Vzorové řešení zadání D

1. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) $\left(\exists x\in\mathbb{R}: |x-2|=-2\right) \Rightarrow \left(\forall y\in\mathbb{R}: \sin^2 y+\cos^2 y\neq 2\right)$ ***pravdivý*** ~~***nepravdivý***~~ ***protipříklad:***

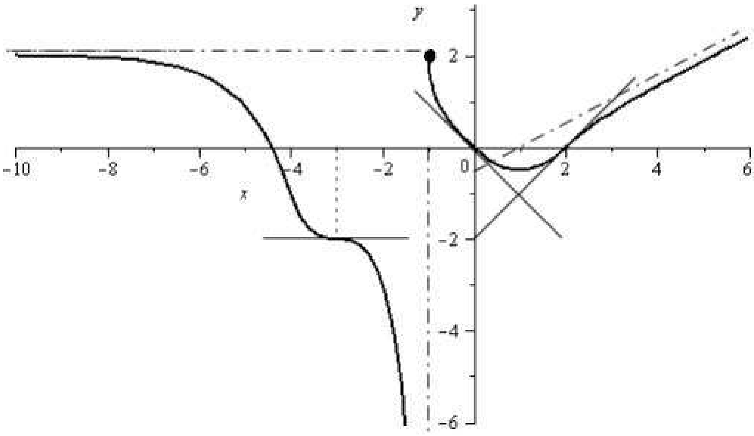
b) Je-li funkce f spojitá na (a,b), je na (a,b) ohraničená. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=\operatorname{tg} x,\ (a,b)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

c) Je-li funkce f periodická, potom je ohraničená. ~~***pravdivý***~~ ***nepravdivý*** ***protipříklad:***

$f(x)=\operatorname{tg} x$

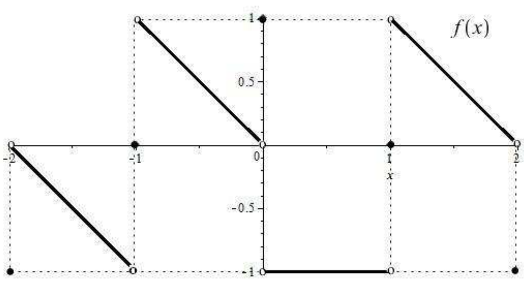
2. Načrtněte graf funkce *f*, pro kterou platí: $D_f=\mathbb{R}$,
v bodě $x=-1$ má f nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zprava,
$f(-3)=-2,\ f(-1)=2,\ f(0)=f(2)=0,\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=-\infty,\ f'(0)=-1,$
$x=-3$ a $x=2$ jsou inflexní body, přičemž $f'(2)=1$ a $f'(-3)=0$, $f'(x)\leq 0$ pro $x\in(-\infty,-1)$,
přímka $y=2$ je její asymptota pro $x\to-\infty$, přímka $y=\frac{1}{2}(x-1)$ je asymptota pro $x\to\infty$.

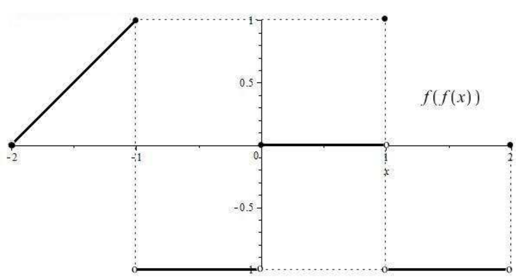


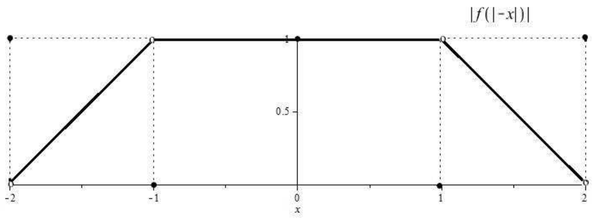
3. Funkce f je definovaná předpisem

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x\in\{-2,2\} \\ 0 & x\in\{-1,1\} \\ 1 & x\in\{0\} \\ -x-2 & x\in(-2,-1) \\ -x & x\in(-1,0) \\ -1 & x\in(0,1) \\ 2-x & x\in(1,2) \end{cases}$$

Nakreslete grafy $f(x), (f\circ f)(x), \left|-f\left(|-x|\right)\right|$ a najděte $f^{-1}\left(\{-1\}\right)$.



