AUTOMATY A GRAMATIKY

4

Pavel Surynek

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Nedeterminismus

- **Nedeterministický** konečný automat
  - $A = (Q,X,\delta,S_0,F)$
    - Q – konečná neprázdná množina stavů
    - X – konečná neprázdná abeceda
    - $\delta: Q \times X \rightarrow 2^Q$ - přechodová funkce, kde 2^Q je množina všech podmnožin Q
    - $S_0 \subseteq Q$ - množina počátečních stavů
    - $F \subseteq Q$ - množina přijímajících stavů
  - popis analogicky k deterministické verzi
    - stavový diagram, tabulka
  - slovo $w=x_1x_2\ldots x_n$, kde $x_i \in X$ pro $i=1,2,\ldots,n$
    - posloupnost $q_0,q_1,\ldots q_n$, kde $q_j \in Q$ pro $j=0,1,\ldots,n$ je **výpočet** NKA A nad slovem w, jestliže $q_0 \in S_0$ a $q_i \in \delta(q_{i-1},x_i)$ pro $i=1,2,\ldots,n$
      - navíc je to výpočet **přijímající**, když $q_n \in F$
    - $L(A) = \{w \mid w \in X^* \wedge$ existuje přijímající výpočet A nad w $\}$
      - aby bylo w přijato, stačí „uhádnout“ přijímající výpočet
        - idea: „NKA hádá vždy správně“
      - $K_n = \{ w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge (\exists u,v \in \{a,b\}^*)[w=ubv \wedge |v|=n-1]\}$, pro $n=1,2,\ldots$
        - snadno lze zkonstruovat NKA A_n, že $L(A_n)=K_n$

Souvislost s deterministickým KA (1)

- Nedeterministické KA přijímají regulární jazyky
  - Jazyk přijímaný (deterministickým) konečným automatem $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$ je přijímán nedeterministickým konečným automatem $A^n = (Q,X,\delta^n,\{q_0\},F)$, kde
    - $\delta^n(q,x)=\{\delta(q,x)\}$, pro $q\in Q$ a $x\in X$
  - uvažujme NKA $A = (Q,X,\delta,S_0,F)$
    - rozšířená přechodová funkce u NKA $\delta^*:2^Q\times X^*\rightarrow 2^Q$, kde
      - $\delta^*(\Sigma, \lambda) = \Sigma$ pro $\Sigma\subseteq Q$
      - $\delta^*(\Sigma, w) = \bigcup_{q\in\delta^*(\Sigma,v)}\delta(q,x)$ pro $\Sigma\subseteq Q$ a $w\in X^*$, kde $w=vx$ pro $v\in X^*$ a $x\in X$
    - pro $w\in X^*$ platí, že $w\in L(A)$, jestliže $\delta^*(S_0,w)\cap F\neq\emptyset$

Souvislost s deterministickým KA (2)

- NKA nepřijímají nic víc než regulární jazyky
  - Jazyk přijímaný nedeterministickým KA $A = (Q,X,\delta,S_0,F)$ je přijímán deterministickým KA $A^d=(2^Q, X, \delta^d, S_0, F^d)$, kde
    - $\delta^d(\Sigma, x)= \delta^*(\Sigma, x)$ pro $\Sigma\subseteq Q$ a $x\in X$
    - $F^d=\{\Sigma \mid \Sigma\subseteq Q \wedge \Sigma\cap F\neq\emptyset\}$
    - paralelně sledujeme všechny možné výpočty
  - při konstrukci A^d lze rovnou vyřadit nedosažitelné stavy
- U KA nedeterminismus nepřidal výpočetní sílu, pro jiné výpočetní modely ale toto platit nemusí.
  - došlo ke zjednodušení návrhu automatu
    - uvažte KA pro jazyk K_n
  - zjednodušení náhledu uzávěrových vlastností
    - uvažte sjednocení jazyků

Další **uzávěrové** vlastnosti (1)

