### Výroková a predikátová logika - XI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

#### Lineární rezoluce

Stejně jako ve VL, rezoluční metodu lze značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic  $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$  t.ž.  $C_0$  je varianta klauzule v S a pro každé  $i \le n$ 
  - $i) \;\; B_i$  je varianta klauzule v S nebo  $B_i = C_j$  pro nějaké j < i, a
  - ii)  $C_{i+1}$  je rezolventa  $C_i$  a  $B_i$ , kde  $C_{n+1} = C$ .
- C je lineárně dokazatelná z S, psáno  $S \vdash_L C$ , má-li lineární důkaz z S.
- Lineární zamítnutí S je lineární důkaz □ z S.
- S je lineárně zamítnutelná, pokud  $S \vdash_L \Box$ .

**Věta** *S je lineárně zamítnutelná, právě když S je nesplnitelná.* 

 $D\mathring{u}kaz$   $(\Rightarrow)$  Každý lineární důkaz lze transformovat na rezoluční důkaz.

(⇐) Plyne z úplnosti lineární rezoluce ve VL (nedokazováno), neboť lifting lemma zachovává linearitu odvození.

#### LI-rezoluce

Stejně jako ve VL, pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- LI-rezoluce ("linear input") z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B<sub>i</sub> variantou klauzule ze (vstupní) formule S.
- Je-li klauzule C dokazatelná Ll-rezolucí z S, píšeme  $S \vdash_{LI} C$ .
- Hornova formule je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- Hornova klauzule je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- Fakt je (Hornova) klauzule  $\{p\}$ , kde p je pozitivní literál.
- Pravidlo je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou programové klauzule.
- Cíl je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Věta .	Je-li Hornova T sp	Initelná a $T \cup \{G\}$	nesplnitelná	pro cíl G,	lze □
odvod	lit LI-rezolucí z $T \cup$	$\{G\}$ začínající $G$ .			

Důkaz Plyne z Herbrandovy věty, stejné věty ve VL a lifting lemmatu.



#### Program v Prologu

*Program* (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

```
syn(X,Y) := otec(Y,X), muz(X). \qquad \{syn(X,Y), \neg otec(Y,X), \neg muz(X)\} syn(X,Y) := matka(Y,X), muz(X). \qquad \{syn(X,Y), \neg matka(Y,X), \neg muz(X)\} muz(jan). \qquad \{muz(jan)\} otec(jiri, jan). \qquad \{otec(jiri, jan)\} matka(julie, jan). \qquad \{matka(julie, jan)\} --syn(jan,X) \qquad P \models (\exists X) syn(jan,X) ? \qquad \{\neg syn(jan,X)\}
```

Zajímá nás, zda daný existenční dotaz vyplývá z daného programu.

**Důsledek** Pro program P a cíl  $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_n\}$  v proměnných  $X_1, \dots, X_m$ 

- (1)  $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_m) (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ , právě když
- (2)  $\square$  lze odvodit LI-rezolucí z  $P \cup \{G\}$  začínající (variantou) cíle G.



#### LI-rezoluce nad programem

Je-li odpoveď na dotaz kladná, chceme navíc znát výstupní substituci.

*Výstupní substituce*  $\sigma$  LI-rezoluce  $\square$  z  $P \cup \{G\}$  začínající  $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_n\}$  je složení mgu v jednotlivých krocích (jen na proměnné v G). Platí,

$$P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\sigma.$$

Výstupní substituce a) X = jiri, b) X = julie.



## Axiomatický přístup

- základní logické spojky a kvantifikátory: ¬, →, (∀x) (ostatní odvozené)
- dokazují se libovolné formule (nejen sentence)
- logické axiomy (schémata logických axiomů)

(i) 
$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

(ii) 
$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

(iii) 
$$(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(iv)$$
  $(\forall x)\varphi o \varphi(x/t)$  je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$ 

$$(v)$$
  $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$  není-li  $x$  volná proměnná ve  $\varphi$ 

kde  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  jsou libovolné formule (daného jazyka), t je libovolný term a x je libovolná proměnná.

