Houška Petr
houskape@gmail.com

Čas 10:25 - 10:30

1-

9 Grupy a podgrupy (3 body)

Nechť G je grupa s neutrálním prvkem e, binární operací $\circ$ a operací inverzního prvku $^{-1}$. Definujte pojmy podgrupa a normální podgrupa grupy G. Jaký je vztah mezi těmito dvěma pojmy? (Vysvětlete, uveďte příklady.)

Podgrupa: H: $H \subseteq G$ & H je grupa ; H je podgrupa grupy G ✓

- Normální podrupa: podgrupa H taková pro kterou platí: ✓

$\forall g \in G, \forall h \in H : g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$

- normální grupy jsou právě takové grupy, pro které je ~~[illegible]~~ kongruence $lmod_H = rmod_H$ a které skrz sebe definují faktorovou grupu $G/H \sim G/[l,r]mod H$

$(a,b) \in lmod H: a^{-1} b \in H ; a,b \in G$
$(a,b) \in Rmod H: a \cdot b^{-1} \in H ; a,b \in G$

$G/H = \{ [a]_{lmod\, H} \mid a \in G \}$

$(0, n, 2n, 3n, \dots)$

např. pro $\mathbb{Z}$ je normální podgrupa $n \cdot \mathbb{Z}$ a každá taková definuje faktorovou grupu $\mathbb{Z}_n$

$\{0 \dots n-1\}$

✓

$\mathbb{Z}+$ je komutativní ...

př. "nenormální" podgrupy

③ MM

Houška Petr
houskape@gmail.com

Čas 9:25 – 9:47

6 Rovinné grafy (3 body)

Rozhodněte, zda existuje souvislý rovinný graf s 2017 vrcholy, jehož všechny stěny (včetně vnější) jsou ohraničeny kružnicí délky 5. Odpověď samozřejmě zdůvodněte.

Eulerův vzorec pro rovinné grafy

$|V| - |E| + s = 2$

$\frac{s}{2} = \frac{|E|}{5} \sim s = \frac{2 \cdot |E|}{5}$

každá hrana ve dvou stěnách

každých 5 hran ~ 1 stěna

stejný postup jako pro nerovnost počtu hran triangulace ...

$|V| - |E| + \frac{2 \cdot |E|}{5} = 2$

$5|V| - 5|E| + 2|E| = 10$

$5|V| - 3|E| = 10$

$5|V| = 10 + 3|E|$

$n = |E|$

$5 \cdot 2017 = 10 + 3 \cdot n$

$2017 = 2 + \frac{3}{5} \cdot n$

$2015 = \frac{3}{5} \cdot n$

$10075 = 3 \cdot n$

není dělitelné 3, tj. počet vrcholů (n) by nebyl celočíselný ⇒ spor ⇒ NELZE

$2015 \cdot 5 = 10075$

$10075 : 3 = 335\ldots$

2b

Houška Petr

houskape@gmail.com

Čas 9:48:10:20

1/2

8 Logika (3 body)

1. Uveďte definice (pro predikátovou logiku), kdy formule φ *platí* v teorii T (značeno $T \models \varphi$), kdy je teorie T *otevřená* a kdy je teorie T *splnitelná*.
2. Nechť $L = \langle P, R \rangle$ je jazyk bez rovnosti, kde P, R je unární resp. binární relační symbol. Pomocí skolemizace následujících formulí či jejich negací nalezněte *otevřenou* teorii T nad vhodným rozšířením jazyka L, která je nesplnitelná, právě když

$$\{\overset{x_1}{(\forall x)}(\exists y)\neg R(x,y), \overset{x_2}{(\forall x)}(\exists y)(\forall z)(P(x) \vee R(y,z))\} \models \overset{x_3}{(\forall x)}P(x)\cancel{(1)} \qquad (11)$$

3. Pomocí Vámi zvoleného dokazovacího systému (rezoluce, tablo metoda, Hilbertovský kalkul) dokažte, že T je nesplnitelná, anebo dokažte (1) přímo. *(Nápověda: stačí dva rezoluční kroky.)* další papír:

1) ~~$\forall$~~ $T \models \varphi$ pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechny struktury $\mathcal{A}$, které jsou modely ✓ teorie T. A to jsou právě takové struktury v nichž platí (tj. jsou pro všechna ohodnocení pravdivé) všechny axiomy teorie T.

