Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 24.1.2017, skupina A

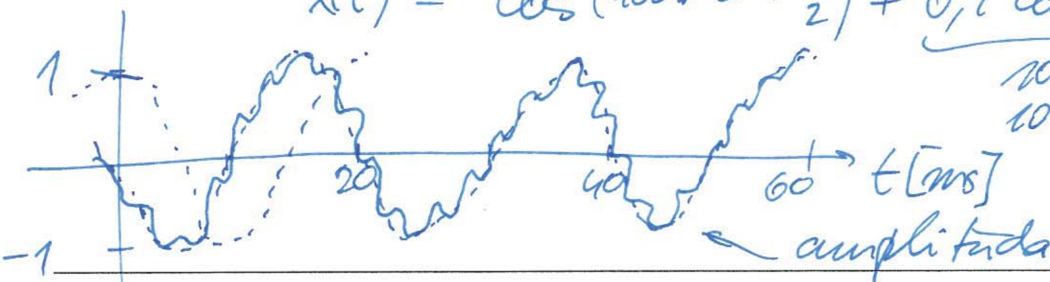
Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

$2 \cdot 0{,}5 = 1$ $\quad f_1 = 50\,Hz$ $\quad 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1$

Příklad 1 Nakreslete periodický signál se spojitým časem se základní kruhovou frekvencí $\omega_1 = 100\pi$ rad/s a koeficienty Fourierovy řady: $c_1 = 0.5e^{j\frac{\pi}{2}}$, $c_{-1} = 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $c_{10} = 0.05$, $c_{-10} = 0.05$

$x(t) = \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{0{,}1 \cos(1000\pi t)}$

10 × menší, 10 × rychlejší



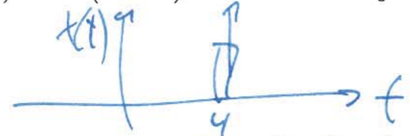
amplituda malých „vlnek" je 0,1.

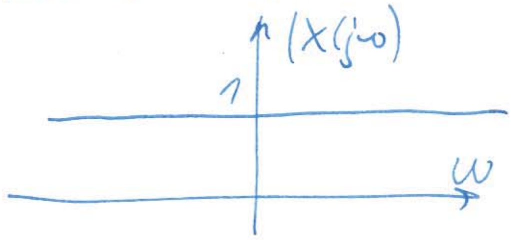
Příklad 2 Signál se spojitým časem je posunutý Diracův impuls $x(t) = \delta(t-4)$. Nakreslete jeho spektrální funkci (průběh modulu i argumentu).

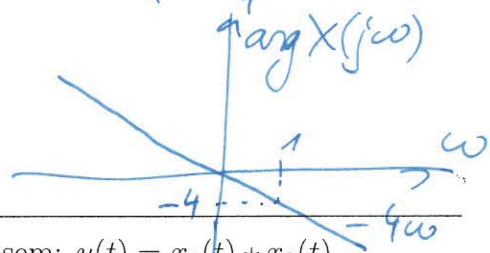
$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 4}$

$|X(j\omega)| = 1$

$\arg X(j\omega) = -\omega 4$



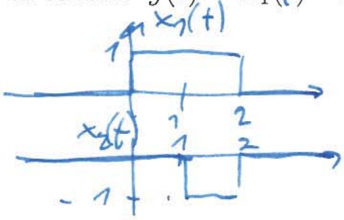


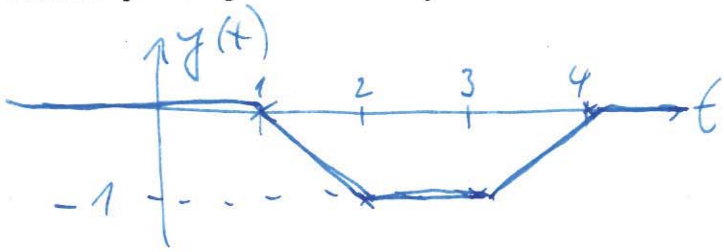


Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ $\quad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



