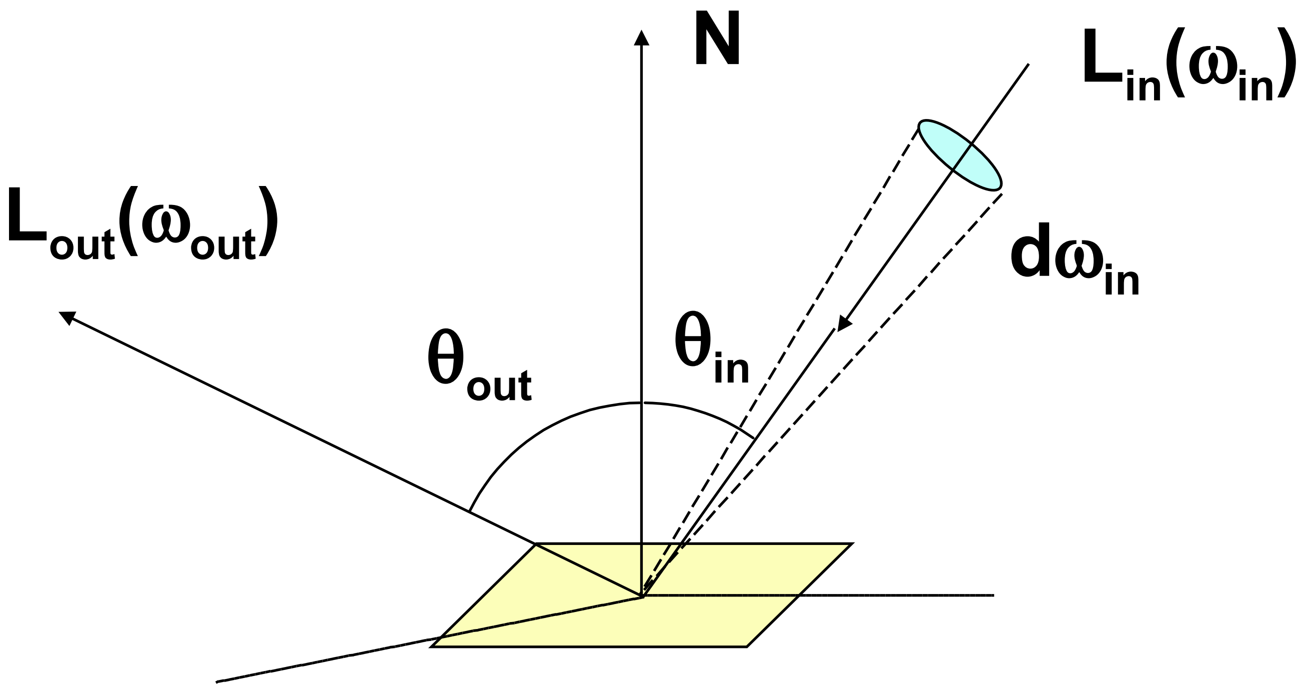
# Monte–Carlo zobrazování

© 1996-2016 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz
http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/

# BRDF (funkce odrazivosti)

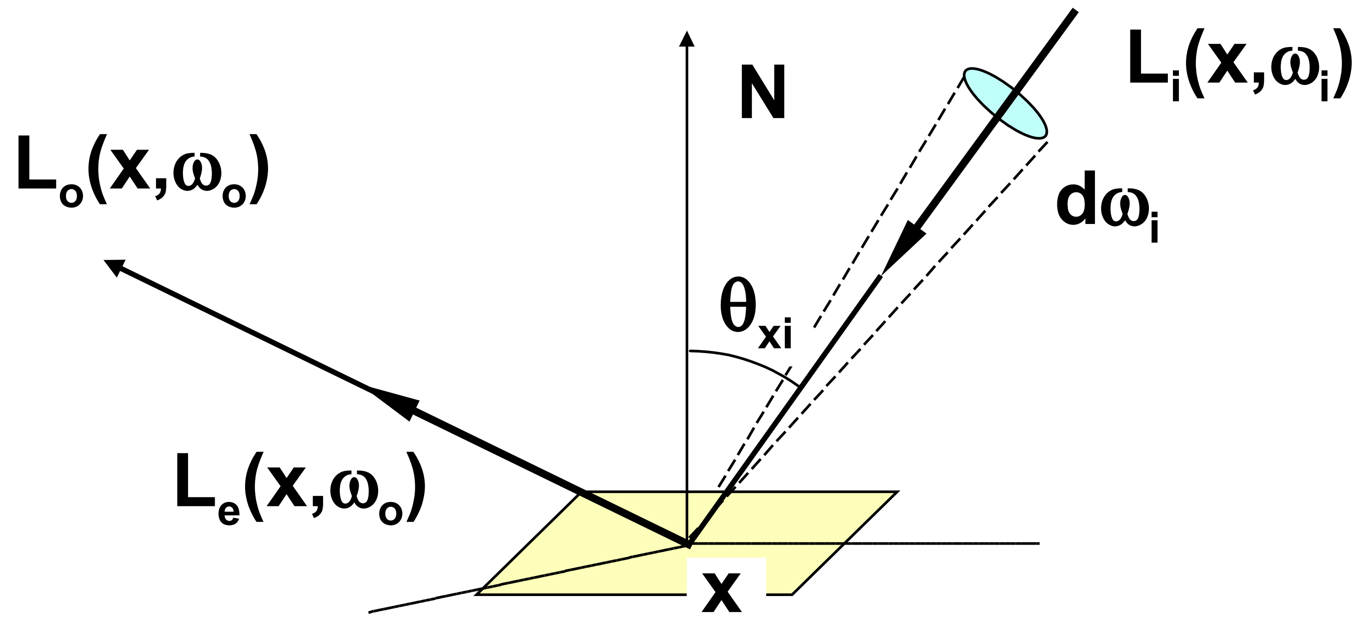
"Bidirectional Reflectance Distribution Function"




$$f(\omega_{in} \rightarrow \omega_{out}) = \frac{L_{out}(\omega_{out})}{L_{in}(\omega_{in}) \cdot \cos\theta_{in} \cdot d\omega_{in}} \quad [\,sr^{-1}\,]$$

# Lokální rovnice (OVTIGRE)

"Outgoing, Vacuum, Time-Invariant, Gray Radiance Equation"




vlastní vyzařování

$$L_o(x,\omega_o) = L_e(x,\omega_o) + \int f(x,\omega_i \to \omega_o) \cdot L_i(x,\omega_i) \cdot \cos\theta_{xi}\, d\omega_i$$

# Operátory šíření světla

Zobrazovací rovnice pro **radianci** (operátory):

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{T}\mathbf{L}}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{T}\mathbf{e} + \mathbf{T}^2\mathbf{e} + \mathbf{T}^3\mathbf{e} + \ldots$$

Integrální **operátor T** lze rozložit na difusní (**D**) a lesklou (**S**) složku odrazu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} + \mathbf{S}$$

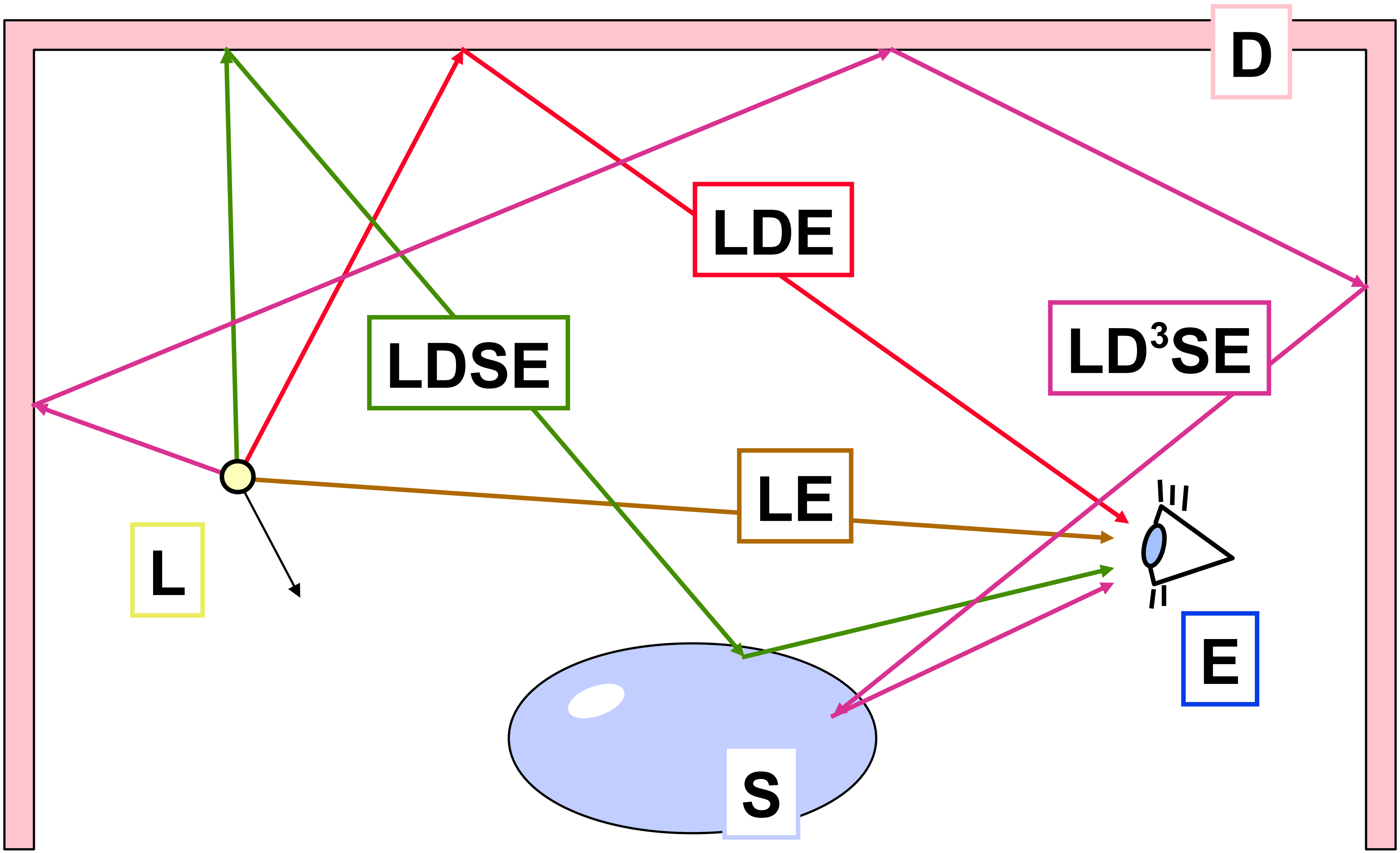
$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + (\mathbf{D} + \mathbf{S})\mathbf{e} + (\mathbf{D} + \mathbf{S})^2\mathbf{e} + \ldots$$

$$\underline{\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{e} + \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{e} + \mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{e} + \ldots}$$

