KAPITEL 6

DIFFERENSLIGNINGER

0. Indledning.

I de foregående kapitler har vi ofte betragtet et *dynamisk system*, dvs et system, der ændrer sig i tiden. Til at beskrive et sådant system har vi brugt kontinuerte funktioner af typen $x = x(t)$, hvor tidsvariablen t gennemløber et interval, en halvlinie eller hele $\mathbb{R}$.

I nogle tilfælde er det mere hensigtsmæssigt eller måske nødvendigt at vælge en anden mulighed, nemlig at bruge *diskrete* funktioner, hvor tidsvariablen t kun antager adskilte, ækvidistante værdier. Lad os antage, at det først har interesse at betragte systemet fra og med et bestemt tidspunkt. Dette starttidspunkt kan vi tage som nulpunkt for tidsvariablen, og vi kan samtidig vælge tidsenheden således, at t antager værdierne $0, 1, 2, 3, \cdots$. Den eller de funktioner, der beskriver vort system, er således *talfølger*. Vi skriver en sådan talfølge på formen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_t, \cdots,$$

hvor t er anbragt som index eller 'nummer' i stedet for i parentes. Man bruger også andre betegnelser for talfølger, f.eks. $\{x_t\}$ eller vektorsymbolet $\boldsymbol{x}$. Det skal desuden nævnes, at nogle forfattere foretrækker skrivemåden $x(t)$ også i det diskrete tilfælde.

Ligesom en sædvanlig funktion kan en talfølge være givet direkte ved en formel, der udtrykker x_t ved t, som f.eks. $x_t = 3t + 5$, hvor følgen altså er $5, 8, 11, 14, \cdots$. Men følgen kan også være givet indirekte gennem en beskrivelse af, hvordan elementerne ændrer sig i tidsrummet fra t til $t+1$. Typisk kan denne beskrivelse udmøntes på formen

$$x_{t+1} = \text{udtryk i } t \text{ og } x_t,$$

der udtrykker det vilkårlige "næste" element i følgen ved nummeret t og det aktuelle element. Denne ligning kaldes en *differensligning*. Betegnelsen skyldes, at man tidligere foretrak formen

$$\Delta x_t = \text{udtryk i } t \text{ og } x_t,$$

hvor *differensen* Δx_t betegner ændringen, $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$. Ved overflytning af leddet $-x_t$ til højre side ser vi, at de to ligninger i alt væsentligt er ensbetydende, dvs en ligning af den ene type kan nemt omformes til en ligning af den anden type, og omvendt.

Differensligninger har en række lighedspunkter med differentialligninger, og de kan generaliseres på tilsvarende måde: Til samhørende differensligninger, højere ordens differensligninger, "partielle differensligninger" osv. Løsningsmetoderne kan sommetider kopieres, men ikke altid. I nogle tilfælde er differentialligninger lettest at have med at gøre, i andre differensligninger.

Ved visse anvendelser er differensligninger mere realistiske end differentialligninger. Det gælder således i en del tilfælde i økonomi, hvor størrelser som omsætning, overskud, afdrag m.fl. opgøres periodevis og derfor naturligt må opfattes som diskrete. Også i biologisk sammenhæng dukker synspunktet op. F.eks. kan man ved skadedyrsbekæmpelse have brug for at studere insektpopulationer, der kun opgøres på ét bestemt tidspunkt om året. – Ved andre anvendelser er det mest naturligt at bruge en kontinuert model, som fører til differentialligninger. Og ved andre igen er det en smagssag, hvilken af de to synsvinkler man vil anlægge.

I forbindelse med *numerisk løsning* er man dog altid nødt til at *diskretisere* sin model i et eller andet omfang. Det foregår ganske vist ofte internt i edb-behandlingen og er ikke direkte synligt, men for at forstå, hvad der foregår, må man have et elementært kendskab til diskrete modeller og differensligninger.

Det skal nævnes, at differensligninger ligesom differentialligninger har en række andre anvendelser end dem, hvor det er tiden t, der er den uafhængige variabel. Men disse er de vigtigste, og her er det valgt at lade fremstillingen knytte sig ret nøje til forestillingen om t som et tidspunkt.

I kapitlet gives en kort behandling af teorien for differensligninger. Der er mere tale om en orientering end om en egentlig gennemgang af emnet. Definitioner, sætninger og andre resultater er angivet på mere uformel vis end i de øvrige kapitler.

1. Differensligning af 1. orden.

En differensligning af 1. orden er af formen

$$x_{t+1} = f(t, x_t), \tag{1}$$

hvor f er en reel funktion af to variable, og t, x_t samt x_{t+1} er symboler. Idet vi betegner mængden af ikke-negative hele tal som $\mathbb{N}_0$, altså sætter

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

skal t opfattes som en diskret variabel, der gennemløber $\mathbb{N}_0$, og x_t skal opfattes som element nr. t i den tilsvarende talfølge $x_0, x_1, x_2, \cdots$.

