1. Paralelní algoritmy

Pomocí počítačů řešíme stále složitější a rozsáhlejší úlohy a potřebujeme k tomu čím dál víc výpočetního výkonu. Rychlost a kapacita počítačů zatím rostla exponenciálně, takže se zdá, že stačí chvíli počkat. Jenže tento růst se určitě někdy zastaví – například není jasné, jestli půjde vyrábět transistory menší než jeden atom.

Jak si tedy s obrovskými daty poradíme? Jedna z lákavých možností je prostě do výpočtu zapřáhnout více než jeden procesor. Ostatně, vícejádrové procesory, které dneska najdeme ve svých stolních počítačích, nejsou nic jiného než víceprocesorový systém na jednom čipu.

Nabízí se tedy obtížnou úlohu rozdělit na několik částí, nechat každý procesor (či jádro) počítat jednu z částí a nakonec jejich výsledky spojit dohromady. To se snadno řekne, ale s výjimkou triviálních úloh už obtížněji provede.

Pojďme se podívat na několik zajímavých paralelních algoritmů. Abychom se nemuseli zabývat detaily hardwaru konkrétního víceprocesorového počítače, zavedeme poměrně abstraktní výpočetní model, totiž hradlové sítě. Tento model je daleko paralelnější než skutečný počítač, ale přesto se techniky, které si ukážeme, dají snadno využít i prakticky. Konec konců sama vnitřní architektura procesorů se našemu modelu velmi podobá.

1.1. Hradlové sítě

Hradlové sítě jsou tvořeny navzájem propojenými *hradly*. Každé hradlo přitom počítá nějakou (obecně libovolnou) funkci $\Sigma^k \to \Sigma$, kde Σ je konečná abeceda (stejná pro celou síť) a k přirozené číslo (počet vstupů hradla, jinak též jeho *arita*).

Příklad: Často studujeme hradla *booleovská* pracující nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$. Ta počítají jednotlivé logické funkce, mezi nejběžnější patří tyto:

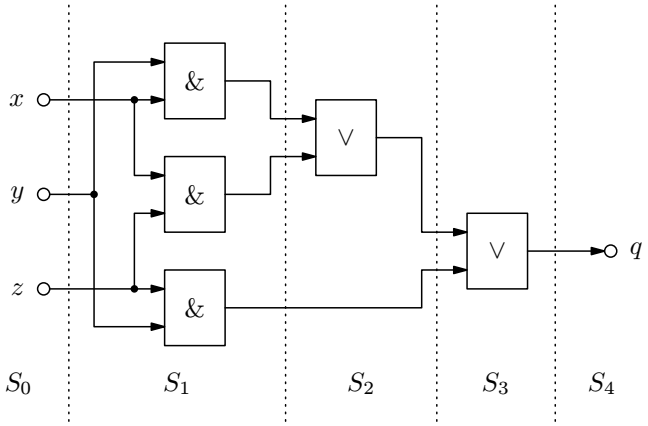
- nulární funkce: to jsou konstanty (FALSE $= 0$, TRUE $= 1$),
- unární funkce: identita a negace (NOT, $\neg$),
- binární funkce: logický součin (AND, $\&$), součet (OR, $\vee$), ...

Propojením hradel pak vznikne *hradlová síť*. Než vyřkneme formální definici, pojďme se podívat na příklad jedné takové sítě (viz obr. 1.1). Síť má tři vstupy, pět booleovských hradel a jeden výstup. Na výstupu je přitom jednička právě tehdy, jsou-li jedničky přítomny na alespoň dvou vstupech. Jinými slovy vrací *majoritu* ze vstupů, čili hodnotu, která převažuje.

Obecně každá hradlová síť má nějaké vstupy, hradla a výstupy. Každý vstup hradla je přitom připojen buďto na některý ze vstupů sítě nebo na výstup jiného hradla. Výstupy hradel mohou být propojeny na vstupy dalších hradel (mohou se větvit), nebo na výstupy sítě. Libovolně, jen nesmíme vytvářet cykly.

Nyní totéž formálněji:

Definice: *Hradlová síť* je určena:



Obr. 1.1: Hradlová síť pro majoritu ze tří vstupů

- *abecedou* Σ, což je nějaká konečná množina symbolů;
- po dvou disjunktními konečnými množinami I (*vstupy*), O (*výstupy*) a H (*hradla*);
- acyklickým orientovaným multigrafem (V, E), kde $V = I \cup O \cup H$ (*multi*graf potřebujeme proto, abychom uměli výstup jednoho hradla připojit současně na více různých vstupů jiného hradla);
- zobrazením F, které každému hradlu $h \in H$ přiřadí nějakou funkci $F(h) : \Sigma^{a(h)} \to \Sigma$, což je funkce, kterou toto hradlo vykonává. Číslu $a(h)$ říkáme *arita* hradla h;
- zobrazením $z : E \to \mathbb{N}$, jež o hranách vedoucích do hradel říká, kolikátému argumentu funkce odpovídají. (Na hranách vedoucích do výstupů necháváme hodnotu této funkce nevyužitu.)

Přitom jsou splněny následující podmínky:

- Do vstupů nevedou žádné hrany.
- Z výstupů nevedou žádné hrany a do každého výstupu vede právě jedna hrana.
- Do každého hradla vede tolik hran, kolik je jeho arita.
- Všechny vstupy hradel jsou zapojeny. Tedy pro každé hradlo h a každý jeho vstup $j \in \{1, \ldots, a(h)\}$ existuje právě jedna hrana e, která vede do hradla h a $z(e) = j$.

Poznámka: Někdy se hradlovým sítím také říká *kombinační obvody* a pokud pracují nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$, pak *booleovské obvody*.

