Modul 3: forelæsning 1
Differentialligninger af 1. orden

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Kort oversigt over kurset

- Lineære differensligninger: $x_{t+1} = ax_t + b_t$ (Modul 2)
- Generelle differensligninger: $x_{t+1} = f(t, x_t)$ (Modul 2)
- Lineære systemer af differensligninger: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t$ (Modul 1,2)
- Generelle systemer af differensligninger: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t)$ (Modul 2)
- Lineære differentialligninger: $x' = ax + b(t)$ (Modul 3)
- Generelle differentialligninger: $x' = f(t, x)$ (Modul 3)
- Lineære systemer af differentialligninger: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ (Modul 4)
- Generelle systemer af differentialligninger: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ (Modul 5)

Oversigt

Mest repetition med fokus på de sværeste emner.
God tid til at regne opgaver.

1. 3 simple typer differentialligninger
   Eksponentiel vækst (med konstantled)
   Logistisk vækst (med variationer)
2. Separation af de variable
3. Lineære 1. ordens differentialligninger
   "Panserformlen"
   "Nålestiksmetoden"
4. Eksistens- og entydighed af løsninger
5. Ligevægt og stabilitet

Eksponentiel vækst

Sætning Eksponentiel vækst

Differentialligningen for eksponentiel vækst

$$\frac{dy}{dx} = ry,$$

hvor r er en konstant, har den fuldstændige løsning

$$y = y(x) = ce^{rx} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Eksponentiel vækst med konstantled

Sætning Eksponentiel vækst med konstantled

Differentialligningen for eksponentiel vækst med konstantled

$$\frac{dy}{dx} = ry + q,$$

hvor $r \neq 0$ og q er konstanter, har den fuldstændige løsning

$$y = y(x) = -\tfrac{q}{r} + ce^{rx} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Eksponentiel vækst med konstantled – fortsat

Bemærkning $\frac{dy}{dx} = ry + q$ kan omskrives til $\frac{dy}{dx} = r(y - y^*)$ og omvendt.

Sætning Eksponentiel vækst med konstantled (alternativ)

Differentialligningen for eksponentiel vækst med konstantled

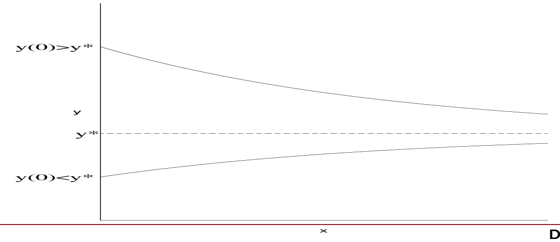
$$\frac{dy}{dx} = r(y - y^*),$$

hvor r og y^* er konstanter, har den fuldstændige løsning

$$y = y(x) = y^* + ce^{rx} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Bemærkning Når $r < 0$, vil $y(x) \to y^*$ når $x \to \infty$ (y^* er en *ligevægt*)

Grafer for $y = y^* + ce^{rx}$ når $r < 0$



Logistisk vækst

Sætning Logistisk vækst

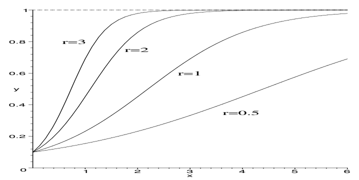
Den logistiske differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

hvor r og K er konstanter, har den fuldstændige løsning

$$y = y(x) = \frac{K}{1 + ce^{-rx}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Konstanten K kaldes *bærekapaciteten*.



Grafer for $y = y(x)$ når $K = 1,\ y(0) = 0.1$ og forskellige værdier af r

Logistisk vækst – fortsat

Omskrivning af den logistiske løsningsfunktion $y(x) = \dfrac{K}{1 + ce^{-rx}}$:

Hvis $c > 0$ så er $c = e^{rx_0}$ med $x_0 = \frac{\ln c}{r}$. Dermed er

$$y(x) = \frac{K}{1 + e^{-r(x - x_0)}}$$

Bemærkning

- Vi har $y(x_0) = \frac{K}{2}$ så halvdelen af bærekapaciteten er nået, når $x = x_0$. Derfor kaldes x_0 nogle gange for *halvmætningskonstanten*.
- Man kan vise, at $y'(x)$ har maksimum i $x = x_0$, dvs. x_0 er det "tidspunkt", hvor væksten er størst. Da

$$y'(x_0) = ry(x_0)\left(1 - \frac{y(x_0)}{K}\right) = r \cdot \frac{K}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{rK}{4}$$

er den største vækstrate altså

$$y'(x_0) = \frac{rK}{4}$$

Model for sygdomsepidemi

K: Befolkningens størrelse

$N = N(t)$: Antal smittede til tiden t

Antagelser om smitteraten $\frac{dN}{dt}$:

- $\frac{dN}{dt}$ er proportional med N (antallet af smittede)
  [Sygdommen breder sig langsomt, så længe der kun er få smittede]
- $\frac{dN}{dt}$ er proportional med $K - N$ (antallet af ikke-smittede)
  [Sygdommen breder sig langsomt, når der kun er få tilbage, som ikke er smittede]

Fører til (med $r = aK$)

$$\frac{dN}{dt} = aN(K-N) = aKN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

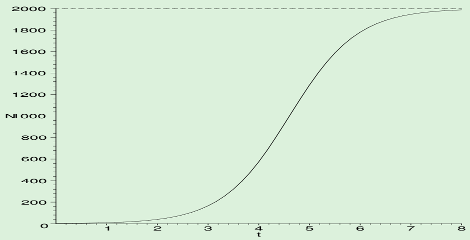
dvs. en logistisk differentialligning med "bærekapacitet" K.

Model for sygdomsepidemi – taleksempel

- Influenzaepidemi i en befolkning på 2000 med $r = 1.5$, dvs.

$$\frac{dN}{dt} = 1.5\,N\left(1 - \frac{N}{2000}\right)$$

- Fuldstændig løsning $\quad N(t) = \dfrac{2000}{1 + ce^{-1.5\,t}} \qquad (c \in \mathbb{R})$
- Til tiden $t = 0$ er der to smittede, dvs. $N(0) = 2$.
  Dette giver $c = 999$ og dermed $\quad N(t) = \frac{2000}{1+999\,e^{-1.5\,t}}$



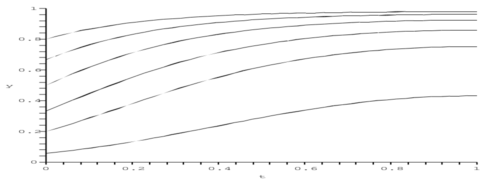
- Vi har $\; t_0 = \frac{\ln c}{r} = \frac{\ln 999}{1.5} \simeq 4.6 \;$ og $\; N'(t_0) = \frac{rK}{4} = \frac{1.5\cdot 2000}{4} = 750$

Eksempel på modificeret logistisk model

Antager at væksten aftager med tiden f.eks.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

- T er et "sluttidspunkt" (bemærk at $N'(T) = 0$).
- Kan f.eks. benyttes til at beskrive sygdomsvækst på en plante, der med tiden bliver mere modstandsdygtig over for sygdommen.
- Fuldstændig løsning: $\quad N(t) = \dfrac{K}{1 + c\exp\left(-r\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)\right)} \qquad (c \in \mathbb{R})$
- Løsningskurver ($K = 1$ og $T = 1$):



Bemærk at $N(t)$ ikke har tid til at nå (tæt på) bærekapaciteten.

En anden slags modificeret logistisk differentialligning

(Indgår i miniprojektet)

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \left(\frac{y}{K}\right)^{\alpha}\right)$$

hvor r, K, α er positive parametre.

Den normale logistiske differentialligning svarer til $\alpha = 1$.

Separation af de variable

Sætning Separation af de variable

En differentialligning af formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

løses ved at bruge følgende fire trin:

(1) Separér de variable: $\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$

(2) Sæt integraltegn på ligningen: $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$

(3) Find stamfunktioner på begge sider af ligningen (husk int.konstant)

(4) Løs ligningen: find y udtrykt ved x

Bemærkning "Separation af de variable" er en *metode:*

- For en konkret differentialligning går man igennem de fire trin nævnt i sætningen.
- Man sætter *ikke* ind i formlerne i sætningen.

Lineær 1. ordens differentialligning

Definition Lineær 1. ordens differentialligning

En *lineær 1. ordens differentialligning* er en differentialligning af formen

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

hvor $f(x)$ og $g(x)$ er givne funktioner.

Differentialligningen kaldes *homogen* når $g = 0$; ellers *inhomogen*.

Bemærkning Differentialligninger på formen

$$\frac{dy}{dx} = h(x)y + g(x)$$

skal først omskrives til

$$\frac{dy}{dx} - h(x)y = g(x)$$

før de følgende resultater kan benyttes.

Homogen lineær 1. ordens differentialligning

Sætning Homogen lineær 1. ordens differentialligning

Den homogene lineære 1. ordens differentialligning

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$$

har den fuldstændige løsning

$$y = y(x) = ce^{-F(x)} \quad (c \in \mathbb{R})$$

hvor $F'(x) = f(x)$.

