

原创性 时效性 就是科研成果的生命力
《计算机应用研究》编辑部致力于高效的编排
为的就是将您的成果以最快的速度
呈现于世

* 数字优先出版可将您的文章提前 8~10 个月发布于中国知网和万方数据等在线平台

基于图优化的 SLAM 后端优化研究与发展

作者 张洪华, 刘璇, 陈付豪, 李文彬, 张建华

机构 河北工业大学 机械工程学院

DOI 10.3969/j.issn.1001-3695.2017.12.0842

基金项目 河北省杰出青年科学基金资助项目 (F2017202062)

预排期卷 《计算机应用研究》 2019 年第 36 卷第 1 期

摘要 同时定位与地图构建(SLAM)是当前机器人定位导航的研究热点。从优化模型、优化算法及对结果的评估阐述了基于图优化的 SLAM 后端优化。在建模方面, 分析了动态贝叶斯网络建模、因子图建模和马尔可夫图建模; 讨论了后端优化的四种方法, 即最小二乘优化方法、松弛优化方法、随机梯度下降优化方法和流形优化四种方法。在结果评估方面, 阐述了 χ^2 误差和 MSE 误差对结果的评估方法。最后, 结合当前研究热点对 SLAM 的发展作出了展望。

关键词 SLAM; 图优化; 建模; 优化; 评估

作者简介 张洪华 (1993-), 男, 河北沧州人, 硕士研究生, 主要研究方向为视觉 SLAM; 刘璇 (1980-), 女 (通信作者), 河北秦皇岛人, 讲师, 博士, 主要研究方向为智能机器人技术 (xuaner1007@163.com); 陈付豪 (1993-), 男, 河南许昌人, 硕士研究生, 主要研究方向为视觉 SLAM; 李文彬 (1991-), 男, 河南许昌人, 硕士研究生, 主要研究方向为视觉 SLAM; 张建华 (1979-), 男, 河北邯郸人, 教授, 博士, 主要研究方向为智能机器人技术。

中图分类号 TP391.4

访问地址 <http://www.arocmag.com/article/02-2019-01-066.html>

投稿日期 2017 年 12 月 19 日

修回日期 2018 年 2 月 13 日

发布日期 2018 年 4 月 3 日

引用格式 张洪华, 刘璇, 陈付豪, 李文彬, 张建华. 基于图优化的 SLAM 后端优化研究与发展[J/OL]. 2019, 36(1). [2018-04-03]. <http://www.arocmag.com/article/02-2019-01-066.html>.

基于图优化的 SLAM 后端优化研究与发展 *

张洪华, 刘璇[†], 陈付豪, 李文彬, 张建华

(河北工业大学 机械工程学院, 天津 300130)

摘要: 同时定位与地图构建(SLAM)是当前机器人定位导航的研究热点。从优化模型、优化算法及对结果的评估阐述了基于图优化的 SLAM 后端优化。在建模方面, 分析了动态贝叶斯网络建模、因子图建模和马尔可夫图建模; 讨论了后端优化的四种方法, 即最小二乘优化方法、松弛优化方法、随机梯度下降优化方法和流形优化四种方法。在结果评估方面, 阐述了 χ^2 误差和 MSE 误差对结果的评估方法。最后, 结合当前研究热点对 SLAM 的发展作出了展望。

关键词: SLAM; 图优化; 建模; 优化; 评估

中图分类号: TP391.4 **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3695.2017.12.0842

Research and development of SLAM back-end optimization based on graph optimization

Zhang Honghua, Liu Xuan[†], Chen Fuhao, Li Wenbin, Zhang Jianhua

(School of Mechanical Engineering Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

Abstract: Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) become a research hotspot in robot positioning and navigation. This paper elaborates the SLAM back-end optimization framework based on graph optimization from three aspects: optimization model, optimization algorithm and evaluation of results. In the aspect of modeling, the paper analyzes the modeling method based on Dynamic Bayesian Network, the modeling method based on factor graph and the modeling method based on Markov graph. In addition, this paper discusses the methods of back-end optimization, that is, least squares optimization method, relaxation optimization method, stochastic gradient descent optimization method and manifold optimization method. In the evaluation of the results, it describes the evaluation of the results using χ^2 error and MSE error. Finally, this article made a prospect on the development of SLAM based on the current research hotspots.

Key words: SLAM; graph optimization; modeling; optimization; evaluation

0 引言

在机器人领域, 服务机器人发展迅猛, 市场需求量渐渐扩大, 但对服务机器人进行室内定位导航成为制约服务机器人发展的障碍之一。同时定位与地图构建(SLAM) 技术是机器人导航定位的关键技术, 服务机器人可应用 SLAM 技术构建室内地图, 完成室内导航、定位与路径规划等任务。SLAM 是指搭载特定传感器的主体, 在没有环境先验信息的情况下, 通过运动过程, 建立环境模型, 并同时估计自己的运动^[1]。基于激光的 SLAM 已研究多年, 技术已经相对成熟, 但由于激光的高成本, 限制了基于激光数据的 SLAM 在服务机器人上的应用。因此, 通过搭载视觉传感器来建立地图估计自身定位及导航的视觉 SLAM 成为近年来研究的热点^[2-8]。基于视觉的 SLAM 以图像作为主要数据来源, 通过多视图几何等相关操作对图像进行处理, 实现机器人的定位与导航。

从本质上讲, SLAM 问题是对机器人的位姿及环境中的特征点位置进行状态估计的问题。早期的 SLAM 研究是通过滤波实现这一目的。基于滤波的方法主要有 extended kalman filter-SLAM(EKF-SLAM)^[9]、unscented Kalman filter-SLAM(UKF-SLAM)^[10]、Rao-Blackwellized 粒子滤波器(RBPF)^[11]等。随着 SLAM 发展, 其渐渐应用到大规模、非结构化的环境, 基于滤波的方式不能满足大规模环境的要求, 渐渐被基于图优化^[12]的方法取代。该方法具有平滑性, 因此也可以称为基于平滑的方法^[13]。图优化的方法需要建立位姿图, 即将对环境中的特征点的观测通过边缘化的方法转换为机器人不同时刻位姿间的约束, 从而对机器人位姿及环境中特征点位置序列估计, 简化优化过程^[14]。位姿图中的节点对应着机器人在每个时刻的位姿及在下时刻观测到环境中的特征点, 边对应着节点之间的空间约束。通过不断调整节点的位置使其符合约束, 得到机器人的运动轨迹与所观测到的环境地图。

收稿日期: 2017-12-19; 修回日期: 2018-02-13 基金项目: 河北省杰出青年科学基金资助项目 (F2017202062)

