1 Disposition

Jeg vil gerne gennemgå opgave 1. Jeg vil forsøge at anlægge et perspektiv, hvor jeg fokuserer mere på de overordnede principper og bagvedliggende intutioner end konkrete udregninger.

- Præsentation og udledning af modellen
- Definition af ligevægt, og bevis for under hvilke betingelser en affin model har en ligevægt.
- Udledning af ligevægten for vores model.
- Definition af stabilitet og redegørelse for betingelserne for, at en affin model har en stabil ligevægt.
- Udledning af betingelserne for, hvornår ligevægten for vores model er stabil.
- Fortolkning af resultaterne.

(Når jeg bruger egenværdierne, så husk at gennemgå hvad egenværdier er og intuitionen bag det karakteriske polynomien).

2 Udregninger

Vi vil gerne modellere den samlede mængde af forbrug og investinger i år t:

$$x_t = \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vi ønsker en simpel model på formen

$$x_{t+1} = Mx_t + \gamma, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

altså en model, hvor x_t er en affin funktion af x_{t-1}.

Vi forsimpler virkeligheden ved hjælp af tre antagelser:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{3}$$
$$C_{t+1} = aY_t + b, \qquad 0 < a < 1, \quad 0 < b \tag{4}$$
$$I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t), \qquad 0 < c \tag{5}$$

Den første antagelse siger, at nationalproduktet i år t er summen af forbruget og investingerne i år t. Den anden antagelse siger, at forbruget i år $t + 1$ udgøres af en *fast* andel a af nationalproduktet året før, samt en fast mængde forbrug b. Den tredje antagelse siger, at forholdet mellem investeringerne i år $t+1$ og forbrugsstigningen mellem år t og $t+1$ er konstant, nemlig c.

Vi omskriver disse ligninger til den ønskede form:

$$C_{t+1} = aC_t + aI_t + b \tag{6}$$

$$I_{t+1} = c(aC_t + aI_t + b - C_t) = (a-1)cC_t + acI_t + bc \tag{7}$$

hvilket giver

$$x_{t+1} = Mx_t + \gamma, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^2 \tag{8}$$

hvor

$$M = \begin{bmatrix} a & a \\ (a-1)c & ac \end{bmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix}, \qquad 0 < b, c, \qquad 0 < a < 1 \tag{9}$$

Lad os nu bestemme om denne model har en ligevægt og under hvilke betingelser ligevægten er stabil.

Definitionen af ligevægt $x^* \in \mathbb{R}^2$ er

$$x^* = Mx^* + \gamma \tag{10}$$

hvilket er ækvivalent med

$$Mx^* - x^* = -\gamma \tag{11}$$

hvilket er ækvivalent med

$$(M - E)x^* = -\gamma \tag{12}$$

hvilket er ækvivalent med

$$x^* = -(M - E)^{-1}\gamma \tag{13}$$

Altså har modellen en ligevægt, hvis og kun hvis $M - E$ er invertibel, og i så fald er ligevæten givet som ovenfor.

Da

$$\det(M - E) = (a-1)(ac-1) - a(a-1)c = 1 - a > 0 \tag{14}$$

så har $(M-E)$ en invers, nemlig

$$(M-E)^{-1} = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} ac-1 & -a \\ -(a-1)c & a-1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

og modellen har netop én ligevægt givet ved

$$-(M-E)^{-1}\begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

For at finde ud af om denne ligevægt er stabil eller ej, vil jeg se nærmere på egenværdierne for A. Jeg opskriver derfor det karakteristiske polynomien for A:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a \\ (a-1)c & ac-\lambda \end{vmatrix} = \tag{17}$$

$$(a-\lambda)(ac-\lambda) - a(a-1)c = \tag{18}$$

$$\lambda^2 + (-a(c+1))\lambda + ac \tag{19}$$

Fra hintet i opgavebeskrivelsen ved jeg, at polynomiet har rødder, der er numerisk skarpt mindre end 1, hvis og kun hvis

$$|ac| < 1 \tag{20}$$

og

$$|-a(c+1)| < 1 + ac \tag{21}$$

begge gælder.

Da $a, b, c > 0$, så er

$$|-a(c+1)| < 1 + ac \tag{22}$$

ækvivalent med

$$ac + a < 1 + ac \tag{23}$$

hvilket er ækvivalent med

$$a < 1 \tag{24}$$

hvilket er opfyldt per antagelse.

