Introduktion

Min R kode med output er vedlagt som appendix.

1 Opgave 1

1.1 Delopgave a

Jeg udregner det karakteristiske polynomien

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda E) = & \quad (1) \\ (-(a_1 + a_3) - \lambda)(-a_2 - \lambda) - a_1 a_2 = & \quad (2) \\ \lambda^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2 a_3 & \quad (3) \end{aligned}$$

Diskriminanten for dette andengrads polynomien er

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3)^2 - 4a_2 a_3 = & \quad (4) \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 - 2a_2 a_3 = & \quad (5) \\ a_1^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + (a_2 - a_3)^2 & \quad (6) \end{aligned}$$

Da $a_1, a_2, a_3 > 0$, er den eneste størrelse, der kunne være negativ i formlen for diskriminanten ovenfor, er størrelsen $a_2 - a_3$. Uanset værdien af $a_2 - a_3$, har vi imidlertid, at $(a_2 - a_3)^2$ er ikke-negativ. Derfor udtrykker formlen ovenfor diskriminanten som en sum af strengt positive og en enkelt ikke-negativ størrelse. Derfor er diskriminanten strengt positiv, hvilket vil sige, at det karakteristiske polynomien har to forskellige, reelle rødder λ_1 og λ_2. Altså har M disse to forskellige, reelle egenværdier.

1.2 Delopgave b

Vi ved, at et andengrads polynomien $f(x)$ med rødderne x_1, x_2 altid kan faktoriseres som

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \quad (7)$$

Altså ved vi i vores tilfælde, at

$$\det(M - \lambda E) = \lambda^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2 a_3 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad (8)$$

hvilket er ækvivalent med

$$\lambda^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2a_3 = \lambda^2 + (-(\lambda_1 + \lambda_2))\lambda + \lambda_1\lambda_2 \tag{9}$$

hvilket er ækvivalent med

$$(a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2a_3 = (-(\lambda_1 + \lambda_2))\lambda + \lambda_1\lambda_2 \tag{10}$$

Eftersom et førstegrads polynomien på formen

$$f(x) = ax + b \tag{11}$$

er unikt bestemt af koefficienterne a og b, har vi altså nu, at

$$a_1 + a_2 + a_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \qquad a_2a_3 = \lambda_1\lambda_2 \tag{12}$$

hvilket er ækvivalent med

$$-(a_1 + a_2 + a_3) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad a_2a_3 = \lambda_1\lambda_2 \tag{13}$$

Eftersom $a_1, a_2, a_3 > 0$, har vi altså

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0, \qquad 0 < \lambda_1\lambda_2 \tag{14}$$

Fra

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \tag{15}$$

får vi, at mindst ét af λ_1 og λ_2 må være strengt negativ, da summen af to ikke-negative tal aldrig kan blive strengt negativt.

Fra

$$0 < \lambda_1\lambda_2 \tag{16}$$

får vi, at λ_1 og λ_2 har samme fortegn.

Altså har vi nu alt i alt, at både λ_1 og λ_2 er strengt negative.

1.3 Delopgave c

Jeg udregner Mq_1 koordinatvis

$$(Mq_1)_1 = \tag{17}$$
$$-(a_1 + a_2)(a_2 + \lambda_1) + a_1 a_2 = \tag{18}$$
$$\lambda_1(-a_1 - a_2 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1}) \tag{19}$$
$$\tag{20}$$
$$(Mq_1)_2 = \tag{21}$$
$$a_1(a_2 + \lambda_1) - a_1 a_2 = \tag{22}$$
$$\lambda_1 a_1 \tag{23}$$

Altså har vi, at

$$Mq_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Fra delopgave b har vi, at

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_2 a_3 \tag{25}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\lambda_2 = \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} \tag{26}$$

Altså får vi, at

$$-a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} = -a_1 - a_3 - \lambda_2 \tag{27}$$

Fra delopgave b har vi yderligere, at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(a_1 + a_2 + a_3) \tag{28}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\lambda_1 + a_2 = -a_1 - a_3 - \lambda_2 \tag{29}$$

Altså får vi nu alt i alt, at

$$-a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} = -a_1 - a_3 - \lambda_2 = a_2 + \lambda_1 \tag{30}$$

hvilket giver os, at

$$Mq_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 q_1 \tag{31}$$

Altså er q_1 en egenvektor for M hørende til egenværdien λ_1.

