

Risultato:

(a cura del docente)

Esame di: **Controlli Automatici**

Tema: **Sottomarino telecomandato da remoto
(ROV)**

Consegna: **15 maggio 2023**

Gruppo: **CA22-03**

Studenti: **Castelli Giovanni, 0712704**

Costa Gabriele Nicolò, 0711990

Renda Raoul, 0713635

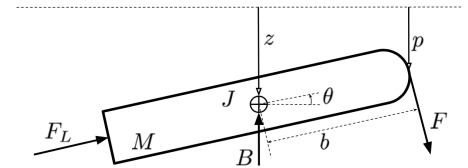
Nevaloro Giovanni, 0712206

Spedito Antonio, 0712222

Macaluso Alessandro, 0712329

Tema *Sottomarino telecomandato da remoto (ROV)*

Un sottomarino telecomandato da remoto (ROV) è soggetto alla spinta di galleggiamento, alla spinta longitudinale dei motori di poppa e a quella dei motori di prua. La navigazione del veicolo richiede di stabilizzare la posizione della prua del veicolo attraverso la misura della stessa.



$$\begin{aligned} M \ddot{z} &= F \cos \vartheta - k_z \dot{z} \cos \vartheta - F_L \sin \vartheta - B, \\ J \ddot{\vartheta} &= -k_r \dot{\vartheta} - k_\vartheta \sin \vartheta - F b, \\ y &= z - b \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (1)$$

Tabella 1 - Variabili e altre funzioni

Variab.	Descrizione
z	profondità del centro di massa dal pelo d'acqua [m]
ϑ	angolo di beccheggio [rad]
F	(ingresso) propulsione dei motori di prua [N]

Tabella 2 - Parametri

Param.	Descrizione	Valore
M	massa della sottomarino [kg]	580
J	inerzia laterale del sottomarino [Nms ²]	560
B	spinta di galleggiamento [N]	20
F_L	spinta di propulsione longitudinale [N]	-
b	distanza centro di massa – prua [m]	-1.2
k_z, k_r	coefficienti degli attriti viscosi [Ns/m], [Nms]	133 e 168
k_ϑ	costante di leva [Nm]	143

Tabella 3 - Condizioni di equilibrio e Requisiti

Equilibrio (H1)	Angolo di beccheggio $\vartheta = \pi/6$ [rad] e spinta di galleggiamento $B = \bar{B}$; \bar{z} , \bar{F} e \bar{F}_L da determinare.
Requisito (R1)	Inseguimento perfetto di riferimenti costanti per la variazione dell'uscita, con un tempo di risposta non superiore a 45 s ed eventuali oscillazioni entro il 5% dal valore di regime.

Istruzioni per la consegna

Ogni tema progettuale si propone di far sperimentare allo studente, sia pure in modo semplificato, i diversi momenti di analisi e progettazione, sottesi alla soluzione di un problema di controllo; ciò avviene, per ovvie ragioni, attraverso uno studio teorico e solo simulato, come è tipico nei corsi di controlli automatici di base, ma rappresenta comunque un momento fondamentale che precede qualsiasi realizzazione completa e sperimentale. Le Tabelle 1 e 2 indicano il significato delle variabili e dei parametri del modello (1), mentre le prime due righe della Tabella 3 specificano le ipotesi operative di equilibrio, mentre le restanti righe i requisiti di progetto.

La consegna del progetto avviene inviando un'email all'indirizzo di posta elettronica *esame.mirpalab@gmail.com*, con oggetto “[CA22-03] Consegna” e con allegato il PDF generato da questo documento. La consegna può essere fatta solo dal corrispondente del gruppo.

Dal momento della consegna non sarà più possibile modificare il seguente progetto overleaf, il quale dovrà includere almeno i seguenti contenuti:

- i file sorgenti L^AT_EX del PDF (main.tex, theme.tex, 1*.tex, 2*.tex, 3*.tex);
- una cartella *img* contenente le immagini e tutti i grafici inseriti nel testo, che devono essere riportati in formato vettoriale e contenere annotazioni adeguate e leggibili;
- una cartella *support* contenente (1) gli script (estensione .m) necessari per inizializzare e lanciare la simulazione, (2) i salvataggi delle sessioni di lavoro in *sisotool*, e (3) i due diagrammi *Simulink* (estensione .slx) dei sistemi approssimato lineare e non lineare, controllati (eventualmente con il doppio anello di retroazione), correttamente funzionanti e tali da riprodurre i risultati riportati nel documento descrittivo.

1 Parte Simbolica

Si risponda ai seguenti quesiti in modo simbolico:

- (a) Usando le condizioni (H1) nella Tabella 3, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.

Soluzione:

Al fine di determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, dobbiamo imporre le condizioni:

$$\begin{cases} \vartheta = \frac{\pi}{6} \\ B = \bar{B} \end{cases}$$

Alle equazioni di dinamica:

$$M\ddot{z} = F \cos \vartheta - k_z \dot{z} \cos \vartheta - F_L \sin \vartheta - B$$

$$J\ddot{\vartheta} = -k_r \dot{\vartheta} - k_{\vartheta} \sin \vartheta - Fb$$

All'equilibrio si verifica che:

$$\begin{cases} \vartheta = \bar{\vartheta} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\vartheta} = \dot{\vartheta} = 0 \\ \ddot{z} = \dot{z} = 0 \end{cases} \\ z = \bar{z} \rightarrow \end{cases}$$

$$0 = \frac{\bar{F}}{M} \cdot \cos \bar{\vartheta} - \frac{k_z}{M} \cdot 0 - \frac{\bar{F}_L}{M} \cdot \sin \bar{\vartheta} - \frac{\bar{B}}{M}$$

$$0 = \frac{k_r}{J} \cdot 0 - \frac{k_{\vartheta}}{J} \cdot \sin \bar{\vartheta} - \frac{\bar{F}}{J} \cdot b$$

Normalizzando le equazioni di dinamica e sostituendovi le condizioni di equilibrio imposte troviamo dalla seconda equazione:

$$\bar{F} = -\frac{K_{\vartheta}}{2b}$$

Sostituendo il valore di \bar{F} nella prima equazione troviamo \bar{F}_L

$$\bar{F}_L = \frac{\bar{F} \cdot \cos \bar{\vartheta} - B}{\sin \bar{\vartheta}} = \left(-\frac{k_{\vartheta}}{2 \cdot b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \bar{B}\right) \cdot \frac{2}{2} = -\frac{k_{\vartheta}}{2 \cdot b} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \bar{B}$$

Notiamo che la quota z non interviene, dunque possiamo assumere come configurazione di equilibrio una z arbitraria. Le configurazioni di equilibrio delle variabili

$$\bar{F}, \bar{F}_L \text{ e } \bar{z} \text{ dunque sono: } \begin{cases} \bar{F} = -\frac{k_{\vartheta}}{2 \cdot b} \\ \bar{F}_L = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{k_{\vartheta}}{b} - 2B \\ \bar{z} = \text{arbitraria} \end{cases}$$

- (b) Assumendo piccoli spostamenti dello stato del sistema dagli equilibri trovati sopra, determinare il modello linearizzato per le variabili traslate.

