Matematik og modeller, 2018

Miniprojekt 1: Matricer og matrixmodeller

Aflevering Miniprojektet afleveres **tirsdag den 15.5.2018 kl. 8.00** ved forelæsningen.

Relevante udtryk i R samt resultater og grafer medtages i passende omfang.

Foruden den matematiske teori kan følgende eksempler i noterne være relevante: LA228-229, LA231-237.

Opgave 1
Denne opgave tager udgangspunkt i en nationaløkonomisk model for udviklingen mellem forbrug og investeringer. Idet C_t og I_t betegner forbruget og investeringerne i år t beskrives modellen ved ligningen

$$\begin{pmatrix} C_{t+1} \\ I_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ (a-1)c & ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix},$$

hvor a, b og c er positive parametre, og hvor det endvidere antages, at $a < 1$.

(a) Lad $a = 0.48,\ b = 1$ og $c = 1.5$. Benyt fremskrivninger i R med

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

til at vise, at

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix}$$

har en grænseværdi når $t \to \infty$ og angiv denne grænseværdi.

(b) Lad fortsat $a = 0.48,\ b = 1$ og $c = 1.5$. Vis vha. den matematiske teori i noterne, at modellen har netop én ligevægt og bestem denne. Afgør endvidere om denne ligevægt er stabil. Sammenlign med resultaterne i (a).

(c) Lad a, b og c være vilkårlige positive parametre (med $a < 1$) . Vis at modellen har netop én ligevægt og bestem denne.

(d) Lad fortsat a, b og c være vilkårlige positive parametre (med $a < 1$). Find betingelser på a og c, som sikrer, at ligevægten er stabil.
[Vink: Det oplyses og skal ikke vises, at rødderne, λ_1 og λ_2, i et polynomium af formen $\lambda^2 + A\lambda + B$ opfylder $|\lambda_1| < 1$ og $|\lambda_2| < 1$, netop når $|B| < 1$ og $|A| < 1 + B$.]

Opgave 2

I denne opgave betragtes en generel model for aldersopdelt populationsdynamik. Vi lader $b_0,\dots,b_n$, $p_0,\dots,\ p_{n-1}$ være positive tal og definerer Leslie-matricen $\mathbf{M}$ ved

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tallene $b_0,\dots,b_n$ fortolkes som aldersspecifikke fødselsrater og $p_0,\dots,p_{n-1}$ som aldersspecifikke overlevelsesrater. Lad endvidere

$$l_0 = 1, \quad l_1 = p_0, \quad l_2 = p_0 p_1, \quad \dots \quad l_n = p_0 \cdots p_{n-1}.$$

Disse tal angiver sandsynligheden for at opnå en given alder, fx er $l_2 = p_0p_1$ sandsynligheden for at blive mindst to år gammel.

(a) Lad $n = 2$ (så $\mathbf{M}$ er en 3×3 matrix). Vis at

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = -(\lambda^3 - l_0b_0\lambda^2 - l_1b_1\lambda - l_2b_2).$$

(b) Lad $n = 3$ (så $\mathbf{M}$ er en 4×4 matrix). Vis at

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^4 - l_0b_0\lambda^3 - l_1b_1\lambda^2 - l_2b_2\lambda - l_3b_3.$$

(c) Generelt kan man vise, at

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = (-1)^{n+1}\left(\lambda^{n+1} - l_0b_0\lambda^n - l_1b_1\lambda^{n-1} - \ldots - l_nb_n\right).$$

Lad

$$S(\lambda) = l_0b_0\lambda^{-1} + l_1b_1\lambda^{-2} + \ldots + l_nb_n\lambda^{-(n+1)}.$$

Vis at λ er en egenværdi for $\mathbf{M}$ netop hvis $S(\lambda) = 1$. (Gør det evt. først for $n = 3$.)

