Matematik og modeller, 2018

Miniprojekt 3: Differentialligninger af 1. orden

Aflevering Miniprojektet afleveres **tirsdag den 29.5.2018 kl. 8.00** ved forelæsningen.

Relevante udtryk i R samt resultater og grafer medtages i passende omfang.

Opgave 1

For den modificerede logistiske differentialligning gælder følgende sætning:

> **Sætning** Vi betragter en modificeret logistisk differentialligning af formen
>
> $$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \left(\frac{y}{K}\right)^{\alpha}\right) \tag{1}$$
>
> (hvor r, K og α er positive parametre).
>
> (I) Den fuldstændige løsning til differentialligningen er
>
> $$y = y(t) = \frac{K}{(1 + ce^{-\alpha rt})^{1/\alpha}} \qquad (c \in \mathbb{R}). \tag{2}$$
>
> (II) Differentialligningen har de to ligevægte $y^* = 0$ og $y^* = K$, hvoraf $y^* = 0$ er ustabil mens $y^* = K$ er stabil.

I nedenstående bevis for sætningen mangler nogle argumenter og mellemregninger. Formålet med opgaven er at udfylde disse huller ved at besvare spørgsmålene (a)-(e) i *[...]* inde i beviset.

Bevis Lad $y = y(t)$ være en løsning til differentialligningen (1). Vi er ude efter at komme frem til formlen (2) for $y(t)$, og benytter følgende ide: Vi laver en ny funktion $u = u(t)$, som er defineret ved

$$u = \left(\frac{y}{K}\right)^{\alpha} = \frac{y^{\alpha}}{K^{\alpha}} \qquad \text{dvs.} \qquad u(t) = \frac{1}{K^{\alpha}} \cdot y(t)^{\alpha}.$$

Vi vil først udtrykke $\frac{dy}{dt}$ ved $\frac{du}{dt}$. Ved differentiation af $u(t)$ fås

$$\frac{du}{dt} = \frac{\alpha u}{y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \text{og dermed} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{\alpha u} \cdot \frac{du}{dt}. \tag{3}$$

[(a): Vis formlen (3). Vink: $u(t)$ er en sammensat funktion ganget med en konstant.]

Af (3) følger, at $u = u(t)$ opfylder differentialligningen

$$\frac{du}{dt} = \alpha ru(1 - u) \tag{4}$$

[(b): Vis at (3) og (1) tilsammen giver differentialligningen (4).]

Den fuldstændige løsning $u = u(t)$ til (4) er

$$u = u(t) = \frac{1}{1 + ce^{-\alpha rt}} \qquad (c \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

[(c): Vis dette ved at henvise til en kendt sætning.]

Heraf fås

$$y = y(t) = \frac{K}{(1 + ce^{-\alpha rt})^{1/\alpha}}$$

dvs. (2) gælder.

[(d): Vis dette ved at udnytte sammenhængen mellem $u(t)$ og $y(t)$.]

[(e): Vis del (II) af sætningen.]

Opgave 2
Under SARS-epidemien i Singapore i 2003 talte man dagligt antallet af smittede personer. Disse data findes i filen `SARS.txt` som ligger på Absalon.

Datafilen er organiseret i to kolonner med hhv. dagen (med dag 0 den 24. februar 2003) og antal smittede. Et uddrag af filens indhold:

```
Dag   Smittede
0     1
1     2
2     2
3     2
4     3
5     3
```

(a) Indtegn vha. R antal smittede N som funktion af dagen t.
[Gem filen `SARS.txt` i den mappe på din computer, hvor du arbejder med R (se evt. R-noterne). Indlæs data ved brug af `read.table` (se evt. R-noterne)]

(b) I dette spørgsmål antager vi, at antallet af smittede følger en logistisk differentialligning af formen

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

hvor r og K er positive parametre.

(i) Opstil den fuldstændige løsning til differentialligningen.

I den fuldstændige løsning optræder dels parametrene r og K og dels en vilkårlig konstant "c". Vi ønsker nu at bestemme r, K og "c", således at den tilsvarende løsning $N(t)$ passer bedst muligt med målingerne. Til at gøre dette er der avancerede statistiske metoder, men vi vil her benytte en simplere og mere intuitiv metode (der dog er mindre præcis end den statistiske metode).

(ii) Benyt de sidste par målinger til at anslå en rimelig værdi af K.

