Modul 2: forelæsning 2
Systemer af differensligninger

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

1. Systemer af differensligninger
2. Lineære systemer af differensligninger
3. Autonome systemer af differensligninger: Ligevægt og stabilitet
4. Epidemimodel

Systemer af 2 differensligninger

Også kaldet *2 samhørende differensligninger*.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(t, x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(t, x_t, y_t) \end{aligned}$$

hvor f og g er givne funktioner.

Eksempel

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 3x_t - x_t y_t + 2 = f(t, x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= 2x_t + 3y_t - t = g(t, x_t, y_t) \end{aligned}$$

t	0	1	2	...	t
x_t	1	3	-13	...	??
y_t	2	8	29	...	??

Systemer af n differensligninger

$$\begin{aligned} x_{t+1,1} &= f_1(t, x_{t,1}, \ldots, x_{t,n}) \\ x_{t+1,2} &= f_2(t, x_{t,1}, \ldots, x_{t,n}) \\ &\vdots \\ x_{t+1,n} &= f_n(t, x_{t,1}, \ldots, x_{t,n}) \end{aligned}$$

hvor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ er givne funktioner.

Vektornotation

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t)$$

hvor

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ \vdots \\ x_{t,n} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Systemer af n differensligninger: løsning

- En *løsning* er en følge af vektorer $(\mathbf{x}_t) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots)$, som opfylder $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t)$ for $t = 0, 1, 2, \dots$
- En løsning er fastlagt ved et sæt af begyndelsesværdier, også kaldet en *startvektor*

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}.$$

Løsningen $(\mathbf{x}_t) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots)$ kan nemlig findes ved *successiv* udregning:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(0, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(1, \mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{f}(2, \mathbf{x}_2) \quad \text{osv.}$$

Lineære systemer af differensligninger

(Repetition fra Modul 1)

Definition: Lineære systemer af differensligninger

Et lineært system af differensligninger er på formen

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t),$$

hvor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ er en affin afbildning.
($\mathbf{A}$ er en given $n \times n$ matrix og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ en given vektor).

(Et lineært system af differensligninger er det samme som en affin model.)

Eksempel: Nationaløkonomi

$$\begin{pmatrix} C_{t+1} \\ I_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ (a-1)c & ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix}$$

Lineære systemer af differensligninger: Løsningsformel

Repetition fra Modul 1:

Sætning: Formel vha. egenværdier og -vektorer

Hvis $\mathbf{A}$ er diagonaliserbar med egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ og tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$, og $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ har en invers matrix, så kan den fuldstændige løsning til det lineære system af differensligninger

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}$$

også skrives på formen

$$\mathbf{x}_t = c_1\lambda_1^t\mathbf{q}_1 + \dots + c_n\lambda_n^t\mathbf{q}_n - (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \qquad (\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n).$$

Eksempel

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{med} \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{3} \quad \text{med} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Ligevægt: $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$
- Fuldstændig løsning: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = c_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$
- I det lange løb: $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ for $t \to \infty$.

Autonome systemer af differensligninger: ligevægt

Definition: Autonomt system af differensligninger

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$$

Ingen direkte afhængighed af t på højre side.

Definition: Ligevægt

En vektor $\mathbf{x}^*$ kaldes en *ligevægt* for et autonomt system af differensligninger $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$, hvis

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*,$$

dvs. hvis $\mathbf{x}^*$ "ikke ændrer sig fra gang til gang".

Ligevægt for systemer af 2 differensligninger

Autonomt system af 2 differensligninger:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) \end{aligned}$$

En vektor $\binom{x^*}{y^*}$ er en ligevægt, hvis

$$\begin{pmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

dvs.

$$f(x^*, y^*) = x^* \qquad \text{og} \qquad g(x^*, y^*) = y^*.$$

Autonome systemer af differensligninger: stabilitet

Definition: Stabil ligevægt

En ligevægt $\mathbf{x}^*$ for et autonomt system $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$ kaldes *stabil*, hvis der gælder følgende:

> *For alle startvektorer* $\mathbf{x}_0$ i nærheden af $\mathbf{x}^*$ *skal de tilsvarende vektorer* $\mathbf{x}_t$ *konvergere mod* $\mathbf{x}^*$ *for* $t \to \infty$.

