Modul 2: forelæsning 1
Differensligninger
Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Modeleksempler

1.
   - På en konto står 5000 kr.
   - Der indsættes hvert år 1000 kr. sidst på året.
   - Kapitalen forrentes med 2% p.a.
   - Lad x_t være kapitalen efter t år. *Differencen* (eller tilvæksten) er
   $$x_{t+1} - x_t = 0.02\, x_t + 1000,$$
   så der gælder
   $$x_{t+1} = 1.02\, x_t + 1000 \qquad \text{med } x_0 = 5000.$$

2. En model for antallet af smittede personer (S_t) i en gruppe på N personer (gennemgås senere i dag):
$$S_{t+1} = (1-a)S_t + bS_t\left(1 - \frac{S_t}{N}\right)$$

Eksempel på en differensligning

$$x_{t+1} = 2x_t, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

t	0	1	2	3	...
x_t	3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^3$	...
x_t	c	$c \cdot 2$	$c \cdot 2^2$	$c \cdot 2^3$	...

"Gættet" løsningsformel for x_t : $\quad x_t = c \cdot 2^t$.

Eksempler på differensligninger

A $x_{t+1} = 2x_t$ for $t = 0, 1, \ldots$

B $x_{t+1} = \frac{t+2}{t+1} x_t$ for $t = 0, 1, \ldots$

C $x_{t+1} = 2x_t - 1$ for $t = 0, 1, \ldots$

D $x_{t+1} = 2x_t + t$ for $t = 0, 1, \ldots$

E $x_{t+1} = \cos(x_t^3)e^{-x_t} + \cos(t)$ for $t = 0, 1, \ldots$

Eksempel E: ingen formel, men succesiv udregning

$$x_{t+1} = \cos(x_t^3)e^{-x_t} + \cos(t), \quad t = 0, 1, \ldots \quad \text{med } x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= \cos(x_0^3)e^{-x_0} + \cos(0) = \cos(2^3)e^{-2} + \cos(0) \simeq 0.98 \\ x_2 &= \cos(x_1^3)e^{-x_1} + \cos(1) = \cos(0.98^3)e^{-0.98} + \cos(1) \simeq 0.76 \quad \text{osv.} \end{aligned}$$

R kan bruges:

```
> f <- function(t,x){cos(x^3)*exp(-x)+cos(t)}
> x0 <- 2
> X <- x0
> x <- x0; for (t in (0:9)){x<-f(t,x);X<-c(X,x)}
> X
 [1]  2.000000000  0.980308712  0.760956744  0.006443875  0.003584346
 [6]  0.342778449  0.992882029  1.166921025  0.748234760  0.286786062
[11] -0.160666762
```


Definition: 1. ordens differensligning og løsning

- Form af ligning: $x_{t+1} = f(t, x_t)$.
- En løsning til ligningen er en *talfølge* $(x_t) = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, som får ligningen til at stemme for alle t, når den indsættes.
- Den fuldstændige løsning er alle mulige løsninger.
- En løsning $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ er givet, når x_0 er kendt:

  $$x_1 = f(0, x_0), \quad x_2 = f(1, x_1), \quad x_3 = f(2, x_2) \quad \text{osv.}$$

  (Dette kaldes *iterativ* eller *succesiv* udregning af x_t.)
- I mange tilfælde kan man ikke opskrive et løsningsudtryk.

Opgave

Hvad er $f(t, x)$ i Eksemplerne A-E?

Lineær 1. ordens differensligning

Definition: Lineær 1. ordens differensligning

En *lineær 1. ordens differensligning* er på formen

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

hvor a_t og b_t er givne følger af tal.

- Ligningen kaldes *homogen*, hvis $b_t = 0$ for alle t.
- Ligningen kaldes *inhomogen*, hvis $b_t \neq 0$ for nogle t.

Opgave: Hvilke er lineære og hvilke er homogene?