Soluzione:

Definisco le variabili traslate attorno al punto di equilibrio come:

$$\begin{cases} \delta F = F - \bar{F} \\ \delta \vartheta = \vartheta - \bar{\vartheta} \\ \delta z = z - \bar{z} \end{cases}$$

Sostituendo nelle equazioni di dinamica rispetto alle variabili non traslate del modello iniziale, e sviluppando attraverso lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine, procediamo alla linearizzazione delle equazioni del modello. Partendo dalla prima equazione di dinamica:

$$M\delta\ddot{z} = (\bar{F} + \delta F) \cos(\delta\vartheta + \bar{\vartheta}) - \delta\dot{z}k_z \cos(\delta\vartheta + \bar{\vartheta}) - \bar{F}_L \sin(\delta\vartheta + \bar{\vartheta}) - B$$

Sviluppando il seno e coseno con Taylor e troncandolo al primo ordine:

$$\cos(\delta\vartheta + \bar{\vartheta}) = \cos(\bar{\vartheta}) - \sin(\bar{\vartheta})\delta\vartheta$$

$$\sin(\delta\vartheta + \bar{\vartheta}) = \sin(\bar{\vartheta}) + \cos(\bar{\vartheta})\delta\vartheta$$

Sostituendo lo sviluppo nell'equazione:

$$M\delta\ddot{z} = (\bar{F} + \delta F)[\cos(\bar{\vartheta}) - \sin(\bar{\vartheta})\delta\vartheta] - \delta\dot{z}k_z[\cos(\bar{\vartheta}) - \sin(\bar{\vartheta})\delta\vartheta] - \bar{F}_L[\sin(\bar{\vartheta}) + \cos(\bar{\vartheta})\delta\vartheta] - B =$$

$$= \bar{F} \cos \bar{\vartheta} - \bar{F} \sin \bar{\vartheta} \delta\vartheta + \delta F \cos \bar{\vartheta} - \sin \bar{\vartheta} \delta F \delta\vartheta - \delta z' k_z \cos \bar{\vartheta} + \delta z' \delta\vartheta k_z \sin \bar{\vartheta} - \bar{F}_L \sin \bar{\vartheta} - \bar{F}_L \delta\vartheta \cos \bar{\vartheta} - B$$

Ignorando tutto ciò che non è del primo ordine ed eliminando le costanti (che, in virtù del fatto che abbiamo sviluppato il modello al primo ordine si elideranno a vicenda), scrivo la prima equazione dinamica del modello linearizzato come:

$$M\delta\ddot{z} = -(\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta}) \cdot \delta\vartheta + \cos \bar{\vartheta} \delta F - k_z \cos \bar{\vartheta} \delta\dot{z}$$

$$\delta\ddot{z} = -\frac{1}{M}(\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta})\delta\vartheta + \frac{1}{M} \cos \bar{\vartheta} \delta F - \frac{1}{M} k_z \cos \bar{\vartheta} \delta\dot{z}$$

Procedendo in maniera analoga per la seconda equazione di dinamica, ottengo la seconda equazione del modello linearizzato:

$$J\delta\ddot{\vartheta} = -k_r\delta\dot{\vartheta} - k_{\vartheta}[\sin \bar{\vartheta} + \cos \bar{\vartheta}\delta\vartheta] - (\bar{F} + \delta F)b$$

$$J\delta\ddot{\vartheta} = -k_r\delta\dot{\vartheta} - k_{\vartheta} \sin \bar{\vartheta} - k_{\vartheta} \cos \bar{\vartheta}\delta\vartheta - \bar{F}b - b \cdot \delta F$$

$$J\delta\ddot{\vartheta} = -k_r\delta\dot{\vartheta} - k_{\vartheta} \cdot \cos \bar{\vartheta}\delta\vartheta - b\delta F$$

$$\delta\ddot{\vartheta} = \frac{1}{J}(-k_r\delta\dot{\vartheta}) - \frac{1}{J}k_{\vartheta} \cos \bar{\vartheta}\delta\vartheta - \frac{1}{J}b\delta F$$

Indicando il vettore di stato \mathbf{x} e il vettore degli ingressi \mathbf{u} come:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta \vartheta \\ \delta \dot{z} \\ \delta \dot{\vartheta} \end{pmatrix}, \mathbf{u} \triangleq \delta F$$

$$\begin{cases} x_1 = \delta z \\ x_2 = \delta \vartheta \\ x_3 = \delta \dot{z} \\ x_4 = \delta \dot{\vartheta} \end{cases}, \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \delta \ddot{z} \\ \dot{x}_4 = \delta \ddot{\vartheta} \end{cases}$$

Scriviamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -\frac{1}{M}(\bar{u}_1 \sin \bar{x}_2 + \bar{F}_L \cos \bar{x}_2)x_2 + \frac{\cos \bar{x}_2}{M}u_1 - \frac{k_z}{M} \cos \bar{x}_2 x_3 \\ \dot{x}_4 = -\frac{k_r}{J}x_4 - \frac{k_\vartheta}{J} \cos \bar{x}_2 x_2 - \frac{b}{J}u_1 \end{cases}$$

Identifichiamo quindi la matrice di dinamica A e la matrice di ingresso B tali da poter scrivere $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{M}(\bar{u}_1 \sin \bar{x}_2 + \bar{F}_L \cos \bar{x}_2) & -\frac{k_z}{M} \cos \bar{x}_2 & 0 \\ 0 & -\frac{k_\vartheta}{J} \cos \bar{x}_2 & 0 & -\frac{k_r}{J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\cos \bar{x}_2}{M} \\ -\frac{b}{J} \end{bmatrix}$$

Possiamo procedere inoltre alla determinazione dell'uscita linearizzata approssimata semplicemente tenendo conto della variabile traslata di uscita come:

$$y = z - b \cdot \sin \vartheta$$

$$\delta y = (\delta z + \bar{z}) - b \cdot \sin \bar{\vartheta} - b \cdot \cos \bar{\vartheta} \cdot \delta \vartheta - \bar{z} + b \cdot \sin \bar{\vartheta}$$

Come fatto precedentemente per le equazioni di dinamica, anche per l'uscita "scartiamo" tutto ciò che non è del primo ordine e verifichiamo che le costanti si annullino a vicenda:

$$\delta y = \delta z - b \cdot \cos \bar{\vartheta} \cdot \delta \vartheta$$

Definendo infine il vettore di uscita traslata $y = \delta y$ possiamo scrivere $y = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$, ovvero:

$$y = x_1 - b \cos \bar{x}_2 x_2$$

Ottenendo infine le matrici di uscita C e la matrice diretta D :

$$C = [1 \quad -b \cos \bar{\vartheta} \quad 0 \quad 0]$$

$$D = 0$$

- (c) Indicando con x_0 il generico stato iniziale, determinare l'evoluzione libera del modello ed esprimerla come $M(A, x_0) m(t)$, con $m(t)$ il vettore dei modi.

Soluzione:

Per poter scrivere la soluzione libera del sistema come $x(t) = e^{At}x_0$ con: x_0 il vettore delle condizioni iniziali e A la matrice di dinamica trovata al punto (b), troviamo gli autovalori associati alla matrice di dinamica, quindi dobbiamo trovare le soluzioni del polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}\rho(\lambda) &= \det(A - \lambda I_4) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \rho(\lambda) &= \lambda\left(\frac{k_z}{M} \cos \bar{x}_2 + \lambda\right)\left(\lambda\left(\frac{k_r}{J} + \lambda\right) - \frac{k_\vartheta}{J} \cos \bar{x}_2\right) = 0\end{aligned}$$

I 4 autovalori trovati sono pertanto:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = -\frac{k_z}{M} \cos \bar{x}_2$
- $\lambda_{3,4} = \frac{-\frac{k_r}{J} \pm \sqrt{(\frac{k_r}{J})^2 - 4 \cdot \frac{k_\vartheta}{J} \cdot \cos \bar{x}_2}}{2}$

Notiamo che, in base al valore assunto dal radicando (ovvero il Δ degli autovalori $\lambda_{3,4}$) ci possiamo trovare in 3 casi diversi:

1. $\Delta > 0$, $\lambda_{3,4}$ sono reali e distinti.
2. $\Delta = 0$, $\lambda_{3,4}$ sono reali e coincidenti.
3. $\Delta < 0$, $\lambda_{3,4}$ sono complessi coniugati.

Il valore del radicando influisce difatti sui modi generati dal sistema, in quanto:

1. Se siamo nel primo caso avremo un vettore dei modi del tipo:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}$$

2. Se siamo nel secondo avremo modi esponenziali polinomiali in corrispondenza degli autovalori coincidenti:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ t e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

3. Se siamo nel terzo caso allora avremo modi esponenziali sinusoidali in corrispondenza degli autovalori complessi coniugati:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Procedendo al calcolo del determinante ci troviamo nel terzo caso. Per procedere al calcolo invece della soluzione libera e poterla scrivere come $x(t) = e^{At}x_0 = M(A, x_0)m(t)$ dobbiamo dapprima calcolare e^{At} per farlo, dobbiamo calcolare gli autovettori associati agli autovalori trovati imponendo il sistema $(A - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = 0$ dove \mathbf{v}_i è il generico autovettore.

