

Random Sample

1. Exponential Distribution

1. 自行實作 指數分布的隨機數產生器（要能自訂發生的速率 λ ），禁止使用 **NumPy**、**SciPy** 或其他模組內建的指數/泊松分布抽樣函數。
2. 產生 1000 個指數分布的隨機數，並計算它們的均值（**mean**）與變異數（**variance**），檢查是否接近理論值。
3. 畫出直方圖，觀察數據是否符合指數分布的形狀。
4. 提示：可以用 Inverse Transform Sampling。

2. 驗證 Exponential Distribution 與 Poisson Distribution 的關係

背景知識

Poisson Distribution 描述的是固定時間內發生的事件數量。而指數分布描述的是事件之間的時間間隔，如果事件是根據 Poisson Distribution 發生的，那麼事件發生的間隔時間服從 Exponential Distribution。換句話說，泊松分布與指數分布存在以下關係：

- 如果事件發生的時間間隔服從指數分布，那麼在單位時間內發生的事件數量就會服從泊松分布。
- 也就是說，如果我們產生很多指數分布的隨機數，並將它們累積起來，統計某段時間內發生的事件數量，那麼這些數據應該會符合泊松分布。

實驗設計

請按照以下步驟進行實驗，並驗證泊松分布與指數分布的關係：

1. 使用內建函數（**NumPy** 或 **SciPy**）產生泊松分布與指數分布的隨機數：
 - 產生 1000 個泊松分布的隨機數（使用 `numpy.random.poisson(λ , size)`）。
 - 產生 1000 個指數分布的隨機數（使用 `numpy.random.exponential(1/ λ , size)`）。
2. 驗證指數分布的間隔時間能夠模擬泊松分布：
 - 產生 10000 個指數分布的隨機數，將這些數字看成是事件發生的間隔時間。
 - 透過累積間隔時間，計算在單位時間內發生的事件數，這些數據應該符合泊松分布。
 - 計算這些數據的均值與變異數，與泊松分布的理論值 $E[X]=\lambda$ ， $\text{Var}(X)=\lambda$ 比較。
3. 畫出直方圖，觀察分布形狀：
 - 繪製泊松分布與指數分布的直方圖，檢查它們的形狀是否符合理論分布。
 - 繪製指數分布累積後得到的泊松分布直方圖，檢查其是否與內建的泊松分布相似。

模擬結果

[程式連結](#)

| | | | | | subject | size | rate | [mean, variance] |
|---------------------------|---------------|-------|--------|------------------|---------|------|------|------------------|
| random_sample_exponential | (theoretical) | 0 | 1.0000 | [1.0000, 1.0000] | | | | |
| random_sample_exponential | (theoretical) | 0 | 2.0000 | [0.5000, 0.2500] | | | | |
| random_sample_exponential | (theoretical) | 0 | 4.0000 | [0.2500, 0.0625] | | | | |
| random_sample_exponential | (implemented) | 1000 | 1.0000 | [1.0123, 1.0005] | | | | |
| random_sample_exponential | (implemented) | 1000 | 2.0000 | [0.5062, 0.2501] | | | | |
| random_sample_exponential | (implemented) | 1000 | 4.0000 | [0.2531, 0.0625] | | | | |
| random_sample_poisson | (theoretical) | 0 | 1.0000 | [1.0000, 1.0000] | | | | |
| random_sample_poisson | (theoretical) | 0 | 2.0000 | [2.0000, 2.0000] | | | | |
| random_sample_poisson | (theoretical) | 0 | 4.0000 | [4.0000, 4.0000] | | | | |
| random_sample_poisson | (implemented) | 10000 | 1.0000 | [0.9938, 0.9848] | | | | |
| random_sample_poisson | (implemented) | 10000 | 2.0000 | [1.9877, 1.9975] | | | | |
| random_sample_poisson | (implemented) | 10000 | 4.0000 | [3.9753, 4.0328] | | | | |

結論

1. Exponential Distribution

- 自行實作採樣的隨機數符合指數分佈，其平均數與變異數接近指數分佈的理論值。
 - 例如當速率 $\lambda = 2$ 時，採樣 1000 個隨機數的平均數約為 0.5062，與理論值 0.5 的相對誤差約為 0.0124（符合理論）；變異數約為 0.2501，與理論值 0.25 的相對誤差約為 0.0004（符合理論）。如圖 Random Sample Exponential (Implemented) 中所示，經驗分佈函式 Empirical (Rate = 2, Size = 1000) 也接近機率密度函式 Theoretical (Rate = 2) 的形狀（符合理論）。

2. 驗證 Exponential Distribution 與 Poisson Distribution 的關係

- 自行實作採樣的隨機數符合指數分佈，經過累積後，計算在單位時間內發生的事件數，其平均數與變異數接近泊松分佈的理論值。
 - 例如當速率 $\lambda = 4$ 時，採樣 10000 個隨機數的平均數約為 3.9753，與理論值 4 的相對誤差約為 0.0062（符合理論）；變異數約為 4.0328，與理論值 4 的相對誤差約為 0.0082（符合理論）。如圖 Random Sample Poisson (Implemented) 中所示，經驗分佈函式 Empirical (Rate = 4, Size = 10000) 也接近機率質量函式 Theoretical (Rate = 4) 的形狀（符合理論）。
- 觀察 numpy.random 實作採樣的隨機數（符合指數分佈或泊松分佈），其形狀皆接近理論值，也接近自行實作的模組之結果。
 - 如圖 Random Sample Exponential (NumPy) 與圖 Random Sample Poisson (NumPy) 所示。