Opgaver, Matematik og modeller 2018

Dette opgavesæt indeholder alle de opgaver, der stilles i kurset i 2018. En stor del af opgaverne kommer fra noterne om lineær algebra og fra bogen “Differentialligninger” (begge af Poul Einar Hansen).

Thomas Vils Pedersen (`vils@math.ku.dk`)
KU-SCIENCE, 2018

Indhold

Opgaver i Modul 1 2

Facits til opgaver i Modul 1 18

Opgaver i Modul 2 26

Facits til opgaver i Modul 2 29

Opgaver i Modul 3 31

Facits til opgaver i Modul 3 35

Opgaver i Modul 4 37

Facits til opgaver i Modul 4 40

Opgaver i Modul 5 42

Facits til opgaver i Modul 5 46

Opgaver i R 48

Opgaver i Modul 1

Opgave 1.1
Udregn matricen $(\mathbf{M}+2\mathbf{N})(\mathbf{M}+\mathbf{N})-(\mathbf{M}+\mathbf{N})(\mathbf{M}+2\mathbf{N})$, hvor

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{N}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

[Vink: Det kan betale sig at starte med at reducere udtrykket.]

Opgave 1.2
Lad

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

(a) Udregn matrixprodukterne $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ og $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$. Er de ens? Er de af øvre trekantsform?

(b) Bestem determinanten af $\mathbf{A}_2$ og den inverse til $\mathbf{A}_2$.

Lad endvidere

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

(c) Udregn $\mathbf{B}^2$ og $\mathbf{B}^3$.

(d) Besvar følgende spørgsmål om $n\times n$ matricer (du behøver ikke at bevise at dine svar er rigtige):

- Hvilken type matrix giver produktet af to øvre trekantsmatricer?
- Hvordan ser $\mathbf{D}^k$ ud for en diagonalmatrix $\mathbf{D}$?
- Hvordan ser den inverse til en diagonalmatrix ud?

Opgave 1.3
Betragt ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x - y = 5\\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

(a) Opskriv ligningssystemet på formen

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix},$$

hvor $\mathbf{M}$ er en 2×2 matrix og $\binom{p}{q}$ en vektor og løs det ved matrixinvertering.

(b) Løs ligningssystemet (igen) ved at gange nederste ligning igennem med 2 og trække ligningerne fra hinanden.

Opgave 1.4
Hvilke af følgende matrixprodukter er ikke defineret?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

Opgave 1.5
Udregn matrixprodukterne

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.6 [for koordinatfreaks]
Opskriv prikproduktet $\mathbf{Ax} \cdot \mathbf{By}$ ved at bruge sumnotation og koordinater.

Opgave 1.7
Lad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Udregn matricerne $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$ samt $\mathbf{A}^{20}$.

Opgave 1.8
Vis at matricen

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 50 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

har en invers matrix og bestem den inverse matrix.

Opgave 1.9
Bestem determinanten af matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 13 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.10
Udregn determinanterne af matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.11
Et firma fremstiller produkterne P_1, P_2, P_3 ud fra råvarerne R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Til hver enhed P_1 bruges 10 enheder R_1, 30 enheder R_2, 5 enheder R_3 og 20 enheder R_5. Til hver enhed P_2 bruges 10 enheder R_1, 20 enheder R_2, 5 enheder R_4 og 10 enheder R_5. En enhed P_3 er sammenbygget af en enhed af produktet P_1 og en enhed af produktet P_2; dog medgår ved samlingen 5 ekstra enheder af råvarerne R_3 og R_4.

(a) Antag, at der produceres x_j enheder P_j (for $j = 1, 2, 3$) og bruges i alt y_i enheder R_i (for $i = 1, 2, 3, 4, 5$) og lad

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}.$$

Opstil først ligninger, der udtrykker y_1, y_2, y_3, y_4 og y_5 vha. x_1, x_2 og x_3. Bestem derefter 5×3 matricen $\mathbf{A}$, således at der gælder $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(b) I en periode er der brugt 4300 enheder R_1, 11500 enheder R_2 og 1600 enheder R_3. Hvor meget er der brugt af R_4 og af R_5?

Opgave 1.12
To kemiske produktionsenheder P og Q fremstiller begge hovedproduktet H, biprodukter U og V, samt spildproduktet W. Produktionen af de fire stoffer er, angivet i kg pr. time:

	H	U	V	W
P	1800	150	100	150
Q	1200	150	200	50

Enhed Q kan kun arbejde, når P er i gang. Man lade begge enheder arbejde i x_1 timer samt lader P arbejde alene i yderligere x_2 timer ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$), hvorved der fremstilles i alt y_1, y_2, y_3 og y_4 kg af hhv. H, U, V og W. Sæt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem 4×2 matricen $\mathbf{A}$, således at der gælder $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(b) Vis, at $\mathbf{x}$ kan vælges således, at der fremstilles netop 240000 kg H, 22200 kg U og 19200 kg V. Hvor stor er spildproduktionen i dette tilfælde?

(c) Produktionen sælges til tre kunder K_1, K_2 og K_3. Heraf køber K_1 halvdelen af det producerede H for 20 kr pr. kg, K_2 køber resten af det producerede H for 16 kr pr. kg samt hele U-produktionen for 30 kr pr. kg, og K_3 køber hele V-produktionen for 40 kr pr. kg, samtidig med, at han mod en betaling på 10 kr pr. kg fjerner den fremkomne spildproduktion W.

Lad z_i være producentens indtægt i kr fra K_i $(i = 1, 2, 3)$ og sæt

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Bestem 3×4 matricen $\mathbf{B}$ samt 3×2 matricen $\mathbf{C}$, således at

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad \text{og} \quad \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Opgave 1.13

En kemisk fabrik har tre afdelinger, A_1, A_2 og A_3, der udleder spildevand til sammme recipient. Spildevandets indhold af fire forurenende stoffer A, B, C og D er, angivet i gram udledt pr. time:

	A	B	C	D
spildevand fra A_1	10	40	5	1
spildevand fra A_2	30	30	0	2
spildevand fra A_{3a}	10	0	5	2
spildevand fra A_{3b}	0	15	0	2
spildevand fra A_{3c}	0	15	0	2

hvor det underforstås, at A_3 består af tre underafdelinger A_{3a}, A_{3b} og A_{3c}, som er i drift samtidig. Antag, at A_1, A_2 og A_3 er i drift hhv. x_1, x_2 og x_3 timer pr. døgn, hvorved der i alt udledes y_1, y_2, y_3 og y_4 gram pr. døgn af stofferne A,B,C og D. Sæt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem 4×3 matricen $\mathbf{A}$ således, at der gælder $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(b) Myndighederne har pålagt fabrikken, at den højst må udlede 800 g A, 1200 g B, 75 g C og 55 g D pr. døgn. Fabrikken ønsker at lade alle tre afdelinger være i drift netop så mange timer pr. døgn, at grænserne for B, C og D alle nåes, men ikke overskrides. Vis, at dette er muligt, og at grænsen for A heller ikke overskrides. Driftsplanen får en ret drastisk konsekvens for en af afdelingerne – hvilken?

Opgave 1.14

I et skovdistrikt vil man estimere antal dyr i bestandene af tre vildtarter A, B og C, der minder om hinanden. Dyrene færdes enkeltvis, og skovpersonalet opnoterer gennem en vis periode, hvad de ved hvert enkelt møde skønner, er et eksemplar af hhv. A, B og C.

Denne visuelle bestemmelse er forbundet med usikkerhed. Fra tidligere undersøgelser sammenholdt med mere sikre optællinger har man konstateret følgende mønster:

- Et A-dyr vil i 15% af tilfældene blive registreret som B, i 10% tilfældene som C, mens det i resten af tilfældene registreres korrekt som A.
- Et B-dyr vil i 15% af tilfældene blive registreret som A, i 5% tilfældene som C, mens det i resten af tilfældene registreres korrekt som B.
- Et C-dyr vil i 5% af tilfældene blive registreret som A, i 5% tilfældene som B, mens det i resten af tilfældene registreres korrekt som C.

Undersøgelsen fortsætter, til der i alt er registreret 400 møder med dyr. Disse antages repræsentative for den smalede bestand, dvs. brøkdelene af de tre arter blandt de 400 registrerede er de samme som dem, de optræder med totalt.
Lad x_1 være det *sande* antal møder med dyr af arten A, blandt de 400 møder, mens y_1 er det *registrerede* antal A-møder. Lad x_2 og y_2 være de tilsvarende antal for B, samt x_3 og y_3 de tilsvarende antal for C.

(a) Bestem 3×3 matricen $\mathbf{A}$, således at der gælder

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

hvor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Iflg. det oplyste bør der gælde $x_1 + x_2 + x_3 = 400$ og $y_1 + y_2 + y_3 = 400$. Vis, ved at bruge $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, at $x_1 + x_2 + x_3 = 400$ medfører $y_1 + y_2 + y_3 = 400$.

(c) Der er registreret 210 A-møder, 122 B-møder og 68 C-møder. Ad anden vej har man anslået den samlede bestand i distriktet, dvs. summen af antallene af de tre arter, til at være 8400. Beregn skøn for de sande antal af hver af de tre arter. (Facit afrundes til hele multipla af 100.)

Opgave 1.15
Vis at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 17 \end{aligned}$$

ikke har nogen løsninger.

Opgave 1.16
Vis at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}$$

har den entydige løsning $(x_1, x_2, x_3) = (3, 3, -1)$.

Opgave 1.17
Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= a \end{aligned}$$

for $a = 5$ og $a = 6$.

Opgave 1.18
Bestem tallene $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ så følgende kemiske reaktion bliver afstemt:

$$x_1\mathrm{HgI}_4^{--} + x_2\mathrm{OH}^- + x_3\mathrm{NH}_3 \to x_4\mathrm{Hg}_2\mathrm{NI} + x_5\mathrm{I}^- + x_6\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

Opgave 1.19
Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_5 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Opgave 1.20
Givet vektorerne

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Skriv $\mathbf{b}$ som en linearkombination af $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_5$.

Opgave 1.21
Undersøg i hvert af følgende tilfælde, om vektorerne udgør et lineært uafhængigt sæt.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Opgave 1.22
Løs hvert af systemerne

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\17\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\17\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\21\end{pmatrix}$$

og udregn i hvert tilfælde dels rangen af koefficientmatricen og rangen af totalmatricen.

Opgave 1.23
Bestem rangen af hver af matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 10\end{pmatrix}$$

Opgave 1.24
Vi betragter matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\0 & 3 & 2 & 1\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Udregn den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$.
[Vink: Benyt domino-metoden.]

