Matematik og modeller, 2018

Miniprojekt 5: Ikke-lineære systemer af differentialligninger

Aflevering Miniprojektet afleveres til Thomas Grum torsdag 14.6.2018 senest kl. 12.

Relevante udtryk i R samt resultater og grafer medtages i passende omfang.

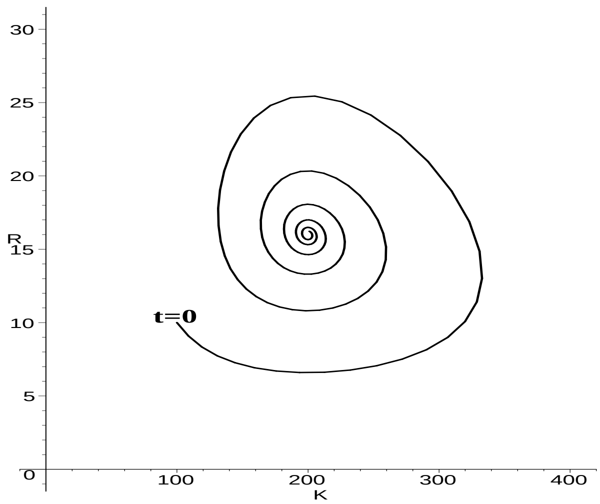
Opgave 1: Kaniner og ræve
Det antages, at en kanin- og en rævepopulation af størrelse hhv. $K(t)$ og $R(t)$, hvor t er tiden målt i måneder, kan beskrives vha. modellen

$$\begin{aligned} K'(t) &= 2K(1 - \alpha K - 0.05R) \\ R'(t) &= 2R(0.005K - 1), \end{aligned}$$

hvor α er en positiv parameter.

(a) Antag, at der ikke er nogle ræve, dvs. at $R(t) = 0$ for alle t. Vis, at modellen da reduceres til en logistisk model for kaninbestanden, og bestem bærekapaciteten udtrykt ved α.

(b) For parameterværdien $\alpha = 0.001$ og begyndelsesbetingelserne $K(0) = 100$ og $R(0) = 10$ er nedenfor vist en graf (fundet ved numerisk løsning) for kanin- og rævebestanden som vektorfunktion $(K(t), R(t))$ af tiden.



Benyt grafen til at besvare følgende spørgsmål:

(i) Falder eller stiger rævebestanden lige efter starttidspunktet?

(ii) Hvilken tendens gør sig gældende når rævebestanden er 20 og kaninbestanden er 300?

(iii) Hvilken ligevægt synes der at være?

(iv) Er denne ligevægt mon stabil?

(c) Lad fortsat $\alpha = 0.001$. Benyt de samhørende differentialligninger til at eftervise dine svar til spørgsmål (i) og (ii) i (b).

(d) Lad fortsat $\alpha = 0.001$. Benyt matematiske resultater om ligevægt og stabilitet til at eftervise dine svar til spørgsmål (iii) og (iv) i (b).

(e) Lad nu $\alpha > 0$ variere. Vis, at der findes en ligevægt (K^*, R^*) med $K^* > 0$ og $R^* > 0$ for $\alpha < 0.005$. Udtryk (K^*, R^*) ved α.

Vis, at ligevægten (K^*, R^*) er stabil for $\alpha < 0.005$.
[Vink: Benyt gerne at begge rødder i ligningen $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ har negativ realdel hvis $A > 0$ og $B > 0$]

(f) [Valgfrit!] Vis, at begge rødder i ligningen $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ har negativ realdel hvis $A > 0$ og $B > 0$.

