Přednáška 11, 12. prosince 2014

Závěrem pasáže o spojitých funkcích zmíníme jejich podtřídu, *lipschitzovské funkce*, nazvané podle německého matematika *Rudolfa Lipschitze (1832–1903)*. Fukce $f:\ M \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská, když existuje konstanta $c > 0$, že pro každé dva prvky $x, y \in M$ platí nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|\ .$$

Část 5: derivace funkce

Derivace patří k nejdůležitějším pojmům matematické analýzy. Umožňuje danou funkci aproximovat, ba i často přesně vyjádřit, pomocí jednoduchých funkcí — lineárních, polynomů či mocninných řad — a to lokálně i globálně.

Definice (derivace funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a $f:\ U(a, \delta) \to \mathbb{R}$. Derivace funkce f v bodě a je hodnota limity*

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(když tato limita existuje).

Jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ definujeme zřejmým způsobem pomocí limity zleva a limity zprava. Hodnota derivací $f'(a)$, $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ může být i nevlastní a platí ekvivalence

$$f'(a) = A \iff f'_-(a) = A\ \&\ f'_+(a) = A\ .$$

Nechť $f:\ U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ (pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$). Je-li f v a spojitá, je v okolí a funkce f dobře aproximována konstantní funkcí $g(x) = f(a)$. Těsněji lze aproximovat pomocí tečny.

Definice (tečna). *Řekneme, že funkce f má v a tečnu, existuje-li taková přímka $p \subset \mathbb{R}^2$ jdoucí bodem $(a, f(a))$, že pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in U(a, \delta)$ bod $(x, f(x))$ leží v rovinném úhlu $V \subset \mathbb{R}^2$, jehož osou je p a který má u vrcholu $(a, f(a))$ úhel ε. (Takže V jsou ty body v rovině, které leží na přímkách p_1 a p_2 a mezi nimi, přičemž p_1, resp. p_2, dostaneme pootočením p kolem bodu $(a, f(a))$ v kladném, resp. záporném, smyslu o úhel $\varepsilon/2$.)*

Není těžké ukázat, že když tečna existuje, je jednoznačně určená.

Tvrzení (tečna, sečna, derivace). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f:\ U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ a p je přímka jdoucí bodem $(a, f(a))$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Přímka p je tečna funkce f v a.*

2. *(tečna jako limita sečny) Označíme-li pro $x \in P(a, \delta)$ jako p_x přímku jdoucí body $(x, f(x))$ a $(a, f(a))$, pak limitní přímka*

$$\lim_{x \to a} p_x$$

   existuje a rovná se p.

3. *(tečna jako derivace) Funkce f má derivaci $f'(a)$, přímka p je pro $f'(a) \in \mathbb{R}$ daná rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ a pro $f'(a) = \pm\infty$ rovnicí $x = a$.*

Tvrzení nebudeme dokazovat, ani nebudeme rozebírat smysl limitního přechodu ve druhé části.

Uvedeme pár příkladů derivací. Když $n \in \mathbb{N}_0$ a $f(x) = x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak $f'(x) = nx^{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. To plyne z binomické věty:

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} h^{i-1} \to na^{n-1},\ h \to 0\ .$$

Podobně na celém $\mathbb{R}$ máme rovnost $(e^x)' = e^x$ — exponenciální funkce se derivováním nemění. Jak víme, pro $h \to 0$ je $(e^h - 1)/h \to 1$, takže díky vlastnosti exponenciály i $(e^{a+h} - e^a)/h = e^a(e^h - 1)/h \to e^a$. Znaménková funkce $\mathrm{sgn}(x)$ má derivaci $\mathrm{sgn}'(a) = 0$ pro $a \neq 0$ a

$$\mathrm{sgn}'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(x)}{x} = +\infty\ .$$