Opgave 1.25
Betragt basen

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)$$

for $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestem den vektor i $\mathbb{R}^2$, der har koordinaterne $(5, -1)$ mht. denne basis. (Brug evt basisskiftmatricen.)

(b) Bestem koordinatsættet for vektoren

$$\begin{pmatrix}35\\-47\end{pmatrix}$$

mht. denne basis. (Brug evt basisskiftmatricen.)

Opgave 1.26
Betragt basen

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$$

for $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestem den vektor i $\mathbb{R}^3$, der har koordinaterne $(1,3,4)$ mht. denne basis. (Brug evt basisskiftmatricen.)

(b) Bestem koordinatsættet for vektoren

$$\begin{pmatrix}14\\7\\0\end{pmatrix}$$

mht. denne basis. (Brug evt basisskiftmatricen.)

Opgave 1.27
Bestem alle egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricen

$$\begin{pmatrix}24 & -45\\32 & -60\end{pmatrix}.$$

Opgave 1.28
Betragt baserne

$$\mathcal{A}=\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right),\qquad \mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

for $\mathbb{R}^2$.
Om vektoren $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ oplyses det at den har koordinaterne $(3,2)$ mht. basen $\mathcal{A}$. Bestem koordinaterne for $\mathbf{v}$ mht. basen $\mathcal{B}$.

Opgave 1.29
Lad

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Bestem samtlige egenværdier og tilhørende egenvektorer for $\mathbf{A}$.

Opgave 1.30
Lad

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & a\\2 & 4 & b\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Det oplyses, at

$$\mathbf{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

er en egenvektor for $\mathbf{A}$. Bestem værdierne af a og b.

Opgave 1.31
Bestem alle egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem endvidere modulus og argument for hver af egenværdierne og indtegn deres beliggenhed i den komplekse plan.

Opgave 1.32
Gør rede for at enhver kvadratisk matrix af ulige orden har mindst én reel egenværdi.
[Vink: Betragt det karakteristiske polynomium.]

Opgave 1.33
Lad

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem alle reelle egenværdier og tilhørende egenvektorer.

(b) Bestem alle komplekse egenværdier og tilhørende egenvektorer.
[Vink: Besværlige udregninger!]

Opgave 1.34

(a) Lad

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestem egenværdierne for $\mathbf{B}$, dvs. løs ligningen $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, hvor $\mathbf{E}$ er 3×3 enhedsmatricen.
[Vink: Udregn først $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$ vha. formlen for en 3×3 determinant eller ved at opløse efter række eller søjle. Derefter kan det betale sig at sætte λ udenfor parentes i $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$.]

(b) Programmet `R` kan også bruges til at betemme egenværdier med. Der findes en særlig funktion som hedder `eigen()` til dette formål.

Indtast matricen $\mathbf{B}$ i `R`

```
> B <- matrix(c(2,1,1,-3,-2,-3,1,1,2),3)
```

og skriv dernæst `eigen(B)`. Uddata består af to dele, nemlig `$values` (som giver egenværdierne) og `$vectors` (som giver egenvektorer). Kontroller, at egenværdierne er de samme som du fandt tidligere.

Opgave 1.35
Vi betragter matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem alle egenværdier for $\mathbf{A}$.

(b) Bestem egenvektorerne hørende til hver egenværdi for $\mathbf{A}$ og angiv en matrix $\mathbf{Q}$, som diagonaliserer $\mathbf{A}$.

Opgave 1.36

(a) Lad

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestem egenværdierne for $\mathbf{B}$ og bestem modulus og argument for hver af de tre egenværdier. [Vink: Ved udregning af udtrykket $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$ kan det betale sig at opløse efter række eller søjle og sætte $(1 - \lambda)$ udenfor parentes.]

(b) Bestem egenværdier og egenvektorer for $\mathbf{B}$ vha. `R` ved at bruge funktionen `eigen()`. Kontroller, at egenværdierne er de samme som du fandt tidligere.

Opgave 1.37
Lad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem alle egenværdier og egenvektorer for $\mathbf{A}$.

(b) Bestem en matrix $\mathbf{Q}$ sådan at $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix.

(c) Vis at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{Q} = \mathbf{D}^2$ samt at $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}$.
[Vink: Regn med "bogstaverne" $\mathbf{A}$ og $\mathbf{Q}$.]

Opgave 1.38
Lad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 5 & -7 & -5 \\ -8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor for $\mathbf{A}$ og angiv den tilhørende egenværdi λ_1.

(b) Vis, at $\lambda_2 = -2$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ og bestem en tilhørende egenvektor $\mathbf{q}_2$.

(c) Det oplyses, at $\mathbf{A}$ har en egenvektor af formen

$$\mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix},$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Bestem a samt egenværdien λ_3 hørende til $\mathbf{q}_3$.

(d) Lad nu $\mathbf{Q}$ være matricen med $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ og $\mathbf{q}_3$ som hhv. første, anden og tredje søjle. Angiv (uden udregninger) matricen $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$.

(e) Lad $\mathbf{Q}$ være som før. Bestem et udtryk for matricen $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{Q}$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$. Benyt dette til at vise at

$$\frac{1}{3^k}\mathbf{A}^k\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^k & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{2}{3})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for $k = 1, 2, 3, \ldots$ og bestem grænseværdien

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k}\mathbf{A}^k\mathbf{Q}\mathbf{v} \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.39

En kommune indplacerer hvert år borgerne i fire socialgrupper, betegnet S_1, S_2, S_3 og S_4, fra højeste til laveste gruppe. Bevægelser mellem de frie grupper har vist sig at følge dette mønster:

- Ingen borger rykker mere end én gruppe op eller ned fra et år til det næste.
- Af dem, der et vist år er i gruppe S_1, rykker 16% næste år ned i gruppe S_2.
- Af dem, der et vist år er i gruppe S_2, rykker 12% op i gruppe S_1 og 8% ned i S_3.
- Af dem, der et vist år er i gruppe S_3, rykker 8% op i gruppe S_2 og 15% ned i S_4.
- Af dem, der et vist år er i gruppe S_4, rykker 6% op i gruppe S_3.

Kommunens indbyggertal er 42000 og det antages i denne opgave, at dette antal er konstant fra år til år, idet der ses bort fra til- og fraflytning samt fødsel og død. Lad $x_{t,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ betegne antallet af borgere i gruppe S_i ved den årlige optælling i år t. Sæt

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ x_{t,2} \\ x_{t,3} \\ x_{t,4} \end{pmatrix}.$$

(a) Angiv en 4×4 matrix $\mathbf{A}$ således, at forudsætningerne udtrykkes i modellen $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t$.

(b) Et år registrerede man 2900 indbyggere i S_1, 4900 i S_2 og 12600 i S_3. Hvor mange indbyggere var der i hver af de fire socialgrupper året efter?

(c) Løs ligningssystemet $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved at opskrive totalmatricen og udføre rækkeoperationer. Hvilken egenværdi for $\mathbf{A}$ er hermed blevet bestemt?

Fortolk en tilhørende egenvektor som en "stabil" fordeling mellem socialgrupperne og bestem denne fordeling ved at bruge det konstante indbyggertal i kommunen.

Opgave 1.40

Betragt modellen

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}.$$

Bestem grænseværdierne

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_t}{x_t} \qquad \text{og} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{y_{t+1}}{y_t}.$$

Opgave 1.41
Et opinionsinstitut spørger ved regelmæssige undersøgelser den samme gruppe mennesker, i alt 1700 personer, om de er tilhængere af et bestemt fænomen. De mulige svar er JA, VED IKKE og NEJ. Følgende mønster har vist sig:

- Blandt dem, der ved en vis undersøgelse svarer JA, vil 60% også svare JA ved næste undersøgelse, mens resten fordeler sig ligeligt på VED IKKE og NEJ.
- Blandt dem, der ved en vis undersøgelse svarer VED IKKE, vil 40% svare det samme næste gang, lige så mange svarer NEJ, og resten, 20%, svarer JA.
- Blandt dem, der ved en vis undersøgelse svarer NEJ, vil 80% svare det samme næste gang, mens resten fordeler sig ligeligt på JA og VED IKKE.

Lad $x_{t,1}$, $x_{t,2}$ og $x_{t,3}$ betegne antallene af hhv. JA, VED IKKE og NEJ ved den t'te undersøgelse og sæt

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ x_{t,2} \\ x_{t,3} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem 3×3 matricen $\mathbf{A}$ således, at det beskrevne mønster udtrykkes i modellen $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t$.

Ved den første undersøgelse var der 800 JA-svar og 600 NEJ-svar, mens de resterende svarede VED IKKE.

(b) Bestem startvektoren $\mathbf{x}_0$ og beregn (gerne vha. R) vektorerne $\mathbf{x}_t$ for $t = 1, \ldots 6$ (og gerne for større værdier af t).

(c) Begrund at $\lambda = 1$ er en dominerende egenværdi for $\mathbf{A}$ og bestem en tilhørende egenvektor.

(d) Gør rede for at $\mathbf{x}_t$ konvergerer mod en "grænsevektor" for $t \to \infty$ og bestem denne. (Dette betyder, at undersøgelserne stabiliseres mere og mere.)

Opgave 1.42
Vi betragter hunnerne i en population af 1-årige insekter. Hunnerne kan være frugtbare eller golde. En undersøgelse har vist, at de kan opdeles i to grupper, A og B, som belaster miljøet forskelligt. Golde hunner er altid i gruppe B. Frugtbare hunner får i gennemsnit 2.6 hun-unger, hvoraf nogle dog vil være golde. Når man opdeler de frugtbare hunner i A og B, viser følgende formeringsmønster sig:
Hunner i gruppe A får i gennemsnit 0.8 hun-unger, som går til gruppe A, og 1.8 hun-unger, som går til gruppe B. Af de sidstnævnte vil 1.0 være frugtbare og 0.8 være golde. Frugtbare hunner i gruppe B får igennemsnit 0.6 hun-unger, som går til gruppe A, og 2.0 hun-unger, som går til gruppe B. Af de sidstnævnte vil 0.1 være frugtbare, mens hovedparten, 1.9, er golde.
Lad x_t, y_t og z_t betegne antal hunner i år t i hhv. gruppe A, frugtbare i gruppe B og golde i gruppe B. Sæt

$$\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem 3×3 matricen $\mathbf{M}$, således at der gælder

$$\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_t.$$

(b) Bestem den dominerende egenværdi for $\mathbf{M}$ samt en tilhørende egenvektor.

