Přednáška 8, 21. listopadu 2014

Nejprve jednoduché lemma: *když* $a_n \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*, pak* $\sum a_n$ *konverguje* $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists m :\ \sum_{n>m} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots < \varepsilon$. Důkaz necháváme jako úlohu.

Důkaz. Nechť $\sum a_{p(n)}$ je přerovnání řady $\sum a_n$, takže $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Protože $\sum a_n$ absolutně konverguje, existuje $c > 0$, že $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < c$ pro každé n. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dané. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$, že $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, tudíž i

$$|a_{p(1)}| + |a_{p(2)}| + \cdots + |a_{p(n)}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| < c$$

a $\sum a_{p(n)}$ absolutně konverguje.

Dokážeme, že $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$ (součty se rovnají). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme n_0, že $\sum_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon$ i $\sum_{n>n_0} |a_{p(n)}| < \varepsilon$ (podle lemmatu). Pak vezmeme tak velké n_1, $n_1 > n_0$, že

$$\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\} \subset \{1, 2, \ldots, n_1\}$$

i

$$\{1, 2, \ldots, n_0\} \subset \{p(1), p(2), \ldots, p(n_1)\}\ .$$

Pro každé $n > n_1$ pak díky definici n_0 a n_1 a Δ-ové nerovnosti máme, že

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{p(i)}\right| = \left|\sum_{i \in A} a_i - \sum_{i \in B} a_{p(i)}\right| \leq \sum_{i \in A} |a_i| + \sum_{i \in B} |a_{p(i)}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\ ,$$

protože $A, B \subset \mathbb{N}$ jsou jisté dvě konečné množiny indexů s $\min A, \min B > n_0$ (sčítance a_i a $a_{p(i)}$ s $i \leq n_0$ se vzájemně zruší). Tedy $\lim(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim(a_{p(1)} + a_{p(2)} + \cdots + a_{p(n)})$ a obě řady mají stejný součet. □

Absolutně konvergentní řady tak můžeme definovat obecněji pro libovolnou (spočetnou) množinu indexů. Nechť X je nekonečná spočetná množina (např. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a podobně). Řekneme, že řada

$$\sum_{i \in X} a_i$$

(toto si lze představit jako množinu dvojic $\{(i, a_i) \mid i \in X\}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$) *absolutně konverguje*, když existuje $c > 0$, že pro každou *konečnou* podmnožinu $A \subset X$ je

$$\sum_{i \in A} |a_i| < c\ .$$

Součet takové absolutně konvergentní řady je pak definován jako součet klasické řady, když indexy v X bijektivně přejmenujeme přirozenými čísly:

$$\sum_{i \in X} a_i := \sum a_{p(n)} = \lim_{n \to \infty} (a_{p(1)} + a_{p(2)} + \cdots + a_{p(n)}) \ ,$$

kde $p : \ \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Podle předchozí věty tento součet existuje a nezávisí na volbě p, takže definice je korektní. Následující tvrzení nebudeme dokazovat, důkaz je podobný důkazu věty.

Tvrzení (nekonečný distributivní zákon). *Nechť X a Y jsou nekonečné spočetné množiny a $\sum_{i \in X} a_i$ a $\sum_{j \in Y} b_j$ jsou absolutně konvergentní řady se součty $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak jejich součin, řada*

$$\sum_{(i,j) \in X \times Y} a_i b_j \ ,$$

též absolutně konverguje a má součet ab.

Exponenciální funkce

(Následující motivační příklad na přednášce bohužel nezazněl.)

$$1 + (-100)^1/1! + (-100)^2/2! + (-100)^3/3! + \cdots = ?$$

Z podílového kritéria hned plyne, že řada absolutně konverguje, ale jaký má součet? Pro $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sčítanec $(-100)^n/n!$ divoce skáče mezi stále se v absolutní hodnotě zvětšujícími kladnými a zápornými hodnotami, například pro $n = 10, 11, \ldots$ je něco jako alespoň $\pm 10^{10}$, dosáhne maxima v absolutní hodnotě (když $n = 100$ — proč?) a pak začne faktoriál vítězit nad exponenciálou (pro $n > 100$) a sčítanec se rychle zmenšuje k 0. Na první pohled ale není důvod si myslet, že by se tak různorodá čísla mohla nasčítat na něco hezkého. Opravdová magie je, že ve skutečnosti se tato čísla téměř (ale opravdu téměř) vzájemně zruší:

$$\begin{aligned} & 1 + (-100)^1/1! + (-100)^2/2! + (-100)^3/3! + \ldots \\ & = \frac{1}{1 + 100^1/1! + 100^2/2! + 100^3/3! + \ldots} < 10^{-10} \ , \end{aligned}$$

což je kladné číslo, velmi blízké nule, ale nenulové. Dokážeme si to.

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme *exponenciální funkci* jako součet řady

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \; .$$

Protože $\frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ pro $n \to \infty$, podle podílového kritéria řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ a exponenciální funkce je všude definovaná. Zřejmě $e^0 = 1$ a $e^x \geq 1$ pro $x \geq 0$ a e^x je pro $x \geq 0$ rostoucí funkce.

