Přednáška 13, 9. ledna 2015

Taylorův polynom. Lokální lineární aproximaci funkce (kterou máme, když existuje vlastní derivace) nyní zobecníme na aproximaci polynomem.

Definice (Taylorův polynom). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a existuje vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (pro $n = 0$ to chápeme jako požadavek spojitosti f v a). Taylorů polynom řádu n funkce f v bodě a je polynom*

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &:= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \ . \end{aligned}$$

Všimněme si, že platí identita

$$\big(T_n^{f,a}(x)\big)' = T_{n-1}^{f',a}(x)$$

(takže $(T_n^{f,a}(x))^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$). Ta nám umožní dokázat, že $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n, který aproximuje f v okolí $x = a$ až do řádu n.

Věta (charakterizace Taylorova polynomu). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a existuje vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom $P(x)$ stupně nejvýše n s vlastností*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \ .$$

Než se pustíme do důkazu, uvědomíme si, že když $P(x)$ je polynom stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ a

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0 \ ,$$

potom $P(x)$ je nulový polynom. Pro $n = 0$ to je jasné, protože pak $(x-a)^n = 1$ a konstanta $P(x)$ musí být nulová. Nechť $n \geq 1$. Pak, ze spojitosti $P(x)$, $\lim_{x \to a} P(x) = P(a) = 0$ a a je kořenem $P(x)$. Nechť $P(x)$ není nulový polynom. Z algebry víme, že pak $P(x) = (x-a)^m Q(x)$, kde $1 \leq m \leq$

n (násobnost kořene a v $P(x)$) a $Q(x)$ je polynom s $Q(a) \neq 0$. Pak ale $P(x)/(x-a)^n = (x-a)^{m-n}Q(x)$, což vzhledem k $m-n \leq 0$ pro $x \to a$ nemůže jít k 0. Tedy $P(x)$ musí být nulový polynom.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $T_n^{f,a}(x)$ má uvedenou vlastnost. Postupujeme indukcí podle n. Pro $n = 0$ je $T_n^{f,a}(x) = f(a)$ konstantní polynom, pro který uvedená vlastnost platí dokonce ne jen v limitě, ale identicky. Nechť $n \geq 1$. Podle výše zmíněné identity, l'Hospitalova pravidla (jehož předpoklady jsou splněny) a indukčního předpokladu je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x-a)^n\big)'} = \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0\ .$$

Nechť nyní $P(x)$ s $\deg P \leq n$ má uvedenou vlastnost. Pak ale podle aritmetiky limit funkcí, předpokladu a části 1 je

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0\ .$$

Podle hořejší úvahy $P(x) - T_n^{f,a}(x)$ je nulový polynom a $P(x) = T_n^{f,a}(x)$. $\square$

Jiný zápis aproximační vlastnosti Taylorova polynomu je pomocí symbolu *malé o*:

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n),\ x \to a\ ,$$

což přesně znamená, že *zbytek Taylorova polynomu* $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ jde pro $x \to a$ k nule řádově rychleji, než mocnina $(x-a)^n$:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0\ .$$

Uvedeme ještě jednu variaci na věty o střední hodnotě, přesné vyjádření zbytku $R_n^{f,a}(x)$ pomocí derivací.

Věta (obecný tvar zbytku T. polynomu). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, \varphi : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, $n \in \mathbb{N}_0$, na $U(a,\delta)$ existují vlastní derivace $f^{(n+1)}, \varphi'$ a navíc na $U(a,\delta)$ je $\varphi' \neq 0$. Potom pro každé $x \in P(a,\delta)$ existuje číslo c ležící mezi a a x, že*

$$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{n! \cdot \varphi'(c)} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n\ .$$

Z časových důvodů větu nebudeme dokazovat. Konkrétní volbou funkce φ dostaneme následující vzorce pro $R_n^{f,a}(x)$:

Důsledek (zbytky T. polynomu). *Za předpokladů předchozí věty máme, pro nějaké číslo c mezi x a a,*

1. *Lagrangeův tvar zbytku*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   a

2. *Cauchyův tvar zbytku*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!} \ .$$

Důkaz. Stačí položit $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ a $\varphi(t) = t$. □

Taylorova řada. Má-li funkce v daném bodě všechny derivace, můžeme Taylorův polynom prodloužit do nekonečné řady.

Definice (Taylorova řada). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f:\ U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, a pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ existuje hodnota n-té derivace $f^{(n)}(a)$. Řadu*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f se středem v a.

Tato řada vždy konverguje pro $x = a$ a pak má součet $f(a)$. Pro mnoho funkcí se ale dá pomocí posledního důsledku dokázat více: pro každé x z jistého oboru je $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,a}(x) = 0$, takže pro takové x má Taylorova řada součet rovný $f(x)$ a funkce je vyjádřena pomocí mocninné řady. Uvedeme seznam takových vyjádření, důkazy konvergence pro nedostatek času pomineme. Pro jednoduchost značení se omezíme na případ Taylorových řad se středem v nule, tj. $a = 0$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je totiž $(e^x)^{(n)} = e^x$ a tedy vždy $f^{(n)}(0) = 1$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ ,$$

protože $(\sin^{(n)} x)_{n \geq 0} = (\sin, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, \ldots)$ (derivace se opakují s periodou 4) a podobně pro derivace cosinu.

Užitečné jsou Taylorovy řady logaritmických funkcí:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in (-1, 1] \\
\log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in [-1, 1) \\
\log(1-x)^{-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in [-1, 1)\ .
\end{aligned}$$

Jako úlohu si spočtěte derivace $(\log(1+x))^{(n)}$ a ověřte koeficienty v těchto Taylorových řadách. Pro $x = 1$ první řada dává známý součet

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\ .$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ je

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2n-1}\ .$$

Ověřte koeficienty v této Taylorově řadě jako úlohu. Pro $x = 1$ dává známý součet

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ .$$

Konečně pro každé $x \in (-1, 1)$ a $a \in \mathbb{R}$ je

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n\ , \quad \text{kde} \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}\ .$$

Tento rozvoj objevil anglický fyzik, filosof a matematik (alchymista, numerolog, ředitel mincovny, ...) *Isaac Newton (1642–1726)* (druhý spolutvůrce matematické analýzy). Pro $a \in \mathbb{N}_0$ dostáváme klasickou binomickou větu s konečným součtem, protože pak $\binom{a}{n} = 0$ pro $n > a$, ale pro $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ se binomický koeficient nikdy nevynuluje a Taylorova řada je nekonečná. Například pro $a = -1$ a $a = \frac{1}{2}$ dostáváme rozvoje

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad \text{(geometrická řada)}$$

a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-3}{2})x^n}{n!} + \dots$$

(stále $x \in (-1, 1)$).

Skončíme zajímavostí — souvislostí Taylorových řad s enumerativní kombinatorikou. Nechť p_n je počet těch permutací $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$, že $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \dots$ (říká se jim *střídavé* či *cik-cak* či *nahoru-dolů* permutace). Například $p_4 = 5$ díky permutacím 1324, 1423, 2413, 2314 a 3412. Posloupnost počtů střídavých permutací začíná

$$(p_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, \dots)\ .$$

Dá se dokázat, že pro x v okolí 0 platí rovnost

$$\tan x + \sec x = \tan x + \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^n}{n!}\ .$$