1.4 Delopgave d

Eftersom M er en 2×2 matrix med to forskellige egenværdier, så er M diagonaliserbar. Altså har vores system ifølge sætning 4 på side 125 i kursusbogen om differentialligning den fuldstændige løsning

$$x(t) = \tag{32}$$

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) q_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) q_2 = \tag{33}$$

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(\lambda_2 t) \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.5 Delopgave e

Vi har generelt, at

$$x(0) = c_1 \exp(\lambda_1 \cdot 0) q_1 + c_2 \exp(\lambda_2 \cdot 0) q_2 = c_1 q_1 + c_2 q_2 \tag{35}$$

I vores tilfælde har vi yderligere, at

$$x(0) = \begin{pmatrix} K_{B0} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Vores begyndelsesbetingelse giver os altså følgende system til bestemmelse af c_1 og c_2:

$$\begin{pmatrix} K_{B0} \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Vi kunne omskrive dette til et matrix problem og bruge rækkeoperationer på totalmatricen til at bestemme c_1 og c_2. Jeg synes dog, at dette system er tilpas simpelt til, at det er lettere at angribe direkte uden at gå gennem matrix repræsentationen. Vi har, at

$$0 = c_1 a_1 + c_2 a_1 \tag{38}$$

hvilket er ækvivalent med, at

$$c_2 = -c_1 \tag{39}$$

Vi har yderligere, at

$$K_{B0} = c_1(a_2 + \lambda_1) + c_2(a_2 + \lambda_2) \tag{40}$$

Indsætter vi $c_2 = -c_1$ heri, får vi

$$K_{B0} = c_1(a_2 + \lambda_1) - c_1(a_2 + \lambda_2) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{41}$$

hvilket er ækvivalent med

$$c_1 = \frac{K_{B0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{42}$$

Da $c_2 = -c_1$, får vi yderligere, at

$$c_2 = \frac{K_{B0}}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{43}$$

Altså har vi, at den partikulære løsning til begyndeĺsesbetingelsen er givet som

$$x(t) = \exp(\lambda_1 t)\frac{K_{B0}}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \exp(\lambda_2 t)\frac{K_{B0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Altså har vi, at

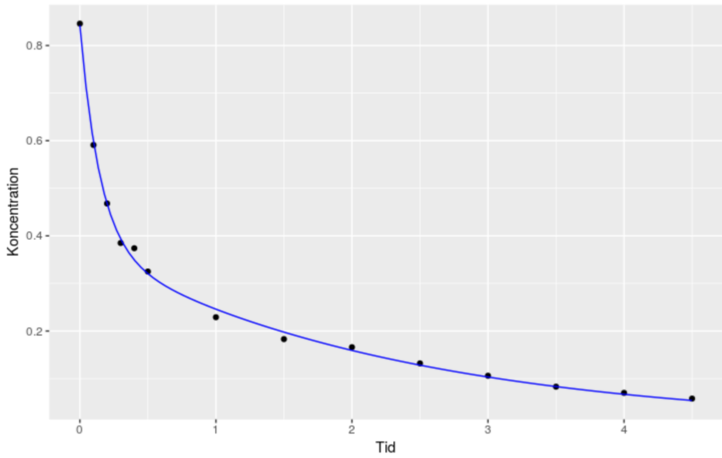
$$K_B(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{45}$$

hvor

$$\begin{align} A_1 &= \frac{K_{B0}(a_2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{46} \\ & \tag{47} \\ A_2 &= \frac{K_{B0}(a_2 + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{48} \end{align}$$

1.6 Delopgave f

Her er mit plot af den estimeterede model og datapunkterne:



(49)

1.7 Delopgave g

Fra de fundne udtryk for A_1 og A_2 i delopgave e får jeg disse to udtryk for a_2:

$$a_2 = \frac{A_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{K_{B0}} - \lambda_1 \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

$$a_2 = \frac{A_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{K_{B0}} - \lambda_2 \tag{52}$$

Indsætter jeg $K_{B0} = 0.846$ og de estimeterede værdier af A_1, A_2, λ_1 og λ_2 i disse udtryk får jeg 3.25 og 3.92 som estimater af a_2. Jeg estimerer derfor værdien af a_2 som gennemsnittet af disse to værdier, altså 3.586.

Fra ligningen $\lambda_1\lambda_2 = a_2 a_3$ fra delopgave b får jeg dette udtryk for a_3:

$$a_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2} \tag{53}$$

Indsætter jeg de estimeterede værdier af a_2, λ_1 og λ_2 i dette udtryk, får jeg estimatet $a_3 = 0.812$.

Fra ligningen $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1 - a_2 - a_3$ fra delopgave b, får jeg dette udtryk for a_1:

$$a_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - a_2 - a_3 \tag{54}$$

Indsætter jeg de estimeterede værdier af a_2, a_3, λ_1 og λ_2 i dette udtryk, får jeg estimatet $a_1 = 2.773$.

