Výpočet průsečíků paprsku se scénou

CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz

http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/

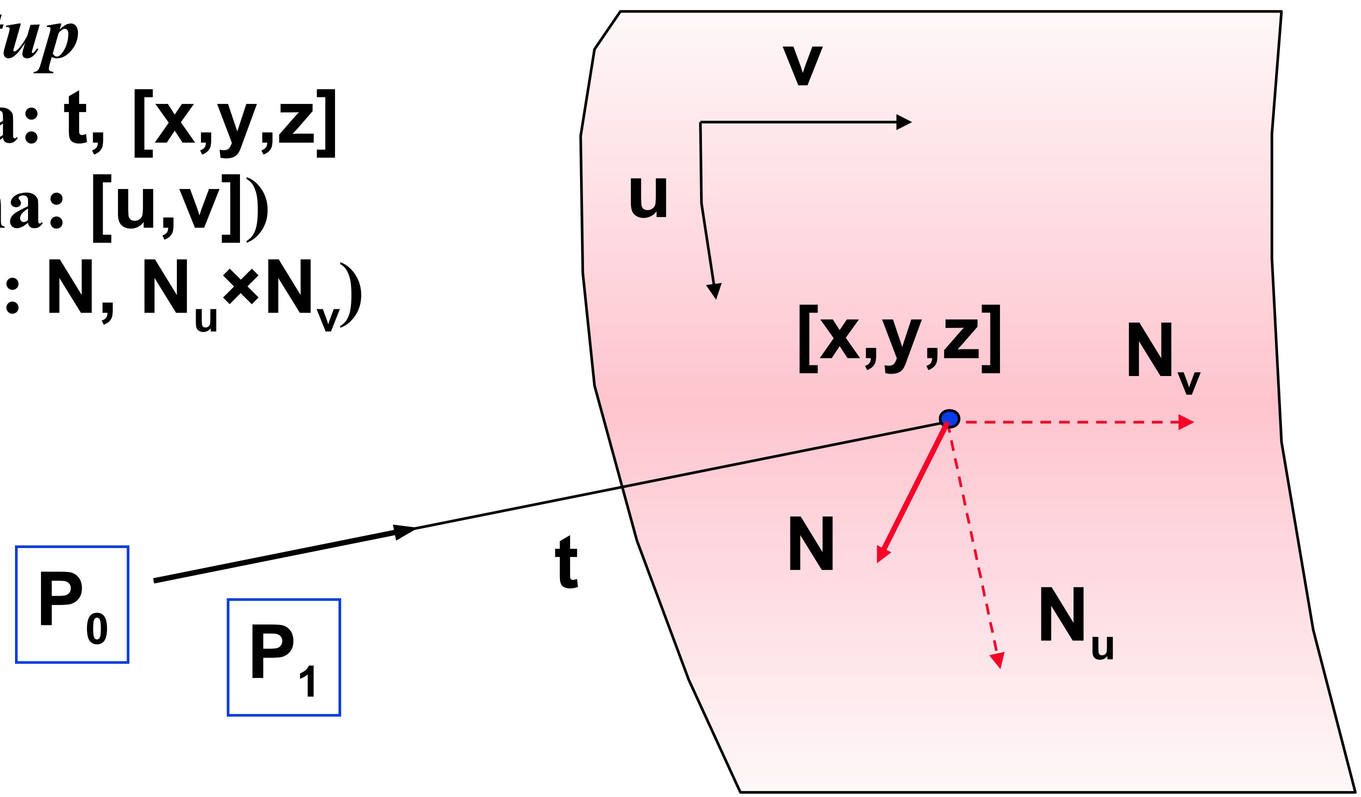
Průsečík paprsku s tělesem

výstup

3D poloha: t, [x,y,z]

(2D poloha: [u,v])

(Normála: N, $N_u \times N_v$)



vstup

Paprsek: P_0, P_1

Rovina

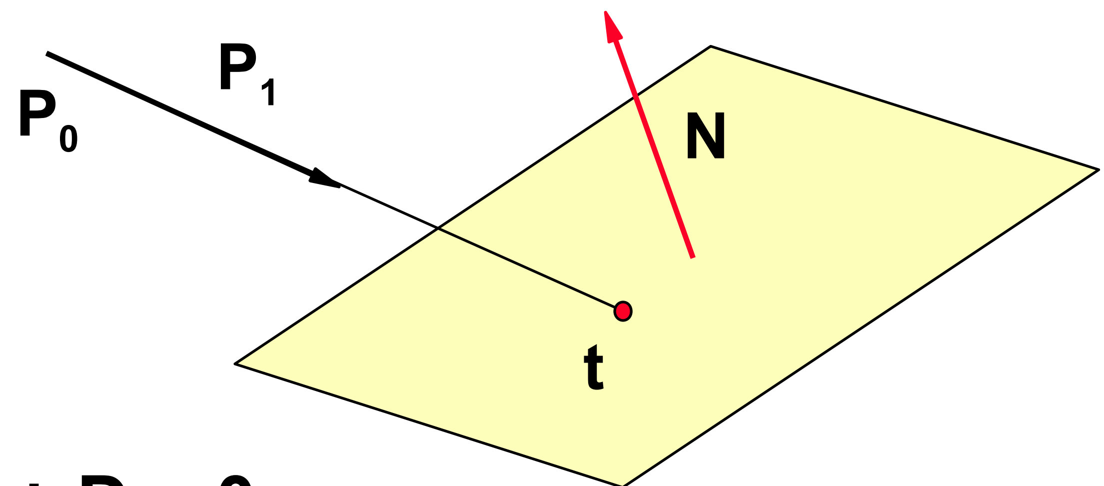
paprsek:

$P(t) = P_0 + t \cdot P_1$

rovina:

$N = [x_N, y_N, z_N]$

$x \cdot x_N + y \cdot y_N + z \cdot z_N + D = 0$



- průsečík $t = -(N \cdot P_0 + D) / (N \cdot P_1)$
- negativní: **2±, 3*,** pozitivní: **5±, 6*, 1/**
- výpočet **[x,y,z]**: **3±, 3***