(c) Hvorledes kan den relative fordeling mellem gruppe A og gruppe B af populationen forventes at være, når der er gået lang tid?

Opgave 1.43
Lad

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 5/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og lad} \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 700 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem, gerne vha `R`, vektorerne $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{10}$, hvor $\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{v}_t$ for $t \geq 0$.

(b) Kontroller (gerne vha `R`), at $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/6$ og $\lambda_3 = -1/6$ er egenværdier for $\mathbf{P}$. Angiv tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ og $\mathbf{q}_3$ (gerne vha `R`).

(c) Bestem $c \in \mathbb{R}$ sådan at $\mathbf{P}^k\mathbf{v}_0 \to c\mathbf{q}_1$ for $k \to \infty$, hvor $\mathbf{q}_1$ er den vektor der er angivet i svaret ovenfor.

Opgave 1.44
Bevis, at en vilkårlig overgangsmatrix har egenværdien 1.
[Vink: Søg inspiration i sidste del af Opgave 1.39.]

Opgave 1.45
Betragt den symmetriske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem alle egenværdier og egenvektorer for $\mathbf{A}$.

(b) Opstil en ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ sådan at $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix, og angiv $\mathbf{D}$.

(c) Lad

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Udregn $\mathbf{A}^5\mathbf{b}$ og $\mathbf{A}^6\mathbf{c}$.

Opgave 1.46
Betragt den affine model

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

hvor $a > 0$ er en parameter.

(a) Lad $a = 0.5$. Vis, at $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ er den eneste ligevægt for modellen samt at

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

for $t \to \infty$, uanset startvektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(b) Lad a være vilkårlig. Vis, at modellen for $a < 0.75$ har netop én ligevægt $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$. Udtryk denne ligevægt ved a og vis, at der gælder

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

for $t \to \infty$, uanset startvektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Opgave 1.47
Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ved at bringe totalmatricen på reduceret række-echelonform.

Opgave 1.48
Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ved at bringe totalmatricen på reduceret række-echelonform.

Opgave 1.49
Er $\{1, 3\}$ en basismængde for matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 26 \end{pmatrix}?$$

Er $\{1, 2\}$?

Opgave 1.50
Bestem samtlige basismængder for matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.51
Bestem Hessematricen for funktionen $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2} - x_1 + x_2^2$ og undersøg om den er positiv definit.

Opgave 1.52
Lad $\mathbf{A}$ betegne en 7×7 matrix med heltallige elementer og antag at summen af elementerne i hver række er lig med 28, samt at summen af elementerne i hver søjle også er lig med 28.
Vis, at tallet 196 går op i det $\mathbf{A}$.
[Vink: Lav rækkeoperationer hvor de 6 første rækker lægges til den 7. række. Lav derefter søjleoperationer, hvor de 6 første søjler lægges til den 7. søjle. Determinanten kan derefter beregnes ved at opløse efter 7. søjle, og hver af de første 6 6×6 determinanter udregnes derefter ved at opløse efter den sidste række.]

Opgave 1.53
Udregn følgende komplekse tal på formen $x + iy$:

(a) $(3 + 5i)(2 + i)$.

(b) $(3 - 5i)(2 - i)$.

(c) $(1 + i)^5$.

(d) $(2 - i)(1 + 4i) - (5 + i)(1 - i)$.

(e) $\frac{1}{1+2i} + \frac{2}{3+i} - \frac{3}{2+i}$.

(f) $1 + (1 + i) + \ldots + (1 + i)^7$.

Opgave 1.54
Bestem modulus og argument for hvert af følgende komplekse tal:

(a) $2 - 2i$.

(b) $-\sqrt{12} + 6i$.

(c) $15 + 7i$.

(d) $\frac{-3+4i}{5} + \frac{5}{-3+4i}$.

Opgave 1.55
Bestem det komplekse tal z på formen $x + iy$, når $|z|$ og $\arg z$ er hhv.

(a) 20 og $-\frac{1}{6}\pi$.

(b) 0.59 og 0.85.

(c) 2 og $\frac{31}{4}\pi$.

Opgave 1.56
Løs hver af følgende ligninger med ($z \in \mathbb{C}$):

(a) $z^2 - 2z + 17 = 0$.

(b) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$.

(c) $(2 + 3i)z^2 + (-8 - 17i)z + (5 + i) = 0$.

Opgave 1.57
Bestem real- og imaginærdel af det komplekse tal

$$z = \frac{(1-i)(2+i)}{(3-i)(4+i)}\,.$$

Facits til opgaver i Modul 1

Opgave 1.1

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.2

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 23 & 8 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{A}_2 = -15, \quad \mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.3

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.4
1 er ikke, mens 2 og 3 er.

Opgave 1.7

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.8
Determinanten er lig med -500 så den inverse findes og er givet ved

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 50 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{500}\begin{pmatrix} 200 & -100 & 100 \\ -50 & 0 & 100 \\ -100 & 50 & -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.2 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & -0.2 \\ 0.2 & -0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.9
6.

Opgave 1.10
0 og -25.

Opgave 1.11

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 50 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

$y_4 = 850$, $y_5 = 7200$.

Opgave 1.12

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3000 & 1800 \\ 300 & 150 \\ 300 & 100 \\ 200 & 150 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 44$, $x_2 = 60$ og spild: 17800.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -10 \end{pmatrix}. \qquad \text{og} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 30000 & 18000 \\ 33000 & 18900 \\ 10000 & 2500 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.13

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 10 \\ 40 & 30 & 30 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Antallet af timer: $x_1 = 15$, $x_2 = 20$ og $x_3 = 0$ – drastisk konsekvens, dvs 0 timer pr. døgn, for Afdeling 3.

Opgave 1.14
Matricen er

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.10 & 0.05 & 0.90 \end{pmatrix}.$$

Sande antal: $5400, 2100, 900$.

Opgave 1.17
Ingen løsning med 5; netop en løsning med 6:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.18
Løsningerne er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

hvor t er vilkårlig.

Opgave 1.19

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.20
$\mathbf{b} = 7\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3 + 5\mathbf{a}_4 - 9\mathbf{a}_5$.

Opgave 1.21
(a): ja, (b): nej, (c): nej, (d): ja, (e): nej, (f): ja.

Opgave 1.22

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \text{ingen løsning}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.23
2 og 3.

Opgave 1.24

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.25

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 269 \\ -117 \end{pmatrix}$.

Opgave 1.26

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Opgave 1.27
Egenværdi -36 med tilhørende egenvektor $\binom{3/4}{1}$, egenværdi 0 med tilhørende egenvektor $\binom{15/8}{1}$.

Opgave 1.28
Koordinaterne er $(23/5, 11/5)$.

Opgave 1.29
Egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda = 5: \quad t\begin{pmatrix}8\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 4: \quad t\begin{pmatrix}9\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 3: \quad t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Opgave 1.30
$a = 3$ og $b = -1$.

Opgave 1.31
Egenværdierne er $-2 \pm i$ med tilhørende egenvektorer

$$t\begin{pmatrix}1 \mp i\\1\end{pmatrix}.$$

Modulus af egenværdierne er $\sqrt{5}$ og argumenter er ± 2.68.

Opgave 1.33
Egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda = 2: \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 2+\sqrt{20}i: \quad \begin{pmatrix}-7\\\sqrt{20}i\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 2-\sqrt{20}i: \quad \begin{pmatrix}-7\\-\sqrt{20}i\\1\end{pmatrix}.$$

Opgave 1.34
Egenværdierne er 0 og 1 (dobbeltrod).

Opgave 1.35
Egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda = 1: \quad t\begin{pmatrix}-1\\3\\-6\\6\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 2: \quad t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 3: \quad t\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 4: \quad t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 1\\3 & -2 & 1 & 0\\-6 & 1 & 0 & 0\\6 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Opgave 1.36
1 med modulus 1 og argument 0, $\pm i$ med modulus 1 og argumenter $\pm\pi/2$.

Opgave 1.37

(a) Egenværdier og -vektorer:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{med fx} \quad q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 6 \quad \text{med fx} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) En matrix $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$

Opgave 1.38

(a) $\lambda_1 = -1$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor hørende til $\lambda_2 = -2$.

(c) $a = 2$ og $\lambda_3 = 3$.

(d) $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(e) $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k}\mathbf{A}^k\mathbf{Q}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 26 \end{pmatrix}$.

Opgave 1.39

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.12 & 0.0 & 0.0 \\ 0.16 & 0.80 & 0.08 & 0.0 \\ 0.0 & 0.08 & 0.77 & 0.06 \\ 0.0 & 0.0 & 0.15 & 0.94 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3024 \\ 5392 \\ 11390 \\ 22194 \end{pmatrix}$.

(c) $x = k \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 1 \end{pmatrix}$, hvor $k \in \mathbb{R}$. Disse er egenvektorer hørende til egenværdien $\lambda = 1$. Når summen af koordinaterne er 42000, så fås $k = 20000$ og dermed egenvektoren $\begin{pmatrix} 6000 \\ 8000 \\ 8000 \\ 20000 \end{pmatrix}$.

Opgave 1.40

$\lim_{t\to\infty} \frac{y_t}{x_t} = \frac{4}{5}$ og $\lim_{t\to\infty} \frac{y_{t+1}}{y_t} = 7$.

Opgave 1.41

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(b) F.eks. gælder

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 409 \\ 304 \\ 988 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}_{20} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

(c) Tilhørende egenvektor

$$k \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

(d)

$$x_t \to \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \text{for } t \to \infty.$$

Opgave 1.42

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 1.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.8 & 1.9 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Dominerende egenværdi er 1.3 med tilhørende egenvektor fx

$$\begin{pmatrix} 0.4447 \\ 0.3706 \\ 0.8153 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{y_t + z_t}{x_t} \to \frac{8}{3}.$$

Opgave 1.43
I spørgsmål (c) bestemmer vi koordinaterne for $\mathbf{v}_0$ i den basis af egenvektorer som R giver, dvs $\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{q}_1 + c_2\mathbf{q}_2 + c3\mathbf{q}_3$. Tallet c er da lig med c_1.