# Abeceda regulárních výrazů

- **zdroj světla L** ("light")
- **difusní odraz D** ("diffuse")
  - odraz podle Lambertova zákona (všesměrový)
- **lesklý odraz S** ("specular")
  - směrový odraz, odlesk - směrová část BRDF
  - idealizovaný **zrcadlový odraz**: $\mathbf{S_M}$
- **oko pozorovatele E** ("eye")
  - příspěvek výslednému obrazu

# Cesty šíření světla



# Klasické zobrazovací metody

- **stínování** s odlesky a **vrženými stíny** (např. Phongův model): **L(D|S)E**
  - často se ignoruje výpočet vržených stínů
- **rekurzivní sledování paprsku** (Whitted): $\mathbf{L[D|S]S_M{}^*E}$
  - první lesklý odraz se počítá přesně, ostatní se nahrazují ideálním zrcadlovým odrazem

# Klasické zobrazovací metody

- **distribuované sledování paprsku** (Cook): **L[D]S*E**
  – všechny lesklé odrazy se odhadují korektně

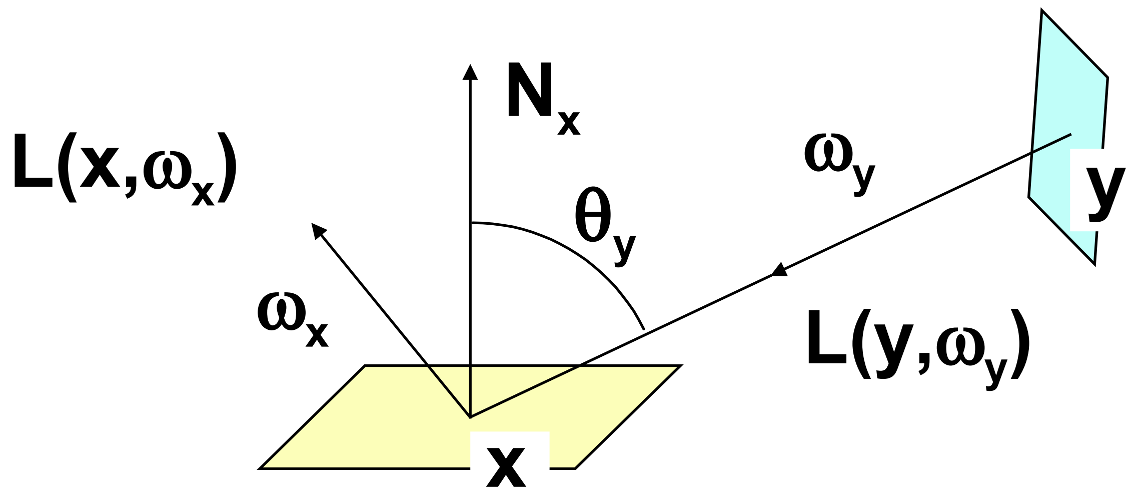
- obyčejná **radiační metoda**: **LD*E**
  – pouze měkké odrazy světla

- **všechny** možné cesty světla: **L(D|S)*E**
  – přesné řešení zobrazovacích rovnic (Kajiya)

# Monte Carlo zobrazování

- integrál zobrazovací rovnice je často **mnoho-rozměrný**
  - anti-aliasing, hloubka ostrosti, rozmazání pohybem
  - Monte Carlo metody nejsou citlivé na více dimenzí
- integrandy mají mnoho **nespojitostí** různých druhů
- **nepožaduje se** velká **přesnost**
  - lidské vidění má omezenou absolutní citlivost
  - běžně postačí přesnost 0.1 - 1 %

# Zobrazovací rovnice pro radianci




$$L(x,\omega_x) =$$

$$= L_e(x,\omega_x) + \int_{\Omega_x^{-1}} f(x,\omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot L(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y$$

$$\Phi_o(S) = \int_A \int_{\Omega_x} L(x,\omega_x) \cdot W_e(x,\omega_x,S) \cdot \cos\theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

# Path tracing

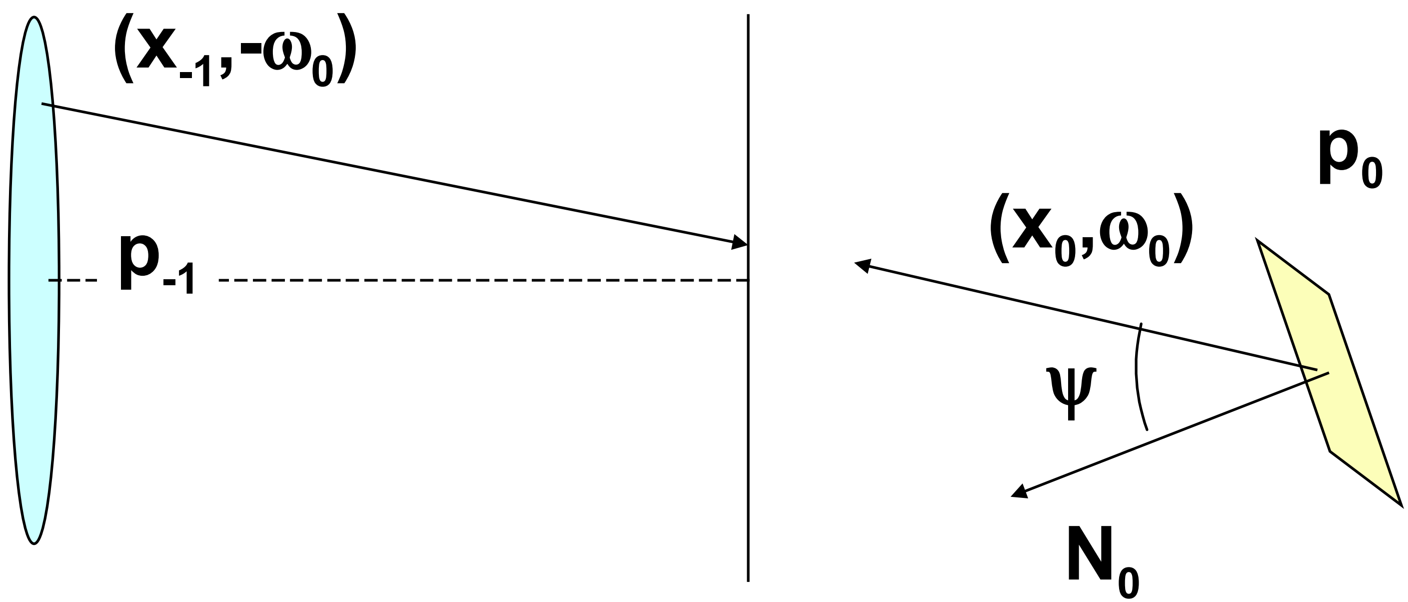
**Výkon** procházející pixelem (anti-alias,hloubka ostrosti):

$$\langle \Phi(S) \rangle_{path} = \frac{W_e(x_0, \omega_0, S) \cdot \cos\psi}{p_0(x_0, \omega_0)} \cdot \langle L(x_0, \omega_0) \rangle_{path}$$

$(\mathbf{x_0}, \omega_0)$ se týká bodu na povrchu tělesa, do kterého dopadne sledovaný paprsek; $\mathbf{p_0}$ je příslušná hustota pravděpodobnosti. Vzorkování na čočce objektivu $\mathbf{p_{-1}}$:

$$p_0(x_0, \omega_0) = \frac{p_{-1}(x_{-1}, \omega_0) \cdot \cos\psi}{\left\| x_{-1} - x_0 \right\|^2}$$

# Primární paprsek




**hloubka ostrosti,
anti-aliasing**

světlo vycházející
z bodu $\mathbf{x}_0$ směrem $\boldsymbol{\omega}_0$

# Path tracing

Odhad $\mathbf{L(x_0,\omega_0)}$ metodou **Monte Carlo** omezený pomocí ruské rulety:

