БРОЙНИ СИСТЕМИ

1. ОСНОВНИ БРОЙНИ СИСТЕМИ

1.1. ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Въпреки, че съществуват много бройни системи NUMBER SYSTEMS, ние ще сезанимаваме с четири. Те са:
Десетична система, която ползува за основа числото 10; Двоична система, която ползува за основа числото 2; Осмична система, която ползува за основа числото 8; Шестнайсетична система, която ползува за основа числото 16;

Тези системи са широко използувани в цифровите системи и компютрите.

Ние ще разглеждаме двоичните, осмичните и шестнайсетичните бройнисистеми като ги сравним с нашата много добре позната десетична система.

1.2. ДЕСЕТИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА.

В десетичната бройна система числата са представени чрез цифрите от 0 до 9 и чрез даване на стойност на цифровата позиция. Така десетичното цяло число 537 е получено от: $5x10^2 + 3x10' + 7x10°$
Различните цифрови позиции на ляво в десетичното число са с нарастващи степени на 10.

Хиляди	Стотици	Десетици	Единици
10^3	10^2	10^1	10^0

Както знаем дадено число може да се представи с десетични знаци. За дробни числа прилагаме подобна стойност (приложение), цифри зад десетична точка са записани в отрицателна степен на 10.

ПРИМЕР: $2786{,}134_{10}$ може да се смята като:

$2x10^3 + 7x10^2 + 8x10^1 + 6x10^0 + 1x10^{-1} + 3x10^{-2} + 4x10^{-3}$

Десетичната система е казано да има основа или база 10, защото тя използува 10 цифри и съседни цифрови позиции различаващи се на една степен на 10.

За едно число знакът използуван за долен индекс, който показва каква е основата (базата) се записва по следния начин:

123_{10} означава десетичното число 123;

11011_2 означава двоично число 11011;

567_8 означава осмичното число 567;

1.3. ДВОИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА.

Двоичната система използува само две цифри 0 и 1, но точно същите основни принципи се прилагат както за десетичната бройна система. Всяка съседна цифрова позиция (бит) се различава със степен на 2. Така двоичното число 10110_2 може да бъде написано като:

2^4	2^3	2^2	2^1	2°
16	8	4	2	1
1	0	1	1	0

или като $1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0$

Десетичният еквивалент на двоичното число лесно се получава чрез сумиране заедно различните степени на две за числото.

$1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22_{10}$

Опитайте един или два примера самостоятелно:

ЗАДАЧИ: Преобразувайте следните двоични числа в техния десетичен еквивалент.

а) 101_2 Отг. 5_{10}

б)1111_2 Отг. 15_{10}

в) 100111_2 Отг. 39_{10}

1.4. ОСМИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА.

Тази система използува осем за основа или база.така че всяка цифрова позиция е степен на 8.

8^3	8^2	8^1	8^0	8^{-1}	8^{-2}	8^{-3}
512	64	8	1	1/8	1/64	1/512

ПРИМЕР: Така осмичното число 56_8 може да бъде преобразувано в десетично като:

$56_8 = 5x8^1 + 6x8^0 = 5x8 + 6\ 8^0 = 40 + 6 = 46_{10}$

ПРИМЕР: Аналогично и за осмичното 777_8 десетичният еквивалент е:

$777_8 = 7x8^2 + 7x8^1 + 7x8^0 = 7x64 + 7x8 + 7= 448 + 56 + 7 = 511_{10}$ '

1.5. ШЕСТНАЙСЕТИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА.

Тази система използува шестнадесет за основа или база, така че всяка цифрова позиция е степен на 16. Тъй като тази основа използува повече от 10 символа, първите 6 букви от английската азбуката се използуват да представят числата от 10 до 15.

10 = A; 13= D;
11 = B; 14 = E;
12 = C; 15= F.

Таблицата по-долу показва десетичните, двоични, осмични и шестнадесетични еквиваленти на първите 21 десетични числа.

