2024-2025 秋季学期离散数学-第 10 次作业

主观题 9.7

在 $1 \sim 250$ 之间，设能被 2 整除的元素构成的集合为 N_2，能被 3 整除的元素构成的集合为 N_3，能被 5 整除的元素构成的集合为 N_5，则根据容斥原理：

$$\begin{aligned}\#(N_2 \cup N_3 \cup N_5) = & \#(N_2) + \#(N_3) + \#(N_5) \\ & -\#(N_2 \cap N_3) - \#(N_2 \cap N_5) - \#(N_3 \cap N_5) \\ & +\#(N_2 \cap N_3 \cap N_5) \\ & = 125 + 83 + 50 - 41 - 25 - 16 + 8 \\ & = 184\end{aligned}$$

主观题 10.1

1. 集合 $A = \{0, 1, 2\}$，$B = \{0, 2, 4\}$，关系 $R = \{< x, y > \mid x, y \in A \cap B\}$

   注意到 $A \cap B = \{0, 2\}$，因此关系

   $$R = \{< 0, 0 >, < 0, 2 >, < 2, 0 >, < 2, 2 >\}$$

2. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，关系 $R = \left\{< x, y > \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x = y^2\right\}$

   注意到只有 $1 = 1^2$ 和 $4 = 2^2$，因此关系

   $$R = \{< 1, 1 >, < 4, 2 >\}$$

3. 列出所有从集合 $A = \{a, b, c\}$ 到集合 $B = \{d\}$ 的关系。我们知道 Cartesian 积：

   $$A \times B = \{< a, d >, < b, d >, < c, d >\}$$

   因此 $R_1 =< a, d >, R_2 =< b, d >, R_3 =< c, d >$

主观题 10.2

我们知道 $A \cup B = \{< 1, 2 >, < 2, 4 >, < 3, 3 >, < 1, 3 >, < 2, 4 >, < 4, 2 >\}$，则 $A \cup B$ 的定义域为：

$$\mathrm{dom}(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$$

我们知道 $A \cap B = \emptyset$，则空关系的值域也是空集 $\emptyset$，即

$$\mathrm{ran}(A \cap B) = \emptyset$$

主观题 10.3

1. 求证 $\mathrm{dom}(R \cup S) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{dom}(S)$

   证明：根据关系定义域的定义，可以得到 $\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y(< x, y >\in R)\}$ 以及 $\mathrm{dom}(S) = \{x \mid \exists y(< x, y >\in S)\}$，则

   $$\begin{aligned}\mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{dom}(S) &= \{x_1, x_2 \mid \exists y_1 \exists y_2(< x_1, y_1 >\in R \vee < x_2, y_2 >\in S)\} \\ &= \{x \mid \exists y_1 \exists y_2(< x, y_1 >\in R \vee < x, y_2 >\in S)\}\end{aligned}$$

   我们知道 $R \cup S = \{< x, y > \mid < x, y >\in R \vee < x, y >\in S\}$，因此

   $$\mathrm{dom}(R \cup S) = \{x \mid \exists y_1 \exists y_2(< x, y_1 >\in R \vee < x, y_2 >\in S)\}$$

   于是 $\mathrm{dom}(R \cup S) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{dom}(S)$。证毕。□

2. 求证 $\mathrm{dom}(R \cap S) = \mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S)$

   证明：根据关系定义域的定义，可以得到 $\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y(< x, y >\in R)\}$ 以及 $\mathrm{dom}(S) = \{x \mid \exists y(< x, y >\in S)\}$，则

   $$\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S) = \{x \mid \exists y_1 \exists y_2(< x, y_1 >\in R \wedge < x, y_2 >\in S)\}$$

   我们知道 $R \cap S = \{< x, y > \mid < x, y >\in R \wedge < x, y >\in S\}$，因此

   $$\mathrm{dom}(R \cap S) = \{x \mid \exists y_1 \exists y_2(< x, y_1 >\in R \wedge < x, y_2 >\in S)\}$$

   于是 $\mathrm{dom}(R \cap S) = \mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S)$。证毕。□

主观题 10.4

1. 已知 $\#(A) = 3$，则总共存在 $2^{3^2} = 2^9 = 512$ 种关系；
2. 已知 $\#(A) = n$，则总共存在 2^{n^2} 种关系。

主观题 10.5

n 元关系是指对于任意 $n > 1$，Cartesian 积 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集都是从 A_1 到 A_n 的 n 元关系。我们知道上述 Cartesian 积可以被写作：

$$(\cdots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots) \times A_n$$

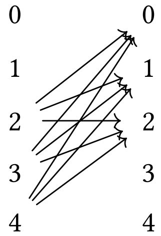
因此使用二元关系可以这么定义：

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{< \cdots \ll p_1, p_2 >, p_3 > \cdots, p_n > \mid p_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

主观题 10.6

1. 对于集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上的关系 $R_1 = \{< x, y > \mid x \geq 2 \wedge y \leq 2\}$

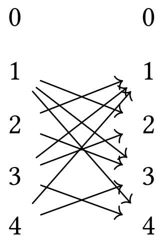
关系图　　关系矩阵



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0&1&2&3&4\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

2. 对于集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 上的关系 $R_2=\{<x,y>\mid\forall 1\le k\le\min(x,y), x \bmod k\ne 0\wedge y \bmod k\ne 0\}$，即 x,y 互质

关系图　　关系矩阵



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0&1&2&3&4\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$