

Výroková a predikátová logika - VII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

Platnost v teorii

- **Teorie** jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. **axiomů**).
- **Model teorie** T je L -struktura \mathcal{A} taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- **Třída modelů** teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je **pravdivá v T** (**platí v T**), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model \mathcal{A} teorie T . V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je **lživá v T** , pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T .
- Formule φ je **nezávislá v T** , pokud není pravdivá v T ani lživá v T .
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme “v logice”. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je **pravdivá** ((**logicky**) **platí**, **tautologie**).
- **Důsledek** T je množina $\theta^L(T)$ všech **sentencí** jazyka L pravdivých v T , tj.

$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$



Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

Modely T jsou L -struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. **uspořádané množiny**, ve kterých platí axiomy T , např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ **platí v \mathcal{A} , ale neplatí v \mathcal{B} , neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}, e(y) = \{1\}$, je tedy **nezávislá v T** .**
- Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v \mathcal{B} a lživá v \mathcal{A} , je tedy rovněž **nezávislá v T** . Píšeme $\mathcal{B} \models \psi, \mathcal{A} \models \neg\psi$.**
- Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ je **pravdivá v T , píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její generální uzávěr.**

Vlastnosti teorií



Teorie T jazyka L je (*sémanticky*)

- *sporná*, jestliže v ní platí \perp (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže **není sporná** a **každá sentence je v ní pravdivá či lživá**,
- *extenze* teorie T' jazyka L' , jestliže $L' \subseteq L$ a $\theta^{L'}(T') \subseteq \theta^L(T)$,
o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a
konzervativní, pokud $\theta^{L'}(T') = \theta^L(T) \cap \text{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T' , jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T ,

Struktury \mathcal{A} , \mathcal{B} pro jazyk L jsou *elementárně ekvivalentní*, značeno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, platí-li v nich stejné **formule**.

Pozorování Necht' T a T' jsou teorie jazyka L . Teorie T je (*sémanticky*)

- (1) *bezesporná*, právě když má model,
- (2) *kompletní*, právě když má **až na elementární ekvivalenci jediný model**,
- (3) *extenze* T' , právě když $M(T) \subseteq M(T')$,
- (4) *ekvivalentní* s T' , právě když $M(T) = M(T')$.

Nesplnitelnost a pravdivost

Problém pravdivosti v teorii lze převést na problém existence modelu.

Tvrzení Pro každou teorii T a **sentenci** φ (stejného jazyka)

$$T, \neg\varphi \text{ nemá model} \Leftrightarrow T \models \varphi.$$

Důkaz Z definic plynou ekvivalence následujících tvrzení.

- (1) $T, \neg\varphi$ nemá model,
- (2) $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu teorie T ,
- (3) φ platí v každém modelu teorie T ,
- (4) $T \models \varphi$. \square

Poznámka **Předpoklad, že φ je sentence, je nutný pro (2) \Leftrightarrow (3).**


Např. teorie $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model, ale $P(c) \not\models P(x)$, kde P je unární relační symbol a c je konstantní symbol.



Podstruktura

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B \rangle$ jsou struktury pro jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$.

Řekneme, že \mathcal{B} je (indukovaný) *podstruktura* \mathcal{A} , značeno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, pokud

- (i) $B \subseteq A$,
- (ii) $R^B = R^A \cap B^{\text{ar}(R)}$ pro každé $R \in \mathcal{R}$, 
- (iii) $f^B = f^A \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$, tj. $f^B = f^A \upharpoonright B^{\text{ar}(f)}$, pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Množina $C \subseteq A$ je doménou podstruktury \mathcal{A} , právě když C je *uzavřená* na všechny funkce struktury \mathcal{A} , pak příslušnou podstrukturu značíme $\mathcal{A} \upharpoonright C$ a říkáme, že je to *restrikce* (*parcializace*) struktury \mathcal{A} na C .

- Množina $C \subseteq A$ je *uzavřená* na funkci $f: A^n \rightarrow A$, *pokud*
 $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \in C$ pro každé $x_0, \dots, x_{n-1} \in C$.

Např. $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ a lze psát $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$.
 Dále $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je jejich podstrukturou a $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$.

Platnost v podstruktuře

Nechť \mathcal{B} je podstruktura struktury \mathcal{A} pro (pevný) jazyk L .

