KAPITEL 1

DE KOMPLEKSE TAL

0. Indledning.

Fra den elementære matematik er vi fortrolige med, hvordan talbegrebet og de tilhørende regningsarter, aritmetikken, trin for trin udvides. Udgangspunktet er *de naturlige tal* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, hvor regningsarterne addition og multiplikation altid er mulige. Deres omvendte regningsarter, hhv subtraktion og division, er derimod kun mulige i nogle tilfælde, ikke i alle.

Vi tilføjer 0 og de negative hele tal og udvider regningsarterne på passende måde. Derved får vi en ny og større grundmængde, *de hele tal* $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Inden for $\mathbb{Z}$ er subtraktion altid mulig, men division er stadig kun mulig, når divisor "går op" i dividenden.

Nu tilføjer vi alle brøker, f.eks. $\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{3}$, 0.00197, og udvider atter regningsarterne, så de også er defineret for brøker. Derved får vi en ny grundmængde, *de rationale tal* $\mathbb{Q}$. Inden for $\mathbb{Q}$ er alle fire regningsarter uindskrænket mulige, bortset fra division med 0, og diverse regneregler gælder. Disse egenskaber udtrykker man kort ved at sige, at $\mathbb{Q}$ er et (kommutativt) *legeme.*

Der er dog stadig visse mangler ved $\mathbb{Q}$. Den mest markante er, at der ikke findes længdetal for alle liniestykker, målt med en given længdeenhed. Således er der ikke noget rationalt tal, som angiver længden af hypotenusen i en ligebenet retvinklet trekant, hvis kateter er længdeenheden. Aritmetisk svarer det til, at ligningen $x^2 = 2$ ikke kan løses i $\mathbb{Q}$.

Ved at tilføje de irrationale tal som f.eks. $\sqrt{2}$, $-\sqrt[3]{7}$, $\ln 3.89$ (og mange andre, der ikke som disse tre kan angives ved brug af kendte funktioner) samt udvide regningsarterne endnu en gang får vi en ny grundmængde, *de reelle tal* $\mathbb{R}$, der ligesom $\mathbb{Q}$ er et legeme. Tallene i $\mathbb{R}$ svarer til alle punkter på en linie, *tallinien*, og derved bliver det muligt at angive længdetal for alle liniestykker. Der er andre fortrin ved $\mathbb{R}$ frem for $\mathbb{Q}$, f.eks. vil enhver monoton begrænset følge af reelle tal konvergere, dvs have et reelt tal som grænseværdi.

Det viser sig, at $\mathbb{R}$ til de fleste formål er fuldt tilstrækkelig som tal-grundmængde, og man føler ikke behov for flere udvidelser. Dog er der situationer, hvor et sådant behov opstår. Således ved vi, at en algebraisk ligning af n'te grad i nogle tilfælde har n rødder, i andre tilfælde færre end n rødder. F.eks. har ligningen $x^2 - 1 = 0$ to rødder, mens ligningen $x^2 + 1 = 0$ ikke har nogen rødder. Det sker, at denne opførsel spærrer for en nærliggende måde at behandle visse problemer på. Vi skal se to eksempler på sådanne situationer, hvoraf den ene dog kun kan forstås med kendskab til lineær algebra.

EKSEMPEL 1. Fra Grundbog i Matematik, side 333-340 ved vi, hvordan man løser en lineær homogen 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$y'' + ay' + by = 0\,.$$

Hvis den såkaldte karakterligning $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ har *to rødder* λ_1 og λ_2, er løsningen til differentialligningen givet ved

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Hvis karakterligningen *ingen rødder* har, er løsningen

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax}\cos\omega x + c_2 e^{-\frac{1}{2}ax}\sin\omega x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,,$$

hvor $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. (Vi ser her bort fra det lidt specielle mellemtilfælde med dobbeltrod i karakterligningen).

Der er forskel på løsningens form i de to situationer, men den forekommer ikke så dramatisk som forskellen på "to rødder" og "ingen rødder". Hvis vi kunne udvide

talbegrebet sådan, at karakterligningen altid havde to rødder, ville det måske være muligt behandle de to tilfælde under ét.

EKSEMPEL 2. I lineær algebra møder vi begrebet *egenværdi*. En egenværdi for en kvadratisk matrix $\boldsymbol{A}$ er et tal λ, for hvilket der findes vektorer $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{o})$, således at $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. En sådan vektor $\boldsymbol{x}$ kaldes da en *egenvektor* for $\boldsymbol{A}$ hørende til λ. Det viser sig, at egenværdierne for $n \times n$ matricen $\boldsymbol{A}$ kan findes som rødderne i ligningen $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$. Ved udregning heraf fås en n'te grads ligning, og en sådan har som nævnt ovenfor n eller færre rødder.

Ved en del anvendelser, især i forbindelse med såkaldte *matrixmodeller* af typen $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t$ $(t = 0, 1, 2, 3, \cdots)$, har man brug for at kunne afgøre, hvordan potenserne $\boldsymbol{A}^t$ af en kvadratisk matrix $\boldsymbol{A}$ varierer for voksende t. Herom gælder: Antag, at $n \times n$ matricen $\boldsymbol{A}$ har n egenværdier, og at en af disse, λ_1, er *dominerende*, dvs den er numerisk større end de øvrige. Da gælder for store t, at elementerne i $\boldsymbol{A}^t$ vokser "næsten proportionalt" med λ_1^t.

Hvad nu, hvis $\boldsymbol{A}$ ikke har "det fulde antal" n egenværdier? Lad λ_1 betegne den numerisk største egenværdi. Det viser sig, at $\boldsymbol{A}^t$ sommetider, men *ikke* altid, opfører sig som før beskrevet. Hvis vi kunne udvide talbegrebet sådan, at en n'te grads ligning altid havde n rødder, ville vi måske bedre kunne forudsige, hvordan matrixpotenserne $\boldsymbol{A}^t$ varierer.

Målet i dette kapitel er netop at foretage endnu en udvidelse af talbegrebet, således at en n'te grads ligning altid har n rødder (idet en dobbeltrod dog skal tælles med to gange, en tredobbelt rod tre gange osv). Processen kommer til at bestå i, at vi til de reelle tal føjer nye, såkaldte *imaginære* tal, hvorved vi når til en ny tal-grundmængde, mængden $\mathbb{C}$ af *komplekse tal*.

I $\mathbb{C}$ vil $\mathbb{R}$ således være "indlejret" på lignende måde, som $\mathbb{Q}$ er indlejret i $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ indlejret i $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{N}$ indlejret i $\mathbb{Z}$, dvs alle regninger med givne tal er ensbetydende i alle de af grundmængderne, som de pågældende tal tilhører. I det sidste eksempel i afsnittet skal vi se, hvordan man allerede kan få en fornemmelse af indlejringen af $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ ved at gennemføre den i en algebra, vi kender i forvejen, nemlig 2×2 matrixalgebraen.