(iii) Antag at løsningskurven $N(t)$ går igennem det første målepunkt, dvs. at $N(0) =$ antal smittede på dag 0. Benyt dette til at bestemme "c".

(iv) Indsæt de fundne værdier af K og "c" i udtrykket for $N(t)$. Tegn vha. R graferne for $N(t)$ for flere forskellige værdier af r sammen med målepunkterne. Benyt disse grafer til at bestemme den værdi af r, der lader til at få løsningen $N(t)$ til at passe bedst muligt med målingerne.

(v) Beskriv hvor godt den opnåede logistiske funktion $N(t)$ passer med målingerne.

(c) I dette spørgsmål antager vi, at antallet af smittede følger en modificeret logistisk differentialligning af formen

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\alpha}\right).$$

hvor r, K og α er positive parametre. (Se Opgave 1.)

(i) Opstil den fuldstændige løsning til differentialligningen.

I den fuldstændige løsning optræder dels parametrene r, K og α og dels en vilkårlig konstant "c". Vi ønsker nu stort set som i (b) at bestemme r, K, α og "c", således at den tilsvarende løsning $N(t)$ passer bedst muligt med målingerne.

(ii) Vis at der for enhver løsning $N(t)$ fundet i (i) gælder $N(t) \to K$ når $t \to \infty$. Benyt derefter de sidste par målinger til at anslå en rimelig værdi af K.

(iii) Antag at $\alpha = 5$.

- Antag at løsningskurven $N(t)$ går igennem det første målepunkt, dvs. at $N(0) =$ antal smittede på dag 0. Benyt dette til at bestemme "c".
- Indsæt $\alpha = 5$ samt de fundne værdier af K og "c" i udtrykket for $N(t)$. Tegn vha. R graferne for $N(t)$ for flere forskellige værdier af r sammen med målepunkterne. Benyt disse grafer til at bestemme den værdi af r, der lader til at få løsningen $N(t)$ til at passe bedst muligt med målingerne.
- Passer den opnåede modificerede logistiske funktion $N(t)$ bedre med målingerne end den logistiske funktion bestemt i (b)? Begrund dit svar.

(iv) Antag at $\alpha = 0.20$. (Ved hjælp af statistiske metoder kan man vise, at dette faktisk er den bedste værdi af α.)

- Antag at løsningskurven $N(t)$ går igennem det første målepunkt, dvs. at $N(0) =$ antal smittede på dag 0. Benyt dette til at bestemme "c".
- Indsæt $\alpha = 0.20$ samt de fundne værdier af K og "c" i udtrykket for $N(t)$. Tegn vha. R graferne for $N(t)$ for flere forskellige værdier af r sammen med målepunkterne. Benyt dette til at bestemme den værdi af r, der lader til at få løsningen $N(t)$ til at passe bedst muligt med målingerne.
- Passer den opnåede modificerede logistiske funktion $N(t)$ bedre med målingerne end den logistiske funktion bestemt i (b)? Begrund dit svar.

(d) Som det fremgår af grafen med målepunkterne tegnet i (a) fladede væksten i epidemien noget af midt i perioden og tiltog derefter igen. (En mulig forklaring på, at væksten tiltog igen, kan være en såkaldt "super-smittespreder", der spreder sygdommen mere end det normalt er tilfældet.) Man har derfor delt perioden op i de to perioder $[0, 31]$ og $[31, 70]$ og har tilpasset (som i (c)) modificerede logistiske funktioner i hver af perioderne. Derved er man kommet frem til, at

$$N_1(t) = \frac{105}{(1 + 10182\, e^{-0.415\, t})^{0.504}} \qquad \text{for } 0 \le t \le 31,$$

$$N_2(t) = \frac{206}{(1 + 146757\, e^{-0.243\, t})^{0.154}} \qquad \text{for } 31 \le t \le 70$$

er de modificerede logistiske funktioner, der passer bedst med målingerne. Vi definerer så funktionen $N(t)$ ved

$$N(t) = \begin{cases} N_1(t) & \text{for } 0 \le t \le 31 \\ N_2(t) & \text{for } 31 < t \le 70 \end{cases}$$

(i) Tegn vha. R grafen for $N(t)$ sammen med målepunkterne. Vis ved udregning, at $N_1(31) \simeq N_2(31)$, så grafen ikke har et spring i $t = 31$.

(ii) Beskriv hvor godt den opnåede kombination af to modificerede logistiske funktion $N(t)$ passer med målingerne.