En *løsning* (partikulær løsning) til (1) er en talfølge $\{x_t\}$, der tilfredsstiller (1) for alle $t \in \mathbb{N}_0$. Løsningen kan være givet ved en formel, der udtrykker x_t ved t. Det er klart, at en *begyndelsesbetingelse* som f.eks. $x_0 = 3$ entydigt fastlægger en bestemt løsning til differensligningen (1), for ved at indsætte i (1) får man simpelthen bestemt elementerne i følgen successivt:

$$x_1 = f(0, 3), \quad x_2 = f(1, x_1), \quad x_3 = f(2, x_2), \quad \cdots. \tag{2}$$

Forholdene er altså på dette punkt enklere end for differentialligninger, hvor det ikke er helt ligetil at bevise, at en begyndelsesbetingelse fastlægger en og kun en løsning, jfr. omtalen i tidligere kapitler af diverse eksistens- og entydighedssætninger.

Endnu et par gloser: Ved en *algoritme* forstås i matematikken en præcist beskrevet og entydig metode til at løse et problem i en række successive trin. Eksempler er *Euklids algoritme* til at bestemme største fælles divisor for to naturlige tal, og den tidligere ret udbredte "håndkraft-metode" til at uddrage kvadratroden af et decimaltal. Man bruger også sommetider ordet algoritme til at betegne princippet i et edb-program. Differensligningen (1) kan opfattes som en algoritme til successiv udregning af elementerne i en løsning, som beskrevet i (2). Man bruger udtrykket, at (1) bestemmer elementerne i følgen $\{x_t\}$ *rekursivt.*

Når ligningen (1) er rimeligt simpel, kan man udlede løsningsudtrykket for den ved at sætte $x_0 = c$ og derefter benytte (2) så mange gange, at man kan "se systemet" og opskrive udtrykket for det vilkårlige element x_t . Størrelsen c vil da optræde i dette udtryk som en arbitrær konstant, ligesom i løsningen for en differentialligning. Da c var vilkårlig, vil x_t -udtrykket angive den fuldstændige løsning til (1). Metoden demonstreres i det følgende eksempel.

EKSEMPEL 1. (1) For differensligningen

$$x_{t+1} = x_t + 1$$

finder vi successivt: $x_0 = c,\ x_1 = c+1,\ x_2 = c+2,\ \cdots,\ x_t = c+t, \cdots$. Ligningen for x_t er udtrykket for den fuldstændige løsning.

(2) For differensligningen

$$x_{t+1} = x_t + t$$

finder vi successivt: $x_0 = c,\ x_1 = c+1,\ x_2 = c+(1+2),\ \cdots,\ x_t = c+(1+2+\cdots+t)$. Ved brug af formel (5), side 121 i Grundbog i Matematik får vi da følgende udtryk for den fuldstændige løsning:

$$x_t = c + \tfrac{1}{2}t(t+1).$$

(3) For differensligningen

$$x_{t+1} = 3x_t$$

finder vi successivt: $x_0 = c,\ x_1 = 3c,\ x_2 = 9c,\ \cdots,\ x_t = 3^t c,\ \cdots$. Ligningen for x_t er udtrykket for den fuldstændige løsning.

ØVELSE 1. Find den fuldstændige løsning til hver af følgende differensligninger:

(1) $x_{t+1} = x_t + k \qquad (k \in \mathbb{R}$ er en konstant),
(2) $x_{t+1} = ax_t \qquad (a \in \mathbb{R}$ er en konstant),
(3) $x_{t+1} = (t+1)\cdot x_t$,
(4) $x_{t+1} = 3x_t + 7$,
(5) $x_{t+1} = ax_t + b \qquad (a, b \in \mathbb{R}$ er konstanter).

Gør rede for, at resultaterne i (2) og (5) er analoge med visse resultater for differentialligninger i Kapitel 3. Hvilke?

EKSEMPEL 2. En studerende låner 10 000 kr i banken hvert år. Det første år er rentesatsen 10 pct (helårlig rentetilskrivning), og den antages herefter at stige med 1 pct om året. Lad x_t betegne den studerendes gæld efter t studieårs forløb, umiddelbart før optagelsen af det $(t+1)$ 'te lån. Da er x_t bestemt ved differensligningen

$$x_{t+1} = (x_t + 10\,000)\cdot\left(1 + \frac{10+t}{100}\right)$$

samt begyndelsesbetingelsen $x_0 = 0$. Ved successiv indsættelse og udregning finder man de første x_t -værdier til

$$x_1 = 11\,000\,, \quad x_2 = 23\,310\,, \quad x_3 = 37\,307.20\,, \quad x_4 = 53\,930.21\,.$$

ØVELSE 2. Beregn via lommeregner studiegælden for den studerende i det foregående eksempel, når hun efter fem år bliver kandidat. Prøv også med ti år.

