2016

1. Domácí úloha do diskrétní matematiky

1. Cieslar Michal
2. Čábera Jakub
3. Čmucha Libor
4. Drengubiak Martin
5. Eis Pavel
6. Farský Janci

Úloha 1.

Určete $\bigcup_{t \in T} A_t \ a \ \bigcap_{t \in T} A_t$, jestliže $T = (0,1), A_t = \ (1 - \frac{1}{t}, \ 2 \ + \frac{1}{t})$.

Řešení:

$T = (0,1)$

$$A_t = \ (1 - \frac{1}{t}, 2 \ + \frac{1}{t})$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t = < 0,3 >$$

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \ R$$

$$A_{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = (-1,4)$$

$$A_{\frac{1}{10}} = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{10}}, 2 + \frac{1}{\frac{1}{10}}\right) = (-9,12)$$

$$A_{\frac{1}{100}} = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{100}}, 2 + \frac{1}{\frac{1}{100}}\right) = (-99,102)$$

$$A_{\frac{1}{10^6}} = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{10^6}}, 2 + \frac{1}{\frac{1}{10^6}}\right) = (-999999,10000002)$$

$$(-\infty, \infty)$$

$A_1 = (0,3)$ – Tento interval neplatí

$$A_{\frac{9}{10}} = \left(1 - \frac{1}{\frac{9}{10}}, 2 + \frac{1}{\frac{9}{10}}\right) = (-\frac{1}{9}, \frac{28}{9})$$

$$A_{\frac{3}{4}} = \left(1 - \frac{1}{\frac{3}{4}}, 2 + \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = (-\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$$

$$\forall x \in < 0,3 >; \forall t \in T; x \in A_t$$

Levý okraj musí být menší jak 0 a pravý větší jak 3

$$1 - \frac{1}{t} < 0$$

$$1 < \frac{1}{t}$$

$$t < 1$$

$$2 + \frac{1}{t} > 3$$

$$\frac{1}{t} > \ 1$$

$$1 > t$$

$$t \in (0,1)$$

$$\forall x \notin < 0,3 >; \exists t \in T; x \notin A_t$$

Musíme najít takové, které nepatří do A_t

$$x \in (3, \infty)$$

$$2 + \frac{1}{t} = x$$

$$\frac{1}{t} = x - 2$$

$$\frac{1}{t} = x - 2$$

$$1 = t(x - 2)$$

$$t = \frac{1}{x - 2} ? \in (0,1) ==> ANO$$

$$x \in (-\infty, 0)$$

$$1 - \frac{1}{t} = x$$

$$1 - x = \frac{1}{t}$$

$$t\,(1 - x) = 1$$

$$1 = t(x - 2)$$

$$t = \frac{1}{1 - x}\ ? \in (0,1) ==> ANO$$

$$x \in (0,3)$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$A_{\frac{1}{2}} = (-4,7) \in T$$

$$x \in (3, \infty) - prevrátí\ se\ hodnota$$

$$\frac{1}{x} \in (0,1)$$

$$2 + \frac{1}{\frac{1}{x}} = 2 + x > x\ ?\ ANO$$

$$x \in (-\infty, 0) - Pro\ tento\ interval$$

$$nelze\ najít$$

$$==> \bigcup_{t \in T} A_t = < 0, \infty)$$

Úloha 2.

Na množině přirozených čísel je dána relace T následovně:

$$xTy \iff x - y \text{ je sudé číslo}$$

Zjistěte, kterou z uvedených vlastností má relace T: reflexivní, symetrická, tranzitivní.

Řešení:

$T = \{[x, y] \in R^2; x - y = 2Z\}$ (Obě musí být sudé nebo liché)

Tranzitivnost (není)

$(a, b) \in T \ \wedge (b, c) \in T => (a, b \in 2Z \ \wedge b, c \in 2Z) => a, c \in 2Z$

$$(a, b \in 2Z + 1 \ \wedge b, c \in 2Z + 1) => a, c \in 2Z$$

Reflexivnost (platí vždy)

$\forall x \in Z, x - x = 0 \in Z, 0\ je\ sudá => \ \forall x \in Z; xTx$

Symetričnost (neplatí)

$(2,1) \notin T\ protože\ 2 - 1 \ \notin 2Z$

$(1,2) \notin T\ protože\ 1 - 2 \ \notin 2Z$

$(2,4) \in T\ protože\ 2 - 4 \ \in 2Z$

$(4,2) \in T\ protože\ 4 - 2 \ \in 2Z$

Úloha 3.

(**2 body**) Na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ určete vyjmenováním dvě různé relace ekvivalence E_1, E_2 tak, aby relace $E_1 \cap E_2$ nebyla relace ekvivalence. Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení:

Nelze najít takovou množinu!