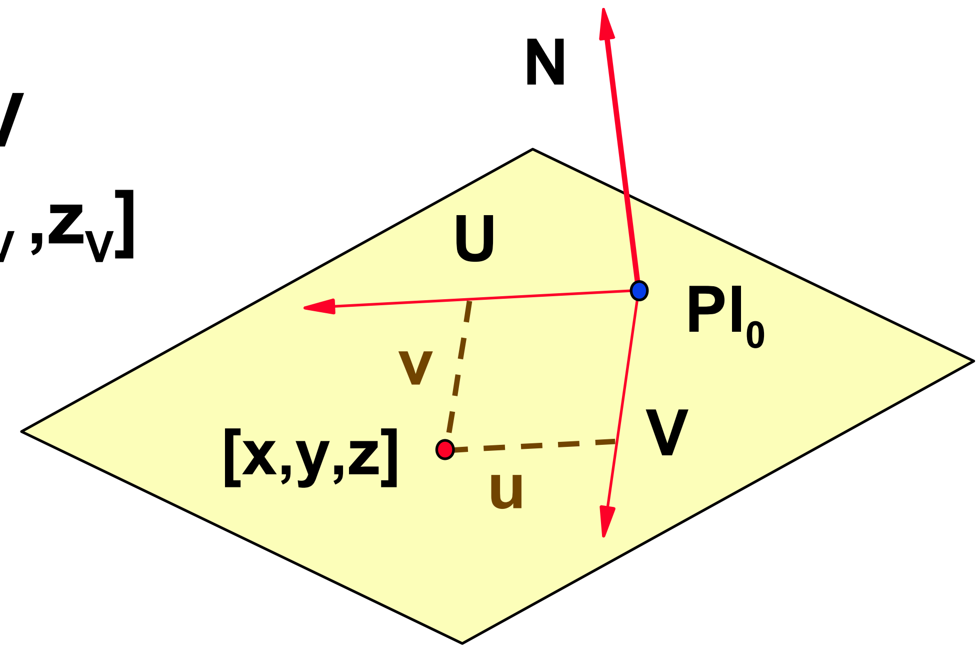
Inverzní transformace v rovině

rovina:

$$Pl(u,v) = Pl_0 + u\cdot U + v\cdot V$$

$$U = [x_U, y_U, z_U],\ V = [x_V, y_V, z_V]$$

$$N = U \times V$$



vstup: **Pl, U, V, [x,y,z]**

výstup: **[u,v]**

- soustava $\underline{u}\cdot x_u + \underline{v}\cdot x_v = x - Pl_{0x}$

  $\underline{u}\cdot y_u + \underline{v}\cdot y_v = y - Pl_{0y}$

- řešení **[u,v]**: **5±, 5*, 2/**

Rovnoběžník

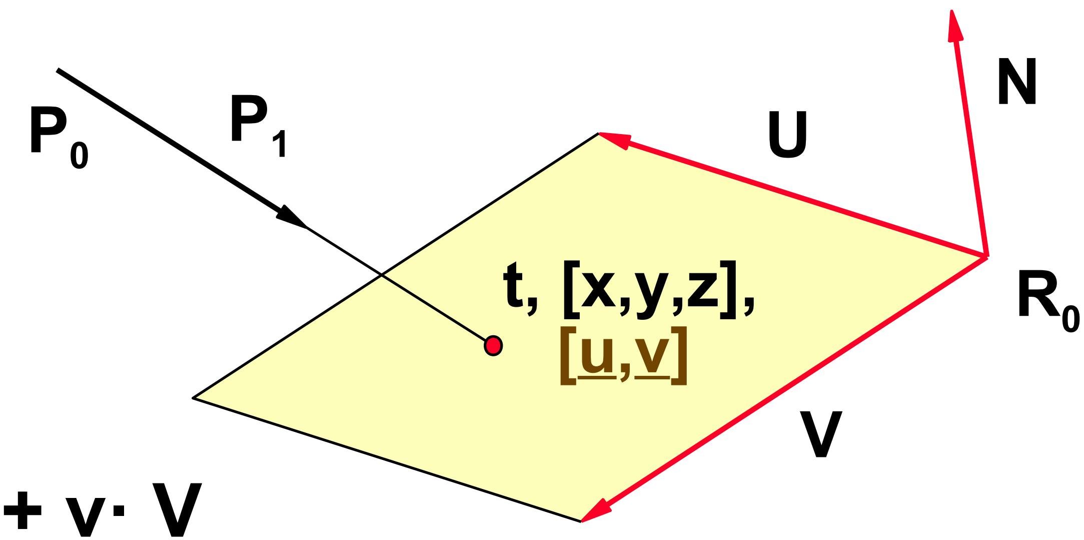
paprsek:

$P(t) = P_0 + t \cdot P_1$

rovnoběžník:

$R(u,v) = R_0 + u \cdot U + v \cdot V$

$0 \le u,v \le 1$



- výpočet **t, [x,y,z], [u,v]**, kontrola **u,v**
- pozitivní případ celkem: **13±, 14*, 3/, 4≤**

Trojúhelník

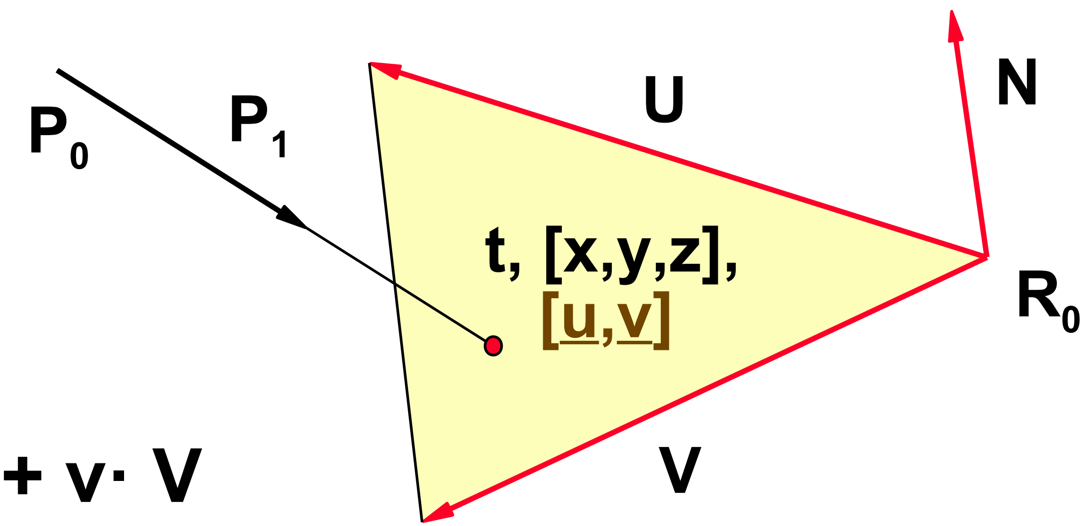
paprsek:

$P(t) = P_0 + t \cdot P_1$

trojúhelník:

$R(u,v) = R_0 + u \cdot U + v \cdot V$

$0 \le u, v, \underline{u+v} \le 1$



- výpočet **t**, **[x,y,z]**, **[u,v]**, kontrola **u,v**
- pozitivní případ celkem: **14±, 14*, 3/, 3≤**

Obecný rovinný mnohoúhelník

paprsek:

$P(t) = P_0 + t\cdot P_1$

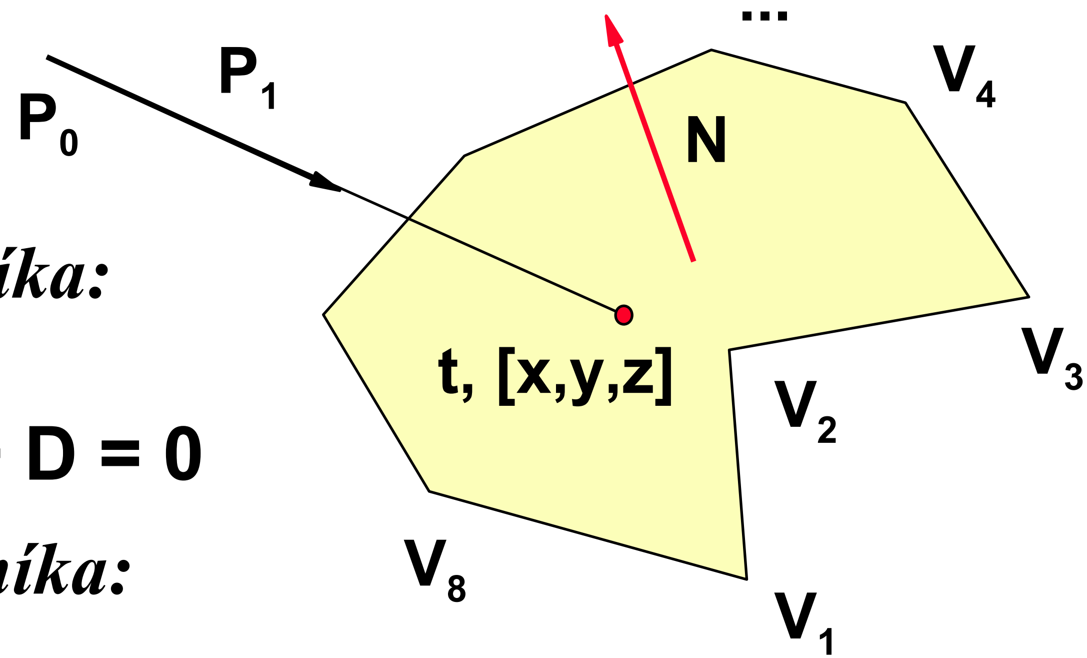
rovina mnohoúhelníka:

$N = [x_N, y_N, z_N]$

$x\cdot x_N + y\cdot y_N + z\cdot z_N + D = 0$

vrcholy mnohoúhelníka:

$V_1, V_2, \dots V_M$

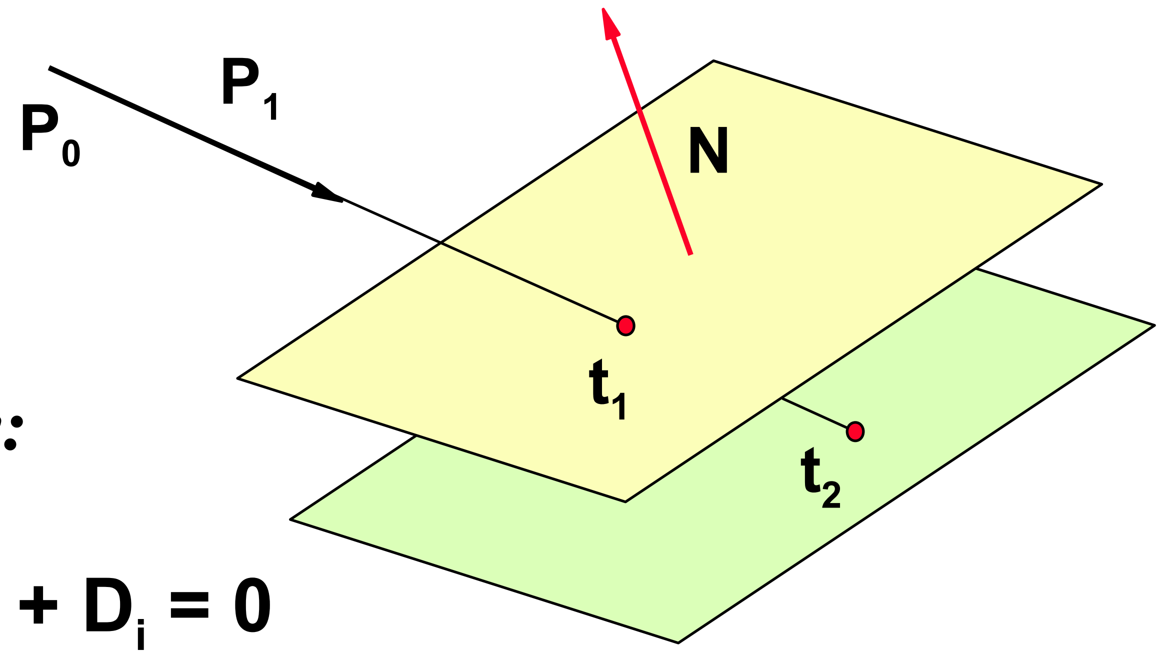


- výpočet **t, [x,y,z]**, test v rovině: **bod×polygon**
- průsečík s rovinou: **8±, 9*, 1/**