- je-li jazyk s rovností, mezi logické axiomy patří navíc axiomy rovnosti
- odvozovací (deduktivní) pravidla

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}, \qquad \frac{\varphi}{(\forall x) \varphi} \quad \text{(generalizace)}$$

# Pojem d<mark>ůkazu</mark>

Důkaz (Hilbertova stylu) formule  $\varphi$  z teorie T je konečná posloupnost  $\varphi_0,\ldots,\varphi_n=\varphi$  formulí taková, že pro každé  $i\leq n$ 

- $\varphi_i$  je logický axiom nebo  $\varphi_i \in T$  (axiom teorie), nebo
- $\varphi_i$  lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

Formule  $\varphi$  je dokazatelná v T, má-li důkaz z T, značíme  $T \vdash_H \varphi$ .

**Věta** *Pro každou teorii* T *a formuli*  $\varphi$ ,  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

#### Důkaz

- Je-li  $\varphi \in T$  nebo logický axiom, je  $T \models \varphi$  (logické axiomy jsou tautologie),
- ullet jestliže  $T\models arphi$  a  $T\models arphi o \psi$ , pak  $T\models \psi$ , tj. modus ponens je korektní,
- jestliže  $T \models \varphi$ , pak  $T \models (\forall x)\varphi$ , tj. pravidlo generalizace je korektní,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T.

*Poznámka Platí i úplnost, tj.*  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$  pro každou teorii T a formuli  $\varphi$ .

#### Teorie struktury

Mnohdy nás zajímá, co platí v jedné konkrétní struktuře.

Teorie struktury A je množina Th(A) sentencí (stejného jazyka) platných v A. Pozorování Pro každou strukturu A a teorii T jazyka L,

- (i) Th(A) je kompletní teorie,
- (ii) je-li  $A \models T$ , je Th(A) jednoduchá (kompletní) extenze teorie T,
- (iii) je-li  $A \models T$  a T je kompletní, je  $\overline{\text{Th}}(A)$  ekvivalentní s T,  $tj. \theta^{L}(T) = \overline{\text{Th}}(A)$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je  $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  je aritmetika přirozených čísel.

Poznámka Později uvidíme, že ačkoliv je Th(N) kompletní teorie, je (algoritmicky) nerozhodnutelná.



8/17

#### Elementární ekvivalence

- Struktury  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  jazyka L jsou elementárně ekvivalentní, psáno  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , pokud v nich platí stejné formule (jazyka L), tj.  $\overline{\operatorname{Th}(\mathcal{A})} = \overline{\operatorname{Th}(\mathcal{B})}$ .

  Např.  $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ , ale  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ , neboť v  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  má každý prvek bezprostředního následníka, zatímco v  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  ne.
- T je kompletní, právě když má až na el. ekvivalenci právě jeden model.
   Např. teorie DeLO hustých lineárních uspořádání bez konců je kompletní.

Zajímá nás, jak vypadají modely dané teorie (až na elementární ekvivalenci). Pozorování Pro modely A, B teorie T platí  $A \equiv B$ , právě když  $\overline{\text{Th}}(A)$ ,  $\overline{\text{Th}}(B)$  jsou ekvivalentní (jednoduché kompletní extenze teorie T).

Poznámka Lze-li efektivně (rekurzivně) popsat pro efektivně danou teorii T, jak vypadají všechny její kompletní extenze, je T (algoritmicky) rozhodnutelná.

## Jednoduché kompletní extenze - příklad

Teorie  $\underline{\textit{DeLO}}^*$  hustého lineárního uspořádání jazyka  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností je

$$x \leq x$$
 (reflexivita)  $x \leq y \land y \leq x \rightarrow x = y$  (antisymetrie)  $x \leq y \land y \leq z \rightarrow x \leq z$  (tranzitivita)  $x \leq y \lor y \leq x$  (dichotomie)  $x < y \rightarrow (\exists z) \ (x < z \land z < y)$  (hustota)  $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$  (netrivialita)

kde 'x < y' je zkratka za ' $x \le y \land x \ne y$ '.

