

## Introduktion

Min R kode med output er vedhæftet

## 1 Opgave 1: Kapital

### 1.1 Delopgave a)

Lad  $x_t$  være vores kapital størrelse i år  $t$  og lad  $r_t$  være renten i år. Hvis vi ingen penge bruger i år  $t$ , så vil vores kapital året efter (altså år  $t + 1$ ) være på

$$x_{t+1} = (1 + r_t)x_t \quad \checkmark \quad (1)$$

kroner. Hvis vi udtrækker  $u_t$  af kapitalen i løbet af år  $t$ , så vil vores kapital året efter - ifølge min logik - være på

$$x_{t+1} = (1 + r_t)(x_t - u_t) \quad (2)$$

kroner, da vi ikke burde få rente af den kapital, vi udtrækker. Dette svarer dog ikke helt til opgaveteksten, hvor vi tilsyneladende får rente på vores kapital størrelse ved starten af år  $t$  (før udtrækket  $u_t$ ), da formelen her er

$$x_{t+1} = (1 + r_t)x_t - u_t \quad (3)$$

Jeg ved ikke meget om renter, så måske er min forståelse forkert og opgavetekstens differensligning rent faktisk en mere korrekt beskrivelse af, hvordan renter typisk fungerer.

### 1.2 Delopgave b)

Ved konstant forretning og linært voksende udtrækning fås differensligningen

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t - u \quad \checkmark \quad (4)$$

Ifølge boks 10 på side 195 i kursusbogen, er den fuldstændige løsning til denne differensligning givet ved

$$x_t = k(1 + r)^t + \frac{-u}{1 - (1 + r)} = k(1 + r)^t + \frac{u}{r} \quad \checkmark \quad (5)$$

Et beløb skal stå i et helt år for at opnå renten  $r_t \cdot x_t$  så du får først renten tilskrevet med udgangen af år  $t$ . Det er typisk en underforstået antagelse at udtrækket først sker med udgangen af året, altså sådan at kapitalen  $x_t$  har stået uberørt i et helt år og 31/12 sker der så 2 ting: 1. Renten tilskrives. 2. Der trækkes  $u_t$  kroner ud og så starter det nye år  $t+1$  med en den nye kapital  $x_{t+1}$  som så er som beskrevet :o)

hvor

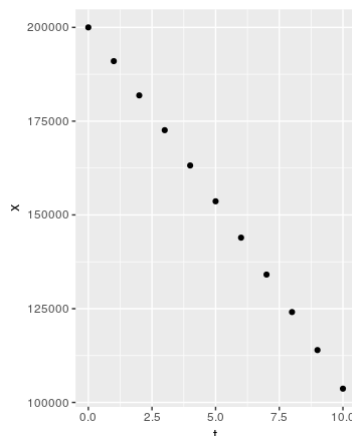
$$k = x_0 - \frac{-u}{1 - (1 + r)} = x_0 - \frac{u}{r} \quad \checkmark \quad (6)$$

Det er klart ud fra formelen for den fuldstændige løsning af differensligningen, at  $x_t$  bliver negativ på et tidspunkt, hvis og kun hvis  $k < 0$ . Dette er tilfældet, hvis og kun hvis

$$x_0 < \frac{u}{r} \quad \checkmark \quad (7)$$

Hvis vi for eksempel har, at renten er på 1 procent og vi trækker 1000 kroner ud årligt, så skal vores startkapital være på 100000 kroner eller derover, hvis vi aldrig skal gå i overtræk.

Her er et plot for værdierne af  $x_t$  for  $t = 0, \dots, 10$ , når  $r = 0.015$ ,  $u = 12000$  og  $x_0 = 200000$ :



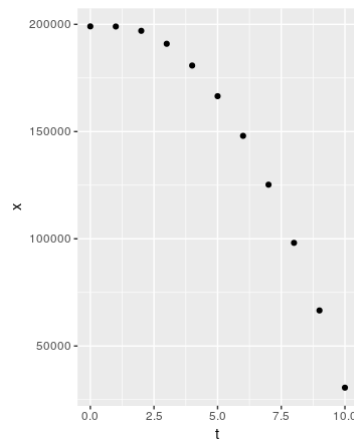
Fint! 😊

### 1.3 Delopgave c)

Fra boks 8 side 195 i kursusbogen fås, at den fuldstændige løsning til differensligningen med konstant forretning og lineært voksende udtræk er givet ved:

$$x_t = (1 + r)^{t-1} \left( x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{-(u + \alpha\tau)}{(1 + r)^\tau} \right) \quad \checkmark \quad (8)$$

