G.

1. Vypočítejte integrál $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx$ pomocí substituce $\sqrt{1+x^2}-x=t$ neboli $\sqrt{1+x^2}=t+x$

(Identitu pro substituci umocnit na druhou, vyjádřit x a dx)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{lll} \sqrt{1+x^2}-x=t & & x=0 \Rightarrow t=1 \\ \sqrt{1+x^2}=x+t \Rightarrow x=\dfrac{1-t^2}{2t} & dx=-\dfrac{1+t^2}{2t^2}dt & x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2-\sqrt{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^{2-\sqrt{3}} \frac{1-t-\frac{1-t^2}{2t}}{1+t+\frac{1-t^2}{2t}} \cdot -\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_1^{2-\sqrt{3}} \frac{2t-2t^2-1+t^2}{2t+2t^2+1-t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_1^{2-\sqrt{3}} \frac{2t-t^2-1}{2t+t^2+1} \cdot \frac{1+t^2}{t^2}\,dt =$$

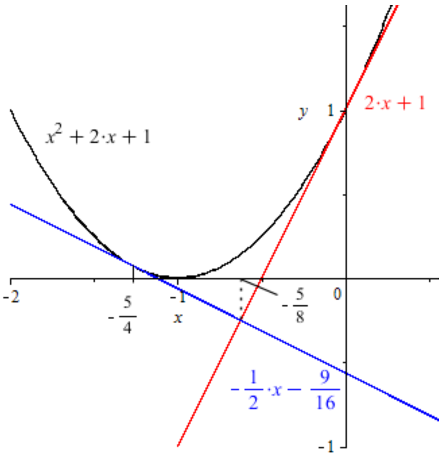
$$= \frac{1}{2}\int_1^{2-\sqrt{3}} \frac{(t-1)^2}{(t+1)^2} \cdot \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = \int_1^{2-\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{4}{(t+1)^2}\right)dt = \left[\frac{t}{2}-2\ln t-\frac{1}{2t}-\frac{4}{t+1}\right]_1^{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2}-2\ln(2-\sqrt{3})-\frac{1}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}-\frac{4}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2 = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}-2\ln(2-\sqrt{3})+2 =$$

$$= -\frac{5\sqrt{3}}{3}-2\ln(2-\sqrt{3})$$

2. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=x^2+2x+1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $2x-y-1=0$, druhá je na ni kolmá.
Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami.
(Pro numerické výpočty můžete použít kalkulačku.)

$2x-y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-1$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=2, k_2=-\frac{1}{2}$.



$y'=2x+2$

$2x+2=2 \Leftrightarrow x=0,\ f(0)=1,\quad T_1=[0,1]$

$2x+2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4},\ f\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{16},\ T_2=\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{16}\right]$

$t_1:\quad y=1+2x,$

$t_2:\quad y=-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)=-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}x$

průsečík tečen: $-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}x=2x+1 \Rightarrow x=-\frac{5}{8}$.

$$S=\int_{-\frac{5}{4}}^{0}\left(x^2+2x+1\right)dx-\int_{-\frac{5}{4}}^{-\frac{5}{8}}\left(-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}x\right)dx-\int_{-\frac{5}{8}}^{0}\left(2x+1\right)dx-=\cdots=\frac{125}{768}\doteq 0{,}16275$$