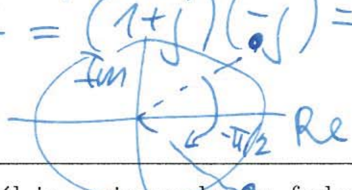


zpoždění

Příklad 4 Hodnota spektrální funkce signálu $x(t)$ na kruhové frekvenci $\omega = 45\pi$ rad/s je $X(j45\pi) = 1+j$. Určete, jaká bude hodnota spektrální funkce $Y(j45\pi)$ pro signál vzniklý zpožděním: $y(t) = x(t-0.5)$

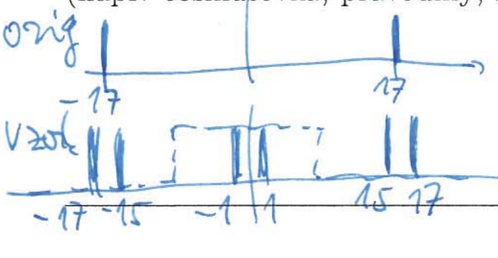
$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t}$ $\quad Y(j45) = X(j45)\, e^{-j\,45\pi\, 0{,}5} =$

$= (1+j)\, e^{-j\,22{,}5\pi} = (1+j)\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = (1+j)(-j) = 1-j$

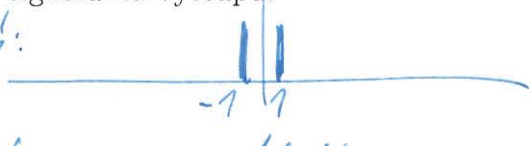


$Y(j45\pi) =$ ....$1-j$....

Příklad 5 Vzorkovací frekvence je $F_s = 16$ kHz. Vstupní signál je cosinusovka na frekvenci 17 kHz. Tento signál je ideálně vzorkován a ideálně rekontruován. Není použit anti-aliasingový filtr. Určete typ (např. cosinusovka, pravoúhlý, stejnosměrný, ...) a frekvenci signálu na výstupu.



rekonstruovaný:



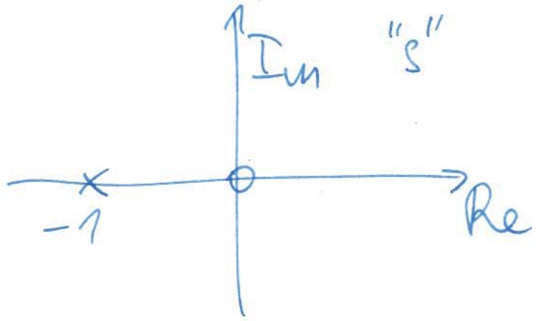
cosinusovka na 1 kHz

A

Příklad 6 Zakreslete do komplexní roviny nulové body a póly systému se spojitým časem s přenosovou funkcí $H(s) = \frac{s}{s+1}$. $= \frac{(s-0)}{s-(-1)}$

$n = 0$

$p = -1$



Příklad 7 Systém se spojitým časem má stejnou přenosovou funkci, jako v příkladu 6, tedy $H(s) = \frac{s}{s+1}$. Určete hodnotu jeho kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ na zadané kruhové frekvenci. Nezpomeňte na to, že se bude pravděpodobně jednat o komplexní číslo. Stačí počítat na jednu platnou cifru. Pokud vyjde jedna složka komplexního čísla podstatně menší než ta druhá, zanedbejte ji.

malé, zanedbávám!

$H(j2000\pi) = \frac{j2000\pi}{j2000\pi + 1} = \underline{\underline{1}}$

Příklad 8 Do kvantizéru vstupují vzorky $x[n]$. Kvantizér se ale zasekl a pro všechny vstupní vzorky produkuje tu samou výstupní hodnotu: nulu. $x_q[n] = 0$. Určete poměr signálu k šumu (SNR) v deciBellech (dB) takového kvantizéru.

chybový signál: $e[n] = x[n] - x_q[n] =$
$= x[n] - 0 = x[n]$
(takže totéž, co vstup).