A $x_{t+1} = 2x_t$

B $x_{t+1} = \frac{t+2}{t+1} x_t$

C $x_{t+1} = 2x_t - 1$

D $x_{t+1} = 2x_t + t$

E $x_{t+1} = \cos(x_t^3)e^{-x_t} + \cos(t)$

Sætning: Homogen lineær 1. ordens differensligning

(a) (Homogen ligning med konstant koefficient.)
Ligningen

$$x_{t+1} = a x_t$$

har den fuldstændige løsning

$$x_t = c a^t \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

(b) (Homogen ligning generelt.)
Ligningen $x_{t+1} = a_t x_t$ har den fuldstændige løsning

$$x_t = c E_t \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

hvor $E_t = a_{t-1} a_{t-2} \cdots a_0$.

Sætning: Inhomogen lineær 1. ordens differensligning

(c) (Inhomogen ligning med konstante koefficienter.) Ligningen

$$x_{t+1} = ax_t + b$$

har den fuldstændige løsning (for $a \neq 1$)

$$x_t = ca^t + \tfrac{b}{1-a} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

(d) (Inhomogen ligning generelt.) Ligningen

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t$$

har den fuldstændige løsning givet ved (panser-)formlen

$$x_t = E_t \left(c + \sum_{s=0}^{t-1} b_s / E_{s+1} \right) \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

hvor $E_t = a_{t-1} a_{t-2} \cdots a_0$.

Som regel er formlen ubrugelig!

Gætte- eller nålestiksmetoden

- FIL = fuldstændig inhomogen løsning x_t.
- FHL = fuldstændig homogen løsning ca^t.

Sætning: FIL $= \varphi_t +$ FHL

Ligningen (med $a_t = a$ konstant)

$$x_{t+1} = ax_t + b_t$$

har den fuldstændige løsning x_t givet ved formlen

$$x_t = \varphi_t + ca^t \quad (c \in \mathbb{R}) \qquad (\text{dvs. FIL} = \varphi_t + \text{FHL}),$$

hvor φ_t er en (partikulær) løsning til den inhomogene ligning.

Man kan gætte på φ_t som et udtryk "af samme slags" som b_t:

$$\begin{array}{ll} b_t = d^t \quad (d \neq a) & \varphi_t = Ad^t \\ b_t = a^t & \varphi_t = Ata^t \\ b_t = \text{polynomium} & \varphi_t = \text{polynomium af samme grad} \end{array}$$

Vink til Opgave 2.7

(1) $x_{t+1} = 2x_t + t^2$. Gæt:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= At^2 + Bt + C \\ \varphi_{t+1} &= A(t+1)^2 + B(t+1) + C \\ &= At^2 + 2At + A + Bt + B + C \\ &= At^2 + (2A+B)t + (A+B+C) \end{aligned}$$

(2) $x_{t+1} = 2x_t + 3^t$. Gæt:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= A3^t \\ \varphi_{t+1} &= A3^{t+1} = 3A3^t \end{aligned}$$

Autonome differensligninger og ligevægte

Definition: Autonom differensligning

En 1. ordens differensligning kaldes *autonom*, hvis der gælder

$$x_{t+1} = f(x_t).$$

(Ingen direkte afhængighed af t på højre side.)

Opgave: Hvilke er autonome?

- **A** $x_{t+1} = 2x_t$
- **B** $x_{t+1} = \frac{t+2}{t+1} x_t$
- **C** $x_{t+1} = 2x_t - 1$
- **D** $x_{t+1} = 2x_t + t$
- **E** $x_{t+1} = \cos(x_t^3) e^{-x_t} + \cos(t)$

Definition: Ligevægt for autonom ligning

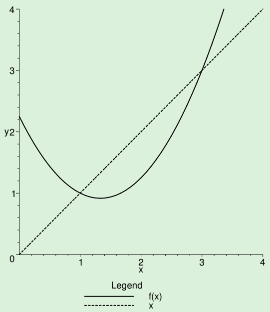
Et tal x^* kaldes en *ligevægt* for $x_{t+1} = f(x_t)$, hvis $x^* = f(x^*)$.