Vis at $S(\lambda)$ er aftagende for $\lambda > 0$; at $S(\lambda) \to \infty$ når $\lambda \to 0_+$ og $S(\lambda) \to 0$ når $\lambda \to \infty$. Skitsér grafen for $S(\lambda)$. Vis derefter, at $\mathbf{M}$ har netop én positiv egenværdi λ_1.

(d) Det oplyses, at der generelt gælder, at $\mathbf{M}^{n+1}$ er en positiv matrix. Benyt dette samt Perron-Frobenius' sætninger til at vise, at λ_1 er den dominerende egenværdi for $\mathbf{M}$. (Bemærk: λ_1 er egenværdien fra (c).)

(e) Vis ved udregning at

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1\lambda_1^{-1} \\ \vdots \\ l_{n-1}\lambda_1^{-(n-1)} \\ l_n\lambda_1^{-n} \end{pmatrix}$$

er en egenvektor hørende til egenværdien λ_1. (Gør det evt. først for $n = 3$.)

Opgave 3
Vi betragter modellen

$$\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_t \qquad \text{med} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.4 & 1.2 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

for en kaninpopulation opdelt i tre aldersklasser.
Delopgave (a), (b) og (c) går ud på at bestemme den dominerende egenværdi og en tilhørende egenvektor på 3 forskellige måder: ved at foretage fremskrivninger i modellen, ved at benytte Opgave 2, og endeligt ved at bruge `R`-funktionen `eigen`.

(a) Foretag fremskrivninger i `R` med begyndelsesvektoren $\mathbf{v}_0 = (100, 0, 0)$ og benyt disse fremskrivninger til at bestemme den dominerende egenværdi λ_1 (vækstraten i det lange løb) samt den tilhørende egenvektor $\mathbf{q}_1$, der angiver procentfordelingen mellem aldersklasserne i det lange løb.

(b) Opstil for $\mathbf{M}$ funktionen $S(\lambda)$ fra Opgave 2. Benyt Opgave 2 ((c) og (d)) til at bestemme den dominerende egenværdi λ_1, idet løsningen til $S(\lambda) = 1$ i intervallet $[1, 10]$ kan findes med `R`-funktionen `uniroot`. Angiv også den tilhørende egenvektor fra Opgave 2 (e).

(c) Bestem vha. `R` samtlige egenværdier λ_1, λ_2 og λ_3 med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ og $\mathbf{q}_3$. Sammenlign med resultaterne i (a) og (b).

Opstil basisskiftmatricen $\mathbf{Q}$ og benyt `R` til at eftervise, at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix med λ_1, λ_2 og λ_3 i diagonalen. (Afrund evt. til et passende antal decimaler.)

(d) Lad $\mathbf{v}_0$ være en vilkårlig vektor og antag at

$$\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{q}_1 + c_2\mathbf{q}_2 + c_3\mathbf{q}_3,$$

hvor $\mathbf{q}_1$ er en egenvektor hørende til den dominerende egenværdi λ_1, og hvor $\mathbf{q}_2$ hhv. $\mathbf{q}_3$ er egenvektorer hørende til egenværdierne λ_2 hhv. λ_3. (Altså er (c_1, c_2, c_3) koordinaterne for vektoren $\mathbf{v}_0$ i basen $(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_3)$). Vis, at

$$\mathbf{v}_t = c_1\lambda_1^t\mathbf{q}_1 + c_2\lambda_2^t\mathbf{q}_2 + c_3\lambda_3^t\mathbf{q}_3,$$

for $t \geq 1$, hvor $\mathbf{v}_t = \mathbf{M}^t\mathbf{v}_0$.
[Vink: I kan eventuelt nøjes med af eftervise formlen for $t = 1$ og $t = 2$.]
Udtryk grænseværdien $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^t}\mathbf{v}_t$ ved koefficienterne c_1, c_2, c_3 og egenvektorerne $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.

(e) Lad nu $a > 0$ være ukendt og antag, at en population er beskrevet ved matricen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.4 & a & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem den mindste værdi af a, som fører til en population, der overlever i det lange løb.