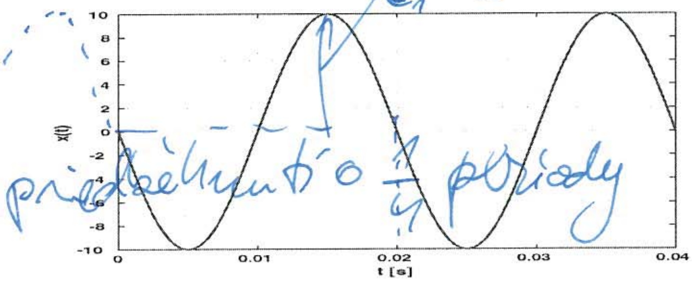
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 1.2.2017, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Určete kruhovou frekvenci a hodnoty všech nenulových koeficientů Fourierovy řady pro signál na obrázku.



$T_1 = 0{,}02\,s \quad f_1 = \frac{1}{0{,}02} = 50\,Hz$

$\omega_1 = 2\pi f_1 = 100\pi$ rad/s

$c_1 = 5 \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}}$

$c_{-1} = 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Příklad 2 Provádíme konvoluci dvou signálů se spojitým časem: $x_1(t)$ je nenulový od -3 s do 3 s. $x_2(t)$ je nenulový od 0 s do 2 s. Napište, v jakém intervalu bude nenulová jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

-3 3

0 2

y(t) bude nenulový od −3s do 5s

Příklad 3 Nakreslete průběh modulu i argumentu spektrální funkce $X(j\omega)$ stejnosměrného signálu $x(t) = 4$.

$X(j\omega) = 2\pi A \cdot \delta(\omega) = 8\pi\,\delta(\omega)$

$|X(j\omega)|$ 8π ω

$\arg X(j\omega)$ ω

kontrola: zpětná FT:

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(j\omega)e^{+j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 8\pi\,\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{8\pi}{2\pi} = \underline{4}$

Příklad 4 Je dán obdélníkový signál se spojitým časem: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -4 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

Na které kruhové frekvenci ω_a (v rad/s) bude jeho spektrální funkce poprvé nulová, postupujeme-li od $\omega = 0$ doprava ?

$x(t)$ 5 D t −4 ϑ 4

$X(j\omega) = D\vartheta\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) = 8 \cdot 5\,\mathrm{sinc}(4\omega)$

$\frac{\vartheta}{2}\omega_a = \pi$

$\omega_a = \frac{2\pi}{\vartheta}$

$|X(j\omega)|$ $\frac{2\pi}{\vartheta}$ ω

$\omega_a = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad/s

Příklad 5 Vysvětlete vztah mezi Fourierovou transformací a Laplaceovou transformací téhož signálu se spojitým časem $x(t)$.

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

funkce nad komplex. rovinou

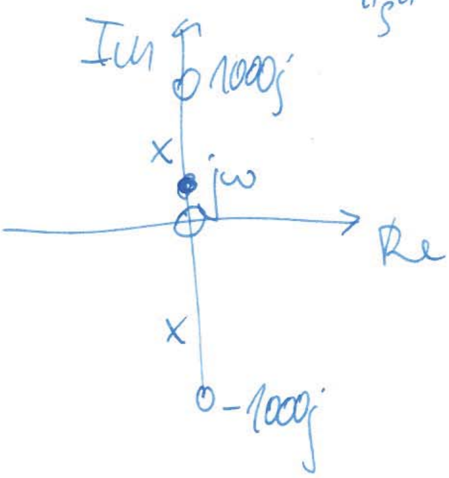
Im $j\omega$ "s" Re

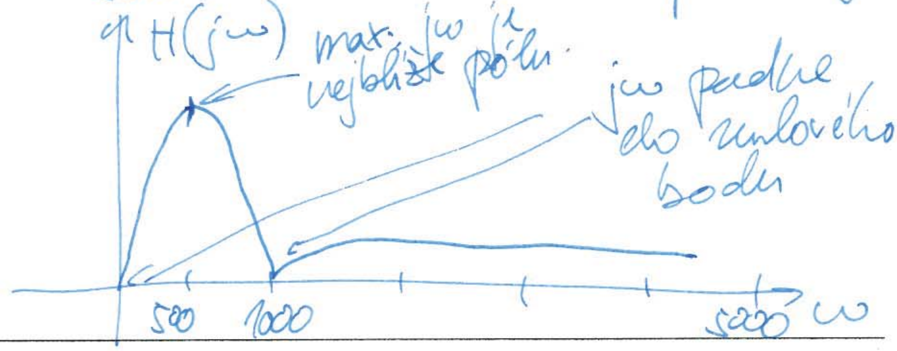
hodnoty $X(s)$ nad imaginární osou, nahradíme $s = j\omega$

A

Příklad 6 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, další dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:
$n_{2,3} = \pm 1000j, \quad p_{1,2} = -10 \pm 500j.$
Nakreslete přibližně průběh modulové frekvenční charakteristiky $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 5000]$ rad/s.

