

Úvod do radiačních metod

© 1996-2016 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz

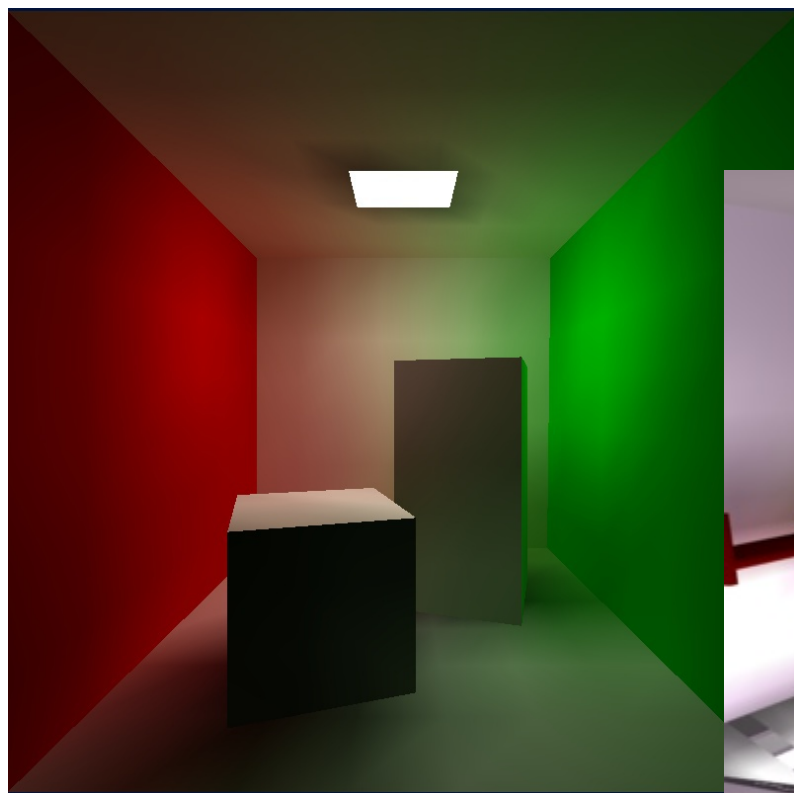
<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>



Globální výpočet osvětlení

- ♦ založen na **fyzikálním principu**
 - propagace energie (světla) v difusním prostředí
 - použití v syntéze obrazu: Cindy Goral (SIGGRAPH 1984)
- ➔ dokáže dobře spočítat **měkké osvětlení**, sekundární odrazy světla, ..
- ➔ základní metoda nezvládá **ostré světlo**, zrcadlové odrazy, ..
- ♦ **časově náročnější** než rekurzivní sledování paprsku
 - RT: zobrazení (rendering), Rad: jen výpočet osvětlení

Radiační metoda – příklady



© David Bařina (WiKi)