EKSEMPEL 3. Lad $\mathcal{M}_2$ betegne mængden af 2×2 matricer. Fra Grundbog i Matematik ved vi, at $\mathcal{M}_2$ udgør et afsluttet regneområde, hvor man kan addere, subtrahere, gange og dividere næsten frit, og hvor de fleste sædvanlige regneregler gælder. Dog er multiplikation normalt ikke er kommutativ, og man skal derfor også specificere, om man dividerer "fra venstre" eller "fra højre". Desuden kan man ikke dividere med en singulær matrix.

Vi betragter nu en delmængde $\hat{C}$ af $\mathcal{M}_2$ bestående af alle 2×2 matricer af den specielle form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} .$$

Mængden $\hat{C}$ *er afsluttet over for matrixregning*, dvs både sum og produkt af $\hat{C}$-matricer tilhører atter $\hat{C}$. Det fremgår af udregningerne

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2) & -(y_1+y_2) \\ (y_1+y_2) & (x_1+x_2) \end{pmatrix} , \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1x_2 - y_1y_2) & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ (x_1y_2 + y_1x_2) & (x_1x_2 - y_1y_2) \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

Vi bemærker, at iflg. (2) ændres produktet ikke ved ombytning af de to faktorer, dvs *inden for* $\hat{C}$ *er matrixmultiplikation kommutativ.* Endelig gælder, at *enhver* $\hat{C}$*-matrix* ($\neq \boldsymbol{O}$) *har en invers, som atter tilhører* $\hat{C}$. Det ses af formlen

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} , \qquad (3)$$

som fremkommer ved at udregne venstresiden iflg. det velkendte udtryk for den inverse af en 2×2 matrix. På tilsvarende måde, blot lettere, ses, at når $\boldsymbol{A} \in \hat{C}$, vil også $-\boldsymbol{A} \in \hat{C}$. Denne række af egenskaber ved $\hat{C}$ udtrykker man under ét ved at sige, at $\hat{C}$ *er et kommutativt legeme.* Meningen er, at inden for $\hat{C}$ regner man lige så pænt med matricer, som man gør med tal inden for $\mathbb{R}$.

Lad nu $\hat{R}$ betegne delmængden af $\hat{C}$-matricer med 0 uden for diagonalen, dvs af formen $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ $(= x\boldsymbol{E})$. Regning med sådanne matricer sker iflg.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 0 \\ 0 & x_1+x_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & x_1x_2 \end{pmatrix} .$$

Det betyder, at $\hat{R}$ løseligt udtrykt kan opfattes som et eksemplar af $\mathbb{R}$, idet matricen $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ sammenknyttes med det reelle tal x. Mere formelt siger man, at $\mathbb{R}$ og

$\hat{R}$ er *isomorfe*, hvilket betyder, at der findes en $1-1$ afbildning mellem mængderne (nemlig den lige nævnte), således at alle regninger forløber parallelt. De reelle tals legeme er med andre ord "indlejret" i legemet $\hat{C}$ i form af mængden $\hat{R}$.

Algebraiske ligninger, som allerede kan løses i $\mathbb{R}$, kan i kraft af $\hat{R}$-indlejringen også løses i $\hat{C}$. Et eksempel belyser, hvad der menes hermed: Svarende til, at vi i $\mathbb{R}$ løser ligningen $x^2-1=0$ til $x=\pm 1$, har vi i $\hat{C}$:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} . \qquad (4)$$

Men man ikke kan slutte den modsatte vej: Der findes algebraiske ligninger i $\mathbb{R}$, som ikke kan løses dér, men som kan løses, når de "oversættes" til $\hat{C}$. Eksempel: Ligningen $x^2+1=0$ har ingen reelle rødder, men derimod har vi i $\hat{C}$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} . \qquad (5)$$

At de to matricer på højre side virkelig er løsninger ("$\Leftarrow$"), efterviser man ved at gøre prøve. At der ikke er andre løsninger ("$\Rightarrow$"), kan man godtgøre ved at skrive matricerne ud i elementer, se Øvelse 1 nedenfor.

Lad $\boldsymbol{J}$ betegne den første af de to løsninger i (5), dvs $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Da kan enhver $\hat{C}$-matrix skrives entydigt på formen

$$\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{E} + y\boldsymbol{J},$$

hvor $\boldsymbol{E}$ er 2×2 enhedsmatricen. Det ses umiddelbart ved at skrive ligningen ud:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (6)$$

ØVELSE 1. Eftervis formel (4) i Eksempel 3 ved at skrive ud i elementer på begge sider af matrixligningen og løse de reelle ligninger, der derved fremkommer.

Eftervis på samme måde formel (5) i Eksempel 3.

1. De komplekse tal.

I mængden $\hat{C}$ fra Eksempel 3 ligger mængden af komplekse tal i svøb. Det ville dog være en indsnævring, hvis vi var nødt til at opfatte de komplekse tal som (specielle) 2×2 matricer. Det frigør vi os fra, idet vi opstiller følgende

DEFINITION 1. **Komplekst tal.** Ved et *komplekst tal* forstås et udtryk af formen $x + iy$, hvor $x, y \in \mathbb{R}$, mens i er et symbol, betegnet den *imaginære enhed.* Tal af formen $x + i0$ kaldes *reelle* og skrives blot x, tal med $y \neq 0$ kaldes *imaginære*, mens tal af formen $0 + iy$ kaldes *rent imaginære* og skrives blot iy.

Et komplekst tal betegnes ofte med et enkelt symbol, f.eks. z eller w. Når $z = x + iy$, siger man, at z har *realdel* x og *imaginærdel* y. Man kan afbilde $z = x+iy$ i et sædvanligt retvinklet XY-system, kaldet *den komplekse talplan*, idet z da modsvarer punktet/vektoren med koordinater (x, y).

Mængden af komplekse tal betegnes $\mathbb{C}$. Inspireret af (1) og (2) i Eksempel 3 indfører vi de to fundamentale regningsarter i $\mathbb{C}$.

DEFINITION 2. **Addition og multiplikation af komplekse tal.** Sum og produkt af to komplekse tal $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$ defineres ved hhv

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,, \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)\,. \tag{2}$$

Vi bemærker, at addition af komplekse tal svarer til vektoraddition af de tilsvarende stedvektorer i den komplekse talplan. Senere - i Sætning 3, side 10 - vil også multiplikationen få en anskuelig fortolkning.