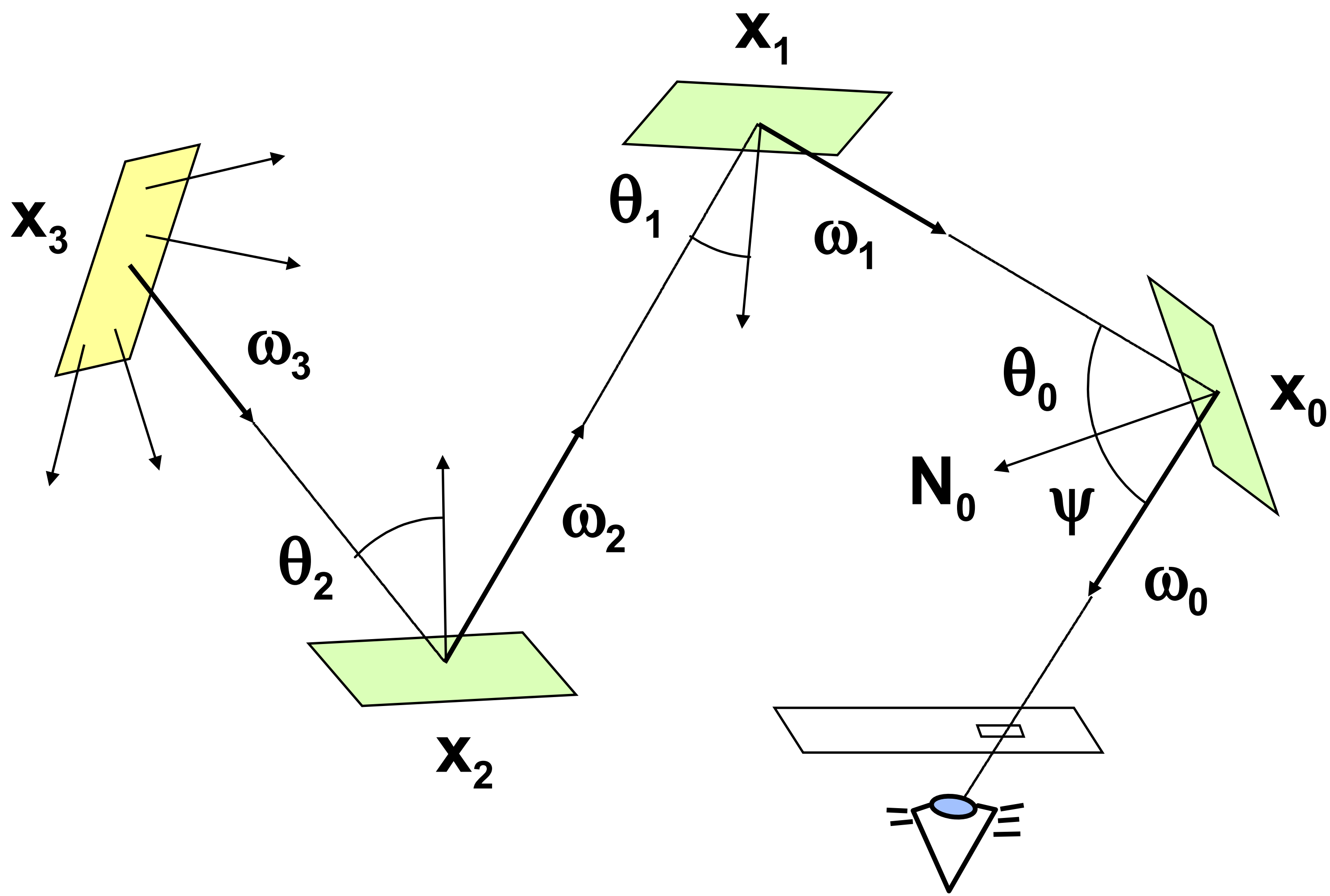
$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{path} = \frac{W_e(x_0, \omega_0, S) \cdot \cos\psi}{p_0(x_0, \omega_0)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k} \left[ \prod_{j=1}^{i} \frac{f(x_{j-1}, \omega_j \to \omega_{j-1}) \cdot \cos\theta_{j-1}}{P_j \cdot p_j(\omega_j)} \right] \cdot L_e(x_i, \omega_i)$$

pravděpodobnost pokračování krokem **j**

hustota pravděpodobnosti pro vstupní směr $\boldsymbol{\omega_j}$

# Schema šíření světla



# Vzorkování podle důležitosti

Pro **výkon procházející pixelem** (druhý integrál):

$$\mathbf{p_0(x_0,\omega_0)} = \frac{\mathbf{W_e(x_0,\omega_0,S)\cdot\cos\psi}}{\mathbf{W(S)}}\quad,\ \text{kde}$$

$$\mathbf{W(S)} = \int_A\int_{\Omega_x} \mathbf{W_e(x,\omega_x,S)\cdot\cos\theta_x\, d\omega_x\, dA_x}$$

V **zobrazovací rovnici** (první integrál) známe člen $\mathbf{f(x,\omega_y\to\omega_x)\cos\theta_y}$ ; protože je podle fyzikálních podmínek menší než **1**, můžeme ho použít ke konstrukci subkritické hustoty pravděpodobnosti.

# Vzorkování podle BRDF

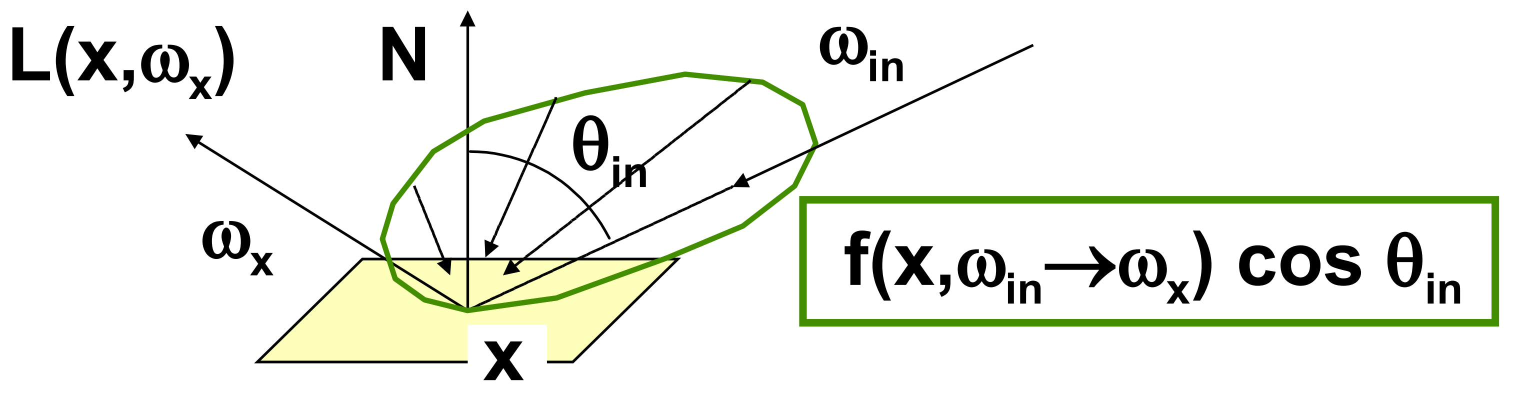
**Pravděpodobnost pokračování** krokem **j**:

$$\underline{P_j} = \int_{\Omega^{-1}} f\left(x_{j-1}, \omega_{in} \to \omega_{j-1}\right) \cdot \cos\theta_{in} \, d\omega_{in}$$

Hustota pravděpodobnosti pro **směr pokračování** $\omega_j$:

$$\underline{p_j\left(\omega_j\right)} = \frac{f\left(x_{j-1}, \omega_j \to \omega_{j-1}\right) \cdot \cos\theta_{j-1}}{P_j}$$

# Vzorkování podle BRDF




Celkový primární odhad s využitím všech uvedených pravděpodobností:

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{path,imp} = W(S) \cdot \sum_{i=0}^{k} L_e(x_i, \omega_i)$$

# Odhad příští události (NEE)

Rozdělení **nepřímého osvětlení** na dvě složky:

$$L(x,\omega_x) = L_e(x,\omega_x) + L_r(x,\omega_x)$$

$$\underline{L_r(x,\omega_x)} = \int_{\Omega_x^{-1}} f(x,\omega_y \to \omega_x) \cdot L(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \int_A f(x,\omega_y \to \omega_x) \cdot L_e(y,\omega_y) \cdot G(y,x) \, dA_y + \\ &+ \int_{\Omega_x^{-1}} f(x,\omega_y \to \omega_x) \cdot L_r(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y \end{aligned}}$$

# Příspěvek přímého osvětlení

Geometrický člen **G(y,x)**:

$$\underline{G(y,x)} = v(y,x) \cdot \frac{\cos\theta_{y,out} \cdot \cos\theta_{x,in}}{\|x - y\|^2}$$

faktor viditelnosti

Příspěvek **přímého osvětlení** je vyjádřen prvním integrálem (integruje se přes všechny plošné zdroje ve scéně).
**Hustota pravděpodobnosti** pro odhad této složky se konstruuje pomocí radiosity zdroje..

