Modul 1: forelæsning 4
Rang.
Determinant og invers matrix vha. rækkeoperationer

Matematik og modeller 2018

Thomas Vils Pedersen
Institut for Matematiske Fag
vils@math.ku.dk

Oversigt

Repetition

Betragt (igen) processen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Udgør nedenstående vektorer et lineært uafhængigt sæt?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Kan man afgøre om et sæt af k vektorer i $\mathbb{R}^n$ er lineært uafhængigt ved at løse ligningssystemet $\mathbf{At} = \mathbf{0}$ hvor $\mathbf{A}$ har de k vektorer som søjler?

Rang

Definition af rang

Rangen af en matrix $\mathbf{A}$ er det maksimale antal søjler, der udgør et lineært uafhængigt sæt. Den betegnes $\rho(\mathbf{A})$ eller $\mathrm{rang}(\mathbf{A})$.

Eksempel

For matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

er $\rho(\mathbf{A}) = 1$ og $\rho(\mathbf{B}) = 2$.

Beregning af rang

Sætning: Rang og rækkeoperationer

Rangen af en matrix ændres ikke ved elementære rækkeoperationer.

Faktisk gælder: numrene på søjler, som udgør et lineært uafhængigt sæt, ændrer sig ikke, når vi udfører en elementær rækkeoperation!

Sætning: Echelonform og rang

Hvis en matrix er på række-echelonform, så er rangen lig med antallet af ledende 1-taller.

Trick

For at bestemme rangen af en matrix kan man udføre Gauss-elimination og så bestemme antal ledende 1-taller.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

har rang 2.

Rang og løsning af ligningssystemer

Eksempel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sætning: Rang og løsninger til ligningssystemer

Ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger $\mathbf{x}$ hvis og kun hvis

$$\rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = \rho(\mathbf{A})$$

dvs. hvis og kun hvis rangen af totalmatricen er lig med rangen af matricen.

(Begrundelse: Det svarer til om alle nulrækker i koefficientmatricen $\mathbf{A}$ også er nulrækker i totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.)

Mere om rang

Sætning: Rang og antal rækker/søjler

Hvis $\mathbf{A}$ er en $m \times n$ matrix, så gælder $\rho(\mathbf{A}) \leq m$ og $\rho(\mathbf{A}) \leq n$.

Sætning: Rang og transponering

For en vilkårlig matrix $\mathbf{A}$ gælder $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}^T)$ og dermed ændres rangen ikke ved søjleoperationer.

Sætning: Rang, basis og determinant

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrix. Da er følgende ensbetydende:

- $\rho(\mathbf{A}) = n$.
- Søjlerne i $\mathbf{A}$ udgør en basis for $\mathbb{R}^n$.
- $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Determinant og basis

Sætning (gentagelse): determinant og basis

Søjlerne i en kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ udgør en basis netop hvis $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Eksempel

Søjlerne i matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

udgør en basis i $\mathbb{R}^3$ fordi $\det \mathbf{A} = -2$.

Udgør rækkerne i matricen også en basis i $\mathbb{R}^3$?

Determinant og rækkeoperationer

Sætning: determinant og rækkeoperationer

- Determinanten ændres ikke ved række (eller søjle) operationer.
- Determinanten skifter fortegn ved en række (eller søjle) ombytning.
- Ganges en række (eller en søjle) med et tal t da bliver determinanten også ganget med t.

Repetition: determinant af øvre trekantsmatrix

Determinanten af en øvre eller nedre trekantsmatrix er lig med produktet af diagonalelementerne (fra sidste gang).

Idé til udregning af determinant: lav elementære række- eller søjleoperationer, så matricen bliver en øvre trekantsmatrix!

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

så

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2.$$

Opgave

Efter tre gange at have ombyttet to rækker, multiplikation af en af rækkerne med 2, samt tre rækkeoperationer på 4×4 matricen $\mathbf{A}$ er Åge kommet frem til en øvre trekantsmatrix med diagonalelementer: $1, 3, -1, -2$. Hvad er determinanten af $\mathbf{A}$?

Invers matrix og rækkeoperationer

Dominometoden til bestemmelse af $\mathbf{A}^{-1}$

- Opskriv matricen $[\mathbf{A}|\mathbf{E}]$.
- Lav elementære rækkeoperationer på matricen $[\mathbf{A}|\mathbf{E}]$ og bring den på reduceret række-echelonform.
- Hvis den er på formen $[\mathbf{E}|\mathbf{X}]$ da er $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$; hvis ikke da har $\mathbf{A}$ ingen invers matrix.

Eksempel

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\3&3&1&0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-2&3&-3&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3/2&3/2&-1/2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&5/2&-3/2&1/2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3/2&3/2&-1/2\end{pmatrix}$$

Konklusion:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}5/2&-3/2&1/2\\-2&1&0\\-3/2&3/2&-1/2\end{pmatrix}.$$