AUTOMATY A GRAMATIKY

3

Pavel Surynek

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Redukce konečných automatů (1)

- **Dosažitelné** stavy
  - konečný automat interpretován jako orientovaný graf
    - graf prohledáme z počátečního stavu
    - KA tvořený nalezenou komponentou souvislosti je ekvivalentní původnímu KA
- **Ekvivalentní** stavy
  - Uvažujme KA $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$
    - stavy $p,q \in Q$ jsou **ekvivalentní**, jestliže $\forall w \in X^* \; \delta^*(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,w) \in F$
      - označení $p \sim q$
    - ekvivalence $\approx$ nad Q se nazývá **automatová kongruence**, jestliže $\forall p,q \in Q \; p \approx q \Rightarrow p \in F \Leftrightarrow q \in F \land \forall x \in X \; \delta(p,x) \approx \delta(q,x)$
  - platí, že stavová ekvivalence je automatovou kongruencí

Ekvivalence stavů (1)

- **Konstrukce** stavové ekvivalence
  - posloupnost ekvivalencí $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$
    - $\sim_i$ $\forall w \in X^*$ že $|w| \leq i$ je $\delta^*(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,w) \in F$
    - induktivní konstrukce
      - $p \sim_0 q$ $\quad p \in F \Leftrightarrow q \in F$
      - $p \sim_{i+1} q$ $\quad p \sim_i q \wedge \forall x \in X\ \delta(p,x) \sim_i \delta(q,x)$
    - ověření zkonstruované $\sim_i$ indukcí podle délky w
      - $p \sim_0 q$ $\quad w = \lambda$ $\quad \delta^*(p, \lambda) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, \lambda) \in F$
      - $p \sim_{i+1} q$ $\quad w = xv,\ |w| = i+1$ chceme $\delta^*(p, xv) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, xv) \in F$,
        víme, že $\delta(p, x) \sim_i \delta(q, x)$ tedy
        $\delta^*(\delta(p, x), v) \in F \Leftrightarrow \delta^*(\delta(q, x), v) \in F$
    - $p \sim q$, jestliže $\forall i \in \mathbb{N}$ je $p \sim_i q$

Ekvivalence stavů (2)

- **Vlastnosti** posloupnosti ekvivalencí $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$
  - (i) $\sim_{i+1}$ je zjemněním $\sim_i$
    - $p \sim_{i+1} q \Rightarrow p \sim_i q$
  - (ii) $\sim_{i+1} = \sim_i$, pak $\forall j > i \; \sim_j = \sim_i$
  - (iii) když $|Q| = n$, pak $\exists j \leq n-1$, že $\sim_j = \sim_{j+1}$
  - (iv) $\sim_{i+1} = \sim_i$, pak $\sim_i = \sim$
- **Důkaz**:
  - (ii) $p \sim_{i+1} q$, jestliže $p \sim_i q \wedge \forall x \in X \; \delta(p,x) \sim_i \delta(q,x)$
    - $p \sim_{i+2} q$, jestliže $p \sim_{i+1} q \wedge \forall x \in X \; \delta(p,x) \sim_{i+1} \delta(q,x)$
    - $p \sim_{i+2} q$, jestliže $p \sim_i q \wedge \forall x \in X \; \delta(p,x) \sim_i \delta(q,x)$, tedy $p \sim_{i+2} q \Leftrightarrow p \sim_{i+1} q$
  - (iii) na množině velikosti n lze provést nejvýše n-1 po sobě jdoucích netriviálních zjemnění ekvivalence
    - po triviálním zjemnění, tj. když $\sim_{i+1} = \sim_i$ další netriviální zjemnění podle (ii) nemůže následovat
  - (iv) $p \sim q$, jestliže $\forall k \in \mathbb{N}$ je $p \sim_k q$
    - $\forall k \in \mathbb{N}$ je $p \sim_k q \Leftrightarrow p \sim_k q$ pro k=0,1,…,j a $p \sim_k q$ pro k=j+1, j+2, …
    - z (ii) a (iii) $\sim_k = \sim_j$ pro k=j+1, j+2, …, tedy $p \sim q \Leftrightarrow p \sim_k q$ pro k=0,1,…,j; z (i) dostáváme $p \sim q \Leftrightarrow p \sim_j q$

Redukce konečných automatů (2)

