Modul 4: forelæsning 1
Lineære systemer af differentialligninger
Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

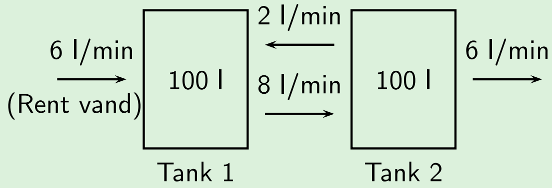
Kort oversigt over kurset

- Lineære differensligninger: $x_{t+1} = ax_t + b_t$ (Modul 2)
- Generelle differensligninger: $x_{t+1} = f(t, x_t)$ (Modul 2)
- Lineære systemer af differensligninger: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t$ (Mod. 1, 2)
- Generelle systemer af differensligninger: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t)$ (Modul 2)
- Lineære differentialligninger: $x' = ax + b(t)$ (Modul 3)
- Generelle differentialligninger: $x' = f(t, x)$ (Modul 3)
- Lineære systemer af differentialligninger: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ (Modul 4)
- Generelle systemer af differentialligninger: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ (Modul 5)

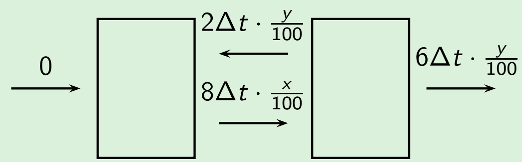
Oversigt

1. Homogene systemer af differentialligninger $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$
   Forbundne kar og anæstesimodel
   Løsning af homogene systemer
2. Inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
   Forbundne kar og anæstesimodel
   Løsning af inhomogene systemer
   Ligevægt og stabilitet
3. Inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$
   Løsning af inhomogene systemer
   Rod-top model for kulstof i en plante

To forbundne kar (eller søer eller investeringspuljer eller ...)



- Til tiden $t = 0$ er der 100 gram farvestof i tank 1 og intet i tank 2.
- Lad $x(t)$ og $y(t)$ betegne mængderne af farvestoffet i tank 1 hhv. tank 2 til tiden t.
- Transport af *farvestoffet* i løbet af et lille tidsrum Δt:



(Kan antage at $x(t)$ og $y(t)$ er stort set konstante i løbet af tidsrummet Δt.)

To forbundne kar – fortsat

- Nettoændringer i løbet af tidsrummet Δt:

$$\begin{aligned}\Delta x &= -0.08 \cdot x \cdot \Delta t + 0.02 \cdot y \cdot \Delta t \\ \Delta y &= 0.08 \cdot x \cdot \Delta t - 0.08 \cdot y \cdot \Delta t\end{aligned}$$

- Ved at lade $\Delta t \to 0$ fører dette til følgende *system* af 2 differentialligninger:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -0.08 \cdot x(t) + 0.02 \cdot y(t) \\ y'(t) &= 0.08 \cdot x(t) - 0.08 \cdot y(t)\end{aligned}$$

- På matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.02 \\ 0.08 & -0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

To andre modeller med lineære systemer

Anæstesimodel

(Gennemgås næste gang som oplæg til Miniprojekt 4)

$$\begin{pmatrix} K_B' \\ K_V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + a_3) & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_B \\ K_V \end{pmatrix}$$

hvor $K_B = K_B(t)$ hhv. $K_V = K_V(t)$ er koncentrationen af et anæstesistof i blodet hhv. vævet til tiden t.

Rod-top model

(Gennemgås sidst i forelæsningen)
Forskellige puljer af kulstof i en plante:

$$\begin{pmatrix} W_P' \\ W_{ST}' \\ W_{GT}' \\ W_{SR}' \\ W_{GR}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_T + K_R) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_T & -K_{GT} & K_{DT} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{GT}K_{GT} & -K_{DT} & 0 & 0 \\ K_R & 0 & 0 & -K_{GR} & K_{DR} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{GR}K_{GR} & -K_{DR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_P \\ W_{ST} \\ W_{GT} \\ W_{SR} \\ W_{GR} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_G(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineære homogene systemer af differentialligninger

