx\right) =$$

$$= e^{\int dx}\left(C + \int e^x e^{-\int dx}dx\right)$$

$$= e^x\left(C + \int e^x e^{-x}dx\right)$$

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

$$y = e^x\left(C + \int dx\right) = e^x(C + x)$$

$y' + y = x$

Определяме функциите $A(x)$и $f(x)$:

$$A(x) = 1; f(x) = x$$

$$\boldsymbol{y = e^{-\int A(x)dx}\left(C + \int f(x) e^{\int A(x)dx} dx\right)}$$

$$y = e^{-\int dx}\left(C + \int x e^{\int dx} dx\right) =$$

$$= e^{-x}\left(C + \int x e^{x} dx\right) =$$

$$= e^{-x}\left(C + \int x de^{x}\right) =$$

$$= e^{-x}\left(C + x e^{x} - \int e^{x} dx\right) =$$

$$= e^{-x}(C + x e^{x} - e^{x}) =$$

$$= Ce^{-x} + x - 1$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= e^{-x}\left(C + x e^{x} - \int e^{x} dx\right)$$

$$= e^{-x}(C + x e^{x} - e^{x})$$

$$\boxed{= e^{-x}.C + x}$$

$$= Ce^{-x} + x - 1$$

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ НА БЕРНУЛИ

Уравнение от вида $\boldsymbol{y' + A(x)y = f(x)y^m}$**,** където $m \neq 0, m \neq 1$ се нарича **диференциално уравнение на Бернули**. Неговото решение се свежда до решаване на линейно уравнение.

1. Решете диференциалните уравнения на Бернули:

1.1. $y' - \frac{2y}{x} = 2x^2\sqrt{y}$

Решение:

$$y' - \frac{2y}{x} = 2x^2\sqrt{y} \quad /:\sqrt{y}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2y}{x\sqrt{y}} = 2x^2$$

Полагаме $\sqrt{y} = z$, намираме първата производна.

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{y})' = z'$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = z'$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$$

Заместваме в уравнението:

Полагаме $\sqrt{y} = z$, намираме първата производна.

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{y})' = z'$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = z'$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$$

Заб. $\left(\sqrt{x^2+2x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}(x^2+2x)' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Заместваме в уравнението:

$$2z' - \frac{2z}{x} = 2x^2 \quad /:2$$

Определяме функциите $A(x)$и $f(x)$:

$$A(x) = -\frac{1}{x}; f(x) = x^2$$

$$\boldsymbol{z = e^{-\int A(x)dx}\left(C + \int f(x)e^{\int A(x)dx}dx\right)}$$

$$z = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(C + \int x^2 e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx\right)$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int x^2 e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right)$$

Нека x>0

$$= e^{lnx}\left(C + \int x^2 e^{-lnx}dx\right)$$

$$lnx = p => e^p = x => e^{lnx} = x$$

$$z = x\left(C + \int x^2 x^{-1}dx\right) = x\left(C + \int xdx\right) =$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int x^2 e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right)$$

Нека x>0

$$= e^{lnx}\left(C + \int x^2 e^{-lnx}dx\right)$$

$$lnx = p => e^p = x => e^{lnx} = x$$

$$e^{-lnx} = (e^{lnx})^{-1} = x^{-1}$$

$$z = x\left(C + \int x^2 x^{-1}dx\right) = x\left(C + \int xdx\right) =$$

$$= x\left(C + \frac{x^2}{\cdot}\right) = Cx + \frac{x^3}{\cdot}$$

ЛИНЕЙНИ ХОМОГЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ

Уравнение от вида: $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$, където $a \neq 0$, се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти. Неговото характеристично уравнение е следното:

$$\boldsymbol{at^2 + bt + c = 0}$$

I	D > 0,	$Y = Ae^{t_1.x} + Be^{t_2.x}$,	$\boldsymbol{t_1 \neq t_2}$
II	$D = 0$,	$Y = Ae^{t_1.x} + Bxe^{t_1.x}$,	$\boldsymbol{t_1 = t_2}$
III	$D < 0$,	$Y = e^{\alpha.x}(Acos\beta x + Bsin\beta x)$,	$\boldsymbol{t_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i}$

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$a = 1, b = -6, c = 5$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4.1.5$$

$$D = 16 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = 1;\ t_2 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$t_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};\ t_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$Y = Ae^{t_1.x} + Be^{t_2.x}$$

$$Y = Ae^{\frac{5-\sqrt{17}}{4}x} + Be^{\frac{5+\sqrt{17}}{4}.x}$$

$$2a \qquad 8 \qquad 2$$

$$Y = Ae^{t_1.x} + Bxe^{t_1.x}$$

$$Y = Ae^{-\frac{1}{2}.x} + Bxe^{-\frac{1}{2}.x}$$

$$Y = e^{-\frac{x}{2}}(A + Bx)$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$t^2 - 2t + 2 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8$$

$$D = -4 < 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad \sqrt{-1} = i$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$t_{1,2} = 1 \pm 1.i$$

$$t_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$\alpha = 1; \; \beta = 1$$

$$Y = e^{\alpha.x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

$$Y = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$$

1.7. $y'' - y' = 0$

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t_1 = 0;\ t_2 = 1$$

$$Y = Ae^{t_1.x} + Be^{t_2.x}$$

$$Y = Ae^{0.x} + Be^{1.x};\ e^0 = 1$$

$$Y = A + \mathrm{B}e^x$$

..6. $y'' - y' + y = 0$

$$t^2 - t + 1 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\qquad \sqrt{-1} = i$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \alpha \pm \beta i$$

$$\alpha = \frac{1}{2};\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.8. $y'' + 4y = 0$

$$t^2 + 4 = 0$$
$$t^2 = -4$$
$$t_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm\, 2i$$
$$\alpha = 0;\ \beta = 1$$
$$Y = e^{\alpha.x}(Acos\beta x + Bsin\beta x)$$
$$Y = e^0(Acosx + Bsinx) = Acosx + Bsinx$$
$$e^0 = 1$$

Намираме корените на характеристичното уравнение

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$a = 1, b = -5, c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.4 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm3}{2}$

=> $t_1 = \frac{5-3}{2} = 1,\ t_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

$\boldsymbol{Y = Ae^{t_1x} + Be^{t_2x}}$

$Y = Ae^x + Be^{4x}$

Търсим частното решение $\eta = x^kP_n(x)e^{\alpha x}$

В дясната страна на уравнението имаме функцията:

$$f(x) = 7e^x,$$

където числото $\alpha = 1$ при експоненциалната функция е еднократен корен на характеристичното уравнение, следователно $k = 1$.

За частното решение $\eta = x^kP_n(x)e^{\alpha x}$ получаваме:

$\eta = x^1ae^x = axe^x; a -$ константа

Намираме първата и втората частни производни на функцията η:

$$\eta' = (axe^x)' = ae^x + axe^x$$
$$\eta'' = (ae^x + axe^x)' = ae^x + ae^x + axe^x = 2ae^x + axe^x$$

заместваме в диференциалното уравнение:

$$\eta'' - 5\eta' + 4\eta = 7e^x$$
$$2ae^x + \cancel{axe^x} - 5ae^x - \cancel{5axe^x} + \cancel{4axe^x} = 7e^x \quad /e^x$$
$$-3a = 7$$

$$a = -\frac{7}{3}$$

$$\eta = -\frac{7}{3} x e^{x}$$

$$y = Y + \eta = Ae^{x} + Be^{4x} - \frac{7}{3} x e^{x}$$

pepi031087@gmail.com