Vstupní písemka

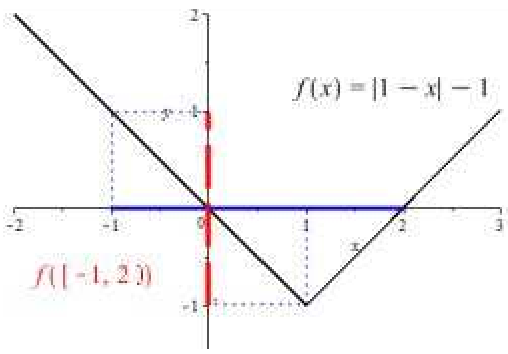
1. Určete pravdivostní hodnotu výrazu $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R} : \sin y = \pi$

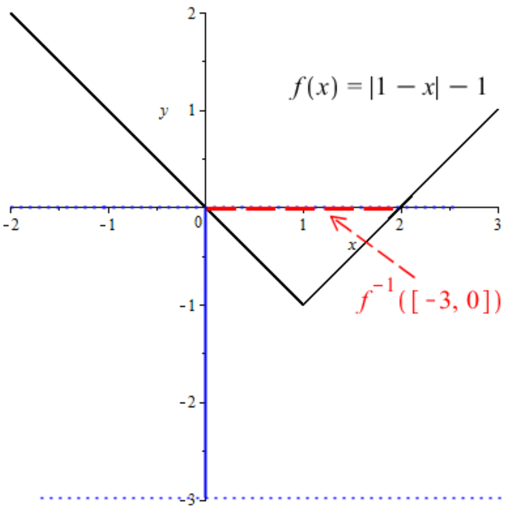
$0 \Leftrightarrow 0$ pravdivostní hodnota je 1.

2. Nechť $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}$. Na $A \times B$ je dána relace $R = \{(1,a),(2,a),(2,b),(3,a)\}$.

   a) Je R surjekce?
      Není zobrazení (obsahuje $(2,a),(2,b)$), nemůže být surjekce
   b) Existuje k R inverzní relace?
      Ano: $R^{-1} = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,2)\}$.

3. Zobrazení *f* je dáno předpisem $y = |1-x| - 1$. Určete $f(\langle -1,2))$ a $f^{-1}(\langle -3,0\rangle)$.





$f(\langle -1,2)) = \underline{\underline{\langle -1,1\rangle}}$,

$f^{-1}(\langle -3,0\rangle) = \{x \mid -3 \le |1-x| - 1 \le 0\} = \underline{\underline{\langle 0,2\rangle}}$:

$-3 \le |1-x| - 1 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le |1-x| \le 1 \quad -2 \le |1-x| \ \textit{platí vždy}.$

$|1-x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

4. Nechť $S = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$, $T = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\}$. Určete $S \circ T$, $T \circ S$ a jejich definiční obor a obor hodnot.

$S = \{[x,x^2], x \in \mathbb{R}\}, T = \{[x,\sqrt{x}], x \in \langle 0,\infty)\}$.

$S \circ T = \left\{\left[x,\left(\sqrt{x}\right)^2\right], x \in \langle 0,\infty)\right\} = \{[x,x], x \in \langle 0,\infty)\}$

$T \circ S = \left\{\left[x,\sqrt{x^2}\right], x \in \mathbb{R}\right\} = \{[x,|x|], x \in \mathbb{R}\} \qquad H_{S\circ T} = \langle 0,\infty), \quad H_{T\circ S} = \langle 0,\infty)$

5. Pro která reálná čísla se funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ rovnají?

$D_f = \left\{x \,\middle|\, \dfrac{x}{x+1} \ge 0\right\} = \{x \mid (x \ge 0 \wedge x > -1) \vee (x \le 0 \wedge x < -1)\} = \{x \mid x \ge 0 \vee x < -1\} = \underline{\underline{(-\infty,-1) \cup \langle 0,\infty)}}$

$D_g = \{x \mid x \ge 0 \wedge x > -1\} = \underline{\underline{\langle 0,\infty)}}$