Označme  $\varphi$ ,  $\psi$  sentence  $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ , resp.  $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ . Uvidíme, že

$$\begin{array}{ll} DeLO &= DeLO^* \cup \{\neg \varphi, \neg \psi\}, & DeLO^{\pm} = DeLO^* \cup \{\varphi, \psi\}, \\ DeLO^+ &= DeLO^* \cup \{\neg \varphi, \psi\}, & DeLO^- &= DeLO^* \cup \{\varphi, \neg \psi\} \end{array}$$

jsou všechny (neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie  $DeLO^*$ .

## Důsledek věty o spočetném modelu

Pomocí kanonického modelu (s rovností) jsme dříve dokázali následující větu.

Věta Nechť T je bezesporná teorie spočetného jazyka L. Je-li L bez rovnosti, má T model, který je spočetně nekonečný. Je-li L s rovností, má T model, který je spočetný.

Důsledek Ke každé struktuře A spočetného jazyka bez rovnosti existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura B.

Důkaz Teorie Th(A) je bezesporná, neboť má model A. Dle předchozí věty má spočetně nek. model  $\mathcal{B}$ . Jelikož je teorie  $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$  kompletní, je  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

Důsledek Ke každé nekonečné struktuře A spočetného jazyka s rovností existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura  $\mathcal{B}$ .

Důkaz Obdobně jako výše. Jelikož v A neplatí sentence "existuje právě n prvků" pro žádné  $n \in \mathbb{N}$  a  $A \equiv \mathcal{B}$ , není B konečná, tedy je nekonečná.



## Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Rekneme, že těleso A je algebraicky uzavřené, pokud v něm každý polynom (nenulového stupně) má kořen, tj. pro každé  $n \ge 1$  platí

$$\mathcal{A} \models (\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0)$$

kde  $y^k$  je zkratka za term  $y \cdot y \cdot \cdots \cdot y$  ( · aplikováno (k-1)-krát).

Např. těleso  $\mathbb{C} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  je algebraicky uzavřené, zatímco tělesa  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{Q}$  nejsou (neboť polynom  $x^2 + 1$  v nich nemá kořen).

Důsledek Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.

Důkaz Dle předchozího důsledku existuje spočetná struktura (nekonečná). která je elementárně ekvivalentní s tělesem C, tedy je to rovněž algebraicky uzavřené těleso.

#### Izomorfismus struktur

Nechť A, B jsou struktury jazyka  $L = \langle F, R \rangle$ .

- Bijekce  $h: A \to B$  je *izomorfismus* struktur A a B, pokud platí zároveň
  - $\begin{array}{ll} (\emph{\textbf{i}}) & h(f^A(a_1,\ldots,a_n)) = f^B(h(a_1),\ldots,h(a_n)) \\ & \text{pro každý } n\text{-\'arn\'i funkčn\'i symbol } f \in \mathcal{F} \text{ a každ\'e } a_1,\ldots,a_n \in A, \end{array}$
  - (ii)  $R^A(a_1,\ldots,a_n)\Leftrightarrow R^B(h(a_1),\ldots,h(a_n))$  pro každý n-ární relační symbol  $R\in\mathcal{R}$  a každé  $a_1,\ldots,a_n\in A$ .
- A a B jsou izomorfní (via h), psáno A ≃ B (A ≃<sub>h</sub> B), pokud existuje izomorfismus h struktur A a B. Říkáme rovněž, že A je izomorfní s B.
- Automorfismus struktury A je izomorfismus A s A.

Např. potenční algebra  $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$  s X = n je izomorfní s Booleovou algebrou  $\underline{^n2} = \langle ^n2, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$  via  $h: A \mapsto \chi_A$ , kde  $\chi_A$  je charakteristická funkce množiny  $A \subseteq X$ .



#### Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

**Tvrzení** Nechť  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  jsou struktury jazyka  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ . Bijekce  $h: A \to B$  je izomorfismus  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$ , právě když platí zároveň

- $(i) \quad h(t^A[e]) = t^B[he] \qquad \qquad ext{pro každý term } t \; a \; e \colon ext{Var} o A$ ,
- $(\emph{ii}) \quad \mathcal{A} \models \varphi[e] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[he] \qquad \textit{pro každou formuli } \varphi \textit{ a } e \colon \mathrm{Var} \to A.$

*Důkaz* ( $\Rightarrow$ ) Indukcí dle struktury termu t, respektive formule  $\varphi$ .

