Přednáška 5, 31. října 2014

Dvě základní limity. Nechť $\alpha, q \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \ldots \quad \alpha > 0 \\ 1 & \ldots \quad \alpha = 0 \\ 0 & \ldots \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \ldots \quad q > 1 \\ 1 & \ldots \quad q = 1 \\ 0 & \ldots \quad -1 < q < 1 \\ \text{neexistuje} & \ldots \quad q \le -1\ . \end{cases}$$

Ponecháváme jako úlohu.

Tři důležité věty o posloupnostech. Připomeňme si, že jako monotónní posloupnost označujeme neklesající nebo nerostoucí posloupnost.

Věta (o monotónní podposloupnosti). *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots$, že $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \ldots$, a že v k začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \cdots < k_j$, že $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \cdots \le a_{k_j} > a_n$ pro každé $n > k_j$. V prvním případě tedy členem a_k začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit. Zřejmě v každém indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z k a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako $k_1 > 0$ definujeme její poslední index. Pokud v indexu $k_1 + 1$ začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v k_1+1 špatná posloupnost a jako $k_2 > k_1$ definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože (a_n) má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy $1 \le k_1 < k_2 < \ldots$. Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost $a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots$ a jsme zase hotovi. $\square$

Úloha. *Nechť $l = (k-1)^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte postupem z předchozího důkazu, že každá l-tice $(a_1, a_2, \dots, a_l) \subset \mathbb{R}$ obsahuje podposloupnost délky k, která je monotónní. (Návod: když každému $n \in \{1, 2, \dots, l\}$ přiřadíme dvojici (r, s), kde r je délka nejdelší neklesající podposloupnosti začínající v a_n a obdobně s pro nerostoucí, pak toto zobrazení je ... .)*

Výsledek se podle jeho objevitelů, maďarských matematiků *Paula (Pála) Erdőse (1913–1996)* a *Georga (Györgyho) Szekerese (1911–2005)*, nazývá *Erdősovo–Szekeresovo lemma*. Úložka: dá se při pevném k hodnota $(k-1)^2+1$ zmenšit?

Věta (Bolzanova–Weierstrassova). *Každá omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zjevně omezená. Podle tvrzení o limitě monotónní posloupnosti je (b_n) konvergentní. $\square$

Úloha. *Dokažte B.–W. větu jiným způsobem, bez použití věty o monotónní podposloupnosti, za pomoci Cantorovy věty o vnořených intervalech. (Návod: když $(a_n) \subset [a, b]$, dělte $[a, b]$ opakovaně napůl tak, že vzniklý interval stále obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n).)*

Věta se jmenuje podle pražského italsko–německého matematika, kněze a filosofa *Bernarda Bolzana (1781–1848)* a německého matematika *Karla Weierstrasse (1815–1897)*. Lehce se rozšíří na neomezené posloupnosti: každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost s vlastní nebo nevlastní limitou.

Důležitá definice. Jak jsem už zmínil ve 3. přednášce, posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je *cauchyovská* (též *Cauchyova*), pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon\ .$$

Členy posloupnosti se tedy k sobě vzájemně (v tomto přesném smyslu) neomezeně blíží.

Věta (Cauchyho podmínka). *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská, právě když je konvergentní.*

Důkaz. Nejprve $\Leftarrow$. Když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Podle Δ-ové nerovnosti,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon\ ,$$

a (a_n) je tedy cauchyovská.

Nyní $\Rightarrow$. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ buď cauchyovská. Je tedy omezená. (Nechť $\varepsilon = 1$ a n_0 splňuje, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$. Pak položíme $m = n_0 + 1$ a pro každé n je $|a_n| \le \max(\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0+1}|\})$.) Podle B.–W. věty má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{k_n}), $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ nyní vezmeme n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ a i $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Pro každé $n > n_0$ potom máme

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < 2\varepsilon$$

(první $|\cdot| < \varepsilon$ díky cauchyovskosti neboť $k_n \ge n$ a druhá $|\cdot| < \varepsilon$ díky $a_{k_n} \to a$) a tedy a je limitou celé posloupnosti, $\lim a_n = a$. $\square$

Nevlastní limity jsou v rozporu s cauchyovskostí: je jasné, že když $\lim a_n = \pm\infty$, pak (a_n) není Cauchyova. Cauchyovskost posloupnosti je důležitá vlastnost, která umožňuje zkoumat úplnost (nepřítomnost „děr“) daného prostoru i za situace, kdy nemáme k dispozici uspořádání jako v $\mathbb{R}$, třeba v případě komplexních čísel $\mathbb{C}$ vybavených obvyklou vzdáleností $|z_1 - z_2|$. Ve světě zlomků $\mathbb{Q}$ tato věta pochopitelně neplatí: když $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ má za limitu $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tak je posloupnost (a_n) cauchyovská, ale nemá ve $\mathbb{Q}$ limitu.

