Modul 1: forelæsning 6
Diagonalisering

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Eksempel

Lad

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Så er

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{D}\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 7x_0 \\ 9y_0 \\ 13z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{D}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7^2x_0 \\ 9^2y_0 \\ 13^2z_0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} 7^tx_0 \\ 9^ty_0 \\ 13^tz_0 \end{pmatrix}.$$

Konklusion Det er let at fremskrive med en diagonalmatrix!

Spørgsmål Givet en matrix **A**, kan vi "lave **A** om til en diagonalmatrix?"

Eksempel

Bestem alle egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Skema del 1

matrix	egenværdier	egenvektorer
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$	$1, 11$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-2, -3, 1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$4, 4, 21$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	Ingen egenværdier! (Tages op i næste uge)	
$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$2, 2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diagonalisering

Definition

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er *diagonaliserbar*, hvis der findes en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$.

Hvorfor bruges ordet "diagonaliserbar"?

Hvis $\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix med $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i diagonalen, så gælder $\mathbf{D}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Hvis $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så gælder $\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$.

☞ $\mathbf{A}$ virker på samme måde som $\mathbf{D}$, når vi ser på egenvektorer. Diagonaliserbarhed: der skal være "nok" af disse egenvektorer.

Sætning

- Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige.
- Hvis en $n \times n$ matrix har n forskellige egenværdier, så er den diagonaliserbar.

Diagonalisering – matricen Q

Sætning

Matricen $\mathbf{A}$ er diagonaliserbar netop hvis der findes en regulær matrix $\mathbf{Q}$ sådan at

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

er en diagonalmatrix. Hvis dette er tilfældet, da gælder følgende:

Den j'te søjle i $\mathbf{Q}$ er en egenvektor $\mathbf{q}_j$ og den tilhørende egenværdi λ_j er netop diagonalelementet i den j'te søjle i $\mathbf{D}$, dvs.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) \quad og \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bemærkning

- Matricen $\mathbf{Q}$ siges at diagonalisere $\mathbf{A}$.
- Matricen $\mathbf{Q}$ er basisskiftmatricen hørende til basisskiftet fra den naturlige basis til basen bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$.

Skema del 2

matrix	diagonaliserbar?	Q	D
A	ja	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$
B	ja	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
C	ja	$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$
M	? (næste uge)		
N	nej (ikke to lineært uafhængige egenvektorer)		

Diagonaliserbar – og hvad så?

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{D} \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$$

Sætning

Hvis **A** er diagonaliserbar, så gælder der

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{Q}\mathbf{D}^t\mathbf{Q}^{-1} \qquad \text{for } t = 1, 2, 3, \ldots.$$

Bevis for sætningen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 = (\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1})^2 &= (\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q}\mathbf{D}\,(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q})\,\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\\ &= \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^2\mathbf{Q}^{-1} \quad \text{osv.}\end{aligned}$$

Anvendelser af sætningen senere. Benytter at

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{v}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{D}^t\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}_0 = \mathbf{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^t\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}_0.$$

Epidemieksemplet

Vi lader $\mathbf{x}_t = (r_t, s_t, d_t, h_t)^T$ og betragter modellen

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t,$$

hvor matricen **A** er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0\end{pmatrix}.$$

Modellen kan også skrives som

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0.$$

Vi skal se, at **A** er diagonaliserbar og hvordan det kan bruges til at forudsige, hvad der sker i det lange løb i epidemimodellen.

Epidemieksemplet – egenværdier

Det karakteristiske polynomium udregnes

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det&\begin{pmatrix}0.8-\lambda & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.2 & 0.7-\lambda & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.1 & 1.0-\lambda & 0.0\\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (0.8-\lambda)(0.7-\lambda)(1.0-\lambda)(1.0-\lambda).\end{aligned}$$

Egenværdierne findes

$$\lambda_1 = 0.8, \quad \lambda_2 = 0.7, \quad \lambda_3 = 1.0 \quad \text{(dobbeltrod)}.$$

Epidemieksemplet – egenvektorer

- Egenværdierne er $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.7, \lambda_3 = 1.0$ (dobbeltrod).
- Egenvektorerne hørende til λ_1 er $t\mathbf{q}_1$, hvor $\mathbf{q}_1$ er første søjle i **Q** nedenfor.
- Egenvektorerne hørende til λ_2 er $t\mathbf{q}_2$, hvor $\mathbf{q}_2$ er anden søjle i **Q**.
- Egenvektorerne hørende til $\lambda_3 = 1.0$ er $t_1\mathbf{q}_3 + t_2\mathbf{q}_4$, hvor $\mathbf{q}_3$ er tredje søjle og $\mathbf{q}_4$ er fjerde søjle i **Q**.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}-0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0\\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0\\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0\end{pmatrix}$$

- $\det \mathbf{Q} = 0.75 \neq 0$ så $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ og $\mathbf{q}_4$ er et lineært uafhængigt sæt.
- Maticen **A** er diagonaliserbar.
- $\mathbf{A}^t = \mathbf{Q}\mathbf{D}^t\mathbf{Q}^{-1}$.

Epidemieksemplet: Matricen Q

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{Q}\mathbf{D}^t\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} -2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.33 & -0.67 & 0.00 & 0.00 \\ 0.33 & 0.33 & 1.00 & 0.00 \\ 0.67 & 0.67 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^t = \begin{pmatrix} 0.8^t & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7^t & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0^t & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0^t \end{pmatrix}$$

Epidemieksemplet – Brug matricen Q

- Lad $\mathbf{x}_0$ være en startfordeling af raske, syge, døde og helbredte.
-

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{D}^t\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0$$
$$= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 0.8^t & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7^t & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0^t & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0^t \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

- Konklusion (det er godt at have R):

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}_t = \lim_{t\to\infty} \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}r_0 + \frac{1}{3}s_0 + d_0 \\ \frac{2}{3}r_0 + \frac{2}{3}s_0 + h_0 \end{pmatrix}$$

Epidemieksemplet – Brug egenvektorerne

- Lad $\mathbf{x}_0$ være en startfordeling af raske, syge, døde og helbredte.
- Skriv $\mathbf{x}_0$ som en linearkombination af basisvektorerne $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{q}_1 + c_2\mathbf{q}_2 + c_3\mathbf{q}_3 + c_4\mathbf{q}_4.$$

  ((c_1, c_2, c_3, c_4) er koordinaterne for $\mathbf{x}_0$ i denne basis, dvs. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{c}$.)
- Anvend matricen $\mathbf{A}$ og udnyt at $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$ er egenvektorer:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= c_1\mathbf{q}_1 + c_2\mathbf{q}_2 + c_3\mathbf{q}_3 + c_4\mathbf{q}_4 \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 &= c_1 0.8\mathbf{q}_1 + c_2 0.7\mathbf{q}_2 + c_3 1.0\mathbf{q}_3 + c_4 1.0\mathbf{q}_4 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= c_1 0.8^2\mathbf{q}_1 + c_2 0.7^2\mathbf{q}_2 + c_3 1.0^2\mathbf{q}_3 + c_4 1.0^2\mathbf{q}_4 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 &= c_1 0.8^t\mathbf{q}_1 + c_2 0.7^t\mathbf{q}_2 + c_3 1.0^t\mathbf{q}_3 + c_4 1.0^t\mathbf{q}_4. \end{aligned}$$

- Konkludér $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}_t = \lim_{t\to\infty} \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 = c_3\mathbf{q}_3 + c_4\mathbf{q}_4$.
- Hvordan bestemmes c_3 og c_4? $\quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{c}$ dvs. $\mathbf{c} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0$.