

# Fyzikálně založené modely osvětlení

© 1996-2016 Josef Pelikán  
CGG MFF UK Praha

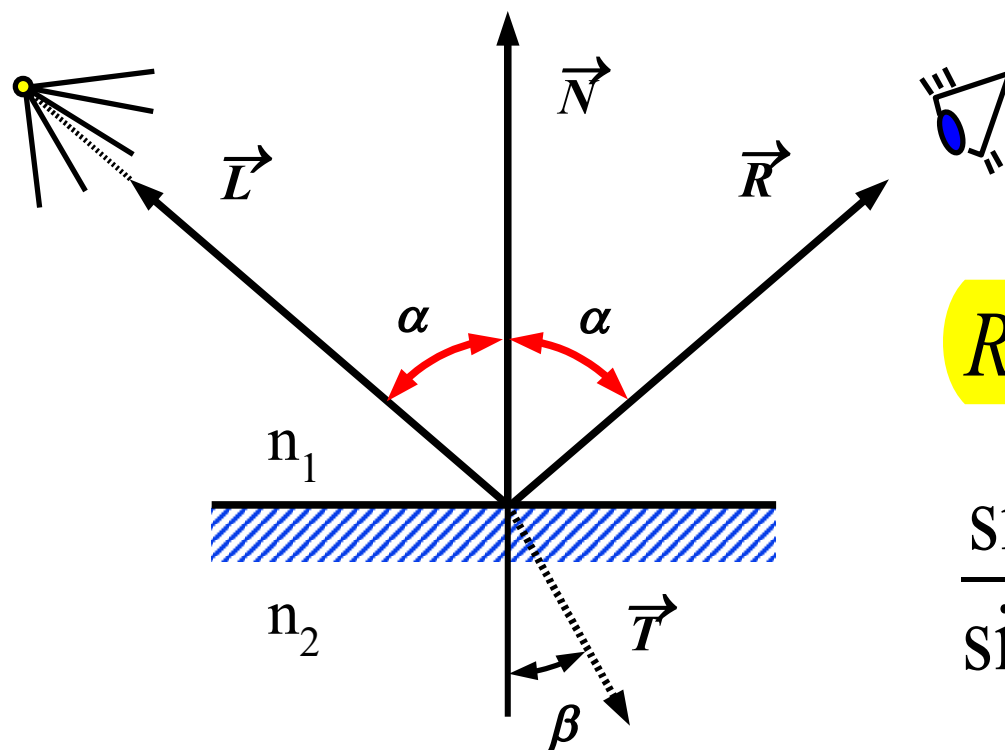
pepca@cgg.mff.cuni.cz  
<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>



# Historie

- ◆ **Beckmann, Spizzichino** (1963): odraz elektromagnetického vlnění na hrubém povrchu (optika)
- ◆ **Torrance, Sparrow** (1967): teorie mimospekulárních odlesků na hrubých materiálech (optika)
- ◆ **Blinn** (SIGGRAPH 77): poprvé model publikuje v oboru počítačové grafiky
- ◆ **Cook, Torrance** (SIGGRAPH 81): další zobecnění a praktická implementace
- ◆ **He** (1991): komplexní model odrazu podle vlnové optiky (polarizace, difrakce, interference, ..)
- ◆ **Schlick** (1994): aproximační vzorce, rychlejší výpočet