Aritmetika nekonečen. Jak jsem slíbil, tvrzení o aritmetice limit nyní rozšíříme na nevlastní limity. *Rozšířená reálná osa* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na $\mathbb{R}^*$ definujeme následovně:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}:\ -\infty < a < +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \ne -\infty:\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \ne +\infty:\ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0:\ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0:\ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}:\ \frac{a}{\pm\infty} = 0\ .
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0}\ \text{ pro }\ a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy*.

Tvrzení (rozšířená aritmetika limit). *Nechť* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. *Potom*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, *je-li tento součet definován,*
2. $\lim(a_n b_n) = ab$, *je-li tento součin definován a*
3. *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$, *pak* $\lim(a_n/b_n) = a/b$, *je-li tento podíl definován.*

Důkaz je ponechán jako úloha. Vlastně toto tvrzení zdůvodňuje aritmetiku nekonečen: pravidlo jako například $\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0 : \ a(-\infty) = +\infty$ je jen přepisem výsledku, že pro každé dvě posloupnosti čísel $(a_n), (b_n)$ s $\lim a_n = a < 0$ a $\lim b_n = -\infty$ platí, že $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

Zmiňme, že neurčitý výraz je i

$$1^{\pm\infty}$$

(v tom se občas chybuje): když $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ s $\lim a_n = 1$ a např. $\lim b_n = +\infty$, pak o limitě posloupnosti $(a_n^{b_n})$ lze říci jen to, že buď neexistuje nebo to je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$ (vymyslete příslušné příklady). Ale (dotaz na přednášce) snadno se vidí, že $0^{+\infty} = 0$ a, obecněji, $a^{+\infty} = 0$ pro $0 \leq a < 1$ a $a^{+\infty} = +\infty$ pro $a > 1$. Podobně $a^{-\infty} = +\infty$ pro $0 < a < 1$ a $a^{-\infty} = 0$ pro $a > 1$. Ale $0^{-\infty}$ je neurčitý výraz!

Je zajímavé, že některé neurčité výrazy jsou neurčitější než jiné. Třeba

$$\frac{0}{0} = \text{úplně cokoli, ale pro } a \neq 0 \text{ je } \frac{a}{0} = +\infty \text{ nebo } -\infty \text{ nebo neexistuje}\ .$$

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^*$ se totiž lehce najdou posloupnosti $(a_n), (b_n)$, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim(a_n/b_n) = \alpha$, popř. neexistuje. Pro druhý neurčitý výraz však máme jen tři uvedené možnosti.

Limes inferior a limes superior. Podle rozšířené B.–W. věty má každá posloupnost (a_n) konvergentní podposloupnost nebo podposloupnost jdoucí do $-\infty$ nebo jdoucí do $+\infty$. Každá (a_n) má tedy alespoň jeden *hromadný bod* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, což je vlastní nebo nevlastní limita nějaké podposloupnosti. Označíme

$$\mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\} \ (\neq \emptyset)\ .$$

Snadno se vidí, že H má největší i nejmenší prvek. (Když (a_n) není shora omezená, pak je $+\infty \in H$ největším prvkem. Je-li (a_n) shora omezená číslem $c \in \mathbb{R}$, je c zřejmě i horní mez pro H. Nechť $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$. Podle vlastnosti suprema a definice množiny H pro každé $n \in \mathbb{N}$ má (a_n) podposloupnost s limitou v intervalu $[\alpha - 1/n, \alpha]$. Z těchto podposloupností pro $n = 1, 2, \dots$ vybereme vhodně členy $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots$, že $k_1 < k_2 < \dots$ a pro každé n je $a_{k_n} \in [\alpha - 2/n, \alpha]$. Tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je α. Tedy $\alpha = \sup(H) \in H$ a H má největší prvek. Podobně se ukáže, že H má nejmenší prvek.) Definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max(H)\ .$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity $\liminf$ a $\limsup$ vždy existují a jsou definované pro každou posloupnost.

Úloha. *Sestrojte posloupnost reálných čísel, pro niž $H = \mathbb{R}^*$, to jest každé reálné číslo, $-\infty$ i $+\infty$ je její hromadný bod.*

Příklad. Posloupnost (a_n) s $a_n = 1/n + n^{1+(-1)^n}$ má $\liminf a_n = 1$ a $\limsup a_n = +\infty$.