SÆTNING 1. **Regneregler for komplekse tal.** Mængden $\mathbb{C}$ er et *kommutativt legeme* mht regningsarterne addition og multiplikation, idet der for alle værdier af de optrædende komplekse talvariable gælder

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1\,, \tag{3}$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,, \tag{4}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1\,, \tag{5}$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)\,, \tag{6}$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3\,. \tag{7}$$

(8) Til ethvert $z \in \mathbb{C}$ findes et tal, kaldet det modsatte af z og betegnet $-z$, sådan at $z + (-z) = 0$, og der gælder

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad -z = -x + i(-y)\,.$$

(9) Til ethvert $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ findes et tal, kaldet det reciprokke af z og betegnet $\frac{1}{z}$, sådan at $z\frac{1}{z} = 1$, og der gælder

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

BEVISSKITSE: De enkelte regler kan vises ved, at man skriver begge sider ud i realdel og imaginærdel. Det er for så vidt nemt nok, men fylder en del, og vi undlader at udføre det i detaljer. - Man kan også ræsonnere således: Iflg. Grundbog i Matematik, side 74 gælder de tilsvarende regler til (3)-(9) for regning med $\mathcal{M}_2$-matricer, dog med undtagelse af regel (5). Som omtalt i Eksempel 3 gælder reglerne *specielt* for regning med $\hat{C}$-matricer, idet endda også regel (5) er gyldig her. Da $\mathbb{C}$ er indført som en pendant til $\hat{C}$, hvor alle regninger forløber parallelt, gælder regnereglerne også i $\mathbb{C}$. Specielt bemærkes, at (9) i sætningen svarer til formel (3) i Eksempel 3. □

At trække et komplekst tal z fra et andet er det samme som at lægge det modsatte tal $-z$ til. Ligeledes kan man *dividere* med et komplekst tal z ved at gange med dets reciprokke. Lad os skrive det lidt grundigere ud: Hvis

$z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$, finder vi

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \quad \text{eller}$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,. \tag{10}$$

I forbindelse med det følgende eksempel, der demonstrerer regning med komplekse tal, bemærkes: Når man skal gange og dividere komplekse tal, kan det ikke betale sig at indsætte slavisk i formlerne (2), hhv (10). Det er nemmere at regne direkte på tallene og herunder bruge, at $i^2 = -1$, jfr. slutningen af Eksempel 3, hvor matricen J svarer til den imaginære enhed i. At dividere med $x + iy$ lettes ved, at man forlænger med $x - iy$ og benytter, at $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$.

EKSEMPEL 2.

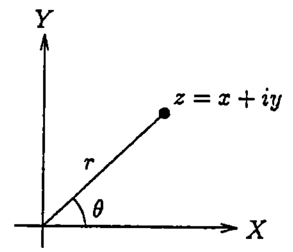
$$(2+3i) + (5-i) = (2+5) + (3-1)i = 7 + 2i$$
$$(2+3i)(5-i) = 10 - 2i + 15i - 3i^2 = 10 + 13i + 3 = 13 + 13i$$
$$(2+3i)^2 = 2^2 + (3i)^2 + 2\cdot 2\cdot 3i = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i$$
$$\frac{2+3i}{5-i} = \frac{(2+3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{10+3i^2+2i+15i}{25-i^2} = \frac{7}{26} + \frac{17}{26}i\,.$$

ØVELSE 2. Udregn følgende komplekse tal på formen $x + iy$:

1) $(7+2i) + (8-6i)$
2) $(7+2i) - (8-6i)$
3) $(7+2i)(8-6i)$
4) $\dfrac{7+2i}{8-6i}$
5) $(7+2i)^2 - (8-6i)^2$
6) $(1+i)(2+i)(3+i)$
7) $(2-i)^3 + (1+2i)^4$
8) $\dfrac{1}{6+7i} + \dfrac{1}{9-2i} + \dfrac{1}{4-i}$.

2. Modulus og argument.

DEFINITION 3. **Modulus og argument.**



Lad $z = x + iy \neq 0$ være afsat som et punkt i den komplekse talplan. Ved *modulus* af z, skrevet mod z eller $|z|$, forstås afstanden fra punktet 0 til punktet z. Ved *argumentet* for z, skrevet $\arg z$, forstås radiantallet for vinklen fra den positive X-akse til vektoren (x, y). Tallet 0 har modulus 0, men intet argument.

Bemærk, at $\arg z$ er bestemt på nær et multiplum af 2π. – Lad $z = x + iy$ have modulus r og argument θ, altså $r = |z|$, $\theta = \arg z$. Det ses, at punktet x med retvinklede koordinater (x, y) har de *polære koordinater* (θ, r) i systemet med nulpunktet som pol og den positive X-akse som polarakse. Af overgangsformlerne mellem de to typer koordinater får vi derfor straks

SÆTNING 2. **Overgangsformler.** Om sammenhængen mellem på den ene side realdel x og imaginærdel y for et komplekst tal, på den anden side tallets modulus r og argument θ, gælder

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,, \tag{1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)\,. \tag{2}$$

BEVIS: De fire formler i sætningen svarer nøje til de polære overgangsformler, se Grundbog i Matematik side 298. □

Af (1) kan x og y findes, når man kender r og θ. Omvendt kan man finde r og θ af (2), når man kender x og y, idet der dog må en overvejelse med om, hvilken kvadrant tallet ligger i, for at man kan få fastlagt argumentet θ korrekt. *Det anbefales at støtte sig til en skitse, når man skal bestemme argumentet for et givet komplekst tal.*

Er modulus og argument for et komplekst tal kendt, kan vi vha (1) straks skrive det på realdel/imaginærdel form: Hvis $|z| = r$ og $\arg z = \theta$, er

$$z = r\cos\theta \,+\, i\,r\sin\theta. \tag{3}$$

EKSEMPEL 5. For tallet $z = 3 + 3i$ får vi af (2):

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, \qquad \arg z = \operatorname{Arctan}\frac{3}{3} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(tegn en figur !).}$$

Ligeledes får vi for tallet $z = -5 + 12i$:

$$|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,, \qquad \arg z = \operatorname{Arctan}\frac{12}{-5} + \pi \approx 1.97 \quad \text{(tegn !).}$$

Om tallet z er givet: $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$. Af (3) får vi

$$z = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{(tegn !).}$$

Om tallet z er givet: $|z| = 0.543$, $\arg z = 1.178$. Af (3) får vi

$$z = 0.543(\cos 1.178 + i\sin 1.178) = 0.208 + 0.502i\,.$$

ØVELSE 3. Find modulus og argument for følgende komplekse tal:

1) $-4 + 4i$, 2) $7i$, 3) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$, 4) $(2+3i)^2$.

Find realdel og imaginærdel af z, når

1) $|z| = 5$, $\arg z = 5\pi$, 2) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{2}{3}\pi$.

