

Výroková a predikátová logika - VI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

Predikátová logika

Zabývá se tvrzeními o **individuích**, jejich vlastnostech a vztazích.

“Je inteligentní a její otec zná pana rektora.”

$$I(x) \wedge Z(o(x), r)$$

- x je **proměnná**, reprezentuje individuum,
- r je **konstantní symbol**, reprezentuje **konkrétní individuum**,
- o je **funkční symbol**, reprezentuje funkci,
- I, Z jsou **relační (predikátové) symboly**, reprezentují **relace** (vlastnost “být **inteligentní**” a vztah “znát”).

“Každý má otce.”

$$(\forall x)(\exists y)(y = o(x))$$

- $(\forall x)$ je **všeobecný (univerzální) kvantifikátor** (každé x),
- $(\exists y)$ je **existenční kvantifikátor** (nějaké y),
- $=$ je (binární) **relační symbol**, reprezentuje identickou relaci.

Jazyk

Jazyk 1. řádu obsahuje

- **proměnné** $x, y, z, \dots, x_0, x_1, \dots$ (spočetně mnoho), množinu všech proměnných značíme **Var**,
- **funkční symboly** f, g, h, \dots , včetně **konstantních symbolů** c, d, \dots , což jsou nulární funkční symboly,
- **relační (predikátové) symboly** P, Q, R, \dots , případně symbol $=$ (**rovnost**) jako speciální relační symbol,
- **kvantifikátory** $(\forall x), (\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in \text{Var}$,
- **logické spojky** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **závorky** $(,), [,], \{, \}, \dots$

Každý funkční i relační symbol S má danou **aritu** (**četnost**) $\text{ar}(S) \in \mathbb{N}$.

***Poznámka** Oproti výrokové logice nemáme (explicitně) **výrokové** proměnné, lze je zavést jako nulární relační symboly.*

Signatura jazyka

- *Logické symboly* jsou proměnné, kvantifikátory, logické spojky a závorky.
- *Mimologické symboly* jsou funkční a relační symboly kromě rovnosti. Rovnost (obvykle) uvažujeme zvlášť.
- *Signatura* je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ disjunktních množin relačních a funkčních symbolů s danými aritami, přičemž žádný z nich není rovnost. Signatura určuje všechny mimologické symboly.
- *Jazyk* je dán signaturou $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a uvedením, zda jde o jazyk s rovností či bez rovnosti. Jazyk musí obsahovat alespoň jeden relační symbol (mimologický nebo rovnost).

Poznámka Význam symbolů není v jazyce určen, např. symbol $+$ nemusí reprezentovat standardní sčítání.

Příklady jazyků

Jazyk obvykle uvádíme výčtem mimologických symbolů s případným upřesněním, zda jde o funkční či relační symboly a jakou mají aritu.

Následující příklady jazyků jsou všechny s **rovností**.

- $L = \langle \rangle$ je jazyk **čisté** rovnosti,
- $L = \langle c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ je jazyk spočetně mnoha konstant,
- $L = \langle \leq \rangle$ je jazyk **uspořádání**,
- $L = \langle E \rangle$ je jazyk teorie **grafů**,
- $L = \langle +, -, 0 \rangle$ je jazyk teorie **grup**,
- $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je jazyk teorie **těles**,
- $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je jazyk **Booleových algeber**,
- $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je jazyk **aritmetiky**,

kde $c_i, 0, 1$ jsou konstantní symboly, $S, -$ jsou unární funkční symboly, $+, \cdot, \wedge, \vee$ jsou binární funkční symboly, E, \leq jsou binární relační symboly.

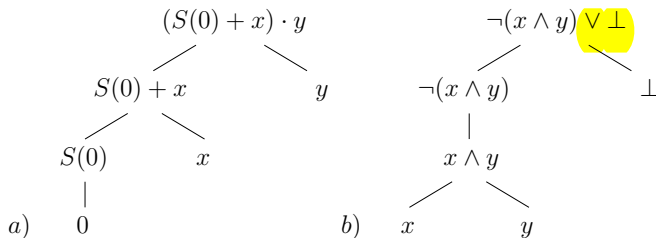
Termy

Jsou výrazy **reprezentující hodnoty** (složených) **funkcí**.