System af 2 lineære differentialligninger
(kaldes også 2 lineære samhørende (eller koblede) differentialligninger):

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) + cy(t) \\ y'(t) &= bx(t) + dy(t)\end{aligned}$$

På matrixform:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

System af n lineære differentialligninger
(kaldes også n lineære samhørende (eller koblede) differentialligninger):

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t)\end{aligned}$$

På matrixform: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Løsning af homogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (intro)

Baggrund for sætningerne på næste side

- Motivation: Ligningen $x' = ax$ har løsningen $x = x(t) = e^{at}$.
- Idé: Ligningen $\binom{x'}{y'} = \mathbf{A}\binom{x}{y}$ har *måske* en løsning af formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}q_1 \\ e^{\lambda t}q_2 \end{pmatrix}$$

- Udregning 1: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t}q_1 \\ \lambda e^{\lambda t}q_2 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$
- Udregning 2: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{A}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$
- Sammenligning af Udregning 1 og 2: $\binom{x'}{y'} = \mathbf{A}\binom{x}{y}$ netop når

$$e^{\lambda t}\mathbf{A}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \text{dvs.} \qquad \mathbf{A}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

så λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\binom{q_1}{q_2}$.

Løsning af homogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Sætning

Differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

har en løsning ($\neq \mathbf{0}$) af formen

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{q}$$

hvis og kun hvis λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{q}$.

Sætning Løsning af homogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$.

Så er den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ givet ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (\text{hvor } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}).$$

To forbundne kar – fortsat

- System af to differentialligninger:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.02 \\ 0.08 & -0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Fuldstændig løsning:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-0.04\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.12\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Partikulær løsning svarende til at der til tiden $t = 0$ er 100 gram farvestof i tank 1 og intet i tank 2; dvs. $x(0) = 100$ og $y(0) = 0$:

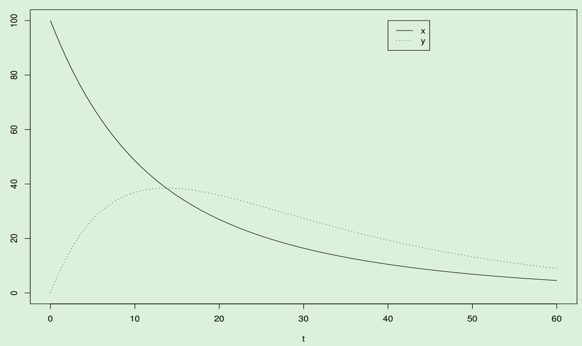
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 50\, e^{-0.04\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 50\, e^{-0.12\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{dvs.}$$

$$x(t) = 50\, e^{-0.04\,t} + 50\, e^{-0.12\,t}$$
$$y(t) = 100\, e^{-0.04\,t} - 100\, e^{-0.12\,t}$$

To forbundne kar – fortsat

Graferne for løsningerne

$$x(t) = 50\, e^{-0.04\,t} + 50\, e^{-0.12\,t}$$
$$y(t) = 100\, e^{-0.04\,t} - 100\, e^{-0.12\,t}$$



Problemer ved løsning af homogene systemer vha. matricer

Fra sætning ovenfor "Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ..."

Problem Hvad gør man, hvis $\mathbf{A}$ *ikke* har n forskellige reelle egenværdier?

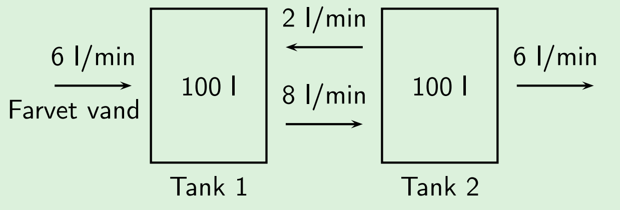
- Hvad gør man, hvis der er en dobbeltrod i den karakteristiske ligning $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$?
  (Sjældent relevant)
- Hvad gør man, hvis $\mathbf{A}$ har *komplekse* egenværdier?
  Hvad betyder $e^{\lambda t}$ hvis λ er kompleks?
  (Ofte relevant; gennemgås næste gang)

