Výroková a predikátová logika - VII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

Platnost v teorii

- *Teorie* jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. *axiomů*).
- *Model teorie* T je L-struktura $\mathcal{A}$ taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- *Třída modelů* teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je *pravdivá v T* (*platí v T*), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model $\mathcal{A}$ teorie T. V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je *lživá v T*, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T.
- Formule φ je *nezávislá v T*, pokud není pravdivá v T ani lživá v T.
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme *"v logice"*. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je *pravdivá* ((*logicky*) *platí*, *tautologie*).
- *Důsledek* T je množina $\theta^L(T)$ všech sentencí jazyka L pravdivých v T, tj.

$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \rightarrow \ x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$

Modely T jsou L-struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. uspořádané množiny, ve kterých platí axiomy T, např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- *Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$, neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}, e(y) = \{1\}$, je tedy nezávislá v T.*
- *Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, je tedy rovněž nezávislá v T. Píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$.*
- *Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její generální uzávěr.*

Vlastnosti teorií

Teorie T jazyka L je *(sémanticky)*

- *sporná*, jestliže v ní platí $\perp$ (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá sentence je v ní pravdivá či lživá,
- *extenze* teorie T' jazyka L', jestliže $L' \subseteq L$ a $\theta^{L'}(T') \subseteq \theta^L(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a *konzervativní*, pokud $\theta^{L'}(T') = \theta^L(T) \cap \mathrm{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T,

Struktury $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ pro jazyk L jsou *elementárně ekvivalentní*, značeno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, platí-li v nich stejné formule.

Pozorování *Nechť T a T' jsou teorie jazyka L. Teorie T je (sémanticky)*

(1) *bezesporná, právě když má model,*

(2) *kompletní, právě když má až na elementární ekvivalenci jediný model,*

(3) *extenze T', právě když $M(T) \subseteq M(T')$,*

(4) *ekvivalentní s T', právě když $M(T) = M(T')$.*

Nesplnitelnost a pravdivost

Problém pravdivosti v teorii lze převést na problém existence modelu.

Tvrzení *Pro každou teorii T a sentenci φ (stejného jazyka)*

$$T, \neg\varphi \text{ nemá model} \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi.$$

Důkaz Z definic plynou ekvivalence následujících tvrzení.

(1) $T, \neg\varphi$ nemá model,

(2) $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu teorie T,

(3) φ platí v každém modelu teorie T,

(4) $T \models \varphi$. $\square$

Poznámka *Předpoklad, že φ je sentence, je nutný pro $(2) \Leftrightarrow (3)$.*

Např. teorie $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model, ale $P(c) \not\models P(x)$, kde P je unární relační symbol a c je konstantní symbol.

Podstruktura

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B \rangle$ jsou struktury pro jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$.

Řekneme, že $\mathcal{B}$ je (indukovaná) *podstruktura* $\mathcal{A}$, značeno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, pokud

- (i) $B \subseteq A$,
- (ii) $R^B = R^A \cap B^{\mathrm{ar}(R)}$ pro každé $R \in \mathcal{R}$,
- (iii) $f^B = f^A \cap (B^{\mathrm{ar}(f)} \times B)$, tj. $f^B = f^A \restriction B^{\mathrm{ar}(f)}$, pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Množina $C \subseteq A$ je doménou podstruktury $\mathcal{A}$, právě když C je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$, pak příslušnou podstrukturu značíme $\mathcal{A} \restriction C$ a říkáme, že je to *restrikce* (*parcializace*) struktury $\mathcal{A}$ na C.

- Množina $C \subseteq A$ je *uzavřená* na funkci $f\colon A^n \to A$, pokud $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in C$ pro každé $x_0, \ldots, x_{n-1} \in C$.

Např. $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je podstrukturou* $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ *a lze psát* $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$.
Dále $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je jejich podstrukturou a* $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$.

Platnost v podstruktuře

Nechť $\mathcal{B}$ je podstruktura struktury $\mathcal{A}$ pro (pevný) jazyk L.

Tvrzení *Pro každou otevřenou formuli φ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to B$ platí*

$$\mathcal{B} \models \varphi[e] \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Důkaz Je-li φ atomická, plyne tvrzení z definice platnosti při ohodnocení. Dále snadno indukcí dle struktury formule. $\square$

Důsledek *Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*

- Teorie T je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek *Každá podstruktura modelu otevřené teorie T je modelem T.*

Např. každá podstruktura grafu, tj. modelu teorie grafů, je rovněž grafem, zveme ho podgraf. Obdobně např. podgrupa nebo Booleova podalgebra.

