

# Výroková a predikátová logika - I

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

# Koncepce přednášky

- logika pro informatiky

- + rezoluce v predikátové logice, unifikace, “pozadí” Prologu
- méně teorie modelů, ...

- tablo metoda namísto Hilbertovského kalkulu

- + algoritmicky intuitivnější, mnohdy elegantnější důkazy
- nedostupnost literatury (zejména v čj), omezení na spočetné jazyky

- nejprve samostatně výroková logika

- + ideální “hřiště” pro pochopení základních konceptů
- zpočátku volnější tempo výkladu

- nerozhodnutelnost a neúplnost méně formálně

- + důraz na principy
- nebezpečí nepřesnosti

# Plán přednášky 1/2

- Úvod

1. Trocha historie, “paradoxy”, logika jako jazyk matematiky, rozdíl a vztah syntaxe a sémantiky, předběžnosti.

- Výroková logika

2. Základní syntax a sémantika, univerzálnost logických spojek, normální tvary, 2-SAT a Horn-SAT.
3. Sémantika vzhledem k teorii, vlastnosti teorií, algebra výroků, analýza teorií nad konečně mnoha prvovýroky. Tablo metoda pro VL.
4. Tablo metoda pro VL: systematické tablo, korektnost, úplnost, kompaktnost.
5. Rezoluční metoda, korektnost a úplnost, lineární rezoluce, rezoluce v Prologu. Hilbertovský kalkul.

# Plán přednášky 2/2

- **Predikátová logika**

6. Základní syntax a sémantika, instance a varianty. Struktury a modely teorií.
7. Vlastnosti teorií. Podstruktury, otevřené teorie. Expanze a redukt. Booleovy algebry. Tablo metoda pro PL.
8. Tablo metoda pro PL: systematické tablo, korektnost, úplnost, kompaktnost. Rovnost v PL.
9. Extenze o definice. Prenexní tvar, skolemizace, Herbrandova věta.
10. Rezoluční metoda v PL: korektnost a úplnost. Lineární rezoluce a LI-rezoluce. Hilbertovský kalkul.

- **Teorie modelů, rozhodnutelnost, neúplnost**

11. Elementární ekvivalence, kompletnost. Isomorfismus struktur. Konečná a otevřená axiomatizovatelnost. Základní teorie.
12. Rozhodnutelné teorie, rekurzivní axiomatizovatelnost. Nerozhodnutelnost PL. Věty o neúplnosti - úvod.
13. Aritmetizace syntaxe, princip self-reference, věta o pevném bodě, nedefinovatelnost pravdy. Věty o neúplnosti, důsledky. Závěr.

# Doporučená literatura

## • Knihy

- ▶ A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 1997.
- ▶ P. Pudlák, *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity - A Gentle Introduction*, Springer, 2013.
- ▶ V. Švejdar, *Logika, neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002.
- ▶ A. Sochor, *Klasická matematická logika*, UK v Praze - Karolinum, 2001.
- ▶ W. Hodges, *Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997.

## • Elektronické zdroje

- ▶ J. Mlček, *Výroková a predikátová logika*, skripta k přednášce, 2012. [[www](#)]
- ▶ P. Štěpánek, *Meze formální metody*, skripta k přednášce, 2000. [[pdf](#)]
- ▶ slidy k přednášce

# Trocha historie

- **Aristotelés** (384-322 př.n.l.) - **sylogismy**, např.  
z *‘žádný  $Q$  není  $R$ ’* a *‘každý  $P$  je  $Q$ ’* odvod *‘žádný  $P$  není  $R$ ’*.
- **Eukleidés**: *Základy* (asi 330 př.n.l.) - **axiomatický** přístup ke geometrii  
*“Pro každou přímku  $p$  a bod  $x$ , který neleží na  $p$ , existuje  
přímka skrze  $x$  neprotínající  $p$ .”* (5. postulát)
- **Descartes**: *Geometrie* (1637) - **algebraizace** geometrie
- **Leibniz** - sen o *“lingua characteristica”* a *“calculus ratiocinator”* (1679-90)
- **De Morgan** - zavedení **logických spojek** (1847)  
$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
- **Boole** - výrok jako binární funkce, **algebraizace** logiky (1847)
- **Schröder** - sémantika predikátové logiky, koncept **modelu** (1890-1905)