SÆTNING 3. Modulus af et produkt er lig med *produktet* af faktorernes modulus. Argumentet for et produkt er lig med *summen* af faktorernes argumenter. Udtrykt i formler:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,, \tag{4}$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2\,. \tag{5}$$

BEVIS: Sæt $|z_1| = r_1$, $\arg z_1 = \theta_1$ og $|z_2| = r_2$, $\arg z_2 = \theta_2$. Af (3) fås

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]. \end{aligned}$$

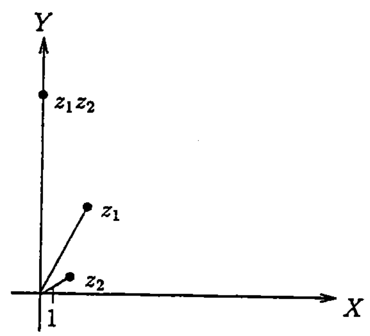
Iflg. to af de trigonometriske additionsformler, se Grundbog i Matematik side 153, kan det trækkes sammen til

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))\,.$$

Ved sammenligning med (3) ser vi, at $z_1 z_2$ har modulus $r_1 r_2$ og argument $\theta_1 + \theta_2$. Dermed er sætningen vist. □

Formel (4) ligner reglen for numerisk værdi af et produkt af to reelle tal, og den kan opfattes som en udvidelse heraf, da modulus og numerisk værdi for et reelt tal er det samme. Det kan i øvrigt nævnes, at man sommetider bruger betegnelsen *absolut værdi* i stedet for modulus.

EKSEMPEL 6. Om tallene $z_1 = 4 + i4\sqrt{3}$ og $z_2 = \sqrt{3} + i$ har vi:



$$|z_1| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8\,,$$

$$\arg z_1 = \operatorname{Arctan}\frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3}\,,$$

$$|z_2| = \sqrt{3 + 1^2} = 2\,,$$

$$\arg z_2 = \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Endvidere er $z_1 z_2 = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}i^2 + 4i + 4(\sqrt{3})^2 i = 16i$, dvs $|z_1 z_2| = 16$ og $\arg z_1 z_2 = \pi/2$. Resultatet er i overensstemmelse med Sætning 3, jfr. figuren.

ØVELSE 4. Givet tallene $z_1 = 1 + 3i$ og $z_2 = 2 - i$. Udregn deres produkt $z_1 z_2$ direkte. Udregn samme produkt ved at bestemme hver faktors modulus og argument, benytte Sætning 3 og til sidst gå tilbage til formen $x + iy$ iflg. formel (3). Hvilken af de to metoder er nemmest? Tror du, at man herefter kan generalisere om, hvilken metode der *altid* er nemmest til multiplikation af komplekse tal?

Sætning 4. **de Moivres formel.** For vilkårlige $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\ .$$

Bevis: Følger ved gentagen brug af Sætning 3 på tallet $z = \cos\theta + i\sin\theta$, som har modulus 1 og argument θ. □

EKSEMPEL 5. **Formler for $\cos n\theta$ og $\sin n\theta$.** Da vi indførte de komplekse tal, var følgende regel underforstået: To komplekse tal er lig med hinanden, hvis og kun hvis de både har samme realdel og samme imaginærdel. Udtrykt i symboler: $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$. Ved brug heraf kan de Moivres formel udmøntes i formler for $\cos n\theta$ og $\sin n\theta$, udtrykt ved $\cos\theta$ og $\sin\theta$, idet man først udregner venstre side af de Moivres formel vha binomialformlen. Vi viser, hvordan denne teknik fungerer i tilfældet $n = 3$:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\ .\end{aligned}$$

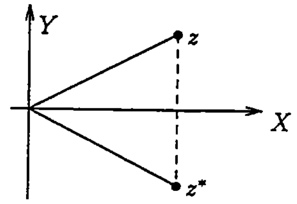
Højre side af de Moivres formel er $\cos 3\theta + i\sin 3\theta$. Når de sider sættes lig med hinanden, får vi af ovennævnte regel:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\ , \\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\ .\end{aligned}$$

ØVELSE 5. (1) Benyt den trigonometriske grundformel til at omforme de to formler udledt i Eksempel 7, så $\cos 3\theta$ er udtrykt alene ved $\cos\theta$ og $\sin 3\theta$ alene ved $\sin\theta$. Kontrollér for et par simple θ-værdier, at formlerne giver korrekte resultater.

(2) Udled de kendte formler for $\cos 2\theta$ og $\sin 2\theta$ vha de Moivres formel ($n = 2$). Udled dernæst formler for $\cos 4\theta$ og $\sin 4\theta$, og udtryk $\cos 4\theta$ alene ved $\cos\theta$.

3. Konjugering.



En simpel, men nyttig operation for komplekse tal er *konjugering*, som i den komplekse talplan betyder, at tallet så at sige spejles om den reelle akse.

Definition 4. **Konjugering.** Ved det *konjugerede komplekse tal* til tallet $z = x + iy$ forstås tallet $z^* = x - iy$.

Sætning 5. For konjugering gælder følgende almene regler:

$$|z^*| = |z|\ , \qquad (z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*\ ,$$
$$\arg z^* = -\arg z\ , \qquad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*\ ,$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}\ .$$

Bevis: Reglerne for modulus og argument følger direkte af definitionen. Hver af reglerne for de fire regningsarter viser man ved at skrive de to sider ud i realdel og imaginærdel. Det går på samme måde hver gang, så lad os blot som eksempel anføre beviset for produkt-reglen: Af (8) fås

$$\begin{aligned}z_1^* z_2^* &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= x_1x_2 - iy_1x_2 - ix_1y_2 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)\ = (z_1z_2)^*\ .\end{aligned}$$

□

Sætning 6. Hvis α er nulpunkt for et polynomium med *reelle* koefficienter, er α^* også nulpunkt for polynomiet.

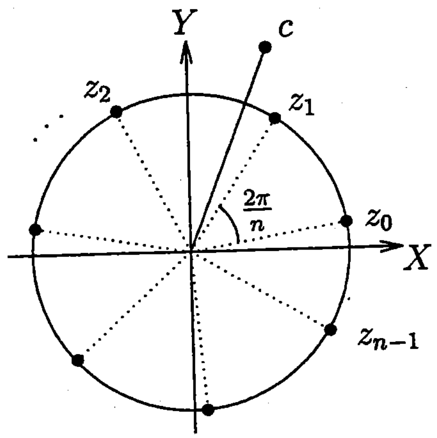
BEVIS: Lad $P(z)$ være et vilkårligt polynomium med komplekse koefficienter, og lad $P^*(z)$ være det polynomium, hvor hver koefficient i $P(z)$ erstattes af sin konjugerede. Da fås ved kombineret brug af reglerne i Sætning 5:

$$[P(z)]^* = P^*(z^*) . \tag{1}$$

(F.eks. er $(az^2 + bz + c)^* = a^*(z^*)^2 + b^*z^* + c^*$.) Hvis det specielt antages, at $P(z)$ har reelle koefficienter, er $P^*(z) = P(z)$, og af (1) følger da $[P(z)]^* = P(z^*)$. Hvis yderligere $P(\alpha) = 0$, hvor $\alpha \in \mathbb{C}$, følger $P(\alpha^*) = [P(\alpha)]^* = 0^* = 0$. Dermed er sætningen vist. □

Når vi f.eks. har indset, at i er en løsning til ligningen $z^2 + 1 = 0$, kan vi af Sætning 6 slutte, at også $i^* = -i$ er løsning. Bemærk, at sætningen ikke indeholder nogen oplysning, når α er *reel*, for da er $\alpha^* = \alpha$. – Det kan nævnes, at formel (1) og dens "reelle specialtilfælde" $[P(z)]^* = P(z^*)$ også gælder for en vilkårlig kompleks *bruden rational funktion*, dvs en brøk, hvis tæller og nævner begge er komplekse polynomier.

