2024-2025 秋季学期离散数学-第 11 次作业

何昱晖 2022012050 2024-12-13

主观题 10.7

证明：我们知道对于任意 $< x, y >$，有

$$\begin{aligned}
< x, y >\in R \circ (S \cup T) &\Leftrightarrow \exists z(< x, z >\in S \cup T \wedge < z, y >\in T) \\
&\Leftrightarrow \exists z((< x, z >\in S \vee < x, z >\in T) \wedge < z, y >\in R) \\
&\Leftrightarrow \exists z((< x, z >\in S \wedge < z, y >\in R) \vee (< x, z >\in T \vee < z, y >\in R)) \\
&\Leftrightarrow \exists z(< x, z >\in S \wedge < z, y >\in R) \vee \exists z(< x, z >\in T \wedge < z, y >\in R) \\
&\Leftrightarrow < x, y >\in R \circ S \wedge < x, y >\in R \circ T \\
&\Leftrightarrow < x, y >\in (R \circ S) \cup (R \circ T)
\end{aligned}$$

所以我们可以得到 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$。证毕。□

主观题 11.1

可以构造出这么一个关系

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

可以知道在关系 $R = \{< 1, 3 >, < 3, 1 >, < 1, 2 >, < 3, 3 >\}$ 中，关系 R 满足对称性和传递性，但是不满足自反性，因为不包含 $< 2, 2 >$

主观题 11.2

证明：我们知道 A 上的恒等关系 I_A 定义为 $I_A = \{< x, x > \mid x \in A\}$。由于满足自反性的关系 R 定义为 $\forall x \in A, < x, x >\in R$，也即

$$\forall p \in I_A, p \in R$$

因此根据集合包含的定义可知 $I_A \subseteq R$。证毕。□

主观题 11.3

1. 可以构造出这么一个关系满足对称的且反对称的且传递的：

$$R_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. 可以构造出这么一个关系满足不是对称的且不是反对称的且不是传递的：

$$R_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

主观题 11.4

注意到 $3R1$ 并且 $1R2$，但是 $3\not R2$，因此 R 不是传递的。关系 R 的传递闭包是

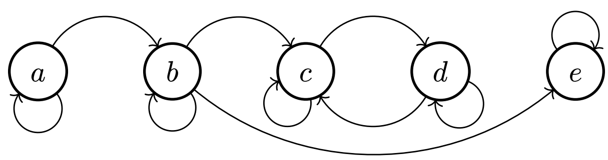
$$\begin{aligned} R' = \{ & <1,1>, <1,2>, \\ & <2,1>, <2,2>, \\ & <3,1>, <3,2>, \\ & <4,3>, <4,1>, <4,2> \} \end{aligned}$$

主观题 11.5

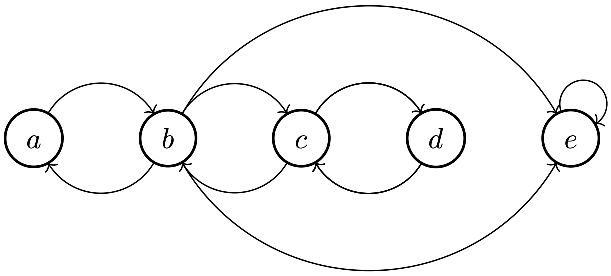
- $R_1 \circ R_2 = \{<x,y> \mid \exists z(<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1)\}$，因此
$$R_1 \circ R_2 = \{<c,d>\}$$
- $R_2 \circ R_1 = \{<x,y> \mid \exists z(<x,z> \in R_1 \wedge <z,y> \in R_2)\}$，因此
$$R_2 \circ R_1 = \{<a,d>, <a,c>\}$$
- $R_1^2 = R_1 \circ R_1$，因此
$$R_1^2 = \{<a,a>, <a,b>, <a,d>\}$$
- $R_2^2 = R_2 \circ R_2$，因此
$$R_2^2 = \{<b,b>, <c,c>\}$$

主观题 11.6

- 自反闭包 $r(R)$



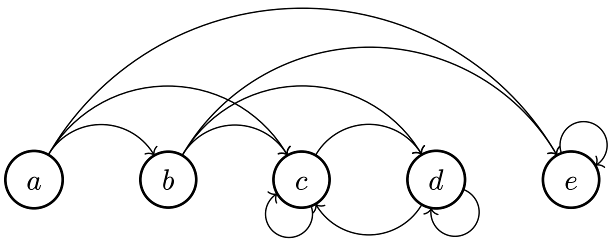
- 对称闭包 $s(R)$



- 传递闭包 $t(R)$：已知 $R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,c>,<e,e>,<b,e>\}$，可以求得其传递闭包

$$
\begin{aligned}
t(R)=\{&<a,b>,<a,c>,<a,e>,\\
&<b,c>,<b,d>,<b,e>\\
&<c,d>,<c,c>,\\
&<d,c>,<d,d>,\\
&<e,e>\}
\end{aligned}
$$

因此其传递闭包的关系图为：



客观题 1

Q：对集合 $A=\{1,2,3\}$，下列 8 种关系图，选择每个关系具有的性质

A: 自反　B: 反自反　C: 对称　D: 反对称　E: 传递　F: 无任何关系

- R_1： F
- R_2： E
- R_3： A, C, E
- R_4： A, E
- R_5： F
- R_6： B, C
- R_7： B
- R_8： A, C

客观题 2

Q：对集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，A 上的关系 R 和 S 各有什么性质：

- $R=\{<x,y>\mid x+y=10\}$

- $S = \{< x, y > \mid x + y \text{ is even}\}$
- R：对称
- S：自反，对称，传递

客观题 3

Q：对 A 上的关系 R_1 和 R_2，判定下列命题的真假，若为真，填入 T，若为假，填入 F：

- 若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的：T

  由于 R_1 和 R_2 都是自反的，因此 $\forall x \in A, < x, x > \in R_1, R_2$，对于任意 $x \in A$ 都可以找到 $z = x$ 使得

  $$< x, z > \in R_2, < z, x > \in R_1$$

  因此 $\forall x \in A, < x, x > \in R_1 \circ R_2$，于是 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的；

- 若 R_1 和 R_2 是反自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是反自反的：F

  只需要给出以下反例（思考的方式是 $< 2, 1 > \circ < 1, 2 > = < 2, 2 >$ 这样的结果）：给定 $A = \{1, 2\}$，关系 $R_1 = \{< 1, 2 >\}$ 和 $R_2 = \{< 2, 1 >\}$ 是自反的，但 $R_1 \circ R_2 = \{< 2, 2 >\}$ 并不是反自反的；

- 若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的：F

  只需要给出以下反例（思考的方式是 $< a, b > \circ < b, c > = < a, c >$ 但是找不到复合出 $< c, a >$ 的情况）：给定 $A = \{a, b, c\}$，关系

  $$\begin{aligned} R_2 &= \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, a >\} \\ R_1 &= \{< b, c >, < c, b >\} \end{aligned}$$

  很明显 R_1 和 R_2 是对称的，此时 $R_1 \circ R_2 = \{< b, c >, < c, b >, < a, c >\}$，而 $R_1 \circ R_2$ 不是对称的；

- 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的：F

  只需要给出以下反例：给定集合 $A = \{a, b, c\}$，关系 $R_1 = \{< a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 和 $R_2 = \{< c, a >, < a, b >, < c, b >\}$ 都是传递的，但是 $R_1 \circ R_2 = \{< c, b >, < c, c >, < a, c >\}$ 不是传递的。