Teorie T je otevřená, když jsou všechny její axiomy otevřené formule, tj neobsahují kvantifikátory.

Teorie T je splnitelná když má model. Tj. když v ní neplatí spor. Tj. když existuje struktura v které platí všechny její axiomy.

2) $(\forall x)(\exists y)\neg R(x,y)$: $\overset{\text{skolemizace}}{\neg R(x, f_1(x))}$

$\forall x \exists y \forall z\, (P(x) \vee R(y,z))$: $P(x) \vee R(f_2(x), z)$

$\forall x\, P(x)$: $P(x)$ ← měla by se vzít skolemizace negace toho, co chceme dokázat + skolemizace axiomů

$$T / \neg \underbrace{(((\neg R(x, f_1(x))) \wedge (P(y) \vee R(f_2(y), z))) \Rightarrow (P(i)))}_{\text{otevřená teorie o jednom axiomu}} \vee \underbrace{\overbrace{(P(a) \wedge \neg P(a))}^{\text{(není třeba)}}}$$

" neplatí (1) nebo platí spor"

Pokud takto, tak by se měla skolemizovat CELÁ formule:

$\neg\, ((\forall x)(\exists y)\neg R(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x) \vee R(y,z)) \longrightarrow (\forall x)P(x))$

8: Logika

Petr Houska

houskape@gmail.com

7/2

3) χ_1: $\forall(x)\,\exists(y)\,\neg R(x,y) \Rightarrow \neg(\exists x \forall y\, R(x,y))$

χ_2: $(\forall x\, \exists y\, \forall z)\; P(x) \vee R(y,z) \Rightarrow$
- platí $P(x)$: hotovo
- $\exists y \forall z\, R(y,z)$ ~ neplatí kvůli

  $\Rightarrow$ musí platit

Toto není důkaz žádným formálním dokazovacím systémem, ale sémantický argument.

$\Rightarrow$ ~~(1)~~ je tautologie a tedy T je nesplnitelná

(pokud $\models$ vezmete jako $\rightarrow$, tak ano)

Houška Petr
houskape@gmail.com

3

Čas 8:55 – 9:05

4 MA2 – Limita funkce (3 body)

Nalezněte hodnotu následující limity a výpočet zdůvodněte:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}.$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\log(1+\sin(x))\cdot 1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+\sin(x))}{x}} = e^{1} = \boxed{e}$$

pokud def. limity čit. i jmen. 0 nebo jmen. ∞, tak lim podílu derivací = lim podílu

… díky limitě složené fce: funkce def. na okolí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin(x))}{x} \quad \begin{matrix}\sim 0\\ \sim 0\end{matrix} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = 1$$

mohu použít L'Hospitala

$$\boxed{\log(1+\sin(x))' = \frac{1}{1+\sin(x)}\cdot\cos(x)}$$

ano, správně

3

Houška Petr
houskape@gmail.com

Čas 8:50 - 8:55

3 MA1 – Definice derivace (3 body)

Definujte pojem derivace funkce jedné reálné proměnné.

Pro funkci f definovanou na okolí bodu a: $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$
je ~~de~~ derivace v bodě a: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Alternativně, geometricky ji můžeme definovat jako směrnici tečny v bodě 'a'.

Houška Petr
houskape@gmail.com

Čas 8:39 - 8:42

1 ~

1 LA1 – Lineární závislost (3 body)

Definujte pojem lineární závislosti vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ alespoň dvěma způsoby.

LZ ne
LNezávislost?

- Vektory $v_1 \ldots v_n$ jsou nezávislé, pokud
  $\sum a_i v_i = 0$ je splněno pouze pro triviální kombinaci $a_i = 0 \; \forall i$

- Vektory $v_1 \ldots v_n$ jsou LN pokud generují VP dimenze 'n'.
- $v_1 \ldots v_n$ jsou lin. nez pokud $\underbrace{\mathrm{span}(\{v_i \mid i \neq j\})}_{\text{lin kombinace}} \underbrace{\subsetneq}_{\text{ostře podmnožina}} \mathrm{span}(\{v_i\}) \; \forall j$

