Modul 3: forelæsning 2
Numerisk løsning af differentialligninger

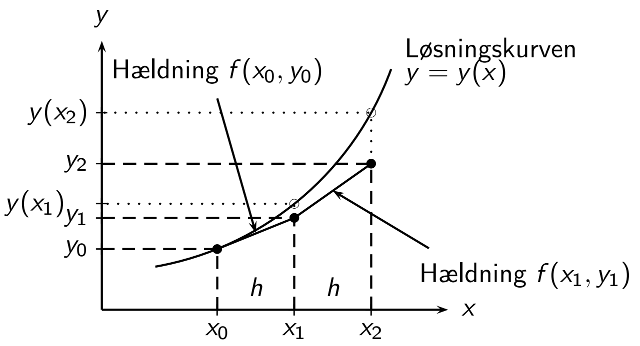
Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Eulers metode

For differentialligning $y'(x) = f(x, y)$. Startpunkt (x_0, y_0); steplængde h:



$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h, & y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)h,\\
x_2 &= x_1 + h, & y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)h,\\
&\vdots & &\vdots\\
x_{n+1} &= x_n + h, & y_{n+1} &= y_n + f(x_n, y_n)h.
\end{aligned}
$$

Eksempel

Eulers metode anvendt på

$$y'(x) = x + y \qquad (= f(x, y))$$

med

- begyndelsesbetingelsen $y(0.5) = 0.3$
- steplængden $h = 0.1$

[(x_{-1}, y_{-1}), (x_{-2}, y_{-2}) osv. beregnes på tilsvarende vis]

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	0.11	0.16	0.22	0.3	0.38	0.48	0.60	0.74	0.90
$y(x_n)$	0.13	0.17	0.23	0.3	0.39	0.50	0.63	0.79	0.97

Nederste række er beregnet vha. den eksakte løsning

$$y(x) = 1.8\, e^{-0.5}\, e^{x} - x - 1.$$

Samme eksempel vha. R

```
> # Euler: f(x,y)=x+y; y(0.5)=0.3; h=0.1
> f<-function(x,y) {x+y}; h<-0.1; n<-5
> x0<-0.5; xE<-x0
> y0<-0.3; yE<-y0
> E<-c(xE,yE)
> for (k in 1:n) {
+ yE<-yE+f(xE,yE)*h;
+ xE<-xE+h;
+ E<-cbind(E,c(xE,yE));
+ }
> E
       E
[1,] 0.5 0.60 0.700 0.8000 0.90000 1.000000
[2,] 0.3 0.38 0.478 0.5958 0.73538 0.898918

> round(E,3)   # Runder af til 3 decimaler
       E
[1,] 0.5 0.60 0.700 0.800 0.900 1.000
[2,] 0.3 0.38 0.478 0.596 0.735 0.899
```


Samme eksempel med $h = 0.05$

```
> # Euler: f(x,y)=x+y; y(0.5)=0.3; h=0.05
> f<-function(x,y) {x+y}; h<-0.05; n<-10
> x0<-0.5; xE<-x0
> y0<-0.3; yE<-y0
> E<-c(xE,yE)
> for (k in 1:n) {
+ yE<-yE+f(xE,yE)*h;
+ xE<-xE+h;
+ E<-cbind(E,c(xE,yE));
+ }
> round(E,3)
       E
[1,] 0.5 0.55 0.600 0.650 0.700 0.750 0.800 0.850 0.900 0.950 1.000
[2,] 0.3 0.34 0.384 0.434 0.488 0.547 0.612 0.683 0.759 0.842 0.932
```

Udtager hver anden søjle i E (dvs. søjle 1, 3, 5, 7, 9, 11):

```
> round(E[,seq(1,11,by=2)],3)
       E
[1,] 0.5 0.600 0.700 0.800 0.900 1.000
[2,] 0.3 0.384 0.488 0.612 0.759 0.932
```


