

Modul 5: forelæsning 1

Ikke-lineære systemer af differentialligninger

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

7. juni 2018 — Dias 1/47

Oversigt

- ❶ (Ikke-lineære) systemer af differentialligninger
- ❷ Ligevægt og stabilitet
Funktionalmatricen
- ❸ Vekselvirkende populationer
Konkurrerende arter
Rovdyr-byttedyr
Symbiose
- ❹ Makroøkonomisk model
- ❺ Generelt om matematisk modellering
- ❻ En model for foderoptagelse hos køer

Kort oversigt over kurset

- Lineære differensligninger: $x_{t+1} = ax_t + b_t$ (Modul 2)
- Generelle differensligninger: $x_{t+1} = f(t, x_t)$ (Modul 2)
- Lineære systemer af differensligninger: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t$ (Mod. 1, 2)
- Generelle systemer af differensligninger: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t)$ (Modul 2)
- Lineære differentialligninger: $x' = ax + b(t)$ (Modul 3)
- Generelle differentialligninger: $x' = f(t, x)$ (Modul 3)
- Lineære systemer af differentialligninger: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ (Modul 4)
- Generelle systemer af differentialligninger: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ (Modul 5)

Dias 2/47

Tre modeller som inspiration

Vekselvirkende populationer

To populationer af størrelse $M = M(t)$ og $N = N(t)$:

$$\frac{dM}{dt} = M(r_M + aM + bN)$$

$$\frac{dN}{dt} = N(r_N + cM + dN)$$

De 3 typer vekselvirkning

- I $b < 0$ og $c < 0$: Konkurrerende arter
- II $b < 0$ og $c > 0$: Rovdyr-byttedyr
- III $b > 0$ og $c > 0$: Symbiose

Gennemgås i detaljer senere.

Tre modeller som inspiration

Makroøkonomisk model

- $k = k(t)$: Kapitalen til tiden t
- $c = c(t)$: Forbruget til tiden t

$$\frac{dk}{dt} = p(k) - c - (n + g)k$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{p'(k) - \rho - \theta g}{\theta} \cdot c$$

hvor

- $p(k)$ er produktionen som funktion af kapitalen. Denne funktion antages at være konkav, dvs. $p''(k) < 0$.
- ρ , θ , g og n er økonomiske parametre.

Gennemgås senere.

Dias 5/47

Systemer af differentialligninger

System af 2 differentialligninger

(kaldes også 2 samhørende differentialligninger):

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)) \end{aligned}$$

System af n differentialligninger

(kaldes også n samhørende differentialligninger):

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) &= f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

På vektorform

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Dias 7/47

Tre modeller som inspiration

Foderoptagelse hos køer (simpel udgave)

V : mængden af sukker; BC : mængden af store partikler cellulose:

$$\frac{dV}{dt} = h_1 b_{KV} + h_4 b_{GV} - (f_V + l_A)V$$

$$\frac{dBC}{dt} = h_4 b_{GC} - (f_C g_1 \left(\frac{BC}{V}\right) + l_B) BC$$

hvor $g_1(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

En mere avanceret model gennemgås senere.

Dias 6/47

Løsning af systemer af differentialligninger

Definition Løsning

En *partikulær* løsning \mathbf{x} er en vektorfunktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ som opfylder

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Den *fuldstændige* løsning til $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ er alle mulige løsninger til ligningen. (Ofte kan denne ikke *opskrives* eksplicit.)

Eksistens og entydighed Givet et "tidspunkt" t_0 og en (start)vektor $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$. To spørgsmål:

- Findes der en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$?
- Findes der mere end én løsning $\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$?

Sætning Eksistens og entydighed

Antag at funktionerne f_1, \dots, f_n har kontinuerte partielle afledede.

For ethvert "tidspunkt" t_0 og hver (start)vektor \mathbf{x}_0 findes der netop én løsning $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ til ligningen $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, som opfylder $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Dias 8/47

“Alternativer” til løsning

For de fleste *ikke*-lineære systemer af differentialligninger kan man *ikke* opskrive løsningen.

To muligheder

- Undersøge opførslen i det lange løb: Ligevægt og stabilitet. (Kun for autonome systemer.) Gennemgås i dag.
- Numerisk løsning. Gennemgås næste gang.

Dias 9/47

Ligevægt for systemer af 2 differentialligninger

Autonomt system af 2 differentialligninger:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

En vektor $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ er en ligevægt, hvis

$$f(x^*, y^*) = 0 \quad \text{og} \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Dias 11/47

Ligevægt for systemer af differentialligninger

Definition Autonomt system af differentialligninger

Et system af differentialligninger kaldes *autonomt*, hvis det er på formen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

dvs. hvis højresiden ikke afhænger direkte af t .