Generovaná podstruktura, expanze, redukt

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura a $X \subseteq A$. Označme B nejmenší podmnožinu množiny A obsahující X, která je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). Pak strukturu $\mathcal{A} \restriction B$ značíme rovněž $\mathcal{A}\langle X \rangle$ a podstruktura říkáme, že je to $\mathcal{A}$ *generovaná* množinou X.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ *a* $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je* $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$ *a* $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ *je podstruktura na všech sudých přirozených číslech.*

Nechť $\mathcal{A}'$ je struktura pro jazyk L' a $L \subseteq L'$ je jazyk. Odebráním realizací symbolů, jež nejsou v L, získáme z $\mathcal{A}'$ strukturu $\mathcal{A}$, kterou nazýváme *redukt* struktury $\mathcal{A}'$ na jazyk L. Obráceně, $\mathcal{A}'$ je *expanze* struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L'.

Např. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ *je redukt* $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$. *Naopak, struktura* $\langle \mathbb{N}, +, c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ *taková, že* $c_i = i$ *pro všechna* $i \in \mathbb{N}$, *je expanze* $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ *o jména prvků z* $\mathbb{N}$.

Věta o konstantách

Věta *Nechť φ je formule jazyka L s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T nad jazykem L'. Pak*

$$T \models \varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Důkaz ($\Rightarrow$) Je-li $\mathcal{A}'$ model teorie T', nechť $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení e, platí i

$$\mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/c_1^{\mathcal{A}'}, \dots, x_n/c_n^{\mathcal{A}'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

($\Leftarrow$) Je-li $\mathcal{A}$ model teorie T a e ohodnocení, nechť $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ na L' o konstanty $c_i^{\mathcal{A}'} = e(x_i)$ pro všechna i. Jelikož $\mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)[e']$ pro libovolné ohodnocení e', platí i

$$\mathcal{A}' \models \varphi[e(x_1/c_1^{\mathcal{A}'}, \dots, x_n/c_n^{\mathcal{A}'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A} \models \varphi[e]. \quad \square$$

Booleovy algebry

Teorie *Booleových algeber* jazyka $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ s rovností má axiomy

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (asociativita $\wedge$)

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (asociativita $\vee$)

$x \wedge y = y \wedge x$ (komutativita $\wedge$)

$x \vee y = y \vee x$ (komutativita $\vee$)

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (distributivita $\wedge$ k $\vee$)

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (distributivita $\vee$ k $\wedge$)

$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$ (absorbce)

$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0$ (komplementace)

$0 \neq 1$ (netrivialita)

Nejmenší model je $\underline{2} = \langle 2, -_1, \wedge_1, \vee_1, 0, 1\rangle$. Konečné Booleovy algebry jsou (až na izomorfismus) právě $\underline{^n2} = \langle {}^n2, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n\rangle$ pro $n \in \mathbb{N}^+$, kde jednotlivé operace *(na binárních n-ticích)* jsou operace z $\underline{2}$ *"po složkách"*.

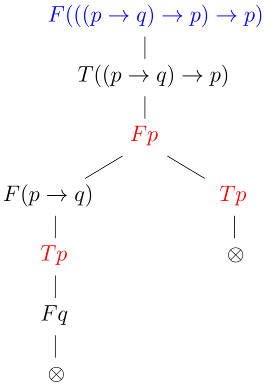
Vztah výrokové a predikátové logiky

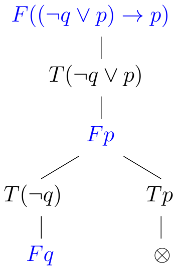
- Výrokové formule s (*univerzálními*) spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (případně s $\top$, $\bot$) lze považovat za Booleovské termy. Hodnota výroku φ při daném ohodnocení je pak hodnotou termu v Booleově algebře $\underline{2}$.
- Algebra výroků nad $\mathbb{P}$ je Booleova algebra (i pro $\mathbb{P}$ nekonečné).
- Reprezentujeme-li atomické formule v otevřené formuli φ (bez rovnosti) pomocí prvovýroků, získame výrokovou formuli, která je pravdivá, právě když φ je pravdivá.
- Výrokovou logiku lze zavést jako fragment predikátové logiky pomocí nulárních relačních symbolů (*syntax*) a nulárních relací (*sémantika*), přičemž $A^0 = \{\emptyset\} = 1$ a tedy $R^A \subseteq A^0$ je $R^A = \emptyset = 0$ anebo $R^A = \{\emptyset\} = 1$.