Houška Petr
houskape@gmail.com

Čas 8:42 - 8:50

2 LA2 – Projekce (3 body)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažme tři nenulové vektory x_1, x_2, x_3. Pro libovolný vektor $v \in \mathbb{R}$ vezměme jeho projekci v_i na přímku definovanou směrovým vektorem x_i, $i = 1, 2, 3$. Rozhodněte, za jakých podmínek platí $v = v_1 + v_2 + v_3$. Odpověď zdůvodněte.

platí, pokud jsou vektory $x_1 \dots x_n$ ortogonální, tj. tvoří-li ortogon. bázi $\mathbb{R}^3$. To platí kvůli tomu, že ortogonální vektory vůči sobě mají nulovou projekci, tj. i projekce vektoru v do x_1 nemá "překrývající" informace směru s projekcí do např. x_2. Formálně řešeno to vychází z jednoznačnosti a způsobu získání Fourierových koeficientů.

def. pro ortonormální bázi, ale ~~projekce ze zadání chápu~~ s to tady není problém

pro ortonorm. bázi $b_1 \dots b_n$
$x = \sum \underbrace{\langle x, b_i \rangle \cdot b_i}_{\text{projekce}}$

Obecně vektor v_1 z nějakého prostoru L jde vyjádřit jako součet projekcí právě pro ortogonální bázi L.

3

②

Houška Petr

houskape@gmail.com

Čas 9:42 – 9:45 : první bod
10:37 – 10:48

7 Kombinatorika – permutace (3 body)

Uvažme množinu permutací čísel $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Spočtěte, kolik z nich je takových, že:

1. nezobrazují žádné sudé číslo na sudé číslo,
2. nezobrazují žádné sudé číslo samo na sebe.

1) sudá na lichá, tj. i lichá nutně na sudá (je jich stejně)

$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = (5!) \cdot (5!)$

↑ sudá na lichá ↑ zbývající lichá na sudá

sudý na lich — sudý na sudý

2) ~~(5! + 9!) + (4! + 8!)~~

~~10! – 10 · 9!~~

princip inkluze a exkluze

kolik n-tic pevných bodů — počet perm. zbytku

$10! - (\text{alespoň 1 pevný bod}) = 10! - \sum_{i=1}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} \cdot (10-i)!$

+

Máte odečítat permutace s pevnými body na sudých pozicích.

Houška Petr
houskape@gmail.com

3

Čas 9:01 - 9:25

1/2

5 MA3 – Extrémy funkcí (3 body)

Buď f funkce dvou reálných proměnných daná předpisem $f(x,y) = x^2 - 2y^3 + xy$. Nalezněte lokální extrémy funkce f (a zdůvodněte, že se opravdu jedná o extrémy).

~~zotevřenou~~

- def. obor otevřený => žádné vázané extrémy => Lagrange ~~multipl~~ nepoč.
- aby mohl ∃ lokální extrém gradient $\nabla(f) = 0$
  ↑ nutná, <u>ne</u> postačující

$$\frac{df}{dx} = 2x + y$$
$$\frac{df}{dy} = -6y^2 + x$$

gradient nulový: $(0,0)$, $(1/24, -1/12)$ — kandidáti na lokální extrémy

$2x + y = 0$

$-6y^2 + x = 0$

$6y^2 - x = 0$

$12y^2 - 2x = 0$

$12y^2 + y = 0$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y = 0}} f(x,y) = +\infty$$
$$\lim_{\substack{y \to \infty \\ x = 0}} f(x,y) = -\infty$$

žádné globální extrémy, fce oboustranně neomezená

Hesián: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -12y \end{pmatrix}$:
↑ matice druhých derivací

~~pro (0,0) PD => lokální minimum~~

~~pro (1/24, -1/12) ... lokální min~~

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \sim ~~\text{Aplikace determinant, nemá } \mathbb{R} \text{ kořen}~~$$

$$= \frac{-1 \pm 1}{24} \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{12} \end{cases}$$

pro $(0,0)$: indefinitní => nemá extrém lokální

pro $(1/24, -1/12)$: PD => má lok. minimum
↑ důkazy det. na druhém papíře

5: důkazy definitnosti

Petr Mráčka

2/2

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $2x^2 + xy + yx$

$x = 1/2,\ y = -1;\ 1/2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$x = 1,\ y = 1;\ 2 + 1 + 1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $2x^2 + xy + yx + y^2$

$2x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^2 + x^2$: nemůže být záp / 0 mimo $(0,0) \Rightarrow$ PD