**II Определен интеграл

B5 Определен интеграл. Свойства

Оператор за сума

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n).$$

$$\sum_{k=m}^{n} \big(\alpha f(k) + \beta g(k)\big) = \alpha \sum_{k=m}^{n} f(k) + \beta \sum_{k=m}^{n} g(k)$$

Оператор за произведение

$$\prod_{k=m}^{n} f(k) = f(m) f(m+1) f(m+2) \dots f(n).$$

$$\sum_{k=2}^{4} \sin x_k = \sin x_2 + \sin x_3 + \sin x_4$$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

$f(x)$ – сумационна формула

$\sum$ ⬚ - знак за сумиране

k – сумационен индекс

m – долна граница на сумационния индекс

n – горна граница на сумационния индекс

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1}$$

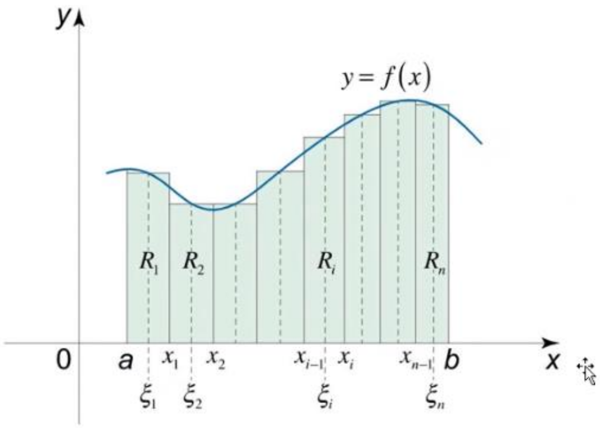
$$\sum_{k=3}^{12} k^2 = 9 + 16 + \cdots + 144$$

Риманова интегрална сума (РИС)

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}$$

$$f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$



Интегрируемост в Риманов смисъл

Определение. $f(x)$ е интегрируема в Риманов смисъл, ако

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ и } I \in \mathbf{R}:$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \qquad \forall h < \delta$$

$$I = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Изучени линейни оператори

$$\sum_{k=m}^{n} \big(\alpha f(k) + \beta g(k)\big) = \alpha \sum_{k=m}^{n} f(k) + \beta \sum_{k=m}^{n} g(k)$$

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'$$

$$d\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha df(x) + \beta dg(x)$$

оператор за сума

$$/sum_a^b$$

B6 Интеграли с променливи граници

ТСС

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

$f(x)$ интегрируема в КЗИ $[a,b]$, $\qquad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$F(x)$ е примитивна за $f(x)$

$\varphi(x)$ $\psi(x)$

$F(x)$ е примитивна за $f(x)$

$$F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dx, \quad F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

B7 Формула на Лайбниц и Нютън (Leibniz, Newton)

Теорема на Лайбниц и Нютън

$$F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в КЗИ $[a,b]$ и $\Phi(x)$ е произволна примитивна на $f(x)$ в $[a,b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\big|_a^b$$

Доказателство.

$\Phi(x)$ е примитивна за $f(x)$ в $[a,b]$ по условие,

$F(x)$ е примитивна за $f(x)$ в $[a,b]$ съгласно теорема от B6

$F(x)-\Phi(x)=C$ съгласно теорема от B1

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

В равенство (1) даваме на $x = a$.

$$F(a) = \Phi(a) + C \Longrightarrow 0 = \Phi(a) + C \Longrightarrow C = -\Phi(a)$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

Нека $x = b$

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)|_a^b$$

B8 Смяна на променливата в определения интеграл

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = f(x) \end{cases}, \qquad \varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

Алгоритъм за смяна на променливата.

Алгоритъм 2.4.1

1. Избираме полагане $g(x, t) = 0$, където t е нова интеграционна променлива. Обикновено полагането се определя от теорията на неопределения интеграл.