Modul $H(j\omega)$ je dán jako $\dfrac{\text{součin délek vektorů od nul do } j\omega}{\text{součin délek vektorů od pólů do } j\omega}$





Příklad 7 Netopýr rezavý vysílá zvuk — periodický signál — na základní frekvenci f_1 =23 kHz. Jedná se o složitý signál, je nutné zaznamenat nejen základní frekvenci, ale i další harmonické frekvence až do $4f_1$. Určete, jaká bude minimální vzorkovací frekvence pro navzorkování netopýřího zvuku.

$4 f_1 = 92$ kHz

$F_{s_{min}} =$ $2 \cdot 92 = 184$ kHz

Příklad 8 Kvantizér má k disposici 6 bitů, do něj vstupuje harmonický signál (cosinusovka), který plně využívá jeho dynamického rozsahu. Určete poměr signálu ke kvantizačnímu šumu (SNR) v deciBellech (dB) takového kvantizéru.

SNR = $1{,}76 + 66 = 37{,}76$ dB

Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište běžnou lineární (ne kruhovou!) konvoluci dvou signálů s diskrétním časem.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1[n]$	4	3	1	2	0	0	0	0	0	0
$x_2[n]$	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
$x_1[n] \star x_2[n]$	4	-1	-2	5	1	1	2	0	0	0

Příklad 10 V tabulce je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 4$. Napište jeho předepsané kruhové posunutí.

n	0	1	2	3
$x[n]$	4	3	1	2
$R_4[n]x[\bmod_4(n-3)]$	3	1	2	4

A

Příklad 11 Je dán diskrétní harmonický signál (diskrétní cosinusovka) s periodou $N = 16$: $\tilde{x}[n] = 4\cos(\frac{2\pi n}{16} + \frac{\pi}{4})$ amplituda C_1, φ $\quad \frac{4 \cdot 16}{2} = 32$

Určete indexy a hodnoty všech jeho nenulových koeficientů diskrétní Fourierovy řady $\tilde{X}[k]$ v intervalu $k \in 0 \dots N-1$. Stačí jejich zápis v exponenciálním tvaru, není nutné převádět na složkový.

$$\tilde{X}[1] = \frac{NC_1}{2} e^{j\varphi} \qquad \tilde{X}[N-1] = \frac{NC_1}{2} e^{-j\varphi}$$

$$\tilde{X}[1] = 32\, e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad \tilde{X}[15] = 32\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou $x[0] = 1, \quad x[1] = \sqrt{2}, \quad x[7] = -\sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte zadaný koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot n} = e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$X[1] = 1 \cdot 1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 1 - j - 1 - j = 1 - 2j$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ o délce $N = 16$ má *pouze jeden* nenulový koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[3] = 5$. Napište vztah pro tento signál. Vzhledem k tomu, že $X[16-3] = X[13] = 0$, nemělo by Vás překvapit, pokud bude signál komplexní.

zpětná DFT $\quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

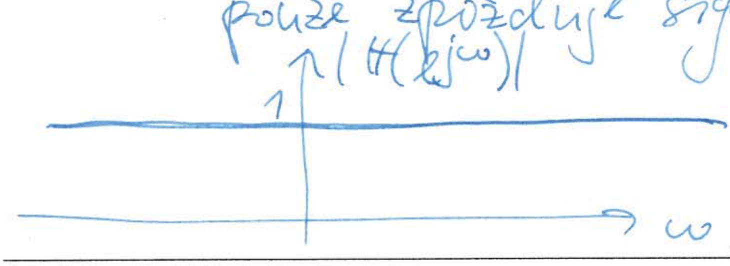
v sumě pouze jeden člen! pro $k = 3$

$x[n] = \frac{1}{16} 5 \cdot e^{j\frac{2\pi}{16}3n} = \frac{5}{16} e^{j\frac{3\pi}{8}n}$

Příklad 14 Impulsní odezva číslicového filtru je zpožděný jednotkový impuls:

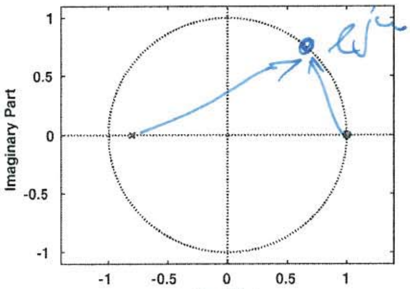
$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ Nakreslete průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ v obvyklém intervalu normovaných kruhových frekvencí $\omega \in 0 \dots \pi$ rad.