Opgave 1.45
Egenværdier og normerede egenvektorer:
$\lambda = 3$: første søjle i $\mathbf{Q}$, $\lambda = 0$: anden søjle i $\mathbf{Q}$, $\lambda = -3$: tredje søjle i $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^5\mathbf{b} = \mathbf{A}^6\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 162 \\ 162 \\ 81 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.46
Ligevægten udtrykt ved a er

$$\frac{1}{0.75-a}\begin{pmatrix} 2-a \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.47
Totalmatricen omformes til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

og dermed bliver løsningerne til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.48
Totalmatricen omformes til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

og dermed bliver løsningerne til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 1.49
Nej; ja.

Opgave 1.50
$\{1,2\}$ og $\{2,3\}$.

Opgave 1.51
Hessematricen er

$$\begin{pmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2}+2 \end{pmatrix}$$

og den er positiv definit.

Opgave 1.53

(a) $1+13i$.

(b) $1-13i$.

(c) $-4-4i$.

(d) $11i$.

(e) $-2/5$.

(f) $-15i$.

Opgave 1.54

(a) $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ og $\theta = -\pi/4$.

(b) $r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ og $\theta \simeq 2.09$.

(c) $r \simeq 16.55$ og $\theta \simeq 0.44$.

(d) $r = 6/5$ og $\theta = \pi$.

Opgave 1.55

(a) $10\sqrt{3} - 10i$.

(b) $0.39 + 0.44i$.

(c) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Opgave 1.56

(a) $z = 1 \pm 4i$.

(b) $z = \pm 3i$ og $z = \pm 2i$.

(c) $z = 5 + i$ og $z = 2/13 - (3/13)i$.

Opgave 1.57

$\frac{4}{17} - \frac{1}{17}i$.

Opgaver i Modul 2

Opgave 2.1
Bestem den fuldstændige løsning til hver af nedenstående differensligninger

(a) $x_{t+1} = 3x_t$.

(b) $x_{t+1} = 3x_t + 7$.

(c) $x_{t+1} = 2x_t + 3t + 7$.

(d) $x_{t+1} = (t+1)x_t$.

Opgave 2.2
Det oplyses, at i en population på $N = 100\,000$ individer er 75% af de smittede blevet raske ugen efter og at hvis 1000 er smittede en uge, da er 1200 smittede ugen efter.

(a) Brug ovenstående oplysninger til at bestemme a og b i modellen

$$S_{t+1} = (1-a)S_t + bS_t\left(1 - \frac{S_t}{N}\right),$$

hvor S_t angiver størrelsen af den smittede population og hvor a angiver sandsynligheden for at et smittet individ er blevet raskt ugen efter.

(b) Bestem alle ligevægte for modellen og afgør hvilke af ligevægtene, der er stabile.

(c) Lad $S_0 = 10000$. Beregn værdierne $S_1, \dots, S_{50}$ (eller så langt som du orker, hvis du ikke bruger R ☺) ud fra modellen med de fundne værdier af a og b. Foretag tilsvarende beregninger med et antal "startsmittede" på $S_0 = 50$. Sammenlign resultaterne med spørgsmål (b).

Opgave 2.3
En færdiguddannet kandidat begynder at tilbagebetale sin studiegæld på 100000 kr. Rentesatsen er 7% pr. år og renterne tilskrives en gang om året. Kandidaten ønsker at betale en fast ydelse på 11900 kr. om året.

Lad x_t betegne restgælden i år t, lige efter ydelse nr. t. Det antages, at ydelserne starter 1 år efter studiets færdiggørelse, der sættes til $t = 0$, dvs. vi har $x_0 = 100000$.

(a) Udled en differensligning, som x_t opfylder, og løs denne ligning med begyndelsesbetingelsen $x_0 = 100000$.

(b) Bestem restgælden efter ydelse nr. 4.

(c) Hvornår er studielånet amortiseret? (dvs. hvornår er ydelsen mindre end 11900 kr.)

Opgave 2.4
Vis, at $(x^*, y^*) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ er en ustabil ligevægt for følgende system af differensligninger

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \tfrac{1}{2}x_t + x_t y_t \\ y_{t+1} &= \tfrac{1}{4}y_t + x_t. \end{aligned}$$

Opgave 2.5
Betragt følgende system af differensligninger

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= ax_t - 0.04\, x_t y_t \\ y_{t+1} &= 0.1\, y_t + 0.005\, x_t y_t, \end{aligned}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ er en konstant.

(a) Lad $a = 5.0$. Vis, at der er netop en ligevægt $\neq (0, 0)$ for systemet.

(b) Afgør, om den fundne ligevægt i (a) er stabil.

(c) Lad $a \in \mathbb{R}$ være vilkårlig. Bestem samtlige ligevægte for systemet udtrykt ved parameteren a.

(d) [Lidt sværere spørgsmål] Findes der en værdi af $a \in \mathbb{R}$, sådan, at systemet har en stabil ligevægt (x^*, y^*) med $y^* \neq 0$?

Opgave 2.6
Vi betragter følgende system af differensligninger

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 0.4\, x_t + 0.9\, y_t + 3 \\ y_{t+1} &= 0.4\, x_t - 0.1\, y_t. \end{aligned}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til disse ligninger.

(b) Bestem $\lim_{t\to\infty}(x_t, y_t)$ for en vilkårlig løsning (x_t, y_t) til disse ligninger. Hvad kan man slutte ud fra dette vedrørende ligevægte og stabilitet for differensligningerne?

(c) Bestem den partikulære løsning (x_t, y_t) til systemet af differensligninger, som opfylder $(x_0, y_0) = (18, 10)$.

Opgave 2.7
Bestem den fuldstændige løsning til hver af differensligningerne

(a) $x_{t+1} = 2x_t + t^2$.

(b) $x_{t+1} = 2x_t + 3^t$.

(c) $x_{t+1} = 2x_t + 2^t$.

Opgave 2.8
På en konto indsættes 1000 kr. årligt. Det første år er rentesatsen 5% p.a., derefter stiger den med 0.25% om året.

(a) Opstil en differensligning for det beløb x_t, der står på kontoen lige efter indbetalingen ved termin t $\quad (t = 0, 1, 2, \ldots)$.

(b) Beregn (gerne vha. R) x_t for $t = 1, 2, \ldots, 8$.

Opgave 2.9
Betragt differensligningen

$$x_{t+1} = x_t e^{r(1-x_t)},$$

hvor $r > 0$ er en parameter.

(a) Vi at differensligningen har netop én ligevægt x^* med $x^* > 0$ og bestem denne.

(b) For hvilke værdier af r er ligevægten stabil?

Opgave 2.10
Bestem alle ligevægte for differensligningen

$$x_{t+1} = \tfrac{1}{2}(x_t^2 + x_t - 2).$$

Undersøg hver af ligevægtene for stabilitet.

Opgave 2.11
Bestem den partikulære løsning (x_t) til differensligningen

$$x_{t+1} = \tfrac{1}{2}x_t + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{7}{2},$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $x_0 = 0$.

Opgave 2.12
Lad $a > 1$. Vis, at differensligningen

$$x_{t+1} = a x_t e^{-x_t}$$

netop én ligevægt x^* med $x^* > 0$ og bestem denne. For hvilke værdier af a er ligevægten stabil?

Facits til opgaver i Modul 2

Opgave 2.1

(a) $c3^t$.

(b) $c3^t - 7/2$.

(c) $c2^t - 3t - 10$.

(d) $ct!$.

Opgave 2.2

(a) $a = 3/4$ og $b = 95/99$.

(b) $S^* = 0$ (ustabil) og $S^* \simeq 21842$ (stabil).

(c) Hvis $S_0 = 10000$ er $S_{50} \simeq 21842$, mens $S_0 = 50$ medfører $S_{50} \simeq 21528$.

Opgave 2.3

(a) $x_{t+1} = 1.07\, x_t - 11900$, $x_t = -70000 \cdot 1.07^t + 170000$.

(b) 78244.3.

(c) $x_{13} > 0$ og $x_{14} < 0$ med ydelsen 11900, så ydelse 14 er mindre end 11900.

Opgave 2.4
Egenværdierne for matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

er (omtrentligt) 1.34 og -0.09. En af dem er numerisk større end 1 og derfor er der ustabilitet.

Opgave 2.5

(a) $(x^*, y^*) = (180, 100)$.

(b) Ligevægten er ikke stabil idet matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{36}{5} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdierne $1 \pm \sqrt{18/5}\, i$, som har modulus > 1.

(c) Ligevægten er $(x^*, y^*) = (180, (a-1)25)$ (foruden $(0, 0)$).

(d) Egenværdierne i den tilsvarende matrix er

$$\lambda = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{9(1-a)/10}, & a \leq 1 \\ 1 \pm \sqrt{9(a-1)/10}\, i & a > 1. \end{cases}$$

Det ses, at en af disse egenværdier har modulus > 1 med mindre $a = 1$. Men i det tilfælde er $y^* = (1-1)25 = 0$. Svaret er derfor “Nej”.

Opgave 2.6

(a) $\binom{x_t}{y_t} = c_1(0.8)^t\binom{9}{4} + c_2(-0.5)^t\binom{-1}{1} + \binom{11}{4}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
(Hver af vektorerne $\binom{9}{4}$ og $\binom{-1}{1}$ kan erstattes af en vektor, der er proportional med den angivne.)

(b) $\binom{x_t}{y_t} \to \binom{11}{4}$ når $t \to \infty$, så $\binom{11}{4}$ er en stabil ligevægt.

(c) $\binom{x_t}{y_t} = (0.8)^t\binom{9}{4} + 2(-0.5)^t\binom{-1}{1} + \binom{11}{4}$.

Opgave 2.7

(a) $x_t = c2^t - t^2 - 2t - 3$.

(b) $x_t = c2^t + 3^t$.

(c) $x_t = c2^t + \frac{1}{2}t2^t$.

Opgave 2.8

(a) $x_{t+1} = (1.05 + 0.0025\,t)x_t + 1000$.

(b) 1000, 2050, 3157.43, 4331.29, 5580.34, 6915.16, 8347.36, 9889.94, 11557.51.

Opgave 2.9

(a) $x^* = 1$.

(b) $r < 2$.

Opgave 2.10
-1 er en stabil ligevægt og 2 er en ustabil ligevægt.

Opgave 2.11
$x_t = 3t + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Opgave 2.12
Ligevægt $x^* = \ln a$ som er stabil, hvis $|1 - \ln a| < 1$, dvs. hvis $1 < a < e^2$.

Opgaver i Modul 3

Opgave 3.1
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y}.$$

Hvilke af løsningerne er defineret for alle $x \in \mathbb{R}$?

Opgave 3.2
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 4\sin(2x).$$

Opgave 3.3
Bestem for hver værdi af $a > 0$ samtlige ligevægte for differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = ax - xe^x$$

og undersøg om disse ligevægte er stabile.

