Modul 1: forelæsning 5
Basisskift. Egenværdier

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Koordinater mht. en basis

- Lad $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$ være en basis i $\mathbb{R}^n$.
- Lad
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
være en vektor i $\mathbb{R}^n$.
- Da kan $\mathbf{x}$ skrives som en entydig bestemt linearkombination af basisvektorerne:
$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{q}_1 + \ldots + t_n\mathbf{q}_n.$$
- Talsættet $(t_1, \ldots, t_n)$ kaldes $\mathbf{x}$'s koordinater i basen $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$.

Koordinater mht. en basis – fortsat

- Formlen $\mathbf{x} = t_1\mathbf{q}_1 + \ldots + t_n\mathbf{q}_n$ kan skrives
$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{t},$$
hvor $\mathbf{Q}$ har søjlerne $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ (i den rækkefølge) og
$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$
- Koordinaterne for $\mathbf{x}$ mht. denne basis kan bestemmes ved formlen
$$\mathbf{t} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}.$$
- Matricen $\mathbf{Q}$ kaldes *basisskiftmatricen*
(fra den naturlige basis til den nye basis $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$).

Eksempel

Lad

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vis at $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.
2. Bestem den vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$, som har koordinaterne $(4, -1)$ mht. denne basis.
3. Hvilke koordinater har vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mht. denne basis?

Den naturlige basis

Den *naturlige basis* for $\mathbb{R}^n$ er $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, hvor

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

(1-tallet står på den k'te plads).

For en vilkårlig vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gælder

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n.$$

(Koordinaterne for $\mathbf{x}$ i den naturlige basis er netop talsættet $(x_1, \dots, x_n)$, og det er grunden til navnet.)

Basisskift generelt

- Lad $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ og $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ være to baser for $\mathbb{R}^n$.
- Lad $\mathbf{x}$ have koordinaterne $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ mht. basen $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ og lad $\mathbf{A}$ være basisskiftmatricen fra den naturlige basis til basen $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, dvs. $\mathbf{A}$ har søjlerne $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

  Vi har så $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$.
- Lad $\mathbf{x}$ have koordinaterne $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ mht. basen $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ og lad $\mathbf{B}$ være basisskiftmatricen fra den naturlige basis til basen $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, dvs. $\mathbf{B}$ har søjlerne $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$.

  Vi har så $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{z}$.
- Da er der følgende sammenhæng mellem $\mathbf{x}$'s koordinater mht. hver af de to baser:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x} = \mathbf{B}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{så} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(dvs. $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{z}$).

Egenværdi og egenvektor – motivation

Epidemiens udvikling

- Hvordan udvikler antallet af raske, syge, døde og helbredte sig i epidemimodellen?
- Vi vil senere give et svar vha. egenværdier og -vektorer for den indgående matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

- Vigtigt at den største egenværdi er 1 og at egenvektorerne udgør en basis for $\mathbb{R}^4$.

Egenværdi og egenvektor

Definition

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Hvis der om en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^n$ og et tal λ gælder

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

så siges $\mathbf{x}$ at være en *egenvektor* for $\mathbf{A}$ med tilhørende *egenværdi* λ.

Bemærkning: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ betyder at de to vektorer $\mathbf{A}\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}$ er proportionale med proportionalitetsfaktor λ.

Eksempel

Hvilke af følgende vektorer $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}?$$

Og hvad med eventuelle tilhørende egenværdier?

Det karakteristiske polynomium

Definition

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Polynomiet $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ kaldes det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$.

Eksempel

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(10-\lambda)-9 = \lambda^2-12\lambda+11$$

(Matricen $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ fremkommer ved at trække samme tal λ fra alle diagonalelementerne.)

Sætning

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Et tal λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ netop når

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

Bestemmelse af egenværdier

1. Udregn $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ ved at bruge en af metoderne om udregning af determinant.
2. Løs ligningen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ mht. λ. (Det er en n'te grads ligning, som har højst n reelle tal som løsninger.)
3. R kan bruges: `eigen(A)` eller `eigen(A)$values`.

NB For en trekantsmatrix er egenværdierne netop diagonalelementerne.

Bestemmelse af egenvektorer

Når λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$, så findes en egenvektor $\mathbf{x}$ hørende til λ som en løsning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ til ligningen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1. Løs ligningssystemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved at lave elementære rækkeoperationer.
2. Bestem de mulige værdier for vektoren $\mathbf{x}$ (der er altid uendelig mange løsninger).
3. R kan bruges: `eigen(A)` eller `eigen(A)$vectors`.