2. Lineær 1. ordens differensligning.

En *lineær 1. ordens differensligning* er af formen

$$x_{t+1} = a_t\, x_t + b_t, \tag{1}$$

hvor $\{a_t\}$ og $\{b_t\}$ er givne talfølger $(t \in \mathbb{N}_0)$; vi forudsætter $a_t \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{N}_0$. Lad os først betragte den *homogene* ligning

$$x_{t+1} = a_t\, x_t. \tag{2}$$

Vi kan frit vælge $x_0 = c$. Derefter får vi ved *iteration*, dvs gentagen anvendelse, af (2): $x_1 = a_0 \cdot c$, $x_2 = a_1 a_0 \cdot c$, $x_3 = a_2 a_1 a_0 \cdot c$, altså alment

$$x_t = a_{t-1} a_{t-2} \cdots a_1 a_0 \cdot c.$$

Nu definerer vi følgen $\{E_t\}$ ved

$$E_0 = 1\,, \qquad E_t = a_{t-1} a_{t-2} \cdots a_1 a_0 \quad \text{for } t > 0\,. \tag{3}$$

Dermed er den fuldstændige løsning til (2) givet ved

$$\boxed{\text{FHL:} \qquad x_t = c\,E_t \qquad (c \in \mathbb{R}).} \tag{4}$$

Et vigtigt specialtilfælde er, at følgen $\{a_t\}$ er konstant, altså $a_t = a$. Her finder vi $E_t = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^t$, med andre ord:

$$x_{t+1} = a\,x_t \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_t = c\,a^t \quad (c \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Vi vender tilbage til den vilkårlige *inhomogene* ligning (1). For at løse den kopierer vi fra Kapitel 3 de *arbitrære konstanters variationsmetode* og skriver forsøgsvis

$$x_t = u_t E_t, \tag{6}$$

hvor $\{u_t\}$ er en ukendt talfølge, som vi håber at kunne udlede en simplere differensligning for. Indsættelse af (6) i (1) giver

$$u_{t+1} E_{t+1} = a_t u_t E_t + b_t. \tag{7}$$

En konsekvens af definitionen (3) af E_t er, at der gælder $E_{t+1} = a_t E_t$. Ved at bruge det på højre side i (7) og derpå dividere igennem med E_{t+1} får vi

$$u_{t+1} = u_t + \frac{b_t}{E_{t+1}}.$$

Iteration af denne ligning "fra det foregående skridt og nedefter" fører til

$$\begin{aligned} u_t &= u_{t-1} + \frac{b_{t-1}}{E_t} \\ &= u_{t-2} + \frac{b_{t-2}}{E_{t-1}} + \frac{b_{t-1}}{E_t} \\ &\ \ \vdots \\ &= u_0 + \frac{b_0}{E_1} + \frac{b_1}{E_2} + \cdots + \frac{b_{t-2}}{E_{t-1}} + \frac{b_{t-1}}{E_t}\,. \end{aligned}$$

Iflg. (6) er $u_0 = x_0$, som vi kan sætte lig med c $(c \in \mathbb{R})$. Samtidig multiplicerer vi ligningen igennem med E_t og får derved

$$\boxed{\text{FIL:} \qquad x_t = E_t \cdot \left(c \;+\; \sum_{\tau=0}^{t-1} b_\tau E_{\tau+1}^{-1} \right).} \tag{8}$$

Det kan omvendt vises (vi overspringer dog denne kontrol), at enhver følge givet ved (8) tilfredsstiller (1). Da $x_0 = c$ er vilkårlig, angiver (8) således den fuldstændige inhomogene løsning, som antydet med betegnelsen FIL.

Formel (8) minder tydeligt om, hvad vi fandt i Kapitel 3 for den lineære 1. ordens differentialligning. Andet led på højre side af (8) angiver element nr. t i en følge $\{\varphi_t\}$, der er en partikulær løsning til (1). Iflg. (3) kan (8) dermed også skrives på formen

$$\boxed{\text{FIL:} \qquad x_t = \text{FHL} + \varphi_t\,,} \tag{9}$$

hvor $\{\varphi_t\}$ som sagt er en partikulær inhomogen løsning. Dette resultat er helt mage til det, der gælder for differentialligninger, og når man kan gætte sig til en løsning $\{\varphi_t\}$, er det nemmere at bruge (9) end (8).

Et vigtigt specialtilfælde er, at følgerne $\{a_t\}$ og $\{b_t\}$ begge er konstante, altså $a_t = a$, $b_t = b$, således at ligningen er

$$x_{t+1} = a\,x_t + b\,.$$

Ligesom i (5) er da $E_t = a^t$, og endvidere finder vi

$$\varphi_t = a^t \cdot \left(ba^{-t} + ba^{-t+1} + \cdots + ba^{-1}\right) = b \cdot \left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{t-1}\right),$$

der vha sumformlen for en endelig kvotientrække samt (9) giver

$$\text{FIL:} \qquad x_t = c\,a^t + \varphi_t = ca^t + b \cdot \frac{1 - a^t}{1 - a}.$$

Hvis vi sætter $k = c - \dfrac{b}{1-a}$, forenkles løsningen til

$$\boxed{x_{t+1} = ax_t + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_t = k\,a^t + \frac{b}{1-a} \qquad (k \in \mathbb{R}).} \tag{10}$$

ØVELSE 3. (1) Løs differensligningerne i Øvelse 1 vha de almene metoder ovenfor. Får du samme resultat som evt. fundet i Øvelse 1?

