Výroková a predikátová logika - IV

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

Tablo - příklady

$$
\begin{array}{ccc}
 & F(((p \to q) \to p) \to p) & \\
 & | & \\
 & T((p \to q) \to p) & \\
 & | & \\
 & Fp & \\
 / & & \backslash \\
F(p \to q) & & Tp \\
| & & | \\
Tp & & \otimes \\
| & & \\
Fq & & \\
| & & \\
\otimes & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & F((\neg q \vee p) \to p) & \\
 & | & \\
 & T(\neg q \vee p) & \\
 & | & \\
 & Fp & \\
 / & & \backslash \\
T(\neg q) & & Tp \\
| & & | \\
Fq & & \otimes
\end{array}
$$

Atomická tabla

Atomické tablo je jeden z následujících (položkami značkovaných) stromů, kde p je libovolná výroková proměnná a φ, ψ jsou libovolné výrokové formule.

Tp	Fp	$\begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\ \vert \\ T\varphi \\ \vert \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & F(\varphi \wedge \psi) & \\ / & & \backslash \\ F\varphi & & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & T(\varphi \vee \psi) & \\ / & & \backslash \\ T\varphi & & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\ \vert \\ F\varphi \\ \vert \\ F\psi \end{array}$
$\begin{array}{c} T(\neg\varphi) \\ \vert \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\neg\varphi) \\ \vert \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & T(\varphi \to \psi) & \\ / & & \backslash \\ F\varphi & & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \to \psi) \\ \vert \\ T\varphi \\ \vert \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & T(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & & \backslash \\ T\varphi & & F\varphi \\ \vert & & \vert \\ T\psi & & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & F(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & & \backslash \\ T\varphi & & F\varphi \\ \vert & & \vert \\ F\psi & & T\psi \end{array}$

Tablo z teorie

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkovaný strom daný předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla τ a τ' vznikne z τ připojením atomického tabla pro P na konec větve V, je τ' rovněž konečné tablo,
- (ii)' je-li V větev konečného tabla (z T) a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec V vznikne rovněž konečné tablo z T.
- (iii) každé konečné tablo vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (ii)'.

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí pravidla (ii) či (ii)', formálně $\tau = \cup\tau_n$.

Tablo důkaz z teorie

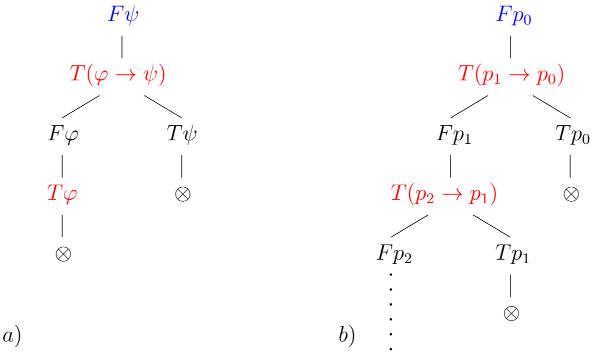
Nechť P je položka na větvi V tabla τ z teorie T. Řekneme, že

- položka P je *redukovaná* na V, pokud se na V vyskytuje jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k jejímu rozvoji na V,
- větev V je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou formuli φ,
- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo je každá její položka redukovaná na V a navíc obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená, a je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.

Tablo důkaz formule φ *z teorie* T je sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni, Má-li φ tablo důkaz z T, je *(tablo) dokazatelná z* T, píšeme $T \vdash \varphi$.

Zamítnutí formule φ *tablem z teorie* T je sporné tablo z T s $T\varphi$ v kořeni. Formule φ je *(tablo) zamítnutelná* z T, má-li zamítnutí tablem z T, tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady tabla z teorie



a) Tablo důkaz formule ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$, tedy $T \vdash \psi$.

b) Dokončené tablo pro formuli p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Všechny větve jsou dokončené, nejlevější větev je bezesporná a nekonečná. Poskytuje (jediný) model teorie T, ve kterém p_0 neplatí.

Systematické tablo

Popíšeme systematickou konstrukci, jež povede vždy k dokončenému tablu.

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

(1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R. Dokud to lze, aplikuj následující kroky.

(2) Nechť P je nejlevější položka v co nejmenší úrovni již daného tabla τ_n, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející skrze P.

(3) Za τ_n' vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze P. (Neexistuje-li P, vezmi $\tau_n' = \tau_n$.)

(4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ_n' přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n, vezmi $\tau_{n+1} = \tau_n'$.)

Systematické tablo z teorie T pro položku R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup\tau_n$.