Riscrivo intanto la matrice A con le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{M}(\bar{u}_1 \sin \bar{x}_2 + \bar{F}_L \cos \bar{x}_2) \\ b = -\frac{k_z}{M} \cos \bar{x}_2 \\ c = -\frac{k_\vartheta}{J} \cos \bar{x}_2 \\ d = -\frac{k_r}{J} \end{cases}$$

Riscrivo anche gli autovalori λ , pertanto diventano:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -\frac{(4c+d^2)^{\frac{1}{2}}+d}{2} \\ \frac{(4c+d^2)^{\frac{1}{2}}+d}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = b = -\frac{k_z}{M} \cos \bar{x}_2 \\ \lambda_{3,4} = \frac{-\frac{k_r}{J} \pm i \sqrt{(\frac{k_r}{J})^2 - 4 \cdot \frac{k_\vartheta}{J} \cdot \cos \bar{x}_2}}{2} \end{cases}$$

Calcolo l'autovettore associato a λ_1 :

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (A - 0I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies A\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$ è:

$$\mathbf{v}_1 = (x, 0, 0, 0) \quad \mathcal{B}_{v_1} = \{x (1, 0, 0, 0)\}$$

Calcolo l'autovettore associato a λ_2 :

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (A - bI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

L'autovettore associato all'autovalore $\lambda_2 = b$ è:

$$\mathbf{v}_2 = (\frac{z}{b}, 0, 1, 0) \quad \mathcal{B}_{v_2} = \{z (\frac{1}{b}, 0, 1, 0)\}$$

Adesso calcolo l'autovettore associato a $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{(4c+d^2)}+d}{2}$: $(A - \lambda_3 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Troviamo l'autovettore \mathbf{v}_3 associato all'autovalore λ_3 :

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{2bc+c\sqrt{4c+d^2+d^2}\sqrt{4c+d^2-bd}\sqrt{4c+d^2-d^3+bd^2-3cd}} \\ \frac{-2}{\sqrt{4c+d^2-d}} \\ \frac{2a}{2c+b\sqrt{4c+d^2-d}\sqrt{4c+d^2+d^2-bd}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\lambda_4 = \lambda_3^*$ allora lo sarà anche il suo autovettore, pertanto:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3^*$$

Scrivo la matrice T degli autovettori:

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3^*} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_3^* \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & v_{31} & v_{31}^* \\ 0 & 0 & v_{32} & v_{32}^* \\ 0 & 1 & v_{33} & v_{33}^* \\ 0 & 0 & v_{34} & v_{34}^* \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

$$TE = Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & Re\{v_{31}\} & Im\{v_{31}\} \\ 0 & 0 & Re\{v_{32}\} & Im\{v_{32}\} \\ 0 & 1 & Re\{v_{33}\} & Im\{v_{33}\} \\ 0 & 0 & Re\{v_{34}\} & Im\{v_{34}\} \end{pmatrix}$$

Calcolo Q^{-1} con il metodo dei cofattori.

La matrice Q è invertibile $\Leftrightarrow \det(Q) \neq 0$

Per semplicità di calcolo pongo:

$$\begin{cases} v_{31} = l \\ v_{32} = m \\ v_{33} = n \\ v_{34} = o \\ v_{31}^* = p \\ v_{32}^* = q \\ v_{33}^* = r \\ v_{34}^* = s \end{cases}$$

Ottenendo così:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-bop+or+bls-ns}{boq-bms} & -\frac{1}{b} & \frac{bmp-blq+nq-mr}{boq-bms} \\ 0 & \frac{-or+ns}{oq-ms} & 1 & \frac{-nq+mr}{oq-ms} \\ 0 & \frac{o-s}{oq-ms} & 0 & \frac{-m+q}{oq-ms} \\ 0 & \frac{oq-ms}{oq-ms} & 0 & \frac{im+iq}{oq-ms} \end{pmatrix}$$

Dopo aver svolto il prodotto $Q \cdot e^{\Lambda^* t} \cdot Q^{-1}$, lo moltiplico per il vettore delle condizioni iniziali x_0 :

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ x_{04} \end{pmatrix}$$

Trovando la fattorizzazione $M(A, x_0) \cdot m(t) = Q \cdot e^{\Lambda^* t} \cdot Q^{-1} \cdot x_0 = x(t)$ e mettendo a fattor comune i modi, il calcolo diventa:

$$\begin{aligned} M(A, x_0) \cdot m(t) = & e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{bx_{04}mp-bx_{02}op-bx_{04}lq+x_{04}nq+bx_{01}oq-x_{03}mr+x_{02}or+bx_{02}ls-bx_{01}ms+x_{03}ms-x_{02}ns}{b(oq-ms)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-x_{04}nq+x_{03}oq+x_{04}mr-x_{02}or-x_{03}ms}{b(oq-ms)} \\ 0 \\ \frac{-x_{04}nq+x_{03}oq+x_{04}mr-x_{02}or-x_{03}ms+x_{02}ns}{oq-ms} \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & + e^{\sigma t} \cos \omega t \begin{pmatrix} \frac{bx_{04}mp+bx_{02}op+bx_{04}lq-bx_{02}ls}{b(oq-ms)} \\ \frac{x_{02}oq-x_{02}ms}{oq-ms} \\ \frac{x_{04}nq-x_{04}mr+x_{02}or-x_{02}ns}{oq-ms} \\ \frac{x_{04}oq-x_{04}ms}{oq-ms} \end{pmatrix} + \\ & + e^{\sigma t} \sin \omega t \begin{pmatrix} \frac{ibx_{04}mp-ibx_{02}op+ibx_{04}lq-ibx_{02}ls}{b(oq-ms)} \\ \frac{2ix_{04}mq-ix_{02}oq-ix_{02}ms}{oq-ms} \\ \frac{ix_{04}nq+ix_{04}mr-ix_{02}or-ix_{02}ns}{oq-ms} \\ \frac{ix_{04}oq+ix_{04}ms-2ix_{02}os}{oq-ms} \end{pmatrix} = \\ & = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ 0 & 0 & M_{23} & M_{24} \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}}_{M(A, x_0)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}}_{m(t)} \end{aligned}$$

- (d) Usando anche l'ipotesi di equilibrio (H2), discutere l'andamento asintotico dei modi e la stabilità del sistema.

Soluzione:

Condizione necessaria e sufficiente alla stabilità è che tutti gli autovalori si trovino nella regione di convergenza o nella regione di stabilità marginale. Difatti, dal momento che abbiamo 4 autovalori, di cui due complessi coniugati, il vettore dei modi è:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso abbiamo quattro autovalori tutti con $m.a = m.g$ e con $Re\{\lambda\} < 0$ parte reale negativa (eccezion fatta per il primo autovalore che è nullo $Re\{\lambda\} = 0$). Questo ci porta a dire che avremo modi convergenti all'infinito (dunque il sistema interno non è divergente, ossia instabile). In particolare diremo che:

- Per $\lambda = \lambda_1$ abbiamo un modo m_1 limitato e costante (regione di stabilità marginale)
- Per $\lambda = \lambda_2$ abbiamo un modo m_2 limitato e convergente esponenzialmente
- Per $\lambda = \lambda_{3,4}$ abbiamo due modi m_3 e m_4 che sono esponenziali oscillanti convergenti, dal momento che la parte reale dell'autovalore è negativa.

In definitiva il sistema risulta essere stabile ma non attrattivo.