- Regulární jazyky jsou uzavřené na **konkatenaci**
  - K, L jazyky nad X pak $K.L = \{u.v \mid u \in K \wedge v \in L\}$ je konkatenace K a L
  - Jsou-li K a L regulární, pak K.L je regulární
    - $K = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - $L = L(B)$, kde $B = (Q_B,X,\delta_B,q_{B0},F_B)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = K.L$
      - nedeterministicky propojíme přijímající stavy A a počáteční stav B
      - $C = (Q_A \cup Q_B, X, \delta_C, S_{C0}, F_B)$
      - $\delta_C(q,x) = \begin{cases} \{\delta_B(q,x)\} \text{ pro } q \in Q_B \\ \{\delta_A(q,x)\} \text{ pro } q \in Q_A \text{, že } \delta_A(q,x) \notin F_A \\ \{\delta_A(q,x), q_{B0}\} \text{ pro } q \in Q_A \text{, že } \delta_A(q,x) \in F_A \end{cases}$
      - $S_{C0} = \begin{cases} \{q_{A0}, q_{B0}\}\text{, když } q_{A0} \in F_A \\ \{q_{A0}\}\text{, když } q_{A0} \notin F_A \end{cases}$

Další **uzávěrové** vlastnosti (2)

- Regulární jazyky jsou uzavřené na **iteraci**
  - L je jazyk nad X, pak iterace L je $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, kde
    - $L^0=\{\lambda\}$, $L^1=L$, $L^{i+1}=L.L^i=L^i.L$
  - Je-li L regulární, pak L* je regulární
    - $L = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = L^*$
      - nedeterministicky propojíme přijímající a počáteční stav A
      - $C = (Q_A \cup \{q_{C0}\}, X, \delta_C, \{q_{A0},q_{C0}\}, F_A \cup \{q_{C0}\})$
      - $\delta_C(q,x) = \begin{cases} \{\delta_A(q,x)\} \text{ pro } q \in Q_A \text{, že } \delta_A(q,x) \notin F_A \\ \{\delta_A(q,x), q_{A0}\} \text{ pro } q \in Q_A \text{, že } \delta_A(q,x) \in F_A \\ \emptyset \text{ pro } q = q_{C0} \end{cases}$

Další **uzávěrové** vlastnosti (3)

- Regulární jazyky jsou uzavřené na **zrcadlový obraz**
  - L je jazyk nad X, pak $L^R=\{w|w\in X^* \land (\exists u\in L)u^R=w\}$ je zrcadlový obraz L
  - Je-li L regulární, pak L^R je regulární
    - $L = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = L^R$
      - zaměníme počáteční a přijímající stavy, otočíme přechody
        - v deterministické variantě nelze
      - $C = (Q_A, X, \delta_C, F_A, \{q_{A0}\})$, kde
        - $\delta_C(q, x) = \{ p \mid q = \delta_A(p, x) \}$

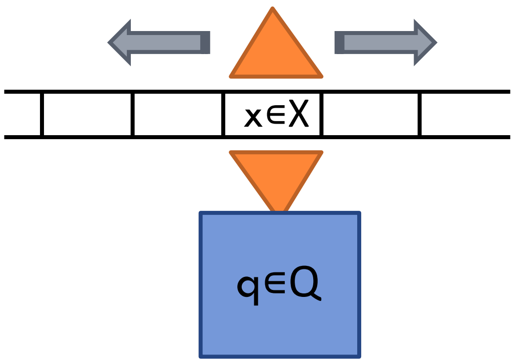
Uzavřenost na **kvocienty**

- **Kvocienty** regulárních jazyků jsou regulární
  - Nechť R je **regulární** jazyk a L je **libovolný** jazyk nad X, pak L\R a R/L jsou regulární jazyky.
    - $R = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = L\backslash R$
      - $C = (Q_A, X, \delta_C, S_{C0}, F_A)$, kde
        - $S_{C0}=\{q \mid q\in Q \wedge (\exists w\in L)\delta_A{}^*(q_{A0},w)=q\}$
        - $\delta_C(q, x) = \{ \delta_A(q, x) \}$ pro $q\in Q_A$ a $x\in X$
    - zkonstruujeme KA D, že $L(D) = R/L$
      - $D = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_D)$, kde
        - $F_D=\{q \mid q\in Q \wedge (\exists w\in L)\ \delta_A{}^*(q,w)\in F_A\}$

