Vzorové řešení zadání A

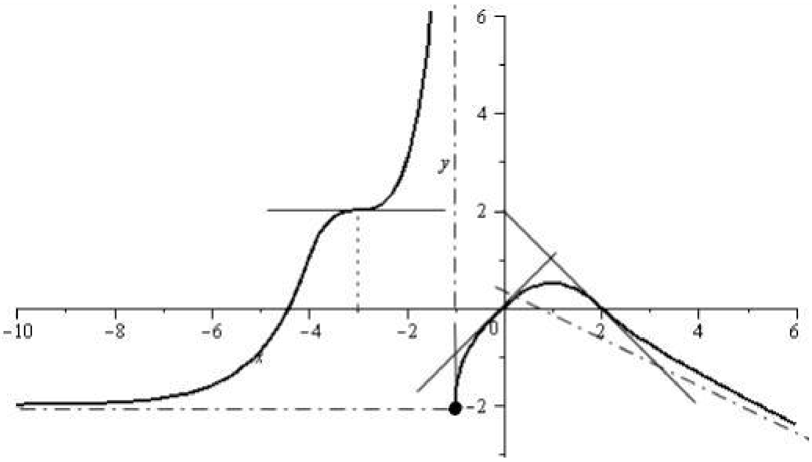
1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : |x-1| = -1\right) \Rightarrow \left(\forall y \in \mathbb{R} : \sin^2 y + \cos^2 y = 1\right)$ **<u>*pravdivý*</u>** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Je-li funkce f spojitá v x_0, potom $\exists\, f'(x_0)$. ~~***pravdivý***~~ **<u>*nepravdivý*</u>** ***protipříklad:***
$f(x) = |x|,\ x_0 = 0$

c) Je-li funkce f lichá, potom je prostá. ~~***pravdivý***~~ **<u>*nepravdivý*</u>** ***protipříklad:***
$f(x) = \sin x$

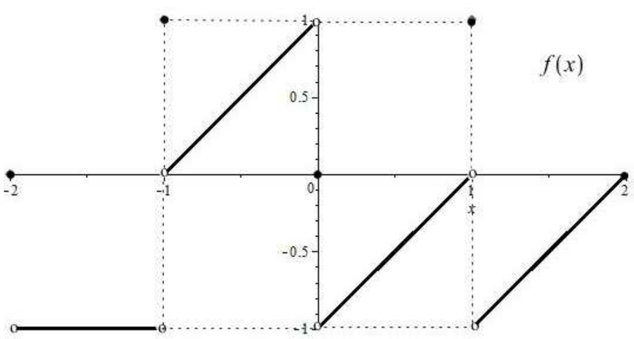
2. Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f = \mathbb{R}$,
v bodě $x = -1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zprava,
$f(-3) = 2,\ f(-1) = -2,\ f(0) = f(2) = 0,\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \infty,\ f'(0) = 1,$
$x = -3$ a $x = 2$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-3) = 0$ a $f'(2) = -1$, $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$,
přímka $y = -2$ je její asymptota pro $x \to -\infty$, přímka $y = \frac{1}{2}(1-x)$ je asymptota pro $x \to \infty$.

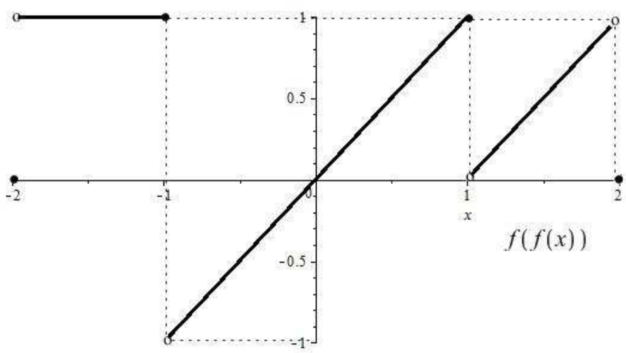


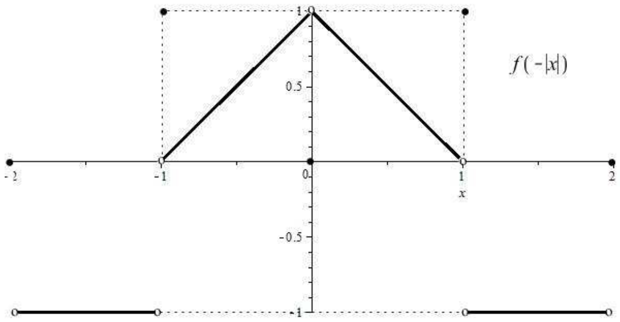
3. Funkce f je definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{-2, 0\} \\ -1 & x \in (-2, -1) \\ 1 & x \in \{-1, 1\} \\ 1 + x & x \in (-1, 0) \\ x - 1 & x \in (0, 1) \\ x - 2 & x \in (1, 2\rangle \end{cases}$$