(2) Udled (10) ved først at gætte en *konstant* løsning $x_t = A$.

(3) Løs differensligningen $x_{t+1} = 2x_t + 3t + 7$, f.eks. ved at gætte et 1. gradspolynomium $x_t = At + B$ som partikulær løsning.

ØVELSE 4. I løsningsformlen (10) er det underforstået, at $a \neq 1$. Løs ligningen i tilfældet $a = 1$. Generalisér til differensligningen $x_{t+1} = x_t + b_t$, hvor følgen $\{b_t\}$ er vilkårlig. Vanskeligere spørgsmål: Hvilken differentialligning af 1. orden er analog til sidstnævnte differensligning?

I begyndelsen af dette afsnit begrænsede vi foreløbig undersøgelsen af differensligninger til det *reelle* talområde. Det er imidlertid ikke nødvendigt: Stort set alle betragtninger ovenfor og i resten af kapitlet kan uden videre overføres fra det reelle til det *komplekse* tilfælde, hvor de optrædende talfølger, både de givne og løsningsfølgerne, samt koefficienter og begyndelsesværdier varierer frit i $\mathbb{C}$. I de følgende afsnit skal vi se eksempler på, at det - ligesom ved differentialligninger - kan være en fordel for løsning af reelle problemer, at vi undervejs kan bevæge os ud i det komplekse område.

3. Samhørende differensligninger.

Det emne, der nu skal omtales, modsvarer stoffet i Kapitel 4, Samhørende differentialligninger. Noget af det følgende er i øvrigt under andre betegnelser behandlet i bogen Lineær Algebra, især Kapitel 4 og 5.

Vi begynder med at definere et *system af n samhørende 1. ordens differensligninger*. Derved vil vi forstå et sæt ligninger af formen

$$\begin{cases} x_{t+1,1} = f_1(t,\ x_{t1}, x_{t2}, \cdots, x_{tn}) \\ x_{t+1,2} = f_2(t,\ x_{t1}, x_{t2}, \cdots, x_{tn}) \\ \quad\vdots \\ x_{t+1,n} = f_n(t,\ x_{t1}, x_{t2}, \cdots, x_{tn}), \end{cases} \tag{1}$$

hvor hver f_i er en funktion af $n+1$ variable $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Ligningerne kan samles på vektorform til

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_t)\,. \tag{2}$$

Ved overvejelser i stil med dem, vi gjorde i starten af afsnit 1, når vi frem til, at et sæt *begyndelsesbetingelser* i form af opgivne værdier af x_{0i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ entydigt bestemmer en *partikulær løsning*, dvs de bestemmer n talfølger $\{x_{it}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, som tilfredsstiller systemet (1). Eller udtrykt i vektorsprog: En startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ fastlægger entydigt en vektorfølge $\{\boldsymbol{x}_t\}$, der tilfredsstiller ligning (2). Når *den fuldstændige løsning* kan udledes, vil den generelt være af formen

$$\boldsymbol{x}_t = \mathrm{UDTRYK}(t,\ c_1, c_2, \cdots, c_n)\,, \tag{3}$$

hvor c_i 'erne er arbitrære konstanter, som kan vælges uafhængigt af hinanden. Ud over disse bemærkninger vil vi ikke gå nærmere ind på det helt generelle tilfælde (1)/(2).

Systemet (1)/(2) kaldes *autonomt*, når højresiderne kun afhænger af t gennem $\boldsymbol{x}_t$, dvs når systemet er af formen

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)\,.$$

Et vigtigt specialtilfælde heraf består i, at alle højresider er *lineære* funktioner af x_{ti} 'erne. Da kan systemet skrives

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}\,, \tag{4}$$

hvor $\boldsymbol{A}$ er en given $n \times n$ matrix med konstante elementer, og $\boldsymbol{b}$ er en given konstant $\mathbb{R}^n$ -vektor. Det *homogene* tilfælde

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_t\,, \tag{5}$$

der i Lineær Algebra er behandlet under betegnelsen *matrixmodel*, kan løses iterativt på samme måde som i det éndimensionale tilfælde (se afsnit 1 i dette kapitel), og løsningen bliver af formen

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}_0\,. \tag{6}$$

I det generelle *inhomogene* tilfælde (4) gætter vi på en konstant vektor $\boldsymbol{a}$ som partikulær løsning og finder derved $\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ eller $\boldsymbol{a} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{b}$, hvor E er $n \times n$ enhedsmatricen; vi forudsætter, at $E - A$ er regulær. Ved addition af den fuldstændige homogene løsning får vi:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{t+1} = A\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{x}_t = A^t\boldsymbol{c} + (E - A)^{-1}\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n). \quad (7)}$$

Bemærk, at (7) indeholder formel (10) i afsnit 1 som specialtilfælde.

Også den vilkårlige lineære 1. ordens differensligning, som vi behandlede i afsnit 2, kan generaliseres til systemer, og tilsvarende vektor-matrix udtryk for løsningen kan udledes. Vi går ikke nærmere ind på sådanne generelle systemer, men vil i stedet uddybe formel (6), løsningen i det homogene tilfælde.

