Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 10.1.2018, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

pokud $y(t)=x(t-\tau)$, pak $c_{y,k} = c_{x,k}\cdot e^{-jk\omega_1\tau}$

Příklad 1 Čtvrtý koeficient Fourierovy řady periodického signálu se spojitým časem $x(t)$ je $c_{x,4} = 1 + j$. Určete tentýž koeficient posunutého signálu $y(t) = x(t - \frac{1}{16}\mu s)$, víte-li, že základní frekvence periodického signálu je $f_1 = 1$ MHz.

$e^{-jk\omega_1\tau} = e^{-j4\cdot 2\pi\cdot \cancel{10^6}\cdot\frac{1}{16}\cdot\cancel{10^{-6}}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

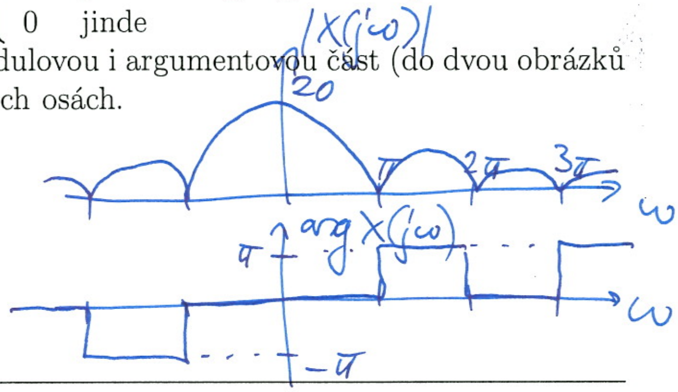
$c_{y,4} =$ $(1+j)(-j) = -j-(-1) = \underline{\underline{1-j}}$

Příklad 2 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro} \quad -1\text{s} \le t \le 1\text{s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ $\vartheta = 2$s

Vypočtěte jeho spektrální funkci $X(j\omega)$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou). Vyznačte důležité hodnoty na ose ω i na svislých osách.

$X(j\omega) = D\vartheta \,\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) =$
$= 10\cdot 2\, \text{sinc}\left(\frac{2}{2}\omega\right) = 20\,\text{sinc}(\omega)$

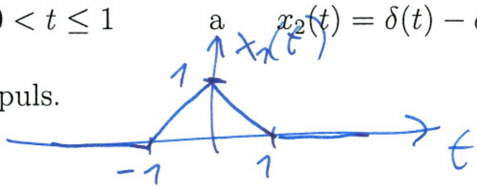
průchody nulou: $\omega = \pi$ + násobky

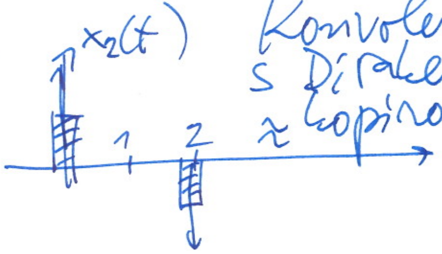


Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

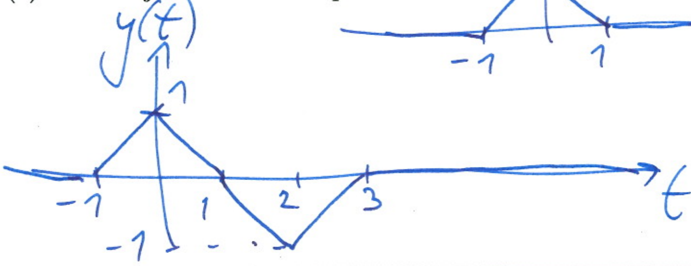
$x_1(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0 \\ -t+1 & \text{pro} \quad 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$.

$\delta(t)$ označuje Diracův impuls.





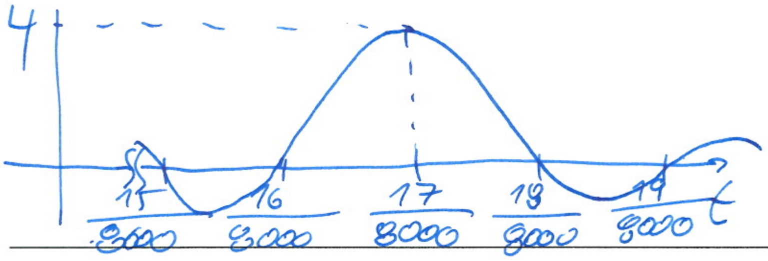
Konvolace s Diracem = kopírování.



Příklad 4 Popište princip fungování anti-aliasingového filtru při vzorkování.

Dolní propust pro odřezání frekvencí přesahujících $F_s/2$, které by se díky aliasingu "překlopily" do intervalu $\langle 0, F_s/2\rangle$ a zničily původní spektrum.
(nebo jakákoliv jiná rozumná odpověď ...)