Her er et plot for værdierne af  $x_t$  for  $t = 0, \dots, 10$ , når  $r = 0.015$ ,  $u = 1000$ ,  $\alpha = 4000$  og  $x_0 = 200000$ :



Fint! 😊

Jeg har brugt uniroot i r til numerisk at bestemme, at hvis  $r = 0.015$ ,  $u = 1000$  og  $x_0 = 200000$ , så er  $x_10 > 0$ , hvis og kun hvis  $\alpha < 4652.81$ . ✓

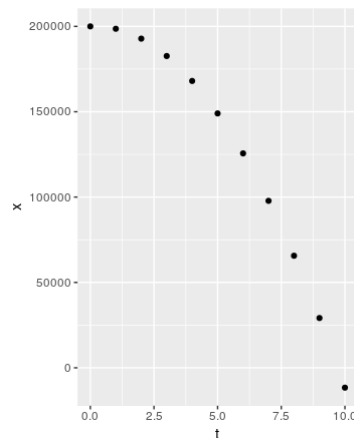
## 1.4 Delopgave d)

Vi får nu differensligningen

$$x_{t+1} = (1 + r_0 r^t) x_t - (u + \alpha t)$$

Fint, men i denne opgave er der ikke noget udtræk :o)

Her er et plot for værdierne af  $x_t$  for  $t = 1, \dots, 10$ , når  $r_0 = 0.02$ ,  $r = 0.9$ ,  $u = 1000$ ,  $\alpha = 4000$  og  $x_0 = 200000$ :



## 1.5 Delopgave e)

Vi har nu denne differensligning

$$x_{t+1} = \exp(r_0 r^t) x_t \quad (10)$$

hvor  $r_0 = 0.02$  og  $r = 0.9$ . Ifølge boks 4 på side 194 i kursusbogen, har denne differensligning den fuldstændige løsning

$$x_0 E_t \quad \checkmark \quad (11)$$

hvor  $x_0 \in \mathbb{R}$  og

$$E_t = \prod_{\tau=0}^{t-1} (\exp(r_0 r^\tau)) = \exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} r_0 r^\tau\right) = \exp\left(r_0 \frac{1-r^t}{1-r}\right) \quad (12)$$

Altså har differensligningen den fuldstændige løsning

$$x_0 \exp\left(r_0 \frac{1-r^t}{1-r}\right) \quad (13)$$

Den specifikke løsning for  $x_0 = 200000$  er klar ud fra den fuldstændige løsning.

**Fint! 😊**

## 2 Opgave b: Nationaløkonomisk model

Lad

$$A = \begin{bmatrix} a & a \\ (a-1)c & ac \end{bmatrix} \quad (14)$$

Fra miniprojekt 1 ved vi, at det karakteristiske polynomien for  $A$  er givet ved

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 + (-a(c+1))\lambda + ac \quad \checkmark \quad (15)$$

For  $a = 0.8$  og  $c = 3$  har dette polynomien rødderne

$$\lambda_1 = \frac{6}{5}, \quad \lambda_2 = 2 \quad \checkmark \quad (16)$$

som altså er egenverdier for  $A$ . For at finde en egenvektor  $q$  hørende til  $\lambda_1$  skal vi løse ligningen

$$(A - \lambda_1 E)q = 0 \quad (17)$$

Det kan vi gøre ved rækkeoperationer

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Altså er egenvektorrummet for  $\lambda_1$  givet ved

$$\{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_1 = 2q_2\} \quad (22)$$

Alle vektorer i dette rum er egenvektorer for  $A$  hørende til egenværdien  $\lambda_1$ . Et eksempel på en sådan egenvektor er altså  $v = (1, 2)$ .

På tilsvarende vis kan vi løse ligningen

$$(A - \lambda_2 E)q = 0$$

for at finde ud af, at egenvektorrummet for  $\lambda_2$  er givet ved

$$\{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3q_1 = 2q_2\} \quad (24)$$

Alle vektorer i dette rum er egenvektorer for  $A$  hørende til egenværdien  $\lambda_2$ . Et eksempel på en sådan egenvektor er altså  $w = (3, 2)$ .