- KA $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$ a $\approx$ automatová kongruence
  - $A/_\approx = (Q/_\approx,X,\delta_\approx,[q_0]_\approx,F_\approx)$ je **podílový automat**, kde
    - $\delta_\approx([q]_\approx,x)=[\delta(q,x)]_\approx$ pro $q\in Q$ a $x\in X$
    - $F_\approx=\{[f]_\approx | f\in F\}$
  - $\delta_\approx$ je korektně definovaná
- Podílový automat $A/_\approx$ je ekvivalentní s A
  - definujeme homomorfismus $h: Q \to Q/_\approx$, že $h(q)=[q]_\approx$
    - $h(q_0)=[q_0]_\approx$
    - $h(\delta(q,x))=[\delta(q,x)]_\approx=\delta_\approx([q]_\approx,x)=\delta_\approx(h(q),x)$ pro $q\in Q$ a $x\in X$
    - $f\in F \Leftrightarrow [f]_\approx \in F_\approx \Leftrightarrow h(f)\in F_\approx$

Redukce konečných automatů (3)

- Volíme-li stavovou ekvivalenci $\sim$ jako automatovou kongruenci
  - pak v podílovém automatu $A/_{\sim}$ nejsou žádné dva stavy ekvivalentní.

- Konečný automat je **redukovaný**, jestliže jsou všechny jeho stavy dosažitelné a žádné dva stavy nejsou ekvivalentní.

- Konečný automat B je **reduktem** konečného automatu A, jestliže B je redukovaný a L(A)=L(B).
  - **Konstrukce** reduktu:
    - odstranit nedosažitelné stavy
    - najít stavovou ekvivalenci $\sim$
    - sestrojit podílový automat $A/_{\sim}$

Vlastnosti redukovaných automatů (1)

- Věta o izomorfismu reduktů
  - Redukované konečné automaty A a B, jsou **ekvivalentní**, právě když jsou A a B **izomorfní**.
- Důkaz:
  - $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$, $B = (Q_B, X, \delta_B, q_{B0}, F_B)$
  - $\Rightarrow$
    - konstruujme izomorfismus, tedy $h: Q_A \rightarrow Q_B$
      - pro $p \in Q_A$ položme $h(p) = q$, kde $q \in Q_B$ takové, že $\exists w \in X^*$ a $\delta_A{}^*(q_{A0}, w) = p$, $\delta_B{}^*(q_{B0}, w) = q$
      - p je dosažitelný, tedy $\exists w \in X^*$ a $\delta_A{}^*(q_{A0}, w) = p$
      - alternativní volba w nic nemění
        - $u \in X^*$ a $\delta_A{}^*(q_{A0}, u) = p$, ale $\delta_B{}^*(q_{B0}, u) \neq q$
        - protože stavy $\delta_B{}^*(q_{B0}, u)$ a q nejsou v B ekvivalentní, $\exists v \in X^*$, že $\delta_B{}^*(q_{B0}, uv) \notin F_B$ a $\delta_B{}^*(q_{B0}, wv) \in F_B$ (či naopak, tj. $\in$, $\notin$)
        - z ekvivalence A a B je $\delta_A{}^*(q_{A0}, wv) \in F_A$; pak také $\delta_A{}^*(q_{A0}, uv) \in F_A$

Vlastnosti redukovaných automatů (2)

- ⇒ (pokračování)
  - ověříme, že $h: Q_A \rightarrow Q_B$ je izomorfismus
    - h je *prostá* a *na*
    - $h(q_{A0}) = \delta_B^*(q_{B0}, \lambda) = q_{B0}$
    - $h(\delta_A(p,x))=\delta_B(h(p),x)$, pro $p\in Q_A$ a $x\in X$
      - $\delta_A^*(q_{A0}, w)=p$, pak $\delta_A(p,x)=\delta_A^*(q_{A0}, wx)$
      - $h(\delta_A^*(q_{A0}, wx)) = \delta_B^*(q_{B0}, wx) = \delta_B(\delta_B^*(q_{B0}, w),x) = \delta_B(h(p),x)$
    - $p\in F_A$, právě když $\delta_A^*(q_{A0}, w)\in F_A$
      - z ekvivalence A a B je $\delta_B^*(q_{B0}, w)\in F_B$, což je, právě když $h(p)\in F_B$
- ⇐
  - ihned vidíme