Tvrzení (exp **převádí součet na součin).** *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ je*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \; .$$

Důkaz. Spočteme to a pak kroky výpočtu, jednotlivé rovnosti, zdůvodníme. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ máme:

$$\begin{aligned} \exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x + y) \; . \end{aligned}$$

První rovnost je z definice exponenciální funkce. Ve druhé jsme obě absolutně konvergentní řady vynásobili a použili tvrzení o nekonečném distributivním zákonu. Dostali jsme vlastně řadu $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \dots$. Ve třetí rovnosti jsme pro její sečtení vzali bijekci mezi $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, která začne indexem $(0, 0)$, pak projde množinu indexů $\{(1, 0), (0, 1)\}$, pak množinu indexů $\{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ a tak dále, použili jsme fakticky větu o přerovnání AK řady. Čtvrtá rovnost je úprava založená na rovnostech $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ a $m = k - n$. V páté jsme použili binomickou větu, čímž jsme se dostali k závěrečné šesté rovnosti, definici exponenciální funkce. □

Speciálně máme $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$, tedy $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, což pro $x = 100$ je úvodní příklad. Tedy $\exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\exp(x)$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$ (protože pak $\exp(y) =$

$\exp(x)\exp(y-x)$ s $\exp(y-x) > 1$). Dále je jasné, že $\lim \exp(n) = +\infty$ a $\lim \exp(-n) = 0$.

Tvrzení (logaritmus). *Pro každé kladné $y \in \mathbb{R}$ má rovnice*

$$e^x = y$$

právě jedno řešení $x \in \mathbb{R}$, které označíme jako $\log y := x$ (přirozený logaritmus čísla y).

Na přednášce jsem prohlásil, že to hned plyne z faktu, že e^x je kladná funkce, rostoucí monotóně od 0 do $+\infty$, ale naštěstí jsem se po chvíli vzpamatoval. Pro důkaz je ještě zapotřebí velmi podstatný fakt, že e^x je na svém definičním oboru $\mathbb{R}$ spojitá funkce. K pojmu spojitosti funkce se ale dostaneme až později. Důkaz tedy odložíme a jen si poznamenáme, že díky předešlému tvrzení pro každé dvě kladná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí rovnost $\log(xy) = \log x + \log y$.

Tvrzení (exponenciála jako limita). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = e^x \ .$$

Důkaz. Nechť nejprve $x > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak podle binomické věty a rovnosti $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ máme

$$(1+x/n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x/n)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(k-1)/n) \ .$$

Každý z posledních $k-1$ činitelů je z intervalu $[0,1]$, což je i jejich součin (pro $k=0$ je prázdný a je roven 1), tudíž máme horní odhad $(1+x/n)^n \leq \sum_{k=0}^{n} x^k/k! \leq \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$. Využíváme ovšem toho, že $x > 0$. Co se týče dolního odhadu, pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme tak velké $l \in \mathbb{N}$, že $\sum_{k=0}^{l} x^k/k! > e^x(1-\varepsilon)$. Pak vezmeme n_0 (větší než l), že pro $n > n_0$ je $(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(l-1)/n) > 1-\varepsilon$. Pro $n > n_0$ pak

$$\begin{aligned}
(1+x/n)^n &> \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!}(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(k-1)/n) \\
&> \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!}(1-\varepsilon) > e^x(1-\varepsilon)^2 > e^x - 2e^x\varepsilon
\end{aligned}$$

(opět díky kladnosti x). Z obou odhadů plyne, že $\lim(1+x/n)^n = e^x$.

A co když $x < 0$, kdy předchozí odhady nefungují (pro $x = 0$ rovnost zjevně platí)? Zde ukážeme, že pro $x > 0$ je $\lim 1/(1-x/n)^n = e^x$, z čehož z aritmetiky limit a vlastnosti exponenciální funkce plyne, že $\lim(1-x/n)^n = e^{-x}$, jak potřebujeme. Protože $1/(1-x/n) = 1 + x/(n-x)$, stačí dokázat limitu $\lim(1+x/(n-x))^n = e^x$. Nechť $r \in \mathbb{N}$ je libovolné číslo větší než x. Pak (díky $x > 0$) máme dolní odhad $(1+x/(n-x))^n > (1+x/n)^n$ a horní odhad

$$\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n-r}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n-r}\right)^{n-r}\left(1+\frac{x}{n-r}\right)^r .$$

Dolní odhad jde pro $n \to \infty$ v limitě k e^x a horní také, protože $(1+x/(n-r))^r$ jde k 1. Takže skutečně $\lim 1/(1-x/n)^n = \lim(1+x/(n-x))^n = e^x$. $\square$

Goniometrické funkce a exponenciála. Funkce sinus a cosinus se také dají definovat nekonečnou řadou: pro každé $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Podle podílového kritéria obě řady absolutně konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$ a obě funkce jsou tak definované na celém $\mathbb{R}$. Funkci e^x jsme definovali pro $x \in \mathbb{R}$, ale stejná definice řadou funguje obecněji pro komplexní $x \in \mathbb{C}$. Pro $x \in \mathbb{R}$ pak (protože $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ a tak dále s periodou 4) máme známý Eulerův vzorec

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0,\ n \text{ sudé}}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0,\ n \text{ liché}}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x . \end{aligned}$$

Dá se dokázat, že definice sinu a cosinu řadou souhlasí s jejich geometrickou definicí: když na kružnici v rovině s poloměrem 1 a středem v počátku vyneseme od bodu $(1,0)$ proti směru hodinových ručiček oblouk délky a, dostaneme bod P (na kružnici) se souřadnicemi $P = (\cos a, \sin a)$.