

Logické programy

Deklarativní interpretace

Petr Štěpánek

S využitím materialu Krysztofa R. Apta

2006

Logické programování 7

1

Algebry. (Interpretace termů)

Algebra J pro jazyk termů L obsahuje

- Neprázdnou množinu D , která se nazývá *doména*.
- Pro každý n -ární funkční symbol f jazyka L zobrazení $f_J : D^n \rightarrow D$.

Ohodnocení proměnných σ je zobrazení, které každé proměnné x přiřazuje hodnotu $\sigma(x)$ z domény D .

Interpretaci (hodnoty) termů při ohodnocení proměnných σ definujeme obvyklým způsobem..

Říkáme, že term t je *základní* (*ground*), jestliže neobsahuje proměnné.

Logické programování 7

2

- je-li term t proměnná x , jeho hodnota je $\sigma(x) \in D$,
- je-li t složený term $f(t_1, \dots, t_n)$ jeho hodnota $\sigma(t)$ je $f_J(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) \in D$.

Pro každou konstantu c platí $\sigma(c) = c_J$. Hodnoty konstant nezáleží na ohodnocení proměnných.

To také platí pro každý základní term t jeho hodnota $\sigma(t)$ není závislá na ohodnocení proměnných σ .

Příklad. (Zamýšlené a bizarní algebry)

a) standardní model N (interpretace) přirozených čísel je algebra (struktura) $N = \langle N, 0_N, +_N, \cdot_N \rangle$ s množinou přirozených čísel N jako doménou a obvyklou interpretací nuly, sčítání a násobení.

b) bizarní, ale vyhovující definici algebry, je interpretace jazyka přirozených čísel

$C = \langle C, 0_c, +_c, \cdot_c \rangle$, kde doménou je množina komplexních čísel, nula je interpretována jako nula v komplexních číslech, sčítání definuje rovnost $c +_c d = c + d$ a násobení $c \cdot_c d = c \cdot d$.

Definice. (Interpretace jazyka)

Interpretace jazyka programů L obsahuje algebru J s doménou D , rozšířenou o interpretaci predikátových symbolů:

ke každému n -árnému predikátovému symbolu p je přiřazena relace p_I , která je podmnožinou D^n .

Říkáme, že I je definována nad J , D je doménou I a z praktických důvodů pak označujeme zobrazení f_J jako f_I .

Sémantika jazyka programů se definuje obvyklým způsobem, jenom formulí je v definici méně.

Nechť L je jazyk programů. Souhrnným názvem výraz budeme označovat atomy, dotazy, rezultanty a klauzule definované v jazyce L .

Budeme definovat vztah *pravdivosti (splňování)* $I \models_{\sigma} E$ mezi interpretací I jazyka L , ohodnocením proměnných σ v doméně interpretace I a výrazem E . Je-li $I \models_{\sigma} E$ říkáme, že výraz E je pravdivý v interpretaci I při ohodnocení σ .

- je-li $p(t_1, \dots, t_n)$ atom, potom
 $I \models_{\sigma} p(t_1, \dots, t_n)$ jestliže $(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) \in p_I$
- je-li A_1, A_2, \dots, A_n dotaz
 $I \models_{\sigma} A_1, A_2, \dots, A_n$ jestliže $I \models_{\sigma} A_i$, pro všechna $i, 1 \leq i \leq n$

- je-li $A \leftarrow B$ rezultanta, potom
 $I \models_{\sigma} A \leftarrow B$ jestliže $I \models_{\sigma} A$ za předpokladu $I \models_{\sigma} B$

speciálně, je-li $H \leftarrow B$ klauzule, potom

$I \models_{\sigma} H \leftarrow B$ jestliže $I \models_{\sigma} H$ za předpokladu $I \models_{\sigma} B$

a pro jednotkovou klauzuli $H \leftarrow$

$I \models_{\sigma} H \leftarrow$ jestliže $I \models_{\sigma} H$

Říkáme, že výraz E je pravdivý v interpretaci I , je-li pravdivý při všech ohodnoceních proměnných. Přitom prázdný dotaz \square je pravdivý ve všech interpretacích.

Pokud výraz E není pravdivý v I , píšeme $I \not\models E$.

jestliže

Poznámka. Je-li výraz E základní (bez proměnných), pak pro každou interpretaci I a libovolná dvě ohodnocení σ, τ platí

$$I \models_{\sigma} E \text{ právě když } I \models_{\tau} E$$

odtud plyne, že základní výraz E je pravdivý v interpretaci I , je-li pravdivý při alespoň jednom ohodnocení.