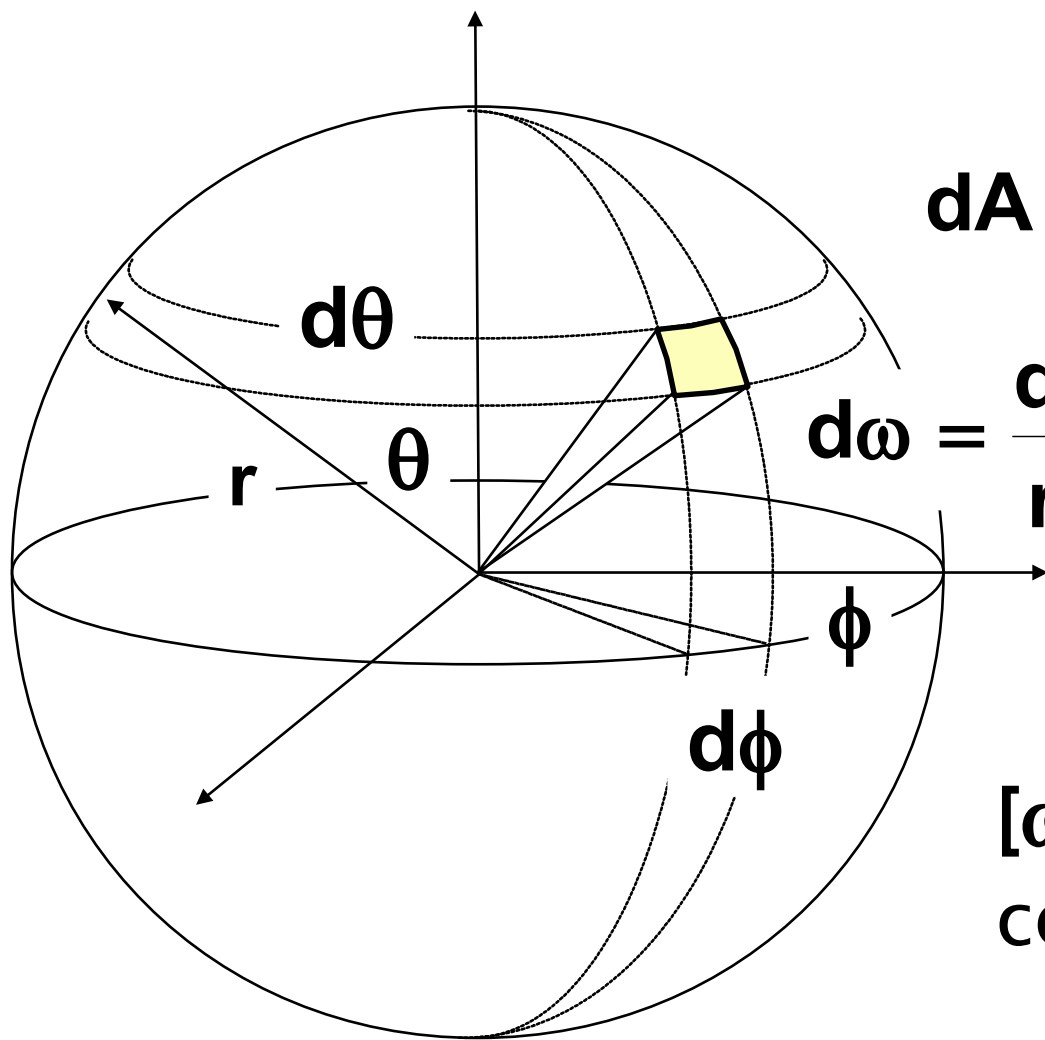


Základní radiometrické veličiny



- ➔ množství **energie** přijaté (emitované) nějakou plochou:
 - $Q_{\text{in}} (Q_{\text{out}})$ [Joul]
- ➔ **výkon** přijímaný (emitovaný) nějakou plochou:
 - $\Phi_{\text{in}} (\Phi_{\text{out}})$ [Joul/sec = Watt]
- ➔ přijímaná (emitovaná) **radiosita** (hustota výkonu):
 - $B_{\text{in}} (E, B_{\text{out}})$ [W/m²]
- ➔ **intenzita** (hustota výkonu v prostorovém úhlu ω):
 - $I = d\Phi/d\omega$ [W/sr]

Prostorové úhly



$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

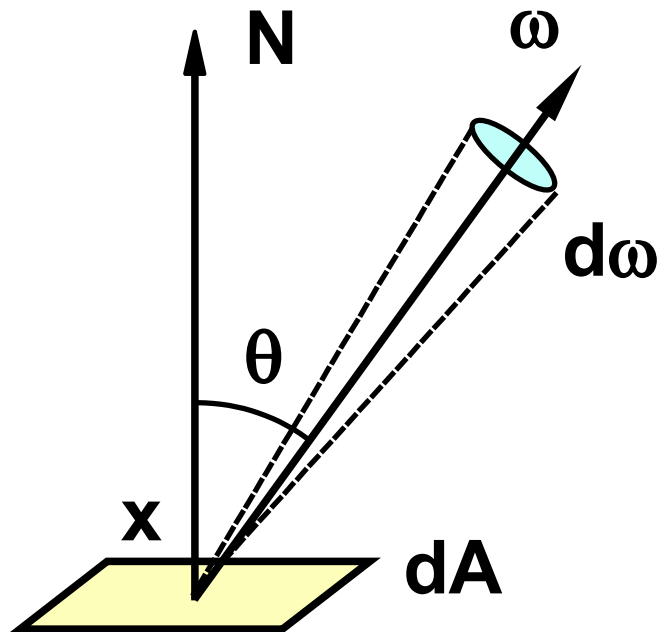
$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$[\omega]$.. steradián (sr)
celá sféra má 4π sr



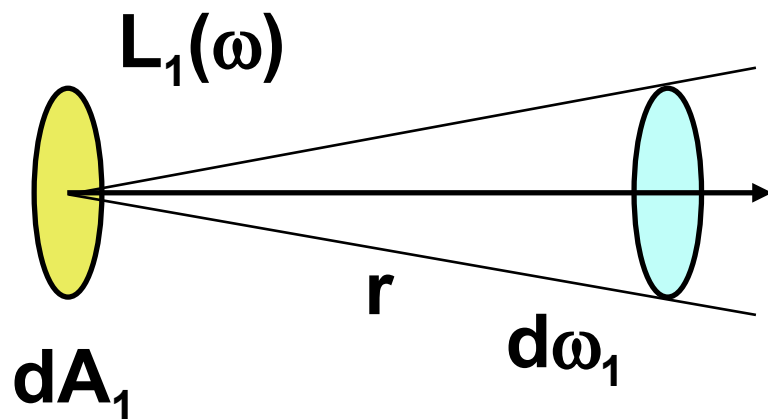
Radiance

- přijímaná (emitovaná) **radiance** ve směru ω :
 - $L_{\text{in}}(\omega)$ ($L_e(\omega)$, $L_{\text{out}}(\omega)$) [$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$]



$$\begin{aligned} L_{\text{out}}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{d^2\Phi}{dA d\omega \cos \theta} \\ &= \frac{dB_{\text{out}}}{d\omega \cos \theta} \\ &= \frac{dl}{dA \cos \theta} \end{aligned}$$

