Přednáška 12, 22. května 2015

Topologické prostory. Podle sylabu se zmíníme o další abstraktní struktuře. Dvojice $T = (X, \mathcal{T})$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ systém jejích podmnožin, je *topologický prostor*, má-li $\mathcal{T}$ tyto vlastnosti: (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, (ii) pro každý podsystém $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ je i $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ a (iii) pro každý konečný podsystém $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ je i $\bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Množinám v systému $\mathcal{T}$ se říká *otevřené množiny* topologického prostoru T (jejich doplňky do X pak jsou *uzavřené množiny* prostoru T). Příkladem topologického prostoru jsou otevřené množiny každého metrického prostoru. Ovšem je spousta topologických prostorů, které nejsou metrizovatelné (tj. nepocházejí z metrického prostoru). Cvičení: vymyslete příklady takových topologických prostorů. Návod: metrizovatelná topologie má vždy tu vlastnost, že pro každé dva různé body a, b máme takové dvě otevřené množiny A, B, že $a \in A, b \in B$ a $A \cap B = \emptyset$.

Spojitá zobrazení. Jsou-li (M, d) a (N, e) dva metrické prostory, je zobrazení

$$f:\ M \to N$$

spojité, pokud

$$\forall a \in M, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ b \in M, d(a,b) < \delta \Rightarrow e(f(a), f(b)) < \varepsilon\ .$$

Ekvivalentně můžeme spojitost definovat v Heineho stylu: f je spojité, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset M$ s limitou $a \in M$ je i $(f(a_n)) \subset N$ konvergentní a má limitu $f(a) \in N$. Jiná ekvivalentní definice spojitosti je následující.

Tvrzení (topologická definice spojitosti). *Zobrazení $f:\ M \to N$ mezi metrickými prostory je spojité, právě když pro každou otevřenou množinu $B \subset N$ je i její vzor $f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ otevřená množina v M.*

Kompaktní podmnožinu A v metrickém prostoru jsme si definovali požadavkem, aby každá posloupnost bodů v A měla podposloupnost konvergentní v A (tj. konvergentní podposloupnost s limitou ležící v A). Jiná ekvivalentní definice kompaktnosti je následující.

Tvrzení (topologická definice kompaktnosti). *Množina $A \subset M$ v metrickém prostoru je kompaktní, právě když v každém systému $\mathcal{T}$ otevřených* *množin v M splňujícím $\bigcup \mathcal{T} \supset A$ existuje konečný podsystém $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, který stále pokrývá A: $\bigcup \mathcal{U} \supset A$.*

Předchozí definice kompaktnosti se vyslovuje takto: každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Tvrzení (spojité zobrazení zachovává kompaktnost). *Je-li zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory spojité a M je kompaktní, je obraz $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ kompaktní podmnožina N.*

Důkaz. Je jednoduchý. Je-li $(b_n) \subset f(M)$ libovolná posloupnost, máme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $f(a_n) = b_n$. Protože M je kompaktní, (a_n) má konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou $a \in M$. Protože f je spojité zobrazení,

$$\lim_{n\to\infty} b_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_{k_n}\big) = f(a) \ .$$

Takže (b_{k_n}) je konvergentní podposloupnost posloupnosti (b_n) s limitou $f(a) \in f(M)$. Tedy $f(M)$ je kompaktní. □

Tvrzení (kompaktnost $\Rightarrow$ uzavřenost a omezenost). *Každá kompaktní množina v metrickém prostoru je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Nechť $A \subset M$ je podmnožina v metrickém prostoru (M, d). Když A není uzavřená, existuje konvergentní posloupnost $(a_n) \subset A$, jejíž limita a leží mimo A. Každá podposloupnost (a_n) je zřejmě též konvergentní a má tutéž limitu a. To ale znamená, že žádná podposloupnost (a_n) není konvergentní v rámci A (limita je určena jednoznačně) a A není kompaktní. Když A není omezená, není obsažena v žádné kouli $B(a, r)$ a snadno sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset A$ s vlastností, že $d(a_m, a_n) \geq 1$ pro každé dva indexy $1 \leq m < n$. Tato vlastnost popírá konvergenci posloupnosti (proč?) a má ji i každá podposloupnost (a_n), takže (a_n) nemá žádnou konvergentní podposloupnost. A opět není kompaktní.

Posloupnost $(a_n) \subset A$ s uvedenou vlastností setrojíme indukcí. První bod $a_1 \in A$ vezmeme libovolně. Nechť už máme body $a_1, a_2, \ldots, a_r$ z A, z nichž každé dva mají vzdálenost alespoň 1. Pak vezmeme libovolnou kouli $B(a, r)$, která obsahuje všechny tyto body (každá konečná množina je omezená) a uvážíme kouli $B(a, r + 1)$. Protože A není omezená, existuje bod $a_{r+1} \in A$, který není v $B(a, r+1)$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je $d(a_{r+1}, x) \geq 1$ pro každý bod $x \in B(a, r)$ (proč?). Tedy a_{r+1} má od každého bodu $a_1, a_2, \ldots, a_r$ vzdálenost alespoň 1 a $a_1, a_2, \ldots, a_r$ můžeme prodloužit na $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$.

