Přednáška 6, 7. listopadu 2014

Část 3: nekonečné řady

Základní definice. *Nekonečná řada*, krátce *řada,* je posloupnost reálných čísel $(a_n) \subset \mathbb{R}$ uvedená v zápisu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \ ,$$

spolu s metodou přiřazující řadě její *součet*, což je reálné číslo (někdy povolíme i $\pm\infty$). Motivací a hnací myšlenkou je snaha rozšířit sčítání reálných čísel na nekonečně mnoho sčítanců. Nejběžnější sčítací metodou je metoda *částečných součtů*, což je posloupnost

$$(s_n) \ \text{ definovaná jako } \ s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \ .$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*, když konvergují její částečné součty (s_n), to jest $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pak definujeme jako tuto limitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \in \mathbb{R} \ .$$

Je-li $\lim s_n$ nevlastní nebo neexistuje, řekneme, že řada *diverguje* (pak nemá žádný součet). Pokud $\lim s_n = \pm\infty$, píšeme též $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Dvě poznámky ke značení. Řady můžeme samozřejmě sčítat i od jiného indexu než 1 nebo i přes nějakou obecnou množinu indexů. Máme tak například řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \ \sum_{n=m}^{\infty} b_n, \ \sum_{n \ge k} a_n \ \text{ nebo nejobecněji } \ \sum_{n \in I} a_n \ ,$$

kde $m, k \in \mathbb{N}_0$ či $m, k \in \mathbb{Z}$ a $I \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina přirozených čísel nebo i jakákoli jiná nekonečná spočetná množina. (Abychom se ale u takových řad mohli bavit o součtu podle uvedené definice, musí být daná či z kontextu jasná bijekce $f: \ \mathbb{N} \to I$ mezi množinou sčítacích indexů I a $\mathbb{N}$. Součet řady $\sum_{n \in I} a_n$ pak počítáme z definice jako součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = a_{f(n)}$.) Místo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ budu často psát stručně jen } \ \sum a_n \ .$$

Dále se u řad objevuje trochu matoucí ale historicky ustálená dvojznačnost matematického značení, která u limit posloupností není přítomna. Jeden symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

se používá ve dvou různých významech: jednou pro zadání řady jako nekonečné posloupnosti (a_n) a jindy pro označení konkrétního reálného čísla (či $\pm\infty$), jež je jejím součtem. (Je to jako kdybychom limitu posloupnosti (a_n) označili zase (a_n).) Při čtení textů o řadách je tedy dobře mít jasno, v kterém z obou významů je daný symbol řady použit (docela dobře může být použit v obou). Vidíme-li napsáno například

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \ ,$$

můžete to znamenat, že (bez ohledu na konvergenci obou řad) pro každé n platí rovnost $a_n = b_n^2$ nebo to může znamenat, že obě řady mají stejný součet $s \in \mathbb{R}$ (popř. $s = +\infty$).

Zapišme si jednoduché, ale užitečné pozorování: když $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tak buď řada $\sum a_n$ konverguje a její součet je nezáporné reálné číslo nebo diverguje k $+\infty$ (pak totiž $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ a použijeme tvrzení o limitě monotónní posloupnosti).

Příklady řad a jejich součtů. Řada

$$\sum (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

diverguje, neboť částečné součty $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ nemají vlastní ani nevlastní limitu. Naopak

$$\sum (1/2)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 \ ,$$

protože

$$\lim s_n = \lim(1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n) = \lim(1 - 1/2^n) = 1 \ .$$

Tato řada tedy konverguje a má součet 1. Podobně má součet 1 i

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1 \ ,$$

protože

$$\lim s_n = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \lim(1 - 1/(n+1)) = 1 \; .$$

A co proslulá *harmonická řada* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$? Ukážeme, že diverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \; .$$

Pro každé $m = 1, 2, \ldots$ totiž máme nerovnost

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \; .$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno a $r \in \mathbb{N}_0$ je maximální vzhledem k $2^r \leq n$. Pak $2^{r+1} > n$, takže $r > \log n / \log 2 - 1$. Podle uvedené nerovnosti,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq 1 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + r(1/2) > \log n / (2 \log 2) - 1/2 \; ,$$

což pro $n \to \infty$ má limitu $+\infty$. Tedy $\lim s_n = +\infty$ (jeden policajt) a harmonická řada proto diverguje (do $+\infty$). Podobná řada

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

však konverguje, jak za chvíli dokážeme. Konečně poslední triviální, ale důležitý příklad: když v $\sum a_n$ se $a_n = 0$ pro všechna n s výjimkou konečně mnoha indexů, řekněme $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, pak $\sum a_n$ konverguje a její součet je

$$\sum a_n = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} \; .$$

Rozmyslete si proč.