Definice: *Výpočet sítě* postupně přiřazuje hodnoty z abecedy Σ vrcholům grafu. Výpočet probíhá po *taktech*. V nultém taktu jsou definovány pouze hodnoty na vstu-

pech sítě a v hradlech arity 0 (konstantách). V každém dalším taktu pak ohodnotíme vrcholy, jejichž všechny vstupní hrany vedou z vrcholů s již definovanou hodnotou.

Hodnotu hradla h přitom spočteme funkcí $F(h)$ z hodnot na jeho vstupech uspořádaných podle funkce z. Výstup sítě pouze zkopíruje hodnotu, která do něj po hraně přišla.

Jakmile budou po nějakém počtu taktů definované hodnoty všech výstupů, výpočet se zastaví a síť vydá výsledek – ohodnocení výstupů.

Podle průběhu výpočtu můžeme vrcholy sítě rozdělit do vrstev (na obrázku 1.1 jsou naznačeny tečkovaně).

Definice: *i-tá vrstva S_i* obsahuje ty vrcholy, které vydají výsledek v i-tém taktu výpočtu.

Lemma: *(o průběhu výpočtu)* Každý vrchol vydá v konečném čase výsledek (tedy patří do nějaké vrstvy) a tento výsledek se už nikdy nezmění.

Důkaz: Jelikož síť je acyklická, můžeme postupovat indukcí podle topologického pořadí vrcholů.

Pokud do vrcholu v nevede žádná hrana, vydá výsledek v 0. taktu. V opačném případě do v vedou hrany z nějakých vrcholů $u_1, \ldots, u_k$, kteří leží v topologickém pořadí před v, takže už víme, že vydaly výsledek v taktech $t_1, \ldots, t_k$. Vrchol v tedy musí vydat výsledek v taktu $\max_i t_i + 1$. A jelikož výsledky vrcholů $u_1, \ldots, u_k$ se nikdy nezmění, výsledek vrcholu v také ne. □

Definice: *Časovou složitost* sítě definujeme jako počet jejích neprázdných vrstev. Podobně *prostorovou složitost* položíme rovnu počtu hradel v síti.

Poznámka: *(o aritě hradel)* Kdybychom připustili hradla s libovolně vysokým počtem vstupů, mohli bychom jakýkoliv problém se vstupem délky n a výstupem délky ℓ vyřešit v jedné vrstvě pomocí ℓ kusů n-vstupových hradel. Každému bychom prostě přiřadili funkci, která počítá příslušný bit výsledku ze všech bitů vstupu.

To však není ani realistické, ani pěkné. Jak z toho ven? Přidáme pravidlo, které omezí arity všech hradel nějakou pevnou konstantou, třeba dvojkou. Budeme tedy používat výhradně nulární, unární a binární hradla.

Poznamenejme ještě, že realistický model (byť s trochu jinými vlastnostmi) by vznikl také tehdy, kdybychom místo arity omezili typy funkcí, řekněme na AND, OR a NOT.

Poznámka: *(o uniformitě)* Od běžných výpočetních modelů, jako je třeba RAM, se hradlové sítě liší jednou podstatnou vlastností – každá síť zpracovává výhradně vstupy jedné konkrétní velikosti. Řešením úlohy tedy typicky není jedna síť, ale posloupnost sítí pro jednotlivé velikosti vstupu. Takovým výpočetním modelům se říká *neuniformní*.

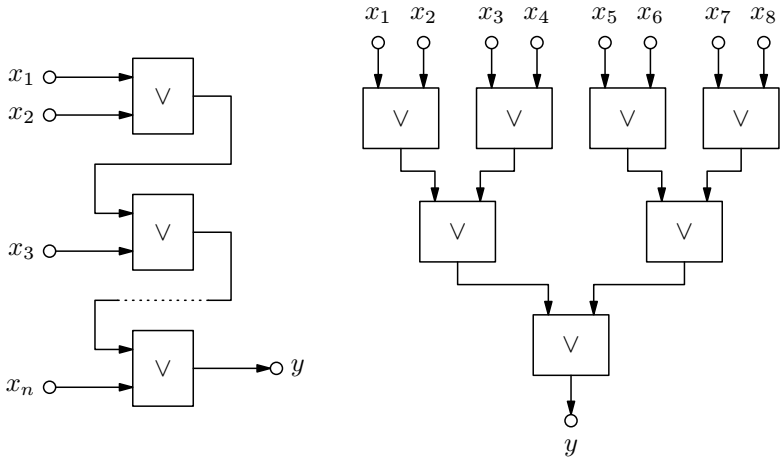
Obvykle budeme chtít, aby existoval algoritmus (klasický, neparalelní), který pro danou velikost vstupu sestrojí příslušnou síť. Tento algoritmus by měl běžet v polynomiálním čase – kdybychom dovolili i pomalejší algoritmy, mohli bychom během konstrukce provádět nějaký náročný předvýpočet a jeho výsledek zabudovat do struktury sítě. To je málokdy žádoucí.

Hledá se jednička

Abychom si nový výpočetní model osahali, zkusme nejprve sestrojit obvod, který zjistí, zda se mezi jeho n vstupy vyskytuje alespoň jedna jednička. To znamená, že počítá n-vstupovou funkci OR.

První řešení: Spočítáme OR prvních dvou vstupů, pak OR výsledku s třetím vstupem, pak se čtvrtým, a tak dále. Každé hradlo závisí na výsledcích všech předchozích, takže výpočet běží striktně sekvenčně. Časová i prostorová složitost činí $\Theta(n)$.

