B.

1. Vypočítejte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \left| \begin{array}{lll} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & dx=\frac{2}{1+t^2}dt & x=0 \Rightarrow t=0 \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+2t-t^2}\,dt = -2\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2-2}\,dt = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

2. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=-x^2+2x-1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $2x-y-1=0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami. (Pro numerické výpočty po dosazení mezí můžete použít kalkulačku.)

$2x-y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-1$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=2, k_2=-\frac{1}{2}$.

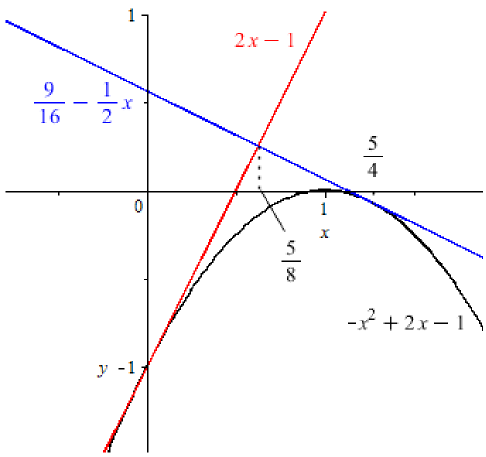
$y'=-2x+2 \qquad -2x+2=2 \Leftrightarrow x=0,\ f(0)=-1,\quad T_1=[0,-1]$

$\qquad -2x+2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4},\ f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{16},\ T_2=\left[\frac{5}{4},-\frac{1}{16}\right]$

$t_1:\quad y=-1+2x,$

$t_2:\quad y=-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{16}-\frac{1}{2}x$

průsečík tečen: $-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}x=-1+2x \Rightarrow x=\frac{5}{8}$.



$$S=\int_0^{\frac{5}{8}}(-1+2x)\,dx+\int_{\frac{5}{8}}^{\frac{5}{4}}\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{2}x\right)dx-\int_0^{\frac{5}{4}}\left(-x^2+2x-1\right)dx=\left[-x+x^2\right]_0^{\frac{5}{8}}+\left[\frac{9}{16}x-x^2\right]_{\frac{5}{8}}^{\frac{5}{4}}-\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_0^{\frac{5}{4}}=$$

$$=-\frac{5}{8}+\frac{25}{64}+\frac{9\cdot5}{16\cdot4}-\frac{25}{16}-\frac{9}{16}\cdot\frac{5}{8}+\frac{25}{64}+\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{84}-\frac{25}{16}+\frac{5}{4}=\frac{125}{768}$$