Příklad 5 Vzorek signálu s diskrétním časem je: $x[17] = 4$. Napište a/nebo nakreslete, jak bude tento vzorek přispívat do ideálně rekonstruovaného signálu se spojitým časem. Víte, že vzorkovací frekvence $F_s = 8000$ Hz. Pomůcka: rekonstrukční funkce "spouštěná" každým vzorkem je kardinální sinus. Musíte ho správně natáhnout a umístit na časové ose a vynásobit hodnotou vzorku.



úprava argumentu sinc:
$\frac{t}{\frac{1}{8000}} = \pi \quad t = 8000\pi$

okolo nuly: $4\,\text{sinc}(8000\pi t)$

s posunutím: $4\,\text{sinc}\left(8000\pi\left(t-\frac{17}{8000}\right)\right)$

Příklad 6 Hodnota Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) reálného signálu $x[n]$ pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0.1\pi$ rad je $\tilde{X}(e^{j0.1\pi}) = 5 + 2j$.
Určete hodnotu DTFT na zadané normované kruhové frekvenci nebo napište jasně "nejde to":

symetrická podle 0: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{j\omega})$ a periodická se 2π.

$\omega = 2.1\pi$ rad. $\tilde{X}(e^{j\omega}) =$ to samé $= 5+2j$

Příklad 7 Systém se spojitým časem má impulsní odezvu $h(t)$. Napište, jaké podmínky musí splňovat $h(t)$ **stabilního** a **kauzálního** systému se spojitým časem.

kauzalita: $h(t) = 0$ pro $t < 0$

stabilita: $\int_0^\infty |h(t)| = c$ ← konečné číslo, ne ∞

a/nebo $h(t)$ pro $t \to \infty$ konverguje k nule.

Příklad 8 Převeďte diferenciální rovnici systému se spojitým časem → Laplaceova t.:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 0.2\frac{dy(t)}{dt} - 0.1y(t)$ na přenosovou funkci.

$$X(s)s^2 + 0{,}5X(s)\cdot s + 0{,}4X(s) = Y(s)s^2 - 0{,}2Y(s)\cdot s - 0{,}1Y(s)$$

$$X(s)[s^2 + 0{,}5s + 0{,}4] = Y(s)[s^2 - 0{,}2s - 0{,}1]$$

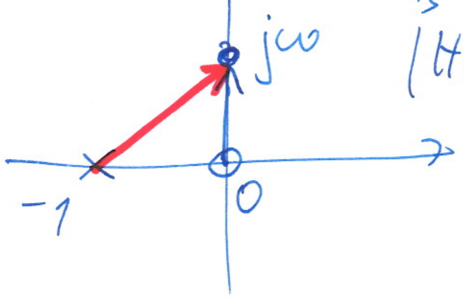
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \dots$$

stačilo napsat výsledek.

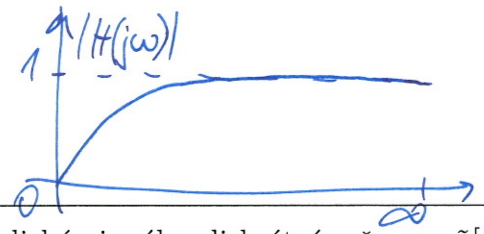
$H(s) = \dfrac{s^2+0{,}5s+0{,}4}{s^2-0{,}2s-0{,}1}$

Příklad 9 Přenosová funkce systému se spojitým časem je: $H(s) = \frac{s}{s+1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kladné frekvence ω. Přesně určete hodnoty modulu pro $\omega = 0$ rad/s a pro $\omega = \infty$ rad/s.

$\frac{s-0}{s(-1)}$



"s" $|H(j\omega)| = \dfrac{\text{délka modrého vek.}}{\text{délka červeného vek.}}$



$|H(j0)| = \frac{0}{1} = 0$

$H(j\infty) = \frac{\infty}{\infty} = 1$

viz přesný výsledek v souboru...

Příklad 10 Dokažte, že pro periodický signál s diskrétním časem $\tilde{x}[n]$ s periodou N vzorků jsou koeficienty Diskrétní Fourierovy řady (DFŘ) také periodické s periodou N koeficientů. Pomůcka: použijte definiční vzorec DFŘ: $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

musí být $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k+pN]$ ← jakýkoliv násobek

$$\tilde{X}[k+pN] = \sum \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+pN)n} =$$

$$= \underbrace{\sum \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\tilde{X}[k]} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}pNn}}_{e^{-j2\pi pn}\text{ celé číslo} \;\to\; 1!} = \tilde{X}[k] \quad \text{Dokázáno}$$

