Výroková a predikátová logika - X

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

Redukce nesplnitelnosti na úroveň VL

Je-li otevřená teorie nesplnitelná, lze to "doložit na konkrétních prvcích".

Např. teorie

$$T = \{P(x,y) \vee R(x,y),\ \neg P(c,y),\ \neg R(x,f(x))\}$$

jazyka $L = \langle P, R, f, c\rangle$ nemá model, což lze doložit nesplnitelnou konjunkcí konečně mnoha instancí (některých) axiomů teorie T v konstantních termech

$$(P(c,f(c)) \vee R(c,f(c)))\ \wedge\ \neg P(c,f(c))\ \wedge\ \neg R(c,f(c)),$$

což je lživá formule ve tvaru výroku

$$(p \vee r)\ \wedge\ \neg p\ \wedge\ \neg r.$$

Instance $\varphi(x_1/t_1,\ldots,x_n/t_n)$ otevřené formule φ ve volných proměnných $x_1,\ldots,x_n$ je *základní (ground) instance*, jsou-li všechny termy $t_1,\ldots,t_n$ konstantní. Konstantní termy nazýváme také *základní (ground) termy*.

Herbrandův model

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk s alespoň jedním konstantním symbolem.
(Je-li třeba, do L přidáme nový konstantní symbol.)

- *Herbrandovo univerzum* pro L je množina všech konstantních termů z L.
  Např. pro $L = \langle P, f, c \rangle$, kde P je relační, f je binární funkční, c konstantní
  $$A = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c, f(c,c)), f(f(c,c), f(c,c)), \dots\}$$
- Struktura $\mathcal{A}$ pro L je *Herbrandova struktura*, je-li doména A Herbrandovo univerzum pro L a pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a $t_1, \dots, t_n \in A$,
  $$f^A(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$
  (včetně $n = 0$, tj. $c^A = c$ pro každý konstantní symbol c).
  Poznámka *Na rozdíl od kanonické struktury nejsou předepsané relace.*
  Např. $\mathcal{A} = \langle A, P^A, f^A, c^A \rangle$, kde $P^A = \emptyset$, $c^A = c$ a $f^A(c,c) = f(c,c)$, ...
- *Herbrandův model* teorie T je Herbrandova struktura, jež je modelem T.

Herbrandova věta

Věta *Nechť T je otevřená teorie jazyka L bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem. Pak*

(a) *T má Herbrandův model, anebo*

(b) *existuje konečně mnoho základních instancí axiomů z T, jejichž konjunkce je nesplnitelná, a tedy T nemá model.*

Důkaz Nechť T' je množina všech základních instancí axiomů z T. Uvažme dokončené (např. systematické) tablo τ z T' v jazyce L (bez přidávání nových konstant) s položkou $F\bot$ v kořeni.

- Obsahuje-li tablo τ bezespornou větev V, kanonický model z větve V je Herbrandovým modelem teorie T.
- Jinak je τ sporné, tj. $T' \vdash \bot$. Navíc je konečné, tedy $\bot$ je dokazatelný jen z konečně mnoha formulí T', tj. jejich konjunkce je nesplnitelná. $\square$

Poznámka *V případě jazyka L s rovností teorii T rozšíříme na T^* o axiomy rovnosti pro L a pokud T^* má Herbrandův model $\mathcal{A}$, zfaktorizujeme ho dle $=^{A}$.*

Důsledky Herbrandovy věty

Nechť L je jazyk obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

Důsledek *Pro každou otevřenou $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka L je $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$ pravdivá, právě když existují konstantní termy t_{ij} jazyka L takové, že*

$$\varphi(x_1/t_{11}, \ldots, x_n/t_{1n}) \vee \ldots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \ldots, x_n/t_{mn})$$

je (výroková) tautologie.