Druhé řešení: Hradla budeme spojovat do dvojic, výsledky těchto dvojic opět do dvojic, a tak dále. Síť se skládá z $\Theta(n)$ hradel v $\Theta(\log n)$ vrstvách, takže má logaritmickou časovou složitost.



Obr. 1.2: Dvě hradlové sítě pro n-bitový OR

Cvičení

1. Jak vypadá všech 16 booleovských funkcí dvou proměnných?
2. Dokažte, že každou booleovskou funkci dvou proměnných lze vyjádřit pomocí hradel AND, OR a NOT. Proto lze každý booleovský obvod s nejvýše dvouvstupovými hradly upravit tak, aby používal pouze tyto tři typy hradel. Jeho hloubka přitom vzroste pouze konstanta-krát.
3. Pokračujme v předchozím cvičení: dokažte, že stačí jediný typ hradla, a to NAND (negovaný AND). Podobně by stačil NOR (negovaný OR). Existuje nějaká další funkce s touto vlastností?
4. Sestavte hradlovou síť ze čtyř hradel NAND (negovaný AND), která počítá XOR dvou bitů.
5. Dokažte, že n-bitový OR nelze spočítat v menší než logaritmické hloubce.
6. Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci s k vstupy lze spočítat booleovským obvodem hloubky $\mathcal{O}(k)$ s $\mathcal{O}(2^k)$ hradly. To speciálně znamená, že pro pevné k

lze booleovské obvody s nejvýše k-vstupovými hradly lze přeložit na obvody s 2-vstupovými hradly s konstantním zpomalením.

7.* Exponenciální velikost obvodu z minulého cvičení je nepříjemná, ale bohužel někdy nutná: Dokažte, že pro žádné k neplatí, že všechny n-vstupové booleovské funkce lze spočítat obvodem s $\mathcal{O}(n^k)$ hradly.

8. Ukažte, jak hradlovou síť s libovolnou abecedou přeložit na ekvivalentní booleovský obvod s nejvýše konstantním zpomalením. Abecedu zakódujte binárně, hradla simulujte booleovskými obvody.

9. Dokažte, že každou booleovskou formuli lze přeložit na booleovský obvod. Velikost obvodu bude přitom lineární v délce formule.

1.2. Sčítání a násobení binárních čísel

Zajímavější úlohou, jejíž paralelizace už nebude tak triviální, je obyčejné sčítání dvojkových čísel. Mějme dvě čísla x a y zapsané ve dvojkové soustavě. Jejich číslice označme $x_{n-1} \dots x_0$ a $y_{n-1} \dots y_0$, přičemž i-tý řád má váhu 2^i.

Školní algoritmus

Ihned se nabízí použít starý dobrý „školní algoritmus sčítání pod sebou“. Ten funguje ve dvojkové soustavě stejně dobře jako v desítkové. Sčítáme čísla zprava doleva, vždy sečteme x_i s y_i a přičteme přenos z nižšího řádu. Tím dostaneme jednu číslici výsledku a přenos do vyššího řádu. Formálně bychom to mohli zapsat třeba takto:

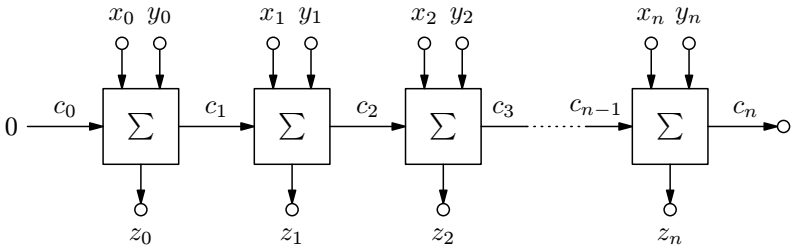
$$z_i = x_i \oplus y_i \oplus c_i,$$

kde z_i je i-tá číslice součtu, $\oplus$ značí operaci XOR (součet modulo 2) a c_i je *přenos* z $(i-1)$-ního řádu do i-tého. Přenos do vyššího řádu nastane tehdy, pokud se nám potkají dvě jedničky pod sebou, nebo když se vyskytne alespoň jedna jednička a k tomu přenos z nižšího řádu. Čili tehdy, jsou-li mezi třemi xorovanými číslicemi alespoň dvě jedničky – k tomu se nám hodí již známý obvod pro majoritu:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_{i+1} &= (x_i \mathbin{\&} y_i) \vee (x_i \mathbin{\&} c_i) \vee (y_i \mathbin{\&} c_i). \end{aligned}$$

O tomto předpisu snadno dokážeme, že funguje (zkuste si to), nicméně pokud podle něj postavíme hradlovou síť, bude poměrně pomalá. Síť si můžeme představit tak, že je složena z nějakých podsítí („krabiček“), které budou mít na vstupu x_i, y_i a c_i a jejich výstupem bude z_i a c_{i+1}:

Každá krabička má sama o sobě konstantní hloubku, ovšem k výpočtu potřebuje přenos vypočítaný předcházející krabičkou. Jednotlivé krabičky proto musí ležet v různých vrstvách sítě. Časová i prostorová složitost sítě jsou tedy lineární, stejně jako u obyčejného algoritmu na RAMu.



Obr. 1.3: Sčítání školním algoritmem

Bloky a jejich chování

To, co nás při sčítání brzdí, je evidentně čekání na přenosy z nižších řádů. Kdybychom přenosy dokázali spočítat rychleji, máme vyhráno – součet už získáme jednoduchým xorováním, které zvládneme paralelně v čase $\Theta(1)$. Uvažujme tedy nad způsobem, jak přenosy spočítat paralelně.

