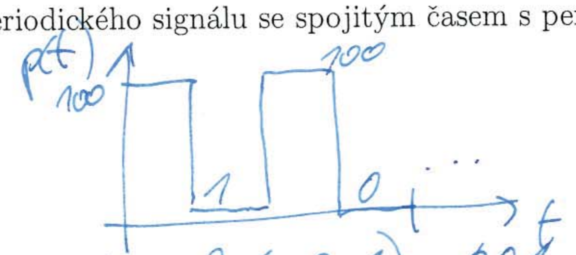
Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 12.1.2017, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Určete střední výkon periodického signálu se spojitým časem s periodou $T_1 = 4$ s. Jedna perioda je dána jako

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro } 0 \le t < 1\text{s} \\ 1 & \text{pro } 1\text{s} \le t < 2\text{s} \\ 10 & \text{pro } 2\text{s} \le t < 3\text{s} \\ 0 & \text{pro } 3\text{s} \le t < 4\text{s} \end{cases}$$



$P_s = \frac{1}{T}\int p(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot(100\cdot 1 + 1\cdot 1 + 100\cdot 1 + 0\cdot 1) = \frac{201}{4} = \underline{50{,}25}$

Příklad 2 Ve 2D-signálu (obrázku) o rozměrech 256×256 pixelů má pixel $x[0,0]$ hodnotu 3, všechny ostatní jsou nulové. Určete hodnoty všech koeficientů jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace $X[m,n]$ pro $m \in 0 \dots 255$ a $n \in 0 \dots 255$

$X[m,n] = \sum_k \sum_l x[k,l]\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)} = 3\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{m0}{256} + \frac{n0}{256}\right)} = 3\cdot e^{-j0} = 3$

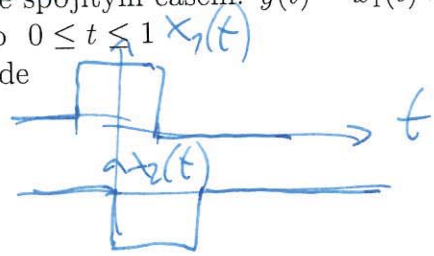
pouze x[0,0] je nenulový, takže z dvojné sumy zbyde jen 1 prvek...

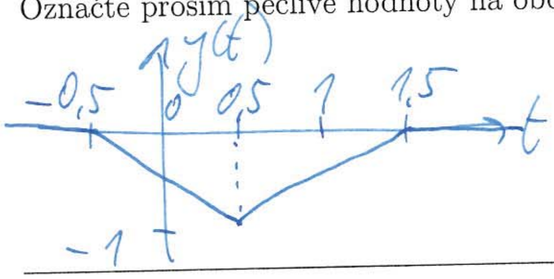
všechny koeficienty $X[m,n] = 3$

Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

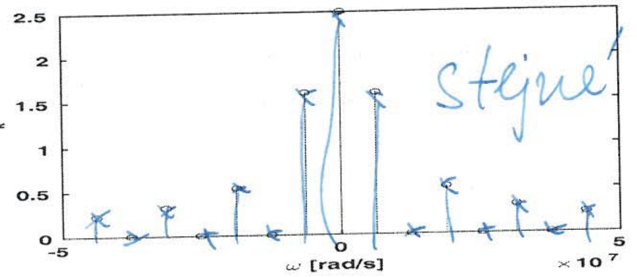
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -0.5 \le t \le 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.





Příklad 4 Na obrázku jsou moduly koeficientů Fourierovy řady (FŘ) signálu $x(t)$. Do stejného obrázku nakreslete moduly koeficientů FŘ signálu $y(t) = x(t - 1\text{ ms})$.



při posunu signálu se koeficienty FŘ násobí $e^{-jk\omega_1\tau}$ ← zpoždění! Abs. hodnota tohoto čísla je 1, takže se moduly <u>nezmění</u>

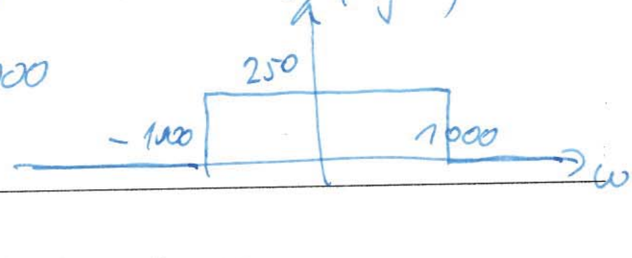
Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ je $X(j\omega) = \begin{cases} 50 & \text{pro } -5000 \le \omega \le 5000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Napište a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ signálu $y(t) = x(\frac{t}{5})$.

