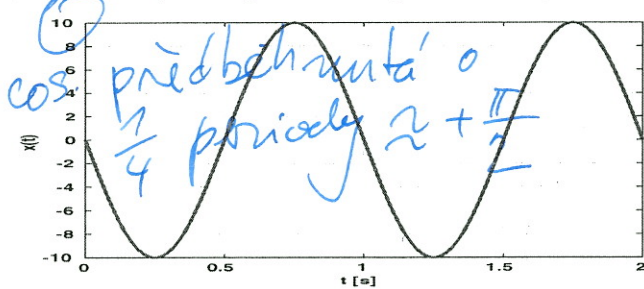


Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 23.1.2018, skupina A

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Na obrázku je periodický signál se spojitým časem (posunutá cosinusovka) s kruhovou frekvencí $\omega_1 = 2\pi$ rad/s. Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů Fourierovy řady c_k .



$$c_1 = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$c_{-1} = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Příklad 2 Fourierova řada reálného periodického signálu se spojitým časem má nenulové koeficienty $c_1 = 4e^{-j\frac{\pi}{8}}$, $c_3 = 4e^{j\frac{\pi}{7}}$. Napište indexy a hodnoty chybějících nenulových koeficientů, nebo "nechybí žádný".

$$c_{-1} = c_1^* = 4e^{+j\frac{\pi}{8}}$$

$$c_{-3} = c_3^* = 4e^{-j\frac{\pi}{7}}$$

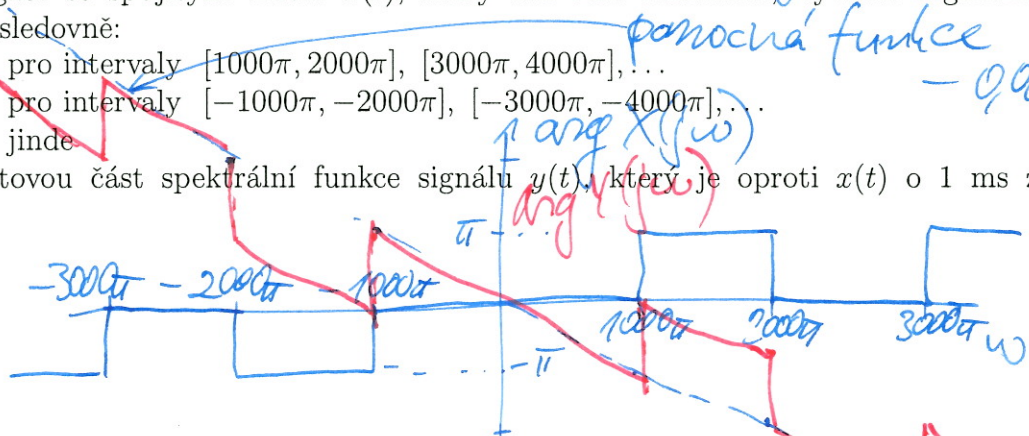
$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

$$\arg Y(j\omega) = \arg X(j\omega) - \omega\tau = \arg X(j\omega) - 0,001\omega$$

Příklad 3 Pro signál se spojitým časem $x(t)$, který má tvar obdélníka, vychází argumentová část spektrální funkce následovně:

$$\arg X(j\omega) = \begin{cases} +\pi & \text{pro intervaly } [1000\pi, 2000\pi], [3000\pi, 4000\pi], \dots \\ -\pi & \text{pro intervaly } [-1000\pi, -2000\pi], [-3000\pi, -4000\pi], \dots \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

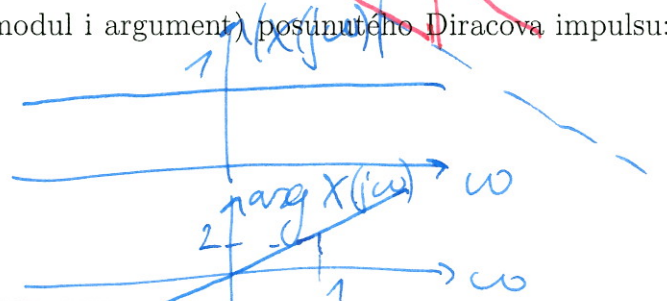
Nakreslete argumentovou část spektrální funkce signálu $y(t)$, který je oproti $x(t)$ o 1 ms zpožděný: $y(t) = x(t - 0.001)$.