Termy jazyka L jsou dány indukčním předpisem

- (i) každá **proměnná** nebo **konstantní symbol** je term,
 - (ii) je-li f **funkční symbol jazyka L** s aritou $n > 0$ a t_0, \dots, t_{n-1} jsou termy, pak je i výraz $f(t_0, \dots, t_{n-1})$ term,
 - (iii) každý term vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii).
- **Konstantní term** je term bez proměnných.
 - Množinu všech termů jazyka L značíme **Term $_L$** .
 - Termu, jenž je součástí jiného termu t , říkáme **podterm** termu t .
 - **Strukturu** termu můžeme reprezentovat jeho **vytvorujícím stromem**.
 - U binárních funkčních symbolů často používáme **infixního** zápisu, např. píšeme $(x + y)$ namísto $+(x, y)$.

Příklady termů



a) Vytvořující strom termu $(S(0) + x) \cdot y$ jazyka aritmetiky.

b) Výrokové formule se spojkami \neg , \wedge , \vee , případně s konstantami \top , \perp lze chápat jako termy jazyka Booleových algeber.

Atomické formule

Jsou nejjednodušší formule.

- **Atomická formule** jazyka L je výraz $R(t_0, \dots, t_{n-1})$, kde R je **n -ární relační symbol** jazyka L a t_0, \dots, t_{n-1} jsou termy jazyka L .
- Množinu všech atomických formulí jazyka L značíme **AFm_L** .
- Strukturu atomické formule můžeme reprezentovat **vytvorujícím stromem** z vytvorujících podstromů jejích termů.
- U binárních relačních symbolů často používáme **infixního** zápisu, např.
 $t_1 = t_2$ namísto $=(t_1, t_2)$ či $t_1 \leq t_2$ namísto $\leq(t_1, t_2)$.
- *Příklady atomických formulí*

$$Z(o(x), r), \quad x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y, \quad \neg(x \wedge y) \vee \perp = \perp.$$

Formule

Formule jazyka L jsou výrazy dané induktivním předpisem

- (i) každá atomická formule jazyka L je formule,
 - (ii) jsou-li φ, ψ formule, pak i následující výrazy jsou formule
 $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi),$
 - (iii) je-li φ formule a x proměnná, jsou výrazy $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ formule.
 - (iv) každá formule vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).
- Množinu všech formulí jazyka L značíme Fm_L .
 - Formulí, jež je součástí jiné formule φ , nazveme *podformule* formule φ .
 - Strukturu formule můžeme reprezentovat jejím vytvářejícím stromem.

Konvence zápisu

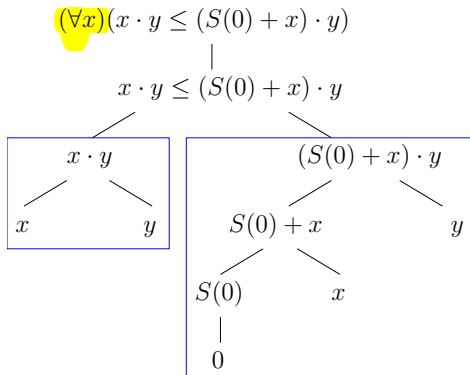
- Zavedení **priorit** binárních funkčních symbolů např. $+$, \cdot umožňuje při infixním zápisu vypouštět závorky okolo podtermu vzniklého symbolem **vyšší** priority, např. $x \cdot y + z$ reprezentuje term $(x \cdot y) + z$.
- Zavedení **priorit** logických spojek a kvantifikátorů umožňuje vypouštět závorky okolo podformule vzniklé spojkou s **vyšší** prioritou.

$$(1) \rightarrow, \leftrightarrow \quad (2) \wedge, \vee \quad (3) \neg, (\forall x), (\exists x)$$

- Okolo podformulí vzniklých \neg , $(\forall x)$, $(\exists x)$ lze závorky vypustit vždy.
- Můžeme vypustit závorky i okolo $(\forall x)$ a $(\exists x)$ pro každé $x \in \text{Var}$.
- Rovněž vnější závorky můžeme vynechat.

$$\begin{aligned} & (((\neg((\forall x)R(x))) \wedge ((\exists y)P(y))) \rightarrow (\neg(((\forall x)R(x)) \vee (\neg((\exists y)P(y))))) \\ & \neg\forall xR(x) \wedge \exists yP(y) \rightarrow \neg(\forall xR(x) \vee \neg\exists yP(y)) \end{aligned}$$

Příklad formule



Vytvořující strom formule $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$.

