Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 10.1.2018, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Čtvrtý koeficient Fourierovy řady periodického signálu se spojitým časem $x(t)$ je $c_{x,4} = 1$. Určete tentýž koeficient posunutého signálu $y(t) = x(t - \frac{1}{16}\mu s)$, víte-li, že základní frekvence periodického signálu je $f_1 = 1$ MHz.

Viz A

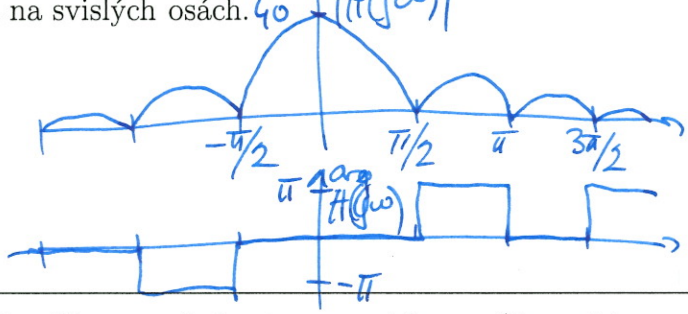
$c_{y,4} = 1 \cdot (-j) = \underline{\underline{-j}}$

Příklad 2 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro} \quad -2s \le t \le 2s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ $\tau = 4$ Viz A

Vypočtěte jeho spektrální funkci $X(j\omega)$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou). Vyznačte důležité hodnoty na ose ω i na svislých osách.

$X(j\omega) = 40 \text{ sinc}(2\omega)$

průchody: $2\omega = \pi$
$\omega = \frac{\pi}{2}$

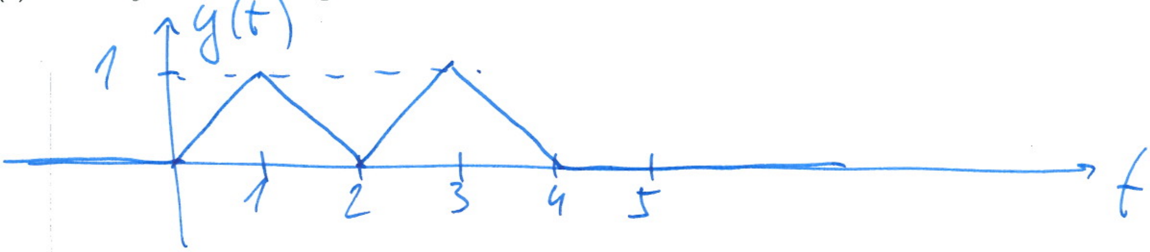


Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0 \\ -t+1 & \text{pro} \quad 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \delta(t-1) + \delta(t-3).$$

Viz A

$\delta(t)$ označuje Diracův impuls.



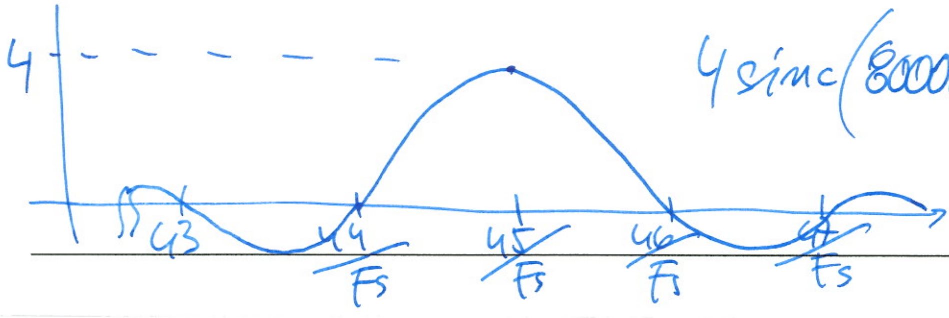
Příklad 4 Popište princip fungování anti-aliasingového filtru při vzorkování.

