D

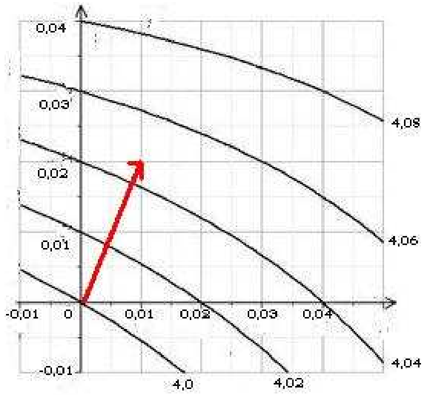
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $x = 1$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[1,-1,\sqrt{2}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \text{ je rovnice kuželové plochy}, z = \sqrt{2} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(y) = z(1,y) = \sqrt{1+y^2}, \text{ směrnice } k = f'(-1) = -\left.\frac{2y}{2\cdot\sqrt{1+y^2}}\right|_{y=-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{5}}{5}}}$$

$$Jinak:\ k = z'_y(1,-1) = -\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0,02;0) - f(0;0)}{0,02-0} = \frac{4,02-4}{0,02} = \frac{0,02}{0,02} = \underline{\underline{1}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0,01) - f(0;0)}{0,01-0} = \frac{4,02-4}{0,01} = \frac{0,02}{0,01} = \underline{\underline{2}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot \mathbf{grad}f(A)$.

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{100}\cdot \mathbf{grad}f(A) = (0,01;0,02)$$

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0.03;0.02]$ má $\mathbf{grad}f$ větší velikost?

<u>V bodě A</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

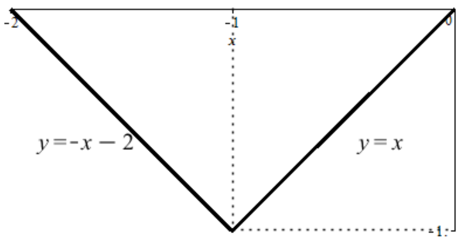
Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}f(A) \doteq \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(1,2) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}+\sqrt{3}}}.$$

3. Vypočítejte $\int_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0], [-2,0]$ a $[-1,-1]$.

$$A = \left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} -1 \le y \le 0 \\ -y-2 \le x \le y \end{array}\right\}$$



$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y-2}^{y} xy\,dx = \int_{-1}^{0} y\cdot\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-y-2}^{y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} y\left(y^2-(y+2)^2\right)dy = -\int_{-1}^{0}\left(2y^2+2y\right)dy =$$

$$= -\left[\frac{2}{3}y^3 + y^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{2}{3}+1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$