Десетични Двоични Осмични Шестнадесетични

0	00000	00	0
1	00001	01	1
2	00010	02	2
3	00011	03	3
4	00100	04	4
5	00101	05	5
6	00110	06	6
7	00111	07	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

Десетични еквиваленти от шестнадесетични числа получаваме аналогично

$567_{16} = 5x16^2 + 6x16^1 + 7x16^0 = 5x256 + 6x16 + 7 = 1280 + 96 + 7 = 1383_{10}$

$FAB4_{16} = Fx16^3 + Ax16^2 + Bx16^1 + 4x16^0 = 15x16^3 + 10x16^2 + 11x16^1 + 4x16^0 = 15x4096 + 10x256 + 11x16 + 4x1 = 61440 + 2560 + 176 + 4 = 64180_{10}$

ЗАДАЧА: Преобразувайте шестнадесетичното число B65F в десетично самостоятелно

Отг. 46687_{10}

Трябва да отбележим, че двоичната система изисква около три пъти повече цифри, за да дефинира числото в сравнение с другите (осмична и шестнадесетична), като използва два символа 0 и 1. Тя се използва вътре в цифровия компютър, а другите две при обмена човек компютър.

2.ОСНОВНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ

Ние вече видяхме как да преобразуваме двоична, осмична и шеснадесетична система в десетична.

Сега ще разгледаме как да преобразуваме десетично число в двоично.

2.1. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ДЕСЕТИЧНО ЧИСЛО В ДВОИЧНО

2.1.1. Цяло десетично число

Десетично в двоично преобразуване се прави чрез повтарящо се деление на 2. Това е демонстрирано със следния пример.

ПРИМЕР: Преобразувай десетичното число 182 в двоично

Числото се дели на 2 и остатъкът ако има такъв се записва успоредно. Резултатът от делението (частното) се записва отдолу и процесът продължава, докато цялата част на частното стане равна на 0. Двоичното число се намира чрез получената редица от остатъците, като то е с най-младшия значещ бит (LSB) на върхана редицата от получените остатъци от делението с 2.

182:2	остатък	0
91:2	остатък	1
45:2	остатък	1
22:2	остатък	0
11:2	остатък	1
5:2	остатък	1
2:2	остатък	0
1:2	остатък	1

Така $182_{10} = 10110110_2$

За всяко преобразуване една валидна проверка бе се осъществила веднага. И така използувайки преобразуването на двоичното число в десетично ние имаме:

$$1x2^7 + 0x2^6 + 1x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 =$$

$$= 128 + 0 + 32 + 16 +0 + 4 + 2 +0 = 182_{10}$$

ЗАДАЧА: Опитай самостоятелно преобразуването на десетично 93 в двоично и провери твоя резултат.

отг. 1011101_2

2.2. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ДВОИЧНО ЧИСЛО В ОСМИЧНО И ОБРАТНО

2.2.1. Преобразуване на цяло двоично число в осмично

Двоичното число се разделя на групи от три бита започвайки от младшия разряд до края на числото и се записва съответният осмичен еквивалент на групите от три бита.

ПРИМЕР: $11101011100111_2 = 11\ 101\ 011\ 100\ 111_2 = 35347_8$

3 5 3 4 7

ЗАДАЧА: Преобразувай двоичното число 1101010110111_2 в осмично. Отг. 15267_8

2.2.2. Преобразуване на цяло осмично число в двоично

Този процес е обратен на описания в точка 2.2.1. Всяко осмично число се заменя с неговия три битов двоичен еквивалент. Така, че числото

12345_8=	1	2	3	4	5_8=1010011100101_2
	001	010	011	100	101

2.2.3. Преобразуване на дробно двоично число в осмично

Тази процедура е много сходна на тази за цели числа (2.2.1). Двоичното дробно число се разделя на групи от три бита започвайки от двоичната точка и движещ на дясно. Всяка група от три бита се преобразува в еквивалентен осмичен знак.

ПРИМЕР:

Преобразувай $0{,}1101010_2$ в осмично и провери преобразуването чрез замяна на двете осмично и двоично числа в десетично.

Групирайки двоичното число в тройки от десетичната точка на дясно ние имаме 0,110.101 и тогава заменяйки групите от три бита с осмичния еквивалент ние получаваме

0,110 101 =$0{,}65_8$ и така $0{,}1101010_2 = 0{,}65_8$

6 5

ПРОВЕРКА: $0{,}1101010_2 = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}0625 + 0{,}015625 = 0{,}828125_{10}$

$0{,}65_8 = 6x1/8 + 5x1/64 = 6x0{,}125 + 5x\ 0{,}015625 = 0{,}828125_{10}$

ЗАДАЧА:

Преобразувай $0{,}01010111_2$ в осмично и провери твоя резултат.