Tablo metoda ve VL - opakování

- Tablo je binární strom reprezentující vyhledávání *protipříkladu*.
- Vrcholy jsou označeny položkami, tj. formulemi s příznakem T / F, který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu platí / neplatí.
- Je-li tento předpoklad správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.
- Větev je sporná (selže), pokud obsahuje $T\psi$, $F\psi$ pro nějaké ψ.
- Důkaz formule φ je sporné tablo s kořenem $F\varphi$, tj. tablo v němž každá větev je sporná (nebyl nalezen protipříklad), pak φ je pravdivá.
- Pokud protipříklad existuje, v dokončeném tablu bude větev, která ho poskytuje, tato větev může být nekonečná.
- Lze zkonstruovat systematické tablo, jež je vždy dokončené.
- Pokud je φ pravdivá, systematické tablo pro φ je sporné, tj. důkazem φ, v tom případě je i konečné.

Tablo metoda ve VL - příklady





$a)$ Tablo důkaz formule $((p \to q) \to p) \to p$.

$b)$ Dokončené tablo pro $(\neg q \vee p) \to p$. Levá větev poskytuje protipříklad $v(p) = v(q) = 0$.

Tablo metoda v PL - rozdíly

- Formule v položkách budou sentence (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme nová atomická tabla pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat konstantní termy dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o nové (pomocné) konstantní symboly (spočetně mnoho) pro reprezentaci *"svědků"* položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V dokončené větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou instance $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Předpoklady

1) *Dokazovaná formule φ je sentence.* Není-li φ sentence, můžeme ji nahradit za její generální uzávěr φ', neboť pro každou teorii T,

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T \models \varphi'.$$

2) *Dokazujeme z teorie v uzavřeném tvaru, tj. každý axiom je sentence.* Nahrazením každého axiomu ψ za jeho generální uzávěr ψ' získáme ekvivalentní teorii, neboť pro každou strukturu $\mathcal{A}$ (daného jazyka L),

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \psi'.$$

3) *Jazyk L je spočetný.* Pak každá teorie nad L je spočetná. Označme L_C rozšíření jazyka L o nové konstantní symboly $c_0, c_1, \ldots$ (spočetně mnoho). Platí, že konstantních termů jazyka L_C je spočetně. Nechť t_i označuje i-tý konstantní term (v pevně zvoleném očíslování).

4) *Zatím budeme předpokládat, že jazyk je bez rovnosti.*

Tablo v PL - příklady

$$
\begin{array}{c}
F((\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x)) \\
| \\
T(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
F(\neg(\forall x)P(x)) \\
| \\
T(\forall x)P(x) \\
| \\
T(\neg P(c)) \quad c \ \text{nové} \\
| \\
FP(c) \\
| \\
T(\forall x)P(x) \\
| \\
TP(c) \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
F(\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x)) \\
| \\
T(\neg(\forall x)P(x)) \\
| \\
F(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
F(\forall x)P(x) \\
| \\
FP(d) \quad d \ \text{nové} \\
| \\
F(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
F(\neg P(d)) \\
| \\
TP(d) \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

Atomická tabla - původní

Atomická tabla jsou všechny následující (položkami značkované) stromy, kde α je libovolná atomická sentence a φ, ψ jsou libovolné sentence, vše v L_C.

<table>
<tr>
<td>$T\alpha$</td>
<td>$F\alpha$</td>
<td>$\begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\ \vert \\ T\varphi \\ \vert \\ T\psi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc} & F(\varphi \wedge \psi) & \\ / & & \backslash \\ F\varphi & & F\psi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc} & T(\varphi \vee \psi) & \\ / & & \backslash \\ T\varphi & & T\psi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\ \vert \\ F\varphi \\ \vert \\ F\psi \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{c} T(\neg\varphi) \\ \vert \\ F\varphi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{c} F(\neg\varphi) \\ \vert \\ T\varphi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc} & T(\varphi \to \psi) & \\ / & & \backslash \\ F\varphi & & T\psi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{c} F(\varphi \to \psi) \\ \vert \\ T\varphi \\ \vert \\ F\psi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc} & T(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & & \backslash \\ T\varphi & & F\varphi \\ \vert & & \vert \\ T\psi & & F\psi \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{ccc} & F(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & & \backslash \\ T\varphi & & F\varphi \\ \vert & & \vert \\ F\psi & & T\psi \end{array}$</td>
</tr>
</table>