1.8 Delopgave h

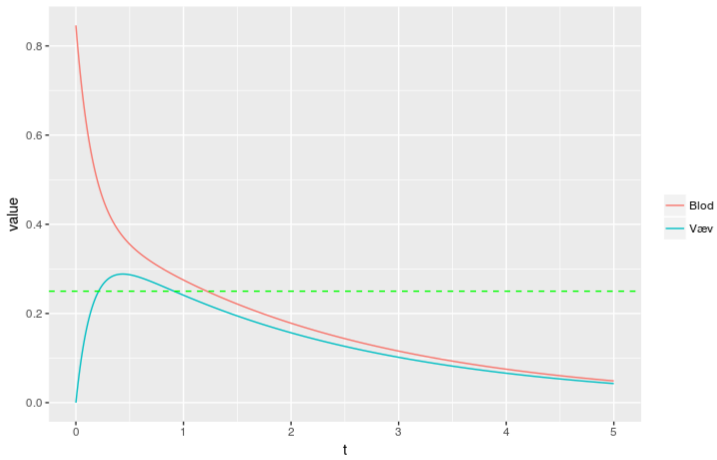
I delopgave e bestemte jeg, at givet vores begyndelsesbetingelse får vi den partikulære model

$$x(t) = \exp(\lambda_1 t)\frac{K_{B0}}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \exp(\lambda_2 t)\frac{K_{B0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Vi har nu estimater for alle konstanter i denne model. Indsætter vi dem, får vi følgende estimeterede model:

$$x(t) = \exp(-0.432t)\begin{pmatrix} 0.423 \\ 0.372 \end{pmatrix} + \exp(-6.74t)\begin{pmatrix} 0.423 \\ -0.372 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Her er et plot over udviklingen af blods- og vævs-koncentrationen ifølge modellen



Den grønne linje indikerer skæringen $y = 0.25$.

Ifølge modellen kan der opereres i tidsrummet mellem $t = 0.21$ og $t = 0.91$. Da t er målt i timer, svarer det til, at man skal begynde, at operere efter

$$0.21\text{time} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{time}} = 12.6\,\text{min} \tag{57}$$

hvorefter der er et tidsrum på

$$(0.91\text{time} - 0.21\text{time}) \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{time}} = 42\,\text{min} \tag{58}$$

til at nå operationen indenfor.

1.9 Delopgave i

Vi har nu systemet

$$\begin{pmatrix} K_B' \\ K_V' \end{pmatrix} = f(K_B, K_V) \tag{59}$$

hvor

$$f(K_B, K_V) = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_3) & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_B \\ K_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

For at bestemme dets ligevægt løser jeg

$$f(K_B^*, K_V^*) = (0, 0) \tag{61}$$

hvorved jeg får

$$\begin{pmatrix} K_B^* \\ \\ K_V^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_0 a_1}{a_3} \\ \\ \frac{d_0 a_2}{a_3} \end{pmatrix} \tag{62}$$

Funktionalmatricen for f er simpelthen

$$Df(K_B, K_V) = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_3) & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \tag{63}$$

Jeg har allerede vist i delopgave b, at denne matrix kun har egenværdier med negativ realdel, da jeg der viste, at den har to negative, reelle tal som egenværdier. Altså er den fundne ligevægt stabil.

1.10 Delopgave j

Da K_V^* udtrykker koncentrationen af stoffet i vævet på lang sigt, skal jeg løse ligningen

$$K_V^* = \frac{d_0 a_2}{a_3} = 0.275 \tag{64}$$

med hensyn til d_0. Hermed får jeg

$$d_0 = \frac{a_3}{a_2} 0.275 \tag{65}$$

Indsætter jeg de tidligere fundne estimater af a_2 og a_3 i dette udtryk, får jeg

$$d_0 = 0.062 \tag{66}$$

Jeg ved, at ligevægten (K_B^*, K_V^*) er en partikulær løsning til det inhomogene system. Tidligere i opgaven fandt jeg den fuldstændige løsning til det homogene system. Altså kan jeg bestemme den fuldstændige løsning til det inhomogene system som summen af de to

$$x(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(\lambda_2 t) \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d_0 a_1}{a_3} \\ \frac{d_0 a_2}{a_3} \end{pmatrix} \tag{67}$$

For at bestemme konstanterne i den ønskede partikulære løsning, vil jeg løse systemet

$$\begin{pmatrix} K_{B0} \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d_0 a_1}{a_3} \\ \frac{d_0 a_2}{a_3} \end{pmatrix} \tag{68}$$

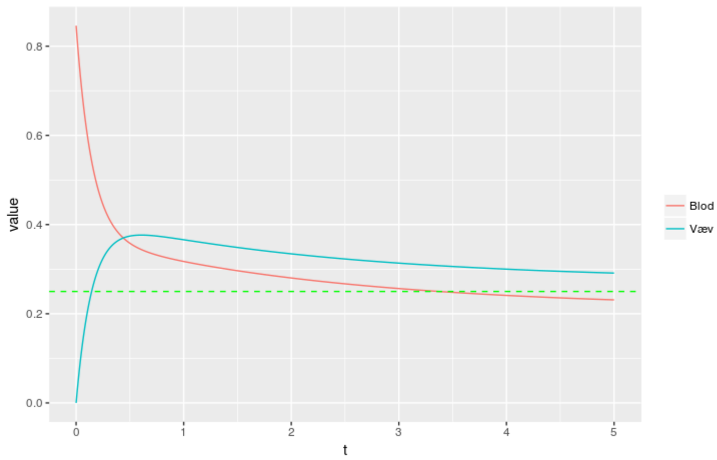
med hensyn til c_1, c_2, hvilket er ækvivalent med at løse systemet