- (e) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra la variazione dell'ingresso e la variazione dell'uscita e determinare, se possibile, le posizioni dei rispettivi poli ed eventuali zeri

Soluzione:

La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega la trasformata di Laplace della variazione dell'uscita,

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$$

Dove:

$$\begin{cases} \Delta Y(s) = \mathcal{L}[\delta y] \\ \Delta F(s) = \mathcal{L}[\delta F] \\ \Delta Z(s) = \mathcal{L}[\delta z] \\ \Delta \vartheta(s) = \mathcal{L}[\delta \vartheta] \end{cases}$$

Riprendendo le equazioni del modello linearizzato:

$$\delta y = \delta z - b \cos \bar{\vartheta} \delta \vartheta \xrightarrow{\mathcal{L}} \Delta Y(s)$$

$$\Delta Y(s) = \Delta Z(s) - b \cos \bar{\vartheta} \Delta \vartheta(s)$$

$$\delta \ddot{\vartheta} = -\frac{K_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} \delta \vartheta - \frac{k_r}{J} \delta \dot{\vartheta} - \frac{b}{J} \delta F$$

$$\mathcal{L}[\delta \ddot{\vartheta}] = s^2 \Delta \vartheta(s)$$

$$\mathcal{L}[\delta \dot{\vartheta}] = s \Delta \vartheta(s)$$

$$s^2 \Delta \vartheta(s) = -\frac{K_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} \Delta \vartheta(s) - \frac{k_r}{J} s \Delta \vartheta(s) - \frac{b}{J} \Delta F(s)$$

Esprimo la $\Delta \vartheta(s)$ in funzione di $\Delta F(s)$:

$$\Delta \vartheta(s) = -\frac{\frac{b}{J}}{s^2 + \frac{K_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} + \frac{k_r}{J} s} \Delta F(s)$$

Dalla altra equazione del modello linearizzato:

$$\delta \ddot{z} = -\frac{1}{M} (\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta} \delta \vartheta + \frac{\cos \bar{\vartheta}}{M} \vartheta F - \frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta} \delta z$$

$$\mathcal{L}[\delta \ddot{z}] = s^2 \Delta z(s)$$

$$\mathcal{L}[\delta \dot{z}] = s \Delta z(s)$$

$$s^2 \Delta z(s) = -\frac{1}{M} (\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta}) \Delta \vartheta(s) + \frac{\cos \bar{\vartheta}}{M} \Delta F(s) - \frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta} s \Delta z(s)$$

Anche qui, esprimo $\Delta z(s)$ in funzione di $\Delta F(s)$:

$$\Delta z(s) = \frac{(\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta}) \frac{b}{J} + \cos \bar{\vartheta} (s^2 + \frac{k_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} + \frac{k_r}{J} s)}{s M (s^2 + \frac{K_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} + \frac{k_r}{J} s) (s + \frac{k_z}{M} \cos \bar{\vartheta})} \Delta F(s)$$

Sostituendo all'espressione della $\Delta Y(s)$ le equazioni di $\Delta \vartheta(s)$ e $\Delta z(s)$ in funzione di $\Delta F(s)$, avremo:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\Delta Y(s)}{\Delta F(s)} = \\ &= \frac{(\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta}) \frac{b}{J} + \cos \bar{\vartheta} (s^2 + \frac{k_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} + \frac{k_r}{J} s) + b^2 \cos \bar{\vartheta} \frac{M}{J} s (s + \frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta})}{M (s^2 + \frac{K_{\vartheta}}{J} \cos \bar{\vartheta} + \frac{k_r}{J} s) (s + \frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta}) s} \end{aligned}$$

Indicando con:

$$\begin{cases} \alpha = \cos \bar{\vartheta} + b^2 \cos \bar{\vartheta} \frac{M}{J} \\ \beta = \cos \bar{\vartheta} \frac{k_r}{J} + b^2 \cos \bar{\vartheta} \frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta} M \\ \gamma = (\bar{F} \sin \bar{\vartheta} + \bar{F}_L \cos \bar{\vartheta}) \frac{b}{J} + \frac{k_r}{J} \cos \bar{\vartheta} \cos \bar{\vartheta} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}{M(s^2 + \frac{K_\vartheta}{J} \cos \bar{\vartheta} + \frac{k_r}{J} s)(s + \frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta})s}$$

Normalizzo e porto in forma zpk la funzione di trasferimento $G(s)$ per determinare poli, zeri e guadagno statico di anello K_0 .

Indicando con:

$$\begin{cases} K_0 = \frac{\alpha}{M} \\ \dot{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \\ \dot{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} \end{cases}$$

$$z_{1,2} = \frac{-\dot{\beta} \pm \sqrt{(\dot{\beta}^2 - 4\dot{\gamma})}}{2}$$

Per quanto riguarda il denominatore:

$$\begin{cases} p_{1,2} = \frac{-\frac{k_r}{J} \pm \sqrt{\frac{k_r^2}{J^2} - 4 \frac{K_\vartheta}{J} \cos \bar{\vartheta}}}{2} \\ p_3 = -\frac{K_z}{M} \cos \bar{\vartheta} \\ p_4 = 0 \end{cases}$$

$$G(s) = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{s(s - p_3)(s - p_1)(s - p_2)}$$

I poli coincidono con gli autovalori dunque ne abbiamo due complessi coniugati a parte reale negativa, un polo reale a parte reale negativa e un polo nell'origine. Per quanto riguarda gli zeri, ne abbiamo due che sono le soluzioni del numeratore.

- (f) Passando all'uso dei valori numerici indicati in Tabella 2, determinare valutare $G(s)$, discuterne la posizione e la molteplicità dei poli e degli eventuali zeri, e verificarne la stabilità.

Soluzione:

Passando all'uso dei valori numerici indicati in Tabella 2, otteniamo:

$$G(s) = \frac{0.0037201(s + 0.3995)(s - 0.1602)}{s(s + 0.1986)(s^2 + 0.3s + 0.2211)}$$

Dove evidenziamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = 0.0037201 \\ z_1 = -0.3995, \\ z_2 = 0.1602, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = -0.1986, \\ p_3 = -0.1500 + 0.4457i, \\ p_4 = -0.1500 - 0.4457i \end{array} \right.$$

La funzione ha un guadagno statico k_0 due zeri reali (di cui uno a parte reale negativa e uno a parte reale positiva), e quattro poli (uno nell'origine, uno reale a parte reale negativa e due poli complessi coniugati a parte reale negativa). Poiché abbiamo la parte reale dei poli minore di zero tranne un polo che è in zero, il sistema Σ è stabile. Nella Figura 1 si evidenzia la posizione dei poli/zeri nel piano di Gauss.

2 Parte Numerica

Al fine di progettare il controllore, si suggerisce di procedere secondo la metodologia vista durante il corso come segue:

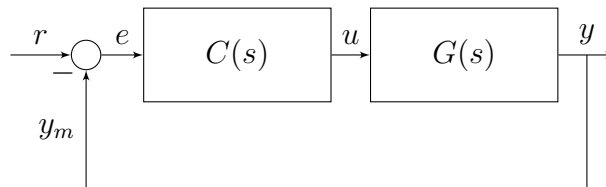
- (a) Tradurre i requisiti della Tabella 3 nelle corrispondenti specifiche statiche e dinamiche del sistema controllato, e indicare l'approssimazione $G_c(s)$ della f.d.t. del sistema complessivo risultante in anello chiuso.

Soluzione:

La f.d.t. del sistema complessivo in anello chiuso $G_c(s)$ è:

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Diagramma a blocchi del sistema:



In prima approssimazione possiamo considerare il sistema come un sistema del 1° ordine:

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \sim \frac{1}{1 + \tau_c s}$$

Dove $\tau_c = \frac{1}{\omega_c} \rightarrow \omega_c = \frac{3}{T_a}$,

con $T_a \leq 45 \text{ s}$,

$$\omega_c = \frac{3}{T_a} \geq 0.06667 \text{ rad/s}$$

Possiamo assumere per il controllore una forma del tipo:

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } |C_0(s)| \geq 1$$

- **Specifiche Statiche:** Inseguimento perfetto per riferimenti costanti. Per l'inseguimento perfetto per riferimenti costanti è necessario un polo nell'origine. Essendo già presente in $G(s)$, possiamo assumere il controllore di tipo $t = 0$.
- **Specifiche Dinamiche:** tempo di risposta inferiore a 45 s. La specifica può essere soddisfatta facendo sì che il diagramma dell'ampiezza della risposta armonica $C(j\omega)G(j\omega)$ abbia una pulsazione di taglio $\omega_c \geq \frac{3}{T_a}$ cioè con $\omega_c = \frac{3}{T_a} \geq 0.06667 \text{ rad/s}$. Sarà oltretutto necessario che il margine di fase sia circa 90°. Per garantire la stabilità

- (b) Se la f.d.t. $G(s)$ del modello in anello aperto non è stabile, progettare un anello di retroazione interno, caratterizzato da un controllore $C_i(s)$ e da una f.d.t. risultante $G_i(s)$; in tal caso, nell'elaborato devono essere forniti (1) la descrizione della procedura seguita per ottenere $C_i(s)$, e (2) le espressioni di $C_i(s)$ e $G_i(s)$ con le posizioni e molteplicità dei rispettivi poli e degli eventuali zeri.