☞ At en ligevægt *ikke* er stabil eller ustabil betyder altså, at der findes startvektorer $\mathbf{x}_0$ vilkårligt tæt på ligevægten, hvor de tilsvarende vektorer $\mathbf{x}_t$ *ikke* konvergerer mod ligevægten.

Selv små ændringer i startvektoren kan altså betyde meget i det lange løb.

Stabilitet af ligevægt: lineære systemer af differensligninger

Sætning: Stabilitet (repetition fra Modul 1)

Hvis alle egenværdierne for $\mathbf{A}$ har modulus mindre end 1, så har modellen

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}$$

netop en ligevægt $\mathbf{x}^*$ og den er stabil: Der gælder

$$\mathbf{x}_t \to -(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}^*$$

for $t \to \infty$ *uanset* startvektoren $\mathbf{x}_0$.

Stabilitet af ligevægt: generelt tilfælde

- Hvordan afgør vi om en ligevægt er stabil eller ustabil?
- For en enkelt differensligning $x_{t+1} = f(x_t)$ er en ligevægt x^* stabil, hvis $|f'(x^*)| < 1$; og ustabil, hvis $|f'(x^*)| > 1$ (sætning fra sidst).
- Hvordan generaliseres dette til systemer af differensligninger?

Definition: Funktionalmatrix

Lad

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

være en vektorfunktion af n variable. Matricen

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{1,x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f'_{1,x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n,x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f'_{n,x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

kaldes *funktionalmatricen* for vektorfunktionen.

Stabilitet af ligevægt: generelt tilfælde

Sætning: Stabilitet

Lad $\mathbf{x}^*$ være en ligevægt for et autonomt system af differensligninger $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$. Da gælder:

- Hvis alle egenværdier for $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ har modulus < 1, så er ligevægten $\mathbf{x}^*$ stabil.
- Hvis blot én af egenværdierne for $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ har modulus > 1, så er ligevægten $\mathbf{x}^*$ ustabil.

☞ Man skal indsætte ligevægten $\mathbf{x}^*$ på $\mathbf{x}$'s plads i funktionalmatricen

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} f'_{1,x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & f'_{1,x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n,x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & f'_{n,x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

og dernæst bestemme egenværdierne for denne matrix.

Stabilitet af ligevægt: system af 2 differensligninger

Autonomt system af 2 differensligninger:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_y) \end{aligned}$$

Funktionalmatricen

$$D\binom{f}{g}(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Sætning Stabilitet af ligevægt (2 differensligninger)

- Hvis begge egenværdier for $D\binom{f}{g}(x^*, y^*)$ har modulus < 1, så er ligevægten (x^*, y^*) stabil.
- Hvis blot én af egenværdierne for $D\binom{f}{g}(x^*, y^*)$ har modulus > 1, så er ligevægten (x^*, y^*) ikke stabil.

Eksempel (ligevægte)

- Autonomt system af differensligninger:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{2}x_t - \tfrac{1}{3}x_t y_t \\ y_{t+1} &= \tfrac{1}{4}x_t + \tfrac{1}{2}y_t \end{aligned}$$

- Udtrykkene på højresiderne:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}xy \\ g(x,y) &= \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y \end{aligned}$$

- Ligevægtene (x^*, y^*) findes ved at løse ligningerne

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x^* - \tfrac{1}{3}x^*y^* &= x^* \\ \tfrac{1}{4}x^* + \tfrac{1}{2}y^* &= y^* \end{aligned}$$

- Resultat: $(x^*, y^*) = (0, 0)$ eller $(x^*, y^*) = (-3, -\tfrac{3}{2})$.