Takto definovaná posloupnost a_r, $r = 1, 2, \ldots$, má tedy požadovanou vlastnost. $\square$

Asi nejjednodušší příklad ukazující, ze opačná implikace obecně neplatí je tento. Nechť (M, d) je triviální metrický prostor, kde $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, x) = 0$ (ověřte, že jde o metrický prostor), a množina M je nekonečná. Pak každá posloupnost $(a_n) \subset M$, kde a_n jsou vzájemně různé body (pro existenci takové posloupnosti potřebujeme nekonečnost M), splňuje, že $d(a_m, a_n) \geq 1$ pro každé dva indexy $1 \leq m < n$. Jak víme, taková posloupnost nemá žádnou konvergentní podposloupnost a proto M není kompaktní množina. Ovšem M je uzavřená množina (je to celý prostor) a je i omezená, protože patrně $M \subset B(a, 2)$ pro každý bod $a \in M$.

Jak už jsme se na dřívější přednášce zmínili, opačná implikace platí pro eukleidovské prostory.

Věta (uzavřenost a omezenost $\Rightarrow$ kompaktnost v $\mathbb{R}^k$). *Každá uzavřená a omezená množina v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^k$ je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbb{R}^k$ je uzavřená a omezená podmnožina eukleidovského prostoru. Díky omezenosti A pro dostatečně velké $a > 0$ máme $A \subset [-a, a]^k$ (A je obsažena v dostatečně velké k-rozměrné krychli se středem v počátku). Souřadnice bodů $x \in \mathbb{R}^k$ označíme jako $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$. Nechť $(a_n) \subset A$ je libovolná posloupnost. Podle věty ze ZS má (a_n) podposloupnost (b_n), která konverguje v prvních souřadnicích (tyto souřadnice leží v kompaktním intervalu $[-a, a]$). Z posloupnosti (b_n) vybereme podposloupnost (c_n), která konverguje v druhých souřadnicích, a tak dál. Po k takových výběrech dostaneme posloupnost řekněme (d_n), jež je podposloupností posloupnosti (a_n) a konverguje v každé z k souřadnic:

$$\lim_{n \to \infty} d_n(j) = e(j) \in \mathbb{R}, \; j = 1, 2, \ldots, k \; .$$

Lehce se vidí, že pak i $\lim_{n \to \infty} d_n = e = (e(1), e(2), \ldots, e(k)) \in \mathbb{R}^k$. (To plyne třeba z nerovnosti $\|e - d_n\| \leq \sum_{j=1}^{k} |e(j) - d_n(j)|$.) Protože A je uzavřená množina, $e \in A$ a (d_n) je podposloupnost (b_n), která konverguje v A. Takže A je kompaktní. $\square$

Věta (spojitá funkce nabývá na kompaktu extrém). *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce z metrického prostoru (M, d) do eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^1$ a M je kompaktní. Pak f nabývá na M minimum i maximum.*

Důkaz. Podle jednoho z předchozích tvrzení je obraz $f(M)$ kompaktní podmnožina v $\mathbb{R}$. Tedy (podle dalšího z předchozích tvrzení) je $f(M) \subset \mathbb{R}$ uzavřená a omezená množina. Protože $f(M)$ je neprázdná a shora omezená, existuje supremum $h = \sup(f(M)) \in \mathbb{R}$. Podle aproximační vlastnosti suprema je h limitou bodů z množiny $f(M)$. Díky uzavřenosti $f(M)$ je $h \in f(M)$ a vlastně $h = \max(f(M))$. Takže f nabývá na M maximum. Pro mimimum argumentujeme stejně pomocí infima. □

Přednášku zakončíme aplikací tohoto výsledku v důkazu tzv. Základní věty algebry, že každý nekonstantní komplexní polynom má kořen. Důkaz sám jsem z časových důvodů na přednášce neuvedl. Pro jeho zajímavost a kvůli důležitost celého výsledku ho uvádím zde. Komplexní rovina $\mathbb{C}$ se v něm bere jako eukleidovský metrický prostor $\mathbb{R}^2$ s obvyklou vzdáleností.

Věta (Základní věta algebry). *Pro každý komplexní polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ stupně alespoň 1 (takže $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ a $n \geq 1$) existuje komplexní číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že $p(\alpha) = 0$.*

Důkaz. Nechť $a \in \mathbb{C}$ s $a \neq 0$ a $k \in \mathbb{N}$. Připomeneme si chování komplexní funkce $z \mapsto az^k$.