4. Den binome ligning.



Vi vil nu behandle en simpel algebraisk ligningstype af n'te grad, nemlig

$$z^n = c , \tag{1}$$

hvor $c \in \mathbb{C}$ er et givet tal, mens $z \in \mathbb{C}$ opfattes som ubekendt. Man siger, at (1) er en *binom* ligning, fordi den indeholder to led. Det viser sig, at for $c \neq 0$ har (1) netop n løsninger, som i den komplekse talplan ligger på en cirkel med centrum i nulpunktet og med samme indbyrdes afstand, dvs løsningerne danner for $n > 2$ en regulær n-kant, hvis omskrevne cirkel har centrum i nulpunktet. (For $n = 2$ er de to rødder hinandens modsatte.)

At det er sandt, indser vi ved at skrive z på formen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, hvor altså $r = |z|$ og $\theta = \arg z$. Da er $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, dvs hvis z skal tilfredsstille (1), skal der gælde

$$r^n = |c| , \qquad n\theta = \arg c ,$$

som er ensbetydende med

$$r = \sqrt[n]{|c|} , \qquad \theta = \frac{\arg c}{n} . \tag{2}$$

Her skal man huske, at $\arg c$ *kun er bestemt på nær et helt multiplum af* 2π. Hvis φ_0 er en bestemt værdi for $\arg c$, vil hvert af tallene $\varphi_0 + p \cdot 2\pi$ $(p \in \mathbb{Z})$ være en værdi for $\arg c$, dvs hvert af tallene

$$\theta_p = \frac{\varphi_0 + p \cdot 2\pi}{n} \qquad (p \in \mathbb{Z}) \tag{3}$$

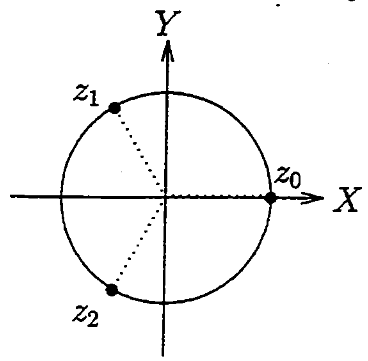
er iflg. (2) en brugbar værdi for $\arg z$. Det er dog nok at lade p antage n successive hele værdier, f.eks. $0, 1, 2, \cdots, n-1$, da θ_p udregnet af (3) giver samme tal for to p-værdier med indbyrdes afstand n. – Vi resumerer:

SÆTNING 7. Ligning (1) har løsningerne $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$, hvor

$$z_p = \sqrt[n]{|c|}\left[\cos\frac{\varphi_0 + p\cdot 2\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi_0 + p \cdot 2\pi}{n}\right] \qquad (p = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{4}$$

BEVIS: Fremgår af ovenstående. □

EKSEMPEL 7. Løsningerne til ligningen $z^3 = 1$ er iflg. (4) bestemt ved $|z| = \sqrt[3]{1} = 1$ og $\arg z = \frac{1}{3}(0 + p \cdot 2\pi)$ $(p = 0, 1, 2)$, dvs de er



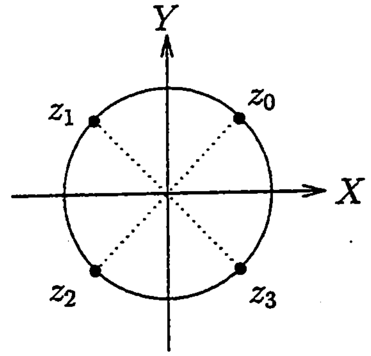
$$z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1 ,$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Bemærk, at Sætning 6 er opfyldt, idet der gælder $z_1^* = z_2$ (og $z_0^* = z_0$).

Løsningerne til ligningen $z^4+16=0$ er iflg. (4) bestemt ved
$|z|=\sqrt[4]{|-16|}=2$ og $\arg z=\frac{1}{4}(\pi+p\cdot 2\pi)$ $(p=0,1,2,3)$, dvs de er



$$\begin{aligned} z_0 &= 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) &&= \sqrt{2}+i\sqrt{2}\,,\\ z_1 &= 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) &&= -\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,,\\ z_2 &= 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) &&= -\sqrt{2}-i\sqrt{2}\,,\\ z_3 &= 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right) &&= \sqrt{2}-i\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Bemærk, at Sætning 6 er opfyldt, idet der gælder $z_0^*=z_3$ og $z_1^*=z_2$.

ØVELSE 6. Løs hver af følgende komplekse ligninger:

1) $z^6=1$, 2) $z^3=i$, 3) $z^3=2+11i$, 4) $z^4+13z^2+36=0$.

5. Andengradsligningen.

Betragt et vilkårligt komplekst *andengradspolynomium*, som er af formen

$$P(z)=az^2+bz+c \qquad (a,b,c\in\mathbb{C},\ a\neq 0). \tag{1}$$

Ved rent regnemæssige omskrivninger, som vi kender fra det reelle tilfælde, kan $P(z)$ bringes på formen

$$P(z)=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \tag{2}$$

Hvis vi vil løse den komplekse *andengradsligning* $P(z)=0$, ses af (2), at substitutionen $w=z+\dfrac{b}{2a}$ forenkler problemet til at løse den binome ligning

$$w^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{3}$$

Af foregående afsnit om den binome ligning fremgår, at en ligning af formen $w^2=k$ $(k\in\mathbb{C})$ har to løsninger, som er hinandens modsatte tal. Hvis vi betegner den ene af disse med $\sqrt{k}$ (NB! det er ligegyldigt, hvilken af de to rødder der kaldes $\sqrt{k}$), gælder altså $w^2=k \Leftrightarrow w=\pm\sqrt{k}$.

