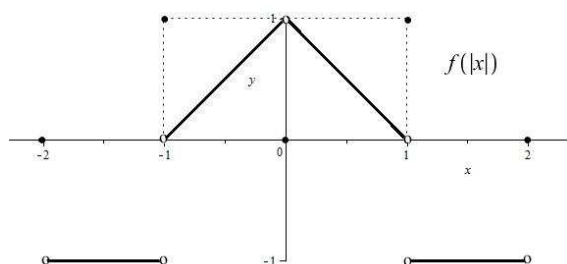
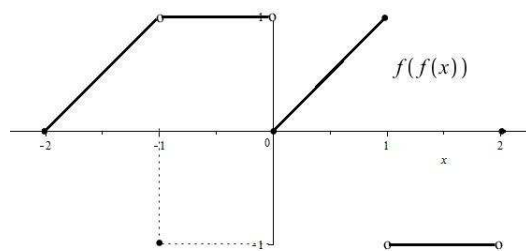
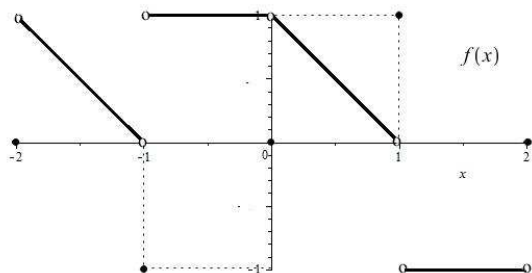


Vzorové řešení zadání **F**

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 0) \cup \{1\} \\ -1 & x \in (1, 2) \cup \{-1\} \\ 0 & x \in \{-2, 0, 2\} \\ 1-x & x \in (0, 1) \\ -x-1 & x \in (-2, -1) \end{cases}.$$

Nakreslete grafy funkcí $f(x)$, $(f \circ f)(x)$, $f(|x|)$ a určete $f(\langle 0, 1 \rangle)$ a $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.



$$\underline{\underline{f(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0, 1 \rangle}}, \quad \underline{\underline{f^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}}}.$$

2) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Funkce f je v bodě a diferencovatelná, právě když je v a spojitá.

~~pravdivý~~ nepravdivý

neplatí \Leftarrow ; protipříklad: $f(x) = |x|$, $a = 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : |\cos x| = 3$ právě když $\exists y \in \mathbb{R} : y^2 = -2$

pravdivý ~~nepravdivý~~ protipříklad:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n$ konverguje pro $x \in \langle -2, 0 \rangle$.

~~pravdivý~~ nepravdivý protipříklad:

$0 \in \langle -2, 0 \rangle$, $\sum_{n=1}^{\infty} (0+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje.

3) Nakreslete graf funkce f , pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, je spojitá pro $x \neq 0$,

v bodě $x = 0$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,

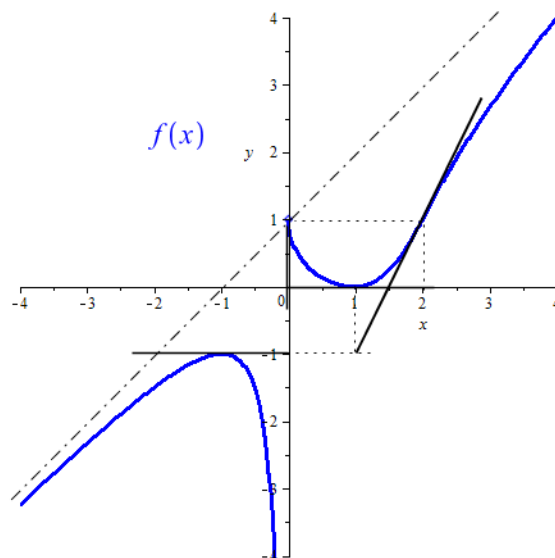
$f(0) = f(2) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 0$,

$f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$,

$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (2, \infty)$,

$f''(x) > 0$ pro $x \in (0, 2)$,

přímka $y = x + 1$ je její asymptota.



4) Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln \frac{2x-1}{3x-2}$ v bodě, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou $x + y + 1 = 0$.

Rovnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

rovnice normály ke grafu funkce v tomto bodě má tvar $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

$x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 1 \Rightarrow$ hledané tečny mají směrnici $k = -1$ - budeme hledat body x_0 , ve kterých je $f'(x_0) = -1$:

$$f'(x) = \frac{3x-2}{2x-1} \cdot \frac{2(3x-2)-3(2x-1)}{(3x-2)^2} = \frac{-1}{(2x-1)(3x-2)}$$

$$\frac{-1}{(2x-1)(3x-2)} = -1 \Leftrightarrow (6x^2 - 7x + 2) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$6x^2 - 7x + 1 = (6x-1)(x-1) \Rightarrow \underline{\underline{x=1 \vee x=\frac{1}{6}}}$$

$$x=1: f(1) = \ln \frac{2-1}{3-2} = \ln 1 = 0$$

$$\text{rovnice tečny: } y - 0 = -(x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{x + y - 1 = 0}}$$

$$\text{rovnice normály: } y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{x - y - 1 = 0}}.$$

$$x = \frac{1}{6}: f\left(\frac{1}{6}\right) = \ln \frac{\frac{2}{6}-1}{\frac{3}{6}-2} = \ln \frac{1-\frac{2}{6}}{2-\frac{3}{6}} = \ln \frac{4}{9} = 2 \ln \frac{2}{3}$$

$$\text{rovnice tečny: } y - 2 \ln \frac{2}{3} = -(x - \frac{1}{6}) \Leftrightarrow \underline{\underline{x + y - \frac{1}{6} - 2 \ln \frac{2}{3} = 0}}$$

$$\text{rovnice normály: } y - 2 \ln \frac{2}{3} = 1 \cdot (x - \frac{1}{6}) \Leftrightarrow \underline{\underline{x - y - \frac{1}{6} + 2 \ln \frac{2}{3} = 0}}.$$

5) Vypočítejte $\int_0^{\infty} (x+2)e^{-x} dx$.

$$\int (x+2)e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+2 & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -(x+2)e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x+2)e^{-x} - e^{-x} = -(x+3)e^{-x}$$

$$\int_0^{\infty} (x+2)e^{-x} dx = \left[-(x+3)e^{-x} \right]_0^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{e^x} + 3 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} + 3 = 3$$

6) $f(x, y, z) = \ln \frac{y^3}{x} + e^z$.

a) Najděte bod A , pro který platí $\text{grad } f(A) = (-1, 1, 1)$.

b) Vypočítejte $f'_{\mathbf{a}_0}(A)$, je-li $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$.

$$\text{a) } f(x, y, z) = \ln \frac{y^3}{x} + e^z = 3 \ln y - \ln x + e^z, \quad f'_x = -\frac{1}{x}, f'_y = \frac{3}{y}, f'_z = e^z \quad \text{grad } f(x, y, z) = \left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{y}, e^z \right).$$

$$\left(-\frac{1}{x}, \frac{3}{y}, e^z \right) = (-1, 1, 1) \Leftrightarrow x=1, y=3, z=0$$

$$A = [x, y, z] = \underline{\underline{[1, 3, 0]}}$$

$$\text{b) } f'_{\mathbf{a}_0}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \mathbf{a}_0 = (-1, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$