Přednáška 1, 3. října 2014

Přednáška z Matematické analýzy I má pět částí:

1. Úvod, opakování, reálná čísla.
2. Limita nekonečné posloupnosti.
3. Nekonečné řady.
4. Limita funkce v bodě a spojitost funkce.
5. Derivace funkce.

Část 1: úvod, opakování, reálná čísla

Paradoxy nekonečna. Co analyzuje Matematická analýza? Nekonečné procesy a operace. Třeba nekonečné součty (kterým se spíše říká nekonečné řady). Například

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$$

a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

nebo

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

a tudíž i

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\ .$$

Úloha: *dokažte si první dvě rovnosti (první asi znáte ze střední školy) a ze třetí rovnosti (jejíž důkaz je obtížný) zkuste odvodit rovnost čtvrtou.*

Ale jak vlastně těch nekonečně mnoho čísel v uvedených příkladech sčítáme? Řadu čteme v uvedeném pořadí (zleva doprava) a vytváříme posloupnost částečných součtů (což jsou obyčejné konečné součty), například ve čtvrté rovnosti to je posloupnost

$$(1,\ 1-\tfrac{1}{4},\ 1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9},\ 1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16},\ \dots)=(1,\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{31}{36},\ \tfrac{115}{144},\ \dots)\ ,$$

a když se členy této posloupnosti neomezeně přibližují k nějakému číslu α, ve čtvrtém příkladu to nastává pro $\alpha = \pi^2/12$, definujeme součet dané nekonečné řady jako toto α. Čtyři uvedené příklady jsou hezké v tom, že v nich vlastně na pořadí čtení řady vůbec nezáleží. Dá se totiž dokázat:

> V uvedených čtyřech nekonečných řadách žádné zpřeházení sčítanců nezmění součet řady.

Znamená to tedy, například, že když vezmeme jakoukoli nekonečnou posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, jejíž členy a_k nějak probíhají převrácené čtverce (tj. každý člen je tvaru $a_k = 1/n^2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a každé číslo $1/n^2$ se v posloupnosti objeví právě jednou), pak se posloupnost částečných součtů

$$(a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \dots)$$

neomezeně přibližuje vždy k jednomu a témuž číslu $\pi^2/6$.

Může se ale stát, že zpřeházení sčítanců součet nekonečné řady změní? Může, nastává to třeba pro

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \log 2$$

nebo pro

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(důkazy těchto dvou rovností nejsou snadné, ale minimálně ta první bude na konci semestru v naší moci). Jak ukázal *Bernhard Riemann (1826–1866)*, u těchto dvou nekonečných řad lze zpřeházením sčítanců součet libovolně změnit. Přesně to znamená, že, například, pro každé reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ (nebo i $\alpha = -\infty$ či $\alpha = +\infty$) existuje zpřeházení sčítanců v první řadě, tj. posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, jejíž členy a_k nějak probíhají čísla $1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots$, že se částečné součty $(a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$ neomezeně přibližují k zadanému číslu α. (Nebo lze zpřeházením vyrobit řadu bez součtu, jejíž posloupnost částečných součtů se chová chaoticky a k ničemu se neblíží.)

Pro první čtyři řady tedy při sčítání platí nekonečný komutativní zákon, ale poslední dvě řady tento zákon porušují. Jak to s ním u nekonečných řad přesně je se dozvíme ve třetí části přednášky. Uvedu ale jestě jeden příklad, který ukazuje, že nekonečné řady mohou porušovat i asociativní zákon sčítání. Když v libovolné obdélníkové tabulce, jejíž položky jsou čísla, sečteme položky v každém řádku a tyto řádkové součty pak sečteme, dostaneme stejný výsledek, jako když totéž provedeme se sloupci — výsledek je prostě součet všech položek v celé tabulce. Například v následující 3×3 tabulce jsou řádkové součty $-2, 6$ a 2, sečteno dává 6, totéž jako součet sloupcových součtů $3, 12$ a -9:

