Modul 5: forelæsning 2
Ikke-lineære systemer af differentialligninger
Numerisk løsning

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Eulers metode for systemer af 2 differentialligninger

Numerisk løsning af system af differentialligninger:

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x,y) \\ y' &= g(t,x,y) \end{aligned}$$

Startpunkt (t_0, x_0, y_0); steplængde h.

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_0 + h, & x_1 &= x_0 + f(t_0,x_0,y_0)h, & y_1 &= y_0 + g(t_0,x_0,y_0)h, \\
t_2 &= t_1 + h, & x_2 &= x_1 + f(t_1,x_1,y_1)h, & y_2 &= y_1 + g(t_1,x_1,y_1)h. \\
&\vdots & &\vdots & &\vdots \\
t_{n+1} &= t_n + h, & x_{n+1} &= x_n + f(t_n,x_n,y_n)h, & y_{n+1} &= y_n + g(t_n,x_n,y_n)h
\end{aligned}$$

Eulers metode for systemer af differentialligninger

Numerisk løsning af system af differentialligninger:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Startpunkt $(t_0, \mathbf{x}_0)$; steplængde h.

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_0 + h, & \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t_0,\mathbf{x}_0)h, \\
t_2 &= t_1 + h, & \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}(t_1,\mathbf{x}_1)h, \\
&\vdots & &\vdots \\
t_{n+1} &= t_n + h, & \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \mathbf{f}(t_n,\mathbf{x}_n)h.
\end{aligned}$$

Eulers forbedrede metode for systemer af 2 differentialligninger

Numerisk løsning af system af differentialligninger:

$$x' = f(t,x,y) \qquad y' = g(t,x,y)$$

Startpunkt (t_0, x_0, y_0). Steplængde h dvs. $t_n = t_0 + nh$.

$$x_1^* = x_0 + f(t_0,x_0,y_0)h, \qquad y_1^* = y_0 + g(t_0,x_0,y_0)h$$

$$x_1 = x_0 + \frac{f(t_0,x_0,y_0) + f(t_1,x_1^*,y_1^*)}{2}\,h, \quad y_1 = y_0 + \frac{g(t_0,x_0,y_0) + g(t_1,x_1^*,y_1^*)}{2}\,h$$

$$x_2^* = x_1 + f(t_1,x_1,y_1)h, \qquad y_2^* = y_1 + g(t_1,x_1,y_1)h$$

$$x_2 = x_1 + \frac{f(t_1,x_1,y_1) + f(t_2,x_2^*,y_2^*)}{2}\,h, \quad y_2 = y_1 + \frac{g(t_1,x_1,y_1) + g(t_2,x_2^*,y_2^*)}{2}\,h$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Eulers forbedrede metode for systemer af differentialligninger

Numerisk løsning af system af differentialligninger:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$$

Startpunkt $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Steplængde h dvs. $t_n = t_0 + nh$.

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t_0,\mathbf{x}_0)h, \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{f}(t_0,\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(t_1,\mathbf{x}_1^*)}{2}\cdot h,$$

$$\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}(t_1,\mathbf{x}_1)h, \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{f}(t_1,\mathbf{x}_1) + \mathbf{f}(t_2,\mathbf{x}_2^*)}{2}\cdot h,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Eulers forbedrede metode for lineære systemer

Numerisk løsning af lineære systemer af differentialligninger:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

er et særtilfælde af den generelle metode (med $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$):

Startpunkt $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Steplængde h dvs. $t_n = t_0 + nh$.

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}(t_0))\cdot h, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}(t_0)) + (\mathbf{A}\mathbf{x}_1^* + \mathbf{b}(t_1))}{2}\cdot h,$$

$$\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}(t_1))\cdot h, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}(t_1)) + (\mathbf{A}\mathbf{x}_2^* + \mathbf{b}(t_2))}{2}\cdot h,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Rod-top: Simplere model (fra Modul 4)

- W_S: Mobilt kulstof i toppen
- W_G: Strukturelt kulstof i toppen

$$\begin{pmatrix} W_S' \\ W_G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_G & K_D \\ Y_G K_G & -K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_S \\ W_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_G(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs. $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{P}(t)$.

Numerisk løsning med forskellige funktioner $P_G(t)$:

- Sollysets variation i løbet af dagen: $P_G(t) = 10(1 + \sin(2\pi t))$.
  Begyndelsesbetingelse: $\mathbf{W}(0) = (2, 10)$.
- Lyset slukket i to døgn, tændt i to døgn, osv.
  Begyndelsesbetingelse:
  I ligevægt ved konstant lyspåvirkning $p_0 = 10$.
- Opgave 5.3: Sollysets variation i løbet af en sæson:
  $P_G(t) = 10\left(1 + 0.5 \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right)\right)$.

  Forskellige høststrategier.

