Modul 1: forelæsning 1
Matricer
Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

1. Eksempel: en epidemis udvikling
2. Regning med $m \times n$ matricer
3. Kvadratiske matricer

Eksempel: en epidemis udvikling

I en population betragtes en sygdomsepidemi. Populationen tænkes opdelt i 4 grupper: raske, syge, døde og helbredte.

Antagelser om udviklingen fra uge til uge

- En rask har 20% risiko for at blive syg efter en uge
- En syg har 10% risiko for at dø efter en uge
- En syg har 20% chance for at være helbredt efter en uge
- En helbredt er immun

Variable

- r_t: antal raske i uge t
- s_t: antal syge i uge t
- d_t: antal døde i uge t
- h_t: antal helbredte i uge t

Opstilling af model

1. **Ligninger**

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= 0.8\, r_t \\ s_{t+1} &= 0.2\, r_t + 0.7\, s_t \\ d_{t+1} &= 0.1\, s_t + d_t \\ h_{t+1} &= 0.2\, s_t + h_t \end{aligned}$$

2. **Ligninger på matrixform**

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} r_{t+1} \\ s_{t+1} \\ d_{t+1} \\ h_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{pmatrix}$$

3. **Kompakt notation**

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t$$

Regning med modellen

1. Fra en uge til den næste: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t$.
   Starter med alle 300 raske dvs. $\mathbf{x}_0 = (300, 0, 0, 0)$. Så er

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Fra en uge til den foregående: $\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_{t+1}$.
   Med $\mathbf{x}_1 = (240, 60, 0, 0)$ giver ovenstående at

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 240 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Hvad hvis $\mathbf{x}_1 = (230, 70, 0, 0)$?
   Det ville være godt med en formel for den inverse matrix.

Regning med modellen: hvad sker der i det lange løb?

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \quad \dots$

Spørgsmål: $\quad \mathbf{x}_t = ? \quad \mathbf{x}_t \simeq ?$

Vi vil se, at:

$$\text{Hvis} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{så gælder} \quad \mathbf{x}_t \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad t \to \infty$$

- Vi skal udvikle teori til at kunne svare på, hvorfor dette gælder, uden at behøve at foretage mange udregninger.
- Det er muligt og overkommeligt at udregne vektoren $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ i hånden.
- Det er muligt men uoverkommeligt at beregne vektoren $\mathbf{x}_{20}$ ud fra $\mathbf{A}$ og $\mathbf{x}_0$.
- Vi skal bruge **R** til at regne på det.

Regning med modellen i R

```
> A<-matrix(c(0.8,0.2,0,0,0,0.7,0.1,0.2,0,0,1.0,0,0,0,0,1.0),4);
> x0<-c(300,0,0,0);
> x<-x0;
> for (k in (1:20)) { x<-A%*%x;}
> x;
          [,1]
[1,]   3.458765
[2,]   6.438775
[3,]  96.700820
[4,] 193.401640
```


Repetition af 2×2 matricer

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{hvis } \det \mathbf{A} \neq 0$$

Generelt om $m \times n$ matricer

Definition: Matrix

En $m \times n$ matrix er et talskema med m rækker og n søjler

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definition: Matrix gange vektor

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Definition: Matrixmultiplikation og -addition

- Samme regel for multiplikation som for 2×2 matricer

	B
A	**AB**

(Matricernes størrelser skal passe sammen)

- Andre regneregler: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ og $t\mathbf{A}$ udregnes plads for plads

Regneregler for matricer

1. Associativ regel $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
2. Distributiv regel $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
3. Kommutativ regel gælder ikke generelt: for det meste har vi

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

R kan bruges: `A%*%B` og `A%*%x`

Definition: Transponering af matrix

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

R kan bruges: `t(A)`

Regneregler for transponering

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A} \\ (t\mathbf{A})^T &= t\mathbf{A}^T \\ (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \end{aligned}$$

Øvre og nedre trekantsmatrix

- En $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er en øvre trekantsmatrix hvis $a_{ij} = 0$ for $i > j$.
- En $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ er en nedre trekantsmatrix hvis $a_{ij} = 0$ for $i < j$.

Hvis $m = n$, så ser en øvre trekantsmatrix ud som følger:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Altså: alle elementer under diagonalen skal være 0.

Kvadratiske matricer

En matrix kaldes kvadratisk, hvis antallet af rækker er lig med antallet af søjler, dvs. hvis det er en $n \times n$ matrix.