作者简介: 张洪华 (1993-), 男, 河北沧州人, 硕士研究生, 主要研究方向为视觉 SLAM; 刘璇 (1980-), 女 (通信作者), 河北秦皇岛人, 讲师, 博士, 主要研究方向为智能机器人技术 (xuaner1007@163.com); 陈付豪 (1993-), 男, 河南许昌人, 硕士研究生, 主要研究方向为视觉 SLAM; 李文彬 (1991-), 男, 河南许昌人, 硕士研究生, 主要研究方向为视觉 SLAM; 张建华 (1979-), 男, 河北邯郸人, 教授, 博士, 主要研究方向为智能机器人技术。

1 基于图优化方法的同步定位与地图构建

1.1 基于图优化的 SLAM 系统

基于图优化的 SLAM 系统(Graph SLAM)分为前端和后端, 如图 1 所示。前端利用传感器进行数据关联和闭环检测, 完成位姿图构建。数据关联与闭环检测是基于图优化的 SLAM 系统前端的核内容。针对前端, 部分研究者提出基于 SIFT 的 SLAM 算法和基于 ORB 的 SLAM 算法等相关算法。SIFT 算法是在图像的不同尺寸空间搜寻特征点, 计算特征点方向, 并描述特征点, 完成特征点的提取与匹配。该算法对于光照强度、旋转、尺寸缩放等具有一定的稳定性, 计算快, 可扩展性强。Bay 等人^[15]在 SIFT 的基础上提出了 SURF 算法。与 SIFT 算法相比, SURF 算法利用图像卷积的积分图像, 建立及简化主要检测器和描述符的基础上(如使用基于 Hessian 矩阵的检测器和基于分布的描述符)来实现特征点的提取与匹配。SURF 算法具有鲁棒性高、计算效率高等优点。Ruble 等人^[16]在 2012 年提出了基于 FAST 算法和基于 BRIEF 的 ORB 算法。首先用 FAST 算法特征点进行检测, 再用 BRIEF 计算检测出特征点的描述子。在匹配时, 利用汉明距离匹配特征点。ORB 算法的计算速度快、匹配效率高、鲁棒性好。SURF 算法与 ORB 算法是当前 SLAM 系统前端常用的两种算法。

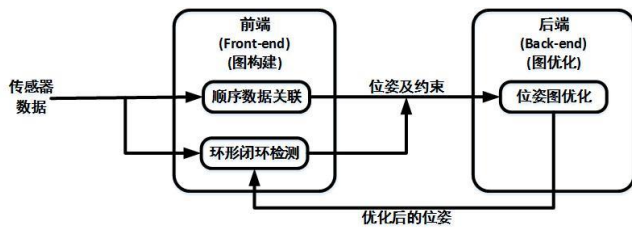


图 1 基于图优化的 SLAM 框架

后端优化是在前端完成特征点提取匹配后进行优化。由于传感器内在的特点, 获取的数据有噪声, 得到的位姿图不具备一致性。用 T_i 表示相邻帧间的变换矩阵, 当机器人在环境内绕一周后, 在理想情况下有:

$$T_0 T_1 T_2 \cdots T_n = I \quad (1)$$

其中: I 为单位阵。但在实际情况下常常不满足此约束, 即观测的“边”与“边”之间存在矛盾。用节点的形式将待估计的量在位姿图中表示出来, 通过对节点进行优化, 调整节点的位置, 使与节点连接的边满足相应的观测。图优化的结果与机器人位姿和特征点位置的最大似然估计相对应。

Golfarelli 等人^[17]将基于图优化的 SLAM 系统看做是质量-弹簧模型系统。如图 2 所示, 图中的节点用带有质量的节点来代替, 节点与节点之间的约束用弹簧来代替, 弹簧的刚度系数代替约束的协方差, 即约束的不确定性。约束之间存在不一致性是由于每个约束是通过与约束有关的观测独立求解的^[18]。当弹簧受力变形, 系统是不稳定的。此时弹簧对质点存在作用力, 质点为受力平衡而重新分布, 使得整个系统的能量处于最小状

态。重新分布后的质点即代表机器人最优的节点。在此系统中, 使系统的能量最小可以转换为最小二乘问题。

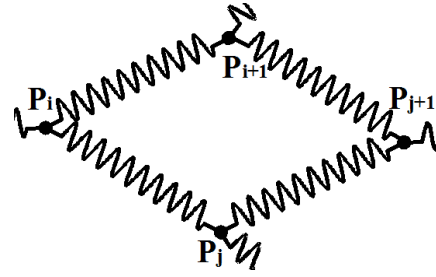


图 2 mass-spring 模型

1.2 基于最小二乘的 SLAM 问题描述

SLAM 问题要解决的是根据机器人所搭载的里程计等提供的运动控制信息和所搭载的摄像机等提供的环境观测信息对机器人的位姿及特征点位置进行估计的问题^[19]。在图 3 所示的位姿图中, 图中的节点 X_i 表示机器人的位姿节点, Z_{ij} 表示环境中的特征点, 连接节点的边则表示约束, U_{ij} 是位姿变换, e_{ij} 是观测, Ω_{ij} 是观测的不确定性。

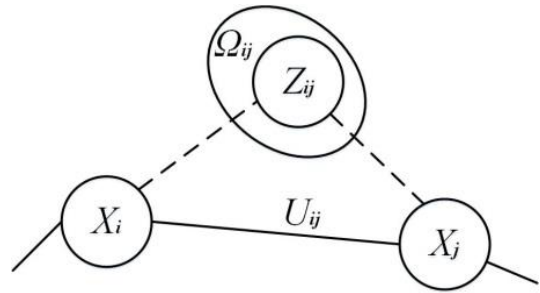


图 3 基于图优化的 SLAM 模型

根据里程计提供的运动输入和摄像机提供的观测等前端数据, 将估计问题转换成求解一个最优状态估计, 使得其在该状态下后验概率最大化问题(MAP):

$$X^* = \operatorname{argmax} P(X|Z, U) \quad (2)$$

其中: U 表示运动输入数据 u_i , Z 表示观测数据 z_{ij} , X 表示待优化的变量 x_i , 包括机器人位姿和特征点位置。若忽略图像在时间上的联系, 上述问题也可看成 Structure from Motion(SfM)^[20]。式(1)右边的条件分布利用贝叶斯法则, 有

$$P(X|Z, U) \propto \prod_i P(x_{i+1}|x_i, u_i) \prod_{ij} P(z_{ij}|x_i, x_j) \quad (3)$$

式(2)右边第一项为运动约束, 由里程计等传感器测得。第二项为观测约束, 由摄像机等传感器测得。将待估计变量的最大后验概率转换成求解待估计变量的最大似然估计(MLE), 在高斯分布的假设下, 对式(2)两边同时取负对数, 得

$$X^* = \operatorname{argmax} P(X|Z, U) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_i f(x_i, u_i) - x_{i+1}^2 + \sum_{ij} z(x_i, z_{ij}) - x_{j \wedge ij}^2 \right\} \quad (4)$$