Tvrzení (podmínky konvergence řady). *Nechť $\sum a_n$ je řada reálných čísel.*

1. *(nutná podmínka konvergence řady) $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\lim a_n = 0$.*

2. *(Cauchyova podmínka pro řady)* $\sum a_n$ *konverguje, právě když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m > n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon\ .$$

Důkaz. 1. Nechť $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0\ .$$

Jako úlohu si rozmyslete, proč přesně která rovnost platí.

2. Řada $\sum a_n$ konverguje, právě když (s_n) konverguje, což platí podle věty o Cauchyho podmínkce, právě když je (s_n) cauchyovská. Podle definice částečných součtů pro $m > n$ máme $s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$. Cauchyova podmínka pro řady je tedy jen rozepsání Cauchyovy podmínky pro posloupnost částečných součtů. □

První část se používá nejčastěji v kontrapozici: je-li dána řada $\sum a_n$, jejíž sčítanec nemá za limitu nulu (tj. $\lim a_n$ neexistuje nebo existuje, ale je nenulová), pak $\sum a_n$ nekonverguje. Opačná implikace $\Leftarrow$ obecně neplatí, jak jsme viděli na příkladu harmonické řady. Druhá část však je ekvivalence.

Dvě důležité rodinky řad. I široká veřejnost zná *geometrickou řadu* (např. „Volně žijící kočky se mohou množit geometrickou řadou" — nalezeno na Internetu v Jindřichohradeckém deníku), alespoň jako floskuli. Přesně jde o řadu $\sum q^{n-1}$, kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr, se součtem

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \ldots\ \ |q| < 1 \\ +\infty & \ldots\ \ q \geq 1 \\ \text{diverguje} & \ldots\ \ q \leq -1\ . \end{cases}$$

Když $|q| \geq 1$, pak geometrická řada zjevně diverguje — $\lim q^n$ není 0 (nesplňuje nutnou podmínku konvergence). Podrobnější informaci dostaneme z identity $(n = 1, 2, \ldots)$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}\ (q \neq 1),\ \ s_n = n\ (q = 1)\ .$$

Z ní je jasné, že pro $q \geq 1$ je $\sum q^{n-1} = +\infty$ a že pro $q \leq -1$ neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim s_n$ (s_n je střídavě ≥ 1 a ≤ 0). Pro $|q| < 1$ máme

$$\lim s_n = \frac{1 - \lim q^n}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}\ .$$

Stojí za to si zapamatovat trochu obecnější vzorec, že pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ a $q \in \mathbb{R}$ s $|q| < 1$ je

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + q^{m+3} + \cdots = \frac{q^m}{1-q}$$

(odvoďte ho jako úlohu).

Zeta (též dzeta) funkce je řada $\sum n^{-s}$, kde $s \in \mathbb{R}$ je parametr, se součtem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \begin{cases} \text{konverguje} & \ldots \quad s > 1 \\ +\infty & \ldots \quad s \leq 1\,. \end{cases}$$

Druhou, divergentní, část jsme již dokázali, plyne z divergence harmonické řady. Že pro $s > 1$ řada konverguje, dokážeme později. Pro zajímavost, je známo, že $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ a podobné vzorce pro $\zeta(2n)$, ale nejsou známy žádné podobné jednoduché vzorce pro $\zeta(2n+1)$. Je známo, že součet $\zeta(3)$ je iracionální, ale nikdo to (zatím?) neumí dokázat třeba pro $\zeta(5)$.

Absolutní konvergence. Řada $\sum a_n$ *absolutně konverguje*, konverguje-li řada $\sum |a_n|$, to jest posloupnost $(|a_1|, |a_1| + |a_2|, |a_1| + |a_2| + |a_3|, \ldots)$ má vlastní limitu, to jest existuje $c > 0$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < c\,.$$

Například $\sum(-1/2)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ absolutně konverguje, stejně jako řady $\sum 1/n(n+1)$ a $\sum(-1)^n/n(n+1)$, ale $\sum(-1)^{n+1}/n$ nekonverguje absolutně (i když konverguje). Každá řada s jen konečně mnoha nenulovými sčítanci absolutně konverguje.

