Modul 4: forelæsning 2
Lineære systemer af differentialligninger; komplekse egenværdier

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Hovedresultatet fra sidste gang

Sætning Løsning af homogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige **reelle** egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$.

Så er den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ givet ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (\text{hvor } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

Problem

- Hvad gør man, hvis $\mathbf{A}$ har *komplekse* egenværdier? (Ofte relevant)
- Hvad betyder $e^{\lambda t}$, hvis λ er kompleks?

Rovdyr-byttedyr model

- $B = B(t)$ og $R = R(t)$ er antal byttedyr hhv. rovdyr til tiden t.
- Meget simpel rovdyr-byttedyr model:

$$B' = -R + 100$$
$$R' = 0.01\,B - 10$$

dvs. $$\begin{pmatrix} B' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Ligevægt: $(B^*, R^*) = (1000, 100)$.

Egenværdierne for matricen er $\lambda = \pm 0.1\, i$. Hvad er $e^{i0.1\,t}$?

- Mere kompliceret (ikke-lineær) rovdyr-byttedyr model fra Modul 5:

$$B' = -0.001\,BR + 0.1\,B$$
$$R' = 0.0002\,BR - 0.2\,R$$

Teorien for ikke-lineære systemer bygger på teorien for lineære.

Den komplekse eksponentialfunktion

Definition Den komplekse eksponentialfunktion

For $z = x + iy$ definerer vi

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y \end{aligned}$$

Eksempler:

(1) $e^{x+i0} = e^x$

(2) $e^{0+iy} = \cos y + i \sin y$

(3) $\left|e^{x+iy}\right| = e^x$

(4) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

(5) $e^{\ln 7 + 9i\pi} = e^{\ln 7}(\cos 9\pi + i \sin 9\pi) = -7$

Løse ligninger med eksponentialfunktionen:

(1) $e^z = e$ giver $z = 1, \quad z = 1 \pm 2\pi i, \quad z = 1 \pm 4\pi i, \ldots$

(2) $e^z = 0$: Ingen løsninger

Den komplekse eksponentialfunktion – fortsat

Sætning Realdel og imaginærdel af kompleks eksponentialfunktion

Med $\lambda = a + ib$ har vi

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) = e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\sin(bt)$$

dvs.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{\lambda t}) &= e^{at}\cos(bt) \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t}) &= e^{at}\sin(bt) \end{aligned}$$

hvor "Re" og "Im" betegner hhv. real- og imaginærdel af et komplekst tal.

Sætning Regneregler for kompleks eksponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1+z_2} \\ (e^{\lambda t})'_t &= \lambda e^{\lambda t} \quad (\text{for} \quad \lambda \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Løsning af homogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ med komplekse egenværdier

Resultatet fra sidste gang gælder stadig:

Sætning Løsning af homogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige (komplekse) egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Så er den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ givet ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (\text{hvor } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C})$$

Løsningen på reel form

- For at opnå dette skal man omskrive udtrykket for $\mathbf{x}(t)$.
- **NB** En smart måde at gøre dette på gennemgås om lidt.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Egenværdier og -vektorer

$$\lambda_1 = 3 + 2i \quad \text{med} \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 - 2i \quad \text{med} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{pmatrix}$$

Fuldstændig løsning

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{(3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2i \end{pmatrix} + c_2 e^{(3-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

Skal omskrives for at få løsningen på reel form.

Eksempel – fortsat

Ved (lang!) udregning fås:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{(3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \end{pmatrix} + c_2 e^{(3-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}(\cos 2t - i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix}$$

$$= \ \ldots \ = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$+ c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$= (c_1 + c_2) e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2) e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

Fuldstændig løsning på reel form fås ved at antage at

$$b_1 = c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{og} \qquad b_2 = i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$$

Pyha ... det var hårdt. Vi vil benytte en smartere metode ⌣̈

Smartere metode til at opskrive fuldstændig løsning til homogene systemer på reel form

Sætning fra før (Antag ...)

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (\text{hvor } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C})$$

Løsningen angives på reel form

- Antag at $\mathbf{A}$ er en matrix med reelle tal og at λ er en egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{q}$. Da er λ^* også en egenværdi for $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{q}^*$.
- Lad λ være en ikke-reel egenværdi. De komplekse led

  $$e^{\lambda t}\mathbf{q} \quad \text{og} \quad e^{\lambda^* t}\mathbf{q}^*$$

  i den fuldstændige løsning kan da erstattes med de reelle led

  $$\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\mathbf{q}) \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(e^{\lambda t}\mathbf{q}).$$

  Konstanterne foran $\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\mathbf{q})$ og $\mathrm{Im}(e^{\lambda t}\mathbf{q})$ skal vælges reelle.

Sammenfatning af løsning af homogene systemer for 2×2 matricer

Vi betragter systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en 2×2 matrix med reelle tal.