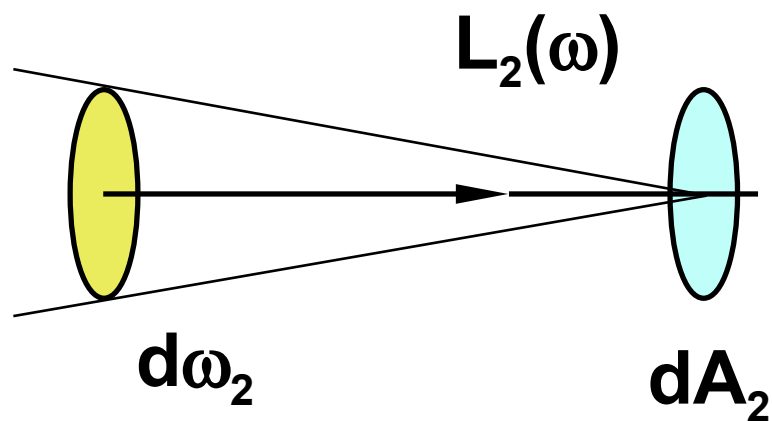
Zákon zachování energie v paprsku



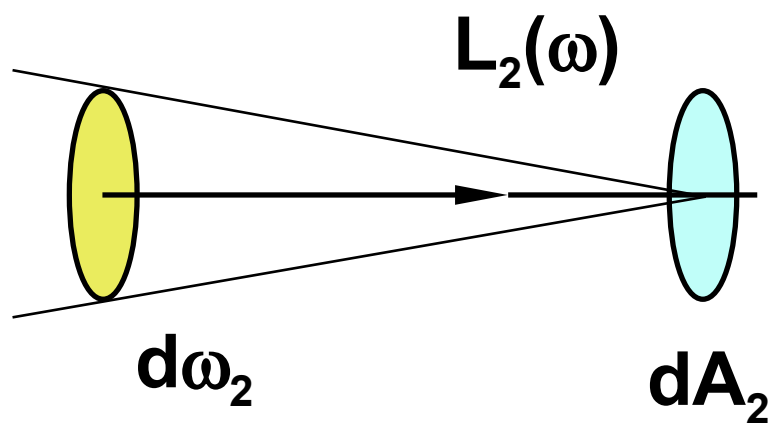
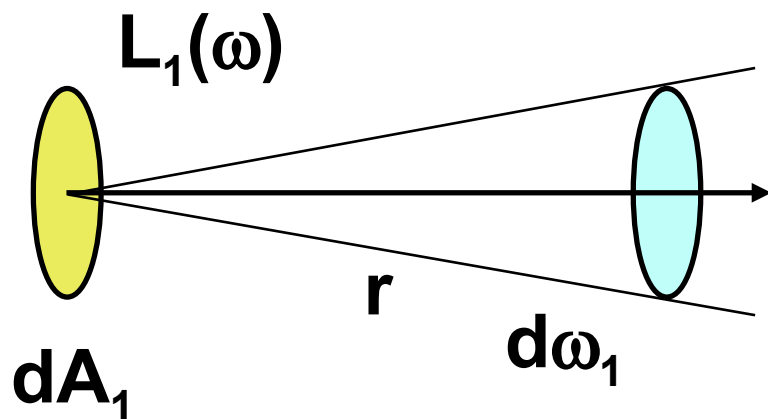
$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

