

# AUTOMATY A GRAMATIKY

**Pavel Surynek**

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

# 9

Přijímání u ZA  
Bezkontextové jazyky a ZA  
Uzávěrové vlastnosti

# Přijímání slova u ZA: $L(Z) = N(Z_1)$

- $Z = (Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$ 
  - ▣ pro zásobníkový automat  $Z$  existuje zásobníkový automat  $Z_1$ , že  $L(Z) = N(Z_1)$
  - ▣  $Z_1 = (QU\{q_0', q_f\}, X, YU\{z_0'\}, \delta', q_0', z_0', \emptyset)$ 
    - na zásobník pomocný symbol  $z_0'$ 
      - původně vyprázdnění znamenalo konec, nyní by znamenalo přijmutí
    - simulujeme  $Z$
    - v přijímajícím stavu odebereme pomocný  $z_0'$ 
      - $z_0', q_0', q_f$  jsou nové
      - $\delta'(q_0', \lambda, z_0') = \{(q_0, z_0 z_0')\}$
      - $\delta'(q, x, y) = \delta(q, x, y)$  pro všechna  $q \in Q, x \in X, y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, y) = \delta(q, \lambda, y)$  pro všechna  $q \in Q - F, y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, y) = \delta(q, \lambda, y) \cup \{(q_f, \lambda)\}$  pro  $q \in F, y \in YU\{z_0'\}$ 
        - zde rušíme determinismus
      - $\delta'(q_f, \lambda, y) = \{(q_f, \lambda)\}$  pro  $y \in YU\{z_0'\}$
  - ▣  $w \in L(Z) \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash_Z^* (f, \lambda, v)$  pro  $f \in F$  a  $v \in Y^* \Leftrightarrow$   
 $(q_0', w, z_0') \vdash_{Z_1} (q_0, w, z_0 z_0') \vdash_{Z_1}^* (f, \lambda, y v z_0') \vdash_{Z_1} (q_f, \lambda, v z_0') \vdash_{Z_1}^* (q_f, \lambda, \lambda)$   
 $\Leftrightarrow w \in N(Z_1)$

# Přijímání slova u ZA: $N(Z) = L(Z_2)$

- $Z = (Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$ 
  - ▣ pro zásobníkový automat  $Z$  existuje zásobníkový automat  $Z_2$ , že  $N(Z) = L(Z_2)$ 
    - navíc, když  $Z$  je deterministický, je i  $Z_2$  deterministický
  - ▣  $Z_2 = (Q \cup \{q_0', q_f\}, X, Y \cup \{z_0'\}, \delta', q_0', z_0', \{q_f\})$ 
    - na zásobník pomocný symbol  $z_0'$
    - simulujeme  $Z$
    - je-li na zásobníku vidět pomocný  $z_0'$ , přijímáme, neboť to odpovídá původnímu vyprázdnění
      - $z_0', q_0', q_f$  jsou nové
      - $\delta'(q_0', \lambda, z_0') = \{(q_0, z_0 z_0')\}$
      - $\delta'(q, x, y) = \delta(q, x, y)$  pro všechna  $q \in Q, x \in X, y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, y) = \delta(q, \lambda, y)$  pro všechna  $q \in Q, y \in Y$
      - $\delta'(q, \lambda, z_0') = \{(q_f, \lambda)\}$  pro všechna  $q \in Q$
  - ▣  $w \in N(Z) \Leftrightarrow (q_0, w, z_0) \vdash_Z^* (q, \lambda, \lambda)$  pro  $q \in Q \Leftrightarrow$   
 $(q_0', w, z_0') \vdash_{Z_2} (q_0, w, z_0 z_0') \vdash_{Z_2}^* (q, \lambda, z_0') \vdash_{Z_2} (q_f, \lambda, \lambda)$   
 $\Leftrightarrow w \in L(Z_2)$

# Bezkontextová gramatika $\Rightarrow$ ZA (1)

- bezkontextová gramatika  $G = (V_N, V_T, S, P)$
- ▣ sestrojíme zásobníkový automat Z, že  $N(Z) = L(G)$