- Hvis $\mathbf{A}$ har to forskellige *reelle* egenværdier λ_1 og λ_2 med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1$ og $\mathbf{q}_2$, da er den fuldstændige løsning givet ved

  $$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{q}_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

- Hvis $\mathbf{A}$ har en *ikke-reel* egenværdi λ med tilhørende egenvektor $\mathbf{q}$, da er den fuldstændige løsning givet ved

  $$\mathbf{x}(t) = b_1 \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{q}\right) + b_2 \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{q}\right) \qquad (b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

Eksempel – fortsat

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Egenværdier og -vektorer fra før

$$\lambda_1 = 3{+}2i \text{ med } \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \end{pmatrix} \quad \left[\text{og } \lambda_2 = 3{-}2i \text{ med } \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix}\right]$$

Omskrivning

$$e^{(3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \end{pmatrix} = \ldots = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$$

Fuldstændig løsning på reel form

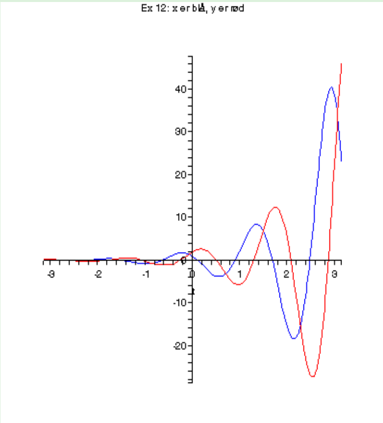
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = b_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + b_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} \quad (b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

(Samme løsning som før, men lettere.)

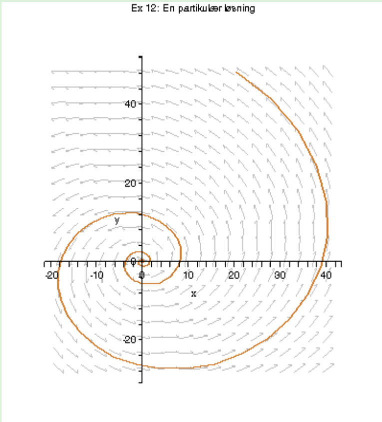
Eksempel 12 og Øvelse 8

$$x(t) = e^t(\cos(4t) - \sin(4t)) \quad \text{og} \quad y(t) = e^t(\cos(4t) + \sin(4t))$$

Grafer for $x(t)$ og $y(t)$:



Vektorfunktionen $\binom{x(t)}{y(t)}$:



Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ med komplekse egenværdier

Resultatet fra sidste gang gælder stadig:

Sætning Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige (komplekse) egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Hvis $\mathbf{A}$ har en invers matrix, så har det inhomogene system

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \text{ FHL} \\ &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n \qquad (\text{hvor } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

hvor FHL er den fuldstændige løsning til det homogene system $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Løsningen skal derefter opskrives på reel form.

Ligevægt og stabilitet for $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Resultaterne fra sidste gang gælder stadig:

Ligevægt $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ kaldes *ligevægten* for systemet.

Stabil ligevægt (Løst formuleret) Ligevægten $\mathbf{x}^*$ er stabil, hvis løsningen $\mathbf{x}(t)$ nærmer sig ligevægten $\mathbf{x}^*$ i det lange løb.

Sætning Stabilitet af ligevægt for $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Antag $\mathbf{A}$ har n forskellige (komplekse) egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

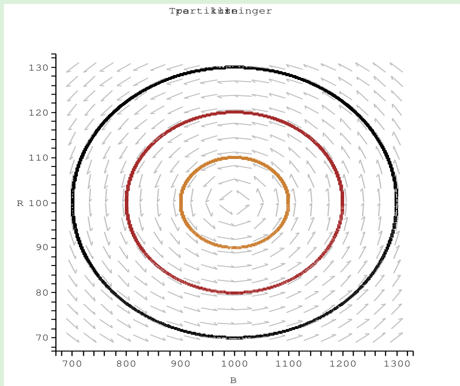
Ligevægten $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ for systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ er stabil når alle $\mathbf{A}$'s egenværdier har *negativ realdel* (dvs. $\operatorname{Re}\lambda < 0$ for alle egenværdier λ).

Rovdyr-byttedyr model – løsning

Fra tidligere: $\begin{pmatrix} B' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ -10 \end{pmatrix}$

Fuldstændig løsning (egenværdier $\pm 0.1\,i$):

$$\begin{pmatrix} B^* \\ R^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -10\sin(0.1\,t) \\ \cos(0.1\,t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 10\cos(0.1\,t) \\ \sin(0.1\,t) \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$



Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ med komplekse egenværdier

Resultatet fra sidste gang gælder stadig:

Sætning Løsning af inhomogene systemer $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$

Antag **A** har n forskellige (komplekse) egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

har den fuldstændige løsning

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \varphi_0(t) + \text{ FHL} \\ &= \varphi_0(t) + c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n,\end{aligned}$$

hvor $\varphi_0(t)$ er løsningsvektor som vi "gætter".
Løsningen skal derefter opskrives på reel form.