Příklad 4 Vypočítejte a nakreslete spektrální funkci (modul i argument) posunutého Diracova impulsu: $x(t) = \delta(t+2)$

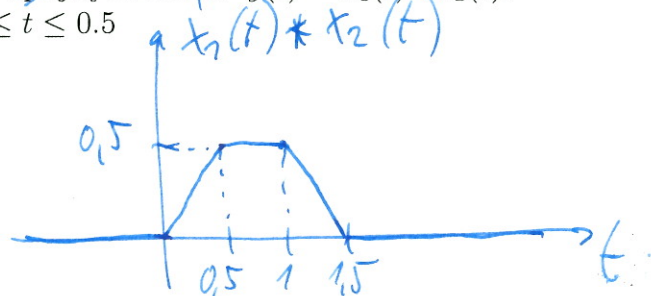
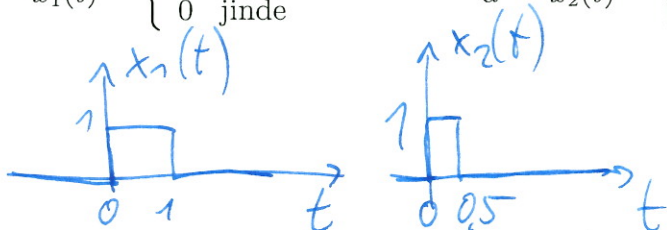
$$X(j\omega) = \int \delta(t+2) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega(-2)} = e^{-j2\omega}$$

modul 1
argument -2ω

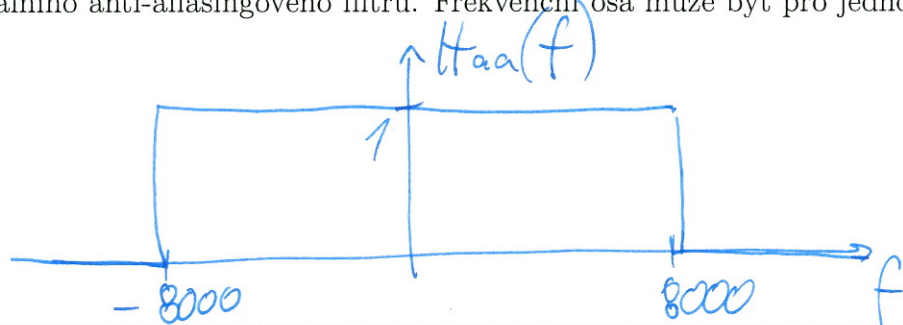


Příklad 5 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



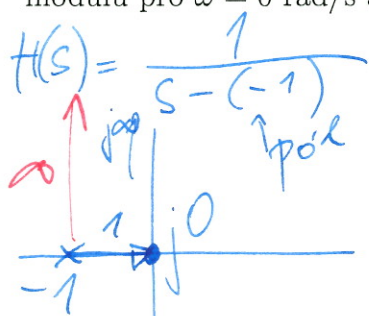
Příklad 6 Vzorkování probíhá se vzorkovací frekvencí $F_s = 16$ kHz. Nakreslete frekvenční charakteristiku ideálního anti-aliasingového filtru. Frekvenční osa může být pro jednoduchost v Hz.



$$F_s/2 = 8000 \text{ Hz}$$

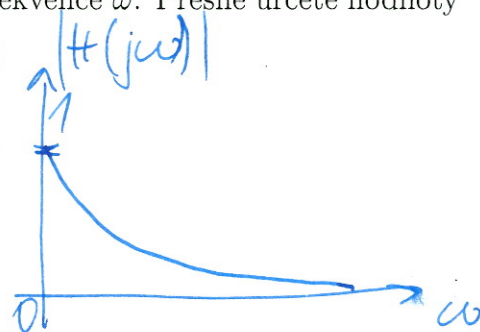
je možné
číst i jeho
modul a argument

Příklad 7 Přenosová funkce systému se spojitým časem je: $H(s) = \frac{1}{s+1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kladné frekvence ω . Přesně určete hodnoty modulu pro $\omega = 0$ rad/s a pro $\omega = \infty$ rad/s.