Definition Ligevægt

En vektor \mathbf{x}^* kaldes en *ligevægt* for et autonomt system af differentialligninger $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, hvis

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Bemærk Hvis $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ er konstant, så er $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$. En ligevægt for et autonomt system er altså en *konstant* løsning til systemet.

Dias 10/47

Stabilitet af ligevægte

Definition Stabil ligevægt

En ligevægt \mathbf{x}^* for et autonomt system $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ kaldes *stabil*, hvis der gælder:

For hvert $t_0 \in \mathbb{R}$ og for alle vektorer \mathbf{x}_0 i nærheden af \mathbf{x}^ vil løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ opfylde*

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^* \quad \text{for } t \rightarrow \infty.$$

(Løst sagt: Hvis løsningen $\mathbf{x}(t)$ nærmer sig ligevægten \mathbf{x}^* i det lange løb.)

For lineære systemer (se Modul 4):

Sætning Stabilitet af ligevægt for $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Antag \mathbf{A} har n forskellige (komplekse) egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Ligevægten $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ for systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ er stabil, når alle \mathbf{A} 's egenverdier har *negativ realdel* (dvs. $\operatorname{Re} \lambda < 0$ for alle egenverdier λ).

Dias 12/47

Stabilitet af ligevægt for systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Spørgsmål Hvordan afgør vi stabilitet af en ligevægt \mathbf{x}^* ?

Svar Brug *funktionalmatricen*.

Definition Funktionalmatrix

For det autonome system $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ med $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ er *funktionalmatricen*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{1,x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f'_{1,x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n,x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f'_{n,x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

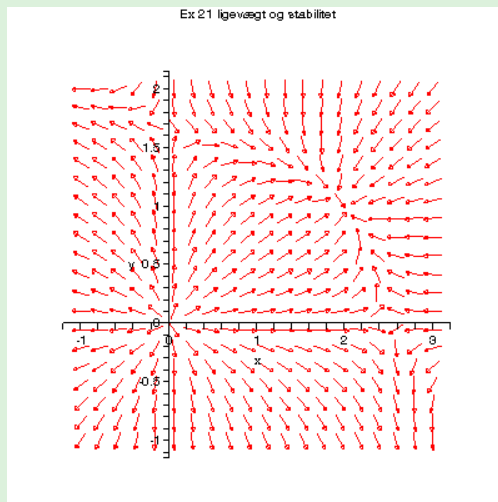
Sætning Stabilitet af ligevægt for $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

- Hvis alle egenværdier for $D(\mathbf{f})(\mathbf{x}^*)$ har negativ realdel, så er ligevægten \mathbf{x}^* stabil.
- Hvis blot én af egenværdierne for $D(\mathbf{f})(\mathbf{x}^*)$ har positiv realdel, så er ligevægten \mathbf{x}^* ikke stabil.

Dias 13/47

Eksempel 21: Retningsfelt

Bemærk opførslen i nærheden af den stabile ligevægt $(2, 1)$.
[Ligevægtene $(0, 0)$, $(\frac{5}{2}, 0)$ og $(0, \frac{5}{3})$ er ustabile]



Dias 15/47

Stabilitet af ligevægt for system af 2 differentialligninger

Autonomt system

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

Funktionalmatricen

$$D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Sætning Stabilitet af ligevægt (2 differentialligninger)

- Hvis begge egenværdier for $D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x^*, y^*)$ har negativ realdel, så er ligevægten (x^*, y^*) stabil.
- Hvis blot én af egenværdierne for $D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x^*, y^*)$ har positiv realdel, så er ligevægten (x^*, y^*) ikke stabil.

Dias 14/47

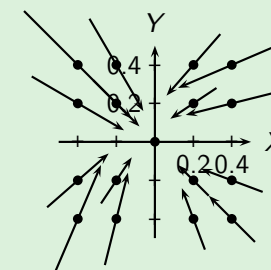
Opgave 5.6: Retningsfelt nær $(0, 0)$

$$\begin{aligned} x' &= -x - xy \\ y' &= -y + xy \end{aligned}$$

Udregning af $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ i f.eks. $(x, y) = (0.4, 0.2)$:

$$x' = -0.4 - 0.4 \cdot 0.2 = -0.48 \quad \text{og} \quad y' = -0.2 + 0.4 \cdot 0.2 = -0.12.$$

Vektorerne $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ afsat i nærheden af ligevægten $(0, 0)$:

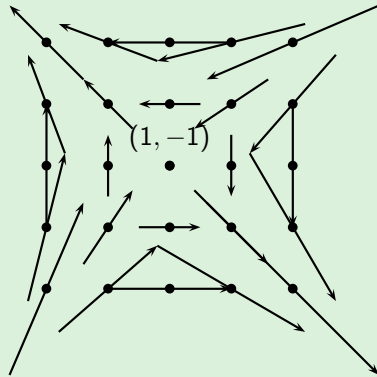


Dias 16/47

Opgave 5.6: Retningsfelt nær $(1, -1)$

$$\begin{aligned}x' &= -x - xy \\ y' &= -y + xy\end{aligned}$$

Vektorerne $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ afsat i nærheden af ligevægten $(1, -1)$:



Dias 17/47

Hvorfor gælder sætningen om stabilitet?

