

Matematik og modeller, 2018

Miniprojekt 2: Differensligninger

Aflevering Miniprojektet afleveres **tirsdag den 22.5.2018 kl. 8.00** ved forelæsningen.

Relevante udtryk i R samt resultater og grafer medtages i passende omfang.

Opgave 1: Kapitalforrentning

Vi betragter en kapital hvor forrentning og udtræk kun sker én gang om året. Vi betegner med

x_t — kapitalens størrelse i kr. i år t

r_t — rentesatsen i år t

u_t — udtrækket i kr. i år t

og betragter ligningen

$$x_{t+1} = (1 + r_t)x_t - u_t. \quad (1)$$

(a) Forklar, hvordan denne ligning fremkommer.

(b) Antag, at der er konstant forrentning og konstant udtræk, dvs. $r_t = r$ og $u_t = u$ for alle t . Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen (1), og udtryk den ved r , u og startkapitalen x_0 .

Hvor stor skal startkapitalen (x_0) være (udtrykt ved r og u) for at der ikke forekommer overtræk på kontoen på noget tidspunkt?

Sæt derefter $r = 0.015$, svarende til en rentesats på 1.5% og $u = 12000$. Beregn (f.eks. vha. R) kapitalens størrelse efter 1, 2, ..., 10 år med en startkapital på 200000 kr.

(c) Antag nu, at der er konstant forrentning, men lineært voksende udtræk: $r_t = r$ og $u_t = u + \alpha t$. Bestem også her den fuldstændige løsning til differensligningen (1), og udtryk den ved r , u , α og startkapitalen x_0 .

Sæt derefter $r = 0.015$, $u = 1000$ og $\alpha = 4000$. Beregn (f.eks. vha. R) kapitalens størrelse efter 1, 2, ..., 10 år med en startkapital på 200000 kr.

Sæt igen $r = 0.015$, $u = 1000$, men lad α variere. Hvor stor må α være for at der stadig er kapital efter 10 år med en startkapital på 200000 kr?

(d) Vi tænker os nu, at renten ændrer sig fra år til år. I en periode har man observeret et rentefald som på denne type konto har bevirket, at renten et år er 90% af renten året før. Ved periodens start er renten på 2% (og dermed er renten året efter $0.9 \cdot 2\% = 1.8\%$, året derefter $0.9 \cdot 1.8\% = 1.62\%$ osv).

Bestem et udtryk for r_t og opstil differensligningen (1) for kapitalen x_t i dette tilfælde, hvis der ikke udtrækkes nogen penge. Brug den til succesivt at bestemme (f.eks. vha. R) kapitalens størrelse efter 1, 2, ..., 10 år med en startkapital på 200000 kr.

[Bemærk: I skal ikke bestemme en generel formel for x_t .]

(e) [Vanskeligere spørgsmål] I en periode har man observeret et rentefald, der giver følgende formel for renten r_t :

$$r_t = e^{0.02 \cdot (0.9)^t} - 1.$$

Opstil en differensligning for kapitalens størrelse x_t , hvis der ikke udtrækkes nogen penge. Bestem endvidere den løsning til differensligningen, som svarer til en startkapital på 200000 kr.

[Vink: I får brug for regnereglen $e^{x+y} = e^x e^y$ samt en formel for summen af en endelig kvotientrække. Søg efter "geometric series" eller "endelig kvotientrække".]

Opgave 2: Nationaløkonomisk model

Vi betragter den nationaløkonomiske model fra Miniprojekt 1:

$$\begin{pmatrix} C_{t+1} \\ I_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ (a-1)c & ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix}, \quad (2)$$

hvor a, b og c er positive parametre.

Sæt $a = 0.8$, $b = 6$ og $c = 3$. Angiv den fuldstændige løsning til systemet (2) af differensligninger på formen

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^t \mathbf{q}_1 + c_2 \lambda_2^t \mathbf{q}_2 + \begin{pmatrix} C^* \\ I^* \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

hvor λ_1 og λ_2 er (konkrete) tal og hvor \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 og $\begin{pmatrix} C^* \\ I^* \end{pmatrix}$ er (konkrete) vektorer.

Bestem endvidere den partikulære løsning, der opfylder $(C_0, I_0) = (40, 9)$.

Opgave 3: Epidemimodel

Vi betragter følgende epidemimodel fra forelæsningerne:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= (1-a)S_t + bS_t \left(1 - \frac{S_t + I_t}{N}\right) \\ I_{t+1} &= (1-c)I_t + aS_t, \end{aligned}$$

hvor S_t og I_t er antallet af hhv. syge og immune til tiden t i en population på $N > 0$ individer, og hvor a, b og c er positive parametre med $a < 1$ og $c < 1$.

(a) Er der tale om et autonomt system af differensligninger?

Er der tale om et lineært system af differensligninger?

(b) Sæt $N = 100\,000$, $a = 0.3$, $b = 1.8$ og $c = 0.1$. Foretag fremskrivninger vha. R ud fra startvektoren $(S_0, I_0) = (1000, 0)$. Bedøm ud fra disse fremskrivninger hvilken stabil ligevægt modellen synes at have.

(c) Sæt $N = 100\,000$, $a = 0.3$, $b = 0.2$ og $c = 0.1$. Foretag fremskrivninger vha. R ud fra startvektoren $(S_0, I_0) = (1000, 0)$. Bedøm ud fra disse fremskrivninger hvilken stabil ligevægt modellen synes at have.

(d) Sæt $N = 100\,000$, $a = 0.3$, $b = 1.8$ og $c = 0.1$. Bestem samtlige ligevægte for modellen og afgør vha. matematiske resultater om stabilitet, hvilke af ligevægtene, der er stabile.

(e) Lad N, a, b og c være vilkårlige positive parametre med $a < 1$ og $c < 1$. Hvilken betingelse på disse parametre skal være opfyldt, for at modellen har en ligevægt (S^*, I^*) med $S^* > 0$ og $I^* > 0$? Angiv i disse tilfælde ligevægten (S^*, I^*) med $S^* > 0$ og $I^* > 0$ udtrykt ved N, a, b og c .

(f) [Vanskeligere spørgsmål] Vi betragter den modificerede model

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= (1-a)S_t + bS_t^2 \left(1 - \frac{S_t + I_t}{N}\right) \\ I_{t+1} &= (1-c)I_t + aS_t, \end{aligned}$$

hvor N, a, b og c er vilkårlige positive parametre med $a < 1$ og $c < 1$. Antag, at der gælder $\frac{N}{1+a/c} > \frac{4a}{b}$. Vis, at modellen har to forskellige ligevægte (S^*, I^*) med $S^* > 0$, $I^* > 0$ og $S^* + I^* < N$.