

# Výroková a predikátová logika - IX

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

# Vlastnosti teorií

*Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.*

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$ . Je-li sentence  $\varphi$  dokazatelná z  $T$ , řekneme, že  $\varphi$  je **věta** (**teorém**) teorie  $T$ . Množinu vět teorie  $T$  označme

$$\text{Thm}^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie  $T$  je

- **sporná**, jestliže je v  $T$  dokazatelný  $\perp$  (spor), jinak je **bezesporná**,
- **kompletní**, jestliže není sporná a každá **sentence** je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj.  $T \vdash \varphi$  či  $T \vdash \neg\varphi$ .
- **extenze** teorie  $T'$  jazyka  $L'$ , jestliže  $L' \subseteq L$  a  $\text{Thm}^{L'}(T') \subseteq \text{Thm}^L(T)$ , o extenzi  $T$  teorie  $T'$  řekneme, že je **jednoduchá**, pokud  $L = L'$ , a **konzervativní**, pokud  $\text{Thm}^{L'}(T') = \text{Thm}^L(T) \cap \text{Fm}_{L'}$ ,
- **ekvivalentní** s teorií  $T'$ , jestliže  $T$  je extenzí  $T'$  a  $T'$  je extenzí  $T$ .

# Důsledky

*Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.*

**Důsledek** Pro každou teorii  $T$  a sentence  $\varphi, \psi$  jazyka  $L$ ,

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$ ,
- $\text{Thm}^L(T) = \theta^L(T)$ ,
- $T$  je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,
- $T$  je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má až na elementární ekvivalenci jediný model,
- $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$  (Věta o dedukci).

**Poznámka** Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

# Existence spočetného modelu a kompaktnost

**Věta** Každá bezesporná teorie  $T$  spočetného jazyka  $L$  bez rovnosti má spočetně nekonečný model.

**Důkaz** Nechť  $\tau$  je systematické tablo z  $T$  s  $F \perp$  v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev  $V$ , neboť  $\perp$  není dokazatelný z  $T$ , existuje kanonický model  $\mathcal{A}$  z  $V$ . Jelikož se  $\mathcal{A}$  shoduje s  $V$ , jeho redukt na jazyk  $L$  je hledaným spočetně nekonečným modelem  $T$ .  $\square$

**Poznámka** Jde o slabou verzi tzv. Löwenheim-Skolemovy věty. Ve spočetném jazyce s rovností je kanonický model s rovností spočetný.

**Věta** Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

**Důkaz** Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie  $T$  nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný  $\perp$  systematickým tablem  $\tau$ . Jelikož je  $\tau$  konečné, je  $\perp$  dokazatelný z nějaké konečné  $T' \subseteq T$ , tj.  $T'$  nemá model.  $\square$

# Nestandardní model přirozených čísel

Nechť  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je standardní model přirozených čísel.

Označme  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  množinu všech pravdivých **sentencí** v  $\underline{\mathbb{N}}$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  označme  $\underline{n}$  term  $S(S(\dots(S(0)\dots)))$ , tzv.  **$n$ -tý numerál**, kde **S** je aplikováno  $n$ -krát.

Uvažme následující teorii  $T$ , kde  $c$  je nový konstantní symbol.

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

**Pozorování** Každá konečná část teorie  $T$  má model.

Tedy dle **věty o kompaktnosti** má  $T$  **model  $\mathcal{A}$** , jde o **nestandardní model přirozených čísel**. Každá sentence z  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  v něm platí, ale zároveň obsahuje **prvek  $c^{\mathcal{A}}$  větší než každé  $n \in \mathbb{N}$  (tj. hodnota termu  $\underline{n}$  v  $\mathcal{A}$ ).**

# Rozšiřování teorií

*Ukážeme, že zavádění nových pojmů má “pomocný charakter”.*

**Tvrzení** *Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$ ,  $T'$  je teorie jazyka  $L'$  a  $L \subseteq L'$ .*

- (i)  $T'$  je extenze  $T$ , právě když **redukt**  $\mathcal{A}$  každého modelu  $\mathcal{A}'$  teorie  $T'$  na jazyk  $L$  je modelem teorie  $T$ ,*
- (ii)  $T'$  je **konzervativní** extenze  $T$ , je-li  $T'$  extenze  $T$  a každý model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  lze **expandovat** do jazyka  $L'$  na model  $\mathcal{A}'$  teorie  $T'$ .*