$y = x(mt) \Rightarrow Y(j\omega) = X\left(\frac{\omega}{m}\right)$

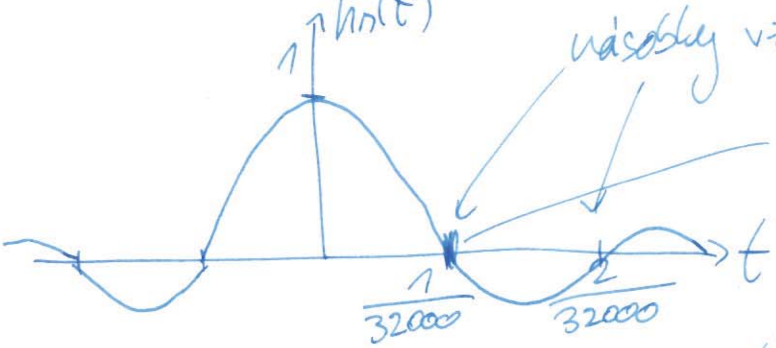
$m = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{m} = 5 \Rightarrow$ zvětšení 5×, zrychlení 5×

$Y(j\omega) = \begin{cases} 250 & \text{pro } -1000 \le \omega \le 1000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



4

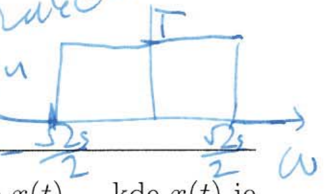
Příklad 6 Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci F_s =32 kHz. Napište vztah pro impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru $h_r(t)$ a nakreslete ji.



$kt = \pi$

$k \cdot \frac{1}{32000} = \pi \quad k = 32000\pi$

Dá se také odvodit jako zpětná FT frekv. charakteristiky rekonstrukčního filtru



$h_r(t) =$ $\text{sinc}(kt) = \text{sinc}(32000\pi t)$

Příklad 7 Systém se spojitým časem je popsán diferenciální rovnicí $RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, kde $x(t)$ je vstup a $y(t)$ je výstup.
Napište přenosovou funkci systému $H(s)$.

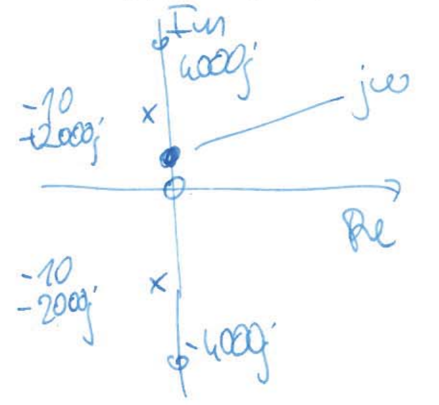
$RC\,Y(s)\cdot s + Y(s) = X(s)$

$Y(s)(RCs + 1) = X(s)$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1}$

$H(s) =$ $\frac{1}{RCs+1}$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:
$n_{2,3} = \pm 4000j, \quad p_{1,2} = -10 \pm 2000j.$
Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 15000]$ rad/s.



blízkost bodu jω nulovému bodu ⇒ minimum H(jω).
pólu ⇒ maximum H(jω)

na velikostech nezáleží
zajímá mě pouze tvar a poloha maxima.

Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	1	1	0	1
$x_1[n] \circledN x_2[n]$	9	8	6	7

Příklad 10 Hodnoty dvou vzorků signálu s diskrétním časem $x[n]$ jsou: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte hodnotu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu pro kruhovou frekvenci $\omega = 3\pi$ rad/s.

normovanou

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n} =$

$= \underbrace{1\cdot e^{-j0\cdot 3\pi}}_{+1} + \underbrace{(-1)\cdot e^{-j1\cdot 3\pi}}_{-1} = 1 + 1 = 2$

$\tilde{X}(e^{j3\pi}) =$ 2

A

Příklad 11 Provádíme výpočet spektra pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Počet vzorků je $N = 256$, vzorkovací frekvence je $F_s = 64$ kHz. Zajímá nás frekvence 31 kHz. Který koeficient $X[k]$ budeme zobrazovat ?

norm. frekvence $\frac{31}{64}$ hledáme $\frac{k}{N} = \frac{31}{64}$

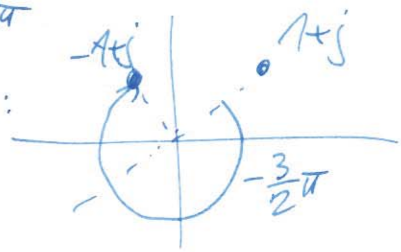
$k = \frac{256 \cdot 31}{64} = 4 \cdot 31 = \underline{124}$

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující: zpoždění!
$x[n]$=1 -1 0 0 0 0 0 0. Známe hodnotu koeficientu jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n]$=0 0 0 1 -1 0 0 0.

$m = 3$

$Y[k] = X[k] \cdot e^{-j\frac{mk}{N}2\pi}$

nebo takto:



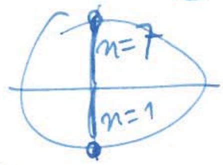
$Y[2] = (1+j) \cdot e^{-j\frac{3 \cdot 2}{8}2\pi} = (1+j) e^{-j\frac{3}{2}\pi} = (1+j) \cdot j = \underline{-1+j}$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou
$x[0] = 1$, $x[1] = \sqrt{2}$, $x[7] = \sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient $X[2]$ diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot 2n} = e^{-j\frac{\pi}{2}n} \rightarrow$ pro $n = 0 \Rightarrow 1$

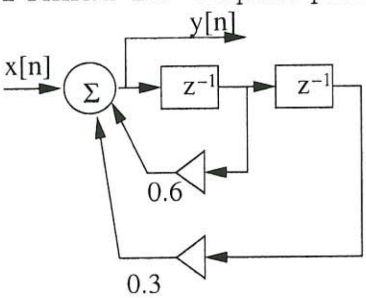
$n = 1 \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$n = 7 \Rightarrow e^{-j\frac{7\pi}{2}} = +j$



$X[2] = 1 + \cancel{\sqrt{2}(-j)} + \cancel{\sqrt{2}(j)} = \underline{1}$

Příklad 14 Napište přenosovou funkci IIR filtru podle schématu.



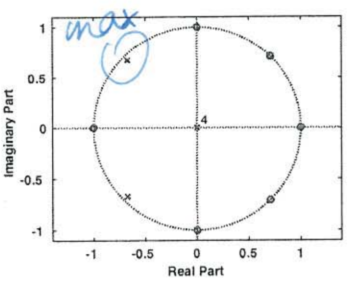
$y[n] = x[n] + 0{,}6\,y[n-1] + 0{,}3\,y[n-2]$

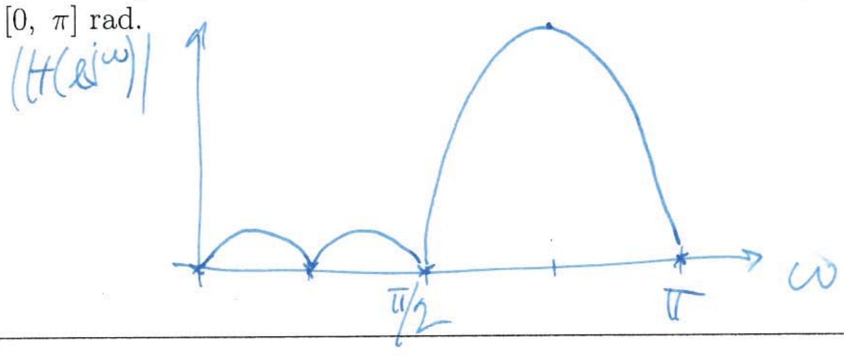
$Y(z) = X(z) + 0{,}6\,Y(z)z^{-1} + 0{,}3\,Y(z)z^{-2}$

$Y(z)(1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}) = X(z)$

$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}$

Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Číslo 4 v počátku značí, že se jedná o čtyřnásobný pól. Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \pi]$ rad.