Pavel Surynek, 2015

Dvousměrné automaty

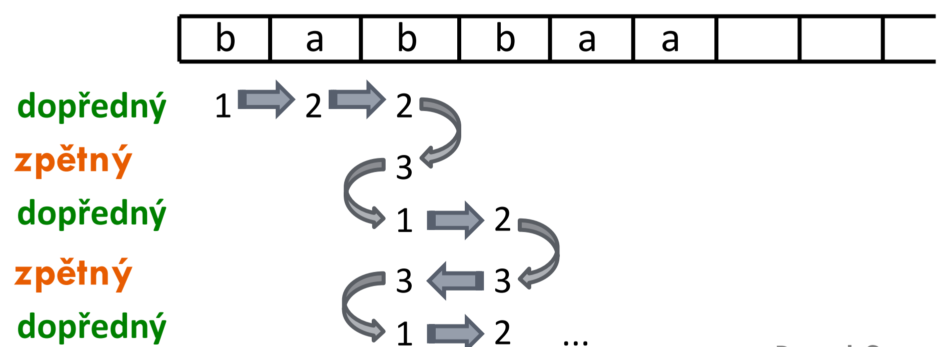
- Přidáme možnost volby následujícího čteného symbolu
  - u standardního KA vždy následující buňka pásky
  - **dvousměrný** automat
    - následující, předchozí nebo stejná buňka
  - 2KA $A=(Q, X, \delta, q_0, F)$
    - Q – konečná neprázdná množina stavů
    - X – konečná neprázdná abeceda
    - $\delta: Q \times X \rightarrow Q \times \{-1, 0, 1\}$
      - druhá komponenta výstupu určuje následující čtenou buňku
        - -1 předchozí buňka na pásce
        - 0 stejná buňka
        - +1 následující buňka na pásce (jako u KA)
    - $q_0 \in Q$ – počáteční stav
    - $F \subseteq Q$ – přijímající stavy
  - nedeterministická verze N2KA $B=(Q, X, \delta, S_0, F)$
    - $\delta: Q \times X \rightarrow 2^{Q \times \{-1, 0, 1\}}$
      - $2^{Q \times \{-1, 0, 1\}}$ je množina všech podmnožin $Q \times \{-1, 0, 1\}$
    - $S_0 \subseteq Q$ - množina počátečních stavů



Výpočet dvousměrného automatu

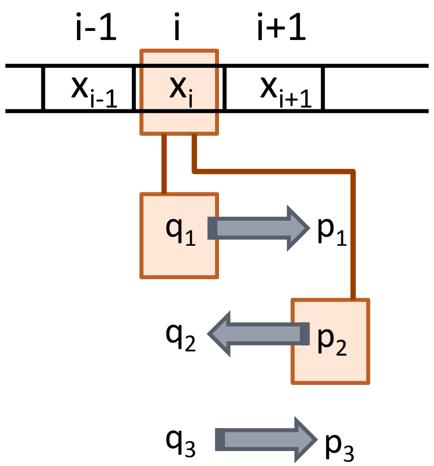
- 2KA $A = (Q, X, \delta, q_0, F)$
  - lze se omezit na $\delta': Q \times X \rightarrow Q \times \{-1, 1\}$
    - výpočet na místě nahradíme jeho výsledkem v okamžiku přesunu na další buňku
      - $\delta'(q,x) = \delta(p_i,x)$, kde $i \in \mathbb{N}_0$ je takové, že $\delta(p_i,x)_2 \neq 0$, $p_1=q$ a $[p_{j+1}, 0] = \delta(p_j,x)$ pro $j = 1,2, \ldots, i-2$
  - při výpočtu se pak střídá **dopředný** a **zpětný** chod
    - speciálně přijímající výpočet začíná dopředným chodem a končí dopředným
      - počet chodů v přijímajícím výpočtu je lichý

	a	b
→1	1, +1	2, +1
←2	2, +1	3, -1
3	1, +1	3, -1



Ekvivalence KA a 2KA (1)

