

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 12.1.2017, skupina C

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Určete střední výkon periodického signálu se spojitým časem s periodou $T_1 = 4$ s. Jedna perioda je dána jako

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro } 0 \leq t < 1\text{s} \\ 3 & \text{pro } 1\text{s} \leq t < 2\text{s} \\ 10 & \text{pro } 2\text{s} \leq t < 3\text{s} \\ 0 & \text{pro } 3\text{s} \leq t < 4\text{s} \end{cases}$$

viz A

$$P_s = \frac{209}{4} = 52,25$$

Příklad 2 Ve 2D-signálu (obrázku) o rozměrech 256×256 pixelů má pixel $x[0,0]$ hodnotu 1, všechny ostatní jsou nulové. Určete hodnoty všech koeficientů jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace $X[m,n]$ pro $m \in 0 \dots 255$ a $n \in 0 \dots 255$

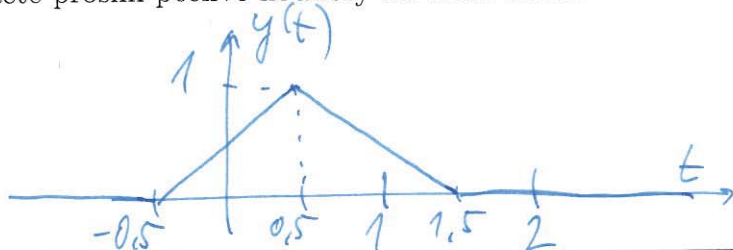
viz A

všechny $X[m,n] = 1$

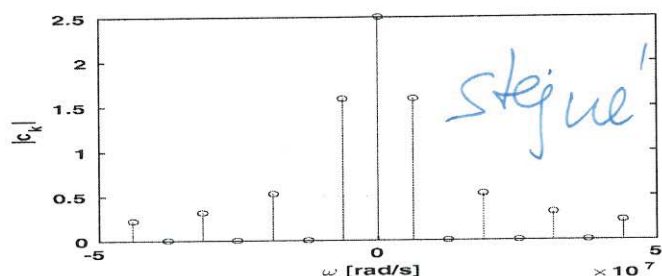
Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



Příklad 4 Na obrázku jsou moduly koeficientů Fourierovy řady (FŘ) signálu $x(t)$. Do stejného obrázku nakreslete moduly koeficientů FŘ signálu $y(t) = x(t - 3 \text{ ms})$.



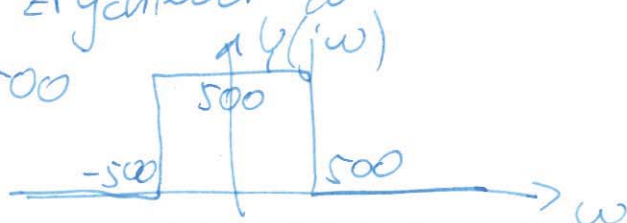
viz A

Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ je $X(j\omega) = \begin{cases} 50 & \text{pro } -5000 \leq \omega \leq 5000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Napište a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ signálu $y(t) = x(\frac{t}{10})$.

$$m = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{m} = 10 \Rightarrow \text{zvětšení } 10\times, \text{ zrychlení } 10\times$$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 500 & \text{pro } -500 \leq \omega \leq 500 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Příklad 6 Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 32$ kHz. Napište vztah pro impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru $h_r(t)$ a nakreslete ji.

viz A

$h_r(t) = \dots\dots\dots$

Příklad 7 Systém se spojitým časem je popsán diferenciální rovnicí $\beta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, kde $x(t)$ je vstup a $y(t)$ je výstup. Napište přenosovou funkci systému $H(s)$.

viz A

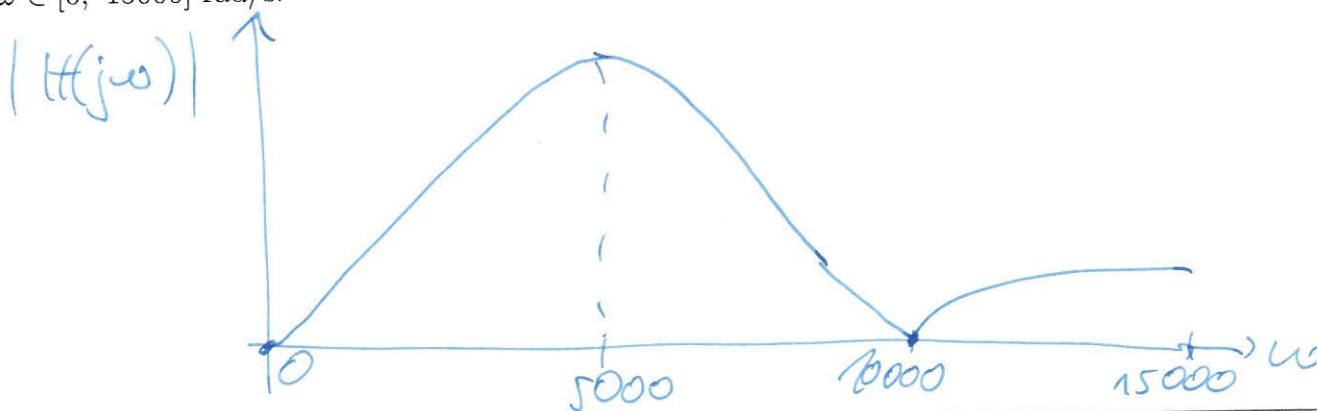
$H(s) = \frac{1}{\beta s + 1}$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:

$$n_{2,3} = \pm 10000j, \quad p_{1,2} = -10 \pm 5000j.$$

Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0, 15000]$ rad/s.

