Random Sample

1. Exponential Distribution

1. **自行實作** 指數分布的隨機數產生器（要能自訂發生的速率 λ），**禁止使用 NumPy、SciPy 或其他模組內建的指數/泊松分布抽樣函數**。
2. 產生 1000 個指數分布的隨機數，並計算它們的**均值（mean）與變異數（variance）**，檢查是否接近理論值。
3. **畫出直方圖**，觀察數據是否符合指數分布的形狀。
4. 提示：可以用 Inverse Transform Sampling。

2. 驗證 Exponential Distribution 與 Poisson Distribution 的關係

背景知識

Poisson Distribution 描述的是**固定時間內發生的事件數量**。而指數分布描述的是**事件之間的時間間隔**，如果事件是根據 Poisson Distribution 發生的，那麼**事件發生的間隔時間**服從 Exponential Distribution。換句話說，泊松分布與指數分布存在以下關係：

- 如果事件發生的時間間隔服從**指數分布**，那麼在單位時間內發生的事件數量就會服從**泊松分布**。
- 也就是說，如果我們產生很多**指數分布的隨機數**，並將它們累積起來，統計某段時間內發生的事件數量，那麼這些數據應該會符合泊松分布。

實驗設計

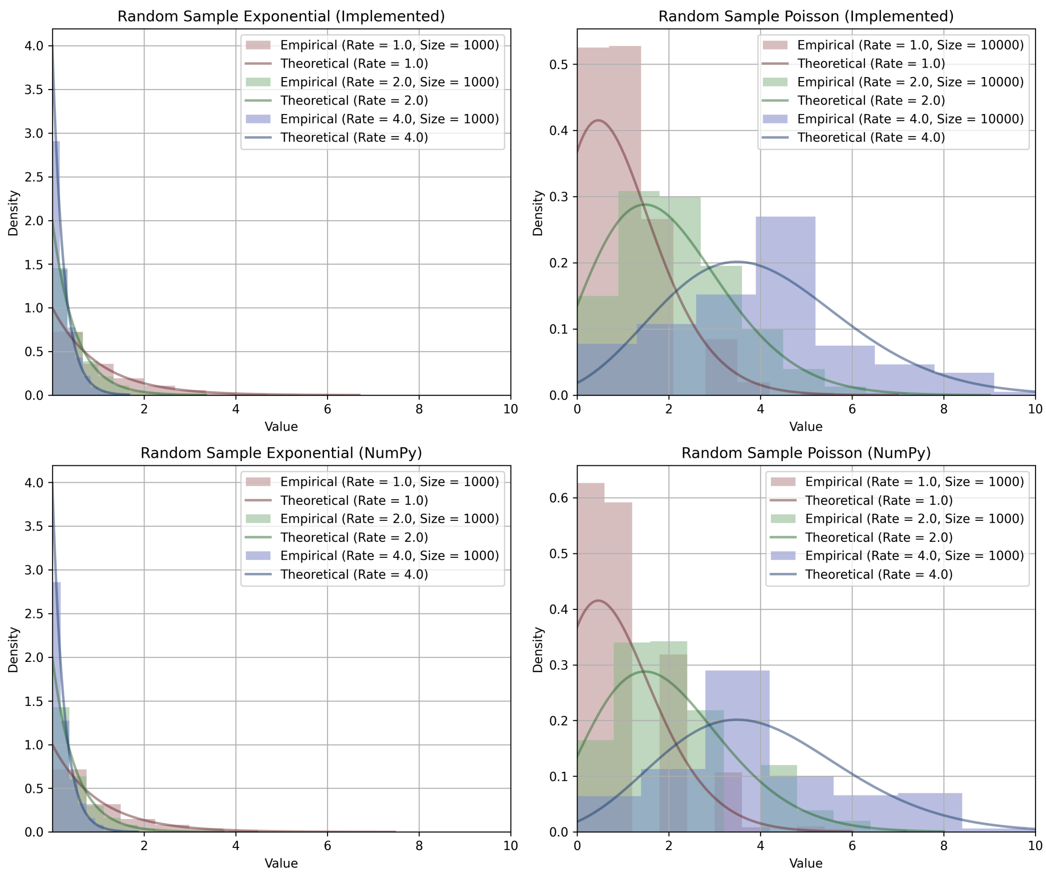
請按照以下步驟進行實驗，並驗證泊松分布與指數分布的關係：

1. **使用內建函數（NumPy 或 SciPy）產生泊松分布與指數分布的隨機數：**
   - 產生 1000 個泊松分布的隨機數（使用 `numpy.random.poisson(λ, size)`）。
   - 產生 1000 個指數分布的隨機數（使用 `numpy.random.exponential(1/λ, size)`）。
2. **驗證指數分布的間隔時間能夠模擬泊松分布：**
   - 產生 10000 個指數分布的隨機數，將這些數字看成是事件發生的間隔時間。
   - 透過累積間隔時間，計算在單位時間內發生的事件數，這些數據應該符合泊松分布。
   - 計算這些數據的均值與變異數，與泊松分布的理論值 $E[X]=\lambda$，$Var(X)=\lambda$ 比較。
3. **畫出直方圖，觀察分布形狀：**
   - 繪製泊松分布與指數分布的直方圖，檢查它們的形狀是否符合理論分布。
   - 繪製指數分布累積後得到的泊松分布直方圖，檢查其是否與內建的泊松分布相似。

模擬結果

程式連結

subject	size	rate	[mean, variance]
(theoretical) random_sample_exponential	0	1.0000	[1.0000, 1.0000]
(theoretical) random_sample_exponential	0	2.0000	[0.5000, 0.2500]
(theoretical) random_sample_exponential	0	4.0000	[0.2500, 0.0625]
(implemented) random_sample_exponential	1000	1.0000	[1.0123, 1.0005]