Důkaz $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\varphi$ je pravdivá $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\neg\varphi$ je nesplnitelná $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ je nesplnitelná. Ostatní vyplývá z Herbrandovy věty pro $\neg\varphi$. $\square$

Důsledek *Otevřená teorie T jazyka L má model, právě když teorie T' všech základních instancí axiomů z T má model.*

Důkaz Má-li T model $\mathcal{A}$, platí v něm každá instance každého axiomu z T, tedy $\mathcal{A}$ je modelem T'. Nemá-li T model, dle H. věty existuje (konečně) formulí z T', jejichž konjunkce je nesplnitelná, tedy T' nemá model. $\square$

Rezoluční metoda v PL - úvod

- Zamítací procedura - cílem je ukázat, že daná formule (či teorie) je nesplnitelná.
- Předpokládá otevřené formule v CNF (v množinové reprezentaci).

  Literál je *(tentokrát)* atomická formule nebo její negace.

  Klauzule je konečná množina literálů, $\square$ značí prázdnou klauzuli.

  Formule (v množinové reprezentaci) je množina (i nekonečná) klauzulí.

  Poznámka Každou formuli (teorii) umíme převést na ekvisplnitelnou otevřenou formuli (teorii) v CNF, tj. na formuli v množinové reprezentaci.
- Rezoluční pravidlo je obecnější - umožňuje rezolvovat přes literály, které jsou unifikovatelné.
- Rezoluce v PL je založená na rezoluci ve VL a unifikaci.

Lokální význam proměnných

Proměnné v rámci klauzule můžeme přejmenovat.

Nechť φ je *(vstupní)* otevřená formule v CNF.

- Formule φ je splnitelná, právě když její generální uzávěr φ' je splnitelný.
- Pro každé formule ψ, χ a proměnnou x

$$\models \quad (\forall x)(\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\forall x)\psi \wedge (\forall x)\chi$$

(i když x je volná v ψ a χ zároveň).

- Každou klauzuli ve φ lze tedy nahradit jejím generálním uzávěrem.
- Uzávěry klauzulí lze variovat (přejmenovat proměnné).

Např. variovaním druhé klauzule v (1) *získáme ekvisplnitelnou formuli* (2).

(1) $\{\{P(x), Q(x,y)\}, \{\neg P(x), \neg Q(y,x)\}\}$

(2) $\{\{P(x), Q(x,y)\}, \{\neg P(v), \neg Q(u,v)\}\}$

Přímá redukce do VL

Herbrandova věta umožňuje následující postup. Je ale značně neefektivní.

- Nechť S je *(vstupní)* formule v množinové reprezentaci.
- Lze předpokládat, že jazyk obsahuje alespoň jeden konstantní symbol.
- Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí z S.
- Zavedením prvovýroků pro každou atomickou sentenci lze S' převést na (případně nekonečnou) výrokovou formuli v množinové reprezentaci.
- Rezolucí na úrovni VL ověříme její nesplnitelnost.

Např. pro $S = \{\{P(x,y), R(x,y)\}, \{\neg P(c,y)\}, \{\neg R(x, f(x))\}\}$ *je*

$$S' = \{\{P(c,c), R(c,c)\}, \{P(c, f(c)), R(c, f(c))\}, \{P(f(c), f(c)), R(f(c), f(c))\} \dots, \\ \{\neg P(c,c)\}, \{\neg P(c, f(c))\}, \dots, \{\neg R(c, f(c))\}, \{\neg R(f(c), f(f(c)))\}, \dots\}$$

nesplnitelná, neboť na úrovni VL je

$$S' \supseteq \{\{P(c, f(c)), R(c, f(c))\}, \{\neg P(c, f(c))\}, \{\neg R(c, f(c))\}\} \vdash_R \square.$$

Substituce - příklady

Efektivnější je využívat vhodných substitucí. Např. pro

$a)$ $\{P(x), Q(x,a)\}$, $\{\neg P(y), \neg Q(b,y)\}$ substitucí x/b, y/a dostaneme $\{P(b), Q(b,a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(b,a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

Nebo substitucí x/y a rezolucí dle $P(y)$ dostaneme $\{Q(y,a), \neg Q(b,y)\}$.