Viz A

Příklad 5 Vzorek signálu s diskrétním časem je: $x[45] = 4$. Napište a/nebo nakreslete, jak bude tento vzorek přispívat do ideálně rekonstruovaného signálu se spojitým časem. Víte, že vzorkovací frekvence $F_s = 8000$ Hz. Pomůcka: rekonstrukční funkce "spouštěná" každým vzorkem je kardinální sinus. Musíte ho správně natáhnout a umístit na časové ose a vynásobit hodnotou vzorku.

Viz A

$4 \text{ sinc}\left(8000\pi\left(t - \frac{45}{8000}\right)\right)$



B

Příklad 6 Hodnota Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) reálného signálu $x[n]$ pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0.1\pi$ rad je $\tilde{X}(e^{j0.1\pi}) = 5 + 2j$.
Určete hodnotu DTFT na zadané normované kruhové frekvenci nebo napište jasně "nejde to":

viz A

$\omega = -1.9\pi$ rad. $\tilde{X}(e^{j\omega}) =$ .... to samé (perioda 2π) = $5+2j$

Příklad 7 Systém se spojitým časem má impulsní odezvu $h(t)$. Napište, jaké podmínky musí splňovat $h(t)$ **stabilního** a **kauzálního** systému se spojitým časem.

viz A

Příklad 8 Převeďte diferenciální rovnici systému se spojitým časem
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 0.2\frac{dy(t)}{dt} - 0.1y(t)$ na přenosovou funkci.

viz A

$H(s) =$ ....

Příklad 9 Přenosová funkce systému se spojitým časem je: $H(s) = \frac{s}{s+1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kladné frekvence ω. Přesně určete hodnoty modulu pro $\omega = 0$ rad/s a pro $\omega = \infty$ rad/s.

viz A

Příklad 10 Dokažte, že pro periodický signál s diskrétním časem $\tilde{x}[n]$ s periodou N vzorků jsou koeficienty Diskrétní Fourierovy řady (DFŘ) také periodické s periodou N koeficientů. Pomůcka: použijte definiční vzorec DFŘ: $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

viz A

B

Příklad 11 Určete všechny nenulové koeficienty a jejich hodnoty Diskrétní Fourierovy transformace (DFT) **komplexního** signálu o délce $N = 256$ vzorků, který je dán: $x[n] = \frac{1}{256} e^{j2\pi \frac{17}{256} n}$ Pomůcka: zvažte, zda koeficienty nejdou spíše **najít** než vypočítat.

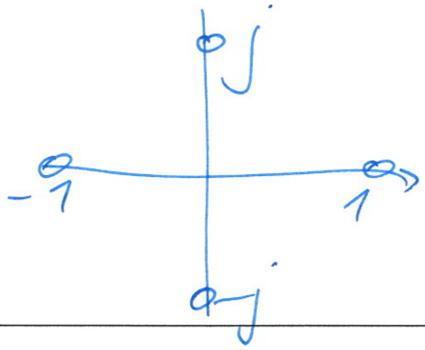
viz A

$X[17] = 1$

Příklad 12 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$ vzorků. Pro $n = 0 \dots 7$ má hodnoty 1 1 1 1 0 0 0 0. Vypočtěte zadaný koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zaokrouhlete na 0.7.

viz A

$X[2] = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = \sum x[n] e^{-j\frac{\pi}{2}n}$



$X[2] = 1 - j - 1 + j = \underline{\underline{0}}$

Příklad 13 Diferenční rovnice číslicového filtru je dána:
$y[n] = x[n] - 0.5x[n-1] + 0.1x[n-2] - 0.5y[n-1] + 0.25y[n-2]$.
Určete přenosovou funkci.