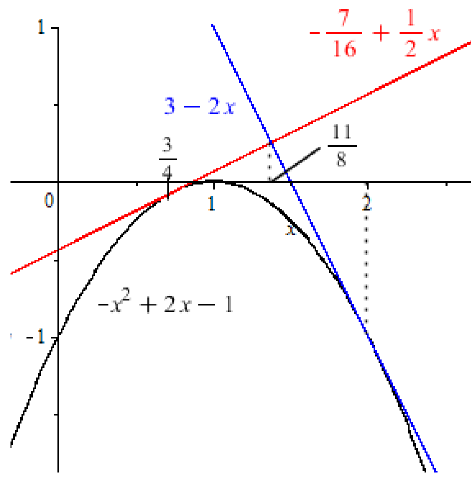




$f^{-1}(\{-1\}) = \{-2, 2\} \cup (0,1)$.

4. Najděte rovnice dvou tečen k parabole $y = -x^2 + 2x - 1$; jedna je rovnoběžná s přímkou $x - 2y + 4 = 0$, druhá je na ni kolmá. Vypočítejte obsah části roviny omezené danou parabolou a nalezenými tečnami. (Výsledek po dosazení mezí ponechejte ve tvaru součtu zlomků.)

$x - 2y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 2$ - hledáme tečny k parabole se směrnicemi $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -2$.



$y' = -2x + 2 \quad -2x + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{16}, \quad T_1 = \left[\frac{3}{4}, -\frac{1}{16}\right]$

$-2x + 2 = -2 \Leftrightarrow x = 2,\ f(2) = -1, \quad T_2 = [2, -1]$

$t_1: \quad y = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{16},$

$t_2: \quad y = -1 - 2(x - 2) = -2x + 3$

průsečík tečen: $\frac{1}{2}x - \frac{7}{16} = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$.

$$S = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} (3 - 2x)\,dx + \int_{\frac{11}{8}}^{2} \left(-\frac{7}{16} + \frac{1}{2}x\right) dx - \int_{\frac{3}{4}}^{2} \left(-x^2 + 2x - 1\right) dx = \left[-\frac{7}{16}x + \frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} + \left[3x - x^2\right]_{\frac{11}{8}}^{2} - \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right]_{\frac{3}{4}}^{2} =$$

$$= \quad = \cdots = \frac{125}{768} \doteq 0{,}16275$$

5. Vypočítejte s přesností na tři desetinná místa (tj. s chybou menší než 10^{-3}) integrál $I = \int_0^1 \sin x^2 dx$ tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^{10}}{3!} + \frac{x^{14}}{5!} - \frac{x^{18}}{7!} + \cdots\right) dx = \Big|$ řada konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$, můžeme integrovat v libovolných konečných mezích $\Big| = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 3!} + \frac{x^{15}}{15 \cdot 5!} - \frac{x^{19}}{19 \cdot 7!} + \cdots\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{11 \cdot 3!} + \frac{1}{15 \cdot 5!} - \frac{1}{19 \cdot 7!} + \cdots$

$$15 \cdot 5! = 1800 > 10^3 \Rightarrow \frac{1}{15 \cdot 5!} < 10^{-3}$$

Chyba v alternující řadě je (v absolutní hodnotě) menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, tedy $\underline{\underline{I = \frac{1}{3} - \frac{1}{11 \cdot 3!}}} + R$, kde $|R| < 10^{-3}$

6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^3 - 4x + 12y + 21$.

$f'(x,y) = \left(2x-4, -3y^2+12\right) \qquad f'(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\begin{matrix} 2x = 4 \\ 3y^2 = 12 \end{matrix} \Rightarrow \quad x = 2,\ y = \pm 2$ dva stacionární body $A = [2,2],\ B = [2,-2]$

$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}, \quad D_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} < 0, \quad D_2(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} > 0,\ D_1(B) = 2 > 0 \Rightarrow$

v bodě A extrém nenastane, v bodě B nastane minimum s hodnotou $\underline{\underline{f_{\min} = f(2,-2) = 1}}$