$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 10 \log_{10} 1 =$
$= 10 \cdot 0 = \underline{\underline{0 \text{ dB}}}$

užitečný signál má tedy stejný výkon jako chyba, jejich poměr je 1.

Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	-1	-1	0	0
$x_1[n] \circledN x_2[n]$	-6	-7	-4	-3

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Příklad 10 Dokažte, že Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) je periodická s periodou 2π rad, tedy že $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega+k2\pi)})$, kde k je libovolné celé číslo.

$\tilde{X}(e^{j(\omega+2k\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum x[n] e^{-j\omega n} \cdot \underbrace{e^{-j2k\pi n}}_{1} =$

$= \sum x[n] e^{-j\omega n} = \tilde{X}(e^{j\omega})$

definice DTFT

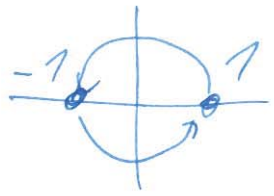
k a n jsou celá čísla, exponent je celý násobek 2π

A

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující:
$x[n]$=1 2 3 4 5 0 0 0.
Vypočtěte zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) $X[k]$.

$X[k] = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $\quad X[4] = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{8}4n} = \sum x[n] e^{-j\pi n}$

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	2	3	4	5
$e^{-j\pi n}$	1	-1	1	-1	1



$X[4]$ = 3

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující:
$x[n]$=1 -1 0 0 0 0 0 0. Známe hodnotu koeficientu jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n]$=0 0 0 0 0 0 1 -1.

předbíhání: $m = 2$

$Y[k] = X[k] \cdot e^{+j\frac{2\pi}{N}mk} = (1+j)\, e^{+j\frac{2\pi}{8}\cdot 2\cdot 2} = (1+j)\, e^{j\pi} =$
$= (1+j)(-1) = -1-j$

$Y[2]$ = $-1-j$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ má délku N vzorků, N je sudé. Ukládáme pouze hodnoty $X[0] \dots X[\frac{N}{2}]$. Kolik na to potřebujeme proměnných typu `float`, když na uložení jednoho reálného čísla je potřeba jeden `float` a na uložení jednoho komplexního čísla dva `floaty` ?

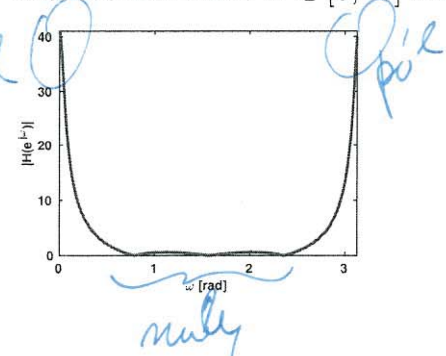
$X[0]$ - reálné, $\underbrace{X[1] \dots X[\frac{N}{2}-1]}_{\text{celkem } \frac{N}{2}-1}$ - komplexní, $X[\frac{N}{2}]$ reálné

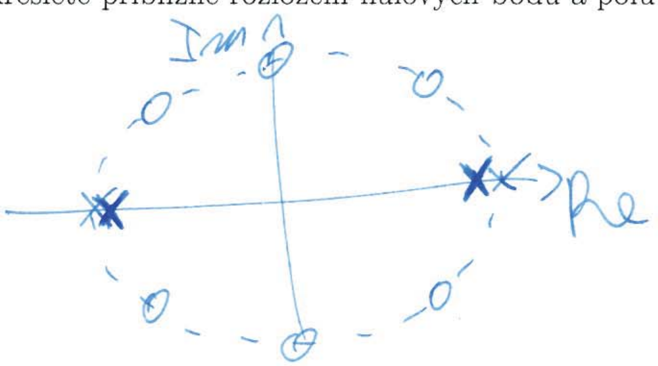
$1 + 2\left(\frac{N}{2}-1\right) + 1 = 1 + N - 2 + 1 = \underline{N}$ floatů

Příklad 14 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = \frac{1}{1+1.8z^{-1}+0.81z^{-2}}$. $= \frac{z^2}{z^2 + 1{,}8z + 0{,}81}$
Určete, zda je filtr stabilní, a vysvětlete proč.

jmenovatel jde rozložit na $(z+0{,}9)(z+0{,}9) = (z-(-0{,}9))(z-(-0{,}9))$
dvojitý pól v $-0{,}9$ leží uvnitř jednotkové kružnice $\Rightarrow$ stabilní

Příklad 15 Na obrázku je průběh modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \pi]$ rad. Nakreslete přibližné rozložení nulových bodů a pólů tohoto filtru.