- KA $A = (Q_A, X, \delta_A, q_0, F_A) \Rightarrow$ 2KA B
  - ihned: $B = (Q_A, X, \delta_B, q_0, F_A)$, kde $\delta_B(q,x)=[\delta_A(q,x), +1]$ pro $q \in Q$ a $x \in X$
- 2KA ⇒ KA
  - omezme se na deterministický 2KA
    - bez újmy na obecnosti $\delta: Q\times X \rightarrow Q\times\{-1, 1\}$
  - i-tá přechodová (*crossing*) posloupnost
    - posloupnost stavů v přijímajícím výpočtu při práci nad symboly x_{i-1} a x_i (tj. nad (i-1)-ní a i-tou buňkou) ve slově $w=x_1x_2\ldots x_n$
      - směry výpočtu se střídají
        - dopředný chod pracuje se symbolem x_i
        - zpětný chod pracuje se symbolem x_{i-1}
      - posloupnosti jsou liché délky
    - stavy se v přechodové posloupnosti na lichých resp. sudých pozicích neopakují
      - jinak zacyklení, tj. nepřijímající výpočet
  - umíme ověřit, zda dvě dané přechodové posloupnosti po sobě mohou v přijímajícím výpočtu následovat



Př.: [q1, q2,q3] je i-tá přechodová posloupnost

Ekvivalence KA a 2KA (2)

- (deterministický) 2KA $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$
  - definujeme ekvivalentní KA $B = (Q_B, X, \delta_B, q_{B0}, F_B)$:
    - Q_B nechť je množina všech přechodových posloupností vzhledem k A
      - Q_B konečná ← pod-posloupnosti na sudých resp. lichých pozicích jsou bez opakování stavů
    - $q_{B0} = [q_{A0}]$ $\quad q_{A0} \Rightarrow$
    - $\delta_B([q_1,q_2,\ldots,q_k], x)=\{[p_1,p_2,\ldots,p_l] \mid$
      $[p_1,p_2,\ldots,p_l]$ může následovat po $[q_1,q_2,\ldots,q_k]$ při čtení x$\}$
      - definujeme pro každou přechodovou posloupnost $[q_1,q_2,\ldots,q_k] \in Q_B$ a $x \in X$
    - $F_B = \{[f] \mid f \in F_A\}$ $\quad f \Rightarrow$

Ekvivalence KA a 2KA (3)

- nedeterministický 2KA A
  - stavy se v přechodových posloupnostech mohou opakovat
    - omezíme se na prosté přechodové posloupnosti
      - jestliže $[q_0,i_0]$, $[q_1,i_1]$, …, $[q_\alpha,i_\alpha]$, …, $[q_\beta,i_\beta]$,…., $[q_k,i_k]$, kde $[q_\alpha,i_\alpha]=[q_\beta,i_\beta]$, je přijímající výpočet, pak $[q_0,i_0]$, $[q_1,i_1]$, …, $[q_\alpha,i_\alpha]$, $[q_{\beta+1},i_{\beta+1}]$,…., $[q_k,i_k]$ je rovněž přijímající výpočet
      - jestliže $w \in L(A)$, pak existuje prostý výpočet, který přijímá w
      - v přechodových posloupnostech vzhledem k prostým přijímajícím se neopakují stavy na lichých ani sudých pozicích
  - přechodová funkce je nedeterministická
    - návaznost přechodových posloupností se bude ověřovat nedeterministicky
  - množina počátečních stavů
    - $S_{B0} = \{[q] \mid q \in S_0\}$