Podívejme se na libovolný *blok* výpočtu školního algoritmu. Tak budeme říkat části sítě, která počítá součet bitů $x_j \ldots x_i$ a $y_j \ldots y_i$ v nějakém intervalu indexů $[i, j]$. Přenos c_{j+1} vystupující z tohoto bloku závisí kromě hodnot sčítanců už pouze na přenosu c_i, který do bloku vstupuje.

Pro konkrétní sčítance se tedy můžeme na blok dívat jako na nějakou funkci, která dostane jednobitový vstup (přenos zespoda) a vydá jednobitový výstup (přenos nahoru). To je milé, neboť takové funkce existují pouze čtyři:

$f(x) = 0$	konstantní **0**, blok *pohlcuje* přenos
$f(x) = 1$	konstantní **1**, blok *vytváří* přenos
$f(x) = x$	identita (značíme <), blok *kopíruje* přenos
$f(x) = \neg x$	negace; ukážeme, že u žádného bloku nenastane

Této funkci budeme říkat *chování bloku.*

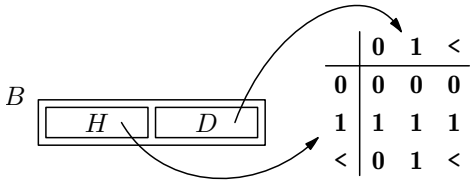
Jednobitové bloky se chovají velice jednoduše:

$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
0	<	<	**1**

Blok prvního druhu vždy předává nulový přenos, ať už do něj vstoupí jakýkoliv – přenos tedy pohlcuje. Poslední blok naopak sám o sobě přenos vytváří, ať dostane cokoliv. Oba bloky prostřední se chovají tak, že samy o sobě žádný přenos nevytvoří, ale pokud do nich nějaký přijde, tak také odejde.

Větší bloky můžeme rozdělit na části a podle chování částí určit, jak se chová celý blok. Mějme blok B složený ze dvou menších podbloků H (horní část) a

D (dolní). Chování celku závisí na chování částí takto:



	0	1	<
0	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**
<	**0**	**1**	**<**

Pokud vyšší blok přenos pohlcuje, pak ať se už nižší blok chová jakkoli, složení obou bloků musí vždy pohlcovat. V prvním řádku tabulky jsou tudíž nuly. Analogicky pokud vyšší blok generuje přenos, tak ten nižší na tom nic nezmění. V druhém řádku tabulky jsou tedy samé jedničky. Zajímavější případ nastává, pokud vyšší blok kopíruje – tehdy záleží čistě na chování nižšího bloku.

Všimněme si, že skládání chování bloků je vlastně úplně obyčejné skládání funkcí. Nyní bychom mohli prohlásit, že budeme počítat nad tříprvkovou abecedou, a že celou tabulku dokážeme spočítat jedním jediným hradlem. Pojďme si přeci jen rozmyslet, jak bychom takovou operaci popsali čistě binárně.

Tři stavy můžeme zakódovat pomocí dvou bitů, říkejme jim třeba p a q. Dvojice (p, q) přitom může nabývat hned čtyř možných hodnot, my dvěma z nich přiřadíme stejný význam:

$$(1, *) = < \qquad (0, 0) = \mathbf{0} \qquad (0, 1) = \mathbf{1}.$$

Kdykoliv $p = 1$, blok kopíruje přenos. Naopak $p = 0$ odpovídá tomu, že blok posílá do vyššího řádu konstantní přenos, a q pak určuje, jaký. Kombinování bloků (skládání funkcí) pak můžeme popsat následovně:

$$p_B = p_H \,\&\, p_D,$$
$$q_B = (\neg p_H \,\&\, q_H) \vee (p_H \,\&\, q_D).$$

Průchod přenosu blokem (dosazení do funkce) bude vypadat takto:

$$c_{j+1} = (p \,\&\, c_i) \vee (\neg p \,\&\, q).$$

Rozmyslete si, že tyto formule odpovídají výše uvedené tabulce.

Paralelní sčítání

Od popisu chování bloků je už jenom krůček k paralelnímu předpovídání přenosů, a tím i k paralelní sčítačce. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že počet bitů vstupních čísel n je mocnina dvojky; jinak vstup doplníme zleva nulami.

Algoritmus bude rozdělen na dvě části:

První část spočítá chování všech *přirozených bloků* – tak budeme říkat blokům, jejichž velikost je mocnina dvojky a pozice je dělitelná velikostí (bloky téže velikosti

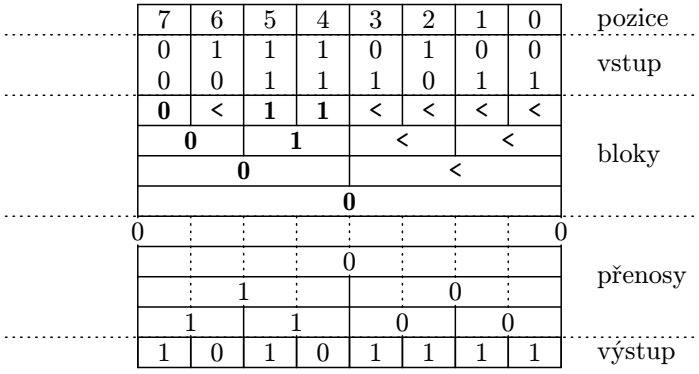
se tedy nepřekrývají). Nejprve v konstantním čase stanovíme chování bloků velikosti 1, ty pak spojíme do dvojic, dvojice zase do dvojic atd., obecně v i-tém kroku spočteme chování všech přirozených bloků velikosti 2^i.