Отг. $0{,}256_8$ и $0{,}33984375_{10}$

2.3. ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ДВОИЧНО ЧИСЛО В ШЕСТНАДЕСЕТИЧНО И ОБРАТНО

2.3.1. Преобразуване на цяло двоично число в шестнадесетично

Този процес е аналогичен на преобразуването от двоично число в осмично (точка 2.2.1). Двоичното число се разделя на групи от четири бита започвайки от младшия разряд до края на числото и се записва съответният шестнадесетичен еквивалент на групите от четири бита.

ПРИМЕР: Преобразувай 11101011100111_2 в шестнадесетично. Раздели числото в групи започвайки от младшия разряд на ляво до края.

= 11 1010 1110 0111_2 (двоична в групи от четири)

3	10	13	7	(десетична)
3	A	E	7	(шестнадесетична)

Така 11101011100111_2= $3AE7_{16}$

ЗАДАЧА: Преобразувай двоичното число 111110110111111_2 в шестнадесетично.

Отг. $7DBF_{16}$

2.3.2. Преобразуване на цяло шестнадесетично число в двоично

Отново този процес е обратен на описания в точка 2.3.1. Всяко шестнадесетично число се заменя с неговия четири битов двоичен еквивалент.Така.чечислото

$E3A5_{16}=$ E 3 A 5_{16} $=1110001110100101_2$

1110 0011 1010 0101

ЗАДАЧА: Преобразувай шестнадесетично число $6CAE_{16}$ в двоично

Отг. 110110010101110_2

2.3.3. Преобразуване на дробно двоично число в шестнадесетично

Тази процедура е логическо продължение на метода използуван за цели числ (2.3.1). Двоичното дробно число се разделя на групи от четири бита започвайки с двоичната точка и движещ на дясно. Всяка група от четири бита се преобразува еквивалентен шестнадесетичен знак.

П РИМЕР: Преобразувай двоичното число $0{,}010101110_2$ в шестнадесетично

Групирайки двоичното число в четворки от десетичната точка на дясно ни имаме 0,0101 0111 0000 и тогава заменяйки групите от четири бита шестнадесетичен еквивалент ние получаваме $0{,}570_{16}$ и така $0{,}010101110_2 = 0{,}57_{16}$

ЗАДАЧА: Преобразувай двоичното число по-долу в шестнадесетично.

1 $1111011010{,}11111111000111_2$ Отг. $7DA{,}FF1C_{16}$

С тези знания преобразуванията между двоична, десетична, осмична и шестнадесетична системи са лесни да се направят.

3. АРИТМЕТИЧНИ ОПЕРАЦИИ

По принцип тези операции се извършват по същият начин, както обичайната десетична аритметика. По-особено е само формирането на преноса към по-старшия разряд при събиране и заемането от по-старши разряд при изваждане.

3.1 СЪБИРАНЕ

Числата се събират поразредно, като в резултат на събирането на і-тите разреди на двете събираеми се получава і-тият разред на сумата им. 3.1.1. Двоично събиране

Двоичната аритметика е бърза и лесна тъй като събиранията могат да бъдат само четири вида:

0+0=0

1+0=1

0+1=1

1+1=0 пренос (carry) 1

Сума (Sum)

Забележете връзката между тази таблица за събиране и таблицата на истинност за елемента Изключващо ИЛИ (EXOR).

Тъй като имаме само две цифри 0 и 1, пренос се случва твърде често. ПРИМЕР: Да се съберат трите двоични числа и да се направи проверка чрез десетично събиране.

11011	27
+10011	+19
11000	24
1000110_2	70_{10}

3.1.2. Осмично събиране

Тук трябва да се помни, че пренос 1 към по-старши разряд се подава, когато сумата е по-голяма или равна на 8.

ПРИМЕР: Да се съберат двете осмични числа и да се направи проверка, чрез десетично събиране.

