H

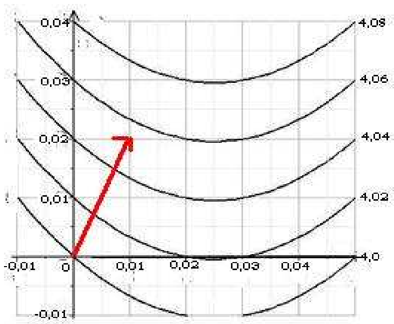
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $y = -1$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[3, -1, \sqrt{10}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \text{ je rovnice kuželové plochy}, z = \sqrt{10} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(x) = z(x,-1) = \sqrt{x^2+1}, \text{ směrnice } k = f'(3) = \left.\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right|_{x=3} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{10}}{10}}}$$

$$Jinak: \; k = z'_y(3,-1) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=3\\ y=-1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0,02;0) - f(0;0)}{0,02-0} = \frac{4,02-4}{0,02} = \frac{0,02}{0,02} = \underline{\underline{1}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0,01) - f(0;0)}{0,01-0} = \frac{4,02-4}{0,01} = \frac{0,02}{0,01} = \underline{\underline{2}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A)$.

$\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A) = (0,01;0,02)$

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0.03;0]$ má $\mathbf{grad}f$ větší velikost?

<u>V bodě A</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

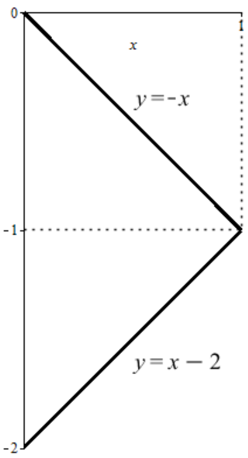
d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}f(A) \doteq \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(1,2) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} + \sqrt{3}}}.$$

3. Vypočítejte $\int_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,-2]$ a $[1,-1]$.



$$A = \left\{(x,y)\,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x-2 \le y \le -x \end{array}\right\}$$

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x-2}^{-x} xy\,dy = \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x-2}^{-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x^2 - (x-2)^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$