Modul 1: forelæsning 7
Komplekse tal

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Repetition

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5$.
- Egenvektorer er $\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- En diagonaliserende matrix er $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Der gælder

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$

- Der gælder endvidere $\mathbf{B}^t = \mathbf{Q}\mathbf{D}^t\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 3^t & 0 & 0 \\ 0 & 4^t & 0 \\ 0 & 0 & 5^t \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$.

Motivation – komplekse tal

Eksempel

Det karakteristiske polynomium for

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

er givet ved

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - 2\lambda + 17.$$

Det har ingen rødder, så $\mathbf{M}$ har ingen egenværdier

. . . men det kan vi ikke acceptere!

Definition af de komplekse tal

Et *komplekst tal* er et "tal" af formen

$$z = x + iy,$$

hvor x og y er reelle tal og hvor i er et symbol, som opfylder $i^2 = -1$.

- Tallet x kaldes realdel og betegnes også $\mathrm{Re}(z)$.
- Tallet y kaldes imaginærdel og betegnes også $\mathrm{Im}(z)$.
- Et reelt tal kan vi betragte som $x + i0$.

Regning med komplekse tal

Vi lader

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Da er

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &\quad (\text{Gang ud som sædvanligt og sæt } i^2 = -1.) \end{aligned}$$

Eksempel

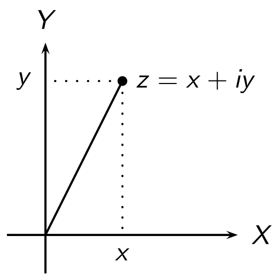
$$(2 + 3i) + (1 - i) = (2 + 1) + i(3 - 1) = 3 + 2i$$
$$(2 + 3i)(1 - i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 5 + i$$

Konsekvens: Regn med komplekse tal som med reelle tal, f.eks. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ og $z_1z_2 = z_2z_1$.

Den komplekse talplan $\mathbb{C}$

Idé: betragt et komplekst tal $z = x + iy$ som en vektor med førstekoordinat x og andenkoordinat y.

Et komplekst tal kan tegnes i et koordinatsystem, med realdel og imaginærdel på de to akser:



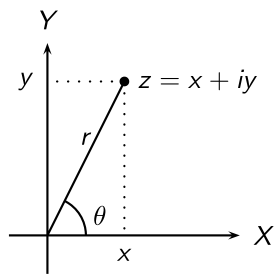
Addition af to komplekse tal svarer til at lægge vektorerne sammen.

Multiplikation af to komplekse tal svarer *ikke* til at tage prikproduktet af vektorerne.

Modulus og argument

Idé: repræsentér $z = x + iy \neq 0$ vha.

- afstanden r mellem $\binom{x}{y}$ og $\binom{0}{0}$,
- vinklen (en af dem) θ regnet fra $\binom{1}{0}$ til $\binom{x}{y}$



- Retningen θ betegnes $\arg z$ og kaldes "argumentet til z".
- Længden r betegnes $|z|$ og kaldes "modulus" eller numerisk værdi.
- De reelle tal har argument 0 eller π.

Skift mellem x, y og r, θ

Fra r, θ til x, y

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

Fra x, y til r, θ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\theta = y/x \quad (\text{for } x \neq 0)$$

Pas på når θ skal bestemmes ud fra x og y: tegn.

Geometrisk fortolkning af produkt

Sætning

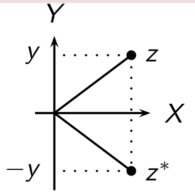
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \text{og} \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

- Gang længderne sammen.
- Læg argumenterne sammmen.

Kompleks konjugering

Definition

Tallet $z^* = x - iy$ kaldes det *komplekst konjugerede* til $z = x + iy$.



Sætning

$$|z^*| = |z| \qquad \arg z^* = -\arg z$$
$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \qquad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$
$$zz^* = |z|^2$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \qquad \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Rødder i polynomier

Et n'te grads polynomium er

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0,$$

hvor koefficienterne $a_n, \ldots, a_0$ er komplekse tal og $a_n \neq 0$.

Sætning

Hvis z er rod i et n'te grads polynomium *med reelle koefficienter*, så er z^* også rod i polynomiet.