Výskyt proměnné

Nechť φ je formule a x je proměnná.

- **Výskyt** proměnné x ve φ je **list** vytvořujícího stromu φ označený x .
- Výskyt x ve φ je **vázaný**, je-li součástí nějaké **podformule** ψ **začínající kvantifikátorem** $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$. Není-li výskyt vázaný, je **volný**.
- Proměnná x je **volná** ve φ , pokud má volný výskyt ve φ .
Je **vázaná** ve φ , pokud má vázaný výskyt ve φ .
- Proměnná x může být zároveň volná i vázaná ve φ . Např. ve formuli

$$(\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z.$$
- Zápis $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ značí, že x_1, \dots, x_n jsou všechny **volné proměnné** ve formuli φ . (O nich formule φ něco tvrdí).

Poznámka Uvidíme, že pravdivostní hodnota formule (při dané interpretaci symbolů) závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.

Otevřené a uzavřené formule

- Formule je **otevřená**, neobsahuje-li žádný kvantifikátor. Pro množinu OFm_L všech otevřených formulí jazyka L platí $\text{AFm}_L \subsetneq \text{OFm}_L \subsetneq \text{Fm}_L$.
- Formule je **uzavřená** (*sentence*), pokud nemá žádnou volnou proměnnou, tj. všechny výskyty proměnných jsou vázané.
- Formule může být otevřená i uzavřená zároveň, pak všechny její termy jsou konstantní.

$x + y \leq 0$	<i>otevřená</i> , $\varphi(x, y)$
$(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$	<i>uzavřená (sentence),</i>
$(\forall x)(x + y \leq 0)$	<i>ani otevřená, ani uzavřená</i> , $\varphi(y)$
$1 + 0 \leq 0$	<i>otevřená i uzavřená</i>

Poznámka Uvidíme, že *sentence* má při dané interpretaci symbolů pevný význam, tj. její pravdivostní hodnota nezávisí na ohodnocení proměnných.

Instance

Když do formule **za volnou proměnnou x dosadíme** term t , požadujeme, aby **vzniklá formule říkala (nově) o termu t “totéž”, co předtím říkala o proměnné x .**

$\varphi(x)$	$(\exists y)(x + y = 1)$	“existuje prvek $1 - x$ ”
pro $t = 1$ lze $\varphi(x/t)$	$(\exists y)(1 + y = 1)$	“existuje prvek $1 - 1$ ”
pro $t = y$ nelze	$(\exists y)(y + y = 1)$	“1 je dělitelné 2”

- Term t je **substituovatelný** za proměnnou x ve formuli φ , pokud po **současném nahrazení všech volných výskytů x za t nevznikne ve φ žádný vázaný výskyt proměnné z t .**
- Pak vzniklou formuli značíme $\varphi(x/t)$ a zveme ji **instance** formule φ vzniklá **substitucí** termu t za proměnnou x do φ .
- t není substituovatelný za x do φ , právě když x má volný výskyt v nějaké podformuli φ začínající $(\forall y)$ nebo $(\exists y)$ pro nějakou proměnnou y z t .**
- Konstantní** termy jsou substituovatelné **vždy**.

Varianty

*Kvantifikované proměnné lze (za **určitých** podmínkách) přejmenovat tak, že vznikne ekvivalentní formule.*

Nechť $(Qx)\psi$ je podformule ve φ , kde Q značí \forall či \exists , a y je proměnná, tž.

- 1) y je **substituovatelná** za x do ψ , a
- 2) y nemá **volný** výskyt v ψ .