# Trocha historie - teorie množin

- **Cantor** - intuitivní **teorie množin** (1878), např. **princip zahrnutí**  
“Pro každou vlastnost  $\varphi(x)$  existuje množina  $\{x \mid \varphi(x)\}$ .”
- **Frege** - logika s **kvantifikátory** a **predikáty**, pojem důkazu jako **odvození**,  
axiomatická teorie množin (1879, 1884)
- **Russel** - Fregeho teorie množin je **sporná** (1903)  
$$\text{Pro } a = \{x \mid \neg(x \in x)\} \text{ je } a \in a ?$$
- **Russel, Whitehead** - teorie typů (1910-13)
- **Zermelo** (1908), **Fraenkel** (1922) - *standardní* teorie množin **ZFC**, např.  
“Pro každou vlastnost  $\varphi(x)$  a množinu  $y$  existuje množina  $\{x \in y \mid \varphi(x)\}$ .”
- **Bernays** (1937), **Gödel** (1940) - teorie množin založená na **třídách**, např.  
“Pro každou množinovou vlastnost  $\varphi(x)$  existuje třída  $\{x \mid \varphi(x)\}$ .”

# Trocha historie - algoritmizace

- Hilbert - **kompletní** axiomatizace Euklidovské geometrie (1899),  
**formalismus** - striktní odproštění se od významu, mechaničnost  
“... musí být možné místo o bodu, přímce a rovině mluvit  
o stolu, židli a pultu.” (Grundlagen der Geometrie)
- Brouwer - **intuicionismus**, důraz na **konstruktivní** důkazy  
“Matematické tvrzení je myšlenková konstrukce ověřitelná intuicí.”
- Post - **úplnost** výrokové logiky (1921)
- Gödel - **úplnost** predikátové logiky (1930), věty o **neúplnosti** (1931)
- Kleene, Post, Church, Turing - formalizace pojmu **algoritmus**,  
existence algoritmicky **nerozhodnutelných** problémů (1936)
- Robinson - **rezoluční** metoda (1965)
- Kowalski; Colmerauer, Roussel - **Prolog** (1972)



# Jazyk matematiky

Logika formalizuje pojem **důkazu** a **pravdivosti** matematických tvrzení.

Lze ji postupně rozčlenit dle prostředků jazyka.

- **logické spojky**

*výroková logika*

Umožňují vytvářet složená tvrzení ze základních.

- **proměnné pro individua, funkční a relační symboly, kvantifikátory** *1. řádu*

Tvrzení o individuích, jejich vlastnostech a vztazích. Teorii množin, která je “světem” (téměř) celé matematiky, lze popsat jazykem 1. řádu.

V jazyce vyšších řádů máme navíc

- **proměnné pro množiny individuí (i relace a funkce)**

*logika 2. řádu*

- **proměnné pro množiny množin individuí, *atd.***

*logika 3. řádu*

- ...

# Příklady tvrzení v jazycích různých řádů

- “Nebude-li pršet, nezmoknem. A když bude pršet, zmokneme, na sluníčku zase uschneme.”

výrok

$$(\neg p \rightarrow \neg z) \wedge (p \rightarrow (z \wedge u))$$

- “Existuje nejmenší prvek.”

1. řádu

$$\exists x \forall y (x \leq y)$$

- Axiom indukce.

2. řádu

$$\forall X ((X(0) \wedge \forall x (X(x) \rightarrow X(x+1))) \rightarrow \forall x X(x))$$

- “Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.”