Hvordan ser det ud for $n = 1$?

- Systemet er én ligning: $x' = f(x)$. Ligevægt x^* dvs. $f(x^*) = 0$.
- Idé: Brug lineær approksimation $f(x) \simeq f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = a(x - x^*)$.
- Betragt andet system $x' = a(x - x^*)$.
- Bestem fuldstændig løsning $x(t) = x^* + ce^{at}$.
- Hvis $a < 0$ gælder $x(t) = x^* + ce^{at} \rightarrow x^*$ for $t \rightarrow \infty$.

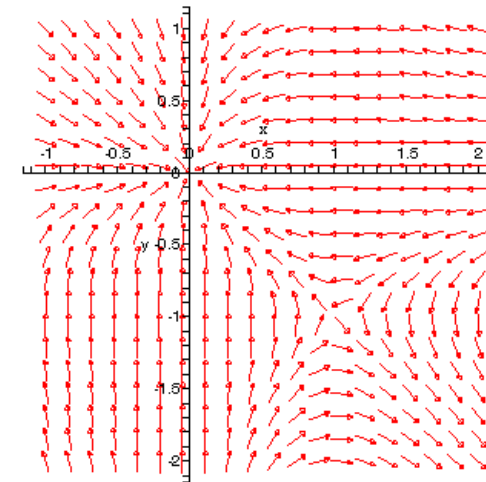
Hvordan ser det ud for $n > 1$?

- Systemet er $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ligevægt \mathbf{x}^* dvs. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.
- Idé: Brug lineær approksimation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D(\mathbf{f})(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$.
- Betragt andet system $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$.
- Bestem fuldstændig løsning $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{q}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{q}_n$ (vha. egenverdier og -vektorer).
- Hvis alle egenverdier har negativ realdel, så gælder $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ for $t \rightarrow \infty$.

Dias 19/47

Opgave 5.6: Samlet retningsfelt

Øv 12 Og 14: Ligevægt og stabilitet



Dias 18/47

Vekselvirkende populationer

Problemstilling Undersøge vekselvirkningen mellem 2 populationer af størrelse $M(t)$ og $N(t)$.

Antagelser

- Autonomi: Variablen t indgår ikke direkte, dvs.

$$\frac{dM}{dt} = f(M, N) \quad \text{og} \quad \frac{dN}{dt} = g(M, N)$$

- Vækstraterne er lineære i M og N , dvs.

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = r_M + aM + bN$$

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r_N + cM + dN$$

hvor $a \leq 0$ og $d \leq 0$ (selvbegrænsning).

Bemærkning $N = 0$ giver logistisk vækst af M (hvis $r_M > 0$).

Dias 20/47

3 typer vekselvirkning mellem populationerne

$$\frac{dM}{dt} = M(r_M + aM + bN)$$

$$\frac{dN}{dt} = N(r_N + cM + dN)$$

Selvbegrænsning $a \leq 0$ og $d \leq 0$.

De 3 typer vekselvirkning

- I $b < 0$ og $c < 0$: Konkurrerende arter
- II $b < 0$ og $c > 0$: Rovdyr-byttedyr
- III $b > 0$ og $c > 0$: Symbiose

Dias 21/47

Konkurrerende arter ($b < 0$ og $c < 0$)

$$\frac{dM}{dt} = M(r_M + aM + bN)$$

$$\frac{dN}{dt} = N(r_N + cM + dN)$$

med $r_M > 0$, $r_N > 0$, $a \leq 0$, $d \leq 0$, $b < 0$, $c < 0$.