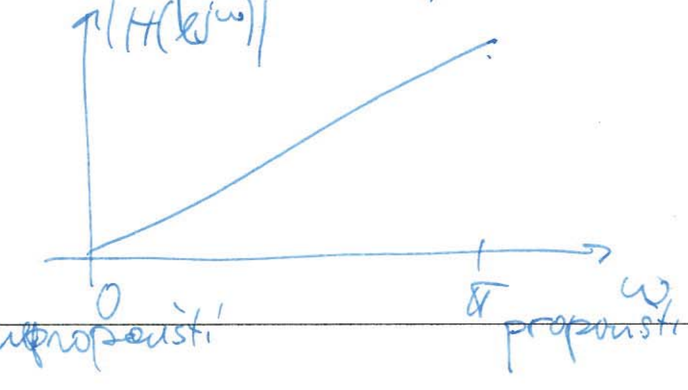
pouze zpožďuje signál, nemění modul!



Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Nakreslete přibližně průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ v obvyklém intervalu normovaných kruhových frekvencí $\omega \in 0 \dots \pi$ rad.

Metodika viz příklad 6, ale bod je $e^{j\omega}$





A

Příklad 16 Dva číslicové filtry s impulsními odezvami (obě dány pro $n \in 0 \dots 3$):
$h_1[n] = [1 \;\; 0.5 \;\; \text{-}0.5 \;\; 0.25]$
$h_2[n] = [1 \;\; \text{-}0.5 \;\; 0.5 \;\; 0.25]$ $\qquad h[n] = h_1[n] + h_2[n]$
jsou spojeny paralelně. Napište impulsní odezvu vzniklého systému.

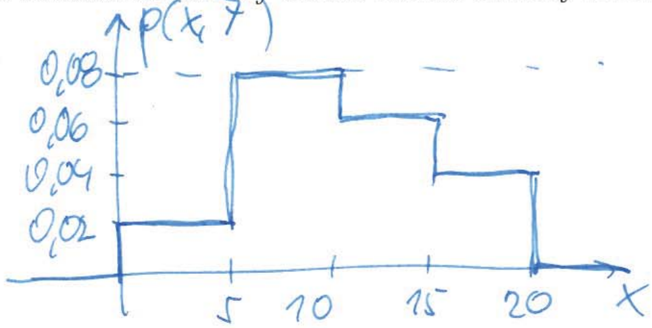
$h[n] =$ [2 0 0 0,5]

Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	8.7	7.6	15.3	15.9	3.7	9.7	8.9	12.9	14.1	15.0

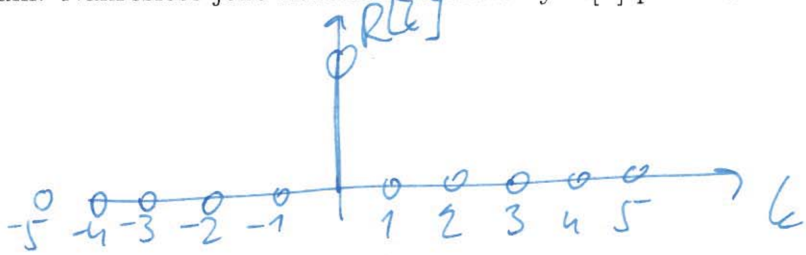
Proveďte souborový odhad funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x, 7)$ a nakreslete ji.

dělení pěti



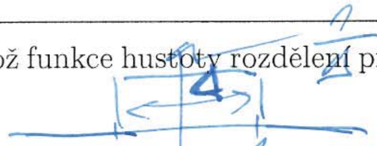
interval	count	pravd	hust
[0,5]	1	0,1	0,02
[5,10]	4	0,4	0,08
[10,15]	3	0,3	0,06
[15,20]	2	0,2	0,04

Příklad 18 Náhodný signál s diskrétním časem má konstatní spektrální hustotu výkonu, je to tedy bílý šum. Nakreslete jeho korelační koeficienty $R[k]$ pro $k \in -5 \dots 5$.



pouze nultý koef nenulový.

Příklad 19 Určete střední výkon P náhodného signálu $x[n]$, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnost $p(g)$ má tvar obdélníka: $p(g) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{pro } g \in -6 \dots 6 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



Pomůcka: pro náhodné signály se střední hodnotou nula platí, že střední výkon rovná se rozptylu: $P = D$.

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (g-a)^2 p(g)\,dg = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} g^2\,dg = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{g^3}{3}\right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \dots = \frac{\Delta^2}{12}$$

$P = \frac{12^2}{12} = 12$

Příklad 20 Spektrální hustota výkonu náhodného signálu má na normované kruhové frekvenci $\omega = 0.2\pi$ rad hodnotu $G_x(e^{j0.2\pi}) = 5$. Signál prochází číslicovým filtrem, který má na této frekvenci hodnotu frekvenční charakteristiky $H(e^{j0.2\pi}) = \sqrt{5}e^{j\frac{3\pi}{8}}$.
Určete spektrální hustotu výkonu výstupního signálu na téže frekvenci.

$$G_y(e^{j\omega}) = G_x(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$$

$G_y(e^{j0.2\pi}) = 5 \cdot (\sqrt{5})^2 = 25$