$f\big|_{\langle 0,\infty)} = g$

6. Určete definiční obor funkce dané předpisem $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{\ln(x^2-1)}}$.

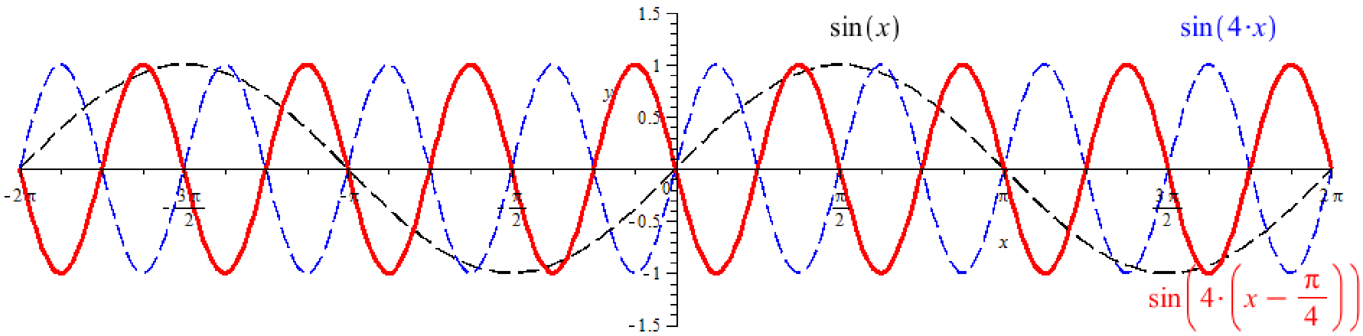
$D_{\ln}:\quad x^2-1>0 \Leftrightarrow \underline{\underline{|x|>1}} \qquad x^2-1>0 \Leftrightarrow 1-x^2<0$

$D_{\sqrt{}}:\quad \dfrac{1-x^2}{\ln(x^2-1)}\ge 0 \qquad \dfrac{1-x^2}{\ln(x^2-1)}\ge 0 \wedge 1-x^2<0 \;\Rightarrow\; \ln(x^2-1)<0$

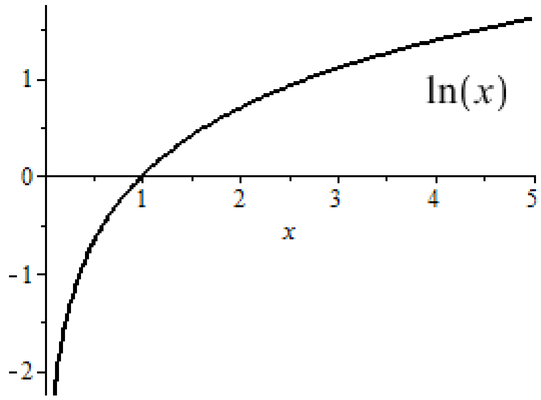
$\ln(x^2-1)<0 \Leftrightarrow 0<x^2-1<1 \quad\Leftrightarrow\quad 1<x^2<2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{1<|x|<\sqrt{2}}}$

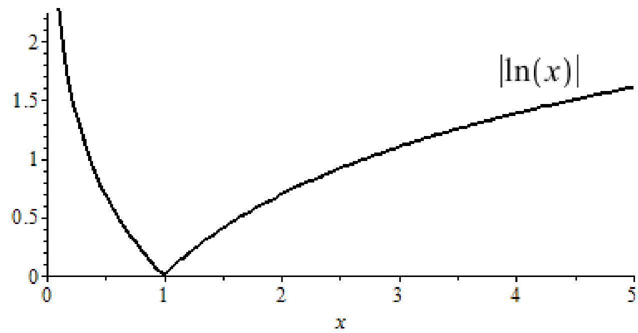
$\underline{\underline{D_f=(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})}}$