4 ligevægte

$$L_1 = (0, 0) \quad (\text{altid ustabil})$$

$$L_2 = \left(-\frac{r_M}{a}, 0\right)$$

$$L_3 = \left(0, -\frac{r_N}{d}\right)$$

L_4 = løsningen (hvis den findes) til ligningerne
 $r_M + aM + bN = 0$ og $r_N + cM + dN = 0$

Dias 22/47

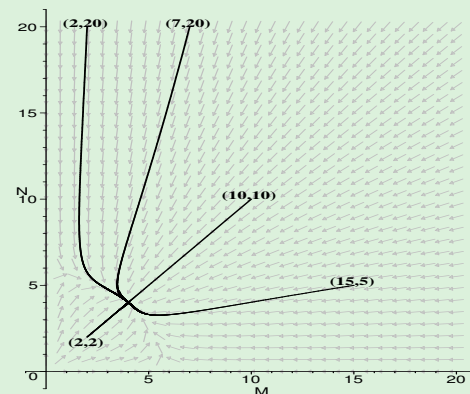
Konkurrerende arter: Øvelse 18(1)

$$M' = M\left(1 - \frac{1}{6}M - \frac{1}{12}N\right)$$

$$N' = N\left(1 - \frac{1}{12}M - \frac{1}{6}N\right)$$

dvs. $r_M = r_N = 1$, $a = d = -\frac{1}{6}$ og $b = c = -\frac{1}{12}$.

- $L_2 = (6, 0)$ er ustabil
- $L_3 = (0, 6)$ er ustabil
- $L_4 = (4, 4)$ er stabil



Dias 23/47

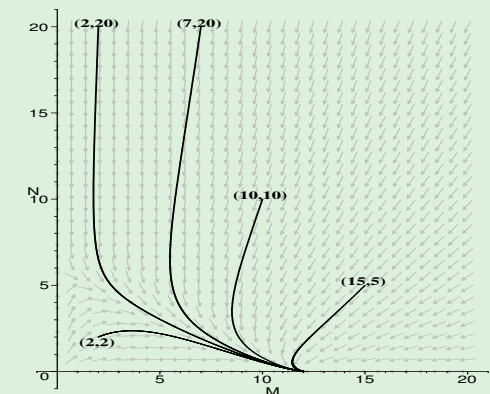
Konkurrerende arter: Øvelse 18(2)

$$M' = M\left(1 - \frac{1}{12}M - \frac{1}{12}N\right)$$

$$N' = N\left(1 - \frac{1}{6}M - \frac{1}{6}N\right)$$

dvs. $r_M = r_N = 1$, $c = d = -\frac{1}{6}$ og $a = b = -\frac{1}{12}$.

- $L_3 = (0, 6)$ er ustabil
- L_4 findes ikke
- $L_2 = (12, 0)$ er stabil



Dias 24/47

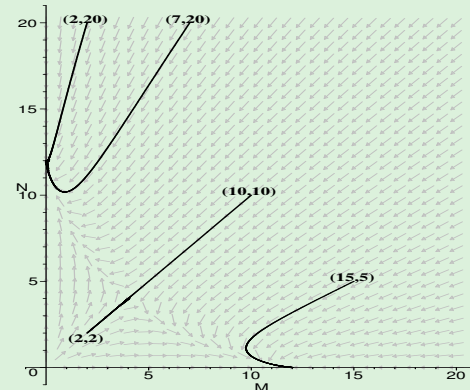
Konkurrerende arter: Øvelse 18(3)

$$M' = M(1 - \frac{1}{12}M - \frac{1}{6}N)$$

$$N' = N(1 - \frac{1}{6}M - \frac{1}{12}N)$$

dvs. $r_M = r_N = 1$, $b = c = -\frac{1}{6}$ og $a = d = -\frac{1}{12}$.

- $L_4 = (4, 4)$ er ustabil
- $L_2 = (12, 0)$ er stabil
- $L_3 = (0, 12)$ er stabil



Dias 25/47

Homo sapiens udkonkurrerede neandertalerne

- Kolodny, O. and Feldman, M.W. A parsimonious neutral model suggests Neanderthal replacement was determined by migration and random species drift. *Nature Communications* 8:1040 (2017). (Ligger på Absalon.)

- Se også artikel på videnskab.dk:

“Matematik afslører endelig, hvorfor neandertalerne uddøde”

<https://videnskab.dk/naturvidenskab/matematikere-afslorer-endelig-hvorfor-neandertalerne-uddoede>

“Neandertalerne forsvandt ikke, fordi moderne mennesker var de klogeste eller bedste. Vi var bare flere.”

Dias 27/47

Konkurrerende arter: Oversigt over stabile ligevægte

4 muligheder afhængigt af parameterværdierne:

- A** Løsningen nærmer sig den stabile ligevægt L_4 (uafhængigt af startpopulationerne).
Fortolkning Beskedent nicheoverlap (eks. Darwins finker).
- B** Løsningen nærmer sig den stabile ligevægt L_2 (uafhængigt af startpopulationerne).
Fortolkning M udkonkurrerer altid N (eks. rurer ved en kyst).
- C** Løsningen nærmer sig den stabile ligevægt L_3 (uafhængigt af startpopulationerne).
Fortolkning N udkonkurrerer altid M .
- D** Afhængigt af startpopulationerne nærmer løsningen sig en af de to stabile ligevægte L_2 og L_3 .
Fortolkning Stort nicheoverlap; evt. gensidig aggression.
Eksempel: Homo sapiens udkonkurrerede neandertalerne (se næste slide)