1	5	-8	-2
2	4	0	6
0	3	-1	2
3	12	-9	$6 \setminus 6$

Uvažme ale tabulku, která je nekonečná (řádky i sloupce jsou očíslovány přirozenými čísly $1, 2, \ldots$) a která má na hlavní diagonále číslo 1, na diagonále nad ní číslo -1, a všude jinde nuly:

1	-1	0	0	0	$\ldots$	0
0	1	-1	0	0	$\ldots$	0
0	0	1	-1	0	$\ldots$	0
0	0	0	1	-1	$\ldots$	0
0	0	0	0	1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	0	0	0	0	$\ldots$	$1 \setminus 0$

Zde je každý řádkový součet nula a jejich součet je rovněž 0, první sloupcový součet ale je 1 a protože všechny další už jsou nulové, je součet sloupcových součtů roven 1. Sčítání přes řádky tedy u nekonečných tabulek může dát jiný výsledek než sčítání přes sloupce, $0 \neq 1$. Navíc jsou všechny uvažované součty fakticky konečné, kromě nul vždy sčítáme nanejvýš dva nenulové sčítance, což činí tento paradox ještě více znepokojivým. Asociativní zákon tedy obecně pro nekonečné součty neplatí — po přeskupení se součet může změnit (což se u konečných součtů nikdy nestane). I k tomuto paradoxu se vrátíme ve třetí části přednášky.

Co je to funkce? Matematická, nikoli politická! Stručně si to teď zopakujeme — z názvů částí přednášky je jasné, že to pro nás bude důležitý pojem. Jsou-li M a N nějaké množiny (konečné nebo nekonečné), jejich *kartézský součin* $M \times N$ je další množina

$$M \times N = \{(a, b) \mid a \in M, b \in N\}$$

sestávající přesně z těch uspořádaných dvojic (a,b), že a probíhá prvky první množiny M a b probíhá prvky druhé množiny N. *Binární relace* R *mezi* M *a* N je každá podmnožina R tohoto kartézského součinu,

$$R \subset M \times N \; .$$

Podobně se definují kartézské součiny více množin a relace s vyšší aritou (ternární, kvaternární, ...), mezi více než dvěma množinami. Důležité typy binárních relací jsou (částečná) uspořádání a relace ekvivalence, ale v analýze jsou nejdůležitější funkce. Řekneme, že R je *funkce (jiný termín je* zobrazení*) z* M *do* N, pokud

$$\forall a \in M \; \exists! b \in N : \; (a,b) \in R$$

— pro každý prvek a z M existuje právě jeden prvek b z N, že dvojice (a,b) leží v R. Nestane se tedy, že by nějaký $a \in M$ neměl přiřazen žádný prvek z N, ani že by měl přiřazen dva či více prvků z N. Funkce značíme obvykle f $(g,\, h,\, \dots)$ a místo $f \subset M \times N$ a $(a,b) \in f$ se používá značení

$$f : \; M \to N \;\text{ a }\; f(a) = b \; .$$

Prvek a je *vzor* prvku b v zobrazení f a naopak b je *obraz* a. Množině M se říká *definiční obor (funkce* f*)* a N je *obor hodnot*.

Termín „posloupnost“ znamená rovněž funkci, s definičním oborem $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Takže $(a_1, a_2, \dots)$ s $a_n \in \mathbb{R}$ je zobrazení $a : \; \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kde místo $a(n)$ je zažité značení a_n. Funkce v množinovém pojetí se rovná svému grafu, například funkce cosinus, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo i $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, je

$$\cos = \{(x, \cos(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; .$$

V analýze je funkce obvykle zadána vzorcem či formulí. Někdy je pak zapotřebí určit, jaký je přesně její definiční obor, protože pro některé numerické hodnoty nemusí být formule definovaná, třeba pro nulu ve jmenovateli nebo pro záporný argument logaritmu. Například