$$\begin{pmatrix} K_{B0} - \frac{d_0 a_1}{a_3} \\ -\frac{d_0 a_2}{a_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + \lambda_1 & a_2 + \lambda_2 \\ a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

der som bekendt har løsningen

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + \lambda_1 & a_2 + \lambda_2 \\ a_1 & a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{B0} - \frac{d_0 a_1}{a_3} \\ -\frac{d_0 a_2}{a_3} \end{pmatrix} \tag{70}$$

Jeg $K_{B0} = 0.846$ og de estimeterede værdier af de andre størrelser i højresiden af dette udtryk. Hermed kan jeg få r til numerisk at bestemme værdien af det. Jeg får, at $c_1 = 0.051$ og $c_2 = -0.15$. Jeg indsætter disse og de andre estimeterede værdier i udtrykket for den partikulære løsning, hvorefter jeg plotter udviklingen af koncentrationerne:



Den grønne linje indikerer skæringen $y = 0.25$.

Ifølge modellen kan der opereres i tidsrummet efter $t = 0.14$. Da t er målt i timer, svarer det til, at man skal begynde, at operere efter

$$0.14\text{time} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{time}} = 8.4\,\text{min} \tag{71}$$

hvorefter der ikke er nogen tidsbegrænsning, da systemet konvergerer mod en ligevægt med vævskoncentration højere end 0.25.

2 Opgave 2

For at bestemme systemets fulde fulde løsning, vil jeg bestemme egenværdierne til

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Jeg udregner derfor det karakteristiske polynomien

$$\det(A - \lambda E) = (-2-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 + 4\lambda + 8 \tag{73}$$

Diskriminanten for dette polynomien er

$$d = 4^2 - 4 \cdot 8 = -16 \tag{74}$$

Polynomiets rødder er altså givet som

$$\lambda_1 = \frac{-4 + \sqrt{-16}}{2} = -2 + 2i, \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = -2 - 2i \tag{75}$$

For at bestemme en egenvektor til λ_1, løser jeg systemet

$$(A - E\lambda)v = 0 \tag{76}$$

hvilket giver mig egenrummet

$$\{(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \mid v_1 = -2iv_2\} \tag{77}$$

Fra dette egenrum vælger jeg egenvektoren

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \tag{78}$$

Hermed får jeg også, at

$$q^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \tag{79}$$

er en egenvektor til egenværdien λ_2.

Altså kan jeg skrive den fuldstændige løsning for systemet op som

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \exp((-2+2i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} + c_2 \exp((-2-2i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \tag{80}$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Lad mig nu skrive denne løsning til reel form. Vi har, at

$$\exp((-2+2i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \tag{81}$$

$$\exp(-2t)(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \tag{82}$$

$$\exp(-2t) \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ -2i\cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} = \tag{83}$$

$$\exp(-2t) \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + i\exp(-2t) \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix} \tag{84}$$

Altså har vi, at

$$Re\left(\exp((-2+2i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}\right) = \exp(-2t) \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \tag{85}$$

og

$$Im\left(\exp((-2+2i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}\right) = \exp(-2t) \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix} \tag{86}$$

Altså har vi følgende fuldstændig løsning på reel form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = b_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + b_2 \exp(-2t) \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix} \tag{87}$$