Dias 26/47

Rovdyr-byttedyr ($b < 0$ og $c > 0$)

B byttedyr og R rovdyr

Simplere model Ser bort fra selvbegrænsningen, dvs. $a = 0$ og $d = 0$:

$$\frac{dB}{dt} = B(r_B + bR)$$

$$\frac{dB}{dt} = B(0.1 - 0.001 R)$$

$$\frac{dR}{dt} = R(r_R + cB)$$

eks. $\frac{dR}{dt} = R(-0.2 + 0.0002 B)$

med $r_B > 0$, $r_R < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

2 ligevægte

- $L_1 = (0, 0)$ Altid ustabil
- $L_2 = \left(-\frac{r_R}{c}, -\frac{r_B}{b}\right)$

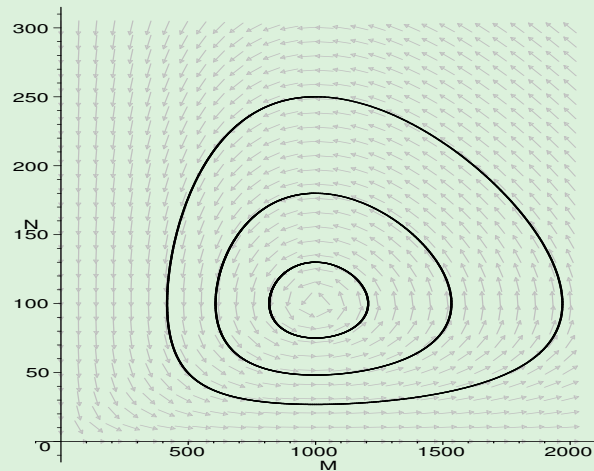
Egenverdier for funktionalmatricen i L_2 : $\lambda = \pm i\sqrt{-r_B r_R}$.

Da realdelen er $= 0$, kan vi ikke afgøre om ligevægten er stabil.

Dias 28/47

Rovdyr-byttedyr: Taleksempel

$$r_B = 0.1, r_R = -0.2, \quad b = -0.001, c = 0.0002.$$



Miniprojekt 5 Mere realistisk rovdyr-byttedyr model.

Dias 29/47

Makroøkonomisk model (Ramsey-modellen)

- $k = k(t)$: Kapitalen til tiden t .
- $c = c(t)$: Forbruget til tiden t .

Økonomiske antagelser

- Forbrugerne optimerer deres "livsnytte".
- Antagelser vedrørende investering (påvirker kapitalen).

Disse antagelser leder til systemet af differentialligninger:

$$\frac{dk}{dt} = p(k) - c - (n + g)k = f(k, c)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{p'(k) - \rho - \theta g}{\theta} \cdot c = g(k, c)$$

hvor

- $p(k)$ er produktionen som funktion af kapitalen. Denne funktion antages at være konkav, dvs. $p''(k) < 0$.
- ρ , θ , g og n er økonomiske parametre.

Dias 31/47

Symbiose ($b > 0$ og $c > 0$) – kort

$$M' = M(r_M + aM + bN)$$

$$N' = N(r_N + cM + dN)$$

med $r_M > 0, r_N > 0, a \leq 0, d \leq 0, b > 0, c > 0$.

Taleksempel 1

$$M' = M(1 - 0.6M + 0.2N)$$

$$N' = N(1 + 0.1M - 1.2N)$$

4 ligevægte: $(0, 0)$, $(1.67, 0)$, $(0, 0.83)$, $(2, 1)$. Kun $(2, 1)$ er stabil.

Taleksempel 2

$$M' = M(1 - M + 2N)$$

$$N' = N(1 + 3M - 4N)$$

4 ligevægte: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0.25)$, $(-3, -2)$.

Ingen stabile: populationerne går begge mod uendelig.

Dias 30/47

Makroøkonomisk model: Ligevægt

Der er netop en ligevægt (k^*, c^*) :

- Først bestemmes k^* ud fra $p'(k^*) = \rho + \theta g$. (Kun en løsning da $p'(k)$ er aftagende.)
- Dernæst fås $c^* = p(k^*) - (n + g)k^*$.