Mere om rødder i n'te grads polynomier

- Et vilkårligt n'te grads polynomium (endda med komplekse koefficienter)
$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$
har n komplekse tal som rødder ☺
(når dobbeltrødder tælles dobbelt osv.).
- For $n \geq 5$ findes der ingen generel formel til bestemmelse af rødderne ☹

Andengradsligninger

Andengradsligning med reelle koefficienter

Ligningen

$$az^2 + bz + c = 0,$$

hvor $a \neq 0$, b og c er *reelle* tal har rødderne

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{når } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{når } b^2 - 4ac < 0$$

(Der er altså reelle rødder når $b^2 - 4ac \geq 0$ og komplekse rødder når $b^2 - 4ac < 0$.)

Huskeregel

Rødderne z_1 og z_2 i ligningen $z^2 + bz + c = 0$ opfylder

$$z_1 + z_2 = -b, \qquad z_1 z_2 = c.$$

Andengradsligninger – fortsat (kursorisk)

Andengradsligning med komplekse koefficienter

Ligningen $az^2 + bz + c = 0$, hvor $a \neq 0$ har rødderne

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

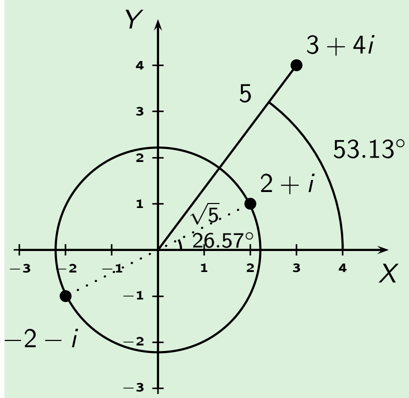
Sådan udregnes z:

- Bestem et komplekst tal w sådan at $w^2 = b^2 - 4ac$ (brug evt. modulus og argument).
- Løsningerne er så $z = \frac{-b \pm w}{2a}$.

Kvadratrod (kursorisk)

Eksempel

Hvad er kvadratroden af $3 + 4i$? Bestem z så $z^2 = 3 + 4i$



- $|z|^2 = |3 + 4i| = 5$ dvs $|z| = \sqrt{5}$
- $2 \arg z = \arg z^2 = \arg(3 + 4i) \simeq 53.13°$ dvs $\arg z \simeq 26.57°$
- $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = \sqrt{5}\cos 26.57° + i\sqrt{5}\sin 26.57° = 2 + i$
- Kontrol: $(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$
- Ved at vælge $\theta = 26.57° + 180°$ kunne vi have opnået $z = -2 - i$

Komplekse egenværdier og egenvektorer

Starting all over...

- Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix (med komplekse tal). Hvis der om en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{C}^n$ og et komplekst tal λ gælder

  $$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

  så siges $\mathbf{x}$ at være en *egenvektor* for $\mathbf{A}$ med tilhørende *egenværdi* λ.
- λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ netop når $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.
- R kan bruges: `eigen(A)` eller `eigen(A)$values`.

Sætning: Egenværdier findes altid

Enhver $n \times n$ matrix har n egenværdier, talt med multiplicitet (dvs. når dobbeltrødder tælles dobbelt osv.).

Bestemmelse af egenvektorer

Når λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$, så findes en egenvektor $\mathbf{x}$ hørende til λ som en løsning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ til ligningen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1. Løs ligningssystemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved at lave elementære rækkeoperationer.
2. Bestem de mulige værdier for vektoren $\mathbf{x}$ (der er altid uendelig mange løsninger).
3. R kan bruges: `eigen(A)` eller `eigen(A)$vectors`.

Sætning: Egenværdier og egenvektorer for reelle matricer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix med **reelle** tal.

- Hvis λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$, så er λ^* det også.
- Hvis $\mathbf{x}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien λ, så er $\mathbf{x}^*$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til egenværdien λ^*.

Eksempel på komplekse egenværdier og egenvektorer

Matricen
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$
har følgende egenværdier og -vektorer:

- $\lambda_1 = 1 + 4i$ med tilhørende $\mathbf{q}_1 = \binom{i}{1}$
- $\lambda_2 = 1 - 4i$ med tilhørende $\mathbf{q}_2 = \binom{-i}{1}$

Der gælder endvidere
$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4i & 0 \\ 0 & 1-4i \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$
og dermed $\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$.

☞ Der kan godt være komplekse egenværdier for en matrix $\mathbf{A}$ med reelle tal.

☞ Hvis $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres, så gælder $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$. Her er der komplekse tal gemt i matricerne $\mathbf{D}$ og $\mathbf{Q}$.