Modul 1: forelæsning 2
Lineære ligningssystemer
Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Rækkeoperationer og Gauss-elimination

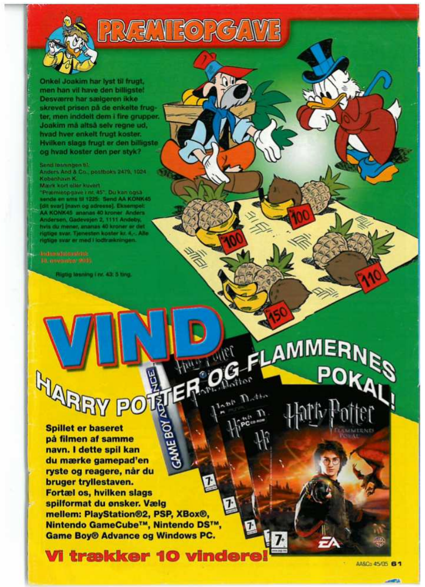
- I denne forelæsning gennemgår vi en smart metode til at løse lineære ligningssystemer vha. såkaldte *rækkeoperationer*. Metoden kaldes ofte for *Gauss-elimination*.
- I de næste par uger benyttes denne metode i forbindelse med en række begreber (som gennemgås efterhånden):
  - Lineær uafhængighed
  - Rang
  - Basis
  - Egenvektorer
  - Diagonalisering
- Alle disse begreber indgår, når vi sidst i modulet behandler fremskrivninger i matrixmodeller

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 \quad \text{osv.}$$

dvs.

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{v}_0.$$

Eksempel: Anders And



Eksempel: Afstemning af kemiske reaktionsligninger

$$x_1 \mathrm{HgI}_4^{--} + x_2 \mathrm{OH}^- + x_3 \mathrm{NH}_3 \to x_4 \mathrm{Hg}_2\mathrm{NI} + x_5 \mathrm{I}^- + x_6 \mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

Bestem tallene $x_1, \ldots, x_6$ så vidt det er muligt ...

Idé: tæl grundstoffer og ladninger:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_4 \\ 4x_1 &= x_4 + x_5 \\ x_2 &= x_6 \\ x_2 + 3x_3 &= 2x_6 \\ x_3 &= x_4 \\ 2x_1 + x_2 &= x_5 \end{aligned}$$

Eksempel: Trafiknetværk

- To gange to ensrettede gader krydser hinanden; det giver 4 kryds markeret med $K_1, \ldots, K_4$.
- Trafikken (i_1, i_2, i_3, i_4 og u_1, u_2, u_3, u_4) tælles ved alle ind- og udgange fra krydset.
- Vi ønsker at bestemme trafikflowet (x_1, x_2, x_3, x_4) mellem de 4 kryds.

$$\begin{tikzcd}
 & i_1 \arrow[d] & u_4 & \\
u_1 & K_1 \arrow[l] \arrow[d, "x_2"'] & K_4 \arrow[l, "x_1"'] \arrow[u] & i_4 \arrow[l] \\
i_2 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "x_3"'] \arrow[d] & K_3 \arrow[u, "x_4"'] \arrow[r] & u_3 \\
 & u_2 & i_3 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Idéen går ud på, at der ved hvert af de fire kryds må køre lige så mange biler ind som ud! For K_1's vedkommende giver dette

$$x_1 + i_1 = x_2 + u_1.$$

På den måde finder vi fire ligninger med fire ubekendte.

Løsning af lineære ligningssystemer

Sætning: Løsning af n ligninger med n ubekendte

Antag at $\mathbf{A}$ har en invers matrix ($\det \mathbf{A} \neq 0$). Da har ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ netop én løsning $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

- Hvad nu hvis $\det \mathbf{A} = 0$?
- Hvad nu hvis antal ligninger ikke er det samme som antal variable? Så er matricen ikke kvadratisk og kan ikke have en invers.

Eksempler

(A) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$ (B) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

(C) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 3 \end{aligned}$ (D) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

Lineært ligningssystem: m ligninger med n ubekendte

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Koefficientmatrix og totalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Elementære rækkeoperationer

Disse betår af tre typer af operationer, der udføres på matricer:

- lægge et multiplum af en række til en anden række (*rækkeoperation*)
- bytte om på to af rækkerne (*rækkeombytning*)
- gange en række igennem med et tal (*tal gange række*)

Uddybes nedenfor.