Pavel Surynek, 2015

Důsledky věty o izomorfismu

- Pro daný regulární jazyk L zkonstruovat přijímající konečný automat s co **nejmenším počtem stavů**.
  - najít libovolný KA A, že L(A)=L
  - zkonstruovat redukt A
    - KA B, že L(B)=L, s menším počtem stavů než má redukt A nemůže existovat
- Rozhodnout, zda jsou konečné **automaty A a B ekvivalentní**, tedy zda L(A)=L(B).
  - provést redukci A a B
  - otestovat izomorfismus reduktů A a B
- Pro konečné automaty A a B rozhodnout, zda $L(A) \subseteq L(B)$.
  - zkonstruujeme KA C, že $L(C) = L(A) \cup L(B)$
  - ověříme, zda L(C) = L(B)
- Pro konečný automat A rozhodnout některé speciální případy L(A)
  - $L(A)=\emptyset$
    - mezi dosažitelnými stavy nebude žádný přijímající
  - $L(A)=X^*$
    - zredukovat A
    - výsledem bude KA s jedním stavem, který bude přijímající

Nedeterminismus

- **Nedeterministický** konečný automat
  - $A = (Q,X,\delta,S_0,F)$
    - Q – konečná neprázdná množina stavů
    - X – konečná neprázdná abeceda
    - $\delta: Q \times X \rightarrow 2^Q$ - přechodová funkce, kde 2^Q je množina všech podmnožin Q
    - $S_0 \subseteq Q$ - množina počátečních stavů
    - $F \subseteq Q$ - množina přijímajících stavů
  - popis analogicky k deterministické verzi
    - stavový diagram, tabulka
  - slovo $w=x_1x_2 \ldots x_n$, kde $x_i \in X$ pro $i=1,2,\ldots,n$
    - posloupnost $q_0,q_1,\ldots q_n$, kde $q_j \in Q$ pro $j=0,1,\ldots,n$ je **výpočet** NKA A nad slovem w, jestliže $q_0 \in S_0$ a $q_i \in \delta(q_{i-1},x_i)$ pro $i=1,2,\ldots,n$
      - navíc je to výpočet **přijímající**, když $q_n \in F$
    - $L(A) = \{w \mid w \in X^* \wedge$ existuje přijímající výpočet A nad w $\}$
      - aby bylo w přijato, stačí „uhádnout" přijímající výpočet
        - idea: „NKA hádá vždy správně"
      - $K_n = \{ w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge (\exists u,v \in \{a,b\}^*)[w=ubv \wedge |v|=n-1]\}$, pro $n=1,2,\ldots$
        - snadno lze zkonstruovat NKA A_n, že $L(A_n)=K_n$

Souvislost s deterministickým KA (1)

- Nedeterministické KA přijímají regulární jazyky
  - Jazyk přijímaný (deterministickým) konečným automatem $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$ je přijímán nedeterministickým konečným automatem $A^n = (Q,X,\delta^n,\{q_0\},F)$, kde
    - $\delta^n(q,x)=\{\delta(q,x)\}$, pro $q\in Q$ a $x\in X$
  - uvažujme NKA $A = (Q,X,\delta,S_0,F)$
    - rozšířená přechodová funkce u NKA $\delta^*:2^Q\times X^*\rightarrow 2^Q$, kde
      - $\delta^*(A, \lambda) = A$ pro $A\subseteq Q$
      - $\delta^*(A, w) = \bigcup_{q\in\delta^*(A,v)}\delta(q,x)$ pro $A\subseteq Q$ a $w\in X^*$, kde $w=vx$ pro $v\in X^*$ a $x\in X$
    - pro $w\in X^*$ platí, že $w\in L(A)$, jestliže $\delta^*(S_0,w)\cap F\neq\emptyset$

Souvislost s deterministickým KA (2)

- NKA nepřijímají nic víc než regulární jazyky
  - Jazyk přijímaný nedeterministickým KA $A = (Q,X,\delta,S_0,F)$ je přijímán deterministickým KA $A^d=(2^Q, X, \delta^d, S_0, F^d)$, kde
    - $\delta^d(A, x)= \delta^*(A, x)$ pro $A\subseteq Q$ a $x\in X$
    - $F^d=\{A | A \subseteq Q \wedge A\cap F\neq\emptyset\}$
    - paralelně sledujeme všechny možné výpočty
  - při konstrukci A^d lze rovnou vyřadit nedosažitelné stavy
- U KA nedeterminismus nepřidal výpočetní sílu, pro jiné výpočetní modely ale toto platit nemusí.
  - došlo ke zjednodušení návrhu automatu
    - uvažte KA pro jazyk K_n
  - zjednodušení náhledu uzávěrových vlastností
    - uvažte sjednocení jazyků

