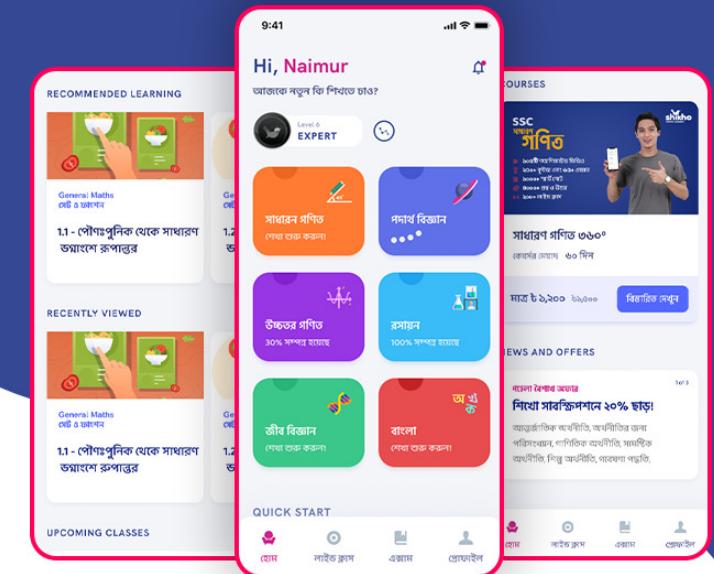


HSC উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায় ১ :
ম্যাট্রিক্স ও নির্ণয়ক
পর্বং ৩





MENTOR

TAHSIN ANJUM

B.Sc in EEE

Islamic University of Technology

MATHEMATICS SPECIALIST

**4+ YEARS OF
TEACHING EXPERIENCE**

আজকে আমরা যা শিখবো

- নির্ণয়ক ✓
- নির্ণয়কের মাত্রা, কর্ণ ✓
- অনুরাশি ও সহগুণক ✓
- নির্ণয়কের মৌলিক ধর্মাবলি ✓
- নির্ণয়ক সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান ✓

+

নির্ণায়ক

- বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকার রাশি
- ১৬৯৩ খ্রিস্টাব্দে গণিতবিদ লিবনিজ
সরল সমীকরণ মালার মাধ্যমে এক বিশেষ সম্পর্ক অবতারণা করেন
- উনবিংশ শতাব্দীতে গাউস এবং কসি আরো সুস্পষ্ট ধারণা দেন
- সর্বপ্রথম কসি এই গাণিতিক ফাংশনের নাম দেন নির্ণায়ক !

• LIVE

ম্যাট্রিক্স - []
নির্ণয়ক - //

নির্ণয়কের মাত্রা

↳ $n \times n$

সারি ও কলাম সংখ্যা n হলে, তাকে n মাত্রার নির্ণয়ক বলে

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2×3

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -2 \\ 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

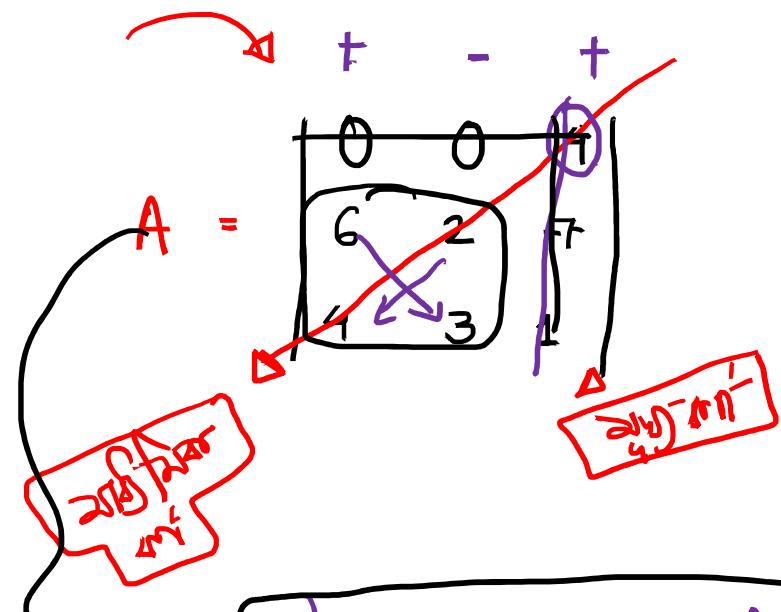
2 মাত্রার নির্ণয়ক

শ্রোতৃর জন্য - মাত্রার
নির্ণয়ক -

নির্ণয়ক এবং $\frac{1}{\Delta}$ ম্যাট্রিক্স -

• LIVE

ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ



ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ ଯେଉଁ ଏହାରେ ଡୋଡ଼ାର୍ଗୁଣର ଉଲ୍ଲଙ୍ଘନ ହେବାରେ କିମ୍ବା