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení *Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ dokončené.*

Důkaz Nechť $\tau = \cup \tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni.

- Je-li větev v τ bezesporná, je i každý její prefix v τ_n bezesporný.
- Je-li položka P neredukovaná na větvi v τ, je neredukovaná na každém jejím prefixu v τ_n (na němž leží).
- Do úrovně každé položky P (včetně její) je v τ jen konečně položek.
- Kdyby P byla neredukovaná na nějaké bezesporné větvi τ, přišla by na ní řada v nějakém kroku (2) a byla by zredukována krokem (3).
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. $\square$

Konečnost důkazů

Tvrzení *Je-li $\tau = \cup\tau_n$ sporné tablo, je τ_n sporné konečné tablo pro nějaké n.*

Důkaz

- Nechť S je množina vrcholů stromu τ, jenž nad sebou neobsahují spor, tj. mezi předky nemají dvojici $T\varphi$, $F\varphi$ pro žádné φ.
- Kdyby S byla nekonečná, dle Königova lemmatu by podstrom τ na vrcholech S obsahoval nekonečnou větev, tedy by τ nebylo sporné tablo.
- Jelikož je S konečné, všechny vrcholy z S leží do úrovně m pro nějaké m.
- Tedy každý vrchol v úrovni $m+1$ má nad sebou spor.
- Zvolme n takové, že τ_n se shoduje s τ do úrovně $m+1$ včetně.
- Pak každá větev v τ_n je sporná. □

Důsledek *Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.*

Důkaz Při jeho konstrukci se prodlužují jen bezesporné větve. □

Korektnost

Řekneme, že položka P se *shoduje* s ohodnocením v, pokud P je $T\varphi$ a $\overline{v}(\varphi) = 1$ nebo pokud P je $F\varphi$ a $\overline{v}(\varphi) = 0$. Větev V tabla se shoduje s v, shoduje-li se s v každá položka na V.

Lemma *Nechť v je model teorie T, který se shoduje s položkou v kořeni tabla $\tau = \cup\tau_n$ z T. Pak v tablu τ existuje větev shodující se s v.*

Důkaz Indukcí nalezneme posloupnost $V_0, V_1, \ldots$ takovou, že pro každé n je V_n větev v τ_n shodující se s v a V_n je obsažena ve V_{n+1}.

- Ověřením atomických tabel snadno zjistíme, že základ indukce platí.
- Pokud τ_{n+1} vznikne z τ_n bez prodloužení V_n, položme $V_{n+1} = V_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, nechť V_{n+1} je tato větev. Jelikož v je model φ, shoduje se V_{n+1} s v.
- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n. Jelikož se P shoduje s v a tvrzení platí pro atomická tabla, lze požadovanou větev V_{n+1} v τ_{n+1} nalézt. $\square$

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je korektní.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, je-li φ tablo dokazatelná z T, je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Nechť φ je tablo dokazatelná z teorie T, tj. existuje sporné tablo τ s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T, tj. existuje model v teorie T, ve kterém φ neplatí (protipříklad).
- Jelikož se položka $F\varphi$ shoduje s v, dle předchozího lemmatu v tablu τ existuje větev shodující se s v.
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi$, $F\psi$ pro nějaké ψ. $\square$

Úplnost

Ukážeme, že bezesporná větev v dokončeném tablu poskytuje protipříklad.

Lemma *Nechť V je bezesporná větev dokončeného tabla τ. Pro následující ohodnocení v výrokových proměnných platí, že V se shoduje s v.*

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se } Tp \text{ vyskytuje na } V \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Důkaz Indukcí dle struktury formule v položce vyskytující se na V.

- Je-li položka Tp na V, kde p je prvovýrok, je $\overline{v}(p) = 1$ dle definice v.
- Je-li položka Fp na V, není Tp na V, jinak by V byla sporná, tedy $\overline{v}(p) = 0$ dle definice v.
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $T\varphi$ a $T\psi$ na V, neboť τ je dokončené. Dle indukčního předpokladu je $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi) = 1$, tedy $\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = 1$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V, neboť τ je dokončené. Dle indukčního předpokladu je $\overline{v}(\varphi) = 0$ nebo $\overline{v}(\psi) = 0$, tedy $\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = 0$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech. $\square$

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je i úplná.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, je-li φ pravdivá v T, je φ tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \varphi$.*

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokončené tablo (např. *systematické*) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je sporné.

