C

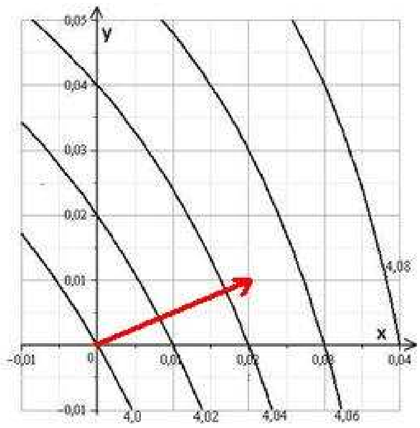
1. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z^2 = x^2 + y^2$ rovinou $y = 3$. Najděte směrnici tečny k této křivce procházející bodem $\left[1,3,\sqrt{10}\right]$.

$$z^2 = x^2 + y^2 \text{ je rovnice kuželové plochy}, z = \sqrt{10} \Rightarrow z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(x) = z(x,3) = \sqrt{x^2+9}, \text{ směrnice } k = f'(1) = \left.\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}\right|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10}}{10}}}$$

$$Jinak: \ k = z'_x(1,3) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=1\\y=3}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

2. Ve vedlejším obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f blízko bodu $A = [0,0]$.



a) Odhadněte $f'_x(A)$ a $f'_y(A)$.

$$f'_x(A) \doteq \frac{f(0,01;0) - f(0;0)}{0,01-0} = \frac{4,02-4}{0,01} = \frac{0,02}{0,01} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'_y(A) \doteq \frac{f(0;0,02) - f(0;0)}{0,02-0} = \frac{4,02-4}{0,02} = \frac{0,02}{0,02} = \underline{\underline{1}}$$

b) Do obrázku nakreslete vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A)$.

$\mathbf{v} = \frac{1}{100}\cdot\mathbf{grad}f(A) = (0,02;0,01)$

c) Ve kterém z bodů A, B, kde $B = [0.02;0.03]$ má $\mathbf{grad}f$ větší velikost?

<u>V bodě A</u> – jsou zde vrstevnice blíže k sobě.

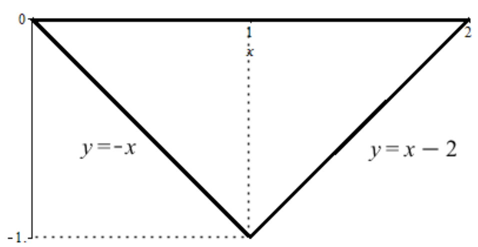
d) Jaký úhel φ svírá gradient funkce f v bodě B s vrstevnicí procházející tímto bodem?

Gradient je vždy kolmý na vrstevnici – je to směr nejrychlejšího růstu.

e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(A)$, je-li $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f'_{\mathbf{u}}(A) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}f(A) \doteq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot(2,1) = \underline{\underline{\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}}}.$$

3. Vypočítejte $\int_A xy\,dx\,dy$, kde A je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$ a $[1,-1]$.



$$A = \left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} -1 \le y \le 0 \\ -y \le x \le y+2 \end{array}\right\}$$

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y}^{y+2} xy\,dx = \int_{-1}^{0} y\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-y}^{y+2} dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} y\left((y+2)^2 - y^2\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(2y^2+2y\right)dy = \left[\frac{2}{3}y^3 + y^2\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$