ପ୍ରାଥମିକ କର୍ଣ୍ଣ ଏହାରେ " " " " "

$$\text{ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 \{(2 \times 1) - (-7 \times 3)\} - 0 \{(6 \times 1) - (-7 \times 4)\} + 4 \{(6 \times 3) - (2 \times 4)\}$$

$$= (5 \times 6) - (3 \times 4) = 30 - 12 = 18$$

✓ ଶ୍ରୀ ପ୍ରଦୀପ ମାଣ୍ଡିଆ - ପ୍ରାଚୀ ବିହୁର
⊕ ଶ୍ରୀ ପରବର୍ତ୍ତନା ମାନ୍ଦିଆ

✓ " $\overline{2\pi}$
✓ " $\overline{\sin x}$
✓ $\overline{\text{Ansatz Matrix}}$

ବ୍ୟାକିତ୍ତ୍ଵ-
ଆଜାମନ୍ଦିର-

$$5A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{cc} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{array} \right| = 5 \cdot 5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5a & 5b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 5c & 5d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_a & s_b \\ s_c & s_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_a & b \\ s_c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & s_b \\ c & s_d \end{vmatrix}$$

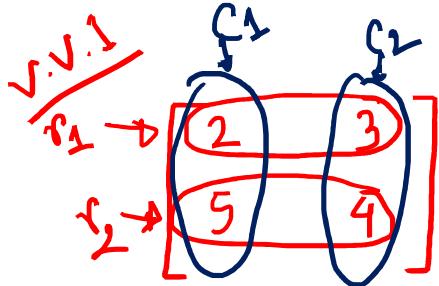
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 3+4 \\ \end{bmatrix} \times \cancel{\quad}$$

বিভিন্ন ক্ষেত্রে
যোগ ও পৰিপন্থ
পদ্ধতি ব্যৱহাৰ
কৰিব।

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{cc} 2 & a \\ 3 & b \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cc} 2 & a+2 \\ 3 & b+3 \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cc} 2-a & a \\ 3-b & b \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

C₂'

C₁' = C₁ - C₂

Side note
most

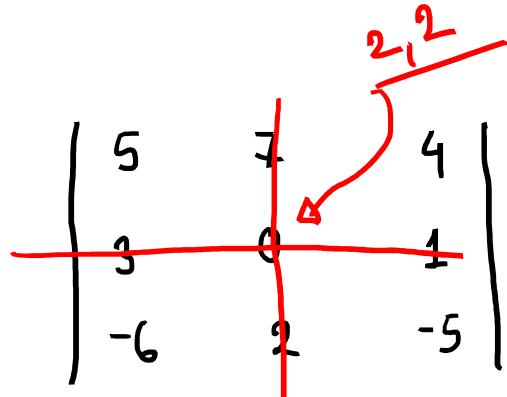
$C'_2 = C_2 + C_1$

$$\begin{array}{l}
 r_1 \rightarrow | \begin{array}{ccc} 4 & a & k \\ 2 & b & l \\ 3 & c & j \end{array} | \\
 r_2 \rightarrow | \begin{array}{ccc} 2 & b & l \\ 3 & c & j \end{array} |
 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 4+3 & a+c & k+j \\ 2-4 & b-a & l-k \\ 3 & c & j \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 r'_1 = r_1 + r_3 \\
 r'_2 = r_2 - r_1
 \end{array}$$

আনুপাতিক বা অনুরোধি



0 এবং -
যোগাযোগ কী ?

$$\frac{0 \text{ এবং } -\text{যোগাযোগ কী ?}}{0 \text{ এবং } -\text{যোগাযোগ}} = (-1)^{2+2} \times (-1)$$
$$= (-1) \quad \underline{\text{Ans}}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -25 - (-24)$$
$$= -25 + 24 = \underline{-1}$$

