Vzorové řešení zadání B

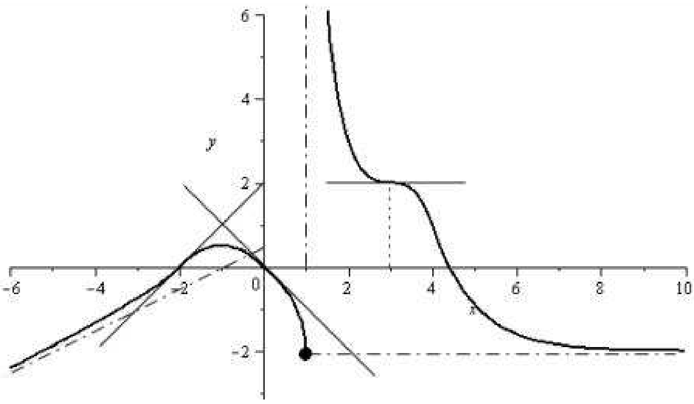
1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 2\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\forall y \in \mathbb{R} : |y-1| \geq 0\right)$ ***pravdivý*** ***~~nepravdivý~~*** ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f ohraničená na $\langle a,b \rangle$, je na $\langle a,b \rangle$ spojitá. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:***
$f(x) = \operatorname{sgn} x, \langle a,b \rangle = \langle -1,1 \rangle$

c) Je-li funkce f prostá, potom je lichá. ***~~pravdivý~~*** ***nepravdivý*** ***protipříklad:***
$f(x) = e^x$

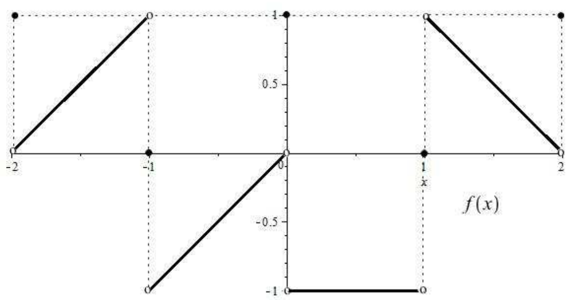
2. Načrtněte graf funkce *f*, pro kterou platí: $D_f = \mathbb{R}$,
v bodě $x=1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zleva,
$f(3)=2,\ f(1)=-2,\ f(0)=f(-2)=0, \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty,\ f'(0)=-1,$
$x=-2$ a $x=3$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-2)=1$ a $f'(3)=0$, $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (1,\infty,)$,
přímka $y=-2$ je její asymptota pro $x \to \infty$, přímka $y = \frac{1}{2}(1+x)$ je asymptota pro $x \to -\infty$.

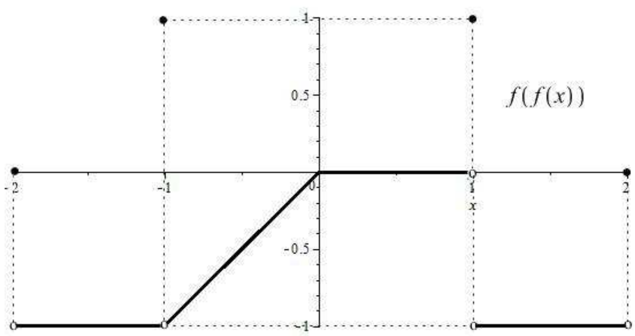


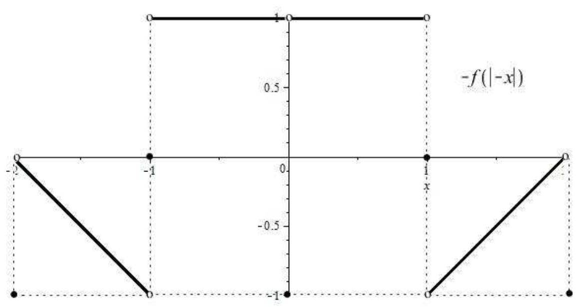
3. Funkce *f* je definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{-2,0,2\} \\ 0 & x \in \{-1,1\} \\ x+2 & x \in (-2,-1) \\ x & x \in (-1,0) \\ -1 & x \in (0,1) \\ 2-x & x \in (1,2) \end{cases}$$

Nakreslete grafy $f(x), (f \circ f)(x), -f(|-x|)$ a najděte $f^{-1}(\{-1\})$.