Eksempel: Grafisk illustration af ligevægt

- Differensligning: $x_{t+1} = 0.75x_t^2 - 2x_t + 2.25$.
- Ligningen skrives $x_{t+1} = f(x_t)$, hvor $f(x) = 0.75x^2 - 2x + 2.25$.
- Ligevægte:

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow 0 = 0.75(x^*)^2 - 3x^* + 2.25$$
$$\Leftrightarrow x^* = 1 \quad \text{eller} \quad x^* = 3.$$

- Grafisk illustration:



Stabilitet

Definition: Stabil ligevægt

En ligevægt x^* for en autonom differensligning $x_{t+1} = f(x_t)$ kaldes *stabil*, hvis der gælder følgende:

For alle startværdier x_0 *i nærheden af* x^* skal de tilsvarende værdier x_t konvergere mod x^* for $t \to \infty$.

☞ At en ligevægt *ikke* er stabil (eller er *ustabil*) betyder altså, at der findes startværdier x_0 vilkårligt tæt på ligevægten, hvor de tilsvarende tal x_t *ikke* konvergerer mod ligevægten.

Løsere sagt: selv små ændringer i startværdien kan betyde meget i det lange løb.

Spørgsmål

Hvordan kan vi se om en ligevægt er stabil?

Sætning: Stabilitet

Lad x^* være en ligevægt for differensligningen $x_{t+1} = f(x_t)$. Da gælder:

- Ligevægten er stabil, hvis $|f'(x^*)| < 1$.
- Ligevægten er ikke stabil, hvis $|f'(x^*)| > 1$.

Eksempel: Stabilitet

Lad $x_{t+1} = f(x_t)$, hvor

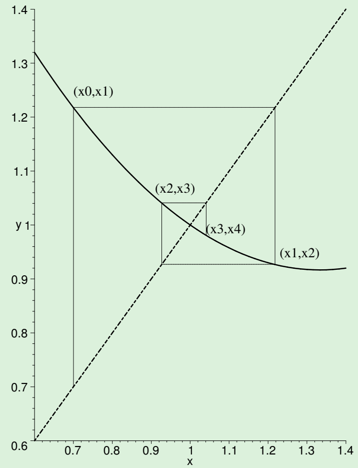
$$f(x) = 0.75x^2 - 2x + 2.25.$$

Vi har

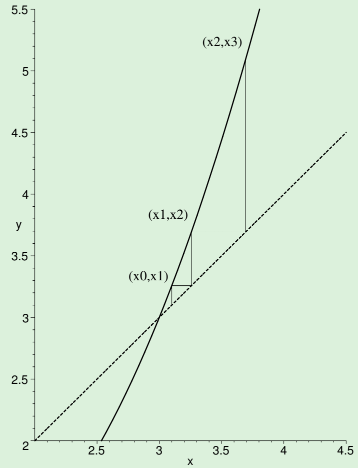
$$f'(x) = 1.5x - 2.$$

- Er ligevægten $x^* = 1$ stabil? $f'(1) = -0.5$.
- Er ligevægten $x^* = 3$ stabil? $f'(3) = 2.5$.

Eksempel: Grafisk illustration af (u)stabilitet



$x^* = 1$ er stabil



$x^* = 3$ er ikke stabil

Epidemimodel

Udbredelse af en smitsom sygdom i en population:

- Populationens størrelse er N individer, som alle er modtagelige overfor smitten.
- S_t antallet af smittede til tiden t.

Mål: at udtrykke S_{t+1} ved S_t:

$$S_{t+1} = \text{gamle tilfælde} \quad + \quad \text{nye tilfælde}$$

Gamle tilfælde:

- Antagelse: en fast brøkdel a (med $0 \le a \le 1$) af de smittede bliver raske til tiden $t+1$, dvs. antallet af stadigt smittede til tiden $t+1$ er $S_t - aS_t$:

$$\text{gamle tilfælde} = S_t - aS_t = (1-a)S_t.$$

Parameteren a kaldes *raskhedsraten*.

Epidemimodel – fortsat

Nye tilfælde:

- Hvor mange nye smittede til tiden $t+1$? Sygdommen smitter ved kontakt mellem rask og smittet, dvs.
  - jo flere raske til tiden t, jo flere smittede til tiden $t+1$,
  - jo flere smittede til tiden t, jo flere smittede til tiden $t+1$.