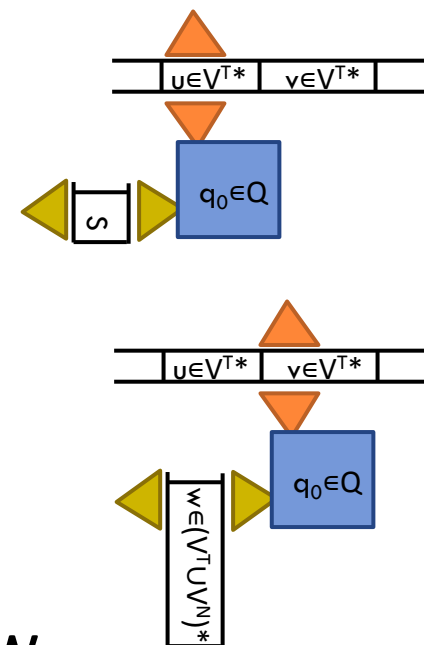
- myšlenka

- na zásobníku vytváříme levou derivaci
- jakmile zásobník začíná terminály, srovnáme zásobník s páskou
- využití nedeterminismu k uhádnutí derivace

- $Z = (\{q_0\}, V_T, V_N \cup V_T, \delta, q_0, S, \emptyset)$ , kde

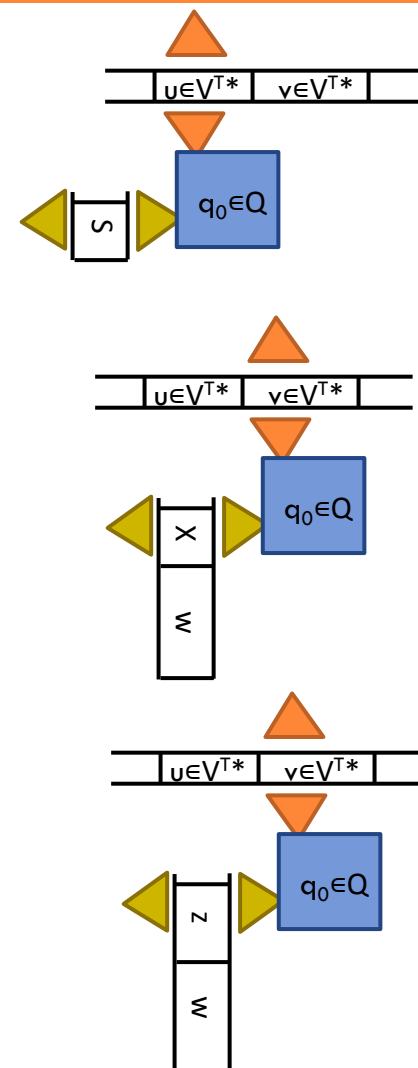
- $\delta(q_0, \lambda, X) = \{(q_0, w) \mid X \rightarrow w \in P\}$  pro všechna  $X \in V_N$ 
  - vytváření levé derivace, pravidlo typu (i)
- $\delta(q_0, x, x) = \{(q_0, \lambda)\}$  pro všechna  $x \in V_T$ 
  - srovnání zásobníku s páskou, pravidlo typu (ii)

- platí  $(q_0, uv, S) \vdash_Z^* (q_0, v, w) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^{lm^*} uw$   
pro libovolné  $u, v \in V_T^*, w \in (V_T \cup V_N)^*$



# Bezkontextová gramatika $\Rightarrow$ ZA (2)

- $(q_0, uv, S) \vdash_Z^* (q_0, v, w) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^{lm^*} uw$ 
  - ▣ indukcí podle počtu kroků výpočtu Z (pro  $\Rightarrow$ ), resp. podle počtu kroků derivace (pro  $\Leftarrow$ )
  - ▣ ukážeme  $\Rightarrow$  (pro  $\Leftarrow$  je důkaz analogický)
    - 0 kroků
      - $w = S, u = \lambda, S \Rightarrow_G^{lm^*} S$  jistě platí
    - n+1 kroků
      - n+1 krok pravidlem typu (i)
        - $(q_0, uv, S) \vdash_Z^* (q_0, v, Xw) \vdash_Z (q_0, v, zw)$  pro  $z \in (V_T \cup V_N)^*$ 
          - ▣ z indukčního předpokladu  $S \Rightarrow_G^{lm^*} uXw$
          - ▣  $uXw \Rightarrow_G^{lm} uz w$  díky pravidlu  $X \rightarrow z \in P$
      - n+1 krok pravidlem typu (ii)
        - $(q_0, uxv, S) \vdash_Z^* (q_0, xv, xw) \vdash_Z (q_0, v, w)$  pro  $x \in V_T$ 
          - ▣ z indukčního předpokladu  $S \Rightarrow_G^{lm^*} uxw$
- důsledek  $N(Z) = L(G)$ 
  - ▣  $(q_0, w, S) \vdash_Z^* (q_0, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^{lm^*} w$



