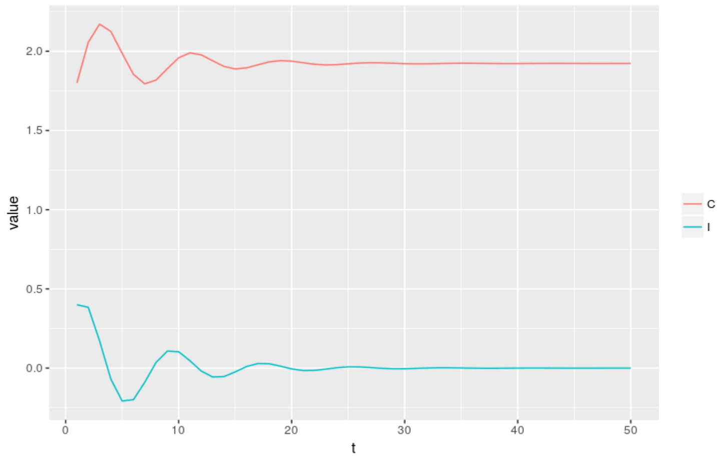
Introduktion

Min R-kode er vedlagt som appendix til projektet.

1 Opgave 1

1.1 Delopgave a

Her er plots af fremskrivningerne af forbrugsmængden C_t og investeringsmængden I_t for $t = 1, ..., 50$:



Vi ser, at C_t ser ud til at konvergere mod en værdi på lidt mindre end 2, og I_t ser ud til at konvergere mod 0, når t går mod uendelig. Her er værdierne af C_t og I_t for $t = 45, ..., 50$:

	t	C	I
1	45	1.923166	-0.000291
2	46	1.922980	-0.000279
3	47	1.922897	-0.000126
4	48	1.922930	0.000050
5	49	1.923031	0.000151
6	50	1.923127	0.000145

Det ser altså ud til, at (C_t, I_I) konveregerer mod $(1.923, 0)$, når t går mod uendelig.

1.2 Delopgave b, c & d

Fra **sætning B.5.1** ved jeg, at hvis den inverse til matricen

$$(A-E)=\begin{bmatrix} a-1 & a \\ (a-1)c & ac-1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

eksisterer, så har modellen netop én ligevægt givet ved

$$v^* = -(A-E)^{-1}\begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix} \tag{2}$$

Da

$$\det(A-E) = (a-1)(ac-1) - a(a-1)c = 1-a \tag{3}$$

så har $(A-E)$ en invers, hvis og kun hvis $a \neq 1$. I så fald er den inverse givet ved

$$(A-E)^{-1} = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} ac-1 & -a \\ -(a-1)c & a-1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

og modellen har netop én ligevægt givet ved

$$-(A-E)^{-1}\begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix} = -\frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} ac-1 & -a \\ -(a-1)c & a-1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

For at finde ud af om denne ligevægt er stabil eller ej, vil jeg se nærmere på egenværdierne for A. Jeg opskriver derfor det karakteristiske polynomien for A:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a \\ (a-1)c & ac-\lambda \end{vmatrix} = \tag{6}$$

$$(a-\lambda)(ac-\lambda) - a(a-1)c = \tag{7}$$

$$\lambda^2 + (-a(c+1))\lambda + ac \tag{8}$$

Fra hintet i opgavebeskrivelsen ved jeg, at polynomiet har rødder, der er numerisk skarpt mindre end 1, hvis og kun hvis

$$|ac| < 1 \tag{9}$$

og

$$|-a(c+1)| < 1 + ac \tag{10}$$

begge gælder.

Fra **sætning B.6.2** ved jeg altså, at hvis linje (9) og (10) er opfyldt, så er ligevægten stabil. Alt i alt har jeg nu fundet ud af, at hvis $a \neq 1$ og linje (9) og (10) er opfyldt, så har modellen netop én stabil ligevægt givet ved

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

I så fald har vi, at uanset hvilken værdi (C_0, I_0) har, så vil (C_t, I_t) konvergere mod denne ligevægt, når t går mod uendelig.

