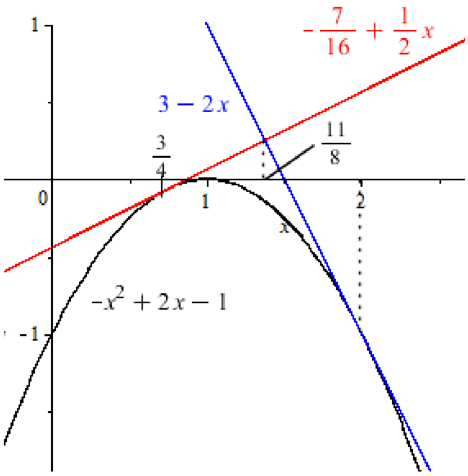
D.

1. Vypočítejte integrál $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^6 x}$ pomocí substituce $\operatorname{tg} x = t$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^6 x} = \left| \begin{array}{lll} \operatorname{tg} x = t & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{1}{1+t^2} dt & x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^6} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2t^2+t^4}{t^6} dt = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(t^{-6}+2t^{-4}+t^{-2}\right) dt = \left[-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t^5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{2}{9}+1\right)+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1 = \frac{28}{15}-\frac{56}{135}\sqrt{3}$$

2. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y = -x^2+2x-1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $x-2y+4=0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami.
(Pro numerické výpočty po dosazení mezí můžete použít kalkulačku.)



$x-2y+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x+2$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = -2$.

$$y' = -2x+2 \quad -2x+2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{16}, \quad T_1 = \left[\frac{3}{4}, -\frac{1}{16}\right]$$

$$-2x+2 = -2 \Leftrightarrow x = 2,\ f(2) = -1, \quad T_2 = [2,-1]$$

$t_1: \quad y = -\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}x-\frac{7}{16}$,

$t_2: \quad y = -1-2(x-2) = -2x+3$

průsečík tečen: $\frac{1}{2}x-\frac{7}{16} = -2x+3 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$.

$$S = \int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} (3-2x)\,dx + \int\limits_{\frac{11}{8}}^{2} \left(-\frac{7}{16}+\frac{1}{2}x\right) dx - \int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} \left(-x^2+2x-1\right) dx = \left[-\frac{7}{16}x+\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} + \left[3x-x^2\right]_{\frac{11}{8}}^{2} - \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right]_{\frac{3}{4}}^{2} =$$

$$= \quad = \cdots = \frac{125}{768} \doteq 0{,}16275$$