Vícerozměrný Riemannův integrál a Fubiniova věta

(sepsáno podle 11. kapitoly knihy V. A. Zoricha, *Mathematical Analysis II*, Springer, 2004)

Boxy. Box, přesněji n-rozměrný *box* $I \subset \mathbb{R}^n$, je kartézský součin intervalů

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_2, b_2] \ ,$$

kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Např. v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ to je uzavřený obdélník se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic a s kladnými délkami. *Objem boxu* je

$$|I| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

Dělení D boxu I na podboxy je množina boxů

$$D = \{[c_1^{j_1}, c_1^{j_1+1}] \times [c_2^{j_2}, c_2^{j_2+1}] \times \cdots \times [c_n^{j_n}, c_n^{j_n+1}] \mid 0 \le j_i < k_i, 1 \le i \le n\} \ ,$$

kde $a_i = c_i^0 < c_i^1 < \cdots < c_i^{k_i-1} < c_i^{k_i} = b_i$ jsou nějaká dělení intervalů $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Norma dělení je*

$$\lambda(D) := \max_{1 \le i \le n, \, 0 \le j < k_i} (c_i^{j+1} - c_i^j)$$

— maximální délka hrany podboxu. *Dělení D boxu I s body ζ* je dvojice (D, ζ), kde D je dělení boxu I a $\zeta : D \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení splňující $\zeta(J) \in J$ pro každý podbox J. Prostě řečeno, v každém podboxu je zvolený nějaký bod.

Riemannova definice vícerozměrného integrálu. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box, (D, ζ) je jeho dělení s body a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. *Riemannova suma* je definována jako

$$S(f, D, \zeta) := \sum_{J \in D} |J| \cdot f(\zeta(J)) \ .$$

Integrál funkce f přes box I je vlastní limita

$$\int_I f := \lim_{(D,\zeta), \, \lambda(D) \to 0} S(f, D, \zeta) \ ,$$

existuje-li, takže $\int_I f \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta > 0 \, \forall (D, \zeta) : \ \lambda(D) < \delta \Rightarrow \left| \int_I f - S(f, D, \zeta) \right| < \varepsilon \ .$$

Darbouxova definice vícerozměrného integrálu. Nechť D je dělení boxu I a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak definujeme pro každý podbox J tohoto dělení: $m(J) = \inf_{x \in J} f(x)$, $M(J) = \sup_{x \in J} f(x)$ a *dolní, resp. horní, součet*

$$s(f, D) := \sum_{J \in D} |J| \cdot m(J), \text{ resp. } S(f, D) := \sum_{J \in D} |J| \cdot M(J) .$$

Dolní, resp. horní, integrál je

$$\underline{\int_I} f = \sup(\{s(f, D) \mid D \text{ je dělení } I\}) ,$$

resp.

$$\overline{\int_I} f = \inf(\{S(f, D) \mid D \text{ je dělení } I\}) .$$

Opět (jako v jedné dimenzi) platí, že pro každé dělení D boxu I je

$$-\infty \le s(f, D) \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le S(f, D) \le +\infty .$$

Integrál funkce f přes box I pak definujeme jako reálné číslo

$$\int f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f \in \mathbb{R} ,$$

když se dolní a horní integrál rovnají společné vlastní hodnotě.

Platí: f má $\int$ podle Riemannovy definice $\iff$ f má $\int$ podle Darbouxovy definice, a v případě existence integrálu se obě hodnoty rovnají. Množinu funkcí riemannovsky integrovatelných přes box I označíme jako

$$\mathcal{R}(I) = \{f \mid f \text{ má Riemannův integrál přes } I\} .$$

Lebesgueova věta. Řekneme, že množina $E \subset \mathbb{R}^n$ má (n-rozměrnou Lebesgueovu) míru 0, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost boxů $I_1, I_2, \ldots$ v $\mathbb{R}^n$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon \text{ a } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n .$$

Věta (Lebesgueova). *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $f : I \to \mathbb{R}$ je na něm definovaná fukce. Pak $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ je na I omezená a množina jejích bodů nespojitosti má míru* 0.

Například každá omezená funkce $f:\ I \to \mathbb{R}$ nespojitá pouze ve spočetně mnoha bodech má Riemannův $\int_I f$. Z Lebesgueovy věty a definice integrálu dostáváme (dokažte si to jako úlohu 1):

Důsledek. *Když $f:\ I \to \mathbb{R}$ je funkce, jež je na boxu $I \subset \mathbb{R}^n$ nezáporná a $\int_I f = 0$, potom $f = 0$ na I až na množinu bodů s mírou 0.*

Fubiniova věta. (Přesněji, věta Fubiniova typu.) Umožňuje převést výpočet vícerozměrného integrálu na posloupnost obyčejných jednorozměrných integrálů. Nechť $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ a $Z = X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ je m-rozměrný, n-rozměrný a $(m+n)$-rozměrný box.

Věta (Fubiniova). *Nechť $f:\ Z = X \times Y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(Z)$. Pak všechny tři integrály*

$$\int_Z f,\ \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, dy \right) dx \ \text{ a } \ \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, dx \right) dy$$

existují a rovnají se.