Sætter vi $a = 0.48, b = 1, c = 1.5$, så er $a \neq 1$ og linje (9) og (10) er opfyldt, da

$$|ac| = 0.72 < 1 \tag{12}$$

og

$$|-a(c+1)| = 1.2 < 1.72 = 1 + ac \tag{13}$$

Altså har vores model i så fald netop én stabil ligevægt, og denne er givet ved

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-0.48} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9231 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Dette svarer til, hvad vi så i den numeriske simulering i delopgave a.

2 Opgave 2

2.1 Delopgave a & b

Jeg løser kun delopgave a, da delopgave b ser ud til at blive noget værre regneri, som jeg ikke tør vove mig ud i! For $n = 2$ har vi:

$$\det(M - \lambda E) = \begin{vmatrix} b_0 - \lambda & b_1 & b_2 \\ p_0 & -\lambda & 0 \\ 0 & p_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \tag{15}$$

$$(b_0 - \lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ p_1 & -\lambda \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} p_0 & -\lambda \\ 0 & p_1 \end{vmatrix} = \tag{16}$$

$$(b_0 - \lambda)\lambda^2 + b_1 p_0 \lambda + b_2 p_0 p_1 = \tag{17}$$

$$-(\lambda^3 - l_0 b_0 \lambda^2 - l_1 b_1 \lambda - l_2 b_2) \tag{18}$$

2.2 Delopgave c

Fra opgavetekstens formular for $\det(M - \lambda E)$ for vilkaarligt n har vi:

$$\det(M - \lambda E) = (-1)^{n+1} \left(\lambda^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} l_i b_i \lambda^{n-i} \right) \tag{19}$$

Altsaa gaelder det at

$$\det(M - \lambda E) = 0 \tag{20}$$

hvis og kun hvis

$$(-1)^{n+1} \left(\lambda^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} l_i b_i \lambda^{n-i} \right) = 0 \tag{21}$$

hvis og kun hvis

$$\sum_{i=0}^{n} l_i b_i \lambda^{n-i} = \lambda^{n+1} \tag{22}$$

hvis og kun hvis

$$\sum_{i=0}^{n} l_i b_i \lambda^{-(i+1)} = 1 \tag{23}$$

hvilket per definition af $S(\lambda)$ vil sige, hvis og kun hvis

$$S(\lambda) = 1 \tag{24}$$

Altså har vi nu vist, at

$$\det(M - \lambda E) = 0 \tag{25}$$

hvis og kun hvis

$$S(\lambda) = 1 \tag{26}$$

Per definition af egenværdier vil det sige, at λ er egenværdi for M, hvis og kun hvis $S(\lambda) = 1$.

Jeg vil nu vise, at M har netop én skarpt positiv egenværdi.

Lad os definere

$$f_i(\lambda) = l_i b_i \lambda^{-(i+1)}, \quad i \in \mathbb{N}_0 \tag{27}$$

Da gaelder

$$S(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} f_i(\lambda) \tag{28}$$

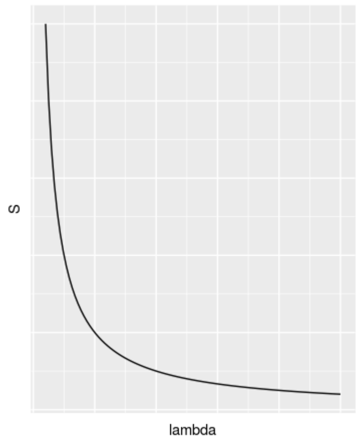
Lad $\lambda > 0$. Da ser vi, at f_i en positiv, aftagende funktion for alle $i \in \mathbb{N}_0$. Altsaa er S en sum af positive, aftagende funktioner og er altsaa selv positiv og aftagende. Vi ser ydermere, at for alle $i \in \mathbb{N}_0$ gaelder, at $f_i(\lambda) \to \infty$ for $\lambda \to 0_+$ og $f_i \to 0$ for $\lambda \to \infty$. Da graensevaerdier distribuerer over summer, har vi altsaa

$$\lim_{\lambda \to 0_+} S(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{\lambda \to 0_+} f_i(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \infty = \infty \tag{29}$$

og

$$\lim_{\lambda \to \infty} S(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{\lambda \to \infty} f_i(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} 0 = 0 \tag{30}$$

$S(\lambda)$ vil have omtrentligt samme form som λ^{-1}. Her er en skitse af den omtrentlige form af S for $\lambda > 0$:



Lad mig nu argumentere for, at der eksisterer netop ét $\lambda_1 > 0$, saa $S(\lambda_1) = 1$. Eftersom $f_i(\lambda)$ er kontinuert over $\lambda > 0$ for alle $i \in \mathbb{N}_0$, saa er S en sum af kontinuerte funktioner og altsaa selv kontinuert over $\lambda > 0$. Da S graenser mod uendelig, naar λ gaar mod 0, og mod 0 naar λ gaar mod uendelig, saa ved vi, at der maa eksisterer mindst ét λ_1 i $(0, \infty)$, saa $S(\lambda_1) = 1$. Da S er aftagende paa $(0, \infty)$, saa ved vi yderligere, at der hoejst kan eksiterere ét λ_1 i $(0, \infty)$, saa $S(\lambda_1) = 1$. Altsaa eksisterer der netop ét λ_1 i $(0, \infty)$, saa $S(\lambda_1) = 1$.

Eftersom $\lambda > 0$ er egenvaerdi for M, hvis og kun hvis $S(\lambda) = 1$, saa har vi nu alt i alt vist, at M har netop én positiv egenvaerdi.

2.3 Delopgave d

Fra definitionen af M er det klart, at M er ikke-negativ. Hvis vi desuden antager, at M^{n+1} er positiv, så kan vi bruge Perron-Frobenius' sætning 3 til at konkludere, at M har en positiv, dominerende egenværdi. Eftersom vi ved fra delopgave c, at M kun har én positiv egenværdi, nemlig λ_1, må λ_1 altså være dominerende egenværdi for M.

2.4 Delopgave e

Definer vektoren $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ koordinatvis ved

$$q_i = l_i \lambda_1^{-i}, \qquad i = 0, ..., n \tag{31}$$

hvor vi har nul-indekseret q. Hermed kan vi også udregne vektoren $\lambda_1 q \in \mathbb{R}^{n+1}$ koordinatvis som

$$(\lambda_1 q)_i = \lambda_1 l_i \lambda_1^{-i} = l_i \lambda_1^{1-i}, \qquad i = 0, ..., n \tag{32}$$

Lad os nu udregne koordinaterne af vektoren $Mq \in \mathbb{R}^{n+1}$. Det i'te koordinat er per definition af matrix produkter lig prikproduktet af den i'te række af M og q:

$$(Mq)_i = (M_{i,\cdot}) \cdot q, \qquad i = 0, ..., n \tag{33}$$

Her har vi også nul-indekseret rækkerne i M.

Jeg vil nu regne lidt på disse prikprodukter. Lad først $i = 0$. Hermed har vi:

$$(M_{i,\cdot}) \cdot q = \sum_{j=0}^{n} b_j q_j = \sum_{j=0}^{n} b_j l_j \lambda_1^{-j} \tag{34}$$

Lad nu $i \in \{1, ..., n\}$. Da har vi:

$$\begin{aligned}(M_{i,\cdot}) \cdot q = p_{i-1}q_{i-1} = && (35)\\ p_{i-1}l_{i-1}\lambda_1^{-(i-1)} = && (36)\\ p_{i-1}(p_0p_1...p_{i-2})\lambda_1^{1-i} = && (37)\\ (p_0p_1...p_{i-2}p_{i-1})\lambda_1^{1-i} = && (38)\\ l_i\lambda_1^{1-i} && (39)\end{aligned}$$

Vi har per definition af egenvektorer, at q er en egenvektor for M hørende til λ_1, hvis og kun hvis

$$\forall i \in \{0, ..., n\} : \ (Mq)_i = (\lambda_1 q)_i \tag{40}$$

Fra linje (32), (32) og (35-39) får vi

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : \ (Mq)_i = (\lambda_1 q)_i \tag{41}$$