- Když z probíhá v komplexní rovině $\mathbb{C}$ kružnici $K = \{z \mid |z| = r > 0\}$, pak az^k probíhá kružnici $L = \{z \mid |z| = |a|r^k > 0\}$, přičemž jednomu proběhnutí K odpovídá k proběhnutí L; speciálně má každý bod v L v této funkci přesně k vzorů v K.

To plyne z goniometrického tvaru nenulového komplexního čísla: $K \ni z = r\exp(\varphi i) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde $r = |z| > 0$ je modul čísla z a úhel $\varphi \in [0, 2\pi)$ je jeho argument. Odtud máme následující fakt, klíčový pro důkaz:

- Když $\alpha \in \mathbb{C}$ a $|p(\alpha)| > 0$, pak existuje číslo $\beta \in \mathbb{C}$, že $|p(\beta)| < |p(\alpha)|$.

Dokažme to. Nechť $|p(\alpha)| > 0$. Můžeme předpokládat, že $\alpha = 0$. (Jinak substitucí $w = z - \alpha$ přejdeme k polynomu $q(w) = p(z) = p(w + \alpha)$, který má stejný stupeň jako $p(z)$ a splňuje $q(0) = p(\alpha)$.) Napíšeme $p(z)$ od nejnižších mocnin a rozdělíme ho na tři sčítance:

$$p(z) = a_0 + p_1(z) + p_2(z) := a_0 + az^k + \textstyle\sum_{j=k+1}^{n} a_j z^j \ ,$$

kde obě čísla $a_0, a = a_k \in \mathbb{C}$ jsou nenulová, $k \in \mathbb{N}$ a $a_j \in \mathbb{C}$ jsou zbylé koeficienty $p(z)$. Lehce se vidí, že

$$|z| = r \to 0^+ \Rightarrow \frac{|p_1(z)|}{|a_0|} \to 0 \ \text{ i } \ \frac{|p_2(z)|}{|p_1(z)|} \to 0 \, .$$

Pro dostatečně malé $r > 0$ tedy každé číslo $z \in \mathbb{C}$ se $|z| = r$ splňuje, že $0 < |p_1(z)| < |a_0|$ a $|p_2(z)| < \frac{1}{2}|p_1(z)|$. Podle hořejšího připomenutí lze navíc mezi takovými z zvolit $z = \beta$ tak, že argumenty čísel $p_1(\beta) = a\beta^k$ a a_0 se liší přesně o π (tj. $p_1(\beta)$ jako vektor směřuje na opačnou stranu než vektor a_0). Pak ale $|a_0 + p_1(\beta)| = |a_0| - |p_1(\beta)|$. Takže

$$\begin{aligned} |p(\beta)| &= |a_0 + p_1(\beta) + p_2(\beta)| \\ &\le |a_0 + p_1(\beta)| + |p_2(\beta)| \\ &= |a_0| - |p_1(\beta)| + |p_2(\beta)| \\ &< |a_0| - |p_1(\beta)|/2 < |a_0| \\ &= |p(0)| = |p(\alpha)| \end{aligned}$$

a $|p(\beta)| < |p(\alpha)|$.

Teď už jen stačí dokázat, že funkce

$$f: \ \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \ f(z) = |p(z)|$$

nabývá v nějakém bodě $\alpha \in \mathbb{C}$ na $\mathbb{C}$ minimum. Pak $|p(\alpha)| > 0$ nemůže nastat kvůli právě dokázanému faktu, tedy $|p(\alpha)| = 0$, $p(\alpha) = 0$ a jsme hotovi. Funkce $f(z)$ je na $\mathbb{C}$ spojitá, ale $\mathbb{C}$ není kompaktní množina a musíme jít oklikou. Každý uzavřený kruh $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ kompaktní je. Napíšeme $p(z)$ od nejvyšších mocnin a rozdělíme ho na dva sčítance:

$$p(z) = z^n(a_n + q(z)) := z^n \left(a_n + \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j-n}\right) ,$$

kde, jak víme, číslo $a_n \in \mathbb{C}$ je nenulové. Lehce se vidí, že

$$|z| = R \to +\infty \Rightarrow |q(z)| \to 0 \, .$$

Existuje tedy $R > 0$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ se $|z| > R$ je

$$f(z) = |p(z)| = |z|^n |a_0 + q(z)| > R^n(|a_0| - |q(z)|) > R^n(|a_0|/2) > |p(0)| \, .$$

Na kompaktní množině K_R nabývá $f(z)$ v nějakém bodě $\alpha \in K_R$ minimum s hodnotou $f(\alpha) = |p(\alpha)| \le |p(0)|$, neboť $0 \in K_R$. Protože $f(z) = |p(z)| > |p(0)| \ge |p(\alpha)| = f(\alpha)$ pro každý bod z mimo K_R, nabývá $f(z)$ v α minimum na celém $\mathbb{C}$. Tím je důkaz dokončen. $\square$