Sætning Dobbeltrod i den karakteristiske ligning

Lad
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
og antag at λ er en dobbeltrod i den karakteristiske ligning $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

- Hvis $c \neq 0$, så er den fuldstændige løsning til systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ givet ved
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 2c \\ d-a \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 2ct \\ (d-a)t + 2 \end{pmatrix}$$
- Hvis $c = 0$, så er $d = a$ og den fuldstændige løsning er givet ved
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ bt \end{pmatrix} + c_2 e^{at} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To forbundne kar med konstant tilførsel af farvestof



- Ændring i forhold til tidligere: Det indstrømmende vand indeholder farvestoffet med en koncentration på
$$0.2 \text{ gram/l} \qquad \text{dvs.} \qquad 6 \cdot 0.2 = 1.2 \text{ gram/minut}$$
- Fører til følgende system af 2 differentialligninger:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.02 \\ 0.08 & -0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineære inhomogene systemer af differentialligninger

Inhomogent system af 2 lineære differentialligninger
På matrixform:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Inhomogent system af n lineære differentialligninger
På matrixform:
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$
.

Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Sætning Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Hvis $\mathbf{A}$ har en invers matrix, så har det inhomogene system
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$
den fuldstændige løsning
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \text{ FHL} \\ &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$
hvor "FHL" er den fuldstændige løsning til det homogene system $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Ligevægt $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ kaldes *ligevægten* for systemet.
Bemærk, at når $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, så er $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$.

Stabilitet af ligevægt for $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Stabil ligevægt Ligevægten $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ for systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ kaldes *stabil*, hvis der gælder følgende:

> *For hvert $t_0 \in \mathbb{R}$ og for alle vektorer $\mathbf{x}_0$* i nærheden af $\mathbf{x}^*$ *vil løsningen $\mathbf{x}(t)$, som er fastlagt ved $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, opfylde*
>
> $$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^* \quad \textit{for } t \to \infty.$$

(Løst sagt: Løsningen $\mathbf{x}(t)$ nærmer sig ligevægten $\mathbf{x}^*$ i det lange løb.)

Sætning Stabilitet af ligevægt for $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Ligevægten $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ for systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ er stabil, når alle $\mathbf{A}$'s egenværdier er negative (dvs. $\lambda < 0$ for alle egenværdier λ).

Bemærk forskellen i forhold til systemer af *differens*ligninger, hvor egenværdierne skal opfylde $|\lambda| < 1$.

To forbundne kar med konstant tilførsel – fortsat

- System af differentialligninger: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.02 \\ 0.08 & -0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Ligevægt:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = -\begin{pmatrix} -0.08 & 0.02 \\ 0.08 & -0.08 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Fuldstændig løsning: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} + c_1 e^{-0.04\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.12\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Partikulær løsning svarende til $x(0) = 100$ og $y(0) = 0$:

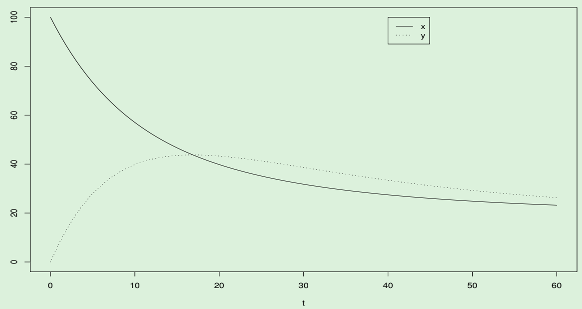
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} + 35\, e^{-0.04\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 45\, e^{-0.12\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{dvs.}$$

$$x(t) = 20 + 35\, e^{-0.04\,t} + 45\, e^{-0.12\,t}$$
$$y(t) = 20 + 70\, e^{-0.04\,t} - 90\, e^{-0.12\,t}$$

To forbundne kar med konstant tilførsel – fortsat

Graferne for løsningerne

$$x(t) = 20 + 35\, e^{-0.04\,t} + 45\, e^{-0.12\,t}$$
$$y(t) = 20 + 70\, e^{-0.04\,t} - 90\, e^{-0.12\,t}$$



Bemærk: I begge kar er slutkonc. $= 0.2 =$ indstrømningskonc.