Definice. (Univerzální a existenční uzávěr)

Je-li E výraz, zavedeme pojem univerzálního uzávěru $\forall E$ a existenčního uzávěru $\exists E$, které budeme používat jen při sémantické analýze programů.

Jejich sémantiku definujeme takto

$I \models \forall E$ jestliže platí $I \models_{\sigma} E$ pro všechna ohodnocení σ ,

$I \models \exists E$ jestliže platí $I \models_{\sigma} E$ pro alespoň jedno σ .

Pro každý výraz E platí $I \models \forall E$ právě když $I \models E$

používat

Definice. (Modely)

Je-li S množina výrazů (nebo jejich uzávěrů), říkáme, že interpretace I je model S , jestliže všechny výrazy z S jsou pravdivé v I .

Speciálně, I je model programu P jestliže všechny klauzule programu P jsou pravdivé v I .

Definice. (Sémantický důsledek, sémantická ekvivalence)

Jsou-li dány dvě množiny výrazů (nebo jejich uzávěrů) S a T stejného jazyka

(i) říkáme, že T je sémantický důsledek S nebo, že S sémanticky implikuje T a píšeme $S \models T$, jestliže každý model S je také modelem T . Pokud některá množina sestává z jediného prvku, vynecháváme závorky $\{ \}$ a zmíněnou množinu nahradíme tímto prvkem.

(ii) říkáme, že S a T jsou *sémanticky ekvivalentní*, jestliže současně platí $S \models T$ a $T \models S$. Jinými slovy S a T jsou sémanticky ekvivalentní, právě když mají stejné modely.

Lemma.

Jsou-li E, F výrazy, S, T, U množiny výrazů a A, B, C dotazy, potom platí

- (i) $E \models E\theta$ pro všechny substituce θ
- (ii) $E\theta \models \exists E$ pro všechny substituce θ
- (iii) jsou-li E a F variantami, potom $E \models F$ a $F \models E$
- (iv) $S \cup \{E\} \models E$
- (v) $S \models T$ a $T \models U$ implikuje $S \models U$
- (vi) je-li $E \models F$, potom $S \models E$ implikuje $S \models F$

- (vii) je-li $S \models A \leftarrow B$, potom $S \models A, C \leftarrow B, C$ a $S \models C, A \leftarrow C, B$ platí pro každé C ,
- (viii) je-li $S \models A \leftarrow B$ a $S \models B \leftarrow C$, potom $S \models A \leftarrow C$.

Označení.

Je-li dán jazyk L , výraz E a množina výrazů S jazyka L ,

- (i) množinu všech instancí výrazu E označujeme $inst(E)$, podobně množinu instancí všech výrazů z množiny S označíme $inst(S)$,
- (ii) množinu všech základních (ground) instancí výrazu E (tedy instancí, které neobsahují proměnné) označujeme $ground(E)$ a množinu všech základních instancí všech výrazů z množiny S označíme $ground(S)$.

Korektnost SLD-rezoluce.

Lemma. (Rezultanty)

(i) Necht' $Q = \theta/c \Rightarrow Q_1$ je SLD-derivační krok a r je odpovídající rezultanta. Potom

$$c \models r$$

(ii) Mějme SLD-derivaci $P \cup \{Q\}$ s posloupností R_0, \dots, R_n, \dots odpovídajících rezultant. Potom pro každé $i \geq 0$ platí

$$P \models R_i$$

Důkaz. Předpokládejme, že $Q := A, B, C$, kde B je vybraný atom z Q . Předpokládejme, že $H \leftarrow B$ je použitá vstupní klauzule. Potom

$$Q_1 = (A, B, C)\theta \text{ a } r = (A, B, C)\theta \leftarrow (A, B, C)\theta$$

Nyní $c \models H\theta \leftarrow B\theta$ a také $c \models B\theta \leftarrow B\theta$, protože θ unifikuje H a B .

K oběma stranám druhé klauzule můžeme přidat konjunkce $A\theta$ a $C\theta$.

Dostáváme

$$c \models (A, B, C)\theta \leftarrow (A, B, C)\theta$$

$$\text{tedy } c \models r.$$

(ii) Předpokládejme, že

$Q \equiv Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1 \dots Q_n = \theta_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \dots$
je uvažovaná SLD-derivace. Tvrzení dokazujeme indukcí.

Pro $i = 0$ je rezolventa R_0 tautologií, je pravdivá i bez předpokladu c .
Případ $i = 1$ byl dokázán v (i) protože R_1 je rezultanta odpovídající rezolučnímu kroku $Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1$.

