Modul 1: forelæsning 8
Dominerende egenværdi og positive matricer. Affine modeller.

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Dominerende egenværdi

Definition

Lad $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ være egenværdierne for $n \times n$ matricen $\mathbf{A}$ (hver opskrevet et antal gange som svarer til multipliciteten). Egenværdien λ_1 kaldes

- *dominerende*, hvis $|\lambda_1| > |\lambda_i| \qquad (i = 2, \dots, n)$,
- *svagt dominerende*, hvis $|\lambda_1| \geq |\lambda_i| \qquad (i = 2, \dots, n)$.

Sætning

Lad $\mathbf{A}$ være en diagonaliserbar matrix med en dominerende egenværdi λ_1 og tilhørende egenvektor $\mathbf{q}_1$. Lad $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ og sæt $\mathbf{v}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{v}_0$. Så findes et tal c så

$$\frac{1}{\lambda_1^t} \mathbf{v}_t \to c\, \mathbf{q}_1 \qquad \text{for } t \to \infty.$$

Bevis: Vi har en basis bestående af egenvektorer $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ så

$$\mathbf{v}_0 = c_1 \mathbf{q}_1 + \dots + c_n \mathbf{q}_n$$
$$\mathbf{v}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{v}_0 = c_1 \lambda_1^t \mathbf{q}_1 + \dots + c_n \lambda_n^t \mathbf{q}_n.$$

Dividér nu med λ_1^t:

$$\frac{1}{\lambda_1^t} \mathbf{v}_t = c_1 \frac{\lambda_1^t}{\lambda_1^t} \mathbf{q}_1 + \dots + c_n \frac{\lambda_n^t}{\lambda_1^t} \mathbf{q}_n$$
$$= c_1 \mathbf{q}_1 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{q}_n \to c_1 \mathbf{q}_1 + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = c_1 \mathbf{q}_1.$$

Positive matricer

Definition

En $n \times n$ matrix **A** kaldes

- *ikke-negativ* ($\mathbf{A} > 0$), hvis alle elementer er ≥ 0,
- *positiv* ($\mathbf{A} \gg 0$), hvis alle elementer er > 0.

Vigtige eksempler:

- Overgangsmatricer.
- Lesliematricer.

Perron-Frobenius sætning

Sætning: Perron-Frobenius

PF 1 Hvis **A** er positiv, så gælder:

- **A** har en *positiv* og dominerende egenværdi λ_1 med en tilhørende *positiv* egenvektor $\mathbf{q}_1$.
- For given $\mathbf{v}_0$ findes der et tal c så

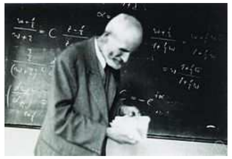
$$\frac{1}{\lambda_1^t}\mathbf{v}_t = \frac{1}{\lambda_1^t}\mathbf{A}^t\mathbf{v}_0 \to c\,\mathbf{q}_1 \qquad \text{for } t \to \infty.$$

PF 2 Hvis **A** er ikke-negativ, så har **A** en *ikke-negativ* og svagt dominerende egenværdi λ_1 med en tilhørende *ikke-negativ* egenvektor $\mathbf{q}_1$.

PF 3 Hvis **A** er ikke-negativ og der findes m så $\mathbf{A}^m$ er positiv, så gælder konklusionerne i **PF 1** om **A**.

Hvem og hvad

- Oskar Perron, 1880-1975, tysk matematiker



- Georg Frobenius, 1849-1917, tysk matematiker

- Perron-Frobenius sætning er et ret dybtliggende resultat.
- Sætningen bruges inden for sandsynlighedsregning, dynamiske systemer, økonomi, demografi, søgemaskiner, seedning af fodboldhold . . .

Eksempel

Hunner i to klasser

- x_t: antal 0-årige hunner i år t.
- y_t: antal (mindst) 1-årige hunner i år t.
- Model:

$$\mathbf{v}_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{v}_t.$$

Krystalkugle (uden at lave fremskrivninger)

Vi kan forudsige, at

- bestanden af unge såvel som gamle hunner vokser med tiden med en faktor (eller vækstrate) der nærmer sig 2.5,
- fordelingen af bestanden af unge og gamle hunner med tiden nærmer sig en bestand med 3 gange så mange unge som gamle hunner.