hvor $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

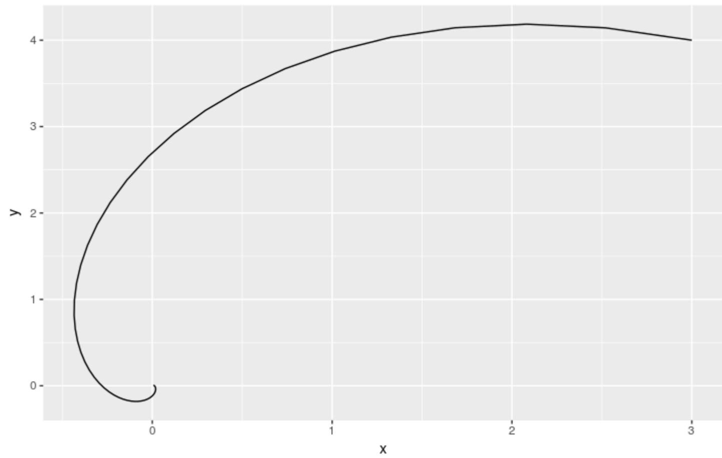
2.1 Delopgave b

For at bestemme den ønskede partikulære løsning, løser jeg systemet

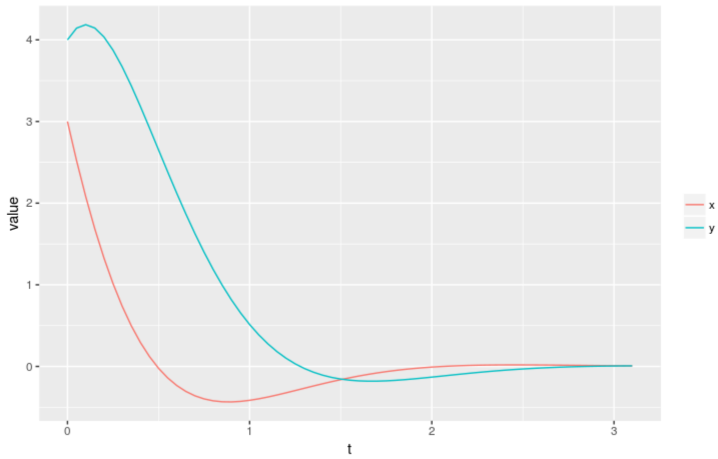
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} \cos(0) \\ 2\sin(0) \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} \sin(0) \\ -2\cos(0) \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{88}$$

hvilket giver $b_1 = 3$ og $b_2 = -2$.

Her er et plot af udviklingen af (x, y) som en kurve i planet:



og her er et plot med udviklingen af x og y hver for sig, plottet som funktioner af t:



2.2 Delopgave c

Jeg gætter på, at systemet har en løsning på formen

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} k_1 \exp(2t) \\ k_2 \exp(2t) \end{pmatrix} \tag{89}$$

Jeg indsætter dette i differentialligningen og får

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 2k_1 \exp(2t) \\ 2k_2 \exp(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 \exp(2t) + k_2 \exp(2t) - \exp(2t) \\ -4k_1 \exp(2t) - 2k_2 \exp(2t) + 2\exp(2t) \end{pmatrix} \tag{90}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\begin{pmatrix} 2k_1 \\ 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 + k_2 - 1 \\ -4k_1 - 2k_2 + 2 \end{pmatrix} \tag{91}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{92}$$

hvilket giver $k_1 = -0.1$ og $k_2 = 0.6$.

Jeg har nu fundet ud af, at

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -0.1 \exp(2t) \\ 0.6 \exp(2t) \end{pmatrix} \tag{93}$$

er en partikulær løsning til det inhomogene system. Jeg fandt den fuldstændige løsning til det homogene system ovenfor. Altså kan jeg bestemme den fuldstændige løsning til det inhomogene system som summen af de to

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = b_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + b_2 \exp(-2t) \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.1 \exp(2t) \\ 0.6 \exp(2t) \end{pmatrix} \tag{94}$$

hvor $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

3 Opgave 3

3.1 Delopgave a

For at bestemme ligevægten, vil jeg løse systemet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_G W_S + K_D W_G + P_0 \\ Y_G K_G W_S - K_D W_G \end{pmatrix} \tag{95}$$

Fra nederste ligning får jeg

$$W_G = \frac{Y_G K_G W_S}{K_D} \tag{96}$$

hvilket jeg indsætter i øverste ligning, hvorved jeg får

$$-K_G W_S + Y_G K_G W_S + P_0 = 0 \tag{97}$$

hvilket giver mig

$$W_S = \frac{P_0}{K_G(1 - Y_G)} \tag{98}$$

hvilket jeg indsætter tilbage i ovenstående udtryk for W_G, hvorved jeg får

$$W_G = \frac{P_0 Y_G}{K_D(1 - Y_G)} \tag{99}$$

Hermed har jeg bestemt ligevægten

$$\begin{pmatrix} W_S^* \\ \\ W_G^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_0}{K_G(1-Y_G)} \\ \\ \frac{P_0 Y_G}{K_D(1-Y_G)} \end{pmatrix} \tag{100}$$

Funktionalmatricen for modellen er blot selve matricen, som har det karakteristiske polynomien

$$(-K_G - \lambda)(-K_D - \lambda) - K_D Y_G K_G = \lambda^2 + (K_G + K_D)\lambda + K_G K_D (1 - Y_G) \tag{101}$$

Da $0 < K_D, K_G$ og $0 < Y_G < 1$, har vi altså, at det karakteristiske polynomien for funktionalmatricen er på formen

$$\lambda^2 + A\lambda + B \tag{102}$$

hvor $A, B > 0$. Altså har det kun rødder med negativ reaaldel. Altså har funktionalmatricen kun egenværdier med negativ realdel, og altså er ligevægten stabil.

