Vzorové řešení zadání C

1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x > 1\right) \Rightarrow \left(\forall y \in \mathbb{R} : |y-1| < 0\right)$ **_pravdivý_** ~~**_nepravdivý_**~~ **_protipříklad:_**

b) Existuje-li vlastní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, potom je f v x_0 spojitá. ~~**_pravdivý_**~~ **_nepravdivý_** **_protipříklad:_**

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ x_0 = 0$

c) Je-li funkce f periodická, potom je lichá nebo sudá. ~~**_pravdivý_**~~ **_nepravdivý_** **_protipříklad:_**

$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

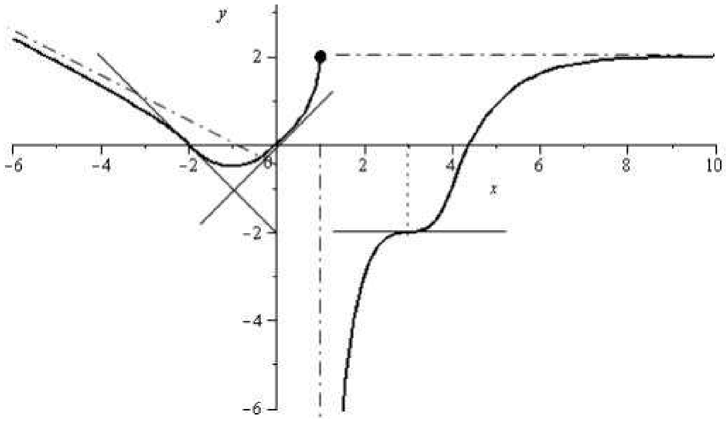
2. Načrtněte graf funkce *f*, pro kterou platí: $D_f = \mathbb{R}$,

v bodě $x = 1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zleva,

$f(3) = -2,\ f(1) = 2,\ f(0) = f(-2) = 0,\ \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \infty,\ f'(0) = 1,$

$x = -2$ a $x = 3$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-2) = -1$ a $f'(3) = 0$, $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (1, \infty,)$,

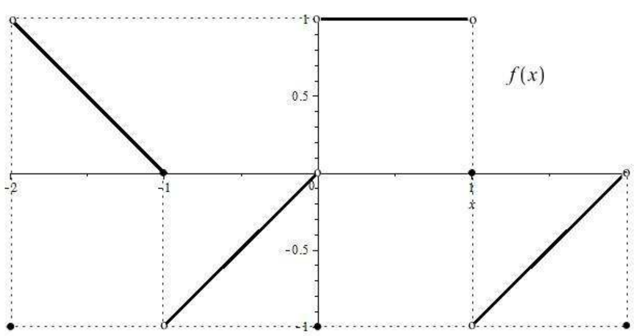
přímka $y = 2$ je její asymptota pro $x \to \infty$, přímka $y = -\frac{1}{2}(1 + x)$ je asymptota pro $x \to -\infty$.

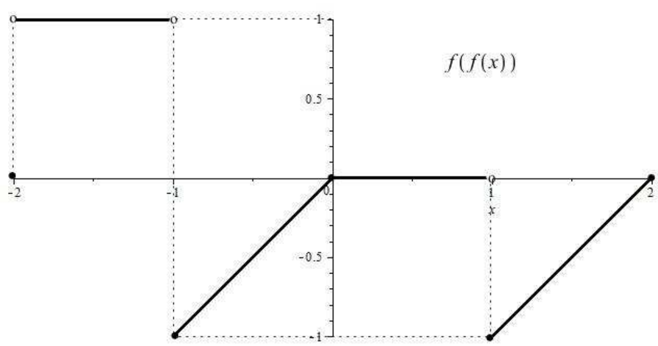


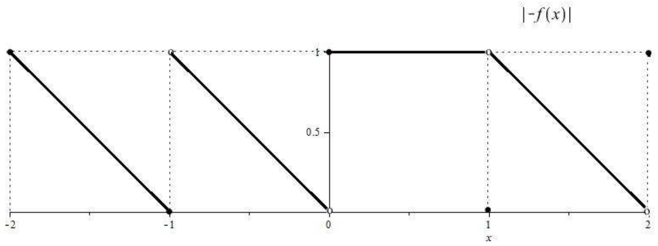
3. Funkce f je definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \{-2, 0, 2\} \\ 0 & x \in \{-1, 1\} \\ -x-1 & x \in (-2, -1) \\ x & x \in (-1, 0) \\ 1 & x \in (0, 1) \\ x-2 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

Nakreslete grafy $f(x), \left(f \circ f\right)(x), \left|-f(x)\right|$ a najděte $f^{-1}(\{0\})$.

