Přednáška 11, 15. května 2015

Jako příklad na větu o implicitních funkcích ukážeme, že soustava rovnic

$$x + y - \sin z = 0 \ \text{ a } \ -x^3 - y^3 + \mathrm{e}^z - 1 = 0$$

definuje v okolí bodu $x = 0$ dvě funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy $\mathcal{C}^1$ s hodnotami $y(0) = z(0) = 0$ a spočteme hodnoty derivací $y'(0)$ a $z'(0)$.

Položíme $F_1(x, y, z) = x + y - \sin z$, $F_2(x, y, z) = -x^3 - y^3 + \mathrm{e}^z - 1$ a $F = (F_1, F_2)$. Skutečně $F(0, 0, 0) = (0, 0)$ a jacobián soustavy J je nenulový:

$$\begin{aligned} J = \det(\partial_y F(0,0,0)^T, \partial_z F(0,0,0)^T) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\cos z \\ -3y^2 & \mathrm{e}^z \end{pmatrix} (0,0,0) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

Předpoklady věty o implicitních funkcích jsou splněny a uvedené funkce $y(x)$ a $z(x)$ jsou na nějakém okolí nuly definovány. Protože

$$\partial_x F(0,0,0)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3x^2 \end{pmatrix} (0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

podle vztahů uvedených na konci předešlé přednášky máme

$$y'(0) = -\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{J} = -1 \ \text{ a } \ z'(0) = -\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{J} = 0\ .$$

Vázané extrémy. Z věty o implicitních funkcích lze odvodit (pro důkaz však nemáme čas) zobecnění první části věty o lokálních extrémech — nutná podmínka pro lokální extrém funkce v bodě otevřené množiny je nulovost všech parciálních derivací — na extrémy na množině zadané soustavou rovnic. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a

$$f, F_1, \dots, F_n :\ U \to \mathbb{R}$$

jsou funkce z $\mathcal{C}^1(U)$, přičemž $n < m$. Hledáme lokální extrémy funkce f na množině

$$H = \{x \in U \mid F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = 0\}\ .$$

Typicky tato množina nemá žádný vnitřní bod a větu o lokální extrémech nelze použít. Příkladem je jednotková sféra v $\mathbb{R}^m$:

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 - 1 = 0\} .$$

Následující tvrzení udává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému funkce f v bodě množiny H.

Důsledek (Lagrangeovy multiplikátory). *Nechť $a \in H$. Jsou-li vektory $\nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_n(a)$ z $\mathbb{R}^m$ lineárně nezávislé a vektor $\nabla f(a)$ není jejich lineární kombinací, pak f nemá v bodu a vzhledem k množině H ani neostrý lokální extrém.*

Ekvivalentně: jsou-li $\nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_n(a)$ lineárně nezávislé a funkce f má v bodě a vzhledem k množině H (ostrý či neostrý) lokální extrém, potom existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tzv. Lagrangeovy multiplikátory*, že*

$$\nabla f(a) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(a) = \overline{0} ,$$

to jest $\partial_{x_j} f(a) - \lambda_1 \partial_{x_j} F_1(a) - \cdots - \lambda_n \partial_{x_j} F_n(a) = 0$ pro $1 \le j \le m$.

Pro ilustraci metody si spočteme dva jednoduché příklady. V **prvním příkladu** nalezneme extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ vzhledem k množině $H \subset \mathbb{R}^2$ dané rovnicí

$$H: \; F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 ,$$

což je jednotková kružnice se středem v počátku. Máme $\nabla F = (2x, 2y)$ a $\nabla f = (1, 1)$. Patrně $\nabla F = \overline{0}$ pouze v $\overline{0} \notin H$, tedy $\nabla F \ne \overline{0}$ na H a předpoklad lineární nezávislosti gradientů rovnicových funkcí je splněn. Podle Lagrangeových multiplikátorů jsou body, v nichž má f lokální extrém vzhledem k H, obsaženy v řešeních soustavy

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \;\; 1 = 2\lambda x \;\text{ a }\; 1 = 2\lambda y .$$

Odečtením posledních dvou rovnic dostáváme $\lambda(x - y) = 0$. Protože λ nemůže být 0, je $x = y$. Dosazením do první rovnice dostaneme, že $x = y = \lambda = \pm 1/\sqrt{2}$, což dává přesně dvě řešení dané soustavy. Podezřelé body tak jsou

$$a = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \;\text{ a }\; b = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) .$$

Množina H je kompaktní a f je na ní spojitá, a proto f nabývá na H minimum i maximum. To jsou i lokální extrémy f. Protože $f(a) = -\sqrt{2}$ a $f(b) = \sqrt{2}$, má f na H v a globální minimum a v b globální maximum.