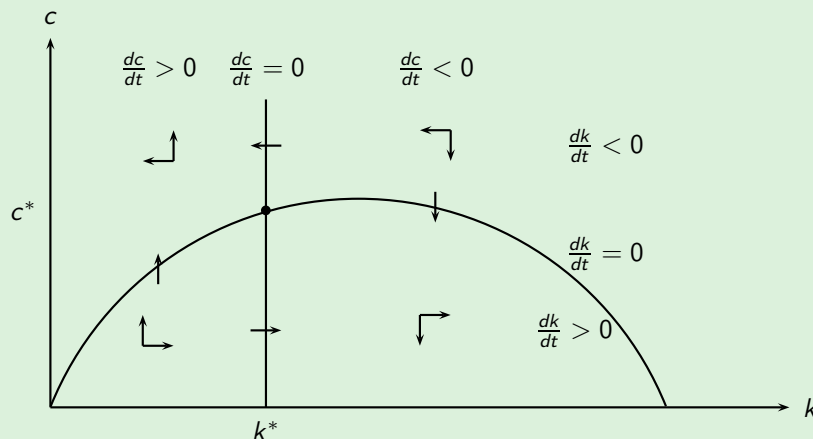
Fortegnene af $\frac{dk}{dt}$ og $\frac{dc}{dt}$:

- $\frac{dk}{dt} > 0$ for $c < c^*$
- $\frac{dk}{dt} < 0$ for $c > c^*$
- $\frac{dc}{dt} > 0$ for $k < k^*$
- $\frac{dc}{dt} < 0$ for $k > k^*$

Dias 32/47

Makroøkonomisk model: Dynamik omkring ligevægt

Grafisk illustration af (k^*, c^*) samt fortegnene af $\frac{dk}{dt}$ og $\frac{dc}{dt}$:



Ud fra øverste venstre og nederste højre hjørne ser det ud til, at ligevægten er ustabil. Vil undersøge det vha. funktionalmatricen.

Dias 33/47

Makroøkonomisk model: Stabilitetsundersøgelse

Funktionalmatricen

$$D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (k, c) = \begin{pmatrix} p'(k) - (n + g) & -1 \\ \frac{p''(k)}{\theta} \cdot c & \frac{p'(k) - \rho - \theta g}{\theta} \end{pmatrix}$$

Da $p'(k^*) = \rho + \theta g$ fås

$$D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (k^*, c^*) = \begin{pmatrix} \rho + \theta g - (n + g) & -1 \\ \frac{p''(k^*)}{\theta} \cdot c^* & 0 \end{pmatrix}$$

Økonomisk antagelse $\rho + \theta g - (n + g) = \rho - n - (1 - \theta)g > 0$
(svarer til at "livsnyttens er endelig").

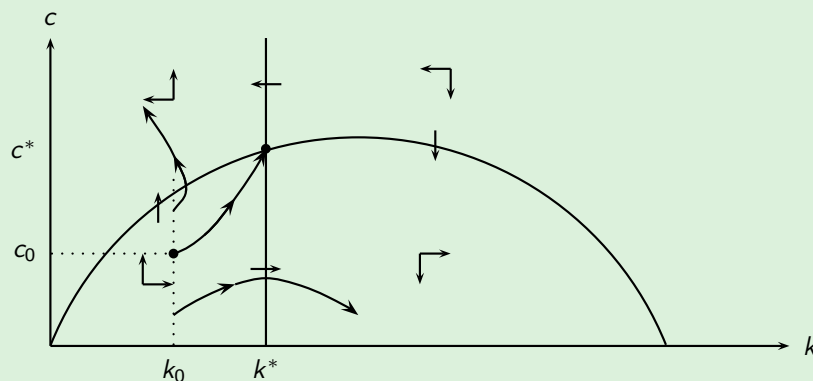
Fortegn i funktionalmatricen $D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (k^*, c^*) = \begin{pmatrix} + & - \\ - & 0 \end{pmatrix}$

Egenverdier for funktionalmatricen Dette fører til
 $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$
så fra et matematisk synspunkt er ligevægten ustabil.

Dias 34/47

Makroøkonomisk model: "Saddel-stien"

Økonomisk fortolkning Man nærmer sig kun ligevægten, hvis man kommer fra "den rigtige retning" (langs "the saddle path"):



For en given startværdi k_0 af kapitalen, justerer forbrugeren startforbruget c_0 så (k_0, c_0) ligger på sadel-stien.

Tæt på (k^*, c^*) er "den rigtige retning" bestemt ved egenvektoren \mathbf{q}_2 til den negative egenverdi λ_2 .

Dias 35/47

Matematisk modellering

(Benytte matematik til at beskrive og analysere problemer fra virkeligheden)

Problemformulering

- Afgrænsning af virkeligheden.
- Hvad ønsker man at opnå viden om?

Matematisk beskrivelse og analyse af modellen

- Oversættelse af problemformuleringen til "matematiskprog". Som regel ved at indføre variable og parametre.
- Matematisk analyse af problemet, dvs. løsning vha. matematiske metoder.

