F

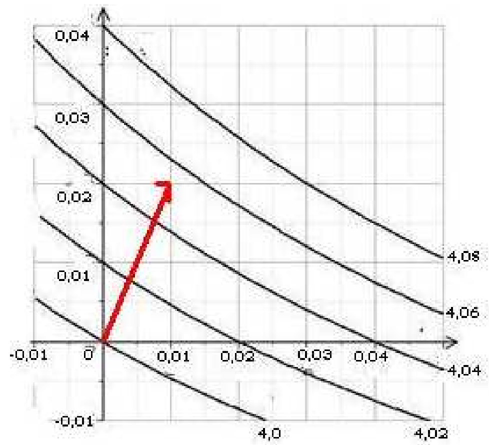
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $x = 3$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[3, 1, \sqrt{10}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \ \textit{je rovnice kuželové plochy}, z = \sqrt{10} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(y) = z(3,y) = \sqrt{9 + y^2}, \textit{ směrnice } k = f'(1) = -\frac{2y}{2 \cdot \sqrt{9 + y^2}}\Bigg|_{y=1} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10}}{10}}}$$

$$Jinak: \ k = z'_y(1,-1) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Bigg|_{\substack{x=3\\y=1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0{,}02;0) - f(0;0)}{0{,}02 - 0} = \frac{4{,}02 - 4}{0{,}02} = \frac{0{,}02}{0{,}02} = \underline{\underline{1}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0{,}01) - f(0;0)}{0{,}01 - 0} = \frac{4{,}02 - 4}{0{,}01} = \frac{0{,}02}{0{,}01} = \underline{\underline{2}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100} \cdot \mathbf{grad} f(A)$.

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{100} \cdot \mathbf{grad} f(A) = (0{,}01; 0{,}02).$$

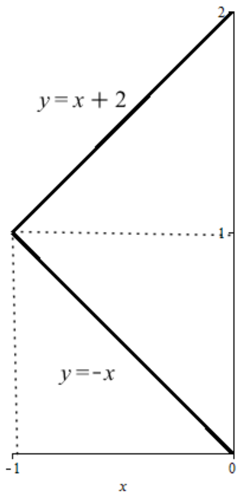
c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0.04;0]$ má $\mathbf{grad} f$ větší velikost?
<u>V bodě B</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?
Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} f(A) \doteq \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \cdot (1, 2) = \underline{\underline{\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1.}}$$

3. Vypočítejte $\int\limits_A xy \, dx \, dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,2]$ a $[-1,1]$.



$$A = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} -1 \le x \le 0 \\ -x \le y \le 2 + x \end{array} \right\}$$

$$\int\limits_A xy \, dx \, dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{2+x} xy \, dy = \int_{-1}^{0} x \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{-x}^{2+x} dx = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{0} x\left((2+x)^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2x + 2x^2\right) dx = \left[x^2 + \tfrac{2}{3} x^3\right]_{-1}^{0} = -1 + \tfrac{2}{3} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{3}}}$$