Hermed mangler vi kun at vise, at

$$(Mq)_0 = (\lambda_1 q)_0 \tag{42}$$

Linje (32), (33) og (34) giver, at linje (42) er sand, hvis og kun hvis

$$\sum_{j=0}^{n} b_j l_j \lambda_1^{-j} = l_0\lambda_1^{1-0} = \lambda_1 \tag{43}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\sum_{j=0}^{n} b_j l_j \lambda_1^{-(j+1)} = 1 \tag{44}$$

hvilket er det samme som

$$S(\lambda_1) = 1 \tag{45}$$

Dette gælder for enhver egenværdi for M og derfor også for λ_1. Altså gælder

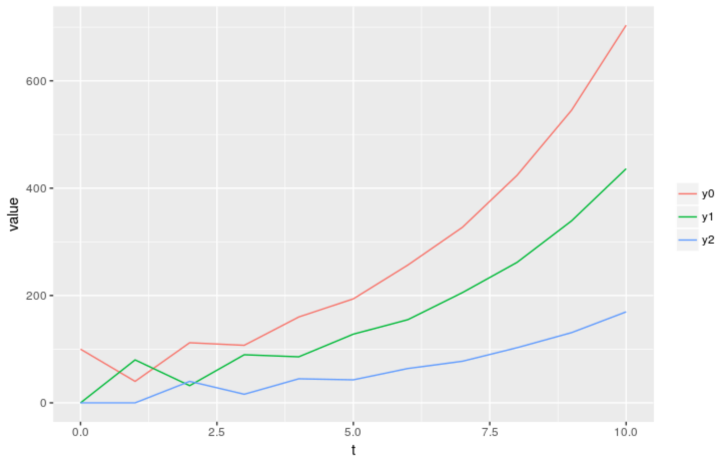
$$(Mq)_0 = (\lambda_1 q)_0 \tag{46}$$

Altså har vi nu alt i alt vist, at q er en egenvektor for M hørende til egenværdien λ_1.

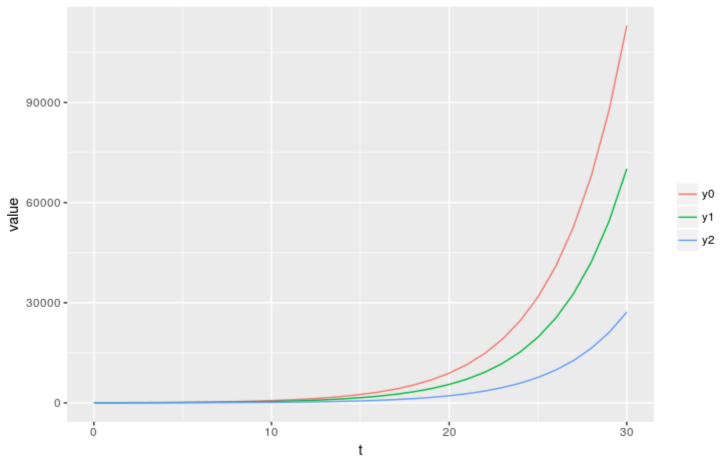
3 Opgave 3

3.1 Delopgave a

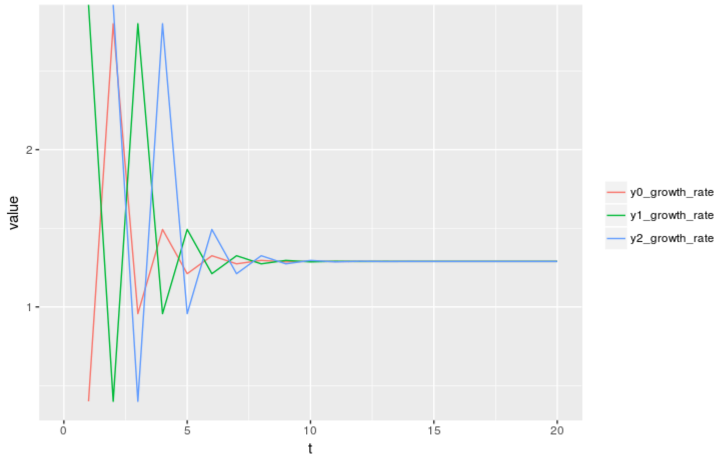
Her er et plot af fremskrivningen af antallet af individer i de tre aldersgrupper for $t = 0, .., 10$:



og for $t = 0, ..., 30$:

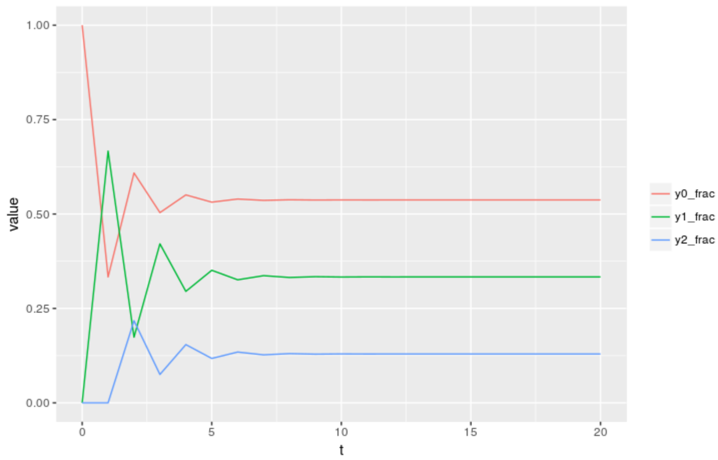


Her er et plot af fremskrivningen af vækstraten for de tre aldersgrupper for $t = 0, .., 20$:



Modellen ser ud til en dominerende egenværdi på omkring $\lambda_1 = 1.3$.

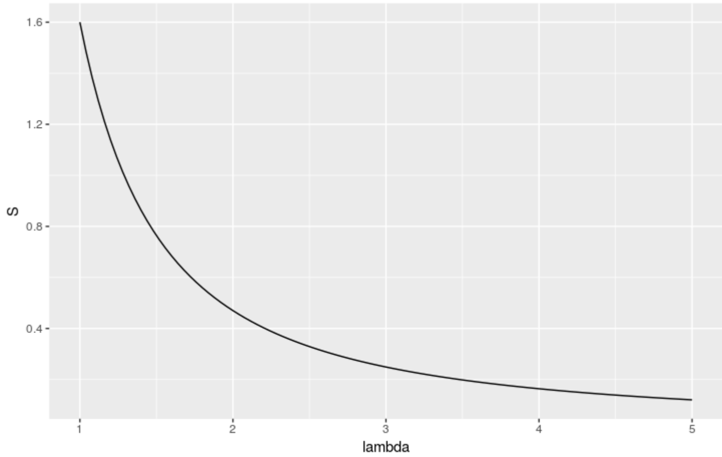
Her er et plot af fremskrivningen af procentfordelingen af tre aldersgrupper for $t = 0, .., 20$:



Modellen ser ud til at have en egenvektor hørende til λ_1 med værdier omkring $q = (0.54, 0.33, 0.13)$.

3.2 Delopgave b

Her er et plot af $S(\lambda)$ for vores konkrete model:



Som forventet fra besvarelsen af opgave 2, ser vi at $S(\lambda)$ er aftagende og er lig 1 for netop ét λ_1. Fra opgave 2 ved vi, at dette λ_1 er den søgte dominerende egenværdi for vores model.

Ved hjælp af uniroot finder jeg $\lambda_1 = 1.29$.

3.3 Delopgave c

Ved hjælp af eigen funktionen i R finder jeg, at vores model har egenværdierne $(1.29, -0.55, -0.34)$ og tilhørende matrix af egenvektorer

$$Q = \begin{bmatrix} 0.83 & -0.45 & 0.23 \\ 0.52 & 0.66 & -0.54 \\ 0.20 & -0.60 & 0.81 \end{bmatrix} \tag{47}$$

R finder ikke den egenvektor $(0.54, 0.33, 0.13)$ hørende til λ_1, som jeg foreslog ovenfor ud fra fremskrivningen. Det er fordi R finder en egenvektor med norm 1, hvilket vektoren $(0.54, 0.33, 0.13)$ ikke har. Dog ligger vektorene i samme underrum, da $(0.54, 0.33, 0.13) = 0.65(0.83, 0.52, 0.2)$. Altså finder R blot en anden vektor i egenrummet for λ_1.

Når jeg udregner $Q^{-1}MQ$ i R, får jeg som forventet en diagonalmatrix med egenværdierne $(1.29, -0.55, -0.34)$ i diagonalen.

3.4 Delopgave d

Jeg viser det ønskede for det n-dimensionelle tilfælde, da jeg ikke synes, at det forøger bevisets kompleksitet væsentligt.

Lad M være en n-dimensionel matrix med n forskellige egenværdi $\lambda_1, ..., \lambda_n$, hvor λ_1 er den dominerende egenværdi. Lad q_i være en egenvektor tilhørende egenværdien λ_i for $i = 1, ..., n$.