Uvedeme druhou, ekvivalentní, definici $\liminf$ a $\limsup$. Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme dvě nové posloupnosti (b_n) a (c_n),

$$b_n = \sup(\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \quad \text{a} \quad c_n = \inf(\{a_n, a_{n+1}, \dots\})\ .$$

Je-li (a_n) shora neomezená, máme (resp. definujeme) $b_1 = b_2 = \cdots = +\infty$, jinak je $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podobně $c_1 = c_2 = \cdots = -\infty$ je-li (c_n) zdola neomezená, jinak je $c_1 \leq c_2 \leq \dots$ neklesající posloupnost reálných čísel. V prvním případě definujeme $\lim b_n = +\infty$, ve druhém $\lim b_n$ existuje vlastní či je $-\infty$ podle tvrzení o limitě monotónní posloupnosti. Podobně klademe $\lim c_n = -\infty$ v prvním případě, a jinak je $\lim c_n$ vlastní či $+\infty$.

Tvrzení (o liminf a limsup). *Limita* $\lim a_n$ *existuje (vlastní či nevlastní), právě když* $\liminf a_n = \limsup a_n$*, pak* $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$*. Dále*

$$\limsup a_n = \lim b_n \quad \textit{a} \quad \liminf a_n = \lim c_n\ .$$

Důkaz. Když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ existuje, pak podle tvrzení o limitě podposloupnosti má každá podposloupnost limitu a, tedy $H = \{a\}$, $\liminf a_n = \min(H) = a = \max(H) = \limsup a_n$. Předpokládejme naopak, že $\lim a_n$ neexistuje. Podle rozšířené B.-W. věty má (a_n) podposloupnost s limitou $a \in \mathbb{R}^*$. Protože a není limitou celé posloupnosti, pro $a \in \mathbb{R}$ existuje $\varepsilon > 0$, že mimo interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). Pokud $a = +\infty$, existuje $\varepsilon > 0$, že mimo interval $(1/\varepsilon, +\infty)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). Podobně pro $a = -\infty$ s intervalem $(-\infty, -1/\varepsilon)$. Tyto členy posloupnosti (a_n) tvoří její podposloupnost (d_n). Posloupnost (d_n) má podle rozšířené B.-W. věty podposloupnost s limitou $b \in \mathbb{R}^*$. Podle tvrzení o limitě a uspořádání i b leží mimo interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, respektive mimo $(1/\varepsilon, +\infty)$, respektive mimo $(-\infty, -1/\varepsilon)$. Tedy $a \neq b$ a $a, b \in H$, a proto i nejmenší a největší prvek H, $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$, se liší.

Dokážu, že $\lim b_n = \limsup a_n$, důkaz pro $\lim c_n = \liminf a_n$ je stejný. Je-li (a_n) shora neomezená pak jistě $\lim b_n = +\infty$ i $\limsup a_n = +\infty$. Nechť je (a_n) shora omezená a (d_n) je její podposloupnost s limitou rovnou $\limsup a_n$. Protože b_n je horní mezí skoro všech d_n (s možnou výjimkou $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$), máme (podle tvrzení o limitě a uspořádání) pro každé n i $b_n \geq \limsup a_n$ a tedy i $\lim b_n \geq \limsup a_n$. Na druhou stranu z definice čísel b_n snadno sestrojím podposloupnost (a_{k_n}) posloupnosti (a_n), že pro každé n je $b_n \geq a_{k_n} > b_n - 1/n$. Pak podle věty o dvou policajtech je $\lim b_n = \lim a_{k_n}$, tedy $\lim b_n \in H$ a $\lim b_n \leq \limsup a_n$. Celkem tedy $\lim b_n = \limsup a_n$. □

Jak se dá představit $\limsup a_n$ (a podobně $\liminf a_n$)? Z $+\infty$ posouváme dolů píst, dokud nenarazí na členy posloupnosti (a_n) (nedá-li se píst nikam umístit, je $\limsup a_n = +\infty$). Pak se nachází v poloze b_1. Smažeme a_1, čímž se mohlo uvolnit místo, a znovu posouváme dolů píst, dokud nenarazí na zbylé členy posloupnosti. Nachází se v poloze b_2. Smažeme a_2 a posouváme dolů píst. A tak postupujeme dále. Mezní poloha, k níž se píst přibližuje, je $\limsup a_n$. Jiný možný pohled na $\limsup a_n$ je lehkoatletický. Pro shora omezenou posloupnost (a_n) řekneme, že přeskočí laťku ve výšce $l \in \mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon > 0$ pro nekonečně mnoho n je $a_n > l - \varepsilon$. Pak $\limsup a_n$ je přesně nejvyšší laťka, kterou (a_n) přeskočí.