Přednáška 3, 6. března 2015

Joseph Liouville (1809–1882) jako první dokázal existenci transcendentních čísel a také našel kritéria pro neelementárnost primitivních funkcí.

Věta (Liouville, 1835). *Nechť $f, g \in \mathbb{R}(x)$ jsou racionální funkce (podíly polynomů). Pak se primitivní funkce*

$$\int fe^g$$

(na nějakém intervalu neobsahujícím zádný kořen jmenovatelů funcí f a g) dá vyjádřit elementárními funkcemi, právě když existuje taková racionální funkce $a \in \mathbb{R}(x)$, že $f = a' + ag'$.

Větu dokazovat nebudeme. Podstatou je implikace $\Rightarrow$, implikace $\Leftarrow$ je triviální, protože $(ae^g)' = (a' + ag')e^g$.

Příklad. Dokážeme podle L. věty neelementárnost primitivní funkce

$$\int e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Zde $f = 1$ a $g = x^2$. Primitivní funkce by byla elementární, pouze když $f = a' + ag'$ pro nějakou rac. funkci a, tedy

$$1 = a' + 2xa\ .$$

Ukažme, že se tato rovnice nedá splnit žádnou rac. funkcí $a = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{R}[x]$, $q \neq 0$, jsou nesoudělné polynomy (nemají společný kořen). Jistě $p \neq 0$. Když je q konstantní, je $a = p$ polynom. Pak vlevo $\deg 1 = 0$, ale vpravo $\deg(a' + 2xa) = 1 + \deg a \geq 1$, spor. Když q není konstantní, vezmeme nějaký jeho kořen $\alpha \in \mathbb{C}$, s násobností $m \in \mathbb{N}$. Tedy $q(x) = (x - \alpha)^m r(x)$, kde $r(\alpha) \neq 0$, rovněž $p(\alpha) \neq 0$. Rovnici s $a = p/q$ přepíšeme ekvivalentně jako

$$0 = -q^2 + p'q - pq' + 2xpq\ .$$

V polynomech $-q^2$, $p'q$, $-pq'$ a $2xpq$ má α jako kořen po řadě násobnost $2m$, $\geq m$, $m - 1$ a $\geq m$ (pro $\alpha = 0$ je násobnost $m + 1$). Minimum násobností

$m-1$ se nabývá jednoznačně, pro jediný ze čtyř polynomů, takže se nemohou součtem zrušit a sečíst na 0. Rovnost je nemožná a máme opět spor. $\square$

Vrátíme se k Riemannově integrálu. Když $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ a $D' = (b_0, b_1, \ldots, b_l)$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a $D \subset D'$, to jest pro každé $i = 0, 1, \ldots, k$ existuje j, že $a_i = b_j$ (tudíž $k \leq l$), řekneme, že D' *je zjemnění* D nebo že D' *zjemňuje* D.

Lemma. *Když $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a D, D' jsou dvě dělení $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D, pak*

$$s(f, D') \geq s(f, D) \quad a \quad S(f, D') \leq S(f, D) \ .$$

Důkaz. Uvážíme-li definici sum $s(f, D)$ a $S(f, D)$ a to, že D' lze vytvořit z D postupným přidáváním bodů, vidíme, že obě nerovnosti stačí dokázat v situaci, kdy $D = (a_0 = a < a_1 = b)$ a $D' = (a'_0 = a < a'_1 < a'_2 = b)$. Podle definice infim hodnot funkce f máme

$$m_0 = \inf_{a_0 \leq x \leq a_1} f(x) \leq \inf_{a'_0 \leq x \leq a'_1} f(x) = m'_0 \ \text{ a } \ m_0 \leq \inf_{a'_1 \leq x \leq a'_2} f(x) = m'_1 \ .$$

Tedy

$$\begin{aligned} s(f, D') &= (a'_1 - a'_0)m'_0 + (a'_2 - a'_1)m'_1 \\ &\geq (a'_1 - a'_0)m_0 + (a'_2 - a'_1)m_0 \\ &= (a'_2 - a'_0)m_0 = (b - a)m_0 \\ &= s(f, D) \ . \end{aligned}$$

Nerovnost $S(f, D') \leq S(f, D)$ se dokáže podobně. $\square$

Důsledek. *Když $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a D, D' jsou dvě dělení $[a, b]$, pak*

$$s(f, D) \leq S(f, D') \ .$$

Důkaz. Nechť $E = D \cup D'$ je společné zjemnění obou dělení. Podle předešlého lemmatu máme

$$s(f, D) \leq s(f, E) \leq S(f, E) \leq S(f, D') \ .$$

Přesněji, první a poslední nerovnost platí podle Lemmatu, a prostřední je triviální, z definice horní a dolní sumy. $\square$

Tvrzení (dolní integrál nepřesahuje horní). *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$ *a* D, D' *jsou dvě dělení intervalu* $[a,b]$. *Pak platí nerovnosti*

$$m(b-a) \le s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,D') \le M(b-a)\,.$$

Důkaz. První a poslední nerovnost jsou speciální případy Lemmatu. Druhá a předposlední nerovnost plynou hned z definice dolního a horního integrálu jakožto suprema, respektive infima. Podle Důsledku je každý prvek množiny dolních sum, jejíž supremum je $\underline{\int_a^b} f$, menší či roven každému prvku množiny horních sum, jejíž infimum je $\overline{\int_a^b} f$. S použitím definice infima (největší dolní mez) a suprema (nejmenší horní mez) odtud vyplývá prostřední nerovnost: Pro každé dělení D je $s(f,D)$ dolní mezí druhé množiny, tedy $s(f,D) \le \overline{\int_a^b} f$, tedy $\overline{\int_a^b} f$ je horní mezí první množiny, tedy $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$. $\square$

