Substituce

Petr Štěpánek

S využitím materialu Krysztofa R. Apta

2006

Algebra termů

Předpokládáme, že je dán jazyk L , definovali jsme množinu jeho termů.

Zavedeme některé užitečné pojmy. Připomeňme, že konstanty ztotožňujeme s funkčními symboly, které nepracují s žádnými argumenty.

Obvykle je značíme a, b, c, d, ...

z kontextu je vždy jasné, zda jde o konstantu nebo o název klauzule, záměna nehrozí.

Term, který neobsahuje žádné proměnné nazýváme *základní* (anglicky *ground*).

Definice Je-li t term,

- množinu jeho proměnných označujeme *Var*(t) ,
- říkáme, že s je podterm termu t , je-li s podslovem t , které je samo termem,
- je-li w podtermem s říkáme, že w se vyskytuje v s nebo, že w má výskyt v termu s . V obecném případě může mít podterm w v termu s více výskytů, například g(f(x), f(x)),
- každý term je svým podtermem, je-li s podterm termu t a je různý od t , říkáme, že s je vlastním podtermem t .

Substituce

Substituce váží termy k proměnným. V logickém programování jsou jediným prostředkem, který proměnným přiřazuje hodnoty.

Relevantní substituce jsou během výpočtu automaticky generovány - na rozdíl od explicitního přiřazování hodnot proměnným v imperativních jazycích - říkáme, že proměnné nabývají svých hodnot implicitně.

Definice

Substituce θ je konečné zobrazení, které každé proměnné x ve svém definičním oboru přiřazuje nějaký term t různý od x.
Protože θ je zobrazení, můžeme v takovém případě psát $\theta(x) = t$.

Podrobněji, substituce je zobrazení θ, které zapisujeme

$$\theta = \{x_1/ t_1 , x_2/ t_2 , \ldots x_n / t_n\} \tag{1}$$

takové, že platí

- $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ jsou různé proměnné,
- $t_1 , t_2 , \ldots , t_n$ jsou termy a
- x_i je různé od t_i , pro i , $1 \le i \le n$

Je-li $n = 0$, říkáme že (1) je prázdná substituce a značíme ji ε .

Množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ nazýváme definičním oborem θ a značíme $Dom(\theta)$,

množinu $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ nazýváme oborem hodnot θ a značíme $Range(\theta)$,

množinu všech proměnných obsažených v termech $t_1, t_2, \ldots, t_n$ označujeme $Ran(\theta)$, dále

$$Var(\theta) = Dom(\theta) \cup Ran(\theta)$$

je množina všech proměnných, které se vyskytují v substituci θ .

Je-li dána množina proměnných V potom výrazem $\theta \mid V$ označujeme substituci, která vznikne ze substituce θ omezením jejího definičního oboru na proměnné z V .

Jsou-li všechny termy z oboru hodnot θ základní, říkáme že substituce θ je základní.

Jsou-li všechny termy z oboru hodnot θ proměnné, říkáme že θ je substituce proměnných.

Speciálním případem takové substituce je permutace definičního oboru , tedy prosté zobrazení množiny $Dom(\theta)$ na $Dom(\theta)$, které nazýváme přejmenování proměnných.

Příkladem přejmenování je třeba substituce $\{x/y, y/z, z/x\}$.
Prázdná substituce je také přejmenování.

V literatuře se používá i jiná definice přejmenování, ale dá se ukázat, že každá taková substituce se dá rozšířit do substituce, která je přejmenováním v našem smyslu.

Definice (substituce za proměnné v termu)

Je-li dán term s a substituce θ, výraz, který vznikne z termu s současným nahrazením všech výskytů proměnných

$$x \in \mathit{Var}(s) \cap \mathit{Dom}(\theta)$$

odpovídajícím termem $\theta(x)$, označíme $s\theta$ a budeme ho nazývat aplikací substituce θ na s.

Není těžké ověřit, že $s\theta$ je také term, říkáme, že je to instance s.

- Pokud instance $s\theta$ neobsahuje proměnné, říkáme že je základní.
- Je-li θ přejmenování, říkáme že $s\theta$ je variantou termu s.
- Říkáme, že term s je obecnější než term t, je-li t instancí s.

Příklad 1. Nechť s je term $f(x, g(x, y, h(x,z)))$ a θ je substituce

$$\theta = \{ x / k(u,v),\ y / l(z),\ z / k(x,y) \}$$

potom $s\theta$ je term

$$f(k(u,v) , g(k(u,v) , l(z), h(k(u,v), k(x,y))))$$

Příklad 2. (Varianty)

a) $f(y,x)$ je variantou $f(x,y)$, protože $f(y,x) = f(x,y)\{x/y\ ,\ y/x\}$

b) $f(x,y')$ je variantou $f(x,y)$, protože $f(x,y') = f(x,y)\{y/y', y'/y\}$
Povšimněme si, že vazba y'/y byla přidána, aby substituce byla přejmenováním.

c) $f(x,x)$ není variantou $f(x,y)$. Kdyby tomu tak bylo, pak $f(x,x) = f(x,y)\theta$ pro nějaké přejmenování θ. Tedy $y/x\ \varepsilon\ \theta$ a pro nějakou proměnnou z různou od x platí $x/z\ \varepsilon\ \theta$. Potom nutně $f(x,y)\,\theta = f(z,x)$ - spor.