其中: $f(\cdot)$ 是机器人的运动模型, $z(\cdot)$ 是机器人的观测模型。最终将基于图优化的 SLAM 问题视为求解上式的最小二乘问题。

2 图建模方法

在用图优化的方法对 SLAM 问题进行求解时, 需要利用图论对 SLAM 优化模型进行建模。目前, 常用的三种建模方法有: 基于动态贝叶斯网络的图建模方法; 基于因子图的图建模方法; 基于马尔可夫的图建模方法。

2.1 基于动态贝叶斯网络的图建模方法

动态贝叶斯网络(dynamic Bayesian network, DBN)在信号处理、计算机视觉和模式处理等领域得到了广泛的研究与应用。DBN 是一种有向无环图, 表示随时间发生改变的变量及其之间的关系。Thrun 在《概率机器人学》^[21]中对 DBN 在 SLAM 中的应用进行了详细的阐述。DBN 图包含两类节点: 显式节点与隐式节点。显式节点与可观测量相对应, 隐式节点与不可观测量相对应。如图 4 所示, 是静态环境下基于 DBN 的 SLAM 描述。图中的隐式节点(白色节点)是机器人的位姿节点 x^i 和环境中路标节点 m^k , 显式节点(灰色节点)是机器人运动控制 u_i 和摄像头的观测 z_j 。图中的箭头表示节点之间存在关系。

动态贝叶斯网络通过拓扑网络表达变量之间的概率关系及其随时间的变化。在时序性较强的复杂环境中, 能够清楚的表达出变量之间的关系。

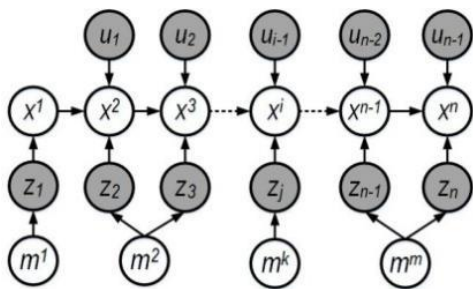


图 4 基于 DBN 图的静态环境 SLAM 描述

2.2 基于因子图的图建模方法

因子图是无向有环图。Kschischang 等人^[22]在 2001 年提出利用因子图对 SLAM 问题进行建模。因子图分为有特征点位置节点和无特征点位置节点。因子图中有代表变量的变量节点与代表因子的因子节点。在图 5 中, 圆圈表示变量节点: 机器人的位姿节点 x^i 和环境中路标节点 m^k ; 圆点表示因子节点: 实心圆点表示里程计因子, 空心圆点表示观测因子。线段则表示两个节点之间存在关系。图 5(a)表示的是静态环境下有路标节点的因子图, 图 5(b)表示的是静态环境下无路标节点的因子图。因子图是目前基于图优化的 SLAM 问题研究中广泛应用的建模方式。Vallvé 等人^[23]将因子图建模与稀疏性结合, 提出了因子下降优化方法, 迭代较少的步骤, 得到了精确的结果。Carlevaris-Bianco 等人^[24]提出了以因子图为基础的节点去除法, 来降低后端优化计算的复杂性。

因子图网络建模形式为多个因子连乘, 在对模型的进一步处理过程中, 利用连乘形式可降低处理难度, 提高解决问题的效率。文献[23, 24]所提优化方法均结合因子图建模, 提高了后

端优化的效率。

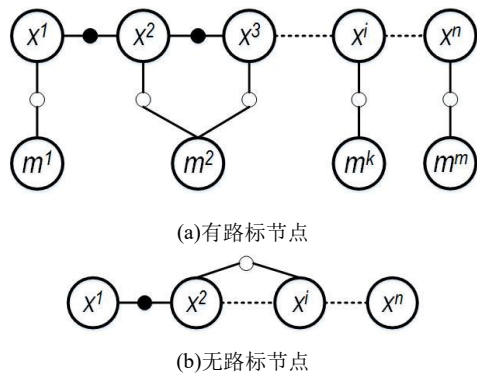


图 5 基于因子图的静态环境 SLAM 描述

2.3 基于马尔可夫的图建模方法

马尔可夫图(MRF)与因子图属于同一类型, 也是无向有环图。与因子图不同的是, 马尔可夫图不能描述模型的先验约束, 否则会图中形成单边^[19]。马尔可夫图中只有变量节点。图 6 是基于马尔可夫的静态环境下的 SLAM 描述。图中只有机器人位姿节点 x^i 和环境中的路标节点 m^k 。图中的线段则表示节点之间存在关系。

在 MRF 图中采用与 Hessian 矩阵等价的邻接矩阵才求解问题, 可以简化求解过程, 降低复杂度, 提高求解效率。

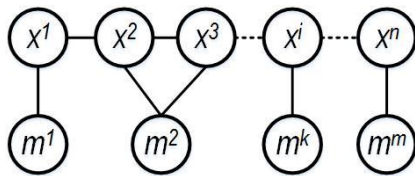


图 6 基于马尔可夫的静态环境 SLAM 描述

优化模型是优化系统的参数化表示方法。SLAM 优化模型与 SLAM 系统的特性密切相关。建立模型的方式不同, 对 SLAM 系统固有的稀疏性及优化算法的非线性产生不同影响, 从而影响最后的优化结果。当前部分研究者将图建模方式与优化方法相结合提出新的优化算法。上述三种图是 SLAM 问题描述中主要的建模方式, 各有优缺点。DBN 图建模方式原理相对简单, 但变量较多。基于因子图和基于马尔可夫的建模方式的变量相对较少, 会对相关变量进行隐藏。但基于因子图的建模方式相对于基于马尔可夫的建模方式清晰易懂。因此, 在利用图优化方法对 SLAM 问题求解时, 因子图建模是最为流行的一种方式。但面对环境日趋复杂, SLAM 应用范围的扩大, 对利用 SLAM 完成的任务也多样化, 基于 DBN 的图建模和基于 MRF 的图建模方式正在逐步展开研究。

3 优化算法

滤波方法与图优化方法的不同之处在于, 基于图优化的方法利用当前时刻与之前时刻的观测数据对机器人所有位姿进行估计, 而滤波方法只考虑当前时刻。基于图优化的 SLAM(graph

SLAM)后端优化方法,分为基于最小二乘法的优化;基于松弛技术的优化;基于随机梯度下降法的优化;流形优化。

3.1 基于最小二乘的优化

Lu 和 Milios^[25]首次将 SLAM 问题转换成最小二乘问题。对此类问题求解的一般做法是利用一阶泰勒展开式对目标函数进行线性化处理,之后选用迭代方法对处理后的目标函数进行求解。常用的方法有 Gauss-Newton 法和 Levenberg-Marquardt 法。若忽略 SLAM 问题的稀疏性^[26],假设节点数为 n ,则 LM 法的时间复杂度为 $O(n^3)$ ^[27],不能满足实时性要求^[28]。