Nahrazením podformule $(Qx)\psi$ za $(Qy)\psi(x/y)$ vznikne **varianta** formule φ **v podformuli** $(Qx)\psi$. Postupnou variací jedné či více podformulí ve φ vznikne **varianta** formule φ . *Např.*

$$(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$$

$$(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$$

$$(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$$

$$(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$$

je formule φ ,

je varianta φ ,

není varianta φ , neplatí 1),

není varianta φ , neplatí 2).

Struktury

- $\underline{S} = \langle S, \leq \rangle$ **uspořádaná** množina, kde \leq je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní binární relace na S ,
- $G = \langle V, E \rangle$ neorientovaný **graf** bez smyček, kde V je množina *vrcholů*, E je ireflexivní, symetrická binární relace na V (*sousednost*),
- $\underline{\mathbb{Z}}_p = \langle \mathbb{Z}_p, +, -, 0 \rangle$ **grupa** sčítání celých čísel modulo p ,
- $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ **těleso** racionálních čísel.
- $\underline{\mathcal{P}}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ **potenční algebra** nad množinou X ,
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ standardní model **aritmetiky** (přirozených čísel),
- konečné automaty a další modely výpočtu,
- relační databáze, ...

Struktura pro jazyk

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk a A je neprázdná množina.

- *Realizace (interpretace) relačního symbolu* $R \in \mathcal{R}$ na A je libovolná relace $R^A \subseteq A^{\text{ar}(R)}$. Realizace rovnosti na A je relace Id_A (identita).
- *Realizace (interpretace) funkčního symbolu* $f \in \mathcal{F}$ na A je libovolná funkce $f^A: A^{\text{ar}(f)} \rightarrow A$. Realizace konstantního symbolu je tedy prvek z A .

Struktura pro jazyk L (*L-struktura*) je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$, kde

- A je neprázdná množina, zvaná *doména (univerzum)* struktury \mathcal{A} ,
- $\mathcal{R}^A = \langle R^A \mid R \in \mathcal{R} \rangle$ je *soubor* realizací relačních symbolů (relací),
- $\mathcal{F}^A = \langle f^A \mid f \in \mathcal{F} \rangle$ je *soubor* realizací funkčních symbolů (funkcí).

Strukturu pro jazyk L nazýváme také *model jazyka L*. Třída všech modelů jazyka L se značí $M(L)$. Např. struktury pro jazyk $L = \langle \leq \rangle$ jsou

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle, \langle \mathbb{Q}, > \rangle, \langle X, E \rangle, \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle \text{ pokud } X \neq \emptyset.$$

Hodnota termu

Nechť t je term jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L .

- *Ohodnocení proměnných* v množině A je funkce $e: \text{Var} \rightarrow A$.
- *Hodnota* $t^A[e]$ termu t ve struktuře \mathcal{A} při ohodnocení e je daná předpisem

$$x^A[e] = e(x) \quad \text{pro každé } x \in \text{Var},$$

$$(f(t_0, \dots, t_{n-1}))^A[e] = f^A(t_0^A[e], \dots, t_{n-1}^A[e]) \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{F}.$$

- Speciálně, pro konstantní symbol c je $c^A[e] = c^A$.
- Je-li t *konstantní* term, jeho hodnota v \mathcal{A} nezávisí na ohodnocení e .
- *Hodnota termu v \mathcal{A} závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných.*

Např. hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 1 \rangle$ při ohodnocení e s $e(x) = 2$ je $(x + 1)^N[e] = 3$.

Hodnota atomické formule

Nechť φ je **atomická** formule tvaru $R(t_0, \dots, t_{n-1})$ jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L .

- Hodnota** $H_{at}^A(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře \mathcal{A} při ohodnocení e je

$$H_{at}^A(R(t_0, \dots, t_{n-1}))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_0^A[e], \dots, t_{n-1}^A[e]) \in R^A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

přičemž $=^A$ je Id_A , tj. $H_{at}^A(t_0 = t_1)[e] = 1$ pokud $t_0^A[e] = t_1^A[e]$, jinak 0.

- Je-li φ sentence, tj. **všechny její termy jsou konstantní**, její hodnota v \mathcal{A} **nezávisí na ohodnocení e** .
- Hodnota φ v \mathcal{A} závisí pouze** na ohodnocení jejích **(volných) proměnných**.