# Vzorkování světelných zdrojů

hustota pravděpodobnosti pro **příspěvek přímého osvětlení**:

$$p(y) = \frac{L(y)}{L}$$

radiosita emitovaná z bodu **y**

$$L(y) = \int_{\Omega_y} L_e(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y$$

$$L = \int_A \int_{\Omega_y} L_e(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y \, dA_y$$

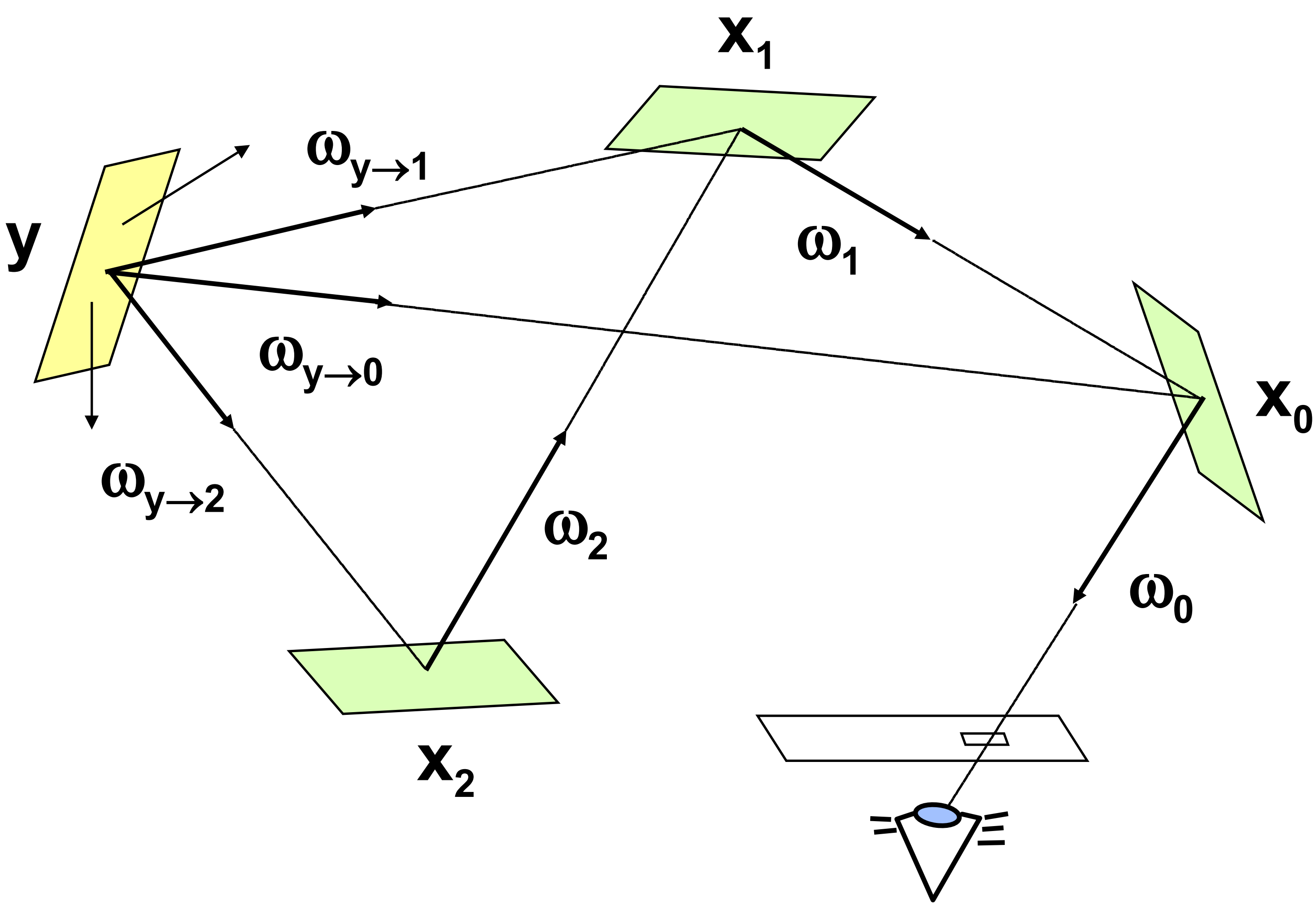
celkový emitovaný výkon

# Odhad příští události

Vzorkování podle **BRDF** (subkritická hustota pravděpodobnosti) s **ruskou ruletou** a **odhadem příští události**:

$$\boxed{\begin{aligned}\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{path,imp,nee} &= W(S) \cdot \Big[ L_e(x_0, \omega_0) + \\ &+ \frac{L}{L(y)} \sum_{i=0}^{k} L_e(y, \omega_{y\to i}) \cdot f(x_i, \omega_{y\to i}, \omega_i) \cdot G(y, x_i) \Big]\end{aligned}}$$

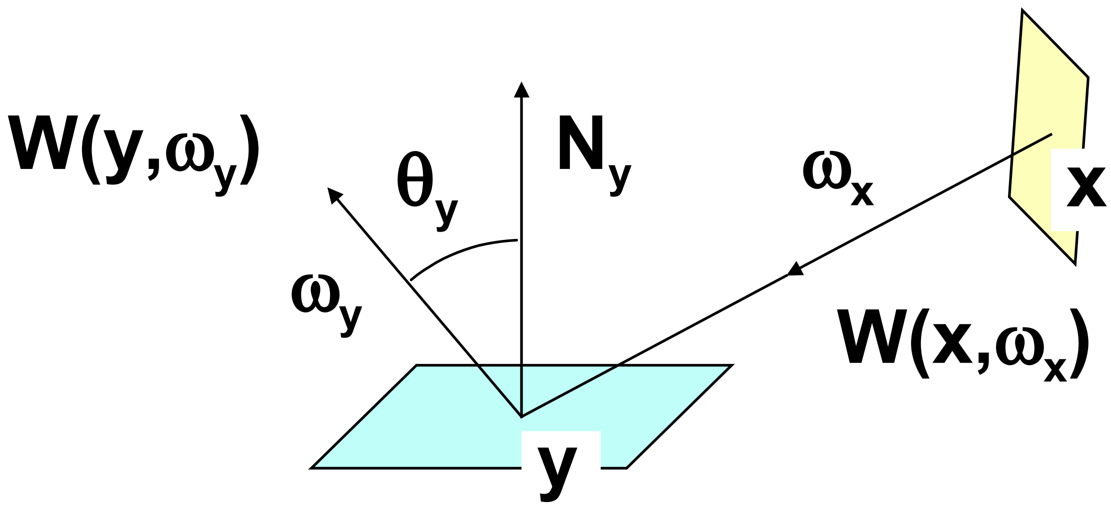
# Schema šíření světla (NEE)



# Odhad příští události

- je nejvýhodnější pro scény s **malými** ale **dobře viditelnými** plochami světelných zdrojů
  - vzorkování světelných zdrojů je dominantní
- vzorkování zdrojů nebere v úvahu jejich **viditelnost**
  - dokonalejší metody počítají i s **BRDF** nebo geometrickými faktory $\mathbf{G(y,x_i)}$
- **vzorkování světelných zdrojů** se může provádět v každém kroku $\mathbf{x_i}$

# Zobrazovací rovnice pro potenciál




$$W(x,\omega_x) =$$

$$= W_e(x,\omega_x) + \int_{\Omega_y} f(y,\omega_x \to \omega_y) \cdot W(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y$$

$$\Phi_o(S) = \int_A \int_{\Omega_x} L_e(x,\omega_x) \cdot W(x,\omega_x,S) \cdot \cos\theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

# Light tracing

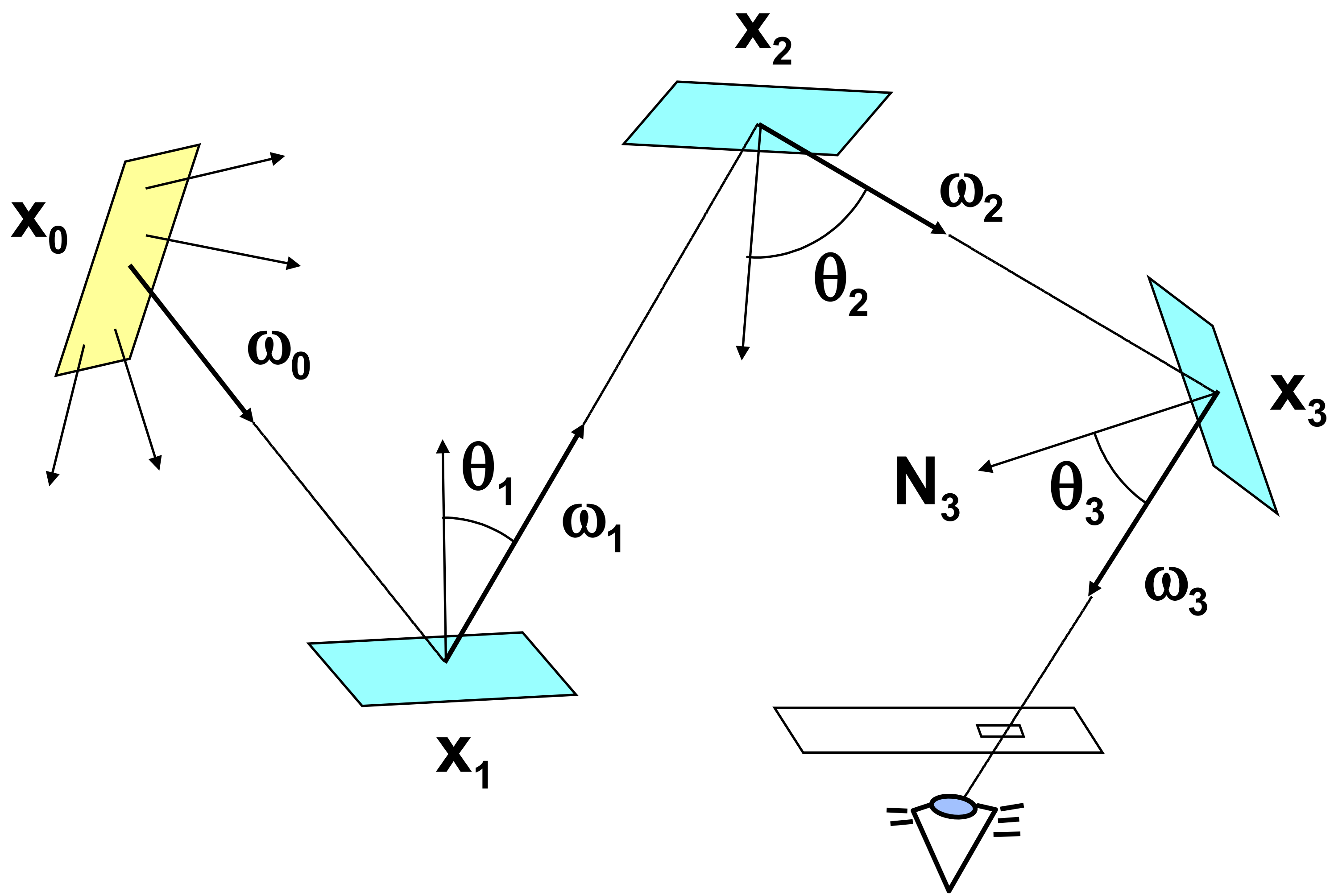
Paprsek **vycházející ze zdroje** (vyzařovací charakteristiky zdroje):