# Dokonalý zrcadlový povrch

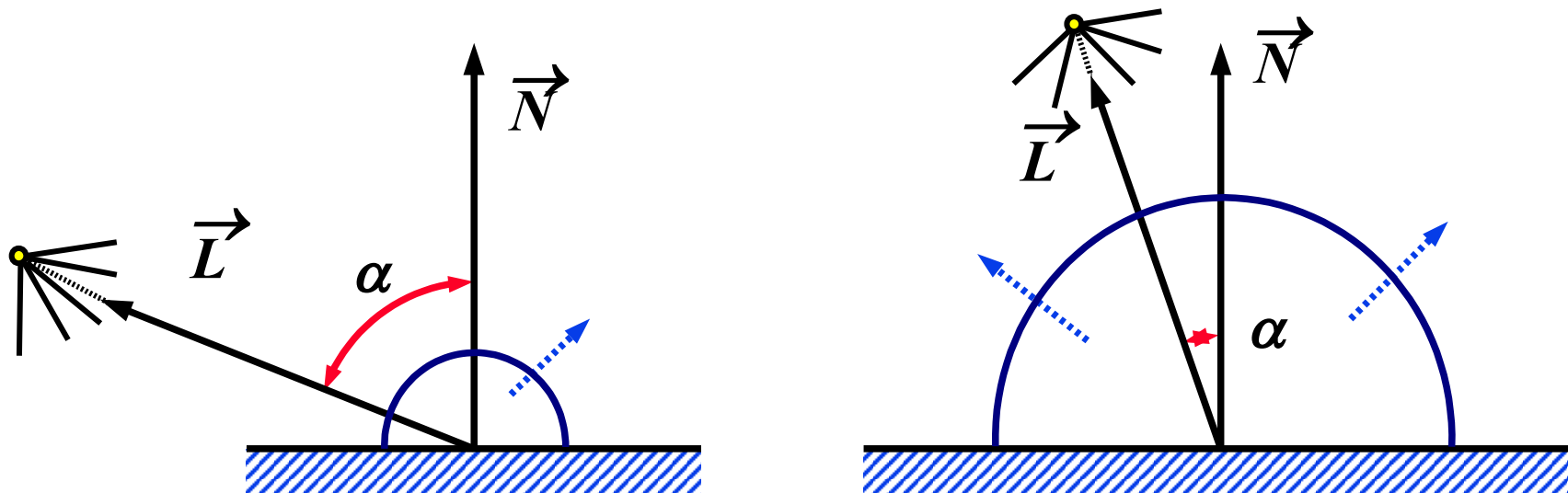


$$R = 2N(N \cdot L) - L$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}$$

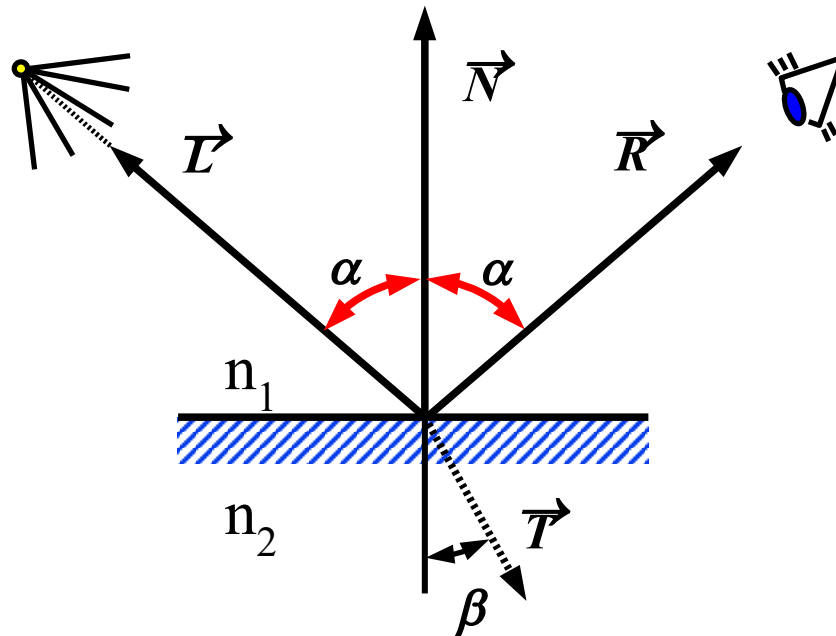
- poměr zrcadlově odraženého a zalomeného světla určují **Fresnelovy rovnice** (začátek 19. století)

# Dokonale difusní odraz (rozptyl)



- ♦ **dokonale matný povrch (Lambertovský)**
  - ♦ všechny výstupní směry odraženého paprsku mají stejnou pravděpodobnost
  - ♦ např. mikroskopicky velmi hrubý povrch (velké částice)
- ♦ **Lambertův zákon:** intenzita je úměrná pouze  **$\cos \alpha$**

# Lom světla (aplikace Snellova zákona)



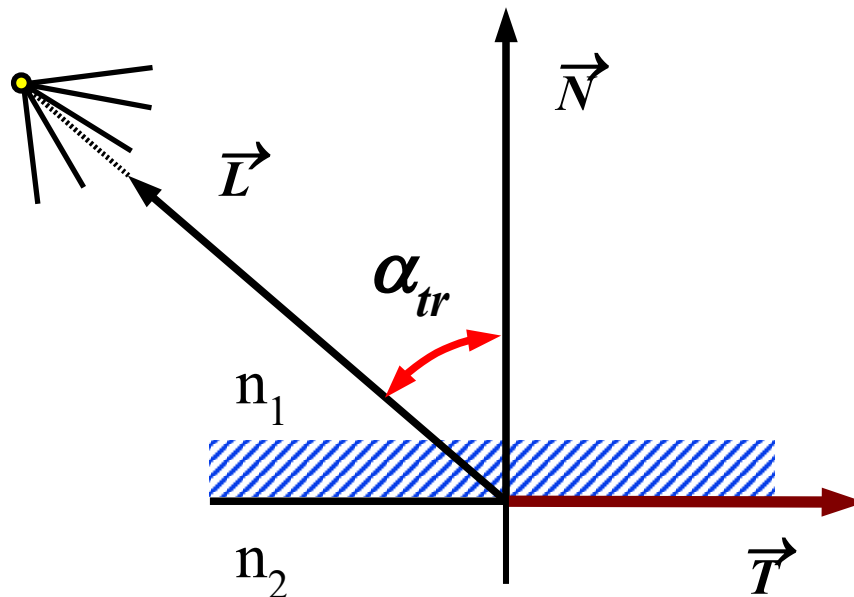
$$\cos \beta = \sqrt{1 - n_{12}^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - n_{12}^2 \cdot (1 - (N \cdot L)^2)}$$

$$T = \left[ n_{12} (N \cdot L) - \sqrt{1 - n_{12}^2 \cdot (1 - (N \cdot L)^2)} \right] \cdot N - n_{12} \cdot L$$



# Totální odraz

- při přechodu světla z prostředí opticky hustšího do prostředí řidšího ( $n_1 > n_2$ )
- pro úhly dopadu **větší než mezní úhel  $\alpha_{tr}$**  nedochází k lomu světla!