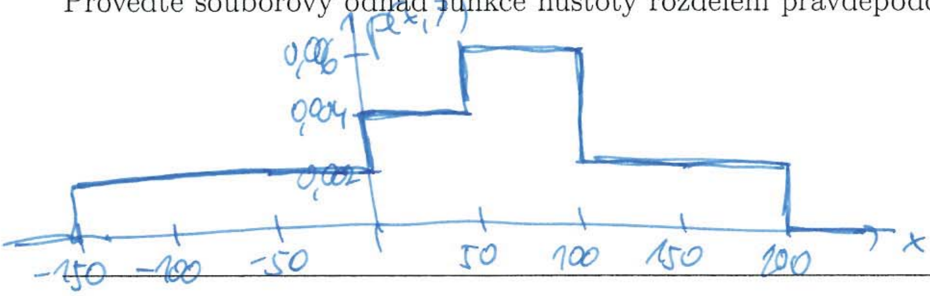
A

Příklad 16 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	67.1	-120.7	71.7	163.0	48.8	103.4	72.6	-30.3	29.3	-78.7

Provedte souborový odhad funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x, 7)$ a nakreslete ji.

int	count	proba	p(x)
-150, -100	1	0,1	0,002
-100, -50	1	0,1	0,002
-50, 0	1	0,1	0,002
0, 50	2	0,2	0,004
50, 100	3	0,3	0,006
100, 150	1	0,1	0,002
150, 200	1	0,1	0,002



Příklad 17 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující:
$x[n]$=1 2 3 4 5 0 0 0.
Provedte nevychýlený odhad zadaného korelačního koeficientu $R[k]$.

$$R[k] = \frac{1}{N-k}\sum x[n]x[n+k] = \frac{1}{8-3}(1\cdot 4 + 2\cdot 5) = \frac{14}{5}$$

$R[3] = $ ~~1,75~~ 2,8

Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-4, -2]	[-2, 0] -1	[0, 2] 1	[2, 4] 3
[2, 4]	0	0	0	0
[0, 2] 1	0	1000 $\frac{1}{4}$	0	0
[-2, 0] -1	0	0	1000 $\frac{1}{4}$	0
[-4, -2] -3	0	0	0	2000 $\frac{1}{2}$

$R[n_1, n_2] = \left(\frac{1}{4}\cdot 1\cdot(-1) + \frac{1}{4}(-1)(1) + \frac{1}{2}(-3)3\right)2^2 = 4\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{9}{2}\right) = 4\left(-\frac{10}{2}\right) = -5$

Příklad 19 Jaké musí být vzorky náhodného signálu, abychom ho mohli považovat za bílý šum ?

Vzorky musí být nezávislé (nekorelované). Jen tak je pouze R[0] nenulový, po DTFT je spek. hustota výkonu konstanta.

Příklad 20 Spektrální hustota výkonu náhodného signálu má na normované kruhové frekvenci $\omega = 0.2\pi$ rad hodnotu $G_x(e^{j0.2\pi}) = 5$. Signál prochází číslicovým filtrem, který má na této frekvenci hodnotu frekvenční charakteristiky $H(e^{j0.2\pi}) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$.
Určete spektrální hustotu výkonu výstupního signálu na téže frekvenci.

$$G_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \cdot G_x(e^{j\omega}) = |\sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}|^2 \cdot 5 = 2\cdot 5 = 10$$

$G_y(e^{j0.2\pi}) = $ 10