Samme eksempel – sammenligning

Korrekt værdi	$y(1) = 0.968$
Euler med $h = 0.1$	$y(1) = 0.899$
Euler med $h = 0.05$	$y(1) = 0.932$

Eulers forbedrede metode

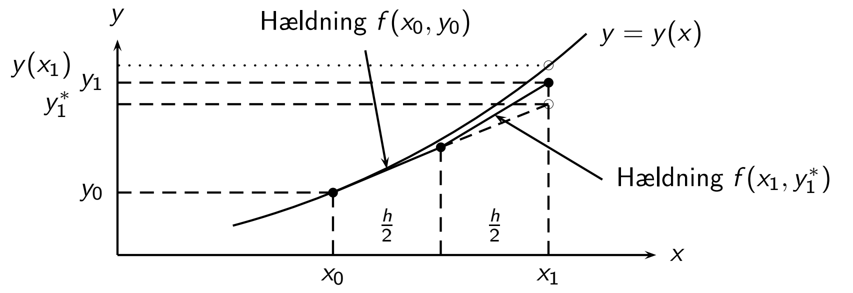
For $y'(x) = f(x,y)$. Startpunkt (x_0, y_0); steplængde h så $x_n = x_0 + nh$:

$$x_1 = x_0 + h, \qquad y_1^* = y_0 + f(x_0,y_0)h, \qquad y_1 = y_0 + \frac{f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1^*)}{2}h$$

$$x_2 = x_1 + h, \qquad y_2^* = y_1 + f(x_1,y_1)h, \qquad y_2 = y_1 + \frac{f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2^*)}{2}h$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1}^* = y_n + f(x_n,y_n)h, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1}^*)}{2}h$$



Eksempel

Eulers forbedrede metode anvendt på

$$y'(x) = x + y \qquad (= f(x,y))$$

med begyndelsesbetingelsen $y(0.5) = 0.3$ og steplængden $h = 0.1$:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n^*	0.127	0.166	0.220	–	0.380	0.488	0.618	0.771	0.952
y_n	0.134	0.174	0.229	0.3	0.389	0.498	0.629	0.784	0.965
$y(x_n)$	0.133	0.174	0.229	0.3	0.389	0.499	0.630	0.785	0.968

Nederste række er beregnet vha. den eksakte løsning

$$y(x) = 1.8\, e^{-0.5}\, e^x - x - 1.$$

Konklusion Eulers forbedrede metode er væsentligt mere præcis end Eulers metode!!!

Samme eksempel vha. R

```
> # Forbedret Euler: f(x,y)=x+y; y(0.5)=0.3; h=0.1
> f<-function(x,y) {x+y}; h<-0.1; n<-5
> x0<-0.5; xE<-x0
> y0<-0.3; yE<-y0
> E<-c(xE,yE)
> for (k in 1:n) {
+ yEs<-yE+f(xE,yE)*h;
+ yE<-yE+(f(xE,yE)+f(xE+h,yEs))/2*h;
+ xE<-xE+h;
+ E<-cbind(E,c(xE,yE));
+ }
> round(E,3)
       E
[1,] 0.5 0.600 0.700 0.800 0.900 1.000
[2,] 0.3 0.389 0.498 0.629 0.784 0.965
```


Model for forrentning af kapital med udtræk

- Til tidspunktet t (målt i år) er kapitalens størrelse $x(t)$
- *Løbende* forrentning med en variabel sats $r(t)$
- *Løbende* udtræk af variabel størrelse $u(t)$

Dette fører til differentialligningen

$$x'(t) = r(t)x(t) - u(t) \qquad (t \geq 0)$$

Fremgangsmåde med givne funktioner r(t) og u(t)
(som i (a), (b) og (c) nedenfor samt i miniprojektet)

(i) Opstil differentialligningen og bestem den fuldstændige løsning.

(ii) Udtryk konstanten "c" ved startkapitalen $x(0)$ og indsæt dette i løsningen.