Fra miniprojekt 1 ved jeg, at den givne nationaløkonomis ligevægt givet ved

$$\begin{pmatrix} C^* \\ I^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Fint! 😊

For  $a = 0.8$  og  $b = 6$  har modellen altså denne ligevægt

$$\begin{pmatrix} C^* \\ I^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$



Her laver du sgu en fejl, Asger, det er omvendt altså  $v = \langle 2, 1 \rangle$  den opfylder at 2 gange andenkoordinaten giver førstekoordinaten, som du kræver

Her sker det igen ...

Altså har den nationaløkonomiske model den fuldstændige løsning

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} = c_1 \left(\frac{6}{5}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 2^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

hvor  $c_1$  og  $c_2$  er vilkårlige reelle tal. For at bestemme den partikulære løsning med  $(C_0, I_0) = (40, 9)$  skal vi løse ligningen

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 9 \end{pmatrix} = c_1 \left(\frac{6}{5}\right)^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 2^0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

hvilket er ækvivalent med ligningen

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{Fint! 😊} \quad (29)$$

Vi kan for eksempel opstille totalmatricen for denne ligning og bruge rækkeoperationer til at finde ud af, at

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

Metode ok :o)

Indsætter vi disse konstanter i den fuldstændige løsning, så får vi den søgte partikulære løsning.

### 3 Opgave 3: Epidemimodel

#### 3.1 Delopgave a

Der er tale om et autonomt system af differensligninger, da tiden  $t$  kun påvirker værdien af  $(S_{t+1}, I_{t+1})$  gennem værdien af  $(S_t, I_t)$ . Der er ikke tale om et lineært system af differensligninger, da  $S_{t+1}$  ikke er en lineær funktion af  $(S_t, I_t)$ , da størrelserne  $S_t^2$  og  $S_t I_t$  indgår (dette kan ses ved at gange parantesen ud).

Fint! 😊

#### 3.2 Delopgave b, c & d

Lad  $0 < N, b$  og  $0 < a, b < 1$ .

$(S^*, I^*) \in \mathbb{R}^2$  er en ligevægt for modellen, hvis og kun hvis

$$S^* = (1 - a)S^* + bS^* \left(1 - \frac{S^* + I^*}{N}\right) \quad (31)$$

$$I^* = (1 - c)I^* + aS^* \quad (32)$$



Det er let at se, at uanset værdien af  $a, b, c$  og  $N$ , så vil  $(S^*, I^*) = (0, 0)$  altid være en løsning af disse ligninger. Ved hjælp af kedsommelige regnerier kan vi desuden komme frem til, at hvis  $(S^*, I^*) \neq (0, 0)$ , så er  $(S^*, I^*)$  en løsning til ovenstående ligningssystem, hvis og kun hvis

$$S^* = c\Gamma(N, a, b, c), \quad I^* = a\Gamma(N, a, b, c) \quad (33)$$

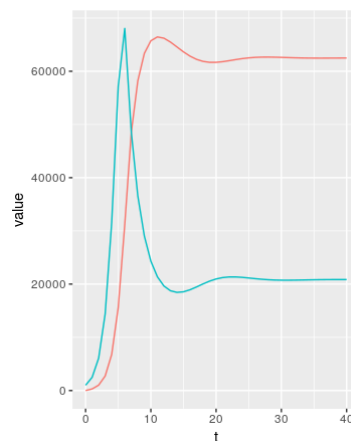
hvor vi har defineret

$$\Gamma(N, a, b, c) = \frac{N(b-a)}{b(a+c)} \quad (34)$$

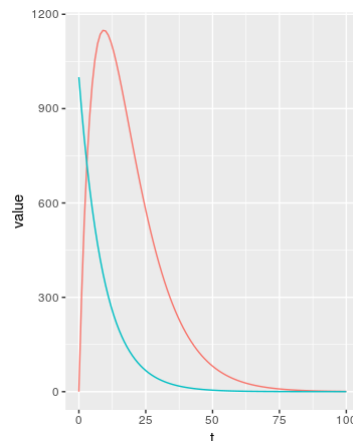
Vi ser, at modellen har en ligevægt  $(S^*, I^*)$ , hvor  $0 < S^*, I^*$ , hvis og kun hvis  $b > a$ .

