Přednáška 2, 27. února 2015

Obrácením vzorců pro derivace elementárních funkcí dostaneme tabulku základních primitivních funkcí (vynecháváme integrační konstantu c).

funkce	její primitivní funkce	na intervalu
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(0,+\infty)$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha < -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(0,+\infty)$ i $(-\infty,0)$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha > -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$(0,+\infty)$ i $(-\infty,0)$
$\exp x = \mathrm{e}^x$	$\exp x = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$((k-\frac{1}{2})\pi,(k+\frac{1}{2})\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$	$(k\pi,(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

funkce	její primitivní funkce	na intervalu
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x = (\tan x)^{\langle -1\rangle}$ i $-\mathrm{arccot}\, x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x = (\sin x)^{\langle -1\rangle}$ i $-\arccos x$	$(-1,1)$

Tabulka nezahrnuje hyperbolické funkce (např. $\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}$) ani další goniometrické funkce (např. sekans $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, oblíbený v USA).

Úloha. *Formálním zderivováním máme* $(\log x)' = 1/x$, *ale i* $(\log(-x))' = (1/-x)(-1) = 1/x$. *Ale* $\log x$ *a* $\log(-x)$ *se neliší jen posunem o konstantu, takže funkce* $1/x$ *má dvě podstatně odlišné primitivní funkce, v rozporu s příslušným tvrzením. Jak je to možné?*

Invertování pravidla pro derivaci součinu dává vzorec pro integraci per partes a invertováním pravidla pro derivaci složené funkce dostaneme vzorec pro integraci substitucí. Má dva tvary, podle směru čtení rovnosti $f(\varphi)' = f'(\varphi)\varphi'$.

Věta (integrace substitucí). *Nechť* $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ *a* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *jsou dvě funkce, přičemž existuje vlastní* φ' *na* (α,β).

1. *Když* $F = \int f$ *na* (a,b), *potom* $\int f(\varphi)\varphi' = F(\varphi) + c$ *na* (α,β).
2. *Předpokládejme o* φ *navíc, že* $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$ *a* $\varphi' \neq 0$ *na* (α,β). *Když* $G = \int f(\varphi)\varphi'$ *na* (α,β), *potom* $\int f = G(\varphi^{\langle -1\rangle}) + c$ *na* (a,b).

Důkaz. První část plyne ihned zderivováním:

$$F(\varphi)' = F'(\varphi)\varphi' = f(\varphi)\varphi'$$

na (α,β), podle předpokladu o F a derivace složené funkce. Ve druhé části předpoklady o φ zaručují, že to je ostře rostoucí nebo ostře klesající bijekce z (α,β) na (a,b). Skutečně, musí být $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$ na (α,β), jinak by podle věty z minulé přednášky musela funkce φ' nabýt mezihodnotu 0.

Podle výsledků ze ZS tedy φ na (α, β) ostře roste nebo ostře klesá. Takže to je prostá funkce a existuje k ní inverzní funkce

$$\varphi^{\langle -1\rangle}: \ (a, b) \to (\alpha, \beta) \ ,$$

již lze navíc derivovat podle pravidla pro derivaci inverzní funkce. Zderivování dává, podle předpokladu o G, derivace složené funce a derivace inverzní funkce, že $G(\varphi^{\langle -1\rangle})$ je na (a, b) primitivní k f:

$$G(\varphi^{\langle -1\rangle})' = G'(\varphi^{\langle -1\rangle}) \cdot (\varphi^{\langle -1\rangle})' = f(\varphi(\varphi^{\langle -1\rangle}))\varphi'(\varphi^{\langle -1\rangle}) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{\langle -1\rangle})} = f \ .$$

$\square$

Uvedeme si dva příklady, na oba tvary substitučního pravidla. **1.** Když $F(x) = \int f(x) \ dx$ na nějakém intervalu I a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak podle prvního tvaru spočítáme, že

$$\int f(ax+b) \ dx = a^{-1} \int f(ax+b) \cdot (ax+b)' \ dx = a^{-1}F(ax+b) + c \ ,$$

na intervalu $J = a^{-1}(I-b) = \{a^{-1}(x-b) \mid x \in I\}$. Snadno se to zpětně ověří zderivováním. Vzali jsme $\varphi(x) = ax + b: \ J \to I$.