Altså har vi, at modellen har en stabil ligevægt, hvis og kun hvis

$$c < \frac{1}{a} \tag{25}$$

Lad os nu fortolke vores resultater. For at vores model skal have en stabil ligevægt og altså konvergere mod denne, når $t \to \infty$, så skal det konstante forhold c mellem vores investeringer og vores forbrugsstigning holde sig under en bestemt grænse, nemlig $\frac{1}{a}$. Hvis $a = 0.5$ og vores forbrug altså udgør halvdelen af sidste års nationalprodukt plus b, så skal vores investeringer være under dobbelt så store som forbrugsstigningen, hvis modellen skal konvergere. I så fald konvergerer den mod en investeringsmængde på 0 og et årligt forbrug på $b/(1-a)$.

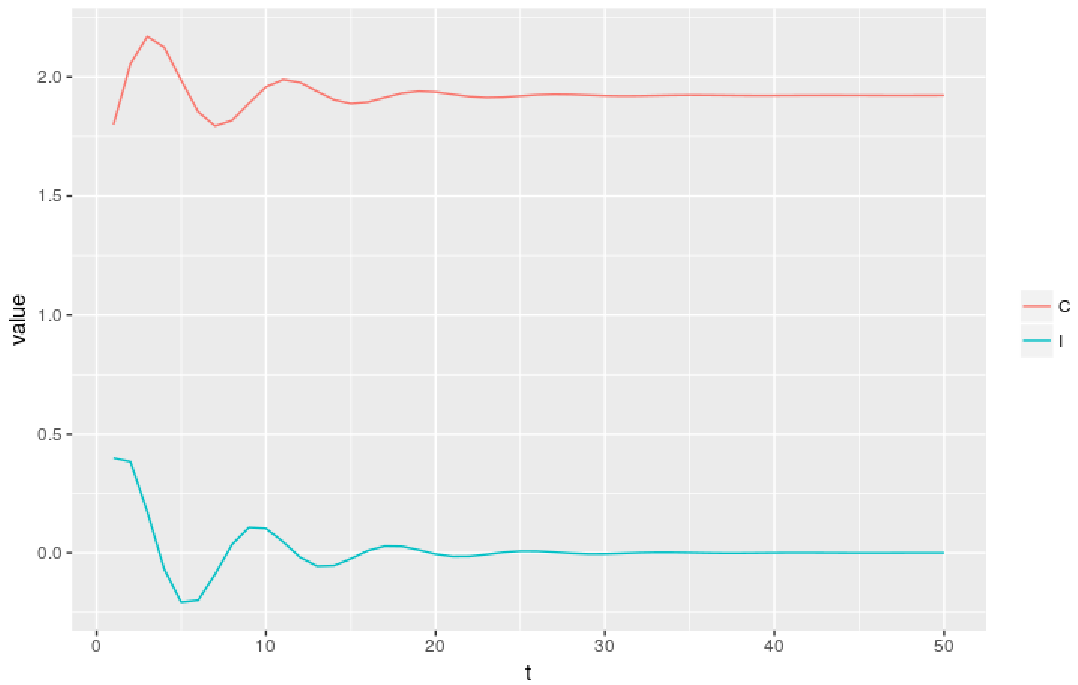
Sætter vi $a = 0.48, b = 1, c = 1.5$, så har modellen en stabil ligevægt, da

$$c = 1.5 < 2.08 = \frac{1}{0.48} = \frac{1}{a} \tag{26}$$

Altså har vores model i så fald netop én stabil ligevægt, og denne er givet ved

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-0.48} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9231 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Dette svarer til, hvad vi ser, når vi numerisk fremskriver modellen ud fra disse parametre, og med en startværdi $x_0 = (1.8, 0.4)$:



Her er værdierne af C_t og I_t for $t = 45, ..., 50$:

Det ser altså ud til, at (C_t, I_I) konveregerer mod $(1.923, 0)$, når t går mod uendelig.

	t	C	I
1	45	1.923166	-0.000291
2	46	1.922980	-0.000279
3	47	1.922897	-0.000126
4	48	1.922930	0.000050
5	49	1.923031	0.000151
6	50	1.923127	0.000145