3.2 Delopgave b

Ved hjælp af R bestemmer jeg, at modellens matrice har en egenværdien $\lambda_1 = -2.32$ med tilhørende egenvektor

$$q_1 = \begin{pmatrix} -0.777 \\ -0.069 \end{pmatrix} \tag{103}$$

og egenværdien $\lambda_2 = -0.03$ med tilhørende egenvektor

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.998 \end{pmatrix} \tag{104}$$

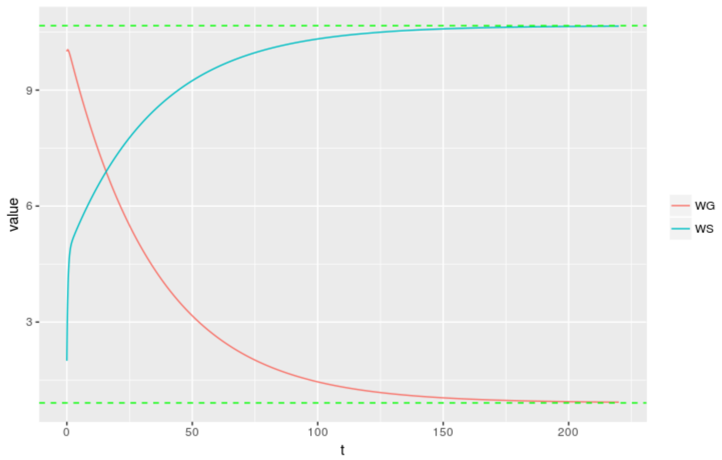
Alt i alt får jeg den fuldstændige løsning til

$$x(t) = c_1 \exp(-2.32t) \begin{pmatrix} -0.777 \\ -0.069 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-0.03t) \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.998 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10.667 \\ 0.909 \end{pmatrix} \tag{105}$$

For begyndelsesbetingelsen $(W_S(0), W_G(0)) = (2, 10)$ finder jeg den partikulære løsning

$$x(t) = 3.57 \exp(-2.32t) \begin{pmatrix} -0.777 \\ -0.069 \end{pmatrix} - 9.36 \exp(-0.03t) \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.998 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10.667 \\ 0.909 \end{pmatrix} \tag{106}$$

Her er et plot af udviklingen af W_S og W_K over tid:



De grønne linjer er ligevægtene.

```
knitr::opts_knit$set(root.dir = '~/Desktop/bio_modelling_course/mod4/proj4')
```

R code for question 1

```
library(magrittr)
library(tidyverse)
```

```
## ── Attaching packages ─────────────────────────────────────────────── tidyverse 1.2.1 ──
```

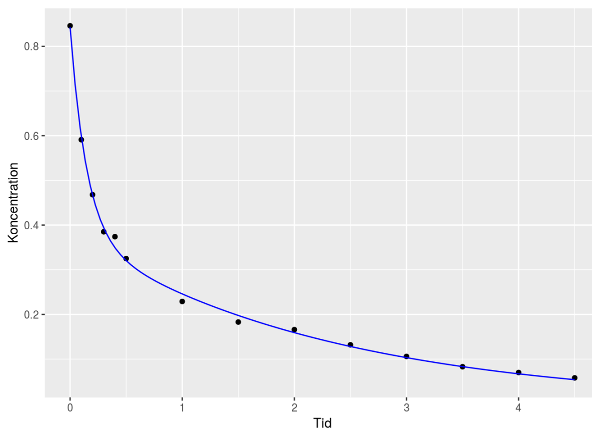
```
## ✔ ggplot2 2.2.1     ✔ purrr   0.2.4
## ✔ tibble  1.4.2     ✔ dplyr   0.7.4
## ✔ tidyr   0.8.0     ✔ stringr 1.3.0
## ✔ readr   1.1.1     ✔ forcats 0.3.0
```

```
## ── Conflicts ──────────────────────────────────────────────── tidyverse_conflicts() ──
## ✖ tidyr::extract()   masks magrittr::extract()
## ✖ dplyr::filter()    masks stats::filter()
## ✖ dplyr::lag()       masks stats::lag()
## ✖ purrr::set_names() masks magrittr::set_names()
```

```
data <- read_delim('anaestesi-data.txt',' ')
```

```
## Parsed with column specification:
## cols(
##   Tid = col_double(),
##   Koncentration = col_double()
## )
```

```
#f
fit <- nls(Koncentration~A1*exp(l1*Tid)+A2*exp(l2*Tid),
           data=data,
           start=list(A1=1, A2=1, l1=-1, l2=-2))
pars <- fit$m$getPars()
Kb <- function(t) {
  unname(pars['A1']*exp(pars['l1']*t) + pars['A2']*exp(pars['l2']*t))
}
ggplot(data, aes(Tid, Koncentration)) +
  geom_point() +
  stat_function(fun=Kb, color='blue')
```




```
#g
Kb0 <- 0.846
a2_1 <- pars['A1']*(pars['l1']-pars['l2'])/Kb0 - pars['l1']
a2_2 <- pars['A1']*(pars['l2']-pars['l1'])/Kb0 - pars['l2']
a2 <- mean(c(a2_1,a2_2))
a2
```

```
## [1] 3.585659
```

