Vzorové řešení zadání ***B***

1) U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.
U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: \sin x \ge \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}: |\cos y| < -1\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

b) Platí-li $f'(a)=0$, má funkce f v bodě a extrém. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $f(x)=x^3,\ a=0$

c) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

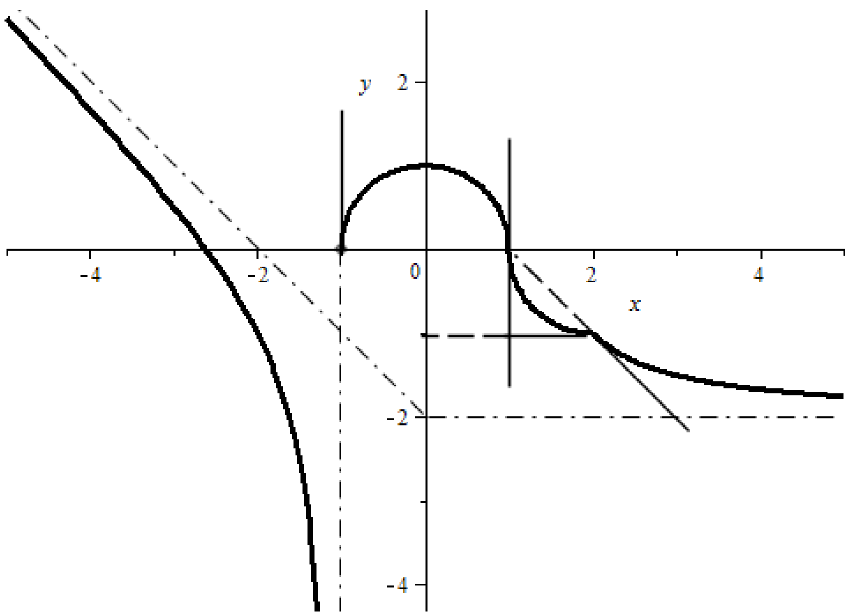
2) Nakreslete graf funkce f, pro kterou platí:
Je spojitá na $\mathbb{R}-\{-1\}$, pro $x=-1$ má nespojitost 2. druhu přičemž je zde spojitá zprava,

$f(-1)=f(1)=0,\ f(2)=-1,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2,$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to 1} f'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=-1,$

$f''(x)<0$ pro $x\in(-\infty,-1)$ a $x\in(-1,1)$, $f''(x)>0$ pro $x\in(1,2)$ a $x\in(2,\infty)$,

přímka $y=-x-2$ je asymptota grafu funkce pro $x\to-\infty$.

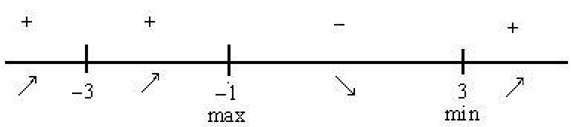


3) Najděte lokální extrémy funkce $\sqrt[3]{(x-3)^2(x+3)}$

$$f'(x)=\frac{2(x-3)(x+3)+(x-3)^2}{3\cdot\sqrt[3]{(x-3)^4(x+3)^2}}=\frac{\cancel{(x-3)}\,(2x+6+x-3)}{3\cancel{(x-3)}\sqrt[3]{(x-3)(x+3)^2}}=\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)^2}}$$

$f'(x)=0$ pro $x=-1$, $f'(x)\not\exists$ pro $x=-3\vee x=3$.

Znaménko 1. derivace:



$$\underline{\underline{f_{\max}=f(-1)}}=\sqrt[3]{16\cdot 2}=\underline{\underline{2\sqrt[3]{4}}},\qquad \underline{\underline{f_{\min}=f(3)=0.}}$$

4) Zjistěte, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3\sqrt{n}}$ konvergentní nebo divergentní. V případě konvergence zjistěte, kolik členů je třeba sečíst, aby platilo $|s-s_n|<10^{-3}$.

Řada je alternující, použijeme Leibnizovo kriterium: má platit $|a_n|>|a_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty}|a_n|=0$:

$$\sqrt{n}<\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{3\sqrt{n+1}} \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\sqrt{n}}=0 \quad \Rightarrow$$ řada je konvergentní.