Reflexivnost

$[x, y] \to E_1 \cap E_2 => (x, y) \in E_1 \wedge (x, y) \in E_2$

Jejich průnik bude vždy obsahovat reflexivnost.

Symetričnost

$[x, y] \to E_1 \wedge [y, x] \to E_1$

$[a, b] \to E_2 \wedge [b, a] \to E_2$

Musí být různé. Takže průnikem se vyřadí dvojice.

Tranzitivnost

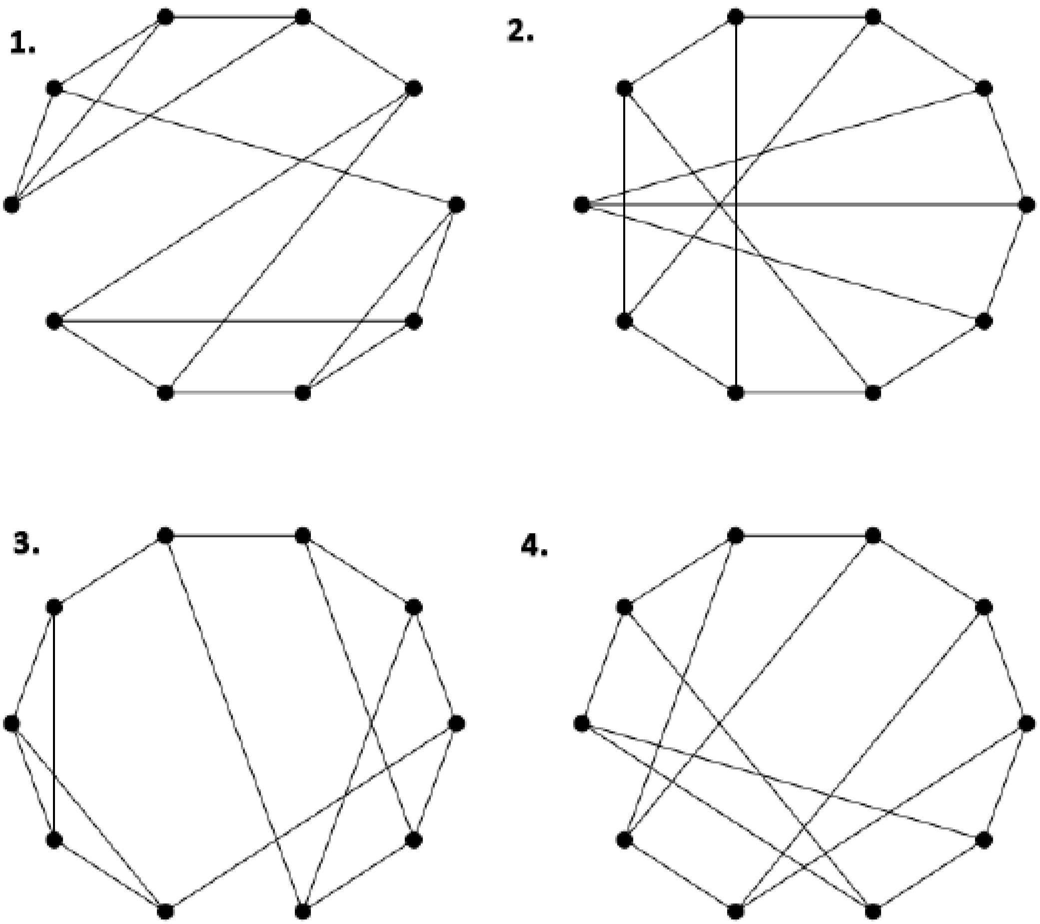
$[x, y] \to E_1 \wedge [y, z] \to E_1 => [x, z] \to E_1$

$[a, b] \to E_2 \wedge [b, c] \to E_2 => [a, c] \to E_2$

Opět se vyřadí průnikem. Protože musí být různé, aby byly tranzitivní, musela by dvojice být obsažena v $E_1\ i\ E_2$.

Úloha 4.

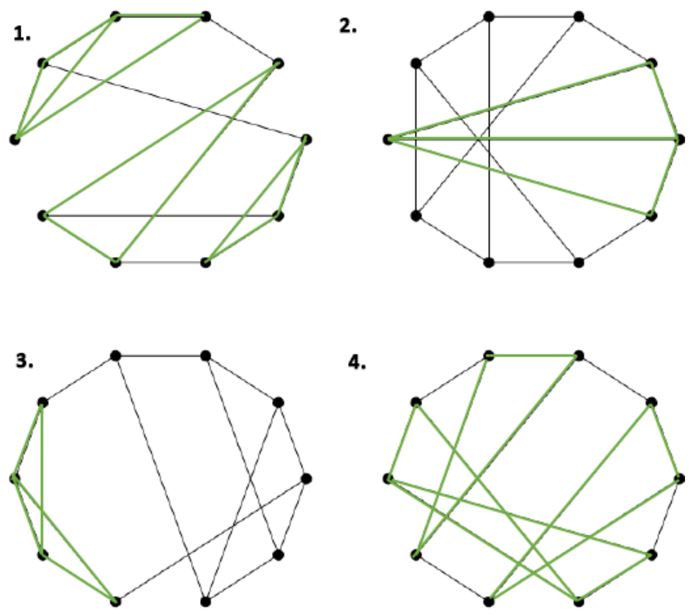
Zjistěte zda-li, jsou následující grafy izomorfní