"Panserformlen"

Sætning "Panserformlen"

Den inhomogene lineære 1. ordens differentialligning

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

har den fuldstændige løsning

$$y = y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx$$

hvor $F'(x) = f(x)$.

Hvor er konstanten "c" i den fuldstændige løsning?

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\,dx = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + c \right) \\ &= e^{-F(x)} (u_0(x) + c) = y_0(x) + ce^{-F(x)} \end{aligned}$$

Fortolkning af ligningen $\mathbf{y(x) = y_0(x) + ce^{-F(x)}}$

- FIL = fuldstændig inhomogen løsning $y(x)$
- FHL = fuldstændig homogen løsning $ce^{-F(x)}$

Så er

$$\text{FIL} = y_0(x) + \text{FHL}$$

hvor $y_0(x)$ er en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

I ord "Fuldstændig inhomogen løsning = partikulær løsning $[y_0(x)]$ + fuldstændig homogen løsning"

- Uddybes i "nålestiksmetoden" ("gættemetoden").
- Gælder også for (systemer af) lineære differensligninger (Modul 1 og 2) og systemer af lineære differentialligninger (Modul 4).

"Nålestiksmetoden" ("gættemetoden")

Sætning "Nålestiksmetoden"

Differentialligningen (NB: $f(x) = a$ er konstant)

$$\frac{dy}{dx} + ay = g(x)$$

har den fuldstændige løsning

$$y = y_0(x) + ce^{-ax} \quad (c \in \mathbb{R}) \qquad (\text{dvs. FIL} = y_0(x) + \text{FHL})$$

hvor man som $y_0(x)$ "gætter" på en funktion "af samme slags" som $g(x)$:

$g(x)$	$y_0(x)$
polynomium	polynomium af samme grad
be^{rx}	$\begin{cases} Ae^{rx} & \text{når } r \neq -a \\ Axe^{-ax} & \text{når } r = -a \end{cases}$
$b_1 \cos rx + b_2 \sin rx$	$A \cos rx + B \sin rx$

I skemaet er b, b_1, b_2 og r *givne* konstanter, mens A og B er konstanter, der skal *bestemmes*, således at $y_0(x)$ er løsning.

Eksistens og entydighed af løsninger

- I eksemplerne indtil nu har vi set følgende:

  I den fuldstændige løsning indgår en konstant "c", som bestemmes ud fra en *begyndelsesbetingelse* $\varphi(x_0) = y_0$.
- Gælder det *altid*, at der er *netop* én løsning $\varphi(x)$ med $\varphi(x_0) = y_0$?

Sætning Eksistens og entydighed

Gennem et givet punkt (x_0, y_0) går netop én løsning til diff.ligningen

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(x, y) \qquad (\text{"et udtryk i } x \text{ og } y\text{"})$$

(hvis funktionen $\Phi(x, y)$ er "tilstrækkeligt pæn")

dvs. der findes netop én funktion $y = \varphi(x)$ således, at

(a) $\varphi'(x) = \Phi(x, \varphi(x))$

(b) $\varphi(x_0) = y_0$

Ligevægt og stabilitet

Definition Autonom differentialligning

En 1. ordens differentialligning af formen

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (\text{"et udtryk i } x\text{"})$$

kaldes *autonom* (fordi t ikke indgår på højresiden).

Definition Ligevægt

En værdi x^* kaldes en *ligevægt* for den autonome differentialligning

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad \text{hvis} \qquad f(x^*) = 0.$$

Når x^* er en ligevægt, så vil den konstante funktion $x(t) = x^*$ være en løsning til differentialligningen.

(**Bemærk** forskellen til differ*ens*ligninger, hvor x^* er en ligevægt for differensligningen $x_{t+1} = f(x_t)$, hvis $f(x^*) = x^*$.)

Ligevægt og stabilitet – fortsat

Definition Stabil ligevægt

En ligevægt x^* kaldes *stabil*, hvis der gælder

$$x(t) \to x^* \qquad \text{for } t \to \infty$$

for alle løsninger $x = x(t)$, der ikke "starter for langt fra x^*"

Sætning Stabil ligevægt

En ligevægt x^* for differentialligningen $\frac{dx}{dt} = f(x)$ er

- stabil hvis $f'(x^*) < 0$
- ustabil hvis $f'(x^*) > 0$

(Ingen generel konklusion hvis $f'(x^*) = 0$)

(**Bemærk** forskellen til differ*ens*ligninger, hvor en ligevægt x^* er stabil hvis $|f'(x^*)| < 1$ og ustabil hvis $|f'(x^*)| > 1$.)