Substituce za proměnné v termu může být také definována indukcí podle složitosti termu.

Lemma 1.

Je-li s term a θ substituce, instance $s\theta$ může být definována indukcí podle struktury termu s .

a) je-li s proměnná x , potom $s\theta$ je $\theta(x)$, pokud $x \varepsilon \mathit{Dom}(\theta)$, jinak x .

b) je-li s tvaru $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ a instance termů t_i již byly sestrojeny, potom instance $s\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_n\theta)$.

c) Jsou-li θ a η substituce, potom $\theta = \eta$, právě když pro libovolnou proměnnou x platí $\theta(x) = \eta(x)$.

Definice. (Složení substitucí)

Jsou-li θ a η substituce, jejich složení $\theta\eta$ definujeme takto: pro libovolnou proměnnou x položíme $(\theta\eta)(x) = (x\theta)\eta$.

Jinými slovy, $\theta\eta$ přiřazuje proměnné x term, který získáme substitucí η do instance $x\theta$.

Je zřejmé, že pokud x není prvkem množiny $Dom(\theta) \cup Dom(\eta)$, platí $(\theta\eta)(x) = x$. To znamená, že $\theta\eta$ je zobrazení proměnných do množiny termů, které je s vyjimkou konečné množiny všude identické. Tím jednoznačně určuje substituci.

Snadno se ověří, že pro prázdnou substituci ε a θ platí $\theta\varepsilon = \theta = \varepsilon\theta$.

Složitější je složení libovolných dvou substitucí vypočítat.

Lemma 2. (Složená substituce)

Mějme dvě substituce

$$\theta = \{x_1/ t_1 , x_2/ t_2 , \dots x_n / t_n\} \quad a \quad \eta = \{y_1/ s_1 , y_2/s_2 , \dots y_m / s_m\}$$

Složená substituce $\theta\eta$ je rovna zobrazení ψ , které vznikne následujícím postupem

a) z posloupnosti

$$\{x_1/ t_1\eta , x_2/ t_2\eta , \dots x_n/t_n\eta , y_1/ s_1 , y_2/s_2 , \dots y_m/s_m\} \qquad (2)$$

nejprve vynechejme všechny vazby $x_i/t_i\eta$ takové, že $x_i = t_i\eta$ a potom všechny vazby y_j/s_j , kde $y_j \in Dom(\theta)$.

b) zbytek posloupnosti (2) označme ψ . Je to konečné zobrazení proměnných do termů a rozborem případů lze ověřit, že pro každou proměnnou x platí $\psi(x) = \theta\eta(x)$.

Příklad.

Nechť $\theta = \{u/z , x/3, y/f(x.1)\}$ a $\eta = \{x/4 , y/f(4,1) , z/u \}$, potom

$$\theta\eta = \{x/3 , y/f(4,1) , z/u \}$$

Výpočet složené substituce není jednoduchý a není ani jednoduché pravidlo, jak definovat její definiční obor a obor hodnot.

Uvedeme ještě dvě jednoduchá fakta o skládání přejmenování.

Lemma 3.

(i) Pro každé přejmenování θ , existuje právě jedna substituce θ^{-1} , taková, že $\theta\theta^{-1} = \varepsilon = \theta^{-1}\theta$. θ^{-1} je také přejmenování.

(ii) Je-li $\theta\eta = \varepsilon$, potom θ i η jsou přejmenování.

Lemma 4. (Asociativnost)

(i) $(s\theta)\eta = s(\theta\eta)$

(ii) $(\theta\eta)\gamma = \theta(\eta\gamma)$

Důkaz (i) provedeme indukcí podle složitosti termu s podle lemmatu 1.

a) je-li s proměnná x, potom $(x\theta)\eta = (\theta(x))\eta = x(\theta\eta)$

b) je-li s tvaru $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ a pro termy t_i již (i) platí, potom

$$
\begin{aligned}
(s\theta)\eta &= f((t_1\theta)\eta, (t_2\theta)\eta, \dots, (t_n\theta)\eta) \\
&= f((t_1(\theta\eta), t_2(\theta\eta), \dots, t_n(\theta\eta)) \\
&= f(t_1, t_2, \dots, t_n)(\theta\eta) \\
&= s(\theta\eta)
\end{aligned}
$$

(ii) Pro libovolnou proměnnou x dostáváme

$$x(\theta\eta)\gamma = (x\theta\eta)\gamma \qquad \textit{definice skládání}$$

$$= ((x\theta)\eta)\gamma \qquad \textit{podle } (i) \textit{ pro } x$$

$$= x\theta(\eta\gamma) \qquad \textit{podle } (i) \textit{ pro } x\theta$$

tedy $(\theta\eta)\gamma = \theta(\eta\gamma)$.