$$\omega = 0: |H(j0)| = \frac{1}{1} = 1$$

$$\omega = \infty: |H(j\infty)| = \frac{1}{\infty} = 0$$

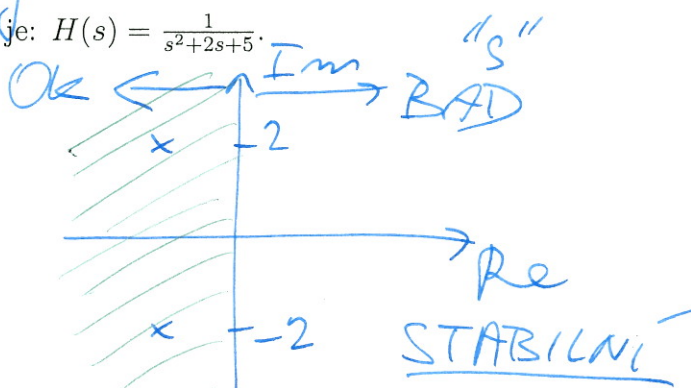


Přesně viz
solution 7.png

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem je: $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$. Určete póly a rozhodněte, zda je systém stabilní.

našel jsem póly:

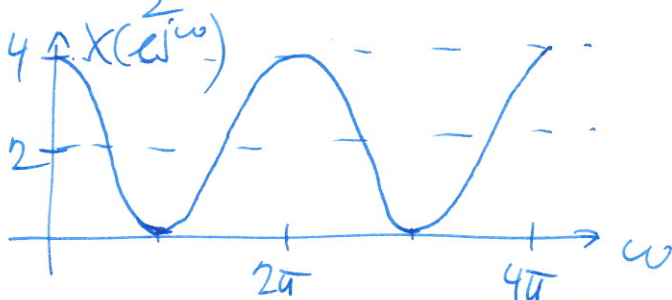
$$s_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4j}{2} = -1 \pm 2j$$



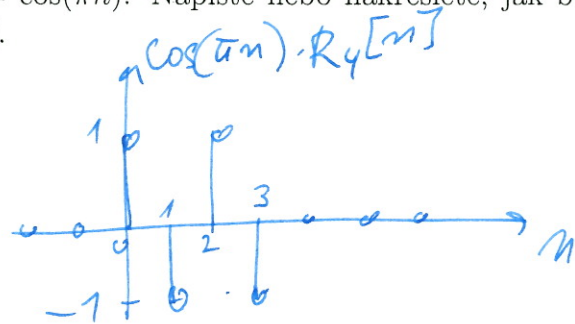
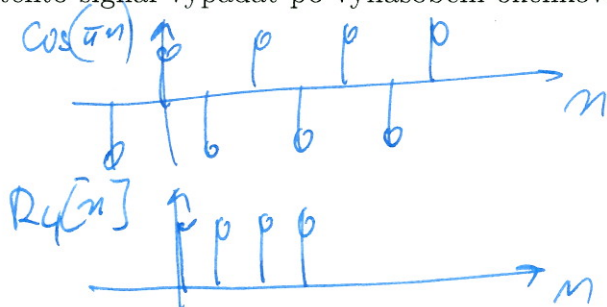
Příklad 9 Diskrétní signál $x[n]$ má pouze tři nenulové hodnoty: $x[-1] = 1$, $x[0] = 2$ a $x[1] = 1$. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskretním časem (DTFT) a nakreslete ji v intervalu normovaných kruhových frekvencí $0 \dots 4\pi$ rad. Vzhledem k tomu, že je signál sudý, vyjde DTFT reálná, nemusíte ji proto dělit na modul a argument.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega} + 2 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j\omega} = 2 + 2 \cos \omega$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$



Příklad 10 Signál s diskretním časem je dán jako $x[n] = \cos(\pi n)$. Napište nebo nakreslete, jak bude tento signál vypadat po vynásobení okénkovou funkcí $R_4[n]$.