3. řádu

$$\forall \mathcal{X} \forall Y ((\forall X (\mathcal{X}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)) \wedge \forall x (Y(x) \leftrightarrow \exists X (\mathcal{X}(X) \wedge X(x)))) \rightarrow \mathcal{O}(Y))$$

# Syntax a sémantika

Budeme studovat vztahy mezi syntaxí a sémantikou:

- *syntax*: symboly, pravidla vytváření termů a formulí, odvozovací pravidla, dokazovací systém, důkaz, dokazatelnost,
- *sémantika*: přiřazení významu, struktury, modely, splnitelnost, pravdivost.

V logice zavedeme pojem **důkazu** jako přesný syntaktický koncept.

Formální dokazovací systém je

- **korektní**, pokud **každé dokazatelné tvrzení je pravdivé**,
- **úplný**, pokud **každé pravdivé tvrzení je dokazatelné**.

Uvidíme, že predikátová logika (1. řádu) má **dokazovací systémy**, které jsou **korektní a zároveň úplné**. Pro logiky vyšších řádů to neplatí.

# Paradoxy

“Paradoxy” jsou inspirací k přesnému zadefinování základů logiky.

- *paradox krét'ana*

*Krét'an řekl: “Všichni krét'ané jsou lháři.”*

- *paradox holiče*

*V městě žije holič, jenž holí všechny, kteří se neholí sami.*

*Holí sám sebe?*

- *paradox lháře*

*Tato věta je lživá.*

- *Berryho paradox*

*Výraz “nejmenší přirozené číslo, které nelze definovat méně než jedenácti slovy.” ho definuje pomocí deseti slov.*

# Množinové pojmy

Veškeré pojmy zavádíme v rámci **teorie množin** pouze pomocí predikátu náležení a rovnosti (a prostředků logiky).

- Množinová vlastnost  $\varphi(x)$  definuje **třídu**  $\{x \mid \varphi(x)\}$ . Třída, která není množinou, se nazývá **vlastní**, např.  $\{x \mid x = x\}$ .
- $x \notin y$ ,  $x \neq y$  jsou zkratkou za  $\neg(x \in y)$ ,  $\neg(x = y)$ .
- $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  označuje množinu obsahující právě  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ,  $\{x\}$  se nazývá **singleton**,  $\{x, y\}$  **neuspořádaná dvojice**.
- $\emptyset$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$ ,  $\Delta$  značí **prázdnou množinu**, **sjednocení**, **průnik**, **rozdíl**, **symetrický rozdíl** množin, např.

$$x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x) = \{z \mid (z \in x \wedge z \notin y) \vee (z \notin x \wedge z \in y)\}$$

- $x, y$  jsou **disjunktní** pokud  $x \cap y = \emptyset$ .  $x \subseteq y$  značí, že  $x$  je **podmnožinou**  $y$ .
- **Potenční množina** (**potence**)  $x$  je  $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$ .
- **Sjednocení** (**suma**)  $x$  je  $\bigcup x = \{z \mid \exists y (z \in y \wedge y \in x)\}$ .
- **Pokrytí** množiny  $x$  je množina  $y \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$  s  $\bigcup y = x$ . Jsou-li navíc každé dvě (různé) množiny v  $y$  disjunktní, je  $y$  **rozklad**  $x$ .

