G

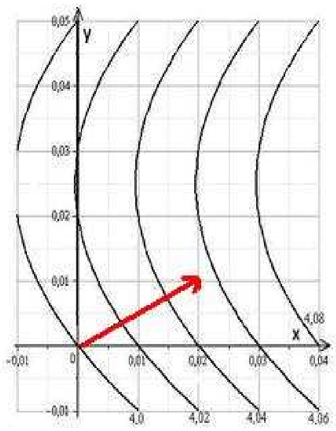
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $x = -1$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[-1, 1, \sqrt{2}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \text{ je rovnice kuželové plochy}, z = \sqrt{2} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(y) = z(-1, y) = \sqrt{1 + y^2}, \text{ směrnice } k = f'(1) = \left.\frac{2y}{2\cdot\sqrt{1+y^2}}\right|_{y=1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}}$$

$$\text{Jinak: } k = z'_y(-1, 1) = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=-1\\ y=1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0, 0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0{,}01;0) - f(0;0)}{0{,}01 - 0} = \frac{4{,}02 - 4}{0{,}01} = \frac{0{,}02}{0{,}01} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0{,}02) - f(0;0)}{0{,}02 - 0} = \frac{4{,}02 - 4}{0{,}02} = \frac{0{,}02}{0{,}02} = \underline{\underline{1}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A)$.

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A) = (0{,}02; 0{,}01)$$

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0; 0.03]$ má **grad**f větší velikost?

<u>V bodě A</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

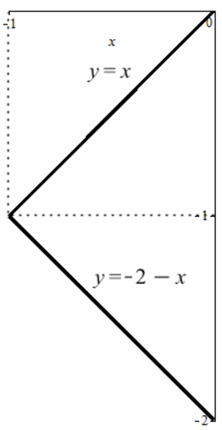
d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}f(A) \doteq \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\cdot(2,1) = \underline{\underline{\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}}}.$$

3. Vypočítejte $\int_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,-2]$ a $[-1,-1]$.



$$A = \left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} -1 \le x \le 0 \\ -2 - x \le y \le x \end{array}\right\}$$

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-2-x}^{x} xy\,dy = \int_{-1}^{0} x\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{-2-x}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\left(x^2 - (2+x)^2\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(-2x - 2x^2\right)dx = -\left[x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$