## Důkaz

- (i)a) Je-li  $T'$  extenze  $T$  a  $\varphi$  libovolný axiom  $T$ , pak  $T' \models \varphi$ . Tedy  $\mathcal{A}' \models \varphi$  a rovněž  $\mathcal{A} \models \varphi$ , z čehož plyne, že  $\mathcal{A}$  je modelem  $T$ .*
- (i)b) Je-li  $\mathcal{A}$  modelem  $T$  a  $T \models \varphi$ , kde  $\varphi$  je jazyka  $L$ , pak  $\mathcal{A} \models \varphi$  a rovněž  $\mathcal{A}' \models \varphi$ . Z toho plyne, že  $T' \models \varphi$  a tedy  $T'$  je extenze  $T$ .*
- (ii) Je-li  $T' \models \varphi$ , kde  $\varphi$  je nad  $L$ , a  $\mathcal{A}$  je model  $T$ , pak v nějaké jeho expanzi  $\mathcal{A}' \models \varphi$  a tedy  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Z čehož  $T \models \varphi$ , tj.  $T'$  je konzervativní.  $\square$*

# Extenze o definovaný relační symbol

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$ ,  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  je formule jazyka  $L$  ve volných proměnných  $x_1, \dots, x_n$  a  $L'$  je rozšíření  $L$  o nový  $n$ -ární relační symbol  $R$ .

**Extenze** teorie  $T$  o **definici**  $R$  formulí  $\psi$  je teorie  $T'$  vzniklá přidáním axiomu

$$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$$

**Pozorování** Každý model teorie  $T$  lze **jednoznačně** expandovat na model  $T'$ .

**Důsledek**  $T'$  je **konzervativní** extenze  $T$ .

**Tvrzení** Pro každou formuli  $\varphi'$  nad  $L'$  **existuje**  $\varphi$  nad  $L$ , t.ž.  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

**Důkaz** Každou podformuli  $R(t_1, \dots, t_n)$  nahradíme za  $\psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$ , kde  $\psi'$  je **vhodná varianta**  $\psi$  zaručující substituovatelnost všech termů.  $\square$

**Např.** symbol  $\leq$  lze zavést v jazyce aritmetiky pomocí axiomu

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y)$$

# Extenze o definovaný funkční symbol

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$  a pro formuli  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$  jazyka  $L$  ve volných proměnných  $x_1, \dots, x_n, y$  platí

$$T \models (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y) \quad (\text{existence})$$

$$T \models \psi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z \quad (\text{jednoznačnost})$$

Označme  $L'$  rozšíření  $L$  o nový  $n$ -ární funkční symbol  $f$ .

**Extenze** teorie  $T$  o **definici**  $f$  formulí  $\psi$  je teorie  $T'$  vzniklá přidáním axiomu

$$f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)$$

**Poznámka** Je-li  $\psi$  tvaru  $t(x_1, \dots, x_n) = y$ , kde  $x_1, \dots, x_n$  jsou proměnné termu  $t$ , podmínky existence a jednoznačnosti platí.

*Např. binární funkční symbol – lze zavést pomocí + a unárního – axiomem*

$$x - y = z \leftrightarrow x + (-y) = z$$



# Extenze o definovaný funkční symbol (pokr.)

**Pozorování** Každý model teorie  $T$  lze *jednoznačně* expandovat na model  $T'$ .

**Důsledek**  $T'$  je konzervativní extenze  $T$ .

**Tvrzení** Pro každou formuli  $\varphi'$  nad  $L'$  existuje  $\varphi$  nad  $L$ , t.ž.  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

**Důkaz** Stačí uvážit  $\varphi'$  s jediným výskytem  $f$ . Má-li  $\varphi'$  více výskytů  $f$ , lze postup aplikovat induktivně. Označme  $\varphi^*$  formuli vzniklou z  $\varphi'$  nahrazením termu  $f(t_1, \dots, t_n)$  za novou proměnnou  $z$ . Za  $\varphi$  vezmeme formuli

$$(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)),$$

kde  $\psi'$  je vhodná varianta  $\psi$  zaručující substituovatelnost všech termů.

Nechť  $\mathcal{A}$  je model  $T'$ ,  $e$  je ohodnocení,  $a = f^A(t_1, \dots, t_n)[e]$ . Díky oběma podmínkám platí  $\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e]$  právě když  $e(z) = a$ . Tedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi'[e]$$

pro každé ohodnocení  $e$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$  a tedy  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .  $\square$

# Extenze o definice

Teorie  $T'$  jazyka  $L'$  je **extenze** teorie  $T$  jazyka  $L$  **o definice**, pokud vznikla z  $T$  postupnou **extenzí o definici relačního či funkčního symbolu**.