Rovnoběžné roviny

paprsek:

$$P(t) = P_0 + t\cdot P_1$$



rovnoběžné roviny:

$$N = [x_N, y_N, z_N]$$

$$x\cdot x_N + y\cdot y_N + z\cdot z_N + D_i = 0$$

- průsečíky $t_i = -(N\cdot P_0 + D_i) / (N\cdot P_1)$
- první rovina: **5**±, **6***, **1**/, každá další: **1**±, **1**/

Konvexní mnohostěn

- chápu jej jako **průnik K poloprostorů**
  - počítám maximálně **K** průsečíků paprsku s rovinou
  - mohu využít **rovnoběžnosti** některých rovin (úspora výpočtů viz výše) - např. kvádr

- proměnné $\mathbf{t_{in}}$, $\mathbf{t_{out}}$ inicializované na **0**, **∞**
- průsečík paprsku s jedním poloprostorem: $\langle\, \mathbf{t}, \boldsymbol{\infty}\,)$ resp. $(\, -\boldsymbol{\infty}, \mathbf{t}\, \rangle$

  $\mathbf{t_{in} = max\{\, t_{in}\, ,\, t\, \}}$ resp. $\mathbf{t_{out} = min\{\, t_{out}\, ,\, t\, \}}$
- předčasně skončím, je-li $\mathbf{t_{in}} > \mathbf{t_{out}}$

Implicitní plocha

paprsek:

$$P(t) = P_0 + t \cdot P_1$$

implicitní povrch:

$$F(x,y,z) = 0$$

příklad:

$$(c - \cos ax) \cos z + (y + a \sin ax) \sin z + + \cos a(x+z) = 0$$

- po dosazení **P(t)** do **F** a úpravách: **F*(t) = 0**
- hledám kořeny funkce **F*(t)**
  – někdy stačí najít **nejmenší kladný kořen** (první průsečík), v CSG potřebuji naopak všechny

Algebraická plocha

paprsek:

$$P(t) = P_0 + t \cdot P_1$$

algebraická plocha stupně **d**:

$$A(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{i+j+k \le d} a_{ijk} \cdot x^i y^j z^k = 0$$

příklad (toroid s poloměry **a, b**):

$$T_{ab}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2\right)^2 - 4a^2\left(b^2 - z^2\right)$$

- po dosazení **P(t)** do **A** a úpravách: **A*(t) = 0**
- **A*** je polynom stupně nejvýše **d**

Kvadrika (d=2)

obecná kvadrika:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0 \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

po dosazení **P(t)** *do rovnice vychází:*

$$a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0,$$

$$\text{kde} \quad a_2 = P_1^T Q P_1, \quad a_1 = 2 P_1^T Q P_0, \quad a_0 = P_0^T Q P_0$$

Rotační kvadrika

rotační kvadrika v základní poloze:

$$x^2 + y^2 + az^2 + bz + c = 0$$

koule:

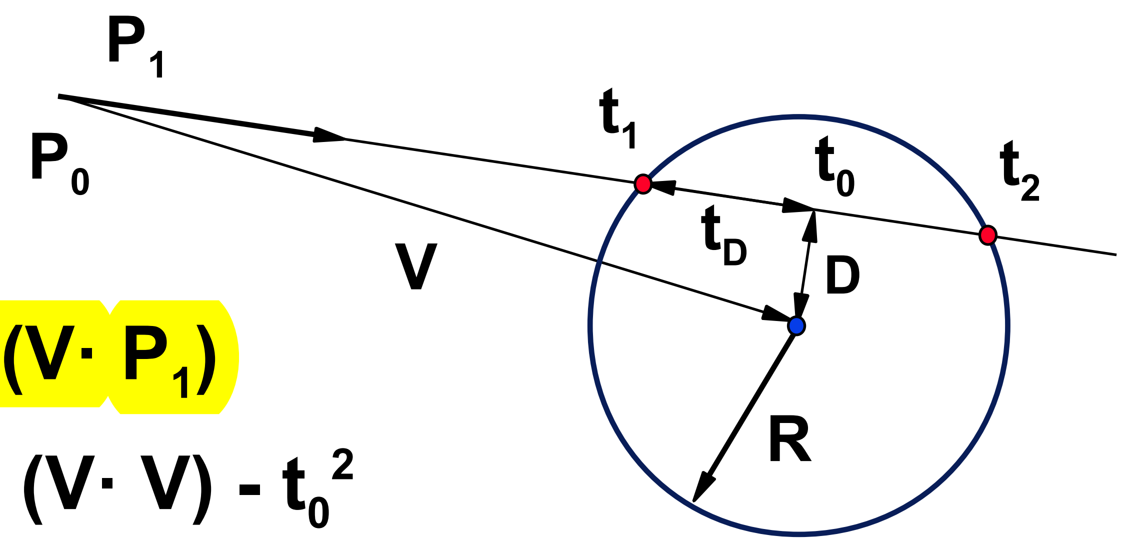
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

po dosazení **P(t)** *do rovnice koule vychází:*

$$t^2\left(P_1 \cdot P_1\right) + 2t\left(P_0 \cdot P_1\right) + \left(P_0 \cdot P_0\right) - 1 = 0$$

Koule (geometrické řešení)

$$P(t) = P_0 + t \cdot P_1$$



- střed tětivy $t_0 = (V \cdot P_1)$
- vzdálenost $D^2 = (V \cdot V) - t_0^{\,2}$
- odchylka $t_D^{\,2} = R^2 - D^2$
- pro $t_D^{\,2} = 0$ je paprsek tečnou koule v $P(t_0)$
- pro $t_D^{\,2} > 0$ existují dva průsečíky: $P(t_0 \pm t_D)$
- negativní: **9±**, **6***, **1<**, pozitivní navíc: **2±**, **1 sqrt**