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkované) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x, t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je nový konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

$\sharp$ $T(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $T\varphi(x/t)$	$*$ $F(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $F\varphi(x/c)$	$*$ $T(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $T\varphi(x/c)$	$\sharp$ $F(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $F\varphi(x/t)$
pro libovolný konst. term t	pro *novou* konstantu c	pro *novou* konstantu c	pro libovolný konst. term t

Poznámka *Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.*

Tablo

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkovaný strom s předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T, pak připojením atomického tabla pro P na konec větve V vznikne konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud nevyskytuje na V,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T.
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně $\tau = \cup \tau_n$.

Konstrukce tabla

$$F((\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x))$$
$$T(\exists x)\neg P(x)$$
$$F(\neg(\forall x)P(x))$$

$$F(\neg(\forall x)P(x))$$
$$T(\forall x)P(x)$$

$$T(\exists x)\neg P(x)$$
$$T(\neg P(c)) \quad c \ \text{nová}$$

$$T(\neg P(c))$$
$$FP(c)$$

$$T(\forall x)P(x)$$
$$TP(c) \quad \text{zvol } t = c$$

$$\otimes$$

$$F(\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x))$$
$$T(\neg(\forall x)P(x))$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$

$$T(\neg(\forall x)P(x))$$
$$F(\forall x)P(x)$$

$$F(\forall x)P(x)$$
$$FP(d) \quad d \ \text{nová}$$

$$F(\exists x)\neg P(x)$$
$$F(\neg P(d)) \quad \text{zvol } t = d$$

$$F(\neg P(d))$$
$$TP(d)$$

$$\otimes$$

Konvence

$$
\begin{array}{c}
F((\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x)) \\
| \\
T(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
F(\neg(\forall x)P(x)) \\
| \\
T(\forall x)P(x) \\
| \\
T(\neg P(c)) \quad c \ \text{nové} \\
| \\
F P(c) \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} T(\forall x)P(x) \\ | \\ T P(c) \end{array}} \\
| \\
\otimes
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
F(\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x)) \\
| \\
T(\neg(\forall x)P(x)) \\
| \\
F(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
F(\forall x)P(x) \\
| \\
F P(d) \quad d \ \text{nové} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} F(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\neg P(d)) \end{array}} \\
| \\
T P(d) \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

- Větev V tabla τ je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo τ je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence φ z teorie T je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je *(tablo) dokazatelná* z teorie T, píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T.
- *Zamítnutí* sentence φ *tablem* z teorie T je sporné tablo z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je *(tablo) zamítnutelná* z teorie T, má-li zamítnutí tablem z T, tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady

$F((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$

$T(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

$F((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$

$T(\forall x)P(x)$

$F(\forall x)Q(x)$

$FQ(c)$ c nová

$T(\forall x)P(x)$

$TP(c)$

$T(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

$T(P(c) \rightarrow Q(c))$

$$\begin{array}{cc} FP(c) & TQ(c) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$

$$\begin{array}{ccc}
T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))) & & F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))) \\
F((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)) & & T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)) \\
F(\forall x)\varphi(x) & F(\forall x)\psi(x) & T(\forall x)\varphi(x) \\
F\varphi(c) \quad c \text{ nová} & F\psi(d) \quad d \text{ nová} & T(\forall x)\psi(x) \\
T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))) & T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))) & F(\varphi(e) \wedge \psi(e)) \quad e \text{ nová} \\
T(\varphi(c) \wedge \psi(c)) & T(\varphi(d) \wedge \psi(d)) & F\varphi(e) \qquad F\psi(e) \\
T\varphi(c) & T\varphi(d) & T(\forall x)\varphi(x) \qquad T(\forall x)\psi(x) \\
T\psi(c) & T\psi(d) & T\varphi(e) \qquad T\psi(e) \\
\otimes & \otimes & \otimes \qquad \otimes
\end{array}$$