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

není úplně správný zápis funce (i když s určitou dávkou dobré vůle ho lze přijmout), neboť hodnoty $f(\sqrt{3})$ a $f(-\sqrt{3})$ vedou na dělení nulou a nejsou definované. Správný je zápis

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} : \; \mathbb{R} \backslash \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \to \mathbb{R} \; .$$

Funkce $f : M \to N$ je *prostá* (synonymum: *injektivní*), když $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Jinými slovy, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Injektivní zobrazení tedy nikdy neposílá dva různé prvky na týž prvek. Řekneme, že zobrazení $f : M \to N$ je *zobrazení na* (synonymum: *surjektivní*), když $\forall y \in N \ \exists x \in M : f(x) = y$, jinými slovy, každý prvek v N má v f alespoň jeden vzor. *Bijektivní* (synonymum: *vzájemně jednoznačné*) zobrazení, krátce *bijekce*, je to, jež má obě vlastnosti, je prosté i na. Bijekce tedy páruje dohromady prvky v M s prvky v N tak, že každý prvek M i N se vyskytuje v právě jednom páru.

Úloha: *dokažte, že pro konečnou množinu M každé zobrazení $f : M \to M$, které je injektivní, už musí být na, a naopak.*

Pro nekonečnou M to ale nemusí platit. Například $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, je prosté zobrazení, které není surjektivní.

Úloha: *(i) nalezněte zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je na, ale ne prosté; (ii) nalezněte $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je na a každé $n \in \mathbb{N}$ má nekonečně mnoho vzorů.*

Dva příklady matematických důkazů. Postup v matematickém důkazu ozřejmím dvěma příklady. První je důkaz indukcí a druhý důkaz sporem.

Tvrzení (Bernoulliova nerovnost). *Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ je pravda, že*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx .$$

Důkaz. Indukcí podle exponentu n. Začátek indukce: nerovnost dokážu pro počáteční hodnotu $n = 0$. To je jasné, LS (levá strana) je $(1+x)^0 = 1$ a PS též $1 + 0x = 1$. Indukční krok: předpokládám platnost nerovnosti (resp. tvrzení, které indukcí dokazuju) pro danou hodnotu n a odvodím platnost pro o 1 zvětšenou hodnotu $n+1$. Postupuju takto:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &\geq 1 + nx \\
(1+x)(1+x)^n &\geq (1+x)(1+nx) \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x .
\end{aligned}$$

Předpoklad (1. řádek) jsem vynásobil (LS i PS) *nezáporným* číslem $1 + x$, což platnost nerovnosti zachová. Ve vzniklé nerovnosti je LS co potřebuju (tj. LS B. nerovnosti pro $n+1$), ale PS má navíc člen nx^2 (viz 2. a 3. řádek). Tento člen je ale naštěstí vždy nezáporný, $nx^2 \geq 0$, takže po jeho vypuštění se PS nezvětší a dostávám platnou nerovnost na 4. řádku, což je přesně B. nerovnost pro $n+1$. Tím je důkaz indukcí dokončen. Podle začátku indukce totiž B. nerovnost platí pro $n = 0$. Podle ind. kroku tedy platí i pro $n = 1$. Znovu podle ind. kroku tedy platí i pro $n = 2$. A tak dál a dál, proběhneme celé $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a B. nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. □

Několik poznámek. Historická: nerovnost se jmenuje po basilejském matematikovi *Jacobu Bernoullim (1655–1705).* V důkazu jsme obě strany nerovnosti násobili nezáporným činitelem. Častou příčinou chyb v manipulaci s nerovnostmi bývá, že činitel může nabýt zápornou hodnotu (v našem případě se to nestane), ale my zapomeneme změnit směr nerovnosti. Dále jsme využili toho, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $a^2 \geq 0$, což je jednoduchá ale užitečná nerovnost, která se často používá. Není příliš přehnané říci, že celá matematická analýza se svými aplikacemi (analytická teorie čísel, numerická matematika a další) je založena na umění zacházet s nerovnostmi a odhady.