$b)$ $\{P(x), Q(x,a), Q(b,y)\}$, $\{\neg P(v), \neg Q(u,v)\}$ substituce x/b, y/a, u/b, v/a dává $\{P(b), Q(b,a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(b,a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

$c)$ $\{P(x), Q(x,z)\}$, $\{\neg P(y), \neg Q(f(y),y)\}$ substitucí $x/f(z)$, y/z dostaneme $\{P(f(z)), Q(f(z),z)\}$, $\{\neg P(z), \neg Q(f(z),z)\}$ a z nich $\{P(f(z)), \neg P(z)\}$.

Při substituci $x/f(a)$, y/a, z/a dostaneme $\{P(f(a)), Q(f(a),a)\}$, $\{\neg P(a), \neg Q(f(a),a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(f(a)), \neg P(a)\}$. Předchozí substituce je ale obecnější.

Substituce

- *Substituce* je (konečná) množina $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, kde x_i jsou navzájem různé proměnné a t_i jsou termy, přičemž t_i není x_i.
- Jsou-li všechny termy t_i konstantní, je σ *základní substituce*.
- Jsou-li t_i navzájem různé proměnné, je σ *přejmenování proměnných*.
- *Výraz* je literál nebo term. *(Substituci lze aplikovat na výrazy.)*
- *Instance* výrazu E *při substituci* $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ je výraz $E\sigma$ vzniklý z E současným nahrazením všech výskytů proměnných x_i za t_i.
- Pro množinu výrazů S označmě $S\sigma$ množinu instancí $E\sigma$ výrazů E z S.

Poznámka *Jelikož substituce je současná pro všechny proměnné zároveň, případný výskyt proměnné x_i v termu t_j nevede k zřetězení substitucí.*

Např. pro $S = \{P(x), R(y, z)\}$ a substituci $\sigma = \{x/f(y, z), y/x, z/c\}$ je

$$S\sigma = \{P(f(y, z)), R(x, c)\}.$$

Skládání substitucí

Zadefinujeme $\sigma\tau$ *tak, aby* $E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$ *pro každý výraz* E.

Např. pro $E = P(x, w, u)$, $\sigma = \{x/f(y), w/v\}$, $\tau = \{x/a, y/g(x), v/w, u/c\}$ *je*

$$E\sigma = P(f(y), v, u), \quad (E\sigma)\tau = P(f(g(x)), w, c).$$

Pak by mělo být $\sigma\tau = \{x/f(g(x)), u/c\}$.

Pro substituce $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \dots, y_n/s_n\}$ definujeme

$$\sigma\tau = \{x_i/t_i\tau \mid x_i \in X,\ x_i \text{ není } t_i\tau\} \cup \{y_j/s_j \mid y_j \in Y \setminus X\}$$

složenou substituci σ a τ, kde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$.

Poznámka *Skládání substitucí není komutativní, např. pro uvedené* σ *a* τ *je*

$$\tau\sigma = \{x/a, y/g(f(y)), u/c, w/v\} \neq \sigma\tau.$$

Skládání substitucí - vlastnosti

Ukážeme, že definice vyhovuje našemu požadavku a skládání je asociativní.

Tvrzení *Pro každý výraz* E *a substituce* σ, τ, ϱ *platí*

(i) $(E\sigma)\tau = E(\sigma\tau)$,

(ii) $(\sigma\tau)\varrho = \sigma(\tau\varrho)$.

Důkaz Nechť $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$. Stačí uvážit případ, kdy E je proměnná, řekněme v.

(i) Je-li v proměnná x_i pro nějaké i, je $v\sigma = t_i$ a $(v\sigma)\tau = t_i\tau$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $v\sigma = v$ a $(v\sigma)\tau = v\tau$.

Je-li v proměnná y_j pro nějaké j, je dále $(v\sigma)\tau = v\tau = s_j$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $(v\sigma)\tau = v\tau = v$ a zároveň $v(\sigma\tau) = v$.

(ii) Opakovaným užitím (i) dostaneme pro každý výraz E,

$$E((\sigma\tau)\varrho) = (E(\sigma\tau))\varrho = ((E\sigma)\tau)\varrho = (E\sigma)(\tau\varrho) = E(\sigma(\tau\varrho)). \qquad \square$$

Unifikace

Nechť $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ je (konečná) množina výrazů.