emitovaný
výkon

přijímaný
výkon



Zákon zachování energie v paprsku



$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

$$\underline{T} = d\omega_1 dA_1 = d\omega_2 dA_2 = \\ = \frac{dA_1 dA_2}{r^2}$$

kapacita paprsku

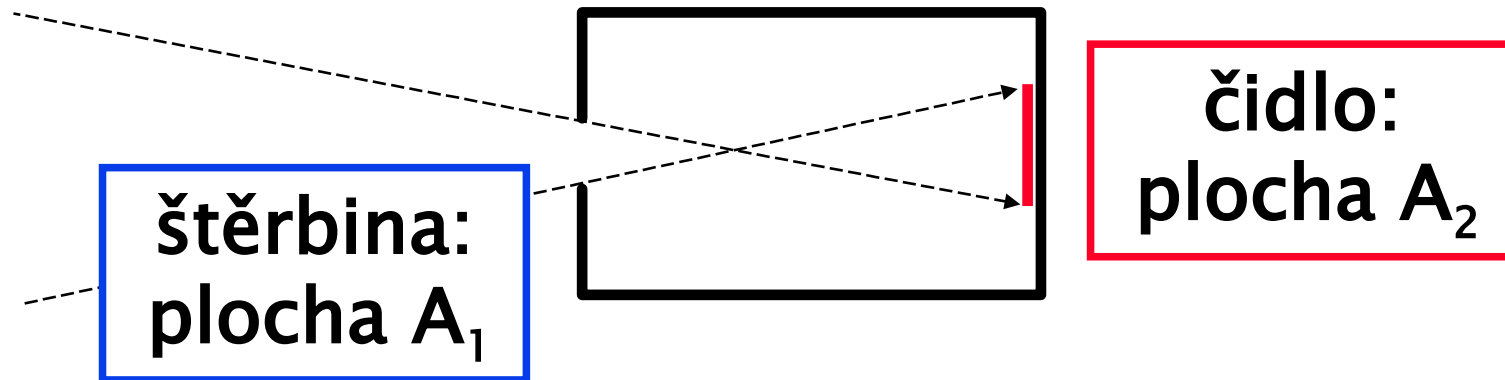
$$L_1 = L_2$$

paprsek ... radiance L



Měření světla

- ➔ **naměřená veličina** je přímo úměrná **radianci** viditelné části scény

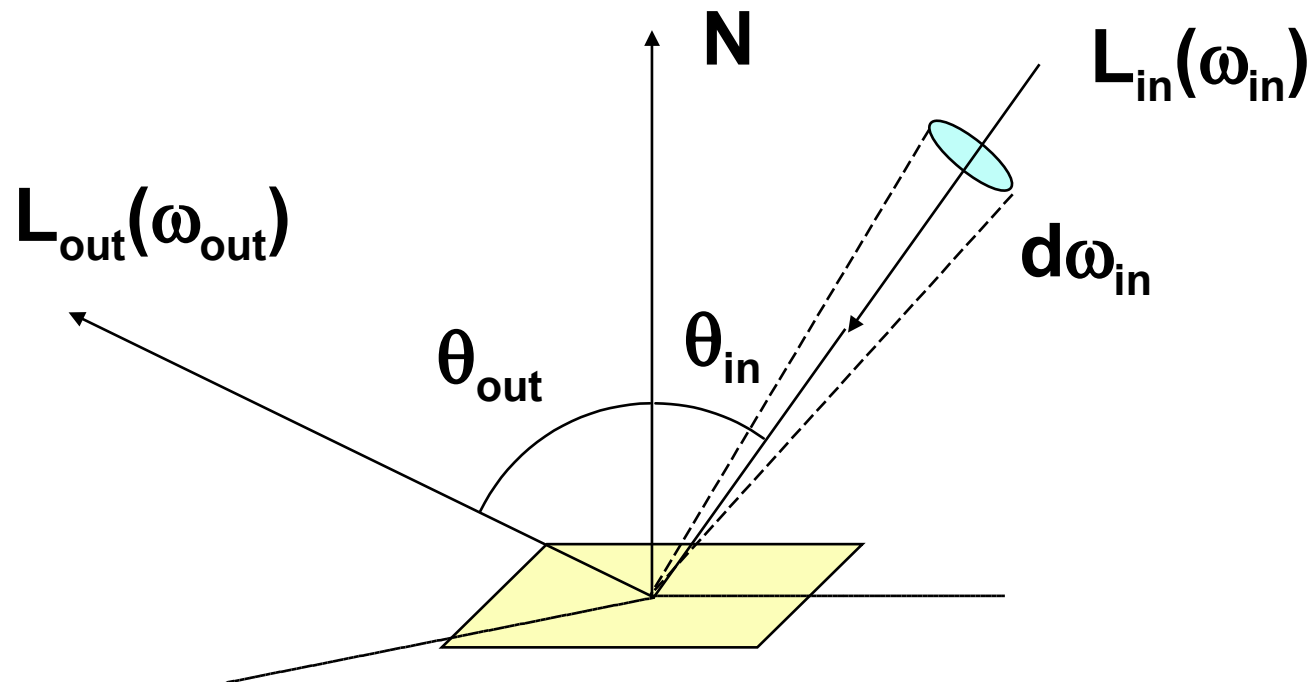


$$\underline{R} = \int_{A_2} \int_{\Omega} L_{\text{in}}(\mathbf{A}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA = \underline{L_{\text{in}} \cdot T}$$



BRDF (funkce odrazivosti)

“Bidirectional Reflectance Distribution Function”



$$f(\omega_{in} \rightarrow \omega_{out}) = \frac{L_{out}(\omega_{out})}{L_{in}(\omega_{in}) \cdot \cos \theta_{in} \cdot d\omega_{in}} \quad [sr^{-1}]$$



Helmholtzův reciproční zákon, ..

- pro **reálné** povrchy těles (vyhovující fyzikálním zákonům) platí:

$$\mathbf{f}(\omega_{\text{in}} \rightarrow \omega_{\text{out}}) = \mathbf{f}(\omega_{\text{out}} \rightarrow \omega_{\text{in}})$$

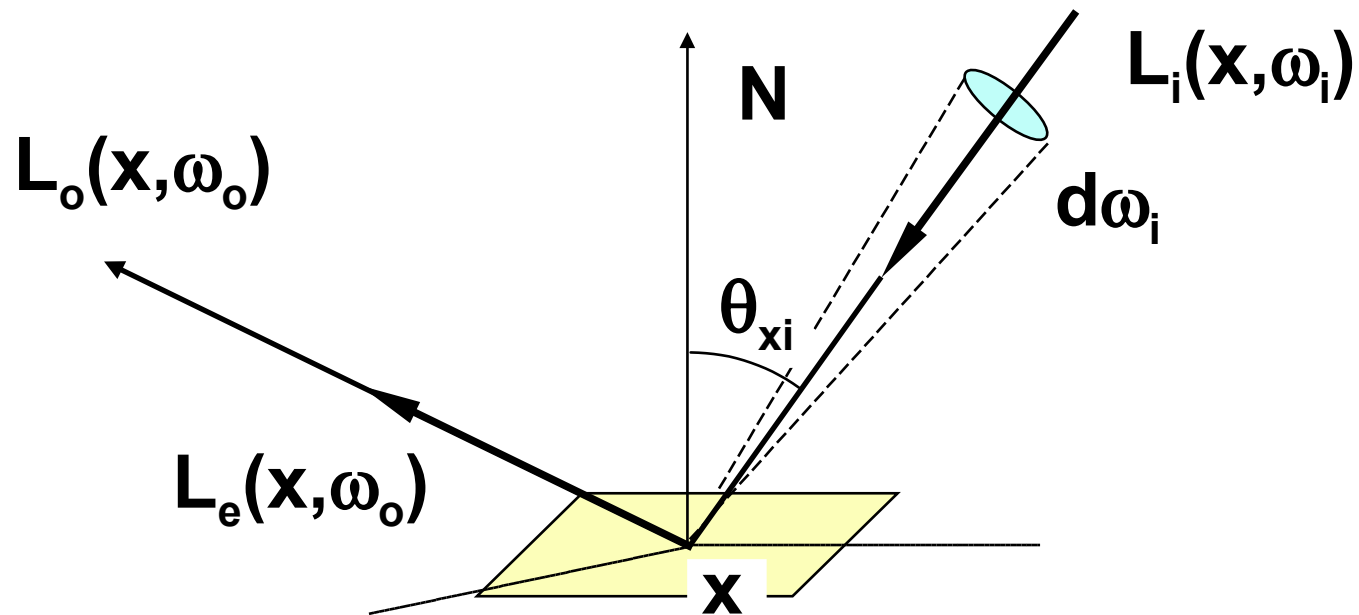
- obecná **BRDF** nemusí být **isotropní** (invariantní k otočení kolem normály)
 - kovové povrchy leštěné v jednom směru, ..

$$\mathbf{f}(\theta_{\text{in}}, \phi_{\text{in}}, \theta_{\text{out}}, \phi_{\text{out}}) \neq \mathbf{f}(\theta_{\text{in}}, \phi_{\text{in}} + \phi, \theta_{\text{out}}, \phi_{\text{out}} + \phi)$$



Lokální rovnice (OVTIGRE)

“Outgoing, Vacuum, Time-Invariant, Gray Radiance Equation”