Druhá část pak dopočítá přenosy, a to tak, aby v i-tém kroku byly známy přenosy do řádů dělitelných $2^{\log n - i}$. V nultém kroku známe pouze $c_0 = 0$ a c_n, který spočítáme z c_0 pomocí chování bloku $[0, n]$. V prvním kroku pomocí bloku $[0, n/2]$ dopočítáme $c_{n/2}$, v druhém pomocí $[0, n/4]$ spočítáme $c_{n/4}$ a pomocí $[n/2, 3/4 \cdot n]$ dostaneme $c_{3/4 \cdot n}$, atd. Obecně v i-tém kroku používáme chování bloků velikosti $2^{\log n - i}$. Každý krok přitom zabere konstantní čas.

Celkově bude sčítací síť vypadat takto (viz obr. 1.4):

1. $\Theta(1)$ hladin výpočtu chování bloků velikosti 1.
2. $\Theta(\log n)$ hladin počítajících chování všech přirozených bloků.
3. $\Theta(\log n)$ hladin dopočítávajících přenosy „zahušťováním“.
4. $\Theta(1)$ hladin na samotné sečtení: $\forall i : z_i = x_i \oplus y_i \oplus c_i$.

Algoritmus tedy pracuje v čase $\Theta(\log n)$. Využívá k tomu lineárně mnoho hradel: při výpočtu chování bloků na jednotlivých hladinách počet hradel exponenciálně klesá od n k 1, během zahušťování přenosů naopak exponenciálně stoupá od 1 k n. Obě geometrické řady se sečtou na $\Theta(n)$.

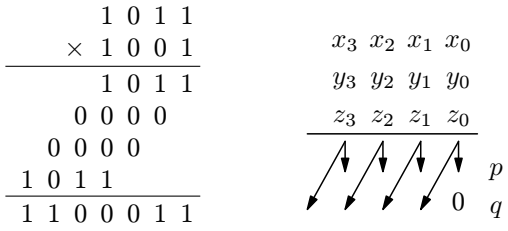


Obr. 1.4: Průběh paralelního sčítání pro $n = 8$

Paralelní násobení

Ještě si rozmysleme, jak rychle by bylo možné čísla násobit. Opět se inspirujeme školním algoritmem: pokud násobíme dvě n-ciferná čísla x a y, uvážíme všech n posunutí čísla x, každé z nich vynásobíme příslušnou číslicí v y a výsledky posčítáme.

Ve dvojkové soustavě je to ještě jednodušší: násobení jednou číslicí je prostý AND. Paralelně tedy vytvoříme všechna posunutí a spočítáme všechny ANDy. To vše stihneme za 1 takt výpočtu.



Obr. 1.5: Školní násobení a kompresor

Zbývá sečíst n čísel, z nichž každé má $\Theta(n)$ bitů. Mohli bychom opět sáhnout po osvědčeném triku: sčítat dvojice čísel, pak dvojice těchto součtů, atd. Taková síť by měla tvar binárního stromu hloubky $\log n$, jehož každý vrchol by obsahoval jednu sčítačku, a na tu, jak víme, postačí $\Theta(\log n)$ hladin. Celý výpočet tedy běží v čase $\Theta(\log^2 n)$.

Jde to ale rychleji, použijeme-li jednoduchý, téměř kouzelnický trik. Sestrojíme *kompresor* – to bude obvod konstantní hloubky, který na vstupu dostane tři čísla a vypočte z nich dvě čísla mající stejný součet jako zadaná trojice.

K čemu je to dobré? Máme-li sečíst n čísel, v konstantním čase dokážeme tento úkol převést na sečtení $\lceil 2/3 \cdot n \rceil$ čísel, to pak opět v konstantním čase na sečtení $\lceil (2/3)^2 \cdot n \rceil$ čísel atd., až nám po $\lceil \log_{3/2} n \rceil = \Theta(\log n)$ krocích zbudou dvě čísla a ta sečteme klasickou sčítačkou. Zbývá vymyslet kompresor.

Konstrukce kompresoru: Označme vstupy kompresoru x, y a z a výstupy p a q. Pro každý řád i spočteme součet $x_i + y_i + z_i$. To je nějaké dvoubitové číslo, takže můžeme jeho nižší bit prohlásit za p_i a vyšší za q_{i+1}. (Viz obrázek 1.5.)

Jinými slovy všechna tři čísla jsme normálně sečetli, ale místo abychom přenosy posílali do vyššího řádu, vytvořili jsme z nich další číslo, které má být k výsledku časem přičteno.

Naše síť pro paralelní násobení tedy pracuje v čase $\Theta(\log n)$ – nejdříve v konstantním čase vytvoříme mezivýsledky, pak použijeme $\Theta(\log n)$ hladin kompresorů konstantní hloubky a nakonec jednu sčítačku hloubky $\Theta(\log n)$.

Jistou vadou na kráse ovšem je, že spotřebujeme $\Theta(n^2)$ hradel. Proto se v praxi používají spíš násobicí sítě odvozené od rychlé Fourierovy transformace. ref

Cvičení

1. Modifikujte sčítací síť, aby odčítala.
2. Sestrojte hradlovou síť hloubky $\mathcal{O}(\log n)$, která porovná dvě n-bitová čísla x a y a vrátí jedničku, pokud $x < y$.
3. Ukažte, jak v logaritmické hloubce otestovat, zda je dvojkové číslo dělitelné šesti.

4.** Pro ctitele teorie automatů: Dokažte, že každý regulární jazyk lze rozpoznávat hradlovou sítí logaritmické hloubky. Ukažte, jak pomocí toho vyřešit všechna předchozí cvičení.

5. Je dána posloupnost n bitů. Jak v logaritmické hloubce spočítat pozici první jedničky?

6.* Sestrojte hradlovou síť logaritmické hloubky, která dostane matici sousednosti neorientovaného grafu a rozhodne, je-li graf souvislý.