Anæstesimodel med tilførsel vha. drop

(Gennemgås næste gang som oplæg til Miniprojekt 4)

$$\begin{pmatrix} K_B' \\ K_V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + a_3) & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_B \\ K_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$

Sætning Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$.

Systemet
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$
har den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \varphi_0(t) + \text{ FHL} \\ &= \varphi_0(t) + c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

hvor $\varphi_0(t)$ er løsningsvektor som vi "gætter".

Gætteregler Gæt på $\varphi_0(t)$ af samme form som $\mathbf{b}(t)$.
Som i gætte- / nålestiksmetoden for én differentialligning.

Rod-top model for kulstof i en plante

Baseret på artiklen

G. K. Hansen and H. Svensen, A Model of Assimilate Partitioning and Utilization in Shoots and Roots in the Vegetative Stage of Lolium Multiflorum, *Acta Agriculturae Scandinavica* **36** *(1986), 286–300.*

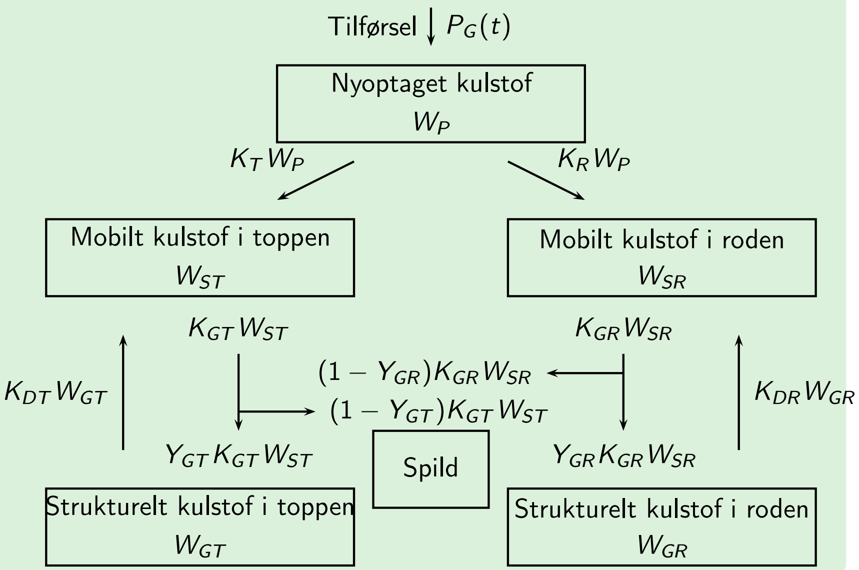
som findes på Absalon.

Formål
At forbedre simuleringer af afgrødevækst ved at opstille en model for kulstoftransport i en plante.

Rod-top: Matematisk model for kulstof i en plante

- Kulstoffet i planten opdeles i 5 puljer:
  - W_P: Nyoptaget kulstof i planten ("recently assimilated carbon")
  - W_{ST}: Mobilt kulstof i toppen ("storage pool in shoots")
  - W_{SR}: Mobilt kulstof i roden ("storage pool in roots")
  - W_{GT}: Strukturelt kulstof i toppen ("structural material in shoots")
  - W_{GR}: Strukturelt kulstof i roden ("structural material in roots")
- Puljen med nyoptaget kulstof i planten tilføres kulstof med en tidsafhængig hastighed $P_G(t)$ ("photosynthesis plus mitochondrial respiration of shoots").
- Overførslen mellem de forskellige puljer fremgår af næste side.
- Der udveksles ikke kulstof mellem rod og top.
- Ficks lov: Overførsel fra en pulje til en anden foregår med en hastighed, der er proportional med koncentrationen i den pulje, der overføres *fra*.
- Ved omdannelse af mobilt kulstof til strukturelt kulstof er der et spild ("respiration"), som er proportional med den omdannede mængde.