Soluzione:

Come evidenziato, non ci sono poli a parte reale positiva pertanto la nostra f.d.t. $G(s)$ è stabile, pertanto possiamo passare alla sintesi del controllore operando direttamente sui diagrammi di bode della risposta armonica.

- (c) Se invece $G(s)$ è già stabile o se si è ottenuta una $G_i(s)$ stabile dal punto precedente, verificare il soddisfacimento o meno delle specifiche statiche e dinamiche; a tal fine, riportare $G(s)$ o $G_i(s)$ in forma di Bode, indicando il guadagno di Bode, le costanti di tempo di eventuali singolarità reali, e i coefficienti di smorzamento e le pulsazioni naturali di eventuali singolarità coniugate.

Soluzione:

Abbiamo:

$$G(s) = \frac{K_0(s - z_1)(s - z_2)}{s(s - p_1)(s^2 + \alpha s + \beta)}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{z_1} \\ \tau_2 = -\frac{1}{z_2} \\ \tau_3 = -\frac{1}{p_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_n = \beta \\ \frac{2\delta}{\omega_n} = \alpha \rightarrow \delta = \frac{\alpha\omega_n}{2} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{K_0(-1/z_1)(-1/z_2)}{(-1/p_1)} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s(1 + s\tau_3)(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta}{\omega_n}s + 1)}$$

Per quanto riguarda le pulsazioni delle singolarità reali abbiamo:

- $\omega_1 = \frac{1}{|\tau_1|} = |z_1| = 0.3995 \text{ rad/s} \rightarrow$ pulsazione di z_1
- $\omega_2 = \frac{1}{|\tau_2|} = |z_2| = 0.1602 \text{ rad/s} \rightarrow$ pulsazione di z_2
- $\omega_3 = \frac{1}{|\tau_3|} = |p_1| = 0.1986 \text{ rad/s} \rightarrow$ pulsazione di p_1

Pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento dei poli complessi coniugati:

- $\omega_n = \beta = 0.4703 \rightarrow$ pulsazione naturale dei poli complessi coniugati $p_{2,3}$
- $\delta = \frac{\alpha\beta}{2} = 0.3190 \rightarrow$ coefficiente di smorzamento dei poli $p_{2,3}$

Utilizzando i comandi su MATLAB possiamo risalire a tutti i dati elencati sopra:

```

sys = ss(A, B, C, D) %crea il sistema con le matrici A,
    B,C,D
G = tf(sys) %fdt
[z, p, k] = zpkmdata(sys) %vettore che prende i valori
    di z, p e k
G = zpkm(G) %fdt in forma zpkm
[wn,zeta,p] = damp(G) % Restituisce un vettore con
    tutte le pulsazioni e gli smorzamenti
G.DisplayFormat='time constant' % Comando che mostra la
    fdt evidenziando le costanti di tempo

```

Valori numerici:

$$\begin{cases} K_0 = 0.0037 \\ \tau_1 = 2.503 \text{ s} \\ \tau_2 = 6.243 \text{ s} \\ \tau_3 = 5.036 \text{ s} \\ \omega_n = 0.4703 \text{ rad/s} \\ \delta = 0.3190 \end{cases}$$

Utilizzando i valori numerici, la $G(s)$ in forma di bode è:

$$G(s) = \frac{-0.0054205(1 + 2.503s)(1 - 6.243s)}{s(1 + 5.036s)(4.5212s^2 + 2.8845s + 1)}$$

- (d) Progettare un controllore $C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s)$ che soddisfi i requisiti della Tabella 3 e ottenga la $G_c(s)$ desiderata; nel documento devono essere riportati (1) la descrizione dettagliata della procedura seguita, (2) le funzioni $C(s)$ e $G_c(s)$, nonché i (3) diagrammi di Bode nelle varie fasi della progettazione (ad esempio, quelli che mostrano le risposte armoniche della catena diretta $C(j\omega) G(j\omega)$ o $C(j\omega) G_i(j\omega)$), e del modello controllato complessivo $G_c(j\omega)$.

Soluzione:

Volendo progettare il controllore del tipo $C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s)$, si assume $K_c < 0$ e $t = 0$, poiché la parte statica del sistema è già rispettata, ci basterà modellare $C_0(s)$, dove $C_0(s)$ rappresenta la parte dinamica che andrà rispettata. Pertanto il controllore sarà del tipo:

$$C(s) = \frac{K_c}{s^0} C_0(s) = K_c C_0(s)$$

Inoltre ci servirà modellare il controllore in modo tale da non compromettere la stabilità già presente nel sistema.

1. Descrizione della procedura:

- (a) Scelta di un guadagno $K_c < 0$ tale da compensare il segno del guadagno di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto.

- (b) Inserimento di una coppia di zeri complessi coniugati $z_{c1,2}$ in corrispondenza della coppia di poli. complessi coniugati $p_{2,3}$ della $G(s)$, in modo tale da annullare il loro effetto di poli dominanti che porterebbe il sistema a rispondere come un sistema del secondo ordine.
- (c) Inserimento di uno zero z_{c3} una decade prima dell'attraversamento a 0 dB e di un polo p_{c1} mezza decade. prima dell'attraversamento a 0 dB per aumentare la pulsazione di taglio ω_c e aumentare il margine di fase M_f .
- (d) Modifica del guadagno K_c in modo da far avvenire l'attraversamento a 0 dB per pulsazioni superiori alla pulsazione di taglio ω_c .
- (e) Modifica della posizione reciproca di poli e zeri per aumentare il margine di fase.
- (f) Inserimento di due poli $p_{c2,3}$ a parte reale negativa alle alte frequenze per rendere causale il controllore.

2. Funzioni di Trasferimento $C(s)$ $G_c(s)$:

Mettendo su MATLAB, la funzione di trasferimento $G(s)$ ed utilizzando i seguenti comandi:

```
sisotool(G) %richiama l'ambiente sisotool per la G(s) di prima, cosi da modellare il controllore.
```

Modellando quindi con SISOTOOL il controllore per ottenere le specifiche desiderate siamo arrivati ai seguenti valori Numerici per $C(s)$:

$$\begin{cases} K_c = -10.88 \\ z_{c1,2} = -0.15 \pm 0.4457i \\ p_{c2} = -2.36 \\ p_{c3} = -2.8398 \\ p_{c1} = - - 0.08356 \\ z_{c3} = -0.0691 \end{cases}$$

Esportando dunque il controllore $C(s)$ da SISOTOOL come variabile Ccs ed utilizzando il comando MATLAB:

```
Ccs.DisplayFormat='timeconstant'%visualizza la C(s) evidenziando le costanti di tempo
```

La $C(s)$ con i valori numerici sarà:

$$C(s) = \frac{-10.88(1 + 14s)(1 + 1.4s + 4.41s^2)}{(1 + 12s)(1 + 0.42s)(1 + 0.35s)}$$

Mentre invece la $G_c(s)$ esportandola da SISOTOOL come Gc , lo esporta come State-Space, utilizzando il comando:

```
Gcs = zpk(Gc)
```

Convertendo, $G_c(s)$ sarà:

$$G_c(s) = \frac{-1.4861(s+0.3995)(s-0.1602)(s+0.0691)(s^2+0.3s+0.2211)}{(s+3.837)(s+1.398)(s+0.05644)(s^2+0.1953s+0.02171)(s^2+0.3s+0.2212)}$$

3. **Diagrammi di Bode:** I diagrammi di Bode della risposta armonica della catena diretta $C(j\omega)G(j\omega)$ prima della sintesi del controllore è a Figura 2, mentre quello dopo la sintesi del controllore è in Figura 3 e del sistema complessivo in anello chiuso $G_c(j\omega)$ e a Figura 4.