2. Изразяваме

$$x = \varphi(t). \tag{2.4.4}$$

3. Определяме dx, като диференцираме (2.4.4)

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt.$$

4. В подинтегралната функция заместваме x с $\varphi(t)$

$$f(x) = f(\varphi(t)).$$

5. Изразяваме t от (2.4.4)

$$t = \varphi^{-1}(x).$$

6. Получаваме новите граници

$$\alpha = \varphi^{-1}(a), \quad \beta = \varphi^{-1}(b).$$

7. Сменяме променливата в интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и получаваме

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример

Стр. 68 3а) $I = \int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

$$t = \sqrt{x+1} \Longrightarrow x + 1 = t^2 \Longrightarrow x = t^2 - 1$$

$$x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = d(t^2 - 1) = (t^2 - 1)'dt = 2tdt$$

$$dx = 2tdt$$

Таблица за смяна на границите

x	0	3
t	1	2

$$f(x(t)) = x\sqrt{x+1} = (t^2 - 1)t$$

$$I = \int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_1^2 (t^2-1)t.2t\,dt = 2\int_1^2 t^2(t^2-1)\,dt$$

B9 Интегриране по части при определения интеграл

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Теорема u, v

$$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv|_a^b$$

Доказателство.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b (u'v + uv')\,dx = uv|_a^b$$

$$\int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx = uv|_a^b$$

$$\int_a^b vu'\,dx + \int_a^b uv'\,dx = uv|_a^b$$

$$f'(x)dx = df(x)$$

$$u'dx = du, \quad v'dx = dv$$

$$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv|_a^b$$

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$I = \int_1^e x^2 \ln^2 x\,dx$$

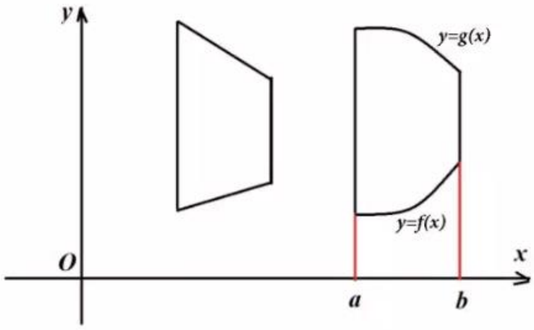
риране

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$I = \int_1^e \ln^2 x\,d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\int_1^e \ln^2 x\,dx^3$$

B10 Геометрични приложения на определения интеграл

1. Лице на фигура



$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

$$\Omega = \{P(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x) \le y \le g(x), a \le x \le b\}$$

$$S(\Omega) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

2. Дължина на дъга от крива линия

$$y = \sin\frac{1}{x}, x \in (0,1]$$

.6.2 *Дължина на крива*

Зърху кривата линия γ, фиг. 2.6.10 избираме произволно точки P_0, P_1, P_2, ..., P_n. Свързваме тези точки и получаваме начупена линия γ_n с дължина $\sigma_n = l(\gamma_n)$. Дължината $l(P_{i-1}P_i)$ означаваме с Δs_i. Этсечките $P_{i-1}P_i$ са краен брой. Затова измежду тях има такава с иаксимална дължина. Дължината на тази отсечка означаваме с

$$h = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta s_i.$$

Эчевидно $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

Определение 2.6.3 за дължина на крива. *Казваме, че криват* γ *има дължина, ако* $\exists \lim_{h\to 0} \sigma_n$ *при произволен избор на точкит* $P_i \in \gamma$, $i = \overline{1,n}$. *Числото* $l(\gamma) = \lim_{h\to 0} \sigma_n$ *се нарича дължина* *кривата* γ.

Теорема 2.6.1 *Нека функцията* $f(x)$ *е непрекъснато диференц руема в краен затворен интервал* $[a,b]$. *Тогава дължината на кр вата* γ : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a,b] \end{cases}$ *се дава с*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \qquad (2.6.$$

Решение. В интервала $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ е в сила неравенството $\sin x <$ co фиг. 2.6.2. Записваме криволинейния трапец Ω чрез неравенст

$$\Omega = \left\{P(x,y) \mid \sin x \le y \le \cos x, \mid -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Лицето на Ω пресмятаме съгласно формула 2.6.1

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin x)dx.$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$$

$$= 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right) = 2.\frac{1}{2} = 1.\square$$