$$\sin \alpha_{tr} = \frac{n_2}{n_1}$$



# Fresnelovy rovnice (polarizace)

- ♦ **dvě roviny polarizace** (elektrická složka kolmá „s“ /senkrecht/ nebo rovnoběžná „p“ k rozhraní)
- ♦ koeficienty odrazu „R“ a lomu „T“:

$$R_s = \left[ \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \right]^2$$

$$T_s = 1 - R_s$$

$$R_p = \left[ \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan(\beta + \alpha)} \right]^2$$

$$T_p = 1 - R_p$$



# Pro nepolarizované světlo

- průměr obou složek  $R_s$  a  $R_p$ , po úpravách:

$$R = \frac{1}{2} \frac{(a-u)^2 + b^2}{(a+u)^2 + b^2} \left[ \frac{(a+u-1/u)^2 + b^2}{(a-u+1/u)^2 + b^2} + 1 \right]$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(n_\lambda^2 - k_\lambda^2 + u^2 - 1)^2 + 4n_\lambda^2 k_\lambda^2} + n_\lambda^2 - k_\lambda^2 + u^2 - 1 \right)$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(n_\lambda^2 - k_\lambda^2 + u^2 - 1)^2 + 4n_\lambda^2 k_\lambda^2} - n_\lambda^2 + k_\lambda^2 - u^2 + 1 \right)$$

$$u = \cos \alpha \quad n = n_\lambda - i k_\lambda \quad (\text{pro dielektrika je } k_\lambda = 0)$$





# Pro dielektrikum

♦  $\mathbf{k}_\lambda = \mathbf{0}$ , tedy vychází

$$a^2 = n_\lambda^2 + u^2 - 1 \qquad b = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \frac{(a-u)^2}{(a+u)^2} \left( \frac{[u(a+u)-1]^2}{[u(a-u)+1]^2} + 1 \right)$$

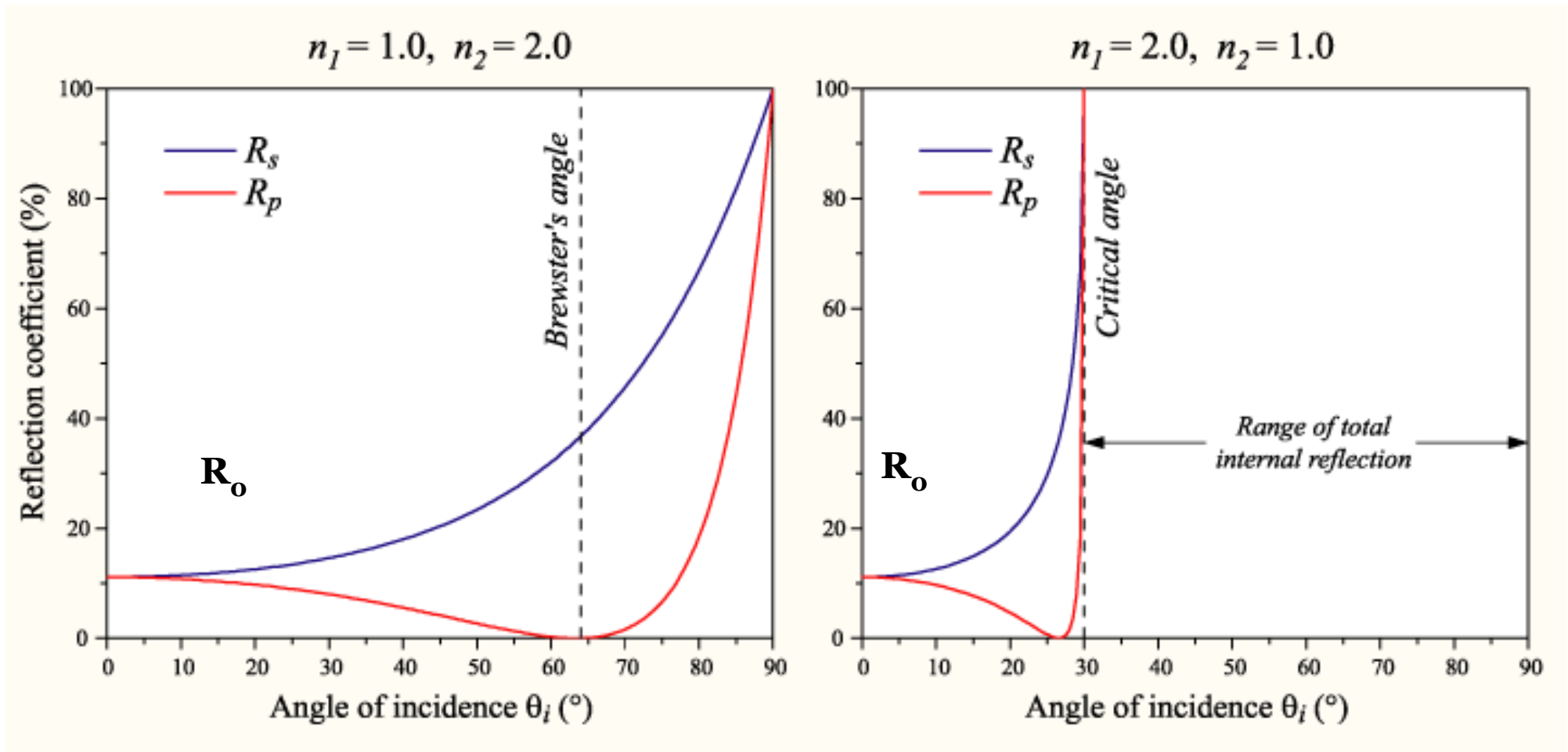
# Poznámky k Fresnelovým vzorcům

- je-li  $\alpha = \pi/2$  (tj.  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ ), vychází faktor odrazu  $\mathbf{R}_{90} = 1$  bez ohledu na vlnovou délku světla  $\lambda$
- pro kolmý dopad světla ( $\alpha = 0$ ) vychází:

$$R_0 = R_s = R_p = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

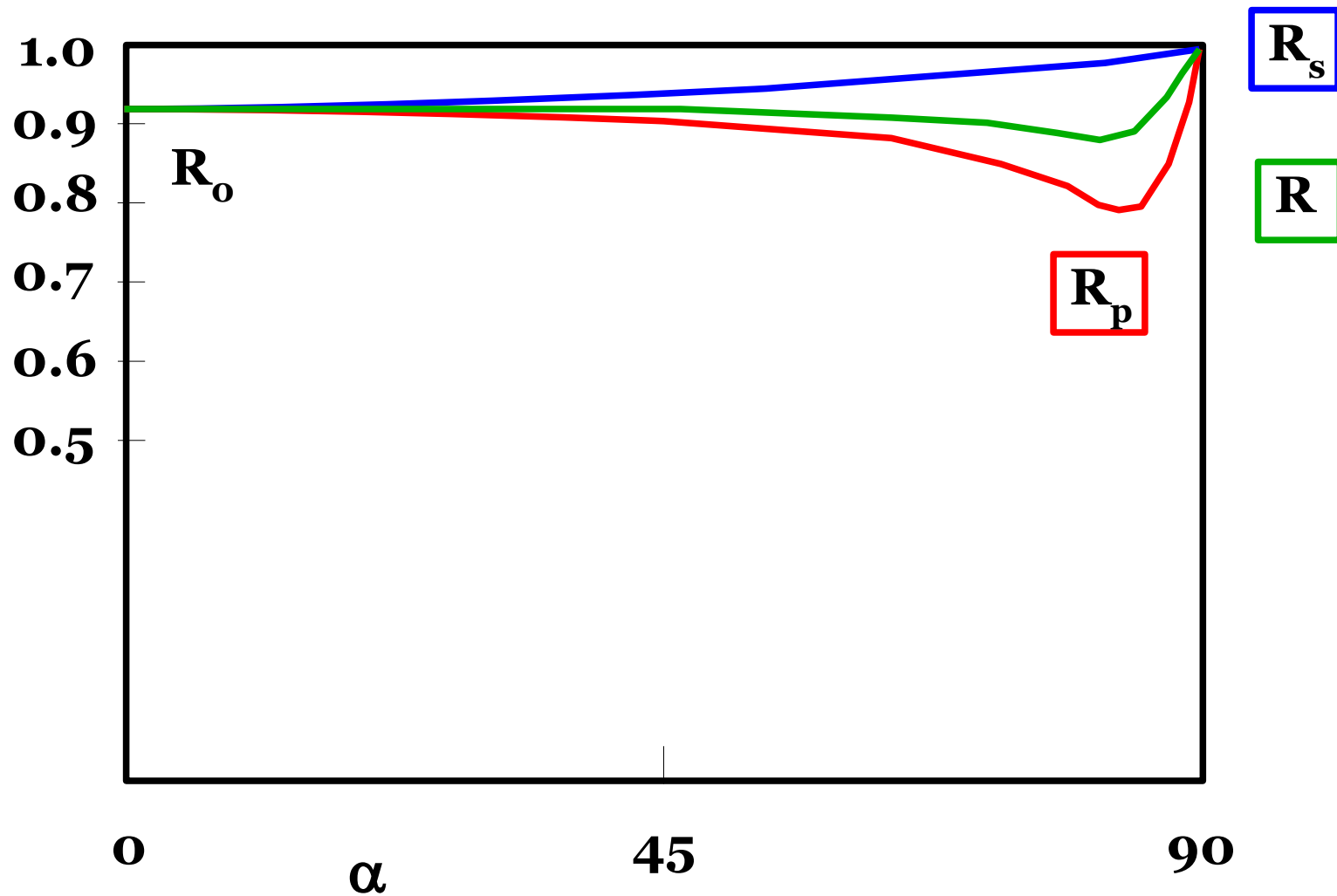
$$T_0 = T_s = T_p = 1 - R_0 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