# Relace

- **uspořádaná dvojice** je  $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$ , tedy  $(x, x) = \{x, \{x\}\}$ ,  
**uspořádaná  $n$ -tice** je  $(x_0, \dots, x_{n-1}) = ((x_0, \dots, x_{n-2}), x_{n-1})$  pro  $n > 2$ ,
- **kartézský součin** je  $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ ,  
**kartézská mocnina** je  $x^0 = \{\emptyset\}$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^n = x^{n-1} \times x$  pro  $n > 1$ ,
- **disjunktí sjednocení** je  $x \uplus y = (\{\emptyset\} \times x) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times y)$ ,
- **relace** je jakákoliv množina  $R$  uspořádaných dvojic,  
 namísto  $(x, y) \in R$  píšeme obvykle  $R(x, y)$  nebo  $x R y$ ,  
**definiční obor (doména)**  $R$  je  $\text{dom}(R) = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$ ,  
**obor hodnot**  $R$  je  $\text{rng}(R) = \{y \mid \exists x (x, y) \in R\}$ ,  
**extenze** prvku  $x$  v  $R$  je  $R[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$ ,  
**inverzní relace** k  $R$  je  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ ,  
**restrikce  $R$  na množinu  $z$**  je  $R \upharpoonright z = \{(x, y) \in R \mid x \in z\}$ ,
- **složení** relací  $R$  a  $S$  je relace  $R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$ ,
- **identita** na množině  $z$  je relace  $\text{Id}_z = \{(x, x) \mid x \in z\}$ .

# Ekvivalence

- Relace  $R$  je **ekvivalence** na  $X$ , pokud pro všechna  $x, y, z \in X$  platí

$$R(x, x) \quad (\text{reflexivita})$$

$$R(x, y) \rightarrow R(y, x) \quad (\text{symetrie})$$

$$R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z) \quad (\text{tranzitivita})$$

- $R[x]$  se nazývá **třída ekvivalence** (**faktor**) prvku  $x$  dle  $R$ , značíme i  $[x]_R$ .
- $X/R = \{R[x] \mid x \in X\}$  je **faktORIZACE množiny  $X$  dle  $R$** .
- Platí, že  $X/R$  je rozklad  $X$ , neboť třídy jsou disjunktní a pokrývají  $X$ .
- Naopak, je-li  $S$  rozklad  $X$ , určuje ekvivalenci (na  $X$ )

$$\{(x, y) \mid x \in z, y \in z \text{ pro nějaké } z \in S\}.$$

# Uspořádání

Nechť  $\leq$  je relace na množině  $X$ . Řekneme, že  $\leq$  je

- **částečné uspořádání** (množiny  $X$ ), pokud pro všechna  $x, y, z \in X$

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

- **lineární (totální) uspořádání**, pokud navíc pro všechna  $x, y \in X$

$$x \leq y \vee y \leq x \quad (\text{dichotomie})$$

- **dobré uspořádání**, pokud navíc každá neprázdná podmnožina  $X$  obsahuje **nejmenší prvek**.

Označme ' $x < y$ ' za ' $x \leq y \wedge x \neq y$ '. Lineární uspořádání  $\leq$  na  $X$  je

- **husté uspořádání**, pokud  $X$  není singleton a pro všechna  $x, y \in X$

$$x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y) \quad (\text{hustota})$$



# Funkce

Relace  $f$  je **funkce**, pokud pro každé  $x \in \text{dom}(f)$  existuje jediné  $y$  s  $(x, y) \in f$ .

- Pak říkáme, že  $y$  je **hodnotou** funkce  $f$  v  $x$ , píšeme  $f(x) = y$ ,
- $f: X \rightarrow Y$  značí, že  $f$  je funkce s  $\text{dom}(f) = X$  a  $\text{rng}(f) \subseteq Y$ ,
- funkce  $f$  je **na** (**surjektivní**)  $Y$ , pokud  $\text{rng}(f) = Y$ ,
- funkce  $f$  je **prostá** (**injektivní**), pokud pro všechna  $x, y \in \text{dom}(f)$

$$x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- $f: X \rightarrow Y$  je **bijekce**  $X$  a  $Y$ , je-li prostá a na  $Y$ ,
- je-li  $f: X \rightarrow Y$  prostá, pak  $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$  je **inverzní funkce**,
- **obraz** množiny  $A$  přes  $f$  je  $f[A] = \{y \mid (x, y) \in f \text{ pro nějaké } x \in A\}$ ,
- je-li  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$ , pak pro jejich **složení** platí  $(f \circ g): X \rightarrow Z$  a

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

- ${}^X Y$  značí množinu všech funkcí z  $X$  do  $Y$ .