(iii) Bestem den mindste værdi (kaldet $x_{\min}$) af $x(0)$ for hvilken kapitalen *ikke* opbruges med tiden.

(iv) Indsæt talværdier for parametrene i løsningen og tegn grafer for forskellige værdier af $x(0)$.

(a) Konstant forrentning og konstant udtræk

$$r(t) = r_0 \qquad \text{og} \qquad u(t) = u_0 \qquad (\text{for alle } t \geq 0)$$

(i) Differentialligning:

$$x'(t) = r_0 x(t) - u_0$$

Fuldstændig løsning:

$$x(t) = \tfrac{u_0}{r_0} + c e^{r_0 t} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

(ii) Fuldstændig løsning udtrykt ved $x(0)$:

$$x(t) = \tfrac{u_0}{r_0} + \Big(x(0) - \tfrac{u_0}{r_0}\Big)\, e^{r_0 t}$$

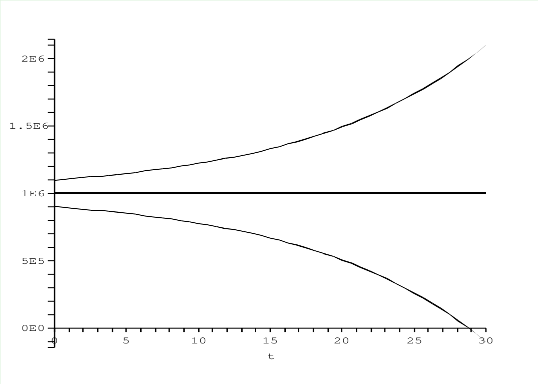
(iii) Konklusion:

- $x(t)$ vokser hvis $x(0) > \frac{u_0}{r_0}$ $(= x_{\min})$
- $x(t)$ er konstant hvis $x(0) = \frac{u_0}{r_0}$
- $x(t)$ aftager hvis $x(0) < \frac{u_0}{r_0}$

(a) Konstant forrentning og konstant udtræk – fortsat

(iv) Med $r_0 = 0.08$ (dvs. 8 pct. p.a.) og $u_0 = 80\,000$ fås

$$x(t) = 1\,000\,000 + (x(0) - 1\,000\,000)\, e^{0.08\,t}$$



Løsningskurver med $x(0) = 900\,000$, $1\,000\,000$ hhv. $1\,100\,000$

(b) Lineært voksende forrentning og konstant udtræk

$$r(t) = r_0 + \delta t \qquad \text{og} \qquad u(t) = u_0$$

(i) Differentialligning:

$$x'(t) = (r_0 + \delta t)x(t) - u_0$$

Fuldstændig løsning vha. "panserformlen":

$$x(t) = e^{r_0 t + \frac{1}{2}\delta t^2} \left(-u_0 \int_0^t e^{-(r_0 s + \frac{1}{2}\delta s^2)}\, ds + c \right) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Kan ikke reduceres!
(Men kan udregnes numerisk for konkrete talværdier.)

(ii) $$x(t) = e^{r_0 t + \frac{1}{2}\delta t^2} \left(x(0) - u_0 \int_0^t e^{-(r_0 s + \frac{1}{2}\delta s^2)}\, ds \right)$$

(iii) $$x_{\min} = u_0 \int_0^\infty e^{-(r_0 s + \frac{1}{2}\delta s^2)}\, ds$$

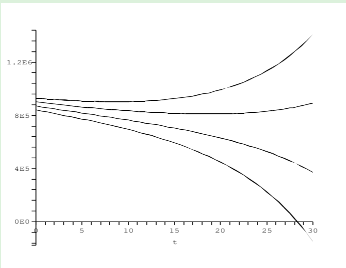
(b) Lineært voksende forrentning og konstant udtræk – fortsat