4

Příklad 11 Určete všechny nenulové koeficienty a jejich hodnoty Diskrétní Fourierovy transformace (DFT) **komplexního** signálu o délce $N = 256$ vzorků, který je dán: $x[n] = \frac{1}{256}e^{j2\pi\frac{24}{256}n}$ Pomůcka: zvažte, zda koeficienty nejdou spíše **najít** než vypočítat.

zpětná DFT: $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{+j2\pi\frac{nk}{N}}$

$$\cancel{\frac{1}{256}}e^{j2\pi\frac{24}{256}n} = \cancel{\frac{1}{256}}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$$

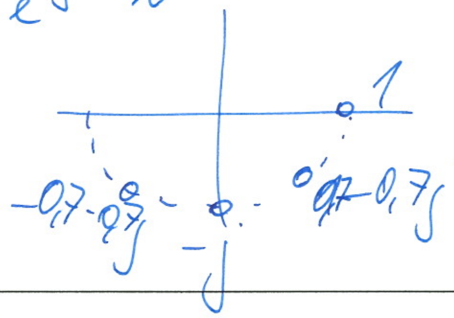
← v sumě bude jen jeden člen nenulový!

$X[24] = 1$

Příklad 12 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$ vzorků. Pro $n = 0 \ldots 7$ má hodnoty 1 1 1 1 0 0 0 0. Vypočtěte zadaný koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zaokrouhlete na 0.7.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

$$X[1] = \sum x[n]e^{-j2\pi\frac{n\cdot 1}{8}} = \sum x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$



$X[1] = 1 + \cancel{0{,}7} - 0{,}7j - j - \cancel{0{,}7} - 0{,}7j = 1 - 2{,}4j$

Příklad 13 Diferenční rovnice číslicového filtru je dána:
$y[n] = x[n] - 0.5x[n-1] + 0.1x[n-2] - 0.5y[n-1] + 0.25y[n-2]$.
Určete přenosovou funkci.

$\mathcal{Z}$

$$Y(z) = X(z) - 0{,}5X(z)z^{-1} + 0{,}1X(z)z^{-2} - 0{,}5Y(z)z^{-1} + 0{,}25Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left[1 + 0{,}5z^{-1} - 0{,}25z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}1z^{-2}\right] \qquad \frac{Y(z)}{X(z)} = \ldots$$

$$H(z) = \frac{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}1z^{-2}}{1 + 0{,}5z^{-1} - 0{,}25z^{-2}}$$

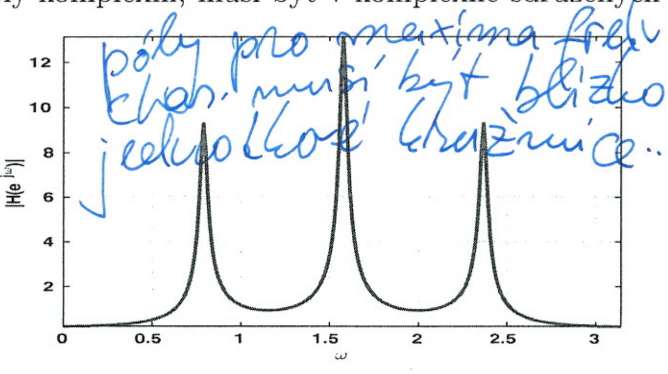
stačí výsledek!

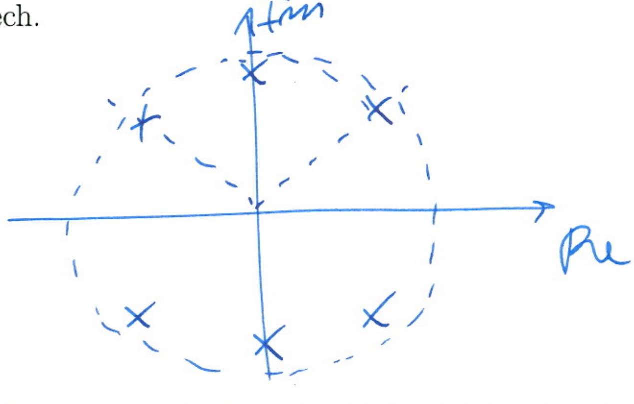
Příklad 14 Frekvenční charakteristika číslicového filtru má pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0.1\pi$ rad hodnotu $H(e^{j0.1\pi}) = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Do filtru vstupuje diskrétní cosinusovka $x[n] = 6\cos(0.1\pi n + \frac{\pi}{2})$. Napište vztah pro signál na výstupu.