1.3. Třídicí sítě

Ještě zkusíme paralelizovat jeden klasický problém, totiž třídění. Budeme k tomu používat *komparátorovou síť* – to je hradlová síť složená z *komparátorů.*

Jeden komparátor umí porovnat dvě hodnoty a rozhodnout, která z nich je větší a která menší. Nevrací však booleovský výsledek jako běžné hradlo, ale má dva výstupy: na jednom z nich vrací menší ze vstupních hodnot a na druhém tu větší.

V našem formalismu hradlových sítí bychom mohli komparátor reprezentovat dvojicí hradel: jedno z nich by počítalo minimum, druhé maximum. Hodnoty, které třídíme, bychom považovali za prvky abecedy. (Komparátorovou síť můžeme také snadno přeložit na booleovský obvod, viz cvičení 4.)

Ještě se dohodněme, že výstupy komparátorů se nikdy nebudou větvit. Každý výstup přivedeme na vstup jiného komparátoru nebo na výstup sítě. Větvení by nám ostatně k ničemu nebylo, protože na výstupu potřebujeme vydat stejný počet hodnot, jako byl na vstupu, a nemáme žádné hradlo, kterým bychom mohli hodnoty slučovat.

Nejprve zkusíme do řeči komparátorových sítí přeložit *bublinkové třídění.* Z něj získáme obvod na obrázku 1.6 (šipky představují jednotlivé komparátory). Toto nakreslení ovšem poněkud klame – pokud síť necháme počítat, mnohá porovnání budou probíhat paralelně. Skutečný průběh výpočtu znázorňuje obrázek 1.7, na němž jsme všechny operace prováděné současně znázornili vedle sebe. Ihned vidíme, že paralelní bublinkové třídění pracuje v čase $\Theta(n)$ a potřebuje kvadratický počet komparátorů.

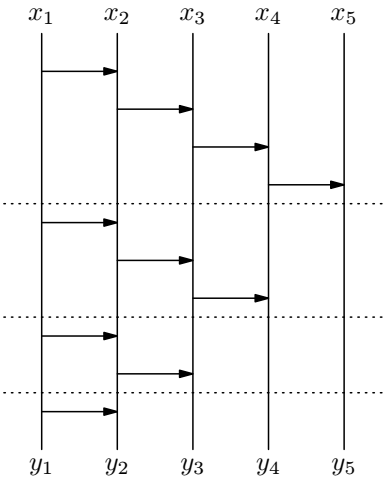
Bitonické třídění

Nyní vybudujeme rychlejší třídicí algoritmus. Půjdeme na něj menší oklikou. Nejdříve vymyslíme síť, která bude umět třídit jenom něco – totiž bitonické posloupnosti. Z ní pak sestrojíme obecné třídění. Bez újmy na obecnosti přitom budeme předpokládat, že každé dva prvky na vstupu jsou navzájem různé a že velikost vstupu je mocnina dvojky.

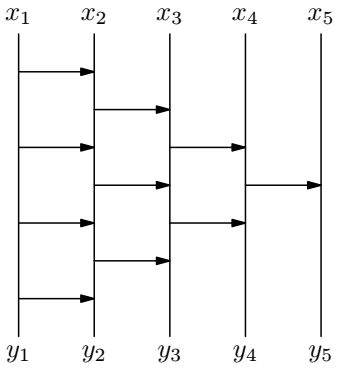
Definice: Posloupnost $x_0, \ldots, x_{n-1}$ je *čistě bitonická,* pokud ji můžeme rozdělit na nějaké pozici $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tak, že prvky $x_0, \ldots, x_k$ tvoří rostoucí poslopnost, zatímco prvky $x_k, \ldots, x_{n-1}$ tvoří posloupnost klesající.

Definice: Posloupnost $x_0, \ldots, x_{n-1}$ je *bitonická*, jestliže ji lze získat rotací (cyklickým posunutím) nějaké čistě bitonické posloupnosti. Tedy pokud existuje $0 \leq j < n$ takové, že posloupnost $x_j, x_{(j+1) \bmod n}, \ldots, x_{(j+n-1) \bmod n}$ je čistě bitonická.

Definice: *Separátor řádu n* je komparátorová síť S_n se vstupy $x_0, \ldots, x_{n-1}$ a výstupy $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Dostane-li na vstupu bitonickou posloupnost, vydá na výstup její permutaci s následujícími vlastnostmi:



Obr. 1.6: Bublinkové třídění



Obr. 1.7: Skutečný průběh výpočtu

- $y_0, \ldots, y_{n/2-1}$ a $y_{n/2}, \ldots, y_{n-1}$ jsou bitonické posloupnosti;
- $y_i < y_j$, kdykoliv $0 \leq i < n/2 \leq j < n$.

Jinak řečeno, separátor rozdělí bitonickou posloupnost na dvě poloviční a navíc jsou všechny prvky v první polovině menší než všechny v té druhé.

Lemma: Pro každé sudé n existuje separátor S_n konstantní hloubky, složený z $\Theta(n)$ komparátorů.

Důkaz tohoto lemmatu si necháme na konec. Nejprve předvedeme, k čemu jsou separátory dobré.

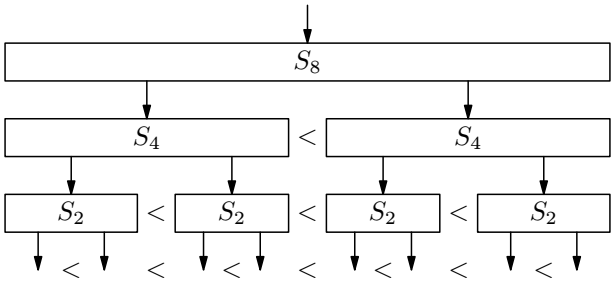
Definice: *Bitonická třídička řádu n* je komparátorová síť B_n. Dostane-li na vstupu bitonickou posloupnost délky n, vydá ji setříděnou.