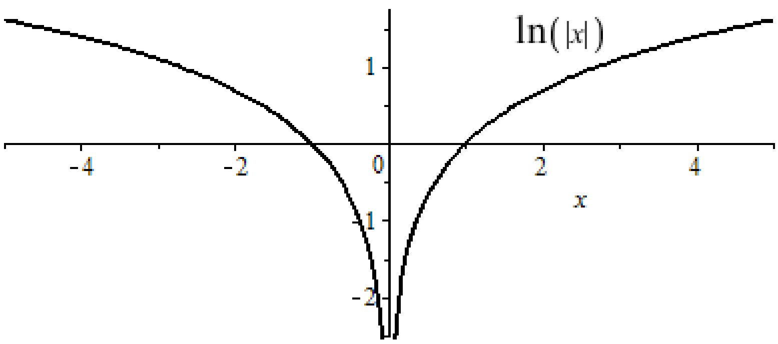
7. Načrtněte graf funkce $f(x)=\sin(4x-\pi)$ na intervalu $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.



8. Načrtněte grafy funkcí $f(x)=\ln x,\ g(x)=|-f(x)|,\ h(x)=f(|x|)$ na $\mathbb{R}$.







$|-f(x)|=|f(x)|=|\ln x|$

9. Pro která reálná čísla platí $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|<1$?

$\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|<1 \Leftrightarrow |2x-1|<3 \Leftrightarrow \quad -3<2x-1<3 \quad\Leftrightarrow\quad -2<2x<4 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<2 \qquad \underline{\underline{x\in(-1,2)}}$

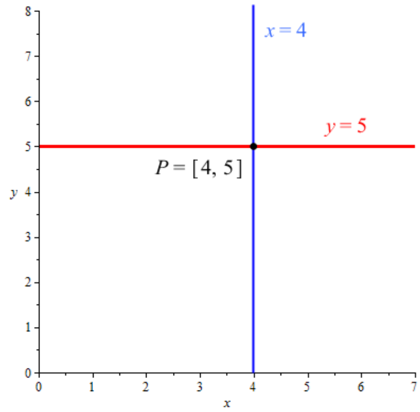
10. Napište rovnici přímky procházející bodem $P=[4,5]$ s vlastností:

a) je rovnoběžná s osou x

$$y=5$$

b) je rovnoběžná s osou y

$$x=4$$

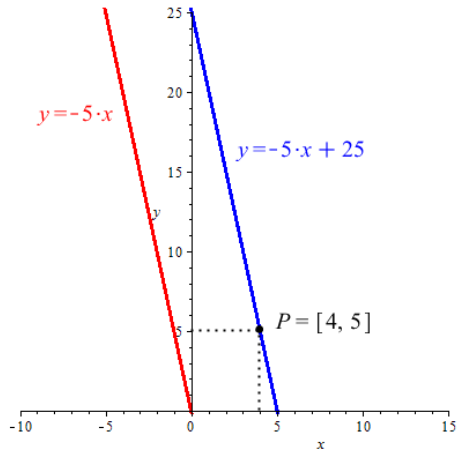


c) je rovnoběžná s přímkou o rovnici $5x+y=0$

$5x+y=0 \Leftrightarrow y=-5x$, přímka má směrnici -5.
Hledaná přímka má mít stejnou směrnici, tedy její rovnice má tvar $y=-5x+q$ a má procházet bodem $P=[4,5]$, tedy musí platit (souřadnice bodu P dosadíme)

$5=-5\cdot 4+q \Rightarrow q=25$. Přímka má rovnici $\underline{\underline{y=-5x+25}}$

nebo v obecném tvaru $\underline{\underline{5x+y-25=0}}$



d) je kolmá k přímce $3x-6y=1$

$3x-6y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}$ zadaná přímka má směrnici $\frac{1}{2}$.
Hledaná přímka má mít směrnici -2,
tedy její rovnice má tvar $y=-2x+q$
a má procházet bodem $P=[4,5]$, tedy musí platit

$5=-2\cdot 4+q \Rightarrow q=13$. Přímka má rovnici $\underline{\underline{y=-2x+13}}$

nebo v obecném tvaru $\underline{\underline{2x+y-13=0}}$