Bemærkning. Det understreges, at vi *ikke definerer kvadratroden af et komplekst tal på entydig måde,* sådan som vi gør for et reelt tal. Derfor er begrebet heller ikke særlig præcist. Man *kunne* godt fastlægge $\sqrt{k}$ entydigt, f.eks. ved at forlange, at dens argument skal ligge i intervallet $0\le\theta<\pi$. Det vil dog ikke hindre, at kvadratroden får visse "grimme" egenskaber, specielt vil den udvise diskontinuerte spring, også når k varierer kontinuert inden for $\mathbb{C}$. Og f.eks. for tallene $w_1=-1+i$ og $w_2=1-i$, der begge opfylder $w^2=-2i$, synes der ikke at være nogen grund til at udnævne den ene til en "rigtigere" værdi af $\sqrt{-2i}$ end den anden. Når vi trods denne mangel på præcision alligevel bruger skrivemåden $\sqrt{\ }$, er det, fordi visse resultater derved får en bekvem lighed med kendte reelle resultater. Det gælder bl.a. den formel for andengradsligningens løsning, vi er i færd med at udlede.

Idet altså $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ er de to komplekse tal, der ved kvadrering giver b^2-4ac, er de to løsninger til den omskrevne andengradsligning (3)

$$w=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Når vi til sidst substituerer tilbage og udtrykker resultatet i z, fremkommer den velkendte formel for andengradsligningens rødder:

$$\boxed{az^2+bz+c=0 \quad (a\neq 0) \quad\Longleftrightarrow\quad z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (4)}$$

Den vigtigste forskel mellem (4) og den enslydende reelle nulpunktsformel er, at (4) altid giver to komplekse løsninger (som dog for $b^2-4ac=0$ falder sammen). Specielt vil ethvert *reelt* andengradspolynomium have to nulpunkter, der *enten* begge er reelle (evt sammenfaldende) *eller* er imaginære og hinandens komplekst konjugerede.

Polynomiet $P(z)$ kan altid opløses i komplekse 1. grads faktorer iflg.

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) , \tag{5}$$

hvor z_1 og z_2 er nulpunkterne. Opløsningen gælder specielt i det reelle tilfælde med imaginære rødder, jfr. Eksempel 8 nedenfor.

EKSEMPEL 8. Vi vil løse andengradsligningen

$$z^2 - 4z + 13 = 0 .$$

Her er $a = 1, b = -4, c = 13$, hvoraf $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36$. Vi kan vælge at sætte $\sqrt{b^2 - 4ac} = 6i$ og får derefter af (4) ligningens rødder til $z = \frac{1}{2}(4 \pm 6i) = 2 \pm 3i$. Iflg. (5) er desuden

$$z^2 - 4z + 13 = (z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i) .$$

Vi vil dernæst løse andengradsligningen

$$z^2 - (4 + i)z + (5 + 5i) = 0 . \tag{6}$$

Her er $a = 1, b = -4 - i$, $c = 5 + 5i$, hvoraf

$$b^2 - 4ac = (4 + i)^2 - 4(5 + 5i) = 16 + 8i - 1 - 20 - 20i = -5 - 12i .$$

For at udregne $\sqrt{-5 - 12i}$ synes vi ikke at have andre muligheder end at gå den slagne vej, der hedder løsning af den binome ligning $w^2 = -5 - 12i$. Vi har

$$|b^2 - 4ac| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \qquad \text{og}$$

$$\arg(b^2 - 4ac) = \text{Arctan}(12/5) + \pi = 4.32 .$$

(Leddet "$+\pi$" skal med, fordi tallet $-5 - 12i$ ligger i 3. kvadrant. Tegn!) Vi kan således vælge at sætte

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{13} \cdot \left[\cos\frac{4.32}{2} + i \sin\frac{4.32}{2}\right] = -2.00 + 3.00\,i .$$

Her kunne man få en mistanke om, at resultatet *eksakt* er $-2 + 3i$. Mistanken bliver bekræftet, når man kvadrerer dette tal, dvs udregner $(-2 + 3i)^2$, idet det faktisk giver $-5 - 12i$. Andengradsligningen har således rødderne

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 + i \pm (-2 + 3i)}{2} , \quad \text{dvs} \qquad z_1 = 3 - i ,\ z_2 = 1 + 2i .$$

Iflg. (5) har vi desuden faktoropløsningen

$$z^2 - (4 + i)z + (5 + 5i) = (z - (3 - i))\,(z - (1 + 2i)) ,$$

hvilket man kan kontrollere ved at udregne højresiden på sædvanlig måde.

P.S. Løsningen af ligning (6) fortjener følgende kommentar: En reel andengradsligning med heltallige koefficienter vil normalt ikke have rationelle løsninger (selv om talløse matematikopgaver gennem tiderne godt kunne tyde på det modsatte!). Ligeså vil en kompleks andengradsligning med "komplekst heltallige" koefficienter normalt ikke have tilsvarende pæne, dvs komplekst heltallige, rødder. Når (2) har det, er det, fordi den er konstrueret sådan. Vigtigst er, at den løsningsmetode, der blev vist ovenfor, fungerer i alle tilfælde.

EKSEMPEL 9. En kompleks ligning som

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \tag{7}$$

kan opfattes som en *maskeret andengradsligning*. Vi løser den ved at sætte $w = z^3$, hvorved (7) bliver til

$$w^2 + 7w - 8 = 0, \qquad w = z^3 .$$

Her finder man på sædvanlig (reel) vis w-rødderne til $w = 1$ og $w = -8$, hvorefter (7) er ensbetydende med

$$z^3 = 1, \qquad z^3 = -8 .$$

Den første af disse ligninger løste vi i Eksempel 6. Den anden af ligningerne løses efter principperne i afsnit 4 (gennemfør dette!), og man finder

$$z = 2 \cdot \left[\cos\frac{\pi + p \cdot 2\pi}{3} + i \sin\frac{\pi + p \cdot 2\pi}{3}\right] \qquad (p = 0, 1, 2) .$$

Efter udregning af disse tre rødder, som vi betegner z_3, z_4 og z_5, kan samtlige rødder til ligning (7) nu opskrives:

$$z_0 = 1,\ z_1 = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2},\ z_3 = 1 + i\sqrt{3},\ z_4 = -2,\ z_5 = 1 - i\sqrt{3} .$$

Endnu en gang kan man konstatere, at Sætning 6 er opfyldt, idet $z_0^* = z_0$, $z_1^* = z_2$, $z_3^* = z_5$ samt $z_4^* = z_4$.

ØVELSE 7. Opspalt følgende polynomier i 1. grads faktorer:

1) $z^2 + z + 1$, 2) $z^2 + iz$, 3) $z^4 + \frac{15}{4}z^2 - 1$.

6. Ligning af n'te grad.

Det er nævnt, at indførelsen af de komplekse tal bl.a. skyldes ønsket om at kunne løse enhver algebraisk ligning til bunds. Vi skal nu se, at med $\mathbb{C}$ har vi virkelig fået dette ønske imødekommet.