Další **uzávěrové** vlastnosti (1)

- Regulární jazyky jsou uzavřené na **konkatenaci**
  - K, L jazyky nad X pak $K.L = \{u.v \mid u \in K \wedge v \in L\}$ je konkatenace K a L
  - Jsou-li K a L regulární, pak K.L je regulární
    - $K = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - $L = L(B)$, kde $B = (Q_B,X,\delta_B,q_{B0},F_B)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = K.L$
      - nedeterministicky propojíme přijímající stavy A a počáteční stav B
      - $C = (Q_A \cup Q_B, X, \delta_C, S_{C0}, F_B)$
      - $\delta_C(q,x) = \begin{cases} \{\delta_B(q,x)\} \text{ pro } q \in Q_B \\ \{\delta_A(q,x)\} \text{ pro } q \in Q_A \text{, že } \delta_A(q,x) \notin F_A \\ \{\delta_A(q,x), q_{B0}\} \text{ pro } q \in Q_A \text{, že } \delta_A(q,x) \in F_A \end{cases}$
      - $S_{C0} = \begin{cases} \{q_{A0}, q_{B0}\}\text{, když } q_{A0} \in F_A \\ \{q_{A0}\}\text{, když } q_{A0} \notin F_A \end{cases}$

Další **uzávěrové** vlastnosti (2)

- Regulární jazyky jsou uzavřené na **iteraci**
  - L je jazyk nad X, pak iterace L je $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, kde
    - $L^0=\{\lambda\}$, $L^1=L$, $L^{i+1}=L.L^i=L^i.L$
  - Je-li L regulární, pak L* je regulární
    - $L = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = L^*$
      - nedeterministicky propojíme počáteční a přijímající stavy A
      - $C = (Q_A \cup \{q_{C0}\}, X, \delta_C, \{q_{A0},q_{C0}\}, F_A \cup \{q_{C0}\})$
      - $\delta_C(q,x) = \begin{cases} \{\delta_A(q,x)\} \text{ pro } q\in Q_A, \text{ že } \delta_A(q,x)\notin F_A \\ \{\delta_A(q,x), q_{A0}\} \text{ pro } q\in Q_A, \text{ že } \delta_A(q,x)\in F_A \\ \emptyset \text{ pro } q=q_{C0} \end{cases}$

Další **uzávěrové** vlastnosti (3)

- Regulární jazyky jsou uzavřené na **zrcadlový obraz**
  - L je jazyk nad X, pak $L^R=\{w \mid w\in X^* \wedge (\exists u\in L)u^R=w\}$ je zrcadlový obraz L
  - Je-li L regulární, pak L^R je regulární
    - $L = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = L^R$
      - zaměníme počáteční a přijímající stavy, otočíme přechody
        - v deterministické variantě nelze
      - $C = (Q_A, X, \delta_C, F_A, \{q_{A0}\})$, kde
        - $\delta_C(q, x) = \{ p \mid q = \delta_A(p, x) \}$

Uzavřenost na **kvocienty**

- **Kvocienty** regulárních jazyků jsou regulární
  - Nechť R je **regulární** jazyk a L je **libovolný** jazyk nad X, pak L\R a R/L jsou regulární jazyky.
    - $R = L(A)$, kde $A=(Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ je KA
    - zkonstruujeme NKA C, že $L(C) = L\backslash R$
      - $C = (Q_A, X, \delta_C, S_{C0}, F_A)$, kde
        - $S_{C0}=\{q \mid q\in Q \wedge (\exists w\in L)\delta_A{}^*(q_{A0},w)=q\}$
        - $\delta_C(q, x) = \{ \delta_A(q, x) \}$ pro $q\in Q_A$ a $x\in X$
    - zkonstruujeme KA D, že $L(D) = R/L$
      - $D = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_D)$, kde
        - $F_D=\{q \mid q\in Q \wedge (\exists w\in L)\ \delta_A{}^*(q,w)\in F_A\}$