- *Unifikace* pro S je substituce σ taková, že $E_1\sigma = E_2\sigma = \cdots = E_n\sigma$, tj. $S\sigma$ je singleton.
- S je *unifikovatelná*, pokud má unifikaci.
- Unifikace σ pro S je *nejobecnější unifikace (mgu)*, pokud pro každou unifikaci τ pro S existuje substituce λ taková, že $\tau = \sigma\lambda$.

Např. $S = \{P(f(x), y), P(f(a), w)\}$ *je unifikovatelná pomocí nejobecnější* unifikace $\sigma = \{x/a, y/w\}$. Unifikaci $\tau = \{x/a, y/b, w/b\}$ dostaneme jako $\sigma\lambda$ pro $\lambda = \{w/b\}$. τ není mgu, nelze z ní získat unifikaci $\varrho = \{x/a, y/c, w/c\}$.

Pozorování *Jsou-li σ, τ různé nejobecnější unifikace pro S, liší se pouze přejmenováním proměnných.*

Unifikační algoritmus

Nechť S je (konečná) neprázdná množina výrazů a p je nejlevější pozice, na které se nějaké dva výrazy z S liší. Pak *neshoda* v S je množina $D(S)$ podvýrazů začínajících na pozici p ze všech výrazů v S.

Např. pro $S = \{P(x,y), P(f(x),z), P(z,f(x))\}$ *je* $D(S) = \{x, f(x), z\}$.

Vstup Neprázdná (konečná) množina výrazů S.

Výstup Nejobecnější unifikace σ pro S nebo *"S není unifikovatelná"*.

(0) Nechť $S_0 := S$, $\sigma_0 := \emptyset$, $k := 0$. *(inicializace)*

(1) Je-li S_k singleton, vydej substituci $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_k$. *(mgu pro S)*

(2) Zjisti, zda v $D(S_k)$ existuje proměnná x a term t neobsahující x.

(3) Pokud ne, vydej *"S není unifikovatelná"*.

(4) Jinak $\sigma_{k+1} := \{x/t\}$, $S_{k+1} := S_k\sigma_{k+1}$, $k := k+1$ a jdi na (1).

Poznámka *Test výskytu proměnné x v termu t v kroku (2) může být "drahý".*

Unifikační algoritmus - příklad

$$S = \{P(f(y, g(z)), h(b)),\ P(f(h(w), g(a)), t),\ P(f(h(b), g(z)), y)\}$$

1) $S_0 = S$ není singleton a $D(S_0) = \{y, h(w), h(b)\}$ obsahuje term $h(w)$ a proměnnou y nevyskytující se v $h(w)$. Pak $\sigma_1 = \{y/h(w)\}$, $S_1 = S_0\sigma_1$, tj.
$$S_1 = \{P(f(h(w), g(z)), h(b)),\ P(f(h(w), g(a)), t),\ P(f(h(b), g(z)), h(w))\}.$$

2) $D(S_1) = \{w, b\}$, $\sigma_2 = \{w/b\}$, $S_2 = S_1\sigma_2$, tj.
$$S_2 = \{P(f(h(b), g(z)), h(b)),\ P(f(h(b), g(a)), t)\}.$$

3) $D(S_2) = \{z, a\}$, $\sigma_3 = \{z/a\}$, $S_3 = S_2\sigma_3$, tj.
$$S_3 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b)),\ P(f(h(b), g(a)), t)\}.$$

4) $D(S_3) = \{h(b), t\}$, $\sigma_4 = \{t/h(b)\}$, $S_4 = S_3\sigma_4$, tj.
$$S_4 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b))\}.$$

5) S_4 je singleton a nejobecnější unifikace pro S je
$$\sigma = \{y/h(w)\}\{w/b\}\{z/a\}\{t/h(b)\} = \{y/h(b), w/b, z/a, t/h(b)\}.$$

Unifikační algoritmus - korektnost

Tvrzení *Pro každé S unifikační algoritmus vydá po konečně mnoha krocích korektní výsledek, tj. nejobecnější unifikaci σ pro S nebo pozná, že S není unifikovatelná. $(*)$ Navíc, pro každou unifikaci τ pro S platí, že $\tau = \sigma\tau$.*

Důkaz V každém kroku eliminuje jednu proměnnou, někdy tedy skončí.