Tvrzení (iracionalita čísla $\sqrt{2}$). *Pro žádný zlomek a/b není pravda, že $(a/b)^2 = 2$. To jest, rovnice*

$$x^2 = 2$$

nemá v oboru racionálních čísel $\mathbb{Q}$ řešení.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $a/b \in \mathbb{Q}$ je zlomek, jehož čtverec se rovná dvěma. Víme, že a/b můžeme vzít v základním tvaru, kdy $b \in \mathbb{N}$ a čísla $a \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ a b jsou nesoudělná (tj., když $c \in \mathbb{N}$ dělí a i b, pak $c = 1$). Z $(a/b)^2 = 2$ máme rovnost

$$a^2 = 2b^2 .$$

Tedy 2 dělí a^2 a tedy 2 dělí a (kdyby a bylo liché, $a = 2c+1$, bylo by liché i $a^2 = (2c+1)^2 = 2(2c^2+2c)+1$). Tedy $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{Z}$ a dosazení dává $4c^2 = 2b^2$, čili $2c^2 = b^2$. Stejný argument dává, že b je sudé. Takže číslo 2 dělí a i b. To je ale spor s výchozí nesoudělností a a b. Dostali jsme spor, výchozí předpoklad existence zlomku a/b s $(a/b)^2 = 2$ je tedy nepravdivý a takový zlomek neexistuje.

Geometrický důkaz. Kdyby $a^2 = 2b^2$ pro nějaká dvě čísla $a, b \in \mathbb{N}$ (všimněte si, že to platí pro $a = b = 0$), existoval by (podle Pythagora) pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami délek $|AB| = |BC| = b$ a přeponou o délce

$|AC| = a$. (Nemám už sílu se malovat s obrázkem, kreslete si ho!) Sestrojíme menší takový Δ (tj. rovnoramenný, pravoúhlý a s celočíselnými délkami stran). Na AC vyneseme délku $|AD| = b$ (jistě $b < a$). Z bodu D spustíme kolmici na AC, jež protne BC v bodě E. Klíčové pozorování je, že $|BE| = |ED| = |DC| = a - b$. První rovnost platí díky symetrii čtyřúhelníka $ABED$ ($|AB| = |AD| = b$ a oba úhly u B i D jsou pravé), druhá díky rovnoramennosti trojúhelníka EDC (úhel u D je pravý a u C je $45°$, tedy i u E je úhel $45°$) a třetí podle definice bodu D. Tudíž $|EC| = b - (a - b) = 2b - a$. Rovnoramenný a pravoúhlý Δ EDC má tedy celočíselné délky stran, odvěsny mají délku $a - b$ a přepona délku $2b - a$. Ovšem tento Δ je menší než výchozí Δ ABC, např. přepony mají délky $a > 2b - a$. S Δ EDC můžeme provést tutéž konstrukci a opakovat ji dále. Dostaneme nekonečnou posloupnost zmenšujících se trojúhelníků, která dává nekonečnou ostře klesající posloupnost přirozených čísel, např. délek přepon. Taková nekonečná posloupnost přirozených čísel ale neexistuje, máme spor. Takže rovnice $a^2 = 2b^2$ nemá v $\mathbb{N}$ řešení. $\square$

Upřímně řečeno, celá ta geometrie v druhém důkazu je zbytečná. Stručně ho lze shrnout následovně. Když $a^2 = 2b^2$ pro $a, b \in \mathbb{N}$, pak $a/2 < b < a$ a $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$. Protože $2b - a, a - b \in \mathbb{N}$ a $2b - a < a$, opakování transformace $a, b \rightsquigarrow 2b - a, a - b$ dává nekonečnou ostře klesající posloupnost přirozených čísel — spor.

O reálných číslech až příště.