1 Opgave 1

1.1 Delopgave a

Jeg udregner det karakteristiske polynomien

$$\det(M - \lambda E) = \tag{1}$$
$$(-(a_1 + a_3) - \lambda)(-a_2 - \lambda) - a_1 a_2 = \tag{2}$$
$$\lambda^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2 a_3 \tag{3}$$

Diskriminanten for dette andengrads polynomien er

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 - 4a_2 a_3 = \tag{4}$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 - 2a_2 a_3 = \tag{5}$$
$$a_1^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + (a_2 - a_3)^2 \tag{6}$$

Da $a_1, a_2, a_3 > 0$, er den eneste størrelse, der kunne være negativ i formlen for diskriminanten ovenfor, er størrelsen $a_2 - a_3$. Uanset værdien af $a_2 - a_3$, har vi imidlertid, at $(a_2 - a_3)^2$ er ikke-negativ. Derfor udtrykker formlen ovenfor diskriminanten som en sum af strengt positive og en enkelt ikke-negativ størrelse. Derfor er diskriminanten strengt positiv, hvilket vil sige, at det karakteristiske polynomien har to forskellige, reelle rødder λ_1 og λ_2. Altså har M disse to forskellige, reelle egenværdier.

1.2 Delopgave b

Vi ved, at et andengrads polynomien $f(x)$ med rødderne x_1, x_2 altid kan faktoriseres som

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \tag{7}$$

Altså ved vi i vores tilfælde, at

$$\det(M - \lambda E) = \lambda^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2 a_3 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \tag{8}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\lambda^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2 a_3 = \lambda^2 + (-(\lambda_1 + \lambda_2))\lambda + \lambda_1 \lambda_2 \tag{9}$$

hvilket er ækvivalent med

$$(a_1 + a_2 + a_3)\lambda + a_2 a_3 = (-(\lambda_1 + \lambda_2))\lambda + \lambda_1 \lambda_2 \tag{10}$$

Eftersom et førstegrads polynomien på formen

$$f(x) = ax + b \tag{11}$$

er unikt bestemt af koefficienterne a og b, har vi altså nu, at

$$a_1 + a_2 + a_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \qquad a_2 a_3 = \lambda_1 \lambda_2 \tag{12}$$

hvilket er ækvivalent med

$$-(a_1 + a_2 + a_3) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad a_2 a_3 = \lambda_1 \lambda_2 \tag{13}$$

Eftersom $a_1, a_2, a_3 > 0$, har vi altså

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0, \qquad 0 < \lambda_1 \lambda_2 \tag{14}$$

Fra

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \tag{15}$$

får vi, at mindst ét af λ_1 og λ_2 må være strengt negativ, da summen af to ikke-negative tal aldrig kan blive strengt negativt.

Fra

$$0 < \lambda_1 \lambda_2 \tag{16}$$

får vi, at λ_1 og λ_2 har samme fortegn.

Altså har vi nu alt i alt, at både λ_1 og λ_2 er strengt negative.

1.3 Delopgave c

Jeg udregner Mq_1 koordinatvis

$$(Mq_1)_1 = \tag{17}$$
$$-(a_1 + a_2)(a_2 + \lambda_1) + a_1 a_2 = \tag{18}$$
$$\lambda_1(-a_1 - a_2 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1}) \tag{19}$$
$$\tag{20}$$
$$(Mq_1)_2 = \tag{21}$$
$$a_1(a_2 + \lambda_1) - a_1 a_2 = \tag{22}$$
$$\lambda_1 a_1 \tag{23}$$

Altså har vi, at

$$Mq_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Fra delopgave b har vi, at

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_2 a_3 \tag{25}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\lambda_2 = \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} \tag{26}$$

Altså får vi, at

$$-a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} = -a_1 - a_3 - \lambda_2 \tag{27}$$

Fra delopgave b har vi yderligere, at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(a_1 + a_2 + a_3) \tag{28}$$

hvilket er ækvivalent med

$$\lambda_1 + a_2 = -a_1 - a_3 - \lambda_2 \tag{29}$$

Altså får vi nu alt i alt, at

$$-a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} = -a_1 - a_3 - \lambda_2 = a_2 + \lambda_1 \tag{30}$$

hvilket giver os, at

$$Mq_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -a_1 - a_3 - \frac{a_2 a_3}{\lambda_1} \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 q_1 \tag{31}$$

Altså er q_1 en egenvektor for M hørende til egenværdien λ_1.

1.4 Delopgave d

Eftersom M er en 2×2 matrix med to forskellige egenværdier, så er M diagonaliserbar. Altså har vores system ifølge sætning 4 på side 125 i kursusbogen om differentialligning den fuldstændige løsning

$$x(t) = \tag{32}$$

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) q_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) q_2 = \tag{33}$$

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(\lambda_2 t) \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.5 Delopgave e

Vi har generelt, at

$$x(0) = c_1 \exp(\lambda_1 \cdot 0) q_1 + c_2 \exp(\lambda_2 \cdot 0) q_2 = c_1 q_1 + c_2 q_2 \tag{35}$$

I vores tilfælde har vi yderligere, at

$$x(0) = \begin{pmatrix} K_{B0} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Vores begyndelsesbetingelse giver os altså følgende system til bestemmelse af c_1 og c_2:

$$\begin{pmatrix} K_{B0} \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Vi kunne omskrive dette til et matrix problem og bruge rækkeoperationer på totalmatricen til at bestemme c_1 og c_2. Jeg synes dog, at dette system er tilpas simpelt til, at det er lettere at angribe direkte uden at gå gennem matrix repræsentationen. Vi har, at

$$0 = c_1 a_1 + c_2 a_1 \tag{38}$$

hvilket er ækvivalent med, at

$$c_2 = -c_1 \tag{39}$$

Vi har yderligere, at

$$K_{B0} = c_1(a_2 + \lambda_1) + c_2(a_2 + \lambda_2) \tag{40}$$

Indsætter vi $c_2 = -c_1$ heri, får vi

$$K_{B0} = c_1(a_2 + \lambda_1) - c_1(a_2 + \lambda_2) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{41}$$

hvilket er ækvivalent med

$$c_1 = \frac{K_{B0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{42}$$

Da $c_2 = -c_1$, får vi yderligere, at

$$c_2 = \frac{K_{B0}}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{43}$$

Altså har vi, at den partikulære løsning til begyndelsesbetingelsen er givet som

$$x(t) = \exp(\lambda_1 t)\frac{K_{B0}}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} a_2 + \lambda_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \exp(\lambda_2 t)\frac{K_{B0}}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} a_2 + \lambda_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Altså har vi, at

$$K_B(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{45}$$

hvor

$$A_1 = \frac{K_{B0}(a_2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{46}$$

$$\tag{47}$$

$$A_2 = \frac{K_{B0}(a_2 + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{48}$$

1.6 Delopgave f

1.7 Delopgave g

Fra delopgave e får vi disse to formler for a_2:

$$a_2 = \frac{A_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{K_{B0}} - \lambda_1 \tag{49}$$

$$\tag{50}$$

$$a_2 = \frac{A_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{K_{B0}} - \lambda_2 \tag{51}$$