Derfor virker krystalkuglen

1. Matricen
$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.5 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$$
er positiv.
2. Egenværdierne er $\lambda_1 = 2.5$ (dominerende) og $\lambda_2 = -0.1$.
3. En egenvektor hørende til λ_1 er $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. PF1 siger at $\frac{1}{2.5^t}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \to c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ for $t \to \infty$.
5. Konsekvenser:
$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = 2.5\,\frac{x_{t+1}/2.5^{t+1}}{x_t/2.5^t} \to 2.5\,\frac{c\cdot 3}{c\cdot 3} = 2.5 \qquad \text{for } t \to \infty.$$
$$\frac{x_t}{y_t} = \frac{x_t/2.5^t}{y_t/2.5^t} \to \frac{c\cdot 3}{c\cdot 1} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \text{for } t \to \infty.$$

Vigtige typer af ikke-negative matricer: overgangsmatricer

Definition

En matrix
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$
kaldes en *overgangsmatrix*, hvis $p_{ij} \geq 0$ og summen af alle elementer i hver søjle er lig 1.

Bemærk

- Ofte fortolkes p_{ij} som sandsynligheden for overgang fra tilstand j til tilstand i.
- At summen af alle tallene i søjle j er 1 betyder, at overgangen fra tilstand j *skal* ske til en af de mulige tilstande $1, \ldots, n$.

Egenskaber ved overgangsmatricer

Sætning: Konsekvens af PF3 for overgangsmatricer

Lad $\mathbf{P}$ være en overgangsmatrix.

- $\lambda = 1$ er en svagt dominerende egenværdi for $\mathbf{P}$.
- Hvis der findes m så $\mathbf{P}^m \gg 0$, så er $\lambda = 1$ dominerende egenværdi for $\mathbf{P}$, og for given $\mathbf{v}_0$ findes c sådan at
$$\mathbf{v}_t = \mathbf{P}^t\mathbf{v}_0 \to c\,\mathbf{q},$$
hvor $\mathbf{q}$ er en egenvektor hørende til egenværdien 1.

Ligevægt for matrix

- En vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ er en ligevægt for en matrix $\mathbf{A}$, hvis $\mathbf{Av} = \mathbf{v}$.
- Sætningen ovenfor giver: Enhver overgangsmatrix $\mathbf{P}$ har en ligevægt. (Hvis $\mathbf{q}$ er en egenvektor hørende til egenværdien 1 så gælder $\mathbf{Pq} = \mathbf{q}$.)

Eksempel: epidemimodellen

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{A}$ er en overgangsmatrix.
- Første søjle i $\mathbf{A}$ indeholder sandsynlighederne for at en rask forbliver rask, bliver syg, dør eller bliver helbredt. (Osv.)
- $\mathbf{A}$ har egenværdierne $0.7, 0.8$ og 1 (dobbeltrod).
- $\lambda_1 = 1$ er en positiv og *svagt dominerende* egenværdi.
- Egenvektorerne til egenværdien 1 er alle vektorer af formen
$$s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ t \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Eksempel: Modificeret epidemimodel

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_t, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.01 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.99 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

- Ændringer:
  10% af de helbredte mister immuniteten og overgår til "raske".
  1% af de døde var alligevel ikke døde og overgår til "raske".
- $\mathbf{B}$ har egenværdierne $0.71 \pm 0.12\,i, 0.97$ og 1.
- $\mathbf{B}$ er en overgangsmatrix og $\mathbf{B}^3 \gg 0$, så PF3 gælder.
- $\lambda_1 = 1$ er en positiv og dominerende egenværdi.
- Egenvektorerne til egenværdien 1 er alle vektorer af formen

$$s(0.14, 0.10, 0.97, 0.19) \quad s \in \mathbb{R}.$$

Med 300 personer i alt vil

$$\mathbf{v}_t \to \frac{300(0.14, 0.10, 0.97, 0.19)}{0.14 + 0.10 + 0.97 + 0.19} = (31, 21, 207, 41).$$

Vigtige typer af ikke-negative matricer: Lesliematricer

Definition: Lesliematrix

Matricen $\mathbf{M}$ kaldes en *Lesliematrix*, hvis

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$$

hvor $b_0, \dots, b_n, p_0, \dots, p_{n-1}$ er positive tal og $p_n \geq 0$.

(Matricerne optræder i forbindelse med aldersopdelt populationsvækst.
Da kaldes tallene $b_0, \dots, b_n$ fødselsrater og $p_0, \dots, p_n$ overlevelsesrater.)

