AUTOMATY A GRAMATIKY

2

Pavel Surynek

Univerzita Karlova v Praze

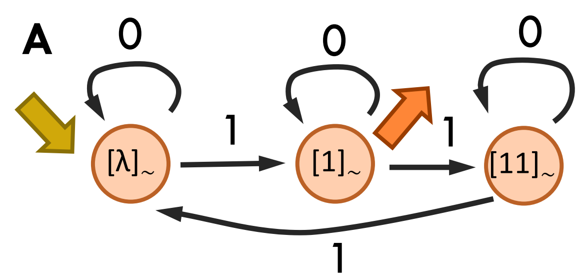
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Důkaz Myhill-Nerodovy věty

- $\Rightarrow$
  - máme KA $A = (Q, X, \delta, q_0, F)$, že $L(A) = L$
  - pro $u,v \in X^*$ definujeme $u \sim v$, jestliže $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$
    - $\sim$ je ekvivalence, tj. má smysl uvažovat o $X^*/_\sim$
    - Q je konečná $\Rightarrow X^*/_\sim$ je konečná
    - $\forall u,v,w \in X^*$ když $\delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$, pak $\delta^*(\delta^*(q_0, u), w) = \delta^*(\delta^*(q_0, v), w)$, tedy $\sim$ je pravá kongruence
  - $L(A) = \{ w \mid w \in X^* \text{ a } \delta^*(q_0, w) \in F \} = \bigcup_{f \in F}\{w \mid \delta^*(q_0, w)=f\}$
- $\Leftarrow$
  - máme pravou kongruenci $\sim$
  - položíme $Q = X^*/_\sim$
    - $q_0 = [\lambda]_\sim$
  - pro $x \in X$ a $w \in X^*$ položíme $\delta([w]_\sim, x) = [wx]_\sim$
    - pro $u,v \in X^*$ by mělo platit, že $\delta([u]_\sim, x) = \delta([v]_\sim, x)$, pokud $u \sim v$
    - $ux \sim vx$ je vlastnost pravé kongruence, tedy $[ux]_\sim = [vx]_\sim$
  - F = třídy z $X^*/_\sim$ tvořící L
    - $w \in L$, právě když $[w]_\sim \in F \Leftrightarrow \delta^*([\lambda]_\sim, w) = [w]_\sim$, což je, právě když $w \in L(A)$

Aplikace Myhill-Nerodovy věty

- Konstrukce konečného automatu
  - $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \wedge (\exists k \in \mathbb{N}_0) |w|_1 = 3k+1\}$
    - definujeme $u \sim v$, jestliže $|u|_1 \bmod 3 = |v|_1 \bmod 3$
    - jedná se o pravou kongruenci
      - třídy $[\lambda]_\sim$, $[1]_\sim$, $[11]_\sim$
      - $L = [1]_\sim$



- Důkaz neregularity jazyka
  - $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
    - předpokládejme, že L je regulární
      - máme pravou kongruenci $\sim$ konečného indexu, nechť k je index
      - L je sjednocením některých jejích tříd
    - volme slova $0, 00, \ldots, 0^k, 0^{k+1}$
      - existují $i,j \in \{1, \ldots, k+1\}$, $i \neq j$, že $0^i \sim 0^j$
      - přidáme 1^i, z vlastnosti pravé kongruence je $0^i 1^i \sim 0^j 1^i$
      - $0^i 1^i \in L$, ale $0^j 1^i \notin L$, přitom $0^i 1^i$ a $0^j 1^i$ jsou ve stejné ekvivalenční třídě

Pumping (iterační) lemma

- Pumping lemma
  - Nechť L je regulární jazyk, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že libovolné slovo $z \in L$ takové, že $|z| \geq n$, lze napsat ve tvaru $z = u.v.w$, kde $|u.v| \leq n$, $|v| \geq 1$ a $u.v^i.w \in L$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$.
  - Více logicky
    - Nechť L je regulární jazyk, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že $(\forall z \in L)[|z| \geq n \Rightarrow (\exists u,v,w \in X^*)(z = u.v.w \wedge |u.v| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge (\forall i \in \mathbb{N}_0) u.v^i.w \in L)]$.