Tvrzení Pro každou *otevřenou* formuli φ a ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow B$ platí

$$\mathcal{B} \models \varphi[e] \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Důkaz Je-li φ atomická, plyne tvrzení z definice platnosti při ohodnocení. Dále snadno indukcí dle struktury formule. \square



Důsledek *Otevřená* formule platí ve struktuře \mathcal{A} , právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.



- Teorie T je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek Každá podstruktura modelu *otevřené* teorie T je modelem T .

Např. každá podstruktura grafu, tj. modelu teorie grafů, je rovněž grafem, zveme ho *podgraf*. Obdobně např. podgrupa nebo Booleova podalgebra.

Generovaná podstruktura, expanze, redukt

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura a $X \subseteq A$. Označme B nejmenší podmnožinu množiny A obsahující X , která je uzavřená na všechny funkce struktury \mathcal{A} (včetně konstant). Pak strukturu $\mathcal{A} \upharpoonright B$ značíme rovněž $\mathcal{A}\langle X \rangle$ a podstruktura říkáme, že je to \mathcal{A} *generovaná* množinou X .

Např. pro $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ a $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je $\mathbb{Q}\langle\{1\}\rangle = \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\langle\{-1\}\rangle = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}\langle\{2\}\rangle$ je podstruktura na všech sudých přirozených číslech.

Nechť \mathcal{A}' je struktura pro jazyk L' a $L \subseteq L'$ je jazyk. Odebráním realizací symbolů, jež nejsou v L , získáme z \mathcal{A}' strukturu \mathcal{A} , kterou nazýváme *redukt* struktury \mathcal{A}' na jazyk L . Obráceně, \mathcal{A}' je *expanze* struktury \mathcal{A} do jazyka L' .

*Např. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ je redukt $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$. Naopak, struktura $\langle \mathbb{N}, +, c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ taková, že $c_i = i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, je expanze $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ o *jména prvků* z \mathbb{N} .*

Věta o konstantách



Věta *Nechť φ je formule jazyka L s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n a T je teorie jazyka L . Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a T' teorii T nad jazykem L' . Pak*

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Důkaz (\Rightarrow) Je-li \mathcal{A}' model teorie T' , nechť \mathcal{A} je **redukt** \mathcal{A}' na L . Jelikož

$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení e , platí i

$$\mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

(\Leftarrow) Je-li \mathcal{A} model teorie T a e ohodnocení, nechť \mathcal{A}' je **expanze** \mathcal{A} na L' o konstanty $c_i^{A'} = e(x_i)$ pro všechna i . **Jelikož** $\mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)[e']$ pro libovolné ohodnocení e' , platí i

$$\mathcal{A}' \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A} \models \varphi[e]. \quad \square$$

Booleovy algebry

Teorie *Booleových algeber* jazyka $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (\text{asociativita } \wedge)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad (\text{asociativita } \vee)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{komutativita } \wedge)$$

$$x \vee y = y \vee x \quad (\text{komutativita } \vee)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{distributivita } \wedge \text{ k } \vee)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (\text{distributivita } \vee \text{ k } \wedge)$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \quad (\text{absorbce})$$

$$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0 \quad (\text{komplementace})$$

$$0 \neq 1 \quad (\text{netrivialita})$$

Nejmenší model je $\underline{2} = \langle 2, -, \wedge_1, \vee_1, 0, 1 \rangle$. Konečné Booleovy algebry jsou (až na izomorfismus) právě $\underline{n} = \langle n, -, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$ pro $n \in \mathbb{N}^+$, kde jednotlivé operace (na binárních n -ticích) jsou operace z $\underline{2}$ “po složkách”.

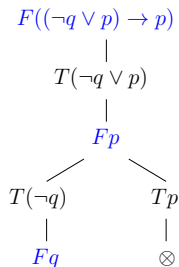
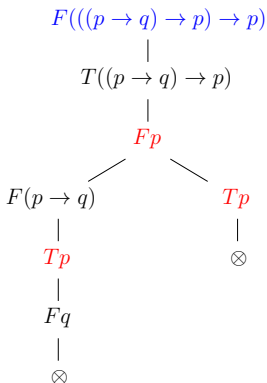
Vztah výrokové a predikátové logiky