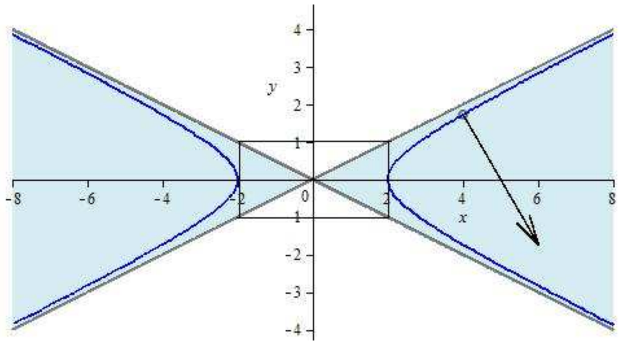
V konvergentní alternující řadě platí $|s-s_n|<|a_{n+1}|$ - hledáme n, pro které je $\frac{1}{3\sqrt{n+1}}<10^{-3}$.

$$\frac{1}{3\sqrt{n+1}}<10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{n+1}>10^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1}>\tfrac{1}{3}\cdot 10^3 \quad \Leftrightarrow \quad n+1>\tfrac{1}{9}\cdot 10^6=111111.\bar{1}$$

Pro požadovanou přesnost je třeba sečíst alespoň 111 111 členů řady.

5) Je dána funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2-4y^2}$ a bod $A=\left[4;\sqrt{3}\right]$.

a) Najděte a nakreslete definiční obor funkce f.
b) Najděte rovnici vrstevnice funkce f procházející bodem A a tuto vrstevnici nakreslete do předchozího obrázku.
c) Vypočítejte a do stejného obrázku zakreslete $\operatorname{grad} f(A)$.



a) $x^2-4y^2\ge 0 \Leftrightarrow y^2\le\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow |y|\le\frac{|x|}{2}$

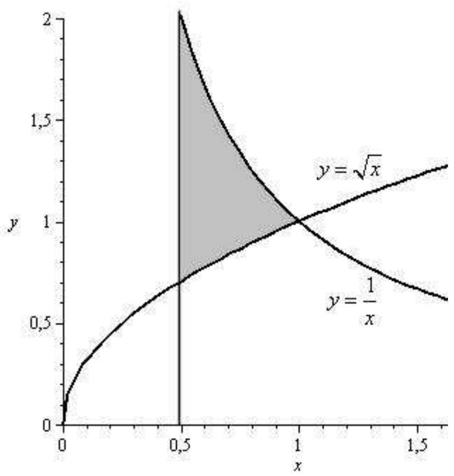
$$\underline{\underline{D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y|\le\frac{|x|}{2}\right\}}}$$

b) Funkční hodnota v bodě A: $f(A)=\sqrt{16-4\cdot 3}=2$

Rovnice vrstevnice $\sqrt{x^2-4y^2}=2 \Rightarrow x^2-4y^2=4 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{4}-y^2=1}}$ - hyperbola s poloosami $a=2,\ b=1$.

c) $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4y^2}},-\frac{4y}{\sqrt{x^2-4y^2}}\right)$, $\underline{\underline{\operatorname{grad} f(A)=\left(2;-2\sqrt{3}\right)}}$

6) Vypočítejte dvojný integrál $I=\iint_M xy\,dxdy$, kde M je množina ohraničená křivkami o rovnicích $y=\frac{1}{x},\ y=\sqrt{x}$ a $x=\frac{1}{2}$. Množinu M nakreslete.



Průsečíky paraboly a hyperboly: $\frac{1}{x}=\sqrt{x} \Rightarrow x^3=1$, tj. $x=1$, tedy

$$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\le x\le 1 \wedge \sqrt{x}\le y\le\frac{1}{x}\right\}$$

$$I=\int_{1/2}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{1/x}xy\,dy=\int_{1/2}^{1}dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{\sqrt{x}}^{1/x}=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 8}\right)=\underline{\underline{-\frac{7}{48}+\frac{1}{2}\ln 2}}$$