Vzorové řešení zadání E

1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x \in \mathbb{R} : \sin x = 2\pi\right) \Leftrightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R} : \cos y = \frac{\pi}{2}\right)$ — ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Jestliže $\exists x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = f(x)$, potom f není lichá. — ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***
$f(x) = \sin x,\ x_0 = \pi$

c) Je-li $f''(x_0) = 0$, potom je x_0 inflexní bod funkce f. — ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***
$f(x) = x^4,\ x_0 = 0$

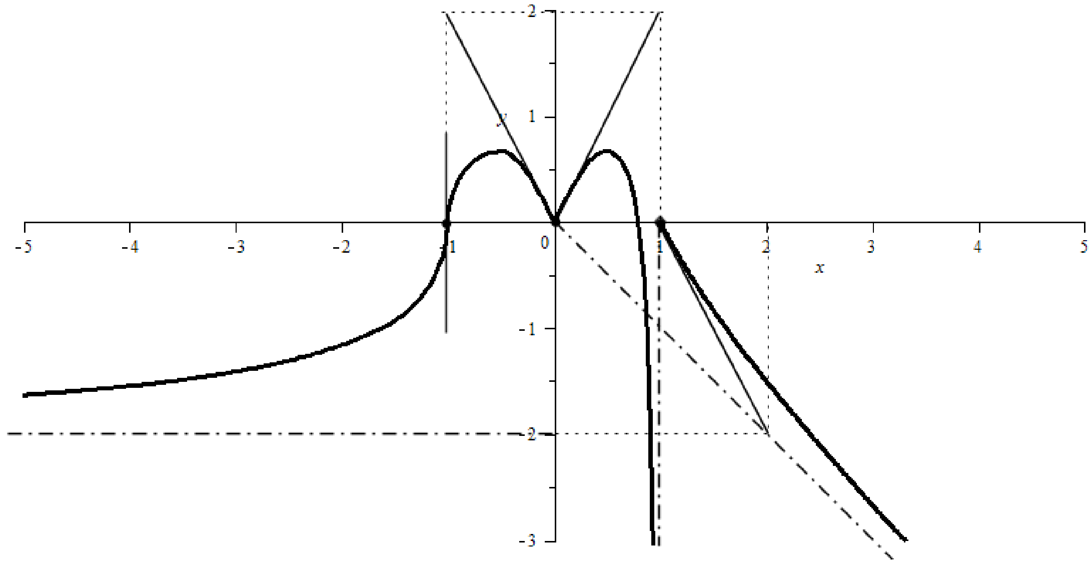
2. Nakreslete graf funkce spojité na $\mathbb{R} - \{1\}$, pro kterou platí:
pro $x = 1$ má nespojitost druhého druhu přičemž je zde spojitá zprava,

$f(-1) = f(0) = f(1) = 0,$

$\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -2,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 2,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -2,$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (1, \infty)$, $\quad f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 0)$ a $x \in (0, 1)$,

Přímka $y = -2$ je asymptota pro $x \to -\infty$, přímka $y = -x$ je asymptota pro $x \to \infty$.



3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x\cdot(x-1)^2}$ na intervalu $\langle -1, 2\rangle$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)^2 + 2x\cdot(x-1)}{\left(x\cdot(x-1)^2\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)(x-1+2x)}{x^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3x-1}{x^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = \frac{1}{3}$, $\quad f'(x)$ neex. pro $x = 0 \vee x = 1$

$f(-1) = -\sqrt[3]{4},\ f(0) = 0,\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{4},\ f(1) = 0,\ f(2) = \sqrt[3]{2}$

$\underline{\underline{f_{\max} = f(2) = \sqrt[3]{2}}},\quad \underline{\underline{f_{\min} = f(-1) = -\sqrt[3]{4}}}$

4. Najděte $x \in \mathbb{R}$ vyhovující rovnici $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = \frac{4}{5}x(x-2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = \frac{x-2}{1-(x-2)} = \frac{x-2}{3-x}, \quad |x-2|<1 \Leftrightarrow x \in (1,3)$$

$$\frac{x-2}{3-x} = \frac{4}{5}x(x-2) \quad 1)\ x-2=0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$2)\ 5 = 4x(3-x) \Leftrightarrow 4x^2-12x+5=0 \quad x_{2,3} = \begin{cases} \frac{5}{2} \in (1,3) \\ \frac{1}{2} \notin (1,3) \end{cases}$$

Výsledek: $\underline{\underline{x = 2 \vee x = \frac{5}{2}}}$

5. $f(x,y) = \ln \frac{x^2}{y}$.

a) Najděte bod A, pro který platí grad $f(A) = (1,-1)$.

b) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce *f* v bodě *A*.

a) $f(x,y) = \ln\frac{x^2}{y} = 2\ln x - \ln y, \quad f'_x = \frac{2}{x},\ f'_y = -\frac{1}{y} \quad \text{grad } f(x,y) = \left(\frac{2}{x}, -\frac{1}{y}\right).$

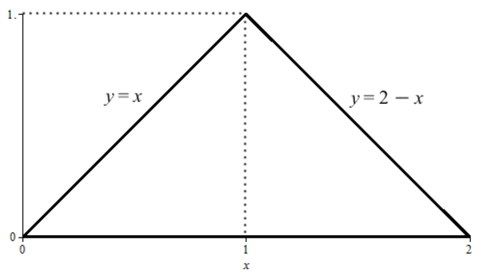
$$\left(\frac{2}{x}, -\frac{1}{y}\right) = (1,-1) \Leftrightarrow x=2,\ y=1 \qquad A = [x,y] = \underline{\underline{[2,1]}}$$

b) $f(A) = 2\ln 2$

Tečná rovina: $z - f(A) = f'_x(A)(x-x_0) + f'_y(A)(y-y_0)$

$$z - 2\ln 2 = 1\cdot(x-2) - 1\cdot(y-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{x-y-z = 1-2\ln 2}}$$

6. Vypočítejte $\int_A xy^2\,dx\,dy$, kde *A* je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$ a $[1,1]$.



$$A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 2-y \end{array} \right\}$$

$$\int_A xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} xy^2\,dx = \int_0^1 y^2 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_y^{2-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\left((2-y)^2 - y^2\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2y^2 - 2y^3\right)dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$