Funkce $|x|$ má derivace $|x|' = (-x)' = -1$ pro $x < 0$, $|x|' = x' = 1$ pro $x > 0$ a derivace v 0 neexistuje, protože derivace zleva tam je -1 a zprava 1. Funkce $f(x)$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x \leq 0$, která je definovaná na celém $\mathbb{R}$ a je tam spojitá, má v nule derivaci

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(x) \cdot |x|^{1/3}}{\mathrm{sgn}(x) \cdot |x|} = \lim_{x \to 0} |x|^{-2/3} = +\infty\ .$$

Tvrzení (derivace a spojitost). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a) \in \mathbb{R}$. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Z definice $f'(a)$ plyne, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_0 < 0$, že

$$0 < |x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| < |x-a|\varepsilon$$

tedy

$$|f(x) - f(a)| < |x-a|(\varepsilon + |f'(a)|)\ .$$

Tedy $f(x)$ je spojitá v a: pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta = \min(\delta_0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |f'(a)|})$, pak $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $\square$

Dříve uvedené příklady ukazují, že opačná implikace neplatí — $f(x)$ může být v a spojitá a nemít $f'(a)$ — a že nevlastní $f'(a)$ spojitost $f(x)$ v a nezaručuje ale ani nevylučuje. Vlastní $f'(a)$ znamená, že f má v okolí a lineární aproximaci

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \Delta(x)\ ,$$

v níž chyba $\Delta(x) \to 0$ řádově rychleji než identická funkce: $\lim_{x \to a} \frac{\Delta(x)}{x-a} = 0$.

Tvrzení (aritmetika derivací). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, g : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce a existují derivace $f'(a), g'(a) \in \mathbb{R}^*$. Potom*

1. *$(f(x) + g(x))'(a) = f'(a) + g'(a)$, je-li pravá strana definovaná,*
2. *(Leibnizova formule) $(f(x)g(x))'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, je-li pravá strana definovaná a $f(x)$ nebo $g(x)$ je spojitá v a,*
3. *je-li $g(a) \neq 0$ a $g(x)$ je spojitá v a, pak*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\ ,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Dokážeme jen Leibnizovu formuli. Nechť je $g(x)$ spojitá v a (případ spojité $f(x)$ je symetrický). Hodnota $(f(x)g(x))'(a)$ podle definice derivace, předpokladu o $g(x)$ a Tvrzení o aritmetice limit funkcí je

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Je-li $f'(a)$ nebo $g'(a)$ vlastní, předpoklad o spojitosti je splněn automaticky (podle Tvrzení o spojitosti a derivaci). Pokud ale $f'(a)$ i $g'(a)$ je nevlastní a ani $f(x)$ ani $g(x)$ není v a spojitá, lze sestrojit dvě funkce, které v této situaci Leibnizovu formuli nesplňují. Ponecháváme to jako úlohu.

Tvrzení (derivace složené funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, funkce f je definovaná na okolí b, funkce g je definovaná na okolí a, $g(a) = b$, $g(x)$ je v a spojitá a existují derivace $f'(b), g'(a) \in \mathbb{R}^*$. Potom*

$$(f \circ g)'(a) = (f(g(x)))'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \ ,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Nebudeme z časových důvodů dokazovat. $\square$

Na příkladu lze opět ukázat, že předpoklad o spojitosti g v a je podstatný.

Tvrzení (derivace inverzní funkce). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a rostoucí či klesající, $a \in J$ je vnitřní bod intervalu, existuje derivace $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $f(a) = b$. Pak inverzní funkce $f^{-1} : K = f(J) \to J$ má v b derivaci a platí pro ni následující.*

1. *Když $f'(a) \neq 0$, pak*

$$(f^{-1}(x))'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \ .$$

2. *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (klesající), pak $(f^{-1}(x))'(b) = +\infty$ $(= -\infty)$.*

Důkaz. Nebudeme z časových důvodů podrobně dokazovat, plyne to z předchozího tvrzení. $\square$