Opgave 3.4
Vi betragter differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H,$$

hvor r, N og H er positive parametre. Dette svarer til en population med logistisk vækst, som udsættes for jagt med en konstant rate H.

(a) Lad $r = 0.2$, $K = 1000$ og $H = 42$. Bestem samtlige ligevægte for differentialligningen og undersøg om disse ligevægte er stabile.

(b) Lad fortsat $r = 0.2$ og $K = 1000$, men lad H variere. For hvilke værdier af H har differentialligningen to ligevægte? Er disse ligevægte stabile?

Opgave 3.5
Vi betragter differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 1$.

(a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen, og vis dernæst at $y = \frac{1}{x^2+1}$ er den partikulære løsning, der opfylder $y(0) = 1$.

(b) Udfyld i hånden skemaet (med 3 decimaler)

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$y(x)$				
$y(x)$ [Euler]				

ved at benytte

- løsningen $y = \frac{1}{x^2+1}$ til at udregne $y(x)$
- Eulers metode med steplængde $h = 0.2$ til at udregne $y(x)$ [Euler]

(c) Benyt `R` og steplængde $h = 0.1$ til at udregne tallene i skemaet (du behøver ikke skrive tallene ind i skemaet)

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(x)$											
$y(x)$ [Euler]											

(d) Benyt `R` som i (c) men nu med steplængde $h = 0.01$ hhv. $h = 0.001$ til at udregne $y(1)$ vha. Eulers metode. Bestem afvigelserne fra den korrekte værdi af $y(1)$ med et passende antal decimaler.

Hvordan kan `R`-koden simplificeres, når man som her kun ønsker $y(1)$ som output?

(e) Udfyld i hånden skemaet (med 3 decimaler)

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$y(x)$ [Euler forbedret]				

ved at benytte Eulers forbedrede metode med steplængde $h = 0.2$. Sammenlign med skemaet fra (a).

(f) Benyt `R` og steplængde $h = 0.1$ til at udregne tallene i skemaet (du behøver ikke skrive tallene ind i skemaet)

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(x)$ [Euler forbedret]											

Sammenlign med skemaet fra (c).

(g) Benyt `R` som i (f) men nu med steplængde $h = 0.01$ hhv. $h = 0.001$ til at udregne $y(1)$ vha. Eulers forbedrede metode. Bestem afvigelserne fra den korrekte værdi af $y(1)$ med et passende antal decimaler. Sammenlign med svarene fra (d).

(h) Indtast følgende funktion i `R`:

```
Euler <- function(f,n){
h <- 1/n
xE<-0
yE<-1
for (k in 1:n) {
yE<-yE+f(xE,yE)*h;
xE<-xE+h
}
yE
}
```

Afprøv funktionen `Euler` ved at køre følgende linier i R:

```
f<-function(x,y) {-2*x*y^2}
Euler(f,100)
Euler(f,1000)
```

Sammenlign med resultaterne fra (d) og forklar hvordan funktionen `Euler` virker.

Lav nu en ny funktion `Eulerny` ud fra `Euler`, som foruden f og n tager startværdierne x_0 og y_0 samt slutværdien for x kaldet x_{Slut} som parametre. Funktionen skal beregne $y(x_{\text{Slut}})$ ved Eulers metode ud fra begyndelsesbetingelsen $y(x_0) = y_0$ og med en steplængde svarende til en opdeling af intervallet $[x_0\,,\, x_{\text{Slut}}]$ i n lige store dele. Funktionen kaldes med

```
Eulerny(f,n,x0,y0,xSlut)
```

med indsatte værdier af parametrene.

Afprøv funktionen `Eulerny` med følgende kald:

```
Eulerny(f,100,0,1,1)
Eulerny(f,1000,0,1,1)
Eulerny(f,1000,0,1,2)
```

Gør endelig det tilsvarende med brug af Eulers forbedrede metode.

Opgave 3.6

En population $N(t)$ vokser logistisk. Det vides, at

(i) systemets bærekapacitet er $K = 1000$,

(ii) for $t = 50$ er populationsstørrelsen $\frac{1}{2}K$,

(iii) til samme tidspunkt er veksthastigheden 20, dvs. $N'(50) = 20$.

(a) Bestem et udtryk for populationsstørrelsen $N(t)$.

(b) Angiv populationsstørrelsen til tidspunktet $t = 0$, dvs. $N(0)$, afrundet til et helt tal. Angiv også væksthastigheden til dette tidspunkt, dvs $N'(0)$, afrundet til 2 decimaler.

(c) [Lidt vanskeligere spørgsmål.] Bestem det tidsinterval (endepunkterne afrundet til hele tal), hvori populationens væksthastighed er større end 15.

Opgave 3.7
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x}\,y + x^b \qquad (x > 0),$$

hvor $a > 0$ og $b > 0$.

Opgave 3.8
I en mindre jysk provinsby var folketallet i år 1920 lig med 2083. I år 1970 var det steget til 6427.

Opstil en logistisk model med $r = 0.04$ år^{-1}. Forudsig på baggrund af denne model folketallet på langt sigt. Forudsig desuden folketallet i år 2000.

Opgave 3.9
En population af størrelse $N = N(t)$ vokser logistisk. Det oplyses, at $N(0) = 120$ og $N(6) = 500$, samt at bærekapaciteten er 1200.

(a) Bestem et udtryk for $N = N(t)$.

(b) Til hvilket tidspunkt er populationen nået op på størrelsen 900 ? Hvad er til dette tidspunkt populationens øjeblikkelige vækstrate $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$?

Opgave 3.10
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -(\ln x) \cdot y + e^{-x \ln x} \qquad (x > 0).$$

Bestem desuden den partikulære løsning gennem $(1, 4)$.

Facits til opgaver i Modul 3

Opgave 3.1
$y = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}e^{2x} + c\right) \quad (c \in \mathbb{R})$. Defineret for alle $x \in \mathbb{R}$, når $c \geq 0$.

Opgave 3.2
$y = -\frac{8}{13}\cos(2x) + \frac{12}{13}\sin(2x) + ce^{-3x} \quad (c \in \mathbb{R})$.

Opgave 3.3
Ligevægte: $x^* = 0$ (stabil for $a < 1$) og $x^* = \ln a$ (stabil for $a > 1$).

Opgave 3.4

(a) Ligevægte: $N^* = 300$ (ustabil) og $N^* = 700$ (stabil).

(b) $H < 50$. Den mindste ligevægt er ustabil, mens den største er stabil.

Opgave 3.5

(a) $y = \frac{1}{x^2+c}$ $(c \in \mathbb{R})$.

(b)

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$y(x)$	1.000	0.962	0.862	0.735
$y(x)$ [Euler]	1	1	0.92	0.785

(c)

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(x)$	1.000	0.990	0.962	0.917	0.862	0.800	0.735	0.671	0.610	0.552	0.500
$y(x)$ [Euler]	1	1	0.98	0.942	0.888	0.825	0.757	0.688	0.622	0.560	0.504

(d) $h = 0.01$: $y(1) = 0.50036$ vha. Eulers metode. Afvigelse 0.00036.
$h = 0.001$: $y(1) = 0.500035$ vha. Eulers metode. Afvigelse 0.000035.

(e)

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$y(x)$ [Euler forbedret]	1	0.96	0.86	0.735

(f)

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(x)$ [Euler forbedret]	1	0.99	0.961	0.917	0.862	0.8	0.736	0.672	0.61	0.553	0.501

(g) $h = 0.01$: $y(1) = 0.5000096$ vha. Eulers forbedrede metode. Afvigelse 0.0000096.
$h = 0.001$: $y(1) = 0.5000001$ vha. Eulers forbedrede metode. Afvigelse 0.0000001.

(h) $\text{Eulerny}(f, 1000, 0, 1, 2) = 0.199987$. $\text{Eulerforbedretny}(f, 1000, 0, 1, 2) = 0.2000003$.

Opgave 3.6

(a) $N(t) = \frac{1000}{1+\exp(-0.08(t-50))}$.

(b) $N(0) = 18, N'(0) = 1.41$.

(c) $36 < t < 64$.

Opgave 3.7
$y = \frac{1}{a+b+1}\, x^{b+1} + cx^{-a} \quad (c \in \mathbb{R})$.

Opgave 3.8
9541 hhv. 8326.

Opgave 3.9

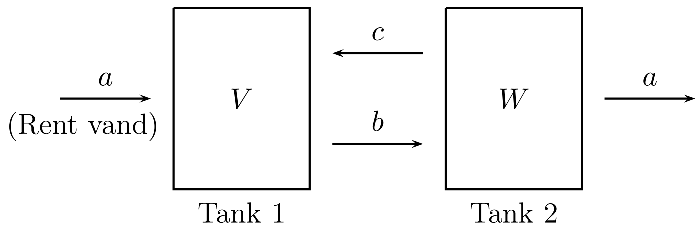
(a) $N(t) = \frac{1200}{1+9\exp(-0.3101\,t)}$.

(b) $t = 10.63$ hhv. 0.0775.

Opgave 3.10
Fuldstændig løsning: $y = (ce^x - 1)e^{-x\ln x} \quad (c \in \mathbb{R})$.
Partikulær løsning: $y = y(x) = (\frac{5}{e}e^x - 1)e^{-x\ln x}$.

Opgaver i Modul 4

Opgave 4.1
Vi betragter en mere generel model med forbundne kar end gennemgået til forelæsningen:



Her er V og W volumenerne af de to tanke (målt i liter). Disse volumener skal holdes konstante. Endvidere er a, b og c strømningshastighederne i de angivne retninger (målt i liter/min).

(a) Benyt oplysningerne til at opstille en matematisk model i form af et system af 2 differentialligninger for mængderne af et vist stof i de to tanke som funktion af tiden.
[Vink: Lav først et kompartmentdiagram og benyt dette til at undersøge ændringerne i de to kar i løbet af et lille tidsrum.]

Hvilken sammenhæng er der mellem de tre parametre a, b og c? Benyt dette til at forsimple modellen en anelse.

(b) I dette spørgsmål oplyses det, at $a = 5, b = 8, V = 10$ og $W = 20$. Bestem den fuldstændige løsning til systemet af differentialligninger fra (a).

Bestem endvidere den partikulære løsning, der svarer til, at der til at starte med er hhv. 45 og 20 gram af stoffet i tank 1 hhv. 2. Tegn vha. R graferne for mængderne af stoffet i de to tanke som funktion af tiden.