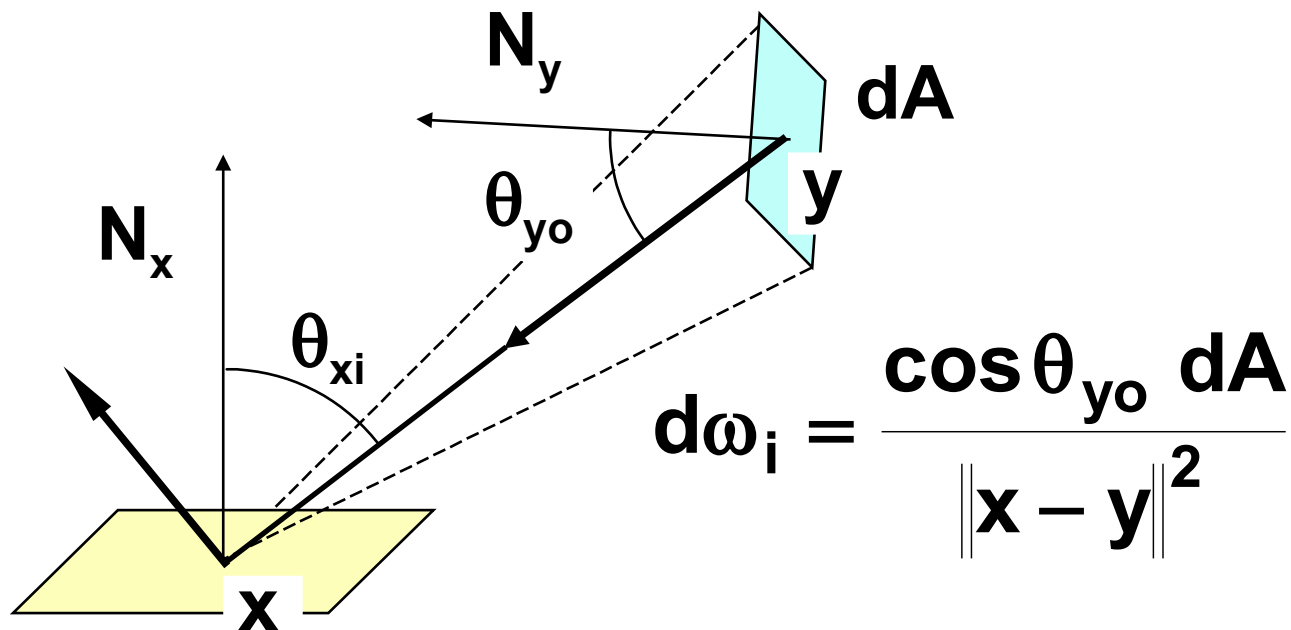


vlastní vyzařování

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int f(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_{xi} d\omega_i$$



Radiance přijímaná z plochy



Geometrický člen: $G(y, x) = \frac{\cos \theta_{yo} \cos \theta_{xi}}{\|x - y\|^2}$

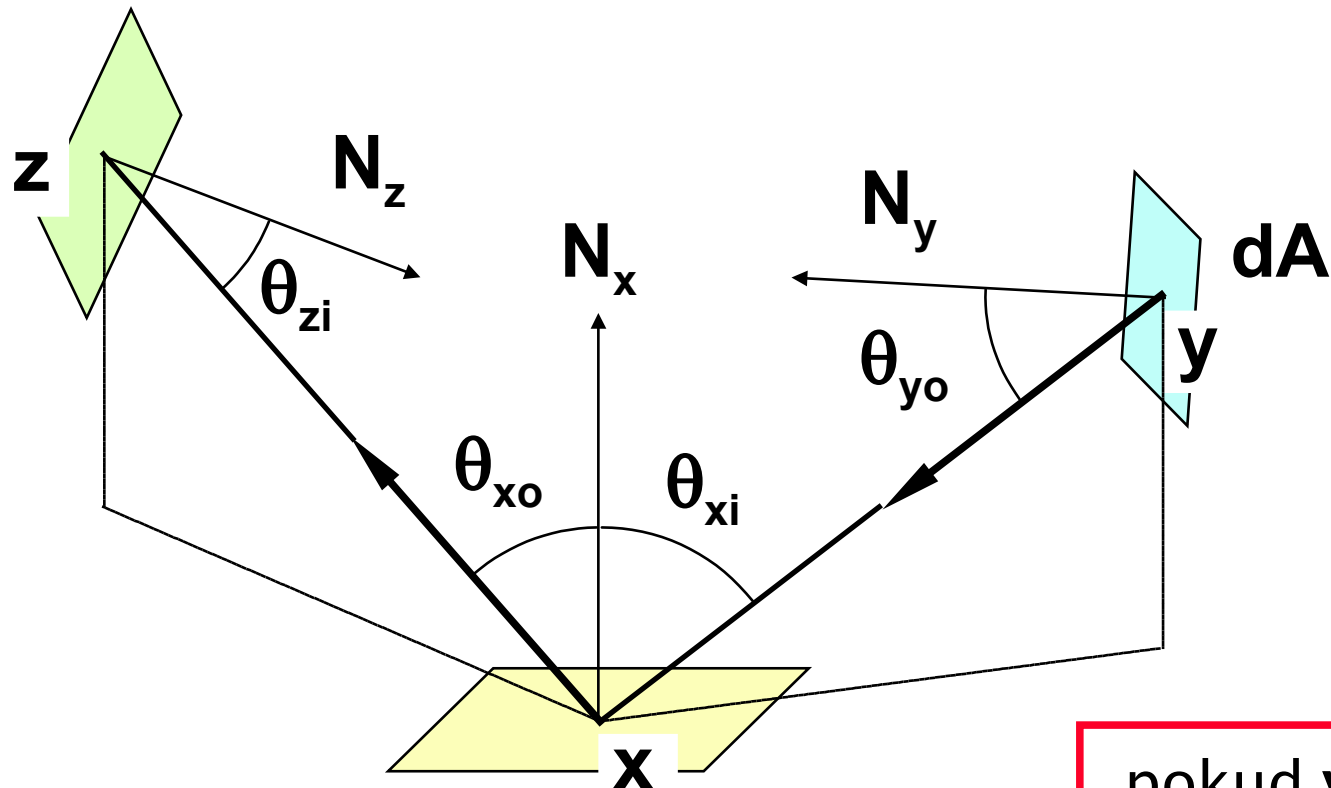


Radiance přijímaná z plochy

$$\begin{aligned} L_o(\mathbf{x}, \omega_o) &= \text{integrál přes všechny úhly} \\ &= L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_{xi} \, d\omega_i = \\ &= L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S f(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot L_o(\mathbf{y}, -\omega_i) \cdot G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, dA \\ &\quad \text{integrál přes vyzařující plošku} \end{aligned}$$

(za předpokladu, že z bodu \mathbf{x} je vidět celá plocha \mathbf{S})