Opgave 3

Vi betragter den model for forrentning af en kapital med udtræk, som blev gennemgået til forelæsningen (se overheads for detaljer), dvs. differentialligningen

$$x'(t) = r(t)x(t) - u(t) \qquad (t \geq 0)$$

hvor $x(t)$ er kapitalens størrelse, $r(t)$ er rentesatsen og $u(t)$ er udtrækket til tidspunktet t (målt i år).

(a) **Konstant forrentning og lineært voksende udtræk**

Lad α betegne det beløb, som udtrækket skal vokse med på årsbasis. Der gælder altså

$$r(t) = r_0 \qquad \text{og} \qquad u(t) = u_0 + \alpha t.$$

(i) Opstil differentialligningen og bestem den fuldstændige løsning.

(ii) Udtryk konstanten "c" ved startkapitalen $x(0)$ og indsæt dette i løsningen.

(iii) Bestem den mindste værdi (kaldet $x_{\min}$) af $x(0)$ for hvilken kapitalen ikke opbruges med tiden.

(iv) Sæt $r_0 = 0.08$, $u_0 = 80000$ og $\alpha = 4000$. Opstil løsningen for disse parameterværdier og tegn grafer vha. R for forskellige værdier af $x(0)$ (i samme koordinatsystem). Vælg både værdier af $x(0)$ med $x(0) > x_{\min}$ og med $x(0) < x_{\min}$. Overvej hvilke værdier af t og x, plottet skal vise.

(v) Sæt $r_0 = 0.08$, $u_0 = 80000$, $\alpha = 4000$ og $x(0) = 1700000$.
Benyt Eulers metode og derefter Eulers forbedrede metode med steplængde $h = 1$ til vha. R at udregne tilnærmede værdier af $x(t)$ for $t = 1, 2, \dots, 10$. Sammenlign de herved tilnærmede værdier af $x(10)$ med den korrekte værdi af $x(10)$.

(vi) Sæt fortsat $r_0 = 0.08$, $u_0 = 80000$, $\alpha = 4000$ og $x(0) = 1700000$.
Vælg gradvist mindre og mindre værdier af h og benyt Eulers metode og derefter Eulers forbedrede metode til at udregne tilnærmede værdier af $x(10)$. Bestem herved for hver af de to metoder en værdi af h, der er så lille, at den tilnærmede værdi af $x(10)$ afviger med mindre end 100 fra den korrekte værdi af $x(10)$.

(b) **Konstant forrentning og eksponentielt voksende udtræk**

Begrundelsen for det eksponentielt voksende udtræk kunne være, at der i samfundsøkonomien er en konstant, kontinuerlig inflation svarende til en vækstrate β for pristallet, og man ønsker at tage højde herfor og udtrække et beløb, der har samme købekraft over tid. Der skal derfor indbygges en vækstrate af størrelsen β i det faktisk udtrukne beløb. Dette fører til

$$r(t) = r_0 \qquad \text{og} \qquad u(t) = u_0 e^{\beta t}.$$

Det antages at $\beta \neq r_0$.

(i) Opstil differentialligningen og bestem den fuldstændige løsning.

(ii) Udtryk konstanten "c" ved startkapitalen $x(0)$ og indsæt dette i løsningen.

(iii) Hvilken sammenhæng skal der være mellem r_0 og β for, at man kan vælge $x(0)$ således at kapitalen ikke opbruges med tiden.
Bestem for sådanne værdier af r_0 og β den mindste værdi (kaldet $x_{\min}$) af $x(0)$ for hvilken kapitalen ikke opbruges med tiden.

(iv) (A) Sæt $r_0 = 0.08$, $u_0 = 80000$ og $\beta = 0.06$. Opstil løsningen for disse parameterværdier og tegn grafer vha. R for forskellige værdier af $x(0)$ (i samme koordinatsystem). Vælg både værdier af $x(0)$ med $x(0) > x_{\min}$ og med $x(0) < x_{\min}$. Overvej hvilke værdier af t og x, plottet skal vise.

(B) Sæt $r_0 = 0.08$, $u_0 = 80000$ og $\beta = 0.10$. Opstil løsningen for disse parameterværdier og tegn grafer vha. R for forskellige værdier af $x(0)$ (i samme koordinatsystem). Vælg passende værdier af $x(0)$. Overvej hvilke værdier af t og x, plottet skal vise.