Fint! 😊

Dette passer også med, at sætter vi  $N = 100000, a = 0.3, b = 1.8$  og  $c = 0.1$  og fremskriver værdierne af  $(S_t, I_t)$  ud fra startvektoren  $(S_0, I_0) = (1000, 0)$ , så får vi dette plot



hvor den blå graf er antallet af syge og den røde er antallet af immune. Her er  $a > b$  og modellen ser ud til at have en ligevægt med  $S^*$  omkring 21000 og  $I^*$  omkring 62000. Laver vi samme plot med  $b = 0.2$ , så får vi



Her er  $b < a$  og modellen ser ud til at have ligevægten  $(S^*, I^*) = (0, 0)$ .

Lad os beregne alle ligevægte for  $N = 100000$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 1.8$  og  $c = 0.1$ . Som sagt har vi altid ligevægten  $(S^*, I^*) = (0, 0)$ . Bruger vi det generelle resultat fra linje (34-35), får vi desuden ligevægten  $(S^*, I^*) = (20833.\overline{33}, 62500)$ . Dette passer med, hvad vi så i plottet ovenfor.

Jeg vil nu finde ud af, om disse ligevægte er stabile. Jeg udregner funktionalmatricen for vores epidemimodel til

$$\begin{bmatrix} 1 - a + b - b\frac{2S+I}{N} & -\frac{bS}{N} \\ 1 - c & a \end{bmatrix} \quad \text{Fint! 😊} \quad (35)$$

Indsætter vi  $N = 100000$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 1.8$ ,  $c = 0.1$ ,  $S = 0$  og  $I = 0$  i funktionalmatricen, får vi matricen

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Den har egenverdierne 2.5 og 0.3, hvilket vil sige, at ligevægten  $(0, 0)$  ikke er lokalt stabilt, da  $1 \leq |2.5|$ .

Indsætter vi  $N = 100000$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 1.8$ ,  $c = 0.1$ ,  $S = 20833.\overline{33}$  og  $I = 62500$  i funktionalmatricen, får vi matricen

$$\begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Den har egenverdierne  $0.4625 + 0.557i$  og  $0.4625 - 0.557i$ , som begge har modulus  $\sqrt{0.4625^2 + 0.557^2} = 0.725 < 1$ . Altså er ligevægten  $(20833.\overline{33}, 62500)$  lokalt stabil.



### 3.3 Delopgave e

Det er vist delopgave 3f dette her :o)

Lad  $0 < N, b$  og  $0 < a, b < 1$ .

$(S^*, I^*) \in \mathbb{R}^2$  er en ligevægt for den modificerede model, hvis og kun hvis

$$S^* = (1 - a)S^* + b(S^*)^2 \left(1 - \frac{S^* + I^*}{N}\right) \quad (38)$$

$$I^* = (1 - c)I^* + aS^* \quad (39)$$

Igen er det let at se, at uanset værdien af  $a, b, c$  og  $N$ , så vil  $(S^*, I^*) = (0, 0)$  altid være en løsning af disse ligninger. ✓

For at bestemme andre løsninger til systemet, kan vi starte med at omskrive til det ækvivalente ligningssystem

$$0 = -a + bS^* \left(1 - \frac{S^* + I^*}{N}\right) \quad (40)$$

$$I^* = \frac{c}{a}S^*$$

Men her er en lille fejl idet det er "omvendt":  $I^* = a/c \cdot S^*$  :o)

Indsætter vi udtrykket for  $I^*$  fra den nederste ligning i den øverste, får vi

$$0 = -a + bS^* \left(1 - \frac{S^* + \frac{c}{a}S^*}{N}\right) \quad (42)$$

Vi ser at dette er en andengradsligning og omskriver den ved hjælp af en masse regnerier til den konventionelle form

$$0 = \left(\frac{bc}{aN} + \frac{b}{N}\right)(S^*)^2 + bS^* + a \quad (43)$$

Hermed får vi diskriminanten

$$d = b \left(\frac{bN - 4(a + c)}{N}\right) \quad (44)$$

som er skarpt større end 0, hvis og kun hvis

$$bN > 4(a + c) \quad (45)$$

Hvis dette er opfyldt, så får vi altså - udover nulløsningen - to løsninger givet ved

$$S^* = \frac{b \pm \sqrt{d}}{2 \left(\frac{bc}{aN} + \frac{b}{N}\right)} \quad (46)$$

$$I^* = \frac{c}{a}S^*$$

Her sker det igen :o)