- ( $\Leftarrow$ ) Dosazením termu  $f(x_1, \ldots, x_n)$  do (i) či atomické formule  $R(x_1, \ldots, x_n)$
- do (ii) pro ohodnocení  $e(x_i)=a_i$  máme, že h vyhovuje def. izomorfismu.

Důsledek Pro každé struktury A, B stejného jazyka,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \ \Rightarrow \ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Poznámka Obrácená implikace obecně neplatí, např.  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ , ale  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ , neboť  $|\mathbb{Q}| = \omega$  a  $|\mathbb{R}| = 2^{\omega}$ .



## Konečné modely s rovností

**Tvrzení** Pro každé konečné struktury A, B stejného jazyka s rovností,

$$A \equiv B \Rightarrow A \simeq B.$$

Důkaz Je |A| = |B|, neboť lze vyjádřit "existuje právě n prvků".

- Nechť  $\mathcal{A}'$  je expanze  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$  o jména prvků z A.
- Ukážeme, že  $\mathcal{B}$  lze expandovat na  $\mathcal{B}'$  do jazyka L' tak, že  $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$ . Pak zřejmě  $h \colon a \mapsto c_a^{\mathcal{B}'}$  je izomorfismus  $\mathcal{A}'$  s  $\mathcal{B}'$  a tedy i izomorfismus  $\mathcal{A}$  s  $\mathcal{B}$ .
- Stačí ukázat, že pro každé  $c_a^{A'}=a\in A$  existuje  $b\in B$  t.ž.  $\langle \mathcal{A},a\rangle\equiv\langle \mathcal{B},b\rangle$ .
- Označme  $\Omega$  množinu formulí  $\varphi(x)$  t.ž.  $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ .
- Jelikož je A konečné, existuje konečně formulí  $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$  tak, že pro každé  $\varphi \in \Omega$  je  $A \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$  pro nějaké i.
- Jelikož  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i$ , existuje  $b \in B$  t.ž.  $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i[e(x/b)]$ .
- Tedy pro každou  $\varphi \in \Omega$  je  $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$ , tj.  $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$ .  $\square$

Důsledek Má-li kompletní teorie jazyka s rovností konečný model, jsou všechny její modely izomorfní.



## Kategoričnost

- *Izomorfní spektrum* teorie T je počet  $I(\kappa, T)$  navzájem neizomorfních modelů teorie T pro každou kardinalitu  $\kappa$ .
- Teorie T je  $\kappa$ -kategorická, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality  $\kappa$ , tj.  $I(\kappa, T) = 1$ .

Tvrzení Teorie DeLO (tj. "bez konců") je  $\omega$ -kategorická.

*Důkaz* Nechť  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B} \models DeLO$  s  $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Indukcí dle n lze nalézt prosté parciální funkce  $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$  zachovávající uspořádání tak, že  $\{a_i\}_{i < n} \subseteq \operatorname{dom}(h_n)$  a  $\{b_i\}_{i < n} \subseteq \operatorname{rng}(h_n)$ . Pak  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  via  $h = \cup h_n$ .

Obdobně dostaneme, že např.  $\mathcal{A}=\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$ ,  $\mathcal{A}\upharpoonright(0,1]$ ,  $\mathcal{A}\upharpoonright[0,1)$ ,  $\mathcal{A}\upharpoonright[0,1]$  jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie  $DeLO^*$ . Pak

$$I(\kappa, \textit{DeLO}^*) = egin{cases} 0 & \mathsf{pro} \ \kappa \in \mathbb{N}, \ 4 & \mathsf{pro} \ \kappa = \omega. \end{cases}$$



### $\omega$ -kategorické kritérium kompletnosti

#### Věta Nechť jazyk L je spočetný.

- (i) Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti  $\omega$ -kategorická, je kompletní.
- (ii) Je-li teorie T jazyka L s rovností  $\omega$ -kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.

Důkaz Každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem T, ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely T jsou elementárně ekvivalentní, tj. T je kompletní.

Např. teorie  $DeLO^+$ ,  $DeLO^+$ ,  $DeLO^+$  jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie  $DeLO^*$ .

Poznámka Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než  $\omega$ .