Vysvětlíme značení a smysl věty. Integrál $\int_Z f$ existuje podle předpokladu o f. Definujeme funkci

$$F:\ X \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_Y f(x,y)\, dy\ ;$$

pokud pro nějaké $x = x_0 \in X$ tento integrál neexistuje, definujeme $F(x_0)$ jako libovolnou hodnotu z intervalu $[\underline{\int_Y} f(x_0,y)\ dy, \overline{\int_Y} f(x_0,y)\ dy]$. Podobným způsobem definujeme funkci

$$G:\ Y \to \mathbb{R},\ G(y) := \int_X f(x,y)\, dx\ .$$

Fubiniova věta říká, že $F \in \mathcal{R}(X)$, $G \in \mathcal{R}(Y)$ a $\int_Z f = \int_X F = \int_Y G$. Z důkazu též vyplyne (úloha 6), že množina bodů $x_0 \in X$ s $f(x_0,y) \notin \mathcal{R}(Y)$ má míru 0, a podobně v y-ové souřadnici.

Důkaz. Dokážeme, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_Z f = \int_X F$, pro funkci G je důkaz podobný. Každé dělení D boxu Z je „součinem“ $D_1 \times D_2$ dělení D_1 boxu X a dělení D_2 boxu Y, to jest každý box $J \in D$ je součinem $J = J_1 \times J_2$

pro $J_1 \in D_1$, $J_2 \in D_2$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje dělení D boxu Z, že $s(f, D) > \int_Z f - \varepsilon$. Vezmeme dělení D_1 a D_2, že D „=“ $D_1 \times D_2$. Pak podle vlastností infima platí, že

$$
\begin{aligned}
s(f, D) &= \sum_{J \in D} |J| \cdot \inf_{z \in J} f(z) = \sum_{J \in D} \overbrace{|J_1 \times J_2|}^{=|J_1| \cdot |J_2|} \cdot \inf_{x \in J_1, y \in J_2} f(x, y) \\
\text{(proč? — úloha 2)} \quad &\leq \sum_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x \in J_1} \Bigg(\underbrace{\sum_{J_2 \in D_2} |J_2| \inf_{y \in J_2} f(x, y)}_{= s(f(x, \cdot), D_2) \leq \underline{\int}_Y f(x,y)\, dy \leq F(x)} \Bigg) \\
&\leq \sum_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x \in J_1} F(x) = s(F, D_1)\ .
\end{aligned}
$$

Takže $s(F, D_1) > \int_Z f - \varepsilon$. Analogicky se dokáže, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_1' boxu X, že $S(F, D_1') < \int_Z f + \varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0$ to podle Darbouxovy definice integrálu znamená, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_X F = \int_Z f$. $\square$

Příklad. Nechť $f(x, y, z) = z \sin(x + y)$ a box $I \subset \mathbb{R}^3$ je dán intervaly $0 \leq x \leq \pi$, $|y| \leq \pi/2$ a $0 \leq z \leq 1$. Pak, podle Fubiniovy věty,

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^\pi z \sin(x + y)\, dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-z \cos(x + y)|_{x=0}^{\pi})\, dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z \cos y\, dy \right) dz \\
&= \int_0^1 (2z \sin y|_{y=-\pi/2}^{\pi})\, dz = \int_0^1 4z\, dz = 2\ .
\end{aligned}
$$

Integrál přes množinu $E \subset \mathbb{R}^n$**.** Integrál rozšíříme z boxů na obecnější množiny. Zavedeme i objem množiny. Množina $E \subset \mathbb{R}^n$ je *přípustná*, když je omezená a její hranice ∂E (což jsou ty body $x \in \mathbb{R}^n$, že každé okolí x protíná jak E tak $\mathbb{R}^n \backslash E$) má míru 0. Například krychle, otevřená či uzavřená koule jsou přípustné množiny, kdežto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]^n$ není přípustná množina. *Objem* omezené množiny $E \subset \mathbb{R}^n$ je integrál (když existuje)

$$
\mathrm{vol}(E) := \int_I \chi_E\ ,
$$

kde $I \subset \mathbb{R}^n$ je box obsahující E a χ_E je charakteristická funkce množiny E (takže $\chi_E(x) = 1$ pro $x \in E$ a $\chi_E(x) = 0$ pro $x \in I \backslash E$). Dá se dokázat:

Tvrzení. *$E \subset \mathbb{R}^n$ má objem $\iff$ E je přípustná.*

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je omezená. *Integrál funkce $f: E \to \mathbb{R}$ přes E* definujeme jako

$$\int_E f := \int_I \overline{f}\ ,$$

kde $I \subset \mathbb{R}^n$ je box obsahující E a $\overline{f}$ je rozšíření f:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \ldots \quad x \in E \\ 0 & \ldots \quad x \in I \backslash E\ . \end{cases}$$

Tato definice (jakož i definice objemu) je korektní: úloha 7.

Úlohy

1. Dokažte důsledek Lebesgueovy věty.
2. Proč platí ta nerovnost v důkazu Fubiniovy věty?
3. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a D je jeho dělení. Dokažte, že $|I| = \sum_{J \in D} |J|$.
4. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $I = \bigcup_{i=1}^k J_i$ je sjednocení boxů, které mají disjunktní vnitřky. Dokažte, že $|I| = \sum_{i=1}^k |J_i|$.
5. Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je neomezená funkce definovaná na boxu v $\mathbb{R}^n$. Co se stane v Riemannově definici integrálu? Jak vypadají $\underline{\int_I} f$ a $\overline{\int_I} f$?
6. Zdůvodněte, proč ve Fubiniově větě množina
$$\{x_0 \in X \mid \textstyle\int_Y f(x_0, y)\, dy \text{ neexistuje}\}$$
má míru nula.
7. Zdůvodněte, proč objem $\mathrm{vol}(E)$ a integrál $\int_E f$ pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ nezávisejí na volbě boxu I obsahujícího E (když existují).
8. Dokažte, že pro každý box $I \subset \mathbb{R}^n$ je $|I| = \mathrm{vol}(I)$.