1 Disposition

Jeg vil gerne gennemgå opgave 3. Jeg vil forsøge at anlægge et perspektiv, hvor jeg fokuserer mere på de overordnede principper og bagvedliggende intutioner end konkrete udregninger.

- Præsentation og udledning af modellen

2 Udregninger

Vi vil gerne modellere en modellere en epidemis udvikling over tid med en SIR. Det vil sige, at vi opdeler populationen af N individer i tre grupper, nemlig M_t (antallet af modtagelige individer til tid t), S_t (antallet af smittede individer til tid t) og I_t (antallet af immune individer til tid t).

Vi antager, at antallet af nye smittede individer til tid t er propertionelt med både antallet af smittede og antallet af modtagelige til tid t. Vi antager også, at en fast andel a af de smittede til tid t bliver immune til tid $t + 1$. Altså får vi

$$S_{t+1} = (1-a)S_t + \frac{b}{N}S_tM_t, \qquad 0 < a < 1, \quad 0 < b \tag{1}$$

Vi antager også, at en fast andel c af de immune til tid t bliver ikke-immune til tid $t + 1$. Altså får vi

$$I_{t+1} = (1-c)I_t + aS_t \tag{2}$$

Vi antager, at ingen af dem, der bliver ikke-immune i periode t bliver syge i periode t. Altså bliver de alle sammen modtagelige. Altså får vi, at antallet af modtagelige i periode $t + 1$ er antallet af modtagelige i periode t minus den andel, der bliver smittede i periode t, plus den andel der bliver ikke-immune i periode t:

$$M_{t+1} = M_t - \frac{b}{N}S_tM_t + cI_t \tag{3}$$

Vi kan udnytte, at

$$M_{t+1} + S_{t+1} + I_{t+1} = M_t + S_t + I_t = N \tag{4}$$

til at forsimple modellen ved at substituere $M_t = N - S_t - I_t$ ind i ligningen for S_{t+1}. Hermed får vi systemet

$$S_{t+1} = (1-a)S_t + bS_t\left(1 - \frac{S_t + I_t}{N}\right) \tag{5}$$

$$I_{t+1} = (1-c)I_t + aS_t \tag{6}$$

Dette er et autonomt, ikke-linært system af differens-ligninger.

Lad mig nu udregne betingelserne for, om modellen har ligevægte skarpt større end 0, og for om disse ligevægte i så fald er stabile.