**Důsledek** *Nechť  $T'$  je extenze teorie  $T$  o definice. Pak*

- *každý model teorie  $T$  lze **jednoznačně** expandovat na model  $T'$ ,*
- *$T'$  je **konzervativní extenze  $T$** ,*
- *pro každou formuli  $\varphi'$  nad  $L'$  existuje  $\varphi$  nad  $L$  taková, že  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .*

*Např. v teorii  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$  nad  $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovností lze zavést **< a unární funkční symbol – axiomy***

$$-x = y \leftrightarrow x + y = 0$$

$$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

*Pak formule  $-x < y$  je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli*

$$(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0).$$

# Ekvisplnitelnost

Ukážeme, že problém splnitelnosti lze *redukovat* na otevřené teorie.

- Teorie  $T$ ,  $T'$  jsou **ekvisplnitelné**, jestliže  $T$  má model  $\Leftrightarrow T'$  má model.
- Formule  $\varphi$  je v *prenexním (normálním) tvaru (PNF)*, má-li tvar

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \varphi',$$

kde  $Q_i$  značí  $\forall$  nebo  $\exists$ , proměnné  $x_1, \dots, x_n$  jsou navzájem různé a  $\varphi'$  je otevřená formule, zvaná *otevřené jádro*.  $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$  je tzv. *prefix*.

- Speciálně, jsou-li všechny kvantifikátory  $\forall$ , je  $\varphi$  **univerzální** formule.

K teorii  $T$  nalezneme ekvisplnitelnou otevřenou teorii následujícím postupem.

- (1) Axiomy teorie  $T$  nahradíme za ekvivalentní formule v *prenexním* tvaru.
- (2) Pomocí nových funkčních symbolů je převedeme na ekvisplnitelné univerzální formule, tzv. *Skolemovy varianty*.
- (3) Jejich *otevřená jádra* budou tvořit hledanou teorii.

# Vytýkání kvantifikátorů

Nechť  $Q$  značí kvantifikátor  $\forall$  nebo  $\exists$  a  $\overline{Q}$  značí opačný kvantifikátor.

Pro každé formule  $\varphi, \psi$  takové, že  $x$  **není volná** ve formuli  $\psi$ ,

$$\models \neg(Qx)\varphi \leftrightarrow (\overline{Q}x)\neg\varphi$$

$$\models ((Qx)\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \wedge \psi)$$

$$\models ((Qx)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \vee \psi)$$

$$\models ((Qx)\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\models (\psi \rightarrow (Qx)\varphi) \leftrightarrow (Qx)(\psi \rightarrow \varphi)$$

Uvedené ekvivalence lze ověřit sémanticky nebo dokázat tablo metodou (přes generální uzávěr, *není-li to sentence*).

**Poznámka** Předpoklad, že  $x$  *není volná* ve formuli  $\psi$  je v každé ekvivalenci (kromě té první) nutný pro nějaký kvantifikátor  $Q$ . Např.

$$\not\models ((\exists x)P(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge P(x))$$

# Převod na prenexní tvar

**Tvrzení** Necht'  $\varphi'$  je formule vzniklá z formule  $\varphi$  nahrazením některých výskytů podformule  $\psi$  za formuli  $\psi'$ . Jestliže  $T \models \psi \leftrightarrow \psi'$ , pak  $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$ .

**Důkaz** Snadno indukcí dle struktury formule  $\varphi$ .  $\square$

**Tvrzení** Ke každé formuli  $\varphi$  existuje ekvivalentní formule  $\varphi'$  v *prenexním normálním tvaru*, tj.  $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$ .

**Důkaz** Indukcí dle struktury  $\varphi$  pomocí *vytýkání kvantifikátorů*, náhradou podformulí za jejich *varianty* a využitím předchozího tvrzení o ekvivalenci.  $\square$

*Např.*

$$\begin{aligned}
 ((\forall z)P(x, z) \wedge P(y, z)) &\rightarrow \neg(\exists x)P(x, y) \\
 ((\forall u)P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall x)\neg P(x, y) \\
 (\forall u)(P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v, y) \\
 (\exists u)((P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v, y)) \\
 (\exists u)(\forall v)((P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow \neg P(v, y))
 \end{aligned}$$

# Skolemova varianta

Nechť  $\varphi$  je **sentence** jazyka  $L$  v **prenexním normálním tvaru**,  $y_1, \dots, y_n$  jsou **existenčně** kvantifikované proměnné ve  $\varphi$  (v tomto pořadí) a pro každé  $i \leq n$  nechť  $x_1, \dots, x_{n_i}$  jsou **univerzálně** kvantifikované proměnné před  $y_i$ . Označme  $L'$  rozšíření  $L$  o nové  $n_i$ -ární funkční symboly  $f_i$  pro každé  $i \leq n$ .