Indukční krok. Předpokládáme, že platí $P \models R_i$ pro rezultantu stupně i , (a rezultanty nižších stupňů). K rezultantě R_{i+1} vede $i + 1$ rezoluční krok $Q_i = \theta_{i+1} \Rightarrow Q_{i+1}$.

Tomuto rezolučnímu kroku je přiřazena (malá) rezultanta

$$r_i = Q_i \theta_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} \quad (1)$$

Přitom podle definice rezultanty stupně i platí

$$R_i = Q_0 \theta_1 \dots \theta_i \leftarrow Q_i$$

odkud

$$R_i \theta_{i+1} = Q_0 \theta_1 \dots \theta_i \theta_{i+1} \leftarrow Q_i \theta_{i+1} \quad (2)$$

a podle definice rezultanty stupně $i + 1$ je

$$R_{i+1} = Q_0 \theta_1 \dots \theta_i \theta_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} \quad (3)$$

protože $P \models r_i$ podle (1) a z indukčního předpokladu také $P \models R_i$, je i implikace (2) sémantickým důsledkem programu P . Složením implikací (1) a (2) dostaneme rezultantu (3), pro kterou nakonec platí $P \models R_{i+1}$.

Věta. (Korektnost SLD-rezoluce)

Předpokládejme, že existuje úspěšná SLD-derivace $P \cup \{Q\}$ s vypočtenou odpovědní substitucí θ . Potom $P \models Q\theta$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\theta_1, \dots, \theta_n$ je posloupnost použitých mgu. Podle lemmatu o rezultantách, pro poslední rezultantu dané SLD-derivace platí $P \models Q\theta_1 \dots \theta_n \leftarrow \square$. A vypočtená odpovědní substituce $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n \mid Var(Q)$, to znamená, že jsme dokázali $P \models Q\theta$.

Důsledek.

Předpokládejme, že existuje úspěšná SLD-derivace $P \cup \{Q\}$. Potom platí $P \models \exists Q$.

Úplnost SLD-rezoluce.

Definice. (Korektní instance)

Předpokládejme, že $P \models Q\theta$. Potom $\theta \upharpoonright \text{Var}(Q)$ nazýváme *korektní odpovědní substituce* pro dotaz Q a $Q\theta$ nazýváme *korektní instance*.

Korektní instance nemusí být nutně vypočtená, intuitivně spíš odpovídá “uhodnutému” řešení.

Věta. (Silná forma věty o úplnosti SLD-rezoluce)

Nechť $P \models Q\theta$. Potom pro každé výběrové pravidlo R existuje úspěšná SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle R s vypočtenou odpovědní substitucí η taková, že $Q\eta$ je obecnější než $Q\theta$.

Bez důkazu.

Silná forma věty o úplnosti SLD-rezoluce ukazuje, že nelze ztotožnit korektní a vypočtené odpovědní instance.

Příklad.

Mějme jazyk, který obsahuje (unární) predkát p a alespoň jednu konstantu a .

Je-li $P = \{p(y)\}$ program a $Q = p(x)$ dotaz, potom $\{y/a\}$ je korektní odpovědní substituce, ale $\{y/x\}$ je vypočtená odpovědní substituce.

Silná forma věty o úplnosti je důležitá, protože spolu s větou o korektnosti SLD-rezoluce ukazuje, že mezi deklarativní a procedurální interpretací logických programů existuje úzký vztah nezávisle na volbě výběrového pravidla.

Tato korespondence však není zcela dokonalá, protože vypočtené a korektní odpovědní substituce nemusí být totožné.

Něco o modelech

V deklarativních interpretacích hrají důležitou roli dva typy modelů (interpretací) termové a Herbrandovy modely.

Mějme jazyk L , množinu všech termů jazyka L nazveme *termovým univerzem* jazyka L a označíme TU_L . Protože jsme předpokládali, že L má nekonečně mnoho proměnných, je i TU_L nekonečná množina.

Množinu všech atomických formulí (atomů) jazyka L nazveme *termovou bází* jazyka L a označíme TB_L .

Definice. (Termová algebra)

Termová algebra pro jazyk L obsahuje

- doménu TU_L ,
- pro každý n -ární funkční symbol f jeho kanonickou interpretaci

tedy zobrazení $(TU_L)^n$ do TU_L takové, že n -tici termů t_1, \dots, t_n přiřazuje term $f(t_1, \dots, t_n)$.

Termovou interpretací I jazyka L je každá interpretace L nad termovou algebrou L . Tedy každému n -árnímu predikátovému symbolu p je přiřazena relace $p_I \subseteq (TU_L)^n$.

Termovým modelem množiny výrazů S je termová interpretace, která je modelem S .