Aldersopdelt populationsvækst

I en dyrepopulation opdeles hunnerne efter alder i $n+1$ klasser

$$\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{antal 0-årige i år } t \\ \text{antal 1-årige i år } t \\ \vdots \\ \text{antal } \geq n\text{-årige i år } t \end{array}$$

Fødselsrater	**Overlevelsesrater**
0-årige får b_0 hununger	0-årige har sandsynlighed p_0 for at overleve
1-årige får b_1 hununger	1-årige har sandsynlighed p_1 for at overleve
$\vdots$	$\vdots$
n-årige får b_n hununger	n-årige har sandsynlighed p_n for at overleve

Aldersopdelt populationsvækst – fortsat

Ligninger

$$\begin{aligned} x_{0,t+1} &= b_0 x_{0,t} + b_1 x_{1,t} + \dots + b_{n-1} x_{n-1,t} + b_n x_{n,t} \\ x_{1,t+1} &= p_0 x_{0,t} \\ x_{2,t+1} &= \qquad p_1 x_{1,t} \\ &\vdots \\ x_{n,t+1} &= \qquad\qquad p_{n-1} x_{n-1,t} + p_n x_{n,t}. \end{aligned}$$

Ligninger på matrixform $\quad \mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_t$, hvor

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$$

Egenskaber ved Lesliematricer

Sætning

Lad $\mathbf{M}$ være en $(n+1)\times(n+1)$ Leslie-matrix. Da gælder

$$\mathbf{M}^{n+1} \gg 0.$$

Ifølge PF3 gælder derfor, at $\mathbf{M}$ har en positiv dominerende egenværdi λ_1, en positiv egenvektor $\mathbf{q}_1$, og for given $\mathbf{v}_0$ findes der c så der gælder

$$\frac{1}{\lambda_1^t}\mathbf{v}_t \to c\,\mathbf{q}_1 \qquad \text{for } t \to \infty,$$

hvor $\mathbf{v}_t = \mathbf{M}^t\mathbf{v}_0$.

☞ Vi vil illustrere denne sætning ved at gennemgå et konkret eksempel på en model for aldersopdelt populationsvækst med brug af R.

Dom. egenværdi, -vektor og fremskrivninger

- Lad $\mathbf{v}_0 = (x_{0,0}, x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^\top$.
- Beregn $\mathbf{v}_t = (x_{0,t}, x_{1,t}, \ldots, x_{n,t})^\top$ vha. $\mathbf{v}_t = \mathbf{M}^t\mathbf{v}_0$.
- Hvad betyder resultatet $\frac{1}{\lambda_1^t}\mathbf{v}_t \to c\,\mathbf{q}_1$?

Perron Frobenius: Konsekvens 1

Væksten i klasserne tilnærmer den dominerende egenværdi for store t:

$$\frac{x_{0,t+1}}{x_{0,t}} \simeq \lambda_1, \quad \frac{x_{1,t+1}}{x_{1,t}} \simeq \lambda_1, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n,t+1}}{x_{n,t}} \simeq \lambda_1.$$

Perron Frobenius: Konsekvens 2

Fordelingen mellem klasserne tilnærmer en tilhørende egenvektor for store t:

$$\left(\frac{x_{0,t}}{x_{n,t}}, \ldots, \frac{x_{n-1,t}}{x_{n,t}}, 1\right) \simeq \left(\frac{q_0}{q_n}, \ldots, \frac{q_{n-1}}{q_n}, 1\right) \quad \text{dvs.} \quad \frac{1}{x_{n,t}}\mathbf{v}_t \simeq \frac{\mathbf{q}}{q_n},$$

hvor $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ er en til λ_1 hørende egenvektor.

Eksempel: Model med tre aldersklasser

- $x_{0,t}$: antal 0-årige hunkaniner i år t
- $x_{1,t}$: antal 1-årige hunkaniner i år t
- $x_{2,t}$: antal 2-årige hunkaniner i år t
- ingen ældre kaniner

Aldersspecifikke fødselsrater $b_0 = 0.4, \quad b_1 = 1.1, \quad b_2 = 0.6.$

Aldersspecifikke overlevelsesrater $p_0 = 0.8, \quad p_1 = 0.5, \quad p_2 = 0.$

Fører til modellen $\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_t$ med

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}.$$

Eksempel vha. R

```
> M<-matrix(c(0.4,0.8,0,1.1,0,0.5,0.6,0,0),3);
> v0<-c(100,0,0)
> V <- matrix(v0,3)
> v <- v0; for (k in (1:10)) {v <- M%*%v; V <- cbind(V,v)};
> V
     [,1] [,2] [,3]  [,4]   [,5]    [,6]     [,7]
[1,]  100   40  104 100.8 141.44 170.240 216.7552
[2,]    0   80   32  83.2  80.64 113.152 136.1920
[3,]    0    0   40  16.0  41.60  40.320  56.5760
         [,8]      [,9]    [,10]    [,11]
[1,] 270.4589 339.78573 425.9394 534.2973
[2,] 173.4042 216.36710 271.8286 340.7515
[3,]  68.0960  86.70208 108.1836 135.9143
```