71_8	57_{10}
$+25_8$	$+21_{10}$
116_8	78_{10}

ЗАДАЧА: Както обикновено опитай самостоятелно следното

Събери осмичното число 625 с осмичното число 773 и провери твоя резултат. Отг.1620_8, което е еквивалентно на 912_{10}

3.1.3**.** Шестнадесетично събиране

Тук трябва да се помни, че пренос 1 към по-старши разряд се подава, когато сумата е по-голяма или равна на 16.

ПРИМЕР: Да се съберат двете шестнадесетични числа и да се направи проверка чрез десетично събиране.

$BC67_{16}$	48231_{10}
$+594A_{16}$	$+22858_{10}$
$115B1_{16}$	71089_{10}

Шестнадесетично събиране извършваме започвайки от най-младшия значещ разряд на двете числа, в случая 7 плюс A = 7 +10 = 17 , което е 16 +1, следователно сумата , която ще запишем като резултат е 1 и пренос също 1 ще добавим към следващата колона. В тази колона ние имаме 6 + 4 +1 (пренос) = 11 = B, следователно сумата , която ще запишем като резултат е B и няма пренос. В следващата колона имаме C + 9 = 12 + 9 = 21 = 16 + 5, следователно записваме 5 за сума и пренос 1. В финалната колона ние имаме B + 5 + 1 (пренос) = 11 + 5 + 1 = 17 = 16 + 1, следователно записваме 1 за сума и пренос 1. И така резултатната сума е$115B1_{16}$

ЗАДАЧА: Както обикновено опитай самостоятелно следното

Събери шестнадесетичното число ABC с шестнадесетичното число 789 и провери твоя резултат.

Отг. 1245_{16}

3.2. УМНОЖЕНИЕ

За умножение на две числа в произволна позиционна система се прилагат правилата за умножение при десетичната система, като за улеснение се използува таблицата за умножение в съответната система. 3.2.1. Умножение на цели двоични числа

Умножителната двоична таблица не би поставяла проблеми, тъй като тя заема само четири реда:

0 . 0 = 0; 0 . 1 = 0 ; 1 . 0 = 0; 1 . 1 = 1

Забележете връзката между тази таблица за умножение и Булевата функция И.

За умножение на числа в двоична система може да се използува едно от следните правила:

1) Умножаването на двете числа се започва от най-младшия разред на множителя. Ако този разред е 1, записва се множимото, а ако е 0, се записва един ред от нули. При 1 в следващия разред на множителя се преписва множимото, изместено с един разред вляво, а при 0 се записва ред нули, също изместени с един разред вляво. След това се преминава към следващия разред и т. н.

2) Умножаването на двете числа се започва от най-старшия разред на множителя. Ако този разред е 1, записва се множимото, а ако е 0, се записва един ред от нули. При 1 в следващия разред на множителя се преписва множимото, изместено с един разред вдясно, а при 0 се записва ред нули, също изместени с един разред вдясно. След това се преминава към следващия разред и т. н.

ПРИМЕР: Извърши умножението на двете двоични числа

```
      1010
         1
         x
     11010
 ---------
 101010000
   1010100
         0
    101010
 ----------
1000100010
```

Десетичният еквивалент е 21 x 26 = 546

ЗАДАЧИ: Бройни Системи

1. В каква БС 2*2=100?
2. В каква БС 2 * 2 = 10?
3. В каква БС 2*2=11?
4. В каква БС 4 * 4 = 31?
5. В каква БС 3 * 3 = 10?
6. Вярно ли е равенството 7 + 8 = 16 ?
7. В каква БС 71 – 36 = 33?

8. В коя бройна система 21 + 24 = 100?
9. В коя бройна система 20 + 25 = 100?
10. В коя бройна система 22 + 44 = 110?
11. Ако 4 * 4 = 20, то на какво е равно 5 * 5 (в същата бройна система).
12. Подредете по възходящ ред: 1001, 111, 010, 100, 1101, 10001.
13. Аз завърших университета на 44 години.След една година станах 100-годишен млад човек и се ожених за 34-годишна девойка. Незначителната разлика във възрастта ни – всичко -11 години помага за това да имаме общи мечти и интереси. След немного години аз вече имах едно малко семейство от 10 деца. С какво се обяснява странното противоречие? Възстановете истинския смисъл на числата.
14. ***«1101 ноября этого года в маленьком городке Тиб, по улице 101 - Авеню в доме 111 квартира 10101 было совершено громкое преступление. У юного 1001-летнего художника были украдены 11 картин. Пострадавший оценил стоимость похищенного в 100100 рублей, сюда вошли стоимость за краски, цветные карандаши, и альбом.» Възстановете истинските данни***
15. Дадено е $a=D7_{16}$, $b=331_8$. Кое число c, записано в двоична бройна система, отговаря на условието a<c<b?