Poznámka. Protože interpretace funkčních symbolů je jednoznačně určena, každému jazyku L je přiřazena jediná termová algebra.

Termová interpretace jazyka L je tedy jednoznačně určena interpretací predikátových symbolů.

To znamená, že je zde přirozený vzájemně jednoznačný vztah mezi termovými interpretacemi a podmnožinami termové báze TB_L , který lze vyjádřit zobrazením, které každé termové interpretaci I přiřazuje množinu atomů

$$\{p(t_1, \dots, t_n) \mid p \text{ je } n\text{-ární predikát a } (t_1, \dots, t_n) \in p_I\}$$

Můžeme tedy termové interpretace pro L ztotožnit s (případně prázdnými) podmnožinami termové báze TB_L . Ohodnocení proměnných σ v termovém univerzu TU_L přiřazuje každé proměnné x term z TU_L .

Je-li X konečná množina proměnných, restrikcí $\sigma \mid X$ dostáváme substituci.

Lemma. (Termové interpretace)

Je-li I termová interpretace, potom pro každý atom A a klauzuli c

$$(i) \quad I \models_{\sigma} A \text{ právě když } A(\sigma \mid Var(A)) \in I$$

$$(ii) \quad I \models A \text{ právě když } inst(A) \subseteq I$$

$$(iii) \quad I \models c \text{ právě když pro všechny instance } A \leftarrow B_1, \dots, B_n \in inst(c) \\ \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq I \text{ implikuje } A \in I.$$

Důkaz. (i) pro libovolný term t a konečnou množinu proměnných X takovou, že $Var(t) \subseteq X$, se indukcí podle složitosti termu t dokáže $\sigma(t) = t(\sigma \mid X)$. To znamená, že hodnota, kterou termu t přiřadí ohodnocení σ je rovna instanci, která vznikne použitím substituce $(\sigma \mid X)$ na term t .

Pro atom $A = p(t_1, \dots, t_n)$ dostáváme

$$I \models_{\sigma} p(t_1, \dots, t_n) \quad \text{právě když} \\ (t_1\theta, \dots, t_n\theta) \in p_I \quad \text{právě když} \\ p(t_1, \dots, t_n)\theta \in I$$

kde $\theta = (\sigma \mid Var(A))$.

(ii) bezprostředně vyplývá z (i).

(iii) Podle (i)

$I \models_{\sigma} A \leftarrow B_1, \dots, B_n$
právě když $\{B_1\theta, \dots, B_n\theta\} \subseteq I$ implikuje $A\theta \in I$

kde $\theta = (\sigma \mid \text{Var}(A \leftarrow B_1, \dots, B_n))$. Tvrzení (iii) plyne z definice pravdivosti klauzule.

Poznámka. Tvrzení (ii) z předchozího lemmatu ukazuje, že v obecném případě nemůžeme ztotožnit termovou interpretaci s množinou atomů, které jsou v ní pravdivé. K tomu je zapotřebí ještě další podmínka.

Definice. (Termové interpretace uzavřené na substitute)

Termová interpretace je *uzavřená na substitute* jestliže $A \in I$ implikuje $\text{inst}(A) \subseteq I$.

Nyní platí: je-li I termová interpretace uzavřená na substitute, potom

$$I = \{A \mid A \text{ je atom a } I \models A\}$$

Popíšeme specifickou konstrukci termových modelů programů.

Definice. (Implikační stromy)

(i) *Implikační strom* vzhledem k programu P , je konečný strom, jehož uzly jsou atomy. Pro každý uzel A a jeho bezprostřední následníky B_1, \dots, B_n patří klauzule $A \leftarrow B_1, \dots, B_n$ do $\text{inst}(P)$.

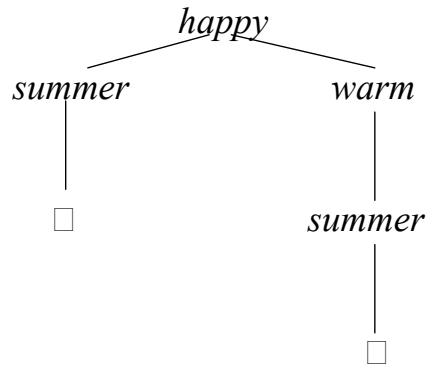
Speciálně, je-li A list implikačního stromu, jednotková klauzule $A \leftarrow$ je prvkem $\text{inst}(P)$.

(ii) Říkáme, že atom A *má implikační strom* vzhledem k P , je-li A kořenem nějakého implikačního stromu vzhledem k P . Říkáme, že *implikační strom je základní*, jestliže všechny jeho uzly jsou základní atomy.