Eksempel vha. R – fortsat

```
# bestemmelse af dominerende egenværdi ved succesive kvotienter
> V[,(2:11)]/V[,(1:10)]
     [,1] [,2]      [,3]      [,4]      [,5]     [,6]
[1,]  0.4  2.6 0.9692308 1.4031746 1.2036199 1.273233
[2,]  Inf  0.4 2.6000000 0.9692308 1.4031746 1.203620
[3,]  NaN  Inf 0.4000000 2.6000000 0.9692308 1.403175
         [,7]     [,8]     [,9]    [,10]
[1,] 1.247762 1.256330 1.253553 1.254398
[2,] 1.273233 1.247762 1.256330 1.253553
[3,] 1.203620 1.273233 1.247762 1.256330
```


KØBENHAVNS UNIVERSITET

Eksempel vha. R – fortsat

```
# bestemmelse af egenvektor
# ved forholdet mellem 1., 2. og 3. koordinater
> for (k in (1:10)) {print(V[,k]/V[3,k])};
[1] Inf NaN NaN
[1] Inf Inf NaN
[1] 2.6 0.8 1.0
[1] 6.3 5.2 1.0
[1] 3.400000 1.938462 1.000000
[1] 4.222222 2.806349 1.000000
[1] 3.831222 2.407240 1.000000
[1] 3.971729 2.546466 1.000000
[1] 3.919003 2.495524 1.000000
[1] 3.937191 2.512661 1.000000
```


KØBENHAVNS UNIVERSITET

Eksempel: Konklusioner

- Dominerende og positiv egenværdi $\lambda_1 \simeq 1.25$.
- Tilhørende positiv egenvektor

$$\mathbf{q}_1 \simeq \begin{pmatrix} 3.94 \\ 2.51 \\ 1.00 \end{pmatrix}.$$

- Sammenligning med λ_1 og $\mathbf{q}_1$ bestemt direkte vha. R:

```
> eigen(M)$values
[1]  1.2542086+0.0000000i -0.4271043+0.0945392i -0.4271043-0.094539
> Q <- eigen(M)$vectors
> Q[,1]/Q[3,1]
[1] 3.932598+0i 2.508417+0i 1.000000+0i
```


KØBENHAVNS UNIVERSITET

Eksempel: Nationaløkonomisk model

Lad C_t, I_t og Y_t betegne forbruget, investeringerne og nationalproduktet i år t.

Modellen opstilles ud fra følgende økonomiske antagelser:

- Nationalproduktet er summen af forbruget og investeringerne:

$$Y_t = C_t + I_t.$$

- Forbruget året efter udgøres af en vis del af nationalproduktet et år samt et konstant forbrug:

$$C_{t+1} = aY_t + b.$$

- Investeringerne året efter udgøres af en vis del af forbrugsstigningen et år:

$$I_{t+1} = c\left(C_{t+1} - C_t\right).$$

- a, b og c er positive parametre, og det antages endvidere at $a < 1$.

Eksempel: Nationaløkonomisk model – fortsat

Ligningerne leder til en 3×3 model

$$\begin{pmatrix} C_{t+1} \\ I_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ -c & 0 & ac \\ -c & 0 & a+ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ bc \\ bc+b \end{pmatrix}$$

som kan reduceres til en 2×2 model

$$\begin{pmatrix} C_{t+1} \\ I_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ (a-1)c & ac \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ bc \end{pmatrix}.$$

- Hvad sker der med $\binom{C_t}{I_t}$ når $t \to \infty$?
- Svaret følger i miniprojektet!

Affin afbildning: ligevægt

Definition

En afbildning f kaldes *affin*, hvis der gælder

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ matrix og $\mathbf{b}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$.

Definition

En vektor $\mathbf{x}^*$ kaldes en *ligevægt* for en affin afbildning f, hvis $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.

Sætning

Lad $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ være en affin afbildning. Hvis $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ har en invers matrix, da har f netop én ligevægt $\mathbf{x}^*$ givet ved

$$\mathbf{x}^* = -(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b}.$$

Bevis

$\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{b} = \mathbf{x}^* \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{E}\mathbf{x}^* = -\mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x}^* = -\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = -(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b}.$

Affin afbildning: stabilitet af ligevægt

Definition

Lad $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ være en affin afbildning. Lad $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ og definér

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t) \qquad \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots.$$

En ligevægt $\mathbf{x}^*$ for den affine afbildning kaldes *stabil*, hvis $\mathbf{x}_t \to \mathbf{x}^*$ for $t \to \infty$, uanset hvilken startvektor $\mathbf{x}_0$ der vælges.

Sætning

Antag at alle egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ for $n \times n$ matricen $\mathbf{A}$ opfylder

$$|\lambda_k| < 1 \qquad \text{for } k = 1, \ldots, n.$$

Da gælder:

- Afbildningen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ har netop én ligevægt

$$\mathbf{x}^* = -(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b}.$$

- Ligevægten $\mathbf{x}^*$ er stabil.