# Průběh odrazivosti – dielektrikum



(cc) Ulflund, Wiki

# Průběh odrazivosti – kov





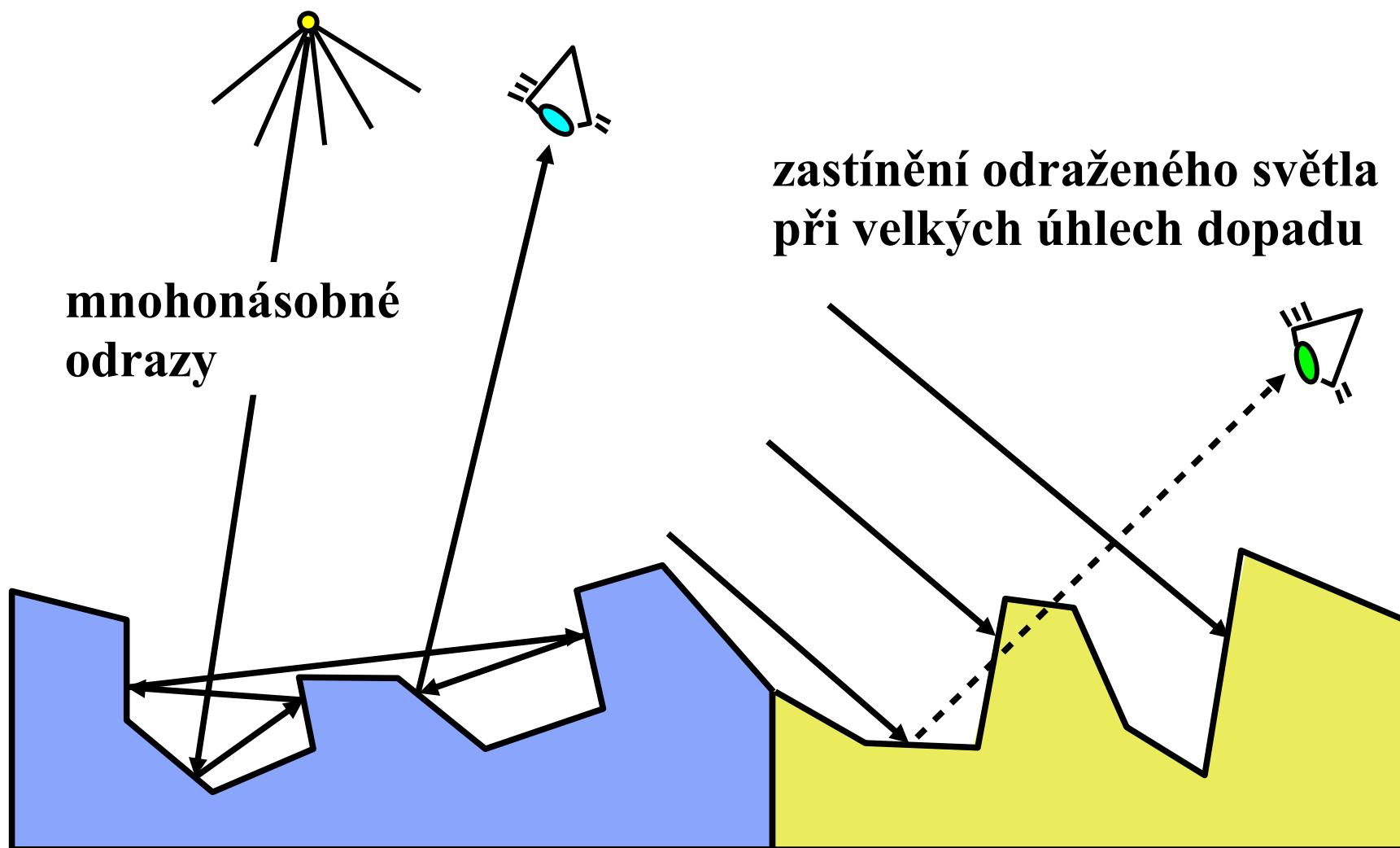
# Použití Fresnelových vzorců

- ♦ v praxi (co známe, co odhadujeme..) !!!
- ♦ je-li  $\alpha = \pi/2$  (tj.  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ ), vychází faktor odrazu  $\mathbf{R}_{90} = 1$  bez ohledu na vlnovou délku světla  $\lambda$
- ♦ pro kolmý dopad světla ( $\alpha = \mathbf{o}$ ) vychází:

$$R_0 = R_s = R_p = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T_0 = T_s = T_p = 1 - R_0 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

