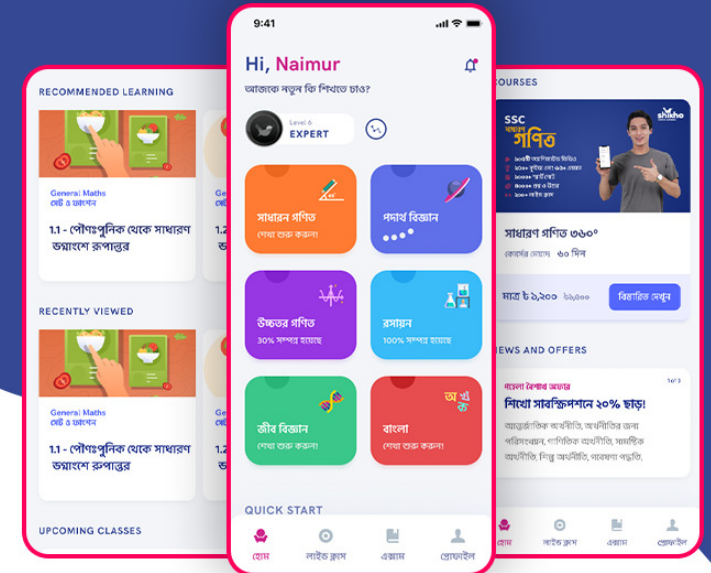


HSC উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায় ১ :
ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
পর্বঃ ৪





MENTOR

TAHSIN ANJUM

B.Sc in EEE

Islamic University of Technology

MATHEMATICS SPECIALIST

**4+ YEARS OF
TEACHING EXPERIENCE**

আজকে আমরা যা শিখবো

- নির্ণায়কের গুণাবলি
- নির্ণায়কের মান নির্ণয়
- ক্রেমারের নিয়ম
- নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান

✓ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের পার্থক্য

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে রূপান্তর করা যায় না	সারিকে <u>কলাম</u> বা <u>কলামকে</u> সারিতে রূপান্তর করা যায়
সুনির্দিষ্ট মান নেই, শুধু অপারেটর হিসেবে কাজ করে	সুনির্দিষ্ট বীজগণিতীয় <u>মান</u> আছে
কোন ধ্রুপ রাশি দ্বারা গুণ করলে প্রত্যেকটি ভুক্তিকে ঐ ধ্রুব সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়	কোন <u>ধ্রুপ</u> রাশি দ্বারা গুণ করলে প্রত্যেকটি ভুক্তিকে গুণ না করে শুধুমাত্র যে কোন একোটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলোর সাথে গুণ করতে হয়
সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হতে পারে আবার নাও হতে পারে	<u>সারি</u> ও <u>কলাম</u> সংখ্যা অবশ্যই সমান
ক্রম $m \times n$ হলে, ভুক্তি $m.n$	ক্রম n হলে, মোট ভুক্তি n^2

• LIVE

$$\begin{matrix} & \underline{C_1} & C_2 & \underline{C_3} \\ R_1 & a & b & c \\ R_2 & d & e & f \\ R_3 & g & h & i \end{matrix}$$

$$C_1' = C_1 - C_3$$

$$C_2' = C_2 + C_1$$

⊗ (ସମାପ୍ତ) - ଆମେ ଆ-କାର
0 ର 2 ର ନିମ୍ନ/ଉପ-ଆ-0

$$\rightarrow \begin{matrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 9 \\ 10 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ 2 & 7 & 3 \\ - & 4 & 9 \\ + & 2 & -7 \end{matrix}$$

$$= 2(8 - 63)$$

$$-4() + 2()$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b+a & c \\ d-f & e+d & f \\ g-i & h+g & i \end{vmatrix}$$

$$= 0(12 - 45) - 0(18 - 90) + 0(30 - 40) = 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1(45 - 12) = \underline{\underline{33}}$$

~~Q~~ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ
 ଉପ-ନିର୍ମାଣିତ ଏକ ସମାନ୍ତର ରେଖା
 ରେଖା ନିର୍ମାଣିତ କର : 0

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

$$= 5.6 \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= 5.6 \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$= 5.6 \cdot 0 = \underline{0}$$

$$\begin{array}{cc} C_2 & C_3 \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{array} \right| & = (a+b+c) \left| \begin{array}{ccc} 0 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\underline{C_1'} = C_1 - C_3$$

$$= (a+b+c) \cdot 0 = 0 \quad \underline{\text{Ans}}$$

$$C_3' = C_3 + C_2 \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{array} \right|$$

$$= (a+b+c) \left| \begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{array} \right|$$

$$C_3' = C_3 - C_1$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 5 & 5 & a \\ 5 & 5 & b \\ 5 & 5 & c \end{array} \right|$$

$$= 5 \cdot 5 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array} \right|$$

$$= \underline{0}$$

নির্ণায়কের গুণাবলি

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ হলে } x = ?$$

$$C'_1 = C_1 - C_2$$

$$C'_2 = C_2 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-a & a-b & b \\ x^2-a^2 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (x-a) & (a-b) & b \\ (x-a)(x+a) & (a+b)(a-b) & b^2 \end{vmatrix}$$

$$(x-a)(a-b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ x+a & a+b & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(a-b) \cdot (a+b - x/a)$$

$$\Rightarrow (x-a)(a-b)(b-x) = 0$$

$$\begin{matrix} x-a=0 & | & b-x=0 \\ \boxed{x=a} & | & \boxed{x=b} \end{matrix}$$