Lemma: Pro libovolné $n = 2^k$ existuje bitonická třídička B_n hloubky $\Theta(\log n)$ s $\Theta(n \log n)$ komparátory.

Důkaz: Konstrukce bitonické třídičky je snadná: nejprve separátorem S_n zadanou bitonickou posloupnost rozdělíme na dvě bitonické posloupnosti délky $n/2$, každou z nich pak separátorem $S_{n/2}$ na dvě části délky $n/4$, atd., až získáme jednoprvkové posloupnosti ve správném pořadí. Celkem použijeme $\log n$ hladin složených z n separátorů, každá hladina má přitom konstantní hloubku. □

Bitonické třídičky nám nyní pomohou ke konstrukci třídičky pro obecné posloupnosti. Ta bude založena na třídění sléváním – nejprve se tedy musíme naučit slít dvě rostoucí posloupnosti do jedné.

Definice: *Slévačka řádu n* je komparátorová síť M_n s $2 \times n$ vstupy a $2n$ výstupy. Dostane-li dvě setříděné posloupnosti délky n, vydá setříděnou posloupnost vzniklou jejich slitím.



Obr. 1.8: Bitonická třidička B_8

Lemma: Pro $n = 2^k$ existuje slévačka M_n hloubky $\Theta(\log n)$ s $\Theta(n \log n)$ komparátory.

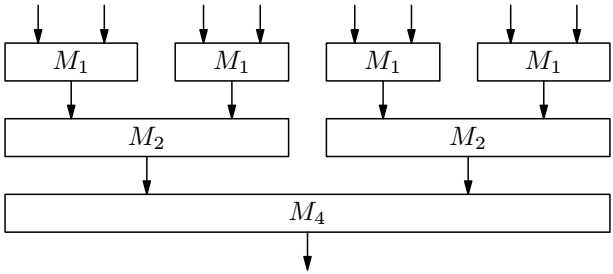
Důkaz: Stačí jednu vstupní posloupnost obrátit a „přilepit" za tu druhou. Tím vznikne bitonická posloupnost, již setřídíme bitonickou třidičkou B_{2n}. □

Definice: *Třídicí síť řádu* n je komparátorová síť T_n s n vstupy a n výstupy, která pro každý vstup vydá jeho setříděnou permutaci.

Lemma: Pro $n = 2^k$ existuje třídicí síť T_n hloubky $\Theta(\log^2 n)$ složená z $\Theta(n \log^2 n)$ komparátorů.

Důkaz: Síť bude třídit sléváním. Vstup rozdělíme na n jednoprvkových posloupností. Ty jsou jistě setříděné, takže je slévačkami M_1 můžeme slít do dvouprvkových setříděných posloupností. Na ty pak aplikujeme slévačky M_2, M_4, …, $M_{n/2}$, až všechny části slijeme do jedné, setříděné.

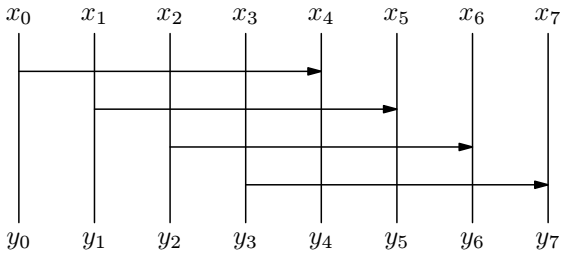
Celkem provedeme $\log n$ kroků slévání, i-tý z nich obsahuje slévačky M_{2^i} a ty, jak už víme, mají hloubku $\Theta(i)$. Celkový počet vrstev tedy činí $\Theta(1 + 2 + 3 + \ldots + \log n) = \Theta(\log^2 n)$. Každý krok přitom potřebuje $\Theta(n \log n)$ komparátorů, což dává celkem $\Theta(n \log^2 n)$ komparátorů. □



Obr. 1.9: Třidička T_8

Konstrukce separátoru

Zbývá dokázat, že existují slíbené separátory konstantní hloubky. Vypadají



Obr. 1.10: Separátor S_8

překvapivě jednoduše: pro $i = 0, \ldots, n/2 - 1$ zapojíme komparátor se vstupy x_i, $x_{i+n/2}$, jehož minimum přivedeme na y_i a maximum na $y_{i+n/2}$.

Proč separátor separuje? Nejprve předpokládejme, že vstupem je čistě bitonická posloupnost. Označme m polohu maxima této posloupnosti; maximum bez újmy na obecnosti leží v první polovině (jinak celý důkaz provedeme „zrcadlově“). Označme dále k nejmenší index, pro který komparátor zapojený mezi x_k a $x_{n/2+k}$ hodnoty prohodí, tedy $k = \min\{i \mid x_i > x_{n/2+i}\}$.

Jelikož maximum je jedinečné, musí platit $x_m > x_{n/2+m}$, takže k existuje a navíc platí $0 \leq k \leq m < n/2$. Situace tedy odpovídá obrázku 1.11.

Nyní nahlédneme, že pro $i = k, \ldots, n/2 - 1$ už komparátory vždy prohazují: Platí $x_i > x_{n/2+k}$ (pro $i \geq m$ je to vidět přímo, pro $i < m$ je $x_i \geq x_k > x_{n/2+k}$). Ovšem $x_{n/2+k} \geq x_{n/2+i}$, protože zbytek posloupnosti je klesající.