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{light} = \frac{L_e(x_0, \omega_0) \cdot \cos\theta_0}{p_0(x_0, \omega_0)} \cdot \left\langle W(x_0, \omega_0, S) \right\rangle_{light}$$

$$\underline{\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{light}} = \frac{L_e(x_0, \omega_0) \cdot \cos\theta_0}{p_0(x_0, \omega_0)} \cdot \sum_{i=0}^{k} \left[ \prod_{j=1}^{i} \frac{f(x_j, \omega_{j-1} \to \omega_j) \cdot \cos\theta_j}{P_j \cdot p_j(\omega_j)} \right] \cdot W_e(x_i, \omega_i, S)$$

**celkový odhad**

# Schema šíření světla (střílení)



# Vzorkování podle důležitosti

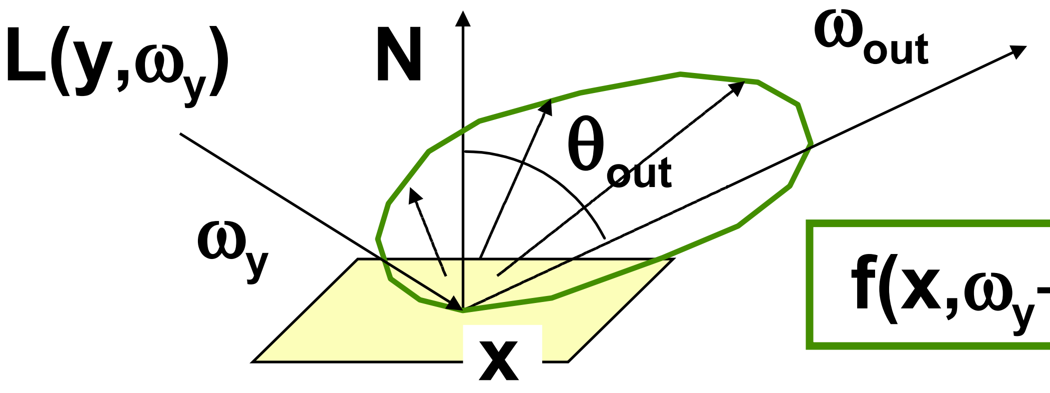
Pro **vyzařování světelného zdroje** (druhý integrál):

$$\underline{p_0\left(x_0,\omega_0\right)} = \frac{L_e\left(x_0,\omega_0\right)\cdot\cos\theta_0}{L}$$

Pro **pravděpodobnost pokračování** a s**měr odraženého paprsku** (první integrál) se použije metoda subkritické pravděpodobnosti (BRDF v bodě $\mathbf{p}_j$):

$$\underline{P_j\cdot p_j\left(\omega_j\right)} = f\left(x_j,\omega_{j-1}\to\omega_j\right)\cdot\cos\theta_j$$

# Vzorkování podle BRDF




$$f(x,\omega_y \rightarrow \omega_{out}) \cos \theta_{out}$$

Celkový primární odhad s využitím všech uvedených pravděpodobností:

$$\boxed{\left\langle \Phi\left( S \right) \right\rangle_{light,imp} = L \cdot \sum_{i=0}^{k} W_e\left( x_i, \omega_i, S \right)}$$

# Odhad příští události (NEE)

Rozdělení **odraženého světla** na dvě složky (bez **S**):

$$W(x,\omega_x) = W_e(x,\omega_x) + W_r(x,\omega_x)$$

$$\underline{W_r(x,\omega_x)} = \int_{\Omega_y} f(y,\omega_x \to \omega_y) \cdot W(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y =$$

$$\boxed{= \int_{\underline{Ape}} f(y,\omega_x \to \underline{\omega_z}) \cdot W_e(y,\underline{\omega_z}) \cdot G(y,\underline{z}) \, \underline{dA_z} + \int_{\Omega_y} f(y,\omega_x \to \omega_y) \cdot W_r(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y}$$

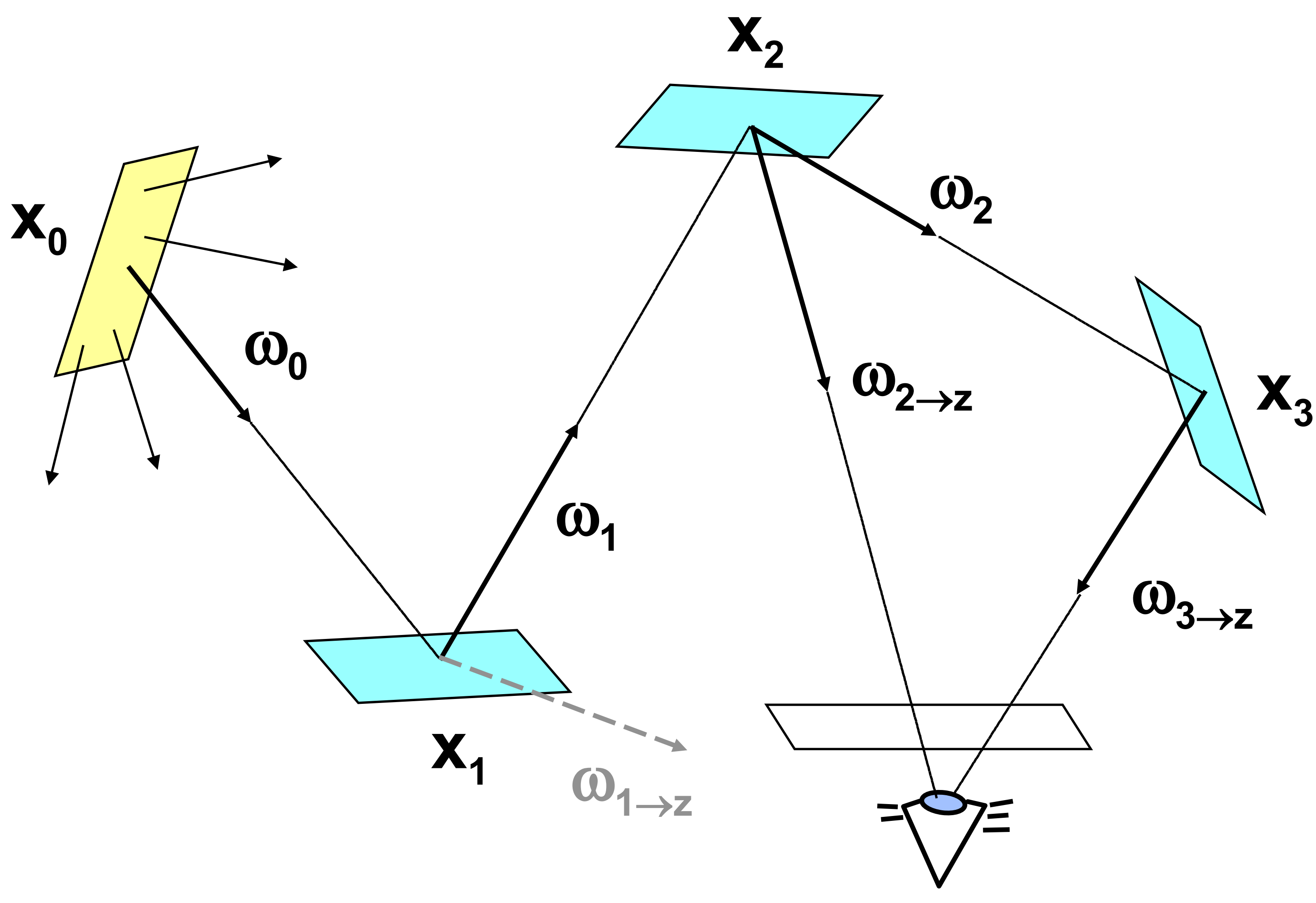
plocha objektivu

# Odhad příští události

Vzorkování podle **BRDF** (subkritická hustota pravděpodobnosti) s **ruskou ruletou** a **odhadem příští události**:

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{\mathrm{light,imp,nee}} = L \cdot \Big[ W_e(x_0, \omega_0, S) + Ape \cdot \cdot \sum_{i=1}^{k+1} W_e(x_i, \omega_{i\to z}, S) \cdot f(x_i, \omega_{i-1}, \omega_{i\to z}) \cdot G(x_i, z) \Big]$$

# Schema šíření světla (NEE)



# Aplikace

Použití metody “**light-tracing**”:

- přímý **výpočet realistického obrázku**
  - světlo se přijímá kamerou a ukládá v průmětně
- **pomocný výpočet** pro nějakou kombinovanou (hybridní) metodu
  - světlo se ukládá do tzv. <u>světelných map</u> (fotonové mapy, “particle-tracing”)
  - větší suma potenciálu $\mathbf{W}_e$ vede k efektivnějšímu výpočtu

# Obousměrné sledování paprsku

("bidirectional path-tracing")