Extrémy. Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f má v bodě a *lokální maximum*, resp. *ostré lokální maximum*, pokud existuje $\delta > 0$, že $x \in U(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) \leq f(a)$, resp. $x \in P(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) < f(a)$. Funkce f má v bodě a *maximum*, resp. *ostré maximum*, pokud $x \in M \Rightarrow f(x) \leq f(a)$, resp. $x \in M, x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$. Analogicky definujeme *lokální minimum*, resp. *ostré lokální minimum*, a *minimum*, resp. *ostré minimum*, jen se otočí nerovnost na $f(x) \geq f(a)$, resp. na $f(x) > f(a)$. Minimum a maximum se souhrně označuje jako *extrém*.

Tvrzení ($f' \neq 0 \Rightarrow$ není extrém). *Nechť $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, a nechť $f'(a) \neq 0$. Pak funkce f nemá v bodě a lokální extrém.*

Důkaz. Ukážeme, že pro každé $\delta > 0$ existují body $b, c \in U(a,\delta)$, že $f(b) < f(a) < f(c)$, což vylučuje lokální extrém. Nechť $f'(a) < 0$, případ $f'(a) > 0$ je podobný. Protože $\lim_{x \to a^-}(f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a) < 0$, je $f(x) - f(a) > 0$ na levém prstencovém okolí bodu a a podobně $\lim_{x \to a^+}(f(x) - f(a))/(x - a) = f'(a) < 0$ implikuje, že $f(x) - f(a) < 0$ na pravém prstencovém okolí bodu a. Odtud máme spoustu požadovaných bodů b a c. $\square$

Důsledek (body podezřelé z extrému). *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Pak f má v a lokální extrém $\Rightarrow$ $f'(a)$ není definovaná nebo neexistuje nebo je 0.*

Jako příklad uvažme tři funkce $f_i: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x$ a $f_3(x) = x^2$. Body podezřelé z extrému jsou pro f_1 body $-1, 0, 1$, protože v ± 1 derivace f_1' není definovaná, v 0 neexistuje a jinde v $[-1,1]$ je 1 nebo -1. Pro f_2 jsou podezřelé body $-1, 1$, kde f_2' není definovaná, jinde je $f_2'(x) = 1$. Pro f_3 jsou podezřelé body $-1, 0, 1$: v ± 1 opět f_3' není definovaná, jinde je $f_3'(x) = 2x$, takže jediný nulový bod $f_3'(x)$ je $x = 0$. Lokální extrémy funkcí f_i tedy mohou nastat jen v uvedených bodech. Funkce f_1 a f_3 mají v -1 a 1 neostré maximum a v 0 ostré minimum. Funkce f_2 má v -1 ostré minimum a v 1 ostré maximum.

Závěrem přednášky uvedeme tři věty o střední hodnotě, z nichž první dvě dokážeme na příští přednášce.

Věta (věty o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce (na $[a,b]$), které mají na (a,b) derivaci.*

1. *(Rolleova věta) Když $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a,b)$, že*
$$f'(c) = 0\ .$$

2. *(Lagrangeova věta) Existuje $c \in (a,b)$, že*
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

3. *(Cauchyova věta) Když je na (a,b) derivace g' vlastní a nenulová, pak existuje $c \in (a,b)$, že*
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ .$$

Geometricky Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že pro každou funkci f spojitou na intervalu $[a, b]$, jež má v každém vnitřním bodě intervalu tečnu, je některá z tečen rovnoběžná se sečnou jdoucí krajními body grafu funkce, to jest body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Kdo byli Rolle a Lagrange? *Michel Rolle (1652–1719)* byl francouzský matematik (nejvíc známý uvedenou větou). *Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)* byl italsko-francouzský matematik působící v Itálii (hlavně Turíně), Prusku (Berlíně) a Francii (Paříži) (po Newtonovi nově shrnul mechaniku, jeho pojetí bylo základem matematické fyziky v 19. století).