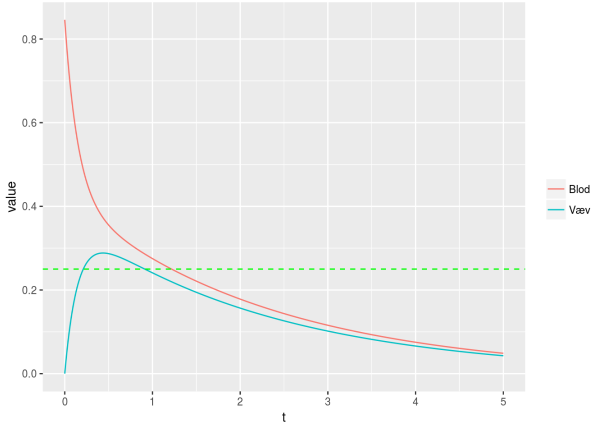
```
a3 <- unname(pars['l1']*pars['l2']/a2)
a3
```

```
## [1] 0.8124418
```

```
a1 <- unname(-pars['l1']-pars['l2']-a2-a3)
a1
```

```
## [1] 2.773217
```

```
#h
c1 <- unname(Kb0/(pars['l1']-pars['l2']))
c2 <- unname(Kb0/(pars['l2']-pars['l1']))
q1 <- unname(c(a2 + pars['l1'], a1))
q2 <- unname(c(a2 + pars['l2'], a1))
model <- function(t) unname(exp(pars['l1']*t)*c1*q1 + exp(pars['l2']*t)*c2*q2)
ts <- seq(0,5,0.01)
sim <- data.frame(t(as.matrix(data.frame(map(ts, model)))))
rownames(sim) <- NULL
colnames(sim) <- c('Blod', 'Væv')
sim %<>% mutate(t = ts)
sim %>%
  gather(key='key', value='value', -t) %>%
  ggplot(aes(t, value, color=key)) +
  geom_line() +
  geom_hline(yintercept = 0.25, color='green', linetype='dashed') +
  theme(legend.title = element_blank())
```




```
uniroot(function(t) model(t)[2] - 0.25, c(0,0.75))$root
```

```
## [1] 0.2113731
```

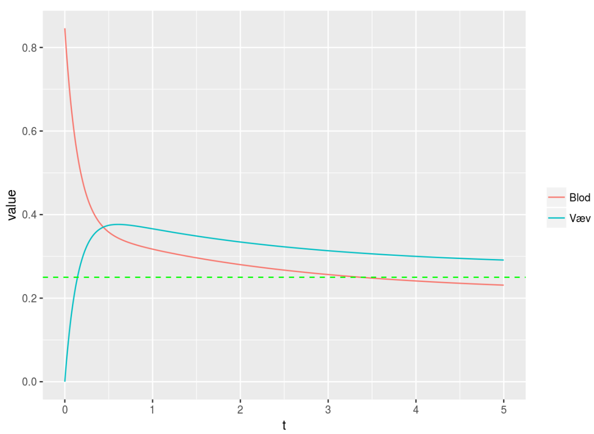
```
uniroot(function(t) model(t)[2] - 0.25, c(0.75,1.5))$root
```

```
## [1] 0.9120789
```

```
#
d0 <- a3/a2*0.275
equib <- c(d0*a1/a3,d0*a2/a3)
b <- c(Kb0,0)-equib
A <- matrix(c(q1,q2),nrow = 2)
cs <- solve(A, b)
cs
```

```
## [1]  0.05083618 -0.14999899
```

```
model <- function(t) unname(exp(pars['l1']*t)*cs[1]*q1 + exp(pars['l2']*t)*cs[2]*q2 + equib)
ts <- seq(0,5,0.01)
sim <- data.frame(t(as.matrix(data.frame(map(ts, model)))))
rownames(sim) <- NULL
colnames(sim) <- c('Blod', 'Væv')
sim %<>% mutate(t = ts)
sim %>%
  gather(key='key', value='value', -t) %>%
  ggplot(aes(t, value, color=key)) +
  geom_line() +
  geom_hline(yintercept = 0.25, color='green', linetype='dashed') +
  theme(legend.title = element_blank())
```