(c) Det antages nu, at det vand, der strømmer ind i tank 1 udefra, indeholder stoffet med en koncentration på k. Opstil en modificeret udgave af modellen fra (a), der tager højde for dette.

(d) Bestem ligevægten for modellen fra (c).

(e) Det oplyses (og skal ikke vises), at den matrix der optræder i modellen fra (c) har to negative egenværdier.

Benyt dette til at afgøre hvilke af parametrene V, W, a, b, c og k, der har indflydelse på slut*koncentrationerne* i de to tanke.

Opgave 4.2

(a) Bestem realdel og imaginærdel af $e^{(-2+i)t}$ når t er reel.

(b) Bestem realdel og imaginærdel af vektoren

$$\mathbf{v}(t) = e^{(-2+i)t}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

når t er reel, dvs. skriv $\mathbf{v}(t) = \operatorname{Re}\mathbf{v}(t) + i\operatorname{Im}\mathbf{v}(t)$, hvor $\operatorname{Re}\mathbf{v}(t)$ og $\operatorname{Im}\mathbf{v}(t)$ er vektorer med reelle koordinater.

Opgave 4.3
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2y \\ y' &= -x - y. \end{aligned}$$

Løsningen skal angives på reel form, dvs. $x(t)$ og $y(t)$ skal angives som reelle funktioner.
[Vink: Undervejs kan man med fordel benytte svaret til Opgave 4.2.]

Opgave 4.4
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -2x + 3y. \end{aligned}$$

Opgave 4.5
Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= bx + ay, \end{aligned}$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $b \neq 0$. Vis, at systemets matrix har egenværdierne $\lambda_1 = a + b$ og $\lambda_2 = a - b$, og bestem en egenvektor for hver af dem. Opskriv derefter den fuldstændige løsning for systemet. Hvad fås specielt for $a = b$?

Opgave 4.6
Bestem ligevægtstilstanden for systemet

$$\begin{aligned} x' &= x - 3y + 3 \\ y' &= 2x - 4y + 2, \end{aligned}$$

og afgør, om den er stabil. Bestem derefter den fuldstændige løsning til systemet.

Opgave 4.7
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + t + 1 \\ y' &= 3x - 2y. \end{aligned}$$

[Vink: Gæt først på en løsning af formen $\binom{x_0(t)}{y_0(t)} = \binom{At+B}{Ct+D}$.]

Opgave 4.8
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 2x - 2y. \end{aligned}$$

Opgave 4.9
Bestem ligevægtstilstanden for systemet

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 7y - 2 \\ y' &= 2x - 6y, \end{aligned}$$

og afgør, om den er stabil.

Opgave 4.10
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y + t + 25 \\ y' &= -5x + 4y - 17t + 58. \end{aligned}$$

[Vink: Gæt først på en løsning af formen $\binom{x_0(t)}{y_0(t)} = \binom{at+b}{ct+d}$.]

Opgave 4.11
Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

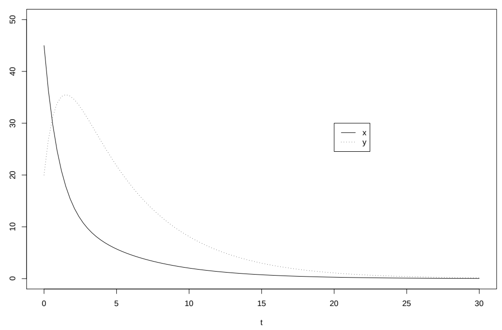
$$\begin{aligned} x' &= x + y + 1 \\ y' &= -x + y. \end{aligned}$$

Facits til opgaver i Modul 4

Opgave 4.1

(a) Lad $x(t)$ og $y(t)$ betegne mængderne af stoffet i tank 1 hhv. tank 2 til tiden t.
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{V} & \frac{c}{W} \\ \frac{b}{V} & -\frac{a+c}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{V} & \frac{c}{W} \\ \frac{b}{V} & -\frac{b}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, idet $b = a + c$.

(b) Fuldstændig løsning: $\binom{x}{y} = c_1 e^{-0.2\,t} \binom{1}{4} + c_2 e^{-t} \binom{3}{-4} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
Partikulær løsning: $c_1 = 15$ og $c_2 = 10$, så
$x(t) = 15\,e^{-0.2\,t} + 30\,e^{-t}$ og $y(t) = 60\,e^{-0.2\,t} - 40\,e^{-t}$.



(c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{V} & \frac{c}{W} \\ \frac{b}{V} & -\frac{b}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ka \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\binom{x^*}{y^*} = \binom{kV}{kW}$.

(e) Slutkoncentrationen er k i begge tanke (og afhænger altså kun af k).

Opgave 4.2

(a) $e^{-2t} \cos t$ hhv. $e^{-2t} \sin t$

(b) $\mathbf{v}(t) = e^{-2t} \binom{\cos t + \sin t}{\cos t} + i e^{-2t} \binom{-\cos t + \sin t}{\sin t}$

Opgave 4.3

$\binom{x}{y} = c_1 e^{-2t} \binom{\cos t + \sin t}{\cos t} + c_2 e^{-2t} \binom{-\cos t + \sin t}{\sin t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgave 4.4

$\binom{x}{y} = c_1 e^{t} \binom{1}{1} + c_2 e^{2t} \binom{1}{2} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgave 4.5

$\binom{x}{y} = c_1 e^{(a+b)t} \binom{1}{1} + c_2 e^{(a-b)t} \binom{1}{-1} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgave 4.6

$(3, 2)$ er en stabil ligevægt.
Fuldstændig løsning: $\binom{x}{y} = \binom{3}{2} + c_1 e^{-t} \binom{3}{2} + c_2 e^{-2t} \binom{1}{1} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgave 4.7
$\binom{x}{y} = \binom{-2t-3}{-3t-3} + c_1 e^t \binom{1}{1} + c_2 e^{-t} \binom{1}{3} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgave 4.8
$\binom{x}{y} = c_1 e^{2t} \binom{2}{1} + c_2 e^{-t} \binom{1}{2} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgave 4.9
$(3, 1)$ er en ustabil ligevægt.

Opgave 4.10
$\binom{x}{y} = \binom{7t+9}{13\,t} + c_1 e^{-t} \binom{1}{1} + c_2 e^{3t} \binom{1}{5}$.

Opgave 4.11
$\binom{x}{y} = \binom{-1/2}{-1/2} + c_1 e^t \binom{\cos t}{-\sin t} + c_2 e^t \binom{\sin t}{\cos t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Opgaver i Modul 5

Opgave 5.1
Vi betragter de samhørende differentialligninger

$$x' = 4x + 2y$$
$$y' = 5x + y$$

med begyndelsesbetingelserne $x(0) = 5$ og $y(0) = -2$

Benyt Eulers metode med steplængde $h = 0.1$ til at udfylde følgende skema i hånden

t	0.0	0.1	0.2
$x(t)$ [Euler]			
$y(t)$ [Euler]			

Sammenlign med de korrekte værdier af $x(t)$ og $y(t)$ udregnet vha. løsningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 3e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5.2
Vi betragter de samhørende differentialligninger

$$x' = -x - xy$$
$$y' = -y + xy$$

med begyndelsesbetingelserne $x(0) = 2$ og $y(0) = 1$ (se også Opgave 5.6).

(a) Benyt Eulers metode med steplængde $h = 0.5$ til at udfylde følgende skema i hånden

t	0.0	0.5	1.0
$x(t)$ [Euler]			
$y(t)$ [Euler]			

(b) Benyt Eulers forbedrede metode vha. R til at beregne tilnærmede værdier af $x(t)$ og $y(t)$ for $t \in [0, 4]$ med steplængde $h = 0.1$.
[Vink: Tag udgangspunkt i `R`-koden for et ikke-lineært system fra forelæsningen (dias 10). Benyt en vektor `x` med to koordinater og erstat x og y med koordinaterne `x[1]` hhv. `x[2]`. Bemærk at t ikke indgår på højresiderne af differentialligningerne i denne opgave (dvs. at systemet er autonomt).]

Tegn vha. `R` graferne for $x(t)$ og $y(t)$ i det samme koordinatsystem for $t \in [0, 4]$.

Tegn endvidere løsningskurven $(x(t), y(t))$ som vektorfunktion for $t \in [0, 4]$.

Gentag ovenstående med $h = 0.01$.

Opgave 5.3
Vi betragter differentialligningsmodellen

$$\begin{pmatrix} W_S' \\ W_G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_G & K_D \\ Y_G K_G & -K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_S \\ W_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_G(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

for kulstof i toppen af en plante. Her er $W_S = W_S(t)$ og $W_G = W_G(t)$ mængderne (målt i gram) af hhv. mobilt og strukturelt kulstof i toppen til tiden t (målt i dage), mens $P_G(t)$ er den hastighed, hvormed kulstof optages i planten via fotosyntesen. Parameterværdierne er $K_G = 2.2$, $K_D = 0.15$ og $Y_G = 0.8$. (Se overheads fra forelæsningerne samt Miniprojekt 4 for yderligere detaljer.)

Vi ønsker at undersøge plantens indhold W_G af strukturelt kulstof over en hel sæson fra 1. april til 1. oktober. Det antages, at

$$P_G(t) = 10\left(1 + 0.5\,\sin\left(\tfrac{\pi t}{180}\right)\right) \qquad \text{for } t \in [0, 180],$$

hvor $t = 0$ svarer til 1. april. Vi antager endvidere, at alle måneder er på 30 dage.

(a) Benyt Eulers forbedrede metode med $h = 0.1$ til at løse systemet numerisk vha. R, idet det oplyses, at $W_S(0) = 2$ og $W_G(0) = 10$. Angiv værdien af $W_G(t)$ den 1. i hver måned fra april til oktober, og tegn grafen for $W_G(t)$ sammen med grafen for $20 \cdot P_G(t)$.

(b) Dette spørgsmål går ud på at sammenligne to høststrategier, A og B, i perioden fra 1. april til 1. september. Ved hver høst høstes 70%, dvs. W_G og W_S reduceres begge med 70%. Der gælder stadig $W_S(0) = 2$ og $W_G(0) = 10$.

I strategi A høstes kun 1. september. Bestem udbyttet, dvs. det høstede W_G.

I strategi B høstes på 3 tidspunkter t_1, t_2 og t_3, hvor $t_3 = 150$ svarer til 1. september.

