A

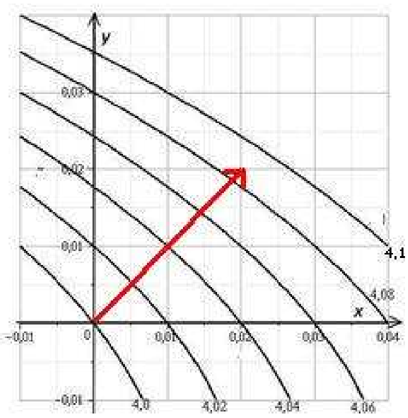
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $x = 2$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[2,1,\sqrt{5}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \ \ \textit{je rovnice kuželové plochy},\ z=\sqrt{5} \Rightarrow z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(y)=z\left(2,y\right)=\sqrt{4+y^2}\,,\ \textit{směrnice}\ k=f'(1)=\left.\frac{2y}{2\cdot\sqrt{4+y^2}}\right|_{y=1}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}}$$

$$\textit{Jinak}:\ k=z'_y\left(2,1\right)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=2\\ y=1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A=[0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0,01;0)-f(0;0)}{0,01-0}=\frac{4,02-4}{0,01}=\frac{0,02}{0,01}=\underline{\underline{2}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0,01)-f(0;0)}{0,01-0}=\frac{4,02-4}{0,01}=\frac{0,02}{0,01}=\underline{\underline{2}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v}=\frac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A)$

$$\mathbf{v}=\tfrac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A)=(0,02;0,02)$$

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B=[0;0.03]$ má $\mathbf{grad}f$ větší velikost?

<u>V bodě B</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

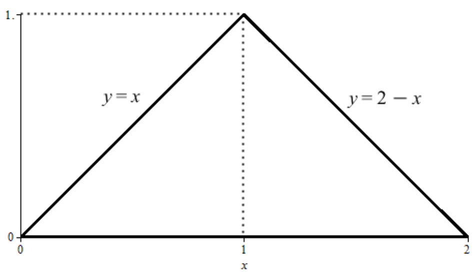
d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$f'_{\mathbf{u}}(A)=\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}f(A)\doteq\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\right)\cdot(2,2)=\underline{\underline{\sqrt{3}+1}}.$$

3. Vypočítejte $\int\limits_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$ a $[1,1]$.



$$A=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}0\le y\le 1\\ y\le x\le 2-y\end{array}\right\}$$

$$\int\limits_A xy\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y}xy\,dx=\int\limits_0^1 y\cdot\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_y^{2-y}dy=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 y\left(\left(2-y\right)^2-y^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2y-2y^2\right)dy=\left[y^2-\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}$$