- Výrokové formule s (*univerzálními*) spojkami \neg, \wedge, \vee (případně s \top, \perp) lze považovat za **Booleovské termy**. Hodnota výroku φ při daném ohodnocení je pak hodnotou termu v Booleově algebře $\underline{2}$.
- **Algebra výroků** nad \mathbb{P} je Booleova algebra (i pro \mathbb{P} nekonečné).
- Reprezentujeme-li atomické formule v **otevřené** formuli φ (bez rovnosti) pomocí **prvovýroků**, získáme výrokovou formuli, která je pravdivá, právě když φ je pravdivá.
- Výrokovou logiku lze zavést jako **fragment** predikátové logiky pomocí **nulárních** relačních symbolů (*syntax*) a nulárních relací (*sémantika*), přičemž $A^0 = \{\emptyset\} = 1$ a tedy $R^A \subseteq A^0$ je $R^A = \emptyset = 0$ anebo $R^A = \{\emptyset\} = 1$.

Tablo metoda ve VL - opakování

- **Tablo** je binární strom reprezentující vyhledávání *protipříkladu*.
- Vrcholy jsou označeny **položkami**, tj. formulami s **příznakem** T / F , který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu platí / neplatí.
- Je-li tento předpoklad správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.
- Větev je **sporná** (selže), pokud obsahuje $T\psi$, $F\psi$ pro nějaké ψ .
- **Důkaz** formule φ je **sporné** tablo s kořenem $F\varphi$, tj. tablo v němž každá větev je sporná (nebyl nalezen protipříklad), pak φ je pravdivá.
- Pokud protipříklad existuje, v **dokončeném** tablu bude větev, která ho **poskytuje**, tato větev může být nekonečná.
- Lze zkonstruovat **systematické tablo**, jež je vždy dokončené.
- Pokud je φ **pravdivá**, systematické tablo pro φ je **sporné**, tj. důkazem φ , v tom případě je i **konečné**.

Tablo metoda ve VL - příklady



- a) Tablo důkaz formule $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.
- b) Dokončené tablo pro $(\neg q \vee p) \rightarrow p$. Levá větev poskytuje protipříklad $v(p) = v(q) = 0$.

Tablo metoda v PL - rozdílly

- Formule v položkách budou **sentence (uzavřené formule)**, tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme **nová atomická tabla** pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat **konstantní termy** dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o **nové (pomocné) konstantní symboly** (spočetně mnoho) pro reprezentaci **“svědků”** položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V **dokončené** větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou **instance** $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Předpoklady

- 1) *Dokazovaná formule φ je sentence.* Není-li φ sentence, můžeme ji nahradit za její *generální uzávěr* φ' , neboť pro každou teorii T ,

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T \models \varphi'.$$

- 2) *Dokazujeme z teorie v uzavřeném tvaru, tj. každý axiom je sentence.* Nahrazením každého axiomu ψ za jeho generální uzávěr ψ' získáme *ekvivalentní* teorii, neboť pro každou strukturu \mathcal{A} (daného jazyka L),

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \psi'.$$

- 3) *Jazyk L je spočetný.* Pak každá teorie nad L je spočetná. Označme L_C rozšíření jazyka L o nové konstantní symboly c_0, c_1, \dots (spočetně mnoho). Platí, že *konstantních termů jazyka L_C je spočetně.* Nechť t_i označuje i -tý konstantní term (v pevně zvoleném *očíslování*).

- 4) *Zatím budeme předpokládat, že jazyk je bez rovnosti.*

Tablo v PL - příklady

$$F((\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x))$$

$$\begin{array}{c}
 | \\
 T(\exists x)\neg P(x) \\
 | \\
 F(\neg(\forall x)P(x)) \\
 | \\
 T(\forall x)P(x) \\
 | \\
 T(\neg P(c)) \quad \text{c nové} \\
 | \\
 \textcolor{red}{FP(c)} \\
 | \\
 T(\forall x)P(x) \textcolor{yellow}{(x)} \\
 | \\
 \textcolor{red}{TP(c)} \textcolor{yellow}{(c)} \\
 | \\
 \otimes
 \end{array}$$

$$F(\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x))$$

$$\begin{array}{c}
 | \\
 T(\neg(\forall x)P(x)) \\
 | \\
 F(\exists x)\neg P(x) \\
 | \\
 F(\forall x)P(x) \\
 | \\
 \textcolor{red}{FP(d)} \quad d \text{ nové} \\
 | \\
 F(\exists x)\neg P(x) \\
 | \\
 F(\neg P(d)) \\
 | \\
 \textcolor{red}{TP(d)} \\
 | \\
 \otimes
 \end{array}$$