Ved en algebraisk ligning forstår vi altså en ligning af formen $P(z) = 0$, hvor P er et *polynomium*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 .$$

Når $a_n \neq 0$, siges polynomiet at være af *grad* n.

SÆTNING 8. **Algebraens fundamentalsætning.** Ethvert polynomium (af grad $n \geq 1$) har mindst ét nulpunkt.

BEVISSKITSE: Lad $P(z)$ være givet ved udtrykket ovenfor. Vi har for $z \neq 0$:

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| .$$

For $|z| \to \infty$ vil den lange faktor nærme sig $|a_n|$, hvilket medfører, at $|P(z)| \to \infty$. Derfor vil den ikke-negative størrelse $|P(z)|$ opfattet som en funktion af (x, y) (hvor $z = x + iy$) have globalt minimum i et eller andet punkt z_0. Vi kan antage, at dette punkt er 0 (!), ellers behøver vi blot at betragte polynomiet $Q(z) = P(z + z_0)$ i stedet for $P(z)$. Det gælder om at vise, at mindsteværdien $\mathrm{Min}\,\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} = |P(0)| = |a_0|$ er lig med 0. Antag derfor indirekte, at den er > 0. Vi vil vise, at det fører til en modstrid.

Lad $p = \mathrm{Min}\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$, dvs p er den laveste forekommende grad ≥ 1 blandt de led i $P(z)$, som ikke falder bort. Vi har

$$P(z) = a_0 + a_p z^p \left[1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} z + \cdots + \frac{a_n}{a_p} z^{n-p} \right] .$$

Ideen er nu at vælge z således, at $a_p z^p$, og dermed i det væsentlige også den lange størrelse i udtrykket for $P(z)$, gør $|P(z)|$ mindre end $|a_0|$. Da har vi fundet en modstrid, sådan som vi ønskede.

Lad w_0 betegne en løsning til $a_0 + a_p w^p = 0$. Sæt endvidere $z = z(t) = w_0 t^{1/p}$, hvor $t \in \mathbb{R}$ er et *lille*, ikke-negativt tal. Nu er

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left| a_0 - a_0 t \left[1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} w_0 t^{1/p} + \cdots + \frac{a_n}{a_p} w_0^{n-p} t^{(n-p)/p} \right] \right| \\ &= |a_0| \left| (1-t) - t \left[b_1 t^{1/p} + \cdots + b_{n-p} t^{(n-p)/p} \right] \right| , \end{aligned}$$

hvor vi for nemheds skyld indførte nye betegnelser $b_n, \cdots, b_p$ for koefficienterne i [ ]-parentesen. Ved at vælge t tilstrækkelig tæt på 0 kan vi opnå, at udtrykket i [ ]-parentesen har modulus mindre end $\frac{1}{2}$. For sådanne t, som desuden kan antages at opfylde $0 < t < 1$, gælder

$$|P(z)| < |a_0|(1 - t + \tfrac{1}{2}t) = (1 - \tfrac{1}{2}t)|a_0| < |a_0| .$$

Dette er den ønskede modstrid, udledt ud fra antagelsen $P(0) = a_0 \neq 0$. Der må altså gælde $P(0) = 0$, dvs $P(z)$ har et nulpunkt, nemlig $z = 0$. □

SÆTNING 9. Ethvert polynomium af grad n (≥ 1) kan opløses i n førstegradsfaktorer.

BEVIS: Betragt polynomiet $P(z)$. Iflg. Sætning 8 har det et nulpunkt z_1. Ved division med $z - z_1$ op i $P(z)$ får vi $P(z) = (z - z_1)P_1(z) + k$, hvor $P_1(z)$ er et $(n-1)$'te grads polynomium og $k \in \mathbb{C}$ er en konstant, som kan findes ved indsættelse af $z = z_1$. Det giver $P(z_1) = 0 = 0 \cdot P_1(z_1) + k$, dvs $k = 0$ og dermed

$$P(z) = (z - z_1)P_1(z) .$$

Nu anvendes Sætning 8 igen, denne gang på $P_1(z)$, og vi får atter fraspaltet en 1. grads faktor $z - z_2$. Således fortsættes, indtil vi har fraspaltet n faktorer, således at kun konstanten a_n er tilbage som den sidste polynomiumsfaktor $P_n(z)$. Vi har fundet opspaltningen

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) ,$$

og sætningen er dermed bevist. □

Omtrent ensbetydende med Sætning 9 er følgende formulering: Et n'te grads polynomium har altid netop n rødder, når vi tæller dobbeltrødder med 2 gange, tredobbelte rødder 3 gange osv. Disse betegnelserne dækker følgende: En rod z_1 er f.eks. tredobbelt rod, når $z - z_1$ kan fraspaltes som faktor netop 3 gange, og man siger da, at roden z_1 har *multiplicitet* 3.

SÆTNING 10. Ethvert reelt polynomium kan opspaltes i et produkt af reelle førstegradspolynomier og (reelt) uopløselige andengradspolynomier.

BEVIS: Betragt opløsningen $P(z) = a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. Iflg. Sætning 6 kan faktorer svarende til imaginære nulpunkter samles to og to til reelle andengradspolynomier således:

$$(z-\alpha)(z-\alpha^*) = (z-\beta-i\gamma)(z-\beta+i\gamma) = (z-\beta)^2+\gamma^2,$$

hvor $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Faktorer svarende til reelle rødder er reelle førstegradspolynomier, og $a_n \in \mathbb{R}$. Dermed er sætningen vist. □

EKSEMPEL 10. Iflg. Eksempel 7 gælder

$$z^4+16 = (z-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(z+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(z+\sqrt{2}+i\sqrt{2})(z-\sqrt{2}+i\sqrt{2}).$$

Ved at samle dels 1. og 4. faktor, dels 2. og 3. faktor på højre side finder vi

$$\begin{aligned} z^4+16 &= \left((z-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2\right)\left((z+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2\right) \\ &= (z^2-2\sqrt{2}\,z+4)(z^2+2\sqrt{2}\,z+4). \end{aligned}$$

Derved har vi opspaltet polynomiet $P(z) = z^4+16$ i et produkt af (reelt) uopløselige andengradspolynomier. Da $P(z)$ ikke har nogen reelle rødder, er en sådan opløsning mulig iflg. Sætning 10.