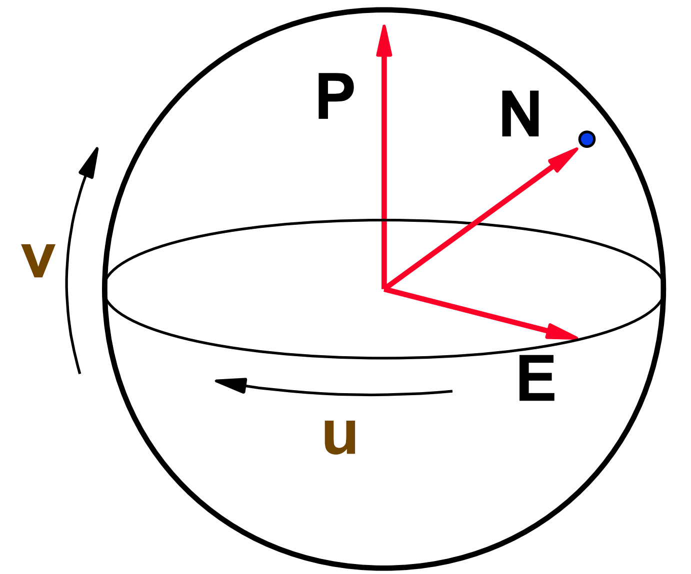
Inverzní transformace na kouli

koule:

$(x\text{-}x_C)^2+(y\text{-}y_C)^2+(z\text{-}z_C)^2 = R^2$

směr k pólu: P, *k rovníku:* E

$(P \cdot E) = 0$



vstup: N, P, E

výstup: $[u,v]$ z $[0,1]^2$

$$\Phi = \arccos(-N \cdot P), \quad \theta = \frac{\arccos\left[(N \cdot E) / \sin\Phi\right]}{2\pi}$$

$$v = \Phi / \pi, \quad (P \times E) \cdot N > 0 \Rightarrow u = \theta, \quad \text{jinak } u = 1 - \theta$$

Válec a kužel

jednotkový válec a kužel v základní poloze:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

po dosazení **P(t)** *do rovnice válce vychází:*

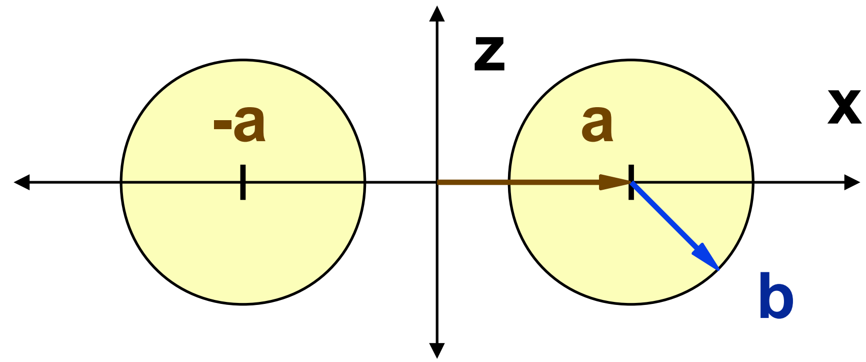
$$t^2\left(x_1^2 + y_1^2\right) + 2t\left(x_0 x_1 + y_0 y_1\right) + x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$$

po dosazení **P(t)** *do rovnice kužele vychází:*

$$t^2\left(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2\right) + 2t\left(x_0 x_1 + y_0 y_1 - z_0 z_1\right) +$$

$$+ x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$$

Toroid



Dvě kružnice v rovině **xz**:

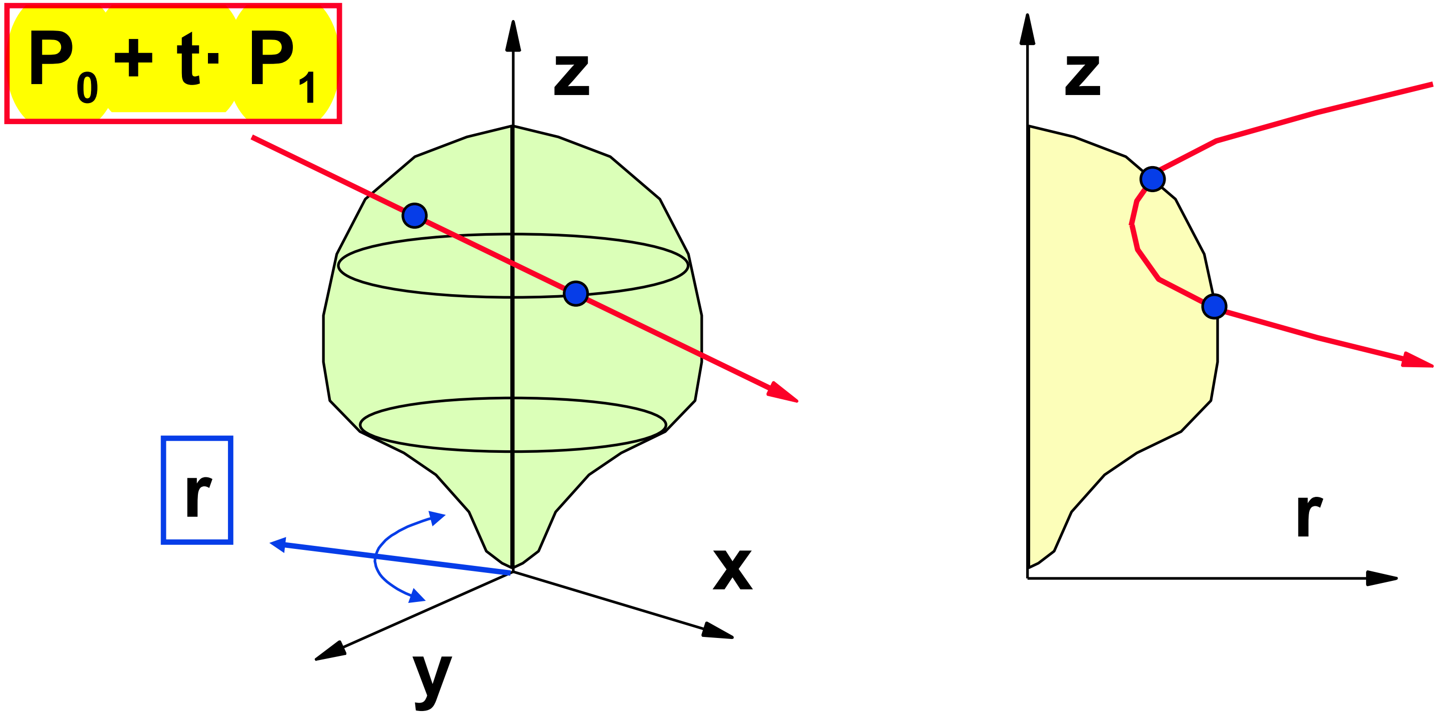
$$\left[\left(x-a\right)^2+z^2-b^2\right]\cdot\left[\left(x+a\right)^2+z^2-b^2\right]=0$$