Rækkeoperation

- En rækkeoperation på en matrix består i at gange alle tallene i den i'te række med samme tal t og derefter lægge den til den j'te række.
- At udføre en rækkeoperation på totalmatricen for et ligningssystem svarer til at gange den i'te række i ligningssystemet igennem med et tal t og så lægge den til den j'te række i ligningssystemet.
- En rækkeoperation ændrer derfor ikke løsningsmængden til ligningssystemet.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Elementære rækkeoperationer – fortsat

Rækkeombytning

- En rækkeombytning består i at ombytte to rækker i en matrix.
- At udføre en rækkeombytning i totalmatricen for et ligningssystem svarer til bytte om på to af ligningerne i ligningssystemet, og altså blot at skrive ligningerne i systemet i en anden rækkefølge.
- En rækkeombytning ændrer derfor ikke løsningsmængden til ligningssystemet.

Multiplikation af en række med et tal $\neq 0$

- At multiplicere en række i totalmatricen svarer til at gange en af ligningerne i systemet igennem med et tal $\neq 0$.
- Multiplikation af en række med et tal $\neq 0$ ændrer derfor ikke løsningsmængden til ligningssystemet.

Hvorfor så gøre det?
Fordi det, hvis det gøres kløgtigt, så bliver meget nemmere at løse et givent lineært ligningssystem.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Elementære søjleoperationer

Giver generelt ingen mening i forbindelse med ligningsløsning!

- Tænk at bytte om på første og sidste søjle (koefficienterne til x_1 og højresiden)...
- Tænk at lægge første søjle til anden søjle (koefficienterne til x_1 lægges til koefficienterne til x_2)...
- Tænk...

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Regneeksempel: monstermatrix

1. Ligninger

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 &= 2\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 7\\
-x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 2\\
3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 13x_4 + x_5 &= 17
\end{aligned}$$

2. Totalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7\\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2\\ 3 & 6 & 3 & 13 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Løsning ved elementære rækkeoperationer

Resumé af proceduren

Løsning af et ligningssystem på formen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

- Opskriv totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.
- Udfør rækkeoperationer, tal gange række og rækkeombytninger, så den bliver på formen $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ med mange nuller under diagonalen.
- Er alle nulrækker i $\mathbf{A}'$ også nulrækker i $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$?

  Hvis ikke, da er der ingen løsninger.
- Slet eventuelle nulrækker i totalmatricen, og skaf mange nuller over diagonalen.
- De søjler i koefficientmatricen, der **ikke** har et trappetrin bruges som de frie variable t, s osv.

Række echelonform

Ledende 1-tal
En *ledende indgang* i en matrix er det første element i en række, som ikke er lig med nul (når man ser fra venstre mod højre).

Et *ledende 1-tal* er en ledende indgang som er lig med 1.

Række echelonform
En matrix er på *række echelonform*, hvis der gælder følgende:

- Enhver række, som ikke er nulrækken, har et ledende 1-tal.
- De ledende 1-taller står længere og længere mod højre, når man bevæger sig ned gennem matricens rækker.
- Alle nulrækker findes i bunden af matricen.

Reduceret række echelonform
En matrix er på *reduceret række echelonform*, hvis den er på række echelonform og der desuden gælder

- Alle elementer i søjlerne *over* de ledende 1-taller er nul.

Gauss-elimination

- Enhver matrix kan bringes på reduceret række echelonform vha. elementære rækkeoperationer.
- Processen kaldes for *Gauss-elimination*.
- Gauss-elimination kan foretages på mange forskellige måder, f.eks. ved at anvende de elementære rækkeoperationer i forskellig rækkefølge.

Der gælder imidlertid følgende resultat:

Sætning

Antag, at matricen $\mathbf{A}$ ved elementære rækkeoperationer ændres til en matrix $\mathbf{A}'$, som er på reduceret række echelonform.

Antag videre, at $\mathbf{A}$ ved andre elementære rækkeoperationer ændres til $\mathbf{A}''$, hvor også $\mathbf{A}''$ er på reduceret række echelonform.

Da gælder
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}''.$$