Normalt (men ikke altid) vil matricen A have n lineært uafhængige egenvektorer $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n$. Antag dette, og lad de tilhørende egenværdier være $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Der gælder altså

$$A\boldsymbol{q}_i = \lambda_i \boldsymbol{q}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{8}$$

Betragt en vilkårlig startvektor $\boldsymbol{x}_0$. Den kan opløses efter $\boldsymbol{q}_i$ 'erne, dvs der findes tal $c_1, c_2, \cdots, c_n$, således at

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n. \tag{9}$$

Af (9) følger under gentagen brug af (8):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0 &= c_1 A\boldsymbol{q}_1 + c_2 A\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n A\boldsymbol{q}_n \\
&= c_1\lambda_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{q}_n, \\
\boldsymbol{x}_2 = A\boldsymbol{x}_1 &= c_1\lambda_1^2\boldsymbol{q}_1 + c_2\lambda_2^2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2\boldsymbol{q}_n \\
&\cdots \\
\boldsymbol{x}_t &= c_1\lambda_1^t\boldsymbol{q}_1 + c_2\lambda_2^t\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^t\boldsymbol{q}_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Da c_i 'erne er vilkårlige, kan ligning (10) opfattes som en mere detaljeret beskrivelse af, hvordan løsningen til ligning (5) ser ud, end løsningsudtrykket (6) afslører. Vi fremhæver dette resultat:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{t+1} = A\boldsymbol{x}_t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{x}_t = c_1\lambda_1^t\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^t\boldsymbol{q}_n, \qquad (11)}$$

hvor $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$. Bemærk ligheden med løsningsudtrykket for differentialligningssystemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ i det tilfælde, hvor den karakteristiske ligning for A ikke har dobbeltrødder, se Kapitel 4, afsnit 3-4.

Vi har ovenfor underforstået, at systemet (5) er reelt. Ofte vil nogle af egenværdierne for A og dermed også de tilhørende egenvektorer være imaginære, dvs (11) må opfattes komplekst, men den angiver stadig løsningen. Ligesom i tilfældet med systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ fremkommer der da *par af komplekst konjugerede rødder/egenvektorer*, og ved udskrivning af (11) som et reelt udtryk giver disse led anledning til reelle led af typen $\alpha^t \cos\omega t$ og $\alpha^t \sin\omega t$ i hver enkelt $\boldsymbol{x}_t$ -koordinat.

Samme lighed med det, vi kender fra Kapitel 4, findes i tilfældet, hvor A ikke har n lineært uafhængige egenvektorer. Som vist i Lineær Algebra vil årsagen hertil altid være den, at der blandt egenværdierne findes multiple rødder uden "det fulde antal egenvektorer". Hvis f.eks. $\lambda = 3$ er dobbeltrod i den karakteristiske ligning for A, men kun har en enkelt tilhørende egenvektorretning, $\boldsymbol{q}$, så vil der ud over leddet med $3^t\boldsymbol{q}$ i løsningsudtrykket også optræde et led, hvor både 3^t og $t\,3^t$ indgår i de enkelte koordinater.

Lad os til slut nævne, at et *inhomogent system* af typen

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = A\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}_t$$

i simple tilfælde kan løses ved *gætning* efter de sædvanlige principper af en enkelt inhomogen løsning, hvortil den fuldstændige homogene løsning så adderes.

EKSEMPEL 3. Vi vil løse differensligningssystemet

$$\begin{cases} x_{t+1} &= -2x_t + 3y_t \\ y_{t+1} &= 4x_t + 2y_t, \end{cases}$$

der er af formen (5), med $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Ved opstilling af den karakteristiske ligning for A (gennemfør dette!) finder man egenværdierne $\lambda = \pm 4$, og videre finder man for $\lambda = 4$ egenvektoren $(1, 2)^\top$, samt for $\lambda = -4$ egenvektoren $(3, -2)^\top$. Iflg. (11) er systemets fuldstændige løsning da givet ved

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = c_1 4^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2(-4)^t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

ØVELSE 5. (1) Find den partikulære løsning til systemet i Eksempel 3, der er bestemt ved $x_0 = 1,\ y_0 = 0$.

(2) Systemet i Eksempel 3 gøres inhomogent, idet der i den første ligning tilføjes leddet "+16" på højre side, mens der ikke ændres noget i den anden ligning. Gæt en *konstant* løsning $(x, y) = (A, B)$ til det inhomogene system. Opskriv derefter dets fuldstændige løsning.

(3) Samme to spørgsmål som (2), men denne gang er det leddet "+2t", der tilføjes på højre side af den første ligning.

4. Ligevægt og stabilitet.

Betragt et autonomt system

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)$$

af samhørende differensligninger. En *ligevægt* $\boldsymbol{x}^*$ for dette system er en vektor, der tilfredsstiller ligningen

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*). \tag{1}$$

Ligevægten kaldes (lokalt) *stabil*, hvis der findes en omegn af $\boldsymbol{x}^*$, således at når blot startvektoren $\boldsymbol{x}_0$ tilhører denne omegn, vil $\boldsymbol{x}_t$ konvergere mod $\boldsymbol{x}^*$.