Kombinovaná **globální zobrazovací rovnice**:

vlastní emitovaná radiance

diskrétní potenciál

GRDF

$$\Phi(S) =$$

$$= \iint_{A,\Omega_x} \iint_{A,\Omega_y} L_e(x, \omega_x)\, W_e(y, \omega_y, S)\, F(x, \omega_x \to y, \omega_y) \cos\theta_y \cos\theta_x \, d\omega_y \, dA_y \, d\omega_x \, dA_x$$

integrály přes všechny plochy a směry zdrojů
a všechny plochy a směry receptorů

# Odhad světelného toku

Výkon procházející pixelem (anti-aliasing, hloubka ostrosti), vyzařování světelného zdroje:

$$\langle \Phi(S) \rangle_{bipath} = \frac{L_e(x_0, \omega_{x0}) \cos\theta_{x0}}{p_0(x_0, \omega_{x0})} \cdot$$

$$\cdot \frac{W_e(y_0, \omega_{y0}, S) \cos\theta_{y0}}{q_0(y_0, \omega_{y0})} \cdot \langle F(x_0, \omega_{x0} \rightarrow y_0, \omega_{y0}) \rangle_{bipath}$$

$\mathbf{p_0}$ ... hustota pravděpodobnosti náhodné dvojice $[\mathbf{x_0}, \omega_{x0}]$, $\mathbf{q_0}$ ... h. p. náhodné dvojice $[\mathbf{y_0}, \omega_{y0}]$

# Rekurentní definice GRDF

První odraz:

$$F\left(x,\omega_x \rightarrow \underline{y,\omega_y}\right) = \delta\left(x,\omega_x,y,\omega_y\right) +$$

$$+\int_{\Omega_z} f\left(z,\omega_x \rightarrow \omega_z\right)\cdot F\left(z,\omega_z \rightarrow \underline{y,\omega_y}\right)\cdot\cos\theta_z \, d\omega_z$$

Poslední odraz:

$$F\left(\underline{x,\omega_x} \rightarrow y,\omega_y\right) = \delta\left(x,\omega_x,y,\omega_y\right) +$$

$$+\int_{\Omega_y^{-1}} f\left(y,\omega_z \rightarrow \omega_y\right)\cdot F\left(\underline{x,\omega_x} \rightarrow z,\omega_z\right)\cdot\cos\theta_y \, d\omega_z$$

# Odhad GRDF

Lineární kombinace obou rekurzivních vzorců:

$$\mathbf{F} = \delta + w^* \, \mathbf{T}^* \, \mathbf{F} + w \, \mathbf{T} \, \mathbf{F}, \qquad w + w^* = 1$$

Nekonečná Neumannova řada:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_{ij} \, \mathbf{T}^{*i} \, \mathbf{T}^{j} \, \delta, \qquad \sum_{i=0}^{N} w_{i,N-i} = 1$$

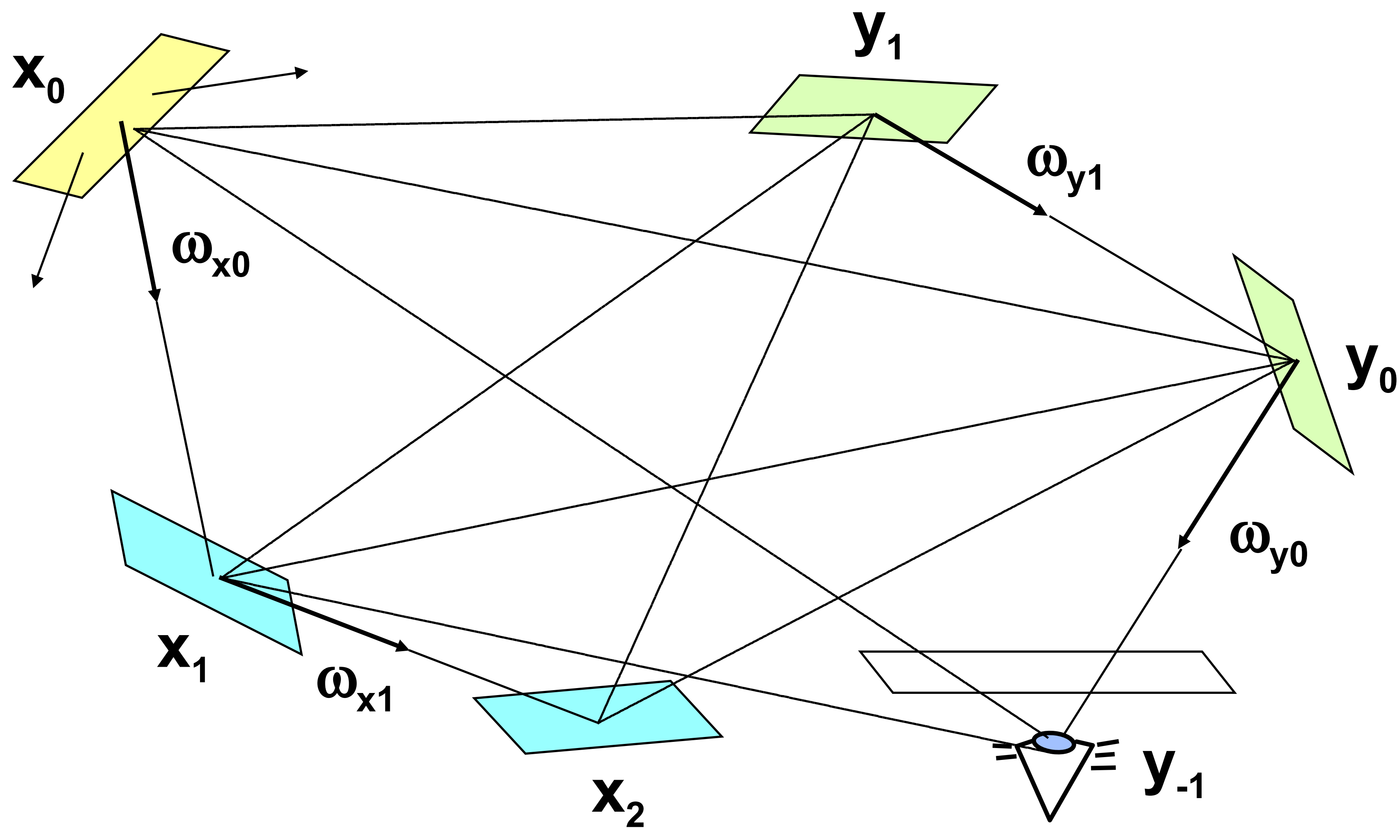
**T** i **T*** se odhadují stochasticky pomocí náhodné procházky ukončované ruskou ruletou. Bez odhadu příští události však má tato metoda **velký rozptyl**.

# Obousměrné sledování paprsku

$\boxed{\mathbf{T^*}}$ se odhaduje sledováním dráhy světla **od zdroje** **(“light tracing”)**:
$\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, ..$\mathbf{x_{k^*}}$ - směr $\boldsymbol{\omega_{xi}}$ se vybírá podle hustoty pravděpodobnosti $\mathbf{p_i(\omega_{xi})}$, pravděpodobnost pokračování je $\mathbf{P_i}$

$\boxed{\mathbf{T}}$ se odhaduje zpětným sledováním dráhy světla **od pozorovatele** **(“path tracing”)**:
$\mathbf{y_0}$, $\mathbf{y_1}$, ..$\mathbf{y_k}$ - směr $\boldsymbol{\omega_{yi}}$ se vybírá podle hustoty pravděpodobnosti $\mathbf{q_i(\omega_{yi})}$, pravděpodobnost pokračování je $\mathbf{Q_i}$

# Schema šíření světla (NEE)



# Odhad příští události (NEE)

S přidáním neuzavřených cest:

$$\boxed{\left\langle \Phi\left( S \right) \right\rangle_{\mathbf{bipath,nee}} = \sum_{i=-1}^{k} \sum_{j=-1}^{k^*} w_{ij}\, C_{ij}}$$

**i=–1**, **j>0**: cesta od pozorovatele (bez NEE)
**i=0**, **j≥0**: cesta od pozorovatele se vzorkem na zdroji
**i>0**, **j>0**: světlo i-krát odražené od zdroje a j-krát od pozorovatele
**i≥0**, **j=0**: cesta od zdroje se vzorkem na receptoru
**i>0**, **j=–1**: cesta od zdroje (bez NEE - neefektivní)