Sæt først $t_1 = 50$ og $t_2 = 100$ og løs systemet numerisk i 3 etaper. (Husk at begyndelsesværdierne af W_S og W_G for 2. etape er 30% af deres slutværdier fra 1. etape osv.) Bestem det samlede udbytte ved de 3 høste og sammenlign med udbyttet ved brug af strategi A.

Tegn grafen for $W_G(t)$ som funktion af tiden i hele perioden.

Forsøg til sidst eksperimentelt at variere tidspunkterne t_1 og t_2 i strategi B, således at man opnår det størst mulige samlede udbytte.

Opgave 5.4
Denne opgave går ud på at optille en simplere udgave af modellen for foderoptagelse hos køer; se overheads fra forelæsningerne.

Det antages at de to ædehastigheder $h_1(t)$ og $h_4(R)$ er konstante, dvs. $h_1(t) = h_1$ og $h_4(R) = h_4$. Endvidere antages det, at vommen kun indeholder sukker og store cellulosepartikler. De øvrige puljer af foder i vommen sættes altså alle til at være konstant lig med 0.

Opstil det system af differentialligninger, der svarer til disse antagelser.

Opgave 5.5
Til at beskrive to konkurrerende dyrearters populationsudvikling har man opstillet modellen

$$M' = M(1 - \tfrac{1}{15}M - \tfrac{1}{30}N)$$
$$N' = N(a - \tfrac{1}{30}M - \tfrac{1}{15}N)\,,$$

hvor $M = M(t)$ og $N = N(t)$ er populationsstørrelserne til tidspunkt t, og $a > 0$ er en konstant.

(a) Bestem samtlige ligevægte for modellen udtrykt ved a.

Bestem derefter de værdier af a for hvilke modellen har en ligevægt (M^*, N^*) med $M^* > 0$ og $N^* > 0$.

(b) Opstil funktionalmatricen for modellen.

Udregn endvidere funktionalmatricen i ligevægten (M^*, N^*) (med $M^* > 0$ og $N^* > 0$).

(c) Afgør, om ligevægten (M^*, N^*) (med $M^* > 0$ og $N^* > 0$) er stabil for de i (a) fundne værdier af a.
[Vink: Benyt gerne at begge rødder i ligningen $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ har negativ realdel, hvis $A > 0$ og $B > 0$.]

Opgave 5.6

(a) Bestem alle ligevægte for differentialligningssystemet

$$x' = -x - xy$$
$$y' = -y + xy.$$

[Vink: Sæt x hhv. y uden for parentes.]

(b) Afgør for hver ligevægt om den er stabil.

Opgave 5.7

(a) Bestem alle ligevægte for differentialligningssystemet

$$x' = 1 - xy$$
$$y' = x - y^3.$$

(b) Afgør for hver ligevægt om den er stabil.

Opgave 5.8
Betragt for $x > 0$ og $y > 0$ differentialligningssystemet

$$x' = 1 - (2x + y)^a$$
$$y' = 1 - (x + 2y)^b,$$

hvor $a > 0$ og $b > 0$.

(a) Vis, at systemet har netop én ligevægt, og at denne ikke afhænger af værdierne af a og b.

(b) Vis, at ligevægten er stabil for alle værdier af a og b.
[Vink: Det oplyses (og skal ikke bevises), at begge rødder i en andengradsligning af formen $x^2 + Ax + B = 0$, hvor $A > 0$ og $B > 0$, har negativ realdel.]

Opgave 5.9
Afgør, om $(0, 0, 0)$ er en stabil ligevægt for differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= x + y - z^2 \\ y' &= y - z + x^2 \\ z' &= z - x + y^2. \end{aligned}$$

[Vink: Benyt gerne R til at bestemme egenværdier.]

Opgave 5.10
En mikroorganisme dyrkes i en kemostat under omrøring og kontinuerlig tilledning af næringssubstrat samt fraledning af væske (som indeholder både substrat og biomasse). Systemet beskrives til det løbende tidspunkt t ved to tilstandsvariable: dels mikroorganismens populationsstørrelse $x = x(t)$, angivet ved gram biomasse pr. liter, dels koncentrationen $s = s(t)$ af næringssubstrat, ligeledes i gram pr. liter.

Der er opstillet en model, ifølge hvilken de to tilstandsvariable i et vist område med god tilnærmelse tilfredsstiller differentialligningerne

$$\begin{aligned} x' &= x(0.16\,s - 0.80) \\ s' &= 7.5 - 0.5\,xs. \end{aligned}$$

Forsøg har vist, at systemet i det lange løb vil nærme sig en sluttilstand, som i det væsentlige er uafhængig af startværdierne af x og s. Bestem denne sluttilstand, dvs. vis, at systemet har netop én ligevægt med $x > 0$ og $s > 0$, samt at denne ligevægt er stabil.

Opgave 5.11
Vis, at $(1, 2)$ er en ligevægt for differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 3xy + y^2 + x \\ y' &= 2x^2 + xy - 2y. \end{aligned}$$

Undersøg, om ligevægten er stabil.

Opgave 5.12
Betragt to konkurrerende plantepopulationer, hvis størrelser målt i kg biomasse pr. m^2 er hhv. $M = M(t)$ og $N = N(t)$. Man har fundet, at der med rimelig tilnærmelse gælder

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \cdot M' &= 1 - \tfrac{1}{40}M - \tfrac{1}{80}N \\ \frac{1}{N} \cdot N' &= 1 - \tfrac{1}{150}M - \tfrac{1}{500}N^2. \end{aligned}$$

[NB! Bemærk, at vækstraten for N *ikke* er lineær i M og N.]
Vis, at der findes netop én ligevægt (M^*, N^*) med $M^* > 0$ og $N^* > 0$. Undersøg, om denne ligevægt er stabil.

Facits til opgaver i Modul 5

Opgave 5.1

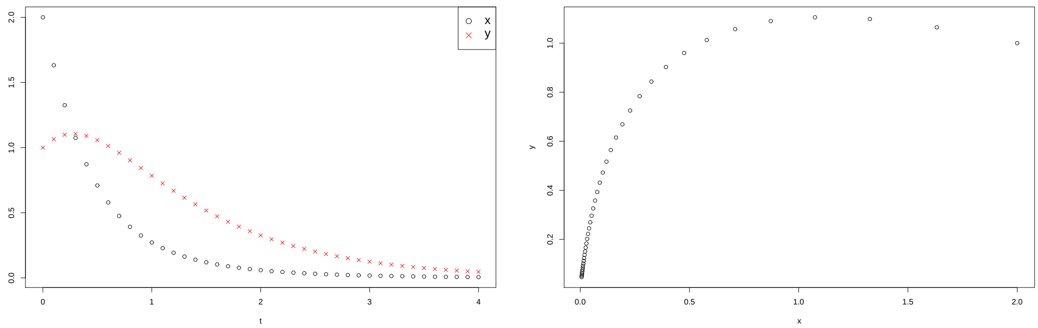
t	0.0	0.1	0.2
$x(t)$ [Euler]	5	6.6	9.3
$y(t)$ [Euler]	-2	0.3	3.63
$x(t)$	5	7.28	11.60
$y(t)$	-2	0.94	5.87

Opgave 5.2

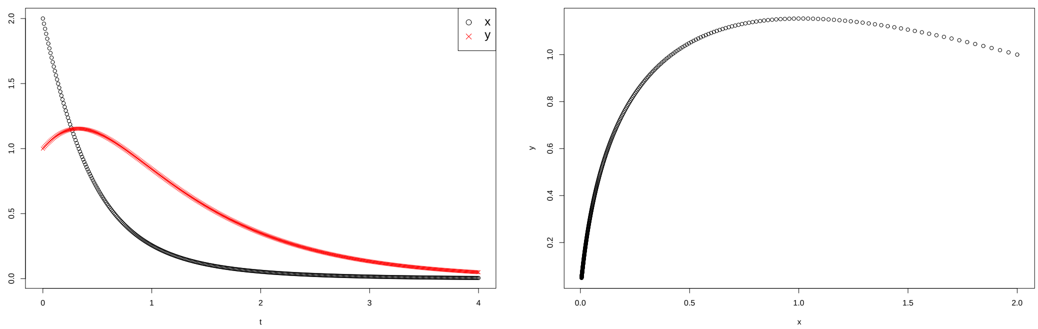
(a)

t	0.0	0.5	1.0
$x(t)$ [Euler]	2	0	0
$y(t)$ [Euler]	1	1.5	0.75

(b) $h = 0.1$:



$h = 0.01$:



Opgave 5.3

(a) 326 gram den 1. oktober

(b) Strategi A: Høst 255 gram
Strategi B: Høst 609 gram

Opgave 5.4

$$\begin{aligned} V' &= h_1 b_{KV} + h_4 b_{GV} - (f_V + l_A)V \\ BC' &= h_4 b_{GC} - \left(f_C\, g_1\left(\tfrac{BC}{V}\right) + l_B\right) BC. \end{aligned}$$

Opgave 5.5

(a) Ligevægte: $(0,0)$, $(15,0)$, $(0, 15\,a)$ og $(20 - 10\,a, 20\,a - 10)$.
$M^* > 0$ og $N^* > 0$ for $0.5 < a < 2$.

(b) Med $M' = f(M,N)$ og $N' = g(M,N)$ fås

$$D\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(M,N) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{15}\,M - \frac{1}{30}\,N & -\frac{1}{30}\,M \\ -\frac{1}{30}\,N & a - \frac{1}{30}\,M - \frac{2}{15}\,N \end{pmatrix}.$$

$$D\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(M^*,N^*) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a-4 & a-2 \\ 1-2a & 2-4a \end{pmatrix}.$$

(c) Ligevægten er stabil for alle $0.5 < a < 2$.

Opgave 5.6
$(0,0)$ er en stabil ligevægt, mens $(1,-1)$ er en ustabil ligevægt.

Opgave 5.7
$(1,1)$ er en stabil ligevægt, mens $(-1,-1)$ er en ustabil ligevægt.

Opgave 5.8

(a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Opgave 5.9
$(0,0,0)$ er en ustabil ligevægt.

Opgave 5.10
$(3,5)$.

Opgave 5.11
$(1,2)$ er en ustabil ligevægt.

Opgave 5.12
$(30,20)$ er en stabil ligevægt.

Opgaver i R

Opgave R1
Udregn værdien af udtrykkene

(a) $7 + 9 + 13$.

(b) $\frac{7}{9 \cdot 13}$.

(c) $99^{1/2} \sin(\pi/6)$.

(d) $3e^{-2(x-1)^2}$ når $x = 0$ og når $x = 1$.