Důkaz pumping lemmatu

- Je-li L regulární, pak existuje KA A, že L(A) = L
  - n = počet stavů automatu A
  - výpočet nad slovem z, kde $|z| \geq n$, navštíví některý stav aspoň dvakrát, nechť první takový stav je p
    - při první návštěvě p byl přečten prefix u
      - $\delta^*(q_0, u) = p$
    - při druhé návštěvě p byl přečten prefix uv
      - $\delta^*(q_0, uv) = p$
    - $|uv| \leq n$
      - byl uvažován první opakující se stav
    - $|v| \geq 1$
      - návrat do p se uskutečnil čtením aspoň jednoho písmena
    - $\delta^*(q_0, uvw) = f \in F$, pak $\delta^*(q_0, uw) = f$ a $\delta^*(q_0, uv^i w) = f$ pro i = 2, 3, ...

Použití pumping lemmatu

- Vyloučení, že daný jazyk L je regulární
  - dívejme se na pumping lemma jako na implikaci
    - regulární L $\Rightarrow$ pro L platí pravá strana lemmatu
    - pro L neplatí pravá strana lemmatu $\Rightarrow$ L není regulární
  - neplatí pravá pumping lemmatu
    - využijeme logické vyjádření, vytvoříme negaci
      - $\forall n \in \mathbb{N}\ (\exists z \in L)[|z| \geq n \wedge (\forall u,v,w \in X^*)((z = u.v.w \wedge |u.v| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N}_0) u.v^i.w \notin L)]$.
- $L=\{0^k 1^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
  - n (od nepřítele, tedy libovolné)
    - pro n vezmeme slovo $z = 0^n 1^n$
    - jistě $|0^n 1^n| \geq n$, pro libovolný rozklad splňující $z = u.v.w \wedge |u.v| \leq n \wedge |v| \geq 1$ je $v = 0^j$ pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$
    - zvolme $i = 2$ a dostáváme, že $u.v^2.w = 0^{n+j}1^n \notin L$
- Jedná se nutnou podmínku, nikoli postačující (lemma je implikace).
  - $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w = a^+b^ic^i \vee w = b^ic^j\}$ není regulární, pravá strana platí

Operace s regulárními jazyky (1)

- Nechť K a L jsou *regulární* jazyky nad abecedou X
  - $K = L(A)$, kde $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$
  - $L = L(B)$, kde $B = (Q_B, X, \delta_B, q_{B0}, F_B)$
- **Doplněk** regulárního jazyka je regulární
  - tedy $-K$ je regulární
    - $-K = L(A')$, kde $A' = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, Q_A - F_A)$
- **Sjednocení** regulárních jazyků je regulární jazyk
  - tedy $K \cup L$ je regulární jazyk
    - $K \cup L = L(C)$, kde $C = (Q_A \times Q_B, X, \delta_C, [q_{A0}, q_{B0}], F_A \times Q_B \cup Q_A \times F_B)$
      - $\delta_C([p,q],x) = [\delta_A(p,x), \delta_B(q,x)]$ pro $p \in Q_A$, $q \in Q_B$, $x \in X$
  - **konečné** sjednocení regulárních jazyků je regulární jazyk
    - tedy $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ je regulární, pro $n \in \mathbb{N}$ a L_i regulární pro $i=1,2,\ldots,n$
      - indukcí dle počtu jazyků ve sjednocení

Operace s regulárními jazyky (2)

- **Průnik** regulárních jazyků je regulární jazyk
  - tedy $K \cap L$ je regulární jazyk
    - $K \cap L = L(D)$, kde $D = (Q_A \times Q_B, X, \delta_C, [q_{A0}, q_{B0}], F_A \times F_B)$
  - **konečný** průnik regulárních jazyků je regulární jazyk
    - tedy $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ je regulární, pro $n \in \mathbb{N}$ a L_i regulární pro $i=1,2,\ldots,n$
      - indukcí dle počtu jazyků v průniku
- Další operace
  - **rozdíl** regulárních jazyků (chápáno množinově) je regulární
    - tedy $K - L = K \cap (-L)$ je regulární
  - **spočetné sjednocení** regulárních jazyků nemusí být regulární
    - pro libovolný jazyk $L = \bigcup_{w \in L} \{w\}$, přičemž množina všech slov je spočetná
  - **spočetný průnik** regulárních jazyků nemusí být regulární
    - $-\bigcap_{i \in I} (-L_i) = \bigcup_{i \in I} L_i$ pro spočetnou množinu I
- **Konečný jazyk** je regulární