- (e) Realizzare una prima simulazione in Matlab/Simulink del sistema chiuso $G(s)$ in anello singolo con il controllore $C(s)$ o in doppio anello con i controllori $C_i(s)$ e $C(s)$; la simulazione deve mostrare il soddisfacimento dei requisiti della Tabella 3 rispetto ai segnali di riferimento o di disturbo indicati.

Soluzione:

Avendo esportato quindi la $C(s)$, possiamo convertire la $C(s)$ in Forma di Stato utilizzando il comando:

```
Cc = ss(Ccs)
```

Possiamo quindi importare **Cc** e **sys** lanciando SIMULINK con il comando **simulink** sulla linea di comando di MATLAB, per la simulazione. Ci avvaliamo di un blocco Scope e di un blocco Step rispettivamente per visualizzare le forme d'onda ed inserire un gradino nel sistema affinché la simulazione sia corretta. La simulazione si presenterà come in Figura 5. Dallo Scope, ci risulta i grafici in Figura 6.

Considerazioni:

- la $G(s)$ entro $45s$, raggiunge il valore di regime entro il $\pm 5\%$ come stabilito dalla Tabella 3.
- Inoltre come si può vedere in Figura 6, insegue perfettamente un riferimento costante (Gradino) come stabilito dalla Tabella 3.
- Purtroppo rimane la sottoelongazione negativa che comunque non scende sotto il valore -0.2 , dovuta allo zero positivo.
- Si vede anche una discesa rapida all'inizio dovuta ad i poli ad alta frequenza.

Conclusioni: Il Controllore progettato rispetta perfettamente le specifiche statiche e dinamiche richieste dalla Tabella 3.

- (f) Realizzare una seconda simulazione in Matlab/Simulink del modello del sistema non lineare, chiuso in anello singolo con il controllore $C(s)$ o in doppio anello con i controllori $C_i(s)$ e $C(s)$, operando le opportune traslazioni delle variabili in ingresso e in uscita dal sistema stesso; la simulazione deve mostrare il soddisfacimento dei requisiti della Tabella 3, anche se in modo approssimato, nei confronti dei soli segnali di riferimento.

Soluzione:

Per la simulazione del sistema non lineare su SIMULINK, utilizziamo il blocco MATLAB-Function per simularlo. il codice della MATLAB-Function è il seguente:

```
function dy = sistema(u, z)
    %Parametri
    kteta = 143;
    kr = 168;
    b = 1.2;
    % teta = pi/6;
    B = 20;
    % F = -kteta/(2*b);
    theta_sign = pi/6
    F_sign = -(kteta*sin(theta_sign))/b;
    FL=(F_sign*cos(theta_sign)-B)/sin(theta_sign);
    kzeta = 133;
    M = 580;
    J = 560;
    %stati
    x = z(1);
    v = z(2);
    theta = z(3);
    omega = z(4);
    %Ingressi
    f=u;
    %temp
    cth = cos(theta); sth=sin(theta); costM=(1/M);
    costJ=-(1/J);
    %Dinamica
    dx = v;
    dv = costM*(-kzeta*v-cth-FL*sth+B-f*cth);
    dtheta = omega;
    domega =costJ*(kr*omega+kteta*sth+f*b);

    dy =[dx; dv; dtheta; domega];
end
```

- **u** è uno scalare che rappresenta l'ingresso.
- **z** è un vettore che rappresenta lo stato integrato.
- **dy** è un vettore che rappresenta la dinamica del sistema (le derivate delle componenti dello stato).

La simulazione su SIMULINK del sistema si presenterà come in Figura 7, utilizzando la stessa $C(s)$ utilizzata per il Sistema Linearizzato.

Considerazioni:

- la $G(s)$ entro $45s$, raggiunge il valore di regime entro il $\pm 5\%$ come stabilito dalla Tabella 3.
- Inoltre come si può vedere in Figura 8, insegue perfettamente un riferimento costante (Gradino) come stabilito dalla Tabella 3.

Conclusioni: Il Controllore progettato rispetta approssimativamente le specifiche statiche e dinamiche richieste dalla Tabella 3.

3 Parte Teorica

(a) *Domanda da definire*

Soluzione:

Figure e diagrammi

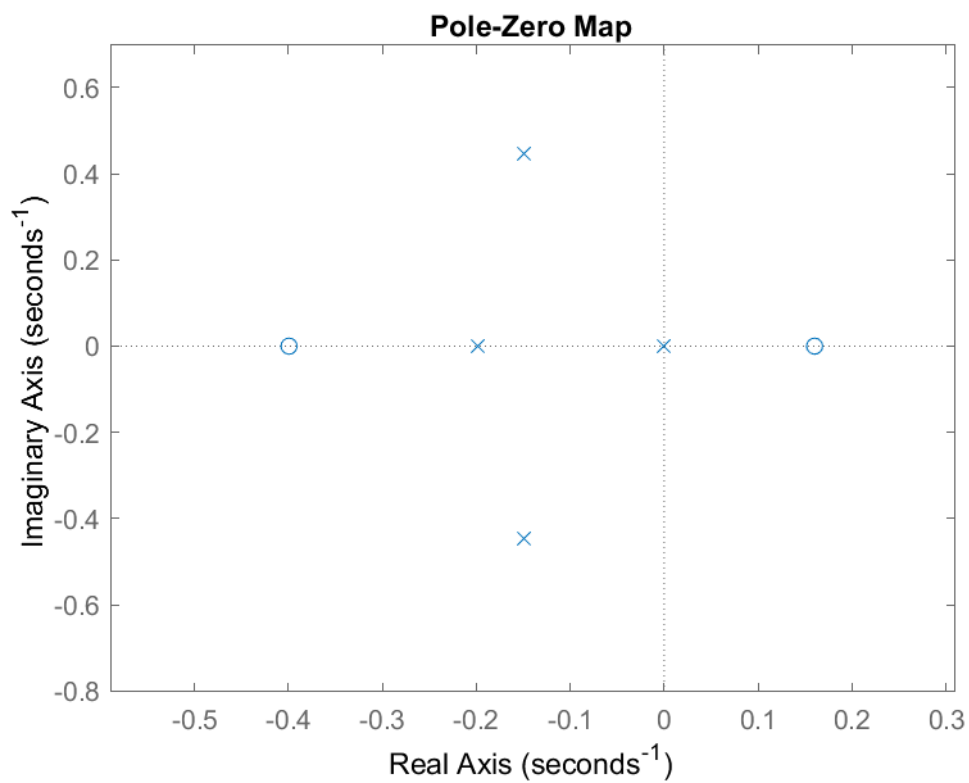


Figura 1: Piano di Gauss Poli/Zeri

Fine dello svolgimento

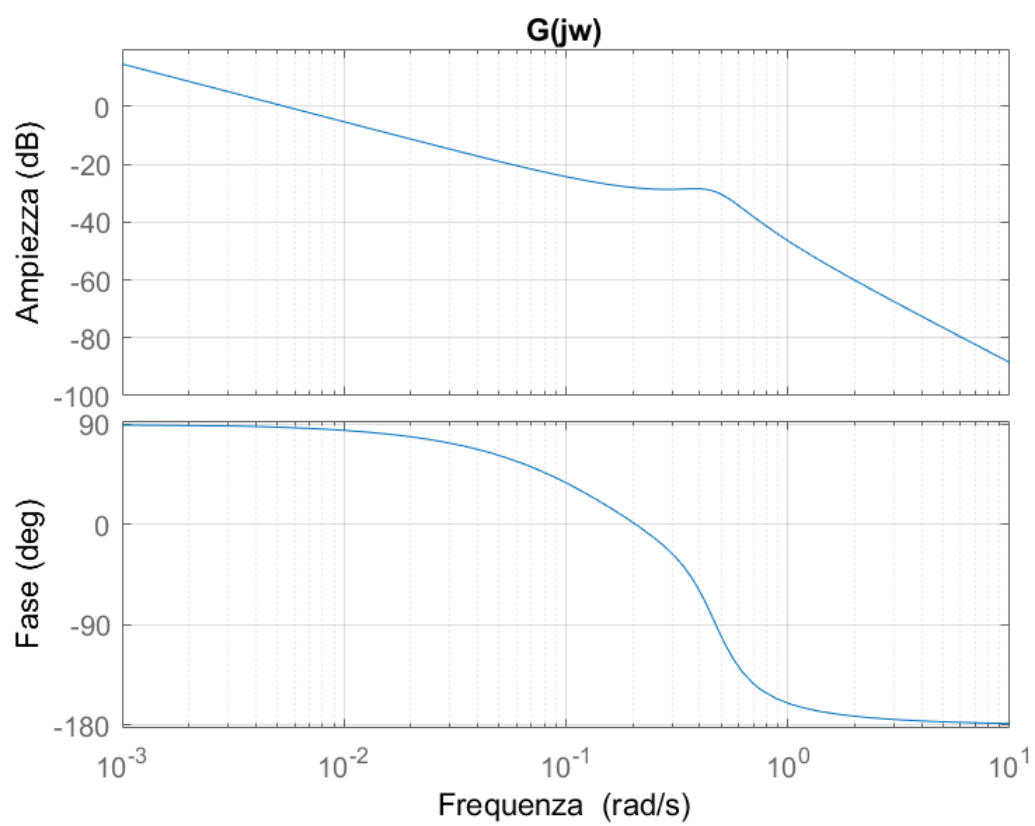


Figura 2: Diagrammi di Bode Catena Diretta $C(j\omega)G(j\omega)$ prima della sintesi del Controllore

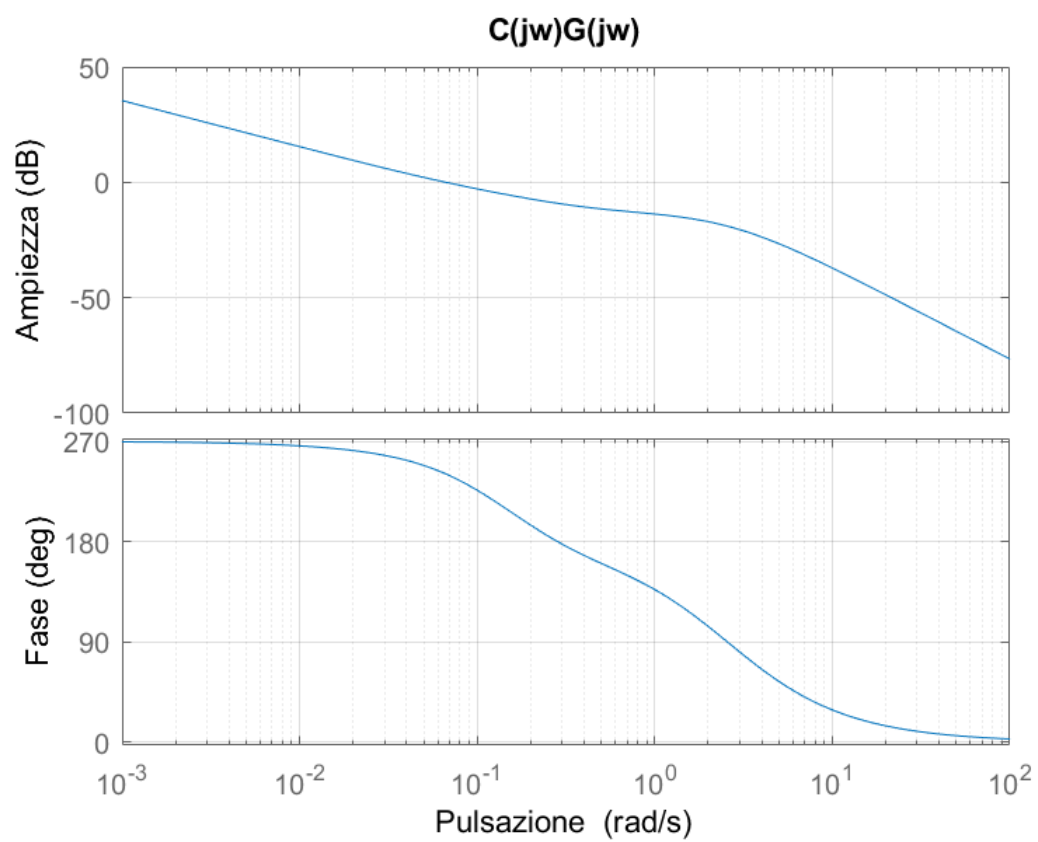


Figura 3: Diagrammi di Bode Catena Diretta $C(j\omega)G(j\omega)$ dopo la sintesi del Controllore

