Vzorové řešení zadání ***A***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: \sin x \geq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}: |\cos y| < -1\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, je v a spojitá. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ a=0$

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:

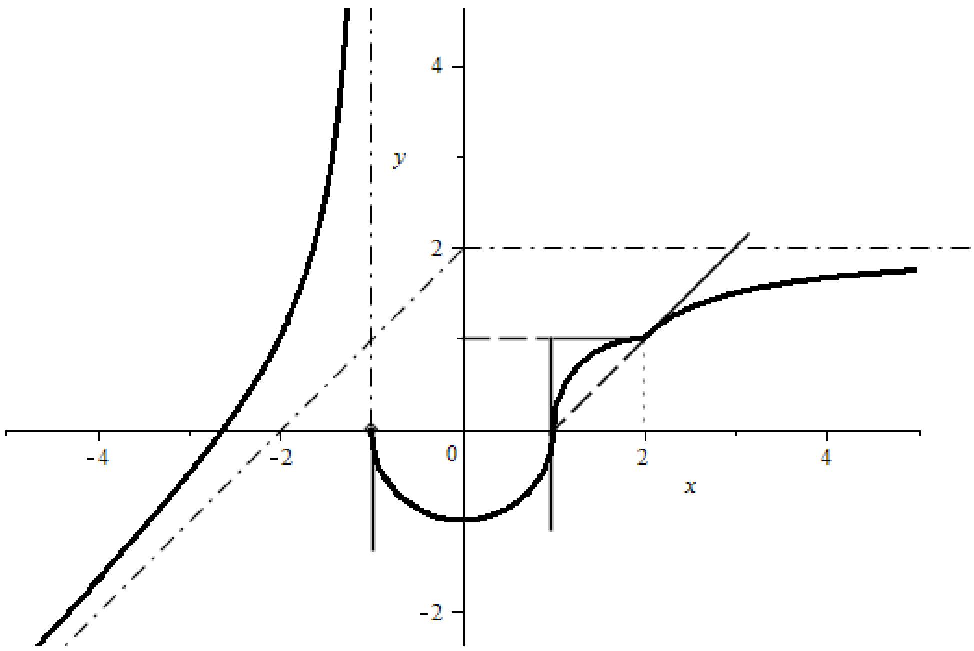
Je spojitá na $\mathbb{R}-\{-1\}$, pro $x=-1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,

$f(-1)=f(1)=0,\ f(2)=1,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2,$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to1} f'(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to2^-} f'(x)=0,\ \lim\limits_{x\to2^+} f'(x)=1,$

$f''(x)>0$ pro $x\in(-\infty,-1)$ a $x\in(-1,1)$, $f''(x)<0$ pro $x\in(1,2)$ a $x\in(2,\infty)$,

přímka $y=x+2$ je asymptota grafu funkce pro $x\to-\infty$.

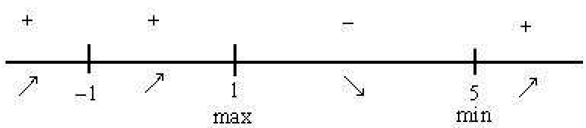


3) Najděte lokální extrémy funkce $\sqrt[3]{(x-5)^2(x+1)}$.

$$f'(x)=\frac{2(x-5)(x+1)+(x-5)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(x-5)^4(x+1)^2}}=\frac{\cancel{(x-5)}\,(2x+2+x-5)}{3\,\cancel{(x-5)}\,\sqrt[3]{(x-5)(x+1)^2}}=\frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-5)(x+1)^2}}$$

$f'(x)=0$ pro $x=1$, $f'(x)\not\exists$ pro $x=-1\vee x=5$.

Znaménko 1. derivace:



$\underline{\underline{f_{\max}=f(1)}}=\sqrt[3]{16\cdot2}=\underline{\underline{2\sqrt[3]{4}}},\qquad \underline{\underline{f_{\min}=f(5)=0}}.$

4) Zjistěte, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ konvergentní nebo divergentní. V případě konvergence zjistěte, kolik členů je třeba sečíst, aby platilo $|s-s_n|<10^{-3}$.

Řada je alternující, použijeme Leibnizovo kriterium: má platit $|a_n|>|a_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty}|a_n|=0$:

$$\sqrt{n}<\sqrt{n+1}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \quad\wedge\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0 \quad\Rightarrow$$ řada je konvergentní.

V konvergentní alternující řadě platí $|s-s_n|<|a_{n+1}|$ - hledáme n, pro které je $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<10^{-3}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<10^{-3} \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{n+1}>10^3 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{n+1}>5\cdot10^2 \quad\Leftrightarrow\quad n+1>25\cdot10^4$$

Pro požadovanou přesnost je třeba sečíst alespoň 250 000 členů řady.

5) Je dána funkce $f(x,y)=\sqrt{4x^2-y^2}$ a bod $A=\left[4;4\sqrt{3}\right]$.

a) Najděte a nakreslete definiční obor funkce f.
b) Najděte rovnici vrstevnice funkce f procházející bodem A a tuto vrstevnici nakreslete do předchozího obrázku.
c) Vypočítejte a do stejného obrázku zakreslete $\operatorname{grad} f(A)$.

a) $4x^2-y^2\geq 0 \Leftrightarrow y^2\leq 4x^2 \Leftrightarrow |y|\leq 2|x|$

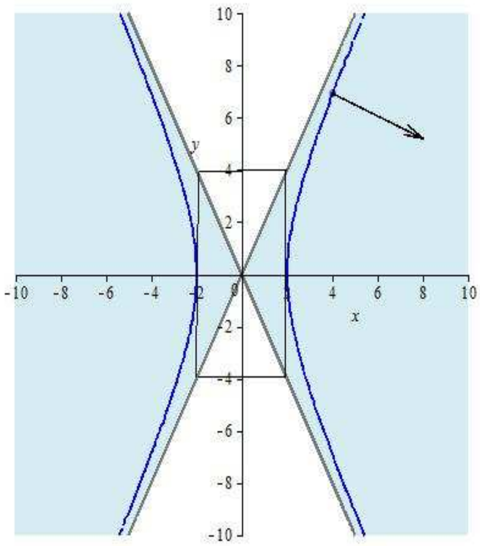
$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y|\leq 2|x|\right\}$$

b) Funkční hodnota v bodě A: $f(A)=\sqrt{4\cdot16-16\cdot3}=4$

Rovnice vrstevnice $\sqrt{4x^2-y^2}=4\Rightarrow 4x^2-y^2=16\Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

- hyperbola s poloosami $a=2,\ b=4$.

c) $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2-y^2}},-\frac{y}{\sqrt{4x^2-y^2}}\right)$, $\operatorname{grad} f(A)=\left(4;-\sqrt{3}\right)$



6) Vypočítejte dvojný integrál $I=\iint_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená křivkami o rovnicích $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ a $x=2$. Množinu M nakreslete.

Průsečíky paraboly a hyperboly: $\frac{1}{x}=\sqrt{x} \;\Rightarrow\; x^3=1$, tj. $x=1$, tedy

$$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leq x\leq 2\wedge\frac{1}{x}\leq y\leq\sqrt{x}\right\}$$

$$I=\int_1^2 dx\int_{1/x}^{\sqrt{x}}xy\,dy=\int_1^2 dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{1/x}^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\ln x\right]_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-\ln 2-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\ln 2$$