Přednáška 1, 20. února 2015

Nejprve motivace — souvislost primitivních funkcí s plochami rovinných útvarů. Funkce F je *primitivní* k funkci f, když na daném definičním oboru platí vztah $F' = f$. Pro nezápornou a spojitou funkci $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ uvažme rovinný útvar

$$U(a,b,f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \ \&\ 0 \le y \le f(x)\}\ .$$

Jeho plochu, ať je to cokoli, označíme jako

$$\int_a^b f := \mathrm{plocha}(U(a,b,f))\ .$$

Jde tedy o plochu části roviny vymezené osou x, grafem funkce f a svislými přímkami $y = a$ a $y = b$. Dva základní vztahy mezi plochou a derivací jsou následující. *První základní věta analýzy* říká, že pro každé $c \in [a,b]$ máme

$$\left(\int_a^x f\right)'(c) = f(c)$$

— derivace funkce, jejíž argument x je horní mez útvaru $U(a,x,f)$ a hodnota je jeho plocha, se rovná výchozí funkci f. Plocha $F(x) = \int_a^x f$ jako funkce je tedy primitivní funkcí k f. Podle *druhé základní věty analýzy* pro každou funkci g, která je na $[a,b]$ primitivní k f, je

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)\ .$$

Známe-li nějakou funkci primitivní k f, a spoustu jich lze odvodit prostým obrácením pravidel pro derivování elementárních funkcí, můžeme ihned spočítat plochu útvaru $U(a,b,f)$. Obě věty přesně zformulujeme a dokážeme v části přednášky o Riemannově integrálu, kdy také přesně zavedeme pojem plochy $\int_a^b f$. Nejprve se ale musíme zabývat vlastnostmi primitivních funkcí — kdy má funkce primitivní funkci, zda je jednoznačně určena a podobně.

Funkce primitivní k dané funkci

Definice (primitivní funkce). *Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval a dvě funkce*

$$F, f:\ I \to \mathbb{R}$$

splňují na I vztah $F' = f$, pak F nazveme funkcí primitivní k funkci f (na intervalu I). *(V krajních bodech $x \in I$ se $F'(x)$ rozumí příslušná jednostranná derivace.)*

U limitění a derivování je výsledek operace jednoznačný, pokud existuje, ale primitivní funkce určená jednoznačně není. Hned uvidíme, že daná funkce buď nemá žádnou primitivní funkci nebo jich má nekonečně mnoho. Vzhledem k linearitě derivování je i operace nalezení primitivní funkce lineární: Je-li F na I primitivní k f, G ke g a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom je funkce

$$\alpha F + \beta G$$

na I primitivní k funkci $\alpha f + \beta g$.

Tvrzení (o nejednoznačnosti primitivní funkce). *Je-li F na intervalu I primitivní k f, potom množina všech funkcí primitivních k f na I je*

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}\ .$$

Všechny funkce primitivní k f se tedy dostanou posunem libovolné z nich o konstantu.

Důkaz. Derivace konstantní funkce je nulová, a tak $(F+c)' = F' + 0 = f$ pro každé $c \in \mathbb{R}$ a každou funkci F primitivní k f na I. Na druhou stranu, jsou-li F a G primitivní k f na I, pak jejich rozdíl $H = F - G$ má na I nulovou derivaci: pro každé $\gamma \in (a, b)$ je $H'(\gamma) = F'(\gamma) - G'(\gamma) = f(\gamma) - f(\gamma) = 0$. Pro libovolné dva body $\alpha < \beta$ z I tak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě máme rovnost

$$H(\beta) - H(\alpha) = (\beta - \alpha)H'(\gamma) = (\beta - \alpha)0 = 0\ ,$$

pro nějaký bod $\gamma \in (\alpha, \beta)$, takže $H(\alpha) = H(\beta)$ a H je na I konstantní. Tedy existuje konstanta c, že $F(x) - G(x) = c$ pro každé $x \in I$ a $F = G + c$. $\square$

Tvrzení (spojitost primitivní funkce). *Je-li F na intervalu I primitivní k f, potom je F na I spojitá.*

Důkaz. Ze ZS víme, že existence vlastní (jednostranné, jde-li o krajní bod) derivace funkce v bodě implikuje její spojitost v daném bodě. Protože $F'(\alpha)$ existuje a rovná se $f(\alpha)$ pro každé $\alpha \in I$, je F na I spojitá. $\square$

Věta (spojitá funkce má primitivní funkci). *Je-li f na intervalu I spojitá, pak má na I primitivní funkci F.*

Důkaz. To dokážeme podrobně a přesně později. Jak bylo naznačeno v úvodu, F se dá definovat jako plocha útvaru pod grafem funkce f. Jiný způsob, jak větu dokázat, je vyjádřit f jako $f = \lim f_n$ (stejnoměrná limita), kde f_n jsou lomené čáry s primitivními funkcemi F_n, a položit $F = \lim F_n$. $\square$

Může mít nespojitá funkce primitivní funkci? Může.

Příklad (nespojitá funkce s primitivní funkcí). *Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako*

$$f(x) = 2x\sin(x^{-2}) - 2x^{-1}\cos(x^{-2}) \ \ \textit{pro}\ x \neq 0,\ \ f(0) = 0\ ,$$

má na reálné ose primitivní funkci, i když není spojitá v bodě 0.