Nechť  $\varphi_S$  je formule jazyka  $L'$ , jež vznikne z formule  $\varphi$  odstraněním  $(\exists y_i)$  z jejího prefixu a nahrazením každého výskytu proměnné  $y_i$  za term  $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ . Pak formule  $\varphi_S$  se nazývá **Skolemova varianta** formule  $\varphi$ .

*Např. pro formuli  $\varphi$*

$$(\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)R(y_1, x_1, x_2, y_2, x_3)$$

*je následující formule  $\varphi_S$  její Skolemovou variantou*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)R(f_1, x_1, x_2, f_2(x_1, x_2), x_3),$$

*kde  $f_1$  je nový konstantní symbol a  $f_2$  je nový binární funkční symbol.*

# Vlastnosti Skolemovy varianty

**Lemma** *Nechť  $\varphi$  je sentence  $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists y)\psi$  jazyka  $L$  a  $\varphi'$  je sentence  $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\psi(y/f(x_1, \dots, x_n))$ , kde  $f$  je nový funkční symbol. Pak*

- (1) *redukt  $\mathcal{A}$  každého modelu  $\mathcal{A}'$  formule  $\varphi'$  na jazyk  $L$  je modelem  $\varphi$ ,*
- (2) *každý model  $\mathcal{A}$  formule  $\varphi$  lze expandovat na model  $\mathcal{A}'$  formule  $\varphi'$ .*

**Poznámka** *Na rozdíl od extenze o definici funkčního symbolu, expanze v tvrzení (2) tentokrát nemusí být jednoznačná.*

**Důkaz** (1) Nechť  $\mathcal{A}' \models \varphi'$  a  $\mathcal{A}$  je redukt  $\mathcal{A}'$  na jazyk  $L$ . Jelikož pro každé ohodnocení  $e$  je  $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$ , kde  $a = (f(x_1, \dots, x_n))^{A'}[e]$ , platí  $\mathcal{A} \models \varphi$ .  
 (2) Nechť  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Pak existuje funkce  $f^A: A^n \rightarrow A$  taková, že pro každé ohodnocení  $e$  platí  $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$ , kde  $a = f^A(e(x_1), \dots, e(x_n))$ , a tedy expanze  $\mathcal{A}'$  struktury  $\mathcal{A}$  o funkci  $f^A$  je modelem  $\varphi'$ .  $\square$

**Důsledek** *Je-li  $\varphi'$  Skolemova varianta formule  $\varphi$ , obě tvrzení (1) a (2) pro  $\varphi$ ,  $\varphi'$  rovněž platí. Tedy  $\varphi$ ,  $\varphi'$  jsou ekvisplnitelné.*

# Skolemova věta

**Věta** Každá teorie  $T$  má *otevřenou konzervativní* extenzi  $T^*$ .

**Důkaz** Lze předpokládat, že  $T$  je v uzavřeném tvaru. Nechť  $L$  je její jazyk.

- Nahrazením každého axiomu teorie  $T$  za ekvivalentní formuli v *prenexním tvaru* získáme ekvivalentní teorii  $T^\circ$ .
- **Nahrazením** každého axiomu teorie  $T^\circ$  za jeho *Skolemovu variantu* získáme teorii  $T'$  rozšířeného jazyka  $L'$ .
- Jelikož je redukt každého modelu teorie  $T'$  na jazyk  $L$  modelem teorie  $T$ , je  $T'$  *extenze*  $T$ .
- Jelikož i každý model teorie  $T$  lze expandovat na model teorie  $T'$ , je to extenze *konzervativní*.
- Jelikož každý axiom teorie  $T'$  je univerzální sentence, jejich nahrazením za *otevřená jádra* získáme otevřenou teorii  $T^*$  ekvivalentní s  $T'$ .  $\square$

**Důsledek** Ke každé teorii existuje *ekvisplnitelná otevřená* teorie.



# Redukce nesplnitelnosti na úroveň VL

*Je-li otevřená teorie nesplnitelná, lze to “doložit na konkrétních prvcích”.*

Např. teorie

$$T = \{P(x, y) \vee R(x, y), \neg P(c, y), \neg R(x, f(x))\}$$

jazyka  $L = \langle P, R, f, c \rangle$  nemá model, což lze doložit nesplnitelnou konjunkcí konečně mnoha **instancí** (některých) axiomů teorie  $T$  v **konstantních termech**

$$(P(c, f(c)) \vee R(c, f(c))) \wedge \neg P(c, f(c)) \wedge \neg R(c, f(c)),$$

což je lživá formule ve tvaru výroku

$$(p \vee r) \wedge \neg p \wedge \neg r.$$

Instance  $\varphi(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$  otevřené formule  $\varphi$  ve volných proměnných  $x_1, \dots, x_n$  je **základní (ground) instance**, jsou-li všechny termy  $t_1, \dots, t_n$  konstantní. Konstantní termy nazýváme také **základní (ground) termy**.

