

2024-2025 秋季学期离散数学-第 9 次作业

何昱晖 2022012050 2024-12-11

主观题 9.1

1. 我们分别计算 $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$ 、 $\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$ 以及 $\mathcal{P}(\emptyset)$ ，很容易可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\end{aligned}$$

因此我们可以得到

$$\bigcup\{\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\emptyset), \emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

当然也可以使用 $\bigcup\{\mathcal{P}(A)\} = A$ 的结论得到该广义并是 $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$

2. 根据上面的计算结果，我们可以得到

$$\bigcap\{\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\emptyset)\} = \{\emptyset\}$$

主观题 9.2

1. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$ ，易知 $\bigcup\mathcal{P}(A) = A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
2. $\bigcup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ，则其幂集 $\mathcal{P}(\bigcup A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

主观题 9.3

1. 证明：我们知道 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ ，则 $(A - B) - C = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}$ ，并且我们还有

$$\begin{aligned}A - C &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin C\} \\ B - C &= \{x \mid x \in B \wedge x \notin C\} \\ (A - C) - (B - C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin C \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}\end{aligned}$$

因此两个集合是相等的， $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

2. 证明： $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$ ，注意到 $A = B$ ，因此， $x \in A \wedge x \notin B = \text{F}$ ，于是我们证明了 $A \oplus B = \emptyset$
3. 证明：我们知道 $A \cap B = \emptyset$ 等价于 $\forall x \in A, x \notin B$ ，而 $A \subseteq -B$ 等价于 $\forall x \in A, x \notin B$ ，因此我们证明了

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq -B$$

我们知道 $B \subseteq -A$ 等价于 $\forall x \in B, x \notin A$, 这也等价于 $\forall x \in A, x \notin B$, 综上所述我们证明了

$$A \cap B \Leftrightarrow A \subseteq -B \Leftrightarrow B \subseteq -A$$

主观题 9.4

1. $A - B = B$, 则说明 $\forall x \in B$ 都有 $x \notin B \wedge x \in A$, 这只能说明 $A = B = \emptyset$
2. $A - B = B - A$, 则说明 $\forall x \in A \wedge x \notin B$ 都有 $x \in B \wedge x \notin A$, 因此 $A = B$
3. $A \cap B = A \cup B$, 则说明 $A = B$
4. $A \oplus B = A$, 则说明 $B \subseteq A$

主观题 9.5

1. $(A - B) \cup (A - C) = A$, 这说明 $A - B \supseteq A - (A - C)$, 于是可以得到 $A - B \supseteq C$, 而这说明 $B \cap C = \emptyset$ 。如果利用 De Morgan 律可以更快得到

$$(A - B) \cup (A - C) = A - B \cap C = A$$

这说明 $B \cap C = \emptyset$

2. $(A - B) \oplus (A - C) = \emptyset$, 注意到

$$\begin{aligned} (A - B) \oplus (A - C) &= ((A - B) - (A - C)) \cup ((A - C) - (A - B)) \\ &= (C - B) \cup (B - C) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

这说明 $B = C$

主观题 9.6

1. 若 $A \times B = \emptyset$, 则 $A = \emptyset$ 或者 $B = \emptyset$
2. 只有当 $A = \emptyset$ 时才可能有 $A \times A = A$, 否则 $A \times A$ 得到的是集合 $\{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \}$, 当 $A \neq \emptyset$ 时, $A \times A \neq A$