Rod-top: Kompartmentdiagram



Rod-top: Differentialligningsmodel

$$\begin{aligned} W_P' &= -(K_T + K_R)W_P + P_G(t) \\ W_{ST}' &= K_T W_P - K_{GT} W_{ST} + K_{DT} W_{GT} \\ W_{GT}' &= Y_{GT} K_{GT} W_{ST} - K_{DT} W_{GT} \\ W_{SR}' &= K_R W_P - K_{GR} W_{SR} + K_{DR} W_{GR} \\ W_{GR}' &= Y_{GR} K_{GR} W_{SR} - K_{DR} W_{GR} \end{aligned}$$

På matrixform $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{P}_G(t)$:

$$\begin{pmatrix} W_P' \\ W_{ST}' \\ W_{GT}' \\ W_{SR}' \\ W_{GR}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_T+K_R) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_T & -K_{GT} & K_{DT} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{GT}K_{GT} & -K_{DT} & 0 & 0 \\ K_R & 0 & 0 & -K_{GR} & K_{DR} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{GR}K_{GR} & -K_{DR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_P \\ W_{ST} \\ W_{GT} \\ W_{SR} \\ W_{GR} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_G(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rod-top: Model med parameterværdier

Parameterværdier
Bestemmes ved forskellige slags forsøg (se artiklen for detaljer):

$$\begin{array}{llll} K_T = 0.70 & K_{GT} = 2.2 & K_{DT} = 0.151 & Y_{GT} = 0.83 \\ K_R = 0.24 & K_{GR} = 3.2 & K_{DR} = 0.079 & Y_{GR} = 0.54 \end{array}$$

(når tiden t måles i dage). Heraf fås

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.70 & -2.2 & 0.151 & 0 & 0 \\ 0 & 1.83 & -0.151 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & -3.2 & 0.079 \\ 0 & 0 & 0 & 1.73 & -0.079 \end{pmatrix}$$

Rod-top: Model med konstant tilførsel af kulstof

Antagelse $P_G(t) = 15$ for alle t.

Herved fås det lineære inhomogene system $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{P}_G$ med $\mathbf{P}_G = (15, 0, 0, 0, 0)$.

Ligevægt (udregnet vha. R)

$$\mathbf{W}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_G = (16.0,\ 29.9,\ 361.2,\ 2.6,\ 56.9)$$

Stabilitet og fuldstændig løsning Da egenværdierne for $\mathbf{A}$ (vha. R) er

$$\lambda_1 = -0.024,\quad \lambda_2 = -0.036,\quad \lambda_3 = -0.94,\quad \lambda_4 = -2.33,\quad \lambda_5 = -3.24$$

er ligevægten stabil og den fuldstændige løsning er

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}^* + c_1 e^{-0.024t}\mathbf{q}_1 + c_2 e^{-0.036t}\mathbf{q}_2 + c_3 e^{-0.94t}\mathbf{q}_3 + c_4 e^{-2.33t}\mathbf{q}_4 + c_5 e^{-3.24t}\mathbf{q}_5$$

hvor egenvektorerne $\mathbf{q}_i$ for $\mathbf{A}$ kan findes vha. R.

Konstanterne $c_1, \ldots, c_5$ kan bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne.

Rod-top: Simplere model for kulstof i toppen

- Kulstoffet i toppen opdeles (som før) i 2 puljer:
  - W_S: Mobilt kulstof i toppen
  - W_G: Strukturelt kulstof i toppen
- Simplificerende antagelse: Puljen med mobilt kulstof tilføres kulstof *direkte* (og ikke via en pulje med nyoptaget kulstof) med en tidsafhængig hastighed $P_G(t)$.
- Ellers samme antagelser som før.

Differentialligningsmodel for kulstof i toppen

$$\begin{aligned} W_S' &= -K_G W_S + K_D W_G + P_G(t) \\ W_G' &= Y_G K_G W_S - K_D W_G \end{aligned}$$

På matrixform:

$$\begin{pmatrix} W_S' \\ W_G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_G & K_D \\ Y_G K_G & -K_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_S \\ W_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_G(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indgår i Miniprojekt 4 samt i Modul 5 ifm. numerisk løsning.