Anvendelser af $n \times n$ matricer: masser!

Diskrete dynamiske (tidsafhængige) modeller, hvor et system betragtes til forskellige tidspunkter:

- Epidemimodeller
- Modeller for aldersopdelt populationsvækst
- Simple nationaløkonomiske modeller

En særlig egenskab ved en kvadratisk matrix er, at vi kan lave **fremskrivninger**, dvs. beregne $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ... ud fra

- en startvektor $\mathbf{x}_0$ og
- formlen $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad$ (eller $\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0$)

Sådanne beregninger involverer et computerværktøj som f.eks. **R** .

Diagonalmatricer

Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Alle elementer uden for diagonalen er nul.

Enhedsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Egenskaber: $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$.

Invers matrix

Definition: invers matrix

En $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ har en invers matrix, hvis der findes en $n \times n$ matrix $\mathbf{X}$ så

$$\mathbf{XA} = \mathbf{AX} = \mathbf{E}.$$

Den inverse matrix $\mathbf{X}$ betegnes $\mathbf{A}^{-1}$. Matricen $\mathbf{A}$ kaldes **regulær**, hvis den har en invers matrix; ellers kaldes den singulær.

Sætning: Løsning af n ligninger med n ubekendte

Antag at $\mathbf{A}$ har en invers matrix. Da gælder

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}.$$

Vi ganger med den inverse matrix *fra venstre*.

Bevis: $\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

R kan bruges: `solve(A,y)`.

Invers matrix og determinant

Sætning: Invers matrix og matrixprodukt

Hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ begge har en invers matrix, så gælder

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Sætning: Løsning af matrixligninger

Antag, at $\mathbf{A}$ har en invers matrix. Da gælder

- Ligningen $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$ har løsningen $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.
- Ligningen $\mathbf{YA} = \mathbf{C}$ har løsningen $\mathbf{Y} = \mathbf{CA}^{-1}$.

Sætning

$\mathbf{A}$ har en invers matrix netop når $\det \mathbf{A} \neq 0$ og i bekræftende fald er der en formel for $\mathbf{A}^{-1}$.

- Hvordan udregnes $\det \mathbf{A}$?
- Hvordan ser formlen for $\mathbf{A}^{-1}$ ud?

Determinant af en 3×3 matrix

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\
&= \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow .
\end{aligned}
$$

Determinant af en $n \times n$ matrix glæd jer...

Determinant af en $n \times n$ matrix

Definition

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix og lad $1 \leq j \leq n$. Da gælder

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij}$$

hvor $\mathbf{A}_{ij}$ er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fremkommer ved at slette den i'te række og j'te søjle i $\mathbf{A}$.

- Determinanten af en $n \times n$ matrix bestemmes ved at beregne determinanterne af n matricer af størrelse $(n-1) \times (n-1)$.

  Hver af disse kan beregnes vha. $n-1$ determinanter af $(n-2) \times (n-2)$ matricer osv.
- Man må selv bestemme, hvilken værdi for j man vil bruge. Vi siger, at determinanten beregnes ved at *opløse efter j'te søjle*.

Sætning: Egenskaber for determinanter

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{AB} &= \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{A} \\
\det t\mathbf{A} &= t^n \det \mathbf{A} \\
\det \mathbf{A}^{-1} &= 1/ \det \mathbf{A} \\
\det \left(\mathbf{A}^T\right) &= \det \mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Beregning af determinanter:

- Determinanten af en øvre eller nedre trekantsmatrix er lig med produktet af diagonalelementerne. [Hvorfor?]
- De tidligere definitioner af determinanten af 2×2 og 3×3 matricer passer med den generelle definition.
- **R** kan bruges: `det(A)`.

Invers til en 3×3 matrix

$$
\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\[2ex]
-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{pmatrix}
$$

Regel
Elementet i i'te række og j'te søjle er lig $(-1)^{i+j}$ gange determinanten af den matrix, der fremkommer fra $\mathbf{A}$, når den j'te række og den i'te søjle slettes. (Bemærk, at der er byttet om på i og j.)

Invers til en $n \times n$ matrix

Formel for den inverse matrix af en $n \times n$ matrix:

Elementet der skal stå i i'te række og j'te søjle er lig med udtrykket

$$\frac{(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Her er $\mathbf{A}_{ji}$ den matrix, der fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at slette j'te række og i'te søjle. (Bemærk, at der er byttet om på i og j.)

R kan bruges: `solve(A)`.