F.

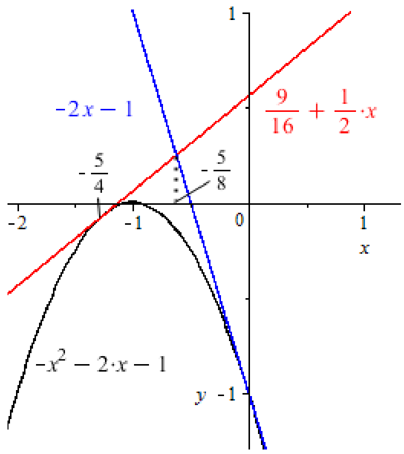
1. Vypočítejte integrál $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix} x=a\sin t & x=0\Rightarrow t=0 \\ dx=a\cos t\,dt & x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt=\left|t\in\left\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\right\rangle\Rightarrow\cos t\geq 0\right|=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2\,dt=$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{a^4}{16}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{32}$$

2. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=-\left(x^2+2x+1\right)$; jedna je rovnoběžná s přímkou $x-2y+4=0$, druhá je na ni kolmá.
Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami.
(Pro numerické výpočty můžete použít kalkulačku.)



$x-2y+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{2}x+2$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=-2$.

$y'=-2x-2$

$-2x-2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4},\ f\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{16},\quad T_1=\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{16}\right]$

$-2x-2=-2\Leftrightarrow x=0,\ f(0)=-1,\ T_2=[0,-1]$

$t_1:\quad y=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}x+\frac{9}{16},$

$t_2:\quad y=-1-2x$

průsečík tečen: $\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}=-x-1\Rightarrow x=-\frac{5}{8}$.

$$S=\int_{-\frac{5}{4}}^{-\frac{5}{8}}\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{-\frac{5}{8}}^{0}(-2x-1)\,dx-\int_{-\frac{5}{4}}^{0}\left(-x^2-2x-1\right)dx=\cdots=\frac{125}{768}\doteq 0{,}16275$$