Druhý příklad ukazuje, že předpoklad lineární nezávislosti gradientů rovnicových funkcí nelze pominout. Vezměme si množinu $H \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí

$$H: \ F(x,y) = y^2 - x^3 = 0 \ ,$$

což je sjednocení grafů fukcí $y = x^{3/2}$ a $y = -x^{3/2}$ pro $x \geq 0$. Hledejme na H extrémy funkce $f(x,y) = x$. Máme $\nabla F = (-3x^2, 2y)$ a $\nabla f = (1,0)$. Pro podezřelé body dávají Lagrangeovy multiplikátory soustavu

$$y^2 - x^3 = 0, \ 1 = -3\lambda x^2 \ \text{ a } \ 0 = 2\lambda y \ .$$

Ta nemá řešení (z třetí rovnice je $\lambda = 0$ nebo $y = 0$ a obojí vede ke sporu s druhou rovnicí). Takže f nemá na H lokální extrém. To je však **chybný závěr**, protože f má zjevně v bodě $(0,0) \in H$ na H ostré globální minimum s hodnotou $f = 0$. Udělali jsme tu chybu, že jsme neověřili nenulovost vektoru ∇F v bodě $(0,0)$. A právě v něm se gradient ∇F anuluje, tj. předpoklad lineární nezávislosti v něm není splněn.

Trochu o metrických prostorech

Metrický prostor je struktura formalizující jev vzdálenosti. Je to dvojice (M,d) složená z množiny $M \neq \emptyset$ a funkce dvou proměnných

$$d: \ M \times M \to \mathbb{R},$$

tak zvané *metriky*, splňující tři axiomy:

a) $d(x,y) \geq 0$ (nezápornost) a $d(x,y) = d(y,x)$ (symetrie),
b) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ a
c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Nezápornost metriky v a) se nemusí požadovat, plyne z axiomů b) a c). Uvedeme si pár příkladů metrických prostorů. Axiomy a) a b) se ověří obvykle snadno. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost bývá často obtížnější.

Příklad 1. $M = \mathbb{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky $d_p(x, y)$ vztahem

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$. Pro $n = 1$ dostáváme klasickou metriku $|x - y|$ na $\mathbb{R}$ a pro $p = 2, n \geq 2$ *euklidovskou metriku*

$$d_2(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Pro $p = 1, n \geq 2$ dostáváme *pošťáckou metriku*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|\ .$$

Příklad 2. Za M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f:\ X \to \mathbb{R}$ definovaných na množině X. Na M pak máme *supremovou metriku*

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|\ .$$

Pokud $M = \mathcal{C}[a,b]$ (množina reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$), supremum se nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|\ .$$

Příklad 3. Pro souvislý graf $G = (M, E)$ s množinou vrcholů M máme metriku

$$d(u,v) = \text{počet hran na nejkratší cestě v } G \text{ spojující vrcholy } u \text{ a } v\ .$$

Příklad 4. Je-li A množina (abeceda), máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tak zvanou *Hammingovu metriku* ($u = a_1 a_2 \ldots a_m, v = b_1 b_2 \ldots b_m$)

$$d(u,v) = \text{počet souřadnic } i \text{, pro něž } a_i \neq b_i\ .$$

Měří míru odlišnosti obou slov, tj. jaký nejmenší počet změn v písmenech stačí k přeměně u ve v.

V rychlosti zavedeme pár základních pojmů; s mnohými jsme se již setkali u eukleidovských prostorů. Nechť (M, d) je metrický prostor. Pak

- *(otevřená) koule* v M se středem v bodu $a \in M$ a poloměrem $\mathbb{R} \ni r > 0$ je množina $B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$;
- $A \subset M$ je *otevřená množina*, pokud $\forall a \in A\ \exists r > 0 :\ B(a, r) \subset A$;
- $A \subset M$ je *uzavřená množina*, je-li $M \backslash A$ otevřená množina;
- $A \subset M$ je *omezená množina*, pokud existuje bod $a \in M$ a poloměr $r > 0$, že $A \subset B(a, r)$;
- $A \subset M$ je *kompaktní množina*, pokud každá posloupnost bodů $(a_n) \subset A$ má konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v A.

Konvergence a limita se zobecňují z reálné osy na obecný metrický prostor zřejmým způsobem: posloupnost $(a_n) \subset M$ je *konvergentní a za limitu má bod* $a \in M$, psáno $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon\ .$$

Jinak řečeno, $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ (převedli jsme to na limitu reálné posloupnosti).

Již jsme dříve zmínili vlastnosti otevřených množin: $\emptyset$ i M jsou otevřené, sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina a průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina (důkazy si rozmyslete jako cvičení). Přechodem k doplňkům máme duální vlastnosti uzavřených množin: $\emptyset$ i M jsou uzavřené, sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Následující tvrzení ukazuje, že uzavřené množiny jsou uzavřené na limity.

Tvrzení (charakterizace uzavřených množin). *$A \subset M$ je uzavřená množina v metrickém prostoru M, právě když limita každé její konvergentní podposloupnosti $(a_n) \subset A$ leží v A.*

Důkaz. Nechť $A \subset M$ je uzavřená množina a $(a_n) \subset A$ je konvergentní posloupnost. Kdyby $\lim_{n\to\infty} a_n = a \notin A$, existoval by poloměr $r > 0$, že

$B(a, r) \subset M \setminus A$. Pak ale $d(a_n, a) \geq r$ pro každé n, ve sporu s $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Tedy $a \in A$. Naopak, není-li $A \subset M$ uzavřená množina, podle definice existuje takový bod $a \in M \setminus A$, že pro každý poloměr $r > 0$ je $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Položíme $r = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, a pro každé n zvolíme libovolně bod $a_n \in B(a, 1/n) \cap A$. Pak $(a_n) \subset A$ a je to konvergentní posloupnost s $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ale $a \notin A$. $\square$