Ans

• LIVE

V.V.1

$$\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$$

নির্ণায়কের গুণাবলি

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$$

এর মান কত?

$$= \begin{vmatrix} \log \frac{x}{y} & \log \frac{y}{z} & \log z \\ \log \frac{x}{2y} & \log \frac{y}{2z} & \log 2z \\ \log \frac{x}{3y} & \log \frac{y}{3z} & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log x - \log y & \log y - \log z & \log z \\ \log 2x - \log 2y & \log 2y - \log 2z & \log 2z \\ \log 3x - \log 3y & \log 3y - \log 3z & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$C_2' = C_2 - C_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_1' = C_1 - C_2 \\ C_2' = C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$= \log \frac{x}{y} \cdot \log \frac{y}{z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \log z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

• LIVE

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$C_2' = C_2 - C_3$$

$$1 - 1 - 0$$

$$1 - 1 - 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & 1 \\ 0 & -y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xy - 0 = xy \quad \underline{\text{Ans}}$$

tricks Δ MCA

যোগ/বিয়োগঃ

$$\begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

~~সমান্তরাল~~ Δ
= 0

$C_2' = C_2 - C_1$
 $C_3' = C_3 - C_2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 8-5 & 10-8 \\ 7 & 10-7 & 12-10 \\ 3 & 6-3 & 8-6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 6 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

• LIVE

২য় অধ্যায় প্রশ্ন

গুণ: $\times 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 \\ -1 & -3 & -9 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

= 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 12 \\ 6 & 2 & -18 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ -6 & -18 \end{vmatrix}$$

• LIVE

মান নির্ণয় সংক্রান্ত

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & -1 \\ 7 & 14 & 7 \\ 6 & 12 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 \begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 14 & 16 & 4 \\ -7 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান সংক্রান্ত

2 বস/১০-১৫

(সমাধান)

Written + MCQ

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{হলে, } x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

উদাহরণঃ $\begin{cases} 4x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -10 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-8}{-1} = 8$$

$$y = \frac{10}{-1} = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 6 = 10$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 6x + 2y &= 7 \end{aligned} \rightarrow x, y = ?$$

1. মডেল
2. প্রকৃতি
3. প্রকৃতি
4. (মডেল)

5. নির্ণয়

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \rightarrow x, y \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

• LIVE

x, y, z

Col Answer

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$x = ? \quad y = ? \quad z = ?$$

$$\underline{x = \frac{D_x}{D}}, \quad \underline{y = \frac{D_y}{D}}, \quad \underline{z = \frac{D_z}{D}}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ক্রেমারের নিয়ম

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

H.W

$$3x - 4y + 7z = 10$$

$$x - 2y + 4z = -3$$

$$5x - y + z = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

• LIVE

H/W

নির্ণায়কের মাধ্যমে,

$$3x + 3y - 5z = 4$$

$$3x + 3y + 6z = 2$$

$$x - y - 2z = 1$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\boxed{}}{66} = \boxed{}$$

উদাহরণ

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-6+6) - 3(-6-6) - 5(-3-3)$$
$$= -3(-12) - 5(-6)$$
$$= 36 + 30 = \boxed{66}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

• LIVE

উদাহরণ

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \quad [\text{DU 09-10}]$$

$$C_1' = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \omega + \omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1 + \omega + \omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 1 + \omega + \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$$

উদাহরণ

(i)

$$\omega = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$$

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

• LIVE

V.V.1

নির্ণায়ক সংক্রান্ত

Ques দেওয়া, A একটি 3x3 Matrix এবং $|A| = -7$ তাহলে,

$$(2A)^{-1} = ?$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = -7$$

$$3i + 4j - 5k$$

$$6i - 2j + 8k$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$$

$$|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\therefore (2A)^{-1} = \frac{1}{|2A|}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2 \times 2 (-7)}$$

$$= -\frac{1}{56} \text{ Ans}$$

• LIVE

H.W

নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 3 \quad 3 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \square \\ y &= \square \\ z &= \square \end{aligned}$$

$$3 \times 1$$

• LIVE

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 2 \\ 2x + 5y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2 \quad 2 \times 1$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Poll Question - 1

$$(18 + 24) - 4 \text{ এর অনুরাশিকত} = 42$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

হলে 5 এর অনুরাশিকত?

$$-4 \text{ এর অনুরাশিকত} = (-1)^{2+1} \times 42 = (-1)^3 \times 42 = -42$$

$$\text{অনুরাশিকত} = (-1)^{2+2} \times (-12) = -12$$

$$1 \times 9 - 21$$

$$= 9 - 21$$

$$= -12$$

(a) 12

~~(b) -12~~

(c) 6

(d) 10

• LIVE

Poll Question - 2

$$\begin{vmatrix} a & a & x \\ c & c & c \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0 \text{ হলে } x \text{ এর মান কত?}$$

- (a) b & a
- (b) C
- (c) B
- (d) a & c

• LIVE

Poll Question - 3

$\begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ -5 & a+4 \end{vmatrix} = 0$ হলে a এর মান কত? [RU 14-15]

(a) -2 or 1

~~(b) -3 or 1~~

(c) 0 or 2

(d) none

$$(a-2)(a+4) + 5 = 0$$

$$a^2 + 4a - 2a - 8 + 5 = 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$a^2 + 3a - a - 3 = 0$$

$$a(a+3) - 1(a+3) = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0$$

$$a = -3, a = 1$$

• LIVE

**ANY
QUESTION**