Nakreslete grafy $f(x), (f \circ f)(x), f\left(-|x|\right)$ a najděte $f^{-1}\left(\{1\}\right)$.

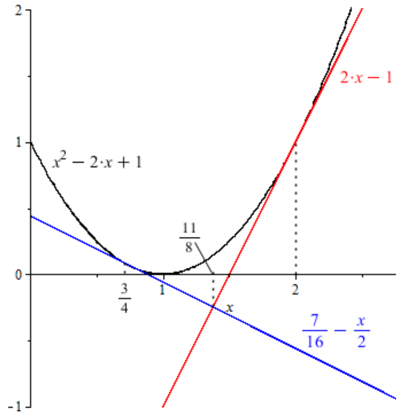






$$f^{-1}\left(\{1\}\right)=\{-1,1\}.$$

4. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=x^2-2x+1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $2x-y-1=0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami. (Výsledek po dosazení mezí ponechejte ve tvaru součtu zlomků.)



$2x-y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-1$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=2,\ k_2=-\frac{1}{2}$.

$y'=2x-2 \quad 2x-2=2 \Leftrightarrow x=2,\ f(2)=1, \quad T_1=[2,1]$

$$2x-2=-\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\tfrac{3}{4},\ f\left(\tfrac{3}{4}\right)=\tfrac{1}{16},\ T_2=\left[\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{16}\right]$$

$t_1: \quad y=1+2(x-2)=2x-3,$

$t_2: \quad y=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{16}-\frac{1}{2}x$

průsečík tečen: $\frac{7}{16}-\frac{1}{2}x=2x-3 \Rightarrow x=\frac{11}{8}$.

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(x^2-2x+1\right)dx-\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}}\left(\frac{7}{16}-\frac{1}{2}x\right)dx-\int_{\frac{11}{8}}^{2}(2x-3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{\frac{3}{4}}^{2}-\left[\frac{7}{16}x-\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}}-\left[x^2-3x\right]_{\frac{11}{8}}^{2}=$$

$$=\frac{8}{3}-4+2-\frac{27}{3\cdot 64}+\frac{9}{16}-\frac{3}{4}-\frac{77}{16\cdot 8}+\frac{121}{4\cdot 64}+\frac{21}{16\cdot 4}-\frac{9}{16\cdot 4}-4+6+\frac{121}{64}-\frac{33}{8}=\cdots=\frac{125}{768}\doteq 0{,}16275$$

5. Vypočítejte s přesností na tři desetinná místa (tj. s chybou menší než 10^{-3}) integrál $I=\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují.

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$I=\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\cdots\right)dx=\Big|$$ řada konverguje $\forall x\in\mathbb{R}$, můžeme integrovat v libovolných konečných mezích $$\Big|=\left[\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\frac{x^5}{5\cdot 6!}-\cdots\right]_0^1=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 6!}-\cdots$$

$5\cdot 6!=3600>10^3 \Rightarrow \frac{1}{5\cdot 6!}<10^{-3}$;

Chyba v alternující řadě je (v absolutní hodnotě) menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy $\underline{\underline{I=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 4!}}}+R$, kde $|R|<10^{-3}$.

6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y)=7+x^3-32y-y^4-12x$.

$f'(x,y) = \left(3x^2 - 12, -4y^3 - 32\right) \qquad f'(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ y^3 &= -8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2,\ y = -2$ dva stacionární body $A = [2,-2],\ B = [-2,-2]$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix}, \quad D_2(A) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -48 \end{vmatrix} < 0, \quad D_2(B) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -48 \end{vmatrix} > 0,\ D_1(B) = -12 < 0 \Rightarrow$

v bodě A extrém nenastane, v bodě B nastane maximum s hodnotou $\underline{\underline{f_{\max} = f(-2,-2) = 71}}$