Příklad 11 Vypočítejte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 5$:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	4	0	1	0	1
$x_2[n]$	1	-1	0	3	1
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	6	-3	4	12	5

Příklad 12 V libovolném programovacím jazyce (kromě Matlab, Octave, atd), napište úsek kódu pro výpočet modulu k -tého koeficientu Diskrétní Fourierovy transformace (DFT) $|X[k]|$ reálného signálu $x[n]$. Proměnná N obsahuje počet vzorků a vstupní vzorky jsou uloženy v poli x . Je povoleno využít pouze funkce \sin , \cos a $\sqrt{}$; programovací jazyk neumí komplexní čísla, práci s nimi musíte naprogramovat sami.

```

re = 0.0; im = 0.0;
for(n=0; n<N; n++) {
    re += x[n] * cos(-2 * PI *
                    n * k / N);
    im += x[n] * sin(-2 * PI *
                    n * k / N);
}
Xk = sqrt(re * re + im * im);

```

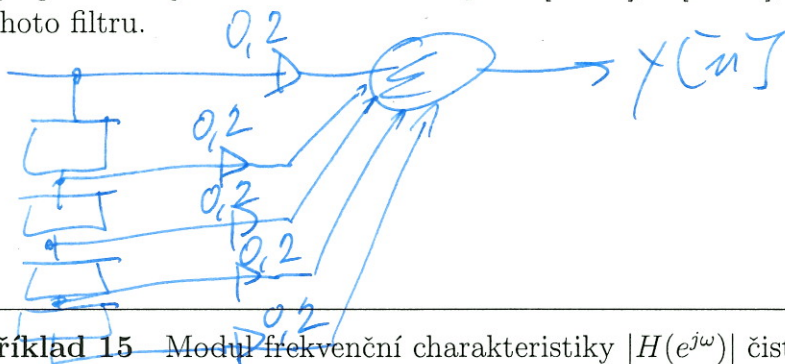
... nebo podobně, každé řešení může být trochu jiné...

Příklad 13 Koeficienty Diskrétní Fourierovy Transformace (DFT) reálného signálu $x[n]$ o délce $N = 16$ jsou $X[k]$. Koeficienty signálu $y[n]$ jsou dány jako $Y[k] = X[k]e^{-j2\pi \frac{3}{16}k}$. Napište matematicky nebo slovně vztah mezi signály $x[n]$ a $y[n]$.

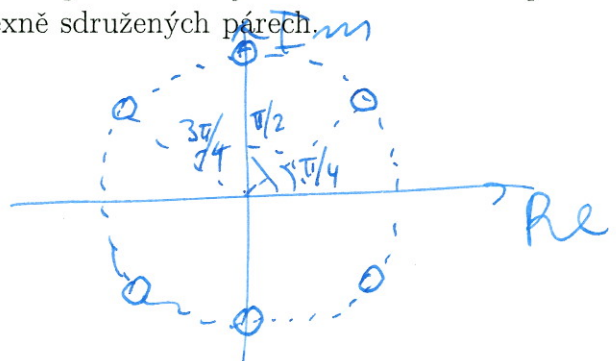
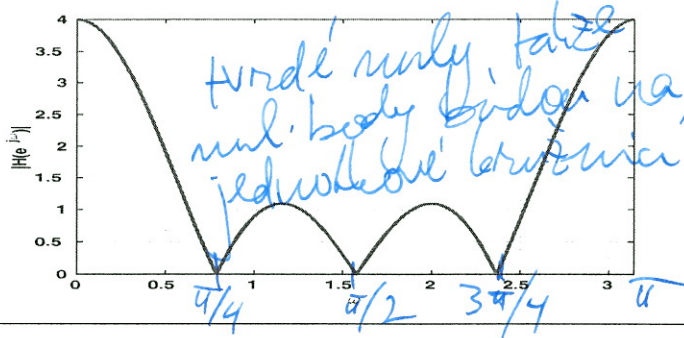
$y[n]$ je $x[n]$ kruhově zpřesněné o 3 vzorky.
 $y[n] = R_{16}[n] \cdot x[\text{mod}_{16}(n-3)]$

vztah pro DFT kruhové posunutého signálu.

Příklad 14 Výstupní vzorek $y[n]$ číslicového filtru je vypočítán jako aritmetický průměr současného a čtyř předcházejících vzorků na vstupu: $x[n-4]$, $x[n-3]$, $x[n-2]$, $x[n-1]$, $x[n]$. Nakreslete schéma tohoto filtru.