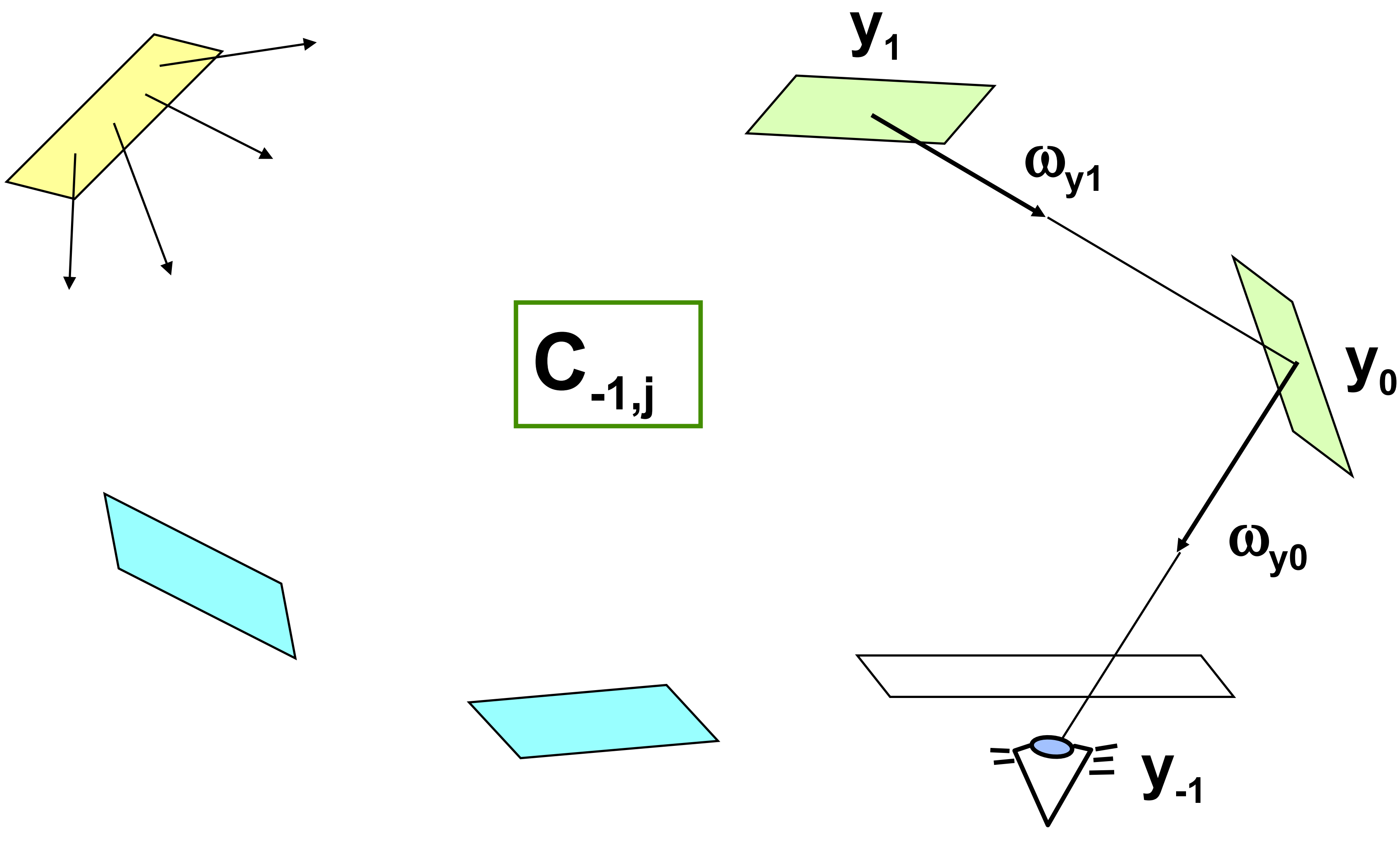
# Přehled vzorkování

| závislost příspěvku na | vzorku na cestě od zdroje světla | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| **vzorku na cestě od receptoru** | | | $C_{1,-1}$ | $C_{2,-1}$ | $C_{3,-1}$ |
| $y_{-1}$ | | $C_{0,0}$ | $C_{1,0}$ | $C_{2,0}$ | $C_{3,0}$ |
| $y_0$ | $C_{-1,1}$ | $C_{0,1}$ | $C_{1,1}$ | $C_{2,1}$ | $C_{3,1}$ |
| $y_2$ | $C_{-1,2}$ | $C_{0,2}$ | $C_{1,2}$ | $C_{2,2}$ | $C_{3,2}$ |