Fortolkning af resultatet

- Oversættelse af den matematiske løsning til "virkelighedssprog". Fortolkning.
- Beskriver modellen på rimelig vis virkeligheden? Er løsningen fornuftig i forhold til det givne problem?

Dias 36/47

Generelt om matematiske modeller

Hvad er matematisk modeller og hvordan opstilles de?

- En matematisk model er en beskrivelse af dele af virkeligheden vha. matematik.
- Der indgår normalt variable, parametre, funktioner mm.
- Modellen skal uddrage de væsentligste træk ved situationen.
- Så simpel, at den kan analyseres – men detaljeret nok til at afspejle de vigtigste egenskaber.
- *Teoretiske og empiriske modeller*

Hvorfor og hvordan benyttes matematiske modeller?

- Virkelige problemstillinger er ofte for komplicerede at analysere.
- Modeller kan afsløre mangler i vores viden.
- *Estimere* parametre dvs. *kalibrere* modellen.
- *Validere* modellen: beskrives den virkelige problemstilling?
- Drage konklusioner ud fra modellen.

Dias 37/47

Foderoptagelse: Foder i vommen

Unedbrudt organisk foder i vommen Opdeles i 8 puljer (der alle afhænger af tiden t):

- AU : Ufordøjeligt fiber; små partikler
- BU : Ufordøjeligt fiber; store partikler
- AN : Protein; små partikler
- BN : Protein; store partikler
- AC : Cellulose; små partikler
- BC : Cellulose; store partikler
- S : Stivelse
- V : Sukker

Den samlede mængde foder i vommen:

$$R = AU + BU + AN + BN + AC + BC + S + V$$

Dias 39/47

Foderoptagelse hos køer

Baseret på rapporten

E. S. Kristensen, Udvikling af en matematisk model til bestemmelse af foderoptagelsen og fordøjelsen hos malkekøer på græs (1984).

Formål

Kende den kvantitative sammenhæng mellem fodertilbud, -optagelse og produktion med henblik på at bestemme en økonomisk optimal foderplan.

Herunder at kunne forudsige græsoptagelsen ud fra bl.a. data om kraftfoder og græstilbud.

Dias 38/47

Foderoptagelse: Tilførsel af foder

Tilførsel af foder

- Fra kraftfoder: små partikler samt stivelse og sukker.
- Fra græs: store partikler samt stivelse og sukker.

Ædehastigheder

- $h_1(t)$: Hastighed hvormed kraftfoder tilføres og spises. (Maks. 5 kg pr. time.)
- $h_4(R)$: Hastighed hvormed græs spises. (Maksimalt 2 kg pr. time.)

[Ædehastigheden h_4 afhænger af den totale fodermængde R i vommen. I rapporten er der en kompliceret model for $h_4(R)$; men den gennemgås ikke her.]

Dias 40/47

Foderoptagelse: Sammensætningen af foder

Sammensætningen af kraftfoder Beskrives med parametrene

$$b_{KU}, b_{KN}, b_{KC}, b_{KS}, b_{KV}$$

(så 1 kg kraftfoder indeholder b_{KU} kg ufordøjeligt fiber osv.)

Talværdier:

Byg: $b_{KU} = 0.02$, $b_{KN} = 0.09$, $b_{KC} = 0.17$, $b_{KS} = 0.63$, $b_{KV} = 0.02$

C-bl.: $b_{KU} = 0.13$, $b_{KN} = 0.25$, $b_{KC} = 0.37$, $b_{KS} = 0.05$, $b_{KV} = 0.02$

Sammensætningen af græsset Beskrives med parametrene

$$b_{GU}, b_{GN}, b_{GC}, b_{GS}, b_{GV}$$

(så 1 kg græs indeholder b_{GU} kg ufordøjeligt fiber osv.)

Talværdier:

Ungt græs: $b_{GU} = 0.08$, $b_{GN} = 0.13$, $b_{GC} = 0.32$, $b_{GS} = 0.02$, $b_{GV} = 0.30$

Ældre græs: $b_{GU} = 0.08$, $b_{GN} = 0.13$, $b_{GC} = 0.52$, $b_{GS} = 0.02$, $b_{GV} = 0.10$

Dias 41/47

Foderoptagelse: Nedbrydning

Nedbrydning

- Nedbrydningshastighederne er proportionale med forgæringshastighederne f_N , f_C , f_S , f_V for de enkelte typer (afhænger ikke af partikelstørrelsen). Talværdier:

$$f_N = 0.1, \quad f_C = 0.07, \quad f_S = 0.15, \quad f_V = 0.25 \quad (f_U = 0)$$