Dellaert 和 Kaess^[29]提出了将信息矩阵分解为平方根(SAM)的方法,从批量式、线性增量式和非线性增量式三个方面对 SAM 方法进行论述。所提方法具有精确度高、处理时间短等优点。2008 年, Kaess^[30]从增量式角度提出了 iSAM。iSAM 方法运用启发式节点排序和线性化相结合的方式,解决了闭环检测困扰 SAM 方法的节点排序问题,充分利用了矩阵的稀疏性,得到比 SAM 方法更精确的地图。2012 年, Kaess 等人^[31]结合了新的数据处理方式,改进 iSAM,提出了 iSAM2。在数据处理上,引入了贝叶斯树的处理方式,提高了优化效率。2011 年, Giorgio Grisetti 等人^[32]提出基于最小二乘与流行优化相结合的方法来避免出现旋转奇异值,并对后端优化过程进行了详细的叙述,所提方法提高了结果的精确度。2012 年, David M. Rosen 等人^[33]提出了鲁棒增量最小二乘估计(RISE)法,以 Dog-leg 法为基础、iSAM 为框架进行优化,在保证计算效率的前提下,提高了鲁棒性。2016 年, Jingshan Zhang 等人^[34]改进 G-N 法,提出部分相干相位检索和源恢复的非线性优化算法,提高后端优化的鲁棒性。

基于最小二乘的优化方法是 SLAM 后端优化中常用方法。此方法相对简单,可扩展性强,但其计算效率较低。

3.2 基于松弛技术的优化

在 2000 年, Duckett 等人^[35]提出了松弛技术。松弛技术的思想是将节点移动到其“邻居”认为该在的地方,即根据当前节点与其相邻节点之间的位置关系以及相关约束重新计算当前节点的位姿信息。利用松弛技术优化,需要三个信息来源:外部地点识别系统、从传感器获取全局方向、里程计的局部测距。对于完全连通图的最坏情况,算法的复杂度为 $O(n^2)$,其中 n 是节点数。但是,对于地图每个节点的数量不会随着地图的大小而增长,因此复杂度为线性或 $O(n)$ 。Frese^[27]等人在此基础上,在 2005 年又提出了多级松弛技术。多级松弛技术结合多重网格方法,降低了计算复杂度,提高了收敛速度和实时性,满足了在线更新地图的要求。2014 年, Carlone 等人^[36]提出了基于测量的松弛技术。文章描述了基于线性技术的平面姿态图优化中的异常排斥的方法,其允许具有快速和全局的解决方案,提高了后端优化的鲁棒性。

基于松弛技术的优化方法常利用分层结构来降低图片分辨率、减少节点之间约束,通过对顶层的优化从而完成对所建地图的优化,以此来提高优化效率。在地图精确度方面,此方法

相对于其他方法还有所欠缺。

3.3 基于随机梯度下降(SGD)法的优化

Olson^[28]是第一个将随机梯度下降法运用到 SLAM 后端优化中。随机梯度下降通过选择一个约束并通过移动一组节点来寻求最优值。Olson 同时对 SGD 进行改进,即使初始值较差的情况下,也能快速收敛到最优值,避免陷入局部最优。Grisetti 等人^[3]将树参数化的方式引入到 SLAM 后端优化中,改进节点参数化,利用 SGD 法进行优化,提高了优化效率,并拓展了优化算法的应用范围。之后, Grisetti 等人^[37]在之前工作的基础上,改进优化方法,将旋转误差分配到各个节点中,为机器人在非平坦环境中学习三维最大似然地图提出了高效的解决方案。Gao 等人^[38]针对磁序列 SLAM,改进 SGD,提出了 MSGD,在处理更大数据时也可保持高效,且扩展性强。

基于 SGD 法的优化方法需要考虑优化方向与步长对其的影响。优化方向即为梯度的负方向,对优化模型进行求梯度即可得。而优化步长对优化算法的快慢有影响。选取合适的步长会提高优化算法的速度和效率。

3.4 流形优化

流形优化是指在流形空间进行优化,并非在传统的欧式空间中。在欧式空间中,优化时机器人位姿中的旋转分量可能会出现奇异,导致优化结果发散。有两种做法可以避免奇异值,第一种就是采用四元数或矩阵的形式来表示机器人位姿中旋转分量。但这种做法会产生不必要的误差。第二种做法是 Grisetti^[39]提出的在流形空间中优化。并且, Grisetti 对位姿图进行分层处理,分别进行优化。研究者已经开发出基于流形优化的图优化通用开源工具(g2o)。Kümmerle 等人^[40]在此基础上提出了 g2o 框架,提高了开发效率。

流形优化对后端优化的工具开发提供了便利,但其不单独使用,常与最小二乘的优化方法结合使用,以此提高后端优化的速度和精确性。

优化算法是基于图优化的 SLAM 后端优化的核心部分,但随着 SLAM 系统研究的深入,优化算法不再局限于上述 4 种方法中,如 Eckenhoff 等人^[41]提出的边缘化和稀疏化解耦的方法; Xie 等人^[42]提出了在前端与后端之间建立中间层剔除假闭环,并加入人工闭环,提高后端的鲁棒性。如表 1 所示。后端优化算法需要解决的难题就是精确性与实时性之间的关系,二者之间相互制约。因此,面对大规模环境的数据,在优化时常用矩阵分解来提高效率。在大规模环境中采集数据,其数据之间的关联性增强,后端优化需要处理的矩阵规模就会复杂化,且 SLAM 系统具有内在的稀疏特性。因此,在后端优化中使用矩阵分解,降低问题求解的复杂性。Cholesky 分解与 QR 分解是在后端优化中常用的两种矩阵分解方法。Eckenhoff、Konolige、Mazuran 等人^[43-45]均对稀疏性进行利用,进行矩阵分解提高效率。Dellaert 等人^[29]指出,当机器人位姿节点远大于路标节点时,两种分解方法均需要 $O(mn^2)$ 运算。面对不同规模的环境,选择不同的分解方法,可以提高后端优化的处理速度,缩短时

间。

值前, 算法产生的估计值已得到算法停止的标准。因此, 对优化的地图进行评估成为考量算法的重要标准。在评估准则方面, 通用性评价基准还未建立起来。由于 SLAM 问题的复杂性以及多维度, 对后端优化结果的评估很难建立统一的标准。