A

Příklad 16 Máte k disposici záznam $\Omega = 10^6$ šachových partií. Popište, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost toho, že v té samé partii jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží.

1) spočítat všechny partie, kde jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží ⟹ count.

2) podělit celkovým počtem partií $\frac{count}{10^6}$.

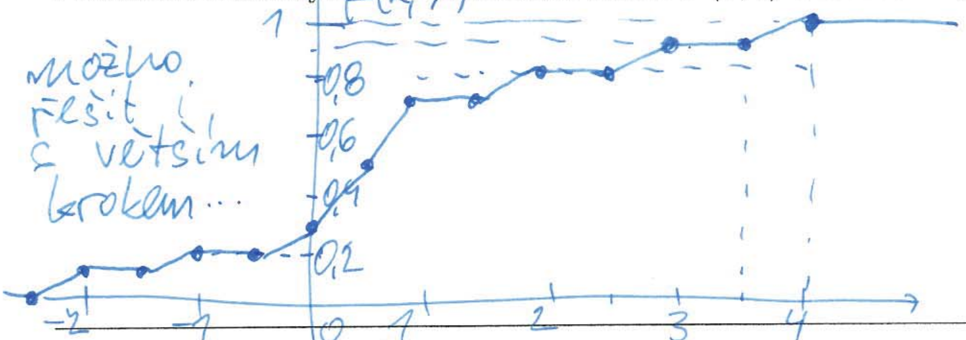
Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	0.53	1.83	-2.25	0.86	0.31	-1.30	-0.43	0.34	3.57	2.76

Provedte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

x	count < x	proba < x
-3	0	0
-2,5	0	0
-2	1	0,1
-1,5	1	0,1
-1	2	0,2
-0,5	2	0,2
0	3	0,3
0,5	5	0,5
1	7	0,7
1,5	7	0,7
2	8	0,8
2,5	8	0,8
3	...	...

možno řešit i s větším krokem...



Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	0	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	2000

Přechod na pravděpodobnost: dělení 4000. Přechod na PDF: dělení plochou 2D intervalu: 100.
Integrace: násobením součinem hodnot x_1, x_2 a plochou 2D intervalu: 100

$R[n_1, n_2] = \frac{1000}{4000\cdot 100}(5)(-5)\cdot 100 + \frac{1000}{4000\cdot 100}\cdot 5\cdot(-5)\cdot 100 + \frac{2000}{4000\cdot 100}\cdot 15\cdot(-15)\cdot 100 =$

$= -\frac{1}{4}\cdot 25 - \frac{1}{4}\cdot 25 - \frac{1}{2}\cdot 225 =$

$= -12{,}5 - 112{,}5 = \underline{-125}$

Příklad 19 V jazyce C máte v poli `Xr` o velikosti `N/2+1` uložené hodnoty reálné složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ a v poli `Xi` o stejné velikosti imaginární složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$. Napište kód pro odhad spektrální hustoty výkonu, výsledek nechť je v poli `PSD` o stejné velikosti.

```
for(k=0; k<=N/2; k++) {
   G(k) = 1/N * (Xr * Xr + Xi * Xi);
}
```

Příklad 20 Korelační koeficienty náhodného signálu $R[k]$ jsou: $R[0] = 5$, $R[1] = 1$, $R[-1] = 1$, ostatní jsou nulové. Určete, zda se jedná o bílý šum a svou odpověď zdůvodněte.

Nemůže být bílý šum, ten má pouze R[0] nenulový. Pokud se udělá DTFT tohoto, nevyjde konstanta (není bílý).

Bílý šum: ANO / NE, zdůvodnění: ....