$$\left[x^2+z^2-\left(a^2+b^2\right)\right]^2=4a^2\left(b^2-z^2\right)$$

Po substituci $r^2=x^2+y^2$ *za* x^2 *vychází rovnice čtvrtého stupně:*

$$\left(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2\right)^2-4a^2\left(b^2-z^2\right)=0$$

Rotační plocha



rovnice paprsku v rovině **rz:**

$$r^2 = x^2 + y^2 = (x_0 + x_1 t)^2 + (y_0 + y_1 t)^2$$

$$z = z_0 + z_1 t$$

Paprsek v rovině rz

Po eliminaci **t:** $\mathbf{ar^2 + bz^2 + cz + d = 0}$ **(1)**

$$a = -z_1^2 \qquad e = x_0 x_1 + y_0 y_1$$

$$b = x_1^2 + y_1^2 \qquad f = x_0^2 + y_0^2$$

$$c = 2(z_1 e - z_0 b)$$

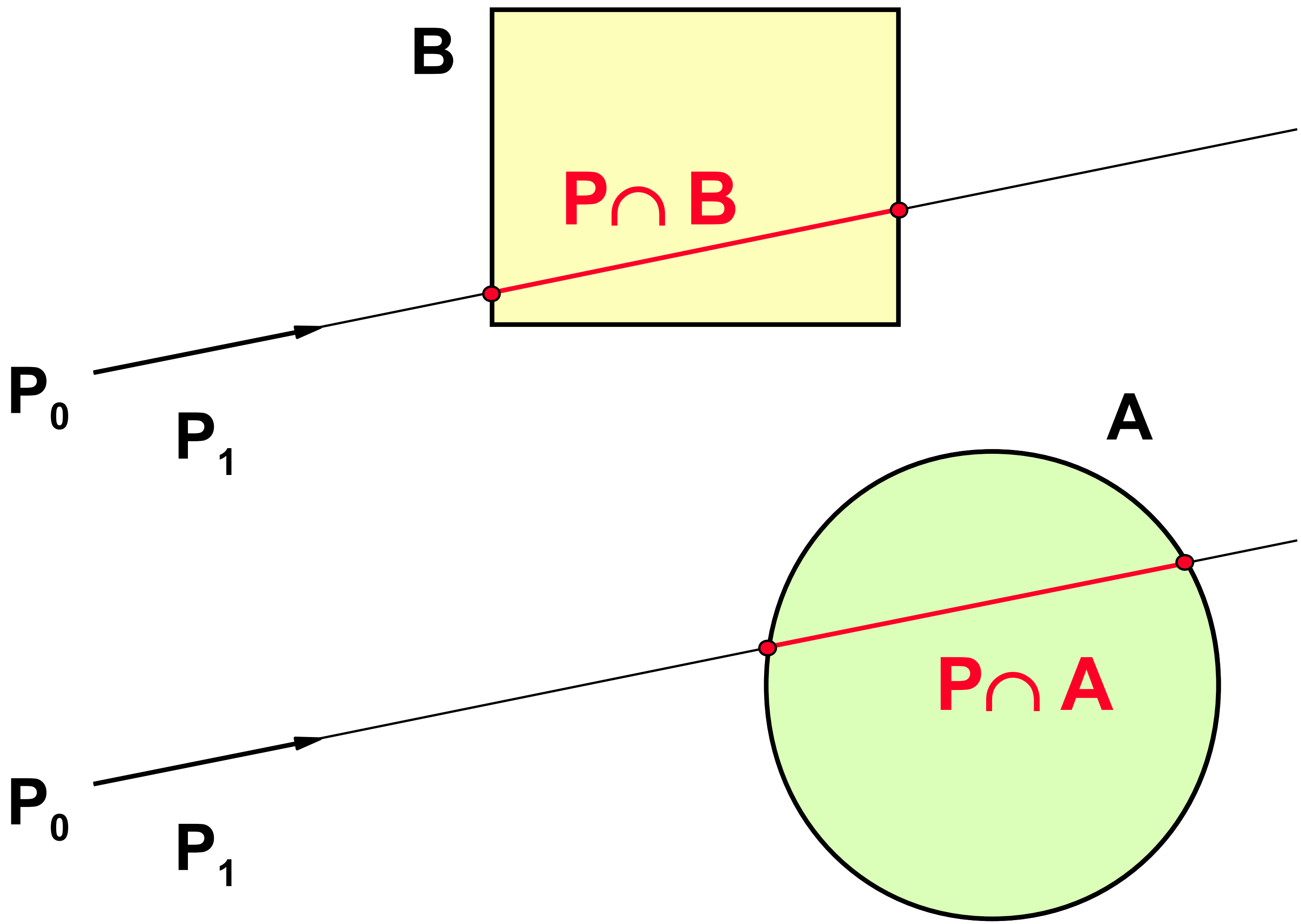
$$d = z_0(z_0 b - 2 z_1 e) + f z_1^2$$

- po dosazení parametrického vyjádření křivky **K(s)** do **(1)** dostaneme rovnici **K*(s) = 0**
- **K*** má proti **K** dvojnásobný stupeň