Undersøgelse af lokal stabilitet kræver udregning af den såkaldte *funktionalmatrix* $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*)$, iflg. side 150 lig med den $n \times n$ matrix, hvis ij 'te element er $f'_{ix_j}(\boldsymbol{x}^*)$, altså den i 'te koordinat af $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ differentieret partielt mht x_j og udregnet i $\boldsymbol{x}^*$. Ved metoder fra lineær algebra kan følgende resultat vises: *Hvis alle egenværdier* λ_i *for* $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*)$ *har modulus mindre end* 1, *dvs hvis de opfylder* $|\lambda_i| < 1$, *så er ligevægten (lokalt) stabil.* Har omvendt blot én af de nævnte egenværdier modulus større end 1, er ligevægten ikke-stabil.

I bogen Lineær Algebra er der om ikke givet et strengt bevis for dette resultat, så dog argumenteret for det. Argumentationen forudsætter, at $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*)$ har

n *reelle* egenværdier, men udvides uden videre til det hyppigt forekommende tilfælde, hvor nogle af egenværdierne er komplekse. En nærmere betragtning viser i øvrigt, at det heller ikke spiller nogen rolle, at matricen $\boldsymbol{A}$ evt. ikke kan diagonaliseres. Et led som f.eks. $t\lambda^t$ går nemlig ligesom λ^t mod 0 for $t \to \infty$, hvis og kun hvis egenværdiens modulus (eller hvis den er reel: dens numeriske værdi) opfylder kravet $|\lambda| < 1$.

Lad os specielt nævne det simpleste tilfælde $n = 1$, hvor der altså er tale om en enkelt autonom differensligning

$$x_{t+1} = f(x_t). \tag{2}$$

En ligevægt er en løsning x^* til ligningen

$$x^* = f(x^*). \tag{3}$$

Funktionalmatricen er 1×1 matricen $(f'(x^*))$, der har $f'(x^*)$ som eneste egenværdi, og dette tal er med sikkerhed reelt. Ligevægten er således stabil, hvis tallet $f'(x^*)$ opfylder betingelsen

$$-1 < f'(x^*) < 1. \tag{4}$$

Hvis omvendt $|f'(x^*)| > 1$, er ligevægten ustabil. Hvis endelig $|f'(x^*)| = 1$, må der en speciel undersøgelse til.

EKSEMPEL 4. Betragt differensligningen

$$x_{t+1} = x_t \cdot (k + 1 - kx_t), \tag{5}$$

hvor k er en positiv konstant. Det ses, at ligningen er af type (2). For at finde eventuelle ligevægte indsætter vi i (3) og får

$$x^* = x^*(k + 1 - kx^*) \qquad \text{eller} \qquad kx^*(1 - x^*) = 0\,.$$

Det fremgår, at der er *to ligevægte*, nemlig $x_1^* = 0$ og $x_2^* = 1$. Af

$$f'(x^*) = (k + 1) - 2kx^* \tag{6}$$

får vi for det første $f'(0) = k + 1 > 1$, dvs 0 er en ustabil ligevægt uanset værdien af k. For det andet får vi $f'(1) = k + 1 - 2k = 1 - k$, der indsat i (4) giver

$$-1 < 1 - k < 1\,.$$

Højre ulighed er altid opfyldt, når $k > 0$. Venstre ulighed giver $k < 2$, dvs vi har set, at *ligevægten* $x^* = 1$ *er stabil, hvis og kun hvis* $k < 2$. Videre undersøgelse viser, at for lidt større k-værdier er løsningsfølgerne til (5) stadig af en vis regelmæssighed, men for større k kan de opføre sig meget sært, "kaotisk". I den følgende øvelse skitseres nogle trin i en sådan undersøgelse.

ØVELSE 6. **Kaos.** Vi fortsætter studiet af differensligningen (5). Det oplyses, at ligningen ikke kan løses "eksakt" i den forstand, at der angives en formel for x_t udtrykt ved t og x_0. Det bør også nævnes, at denne øvelse i længde og sværhedsgrad går en del ud over det normale i bogen.

1°. Sæt $k = 1$. Udregn på lommeregner eller pc de første 5-10 elementer af den løsning til (5), der fastlægges ved $x_0 = 0.5$. Gentag beregningerne med $x_0 = 3$. Sæt nu $k = 1.8$ og gentag atter beregningerne, først med $x_0 = 0.5$, dernæst med $x_0 = 3$. Bekræftes resultatet i Eksempel 4? Har du indtryk af, for hvilken af de to benyttede k-værdier ligevægten er "mest stabil"?

2°. Sæt $k = 13/6$, og udfør de samme beregninger som i (1). Gentag dem med endnu en startværdi tæt ved 1, fx $x_0 = 1.05$. Hvordan opfører (5) sig for denne k-værdi? Kan du ane et mønster i den måde, løsningsfølgen divergerer på?