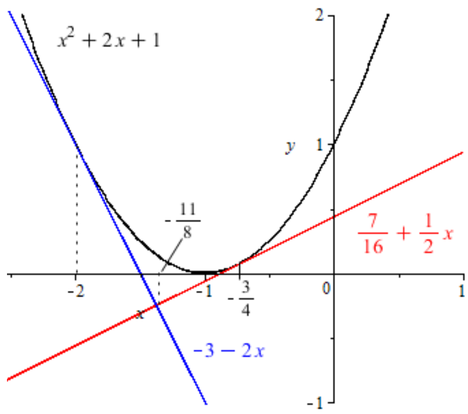






$$f^{-1}(\{0\})=\{-1,1\}.$$

4. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=x^2+2x+1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $x-2y+4=0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami. (Výsledek po dosazení mezí ponechejte ve tvaru součtu zlomků.)



$x-2y+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+2$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=\frac{1}{2},\ k_2=-2$.

$y'=2x+2 \quad 2x+2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4},\ f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{16},\quad T_1=\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{16}\right]$

$\qquad\qquad 2x+2=-2 \Leftrightarrow x=-2,\ f(-2)=1,\qquad T_2=[-2,1]$

$t_1:\quad y=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{16},$

$t_2:\quad y=1-2(x+2)=-2x-3$

průsečík tečen: $\frac{1}{2}x+\frac{7}{16}=-2x-3 \Rightarrow x=-\frac{11}{8}.$

$$S=\int_{-2}^{-\frac{3}{4}}\left(x^2+2x+1\right)dx-\int_{-2}^{-\frac{11}{8}}(-3-2x)\,dx-\int_{-\frac{11}{8}}^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-2}^{-\frac{3}{4}}+\left[3x+x^2\right]_{-2}^{-\frac{11}{8}}-\left[\frac{7}{16}x+\frac{1}{4}x^2\right]_{-\frac{11}{8}}^{-\frac{3}{4}}=$$

$$= \qquad =\cdots=\frac{125}{768}\doteq 0{,}16275$$

5. Vypočítejte s přesností na tři desetinná místa (tj. s chybou menší než 10^{-3}) integrál $I=\int_0^1 \cos x^2\,dx$ tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují.

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \forall x\in\mathbb{R}\qquad \cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

$I=\int_0^1\cos x^2\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\cdots\right)dx=\Big|$ řada konverguje $\forall x\in\mathbb{R}$, můžeme integrovat v libovolných konečných mezích $\Big|=\left[x-\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}+\cdots\right]_0^1=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{13\cdot 6!}+\cdots$

$$9\cdot 4!=216;\quad 13\cdot 6!=9360>10^3\Rightarrow\frac{1}{13\cdot 6!}<10^{-3}$$

Chyba v alternující řadě je (v absolutní hodnotě) menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy $\underline{\underline{I=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}}}+R$, kde $|R|<10^{-3}$

6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 - y^2 - 12x + 4y - 19$.

$f'(x,y) = \left(3x^2 - 12, -2y + 4\right) \qquad f'(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\begin{matrix} 3x^2 = 12 \\ 2y = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2,\ y = 2$ dva stacionární body $A = [2,2],\ B = [-2,2]$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad D_2(A) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0, \quad D_2(B) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0,\ D_1(B) = -12 < 0 \Rightarrow$

v bodě A extrém nenastane, v bodě B nastane maximum s hodnotou $\underline{\underline{f_{\max} = f(-2,2) = 1}}$