Disse er forskellige fra nulløsningen, hvis og kun hvis

$$\sqrt{d} \notin \{-b, b\} \quad (48)$$

Hvis linje (42) og (45) er sande, så har modellen altså to ligevægte, der er forskellige fra  $(0, 0)$ .

PS: Jeg tror, at jeg har regnet forkert i denne delopgave, da betingelser, jeg kommer frem til, ikke ser ud til at være ækvivalente med den betingelse på relationen mellem  $a, b, c$  og  $N$ , som opgaveteksten siger, at vi skal gøre os. Jeg vil dog mene, at min fremgangsmåde burde føre til det korrekte resultat, hvis ellers jeg kunne finde ud af at regne ordentligt :)

Ja, der er et par småsvipsere som jeg nu har udpeget, men ellers er din metode helt fin :o)

Kære Asger

Igen et superflot projekt hvor du igen demonstrer dit store overblik.

Bevares, det er ikke fejlfrit, men så har jeg også lidt at lave... :o)

De bedste hilsner, Thomas

## R code for question 1

```
library(tidyverse)
```

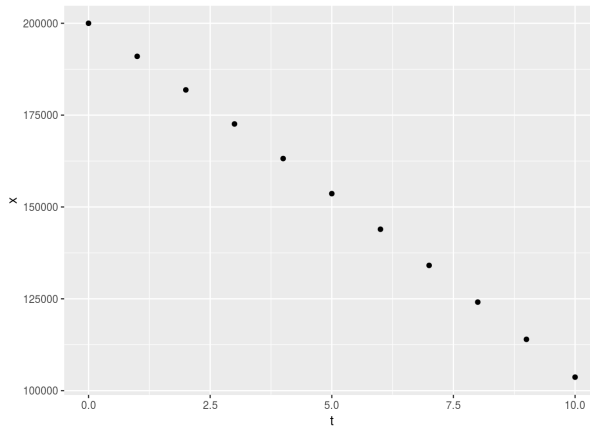
```
## — Attaching packages — tidyverse 1.2.1 —
```

```
## ✓ ggplot2 2.2.1   ✓ purrr  0.2.4
## ✓ tibble  1.4.2   ✓ dplyr  0.7.4
## ✓ tidyr   0.8.0   ✓ stringr 1.3.0
## ✓ readr   1.1.1   ✓ forcats 0.3.0
```

```
## — Conflicts — tidyverse_conflicts() —
## ✖ dplyr::filter() masks stats::filter()
## ✖ dplyr::lag()    masks stats::lag()
```

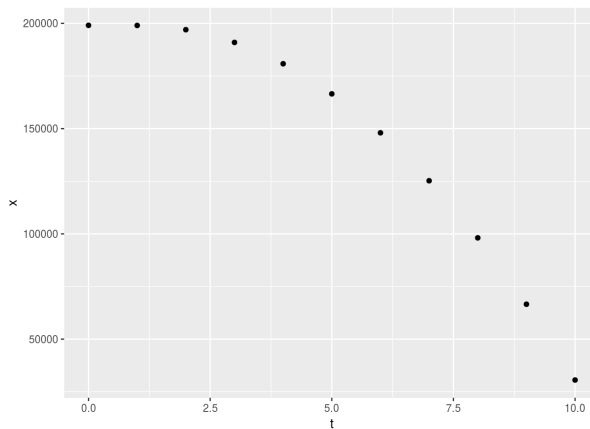
```
make_constant <- function(r,u,x0) {
  k <- x0 - u/r
  Vectorize(function(t) {
    k*(1+r)**t + u/r
  })
}

data_frame(t = 0:10) %>%
  mutate(x = make_constant(0.015, 12000, 200000)(t)) %>%
  ggplot(aes(t, x)) +
  geom_point()
```



```
make_linout <- function(r,u,alp,x0) {
  out <- function(tau) {
    u+alp*tau
  }
  summand <- function(tau) {
    (-out(tau))/(1+r)**tau
  }
  Vectorize(function(t) {
    s <- sum(map_dbl(0:(t-1), summand))
    ((1+r)**(t-1))*(x0 + s)
  })
}

data_frame(t = 0:10) %>%
  mutate(x = make_linout(0.015, 1000, 4000, 200000)(t)) %>%
  ggplot(aes(t, x)) +
  geom_point()
```



```
uniroot(function(alp) {make_linout(0.015, 1000, alp, 200000)(10)},
  lower=4000, upper=5000)$root
```

```
## [1] 4652.808
```