Rod-top: Eulers forbedrede metode

Sollysets variation i løbet af dagen:

$P_G(t) = 10(1+\sin(2\pi t))$ for $t \in [0, 12]$ med $W_S(0) = 2$ og $W_G(0) = 10$

```
> KG<-2.2; KD<-0.15; YG<-0.8;
> A<-matrix(c(-KG,YG*KG,KD,-KD),2)
> p<-function(t){10*(1+sin(2*pi*t))}
> P<-function(t){c(p(t),0)}
> f<-function(t,W) {A%*%W+P(t)}  # W'=AW+P(t). [Kun for lineære]
> h<-1/24; n<-24*12  # Steplængde 1/24; i alt 24*12 skridt
> t0<-0; tE<-t0; W0<-c(2,10); WE<-W0; E<-c(tE,WE)
> for (k in 1:n) {
+ WEs<-WE+f(tE,WE)*h;
+ WE<-WE+(f(tE,WE)+f(tE+h,WEs))/2*h;
+ tE<-tE+h;
+ E<-cbind(E,c(tE,WE));}
> round(E[,(0:12)*24+1],1)  # Søjle 1, 25, 49, ... (dvs. t=0,1,2, ...)
[1,]  0  1.0  2.0  3.0  4.0  5.0  6.0  7.0  8.0  9.0 10.0 11.0 12.0
[2,]  2  3.9  4.5  5.0  5.4  5.9  6.3  6.7  7.1  7.5  7.9  8.3  8.7
[3,] 10 16.1 23.0 29.8 36.5 42.9 49.2 55.3 61.2 67.0 72.5 78.0 83.3
```

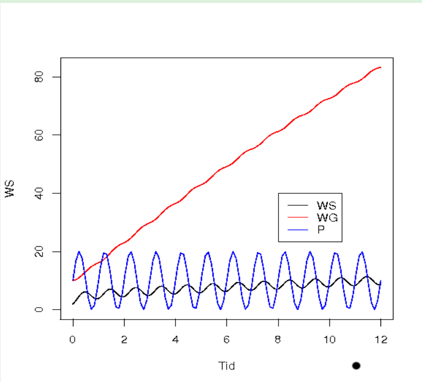

Rod-top: Eulers forbedrede metode – fortsat

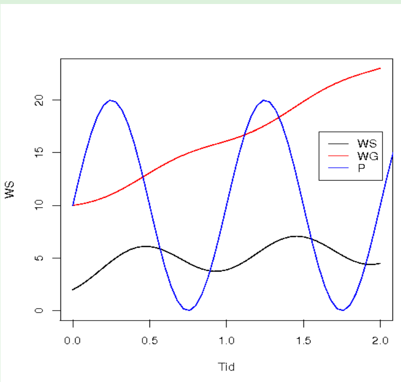
Tilsvarende R-kode, der også virker for **ikke-lineære** systemer:

```
KG<-2.2; KD<-0.15; YG<-0.8
p<-function(t){10*(1+sin(2*pi*t))}
f<-function(t,W) {c(-KG*W[1]+KD*W[2]+p(t),YG*KG*W[1]-KD*W[2])}
h<-1/24; n<-24*12
t0<-0; tE<-t0
W0<-c(2,10); WE<-W0
E<-c(tE,WE)
for (k in 1:n) {
WEs<-WE+f(tE,WE)*h;
WE<-WE+(f(tE,WE)+f(tE+h,WEs))/2*h;
tE<-tE+h;
E<-cbind(E,c(tE,WE));}
round(E[,(0:12)*24+1],1)
```


Rod-top: Grafer for løsningerne

```
> Tid<-E[1,]; WS<-E[2,]; WG<-E[3,]
> c1<-min(WS,WG,0); c2<-max(WS,WG,20)
> plot(Tid,WS, col="black", type="l", ylim=c(c1,c2))
> points(Tid,WG, col="red", type="l")
> plot(p,0,12, col="blue",add=TRUE)
> legend(8,40,c("WS","WG","P"),col=c("black","red","blue"),lwd=1)
```



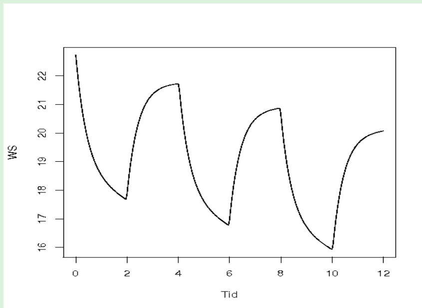


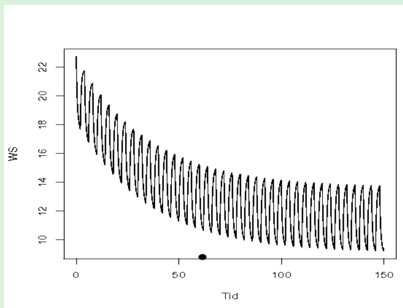
Rod-top: Lyset slukket i to døgn, tændt i to døgn osv.

$$P_G(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t \le 2, \quad 4 \le t \le 6, \quad 8 \le t \le 10 \quad \text{osv.} \\ 10 & \text{ellers} \end{cases}$$

Begyndelsesbetingelse: I ligevægt ved konstant lyspåvirkning $p_0 = 10$.
Dele af R-koden:

```
> Wst<- -solve(A)%*%c(10,0); W0<-Wst   # Wst=(22.7,266.7)
> p<-function(t) {if (t<2 | (4<t & t<6) | (8<t & t<10)) 0 else 10}
> p<-function(t) {if (t%%4<2) 0 else 10} # Mere generelt: %% rest
```





Oplæg til Miniprojekt 5

Opgave 1 Rovdyr-byttedyr model

Opgave 2 Foderoptagelse hos køer (inkl. numerisk løsning)

Opgave 3 3 vekselvirkende populationer
(fokus på hvad der sker, når parametrene varieres)