Šíření světla odrazem



Označení: $\underline{L(y, x)} = L_o(y, x - y) = L_i(x, y - x)$

$\underline{f(y, x, z)} = f(x, (y - x) \rightarrow (z - x))$

pokud y vidí x



Rovnice pro nepřímou radianci

$$V(y, x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } y \text{ vidí } x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\underline{L(x, z)} = \underline{L_e(x, z)} + \int_S \underline{f(y, x, z)} \cdot \underline{L(y, x)} \cdot \underline{G(y, x)} \cdot \underline{V(y, x)} dA$$

Diagram illustrating the components of the radiance equation:

- $\underline{L_e(x, z)}$ is labeled **vlastní (emitovaná) radiance** (own (emitted) radiance).
- $\underline{f(y, x, z)}$ is labeled **BRDF** (Bidirectional Reflectance Distribution Function).
- $\underline{G(y, x)}$ and $\underline{V(y, x)}$ are grouped under the label **geometrické členy** (geometric terms).



Rovnice pro radiositu

- předpokládáme **ideálně difusní** povrch:
 - **BRDF** není závislá na vstupním a výstupním úhlu
 - výstupní radiance $L(y, \omega)$ nezávisí na směru ω

$$L(x, z) = L_e(x, z) + f(x) \cdot \int_S L(y, x) \cdot G(y, x) \cdot V(y, x) dA$$

$$L(x, z) = B(x) / \pi, \quad L_e(x, z) = E(x) / \pi, \quad f(x) = \rho(x) / \pi$$

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \cdot \int_S B(y) \cdot \frac{G(y, x) \cdot V(y, x)}{\pi} dA$$



Diskrétní řešení radiační rovnice

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_S \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, dA$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\pi}$$

- ♦ řešení \mathbf{B} je nekonečně-dimenzionální
- ➔ diskretizace problému:
 - **Monte-Carlo** ray-tracing (řešení závislé na pohledu)
 - klasické **radiační metody** (konečné/hraniční prvky)



Obecná radiační metoda

- ① rozdělení ploch na **konečný počet elementů**
- ② určení **polohy uzlových bodů** na elementech
 - v těchto bodech se bude **počítat hodnota radiosity**
- ③ volba **aproximační metody** a chybové metriky
 - systém basických funkcí pro lineární (konvexní) kombinace hodnot v uzlových bodech
- ④ výpočet **koeficientů** soustavy lineárních rovnic
 - “konfigurační faktory” (“form-factors”)



Obecná radiační metoda

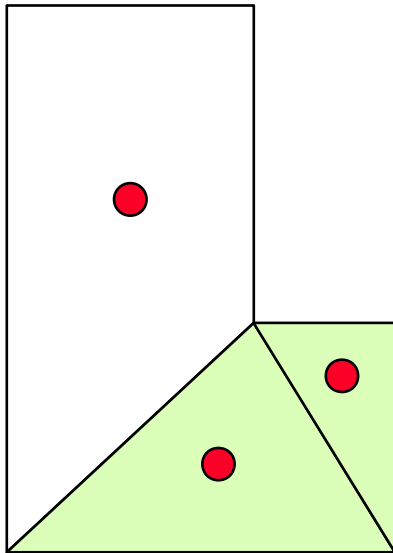
- ⑤ řešení **soustavy lineárních rovnic**
 - výsledek: radiosity v uzlových bodech
- ⑥ rekonstrukce přibližného řešení na **celých plochách**
 - lineární kombinace bazických funkcí pomocí hodnot v uzlových bodech
- ⑦ **zobrazení** výsledku (libovolný směr pohledu)
 - intenzita osvětlení závisí na spočítané radiositě

Poznámky

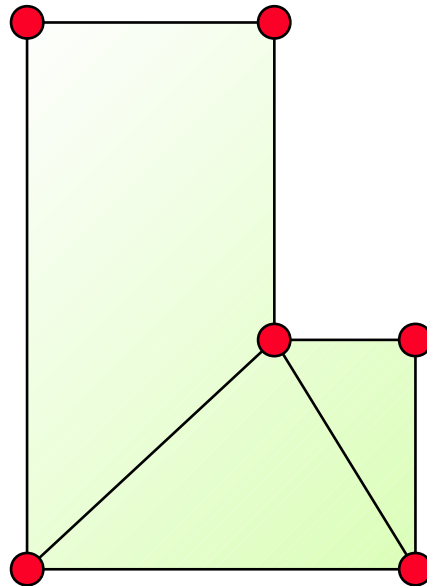


- ♦ krok ③ se provádí ve fázi **návrhu algoritmu**
 - v implementaci se přímo neobjevuje
- ♦ některé **zdokonalené metody** nepostupují striktně posloupností kroků ① až ⑦
 - často se výpočet v některých fázích vrací a opakuje se předcházející kroky (s lepší aproximací, lepším rozlišením, ..)

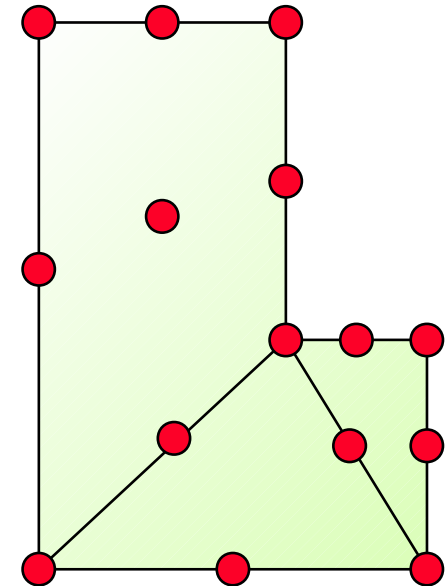
Aproximace radiosity



konstantní
(uzly jsou
těžiště ploch)



bilineární
(uzly jsou
ve vrcholech)



kvadratická
(další uzly jsou
uprostřed hran
a stěn)