Skládání substitucí je asociativní operace, to znamená, že při skládání posloupností substitucí nezáleží na uzávorkování.

Lemma 5. (Varianty)

(i) Term s je variantou termu t, právě když s je instancí t a t je instancí s.

(ii) Je-li term s variantou t, potom $s = t\theta$, kde θ je přejmenování takové, že $\mathit{Var}(\theta) \subseteq \mathit{Var}(s) \cup \mathit{Var}(t)$.

Důkaz. (i) ($\Rightarrow$) Podle předpokladu je $s = t\theta$, kde θ přejmenování. Nechť θ^{-1} je přejmenování z lemmatu 3. Potom $t = t\theta\theta^{-1} = s\theta^{-1}$.

($\Leftarrow$) Říkáme, že funkce f nemá pevný bod, jestliže $f(x) \neq x$ platí pro každé x. Ke konstrukci přejmenování ze dvou substitucí budeme potřebovat nasledující tvrzení.

Pozorování. Každé prosté zobrazení f konečné množiny A na množinu B lze rozšířit na permutaci g sjednocení $A \cup B$. Pokud f nemá pevné body, g lze setrojit tak, že také nemá pevné body.

Důkaz pozorování. Konečné množiny A a B mají stejný počet prvků, to znamená, že také množiny $A - B$ a $B - A$ mají stejný počet prvků. Nechť h je prosté zobrazení $B - A$ na množinu $A - B$. Položíme-li $g = f \cup h$ dostaneme permutaci $A \cup B$. Je zřejmé, že pokud f nemá pevné body, nemá je ani g.

Pokračování důkazu (i) . Podle předpokladu existují substituce θ a η, takové, že $s = t\theta$ a $t = s\eta$. Tedy

$$t = t\theta\eta \qquad \textbf{(3)}$$

.

Z (3) plyne pro libovolné dvě různé proměnné $x , y \ \varepsilon \ \mathit{Var}(t)$, platí že $x\theta\eta$ je různé od $y\theta\eta$ a proto také $x\theta \neq y\theta$.

- $x\theta\eta \neq y\theta\eta$ a proto také
- $x\theta \neq y\theta$ navíc
- $x\theta\eta$ a $y\theta\eta$ jsou proměnné a pak nutně i $x\theta$ a $y\theta$ jsou proměnné

Můžeme předpokládat, že $Dom(\theta) \subseteq Var(t)$. Ukázali jsme, že θ je prostá substituce proměnných za proměnné.

Podle předchozího pozorování substituce θ může být rozšířena do přejmenování γ takového, že $Dom(\gamma) = Var(\theta)$. Dokážeme-li , že

$$Var(t) \cap Dom(\gamma) \subseteq Dom(\theta) \tag{4}$$

Potom $t\gamma = t\theta = s$ a s je variantou t .

K důkazu tvrzeni (i) zbývá dokázat (4) . Předpokládejme, že existuje proměnná $x \ \varepsilon \ Var(t) - Dom(\theta)$. Potom podle (3)

. $x = x\theta\eta = x\eta$ tedy

. x není prvkem $Dom(\eta)$ potom také

. x není prvkem $Ran(\theta)$ protože jinak by existovalo y ,

. $y \ \varepsilon \ Var(t)$, $y \quad x$ takové, že $y/x \ \varepsilon \ \theta$ a $y\theta\eta = y$, odkud

. $x \ \varepsilon \ Dom(\eta)$ - spor .

Dokázali jsme

. $$(Var(t) - Dom(\theta)) \cap Ran(\theta) = 0$$ odkud plyne

. $$Var(t) \cap Dom(\gamma) \subseteq Dom(\theta) \qquad (4)$$

protože

. $Dom(\gamma) = Var(\theta)$. Tím je (i) dokázáno.

Důkaz (ii). Stačí si po všimnout, že přejmenování θ , které jsme použili při důkazu (i) splňuje

$$Var(\gamma) = Var(\theta) \subseteq Var(s) \cup Var(t)$$

Poznámka na konec. Zavedené pojmy instance, základní instance, varianty a značení *Var*(...), *Dom*(...) , *Rang*(...) , atd. Byly zavedeny jen pro termy.

Je zřejmé, že mohou být definovány stejným způsobem pro libovolné řetězce , nejenom termy. Zde máme na mysli jejich pozdější použití na atomické formule (atomy), které se svou strukturou neliší od termů.

Za zapamatování stojí především Lemma 4 o asociativitě a Lemma 5 o variantách.

Tyto pojmy, značení a výsledky budeme bez dalšího používat i pro jiné syntaktické konstrukce.