Přednáška 5, 20. března 2015

Věta (1. základní věta analýzy). *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována předpisem*

$$F(x) = \int_a^x f \ .$$

Potom (i) F je na $[a,b]$ spojitá a (ii) v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a,b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).

Důkaz. Nechť $c > 0$ je horní mez pro hodnoty $|f(x)|$, $a \le x \le b$ (f je integrovatelná a tedy omezená). Pro každé dva body $x, x_0 \in [a,b]$ máme

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \le |x - x_0| c \ ,$$

podle definice F, linearity $\int$ v integračních mezích a odhadu $\int$ horní sumou pro dělení (x_0, x) či (x, x_0) intervalku s krajními body x a x_0. Pro $x \to x_0$ máme $F(x) \to F(x_0)$ a F je v x_0 spojitá.

Nechť $x_0 \in [a,b]$ je bod spojitosti f. Pro dané $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, jakmile $|x - x_0| < \delta$. Pro $0 < x - x_0 < \delta$ tedy

$$f(x_0) - \varepsilon \le \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon \ ,$$

podle triviálního odhadu $\int_{x_0}^x f$ dolní a horní sumou pro dělení (x_0, x). Pro $-\delta < x - x_0 < 0$ platí tytéž nerovnosti (v čitateli i jmenovateli zlomku se změní znaménko). Pro $x \to x_0$, $x \ne x_0$, tak máme $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$, čili $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Vyřídíme rest z 1. přednášky.

Důsledek (spojitá funkce má primitivní funkci). *Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ spojitá, potom má na $[a,b]$ primitivní funkci F.*

Důkaz. Stačí použít předchozí větu a položit $F(x) = \int_a^x f$. □

Věta (2. základní věta analýzy). *Pokud* $f \in \mathcal{R}(a,b)$ *a* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je na* $[a,b]$ *primitivní k* f*, pak*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \ .$$

Důkaz. Nechť $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Použijeme-li na každý interval $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ a funkci F Lagrangeovu větu o střední hodnotě, dostaneme vztah

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{k-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) = \sum_{i=0}^{k-1} f(b_i)(a_{i+1} - a_i) \ ,$$

pro nějaké mezibody $a_i < b_i < a_{i+1}$ (neboť $F'(b_i) = f(b_i)$). Tedy (neboť $\inf_{I_i} f \le f(b_i) \le \sup_{I_i} f$)

$$s(f,D) \le F(b) - F(a) \le S(f,D) \ .$$

Odtud a z integrovatelnosti f ihned plyne, že $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. □

Pro funkci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se rozdíl jejích hodnot v krajních bodech často značí jako

$$F|_a^b := F(b) - F(a) \ .$$

Předchozí výsledky shrneme.

Důsledek ($\int$ pomocí primitivní funkce). *Je-li* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *na* $[a,b]$ *spojitá, potom* $f \in \mathcal{R}(a,b)$*,* f *má na* $[a,b]$ *primitivní funkci* F *a pro tuto i všechny ostatní primitivní funkce je*

$$\int_a^b f = F|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Newtonův integrál. Staletí předtím, než přišel Riemann (po jistých pokusech Cauchyho) s přesnou definicí integrálu, počítali matematici integrály bez zábran přímo z primitivních funkcí tzv. *Newtonovým integrálem*. Připomeneme ho a porovnáme s integrálem Riemannovým.[1]

[1] Zájemcům o historii a další druhy integrálů doporučujeme knihu Š. Schwabik a P. Šarmanová, *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, 1996.

Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f má na (a,b) primitivní funkci F a ta má v krajních bodech vlastní jednostranné limity $F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x)$ a $F(b^-) = \lim_{x\to b^-} F(x)$. Newtonův integrál funkce f na (a,b) pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f = F(b^-) - F(a^+)\ .$$

Protože různé primitivní funkce k f se liší jen posunem o konstantu, nezávisí tento rozdíl na volbě F a definice je korektní. Množinu funkcí newtonovsky integrovatelných na (a,b) označíme jako $\mathcal{N}(a,b)$. Jako $C(a,b)$ označíme množinu funkcí spojitých na $[a,b]$.

Tvrzení (porovnání Newtonova a Riemannova $\int$). *Máme*

$$C(a,b) \subset \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}(a,b)\ .$$

Pokud $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}(a,b)$, *pak*

$$(N)\int_a^b f = (R)\int_a^b f\ .$$

Množina $\mathcal{N}(a,b)\backslash\mathcal{R}(a,b)$ *i* $\mathcal{R}(a,b)\backslash\mathcal{N}(a,b)$ *je neprázdná: existují funkce, které mají Newtonův integrál, ale ne Riemannův, i naopak.*

Důkaz. Je-li f na $[a,b]$ spojitá, je (jak jsme pomocí stejnoměrné spojitosti dokázali) $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a (podle 1. ZVA) $F(x) = \int_a^x f$ je na $[a,b]$ primitivní k f. Máme $F(a^+) = F(a) = 0$ a $F(b^-) = F(b) = \int_a^b f$, takže i $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Nechť $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}(a,b)$. Protože $f \in \mathcal{N}(a,b)$, má na (a,b) primitivní funkci F a existují jednostranné vlastní limity $F(a^+)$ a $F(b^-)$. Protože $f \in \mathcal{R}(a,b)$, je pro každé $\delta > 0$ i $f \in \mathcal{R}(a+\delta, b-\delta)$ a podle 2. ZVA máme

$$(R)\int_{a+\delta}^{b-\delta} f = F(b-\delta) - F(a+\delta)\ .$$

Pro $\delta \to 0^+$ jde levá strana k $(R)\int_a^b f$ (f je na $[a,b]$ omezená, takže integrály f přes $[a,a+\delta]$ a $[b-\delta,b]$ jdou k 0) a pravá strana jde k $F(b^-) - F(a^+) = (N)\int_a^b f$.