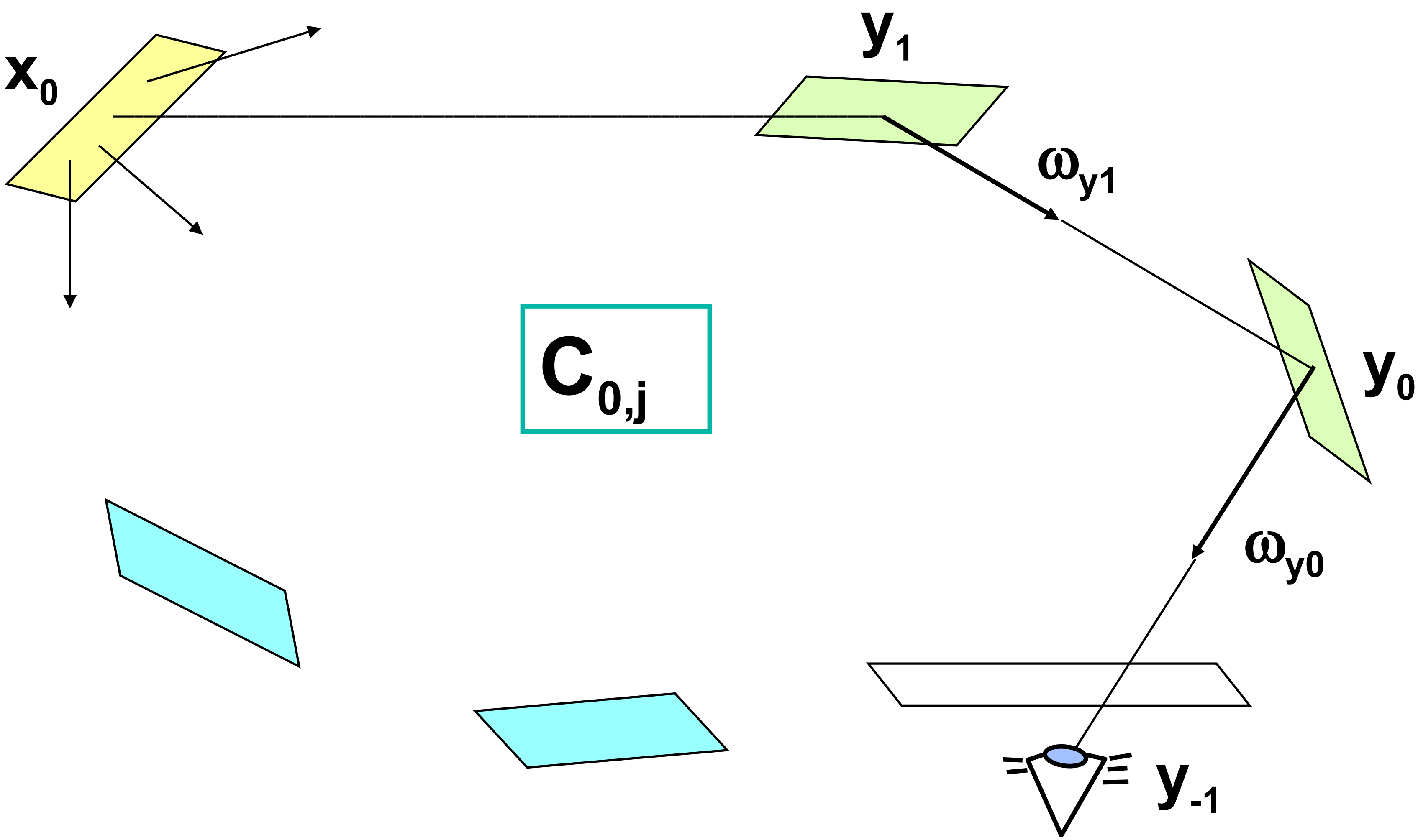
LT

PT

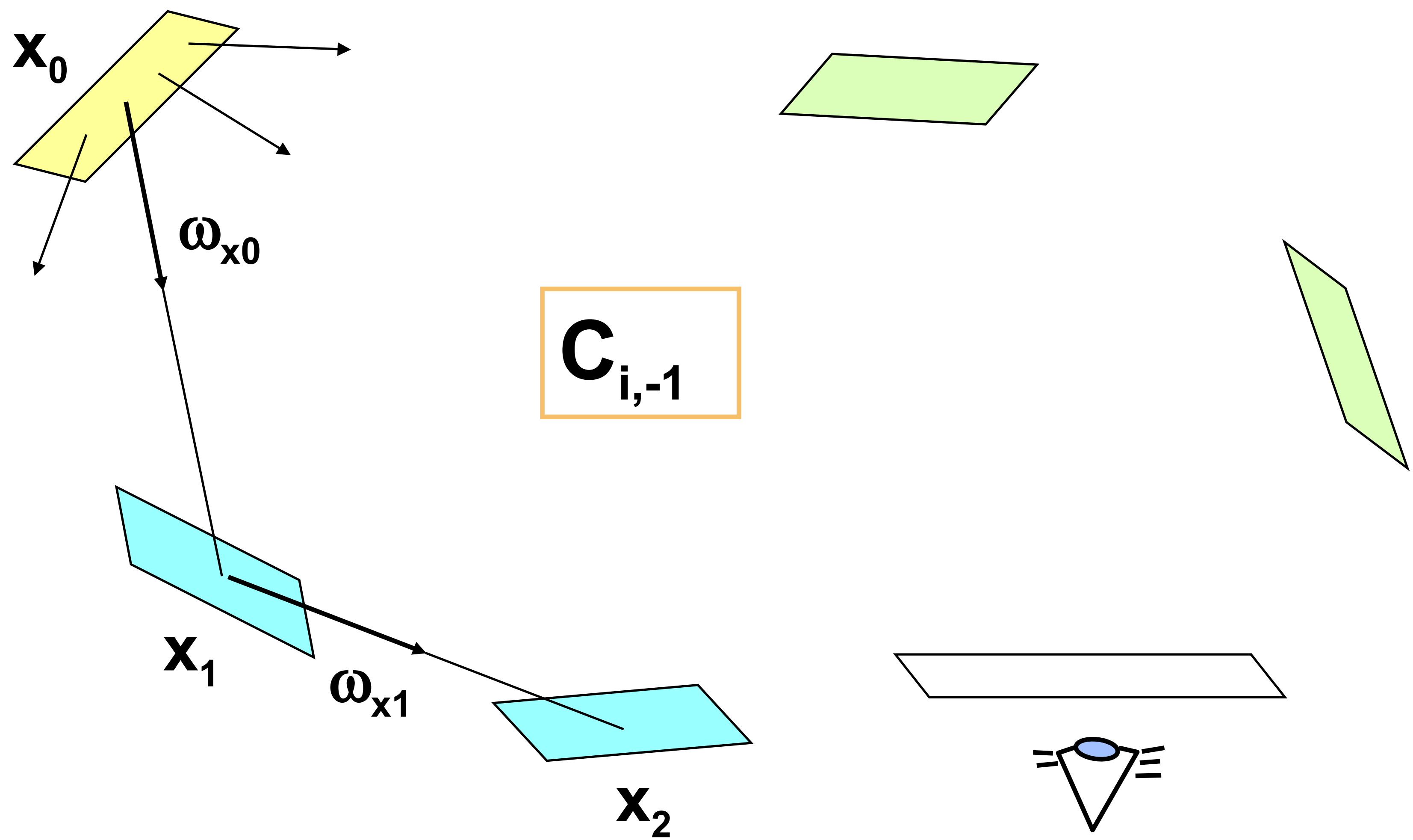
# Neuzavřená cesta od receptoru



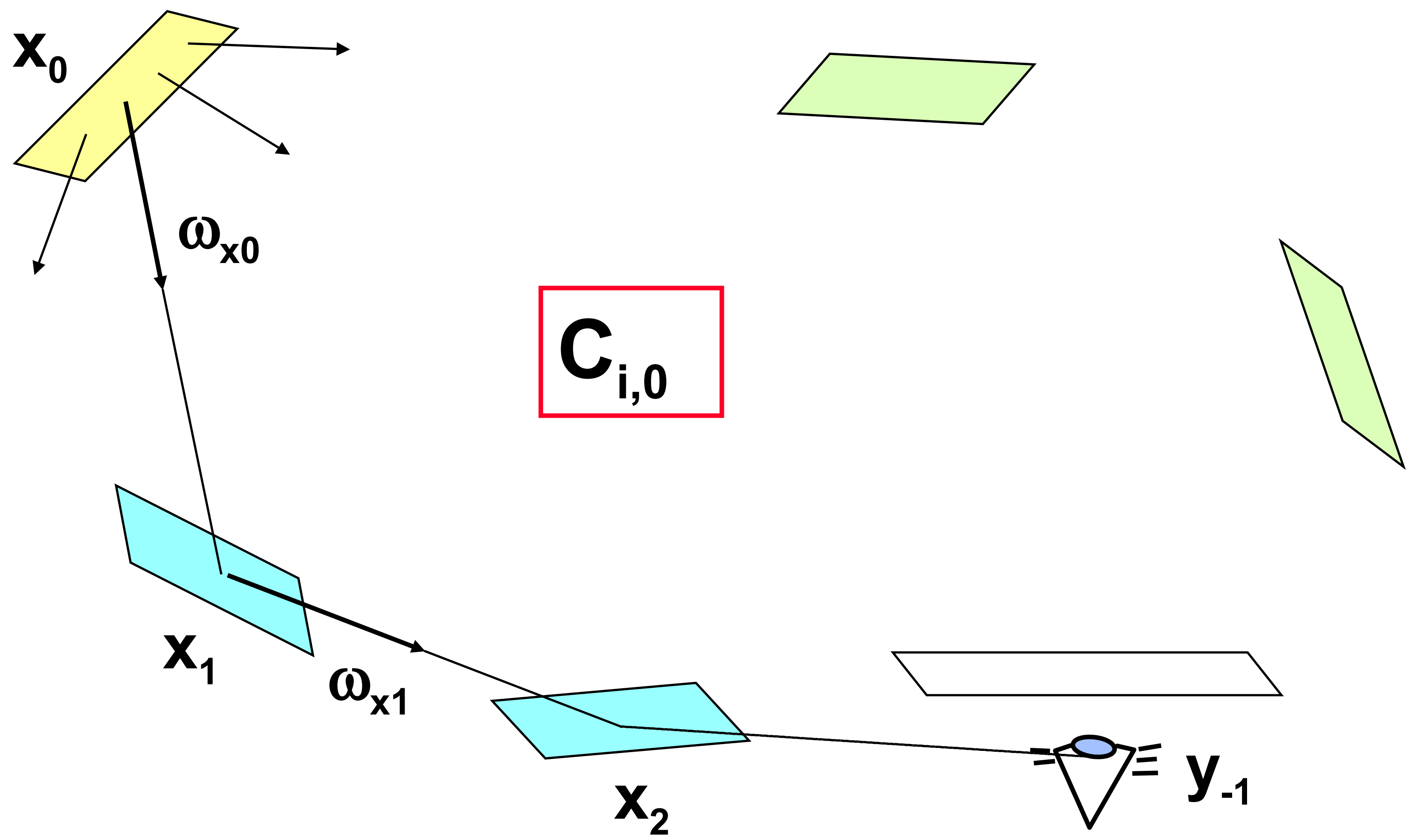
# Path tracing s NEE



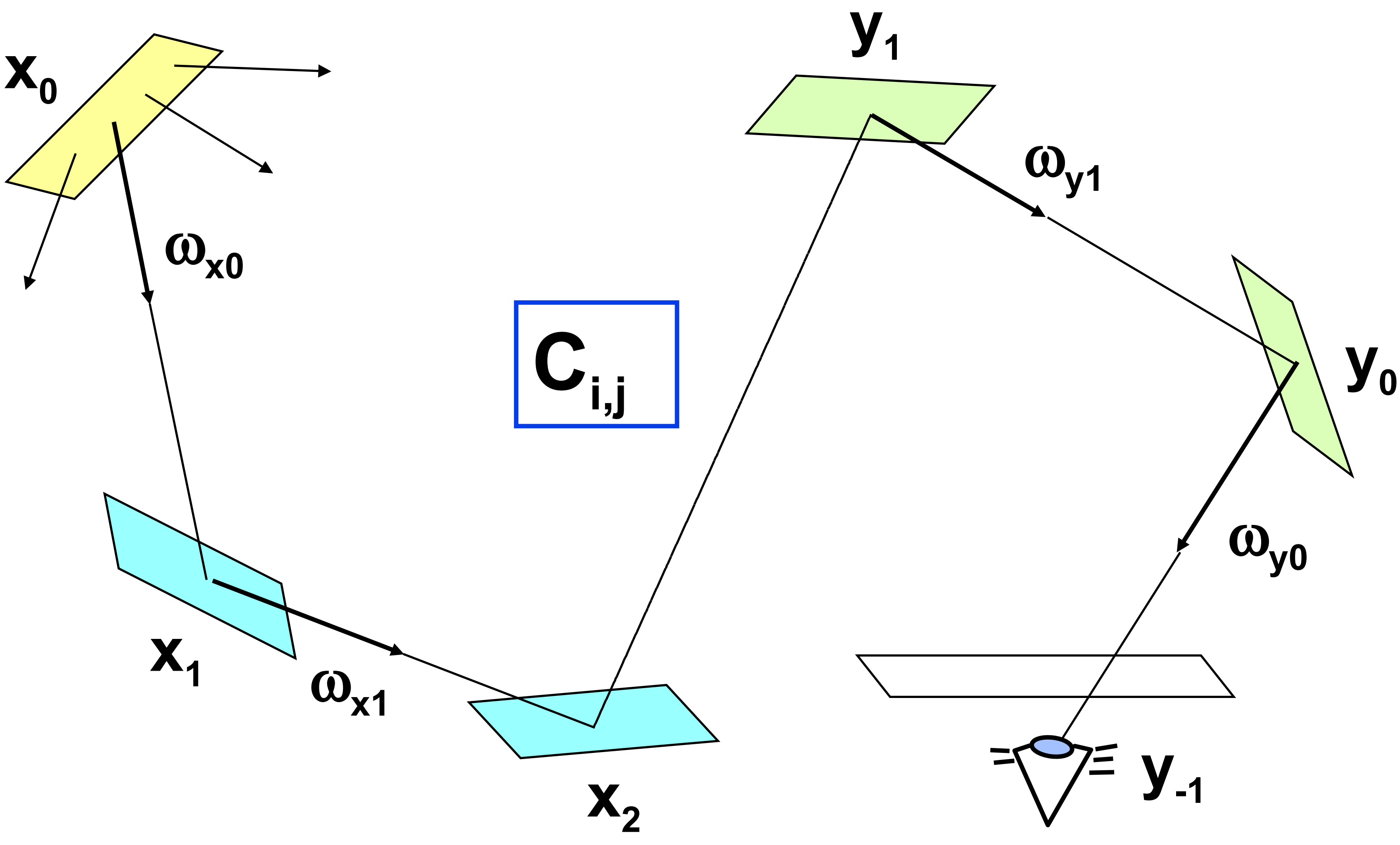
# Neuzavřená cesta od zdroje



# Light tracing s NEE



# Kombinovaná cesta



# Efektivní implementace

- výpočet dvou **nezávislých náhodných procházek** zakončovaných ruskou ruletou
  - od světelného zdroje (délka **k***) a od receptoru (**k**)
  - nebo jedna cesta ze zdroje do receptoru délky **K**
- kombinace **všech prefixů** obou cest
  - systematická chyba?
- **K+2** kombinace pro cestu pevné délky **K**
  - kombinovaný odhad - směs odhadů pro všechna **K**

# Konec

## Další informace:

- **E. Lafortune**: ***Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering***, PhD thesis, KU Leuven, 65-102
- **A. Glassner**: ***Principles of Digital Image Synthesis***, Morgan Kaufmann, ‘95, 1037-1049
- **E. Veach, L. Guibas**: ***Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering***, SIGGRAPH ‘95