Antagelse: antal nye tilfælde er proportional med både S_t og $N - S_t$

$$\text{nye tilfælde} = kS_t(N - S_t) = bS_t\left(1 - \tfrac{S_t}{N}\right).$$

Parameteren b med $0 \le b \le 1$ kaldes *infektionsraten*.

Konklusion:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \text{gamle tilfælde} \quad + \quad \text{nye tilfælde} \\ &= (1-a)S_t + bS_t\left(1 - \tfrac{S_t}{N}\right) \\ &= (1+b-a)S_t - \tfrac{b}{N}S_t^2. \end{aligned}$$

Epidemimodel – ligevægte

- Model $S_{t+1} = f(S_t)$, hvor $f(S) = (1+b-a)S - \frac{b}{N}S^2$.
- Ligevægte S^*:

$$\begin{aligned} S^* = f(S^*) &= (1+b-a)S^* - \tfrac{b}{N}(S^*)^2 \Leftrightarrow \\ 0 &= (b-a)S^* - \tfrac{b}{N}(S^*)^2 \Leftrightarrow \\ 0 &= S^*\left(b - a - \tfrac{b}{N}S^*\right) \Leftrightarrow \\ S^* = 0 \quad &\text{eller} \quad \tfrac{b}{N}S^* = b - a \\ S^* = 0 \quad &\text{eller} \quad S^* = N(1 - \tfrac{a}{b}) \end{aligned}$$

Bemærkning
$S^* = N(1 - \frac{a}{b})$ er positiv og dermed biologisk meningsfuld, når $a < b$ dvs. når infektionsraten er større end raskhedsraten.

Epidemimodel – stabilitet af ligevægte

$$\begin{aligned} f(S) &= (1+b-a)S - \tfrac{b}{N}S^2 \\ f'(S) &= 1 + b - a - \tfrac{2b}{N}S \end{aligned}$$

- Ligevægten $S^* = 0$ er stabil, hvis $|f'(0)| < 1$:

$$\begin{aligned} |1+b-a| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 1+b-a \quad \text{og} \quad 1+b-a < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a - 2 < b \quad \text{og} \quad b < a \quad \Leftrightarrow \quad b < a \text{ (da } a < 1\text{)}. \end{aligned}$$

- Tilsvarende for ligevægten $S^* = N(1 - \frac{a}{b})$.

Konklusion

$$S^* = 0 \text{ er } \begin{cases} \text{stabil} & \text{når } b < a \\ \text{ikke stabil} & \text{når } b > a \end{cases}$$

$$S^* = N(1 - \tfrac{a}{b}) \text{ er } \begin{cases} \text{stabil} & \text{når } a < b \\ \text{ikke stabil} & \text{når } a > b \end{cases}$$

Epidemimodel – taleksempel

Lad $N = 10\,000$, $a = 0.1$ og $b = 0.6$, dvs. $S_{t+1} = 1.5\,S_t - \frac{0.6}{10000}\,S_t^2$.

Ligevægten

$$S^* = N(1 - \tfrac{a}{b}) = 10000(1 - \tfrac{0.1}{0.6}) \simeq 8333.33$$

er stabil fordi $a < b < a + 2$.

Fremskrivninger med R bekræfter at 8333.33 er en stabil ligevægt:

```
> f <- function(S)(1.5*S-0.6*S^2/10000)
> S0 <- 1000
> X <- S0
> S <- S0
> for (t in (1:50)){S<-f(S);X<-c(X,S);}
> round(X[1:5],2)     # S_0, ..., S_4 med to decimaler
[1] 1000.00 1440.00 2035.58 2804.76 3735.14
> round(X[47:51],2)   # S_46, ..., S_50 med to decimaler
[1] 8333.33 8333.33 8333.33 8333.33 8333.33
>
```


KØBENHAVNS UNIVERSITET

Variationer af epidemimodellen

- Antal nye tilfælde er
  $$kS_t^{\alpha}(N - S_t),$$
  hvor $\alpha > 0$ er en parameter.
- Immunitet efter sygdom leder til et *system* af differensligninger! (Næste gang.)