Ejercicios Tema 4 - Complementos de Variables aleatorias

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

Momentos y momentos centrados. Asimetría y apuntamiento.

Pregunta 1.

Halla el momento de orden n y el momento centrado de orden n para la variable aleatoria W con función de distribución:

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 3, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } 3 \leq t < 4, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 4 \leq t < 5, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } 5 \leq t < 6, \\ 1, & \text{si } t \geq 6, \end{cases}$$

Solución

No es complicado, revisa las clases de teoría si tienes algún problema con alguna definición.

Como es discreta tenemos que

$$P_W(t) = \begin{cases} \frac{2}{6}, & \text{si } t = 3, \\ \frac{1}{6}, & \text{si } t = 4, \\ \frac{1}{6}, & \text{si } t = 5, \\ \frac{2}{6}, & t = 6, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El momento respecto al origen de orden n es:

$$\begin{aligned} E(W^n) &= \sum_{t=3}^{6} t \cdot P(W = t) = 3^n \cdot \frac{2}{6} + 4^n \cdot \frac{1}{6} + 5^n \cdot \frac{1}{6} + 6^n \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{3^n \cdot 2 + 4^n \cdot 1 + 5^n \cdot 1 + 6^n \cdot 2}{6} = \frac{3^n \cdot 2 + 4^n + 5^n + 6^n \cdot 2}{6}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$ es $E(W) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4.5$, y por lo tanto en momento centrado de orden n es

$$
\begin{aligned}
E((W-E(W))^n) = E((W-4.5)^n) &= \sum_{t=3}^{6}(t-4.5)^n \cdot P(W=t)\\
&= (3-4.5)^n \cdot \frac{2}{6} + (4-4.5)^n \cdot \frac{1}{6} + (5-4.5)^n \cdot \frac{1}{6} + (6-4.5)^n \cdot \frac{2}{6}\\
&= \frac{(-1.5)^n \cdot 2 + (-1)^n \cdot 0.5^n + 1 \cdot 0.5^n + 2 \cdot 1.5^n}{6}\\
&= \frac{2 \cdot (-1^n) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{6}.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
E((W-E(W))^n) = \begin{cases} \frac{-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}{6} = 0 & \text{si } n = 1,3,5,7\ldots \text{ impar,}\\ \frac{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}{6} = \frac{4\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)}{6} = \frac{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3} & \text{si } n = 2,4,6\ldots \text{ par.} \end{cases}
$$

Pregunta 2.

Halla el momento de orden n y el momento central de orden n para la variable aleatoria Z con función de probabilidad:

$$
f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x = 0,1,2,\\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}
$$

Solución

El momento respecto al origen de orden n es:

$$
E(Z^n) = \sum_{x=0}^{2} x^n \cdot P(Z=x) = 0^n \cdot \frac{1}{3} + 1^n \cdot \frac{1}{3} + 2^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+2^n}{3}.
$$

La esperanza es del momento respecto al origen para $n = 1$ y es $E(Z) = E(Z^1) = \frac{1+2^1}{3} = 1$.

Así el momento central de orden n es

$$
\begin{aligned}
E((Z-E(Z))^n) = E((Z-1)^n) &= \sum_{x=0}^{2}(x-1)^n \cdot P(Z=x)\\
&= (0-1)^n \cdot \frac{1}{3} + (1-1)^n \cdot \frac{1}{3} + (2-1)^n \cdot \frac{1}{3}\\
&= \frac{(-1)^n + 0^n + 1^n}{3} = \frac{(-1)^n + 1}{3}.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
E((Z-E(Z))^n) = E((Z-1)^n) = \begin{cases} \frac{(-1)^n+1}{3} = \frac{-1+1}{3} = 0, & \text{si } n = 1,3,5,7\ldots \text{ es impar}\\ \frac{(-1)^n+1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}. & \text{si } n = 2,4,6\ldots\text{par.} \end{cases}
$$

Pregunta 3.

Halla el momento de orden n y el momento central de orden n para la variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Solución

Notemos que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso el momento de orden n respecto al origen es

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \int_{-1}^{1} x^n \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^n \cdot (1+x)dx + \int_{0}^{1} x^n \cdot (1-x)dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_{x=-1}^{0} + \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_{x=0}^{1} \\
&= 0 - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right) + \left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+2}}{n+2}\right) - 0 \\
&= \left(\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= (-1)^{n+2} \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \\
&= (-1)^{n+2} \cdot \left(\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) + \left(\frac{n+2-(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) \\
&= \left((-1)^{n+2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, 3, 5, 7\ldots \text{ es impar} \\ \frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}, & \text{si } n = 2, 4, 6\ldots \text{ es par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Así que la esperanza vale $E(X) = 0$.

Luego el momento respecto a la media de orden n es igual al momento del mismo orden respecto al origen:

$$E((X - E(X))^n) = E(X^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, 3, 5, 7\ldots \text{ es impar} \\ \frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}. & \text{si } n = 2, 4, 6\ldots \text{ es par.} \end{cases}$$

Pregunta 4.

Halla el momento de orden n y el momento central de orden n para la variable aleatoria Y con función de distribución:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

Solución

Ante todo la densidad es $f_y(t)==

$$\begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_0^1 t^n \cdot \frac{1}{2} t^{\frac{-1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^{n-\frac{1}{2}+1}}{n-\frac{1}{2}+1} \right]_{t=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \right]_{t=0}^1 = \frac{1}{2 \cdot n + 1}. \end{aligned}$$

El valor esperado es $E(X) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Así que el momento central de orden n es

$$\begin{aligned} E\left(\left(X - \frac{1}{3}\right)^n\right) &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot t^{n-k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot \int_0^1 t^{n-k-\frac{1}{2}} \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left[\frac{t^{n-k-\frac{1}{2}+1}}{n-k-\frac{1}{2}+1} \right]_{t=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot \frac{1^{n-k+\frac{3}{2}}}{n-k+\frac{1}{2}} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{n-k+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$