

Přednáška 10, 5. prosince 2014

Tvrzení (limita funkce a uspořádání). *Funce f, g, h budte definované na nějakém prstencovém okolí prvku $a \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $f(x) > g(x)$.*
2. *Když existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $f(x) \geq g(x)$, pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, když obě limity existují.*
3. *(dva strážníci) Když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.*

Důkaz. Pomineme, velmi podobný důkazu analogických tvrzení pro limity posloupností. \square

Následující tvrzení pracuje se skládáním funkcí, což je operace, která pro posloupnosti nemá obdobu.

Tvrzení (limita složené funkce). *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce f je definovaná alespoň na prstencovém okolí prvku A , $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, funkce g je definovaná na prstencovém okolí prvku a , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$. Když je splněna jedna z podmínek, že*

1. *$A, B \in \mathbb{R}$, f je v A definovaná a $f(A) = B$ (takže je f v A spojitá) nebo*
2. *existuje $\delta > 0$, že $g(x) \neq A$ pro každé $x \in P(a, \delta)$, pak*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B.$$

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladů (zatím bez podmínek 1 a 2) existuje $\delta > 0$, že $f(P(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$. Pro toto $\delta > 0$ existuje $\theta > 0$, že $g(P(a, \theta)) \subset U(A, \delta)$. Platí-li první podmínka, je dokonce $f(U(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$. Tedy $f(g(P(a, \theta))) \subset f(U(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$. Platí-li druhá podmínka, po případném zmenšení θ je $g(P(a, \theta)) \subset P(A, \delta)$. Tedy $f(g(P(a, \theta))) \subset f(P(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$ a zase $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$. \square

Úloha. *Co se stane, když ani jedna z obou podmínek věty není splněna?*

Definice (spojitost na intervalu). *Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval (čili neprázdná podmnožina \mathbb{R} , která s každými dvěma prvky obsahuje i každý třetí ležící mezi nimi). Řekneme, že f je na I spojitá, když je f spojitá v každém bodu $a \in I$.*

Věta (Darbouxova o mezihodnotě). *Nechť $a, b, y \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

je na $[a, b]$ spojitá a $f(a) < y < f(b)$. Pak existuje $\alpha \in [a, b]$, že $f(\alpha) = y$.

Důkaz. *Nechť*

$$\alpha = \sup(M) = \sup(\{x \in [a, b] \mid f(x) < y\}) .$$

Jistě $a \in M$ a b je horní mezí M , takže definice α je korektní. Ze spojitosti f v a a b plyne, že pro nějaké $\delta > 0$ je $f(x) < y$ na $[a, a + \delta)$ a $f(x) > y$ na $(b - \delta, b]$. Takže $\alpha \neq a, b$ a α je vnitřní bod intervalu $[a, b]$.

Nechť $f(\alpha) \neq y$. Ze spojitosti f v α plyne, že pro nějaké malé $\delta > 0$, $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset [a, b]$, na celém intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ je buď $f(x) < y$ nebo $f(x) > y$. Což je spor s definicí α jakožto suprema — v prvním případě $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset M$ čili M obsahuje čísla větší než α a ve druhém je $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap M = \emptyset$ čili není splněna aproximační vlastnost suprema. Tedy $f(\alpha) = y$. \square

Totéž samozřejmě platí, když přepokládáme, že $f(a) > y > f(b)$. Věta nese jméno francouzského matematika *Gastona Darboux (1842–1917)*.

Důsledek (obraz intervalu spojitou funkcí). *Když je $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak je obraz $f(I) \subset \mathbb{R}$ též interval.*

Důkaz. Z věty plyne, že když $u, v \in f(I)$, $u < v$ a $u < w < v$, potom $w \in f(I)$. Takže $f(I)$ je interval. \square

Věta (princip maxima). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

je na $[a, b]$ spojitá. Pak existuje $\alpha \in [a, b]$, že pro každé $x \in [a, b]$ je $f(x) \leq f(\alpha)$ — funkce f na $[a, b]$ nabývá v bodě α svou největší hodnotu.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že množina $f([a, b])$ je shora omezená. Kdyby nebyla, měli bychom posloupnost $(x_n) \subset [a, b]$, že $\lim f(x_n) = +\infty$. Podle