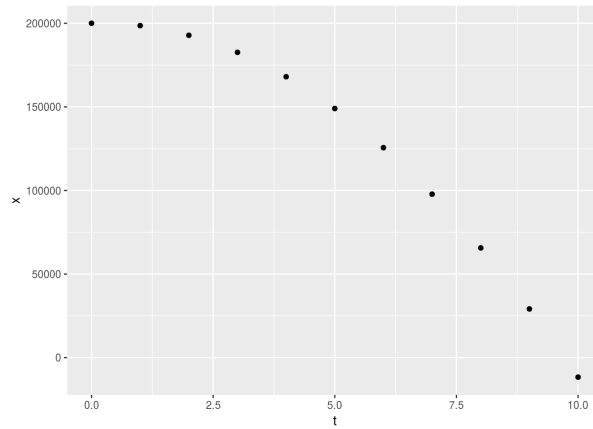
```

make_decr_rent <- function(r0, r, u, alpha) {
  function(xt, t) {
    (1 + r0*(r**t))*xt - (u + alpha*t)
  }
}

decr_rent <- make_decr_rent(0.02,0.9,1000,4000)
xs <- vector(length = 11)
xs[1] <- 200000
for (i in 1:10) {
  xs[i+1] <- decr_rent(xs[i],i)
}

data_frame(t = 0:10, x = xs) %>%
  ggplot(aes(t, x)) +
  geom_point()

```



## R code for question 2

```

a <- 0.8
b <- 10000
c <- 3
c(-a*(c+1), 1+a*c)

```

```
## [1] -3.2 3.4
```

```

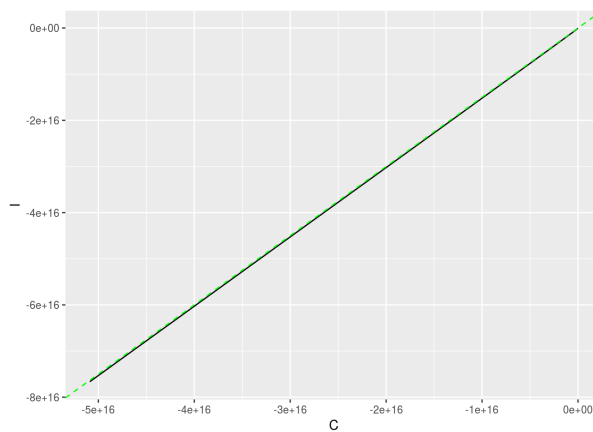
A <- matrix(c(a, a, (a-1)*c, a*c), nrow=2, byrow = T)
add <- c(b, b*c)

move <- function(now) {
  A%*%now + add
}

evolve <- function(x0, n) {
  xs <- matrix(ncol = 2, nrow = n + 1)
  xs[1,] <- x0
  for (i in 2:(n+1)) {
    xs[i,] <- move(xs[i-1,])
  }
  xs <- data.frame(xs)
  colnames(xs) <- c('C', 'I')
  round(xs, 2)
}

evolve(c(1000000, -5000000000000000), 10) %>%
  ggplot(aes(C,I)) +
  geom_path() +
  geom_abline(intercept = 0,
              slope = 3/2,
              color = 'green',
              linetype='dashed')