Metoda konstantních elementů

→ na elementu A_i předpokládám **konstantní** odrazivost ρ a radiositu B - průměr hodnot $B(\mathbf{x})$:

– značení: ρ_i, B_i pro $i = 1 \dots N$

$$B(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_S B(\mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dA$$

průměr přes
plochu A_i

↓

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \left[\sum_{j=1}^N B_j \int_{A_j} g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dA_j \right] dA_i$$

radiosita přijímaná v bodě \mathbf{x} (ležícím na A_i)



Základní rovnice pro radiositu

přehození sumy a integrálu:

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j \cdot \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} g(y, x) dA_j dA_i$$

geometrický člen – **konfigurační faktor** F_{ij}
(část energie vyzářené ploškou A_i dopadající na A_j)

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j F_{ij} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$



Fyzikálně intuitivní odvození

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j A_j F_{ji} \quad [w]$$

emitovaný výkon = vlastní výkon + odražený výkon

reciproční pravidlo:

$$A_j F_{ji} = A_i F_{ij}$$

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j F_{ij} A_i \quad \Bigg| \cdot A_i^{-1}$$

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j F_{ij} \quad \left[\frac{w}{m^2} \right]$$



Soustava lineárních rovnic

$$\underline{B_i} - \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N \underline{B_j} F_{ij} = \underline{E_i} \quad i = 1..N$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{1,1} & -\rho_1 F_{1,2} & \dots & -\rho_1 F_{1,N} \\ -\rho_2 F_{2,1} & 1 - \rho_2 F_{2,2} & \dots & -\rho_2 F_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_N F_{N,1} & -\rho_N F_{N,2} & \dots & 1 - \rho_N F_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B_1} \\ \underline{B_2} \\ \dots \\ \underline{B_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E_1} \\ \underline{E_2} \\ \dots \\ \underline{E_N} \end{bmatrix}$$

vektor neznámých $[B_i]$



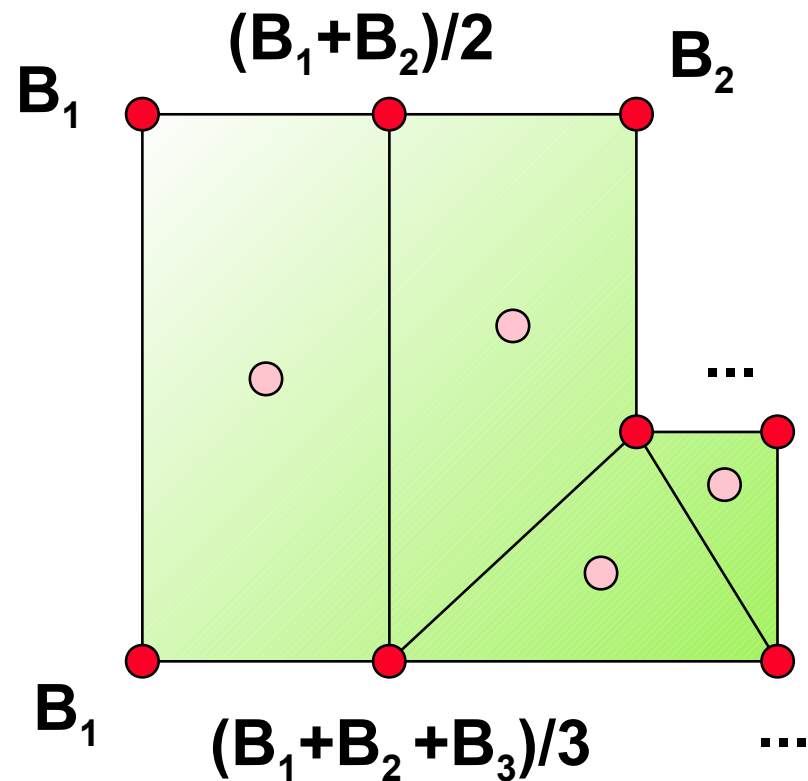
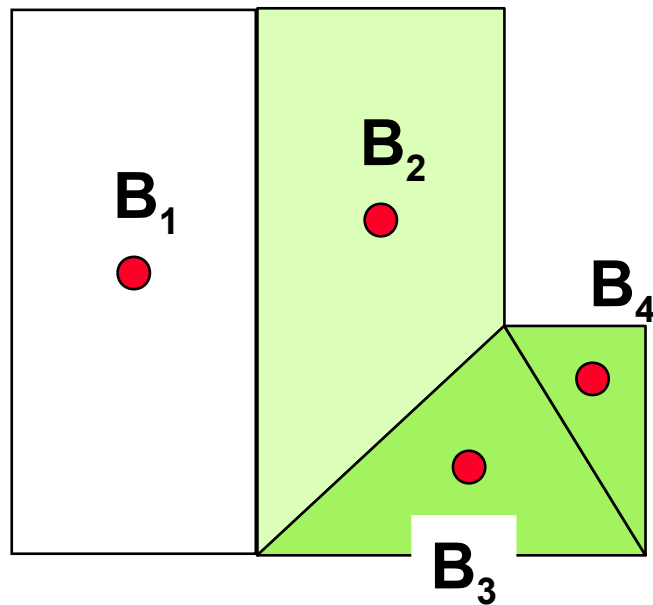
Soustava lineárních rovnic

- pro **rovinné plošky** platí: $F_{ii} = 0$
 - na diagonále jsou pouze jedničky
- **nediagonální prvky** matice mají typicky malou absolutní hodnotu
 - matice je “diagonálně dominantní”
 - ⇒ soustava je stabilní a lze ji úspěšně řešit **iteračními metodami** (Jacobi, Gauss-Seidel)
- **při změně osvětlení $[E_i]$** se nemusí soustava počítat znovu (používáme-li přímou metodu)