Eksempel (stabilitet)

- Funktionalmatricen:

$$\mathbf{Df}(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}y & -\frac{1}{3}x \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Ligevægten $(x^*, y^*) = (0,0)$:

$$\mathbf{Df}(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  har to egenværdier med modulus < 1, så $(0,0)$ er en stabil ligevægt.
- Ligevægten $(x^*, y^*) = (-3, -\frac{3}{2})$:

$$\mathbf{Df}(-3,-\tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  har en egenværdi med modulus > 1, så $(-3, -\frac{3}{2})$ er en ustabil ligevægt.

Eksempel (succesiv udregning med R)

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{2}x_t - \tfrac{1}{3}x_t y_t \\ y_{t+1} &= \tfrac{1}{4}x_t + \tfrac{1}{2}y_t \end{aligned}$$

```
> f <- function(x,y){x/2-x*y/3};
> g <- function(x,y){x/4+y/2};
> v0<-c(1,3) # begyndelsesvektoren v0=(1,3)
> V<-v0; v<-v0;
> for (t in (0:8)){v<-c(f(v[1],v[2]),g(v[1],v[2]));V<-cbind(V,v)}
> V
     V     v          v          v           v           v            v
[1,] 1 -0.50 0.04166667 0.01041667 0.003870081 0.001683082 0.0007862104
[2,] 3  1.75 0.75000000 0.38541667 0.195312500 0.098623770 0.0497326557
                v            v            v
[1,] 0.0003800718 0.0001868607 9.264386e-05
[2,] 0.0250628804 0.0126264582 6.359944e-03
```

Udregningerne bekræfter, at $(0,0)$ er en stabil ligevægt.

Epidemimodel

Vi vil udbygge modellen fra sidst:

$$S_{t+1} = (1-a)S_t + bS_t\left(1 - \frac{S_t}{N}\right),$$

hvor

- S_t angiver antallet af smittede og smittende individer i en population af N individer,
- a angiver raskhedsraten (bedre på engelsk: recovery rate),
- b angiver infektionsraten

til en såkaldt **SIR** model.

SIR model – warning about English and Danish:

English abbreviation:	**S**usceptible	**I**nfected	**R**ecovered
Dansk forkortelse:	**M**odtagelig	**S**yg	**I**mmun

SIR model (dansk: MSI model)

En population på N individer inddeles i tre grupper; modtagelige, smittede og immune:

- M_t antallet af individer, som er modtagelige over for smitten.
- S_t antallet af individer, som er smittede og smittende.
- I_t antallet af individer, som er (midlertidigt) immune over for smitten.

Følgende parametre indgår:

- a recovery rate.
- b infektionsraten.
- c angiver raten for tab af immunitet.

Antagelser:

- Individer, der netop er blevet raske, er midlertidigt immune overfor smitten.
- Antallet af nye tilfælde er proportionalt med både antal modtagelige og antal smittede.

SIR model – fortsat

Antagelserne leder til:

$$
\begin{aligned}
M_{t+1} &= M_t - \frac{b}{N} S_t M_t + c I_t \\
S_{t+1} &= (1-a) S_t + \frac{b}{N} S_t M_t \\
I_{t+1} &= (1-c) I_t + a S_t
\end{aligned}
$$

Reduktion fra 3 til 2 samhørende differensligninger
Bemærk, at

$$M_{t+1} + S_{t+1} + I_{t+1} = M_t + S_t + I_t = N$$

er (konstant) og lig med populationens størrelse.

Der gælder dermed $M_t = N - S_t - I_t$ og derfor kan antallet af modtagelige elimineres fra modellen.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

SIR model – fortsat

Efter elimination af M_t opnås følgende system af differensligninger:

$$
\begin{aligned}
S_{t+1} &= (1-a) S_t + b S_t \left(1 - \frac{S_t + I_t}{N}\right) \\
I_{t+1} &= (1-c) I_t + a S_t
\end{aligned}
$$

Fortsættelse følger i miniprojektet!