2. Chceme spočítat primitivní funkci k $\sqrt{1-t^2}$ na $(-1, 1)$. Protože to připomíná poslední položku v hořejší tabulce, zkusíme substituci $t = \sin x$, tj. $t = \varphi(x) = \sin x: \ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$. Předpoklady druhého tvaru substitučního pravidla jsou splněné a $\int \sqrt{1-t^2} \ dt$ nalezneme, když spočteme, na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$G(x) = \int \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot (\sin x)' \ dx = \int \sqrt{\cos^2 x} \cdot \cos x \ dx = \int \cos^2 x \ dx \ .$$

Pomohli jsme si? Pomohli, protože poslední primitivní funkci snadno spočteme integrací per partes:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x &= \int \cos x(\sin x)' = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \\
&= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \\
&= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \ ,
\end{aligned}$$

takže

$$G(x)=\int\cos^2 x=\frac{\sin x\cos x+x}{2}+c=\frac{\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}+x}{2}+c\ .$$

Po dosazení $x=\varphi^{\langle -1\rangle}(t)=\arcsin t$ dostáváme kýžený výsledek

$$\int\sqrt{1-t^2}=G(\arcsin t)+c=\frac{t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t}{2}+c,\quad \text{na } (-1,1)\ .$$

Derivační kontrolou se snadno ujistíme o jeho správnosti.

Obrat, že funkci f *lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí* znamená, že f lze vyjádřit ze základních funkcí $\alpha\in\mathbb{R}$ (konstantní funkce), x (identická funkce), $\exp(x)$ (exponenciála), $\log x$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\cos x$, $\arccos x$, $\tan x$ a $\arctan x$ opakovaným použitím aritmetických operací $+,-,\times,:$ a operace skládání funkcí. Mnohé primitivní funkce „jdou spočítat“, to jest lze je takto vyjádřit, ale stejně tak mnohé primitivní funkce spočítat nelze. Následující větu dokazovat nebudeme.

Věta (ne vše lze spočítat). *Například primitivní funkce*

$$F_1(x)=\int\exp(x^2),\ F_2(x)=\int\frac{\sin x}{x}\quad a\quad F_3(x)=\int\frac{1}{\log x}$$

(první dvě jsou na $\mathbb{R}$, poslední na $(0,+\infty)$) nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Relativně širokou třídou funkcí, k nimž lze primitivní funkce spočítat, jsou *racionální funkce*, což jsou podíly polynomů. Uvedeme to jednoduchým příkladem. Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je libovolný otevřený interval neobsahující ani -1 ani 1. Pak na I platí, že

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{x^2-1} &= \int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)=\int\left(1+\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}\right)\\ &= \int 1+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\\ &= x+\frac{\log|x-1|-\log|x+1|}{2}+c\\ &= x+\log(\sqrt{|(x-1)/(x+1)|})+c\ .\end{aligned}$$

Ukazuje se, že podobně lze spočítat primitivní funkci k libovolné racionální funkci. Klíčový je zřejmě rozklad na součet jednodušších racionálních funkcí na prvním řádku výpočtu, jemuž se říká *rozklad na parciální zlomky.* V důkazu následující věty použijeme některé výsledky z algebry, které zde nebudeme dokazovat. (A ani jsem tento důkaz na přednášce neuváděl pro časovou náročnost.)

Věta (primitivní funkci k racionální funkci lze vždy spočítat). *Nechť $P(x)$ a $Q(x) \neq 0$ jsou polynomy s reálnými koeficienty a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval neobsahující žádný z kořenů polynomu $Q(x)$. Primitivní funkci*

$$F(x) = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \textit{(na } I\textit{)}$$

lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, konkrétně pomocí racionálních funkcí, logaritmů a arcustangent.

Důkaz. Búno je $Q(x)$ monický (má vedoucí koeficient rovný 1). Po vydělení $P(x)$ polynomem $Q(x)$ se zbytkem máme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \ ,$$

kde $p(x), R(x)$ jsou reálné polynomy a $R(x)$ má stupeň menší než $Q(x)$. Algebra nám dává jednoznačný rozklad $Q(x)$ na součin ireducibilních (tj. dále součinově nerozložitelných) reálných polynomů:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{l} (x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^{n_i} \ ,$$

kde $k, l \geq 0$ jsou celá čísla, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $m_i, n_i \geq 1$ jsou celá čísla, čísla α_i jsou vzájemně různá, dvojice (β_i, γ_i) jsou vzájemně různé a vždy $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ (což znamená, že $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ nemá reálné kořeny a je opravdu ireducibilní). V algebře se dále dá dokázat, že $R(x)/Q(x)$ pak má jednoznačné vyjádření jako součet parciálních zlomků