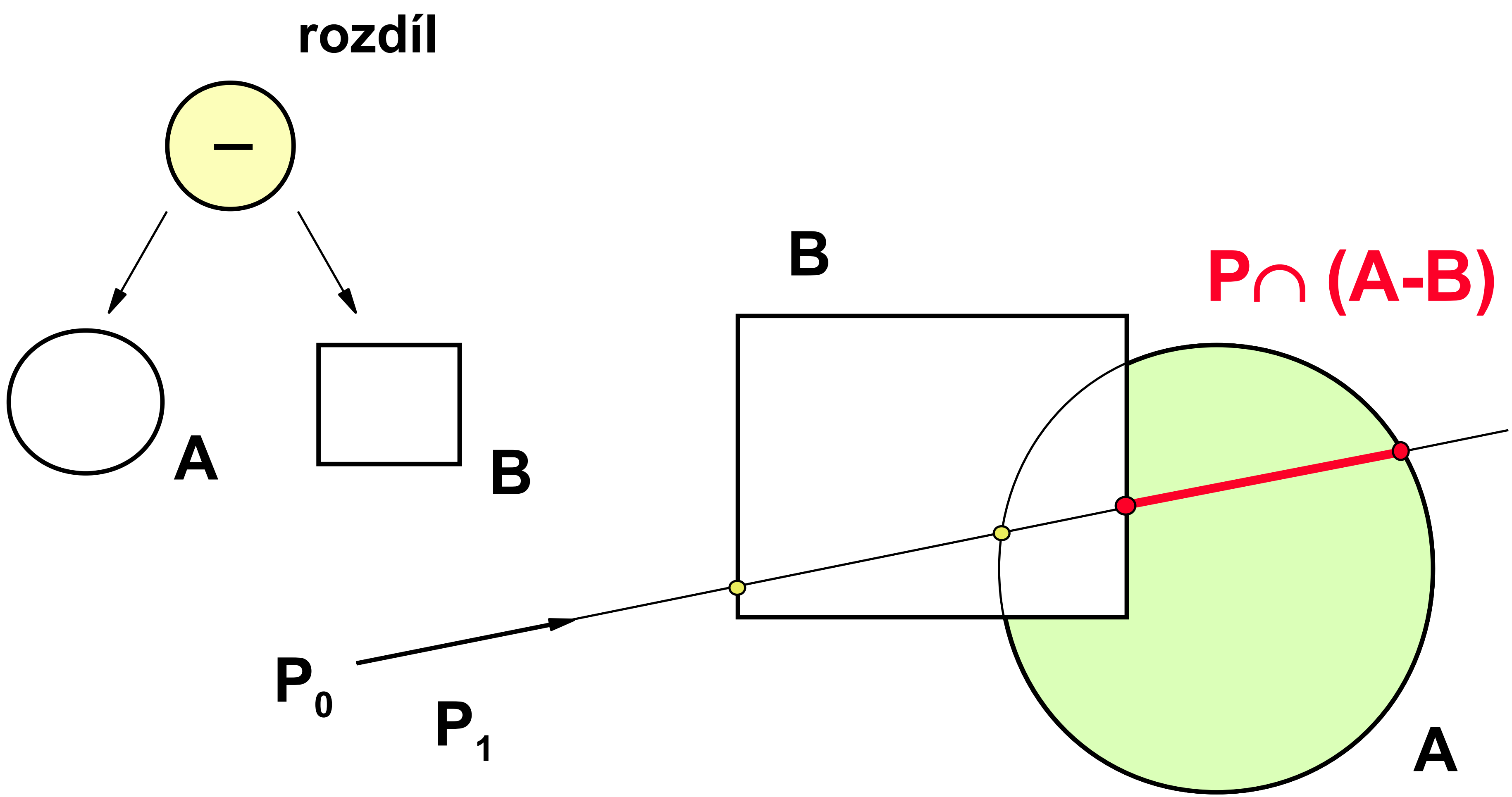
CSG reprezentace

- pro **elementární tělesa** umím průsečíky spočítat
  - začátek a konec průniku paprsku s tělesem pro konvexní tělesa
- **množinové operace** provádím na polopřímce paprsku:
  - distributivita: $\mathbf{P \cap (A\text{-}B) = (P \cap A) - (P \cap B)}$
  - obecný průnik paprsku se scénou je množina intervalů
- **geometrické transformace**:
  - na paprsek aplikuji inverzní transformace