B.-W. věty má (x_n) konvergentní podposloupnost. Pro jednoduchost značení ji označíme také (x_n) . Tedy $\lim x_n = \alpha \in [a, b]$ (podle Tvrzení o limitě a uspořádání). Protože je ale f v α spojitá, podle Heineho definice limity je $+\infty = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\alpha) \in \mathbb{R}$ — spor. Takže je $f([a, b])$ shora omezená a můžeme definovat

$$c = \sup(f([a, b])) \in \mathbb{R}.$$

Z vlastností suprema plyne, že existuje posloupnost $(x_n) \subset [a, b]$ (označíme ji stejně), že pro každé n je

$$c - 1/n < f(x_n) \leq c.$$

Tato posloupnost má opět podle B.-W. věty konvergentní podposloupnost, kterou opět pro jednoduchost značení označíme stejně, $\lim x_n = \alpha \in [a, b]$. Ze spojitosti f v α a Heineho definice limity je zas

$$c = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\alpha).$$

Teď nemáme spor, ale ukázali jsme, že funkční hodnota $f(\alpha)$ je c , jež je největší ze všech (c je horní mezí množiny $f([a, b])$). \square

Podobně se ukáže, že když je f na $[a, b]$ spojitá, nabývá tam svou nejmenší hodnotu. Intervaly typu $[a, b]$ se nazývají *kompaktní*. Pro jiné intervaly princip maxima neplatí, např. $f(x) = 1/x : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $(0, 1]$ spojitá, ale nenabývá na něm největší hodnotu. Snadno se na příkladu ukáže, že spojitost je podstatná, funkce $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ daná jako $f(x) = x$ pro $0 \leq x < 1$ a $f(1) = 0$, která na intervalu $[0, 1]$ není spojitá, na $[0, 1]$ nenabývá největší hodnotu, i když to je kompaktní interval.

Je-li $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ prostá funkce, je **definovaná její inverzní funkce** $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$, $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Připomeňme si, že $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je *rostoucí*, resp. *klesající* (na množině M), když $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, resp. $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Při neostrých nerovnostech dostáváme *neklesající*, resp. *nerostoucí* funkci.

Tvrzení (spojitost inverzní funkce). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ je rostoucí (resp. klesající) funkce, jež je na J spojitá. Pak je inverzní funkce*

$$f^{-1} : K = f(J) \rightarrow \mathbb{R}$$

na intervalu K spojitá a rostoucí (resp. klesající).

Důkaz. Z časových důvodů pomineme. □

Operace zachovávající spojitost funkce tedy jsou: aritmetické operace $+$, $-$, \times , $/$, skládání funkcí a invertování funkcí. Přesněji: když jsou funkce f, g definované na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a jsou v a spojité, pak jsou v okolí bodu a definované a v a spojité i funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ a, pokud $g(a) \neq 0$, i $f(x)/g(x)$. To plyne z Tvzení o aritmetice limit funkcí. Dále, je-li g definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, f na okolí bodu $g(a)$, g je spojitá v a a f v $g(a)$, pak je složená funkce $f(g(x))$ definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a v a spojitá. To plyne z Tvzení o limitě složené funkce. O spojitosti inverzní funkce hovoří předchozí tvrzení.

Tvrzení (třídy spojitých funkcí). *Následující funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru: polynomy, racionální funkce (podíly polynomů), e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log x$.*

Důkaz. Polynomy a racionální funkce se dostanou z konstantní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ a identické funkce $f(x) = x$, jež jsou zjevně spojité na \mathbb{R} , aritmetickými operacemi. Exponenciála je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, protože

$$|e^x - e^a| = e^a |e^{x-a} - 1| < 2e^a |x - a|, \quad \text{když } |x - a| < 1/2,$$

jak plyne z rozvoje e^{x-a} do řady. Funkce $\log x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $(0, +\infty)$ spojitá podle Tvzení o spojitost inverzní funkce. Spojitost funkcí $\sin x$ a $\cos x$ plyne podobně z rozvoje do řady. □

Aplikací aritmetických operací, skládání a invertování vyrobíme z těchto funkcí spoustu dalších spojitých funkcí. Třeba

$$\sqrt{1-x^2} = e^{(1/2)\log(1-x^2)}$$

je spojitá na svém definičním oboru $[-1, 1]$ atd.