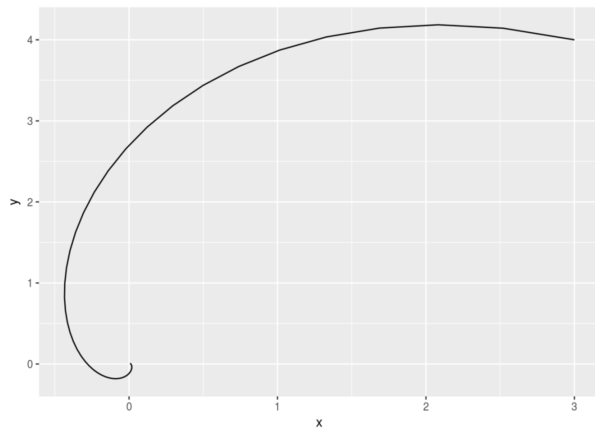



```
uniroot(function(t) model(t)[2] - 0.25, c(0,0.75))$root
```

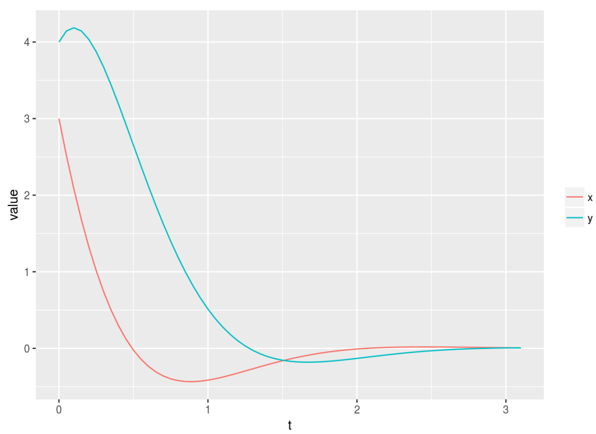
```
## [1] 0.1441508
```

R code for question 2

```
b1 <- 3
b2 <- -2
x <- function(t) {
  b1*exp(-2*t)*cos(2*t) +
    b2*exp(-2*t)*sin(2*t)
}
y <- function(t) {
  b1*exp(-2*t)*2*sin(2*t) +
    b2*exp(-2*t)*-2*cos(2*t)
}
sim <- data_frame(t = seq(0,pi,by=0.05),
                  x = x(t),
                  y = y(t))
sim %>% ggplot(aes(x,y)) + geom_path()
```




```
sim %>%
  gather(key = 'key', value = 'value', -t) %>%
  ggplot(aes(t, value, color=key)) +
  geom_line() +
  theme(legend.title = element_blank())
```




```
solve(matrix(c(-4,-4,1,-4),nrow = 2), c(1,-2))
```

```
## [1] -0.1  0.6
```

R code for question 3

```
library(tidyverse)
kg <- 2.2
kd <- 0.15
yg <- 0.8
p0 <- 10
equib <- c(p0*yg/kd*(1-yg), p0/kg*(1-yg))
A <- matrix(c(-kg,yg*kg,kd,-kd),nrow=2)
l1 <- eigen(A)$values[1]
l2 <- eigen(A)$values[2]
q1 <- eigen(A)$vectors[1,]
q2 <- eigen(A)$vectors[2,]
l1
```

```
## [1] -2.321571
```

```
l2
```

```
## [1] -0.02842903
```

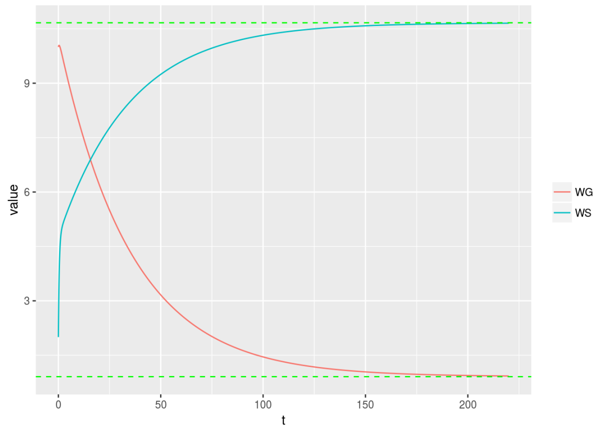
```
q1
```

```
## [1] -0.77688406 -0.06891022
```

```
q2
```

```
## [1]  0.6296437 -0.9976229
```

```
cs <- solve(matrix(c(q1,q2),nrow=2), c(2,10)-equib)
x <- function(t) cs[1]*exp(l1*t)*q1[1] + cs[2]*exp(l2*t)*q2[1] + equib[1]
y <- function(t) cs[1]*exp(l1*t)*q1[2] + cs[2]*exp(l2*t)*q2[2] + equib[2]
sim <- data_frame(t = seq(0,220,by=0.05),
                  WS = x(t),
                  WG = y(t))
sim %>%
  gather(key = 'key', value = 'value', -t) %>%
  ggplot(aes(t, value, color=key)) +
  geom_line() +
  geom_hline(yintercept = equib[1], color='green', linetype='dashed') +
  geom_hline(yintercept = equib[2], color='green', linetype='dashed') +
  theme(legend.title = element_blank())
```


value
9
6
3
0
50
100
150
200
t
WG
WS