4 评估准则

在优化过程中, 由于某些参数人为设定, 在产生最优估计

表 1 SLAM 后端优化方法

年份	方法	解决的问题
2000	提出松弛优化技术	解决优化效率
2005	运用求解偏微分方程的多重网格方法提出多级松弛优化技术	改进松弛优化的性能
2006	提出 SAM 算法	寻求代替 EKF 滤波的方法, 并且不会降低优化性能
2006	将 SGD 法用于后端优化	解决较差优化初始值对优化结果的影响
2007	改进 SGD 法, 将优化算法复杂性限制在环境大小上, 而与轨迹长度无关	解决移动机器人学习最大似然地图的问题
2007	将旋转误差进行分配, 并运用 LU 分解, 改进 SGD 法	解决在非平坦环境中移动机器人建图问题
2008	提出 iSAM	解决在矩阵填充, 破坏稀疏性问题
2009	提出用树结构来定义和有效地更新每个迭代中的局部区域, 并扩展 SGD 法	解决在非平坦环境中 3D 或 2D 建图的问题
2010	改进 G-N 法, 提出分层流形优化	解决在欧式空间中旋转奇异问题
2012	提出 RISE	针对后端优化的鲁棒性
2012	提出 iSAM2	解决在线增量式的非线性优化问题
2013	充分利用稀疏性, 提出新的节点排序, 改进最小二乘优化算法	针对在线增量的方式
2014	提出新的稀疏化方法	解决在优化时需要线性化处理引入新的误差问题
2014	改进松弛优化技术, 提出基于测量选择的测量值, 而不是估计值	解决错误的数据关联, 排除异常值
2016	改进 G-N 法, 提出部分相干相位检索和源恢复的非线性优化算法	针对鲁棒性与精确性
2016	提出边缘化与稀疏化解耦(DMS)	针对过长的机器人轨迹对优化成本的影响
2016	提出新的稀疏化方法—因子下降法(Factor Descent)	针对优化方法中的效率问题
2017	在前端与后端之间建立中间层, 加入人工闭环	针对后端优化的鲁棒性与稳健性
2017	改进 SGD 法, 提出 MSGD	针对磁序列 SLAM

4.1 χ^2 与 MSE 精确性问题

Olson^[46]对最终优化地图的评估进行了深入研究, 主要从优化后的地图质量、优化算法的计算复杂性以及算法的鲁棒性对基于图优化的 SLAM 算法进行了评估。Kümmerle 等人^[47]提出了一个分析 SLAM 方法的结果的框架, 可以创建客观的基准, 克服了使用全局参考框架来计算误差的方法的严重缺点。该度量甚至允许比较使用不同估计技术或不同传感器形式的 SLAM 方法。Strurm 等人^[48]提出关于基于 RGB-D 的 SLAM 系统评价标准和一套高质量的数据集。其提出了两个评估指标: 相对位姿误差(RPE)和绝对轨迹误差(ATE), 用于对视觉测距和视觉 SLAM 系统性能的评估。

常用的后端评估地图精确性的两个标准是 χ^2 和 MSE。 χ^2 描述了当前观测的结果与当前状态的符合程度, 即存在的误差。然而, 并不是 χ^2 越小, 地图的质量就越高。如图 7 所示, 估计值 1 与估计值 2 的 χ^2 相同, 但明显估计值 1 要比估计值 2 更靠近最优值。

因此, 除了 χ^2 之外, 引入均方误差 MSE。 χ^2 和 MSE 是在两个不同的方向上对优化后的解进行评估。以图 3 为例, χ^2 是沿 Y 轴, 即 cost 的度量, MSE 是沿 X 轴, 即 state 的度量。MSE 的计算为

$$MSE = (x^* - x)^2 \tag{5}$$

其中: x^* 是最优值, x 是估计值。MSE 整合了位置误差和旋转误差, 使得直观理解结果有些困难。Olson 提出了将 MSE 分解为 MSE_{θ} 和 MSE_{xy} 两个分量。当对 χ^2 进行优化, 得到使其最小且同时使 MSE 最小的估计值时, 地图质量高。

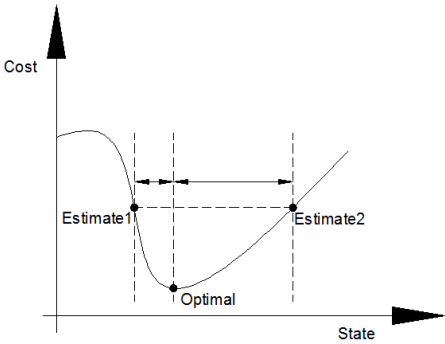


图 7 χ^2 误差图

4.2 过拟合问题

过拟合是指对地图的局部过于重视, 利用了与局部特征点有关的约束对特征点进行了细致的优化。在许多问题中, 图的平均节点度相对较低。在这些情况下, 由于噪声的存在, 优化

算法可以干扰图中的一些节点, 以更好地适应边缘中的噪声。这种过度拟合在图 8 中是明显的。

随着图中的边相对于节点数量的增长, 过拟合问题变得不是十分重要。因为随着连接节点的边的数量增加, 在不增加其他边误差的情况下, 降低某些边的误差是困难的。地图优化的真是目的是推断出真实环境的结构, 通过过度拟合噪声来减少误差是没有用的。

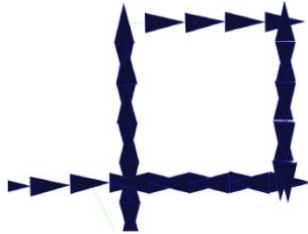


图 8 过拟合问题图

过度拟合可能是平均节点度小于 20 的图的一个重要问题。评估地图优化算法时必须考虑过度拟合问题。当平均节点度较小时, 比较两个方法的 χ^2 值, 则较低的 χ^2 误差不一定对应于较好的图。这个较低的 χ^2 可能只是代表过度拟合问题中的噪声, 可能没有实际意义。

4.3 复杂性鲁棒性评估

计算性能是机器人测绘方面的重要性能之一, 其决定了系统是否使用于特定的应用, 例如具有实时性要求的应用。后端优化的非线性加大了后端优化求解的难度, Huang 等人^[49,50]对非线性进行过初步分析, 通过使用相对状态向量来表达 SLAM 的非线性特性, 表明了 SLAM 问题需要选择合适的状态表示, 有助于快速求解。除了后端的非线性, 还有多个方面影响着优化算法的计算性能, 例如环境边界、硬件设备等。Olson^[46]提出对环境边界利用大 O 符号对算法复杂性进行粗略评估。环境的大小对算法的处理效率产生一定影响, 算法对环境边界的处理效果则在一定程度上显示出此算法的计算性能。SLAM 系统所使用的硬件设备对算法的计算性能也有一定的影响。CPU 使用的类型和时钟速度、系统总线速度、高速缓存大小、编译器以及体系结构增强(如多媒体指令)等均对算法的计算速度有不同的影响。当系统在运行过程中调用外部库, 如 OpenCV 等, 会使用 CPU 的内核, 降低 CPU 的处理速度。通常情况下, 图形处理器(GPU)可加速系统运行的算法。因此, 在运行算法时可依赖 CPU 和 GPU。

