Vzorové řešení zadání F

1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

   a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \sin x = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists y \in \mathbb{R} : \cos y = 2\pi\right)$ ***pravdivý***   ~~***nepravdivý***~~   ***protipříklad:***

   b) Je-li funkce f lichá, potom $\forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) \neq f(x)$ ~~***pravdivý***~~   ***nepravdivý***   ***protipříklad:***
   $f(x) = \sin x,\ x_0 = \pi$

   c) Jestliže x_0 není inflexní bod funkce *f*, potom je $f''(x_0) \neq 0$ ~~***pravdivý***~~   ***nepravdivý***   ***protipříklad:***
   $f(x) = x^4,\ x_0 = 0$

2. Nakreslete graf funkce spojité na $\mathbb{R} - \{-1\}$, pro kterou platí:

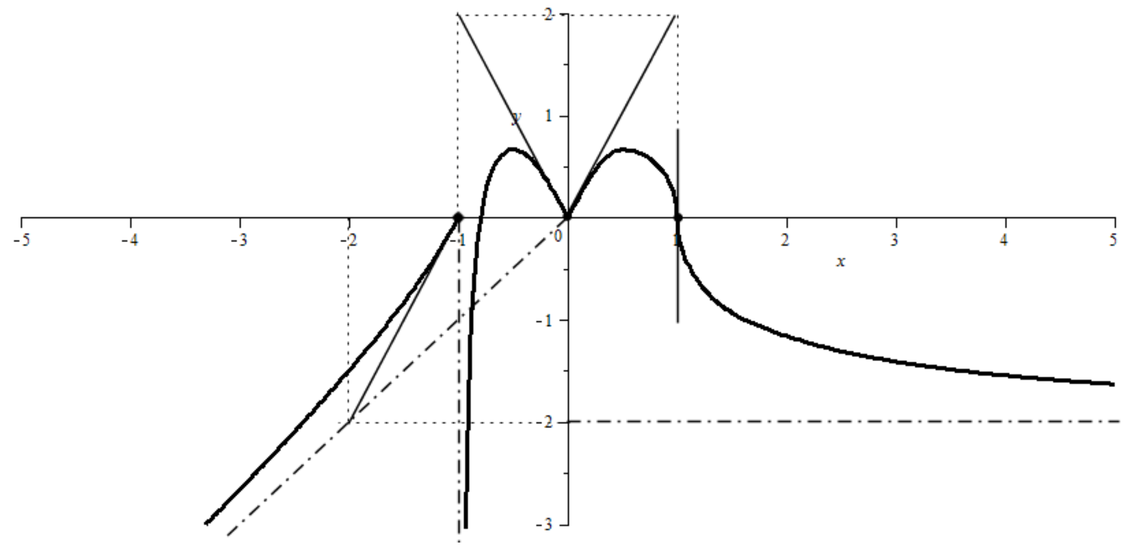
pro $x = -1$ má nespojitost druhého druhu přičemž je zde spojitá zleva,

$f(-1) = f(0) = f(1) = 0,$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -2,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 1} f'(x) = -\infty,$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (1, \infty)$, $\quad f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 0)$ a $x \in (0, 1)$,

Přímka $y = x$ je asymptota pro $x \to -\infty$, přímka $y = -2$ je asymptota pro $x \to \infty$.



3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x-1)}$ na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x \cdot (x-1) + x^2}{\left(x^2 \cdot (x-1)\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x(2x - 2 + x)}{x^{\frac{4}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x - 2}{x^{\frac{1}{3}} \cdot (x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = \frac{2}{3}$, $\quad f'(x)$ neex. pro $x = 0 \vee x = 1$

$f(-1) = -\sqrt[3]{2},\ f(0) = 0,\ f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{4},\ f(1) = 0,\ f(2) = \sqrt[3]{4}$

$\underline{\underline{f_{\max} = f(2) = \sqrt[3]{4}}}, \quad \underline{\underline{f_{\min} = f(-1) = -\sqrt[3]{2}}}$

4. Najděte $x \in \mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = \frac{4}{3}x(x-1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x}, \quad |x-1|<1 \Leftrightarrow x \in (0,2)$$

$$\frac{x-1}{2-x} = \frac{4}{3}x(x-1) \quad 1)\ x-1=0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$2)\ 3 = 4x(2-x) \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad x_{2,3} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2} \in (0,2) \\ \frac{1}{2} \in (0,2) \end{array} \right.$$

Výsledek: $\underline{\underline{x = 1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}}}$

5. $f(x,y) = \ln\frac{y^3}{x}$.

a) Najděte bod A, pro který platí grad $f(A) = (-1,1)$.

b) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě A.

a) $$f(x,y) = \ln\frac{y^3}{x} = 3\ln y - \ln x, \quad f'_x = -\frac{1}{x},\ f'_y = \frac{3}{y} \quad \text{grad } f(x,y) = \left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{y}\right).$$

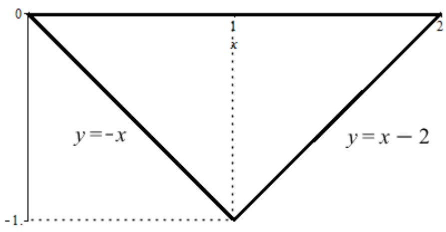
$$\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{y}\right) = (-1,1) \Leftrightarrow x = 1,\ y = 3 \qquad A = [x,y] = \underline{\underline{[1,3]}}$$

b) $f(A) = 3\ln 3$

Tečná rovina: $z - f(A) = f'_x(A)(x-x_0) + f'_y(A)(y-y_0)$

$$z - 3\ln 3 = -1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x - y + z = -2 + 3\ln 3}}$$

6. Vypočítejte $\int_A xy^2\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$ a $[1,-1]$.



$$A = \left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} -1 \le y \le 0 \\ -y \le x \le y+2 \end{array}\right\}$$

$$\int_A xy^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y}^{y+2} xy^2\,dx = \int_{-1}^{0} y^2 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-y}^{y+2} dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} y^2\left((y+2)^2 - y^2\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(2y^3 + 2y^2\right)dy = \left[\frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$