(iv) Med $r_0 = 0.08$, $\delta = 0.001$ og $u_0 = 80\,000$ fås

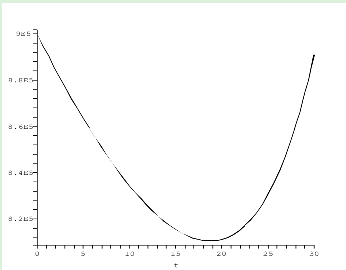
$$x(t) = e^{0.08\,t + 0.0005\,t^2} \cdot \left(x(0) - 80\,000 \int_0^t e^{-(0.08\,s + 0.0005\,s^2)}\, ds \right)$$

og

$$x_{\min} = 80\,000 \int_0^\infty e^{-(0.08\,s + 0.0005\,s^2)}\, ds \simeq 887\,678$$



$x(0) = 840000,\ 870000,$
900000 hhv. 930000



Forstørrelse med
$x(0) = 900\,000$

(c) Konstant forrentning og periodisk udtræk

$$r(t) = r_0 \qquad \text{og} \qquad u(t) = u_0 + \gamma \sin(2\pi t)$$

(i) Differentialligning:

$$x'(t) = r_0 x(t) - (u_0 + \gamma \sin(2\pi t))$$

Fuldstændig løsning vha. "nålestiksmetoden":

$$x(t) = \frac{u_0}{r_0} + \frac{2\pi\gamma}{r_0^2 + 4\pi^2} \cos(2\pi t) + \frac{\gamma r_0}{r_0^2 + 4\pi^2} \sin(2\pi t) + c e^{r_0 t} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

(ii) $$x(t) = \frac{u_0}{r_0} + \frac{2\pi\gamma}{r_0^2+4\pi^2} \cos(2\pi t) + \frac{\gamma r_0}{r_0^2+4\pi^2} \sin(2\pi t) + \left(x(0) - \frac{u_0}{r_0} - \frac{2\pi\gamma}{r_0^2+4\pi^2} \right) e^{r_0 t}$$

(iii) Hvis γ ikke er for stor gælder $\quad x_{\min} = \dfrac{u_0}{r_0} + \dfrac{2\pi\gamma}{r_0^2 + 4\pi^2}$

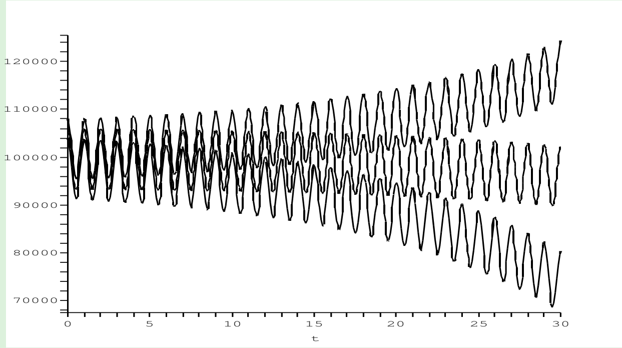
(c) Konstant forrentning og periodisk udtræk – fortsat

(iv) Med $r_0 = 0.08$, $u_0 = 80\,000$ og $\gamma = 40\,000$ fås

$$x(t) \simeq 1\,000\,000 + 6365\cos(2\pi t) + 81\sin(2\pi t) + (x(0) - 1\,006\,365)\,e^{0.08\,t}$$

og

$$x_{\min} \simeq 1\,006\,365$$



Løsningskurver med $x(0) = 1\,004\,000,\ 1\,006\,000$ hhv. $1\,008\,000$

Oplæg til Miniprojekt 3

Opgave 1 "Teoretisk" opgave der udleder løsningen til den modificerede logistiske differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \left(\frac{y}{K}\right)^{\alpha}\right)$$

Opgave 2 Givet data fra SARS-epidemien i Singapore i 2003.

Forsøg at beskrive data vha. forskellige typer differentialligninger.

Parametrene tilpasses til dels "ved at prøve sig frem".

Opgave 3 Model for forrentning af kapital med udtræk.

Numerisk løsning.