鲁棒性是 SLAM 后端另一个重要性能。SLAM 系统受多方面因素制约, 例如 SLAM 系统前端的特征提取与匹配及后端优化初始值、SLAM 系统硬件的自身特性等因素^[51]。在前端, 进行特征提取与匹配时会出现错误的匹配, 这会导致在后端优化时会利用错误的数据进行优化, 所建立的地图与实际环境不符。在后端, 优化初始值的选取会对优化的速度及精确性产生一定影响, 对所优化的地图产生不良后果。SLAM 系统自身的硬件设备, 例如传感器等, 由于其受到的制约, 将对整个 SLAM 系

统产生影响。Latif 等人^[52]在对后端鲁棒性进行评估时, 构建了一个标准数据集, 用来对所提方法的鲁棒性进行评估。但对后端的计算复杂性及鲁棒性进行通用性的评估标准还尚未建立, 目前针对这两个性能的评估大都通过实验进行。

面对复杂的环境, 有多种优化算法可以使用。但环境大小、规模不同, 优化算法的效率和优化结果也各有不同。Li 等人^[53]通过对比优化算法, 发现不同的优化算法在处理不同规模的环境问题有不同的结果。因此, 对优化算法及其优化结果进行评估, 通过比较评估准则, 在适当的环境中选用适当的优化算法, 可提高优化效率和建图精度。

5 发展趋势

5.1 深度学习与 SLAM

深度学习是其以人工神经网络为基础, 通过在多层神经网络中加入更多的隐藏层, 来达到机器人学习的效果。深度学习的主要应用之一就是图像信息进行处理。随着深度学习发展的深入, 逐渐体现其在 SLAM 方面的应用。Konda 等人^[54]提出了端到端的深度神经网络架构用于 SLAM 前端的特征提取和匹配。Costante 等人^[55]利用卷积神经网络对图像最优特征的表达方式进行学习, 实现视觉里程计的估计。Mu 等人^[56]提出一种新的非参数姿态图将数据关联与 SLAM 问题结合, 其中利用深度学习对环境中的物体进行识别。在闭环检测方面, Chen 等人^[57]首次在闭环检测提出基于 CNN 的位置识别技术。Hou 等人^[58]提出基于 Caffe 框架下的 AlexNet 模型特征提取, Sünderhauf 等人^[59]利用 ImageNet 数据库对基于 Caffe 框架的 AlexNet 模型进行预训练, 提高其在闭环检测方面的优势。Li 等人^[60]提出了基于雅可比神经网络(fast neural network, NN)的 FastSLAM 算法来处理观测误差和 SLAM 线性化误差。

基于深度学习的 SLAM 算法具有高鲁棒性、高精确性的优势, 图像信息利用充分, 泛化能力强^[61]。但需要进一步开发深度学习在特征识别方面的理论指导和直观意义, 而且目前深度学习只应用在 SLAM 系统中子环节当中, 尚未贯穿整个 SLAM 系统, 如后端优化等。深度学习在整个 SLAM 系统中的巨大潜力尚待挖掘。

5.2 多传感器信息的融合

基于激光的 SLAM 系统建立的二维地图具有高鲁棒性的特点, 但其只能建立二维地图。随着机器人、无人机及无人汽车等移动平台的发展, 对高鲁棒性的三维地图的需求逐渐上升。基于视觉的 SLAM 建立的三维地图由于视觉传感器自身限制, 还不能进行广泛应用。因此, 多传感器融合成为当前 SLAM 研究热点之一, 例如当前研究可热的 IMU 与视觉传感器相结合^[62,63], 可以弥补视觉传感器的缺陷, 提高数据的准确性、降低不确定性。同时, 在特征提取与匹配和闭环检测的时候, 获得高精度、高准确度的结果, 进而提高后端优化效率, 实现建立高精度的地图。激光与视觉传感器的融合创建的 SLAM 三维地图也成为另一种多传感器信息融合的研究热点。张毅等人^[64]提

出一种基于基于 Bayes 方法的激光传感器和 RGB-D 传感器的信息融合 SLAM 地图创建的方法, 提高所建地图的精确性和鲁棒性。单一传感器满足不了当前移动平台的发展对地图的需求, 多传感器信息融合将会出现在移动平台的 SLAM 系统的研究与应用中。

5.3 多机器人 SLAM 系统

多机器人辅助建图正成为 SLAM 系统的研究热点。与单机机器人 SLAM 系统相比, 多机器人 SLAM 系统要处理传感器数据读取与传送、数据处理及地图拼接等问题^[65]。Vadim Indelman 等人^[66]提出了一种多机器人姿态图定位和数据关联的新方法, 不需要关于机器人初始相对姿态的先验知识。文章中讲述了一种期望最大化(EM)方法来有效地传递机器人的初始相对姿态, 并解决了多机器人 SLAM 系统的数据关联问题。Kapoutsis、Campos、Deutsch 等人^[67-69]均对多机器人 SLAM 系统进行了相应研究。但多机器人之间的协作涉及多个问题, 就单单后端优化就有复杂性、闭环回路检测、地图及位姿更新等多个问题需要解决。多机器人协作完成机器人的定位与环境的地图构建, 相对于单机机器人具有高精度、高效率等优势, 在面对一些复杂的环境时, 其构建地图的准确率要高于单机机器人。由于其优势, 多机器人 SLAM 系统正成为一个研究热点。

5.4 SLAM 语义地图

语义地图是指地图除了当前环境的几何信息外, 还有存在当前环境独立个体的信息, 包括其位姿和功能等信息, 以便完成较为复杂的任务^[70,71]。在当前的基于视觉的 SLAM 系统中, 采用低级别的语义特征, 对特征的区別度较低, 所建立的地图仅仅是纯粹的传统几何地图。随着 SLAM 应用逐渐扩展到大规模、非静态的环境, 传统几何地图开始凸显其短处, 因此部分研究者对构件语义地图进行了很多工作, 来提高机器人的鲁棒性和交互性, 处理更加复杂的问题^[72]。在构建语义地图时, 需要将检测的场景、物体等目标进行抽象, 以此满足导航的需要。面对大规模、非静态的环境, 需要处理庞大复杂的数据。因此, 在构建语义地图之前, 需要对其进行训练。目前对于 SLAM 语义地图的研究尚处于初步阶段, 随着进一步研究, 再结合人工智能的发展, 将开发语义地图在 SLAM 中的巨大潜力, 以此完成移动平台复杂多变的任务。