Např. hodnota formule φ tvaru $x + 1 \leq 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 1, \leq \rangle$ při ohodnocení e je $H_{at}^{\mathcal{N}}(\varphi)[e] = 1$ právě když $e(x) = 0$.

Hodnota formule

Hodnota $H^A(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře \mathcal{A} při ohodnocení e je

$H^A(\varphi)[e] = H_{at}^A(\varphi)[e]$ pokud φ je atomická,

$$H^A(\neg\varphi)[e] = -_1(H^A(\varphi)[e])$$

$$H^A(\varphi \wedge \psi)[e] = \wedge_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e])$$

$$H^A(\varphi \vee \psi)[e] = \vee_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e])$$

$$H^A(\varphi \rightarrow \psi)[e] = \rightarrow_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e])$$

$$H^A(\varphi \leftrightarrow \psi)[e] = \leftrightarrow_1(H^A(\varphi)[e], H^A(\psi)[e])$$

$$H^A((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(H^A(\varphi)[e(x/a)])$$

$$H^A((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(H^A(\varphi)[e(x/a)])$$

kde $-_1, \wedge_1, \vee_1, \rightarrow_1, \leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami a $e(x/a)$ pro $a \in A$ značí ohodnocení získané z e nastavením $e(x) = a$.

Pozorování $H^A(\varphi)[e]$ závisí pouze na ohodnocení *volných* proměnných ve φ .

Platnost při ohodnocení

Formule φ **je splněna (platí) ve struktuře \mathcal{A} při ohodnocení e** , pokud $H^A(\varphi)[e] = 1$. Pak píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, v opačném případě $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$. Platí

$\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ implikuje $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro každé $a \in A$
$\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$	\Leftrightarrow	$\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$

Pozorování Nechť t je **substituovatelný** za x do φ a ψ je **varianta** φ . Pak pro každou strukturu \mathcal{A} a ohodnocení e platí

- 1) $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro $a = t^A[e]$,
- 2) $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$.

Platnost ve struktuře

Nechť φ je formule jazyka L a \mathcal{A} je struktura pro L .

- φ je **pravdivá (platí) ve struktuře \mathcal{A}** , značeno $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow A$. V opačném případě píšeme $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
- φ je **lživá v \mathcal{A}** , pokud $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ pro každé $e: \text{Var} \rightarrow A$.
- Pro každé formule φ, ψ , proměnnou x a strukturu \mathcal{A} platí

$$(1) \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \not\models \neg\varphi$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ a } \mathcal{A} \models \psi$$

$$(3) \quad \mathcal{A} \models \varphi \vee \psi \quad \Leftarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi$$

$$(4) \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$$

- Je-li φ **sentence**, je φ pravdivá v \mathcal{A} či lživá v \mathcal{A} a tedy implikace (1) platí i obráceně. Je-li navíc ψ sentence, také implikace (3) platí i obráceně.
- Z (4) plyne, že $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \psi$, kde ψ je **generální uzávěr** φ , tj. formule $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$, v níž x_1, \dots, x_n jsou všechny volné proměnné φ .

Platnost v teorii

- **Teorie** jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. **axiomů**).
- **Model teorie** T je L -struktura \mathcal{A} taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- **Třída modelů** teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je **pravdivá v T** (**platí v T**), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model \mathcal{A} teorie T . V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je **lživá v T** , pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T .
- Formule φ je **nezávislá v T** , pokud není pravdivá v T ani lživá v T .
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme “v logice”. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je **pravdivá** ((**logicky**) **platí**, **tautologie**).
- **Důsledek** T je množina $\theta^L(T)$ všech **sentencí** jazyka L pravdivých v T , tj.

$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

Modely T jsou L -struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. **uspořádané množiny**, ve kterých platí axiomy T , např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ **platí v \mathcal{A}** , ale **neplatí v \mathcal{B}** , neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$, **je tedy nezávislá v T** .
- Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v \mathcal{B} a lživá v \mathcal{A} , je tedy rovněž nezávislá v T . Píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$.
- Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ **je pravdivá v T** , píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její **generální uzávěr**.