- Nedbrydningshastighederne for protein og cellulose er også proportionale med størrelsen $g_1(X)$, som er et udtryk for forgælingsforholdene i vommen. Her er

$$X = \frac{BN+BC+BU}{S+V}$$

forholdet mellem [store partikler] og [stivelse+sukker], og $g_1(X) = 1 - e^{-\alpha X}$ (med talværdi $\alpha = 0.5$)

- Meget stivelse og sukker: $X \simeq 0 \Rightarrow g_1(X) \simeq 0$ lille nedbrydning
- Mange store partikler: $X \simeq \infty \Rightarrow g_1(X) \simeq 1$ stor nedbrydning

Dias 43/47

Foderoptagelse: Udskillelse

Foderet forsvinder fra vommen ved udskillelse og nedbrydning:

Udskillelse Udskillelshastighederne afhænger kun af om partiklerne er små eller store (stivelse og sukker er også små partikler)

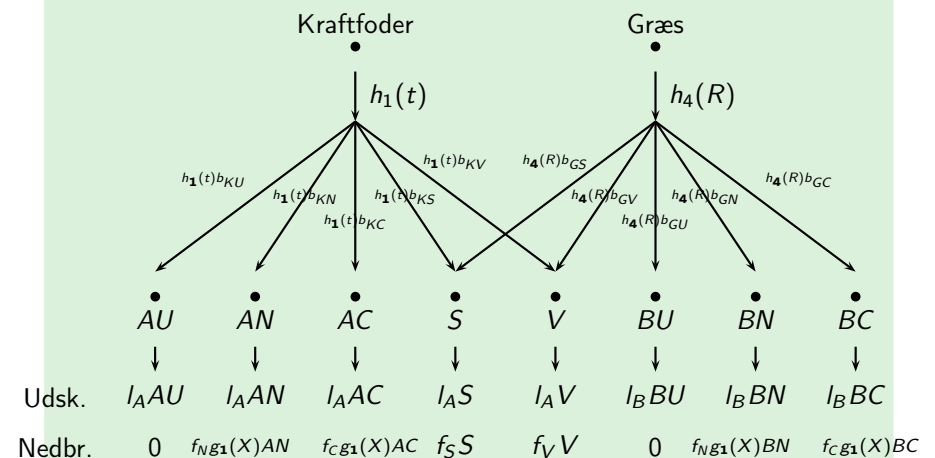
- I_A : Udskillelshastighed for små partikler
- I_B : Udskillelshastighed for store partikler

Talværdier:

$$I_A = 0.05 \quad I_B = 0.025 \quad \text{pr. time}$$

Dias 42/47

Foderoptagelse: Kompartimentdiagram ("Knode"-diagram)



Dias 44/47

Foderoptagelse: Differentialligningsmodel

$$AU' = h_1(t)b_{KU} - I_A AU$$

$$AN' = h_1(t)b_{KN} - (f_N g_1(X) + I_A)AN$$

$$AC' = h_1(t)b_{KC} - (f_C g_1(X) + I_A)AC$$

$$S' = h_1(t)b_{KS} + h_4(R)b_{GS} - (f_S + I_A)S$$

$$V' = h_1(t)b_{KV} + h_4(R)b_{GV} - (f_V + I_A)V$$

$$BU' = h_4(R)b_{GU} - I_B BU$$

$$BN' = h_4(R)b_{GN} - (f_N g_1(X) + I_B)BN$$

$$BC' = h_4(R)b_{GC} - (f_C g_1(X) + I_B)BC$$

Modellen er ikke lineær pga. leddene med

$$g_1(X) = g_1\left(\frac{BN + BC + BU}{S + V}\right) = 1 - \exp\left(-\alpha \frac{BN + BC + BU}{S + V}\right)$$

Dias 45/47

Foderoptagelse: Endnu simplere autonom model

- Antager fortsat at $h_1 = h_1(t)$ og $h_4 = h_4(R)$ er konstante.
- Antager endvidere, at vommen kun indeholder sukker og store cellulosepartikler.
Dvs. alle andre variable end V og BC er 0.

- Fører til modellen

$$V' = h_1 b_{KV} + h_4 b_{GV} - (f_V + I_A)V$$

$$BC' = h_4 b_{GC} - \left(f_C g_1\left(\frac{BC}{V}\right) + I_B\right)BC$$

- Indgår i Miniprojekt 5.

Dias 47/47

Foderoptagelse: Simplere autonom model

- Antager at $h_1 = h_1(t)$ og $h_4 = h_4(R)$ er konstante.
- Modellen bliver dermed autonom.
- For givne parameterværdier (inkl. h_1 og h_4) kan ligevægten bestemmes numerisk.
- Funktionalmatricen (8×8) opstilles; mange 0'er.
- Ligevægten er stabil for alle værdier af parameterne.

Dias 46/47