Důkaz. Uvažme funkci $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou pro $x \neq 0$ jako $F(x) = x^2\sin(x^{-2})$ a pro $x = 0$ jako $F(0) = 0$. Derivování podle vzorců pro $x \neq 0$ dává $F' = f$. V nule podle definice derivace spočteme, že

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(x^{-2}) = 0\ ,$$

protože $|x\sin(x^{-2})| \le |x|$ pro každé $x \neq 0$. Tedy $F'(0)$ existuje a opět $F'(0) = f(0)$. Tudíž $F' = f$ na $\mathbb{R}$ a F je na $\mathbb{R}$ primitivní k f. Funkce f není spojitá v 0, protože je v každém okolí nuly dokonce neomezená shora i zdola — pro $x \to 0$ její graf kmitá s neomezeně vzrůstající amplitudou i frekvencí. $\square$

V MAI jsme si dokázali větu, že funkce spojitá na intervalu na něm nabývá všech mezihodnot, to jest zobrazuje ho zase na interval. Této vlastnosti funkcí se říká i *Darbouxova vlastnost*, podle francouzského matematika Jeana-Gastona Darbouxe (1842–1917). Darboux dokázal, že funkce s primitivní funkcí mají tuto vlastnost.

Věta (funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost). *Je-li F na intervalu I primitivní k f, potom f na I nabývá všech mezihodnot.*

Důkaz. Vezměme nějakou mezihodnotu c: $f(x_1) < c < f(x_2)$ pro nějaké dva body $x_1 < x_2$ z I. Nalezneme $x^* \in I$, dokonce $x^* \in (x_1, x_2)$, že $f(x^*) = c$. (Pokud $f(x_1) > c > f(x_2)$, následující argument se snadno upraví náhradou minima maximem.) Funkce

$$H(x) = F(x) - cx$$

je na I spojitá, dokonce tam má vlastní derivaci

$$H'(x) = (F(x) - cx)' = f(x) - c\,.$$

Podle věty ze ZS nabývá na kompaktním intervalu $[x_1, x_2]$ minimum v bodě $x^* \in [x_1, x_2]$. Protože $H'(x_1) = f(x_1) - c < 0$, je H klesající v bodě x_1, což dává, že pro nějaké $\delta > 0$ máme $x \in (x_1, x_1 + \delta) \Rightarrow H(x) < H(x_1)$. Tudíž $x^* \neq x_1$. Obdobně z $H'(x_2) > 0$ plyne, že $x^* \neq x_2$. Tedy $x^* \in (x_1, x_2)$ a podle kritéria extrému ze ZS musí být $H'(x^*) = f(x^*) - c = 0$. Tedy $f(x^*) = c$. □

Důsledek (příklad funkce bez primitivní funkce). *Funkce* $\mathrm{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definovaná jako* $\mathrm{sgn}(x) = -1$ *pro* $x < 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ *a* $\mathrm{sgn}(x) = 1$ *pro* $x > 0$, *nemá na* $\mathbb{R}$ *(ani na žádném jiném intervalu obsahujícím* 0*) primitivní funkci.*

Důkaz. Podle Darbouxovy věty, protože sgn nenabývá všech mezihodnot: i když nabývá hodnotu -1 a 1, nenabývá nikde třeba hodnotu $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$. □

Značení. Skutečnost, že funkce F je na intervalu I primitivní k funkci f, se značí jako

$$F = \int f, \quad \text{a píšeme též} \quad F = \int f + c\,,$$

abychom zdůraznili, že každé posunutí F o konstantu je rovněž primitivní funkce k f. Symbolu $\int f$ je třeba rozumět tak, že označuje množinu všech funkcí primitivních k f na daném intervalu.

Pro derivaci součinu máme Leibnizův vzorec $(fg)' = f'g + fg'$. Invertováním obdržíme následující důležitý výsledek pro primitivní funkce.

Věta (integrace per partes). *Jsou-li $f, g : I \to \mathbb{R}$ spojité funkce (I je interval) a F, G jim odpovídající primitivní funkce, pak na I platí rovnost*

$$\int fG + \int Fg = FG + c\,.$$

Podrobněji řečeno, funkce fG a Fg mají na I primitivní funkce, jejichž součet se na I vždy rovná, až na aditivní konstantu c, funkci FG.

Důkaz. Podle předpokladu je f na I spojitá a podle hořejšího tvrzení tam je i primitivní funkce G spojitá. Takže součinová funkce fG je tam též spojitá a podle hořejší zatím nedokázané věty má na I primitivní funkci (funkce) $\int fG$. Podobně máme i primitivní funkci $\int Fg$. Podle hořejší poznámky o linearitě je součet $\int fG + \int Fg$ primitivní funkcí k funkci $fG + Fg$. K té je ale primitivní i funkce FG, protože Leibnizův vzorec dává $(FG)' = fG + Fg$. Podle tvrzení o nejednoznačnosti primitivní funkce tedy pro jistou konstantu c platí, že $\int fG + \int Fg = FG + c$. □

Vzorec pro integraci per partes se uvádí obvykle v ekvivalentním tvaru

$$\int F'G = FG - \int FG' \; .$$

Pokud tedy umíme spočítat pro dané dvě funkce F a G se spojitými derivacemi ($F' = f$ a $G' = g$) primitivní funkci k FG', dostáváme podle tohoto vzorce primitivní funkci k $F'G$.

Příklad. Díky $x' = 1$ a $(\log x)' = 1/x$ na intervalu $(0, +\infty)$ máme

$$\int \log x = \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)' = x \log x - \int 1 = x \log x - x \; .$$

Přesněji, $\int \log x = x \log x - x + c$ (na $(0, +\infty)$). Zderivováním snadno zkontrolujeme správnost odvozeného vzorce.