# ZA $\Rightarrow$ Bezkontextová gramatika (1)

- zásobníkový automat  $Z = (Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$ 
  - ▣ sestrojíme bezkontextovou gramatiku  $G$ , že  $L(G) = N(Z)$ 
    - pokud  $|Q|=1$ , stačí předchozí konstrukce
    - pro  $|Q|>1$  položíme  $G = (\{S'\} \cup \{[q, y, r] \mid q, r \in Q \wedge y \in Y\}, X, S', P)$ , kde
      - $S'$  je nový neterminál
      - pravidla  $P$  obsahují
        - $S' \rightarrow [q_0, z_0, q]$  pro všechna  $q \in Q$
        - $[q, y, r] \rightarrow x[q_1, y_1, q_2][q_2, y_2, q_3] \dots [q_n, y_n, r]$  pro každé  $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y, q, q_1, q_2, \dots, q_n, r \in Q, y \in Y$  a  $x \in X \cup \{\lambda\}$  takové, že  $(q_1, y_1 y_2 \dots y_n) \in \delta(q, x, y)$
        - speciálně  $[q, y, r] \rightarrow x$ , když  $(r, \lambda) \in \delta(q, x, y)$
  - ▣ platí  $(q, w, y) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow [q, y, r] \Rightarrow_G^{lm^*} w$  pro libovolné  $q, r \in Q, y \in Y$  a  $w \in X^*$

# ZA $\Rightarrow$ Bezkontextová gramatika (2)

□  $(q, w, y) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda) \Rightarrow [q, y, r] \Rightarrow_G^{lm^*} w$

▣ indukci dle délky výpočtu

■ délka výpočtu 1

■  $(q, x, y) \vdash_Z (r, \lambda, \lambda)$  pro  $x \in X \cup \{\lambda\}$ , tedy  $(r, \lambda) \in \delta(q, x, y)$

■ máme pravidlo  $[q, y, r] \rightarrow x$

■ délka výpočtu  $n+1$

■  $(q, xu_1u_2\dots u_k, y) \vdash_Z (q_1, u_1u_2\dots u_k, y_1y_2\dots y_k)$  pro  $(q_1, y_1y_2\dots y_k) \in \delta(q, x, y)$

■  $u_i$  je slovo, při kterém je zpracován symbol  $y_i$  pro  $i=1,2,\dots,k$

■  $(q_i, u_i, y_i) \vdash_Z^* (q_{i+1}, \lambda, \lambda)$  pro jistá  $q_i \in Q$  pro  $i=1,2,\dots,k$  ( $q_{k+1}=r$ )

■ z indukčního předpokladu  $[q_i, y_i, q_{i+1}] \Rightarrow_G^{lm^*} u_i$

■ k tomu první krok

■  $(q, y, r) \Rightarrow_G^{lm} x(q_1, y_1, q_2)(q_2, y_2, q_3)\dots(q_k, y_k, r)$

■ tedy celkem  $(q, y, r) \Rightarrow_G^{lm^*} xu_1u_2\dots u_k$

# ZA $\Rightarrow$ Bezkontextová gramatika (3)

- $(q, w, y) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow [q, y, r] \Rightarrow_G^{lm^*} w$ 
  - ▣ indukci podle délky derivace
    - délka derivace 1
      - $[q, y, r] \Rightarrow_G^{lm} w$  jedině díky pravidlu  $[q, y, r] \rightarrow w$ , tedy  $(r, \lambda) \in \delta(q, w, y)$
    - délka derivace  $n+1$ 
      - nechť  $[q, y, r] \rightarrow x[q_1, y_1, q_2][q_2, y_2, q_3] \dots [q_k, y_k, r]$  je první použité pravidlo
        - v ZA odpovídá  $(q_1, y_1 y_2 \dots y_k) \in \delta(q, x, y)$
      - $w = x u_1 u_2 \dots u_k$  a  $[q_i, y_i, q_{i+1}] \Rightarrow_G^{lm^*} u_i$  pro  $i=1, 2, \dots, k$  ( $q_{k+1}=r$ )
      - z indukčního předpokladu  $(q_i, u_i, y_i) \vdash_Z^* (q_{i+1}, \lambda, \lambda)$
      - celkem  $(q, x u_1 u_2 \dots u_k, y) \vdash_Z (q_1, u_1 u_2 \dots u_k, y_1 y_2 \dots y_k) \vdash_Z^* (r, \lambda, \lambda)$
- důsledek  **$L(G) = N(Z)$** 
  - ▣  $(q_0, w, z_0) \vdash_Z^* (q, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow S' \Rightarrow_G^{lm} [q_0, z_0, q] \Rightarrow_G^{lm^*} w$