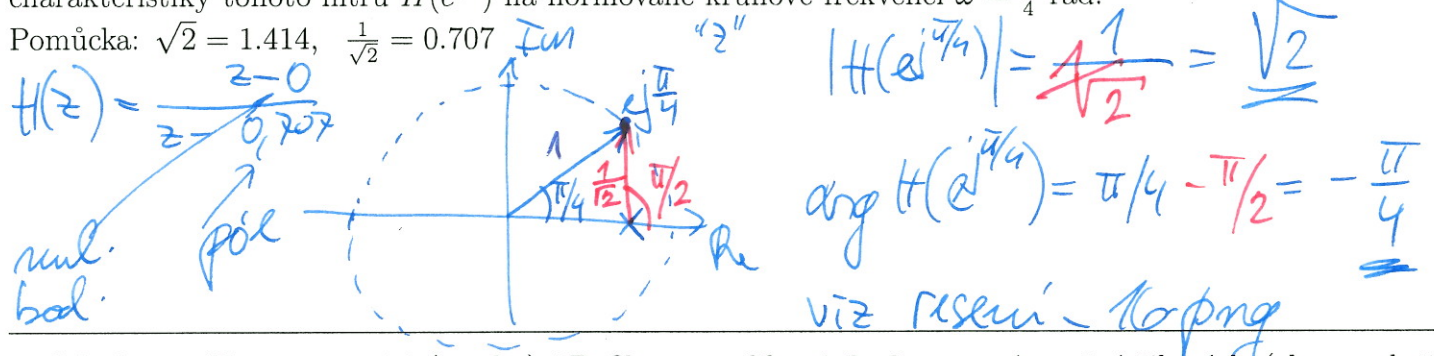


Příklad 15 Modul frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ čistě FIR filtru 6-řádu (v čitateli jsou tedy koeficienty $b_0 \dots b_6$) je na obrázku. Nakreslete v z -rovině přibližně pozice nulových bodů filtru. Nezapomeňte, že pokud jsou nulové body komplexní, musí být v komplexně sdružených párech.



Příklad 16 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = \frac{1}{1-0.707z^{-1}}$. Určete modul a argument frekvenční charakteristiky tohoto filtru $H(e^{j\omega})$ na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad.

Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.414$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$



Příklad 17 Napište matici (masku) 2D filtru o velikosti 3×3 pro zvýraznění šikmých (zleva nahoře doprava dolů) hran v obrázku.

Handwritten solution for Example 17:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{nebo} \quad \pm \frac{1}{4} \dots$$

Příklad 18 Pixely obrázku o rozměrech 100×100 mají hodnoty 0 (černá) až 1 (bílá). Napište, zda bude koeficient $X[0,0]$ jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT) reálný nebo komplexní a v jakém intervalu bude jeho hodnota.

Handwritten solution for Example 18:

$$X[m,n] = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[k,l] \left(e^{-j2\pi \left(\frac{mk}{L} + \frac{nl}{L} \right)} \right) = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[k,l]$$

je to tedy suma všech vzorků. Reálné číslo, interval $0 \dots 10000$.

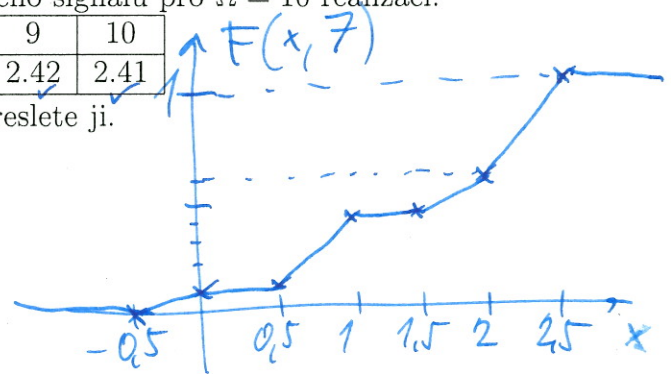
Příklad 19 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_{\omega}[7]$	-0.34	2.03	1.72	0.93	1.71	0.79	0.87	2.48	2.42	2.41

Proveďte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

Handwritten solution for Example 19:

x	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
count	0	1	1	4	4	6	10
$F(x)$	0	0.1	0.1	0.4	0.4	0.6	1.0



Příklad 20 Na obrázku je signál o délce $N = 200$ vzorků ovlivněný šumem. Odhadněte zadaný autokorelační koeficient. Použijte standardní vychýlený odhad: $\hat{R}_{vyh}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]$.