Lad $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Eftersom alle egenværdierne for M er forskellige, udgør $q_1, ..., q_n$ en basis for $\mathbb{R}^n$. Altså kan vi dekomponerer v_0 som en vægtet sum af egenvektorerne

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i, \qquad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R} \tag{48}$$

Vi har altså

$$v_t = M^t v_0 = M_t \sum_{i=1}^{n} c_i q_i = \sum_{i=1}^{n} c_i M^t q_i \tag{49}$$

Vi har, at

$$M^1 q_i = \lambda_i^1 q_i \tag{50}$$

og antager vi, at

$$M^{t-1} q_i = \lambda_i^{t-1} q_i \tag{51}$$

foelger det direkte, at

$$M^t q_i = M(M^{t-1} q_i) = M(\lambda_i^{t-1} q_i) = \lambda_i^{t-1}(M q_i) = \lambda_i^t q_i \tag{52}$$

Altsaa har vi per induktion, at for alle $t \in \mathbb{N}$

$$M^t q_i = \lambda_i^t q_i \tag{53}$$

Altsaa har vi nu alt i alt vist, at

$$v_t = \sum_{i=1}^{n} c_i M^t q_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^t q_i \tag{54}$$

Hermed foelger det, at

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^t} v_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^t} \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^t q_i = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t \tag{55}$$

Da λ_1 er dominerende egenværdi, saa er $\lambda_i < \lambda_1$ for alle $i = 2, ..., n$. Altsaa har vi

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases} \tag{56}$$

Altsaa har vi alt i alt, at

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^t} v_t = c_1 q_1 \tag{57}$$

3.5 Delopgave e

Definer funktionen

$$S_a(\lambda) = \frac{0.4}{\lambda} + \frac{0.8a}{\lambda^2} + \frac{0.24}{\lambda^3} \tag{58}$$

Da S_a er aftagende, har den en invers, og vi ved fra opgave 2, at den inverse til 1 er den dominerende egenværdi λ_1:

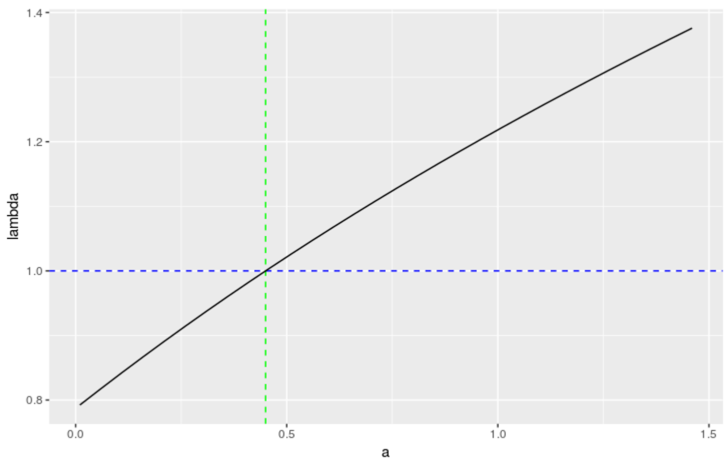
$$S_a^{-1}(1) = \lambda_1 \tag{59}$$

Da λ_1 er den vækstrate, som populationen konvergere imod, vil populationen uddø på lang sigt, hvis og kun hvis $\lambda_1 < 1$. Altså kan vi vi betragte mængden af relle tal a, som vil få populationen til at overleve på lang sigt:

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq S_a^{-1}(1)\} \tag{60}$$

Vi skal altså bestemme minimum af denne mængde.

Her er et plot af $f(a) = S_a^{-1}(1)$, som jeg har udregnet numerisk i R:



På plottet svarer mængden A, som jeg lige har defineret den, til alle de a, der ligger på og til højre for den grønne linje. Vi ser, at $f(a)$ er en voksende funktion af a, hvilket giver god mening, da $f(a)$ jo netop er den langsigtede vækstrate givet $b_1 = a$, og jo større b_1 er, jo større burde den langsigtede vækstrate også være. Da $f(a)$ er en voksende funktion af a, så er minimum af mængden A det ene element, der opfylder

$$\{a \in \mathbb{R} \mid 1 = S_a^{-1}(1)\} \tag{61}$$

Ved hjælp af uniroot bestemmer jeg numerisk dette element til at være lig 0.45. Altså vil populationen overleve på lang sigt, hvis og kun hvis $0.45 \leq a$.