# Bezkontextové uzavěrové vlastnosti (1)

## □ bezkontextové jazyky jsou uzavřené na konečná sjednocení

□ bezkontextové gramatiky  $G_1=(V_N^1, V_T, S_1, P_1)$  a  $G_2=(V_N^2, V_T, S_2, P_2)$ , kde  $V_N^1 \cap V_N^2 = \emptyset$

□ položme  $G = (V_N^1 \cup V_N^2 \cup \{S'\}, V_T, S', P_1 \cup P_2 \cup \{S' \rightarrow S_1 | S_2\})$

■  $S'$  je nový neterminál

□ platí  $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

## □ bezkontextové jazyky jsou uzavřené na konkatenaci

□ položme  $G = (V_N^1 \cup V_N^2 \cup \{S'\}, V_T, S', P_1 \cup P_2 \cup \{S' \rightarrow S_1.S_2\})$

■  $S'$  je nový neterminál

□ platí  $L(G) = L(G_1).L(G_2)$

## □ bezkontextové jazyky jsou uzavřené na iteraci

□ položme  $G = (V_N^1 \cup \{S'\}, V_T, S', P_1 \cup \{S' \rightarrow \lambda | S'S_1\})$

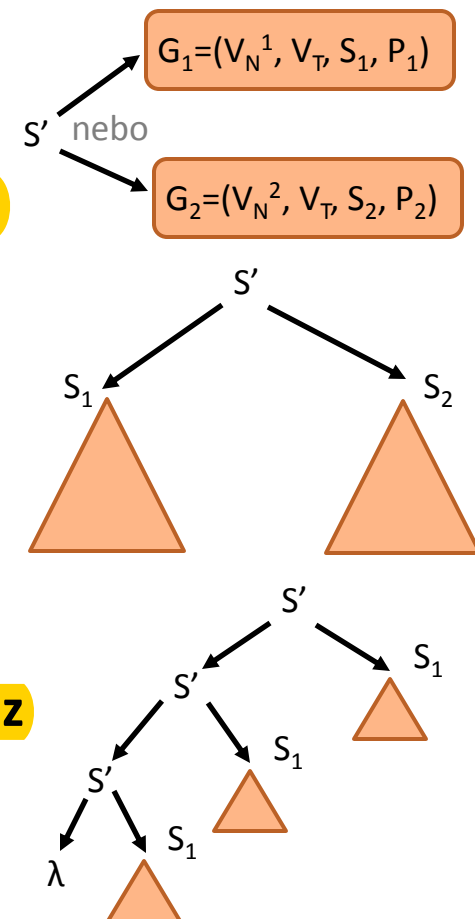
■  $S'$  je nový neterminál

□ platí  $L(G) = L(G_1)^*$

## □ bezkontextové jazyky jsou uzavřené na zrcadlový obraz

□ položme  $G = (V_N^1, V_T, S_1, \{X \rightarrow w^R | X \rightarrow w \in P_1\})$

□ platí  $L(G) = L(G_1)^R$



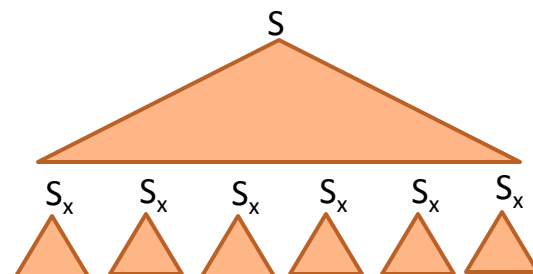
# Bezkontextové uzávěrové vlastnosti (2)

## □ bezkontextové jazyky jsou uzavřené na bezkontextovou substituci

- substituce  $f: X \rightarrow 2^{Y^*}$  je bezkontextová substituce, jestliže  $f(x)$  je bezkontextový jazyk pro každé  $x \in X$ 
  - máme  $G_x = (V_N^x, Y, S_x, P_x)$ , že  $f(x) = L(G_x)$  pro každé  $x \in X$ 
    - $V_N^x$  jsou po dvou disjunktní
- mějme bezkontextovou  $G = (V_N, X, S, P)$ , zajímá nás bezkontextovost  $f(L(G))$
- položíme  $G' = (V_N \cup \bigcup_{x \in X} V_N^x \cup X, Y, S, P \cup \bigcup_{x \in X} P^x \cup \{x \rightarrow S_x \mid x \in X\})$ 
  - platí  $L(G') = f(L(G))$