```



## R code for question 3

```

make_movement <- function(a,b,c,N) {
  function(now) {
    st <- now[1]
    it <- now[2]
    nexts <- (1-a)*st + b*st*(1 - (st+it)/N)
    nexti <- (1-c)*it + a*st
    c(nexts,nexti)
  }
}

evolve <- function(move, x0, n) {
  xs <- matrix(ncol = 2, nrow = n + 1)
  xs[1,] <- x0
  for (i in 2:(n+1)) {
    xs[i,] <- move(xs[i-1,])
  }
  xs <- data.frame(xs)
  colnames(xs) <- c('S', 'I')
  xs$t <- 0:n
  round(xs, 2)
}

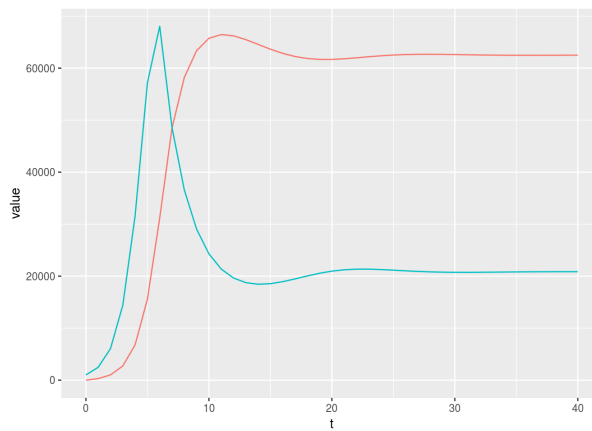
N <- 100000
a <- 0.3
b <- 1.8
c <- 0.1

```

```

evolve(make_movement(a, b, c, N),
       c(1000,0),
       40) %>%
  gather(key, value, S, I) %>%
  ggplot(aes(t, value, color=key)) +
  geom_line() +
  theme(legend.position = 'none')

```

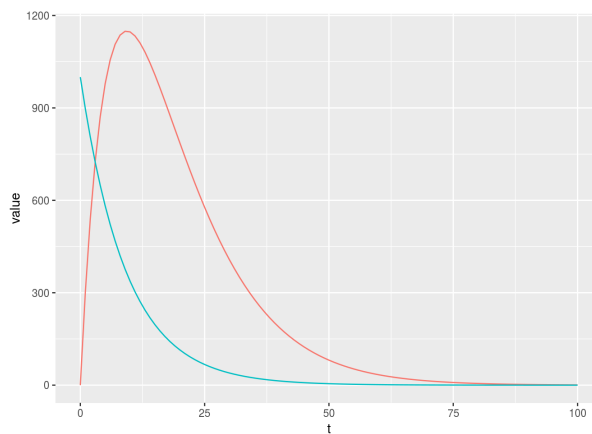


```

b <- 0.2

evolve(make_movement(a, b, c, N),
       c(1000,0),
       100) %>%
  gather(key, value, S, I) %>%
  ggplot(aes(t, value, color=key)) +
  geom_line() +
  theme(legend.position = 'none')

```



```
gamma <- function(a,b,c,N) {  
  N*(b-a)/(b*(a+c))  
}  
  
b <- 1.8  
  
Sstar <- c*gamma(a, b, c, N)  
Istar <- a*gamma(a, b, c, N)  
  
funcmat <- function(a, b, c, N, Sstar, Istar) {  
  A11 <- 1-a+b-b*((2*Sstar + Istar)/N)  
  A12 <- -b*Sstar/N  
  A21 <- 1-c  
  A22 <- a  
  matrix(c(A11,A21,A12,A22), nrow=2)  
}  
  
A1 <- funcmat(a, b, c, N, Sstar, Istar)  
A2 <- funcmat(a, b, c, N, 0, 0)  
A1
```

```
##      [,1] [,2]  
## [1,] 0.625 -0.375  
## [2,] 0.900  0.300
```

A2

```
##      [,1] [,2]  
## [1,]  2.5  0.0  
## [2,]  0.9  0.3
```

eigen(A1)

```
## eigen() decomposition  
## $values  
## [1] 0.4625+0.5577578i 0.4625-0.5577578i  
##  
## $vectors  
##              [,1] [,2]  
## [1,] 0.1516970+0.5206781i 0.1516970-0.5206781i  
## [2,] 0.8401681+0.0000000i 0.8401681+0.0000000i
```

eigen(A2)

```
## eigen() decomposition  
## $values  
## [1] 2.5 0.3  
##  
## $vectors  
##              [,1] [,2]  
## [1,] 0.9255470  0  
## [2,] 0.3786328  1
```

Mod(eigen(A1)\$values)

```
## [1] 0.7245688 0.7245688
```