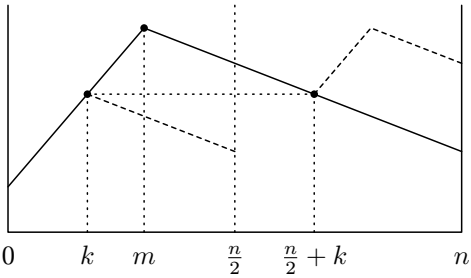
Separátor se tedy chová velice jednoduše: levá polovina výstupu vznikne slepením rostoucího úseku $x_0, \ldots, x_{k-1}$ s klesajícím úsekem $x_{n/2+k}, \ldots, x_{n-1}$; pravou polovinu tvoří spojení klesajícího úseku $x_{n/2}, \ldots, x_{n/2+k-1}$, rostoucího úseku $x_k, \ldots, x_{m-1}$ a klesajícího úseku $x_m, \ldots, x_{n/2-1}$.

Snadno ověříme, že obě poloviny jsou bitonické: ta první je dokonce čistě bitonická, druhou lze na čistě bitonickou zrotovat díky tomu, že $x_{n/2-1} > x_{n/2}$.

Zbývá dokázat, že levá polovina je menší než pravá. Zdá se to být zřejmé z obrázku: křivku rozkrojíme vodorovnou tečkovanou linkou a části přeskladáme. Jenže nesmíme zapomínat, že x_k a $x_{n/2+k}$ jsou různé prvky, takže tečkovaná linka není ve skutečnosti vodorovná.

Proveďme podobnou úvahu precizně: Levou polovinu rozdělíme na rostoucí část $L_< = x_0, \ldots, x_{k-1}$ a klesající část $L_> = x_{n/2+k}, \ldots, x_{n-1}$; podobně pravou na $P_< = x_k, \ldots, x_{m-1}$ a $P_> = x_m, \ldots, x_{n/2+k-1}$ (ve výstupu prvky leží v jiném pořadí, ale to nevadí). Tyto části nyní porovnáme:

- $L_< < P_<$: obě části původně tvořily jeden společný rostoucí úsek;
- $L_< < P_>$: $\max L_< = x_{k-1} < x_{n/2+k-1} = \min P_>$ (kdyby neplatila prostřední nerovnost, mohli bychom snížit k);
- $L_> < P_<$: $\max L_> = x_{n/2+k} < x_k = \min P_<$;
- $L_> < P_>$: obě části původně tvořily jeden společný klesající úsek.



Obr. 1.11: Ilustrace činnosti separátoru

Doplňme, co se stane, pokud vstup není čistě bitonický. Zde využijeme toho, že separátor je symetrický, tudíž zrotujeme-li jeho vstup o p pozic, dostaneme o p pozic zrotované i obě poloviny výstupu. Podle definice ovšem pro každou bitonickou posloupnost existuje její rotace, která je čistě bitonická, a pro níž, jak už víme, separátor funguje. Takže pro nečistou bitonickou posloupnost musí vydat výsledek pouze zrotovaný, což na jeho správnosti nic nemění. □

Shrnutí

Nalezli jsme paralelní třídicí algoritmus o časové složitosti $\Theta(\log^2 n)$, který využívá $\Theta(n \log^2 n)$ komparátorů. Dodejme, že jsou známé i třídicí sítě hloubky $\Theta(\log n)$, ale jejich konstrukce je mnohem komplikovanější a dává obrovské multiplikativní konstanty, které brání praktickému použití.

Pomocí dolního odhadu složitosti třídění navíc můžeme snadno dokázat, že logaritmický počet hladin je nejnižší možný. Máme-li totiž libovolnou třídicí síť hloubky h, můžeme ji simulovat po hladinách a získat tak sekvenční třídicí algoritmus. Jelikož na každé hladině může ležet nejvýše $n/2$ komparátorů, náš algoritmus provede maximálně $hn/2$ porovnání. Už jsme nicméně dokázali, že pro každý třídicí algoritmus existují vstupy, na kterých porovná $\Omega(n \log n)$-krát. Proto $h = \Omega(\log n)$. ref

Cvičení

1. Jak by vypadala komparátorová síť pro InsertSort (třídění vkládáním)? Jak se bude její průběh výpočtu lišit od BubbleSortu?
2. Navrhněte komparátorovou síť pro hledání maxima.
3. Navrhněte komparátorovou síť pro zatřídění prvku do setříděné posloupnosti.
4. Ukažte, jak komparátorovou síť přeložit na booleovský obvod. Každý prvek abecedy Σ reprezentujeme číslem o $b = \lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$ bitech a pomocí cvičení 1.2.2 sestrojíme komparátory o $\mathcal{O}(\log b)$ hladinách.

5.* Nula-jedničkový princip říká, že pro ověření, že komparátorová síť třídí všechny vstupy, stačí ověřit, že setřídí všechny posloupnosti nul a jedniček.

6.* Batcherovo třídění: Stejné složitosti paralelního třídění lze také dosáhnout následujícím rekurzivním algoritmem pro slévání setříděných posloupností:

Procedura MERGE

Vstup: Setříděné posloupnosti $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ a $(y_0, \ldots, y_{n-1})$

1. Je-li $n \leq 2$, vyřešíme triviálně.
2. $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \leftarrow \text{MERGE}((x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}), (y_0, y_2, \ldots, y_{n-2}))$
3. $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \leftarrow \text{MERGE}((x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}), (y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}))$

Výstup: $(a_0, \min(a_1, b_0), \max(a_1, b_0), \min(a_2, b_1), \max(a_2, b_1), \ldots, b_{n-1})$

Pomocí předchozího cvičení dokažte, že tato procedura funguje.