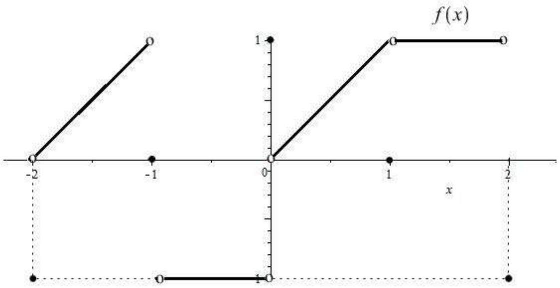
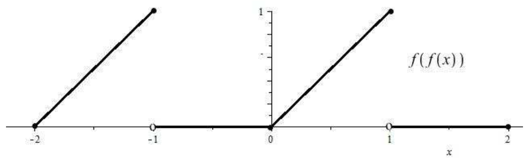
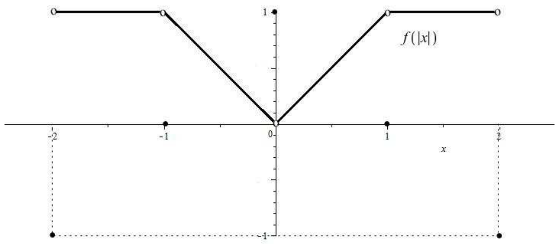
Vzorové řešení zadání $\boldsymbol{E}$

1) $$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in(1,2)\cup\{0\} \\ -1 & x\in(-1,0)\cup\{-2,2\} \\ 0 & x\in\{-1,1\} \\ x & x\in(0,1) \\ x+2 & x\in(-2,-1) \end{cases}.$$

Nakreslete grafy funkcí $f(x),\,(f\circ f)(x),\,f(|x|)$ a určete $f(\langle 0,1\rangle)$ a $f^{-1}(\{\tfrac{1}{2}\})$.







$$\underline{\underline{f(\langle 0,1\rangle)=\langle 0,1\rangle}},\quad \underline{\underline{f^{-1}(\{\tfrac{1}{2}\})=\{-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\}}}$$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Funkce f je v bodě a spojitá, právě když má v a vlastní limitu. ~~***pravdivý***~~ ***<u>nepravdivý</u>***

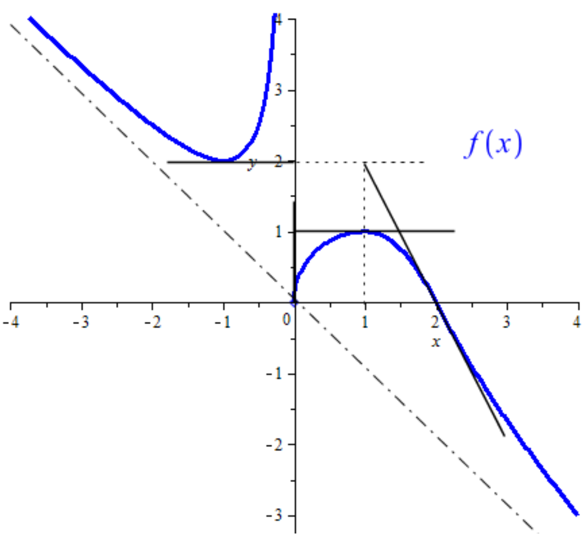
neplatí $\Leftarrow$; ***protipříklad:*** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\ a=1$

b) $\exists x\in\mathbb{R}:|\sin x|=2$ právě když $\exists y\in\mathbb{R}: y^2=-1$ ***<u>pravdivý</u>*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$ konverguje pro $x\in\langle 0,2\rangle$. ~~***pravdivý***~~ ***<u>nepravdivý</u>*** ***protipříklad:***

$2\in\langle 0,2\rangle,\ \sum_{n=1}^{\infty}(2-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}1$ diverguje.

3) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:
$D_f=\mathbb{R}$, je spojitá pro $x\neq 0$,
v bodě $x=0$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,
$f(0)=f(2)=0,\ \ f(-1)=2,\ \ f(1)=1,$
$f'(-1)=f'(1)=0,\ \ f'(2)=-2,\ \ \lim_{x\to 0^+}f'(x)=\infty$,
$f''(x)>0$ pro $x\in(-\infty,0)$ a pro $x\in(2,\infty)$,
$f''(x)<0$ pro $x\in(0,2)$,
přímka $y=-x$ je její asymptota.



4) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\operatorname{arctg}(2x+1)$ ve všech bodech, ve kterých je tečna rovnoběžná s přímkou $x-y+1=0$.

Rovnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

rovnice normály ke grafu funkce v tomto bodě má tvar $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

$x-y+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=x+1 \quad\Rightarrow$ hledané tečny mají směrnici $k=1$ - budeme hledat body x_0, ve kterých je $f'(x_0)=1$:

$$f'(x)=\frac{2}{1+(2x+1)^2}=\frac{2}{4x^2+4x+2}=\frac{1}{2x^2+2x+1}$$

$$\frac{1}{2x^2+2x+1}=1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2+2x+1=1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=0 \vee x=-1}}$$

$x=0: \quad f(0)=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$

rovnice tečny: $y-\frac{\pi}{4}=1\cdot(x-0) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x-y+\frac{\pi}{4}=0}}$

rovnice normály: $y-\frac{\pi}{4}=-1\cdot(x-0) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x+y-\frac{\pi}{4}=0}}$

$x=-1: \quad f(-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

rovnice tečny: $y+\frac{\pi}{4}=1\cdot(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x-y+1-\frac{\pi}{4}=0}}$

rovnice normály: $y+\frac{\pi}{4}=-1\cdot(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x+y+1+\frac{\pi}{4}=0}}$

5) Vypočítejte $\displaystyle\int_0^\infty (x+1)e^{-x}dx$.

$$\int (x+1)e^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x+1 & u'=1 \\ v'=e^{-x} & v=-e^{-x}\end{vmatrix}=-(x+1)e^{-x}+\int e^{-x}dx=-(x+1)e^{-x}-e^{-x}=-(x+2)e^{-x}$$

$$\int_0^\infty (x+1)e^{-x}dx=\Big[-(x+2)e^{-x}\Big]_0^\infty=-\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{e^x}+2=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}+2=\underline{\underline{2}}$$

6) $f(x,y,z)=\ln\dfrac{x^2}{y}+e^z$.

a) Najděte bod A, pro který platí $\operatorname{grad} f(A)=(1,-1,1)$.

b) Vypočítejte $f'_{\mathbf{a}_0}(A)$, je-li $\mathbf{a}_0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\quad \mathbf{a}=(1,1,1)$.

a) $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2}{y}+e^z=2\ln x-\ln y+e^z, \quad f'_x=\dfrac{2}{x},\ f'_y=-\dfrac{1}{y},\ f'_z=e^z \quad \operatorname{grad} f(x,y,z)=\left(\dfrac{2}{x},-\dfrac{1}{y},e^z\right).$

$$\left(\frac{2}{x},-\frac{1}{y},e^z\right)=(1,-1,1)\Leftrightarrow x=2,\ y=1,\ z=0$$

$A=[x,y,z]=\underline{\underline{[2,1,0]}}$

b) $f'_{\mathbf{a}_0}(A)=\operatorname{grad} f(A)\cdot\mathbf{a}_0=(1,-1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt3}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt3}{3}}}$