- Skončí-li neúspěchem po k krocích, nelze unifikovat $D(S_k)$, tedy ani S.
- Vydá-li $\sigma = \sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_k$, je σ evidentně unifikace pro S.
- Dokážeme-li, že σ má vlastnost $(*)$, je σ nejobecnější unifikace pro S.

(1) Nechť τ je unifikace pro S. Ukážeme, že $\tau = \sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_i\tau$ pro každé $i \leq k$.

(2) Pro $i = 0$ platí (1). Nechť $\sigma_{i+1} = \{x/t\}$, předpokládejme $\tau = \sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_i\tau$.

(3) Stačí dokázat, že $v\sigma_{i+1}\tau = v\tau$ pro každou proměnnou v.

(4) Pro $v \neq x$ je $v\sigma_{i+1} = v$, tedy platí (3). Jinak $v = x$ a $v\sigma_{i+1} = x\sigma_{i+1} = t$.

(5) Jelikož τ unifikuje $S_i = S\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_i$ a proměnná x i term t jsou v $D(S_i)$, musí τ unifikovat x a t, tj. $t\tau = x\tau$, jak bylo požadováno pro (3). □

Obecné rezoluční pravidlo

Nechť klauzule C_1, C_2 neobsahují stejnou proměnnou a jsou ve tvaru

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\},$$

kde $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ lze unifikovat a $n, m \geq 1$. Pak klauzule

$$C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma,$$

kde σ je nejobecnější unifikace pro S, je *rezolventa* klauzulí C_1 a C_2.

Např. v klauzulích $\{P(x), Q(x, z)\}$ *a* $\{\neg P(y), \neg Q(f(y), y)\}$ *lze unifikovat* $S = \{Q(x, z), Q(f(y), y)\}$ pomocí nejobecnější unifikace $\sigma = \{x/f(y), z/y\}$ a získat z nich rezolventu $\{P(f(y)), \neg P(y)\}$.

Poznámka *Podmínce o různých proměnných lze vyhovět přejmenováním proměnných v rámci klauzule. Je to nutné, např. z* $\{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ *lze po přejmenování získat* $\square$*, ale* $\{P(x), P(f(x))\}$ *nelze unifikovat.*

Rezoluční důkaz

Pojmy zavedeme jako ve VL, jen navíc dovolíme přejmenování proměnných.

- *Rezoluční důkaz (odvození)* klauzule C z formule S je konečná posloupnost $C_0, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé $i \leq n$ je $C_i = C_i' \sigma$, kde $C_i' \in S$ a σ je přejmenování proměnných, nebo je C_i rezolventou nějakých dvou předchozích klauzulí (i stejných).
- Klauzule C je (rezolucí) *dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_R C$, pokud má rezoluční důkaz z S.
- *Zamítnutí* formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S.
- S je (rezolucí) *zamítnutelná*, pokud $S \vdash_R \square$.

Poznámka *Eliminace více literálů najednou je někdy nezbytná, např.* $S = \{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(x), \neg P(y)\}\}$ *je rezolucí zamítnutelná, ale nemá zamítnutí, při kterém by se v každém kroku eliminoval pouze jeden literál.*

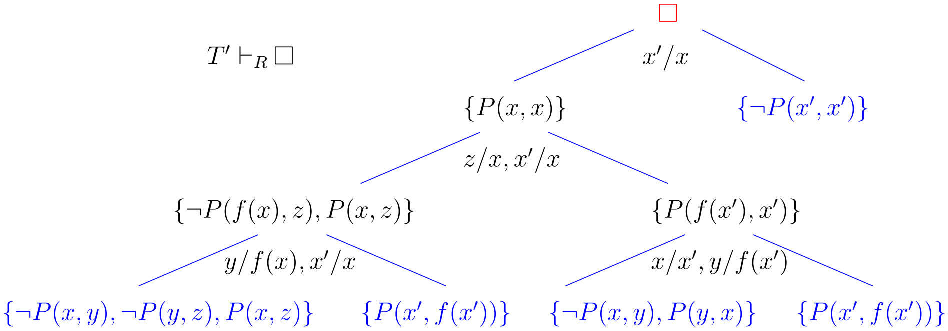
Příklad rezoluce

Mějme teorii $T = \{\neg P(x,x),\ P(x,y) \rightarrow P(y,x),\ P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)\}$.