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\delta_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\epsilon_{i,j} x + \theta_{i,j}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^j} \ ,$$

kde $\delta_{i,j}, \epsilon_{i,j}, \theta_{i,j} \in \mathbb{R}$. V předešlém příkladu třeba máme $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^2 - 1$, $p(x) = 1$, $R(x) = 1$, $k = 2$, $m_1 = m_2 = 1$, $l = 0$ (žádný kvadratický trojčlen se v rozkladu $Q(x)$ nevyskytuje), $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\delta_{1,1} = \frac{1}{2}$ a $\delta_{2,1} = -\frac{1}{2}$. Takže primitivní funkce $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ se rovná součtu konečně mnoha primitivních funkcí tří typů:

$$\int p(x),\ \int \frac{\delta}{(x-\alpha)^j} \ \text{ a } \ \int \frac{\epsilon x + \theta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}\ ,$$

kde $p(x)$ je reálný polynom, $j \in \mathbb{N}$ a kromě x jsou ostatní symboly reálné konstanty, přičemž $\beta^2 - 4\gamma < 0$. Když takovéto primitivní funkce dokážeme vyjádřit elementárními funkcemi, budeme mít vyjádřenu i $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Je snadné spočítat primitivní funkce prvních dvou typů:

$$\int p(x) = \int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{a_1 x^2}{2} + a_0 x$$

na $\mathbb{R}$ a

$$\int \frac{\delta}{(x-\alpha)^j} = \frac{\delta}{(1-j)(x-\alpha)^{j-1}}\ (j \geq 2),\ \int \frac{\delta}{x-\alpha} = \delta \log|x-\alpha|$$

na $(-\infty, \alpha)$ i $(\alpha, +\infty)$ (pominuli jsme integrační konstanty). Poslední třetí typ je složitější. Máme

$$\int \frac{\epsilon x+\theta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} = \frac{\epsilon}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} + (\theta - \epsilon\beta/2)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j}\ ,$$

a předposlední $\int$ je po substituci $y = x^2 + \beta x + \gamma$ druhého typu: na $\mathbb{R}$ máme ($x^2 + \beta x + \gamma$ nemá reálný kořen)

$$\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} = \frac{1}{(1-j)(x^2+\beta x+\gamma)^{j-1}}\ (j \geq 2)$$

a

$$\int \frac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma} = \log|x^2+\beta x+\gamma| = \log(x^2+\beta x+\gamma)\ .$$

Zbývá tedy spočítat primitivní funkci $\int 1/(x^2+\beta x+\gamma)^j$. Označíme $\eta = \sqrt{\gamma - \beta^2/4}$ (nezapomeňme, že $\gamma - \beta^2/4 > 0$) a použijeme substituci $y = y(x) = x/\eta + \beta/2\eta$. Doplněním na čtverec dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^j} &= \frac{1}{\eta^{2j-1}}\int \frac{1/\eta}{((x/\eta+\beta/2\eta)^2+1)^j}\\ &= \frac{1}{\eta^{2j-1}}\int \frac{y'}{((x/\eta+\beta/2\eta)^2+1)^j}\\ &= \frac{1}{\eta^{2j-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^j}\ .\end{aligned}$$

Zbývá tak na $\mathbb{R}$ spočítat primitivní funkci

$$I_j = \int \frac{1}{(1+x^2)^j} \; .$$

Pro $j = 1$ je, jak podle úvodní tabulky víme, $I_1 = \arctan x$. Pro $j = 2, 3, \ldots$ vyjádříme I_j pomocí rekurence, kterou získáme integrací per partes:

$$\begin{aligned} I_j &= \int \frac{x'}{(1+x^2)^j} = \frac{x}{(1+x^2)^j} + \int \frac{2jx^2}{(1+x^2)^{j+1}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^j} + 2j \int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{j+1}} - 2j \int \frac{1}{(1+x^2)^{j+1}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^j} + 2jI_j - 2jI_{j+1} \; , \end{aligned}$$

čili

$$I_{j+1} = I_j(1 - 1/2j) + \frac{x}{2j(1+x^2)^j} \; .$$

Například

$$I_2 = \frac{\arctan x}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)} \quad \text{a} \quad I_3 = \frac{3\arctan x}{8} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2} \; .$$

Celkem rekurence ukazuje, že pro každé $j = 1, 2, \ldots$ je I_j tvaru $I_j = \kappa \arctan x + r(x)$, kde κ je zlomek a $r(x)$ je racionální funkce. Tím jsme dokončili výpočet primitivní funkce třetího typu z vyjádření $R(x)/Q(x)$ součtem parciálních zlomků a vyjádření primitivní funkce $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ elementárními funkcemi je úplné. $\square$