Gætteregler Gæt på $\varphi_0(t)$ af samme form som $\mathbf{b}(t)$.
Som i "nålestiksmetoden" for én differentialligning.

Oplæg til Miniprojekt 4: Anæstesimodel

[Det følgende er kraftigt inspireret af undervisningsmateriale fra RUC udarbejdet af Morten Blomhøj, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen]

Situation

- I forbindelse med operationer indsprøjtes det muskelafslappende stof *pankuron* i patienten for at forhindre spjæt under operationen.
- Man ønsker, at koncentrationen af stoffet i *vævet* er på mindst 0.25 mg/l, men samtidig kan en for høj koncentration være skadelig.
- Det er ikke muligt (eller i hvert fald yderst besværligt) at måle koncentrationen af stoffet i vævet.
- Derimod kan man rimeligt let måle koncentrationen af stoffet i blodet.

Anæstesi: Målinger og problemstilling

- Efter indsprøjtning af 4 mg af stoffet til tiden $t = 0$ har man foretaget følgende målinger af koncentrationen af stoffet i blodet (målt i mg/l) som funktion af tiden (målt i timer):

Tid	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0
Konc.	0.846	0.591	0.468	0.385	0.374	0.325	0.229

Tid	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
Konc.	0.183	0.166	0.132	0.106	0.083	0.070	0.058

  [Kilde: Hull, C.J. (1979). Pharmacokinetics and pharmacodynamics, *Br. J. Anaesth.*, 51, 579–594.]

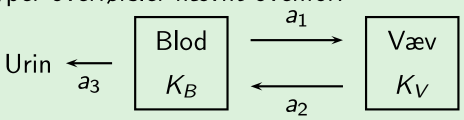
- Vi ønsker at kunne bestemme koncentrationen i *vævet* som funktion af tiden ud fra ovenstående målinger af koncentrationen i blodet.
- Til dette formål vil vi opstille en matematisk model for vekselvirkningen mellem stoffet i blodet og vævet.

Anæstesi: Modelantagelser om vekselvirkningen

- Ficks lov: Overførselshastigheder er proportionale med koncentrationen dér, hvor der overføres *fra*; dvs.
  - Stoffet optages i vævet fra blodet med en hastighed, der er proportional med koncentrationen i blodet.
  - Stoffet udskilles til blodet fra vævet med en hastighed, der er proportional med koncentrationen i vævet.
  - Stoffet udskilles til urinen fra blodet med en hastighed, der er proportional med koncentrationen i blodet.
- Stoffet udskilles ikke direkte til urinen fra vævet.

Anæstesi: Matematisk model for vekselvirkningen

- Lad $K_B = K_B(t)$ hhv. $K_V = K_V(t)$ betegne koncentrationen af stoffet i blodet hhv. vævet til tiden t (målt i timer).
- Lad a_1, a_2 og a_3 betegne proportionalitetskonstanterne forbundet med de tre typer overførsler nævnt ovenfor:



- Dette leder til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} K_B' &= -(a_1 + a_3)K_B + a_2 K_V \\ K_V' &= a_1 K_B - a_2 K_V \end{aligned}$$

dvs.
$$\begin{pmatrix} K_B' \\ K_V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + a_3) & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_B \\ K_V \end{pmatrix}$$

- Parametrene a_1, a_2 og a_3 kan bestemmes ud fra målingerne af koncentrationen i blodet.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Anæstesi: Mere generel model med tilførsel vha. drop

Problem med tidligere situation

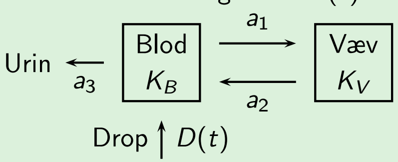
- Det viser sig, at $K_V(t)$ for hurtigt falder til et for lavt niveau.
- Hvis startdosen øges, så fås en for høj maksimalkoncentration.

Løsningsforslag
Ud over startindsprøjtningen tilføres stoffet også vha. et drop.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Anæstesi: Mere generel model med drop – fortsat

- Droppet tilfører stoffet med hastigheden $D(t)$ til tiden t:



- Dette leder til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} K_B' &= -(a_1 + a_3)K_B + a_2 K_V + D(t) \\ K_V' &= a_1 K_B - a_2 K_V \end{aligned}$$

dvs.
$$\begin{pmatrix} K_B' \\ K_V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_1 + a_3) & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_B \\ K_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Parametrene a_1, a_2 og a_3 har de samme værdier som før.

Bemærkning Hvis man i stedet for benytter sig af en række af indsprøjtninger i løbet af operationen, fås en større variation af koncentrationen i vævet, hvilket er uønskeligt.