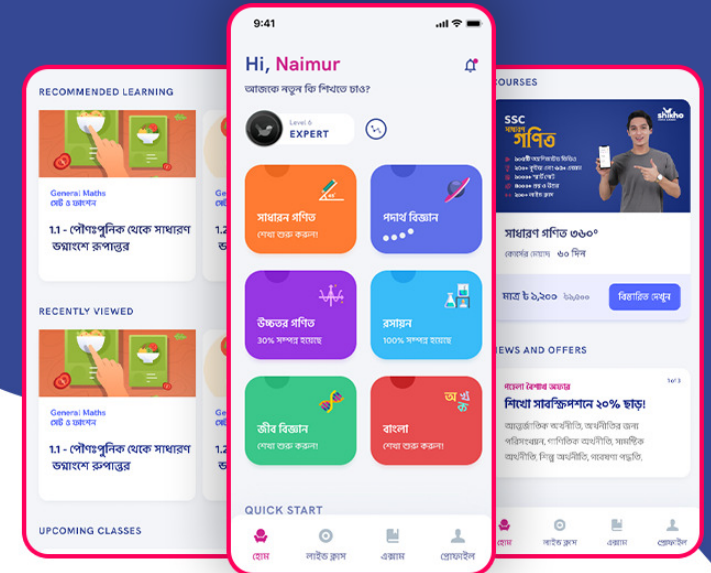


HSC উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায় ১ :
ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
পর্বঃ ৩





MENTOR

TAHSIN ANJUM

B.Sc in EEE

Islamic University of Technology

MATHEMATICS SPECIALIST

**4+ YEARS OF
TEACHING EXPERIENCE**

আজকে আমরা যা শিখবো

- নির্ণায়ক ✓
- নির্ণায়কের মাত্রা, কণ ✓
- অনুরাশি ও সহগুণক ✓
- নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মাবলি ✓
- নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান ✓

✗ নির্ণায়ক

- বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকার রাশি
- ১৬৯৩ খ্রিস্টাব্দে গণিতবিদ লিবনিজ সরল সমীকরণ মালার মাধ্যমে এক বিশেষ সম্পর্ক অবতারণা করেন
- উনবিংশ শতাব্দীতে গাউস এবং কসি আরো সুস্পষ্ট ধারণা দেন
- সর্বপ্রথম কসি এই গাণিতিক ফাংশনের নাম দেন নির্ণায়ক !

২য় অঙ্ক - [3]
নির্ণায়ক ।

নির্ণায়কের মাত্রা

→ $n \times n$

সারি ও কলাম সংখ্যা n হলে, তাকে n মাত্রার নির্ণায়ক বলে

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2×3

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়ক ২য় ক অঙ্ক

২য় অঙ্ক - (২য় কলাম)
৩য় অঙ্ক -

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2×2

২য় অঙ্ক - নির্ণায়ক

• LIVE

मूल्यांकन

सूचकः = सूचक-संख्या जोड़ाना 2 (नीचे) 2 (नीचे)

सूचक-संख्या = " " " "

$$\begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ \hline 4 & 6 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \{ (2 \times 1) - (-7 \times 3) \} - 0 \{ (6 \times 1) - (-7 \times 4) \} + 4 \{ (6 \times 3) - (2 \times 4) \} = (5 \times 6) - (3 \times 4) = 30 - 12 = 18$$

• LIVE

✓ સ્કેલર માત્રિકા - (સર્કલ) ગુણ

✓ " એક

✓ " સમગ્ર

✓ ક્રોસ મેટ્રિક્સ

⊛ ક્રોસ મેટ્રિક્સ

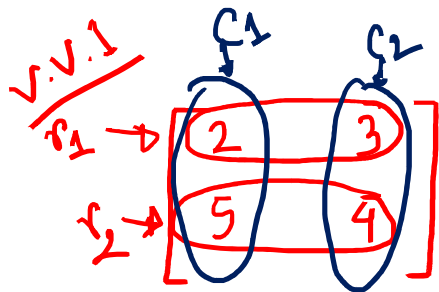
$$5A = \begin{bmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{bmatrix}$$