3° Vi fortsætter lidt endnu med den specielle k-værdi $13/6$. Resultatet i (2) lader ane, at løsningerne til (5) i grænsen, dvs for store t, svinger mellem to "fortætningspunkter", der synes at være uafhængige af x_0. Dette kan vi undersøge ved at opstille differensligningen

$$y_{t+1} = f(f(y_t)), \tag{7}$$

hvor f er givet ved (5), dvs $f(y) = y \cdot (k + 1 - ky)$. Hvis $\{x_t\}$ er en vilkårlig løsning til (5), vil (7) derfor være tilfredsstillet både af følgen $x_0, x_2, x_4, \cdots$ og af følgen $x_1, x_3, x_5, \cdots$. - Find samtlige ligevægte for (7), dvs løs ligningen

$$y = f(f(y))$$

fuldstændigt, idet det kan udnyttes, at de to ligevægte for (5), dvs 0 og 1, også begge må være ligevægte for (7). Vis, at 0 og 1 begge er ustabile ligevægte, mens de to andre er stabile. Ser det ud til at stemme, at de to "halvligevægte" for (5), som du hermed har fundet ad teoretisk vej, er de samme som dem, du blev ledt på sporet af ved de numeriske beregninger i (2)?

4°. Gennemfør behandlingen af (7) for vilkårlig $k > 2$. Vis herved, at der findes fire ligevægte, nemlig 0 og 1, der er ustabile, og to andre (angiv udtryk i k for dem!), der er stabile for $2 < k < \sqrt{6} (\approx 2.45)$, ustabile for $k > \sqrt{6}$.

5°. Sæt $k = 2.5$, og udfør beregninger på ligning (7) af samme type som i 1° og 2°. Find endvidere alle løsninger først til ligningen $y = f(f(y))$, så til ligningen

$z = f(f(f(f(z))))$, og udnyt disse løsninger til at fortolke tendensen i de itererede beregninger på (5). Foretag numeriske beregninger også for større k-værdier.

Man siger, at ligning (5) for store k-værdier opfører sig *pseudo-kaotisk*. Iterationsligninger af lignende type som (5) har været benyttet i de senere års meget omtalte *kaos-* og *fraktalteori*.

ØVELSE 7. (1) Find alle ligevægte for differensligningen

$$x_{t+1} = \tfrac{1}{2}(x_t^2 + x_t - 2),$$

og undersøg hver af dem for stabilitet.

(2) Lad $a > 1$ være en konstant. Vis, at differensligningen

$$x_{t+1} = a\, x_t\, e^{-x_t}$$

har en positiv ligevægt x^*. For hvilke a er ligevægten stabil?

5. Differensligninger af højere orden.

En *differensligning af n'te orden* er af formen

$$x_{t+n} = f(t, x_t, x_{t+1}, \cdots, x_{t+n-1}). \tag{1}$$

En række forhold for denne type differensligninger er analoge med, hvad vi har udledt i Kapitel 5 for n'te ordens differentialligninger. Det skal vi straks se eksempler på.

Et sæt *begyndelsesbetingelser* $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$, dvs opgivne værdier af de første n af følgens elementer, vil entydigt fastlægge en løsning til (1). Ligning (1) kan omformes til et system af n 1. ordens differensligninger. Den *fuldstændige* løsning til (1) vil - i de ret få tilfælde, hvor man er i stand til at udlede den - være af den generelle form

$$x_t = \text{udtryk}(t, c_1, c_2, \cdots, c_n), \tag{2}$$

hvor c_i 'erne er indbyrdes uafhængige konstanter. Ligning (1) kan opfattes både i det reelle og i det komplekse talområde.

Vi vil især se på tilfældet $n = 2$, dvs differensligninger af 2. orden. Vi nøjes endda stort set med den *lineære 2. ordens differensligning med konstante koefficienter*, der er af formen

$$x_{t+2} + a\, x_{t+1} + b\, x_t = f_t, \tag{3}$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ er givne konstanter og $\{f_t\}$ en given talfølge. I det *homogene* tilfælde er $\{f_t\}$ nulfølgen, dvs ligningen er

$$x_{t+2} + a\, x_{t+1} + b\, x_t = 0\,. \tag{4}$$

Her gætter vi på løsninger af formen $x_t = \lambda^t$, hvilket fører til, at λ skal være rod i den såkaldte *karakterligning*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,. \tag{5}$$

Antag, at (5) har to *forskellige* rødder, λ_1 og λ_2. Det viser sig, at den fuldstændige løsning til (4) da kan skrives på kompleks form som

$$x_t = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,. \tag{6}$$

Hvis man opfatter (4) reelt, er (6) stadig gyldig, men med følgende modifikation: Når λ_1 og λ_2 er reelle, skal c_1 og c_2 også vælges reelle, og når λ_1 og λ_1 er komplekst konjugerede, skal c_1 og c_2 også vælges komplekst konjugerede. Den fuldstændige reelle løsning vil da være af formen

$$x_t = k_1 \alpha^t \cos \omega t + k_2 \alpha^t \sin \omega t\,,$$

hvor $\alpha = |\lambda_1| = |\lambda_2|$ og $\omega = \arg \lambda_1 = -\arg \lambda_2$.

