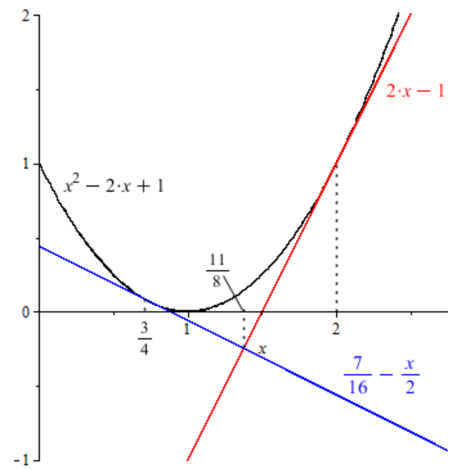
A.

1. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$ pomocí substituce $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=t$

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}=\left|\begin{array}{lll} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=t \quad t^3=\frac{1-x}{1+x} & x=0\Rightarrow t=1 & 1+x=\frac{1+t^3+1-t^3}{1+t^3}=\frac{2}{1+t^3} \\ x=\frac{1-t^3}{1+t^3} \quad dx=-6\frac{t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt & x=1\Rightarrow t=0 & \frac{1}{(1+x)^2}=\frac14\left(1+t^3\right)^2 \end{array}\right|=$$

$$=\int_1^0 t\cdot\tfrac14\left(1+t^3\right)^2\cdot -6\frac{t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt=\frac32\int_0^1 t^3dt=\frac32\cdot\frac14\left[t^4\right]_0^1=\frac38$$

2. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y=x^2-2x+1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $2x-y-1=0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami. (Pro numerické výpočty po dosazení mezí můžete použít kalkulačku.)



$2x-y-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=2x-1$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1=2, k_2=-\frac12$.

$y'=2x-2 \quad 2x-2=2\Leftrightarrow x=2,\ f(2)=1,\quad T_1=[2,1]$

$2x-2=-\frac12\Leftrightarrow x=\frac34,\ f\left(\frac34\right)=\frac{1}{16},\ T_2=\left[\frac34,\frac{1}{16}\right]$

$t_1:\quad y=1+2(x-2)=2x-3,$

$t_2:\quad y=\frac{1}{16}-\frac12\left(x-\frac34\right)=\frac{7}{16}-\frac12x$

průsečík tečen: $\frac{7}{16}-\frac12x=2x-3\Rightarrow x=\frac{11}{8}$.

$$S=\int_{\frac34}^{2}\left(x^2-2x+1\right)dx-\int_{\frac34}^{\frac{11}{8}}\left(\frac{7}{16}-\frac12x\right)dx-\int_{\frac{11}{8}}^{2}(2x-3)\,dx=\left[\frac13x^3-x^2+x\right]_{\frac34}^{2}-\left[\frac{7}{16}x-\frac14x^2\right]_{\frac34}^{\frac{11}{8}}-\left[x^2-3x\right]_{\frac{11}{8}}^{2}=$$

$$=\frac83-4+2-\frac{27}{3\cdot64}+\frac{9}{16}-\frac34-\frac{77}{16\cdot8}+\frac{121}{4\cdot64}+\frac{21}{16\cdot4}-\frac{9}{16\cdot4}-4+6+\frac{121}{64}-\frac{33}{8}=\cdots=\frac{125}{768}\doteq 0{,}16275$$