Poznámka. Stejný atom může být kořenem několika implikačních stromů vzhledem k programu P . Je-li jednotková klauzule $A \leftarrow$ prvkem $\text{inst}(P)$, pak atom A je kořenem jednoprvkového implikačního stromu.

Příklad.

Atom *happy* má tento základní implikační strom vzhledem k programu *SUMMER*.



Lemma. (Termový model $C(P)$)

Termová interpretace

$$C(P) = \{ A \mid A \text{ má implikační strom vzhledem k } P \}$$

je modelem programu P .

Důkaz. Podle tvrzení (iii) lemmatu o termových interpretacích stačí pro každou klauzuli

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n \text{ z } inst(P)$$

ukázat, že

$$\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq C(P) \text{ implikuje } A \in C(P).$$

To však znamená, že A má implikační strom vzhledem k P . $C(P)$ je tedy modelem P .

Věta. (Nejmenší termový model)

$C(P)$ je nejmenší termový model programu P .

Důkaz. Necht' I je termový model P . Potom I je také model $inst(P)$.
Ukážeme, že

$$A \in C(P) \text{ implikuje } I \models A.$$

Tvrzení věty potom plyne z (ii) v lemmatu o termových interpretacích.

Postupujeme indukcí podle počtu uzlů i v implikačním stromu atomu A vzhledem k programu P .

Pro $i = 1$ je jednotková klauzule $A \leftarrow$ prvkem $inst(P)$, tedy $I \models A$.

Indukční krok. Předpokládejme, že A je kořenem implikačního stromu vzhledem k P , který má $i > 1$ uzlů. Potom pro nějaké $n \geq 1$ atomy B_1, \dots, B_n je klauzule $A \leftarrow B_1, \dots, B_n$, prvkem $inst(P)$ a

každé B_j , $1 \leq j \leq n$ má implikační strom vzhledem k P s $k_j < i$.

Z indukční hypotézy potom $I \models B_j$, pro každé $1 \leq j \leq n$. Ovšem podle $I \models A \leftarrow B_1, \dots, B_n$, tedy $I \models A$.

Věta. (Sémantická ekvivalence)

Pro libovolný atom A platí

$$P \models A \text{ právě když } C(P) \models A.$$

Poznámka. Tento výsledek ukazuje, že model $C(P)$ je sémanticky ekvivalentní deklarativní interpretaci programu P .
Nejprve dokažeme následující lemma.

Lemma.

Je-li atom A pravdivý ve všech termových modelech programu P ,
potom

$$P \models A.$$

Důkaz. Necht' I je model P . Potom pro každou kaluzuli
 $H \leftarrow B_1, \dots, B_n$ z $inst(P)$ platí

$$I \models B_1, \dots, I \models B_n, \text{ implikuje } I \models H \quad (1)$$

To proto, že I je také model $inst(P)$, takže pro všechna ohodnocení proměnných σ platí, že $I \models_{\sigma} B_1, \dots, B_n$ implikuje $I \models_{\sigma} H$.

Nyní necht' $I_T = \{ A \mid A \text{ je atom takový, že } I \models A \}$ označuje termovou interpretaci odpovídající I . Z (iii) Lemmatu o termových interpretacích a (1) dostáváme, že I_T také model (P) .

Navíc, podle (ii) z Lemmatu o termových interpretacích plyne, že v obou interpretacích I a I_T jsou pravdivé stejné atomy. Odtud plyne tvrzení lemmatu.

Důkaz Věty. Zvolme pevně jeden atom A . Ukázali jsme, že $C(P)$ je model P , tedy z $P \models A$ plyne $C(P) \models A$. Opačná implikace bezprostředně

tvrzení (ii) Lemmatu o termových interpretacích, předchozího lemmatu a faktu, že $C(P)$ je nejmenší termový model P .

Mějme dvě SLD-derivace

$$\xi := Q_0 = \theta_1 / c_1 \Rightarrow Q_1 \dots Q_n = \theta_{n+1} / c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \dots$$

$$\xi' := Q_0' = \theta_1' / c_1 \Rightarrow Q_1' \dots Q_n' = \theta_{n+1}' / c_{n+1}' \Rightarrow Q_{n+1}' \dots$$

Říkáme, že tyto SLD-derivace jsou *podobné* jestliže platí

$$\xi := Q_0 = \theta_1 / c_1 \Rightarrow Q_1 \dots Q_n = \theta_{n+1} / c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \dots$$

$$\xi' := Q_0' = \theta_1' / c_1 \Rightarrow Q_1' \dots Q_n' = \theta_{n+1}' / c_{n+1}' \Rightarrow Q_{n+1}' \dots$$