Tvrzení (kritérium integrovatelnosti). *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom*

$$f \in \mathcal{R}(a,b) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D :\ 0 \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Jinými slovy, f *má Riemannův integrál, právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *je pro nějaké dělení* D *intervalu* $[a,b]$ *odpovídající horní suma o méně než* ε *větší než odpovídající dolní suma.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že f má na $[a,b]$ R. integrál, tedy $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f \in \mathbb{R}$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice dolního a horního integrálu existují dělení E_1 a E_2 tak, že

$$s(f,E_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ a } \ S(f,E_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Podle lemmatu tyto nerovnosti platí i po náhradě E_1 a E_2 jejich společným zjemněním $D = E_1 \cup E_2$. Sečtením obou nerovností dostaneme

$$S(f,D) - s(f,D) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + \left(- \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon\,.$$

Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme platnost uvedené podmínky s ε a D. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme odpovídající dělení D a podle definice dolního a horního integrálu dostaneme

$$\overline{\int_a^b} f \le S(f,D) < s(f,D) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f + \varepsilon, \text{ tedy } \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon\ .$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tak podle předchozího tvrzení máme $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$. Tedy f má na $[a,b]$ R. integrál. $\square$

Příklad (omezená funkce bez integrálu). *Funkce* $f: [0,1] \to \{0,1\}$ *definovaná jako* $f(\alpha) = 1$*, když* α *je racionální číslo, a* $f(\alpha) = 0$*, když* α *je iracionální, jíž se říká* Dirichletova funkce*, nemá na* $[0,1]$ *R. integrál, i když je omezená.*

To je jasné, každý interval (s kladnou délkou) obsahuje body, kde má f hodnotu 0 a rovněž i body, kde má hodnotu 1. Tedy $s(f,D) = 0$ a $S(f,D) = 1$ pro každé dělení D a

$$\underline{\int_0^1} f = 0 < \overline{\int_0^1} f = 1\ .$$

Jako druhý příklad spočteme podle definice, že

$$\int_0^1 x^2\, dx = 1/3\ .$$

Pro $n = 1, 2, \ldots$ vezmeme dělení $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Pak

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = n^{-3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$$

a podobně

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = n^{-3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)\ .$$

Tedy $S(f,D_n) - s(f,D_n) = \frac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$ a $f(x) = x^2$ má na $[0,1]$ R. integrál podle předchozího kritéria. Stačí ukázat, že pro $n \to \infty$ je

$$S_n := 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n^3/3 + O(n^2)\ .$$

Protože $1 + 2 + \cdots + n \leq n^2$, z

$$(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{i=1}^{n}((i+1)^3 - i^3) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) = 3S_n + 3\sum_{i=1}^{n} i + n$$

opravdu máme, že

$$S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} - \sum_{i=1}^{n} i = n^3/3 + O(n^2) \ .$$

Henri Lebesgue (1877–1941) dokázal větu charakterizující funkce s Riemannovým integrálem, kterou si uvedeme bez důkazu. Nejprve ale zavedeme množiny míry nula. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou (Lebesgueovu) míru*, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů $I_1, I_2, \ldots$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon \ \text{ a } \ M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \ .$$

Definice říká, že se M dá pokrýt intervaly libovolně malé celkové délky. Uveďme základní vlastnosti množin reálných čísel s nulovou mírou. Důkazy si rozmyslete jako cvičení.

- Každá konečná nebo spočetná množina má nulovou míru.
- Podmnožina množiny s nulovou mírou má také nulovou míru.
- Má-li každá z množin $A_1, A_2, \ldots$ nulovou míru, má i jejich sjednocení

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

  nulovou míru.
- Interval s kladnou délkou nemá nulovou míru.

Například celá množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ má nulovou míru.

Věta (Lebesgueova, charakterizující integrovatelné funkce) *Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál, právě když je omezená a množina jejích bodů nespojitosti má nulovou míru.*

Otázka posluchače. *Existuje nespočetná množina reálných čísel s nulovou mírou?*

Existuje. Klasickým příkladem je tzv. *Cantorovo diskontinuum.* Je to množina

$$X_C := \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \tfrac{1}{3^n}] \cup [\tfrac{2}{3^n}, \tfrac{3}{3^n}] \cup [\tfrac{4}{3^n}, \tfrac{5}{3^n}] \cup [\tfrac{6}{3^n}, \tfrac{7}{3^n}] \cup \cdots \cup [\tfrac{3^n-1}{3^n}, 1]$$

— to, co zbude z intervalu $[0, 1]$ vyhodíme-li prostřední třetinu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pak prostřední třetinu z každé z obou zbylých krajních třetin, tj. pak vyhodíme $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, pak vyhodíme z každé ze zbylých čtyřech devítin její prostřední třetinu a tak dále do nekonečna. Jinými slovy

$$X_C = \{\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i/3^i \mid a_i \in \{0, 2\}\}$$

— X_C jsou právě ta čísla z $[0, 1]$, v jejichž rozvoji při základu 3 se vyskytují pouze cifry 0 a 2 (a nikde cifra 1). Například

$$1/3 = (0.02222\ldots)_3 \in X_C \quad \text{nebo} \quad 1/4 = (0.020202\ldots)_3 \in X_C \ ,$$

ale $5/8 = (0.121212\ldots)_3 \notin X_C$. Z této korespondence s nekonečnými posloupnostmi 0 a 2 je vidět, že X_C je nespočetná. Není ani těžké ukázat, že má nulovou míru (cvičení).