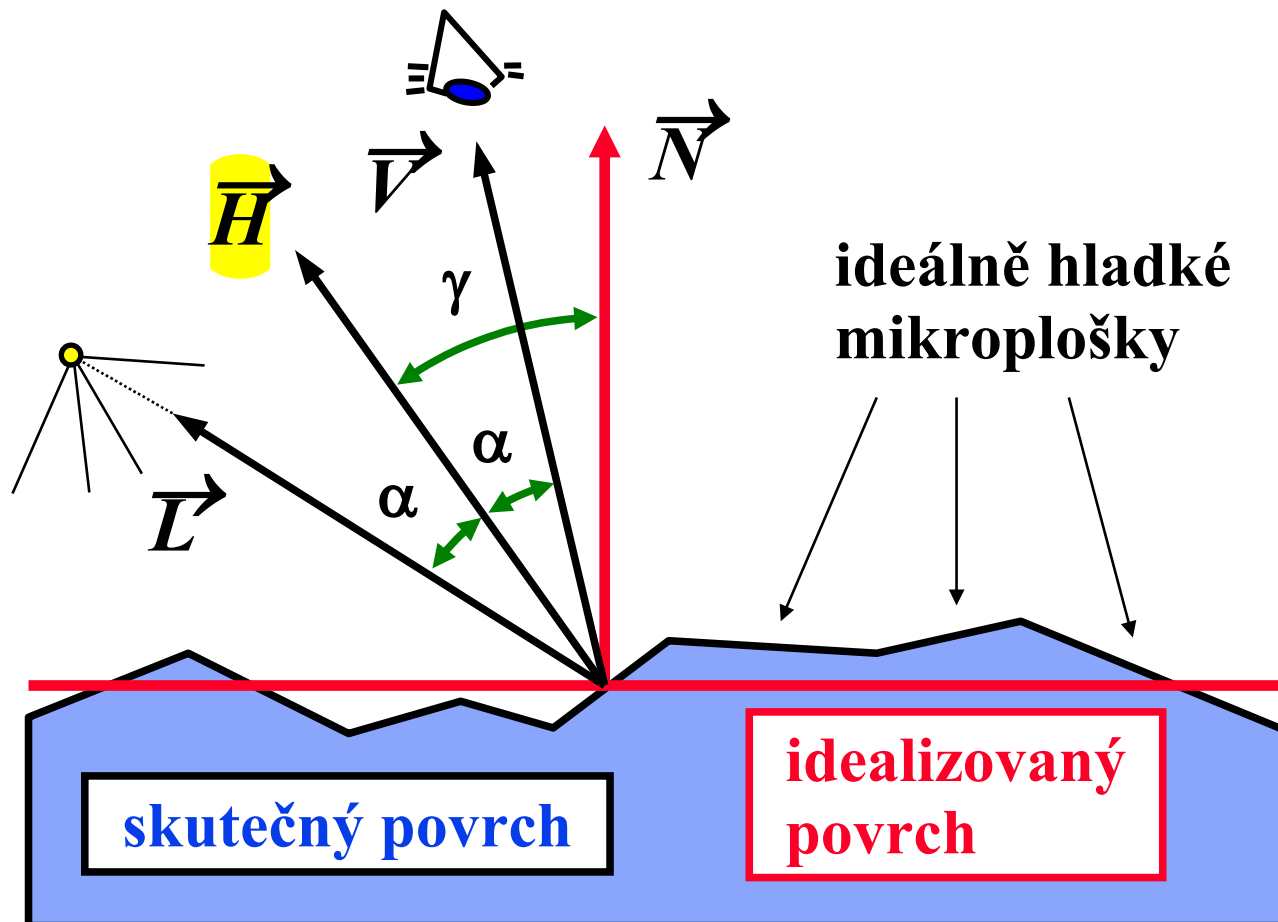
# Reálný lesklý odraz





# Teorie mikroplošek

- ◆ Beckmann, Spizzichino (63), Torrance, Sparrow (67)





# Lesklá složka odrazu

$$I_s(\lambda) = \frac{F(\lambda, \beta)}{\pi} \cdot \frac{D(\alpha) \cdot G(\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{L})}{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{V})}$$

- $I_s(\lambda)$  - intenzita odlesku pro vlnovou délku  $\lambda$
- $F(\lambda, \beta)$  - intenzita odrazu vlnové délky  $\lambda$  na dokonale hladké plošce při úhlu dopadu  $\beta$
- $D(\alpha)$  - distribuční funkce mikroplošek (kolik mikroplošek je orientováno pod úhlem  $\alpha$ )
- $G(\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{L})$  - faktor vzájemného zastínění plošek





# Distribuční funkce orientace

Rychlý vzorec - Gaussova **distribuce:**

$$D(\alpha) = c \cdot \exp\left[-(\alpha/m)^2\right]$$

- ➔ **c** – vhodná konstanta
- ➔ **m** – „drsnost povrchu”
  - **0.1** – velmi hladký povrch
  - **0.8** – hrubý rozptylující povrch



# Beckmannova funkce

Přesnější aproximace distribuce:

$$D(\alpha) = \frac{1}{4m^2 \cos^4 \alpha} \cdot \exp\left[-(\operatorname{tg}(\alpha)/m)^2\right]$$

- **m** – „drsnost povrchu”:
  - **střední kvadratická hodnota** směrnice normály mikroplošek
  - hodnoty opět cca mezi **0.1** a **0.8**



# Směs několika materiálů

Povrch tělesa si můžeme představit jako směs několika materiálů s různými drsnostmi  $m_1 \dots m_k$

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot D(m_i, \alpha)$$

→  $w_i$  – váhové konstanty jednotlivých materiálů

$$\sum w_i = 1$$



# Geometrický člen G

Faktor vzájemného zastínění mikroplošek

$$G(\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{L}) = \min \{ 1, \gamma \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}), \gamma \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}) \}$$

$$\text{pro } \gamma = \frac{2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{H})}{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{H})}$$

- světlo může být zastíněno před dopadem nebo po dopadu (nebo projde dál bez překážek)
- předpokládáme prohlubně tvaru písmene „V”



# Fresnelův člen F

Fresnelova rovnice pro nepolarizované světlo

$$F(\lambda, \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(g - c)^2}{(g + c)^2} \left\{ 1 + \frac{[c(g + c) - 1]^2}{[c(g - c) - 1]^2} \right\}$$

pro  $c = \cos \beta = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}),$

$$g^2 = n_\lambda^2 + c^2 - 1$$

→  $n_\lambda$  - index lomu na povrchu při vlnové délce  $\lambda$

♦ pro vodiče  $\mathbf{n}_\lambda' = \mathbf{n}_\lambda - i \mathbf{\kappa}_\lambda$  ( $\mathbf{\kappa}_\lambda$  .. koeficient útlumu)



# Vliv vlnové délky $\lambda$

Pro úhel dopadu a odrazu  $\beta = 0$  dostáváme

$$F(\lambda, 0) = \left( \frac{n_\lambda - 1}{n_\lambda + 1} \right)^2 \quad \text{a} \quad n_\lambda = \frac{1 + \sqrt{F(\lambda, 0)}}{1 - \sqrt{F(\lambda, 0)}}$$

- hodnoty  $F(\lambda, 0)$  byly prakticky změřeny pro velké množství vodivých i dielektrických materiálů
  - známe tedy i hodnoty  $n_\lambda$  těchto materiálů
- lesklý odraz závisí na  $\lambda$  kromě úhlu  $\beta = \pi/2$



# Jednodušší výpočet $F(\lambda, \beta)$

Interpolace mezi barvou světelného zdroje  
(odlesk pro  $\beta = \pi/2$ )

$$F(\lambda, \pi/2) = F_{\lambda}(\pi/2) = I_L(\lambda) \quad \dots \text{ barva zdroje}$$

a barvou změřenou pro  $\beta = 0$ :  $F(\lambda, 0) = F_{\lambda}(0)$

Pro průměrnou vlnovou délku  $\lambda_0$  dostáváme

$$F_{\lambda}(\beta) = F_{\lambda}(0) + [F_{\lambda}(\pi/2) - F_{\lambda}(0)] \frac{\max\{0, F_{\lambda_0}(\beta) - F_{\lambda_0}(0)\}}{F_{\lambda_0}(\pi/2) - F_{\lambda_0}(0)}$$



# Jednodušší výpočet $F(\lambda, \beta)$

Jiná aproximace podle R. Halla:

$$F_{\lambda}(\beta) = F_{\lambda}(\mathbf{0}) + [1 - F_{\lambda}(\mathbf{0})] \frac{\max\{0, F_{\lambda_0}(\beta) - F_{\lambda_0}(\mathbf{0})\}}{1 - F_{\lambda_0}(\mathbf{0})}$$

