2024-2025 秋季学期离散数学-第 9 次作业

主观题 9.1

1. 我们分别计算 $\mathcal{PPP}(\emptyset)$、$\mathcal{PP}(\emptyset)$ 以及 $\mathcal{P}(\emptyset)$，很容易可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}\\ \mathcal{PP}(\emptyset) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \mathcal{PPP}(\emptyset) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\end{aligned}$$

   因此我们可以得到

$$\bigcup\{\mathcal{PPP}(\emptyset), \mathcal{PP}(\emptyset), \mathcal{P}(\emptyset), \emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

   当然也可以使用 $\cup\{\mathcal{P}(A)\} = A$ 的结论得到该广义并是 $\mathcal{PPP}(\emptyset)$

2. 根据上面的计算结果，我们可以得到

$$\bigcap\{\mathcal{PPP}(\emptyset), \mathcal{PP}(\emptyset), \mathcal{P}(\emptyset)\} = \{\emptyset\}$$

主观题 9.2

1. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$，易知 $\cup\mathcal{P}(A) = A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
2. $\cup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$，则其幂集 $\mathcal{P}(\cup A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

主观题 9.3

1. 证明：我们知道 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$，则 $(A-B)-C = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}$，并且我们还有

$$\begin{aligned}A - C &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin C\}\\ B - C &= \{x \mid x \in B \wedge x \notin C\}\\ (A-C)-(B-C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin C \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)\}\\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}\end{aligned}$$

   因此两个集合是相等的，$(A-B)-C = (A-C)-(B-C)$

2. 证明：$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$，注意到 $A = B$，因此，$x \in A \wedge x \notin B = \mathrm{F}$，于是我们证明了 $A \oplus B = \emptyset$

3. 证明：我们知道 $A \cap B = \emptyset$ 等价于 $\forall x \in A, x \notin B$，而 $A \subseteq -B$ 等价于 $\forall x \in A, x \notin B$，因此我们证明了

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq -B$$

我们知道 $B \subseteq -A$ 等价于 $\forall x \in B, x \notin A$，这也等价于 $\forall x \in A, x \notin B$，综上所述我们证明了

$$A \cap B \Leftrightarrow A \subseteq -B \Leftrightarrow B \subseteq -A$$

主观题 9.4

1. $A - B = B$，则说明 $\forall x \in B$ 都有 $x \notin B \wedge x \in A$，这只能说明 $A = B = \emptyset$
2. $A - B = B - A$，则说明 $\forall x \in A \wedge x \notin B$ 都有 $x \in B \wedge x \notin A$，因此 $A = B$
3. $A \cap B = A \cup B$，则说明 $A = B$
4. $A \oplus B = A$，则说明 $B \subseteq A$

主观题 9.5

1. $(A - B) \cup (A - C) = A$，这说明 $A - B \supseteq A - (A - C)$，于是可以得到 $A - B \supseteq C$，而这说明 $B \cap C = \emptyset$
2. $(A - B) \oplus (A - C) = \emptyset$，注意到

$$\begin{aligned}(A - B) \oplus (A - C) &= ((A - B) - (A - C)) \cup ((A - C) - (A - B)) \\ &= (C - B) \cup (B - C) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

   这说明 $B = C$

主观题 9.6

1. 若 $A \times B = \emptyset$，则 $A = \emptyset$ 或者 $B = \emptyset$
2. 只有当 $A = \emptyset$ 时才有可能有 $A \times A = A$，否则 $A \times A$ 得到的是集合 $\{< x, y > \mid x, y \in A\}$，当 $A \neq \emptyset$ 时，$A \times A \neq A$