B

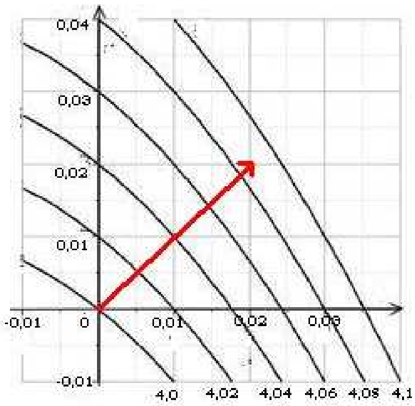
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $y = -2$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[1, -2, \sqrt{5}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \text{ je rovnice kuželové plochy}, z = \sqrt{5} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(x) = z(x,-2) = \sqrt{x^2+4}, \text{ směrnice } k = f'(1) = \left.\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+4}}\right|_{x=1} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

$$\text{Jinak: } k = z'_x(1,-2) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=1\\y=-2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0{,}01;0) - f(0;0)}{0{,}01-0} = \frac{4{,}02-4}{0{,}01} = \frac{0{,}02}{0{,}01} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0{,}01) - f(0;0)}{0{,}01-0} = \frac{4{,}02-4}{0{,}01} = \frac{0{,}02}{0{,}01} = \underline{\underline{2}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot \mathbf{grad} f(A)$

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{100}\cdot\mathbf{grad} f(A) = (0{,}02; 0{,}02)$$

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0.03; 0]$ má $\mathbf{grad} f$ větší velikost?

<u>V bodě B</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

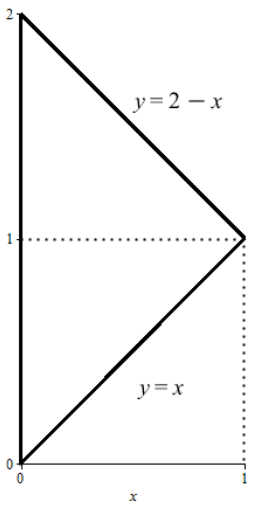
d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad} f(A) \doteq \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(2,2) = \underline{\underline{1+\sqrt{3}}}.$$

3. Vypočítejte $\int_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,2]$ a $[1,1]$.



$$A = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2-x \end{array} \right\}$$

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} xy\,dy = \int_0^1 x\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_x^{2-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x\left((2-x)^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right)dx = \left[x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \tfrac{2}{3} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}$$