Funkce $f(x) = x^{-1/2}: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 2013$, má na $(0,1)$ Newtonův integrál: $F(x) = 2x^{1/2}$ je tam k ní primitivní, $F(0^+) = 0$ a $F(1^-) = 2$, takže $(N)\int_0^1 f = 2$. Tato funkce ale není na $[0,1]$ omezená, a proto $f \notin \mathcal{R}(0,1)$.

Funkce znaménka $\mathrm{sgn}(x)$ je na $[-1,1]$ neklesající a tedy má na $[-1,1]$ Riemanův integrál. Na $(-1,1)$ ale nemá Newtonův integrál — jak jsme ukázali v 1. přednášce, nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci. $\square$

K závěrečným příkladům poznamenejme, že nicméně

$$\lim_{\delta \to 0^+} (R) \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \; ,$$

čili útvar vymezený grafem $y = 1/\sqrt{x}$ a intervalem $(0,1]$ má plochu 2, a že i když nemůžeme spočítat

$$(R) \int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(x) \; dx$$

okamžitě přímo pomocí 2. ZVA (protože primitivní funkce na daném intervalu neexistuje), po rozkladu $[-1,1] = [-1,0] \cup [0,1]$ už můžeme počítat pomocí primitivních funkcí:

$$\begin{aligned}
(R) \int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(x) \; dx &= (R) \int_{-1}^0 \mathrm{sgn}(x) \; dx + (R) \int_0^1 \mathrm{sgn}(x) \; dx \\
&= (R) \int_{-1}^0 (-1) \; dx + (R) \int_0^1 1 \; dx \\
&= (-x)|_{-1}^0 + x|_0^1 = (-1) + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ve výpočtu jsme změnili hodnotu funkce $\mathrm{sgn}(x)$ v $x = 0$, ale to nemá na integrovatelnost a hodnotu integrálu žádný vliv).

V dalším už budeme integrálem opět rozumět výhradně Riemannův integrál a místo $(R) \int$ psát pouze $\int$. Dvě metody výpočtu primitivní funkce, per partes a substituční, se díky 2. ZVA odrážejí i ve výpočtech R. integrálů.

Tvrzení (integrace per partes). *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mají na $[a,b]$ spojité derivace f' a g'. Potom*

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g \; .$$

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení (integrace substitucí). *Nechť* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *a* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jsou dvě funkce, přičemž* φ *má na* $[\alpha, \beta]$ *spojitou* φ' *a* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *nebo* $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$.

1. *Je-li* f *spojitá na* $[a, b]$, *pak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \begin{cases} \int_a^b f \quad \textit{nebo} \\ \\ \int_b^a f = -\int_a^b f \ . \end{cases}$$

2. *Je-li* φ *na* $[\alpha, \beta]$ *rostoucí nebo klesající a* $f \in \mathcal{R}(a, b)$, *platí opět předchozí rovnost integrálů.*

Důkaz. 1. Funkce f je na $[a, b]$ spojitá a má tam tedy primitivní funkci F. Derivace složené funkce dává na $[\alpha, \beta]$ rovnost $F(\varphi)' = f(\varphi)\varphi'$. Takže $F(\varphi)$ je na $[\alpha, \beta]$ primitivní k $f(\varphi)\varphi'$. Funkce $f(\varphi)\varphi'$ je na $[\alpha, \beta]$ spojitá (je součinem spojitých funkcí), takže $f(\varphi)\varphi' \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$. Dvojím užitím 2. ZVA (v první a třetí rovnosti) máme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' = F(\varphi)|_\alpha^\beta = F|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f \ .$$

2. Ponecháme z časových důvodů bez důkazu. □

Aplikace integrálů. Odhadneme tzv. *harmonická čísla* H_n,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ .$$

Pro funkci $f(x) = 1/x : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ a dělení $D = (1, 2, \ldots, n + 1)$ intervalu $[1, n + 1]$ zřejmě máme

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i + 1} = H_{n+1} - 1 \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i} = H_n \ .$$

Protože $s(f, D) < \int_1^{n+1} 1/x = \log(n + 1) < S(f, D)$, pro $n \geq 2$ dostáváme odhad

$$\log(n + 1) < H_n < 1 + \log n \ .$$

Cvičení: dokažte, že pro $n \geq 2$ nikdy H_n není celé číslo.

Podobně *faktoriál* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$: pro funkci $f(x) = \log x : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ a dělení $D = (1, 2, \ldots, n+1)$ intervalu $[1, n+1]$ zřejmě máme

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \log i = \log(n!) \ \text{ a } \ S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \log(i+1) = \log((n+1)!) \ .$$

Protože $s(f, D) < \int_1^{n+1} \log x = (n+1)\log(n+1) - (n+1) + 1 < S(f, D)$, pro $n \geq 2$ dostáváme odhad

$$n \log n - n + 1 < \log(n!) < (n+1)\log(n+1) - n$$

a tedy

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \ .$$