Riemannův integrál

Nyní definujeme přesně pojem plochy, zejména pojem plochy útvaru $U(a, b, f)$ pod grafem funkce f. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ jsou dvě reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce, jež nemusí být ani spojitá ani omezená. Konečná $k + 1$-tice bodů $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ z intervalu $[a, b]$ je jeho *dělením*, pokud

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b \; .$$

Tyto body dělí interval $[a, b]$ na intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$. Délku intervalu označíme pomocí absolutní hodnoty: $|I_i| = a_{i+1} - a_i$ a $|[a, b]| = b - a$. Zřejmě

$$\sum_{i=0}^{k-1} |I_i| = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) = b - a = |[a, b]| \; .$$

Normou dělení λ rozumíme největší délku intervalů dělení:

$$\lambda = \lambda(D) = \max_{0 \le i \le k-1} |I_i| \; .$$

Dělením intervalu $[a, b]$ s body rozumíme dvojici (D, C), kde $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení tohoto intervalu a k-tice $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{k-1})$ se skládá z nějakých bodů $c_i \in I_i$ (tj. $a_i \le c_i \le a_{i+1}$). *Riemannovu sumu* odpovídající funkci f a dělení s body (D, C) definujeme jako

$$R(f, D, C) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| f(c_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) f(c_i) \; .$$

Pokud $f \ge 0$ na $[a, b]$, je to součet ploch k obdélníků $I_i \times [0, f(c_i)]$, jejichž sjednocení aproximuje útvar $U(a, b, f)$. Tato suma je ovšem definovaná pro každou funkci f, bez ohledu na její znaménko na $[a, b]$. Následující definici zavedl Bernhard Riemann (1826–1866).

Definice (první definice Riemannova integrálu, Riemannova). *Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál $I \in \mathbb{R}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení intervalu $[a, b]$ s body (D, C) platí, že*

$$\lambda(D) < \delta \Rightarrow |I - R(f, D, C)| < \varepsilon \; .$$

Požadujeme tedy $I \in \mathbb{R}$, nevlastní hodnoty $\pm\infty$ nejsou povoleny (lze samozřejmě zavést i nevlastní integrály, podobně jako nevlastní limity). Pokud takové číslo I existuje, píšeme

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f$$

a řekneme, že f je *riemannovsky integrovatelná* na intervalu $[a, b]$. Budeme pracovat s třídou všech riemannovsky integrovatelných funkcí

$$\mathcal{R}(a, b) := \{f \mid f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [a, b]\} \; .$$

První definici Riemannova integrálu tedy můžeme shrnout vzorcem

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda(D) \to 0} R(f, D, C) \in \mathbb{R} \; .$$

Limitu zde chápeme ve smyslu uvedeném v definici; jako symbol jsme definovali pouze limitu posloupnosti a limitu funkce v bodě.

Pro druhou, ekvivalentní, definici integrálu budeme potřebovat pár dalších pojmů. Pro funkci $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní, Riemannovu sumu* (budeme jim tak říkat, i když by se měly jmenovat po Darbouxovi) jako

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \quad \text{respektive} \quad S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i \; ,$$

kde

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{a} \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) \; (I_i = [a_i, a_{i+1}]) \; .$$

Tyto součty jsou vždy definované, $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Dolní*, respektive *horní, Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme jako

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x) \, dx = \sup(\{s(f, D) : \; D \text{ je dělení } [a, b]\}) \; ,$$

respektive

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x) \, dx = \inf(\{S(f, D) : \; D \text{ je dělení } [a, b]\}) \; .$$

Tyto výrazy jsou opět vždy definované a máme $\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definice (druhá definice Riemannova integrálu, Darbouxova). *Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál, pokud*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}\,.$$

Tuto společnou konečnou hodnotu, když existuje, značíme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

a nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a,b]$.

Za chvíli dokážeme, že vždy

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f\,.$$

Dokážeme také, že obě definice jsou ekvivalentní: dávají stejné třídy riemannovsky integrovatelných funkcí a dávají stejnou hodnotu Riemannova integrálu, je-li definován.

Tvrzení (neomezené funkce nemají integrál). *Když funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ není omezená, potom nemá na $[a,b]$ Riemannův integrál, ani podle jedné z obou definic.*

Důkaz. Dokažte si to jako cvičení. $\square$