ક્રોસ મેટ્રિક્સ -
(સર્કલ) ગુણ

$$\begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5a & 5b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 5c & 5d \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 5a & b \\ 5c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \checkmark
 \end{aligned}$$



ଅନୁକ୍ରମିକ
(ଅନୁକ୍ରମିକ ଭାବେ)
ଅନୁକ୍ରମିକ ଭାବେ

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 3+4 \end{bmatrix} \quad \times$$

$$= \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline 2 & a \\ 3 & b \\ \hline 2 & a+2 \\ 3 & b+3 \\ \hline 2-a & a \\ 3-b & b \end{array}$$

Side note
most

$$C_2' = C_2 + C_1$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$\begin{array}{l}
 r_1 \rightarrow \\
 r_2 \rightarrow \\
 r_3 \rightarrow
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 4 & a & k \\
 2 & b & z \\
 3 & c & y
 \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccc}
 4+3 & a+c & k+y \\
 2-4 & b-a & z-k \\
 3 & c & y
 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
 r_1' &= r_1 + r_3 \\
 r_2' &= r_2 - r_1
 \end{aligned}$$

আনুপাতিক বা অনুৱাশি

অনুৱাশি
Matrix

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

2, 2

0 এর - অনুৱাশি?

$$0 \text{ এর - মানুনক } = (-1)^{2+2} \times (-1) \\ = \boxed{-1} \text{ Ans}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -25 - (-24) \\ = -25 + 24 = \boxed{-1}$$

সহগুণক

সংজ্ঞাঃ কোন উপাদানের আনুপাতিকের পূর্বে যথাযথ চিহ্ন বসানো

সহগুণক = $(-1)^{\text{সংখ্যা + ক্রম}} \times \text{উপাদানের - চিহ্ন}$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

✓ **ধর্মঃ** নির্ণায়কের কোন সারির (কলামের) উপাদানগুলো শূন্য হলে নির্ণায়কের মান শূন্য

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের সারি এবং কলাম সমূহ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে মানের কোন পরিবর্তন হয় না

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

✓ **ধর্মঃ** নির্ণায়কের পাশাপাশি বা যেকোনো দুইটি কলাম (সারি) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে মান অপরিবর্তিত থাকলেও চিহ্নের পরিবর্তন হয়

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের দুইটি কলাম (সারি) একই হলে, নির্ণায়কের মান শূণ্য

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 5 & 4 \\ a_2 & 5 & 4 \\ a_3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

~~ধর্মঃ~~ নির্ণায়কের যেকোনো সারি (কলাম) এর উপাদানগুলোকে তার নিজ সহগুণক দ্বারা গুণ করলে গুণফলের সমষ্টি = নির্ণায়কের মান


$$\begin{aligned} D &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \\ &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \end{aligned}$$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর উপাদান গুলোকে অপর সারি (কলাম) এর অনুরূপ উপাদানের সহগুণক দ্বারা গুণ করা হলে গুণফলের সমষ্টি শূন্য হবে।

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$$

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

 **ধর্মঃ** নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর প্রত্যেকটি উপাদানকে কোন স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে, নির্ণায়কের মানকেও সে স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করা যায়

$$\textcircled{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$


নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর উপাদানগুলোকে অন্য একটি সারি (কলাম) এর অনুরূপ উপাদানগুলোর m গুণের সমান হলে, নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর প্রতিটি উপাদান দুইটি পদ যুক্ত হয়, তাহলে নির্ণায়কটিকে অপর দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যাবে।

$$\begin{vmatrix} a_1 + 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 1 & b_2 & c_2 \\ a_3 + 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$


নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর প্রতিটি উপাদান অন্য একটি সারি (কলাম) এর অনুরূপ উপাদানের একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস হলে, নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না