viz A



Příklad 9 Vypočítejte a do tabulky запиšte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskretním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	1	-1	0	1
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	5	0	0	5

Příklad 10 Hodnoty dvou vzorků signálu s diskretním časem $x[n]$ jsou: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, ostatní jsou nulové. Vypočítejte hodnotu Fourierovy transformace s diskretním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu pro kruhovou frekvenci $\omega = \pi$ rad/s.

viz A

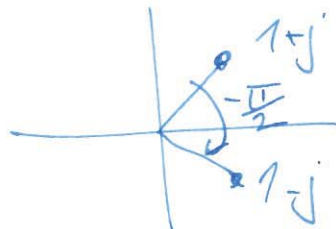
$$\tilde{X}(e^{j\pi}) = 1 \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 0 \cdot \pi}}_1 + (-1) \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 1 \cdot \pi}}_{-1} = 1 + 1 = 2$$

Příklad 11 Provádíme výpočet spektra pomocí diskretní Fourierovy transformace (DFT). Počet vzorků je $N = 256$, vzorkovací frekvence je $F_s = 64$ kHz. Zajímá nás frekvence 20 kHz. Který koeficient $X[k]$ budeme zobrazovat?

$$k = \frac{256 \cdot 20}{64} = 80$$

Příklad 12 Diskretní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující: $x[n] = 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$. Známe hodnotu koeficientu jeho diskretní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n] = 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$.

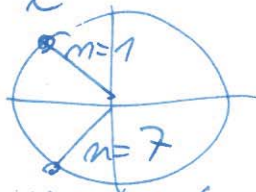
$$m=1$$



$$Y[2] = (1+j) e^{-j \frac{1 \cdot 2}{8} \cdot 2\pi} = (1+j) e^{-j \frac{\pi}{2}} = (1+j)(-j) = 1-j$$

Příklad 13 Diskretní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou $x[0] = 1$, $x[1] = \sqrt{2}$, $x[7] = \sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient $X[5]$ diskretní Fourierovy transformace (DFT).

$$e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = e^{-j \frac{2\pi}{8} 5 \cdot n} = e^{-j \frac{5\pi}{4} n}$$



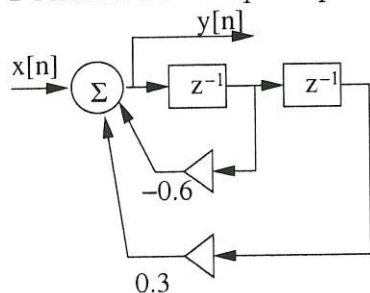
$$\text{pro } n=0 \Rightarrow 1$$

$$n=1 \Rightarrow e^{-j \frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n=7 \Rightarrow e^{-j \frac{35\pi}{4}} = e^{-j \frac{7\pi}{4}} = e^{-j \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

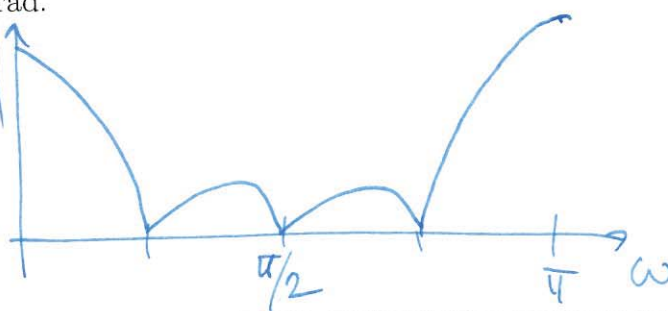
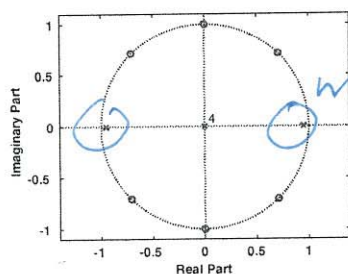
$$X[5] = 1 + \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - 2 = -1$$

Příklad 14 Napište přenosovou funkci IIR filtru podle schématu.



$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}}$$

Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Číslo 4 v počátku značí, že se jedná o čtyřnásobný pól. Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \pi]$ rad.



Příklad 16 Máte k dispozici záznam $\Omega = 10^6$ šachových partií. Popište, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost toho, že v té samé partii jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží.

viz A

Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	0.53	1.83	-2.25	0.86	0.31	-1.30	-0.43	0.34	3.57	2.76

viz A

Proveďte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizací náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2 . Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2			
	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	0	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	2000

viz A

$R[n_1, n_2] = \dots\dots\dots$

Příklad 19 V jazyce C máte v poli Xr o velikosti $N/2+1$ uložené hodnoty reálné složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ a v poli Xi o stejné velikosti imaginární složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$. Napište kód pro odhad spektrální hustoty výkonu, výsledek nechť je v poli PSD o stejné velikosti.

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty náhodného signálu $R[k]$ jsou: $R[0] = 6$, $R[1] = 1$, $R[-1] = 1$, ostatní jsou nulové. Určete, zda se jedná o bílý šum a svou odpověď zdůvodněte.

viz A

Bílý šum: ANO / NE, zdůvodnění: