# Výběrová pravidla

**Petr Štěpánek**

**S využitím materiálu Krysztofa R. Apta**

**2006**



Zatím jsme ukázali, že volba přejmenování použité programové klauzule a volba nejobecnější unifikace použitá v SLD-derivačním kroku neovlivňuje výsledek výpočtu až na přejmenování proměnných. Tím jsme vyřešili problémy (C) a (D) .

Nyní se budeme věnovat vlivu volby (A), atomu v daném dotazu.

V nejobecnějším pojetí taková volba může záviset na celé "historii" derivace až k nové rezolventě.

**Definice.** (Výběrové pravidlo)

(i) Nechť *INIT* označuje množinu počátečních úseků SLD-derivací, jejichž poslední dotaz je neprázdný. *Výběrové pravidlo* **R** je funkce, která každému počátečnímu úseku z množiny *INIT* přiřazuje určitý výskyt nějakého atomu v jeho posledním dotazu.

(ii) Je-li dáno výběrové pravidlo **R**, říkáme, že SLD-derivace $\xi$ sleduje výběrové pravidlo **R**, jestliže všechny vybrané atomy v derivaci $\xi$ byly vybrány podle pravidla **R.**

To znamená, že pro každý počáteční úsek $\xi$< derivace $\xi$ končící dotazem Q, **R**($\xi$<) je vybraný atom z $Q$.

Poznámka. Tak obecná definice výběrového pravidla nám dovoluje vybrat různé atomy v rezolventách, které se objevily více než jednou v dané SLD-derivaci to znamená v totožných rezolventách s různými "historiemi".

**Příklad.**

Uvažujme výběrové pravidlo **LR**, které vybírá nejlevější atom v sudých krocích SLD-derivace a nejpravější atom v lichých krocích



Příklad chování takového pravidla není těžké popsat formálně:

Nechť $P := \{A \leftarrow A\}$ a $Q := A, A$ . Potom

$$A, \underline{A} \implies \underline{A}, A \implies A, \underline{A} \implies \ldots$$

je SLD-derivace podle pravidla **LR** vybraný atom je podtržen. Tedy **LR** zde vybírá atomy na různých pozicích ve stejných rezolventách.

Poznámka. Každá SLD-derivace sleduje nějaké výběrové pravidlo.

Nejpřirozenější výběrové pravidlo je *nejlevější výběrové pravidlo*, které vždy vybírá nejlevější atom v daném dotazu.

Následující výsledky ukazují, že je-li dán dotaz $Q$, každé výběrové pravidlo **R** generuje stejnou množinu vypočtených odpovědních substitucí pro úspěšné SLD-derivace $Q$ podle **R**.

Začneme pomocným technickým výsledkem , který však má samostatný význam.

**Lemma.** (Switching)

Mějme dotaz $Q_n$ , který obsahuje dva různé atomy $A_1$ a $A_2$. Předpokládejme, že

$$\xi := \; Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \Rightarrow \theta_{n+2}/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

je SLD-derivace kde

- $A_1$ je vybraný atom z $Q_n$
- $A_2\theta_{n+1}$ je vybraný atom z $Q_{n+1}$



Potom pro nějaká $Q_{n+1}'$ , $\theta_{n+1}'$ a $\theta_{n+2}'$ platí

- $\theta_{n+1}' \theta_{n+2}' = \theta_{n+1}\theta_{n+2}$
- existuje SLD- derivace

$$\xi' := \; Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_n = \theta_{n+1}'/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+1}' \Rightarrow \theta_{n+2}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

taková, že

- $\xi$ a $\xi'$ se shodují až do rezolventy $Q_n$
- $A_2$ je vybraný atom z $Q_n$
- $A_1\theta_{n+1}'$ je vybraný atom z $Q_{n+1}'$
- $\xi$ a $\xi'$ se shodují od rezolventy $Q_{n+2}$ dále

Poznámka. Volně řečeno, podle lemmatu je možné dva následující kroky SLD-derivace prohodit, pokud ve druhém kroku je vybrána instance "starého" atomu. Pokud se na Lemma o switchingu budeme odkazovat, budeme říkat, že kroky $(n + 1)$ a $(n + 2)$ v $\xi$ „můžeme přepnout" .

Situaci znázorňuje následující obrázek

$$\xi := \quad Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \Rightarrow \theta_{n+2}/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

$$Q_n \xrightarrow{\theta_{n+1}'/c_{n+2}} Q_{n+1}' \xrightarrow{\theta_{n+2}'/c_{n+1}} Q_{n+2}$$

Důkaz. Dříve než budeme "přepínat" (switch) pořadí SLD-derivačních kroků, připomeneme, že tuto možnost jsme dokázali pro unifikace. Pro unifikace zavedeme následující značení:

Jsou-li $A := p(s_1, \ldots, s_n)$ $\quad H := p(t_1, \ldots, t_n)$
dva atomy se stejným predikátovým symbolem, množinu rovností k jejich unifikaci $\{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$
budeme označovat $A = H$ .



Nechť $H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1$
je vstupní klauzule pro SLD-derivační krok
. $Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}$

a $H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2$
je vstupní klauzule pro SLD-derivační krok
. $Q_{n+1} = \theta_{n+2}/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+2}$

Potom $\theta_{n+1}$ je mgu pro množinu $A_1 = H_1$
a $\theta_{n+2}$ je mgu pro množinu $A_2\theta_{n+1} = H_2$

Při standardisaci proměnných však dostáváme $H_2\theta_{n+1} = H_2$
odkud $\theta_{n+2}$ je mgu pro množinu $(A_2 = H_2)\theta_{n+1}$ .

Podle switchingového lemmatu pro unifikace existují relevantní unifikace

$$\theta_{n+1}' \quad \text{pro množinu} \quad A_2 = H_2$$

$$\theta_{n+2}' \quad \text{pro množinu} \quad (A_1 = H_1)\theta_{n+1}'$$

takové, že platí

$$\theta_{n+1}'\theta_{n+2}' = \theta_{n+1}\theta_{n+2} \qquad (1)$$

a

$$Var(\theta_{n+2}') \subseteq Var(\theta_{n+1}\theta_{n+2}) \cup Var(A_1 = H_1) \cup Var(A_2 = H_2) \qquad (2)$$

Navíc podle lemmatu o disjuktnosti a standardizace proměnných platí

$$Var(H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1) \cap (Var(Q_n) \cup Var(H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2)) = 0$$

odkud z relevance substituce $\theta_{n+1}'$ dostáváme

$$Var(H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1) \cap Var(\theta_{n+1}') = 0 \qquad (3)$$



Předpokládejme, že

$$Q_n := \mathbf{A},\ A_1,\mathbf{B},\ A_2,\ \mathbf{C}$$

kde bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_1$ se v $Q_n$ vyskytuje dříve než $A_2$ .

Z rozšířené verze lemmatu o disjunktnosti (vstupní klauzule $d_{i+1}$ je disjunktní se všemi rezultantami $R_j$ , $j \leq i$ , tedy i s dotazy $Q_j$) plyne, že vstupní klauzule $H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2$ je disjunktní v proměnných s dotazem $Q_n$ .
Použitím této vstupní klauzule na $Q_n$ dostáváme

$$Q_{n+1}' := (\mathbf{A},\ A_1,\mathbf{B},\ \mathbf{B}_2,\ \mathbf{C})\theta_{n+1}'$$

a z disjunktnosti vstupní klauzule (která je variantou $c_{n+2}$) v proměnných, potom i

$$Q_n = \theta_{n+1}'/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+1}'$$

První krok vyhýbky z obrázku jsme zvládli, zbývá ještě druhý. Začněme počítat

$$\theta_{n+2}'$$

$=$ {definice rezolventy}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B})\theta_{n+1}\theta_{n+2}\mathbf{B}_2\theta_{n+2}, \mathbf{C}\theta_{n+1}\theta_{n+2}$$

$=$ {z lemmatu o disjunktnosti $(Var(Q_n) \cup Var(H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2)) = 0$}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\theta_{n+1}\theta_{n+2}$$

$=$ {(1)}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\, \theta_{n+1}'\theta_{n+2}'$$

$=$ {(3)}

$$\mathbf{A}\, \theta_{n+1}'\theta_{n+2}'\mathbf{B}_1\theta_{n+2}'(\mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\theta_{n+1}'\theta_{n+2}'$$

takže $\theta_{n+2}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+2}$ při použití vstupní klauzule $H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1$.



Tedy

$$Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots\ Q_n = \theta_{n+1}'/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+1}' \Rightarrow \theta_{n+2}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

je opravdu SLD-derivace protože (1), (2), (3) a lemma o disjunktnosti zaručují standardizaci proměnných.

[Tím je switchingové lemma dokázáno.]

Poznámka. Poslední krok důkazu je subtilnější než se zdá. Bylo by třeba ověřit, že platí

$$Var(\theta_{n+2}') \subseteq Var(\theta_{n+1}) \cup Var(\theta_{n+2}) \cup Var(Q_n) \cup Var(H_1) \cup Var(H_2)$$

(Úloha pro volné chvíle)

Teď můžeme vyslovit hlavní výsledek o nezávislosti množiny vypočtených odpovědních substitucí na volbě výběrového pravidla.

**Definice.** (Ekvivalentní SLD-derivace)

Říkáme, že dvě SLD-derivace $\xi$ a $\xi'$ pro $P \cup \{Q\}$ jsou ekvivalentní, jestliže

- obě jsou úspěšné,
- mají stejnou délku,
- a jejich množiny vypočtených substitucí jsou stejné .

**Věta.** (Nezávislost na volbě výběrového pravidla)

Pro každou úspěšnou SLD-derivaci $\xi$ pro $P \cup \{Q\}$ a výběrové pravidlo **R**, existuje úspěšná SLD-derivace $\xi'$ pro $P \cup \{Q\}$ podle **R**, která je ekvivalentní s $\xi$.



Důkaz. Nechť

$$\xi := \; Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{=\!=\!>} Q_1 \ldots \; Q_{n-1} \overset{\theta_n/c_n}{=\!=\!>} Q_n$$

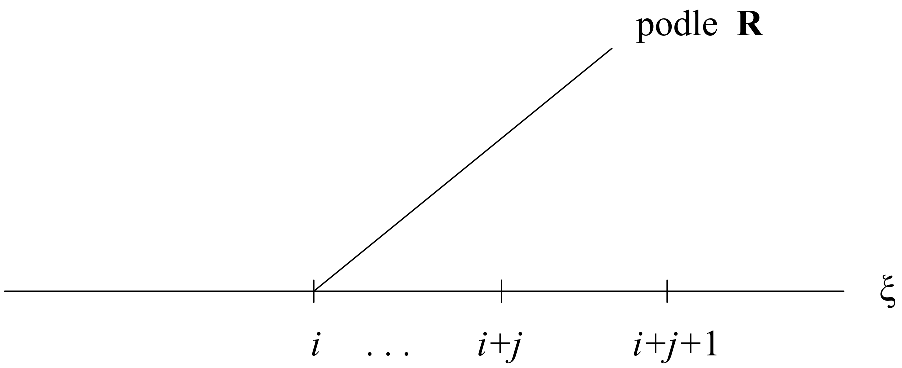
kde $Q_n = \square$ je úspěšná SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ . Nechť $i$ je nejmenší index takový, že atom vybraný v dotazu $Q_i$ se liší od atomu $A$ vybraného pravidlem **R** .

$\xi$ je úspěšná derivace, takže pro nějaké $j > 0$ je vybrána instance $A\theta_{i+1} \ldots \theta_{i+j}$ atomu $A$ z $Q_{i+j}$ .

Pokud takový index neexistuje, potom derivace $\xi$ sleduje výběrové pravidlo **R** .

V ostatních případech můžeme říci, že $i$ je první místo, kde se $\xi$ odchyluje od výběrového pravidla **R** a $j$ je „odklad výběru“ $\xi$ vzhledem k **R** .

Situaci můžeme zachytit následujícím obrázkem.




Budeme definovat dvojici přirozených čísel $(n\text{-}i, j)$ jako index "odchyl-odlož" vzhledem k **R** . Pokud ξ sleduje pravidlo **R** , položíme $i = n$ , $j = 0$ . V takovém případě je hodnota indexu (0,0).



Tvrzení věty budeme dokazovat indukcí podle dvojic "odchyl-odlož" při lexikorafickém uspořádání.

Pokud je hodnota indexu (0,0) derivace ξ je podle výběrového pravidla **R** .

V ostatních případech můžeme použít Switchingového lemmatu a přepnout kroky $(i + j)$ a $(i + j + 1)$ v ξ a získat tak ekvivalentní SLD-derivaci ξ´ pro $P \cup \{Q\}$ .

Dvojice odpovídající ξ´ pak bude

- $(n - i, j - 1)$ je-li $j > 1$ ,
- $(n - (i + 1), k)$ pro nějaké $k \geq 0$ , je-li $j = 1$ .

V obou případech dostaneme index, který je lexikograficky menší než index $(n - i, j)$. Podle indukčního předpokladu je ξ´ ekvivalentní s nějakou SLD-derivací podle **R** takže totéž platí i pro ξ .

Ukázali jsme, že úspěšné SLD-derivace řídící se různými výběrovými pravidly jsou ekvivalentní. Tím jsme ukázali, že možnost volby podle bodu (A) neovlivňuje množiny vypočtených odpovědních substitucí.

K analýze voleb v bodech (A), (C), (D) stačilo probírat jednotlivé SLD-derivace. Naproti tomu vliv volby aplikovatelné klauzule z programu, která je formulována v bodu (B), je třeba analyzovat na množině všech výpočtů daného programu.

Jde o množinu SLD-derivací, která se přirozeným způsobem dělí do kategorií podle použitého výběrového pravidla.

Jednotlivé kategorie lze reprezentovat pomocí tak zvaných SLD-stromů.

Nezávislost na volbách podle bodů (A), (C), (D) dovoluje takové stromy definovat úsporně.



**Definice.** (SLD-stromy)

SLD-strom pro $P \cup \{Q\}$ při použití výběrového pravidla **R**, je strom takový, že platí

(i) jeho větve jsou SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle **R**,

(ii) uzly stromu jsou dotazy odpovídající derivace,

(iii) každý uzel (dotaz) $Q'$ s vybraným atomem $A$ má jediného následníka pro každou klauzuli $c \,\varepsilon\, P$ použitelnou k $A$, který je rezolventou $Q'$ a $c$ vzhledem k $A$.

**Definice.** (Úspěšné stromy)

(i) Říkáme, že SLD-strom je *úspěšný*, jestliže obsahuje prázdný dotaz,

(ii) říkáme, že SLD-strom je *konečně selhávající* (*neúspěšný*), je-li konečný a neúspěšný.

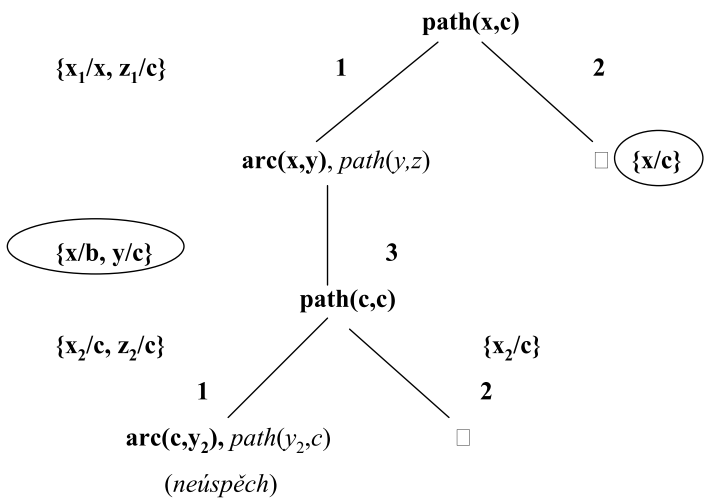
Jinými slovy, SLD-strom je úspěšný, jestliže některá z jeho větví je úspěšná SLD-derivace. SLD-strom je konečně selhávající, jestliže každá jeho větev je neúspěšná.

**Příklad.**

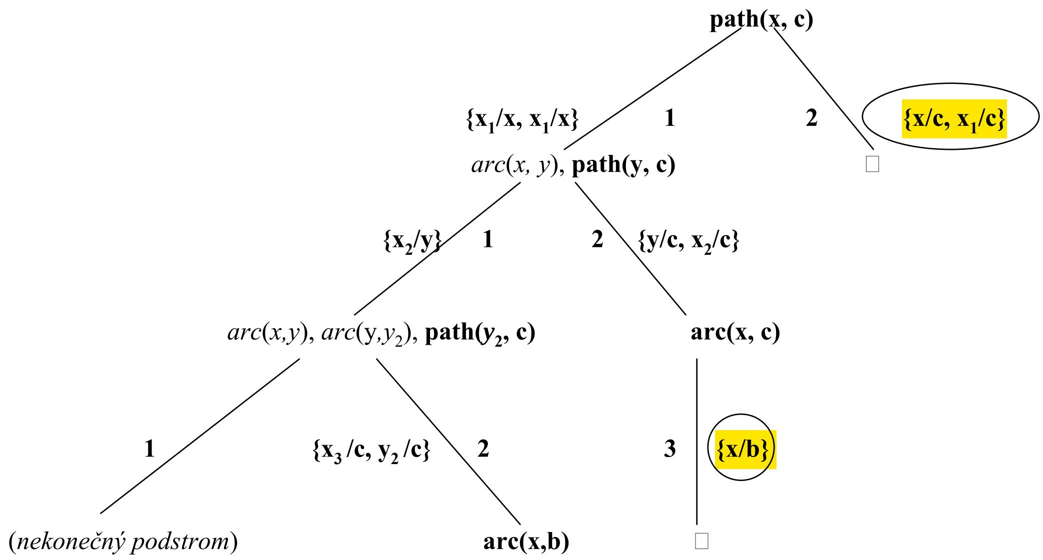
Hledáme cestu v orientovaném grafu, který má dva vrcholy *b*, *c* a jedinou orientovanou hranu (*b*,*c*). Hrany označujeme predikátem *arc* , existenci cesty z uzlu *x* do uzlu y označujeme predikátem *path* . Situaci lze popsat logickým programem *PATH*.

1. $path(x,z) \leftarrow arc(x,y), path(y,z)$ .
2. $path(x,x) \leftarrow$ .
3. $arc(b,c) \leftarrow$ .






Úspěšný SLD-strom s výběrem nejlevějšího atomu. Množina vypočtených odpovědních substitucí sestává ze dvou prvků {x/b} a {x/c} . Je to konečný strom.




Úspěšný SLD-strom s výběrem nejpravějšího atomu. Množina vypočtených odpovědních substitucí sestává ze dvou prvků $\{x/b\}$ a $\{x/c\}$. Strom obsahuje nekonečnou větev.



Poznámka. Při dané definici SLD-stromu se nemusí všechny SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle **R** objevit v každém SLD-stromu pro $P \cup \{Q\}$ podle **R**.

**Definice.** (Výběrová pravidla nezávislá na variantách)

Říkáme, že výběrové pravidlo **R** je nezávislé na variantách, jestliže ve všech počátečních úsecích SLD-derivací, které jsou podobné, **R** vybere v posledním dotazu (rezolventě) atom na stejné pozici.

Poznámka 1. Výběr nejlevějšího atomu je příkladem výběrového pravidla nezávislého na variantách. Opačným příkladem je pravidlo vybírající nejlevější atom, je-li v posledním dotazu proměnná $x$ a v ostatních případech vybírá nejpravější atom.

Máme-li program $\{p(y) \leftarrow p(y)\}$ a dotaz $p(x), q(x)$ a dvě jeho rezolventy $p(x), q(x)$ a $p(y), q(y)$, v prvním dotazu je vybrán první atom a ve druhém dotazu druhý atom.

Přitom každá SLD-derivace sleduje nějaké výběrové pravidlo nezávislé na variantách. Můžeme totiž fragment použitého výběrového pravidla vhodným způsobem dodefinovat.

Také platí, že každý SLD-strom je sestrojen podle nějakého pravidla nezávislého na variantách.

**Věta.** (O větvích)

Mějme libovolný SLD-strom $\boldsymbol{T}$ pro $P \cup \{Q\}$ podle výběrového pravidla **R** nezávislého na variantách. Potom každá SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle **R** je podobná některé větvi stromu $\boldsymbol{T}$.

Poznámka 2. Použijeme-li výběrové pravidlo závislé na variantách z předchozího příkladu, nahlédneme, že Věta o větvích neplatí pro každé výběrové pravidlo.

Nyní můžeme dokázat tvrzení, které bylo naznačeno ve dvou zobrazených SLD-stromech.



**Důsledek.** (Nezávislost na výběru pořadí klauzulí z programu)

Pokud existuje úspěšný SLD-strom pro $P \cup \{Q\}$, potom jsou všechny SLD-stromy pro $P \cup \{Q\}$ úspěšné.

Důkaz. Máme-li úspěšnou SLD-derivaci pro $P \cup \{Q\}$ a libovolný SLD-strom $\boldsymbol{T}$. Podle Poznámky 1 je $\boldsymbol{T}$ sestrojen pomocí nějakého pravidla **R** nezávislého na variantách.

Podle Věty o nezávislosti na volbě výběrového pravidla existuje úspěšná SLD-derivace $\xi$, podle **R**.

Podle Věty o větvích je $\xi$ podobná některé větvi stromu $\boldsymbol{T}$, to znamená, že $\boldsymbol{T}$ je také úspěšný.

Mějme dvě SLD-derivace

$\xi :=\ Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \dots\ Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \dots$

$\xi' :=\ Q_0' = \theta_1'/c_1 \Rightarrow Q_1' \dots\ Q_n' = \theta_{n+1}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}' \dots$

Říkáme, že tyto SLD-derivace jsou *podobné* jestliže platí

$\xi :=\ Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \dots\ Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \dots$

$\xi' :=\ Q_0' = \theta_1'/c_1 \Rightarrow Q_1' \dots\ Q_n' = \theta_{n+1}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}' \dots$

$Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}$