- Kdyby ne, nechť V je nějaká bezesporná větev tabla τ.
- Dle předchozího lemmatu existuje ohodnocení v prvovýroků takové, že V se shoduje s v, speciálně s $F\varphi$, tj. $\overline{v}(\varphi) = 0$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy v je modelem teorie T (neboť větev V se shoduje s v).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je důkazem φ z T. □

Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie nad $\mathbb{P}$. Je-li φ dokazatelná z T, řekneme, že φ je *věta* (*teorém*) teorie T. Množinu vět teorie T označme

$$\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- *sporná*, jestliže je v T dokazatelný $\perp$ (spor), jinak je *bezesporná*,
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá formule je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$,
- *extenze* teorie T' nad $\mathbb{P}'$, jestliže $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ a $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, a *konzervativní*, pokud $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') = \mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) \cap \mathrm{VF}_{\mathbb{P}'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T.

Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek *Pro každou teorii T a formule φ, ψ nad $\mathbb{P}$,*

- $T \vdash \varphi$ *právě když* $T \models \varphi$,
- $\mathrm{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \theta^{\mathbb{P}}(T)$,
- *T je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,*
- *T je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má právě jeden model,*
- $T, \varphi \vdash \psi$ *právě když* $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ *(Věta o dedukci).*

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

Věta o kompaktnosti

Věta *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz 1 Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný $\bot$ systematickým tablem τ. Jelikož je τ konečné, je $\bot$ dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. $\square$

Poznámka *Tento důkaz je založen na konečnosti důkazu, korektnosti a úplnosti. Uveďme ještě druhý, přímý důkaz (pomocí Königova lemmatu).*

Důkaz 2 Nechť $T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Uvažme strom S na konečných binárních posloupnostech σ uspořádaných prodloužením. Přičemž $\sigma \in S$, právě když existuje ohodnocení v prodlužující σ takové, že $v \models \varphi_i$ pro každé $i \leq \mathrm{lth}(\sigma)$.

Pozorování *S má nekonečnou větev, právě když T má model.*

Jelikož $\{\varphi_i \mid i \in n\} \subseteq T$ má model pro každé $n \in \mathbb{N}$, bude každá úroveň v S neprázdná. Tedy S je nekonečný, navíc binární, a dle Königova lemmatu obsahuje nekonečnou větev. $\square$

Aplikace kompaktnosti

Graf (V, E) je *k-obarvitelný*, pokud existuje $c\colon V \to k$ takové, že $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $\{u, v\} \in E$.

Věta *Spočetně nekonečný graf $G = (V, E)$ je k-obarvitelný, právě když každý jeho konečný podgraf je k-obarvitelný.*

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Nechť každý konečný podgraf v G je k-obarvitelný. Vezměme $\mathbb{P} = \{p_{u,i} \mid u \in V, i \in k\}$ a teorii T s axiomy

$$
\begin{array}{ll}
p_{u,0} \vee \cdots \vee p_{u,k-1} & \text{pro všechna } u \in V, \\
\neg(p_{u,i} \wedge p_{u,j}) & \text{pro všechna } u \in V, i < j < k, \\
\neg(p_{u,i} \wedge p_{v,i}) & \text{pro všechna } \{u, v\} \in E, i < k.
\end{array}
$$

Platí, že G je k-obarvitelný, právě když T má model. Dle věty o kompaktnosti stačí dokázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model. Nechť G' je podgraf na vrcholech u takových, že $p_{u,i}$ se vyskytuje v T' pro nějaké i. Jelikož G' je k-obarvitelný dle předpokladu, má T' model. $\square$

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky: $\neg$, $\rightarrow$ (ostatní z nich odvozené)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů):

$$
\begin{array}{rc}
(i) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\
(ii) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\
(iii) & (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

  kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka).
- *odvozovací pravidlo*:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \qquad \text{(modus ponens)}$$

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ v teorii T je konečná posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \le n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacího pravidla.

Poznámka *Volba axiomů a odvozovacích pravidel se v může v různých dokazovacích systémech Hilbertova stylu lišit.*

Příklad a korektnost

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.
Je-li $T = \emptyset$, značíme $\vdash_H \varphi$. Např. pro $T = \{\neg\varphi\}$ je $T \vdash_H \varphi \to \psi$ pro každé ψ.

1)	$\neg\varphi$	axiom z T
2)	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	logický axiom (i)
3)	$\neg\psi \to \neg\varphi$	modus ponens z 1), 2)
4)	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	logický axiom (iii)
5)	$\varphi \to \psi$	modus ponens z 3), 4)

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, tj. modus ponens je korektní,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. $\square$

Poznámka *Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorii T a formuli φ.*