2016

1. Domácí úloha do diskrétní matematiky

Skupina 1.

1. Cieslar Michal
2. Čábera Jakub
3. Drengubiak Martin
4. Eis Pavel
5. Farský Janci

Úloha 1.

Zjistěte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí:

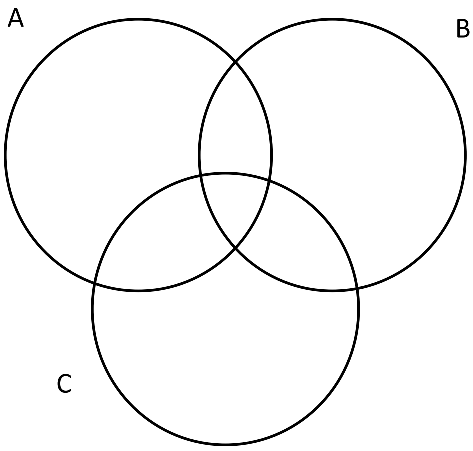
$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

V případě kladné odpovědi proveďte důkaz, v opačném případě najděte kontrapříklad.

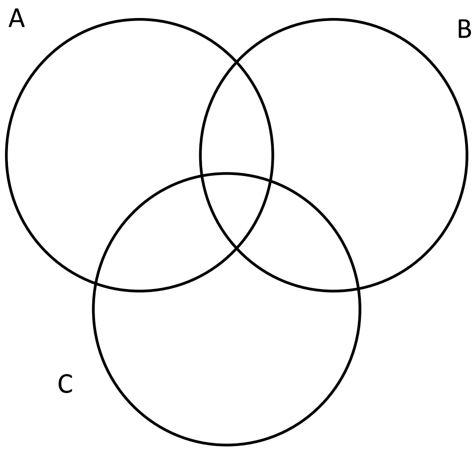
Řešení:

$$x \in (A \cup B) - C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge \notin \mathrm{C} \Leftrightarrow (\mathrm{x} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{x} \in \mathrm{B}) \wedge \mathrm{x} \notin \mathrm{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \mathrm{x} \notin \mathrm{C}) \vee (\mathrm{x} \in \mathrm{B} \wedge \mathrm{x} \notin \mathrm{C}) \Leftrightarrow (\mathrm{A} - \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{C})$$



$(A \cup B) - C$



$(A - C) \cup (B - C)$

Úloha 2.

Na množině $A = \{a, b, c, d\}$ je tabulkou dána operace ○ a na množině $B = \{1,2,3,4\}$ operace ✶. Zjistěte, zda-li existuje isomorfismus mezi grupoidy (A, ○) a (B, ✶). V případě kladné odpovědi isomorfismus najděte, v opačném případě zdůvodněte jeho neexistenci.

○	*a*	*b*	*c*	*d*
a	d	c	a	b
b	c	c	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	b

✶	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	4	1
4	4	1	1	1

Řešení:

○

Neutrální prvek = c

b inverzní a, b, d

a inverzní b

d inverzní b

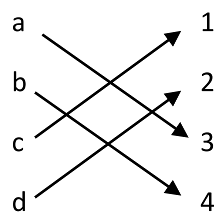
✶

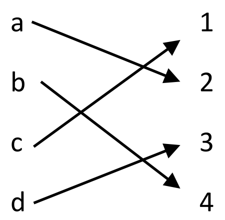
Neutrální prvek = 1

2 inverzní 4

3 inverzní 4

4 inverzní 2, 3, 4





✶	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1	2	3	4
2	2	4	4	1
3	3	4	2	1
4	4	1	1	1

✶	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	4	1
4	4	1	1	1

Zobrazení 1 není isomorfní.

Zobrazení 2 je isomorfní.

Úloha 3.

Pomocí metody Karnaughovy mapy minimalizujte funkci:

$$f(x_1, x_2 x_3, x_4,) = x_1 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3$$

Řešení:

$$f(x_1, x_2 x_3, x_4,) = x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

X_1

		1	
1		1	
		1	1

X_2

X_4

X_3

Úloha 4.

Nad množinou prvotních formulí $\{p, q, r\}$ je dána formule

$f = (\neg p \rightarrow q) \ \vee \ r$ a množina T tří formulí

$T = \{(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (\neg q \rightarrow r)), (p \rightarrow \neg q) \vee r \vee ((\neg p \rightarrow \neg q) \wedge r), p \vee (\neg q \wedge p) \vee r\}$

Zjistěte a svoje odpovědi zdůvodněte:

- Je množina T splnitelná? = Ano
- Je formule f tautologie? = Ano
- Je formule f kontradikce? = Ne
- Je formule f tautologickým důsledkem množiny T? = Ano
- Formulou predikátového počtu zapište:

$$Rovnice\ x^3 - 6x + 4 = 0\ má\ alespoň\ jeden\ reálný\ kořen.$$

Řešení:

$f_1 = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (\neg q \rightarrow r))$

$f_2 = (p \rightarrow \neg q) \vee r \vee ((\neg p \rightarrow \neg q) \wedge r)$

$f_3 = p \vee (\neg q \wedge p) \vee r$

p	q	r	$(\neg p \rightarrow q) \ \vee \ r$	f_1	f_2	f_3
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1			
1	0	1	1			
1	0	0	1			
0	1	1	1			
0	1	0	1			
0	0	1	1			
0	0	0	1			

$(\neg p \rightarrow q) \ \vee \ r$ je vždy 1 → ***f je tautologie*** a ***není to kontradikce*** (Musely by vycházet samé 0).

T je splnitelná, jelikož $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$ je alespoň jednou rovná 1.

$f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 => f$, $1 \wedge 1 \wedge 1 => 1$. Z toho vyplývá, že f je tautologickým důsledkem množiny T.

Predikátový počet

$$\exists x \in R : \ x^3 - 6x + 4 = 0$$

Úloha 5.

Dokažte, že pro každé nenulové přirozené číslo n platí:

$$1 * 2 * 3 + 2 * 3 * 4 + \cdots + n * (n+1) * (n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Řešení:

Pro n = 1

L. S.: $1 * (1+1) * (1+2) = 2 * 3 = 6$

P. S.: $\frac{1}{4} * 1 * (1+1) * (1+2) * (1+3) = 2 * 3 = 6$

$$L = P$$

Předpoklad:

Výraz ze zadání (dále už jen jako *A*) platí pro *n = k*, potom lze dokázat, že taky platí pro *n = k+1*.

$$1 * 2 * 3 + 2 * 3 * 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = V(k+1)$$

Lze vidět, že $1 * 2 * 3 + 2 * 3 * 4 + \cdots + k(k+1)(k+2)$ se rovná Levé straně výrazu A, potom se nahradí pravou stranou výrazu A.

$$\frac{1}{4} * k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k + 1\right) = L.S.\,výrazu\; V(k+1)$$

Porovná se s Pravou stranou výrazu V(k+1)

$$(k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k + 1\right) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$(k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k + 1\right) = (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k + 1\right)$$

Z toho vyplývá, že Levá strana = Pravé straně ➔ Předpoklad o výrazu A byl správný.