viz A

$H(z) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

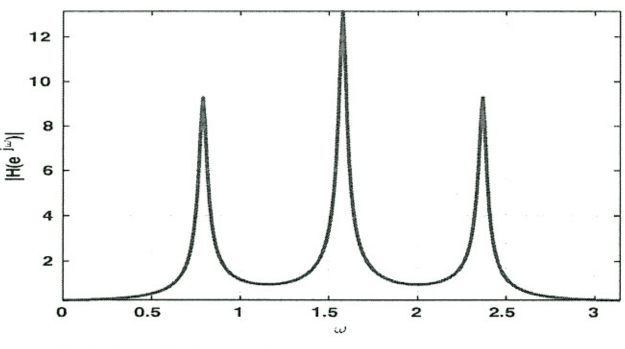
Příklad 14 Frekvenční charakteristika číslicového filtru má pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0.1\pi$ rad hodnotu $H(e^{j0.1\pi}) = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Do filtru vstupuje diskrétní cosinusovka $x[n] = 6\cos(0.1\pi n - \frac{\pi}{2})$. Napište vztah pro signál na výstupu.

viz A

což je $-30\cos(0{,}1\pi n)$

$y[n] = 30\cos\left(0{,}1\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{30\cos\left(0{,}1\pi n - \pi\right)}}$

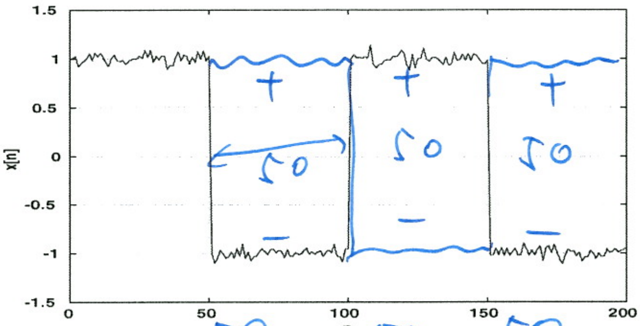
Příklad 15 Modul frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ čistě IIR filtru 6-řádu (ve jmenovateli jsou tedy koeficienty $a_1 \dots a_6$) je na obrázku. Nakreslete přibližně pozice pólů filtru. Nezapomeňte, že pokud jsou póly komplexní, musí být v komplexně sdružených párech.



viz A

B

Příklad 16 Na obrázku je signál o délce $N = 200$ vzorků ovlivněný šumem. Odhadněte zadaný autokorelační koeficient. Použijte standardní vychýlený odhad: $\hat{R}_{vych}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]$.



$R[50] = \ldots \frac{-50 - 50 - 50}{200} = \frac{-150}{200} = -\frac{3}{4}$

Příklad 17 Naměřené hodnoty stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu -6 až 6. Určete hodnotu distribuční funkce $F(x)$ pro zadané x.

viz A

$F(4) = \ldots \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

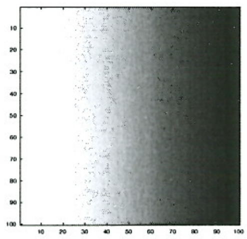
Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly	intervaly x_2			
x_1	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

viz A

$R[n_1, n_2] = \ldots 0 \ldots$

Příklad 19 Nakreslete, jaký bude výsledek operace 2D filtrování $y[k,l] = x[k,l] \star h[k,l]$. Vstup $x[k,l]$ je na obrázku. Výsledek nakreslete do nového obrázku nebo popište. Konvoluční jádro (nebo také 2D filtr, nebo maska) $h[k,l]$ je čtvercové o velikosti 5×5, všechny hodnoty jsou rovny $\frac{1}{25}$.



viz A

Příklad 20 Obrázek o rozměrech 100×100 je celý černý (pouze hodnoty nula), jen 2 pixely jsou bílé: $x[0,0] = x[50,50] = 1$. Určete zadanou hodnotu jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

viz A

$X[1,1] = e^{-j2\pi(0+0)} + e^{-j2\pi\left(\underbrace{\frac{1\cdot 50}{100} + \frac{1\cdot 50}{100}}_{1}\right)} = e^{j0} + e^{j2\pi} = 1 + 1 = 2$