Je $T \models (\exists x)\neg P(x, f(x))$? Tedy, je následující formule T' nesplnitelná?

$T' = \{\{\neg P(x,x)\}, \{\neg P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}, \{P(x, f(x))\}\}$

$T' \vdash_R \square$



Korektnost rezoluce

Nejprve ukážeme, že obecné rezoluční pravidlo je korektní.

Tvrzení Nechť C je rezolventa klauzulí C_1, C_2. Pro každou L-strukturu $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models C_1 \text{ a } \mathcal{A} \models C_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models C.$$

Důkaz Nechť $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots, A_n\}$, $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}$, σ je nejobecnější unifikace pro $S = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ a $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

- Jelikož C_1, C_2 jsou otevřené, platí i $\mathcal{A} \models C_1\sigma$ a $\mathcal{A} \models C_2\sigma$.
- Máme $C_1\sigma = C_1'\sigma \cup \{S\sigma\}$ a $C_2\sigma = C_2'\sigma \cup \{\neg(S\sigma)\}$.
- Ukážeme, že $\mathcal{A} \models C[e]$ pro každé e. Je-li $\mathcal{A} \models S\sigma[e]$, pak $\mathcal{A} \models C_2'\sigma[e]$ a tedy $\mathcal{A} \models C[e]$. Jinak $\mathcal{A} \not\models S\sigma[e]$, pak $\mathcal{A} \models C_1'\sigma[e]$ a tedy $\mathcal{A} \models C[e]$. $\square$

Věta (korektnost) *Je-li formule S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Nechť $S \vdash_R \square$. Kdyby $\mathcal{A} \models S$ pro nějakou strukturu $\mathcal{A}$, z korektnosti rezolučního pravidla by platilo i $\mathcal{A} \models \square$, což není možné. $\blacksquare$

Lifting lemma

Rezoluční důkaz na úrovni VL lze "zdvihnout" na úroveň PL.

Lemma *Nechť $C_1^* = C_1\tau_1$, $C_2^* = C_2\tau_2$ jsou základní instance klauzulí C_1, C_2 neobsahující stejnou proměnnou a C^* je rezolventa C_1^* a C_2^*. Pak existuje rezolventa C klauzulí C_1 a C_2 taková, že $C^* = C\tau_1\tau_2$ je základní instance C.*

Důkaz Předpokládejme, že C^* je rezolventa C_1^*, C_2^* přes literál $P(t_1, \ldots, t_k)$.

- Pak lze psát $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$ a $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, kde $\{A_1, \ldots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \ldots, t_k)\}$ a $\{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}$.
- Tedy $(\tau_1\tau_2)$ unifikuje $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ a je-li σ mgu pro S z unifikačního algoritmu, pak $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ je rezolventa C_1 a C_2.
- Navíc $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$ z vlastnosti $(*)$ pro σ a tedy

$$
\begin{aligned}
C\tau_1\tau_2 &= (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 \\
&= (C_1 \setminus \{A_1, \ldots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\})\tau_2 \\
&= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \ldots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}) = C^*. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Úplnost

Důsledek *Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí formule S. Je-li $S' \vdash_R C'$ (na úrovni VL), kde C' je základní klauzule, pak existuje klauzule C a základní substituce σ taková, že $C' = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).*

Důkaz Indukcí dle délky rezolučního odvození pomocí lifting lemmatu. □

Věta (úplnost) *Je-li formule S nesplnitelná, je $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Je-li S nesplnitelná, dle (důsledku) Herbrandovy věty je nesplnitelná i množina S' všech základních instancí klauzulí z S.