• LIVE

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের পার্থক্য

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
✓ সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে রূপান্তর করা যায় না	সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে রূপান্তর করা যায়
✓ সুনির্দিষ্ট মান নেই, শুধু অপারেটর হিসেবে কাজ করে	সুনির্দিষ্ট বীজগণিতীয় মান আছে
✓ কোন ধ্রুপ রাশি দ্বারা গুণ করলে প্রত্যেকটি ভুক্তিকে ঐ ধ্রুপ সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়	কোন ধ্রুপ রাশি দ্বারা গুণ করলে প্রত্যেকটি ভুক্তিকে গুণ না করে শুধুমাত্র যে কোন একোটি <u>সারি</u> বা <u>কলামের</u> ভুক্তিগুলোর সাথে গুণ করতে হয়
✓ সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হতে পারে	✓ সারি ও কলাম সংখ্যা অবশ্যই সমান
✓ ক্রম $m \times n$ হলে, ভুক্তি $m.n$	ক্রম n হলে, মোট ভুক্তি n^2

Handwritten diagram illustrating a 3x3 matrix and its determinant calculation:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

Below the matrix, the calculation 3×3 is shown, leading to $3^4 = 9$.

• LIVE

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

✓ প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p \underbrace{(p-1)}_{C_2'} \underbrace{(p^2-1)}_{C_3'}$$

$$C_2' = C_2 - C_1$$

$$C_3' = C_3 - C_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & p-1 & p^2-p \\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p(p-1) \\ 1 & p^2-1 & p^2(p^2-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ p-1 & p(p-1) \\ (p+1)(p-1) & p^2(p+1)(p-1) \end{vmatrix}$$

$$= p(p-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ (p+1) & p(p+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & p^2 - 1^2 \\ &= (p+1)(p-1) \\ & p^2(p^2-1) \\ & p^2(p+1)(p-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p(p-1)^2 \\ & (p^2+1-1) \\ &= p(p-1)^2(p^2-1) \text{ Ans} \end{aligned}$$

• LIVE

২য়-১ম

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0$$

২য়-১ম, ৩য়-১ম

$$\begin{aligned} C_1' &= C_1 - C_2 \\ C_2' &= C_2 - C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-bc-b^2+ac & b^2-ca-c^2+ab & c^2-ab \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a-b)(b^2 - c^2 + ab - ca) \\ &\quad - (b-c)(a^2 - b^2 + ac - bc) \\ &= (a-b)\{(b+c)(b-c) + a(b-c)\} \\ &\quad - (b-c)\{(a+b)(a-b) + c(a-b)\} \\ &= (a-b)(b-c)(b+c+a) - (b-c)(a-b)(a+b+c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

• LIVE

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

প্রমাণ কর যে,

$$C_1' = C_1 + (C_2 + C_3)$$

Diagram showing the addition of rows in a determinant:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ b+c+a & b+c+2a & b \\ c+a+2b & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

Row 1 is added to Row 2 and Row 3.

$$\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b+c+2a-a & b+c+2a & b \\ b+c+2a & b+c+2a & b \\ c+a+2b & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 - R_2 \\ R_2' &= R_2 - R_3 \end{aligned} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & (a+b+c) & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c) \{(a+b+c)^2 - 0\}$$

$$= 2(a+b+c)^3 = \text{Ans.}$$

• LIVE

C₃

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$C_2' = C_2 - C_3$$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ (a+b)(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ \frac{1}{c}(1-a-b) & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$$= abc(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ 1-a-b & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$$= abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

• LIVE

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array} \right\} \rightarrow \text{সহগুণক}$$

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে,

$$a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 = 0$$

$$A_1 = + (b_2 c_3 - c_2 b_3)$$

$$B_1 = - (a_2 c_3 - c_2 a_3)$$

$$C_1 = + (a_2 b_3 - b_2 a_3)$$

$$a_2 (b_2 c_3 - c_2 b_3)$$

$$- b_2 (a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_2 (a_2 b_3 - b_2 a_3) = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma &: 02 \\ \alpha &: 06, 02 \end{aligned}$$

• LIVE

**ANY
QUESTION**