(implemented) random_sample_exponential	1000	2.0000	[0.5062, 0.2501]
(implemented) random_sample_exponential	1000	4.0000	[0.2531, 0.0625]
(theoretical) random_sample_poisson	0	1.0000	[1.0000, 1.0000]
(theoretical) random_sample_poisson	0	2.0000	[2.0000, 2.0000]
(theoretical) random_sample_poisson	0	4.0000	[4.0000, 4.0000]
(implemented) random_sample_poisson	10000	1.0000	[0.9938, 0.9848]
(implemented) random_sample_poisson	10000	2.0000	[1.9877, 1.9975]
(implemented) random_sample_poisson	10000	4.0000	[3.9753, 4.0328]



結論

1. Exponential Distribution

- 自行實作採樣的隨機數符合指數分佈，其平均數與變異數接近指數分佈的理論值。
  - 例如當速率 $\lambda = 2$ 時，採樣 1000 個隨機數的平均數約為 0.5062，與理論值 0.5 的相對誤差約為 0.0124（符合理論）；變異數約為 0.2501，與理論值 0.25 的相對誤差約為 0.0004（符合理論）。如圖 $\text{Random Sample Exponential (Implemented)}$ 中所示，經驗分佈函式 $\text{Empirical (Rate} = 2, \text{Size} = 1000)$ 也接近機率密度函式 $\text{Theoretical (Rate} = 2)$ 的形狀（符合理論）。

2. 驗證 Exponential Distribution 與 Poisson Distribution 的關係

- 自行實作採樣的隨機數符合指數分佈，經過累積後，計算在單位時間內發生的事件數，其平均數與變異數接近泊松分佈的理論值。
  - 例如當速率 $\lambda = 4$ 時，採樣 10000 個隨機數的平均數約為 3.9753，與理論值 4 的相對誤差約為 0.0062（符合理論）；變異數約為 4.0328，與理論值 4 的相對誤差約為 0.0082（符合理論）。如圖 $\text{Random Sample Poisson (Implemented)}$ 中所示，經驗分佈函式 $\text{Empirical (Rate} = 4, \text{Size} = 10000)$ 也接近機率質量函式 $\text{Theoretical (Rate} = 4)$ 的形狀（符合理論）。
- 觀察 numpy.random 實作採樣的隨機數（符合指數分佈或泊松分佈），其形狀皆接近理論值，也接近自行實作的模組之結果。
  - 如圖 $\text{Random Sample Exponential (NumPy)}$ 與圖 $\text{Random Sample Poisson (NumPy)}$ 所示。