- v praktických implementacích se může počítat jen s několika diskrétními hodnotami  $\lambda$ 
  - ♦ např. pro tři pásma spektra **R,G,B**





# Další vylepšení

- ➔ **neizotropní světelné modely**
  - jiná odrazivost v různých směrech
  - obecná **BRDF** („Bi-directional Reflectance Distribution Function“)  $\rho(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$
- ➔ **polarizace odraženého světla**
  - ♦ dielektrika – Brewsterův úhel dopadu
  - ♦ vícenásobné odrazy mezi dielektrickými povrchy
  - ♦ barevné vodivé materiály zabarvují odlišně odraz polarizovaného světla

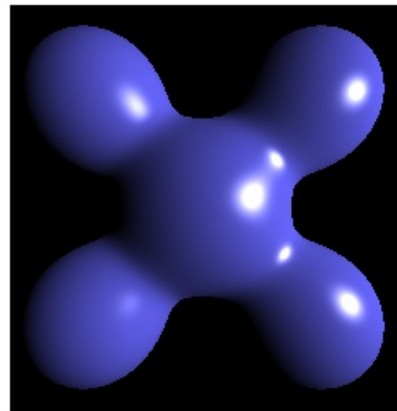


# Modifikace klasiky: Blinn

- ◆ Blinn-Phong model
  - ◆ zjednodušení výpočtu při pozorovateli i zdroji v nekonečnu:

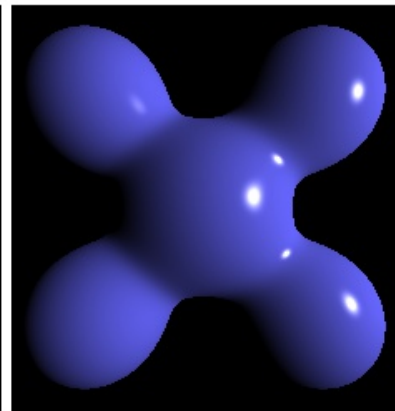
$$\cos^h \beta \approx \cos^{4h} \beta / 2$$

$$(R_i \cdot V)^h \approx (H_i \cdot N)^{4h}$$

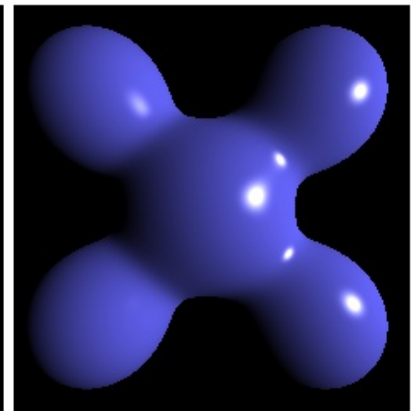


(cc) Wiki

**Blinn-Phong**



**Phong**



**Blinn-Phong**  
(higher exponent)



# Modifikace klasiky: Schlick

- **Christophe Schlick (1994)** zkouší různé **aproximační vzorce jako náhradu Fresnelových členů** apod.

- **nahrazení mocniny zlomkem** (rychlost)

$$S^h \approx S / (h - hS + S)$$

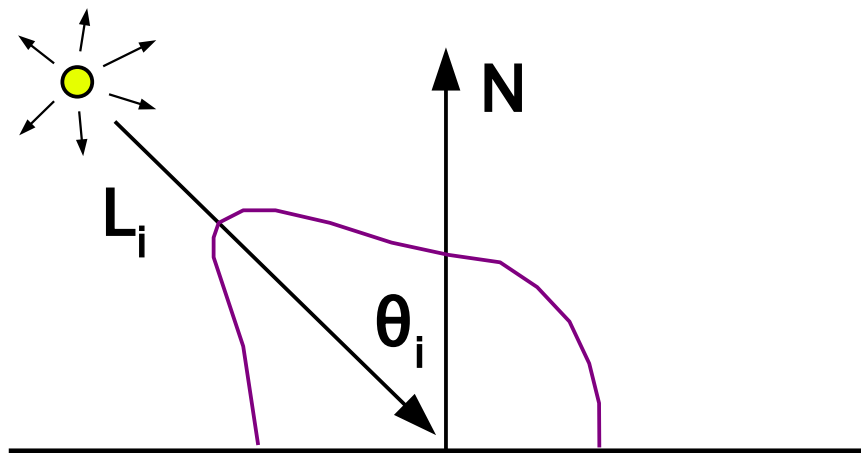
- **odlesk není tak ostrý jako u Phongu (Blinna)**

- **náhrada Fresnelova členu (32× rychlejší, <1% chyba)**

$$R(\alpha) = R_o + (1 - R_o)(1 - \cos \alpha)^5$$

# Nedokonalost Lambertova zákona

- ♦ čistý „cosinový“ povrch **není** v přírodě tak častý
  - ♦ hrubé, zrnité povrchy (smirkový papír, písek, apod.)
  - ♦ **měsíční úplněk** – podle **Lambertova** zákona by měly být okraje tmavé (limitně až k nule), ale není to pravda!
  - ♦ efekt **zpětného odrazu** („backscattering“, „odrazka“)



# Difusní model **Oren–Nayar**



- ♦ používá **mikroplošky** (viz Torrance-Sparrow, -Cook)
- ♦ na **mikroploškách** se aplikuje difusní zákon odrazu
- ♦ zjednodušení vzorců – jen nejvýznamnější členy

$$E_d = \frac{\rho}{\pi} \cdot E_0 \cdot \cos(\theta_i) \cdot (A + B \cdot \max(0, \cos(\phi_r - \phi_i)) \cdot \sin(\alpha) \cdot \tan(\beta))$$