# Herbrandův model

Nechť  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  je jazyk s alespoň jedním konstantním symbolem.

(Je-li třeba, do  $L$  přidáme nový konstantní symbol.)

- **Herbrandovo univerzum** pro  $L$  je množina všech konstantních termů z  $L$ .  
Např. pro  $L = \langle P, f, c \rangle$ , kde  $P$  je relační,  $f$  je binární funkční,  $c$  konstantní  
 $A = \{c, f(c, c), f(f(c, c), c), f(c, f(c, c)), f(f(c, c), f(c, c)), \dots\}$
- **Struktura  $\mathcal{A}$  pro  $L$**  je **Herbrandova struktura**, je-li doména  $A$  Herbrandovo univerzum pro  $L$  a pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a  $t_1, \dots, t_n \in A$ ,

$$f^A(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

(včetně  $n = 0$ , tj.  $c^A = c$  pro každý konstantní symbol  $c$ ).

**Poznámka** Na rozdíl od **kanonické struktury** nejsou předepsané relace.

Např.  $\mathcal{A} = \langle A, P^A, f^A, c^A \rangle$ , kde  $P^A = \emptyset$ ,  $c^A = c$  a  $f^A(c, c) = f(c, c), \dots$

- **Herbrandův model** teorie  $T$  je Herbrandova struktura, jež je modelem  $T$ .

# Herbrandova věta

**Věta** Necht'  $T$  je otevřená teorie jazyka  $L$  bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem. Pak

- (a)  $T$  má Herbrandův model, anebo
- (b) existuje konečně mnoho základních instancí axiomů z  $T$ , jejichž konjunkce je nespílitelná, a tedy  $T$  nemá model.

**Důkaz** Necht'  $T'$  je množina všech základních instancí axiomů z  $T$ . Uvažme dokončené (např. systematické) tablo  $\tau$  z  $T'$  v jazyce  $L$  (bez přidávání nových konstant) s položkou  $F \perp$  v kořeni.

- Obsahuje-li tablo  $\tau$  bezespornou větev  $V$ , kanonický model z větve  $V$  je Herbrandovým modelem teorie  $T$ .
- Jinak je  $\tau$  sporné, tj.  $T' \vdash \perp$ . Navíc je konečné, tedy  $\perp$  je dokazatelný jen z konečně mnoha formulí  $T'$ , tj. jejich konjunkce je nespílitelná.  $\square$

**Poznámka** V případě jazyka  $L$  s rovností teorii  $T$  rozšíříme na  $T^*$  o axiomy rovnosti pro  $L$  a pokud  $T^*$  má Herbrandův model  $\mathcal{A}$ , zfaktorizujeme ho dle  $=^A$ .

# Důsledky Herbrandovy věty

Nechť  $L$  je jazyk obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

**Důsledek** Pro každou otevřenou  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  jazyka  $L$  je  $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)\varphi$  pravdivá, právě když existují konstantní termy  $t_{ij}$  jazyka  $L$  takové, že

$$\varphi(x_1/t_{11}, \dots, x_n/t_{1n}) \vee \dots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \dots, x_n/t_{mn})$$

je (výroková) tautologie.

**Důkaz**  $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)\varphi$  je pravdivá  $\Leftrightarrow (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\neg\varphi$  je nespílitelná  $\Leftrightarrow \neg\varphi$  je nespílitelná. Ostatní vyplývá z Herbrandovy věty pro  $\neg\varphi$ .  $\square$

**Důsledek** Otevřená teorie  $T$  jazyka  $L$  má model, právě když teorie  $T'$  všech základních instancí axiomů z  $T$  má model.

**Důkaz** Má-li  $T$  model  $\mathcal{A}$ , platí v něm každá instance každého axiomu z  $T$ , tedy  $\mathcal{A}$  je modelem  $T'$ . Nemá-li  $T$  model, dle H. věty existuje (konečně) formulí z  $T'$ , jejichž konjunkce je nespílitelná, tedy  $T'$  nemá model.  $\square$