6 结束语

文章从模型建立、优化算法和地图评估三个方面对基于图优化的 SLAM 后端优化进行阐述。模型是优化系统的基础, 建立模型的方式会对优化结果产生一定影响。在模型建立方面, 阐述了基于动态贝叶斯网络的模型建立、基于因子图的模型建立和基于马尔可夫模型的模型建立。三种建立模型的方式各有特点, 其中以基于因子图建模方式应用广泛。优化算法是优化系统的核心。在优化算法方面, 阐述了基于最小二乘的优化算法、基于松弛技术的优化算法、基于随机梯度下降法的优化算法和流形优化。不同的优化算法组合, 加之不同的辅助工具, 会产生

优于单一优化算法的结果。在评估方面, 阐述了部分评估标准。评估时对优化算法及结果进行评估。不同的优化算法适应于不同规模的环境。通过评估, 选用出最适用的优化算法。最后, 对 SLAM 发展进行展望。SLAM 将结合当前其他研究热点, 得到进一步发展。

参考文献:

- [1] Davison A J, Reid I D, Molton N D, *et al.* MonoSLAM: real-time single camera SLAM [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2007, 29 (6): 1052.
- [2] Durrant-Whyte H, Bailey T. Simultaneous localization and mapping: part I [J]. IEEE Robotics & Amp Amp Automation Magazine, 2006, 13 (2): 99-110.
- [3] Burgard W, Brock O, Stachniss C. A tree parameterization for efficiently computing maximum likelihood maps using gradient descent [C]// Robotics: Science & Systems III. Canbridge: MIT Press, 2007: 352.
- [4] Konolige K, Agrawal M. FrameSLAM: from bundle adjustment to real-time visual mapping [J]. IEEE Trans on Robotics, 2008, 24 (5): 1066-1077.
- [5] Sunderhauf N, Protzel P. Towards a robust back-end for pose graph SLAM [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2012: 1254-1261.
- [6] Johannsson H, Kaess M, Fallon M, *et al.* Temporally scalable visual SLAM using a reduced pose graph [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2012: 54-61.
- [7] He Z, Ye C. An indoor wayfinding system based on geometric features aided graph slam for the visually impaired [J]. IEEE Trans on Neural Systems & Rehabilitation Engineering, 2017, 25 (9): 1592.
- [8] Cadena C, Carlone L, Carrillo H, *et al.* Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: toward the robust-perception age [J]. IEEE Trans on Robotics, 2016, 32 (6): 1309-1332.
- [9] Smith R, Self M, Cheeseman P. Estimating uncertain spatial relationships in robotics [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2003: 435-461.
- [10] Holmes S A, Klein G, Murray D W. An O(N³) square root unscented kalman filter for visual simultaneous localization and mapping [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2009, 31 (7): 1251-1263.
- [11] Doucet A, Freitas N D, Murphy K P, *et al.* Rao-Blackwellised particle filtering for dynamic bayesian networks [C]// Proc of Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc. 2000: 176-183.
- [12] Thrun S, Montemerlo M. The GRAPH SLAM algorithm with applications to large-scale mapping of urban structures [J]. International Journal of Robotics Research, 2006, 25 (5): 403-429.
- [13] 梁明杰, 闰华清, 罗荣华. 基于图优化的同时定位与地图创建综述 [J]. 机器人, 2013, 35 (4): 500-512.
- [14] Thrun S, Montemerlo M. The graph SLAM algorithm with applications to

- large-scale mapping of urban structures [J]. International Journal of Robotics Research, 2006, 25 (5): 403-429.
- [15] Bay H, Tuytelaars T, Gool L V. SURF: speeded up robust features [J]. Computer Vision & Image Understanding, 2006, 110 (3): 404-417.
- [16] Rublee E, Rabaud V, Konolige K, *et al.* ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF [C]// Proc of IEEE International Conference on Computer Vision. [S. l.] IEEE Press, 2012: 2564-2571.
- [17] Golfarelli M, Maio D, Rizzi S. Elastic correction of dead-reckoning errors in map building [M]. 1998.
- [18] 王忠立, 赵杰, 蔡鹤皋. 大规模环境下基于图优化 SLAM 的后端优化方法 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2015, 47 (7): 20-25.
- [19] 王忠立, 赵杰, 蔡鹤皋. 大规模环境下基于图优化 SLAM 的图构建方法 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2015, 47 (1): 75-85.
- [20] Agarwal S, Snively N, Simon I, *et al.* Building Rome in a day [J]. Communications of the ACM, 2011, 54 (10): 105-112.
- [21] Thrun S. Probabilistic robotics [M]. Cambridge: MIT Press, 2005.
- [22] Kschischang F R, Frey B J, Loeliger H A. Factor graphs and the sum-product algorithm [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2001, 47 (2): 498-519.
- [23] Vallve J, Sola J, Andrade-Cetto J. Factor descent optimization for sparsification in graph SLAM [C]// Proc of European Conference on Mobile Robots. 2017: 1-6.
- [24] Carlevaris-Bianco N, Kaess M, Eustice R M. Generic node removal for factor-graph SLAM [J]. IEEE Trans on Robotics, 2017, 30 (6): 1371-1385.
- [25] Lu F, Milios E. Globally Consistent range scan alignment for environment mapping [J]. Autonomous Robots, 1997, 4 (4): 333-349.
- [26] Polok L. Incremental cholesky factorization for least squares problems in robotics [C]// Proc of Intelligent Autonomous Vehicles. 2013: 172-178.
- [27] Frese U, Larsson P, Duckett T. A multilevel relaxation algorithm for simultaneous localization and mapping [M]. [S. l.] IEEE Press, 2005.
- [28] Olson E, Leonard J, Teller S. Fast iterative alignment of pose graphs with poor initial estimates [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2006: 2262-2269.
- [29] Dellaert F, Kaess M. Square root SAM: simultaneous localization and mapping via square root information smoothing [M]. [S. l.] Sage Publications, Inc. 2006.
- [30] Kaess M, Ranganathan A, Dellaert F. iSAM: incremental smoothing and mapping [J]. IEEE Trans on Robotics, 2008, 24 (6): 1365-1378.
- [31] Kaess M, Johannsson H, Roberts R, *et al.* iSAM2: incremental smoothing and mapping using the Bayes tree [J]. International Journal of Robotics Research, 2012, 31 (2): 216-235.
- [32] Grisetti G, Kummerle R, Stachniss C, *et al.* A tutorial on graph-based SLAM [J]. IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine, 2011, 2 (4): 31-43.
- [33] Rosen D M, Kaess M, Leonard J J. An incremental trust-region method for Robust online sparse least-squares estimation [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2012: 1262-1269.
- [34] Zhong J, Tian L, Varma P, *et al.* Nonlinear optimization algorithm for partially coherent phase retrieval and source recovery [J]. IEEE Trans on Computational Imaging, 2016, 2 (3): 310-322.
- [35] Duckett T, Marsland S, Shapiro J. Learning globally consistent maps by relaxation [C]// Proc of International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2000: 3841-3846 vol. 4.
- [36] Carlone L, Censi A, Dellaert F. Selecting good measurements via ℓ_1 relaxation: A convex approach for robust estimation over graphs [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2014: 2667-2674.
- [37] Grisetti G, Grzonka S, Stachniss C, *et al.* Efficient estimation of accurate maximum likelihood maps in 3D [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2007: 3472-3478.
- [38] Gao C, Harle R. MSGD: Scalable back-end for indoor magnetic field-based GraphSLAM [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2017.
- [39] Grisetti G, Kummerle R, Stachniss C, *et al.* Hierarchical optimization on manifolds for online 2D and 3D mapping [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2010: 273-278.
- [40] Kümmerle R, Grisetti G, Strasdat H, *et al.* G2o: a general framework for graph optimization [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2011: 3607-3613.
- [41] Eickenhoff K, Paull L, Huang G. Decoupled, consistent node removal and edge sparsification for graph-based SLAM [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2016: 3275-3282.
- [42] Xie L, Wang S, Markham A, *et al.* GraphTinker: Outlier rejection and inlier injection for pose graph SLAM [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2017: 6777-6784.
- [43] Eickenhoff K, Paull L, Huang G. Decoupled, consistent node removal and edge sparsification for graph-based SLAM [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2016: 3275-3282.
- [44] Konolige K. Sparse bundle adjustment [C]// Proc of British Machine Vision Conference. 2010: 1-11.
- [45] Mazuran M, Diego T G, Luciano S, *et al.* Nonlinear graph sparsification for SLAM [C]// Robotics: Science and Systems. 2014.
- [46] Olson E, Kaess M. Evaluating the performance of map optimization algorithms [C]// Proc of RSS Workshop on Good Experimental Methodology in Robotics. 2009.
- [47] Kümmerle R, Steder B, Dornhege C, *et al.* On measuring the accuracy of SLAM algorithms [J]. Autonomous Robots, 2009, 27 (4): 387.
- [48] Sturm J, Engelhard N, Endres F, *et al.* A benchmark for the evaluation of RGB-D SLAM systems [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference

- on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2012: 573-580.
- [49] Huang S, Lai Y, Frese U, *et al.* How far is SLAM from a linear least squares problem? [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2010: 3011-3016.
- [50] Huang S, Wang H, Frese U, *et al.* On the number of local minima to the point feature based SLAM problem [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2012: 2074-2079.
- [51] Cadena C, Carlone L, Carrillo H, *et al.* Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: toward the robust-perception age [J]. IEEE Trans on Robotics, 2016, 32 (6): 1309-1332.
- [52] Latif Y, Cadena C, Neira J. Robust graphSLAM back-ends: a comparative analysis [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2014: 2683-2690.
- [53] Li H, Zhang Q, Zhao D. Comparison of methods to efficient graph SLAM under general optimization framework [C]// Proc of Youth Academic Conference of Chinese Association of Automation. 2017: 321-326.
- [54] Konda K, Memisevic R. Learning visual odometry with a convolutional network [C]// Proc of International Conference on Computer Vision Theory and Applications. 2015: 486-490.
- [55] Costante G, Mancini M, Valigi P, *et al.* Exploring representation learning with cnns for frame-to-frame ego-motion estimation [J]. IEEE Robotics & Automation Letters, 2015, 1 (1): 18-25.
- [56] Mu B, Liu S Y, Paull L, *et al.* SLAM with objects using a nonparametric pose graph [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2016: 4602-4609.
- [57] Chen Z, Lam O, Jacobson A, *et al.* Convolutional neural network-based place recognition [J]. Computer Science, 2014.
- [58] Hou Y, Zhang H, Zhou S. Convolutional neural network-based image representation for visual loop closure detection [C]// Proc of IEEE International Conference on Information and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2015: 2238-2245.
- [59] Sünderhauf N, Shirazi S, Dayoub F, *et al.* On the performance of ConvNet features for place recognition [C]// Proc of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. [S. l.] IEEE Press, 2015: 4297-4304.
- [60] Li Q L, Song Y, Hou Z G. Neural network based FastSLAM for autonomous robots in unknown environments [J]. Neurocomputing, 2015, 165 (C): 99-110.
- [61] 赵洋, 刘国良, 田国会, 等. 基于深度学习的视觉 SLAM 综述 [J]. 机器人, 2017, 39 (6): 889-896.
- [62] Qayyum U, Ahsan Q, Mahmood Z. IMU aided RGB-D SLAM [C]// Proc of International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology. [S. l.] IEEE Press, 2017: 337-341.
- [63] Kukko A, Kaijaluoto R, Kaartinen H, *et al.* Graph SLAM correction for single scanner MLS forest data under boreal forest canopy [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing, 2017, 132: 199-209.
- [64] 张毅, 杜凡宇, 罗元, 等. 一种融合激光和深度视觉传感器的 SLAM 地图创建方法 [J]. 计算机应用研究, 2016, 33 (10): 2970-2972+3006.
- [65] Rone W, Bentzvi P. Mapping, localization and motion planning in mobile multi-robotic systems [J]. Robotica, 2013, 31 (1): 1-23.
- [66] Indelman V, Nelson E, Michael N, *et al.* Multi-robot pose graph localization and data association from unknown initial relative poses via expectation maximization [C]// Proc of IEEE International Conference on Robotics and Automation. [S. l.] IEEE Press, 2014: 593-600.
- [67] Kapoutsis A C, Chatzichristofis S A, Doitsidis L, *et al.* Real-time adaptive multi-robot exploration with application to underwater map construction [J]. Autonomous Robots, 2016, 40 (6): 1-29.
- [68] Campos R, Gracías N, Ridao P. Underwater multi-vehicle trajectory alignment and mapping using acoustic and optical constraints [J]. Sensors, 2016, 16 (3): 387.
- [69] Deutsch I, Liu M, Siegwart R. A framework for multi-robot pose graph SLAM [C]// Proc of IEEE International Conference on Real-Time Computing and Robotics. [S. l.] IEEE Press, 2016: 567-572.
- [70] Salas-Moreno R F. Dense semantic SLAM [D]. London: Imperial College London, 2014.
- [71] 于金山, 吴皓, 田国会, 等. 基于云的语义库设计及机器人语义地图构建 [J]. 机器人, 2016, 38 (4): 410-419.
- [72] 陈常, 朱华, 由韶泽. 基于视觉的同时定位与地图构建的研究进展 [J/OL]. 计算机应用研究, 2018, 35(3). (2017-08-18) [2018-02-10]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1196.TP.20170818.1703.044.html>.