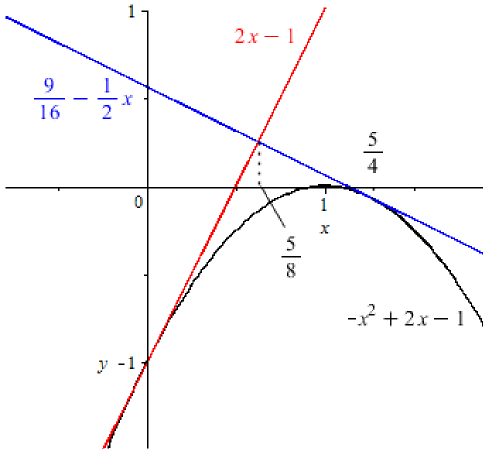






$$f^{-1}(\{-1\}) = (0,1)\,.$$

4. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y = -x^2 + 2x - 1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $2x - y - 1 = 0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami. (Výsledek po dosazení mezí ponechejte ve tvaru součtu zlomků.)



$2x - y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 1$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1 = 2,\ k_2 = -\frac{1}{2}$.

$y' = -2x + 2 \quad -2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0,\ f(0) = -1, \quad T_1 = [0,-1]$

$$-2x + 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4},\ f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{16},\ T_2 = \left[\frac{5}{4}, -\frac{1}{16}\right]$$

$t_1: \quad y = -1 + 2x,$

$t_2: \quad y = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{2}x$

průsečík tečen: $\quad -\frac{9}{16} - \frac{1}{2}x = -1 + 2x \Rightarrow x = \frac{5}{8}$.

$$S = \int_0^{\frac{5}{8}} (-1 + 2x)\,dx + \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{5}{4}} \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{2}x\right) dx - \int_0^{\frac{5}{4}} \left(-x^2 + 2x - 1\right) dx = \left[-x + x^2\right]_0^{\frac{5}{8}} + \left[\frac{9}{16}x - x^2\right]_{\frac{5}{8}}^{\frac{5}{4}} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right]_0^{\frac{5}{4}} =$$

$$= -\frac{5}{8} + \frac{25}{64} + \frac{9 \cdot 5}{16 \cdot 4} - \frac{25}{16} - \frac{9}{16} \cdot \frac{5}{8} + \frac{25}{64} + \frac{1}{3} \cdot \frac{125}{84} - \frac{25}{16} + \frac{5}{4} = \frac{125}{768}$$

5. Vypočítejte s přesností na tři desetinná místa (tj. s chybou menší než 10^{-4}) integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx = \Big|$ řada konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$, můžeme integrovat v libovolných konečných mezích $\Big| = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$

$5 \cdot 5! = 600; \quad 7 \cdot 7! = 35280 > 10^4 \Rightarrow \frac{1}{7 \cdot 7!} < 10^{-4}$;

Chyba v alternující řadě je (v absolutní hodnotě) menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy $\underline{\underline{I = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}}} + R$, kde $|R| < 10^{-4}$.

6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 7 - x^4 + y^3 - 32x - 12y$.

$f'(x,y) = \left(-4x^3 - 32,\ 3y^2 - 12\right) \qquad f'(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\begin{matrix} x^3 = -8 \\ y^2 = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x = -2,\ y = \pm 2$ dva stacionární body $A = [-2, 2],\ B = [-2, -2]$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}, \quad D_2(A) = \begin{vmatrix} -48 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} < 0, \quad D_2(B) = \begin{vmatrix} -48 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} > 0,\ D_1(B) = -48 < 0 \Rightarrow$

v bodě A extrém nenastane, v bodě B nastane maximum s hodnotou $\underline{\underline{f_{\max} = f(-2,-2) = 71}}$