

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа №1 (доп)

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДОМ КВАДРАТНОГО КОРНЯ**

Преподаватель: Полевиков Виктор Кузьмич
доцент кафедры вычислительной математики

Студент: Болтач Антон Юрьевич
2 курс 9 группа

Минск 2017

Постановка задачи

- 1) Построить стандартную программу решения систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня.
- 2) Рассмотрим СЛАУ вида:

$$A \cdot x = f$$

Задана симметричная и положительно определенная матрица A размером 21×21 :

Матрица A :

```
58509.99  -12665.78  19638.27  14749.32  22130.72  -15826.46  -16231.67  -23284.36  -
12218.9   1773.19   21109.5  -6418.79  -23785.47  -7851.98   30897.72  -3842.09  18667.23
7665.16   -21220.07  8099.34   -15393.09

-12665.78  60179.67  15381.76  -27716.23  -3742.65  7426.57  22290.72  11448.31  -9312.1
10143.6   -7401.96  -1258.42  26957.39  17283.97  -6149.01  12029.53  8207.3   -19996.03
5532.94   -13802.91  -821.73

19638.27  15381.76  54186.81  -23954.13  6264.36  -4943.04  15721.35  -2495.25  -19627.21
5598.05   -7111.41  713.11   2055.49   3449.44   13649.75  8218.01   7373.63  -4014.63
4122.32   4647.52  -8830.24

14749.32  -27716.23  -23954.13  52852.62  -8.0   -16767.18  -18445.23  -3081.01  -9384.24
-11038.18  8532.5   -2031.45  -17917.54  1502.03  9613.94  -4744.99  636.27   11207.83  -
23904.0   2301.46  -12625.44

22130.72  -3742.65  6264.36  -8.0   76014.87  -22351.3  -12145.14  -6773.3   131.45
3418.24   21329.29  -20063.1  -14449.4  4858.32  19141.41  -4505.29  48910.47  3074.62
16415.9   3221.74  2323.17

-15826.46  7426.57  -4943.04  -16767.18  -22351.3  77784.15  33812.94  7876.25  10701.55
-1753.06   -1402.63  25666.65  13830.79  1603.21  -38969.54  -1376.69  -20952.53  -
17452.44  -10644.29  -20003.91  5850.69

-16231.67  22290.72  15721.35  -18445.23  -12145.14  33812.94  61455.61  -11541.77
2653.64   -6870.17  -10444.34  11790.39  15827.84  7434.06  -18039.83  16650.59  -367.73
-25104.78  3380.4   4404.17  -3466.66

-23284.36  11448.31  -2495.25  -3081.01  -6773.3  7876.25  -11541.77  75728.37  -6040.81
22.63   -3443.05  2522.03  10814.28  17924.67  -7944.15  -13065.56  -10706.9  13789.1  -
3173.73  -36759.48  37808.17

-12218.9   -9312.1  -19627.21  -9384.24  131.45  10701.55  2653.64  -6040.81  48179.39
8398.93   18306.44  -18647.93  -10787.0  23212.23  -22246.43  -13270.2  -9325.8  -9046.21
1806.66   747.46  13307.48

1773.19   10143.6  5598.05  -11038.18  3418.24  -1753.06  -6870.17  22.63  8398.93
52070.59  -5954.65  -31466.32  4375.13  22272.12  -17072.95  -27488.05  -7737.31  -
6813.59  25642.64  9876.04  -14895.89

21109.5   -7401.96  -7111.41  8532.5  21329.29  -1402.63  -10444.34  -3443.05  18306.44
-5954.65  63636.16  1398.27  -33004.55  -4117.73  18128.28  -4176.89  17511.33  15123.49
-19003.95  -4175.31  4045.72

-6418.79  -1258.42  713.11  -2031.45  -20063.1  25666.65  11790.39  2522.03  -18647.93
-31466.32  1398.27  79979.38  -1605.64  -47476.34  7457.83  -8478.11  17641.76  10381.78
-27326.8  -10079.56  5341.39

-23785.47  26957.39  2055.49  -17917.54  -14449.4  13830.79  15827.84  10814.28  -
10787.0  4375.13  -33004.55  -1605.64  45957.45  5939.35  -10530.07  8141.27  -4235.17
-8741.34  13966.86  2830.97  2661.3

-7851.98  17283.97  3449.44  1502.03  4858.32  1603.21  7434.06  17924.67  23212.23
22272.12  -4117.73  -47476.34  5939.35  88044.31  -41368.4  -3054.47  -11113.63  -
7100.73  -2354.14  -27579.3  5232.8
```

30897.72 -6149.01 13649.75 9613.94 19141.41 -38969.54 -18039.83 -7944.15 -
22246.43 -17072.95 18128.28 7457.83 -10530.07 -41368.4 87341.05 5482.61 26739.47
10157.64 8648.53 19464.88 1312.63

-3842.09 12029.53 8218.01 -4744.99 -4505.29 -1376.69 16650.59 -13065.56 -13270.2
-27488.05 -4176.89 -8478.11 8141.27 -3054.47 5482.61 78186.74 -13888.37 -14355.77
-11602.45 -7670.81 -9533.39

18667.23 8207.3 7373.63 636.27 48910.47 -20952.53 -367.73 -10706.9 -9325.8 -
7737.31 17511.33 17641.76 -4235.17 -11113.63 26739.47 -13888.37 69969.52 15499.41
-9036.01 8095.66 -10054.69

7665.16 -19996.03 -4014.63 11207.83 3074.62 -17452.44 -25104.78 13789.1 -9046.21
-6813.59 15123.49 10381.78 -8741.34 -7100.73 10157.64 -14355.77 15499.41 66814.61
-18183.86 -10302.55 10886.99

-21220.07 5532.94 4122.32 -23904.0 16415.9 -10644.29 3380.4 -3173.73 1806.66
25642.64 -19003.95 -27326.8 13966.86 -2354.14 8648.53 -11602.45 -9036.01 -
18183.86 78307.64 22705.58 11304.74

8099.34 -13802.91 4647.52 2301.46 3221.74 -20003.91 4404.17 -36759.48 747.46
9876.04 -4175.31 -10079.56 2830.97 -27579.3 19464.88 -7670.81 8095.66 -10302.55
22705.58 55291.36 -25389.87

-15393.09 -821.73 -8830.24 -12625.44 2323.17 5850.69 -3466.66 37808.17 13307.48
-14895.89 4045.72 5341.39 2661.3 5232.8 1312.63 -9533.39 -10054.69 10886.99
11304.74 -25389.87 55917.74

Транспонированный вектор значений f:

-9802429.57 7630962.11 652766.7021999997 -4667805.248499999 -1.2691215438000003E7
1.0641337708900003E7 9818644.9474 2769026.1498 1982182.6072 -166261.4744000004 -
9260962.8759 -3271843.615100001 6611386.8363000015 1.3678403765999999E7
1.8237912162899997E7 1.1354532828200001E7 -1.4187019842500003E7 -4324960.924999999 -
3614924.4255000004 -1.0237807182599999E7 1197963.6318000003

Транспонированный вектор значений точного решения x:

-79.63 82.27 14.56 -8.76 -36.89 42.74 48.36 -90.6 -37.05 11.56 -98.08 -39.41 -69.97
70.28 -70.19 88.67 -90.94 59.94 -58.15 -69.0 51.03

Краткая теория и алгоритм решения

Пусть \mathbf{A} — симметрическая положительно определенная квадратная матрица системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ порядка \mathbf{n} . Решим задачу ее представления в виде $\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,n-1} & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2,n-1} & s_{2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ s_{1,n-1} & s_{2,n-1} & \dots & 0 \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Находя произведение $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$, составим систему уравнений относительно неизвестных элементов матрицы \mathbf{S} :

$$\begin{cases} s_{11}^2 = a_{11}, & s_{11}s_{12} = a_{12}, & \dots, & s_{11}s_{1n} = a_{1n}; \\ s_{12}^2 + s_{22}^2 = a_{22}, & \dots, & s_{12}s_{1n} + s_{22}s_{2n} = a_{2n}; \\ & \dots & & \\ s_{1n}^2 + s_{2n}^2 + \dots + s_{nn}^2 = a_{nn}. \end{cases}$$

Таким образом, элементы матрицы \mathbf{S} находятся из соотношений:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, j = 2, 3, \dots, n;$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, \quad i = 2, \dots, n;$$

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} \right), j = i+1, \dots, n; i = 2, 3, \dots, n-1; (j > i)$$
$$s_{ij} = 0 \quad (j < i).$$

Решение системы $\mathbf{S}^T \mathbf{Sx} = \mathbf{f}$ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит из двух этапов:

1) Произведение Sx обозначается через y . В результате решения системы $S^T y = f$ находится столбец y .

$$y_1 = \frac{f_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ji} y_j}{s_{ii}}, i = 2, 3, \dots, n.$$

2) В результате решения системы $Sx = y$ находится решение задачи — столбец x .

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n s_{ij} x_j}{s_{ii}}, i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Листинг программы на языке программирования Java

```
static double[] methodSQRT(double[][] arr, double[] f, int n) {  
    double[][] s = new double[n][n];  
    double[] x = new double[n];  
    double[] y = new double[n];  
    s[0][0] = Math.sqrt(arr[0][0]);  
    for (int j = 1; j < n; j++) //s[1][j]  
        s[0][j] = arr[0][j] / s[0][0];  
    for (int i = 1; i < n; i++) //s[i][j]  
        for (int j = 0; j < n; j++) {  
            if (i == j) {  
                double sum = 0;  
                for (int k = 0; k < i; k++)  
                    sum += Math.pow(s[k][i], 2);  
                s[i][i] = Math.sqrt(arr[i][i] - sum);  
            }  
            if (i > j)  
                s[i][j] = 0;  
            if (i < j) {  
                double sum = 0;  
                for (int k = 0; k < i; k++)  
                    sum += s[k][i] * s[k][j];  
                s[i][j] = (arr[i][j] - sum) / s[i][i];  
            }  
        }  
    y[0] = f[0] / s[0][0];    // вычисление вектора y  
    for (int i = 1; i < n; i++) {  
        double sum = 0;  
        for (int j = 0; j < i; j++)  
            sum += s[j][i] * y[j];  
        y[i] = (f[i] - sum) / s[i][i];  
    }  
    x[n-1] = y[n-1] / s[n-1][n-1];    // вычисление решения x  
    for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {  
        double sum = 0;  
        for (int j = i; j < n; j++)  
            sum += s[i][j] * x[j];  
        x[i] = (y[i] - sum) / s[i][i];  
    }  
    return x;  
}
```

4. Результаты.

Матрица S:

241.88838335066856 -52.36208462991075 81.18732172239193 60.97572688564266 91.49145441977188 -65.42877248080238 -67.1039666111983 -
96.26076158541429 -50.51462096171072 7.33061247273452 87.26958983142774 -26.53616478429475 -98.33241956691204 -32.46117027710623
127.73544381090512 -15.883730945566224 77.17290818773172 31.68883058302028 -87.72670148957506 33.48379069638201 -63.63716101936342
0.0 239.66201637558268 81.919103026056 -102.32499166664843 4.372963622234187 16.692603770217794 78.34790303973583 26.7372191565093 -
49.89172267960265 43.92621872207099 -11.818069439883708 -11.04851301108503 90.99689577257249 65.02588808374884 2.251020529762957
46.72340200309852 51.10628098224671 -76.51081739399558 3.919632516267437 -50.277591334884015 -17.33234358002495
0.0 0.0 202.1996274748083 -101.49481815438907 -7.52630171149141 -4.938170951130546 72.95340535166049 15.47784458581698 -
56.57269594813812 6.946109581188542 -65.42281399533489 18.657771383534133 12.78168380205083 3.7488350445838514 15.305912695935568
28.091191180446675 -15.224619653351036 -1.5809314529196383 54.02345837118281 29.90982709632037 -11.097247425373112
0.0 0.0 0.0 168.413119141578 -35.05175323952581 -68.70451256257996 6.340505312300512 42.130724099409115 -101.83933384235733 -
37.32147093155828 -27.540533452390786 2.0766793597319553 -7.797005199839908 62.43951952336897 21.429357556440454 22.893787140328143 -
2.287080734291955 7.636907534415093 -75.23536899001259 -10.980142985386859 -69.14522414348396
0.0 0.0 0.0 0.0 257.565118629632 -73.31544923324363 -21.65276839414833 13.627865784311144 3.788752361005788 5.045556557744069
46.35259825309315 -67.45376767999456 -23.403207537673023 37.89609937866606 32.26833799617145 -8.706512533821614 160.85862647256846
2.972957897609164 86.1703187018739 0.8477797350453198 22.18482684500188
0.0 0.0 0.0 251.20655253386462 108.76696619089486 20.309378407474743 4.899751818240998 -16.586371226592718
22.641607189670147 77.24423902926695 14.687743428000548 21.817196755241113 -106.42993726941171 -8.449519013029214 -20.680950689313132
-53.21145876252471 -59.847905112513644 -69.73692672259496 -4.787247200035573
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 182.07904075098386 -128.5499632025505 41.16239779861123 -44.906814832706594 -0.954762725175473 -
1.983542900371212 -4.873637814700048 -11.317494201437713 7.566115472885123 57.44785478561141 42.09400609579867 -60.76996801485435
11.520443980363126 88.32008122227954 -22.682227533580598
0.0 0.0 0.0 0.0 215.8923636632368 3.413967488531545 -20.77880571154423 28.867244223043 -4.714131366850358 -
7.223442667004427 36.862236771808604 27.07941699136447 -44.3181099752353 -3.1199613875297256 54.731430296980136 -36.441800406338515 -
90.017341896900063 148.73069630019813
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 166.80047618032594 57.16121165088304 91.56774567771356 -115.69383212043083 -66.20608582135343
188.71128127114696 -75.76735626751196 -59.71068494873425 -37.18234412547628 -48.02367454298787 -44.472097998868506 -14.90016114191984
11.534285430463376
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 206.46997007964245 -54.168603592984766 -110.38338414662144 21.77654807351105
56.17984120474882 -68.3365500985005 -115.21699425896888 -37.445263408585255 -15.175482642455686 115.29608824794155 63.00193493513619 -
72.40935341700799
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 189.8092768699873 57.88841583303911 -76.54089589223017 -84.89394522285417
63.08798330096692 7.2982157141116275 25.49964722327559 76.73550753430376 -5.784562819692327 15.607313773289288 -18.172728015980706
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 198.33621353694505 -35.36340411480288 -69.82170432023443 5.654632278884138 -
146.3842840717633 116.71415488284127 15.96285714342872 -61.81513164054899 -3.8316122758651763 3.6699222707861545
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 122.38330013137187 2.860976424993754 47.7892823116766 -32.96914009677579
61.802263257762355 48.66616063834087 -13.79709680608187 79.71417214408615 1.7666761656342924
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 156.81866786479347 -94.54231030190917 18.423042328783595
15.76574110495724 90.42312067883005 -27.42185454210792 -106.75169523596873 17.710339539591658
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 177.54527327053225 -11.715887920882746 1.775857013297319 -
22.65806728117299 88.26519933962287 -12.89924648380978 26.427363270452243
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 170.70735984593475 -22.076863584081647 -47.339564081297944 -
72.05309122573658 -28.61993740864455 -39.45377867789885
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 107.07208426426422 60.66709823266964 -74.24801313907983
8.742454283434203 -97.01435138459951
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 157.18622787068497 -50.266648619855474 -
36.89003243440361 37.97325746098899
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 91.97741353111662 30.705141040304984
40.162023131143805
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 65.5307421107118 -38.302991896241075
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 35.88215378301719

Транспонированный вектор у:

-40524.59830941652 22986.578142177663 10187.014019243867 7061.45785132138 -
34010.402869584046 22484.001152370514 7295.990306980597 -5821.996902691485
12683.569892275209 -3196.272116848045 -24676.96731852173 -29236.879579960092 -
21950.864830815943 33141.14369793696 -17914.35648895111 18458.094710882295 -
7337.099207601535 16827.935682021583 -5417.67328823318 -6476.2228821043245
1831.0663075473512

Транспонированный вектор найденных значений x`:

-79.62999999999946 82.27000000000032 14.56000000000066 -8.759999999999899 -
36.89000000000002 42.73999999999945 48.36000000000004 -90.59999999999975 -
37.049999999999826 11.559999999999805 -98.08000000000017 -39.41000000000004 -
69.96999999999995 70.27999999999926 -70.19000000000027 88.67000000000016 -
90.93999999999984 59.94000000000025 -58.14999999999928 -69.0000000000007
51.029999999999956

Транспонированный вектор значений точного решения x:

-79.63 82.27 14.56 -8.76 -36.89 42.74 48.36 -90.6 -37.05 11.56 -98.08 -39.41 -69.97 70.28
70.19 88.67 -90.94 59.94 -58.15 -69.0 51.03