# Čísla

Uvedeme příklady explicitních konstrukcí.

- **Přirozená čísla** definujeme induktivně vztahem  $n = \{0, \dots, n-1\}$ , tedy

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots$$

- množina **přirozených** čísel  $\mathbb{N}$  je definována jako nejmenší množina obsahující  $\emptyset$  uzavřená na  $S(x) := x \cup \{x\}$  (**následník**).
- množina **celých** čísel je  $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ , kde  $\sim$  je ekvivalence definovaná

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ právě když } a + d = b + c$$

- množina **racionálních** čísel je  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \approx$ , kde  $\approx$  je dána

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ právě když } a \cdot d = b \cdot c$$

- množina **reálných** čísel  $\mathbb{R}$  je množina **řezů** racionálních čísel, tj. netriviálních, dolů uzavřených podmnožin  $\mathbb{Q}$  bez **největšího prvku**.  
( $A \subset \mathbb{Q}$  je **dolů uzavřená**, pokud  $y < x \in A$  implikuje  $y \in A$ .)

# Velikosti množin

- $x$  má **stejnou nebo menší velikost** než  $y$  ( $x$  je **subvalentní**  $y$ ),  
pokud existuje prostá funkce  $f: x \rightarrow y$ ,  $(x \preceq y)$
- $x$  má **stejnou velikost** jako  $y$ , existuje-li bijekce  $f: x \rightarrow y$ ,  $(x \approx y)$
- $x$  má **menší velikost** než  $y$ , pokud  $x \preceq y$  a není  $x \approx y$ ,  $(x \prec y)$

**Věta (Cantor)**  $x \prec \mathcal{P}(x)$  pro každou množinu  $x$ .

**Důkaz**  $f(y) = \{y\}$  pro  $y \in x$  je **prostá** funkce  $f: x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ , **tedy**  $x \preceq \mathcal{P}(x)$ .

Pro spor předpokládejme, že **existuje prostá**  $g: \mathcal{P}(x) \rightarrow x$ . Definujme

$$y = \{g(z) \mid z \subseteq x \wedge g(z) \notin z\}$$

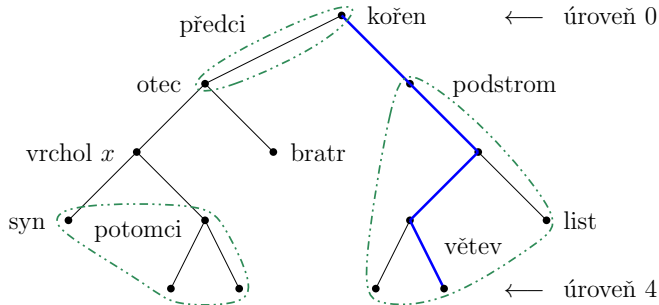
Dle definice,  $g(y) \in y$  právě když  $g(y) \notin y$ , spor.  $\square$

- pro každé  $x$  **existuje kardinální číslo**  $\kappa$  s  $x \approx \kappa$ , značíme  $|x| = \kappa$ ,
- $x$  je **konečná**, pokud  $|x| = n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ , jinak je **nekonečná**,
- $x$  je **spočetná**, pokud je konečná nebo  $|x| = |\mathbb{N}| = \omega$ ; jinak je **nespočetná**,
- $x$  má **mohutnost kontinua**, pokud  $|x| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ .

# $n$ -ární relace a funkce

- Relace **arity** (**četnosti**)  $n \in \mathbb{N}$  na  $X$  je libovolná množina  $R \subseteq X^n$ , tedy pro  $n = 0$  je  $R = \emptyset = 0$  nebo  $R = \{\emptyset\} = 1$ , pro  $n = 1$  je  $R \subseteq X$ ,
- (Částečná) funkce **arity** (**četnosti**)  $n \in \mathbb{N}$  z  $X$  do  $Y$  je libovolná funkce  $f \subseteq X^n \times Y$ . Řekneme, že  $f$  je **totální** na  $X^n$ , pokud  $\text{dom}(f) = X^n$ , značíme  $f: X^n \rightarrow Y$ . Je-li navíc  $Y = X$ , je to **operace** na  $X$ .
- Funkce  $f: A^n \rightarrow B$  je **konstantní**, pokud  $\text{rng}(f) = \{y\}$  pro nějaké  $y \in Y$ , pro  $n = 0$  je  $f = \{(\emptyset, y)\}$  a  $f$  ztotožňujeme s **konstantou**  $y$ .
- Aritu relace či funkce značíme  $\text{ar}(R)$  či  $\text{ar}(f)$  a mluvíme o **nulárních**, **unárních**, **binárních**, obecně  **$n$ -árních** relacích a funkcích (operacích).

# Stromy



- **Strom** je množina  $T$  s částečným uspořádáním  $<_T$ , ve kterém existuje (jedinečný) **nejmenší** prvek, zvaný **kořen**, a množina předků libovolného prvku je **dobře uspořádaná**,
- **větev** stromu  $T$  je **maximální lineárně uspořádaná podmnožina  $T$** ,
- adoptujeme standardní terminologii o stromech z teorie grafů, pak např.  
*větev v konečném stromu je cesta z kořene do listu.*

# Königovo lemma

Budeme pracovat (*pro jednoduchost*) obvykle s konečně větvícími se stromy, ve kterých má každý vrchol kromě kořene **bezprostředního** předka (*otce*).

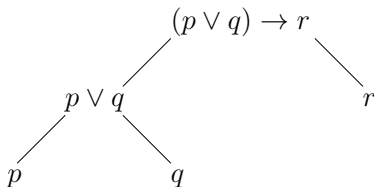
- ***n-tá úroveň*** stromu  $T$  pro  $n \in \mathbb{N}$  je daná indukcí, obsahuje syny vrcholů z  $(n - 1)$ -ní úrovně, 0-tá úroveň obsahuje právě kořen,
- ***hloubka*** stromu  $T$  je **maximální číslo  $n \in \mathbb{N}$  neprázdné úrovně**; pokud má  $T$  nekonečnou větev, je ***hloubka nekonečná*** či  $\omega$ .
- strom  $T$  je ***n-ární*** pro  $n \in \mathbb{N}$ , pokud **každý vrchol má nejvýše  $n$  synů**. Je ***konečně větvící se***, má-li každý vrchol konečně mnoho synů.

**Lemma (König)** *Každý nekonečný, konečně větvící se strom  $T$  obsahuje nekonečnou větev.*

**Důkaz** Hledání nekonečné větve začneme v kořeni. Jelikož má **jen konečně mnoho synů**, **existuje syn s nekonečně mnoha potomky**. **Vybereme ho a stejně pokračujeme v jeho podstromě.** Takto získáme nekonečnou větev. □

# Uspořádané stromy

- *Uspořádaný strom* je strom  $T$ , s kterým je dáno lineární uspořádání synů každého vrcholu, toto uspořádání se nazývá *pravolevé* a značí  $<_L$ . Oproti tomu, uspořádání  $<_T$  se nazývá *stromové*.
- *značený strom* je strom  $T$  s libovolnou funkcí (*značící funkce*), která každému vrcholu  $T$  přiřazuje nějaký objekt (*značku*).
- značené uspořádané stromy např. zachycují strukturu formulí



# Na závěr

- *Lze celou matematiku převést do logických formulí?*  
programování, AI, strojové dokazování, [Peano: Formulario](#) (1895-1908)
- *Proč to lidé (většinou) nedělají?*
- *Příklad Lze šachovnici bez dvou protilehlých rohů perfektně pokrýt kostkami domina?*

Snadno vytvoříme výrokovou formuli, která je [splnitelná](#), právě když to lze. Pak ji můžeme zkusit ověřit např. [rezolucí](#).

Jak to vyřešíme *elegantněji*? V čem náš postup spočívá?