E

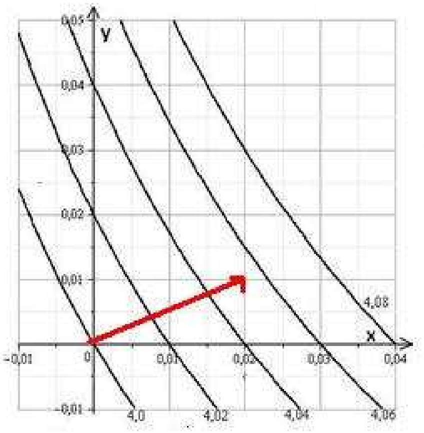
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $y = 1$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[3{,}1{,}\sqrt{10}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \ \ je\ rovnice\ kuželové\ plochy, z = \sqrt{10} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x) = z(x{,}1) = \sqrt{x^2+1},\ směrnice\ k = f'(3) = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_{x=3} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}}}$$

$$Jinak:\ k = z'_y(3{,}1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{\substack{x=3\\ y=1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0{,}01;0) - f(0;0)}{0{,}01-0} = \frac{4{,}02-4}{0{,}01} = \frac{0{,}02}{0{,}01} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0{,}02) - f(0;0)}{0{,}02-0} = \frac{4{,}02-4}{0{,}02} = \frac{0{,}02}{0{,}02} = \underline{\underline{1}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot \mathbf{grad}f(A)$.

$\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot \mathbf{grad}f(A) = (0{,}02;0{,}01)$.

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0;0.04]$ má $\mathbf{grad}f$ větší velikost?

V bodě B – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

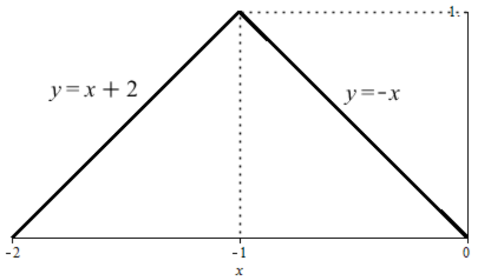
d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}f(A) \doteq \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\cdot(2{,}1) = \underline{\underline{\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}}}.$$

3. Vypočítejte $\int_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[-2,0]$ a $[-1,1]$.



$$A = \left\{(x,y)\,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y-2 \le x \le -y \end{array}\right\}$$

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y-2}^{-y} xy\,dx = \int_0^1 y\cdot\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{y-2}^{-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(y^2 - (y-2)^2\right)dy = \int_0^1 \left(2y^2 - 2y\right)dy =$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^3 - y^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$