Amplituda se vynásobí 6 a fáze se posune o $-\frac{\pi}{2}$

$y[n] = 30\cos\left(0{,}1\pi n + \cancel{\frac{\pi}{2}} - \cancel{\frac{\pi}{2}}\right) = 30\cos(0{,}1\pi n)$

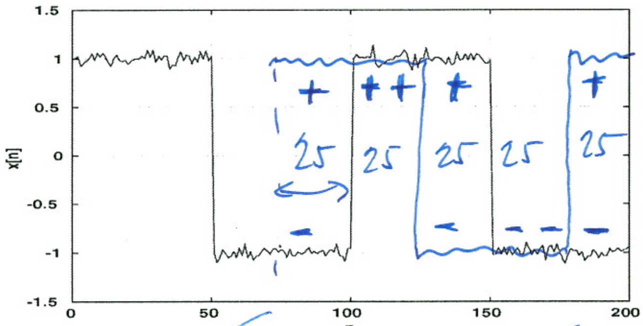
Příklad 15 Modul frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ čistě IIR filtru 6-řádu (ve jmenovateli jsou tedy koeficienty $a_1 \ldots a_6$) je na obrázku. Nakreslete přibližně pozice pólů filtru. Nezapomeňte, že pokud jsou póly komplexní, musí být v komplexně sdružených párech.





A

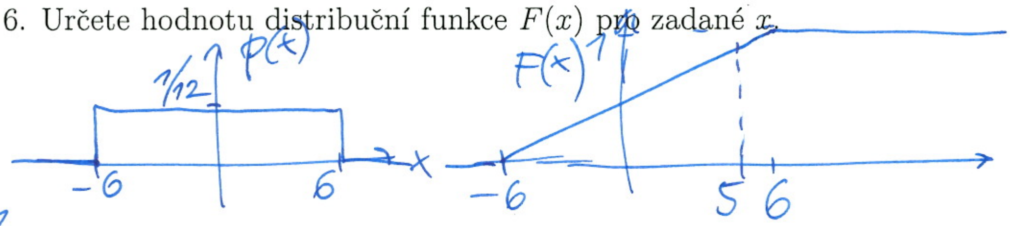
Příklad 16 Na obrázku je signál o délce $N = 200$ vzorků ovlivněný šumem. Odhadněte zadaný autokorelační koeficient. Použijte standardní vychýlený odhad: $\hat{R}_{vych}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]$.



posunutý ...

$R[75] = \frac{-25+25-25+25-25}{200} = -\frac{25}{200} = -\frac{1}{8}$

Příklad 17 Naměřené hodnoty stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu -6 až 6. Určete hodnotu distribuční funkce $F(x)$ pro zadané x.



$F(5) = \frac{11}{12}$

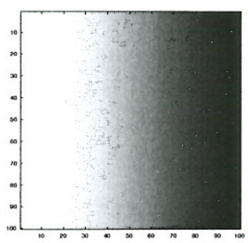
Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2)dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0] (−5)	[0, 10] (5)	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10] (5)	0	1000 $0{,}25 \cdot 10^{-2}$	1000 $0{,}25 \cdot 10^{-2}$	0
[-10, 0] (−5)	0	1000 $0{,}25 \cdot 10^{-2}$	1000 $0{,}25 \cdot 10^{-2}$	0
[-20, -10]	0	0	0	0

převod na p: dělení 4000 a dělení 10^2
při integraci se musí opět násobit 10^2 ...

$R[n_1, n_2] = 10^2\left(5\cdot(-5)\cdot 0{,}25\cdot 10^{-2} + 5\cdot 5\cdot 0{,}25\cdot 10^{-2} + (-5)(-5)0{,}25\cdot 10^{-2} + (-5)(5)0{,}25\cdot 10^{-2}\right) =$
$0{,}25(-25+25+25-25) = 0$

Příklad 19 Nakreslete, jaký bude výsledek operace 2D filtrování $y[k, l] = x[k, l] \star h[k, l]$. Vstup $x[k, l]$ je na obrázku. Výsledek nakreslete do nového obrázku nebo popište. Konvoluční jádro (nebo také 2D filtr, nebo maska) $h[k, l]$ je čtvercové o velikosti 5×5, všechny hodnoty jsou rovny $\frac{1}{25}$.



Filtr vyhlazuje hrany. Vzhledem k tomu, že v obrázku žádné nejsou, bude výstup +/- stejný.

$K = L = M = N = 100$

Příklad 20 Obrázek o rozměrech 100×100 je celý černý (pouze hodnoty nula), jen 2 pixely jsou bílé: $x[0, 0] = x[50, 50] = 1$. Určete zadanou hodnotu jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

$X[m,n] = \sum_k \sum_l e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}$ dosazujeme pouze za dva nenulové pixely...

$X[2, 2] = e^{-j2\pi(0+0)} + e^{-j2\pi\left(\frac{2\cdot 50}{100} + \frac{2\cdot 50}{100}\right)} = e^{-j0} + e^{-j4\pi} = 1 + 1 = 2$