Atomická tabla - původní

Atomická tabla jsou všechny následující (položkami značkové) stromy, kde α je libovolná atomická sentence a φ, ψ jsou libovolné sentence, vše v L_C .

| | | | | | |
|--|--|--|---|---|---|
| $T\alpha$ | $F\alpha$ | $\begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\ \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} F(\varphi \wedge \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad F\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} T(\varphi \vee \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad T\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\ \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} T(\neg\varphi) \\ \\ F\varphi \end{array}$ | $\begin{array}{c} F(\neg\varphi) \\ \\ T\varphi \end{array}$ | $\begin{array}{c} T(\varphi \rightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad T\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} F(\varphi \rightarrow \psi) \\ \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} T(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\varphi \\ \quad \quad \\ T\psi \quad F\psi \end{array}$ | $\begin{array}{c} F(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\varphi \\ \quad \quad \\ F\psi \quad T\psi \end{array}$ |

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkové) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x , t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je nový konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| # $T(\forall x)\varphi(x)$ $T\varphi(x/t)$ pro libovolný konst. term t | * $F(\forall x)\varphi(x)$ $F\varphi(x/c)$ pro novou konstantu c | * $T(\exists x)\varphi(x)$ $T\varphi(x/c)$ pro novou konstantu c | # $F(\exists x)\varphi(x)$ $F\varphi(x/t)$ pro libovolný konst. term t |
|---|---|---|---|

Poznámka Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.

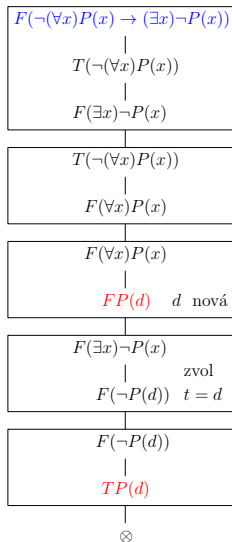
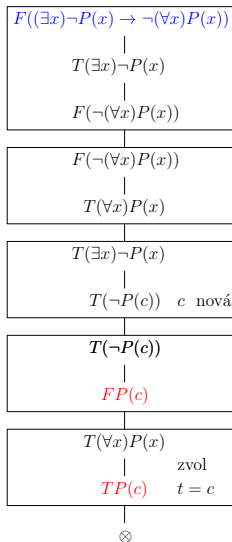
Tablo

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkový strom s předpisem

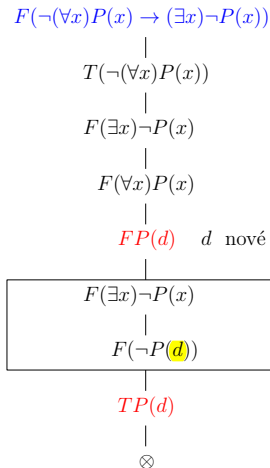
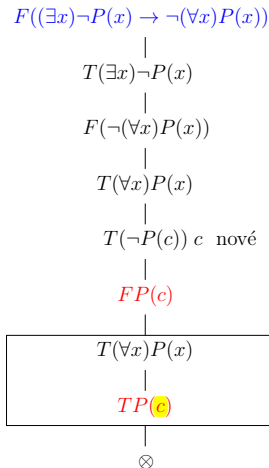
- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T , přičemž v případě (*) lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T , pak připojením atomického tabla pro P na **konec větve** V vznikne konečné tablo z T , přičemž v případě (*) lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud **nevyskytuje na V** ,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením T_φ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T .
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (iii).

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně **$\tau = \bigcup \tau_n$** .

Konstrukce tabla



Konvence



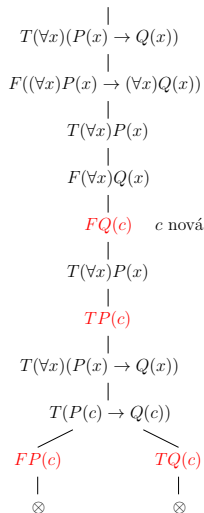
Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

- Větev V tabla τ je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ , jinak je *bezesporná*.
- Tablo τ je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence φ z teorie T je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je (*tablo*) *dokazatelná* z teorie T , píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T .
- *Zamítnutí* sentence φ *tablem* z teorie T je sporné tablo z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je (*tablo*) *zamítnutelná* z teorie T , má-li zamítnutí tablem z T , tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady

$$F((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)))$$



$$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$$