Pavel Surynek, 2015

Konečné automaty a **jednoznačnost**

- Je regulárním jazykem L konečný automat, který jej přijímá, určen jednoznačně?
  - konečné automaty A a B jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(A)=L(B)$
- Automatový homomorfismus
  - mějme konečné automaty $A = (Q_A,X,\delta_A,q_{A0},F_A)$ a $B = (Q_B,X,\delta_B,q_{B0},F_B)$
    - zobrazení $h: Q_A \rightarrow Q_B$ se nazývá **automatový homomorfismus**, jestliže:
      - (i) $h(q_{A0})=q_{B0}$
      - (ii) $h(\delta_A(q,x))=\delta_B(h(q),x)$ pro $q \in Q$ a $x \in X$
      - (iii) $q \in F_A \Leftrightarrow h(q) \in F_B$ pro $q \in Q$
    - homomorfismus, který je prostý a na, nazýváme *izomorfismem*
  - Když existuje homomorfismus konečných automatů A a B, pak jsou A a B ekvivalentní.

Redukce konečných automatů (1)

- **Dosažitelné** stavy
  - stav $q \in Q$ v konečném automatu $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$ je dosažitelný, jestliže existuje $w \in X^*$, že $\delta^*(q_0,w)=q$
  - nechť Q^d je množina dosažitelných stavů v automatu A, pak pro automat $A^d= (Q^d,X,\delta^d,q_0,F^d)$, kde δ^d je zúžení δ na Q^d a $F^d = Q^d \cap F$, platí $L(A^d)=L(A)$
    - A a A^d jsou ekvivalentní
- **Hledání** dosažitelných stavů
  - do hloubky (DFS)
  - do šířky (BFS)

```
DFS (BFS)
  Qd←∅        // množina
  S ←[q0]     // sekvence
                 zásobník (fronta)
  while S≠[] do
    let S=q.S' (let S=S'.q)
    for each x∈X do
      if δ(q,x)∉S'∪Qd then
        S'← δ(q,x).S'
        Qd ←Qd ∪ {δ(q,x)}
    S ←S'
```

Ekvivalence stavů (1)

- Uvažujme KA $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$
  - stavy $p,q \in Q$ jsou **ekvivalentní**, jestliže $\forall w \in X^*\ \delta^*(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,w) \in F$
    - označení $p \sim q$
  - ekvivalence $\approx$ nad Q se nazývá **automatová kongruence**, jestliže $\forall p,q \in Q\ p \approx q \Rightarrow p \in F \Leftrightarrow q \in F \wedge \forall x \in X\ \delta(p,x) \approx \delta(q,x)$
  - platí, že stavová ekvivalence je automatovou kongruencí
- **Konstrukce** stavové ekvivalence
  - posloupnost ekvivalencí $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$
    - $\sim_i \quad \forall w \in X^*$ že $|w| \leq i$ je $\delta^*(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,w) \in F$
    - induktivní konstrukce
      - $p \sim_0 q \quad p \in F \Leftrightarrow q \in F$
      - $p \sim_{i+1} q \quad p \sim_i q \wedge \forall x \in X\ \delta(p,x) \sim_i \delta(q,x)$
    - ověření zkonstruované $\sim_i$ indukcí podle délky w
      - $p \sim_0 q \quad w = \lambda \quad \delta^*(p, \lambda) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, \lambda) \in F$
      - $p \sim_{i+1} q \quad w = xv \quad |w| = i+1$ chceme $\delta^*(p, xv) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, xv) \in F$,
        víme, že $\delta(p, x) \sim_i \delta(q, x)$ tedy $\delta^*(\delta(p, x), v) \in F \Leftrightarrow \delta^*(\delta(q, x), v) \in F$
    - $p \sim q$, jestliže $\forall i \in \mathbb{N}$ je $p \sim_i q$