Lad os også nævne tilfældet, hvor (5) har en dobbeltrod λ_1 (som i øvrigt da er lig med $-\frac{1}{2}a$). Da er løsningen til (4) givet ved

$$x_t = c_1\, \lambda_1^t + c_2\, t\, \lambda_1^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{eller} \quad \mathbb{C}). \tag{7}$$

I det generelle *inhomogene* tilfælde (3) gælder som for differentialligninger FIL = FHL + φ_t, hvor $\{\varphi_t\}$ er en partikulær løsning. En sådan kan man forsøge at gætte, forudsat at $\{f_t\}$ ikke er for indviklet. De sædvanlige gætteregler gælder stadig, men må modificeres på passende måde.

Til slut bemærkes, at også teorien for den vilkårlige lineære 2. ordens differensligning, hvor konstanterne a og b i (3)/(4) erstattes af givne *følger* $\{a_t\}$ og $\{b_t\}$, i et vist omfang kan kopieres fra behandlingen af den tilsvarende differentialligning, med Wronski-determinanten som et prominent træk, jfr. næstsidste afsnit i Kapitel 5.

EKSEMPEL 5. **Fibonaccis kaniner.** Antag, at kaniner lever evigt, og at en hunkanin fra og med sin anden levemåned føder 1 hunkanin pr måned. Betragt en isoleret kaninpopulation, hvor antallet af hunkaniner i måned t betegnes N_t. I måned $t+2$ vil de nyfødte hunkaniners antal være lig med antallet af hunkaniner to måneder tidligere, dvs i måned t. Samtidig har alle hunkaniner, der fandtes i måned $t+1$, overlevet. Altså gælder

$$N_{t+2} = N_t + N_{t+1}. \tag{9}$$

Denne ligning er nem at iterere: Man skal blot hele tiden addere to tal i følgen for at finde det næste. Starter vi f.eks. med $N_0 = 1$ nyfødt hunkanin, gælder også $N_1 = 1$ og derpå (hvor hankaninerne kommer fra, beskæftiger vi os ikke med): $N_2 = 1 + 1 = 2$, $N_3 = 1 + 2 = 3$ osv. Følgen bliver

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots \tag{10}$$

for nu blot at gøre rede for det første års tid.

Ved overflytning af leddene på højre side ser vi, at (9) er af formen (4) med $a = b = -1$. Løsning af karakterligningen ser således ud:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \tag{11}$$

og den fuldstændige løsning til (9) kan således skrives

$$N_t = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \tag{12}$$

Det kan overraske, at det enkle princip i (10) ikke kan bringes på formel på simplere måde end (12), der involverer irrationale tal, men sådan er det altså. Skal det irrationale aspekt tvinges ud af (12), bliver formlen betydeligt værre. Og med den lige så simple differensligning $N_{t+2} = -N_t + N_{t+1}$ vil det tilsvarende udtryk komme til at indeholde komplekse tal.

Eksemplet går tilbage til den italienske 1200-tals matematiker *Leonardo Fibonacci* (der dog ikke havde mulighed for at angive løsningen på formen (12)). Til ære for ham kaldes talfølger, som er konstrueret efter det mere almene princip (4), for *Fibonacci-følger*.

ØVELSE 8. Fortsættelse af Eksempel 5. (1) Bestem c_1 og c_2 i (12), så den partikulære løsning (10) fremkommer. Afprøv formlen på nogle t-værdier. Hvad er den letteste måde at finde talfølgens elementer på: ved differensligningen eller ved løsningsformlen? Er svaret på dette spørgsmål stadig rigtigt, når vi kommer op på meget store t-værdier (og når vi er tilfredse med en tilnærmet værdi af N_t)?

(2) Udregn forholdet $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ i det stykke af talfølgen (10), der er opskrevet. Hvordan ser forholdet ud til at variere? Vis ud fra løsningsudtrykket (12), at der faktisk er en sådan "asymptotisk vækstfaktor", og angiv dens værdi både eksakt og med tilnærmelse. Kontrollér den sidste ved at sammenligne med de forhold, du begyndte med at udregne. - Bemærk, at denne undersøgelse ikke kan gennemføres ud fra differensligningen alene, men forudsætter, at løsningsudtrykket (eller noget, der svarer dertil) er udledt.

ØVELSE 9. Udregn de første 10 elementer af den partikulære løsning $\{x_t\}$ til differensligningen

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} + 3x_t,$$

der er bestemt ved $x_0 = 0,\ x_1 = 1$. Find også det eksakte udtryk (6) for løsningen, og kontrollér det via nogle af de udregnede værdier af x_t . Vis, at der ligesom i Øvelse 8 kan bestemmes en asymptotisk vækstfaktor, dvs en grænseværdi for voksende t af forholdet x_{t+1}/x_t , og kontrollér også den numerisk.

ØVELSE 10. Find den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 5^t.$$