Opgave R2
Definér funktionen $f(x) = 100/(1 + 3e^{-2x})$ og bestem værdierne $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ og $f(5)$. Tegn funktionens graf over intervallet $[0, 5]$.

Opgave R3
Find nulpunkterne for funktionen $f(x) = x^3 + 4x^2 - 17$ vha. `R`.
[Vink: Start med at tegne funktionens graf over et passende interval, så man kan se hvor nulpunkterne omtrentligt er. Brug derefter `uniroot`.]

Opgave R4
Det oplyses at funktionen $f(x) = 100/(1 + 3e^{-ax})$ opfylder $f(3) = 80$ for en vis værdi af parameteren a. Bestem denne værdi.

Opgave R5
Lad $f_k(x) = e^{-kx} \sin(kx)$.

(a) Tegn grafen for funktionen $f_1(x)$ for $x \in [-1, 2]$.

(b) Indtegn funktionerne $f_2(x)$ og $f_3(x)$ i samme graf som $f_1(x)$.
[Vink: Brug `add=TRUE`]
Kan man se alle grafer helt?

(c) Lav et plot der viser hele grafen for alle tre funktioner i intervallet $[-1, 2]$. [Vink: Eksperimentér med `ylim`.]

Opgave R6

(a) Tegn grafen for funktionen $f(x) = e^{-x} \sin(x)$ for $x \in [0, 2]$.

(b) Indtegn også punktet $(0, f(0))$ med en grøn prik på denne graf.
[Vink: Brug `points`.]

Opgave R7
Definer i `R` (vha. `c(...)`) vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.9 \\ 3.4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 1.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

samt matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.3 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn vektoren $\mathbf{x} = 1.25\mathbf{v}_1 - 2.5\mathbf{v}_2$.

(b) Udregn $\mathbf{A}\mathbf{v}_1$.

(c) Hvad giver `R` som output, hvis vi skriver `v1%*%A`? Er produktet $\mathbf{v}_1\mathbf{A}$ defineret (matematisk set)?

Opgave R8
Betragt følgende `R`-kode

```
v <- c(3,-1)
A <- matrix(c(1,2,3,4), 2)
w <- solve(A)%*%v
w <- A%*%w
```

Hvilken værdi har `w` når disse linjer er udført?

Opgave R9
Definér i `R` matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.3 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og udregn $\det \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$ samt $\mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^7$.

Opgave R10
Definér i `R` matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Udregn $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ og $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$.
[Vink: Afsnittet om matricer i `R`-noterne indeholder et nyttigt skema.]

Opgave R11
Definer i `R` matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Udregn $\mathbf{A}^{-1}$. Bestem derefter en matrix $\mathbf{X}$ sådan at $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$. Bestem endelig en matrix $\mathbf{Y}$ sådan at $\mathbf{YA} = \mathbf{C}^T$.

Opgave R12

(a) Følgende funktion i `R` udfører, når den kaldes, den rækkeoperation på en matrix, der består i at lægge q gange l'te række til k'te række:

```
roperation1<-function(M,k,q,l){
M[k,]<-M[k,]+q*M[l,]; M
}
```

Skriv denne funktion i `R Editor` og definer den i `R` vha. `R Console`.

(b) Prøv funktionen ved at køre linjerne

```
A <- matrix(c(1,20,3,40),2)
A
A <- roperation1(A,2,-20,1)
A
```

(c) Definer endvidere totalmatricen **T** hørende til systemet

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i `R` og brug funktionen `roperation1` gentagne gange for at ændre totalmatricen vha række operationer og løs på denne måde systemet.
[Eksempel:

```
T<-roperation1(T, 2,-0.5,1)
T
```

ændrer **T** ved at lægge -0.5 gange første række til anden række. Dernæst udskrives den ændrede matrix på skærmen.]

Opgave R13

Udregn følgende komplekse tal på formen $x + iy$:

(a) $(5 + 3i)(2 + i)$.

(b) $(1 + i)^5$.

(c) $\frac{(1-i)(2+i)}{(3-i)(4+i)}$.

Opgave R14

(a) Bestem modulus og argument for det komplekse tal$15 + 7i$.

(b) Opskriv $z = x + iy$ når det vides, at modulus af z er 0.59 og et argument er 0.85. [Vink: Se på R-funktionen `complex` vha. `?complex`.]

Opgave R15
Lad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestem alle egenværdier og tilhørende egenvektorer for $\mathbf{A}$.

(b) Angiv en matrix $\mathbf{Q}$ som diagonaliserer $\mathbf{A}$ og udregn produktet $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$.

(c) Hvilke koordinater har vektoren $\mathbf{x} = (1, 2, 2)^T$ i en given basis der udgøres af egenvektorer for $\mathbf{A}$?

Opgave R16
Forklar hvad der sker i hver af nedenstående linjer og angiv hvilken værdi har `x` efter hver linje

(a) `x<-1; for (k in (1:5)) {x<-2*x}; x;`

(b) `a<-2; x<-1; for (k in (1:5)) {x<-x*a}; x;`

(c) `x<-1; for (k in (1:5)) {x<-k*x}; x;`

Opgave R17
Brug en `for`-løkke til at beregne $\mathbf{A}^7$, hvor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.3 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave R18

(a) Lad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.9 & 0.0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og betragt modellen $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t$ for $t = 0, 1, 2, \ldots$.

- Brug en `for`-løkke til at beregne $\mathbf{x}_{27}$.
- Brug en `for`-løkke til at beregne en matrix $\mathbf{V}$, der som søjler har alle vektorerne $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{27}$.
  [Vink: Se Afsnit 16.9 i `R`-noterne (2013-udgaven).]
- Indtegn punkterne (med rød farve) der har tallene $0, \ldots, 27$ som førstekoordinater og første række af $\mathbf{V}$ som andenkoordinater i et koordinatsystem. Indtegn derefter (med blå farve) og i samme koordinatsystem de tilsvarende punkter hvis andenkoordinater svarer til anden række i matricen $\mathbf{V}$

(b) Lav en tilsvarende graf (eller punktplot) udfra modellen

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.9 & 0.0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave R19

Betragt epidemimodellen

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t, \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

som er omtalt ved forelæsningerne.

(a) Lav en graf der viser udviklingen blandt antal raske, syge, døde og helbredte over en periode på fx 20 uger, med en startpopulation på 300 raske, 0 syge, 0 døde og 0 helbredte.

(b) Gør grafen ret lækker! [titel, legend, farver osv. . .]

(c) Lav en tilsvarende graf for en startpopulation på 100 raske, 100 syge, 0 døde og 100 helbredte.

(d) Aflæs for hver graf den fordeling der ser ud til at opstå i det lange løb. Kontrollér, at resultaterne er i overensstemmelse med formlen

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}r_0 + \frac{1}{3}s_0 + d_0 \\ \frac{2}{3}r_0 + \frac{1}{3}s_0 + h_0 \end{pmatrix}$$

(fra forelæsningen).

Opgave R20

Nedestående funktion i `R` udfører (som nævnt tidligere), når den kaldes, den rækkeoperation på en matrix der består i at lægge q gange l'te række til k'te række:

```
roperation1<-function(M,k,q,l){
M[k,]<-M[k,]+q*M[l,]; M
}
```

Lav to funktioner `roperation2` og `roperation3` som gør følgende:

- Når `roperation2` kaldes med `roperation2(M,k,l)`, byttes om på den k'te og l'te række i matricen $\mathbf{M}$
- Når `roperation3` kaldes med `roperation3(M,k,q)`, ganges den k'te række i matricen $\mathbf{M}$ med tallet q

Afprøv de to funktioner på en konkret matrix `T` defineret i `R` med indtastningerne (fx)

```
> T<-roperation2(T, 2, 1); T;
```

Opgave R21

Denne opgave går ud på at bestemme løsninger til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

vha. R. (Systemet kan løses fuldstændigt ved at foretage rækkeoperationer i hånden.)

(a) Definer koefficientmatricen $\mathbf{A}$ i R.

(b) Begrund at søjle nr. 1 og 2 i $\mathbf{A}$ udgør et lineært uafhængigt sæt af vektorer i $\mathbb{R}^2$ (dvs. er en basis).
[Vink: Lad $\mathbf{C}$ være den matrix, der fremkommer fra $\mathbf{A}$ ved at beholde søjle nr. 1 og 2 og bestem determinanten af denne matrix. Det kan i R gøres ved at skrive

```
C<-A[,c(1,2)]
det(C)
```

]

(c) Løs vha. R ligningssystemet

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

[Vink: `solve`.]

(d) Godtgør derefter, at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er en løsning til det oprindelige system.

(e) Bestem på sammme måde en løsning til ligningssystemet hvis 2. og 3. koordinat er lig med nul.

Opgave R22

Denne opgave går ud på at arbejde fra R-editor og bruge scripts i R.

(a) Åbn R og åbn et R-editor vindue. Indtast følgende

```
#Opgave R1
7+9+13
```

i vinduet. Gem derefter indholdet i en fil fx med navnet `OpgaveR1.R`. Sørg for at gemme filen der hvor du vil have den (måske i en særlig mappe relevant for dette kursus?). En sådan R-fil kaldes et script.

(b) Luk R-editor vinduet. Indlæs scriptet (dvs. filen) `OpgaveR1.R` ved at bruge menuerne i toppen af R-vinduet.

(c) Arbejd videre med løsningen af opgaverne ved at skrive indtastningerne i R-editor vinduet og gemme arbejdet i denne fil.

Opgave R23

Denne opgave går ud på indlæse data fra en fil i R.

(a) Download filen `data.txt` fra Absalon til din computer og check hvad den indeholder ved at åbne filen i fx notepad. Det skulle være noget i retning af

```
Dag   Smittede
0     1
1     2
2     2
3     2
4     3
5     3
6     3
7     3
8     5
9     6
```

(b) Indlæs data fra filen i en variabel `d` i R vha. R-funktionen `read.table`. Man skal selvfølgelig angive filens placering (fx `".../matematikogmodellermappen/data.txt"`. Derudover kan bl.a. angives, om filen indeholder kolonneoverskrifet i første linje (fx `header=TRUE`), hvordan decimalkommaer er angivet (fx `dec=","`) og hvilke skilletegn der skal adskille de enkelte kolonner (fx `sep=";"`).

(c) Vis indholdet af `d` ved at skrive `d` eller `summary(d)`.

(d) Indholdet i `d` kan nu fx plottes: tegn en graf hvor tallene i de to kolonner indtegnes som punkter i et koordinatsystem.