Opgave 2: Foderoptagelse hos køer
Denne opgave handler om følgende forsimplede udgave af modellen for foderoptagelse hos køer. (Se overheads fra forelæsningen for yderligere detaljer.)

$$\begin{aligned} V' &= h_1 b_{KV} + h_4 b_{GV} - (f_V + l_A)V \\ BC' &= h_4 b_{GC} - \left(f_C\, g_1\left(\tfrac{BC}{V}\right) + l_B\right) BC, \end{aligned}$$

hvor $V = V(t)$ er mængden af sukker og $BC = BC(t)$ mængden af store cellulosepartikler til tiden t målt i timer. De positive konstanter h_1 og h_4 angiver optagelsen af hhv. kraftfoder og græs, og $b_{KV}, b_{GV}, b_{GC}, f_V, f_C, l_A$ samt l_B er de andre positive konstanter, der indgår i modellen. Endvidere er $g_1(x) = 1 - e^{-0.5\,x}$, så

$$g_1\left(\tfrac{BC}{V}\right) = 1 - \exp\left(-0.5\,\tfrac{BC}{V}\right).$$

I det følgende lader vi

$$\begin{gathered} b_{KV} = 0.02, \quad b_{GV} = 0.30, \quad b_{GC} = 0.32, \quad f_V = 0.25, \quad f_C = 0.07 \\ l_A = 0.05, \quad l_B = 0.025, \quad h_1 = 0.5 \quad \text{og} \quad h_4 = 0.4. \end{gathered}$$

(a) Bestem systemets ligevægt.
[Vink: Anvend `R`-funktionen `uniroot`]

Vis at ligevægten for systemet er stabil.
[Vink: Det er ikke nødvendigt at udregne hele funktionalmatricen for systemet; hvorfor ikke?]

(b) Benyt Eulers forbedrede metode med $h = \frac{1}{24}$ og begyndelsesbetingelserne $V(0) = 0.2$ og $BC(0) = 0.4$ til at løse systemet numerisk.

Aflevér grafer for $V(t)$ og $BC(t)$ i samme koordinatsystem samt en ikke for stor tabeludskrift. Justér t-intervallet således at grafen illustrerer, at løsningen $(V(t), BC(t))$ går mod ligevægten når $t \to \infty$.
[Vink: `R`-koden for et lineært system fra forelæsningen skal rettes til for at kunne benyttes på det ikke-lineære system af differentialligninger i denne opgave.]

Gentag ovenstående med begyndelsesbetingelserne $V(0) = 2$ og $BC(0) = 0.1$.

Opgave 3: Ulve, får og græs

Denne opgave omhandler den gensidige påvirkning mellem ulve, får og græs. Idet mængden af græs (i passende enheder) er $G(t)$, og antal får og ulve er hhv. $F(t)$ og $U(t)$, betragtes modellen

$$\begin{aligned} G'(t) &= 2G(1 - \alpha G - 0.001F) \\ F'(t) &= 0.1F(0.01G - 1 - 0.2U) \\ U'(t) &= 0.7U(\beta F - 1) \end{aligned}$$

hvor α og β er positive parametre.

(a) Hvilke af leddene i modellen afspejler, at ulve spiser får? Hvordan fremgår det af modellen, at ulve ikke spiser græs? Begrund jeres svar.

(b) Lad $\alpha = 0.002$ og $\beta = 0.005$. Vis at modellen har en ligevægt med $G > 0$, $F > 0$ og $U > 0$, og afgør om den er stabil (brug gerne `R` undervejs).
[De øvrige ligevægte skal ikke bestemmes eller undersøges mht. stabilitet.]

(c) Lad $\alpha = 0.002$ og $\beta = 0.0008$. Bestem *samtlige* ligevægte for modellen.
[Ligevægtene skal ikke undersøges mht. stabilitet.]

Besvar derefter følgende:

- Findes der en ligevægt med $G > 0$, $F > 0$ og $U > 0$?
- Findes der en ligevægt, hvor to af de tre arter overlever?
- Fortolk resultaterne.

(d) Lad $\alpha = 0.02$ og $\beta = 0.0008$. Bestem *samtlige* ligevægte for modellen.
[Ligevægtene skal ikke undersøges mht. stabilitet.]

Besvar derefter følgende:

- Findes der en ligevægt med $G > 0$, $F > 0$ og $U > 0$?
- Findes der en ligevægt, hvor to af de tre arter overlever?
- Fortolk resultaterne.