1) 11011001 2) 11011100 3) 11010111 4) 11011000

16. На какво е равна сумата от числата 43_8 и 56_{16}?

1) 121_8 2) 171_8 3) 69_{16} 4) 1000001_2

17. Десетичното число 59 е еквивалентно на числото 214 в дадена бройна система. Намерете основата на тази система.
18. В каква БС 33_{10} ще се запише като 53?
19. В каква БС 23_{10} ще се запише като 212?
20. В каква БС 42_{10} ще се запише като 52?
21. В каква БС 71 – 36 = 33?
22. Запишете в троична БС текущата година.
23. $111110_2+10010_2+101_2=$
24. $10101_2+10110_2+111_2$
25. $265_8+765_8=$
26. $66666_8+6666_8=$
27. $FAD_{16}+65_{16}+CD_{16}=$
28. $9999_{16}+356D_{16}=$
29. $111110_2-10010_2-101_2$
30. $10101_2-10110_2-111_2$
31. $1265_8-765_8=$
32. $54321_8-666_8=$
33. $FAD_{16}-CD_{16}=$
34. $99999_{16}-356D_{16}=$
35. $111010_2+10110_2+110_2=$

36. $10111_2+11111_2+100_2=$
37. $565_8+777_8=$
38. $7777_8+6666_8=$
39. $F6AD_{16}+85_{16}+C1D_{16}=$
40. $AAA_{16}+356D_{16}=$
41. $111010_2-10110_2-110_2=$
42. $10111_2-11111_2-100_2=$
43. $4565_8-777_8=$
44. $7777_8-6666_8=$
45. $F6AD_{16}-C1D_{16}=$
46. $FAAA_{16}-356D_{16}=$
47. Запишете първите 20 цели числа в десетична, двоична, троична, петична и осмична бройни системи
48. Кои цели числа следват след числата:

а) 1_2;	е) 1_8;	л) F_{16};
б) 101_2;	ж) 7_8;	м) $1F_{16}$;
в) 111_2;	з) 37_8;	н) FF_{16};
г) 1111_2;	и) 177_8;	о) $9AF9_{16}$;
д) 101011_2;	к) 7777_8;	п) $CDEF_{16}$?

49. Кои цели числа предшестват числата:

а) 10_2;	е) 10_8;	л) 10_{16};
б) 1010_2;	ж) 20_8;	м)20_{16};
в) 1000_2;	з) 100_8;	н) 100_{16};
г) 10000_2;	и) 110_8;	о) $A10_{16}$;
д) 10100_2;	к) 1000_8;	п) 1000_{16} ?

50. На коя цифра завършва четното двоично число? На коя цифра завършва нечетното двоично число? На кои цифри може да завърши четното троично число?
51. Кое най-голямо десетично число може да се запише с три цифри:

а) в двоична система;
б) в осмична система;
в) в шестнадесетична система?

52. Превърнете числата в десетична система, а след това проверете резултата:

а) 1011011_2;	е) 517_8;	л) $1F_{16}$;
б) 10110111_2;	ж) 1010_8;	м) ABC_{16};
в) 011100001_2;	з) 1234_8;	н) 1010_{16};
г) $0,1000110_2$;	и) $0,34_8$;	о) $0,A4_{16}$;

д) $110100,11_2$; к) $123,41_8$; п) $1DE,C8_{16}$.

53. Превърнете числата от десетична система в двоична, осмична и шестнадесетична, аслед това проверете резултата:

а) 125_{10}; б) 229_{10}; в) 88_{10}; г) $37,25_{10}$; д) $206,125_{10}$.

54. Превърнете числата от двоична система в осмична и шестнадесетична, а след товапроверете резултата:

а) $1001111110111,0111_2$; г) $1011110011100,11_2$;
б) $1110101011,1011101_2$; д) $10111,1111101111_2$;
в) $10111001,101100111_2$; е) $1100010101,11001_2$.