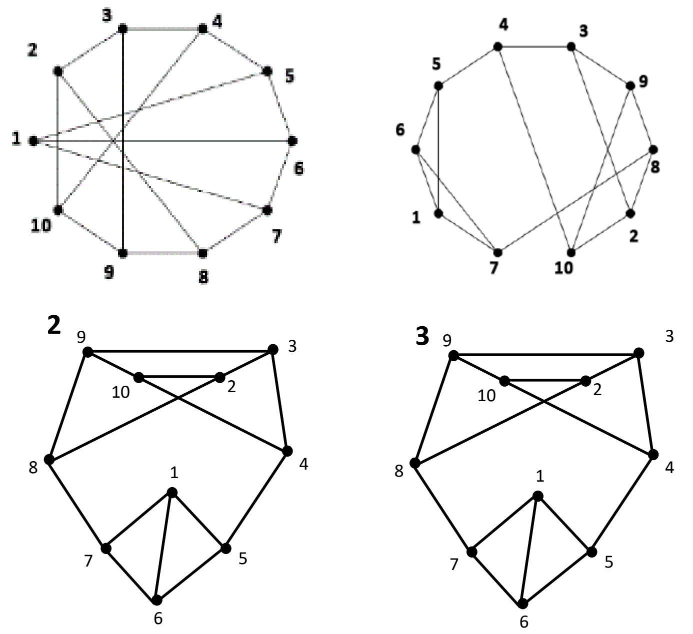
Řešení:

1 ≈ 4; 2≈3

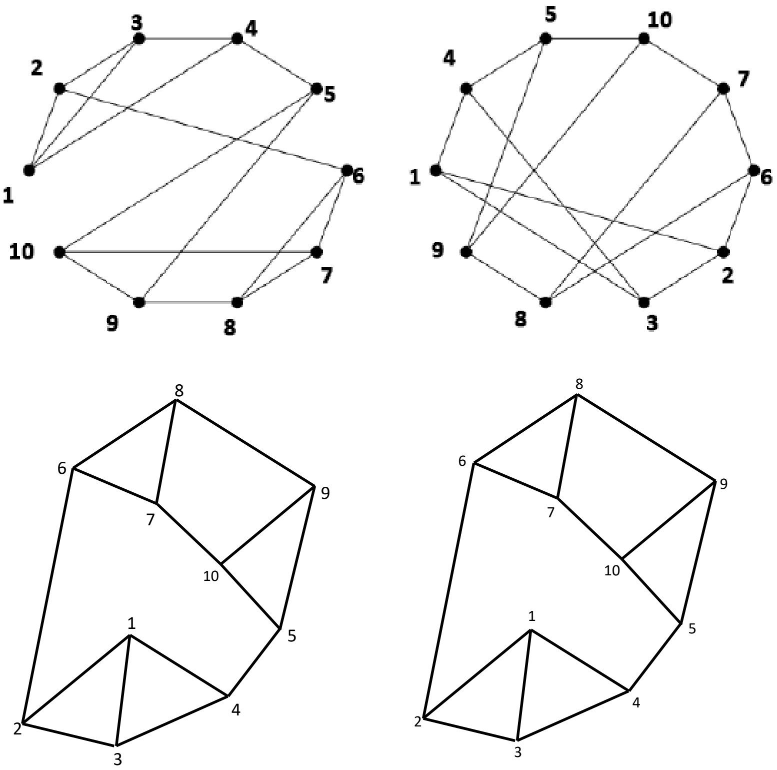
1. Zjistíme počet vrcholů
    1. Všechny grafy mají 10 vrcholů.
2. Poté určíme stupně vrcholů.
    1. Všechny vrcholy všech grafů mají stupeň 3.
3. Porovnáme kružnice (se 3 vrcholy) mezi grafy.
    1. 4x
    2. 2x
    3. 2x
    4. 4x
4. První a čtvrtý jsou izomorfní. Druhý a třetí jsou izomorfní. První a třetí nejsou izomorfní.
    1. Na základě počtu kružnic ve třetím bodu.
5. Překreslíme pro ujištění.



Obrázek 2: Kružnice se 3 vrcholy



Obrázek 1: Překreslení 2 a 3 grafu



Obrázek 3: Překreslení 1 a 4 grafu