7. Eksponentialfunktionen.

Ved en *kompleks funktion af en reel variabel* forstås en funktion af typen $f : \mathbb{D} \curvearrowright \mathbb{C}$ $(\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R})$. Eller udtrykt i ord: funktionen afhænger af en reel variabel t, der varierer i et eller andet område $\mathbb{D}$ på den reelle akse, typisk et interval, en halvlinie eller hele $\mathbb{R}$. Men funktionens *værdier* er komplekse tal, dvs den kan skrives på formen

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \qquad (t \in \mathbb{D}),$$

hvor f_1 og f_2 er sædvanlige reelle funktioner, defineret i $\mathbb{D}$. Egenskaber for en reel funktion, f.eks. at den kan have en grænseværdi for $t \to t_0$ eller $t \to \infty$ eller være begrænset, kontinuert, differentiabel, integrabel i et vist område, overføres uden problemer til en kompleks funktion. Betingelsen er i hvert enkelt tilfælde, at f_1 og f_2 har den egenskab, det drejer sig om. Specielt viser omskrivningen (eftervis den!)

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t} + i\frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}$$

efterfulgt af grænseovergangen $\Delta t \to 0$, at når f_1 og f_2 er differentiable, er også f differentiabel, idet dens differenskvotient er konvergent med grænseværdien

$$f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t). \tag{1}$$

Tilsvarende resultater gælder for ubestemt såvel som bestemt integration.

Vi vil nu udvide *eksponentialfunktionen* til komplekse eksponenter, dvs vi vil give mening til e^z for vilkårligt $z \in \mathbb{C}$. Herved ønsker vi at bevare de to fundamentale egenskaber hos den reelle eksponentialfunktion, dels "funktionalligningen"

$$e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}, \tag{2}$$

dels differentiationsresultatet

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}. \tag{3}$$

Først søger vi en funktion $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$. Inspireret af formlen

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

der ligesom (2) overfører en multiplikation i en addition, definerer vi forsøgsvis

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \,. \tag{4}$$

Ved differentiation iflg. (1) finder vi

$$\frac{de^{it}}{dt} = -\sin t + i \cos t = ie^{it} \,,$$

som stemmer med (3). Det tyder på, at definitionen var fornuftig.

Vi går videre til at definere eksponentialfunktionen e^z for vilkårlig kompleks eksponent $z = x + iy$. Iflg. (2) ligger det nær at kræve, at der skal gælde $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Vi ledes dermed til at opstille

DEFINITION 4. **Den komplekse eksponentialfunktion.** For vilkårlig $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ sættes

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \,. \tag{5}$$

Det er en konsekvens af definitionen, at $|e^z| = e^x$ og $\arg e^z = y$. Bemærk, at den komplekse eksponentialfunktion ikke som den reelle er enentydig, men derimod "periodisk med perioden $2\pi i$", idet der generelt gælder $e^{z+2\pi i} = e^z$. Alligevel er hovedegenskaberne (2) og (3) bevaret:

SÆTNING 11. For den komplekse eksponentialfunktion gælder generelt

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \,, \tag{6}$$

$$\text{og for } c \in \mathbb{C}: \quad \frac{de^{ct}}{dt} = ce^{ct} \,. \tag{7}$$

BEVIS: Udregning giver

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1 + iy_1} e^{x_2 + iy_2} \\ &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1 + x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} \qquad \text{(iflg. (5))} \\ &= e^{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \,, \end{aligned}$$

hvorved (6) er vist. For $c = a + ib$ er endvidere iflg. (1)

$$\begin{aligned} \frac{de^{ct}}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt) \\ &= (ae^{at} \cos bt - be^{at} \sin bt) + i(ae^{at} \sin bt + be^{at} \cos bt) \\ &= (a + ib)(e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt) \,, \end{aligned}$$

hvorved (7) er vist. □

Lad $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ samt $r = |z|$, $\theta = \arg z$. Iflg. (4) har vi

$$z = re^{i\theta} \,. \tag{8}$$

Denne skrivemåde for et komplekst tal er meget anvendt. Faktoren $e^{i\theta}$ kaldes *fasefaktoren* eller *fortegnet* for z.

EKSEMPEL 11. **Eulers formler.** Af $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ følger ved et fortegnsskift for y formlen $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$. Disse to formler giver videre ved addition, hhv subtraktion de såkaldte *Eulers formler:*

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \,, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \,. \tag{9}$$

Her er det nærliggende at minde om de *hyperbolske funktioner* cosh og sinh, der blev defineret i Grundbog i Matematik side 199. Med let ændrede betegnelser lød definitionen således:

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \,, \quad \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \,. \tag{10}$$

Ved Eulers formler (9) samt ved formlerne (10) kan man endvidere *udvide definitionerne af såvel de trigonometriske som de hyperbolske funktioner til hele det komplekse område.* Højresiderne er nemlig defineret ikke alene for $y \in \mathbb{R}$, men for vilkårlig $y \in \mathbb{C}$, $y = u + iv$! Derved ses specielt at gælde

$$\cos y = \cosh iy \,, \qquad i \sin y = \sinh iy \,.$$

EKSEMPEL 12. **Reelle integraler udledt ved brug af kompleks integration.** Af (7) følger $\int e^{ct}dt = \frac{1}{c}e^{ct} \quad (c \in \mathbb{C})$, eller mere udførligt

$$\int e^{(a+ib)t}dt = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t} ,$$

som er ensbetydende med

$$\begin{aligned}\int (e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt)dt\\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2}(e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt)\\ &= \frac{ae^{at}\cos bt + be^{at}\sin bt}{a^2+b^2} + i\frac{-be^{at}\cos bt + ae^{et}\sin bt}{a^2+b^2} .\end{aligned}$$

Af reglen nævnt i Eksempel 5 følger da

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{1}{a^2+b^2}\left(ae^{at}\cos bt + be^{at}\sin bt\right) ,$$

$$\int e^{at}\sin bt\,dt = \frac{1}{a^2+b^2}\left(-be^{at}\cos bt + ae^{at}\sin bt\right) .$$

Disse integraler kan også udregnes på sædvanlig måde, idet man benytter delvis integration et par gange. Men ovenstående metode er lettere.

EKSEMPEL 13. **Kompleks rækkeudvikling.** Betragt Maclaurinrækkerne for cos og sin, sådan som de er formuleret i Grundbog i Matematik side 244. Idet der for alle $j = 0, 1, 2, \cdots$ gælder

$$(-1)^j = i^{2j} = \frac{1}{i}i^{2j+1} ,$$

kan vi omskrive de to rækkeudviklinger på følgende måde:

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}x^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j)!}(ix)^{2j} ,$$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}x^{2j+1} = \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(ix)^{2j+1} .$$

Heraf fås, når vi tillader os at regne på rækkerne, som om det var endelige summer:

$$\begin{aligned}\cos x + i\sin x &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j)!}(ix)^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}(ix)^{2j+1}\\ &= 1 + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{24}(ix)^4 + \cdots + ix + \frac{1}{6}(ix)^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ix)^j}{j!} ,\end{aligned}$$

svarende til e^{ix}, når Maclaurinrækken for exp benyttes. Dette kan vi tage som endnu et tegn på, at definitionen $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ er fornuftig.