Druhý termín.

Druhý termín skúšky z IDA byl 15.1.2015.

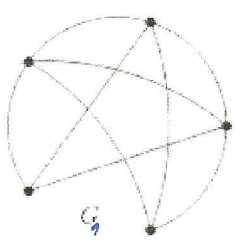
1. *(max. 14 bodů)* Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\circ$ následovně:

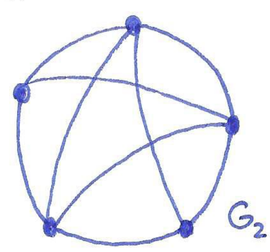
$\circ$	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

- Určete všechny podgrupoidy $(M, \circ)$.
- Existuje izomorfizmus mezi $(M, \circ)$ a $(Z_4, +)$? Svoje tvrzení zdůvodněte, v případě kladné odpovědi izomorfizmus najděte.
- Je $(M, \circ)$ grupa? Svoje tvrzení zdůvodněte.

2. *(max. 14 bodů)*

- Zjistěte zda-li jsou následujíci grafy izomorfní. V případě kladné odpovědi izomorfizmus zapište. V případě záporné odpovědi svoje tvrzení zdůvodněte.
- Zjistěte zda-li se jedná o rovinné grafy, své tvrzení zdůvodněte.





3. *(max. 16 bodů)* Formula F je dána tabulkou:

p	q	r	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

- Napište formuli, která obsahuje jenom výrokové proměnné, logické spojky $\neg, \vee$ a závorky a je ekvivalentní formuli F.
- Na množine prvotních formulí $\{p, q, r\}$ je dána množina T tří formulí

  $$T = \{[(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \Rightarrow (q \vee r))], [(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r))], [(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \Rightarrow (\neg q \vee r))]\}$$

  Je formule F tautologickým důsledkem množiny T?

4. *(max. 16 bodů)*

- Určete všechna $x \in R$, pro které platí:

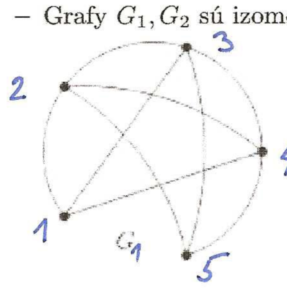
  $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = -7$$

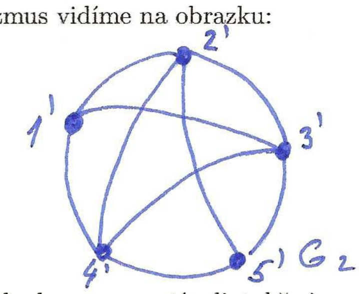
- Určete všechna $x \in R$, pro které jsou vektory $[1, 3, 1], [3, x, 1], [1, 3, x]$ lineárně závislé.
- Určete všechna $x \in R$, pro které je dimenze prostoru $\langle [1, 3, 1], [3, x, 1], [1, 3, x] \rangle$ rovna 3.

Komentár

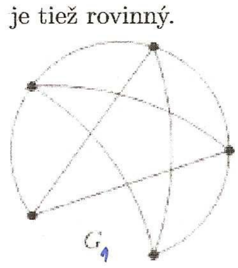
- **Prvý príklad**
  - $(M, \circ)$ má práve tri podgrupoidy: $(\{b\}, \circ), (\{b, d\}, \circ), (M, \circ)$.
  - Pri hľadaní izomorfizmu medzi $(M, \circ)$ a $(Z_4, +)$ si bolo treba uvedomiť, že b je neutrálny prvok v $(M, \circ)$ a 0 v $(Z_4, +)$, ďalej prvok d je sám sebe inverzný a podobne je na tom 2 v $(Z_4, +)$. Preto ak má izomorfizmus f existovať, tak musí platiť $f(b) = 0, f(d) = 2$, resp. naopak $f(0) = b, f(2) = d$. Potom už stačilo overiť dve možnosti a síce či môže byť $f(a) = 1, f(c) = 3$ alebo $f(a) = 3, f(c) = 1$ (resp. $f(1) = a, f(3) = c$ alebo $f(1) = c, f(3) = a$). Samozrejme, toto bolo treba overiť napr. vytvorením novej tabuľky. Výsledok teda v tejto časti je, že $(M, \circ)$ a $(Z_4, +)$ sú izomorfné.
  - Po vyriešení predchádzajúcej časti už nebolo treba overovať žiadnu vlastnosť grupy, lebo vieme, že $(Z_4, +)$ je grupa a $(M, \circ)$ je s ňou izomorfná, takže je tiež grupou.

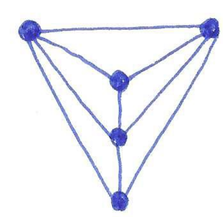
- **Druhý príklad**
  - Grafy G_1, G_2 sú izomorfné, izomorfizmus vidíme na obrázku:





  - Graf G_1 vieme nakresliť tak, aby sa jeho hrany nepretínali, takže je rovinný. Nakoľko G_2 je s ním izomorfný, je tiež rovinný.





- **Tretí príklad**
  - Bolo viac možností ako sa dopracovať k výsledku. Jedna z nich je takáto: najskôr si určíme disjun. normálnu formu:
  $$(p \wedge g \wedge r) \vee (p \wedge \neg g \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge g \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg g \wedge r),$$
  potom využijeme vlastnosť dvojitej negácie a odstránime všetky konjunkcie:
  $$\neg(\neg p \vee \neg g \vee \neg r) \vee \neg(\neg p \vee g \vee r) \vee \neg(p \vee \neg g \vee \neg r) \vee \neg(p \vee g \vee \neg r),$$
  čím je úloha splnená.
  - Stačí si uvedomiť, že ak má byť F tautologickým dôsledkom množiny T, tak musí platiť, že $(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3) \Rightarrow F$ je tautológia (F_1, F_2, F_3 sú formuly množiny T). Pre vstup $p = 1, g = 0, r = 1$ je táto implikácia nepravdivá, takže F nie je tautologickým dôsledkom množiny T.

- **Štvrtý príklad**
  - Použijeme Sarrusovo pravidlo a dostaneme rovnicu: $x^2 - 10x + 16 = 0$, potom $x \in \{2, 8\}$.
  - Treba si uvedomiť, že ak majú byť vektory lineárne závislé, tak ak si ich napíšeme ako riadky matice, jej determinant bude nulový. Potom podobne ako v predchádzajúcej úlohe zostavíme kvadratickú rovnicu $x^2 - 10x + 9 = 0$, preto $x \in \{1, 9\}$. Samozrejme, podobný výsledok by sme dostali úpravou tejto matice na trojuholníkový tvar a vyhodnotením jej riadkov.
  - V tejto časti hľadáme presne tie reálne čísla $x \in R$, ktoré nevyhovujú predchadzajúcej časti, takže $x \in R - \{1, 9\}$.