- Dle úplnosti rezoluční metody ve VL je $S' \vdash_R \square$ (na úrovni VL).
- Dle předchozího důsledku existuje klauzule C a substituce σ taková, že $\square = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).
- Jediná klauzule, jejíž instance je $\square$, je klauzule $C = \square$. ■

Lineární rezoluce

Stejně jako ve VL, rezoluční metodu lze značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- *Lineární důkaz* klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$ t.ž. C_0 je varianta klauzule v S a pro každé $i \leq n$
  - $i)$ B_i je varianta klauzule v S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$, a
  - $ii)$ C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i, kde $C_{n+1} = C$.
- C je *lineárně dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_L C$, má-li lineární důkaz z S.
- *Lineární zamítnutí* S je lineární důkaz $\square$ z S.
- S je *lineárně zamítnutelná*, pokud $S \vdash_L \square$.

Věta *S je lineárně zamítnutelná, právě když S je nesplnitelná.*

Důkaz $(\Rightarrow)$ Každý lineární důkaz lze transformovat na rezoluční důkaz.
$(\Leftarrow)$ Plyne z úplnosti lineární rezoluce ve VL (nedokazováno), neboť lifting lemma zachovává linearitu odvození. $\square$

LI-rezoluce

Stejně jako ve VL, pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- *LI-rezoluce* (*"linear input"*) z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B_i variantou klauzule ze (vstupní) formule S.
- Je-li klauzule C dokazatelná LI-rezolucí z S, píšeme $S \vdash_{LI} C$.
- *Hornova formule* je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Fakt* je (Hornova) klauzule $\{p\}$, kde p je pozitivní literál.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Věta *Je-li Hornova T splnitelná a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z $T \cup \{G\}$ začínající G.*

Důkaz Plyne z Herbrandovy věty, stejné věty ve VL a lifting lemmatu. $\square$

Program v Prologu

Program (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

$syn(X,Y) :- otec(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg otec(Y,X), \neg muz(X)\}$
$syn(X,Y) :- matka(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg matka(Y,X), \neg muz(X)\}$
$muz(jan).$	$\{muz(jan)\}$
$otec(jiri, jan).$	$\{otec(jiri, jan)\}$
$matka(julie, jan).$	$\{matka(julie, jan)\}$

$?- syn(jan, X)$ $\quad P \models (\exists X) syn(jan, X)$? $\quad \{\neg syn(jan, X)\}$

Zajímá nás, zda daný existenční dotaz vyplývá z daného programu.

Důsledek *Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ v proměnných $X_1, \ldots, X_m$*

(1) $P \models (\exists X_1) \ldots (\exists X_m)(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$, *právě když*

(2) $\square$ *lze odvodit LI-rezolucí z $P \cup \{G\}$ začínající (variantou) cíle G.*

LI-rezoluce nad programem

Je-li odpoveď na dotaz kladná, chceme navíc znát výstupní substituci.

Výstupní substituce σ LI-rezoluce $\square$ z $P \cup \{G\}$ začínající $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ je složení mgu v jednotlivých krocích (jen na proměnné v G). Platí,

$$P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\sigma.$$

$\{\neg syn(jan, X)\}$ $\quad$ $\{syn(X', Y'), \neg otec(Y', X'), \neg muz(X')\}$

$X'/jan \mid Y'/X$

$\{\neg otec(X, jan), \neg muz(jan)\}$ $\quad$ $\{muz(jan)\}$

$\{\neg otec(X, jan)\}$ $\quad$ $\{otec(jiri, jan)\}$

$X/jiri$

$\square$

$a)$

$\{\neg syn(jan, X)\}$ $\quad$ $\{syn(X', Y'), \neg matka(Y', X'), \neg muz(X')\}$

$X'/jan \mid Y'/X$

$\{\neg matka(X, jan), \neg muz(jan)\}$ $\quad$ $\{muz(jan)\}$

$\{\neg matka(X, jan)\}$ $\quad$ $\{matka(julie, jan)\}$

$X/julie$

$\square$

$b)$

Výstupní substituce $a)$ $X = jiri$, $b)$ $X = julie$.