Tvrzení (AK $\Rightarrow$ K). *Když řada $\sum a_n$ absolutně konverguje, pak konverguje.*

Důkaz. Pro $m > n$ díky trojúhelníkové nerovnosti a vlastnostem absolutní hodnoty máme

$$\begin{aligned} &|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \\ &= ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m||\,. \end{aligned}$$

Cauchyho podmínka pro $\sum |a_n|$, jež je splněna podle předpokladu, tedy implikuje splnění Cauchyho podmínky i pro $\sum a_n$ (a pro dané $\varepsilon > 0$ pro $\sum a_n$ funguje tentýž index n_0, jako pro $\sum |a_n|$). $\square$

Teprve absolutně konvergentní řady jsou správným zobecněním sčítání na nekonečně mnoho sčítanců, kdy se zachovají jeho pěkné vlastnosti. Dá se dokázat, že absolutně konvergentní řady splňují komutativní zákon (součet se nemění při přeházení sčítanců), asociativní zákon (součet se nemění při přeskupení sčítanců) a distributivní zákon (při vynásobení dvou absolutně konvergentních řad se součty vynásobí). Na přednášce si později dokážeme jen to první.

Tvrzení (Leibnizovo kritérium). *Nechť (a_n) je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel s $\lim a_n = 0$. Pak řada*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad \textit{konverguje}\ .$$

Důkaz. Ukážeme, že řada splňuje Cauchyho podmínku. Nejdřív indukcí podle n dokážeme celkem zřejmé pomocné tvrzení: když $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$, pak střídavý součet $b_1 - b_2 + b_3 - \cdots \pm b_n \in [0, b_1]$. Pro $n = 1$ platí, $b_1 \in [0, b_1]$. Nechť $n > 1$ a pomocné tvrzení platí pro každý střídavý součet s $n-1$ sčítanci. Máme $b_1 - b_2 + b_3 - \cdots \pm b_n = b_1 - c$, kde $c = b_2 - b_3 + b_4 - \cdots \pm b_n$. Podle indukčního předpokladu je $c \in [0, b_2]$. Protože $b_2 \le b_1$, je i $c \in [0, b_1]$. Tedy $b_1 - c \in [0, b_1]$, což jsme chtěli dokázat.

Zpět k naší řadě se střídajícími se znaménky. Předpokládáme, že $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge 0$ a $\lim a_n = 0$. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow 0 \le a_n < \varepsilon$. Pro každé dva indexy $m > n > n_0$ pak platí, že

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} (-1)^{i+1} a_i \right| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \pm a_m \le a_{n+1} < \varepsilon\ ,$$

kde první rovnost a nerovnost za ní plynou z pomocného tvrzení. Takže $\sum (-1)^{n+1} a_n$ splňuje Cauchyho podmínku pro řady a podle tvrzení o podmínkách konvergence řady konverguje. □

Tento důkaz jsem na přednášce neuvedl, protože mě napadl až teď. Na přednášce jsem uvedl následující (obligátní) důkaz, který ponechám jako úlohu. Kritérium nese jméno německého filozofa a matematika, spoluobjevitele matematické analýzy, *Gottfrieda W. Leibnize (1646–1716)*.

Úloha. *Dokažte Leibnizovo kritérium takto: jsou-li s_n částečné součty řady $\sum (-1)^{n+1} a_n$, pak $s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \dots$, $s_2 \le s_4 \le s_6 \le \dots$, $s_{2n-1} \ge s_{2m}$, takže $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n} = \lim s_n \in \mathbb{R}$.*

Typické příklady řad konvergujících podle Leibnizova kritéria jsou

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{a} \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Ani jedna z nich nekonverguje absolutně.

Tvrzení (lineární kombinace řad). *Nechť* $\sum a_n$ *a* $\sum b_n$ *jsou dvě řady,* $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *s* $a \neq 0$*. Pak* $\sum a_n$ *konverguje, právě když* $\sum aa_n$ *konverguje. Pro součty platí*

$$\sum aa_n = a \sum a_n \ .$$

Když $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *konverguje, pak konverguje i* $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ *a pro součty platí*

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n \ .$$

Důkaz. Úloha, procvičte si definice a aritmetiku limit. □

První část tvrzení je ekvivalence, druhá jen implikace. Tyto transformace řad fungují obecně a nepotřebují absolutní konvergenci.