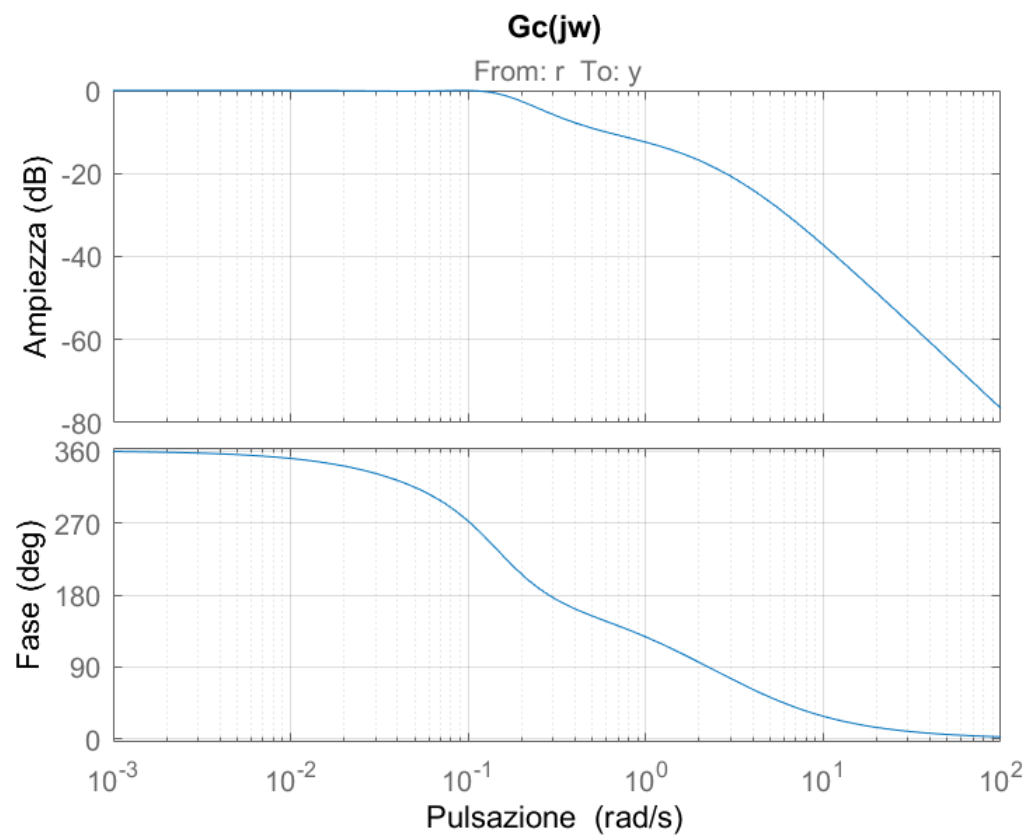


Figura 4: Diagrammi di Bode Anello Chiuso $G_c(j\omega)$

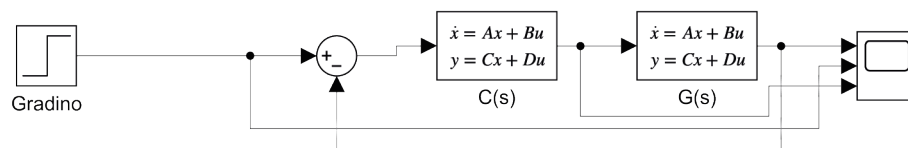


Figura 5: Simulazione in ambiente SIMULINK

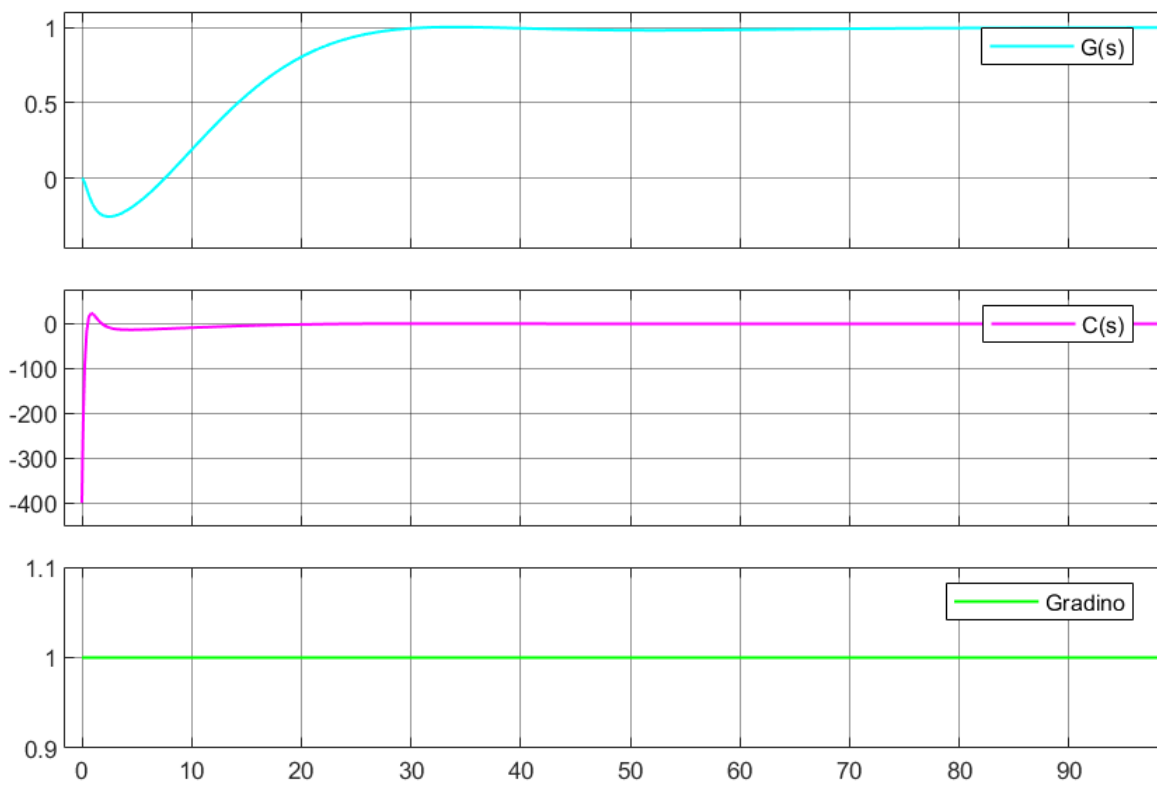


Figura 6: Uscite

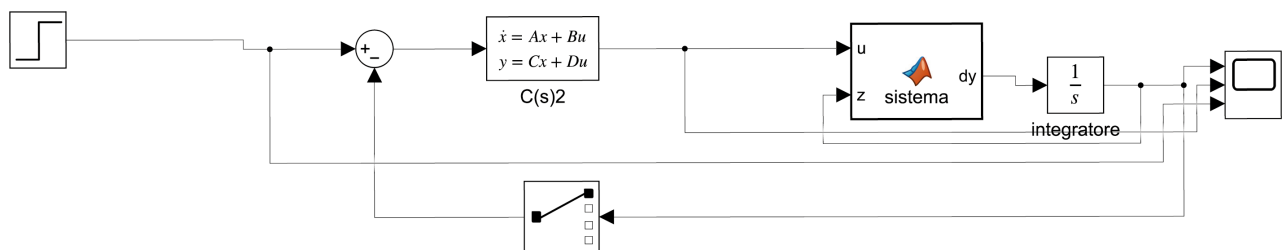


Figura 7: Simulazione SIMULINK Sistema Non Lineare

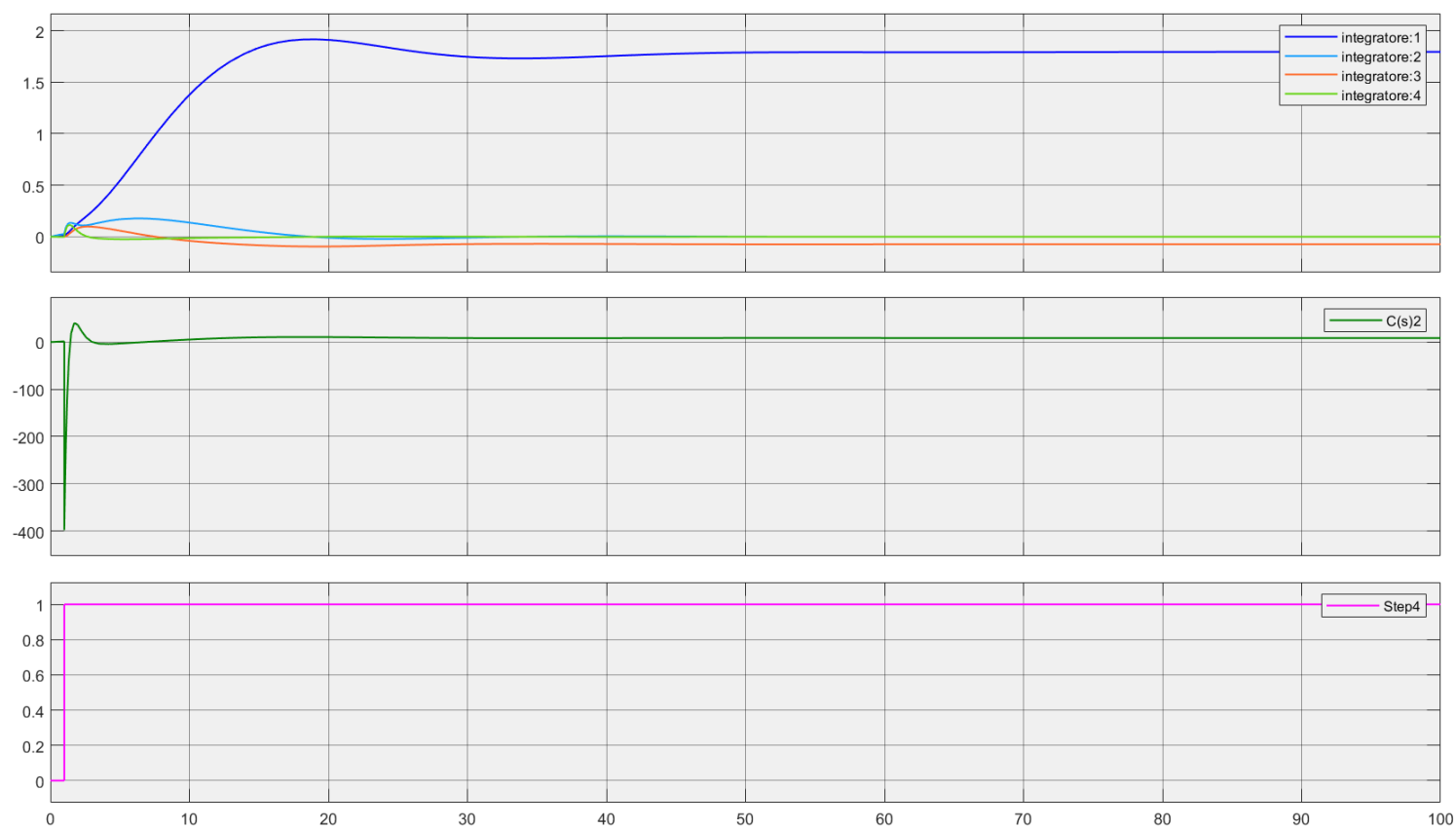


Figura 8: Uscite Sistema Non Lineare