Průsečíky P∩A, P∩B



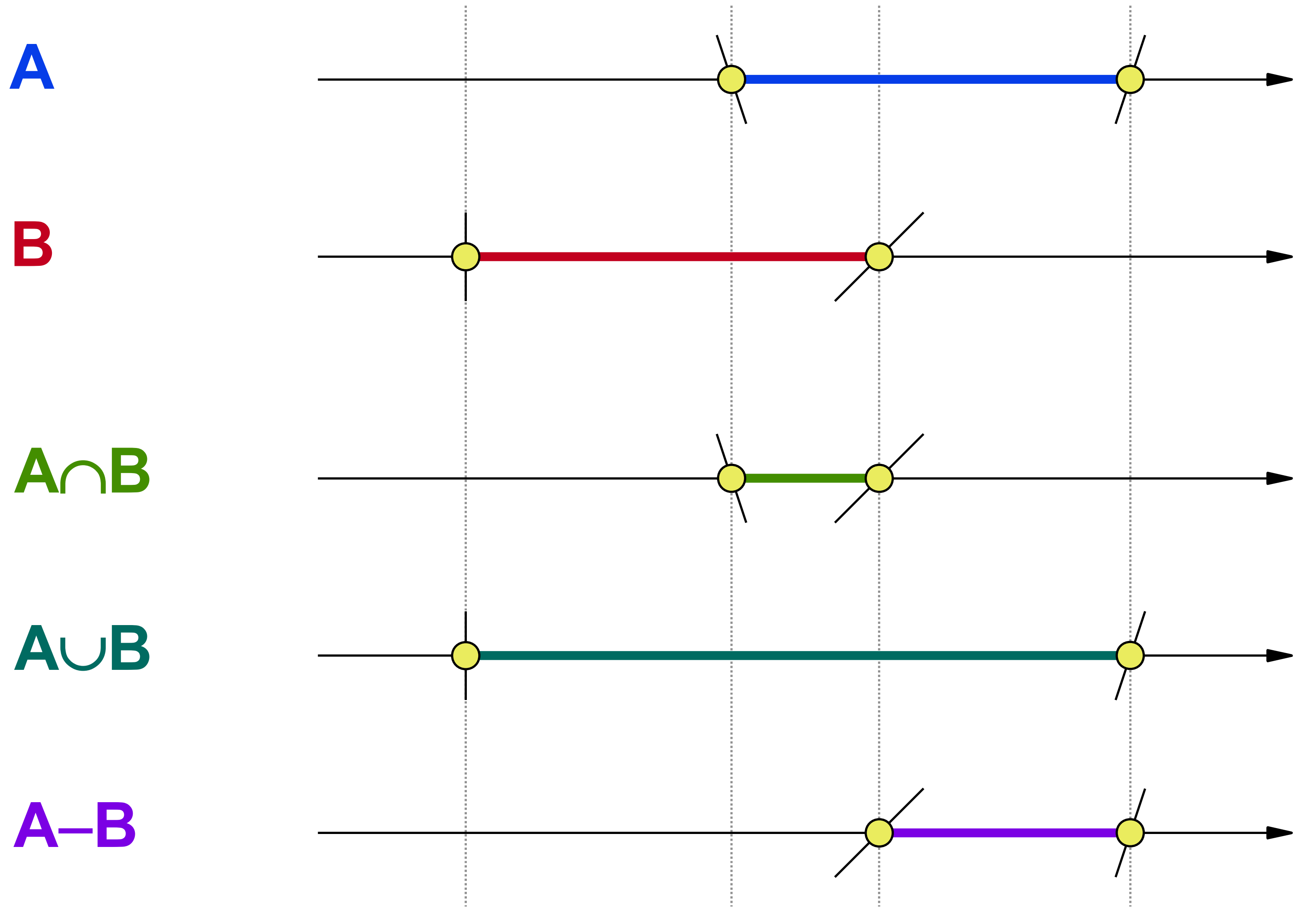
Průsečík P∩(A–B)



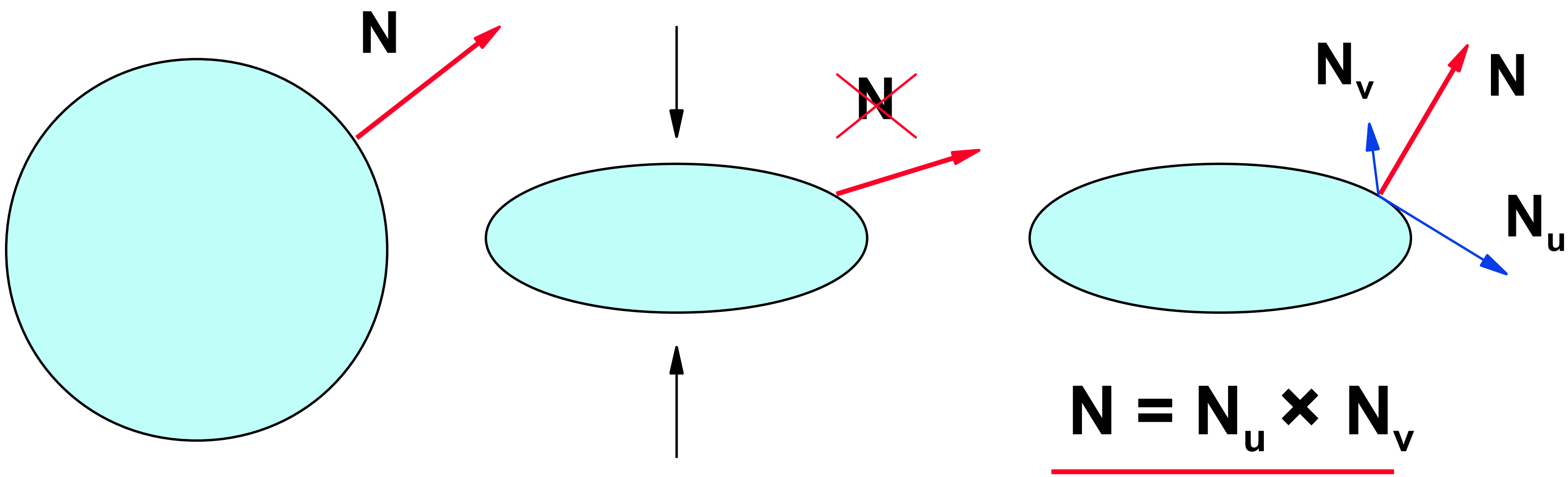
Implementace

- **paprsek**:
  - počáteční bod $\mathbf{P_0}$ a směrový vektor $\mathbf{P_1}$
  - transformuje se inverzními maticemi $\mathbf{T_i^{-1}}$ (nemusí být vždy výhodné … 1 transformace: **15+, 18***)
- **průnik paprsku se scénou** (částí scény):
  - uspořádaný seznam hodnot parametru **t**: [$\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$, ..]
- **množinové operace**:
  - zobecněné slévání vstupních seznamů $\mathbf{t_i}$
- **zpětná transformace normálových vektorů!**

Množinové operace na paprsku



Zpětná transformace normál



- **vektory** transformujeme pouze submaticí **3×3**!
- obecné **afinní zobrazení nezachovává úhly** (kolmost normálového vektoru na plochu)
  - místo normály přenášíme dva **povrchové vektory**

Konec

Další informace:

- **A. Glassner**: ***An Introduction to Ray Tracing***, Academic Press, London 1989, 35-119
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes**: ***Computer Graphics, Principles and Practice***, 712-714