Ekvivalence stavů (2)

- **Vlastnosti** posloupnosti ekvivalencí $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$
  - (i) $\sim_{i+1}$ je zjemněním $\sim_i$
    - $p\sim_{i+1}q \Rightarrow p\sim_i q$
  - (ii) $\sim_{i+1} = \sim_i$, pak $\forall j>i \sim_j = \sim_i$
  - (iii) když $|Q|=n$, pak $\exists j\leq n-1$, že $\sim_j = \sim_{j+1}$
  - (iv) $\sim_{i+1} = \sim_i$, pak $\sim_i = \sim$
- **Důkaz**:
  - (ii) $p\sim_{i+1}q$, jestliže $p\sim_i q \wedge \forall x\in X\ \delta(p,x) \sim_i \delta(q,x)$
    - $p\sim_{i+2}q$, jestliže $p\sim_{i+1}q \wedge \forall x\in X\ \delta(p,x) \sim_{i+1} \delta(q,x)$
    - $p\sim_{i+2}q$, jestliže $p\sim_i q \wedge \forall x\in X\ \delta(p,x) \sim_i \delta(q,x)$, tedy $p\sim_{i+2}q \Leftrightarrow p\sim_{i+1}q$
  - (iii) na množině velikosti n lze provést nejvýše n-1 po sobě jdoucích netriviálních zjemnění ekvivalence
    - po triviálním zjemnění, tj. když $\sim_{i+1} = \sim_i$ další netriviální zjemnění podle (ii) nemůže následovat
  - (iv) $p\sim q$, jestliže $\forall k\in\mathbb{N}$ je $p\sim_k q$
    - $\forall k\in\mathbb{N}$ je $p\sim_k q \Leftrightarrow p\sim_k q$ pro k=0,1,…,i a $p\sim_k q$ pro k=i+1, i+2, …
    - $\sim_k = \sim_i$ pro k=i+1, i+2, …, tedy $p\sim q \Leftrightarrow p\sim_k q$ pro k=0,1,…,i; z (i) dostáváme $p\sim q \Leftrightarrow p\sim_k q$

Redukce konečných automatů (2)

- KA $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$ a $\approx$ automatová kongruence
  - $A/_\approx = (Q/_\approx,X,\delta_\approx,[q_0]_\approx,F_\approx)$ je **podílový automat**, kde
    - $\delta_\approx([q]_\approx,x)=[\delta(q,x)]_\approx$ pro $q\in Q$ a $x\in X$
    - $F_\approx=\{[f]_\approx \mid f\in F\}$
  - $\delta_\approx$ je korektně definovaná
- Podílový automat $A/_\approx$ je ekvivalentní s A
  - definujeme homomorfismus $h: Q \to Q/_\approx$, že $h(q)=[q]_\approx$
    - $h(q_0)=[q_0]_\approx$
    - $h(\delta(q,x))=[\delta(q,x)]_\approx=\delta_\approx([q]_\approx,x)=\delta_\approx(h(q),x)$ pro $q\in Q$ a $x\in X$
    - $f\in F \Leftrightarrow [f]_\approx \in F_\approx \Leftrightarrow h(f)\in F_\approx$

Redukce konečných automatů (3)

- Volíme-li stavovou ekvivalenci $\sim$ jako automatovou kongruenci
  - pak v podílovém automatu $A/_\sim$ nejsou žádné dva stavy ekvivalentní.

- Konečný automat je **redukovaný**, jestliže jsou všechny jeho stavy dosažitelné a žádné dva stavy nejsou ekvivalentní.

- Konečný automat B je **reduktem** konečného automatu A, jestliže B je redukovaný a L(A)=L(B).
  - Konstrukce reduktu:
    - odstranit nedosažitelné stavy
    - najít stavovou ekvivalenci $\sim$
    - sestrojit podílový automat $A/_\sim$

Pavel Surynek, 2015