## □ bezkontextové jazyky nejsou uzavřené na konečné průniky

- $L_1 = \{a^i b^j c^j \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\}$ 
  - $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, S, \{S \rightarrow \lambda \mid A \mid B \mid AB, A \rightarrow a \mid aA, B \rightarrow bc \mid bBc\}), L(G_1) = L_1$
- $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\}$ 
  - $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, S, \{S \rightarrow \lambda \mid A \mid B \mid AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow c \mid Bc\}), L(G_2) = L_2$
- $L(G_1) \cap L(G_2) = \{a^i b^i c^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ , který není bezkontextový



# Bezkontextové uzávěrové vlastnosti (3)

## □ bezkontextové jazyky **nejsou** uzavřené na **doplňky**

□  $L = \{a^i b^j c^i \mid i=0,1,2,\dots\}$ ,  $-L = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6$ , kde

■  $K_1 = \{\alpha b a \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*\}$

■ regulární

■  $K_2 = \{\alpha c b \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*\}$

■ regulární

■  $K_3 = \{\alpha c a \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*\}$

■ regulární

■  $K_4 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k=0,1,2,\dots \wedge i \neq j\}$

■ bezkontextový

■  $K_5 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k=0,1,2,\dots \wedge j \neq k\}$

■ Bezkontextový

■  $K_6 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k=0,1,2,\dots \wedge i \neq k\}$

■ bezkontextový

□  **$-L$  je bezkontextový**, ale jeho doplněk  $L$  nikoli

## □ alternativně

□  $-(-L_1 \cup -L_2) = L_1 \cap L_2$

### Bezkontextovost $K_4$

$G = (\{S,A,B,C,D\}, \{a,b,c\}, S, P)$ , kde

$P = \{$

$S \rightarrow AC \mid BC$

$A \rightarrow aA \mid aD$

$B \rightarrow Bb \mid Db$

$C \rightarrow c \mid Cc \mid \lambda$

$D \rightarrow aDb \mid \lambda$

$\}$

$L(G) = K_4$

# Speciální uzavěrové vlastnosti (1)

- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **průnik s regulárním jazykem**
  - ▣ **paralelně** simulujeme zásobníkový a konečný automat
    - R regulární jazyk, že  $R = L(A)$  pro konečný automat  $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$
    - L bezkontextový jazyk, že  $L = L(Z)$  pro zásobníkový automat  $Z = (Q_Z, X, Y, \delta_Z, q_{Z0}, z_0, F_Z)$
  - ▣ definujeme zásobníkový automat  $Z' = (Q_A \times Q_Z, X, Y, \delta, [q_{A0}, q_{Z0}], z_0, F_A \times F_Z)$ , kde
    - $\delta([p, q], x, y) \ni ([r, s], u)$ , jestliže
      - $p=r$  a  $(s, u) \in \delta_Z(q, x, y)$  pro  $x = \lambda$ 
        - Z nečte pásku, pracuje na zásobníku, A nepracuje
      - $r = \delta_A(p, x)$  a  $(s, u) \in \delta_Z(q, x, y)$  pro  $x \neq \lambda$ 
        - Z a A současně zpracují symbol x
    - $L(Z') = L(A) \cap L(Z) = R \cap L$

# Speciální uzávěrové vlastnosti (2)

- bezkontextové jazyky jsou uzavřené na **kvocienty s regulárním jazykem**
  - ▣ paralelně simulujeme konečný a zásobníkový automat, jakmile se KA dostane do přijímajícího stavu, ZA začne zpracovávat vstup
    - R regulární jazyk, že  $R = L(A)$  pro konečný automat  $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$
    - L bezkontextový jazyk, že  $L = L(Z)$  pro zásobníkový automat  $Z = (Q_Z, X, Y, \delta_Z, q_{Z0}, z_0, F_Z)$
  - ▣ připomenutí
    - $R \setminus L = \{ v \mid (\exists u \in R) uv \in L \}$
    - $L / R = \{ u \mid (\exists v \in R) uv \in L \}$
  - ▣ definujeme zásobníkový automat  $Z' = (Q_A \times Q_Z \cup Q_Z, X, Y, \delta, [q_{A0}, q_{Z0}], z_0, F_Z)$ , kde
    - $$\delta([p, q], \lambda, y) = \begin{aligned} &\{([r, s], u) \mid (\exists x \in X)(r = \delta_A(p, x) \wedge (s, u) \in \delta_Z(q, x, y))\} && \cup \\ &\{([p, s], u) \mid (s, u) \in \delta_Z(q, \lambda, y)\} && \cup \\ &\{(q, y) \mid p \in F_A\} \end{aligned}$$
    - $\delta(q, x, y) = \delta_Z(q, x, y)$  pro  $x \in X \cup \{\lambda\}$ ,  $q \in Q_Z$
  - ▣  $L(Z') = L(A) \setminus L(Z) = R \setminus L$