H. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_1^{\frac43} \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ pomocí substituce $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=t$

(Jmenovatel integrandu upravit – z odmocniny vytknout *x*.)

$$\int_1^{\frac43} \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}\,dx=\int_1^{\frac43} \frac{x-1}{x-x\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\,dx=\int_1^{\frac43} \frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\,dx=\left|\begin{array}{lll}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=t & \frac{x-1}{x}=t^2 & x=1\Rightarrow t=0\\ x=\frac{1}{1-t^2} & dx=\frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt & x=\frac43\Rightarrow t=\frac12\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac12} t^2\cdot\frac{1}{1-t}\cdot\frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt=-2\int_0^{\frac12}\frac{t^3}{(t-1)^3(t+1)^2}\,dt=\int_0^{\frac12}\left(\frac{3}{8(t+1)}-\frac{1}{4(t+1)^2}-\frac{3}{8(t-1)}-\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{2}{(t-1)^3}\right)dt=$$

$$=\left[\frac38\ln|t+1|+\frac{1}{4(t+1)}-\frac38\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right]_0^{\frac12}=\frac38\left(\ln\frac32-\ln\frac12\right)+\frac16-2+4-\frac14+1-1=\frac38\ln3-\frac13$$

2. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=x^2-2x+1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $x-2y+4=0$, druhá je na ni kolmá.
   Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami.
   (Pro numerické výpočty můžete použít kalkulačku.)

$x-2y+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac12x+2$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=\frac12,\ k_2=-2$.

$y'=2x-2$

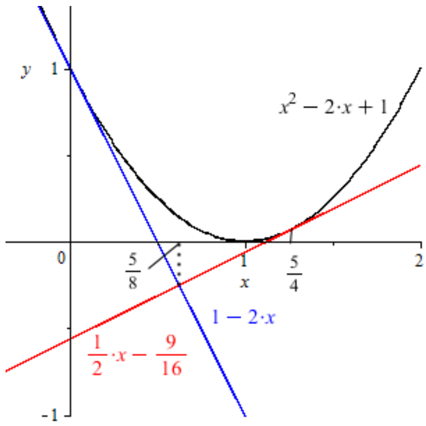
$2x-2=\frac12\Leftrightarrow x=\frac54,\ f\left(\frac54\right)=\frac1{16},\quad T_1=\left[\frac54,\frac1{16}\right]$

$2x-2=-2\Leftrightarrow x=0,\ f(0)=1,\ T_2=[0,1]$

$t_1:\quad y=\frac1{16}+\frac12\left(x-\frac54\right)=\frac12x-\frac9{16}$,

$t_2:\quad y=1-2x$

průsečík tečen: $\frac12x-\frac9{16}=-2x+1\Rightarrow x=\frac58$.



$$S=\int_0^{\frac54}\left(x^2-2x+1\right)dx-\int_0^{\frac58}(1-2x)\,dx-\int_{\frac58}^{\frac54}\left(\frac12x-\frac9{16}\right)dx-=\cdots=\frac{125}{768}\doteq 0{,}16275$$