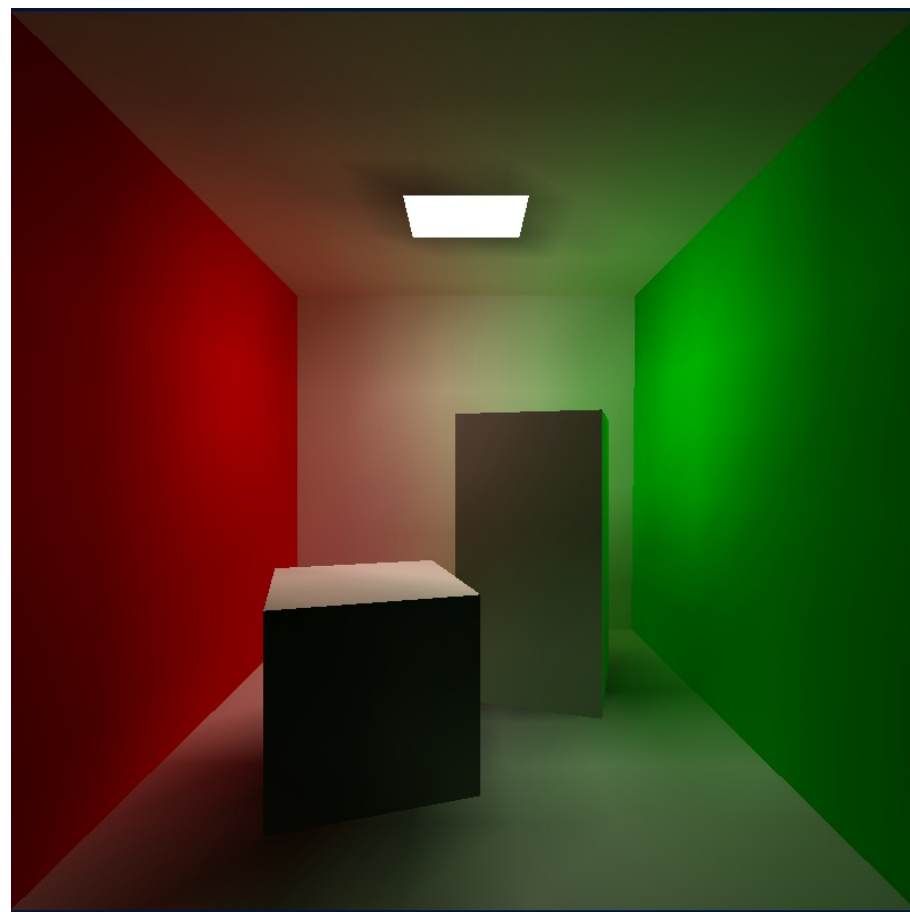
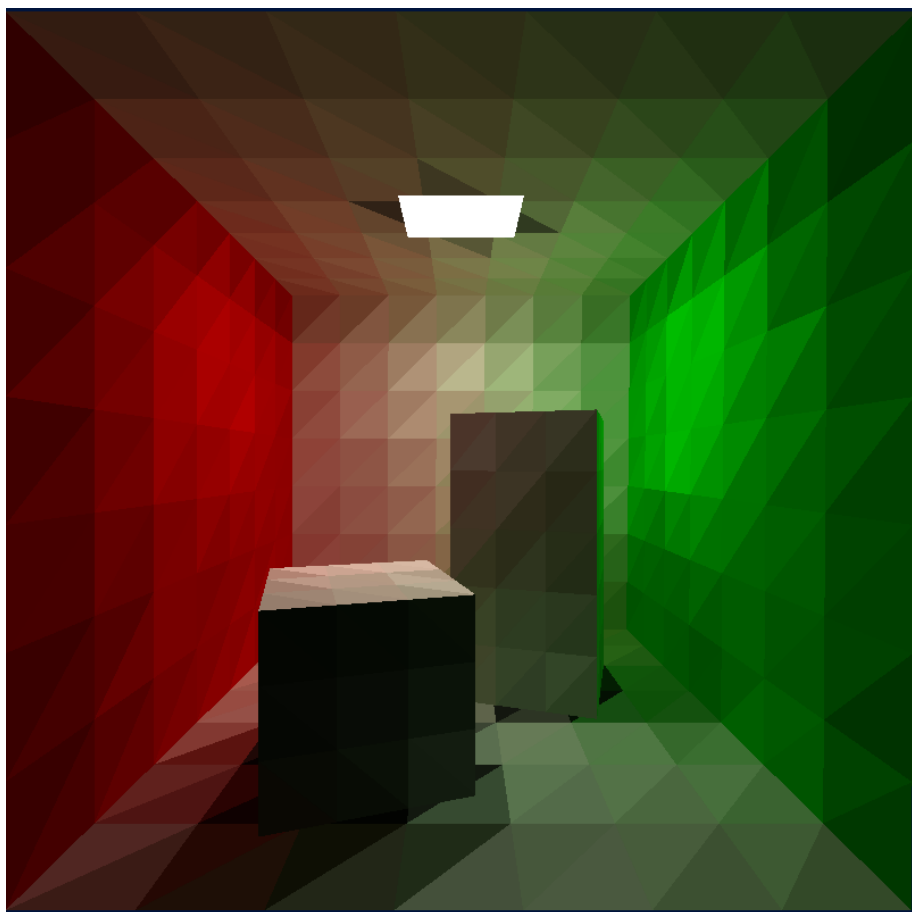


Přenos radiosity do vrcholů

I v metodě konstantních elementů je při zobrazování žádoucí použít alespoň **Gouraudovu interpolaci barvy**



Ukázka lineární interpolace



Konec



- **C. M. Goral, K. E. Torrance, D. P. Greenberg, B. Battaile:** *Modeling the Interaction of Light Between Diffuse Surfaces*, CG vol 18(3), SIGGRAPH 1984
- **A. Glassner:** *Principles of Digital Image Synthesis*, Morgan Kaufmann, 1995, 871-937
- **M. Cohen, J. Wallace:** *Radiosity and Realistic Image Synthesis*, Academic Press, 1993, 13-64
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes:** *Computer Graphics, Principles and Practice*, 793-804