$\theta_i$  úhel mezi  $L_i$  a normálou

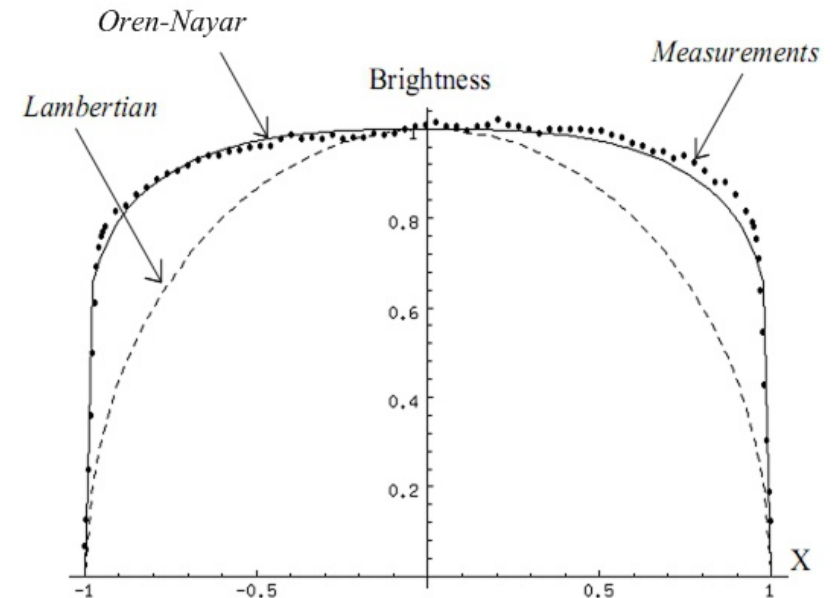
$\theta_r$  úhel mezi  $V$  a normálou

$\Phi_i$  azimut směru  $L_i$

$\Phi_r$  azimut směru  $V$

$\alpha$   $\max(\theta_i, \theta_r)$

$\beta$   $\min(\theta_i, \theta_r)$





# Oren–Nayar, finální vzorce

$$E_d = (C_L \circ C_D) \cdot \cos(\theta_i) \cdot (A + B \cdot \max(0, \cos(\phi_r - \phi_i)) \cdot \sin(\alpha) \cdot \tan(\beta))$$

$$A = 1 - 0.5 \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33} \quad (\text{ve jmenovateli až } 0.57)$$

$$B = 0.45 \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09}$$

$\sigma$  hrubost povrchu: střední hodnota odchylky normály mikroplošky v radiánech (viz Torrance-Cook)

$C_L$  barva zdroje světla

$C_D$  barva materiálu



# Oren-Nayar, ukázky



Real Image

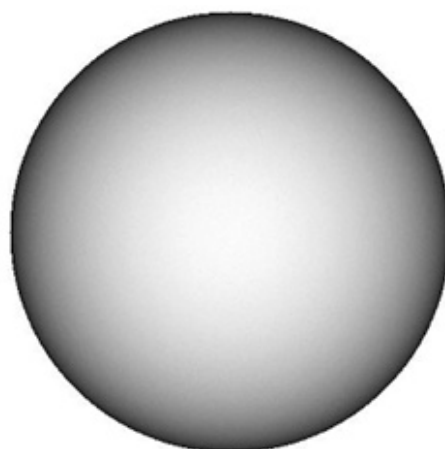


Lambertian Model

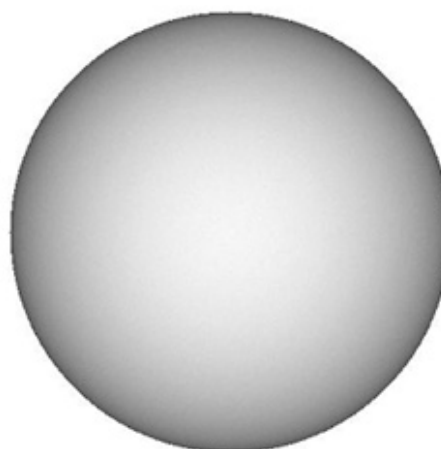


Oren-Nayar Model

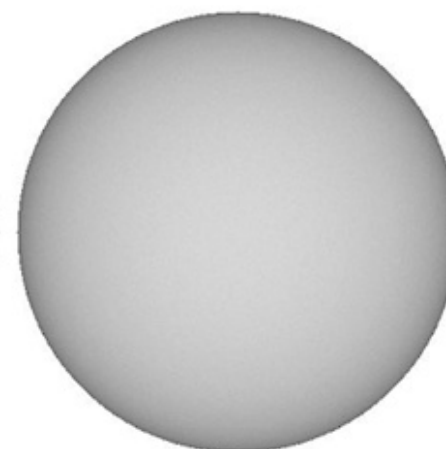
© Jwgu, Wiki,  
public domain



$\sigma = 0$



$\sigma = 0.1$



$\sigma = 0.3$



# Literatura

- **A. Glassner: *An Introduction to Ray Tracing*, Academic Press, London 1989, 121-160**
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes: *Computer Graphics, Principles and Practice*, 760-771**
- **R. Cook, K. Torrance: *A Reflectance Model for Computer Graphics*, ACM Transactions on Graphics, 1982, #1, 7-24**
- **Ch. Schlick: *An Inexpensive BRDF Model for Physically-based Rendering*, 1994**