• LIVE

সহগুণক

সংজ্ঞাঃ কোন উপাদানের আনুপাতিকের পূর্বে যথাযথ **চিহ্ন** বসানো

$$\text{সহুনক} = (-1)^{\text{মাত্রাটির সূচনা}} \times \text{উদায়ন} - \text{পুনরাবৃত্তি}$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

✓ ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারির (কলামের) উপাদানগুলো শূন্য হলে নির্ণায়কের মান শূন্য

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের সারি এবং কলাম সমূহ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে মানের কোন পরিবর্তন হয় না

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ



ধর্মঃ নির্ণায়কের পাশাপাশি বা যেকোনো দুইটি কলাম (সারি) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে মান অপরিবর্তিত থাকলেও চিহ্নের পরিবর্তন হয়

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের দুইটি কলাম (সারি) একই হলে, নির্ণায়কের মান শূণ্য

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 5 & 4 \\ a_2 & 5 & 4 \\ a_3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

~~ধর্মঃ~~ নির্ণায়কের যেকোনো সারি (ক্লাম) এর উপাদানগুলোকে তার নিজ সহগুণক দ্বারা গুণ করলে গুণফলের সমষ্টি = নির্ণায়কের মান

$$\begin{aligned} D &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \\ &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \end{aligned}$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর উপাদান গুলোকে অপর সারি (কলাম) এর অনুরূপ উপাদানের সহগুণক দ্বারা গুণ করা হলে গুণফলের সমষ্টি শূণ্য হবে।

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর প্রত্যেকটি উপাদানকে কোন স্থির সংখ্যা দ্বারা **গুণ** করলে, নির্ণায়কের মানকেও সে স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করা যায়

$$k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর উপাদানগুলোকে অন্য একটি সারি (কলাম) এর অনুরূপ উপাদানগুলোর m গুণের সমান হলে, নির্ণায়কের মান শুন্য হবে।

• LIVE



নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কেলাম) এর প্রতিটি উপাদান দুইটি পদ যুক্ত হয়, তাহলে নির্ণায়কটিকে অপর দুইটি নির্ণায়কের **সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যাবে।**

$$\begin{vmatrix} a_1 + 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 1 & b_2 & c_2 \\ a_3 + 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



• LIVE

নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ

ধর্মঃ নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম) এর প্রতিটি উপাদান অন্য একটি সারি (কলাম) এর অনুরূপ উপাদানের একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস হলে, নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না

• LIVE



ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের পার্থক্য

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে রূপান্তর করা যায় না	সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে রূপান্তর করা যায়
সুনির্দিষ্ট মান নেই, শুধু অপারেটর হিসেবে কাজ করে	সুনির্দিষ্ট বীজগণিতীয় মান আছে
কোন ধ্রুপ রাশি দ্বারা গুণ করলে প্রত্যেকটি ভুক্তিকে ঐ ধ্রুব সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়	কোন ধ্রুপ রাশি দ্বারা গুণ করলে প্রত্যেকটি ভুক্তিকে গুণ না করে শুধুমাত্র যে কোন একটি <u>সারি</u> বা <u>কলামের</u> ভুক্তিগুলোর সাথে গুণ করতে হয়
সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হতে পারে আবার নাও হতে পারে	সারি ও কলাম সংখ্যা অবশ্যই সমান
ক্রম $m \times n$ হলে, ভুক্তি $m.n$	ক্রম n হলে, মোট ভুক্তি n^2

• LIVE

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p \frac{(p-1)^2(p^2-1)}{c_2 - c_1}$$

$$c_2' = c_2 - c_1$$

$$c_3' = c_3 - c_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & p-1 & p^2-p \\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p(p-1) \\ 1 & p^2-1 & p^2(p^2-1) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p(p-1) \\ 1 & (p+1)(p-1) & p^2(p+1)(p-1) \end{vmatrix} \\
 &= P(p-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & (p+1) & P(p+1) \end{vmatrix} \\
 &= P(p-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= P(p-1)^2 (P^2 + P - X^2 - 1) \\
 &= P(p-1)^2 (P^2 - 1) \text{ Arg.}
 \end{aligned}$$

LIVE

২৮-১৩৪

প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$C_2' = C_2 - C_3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c-a \\ a^2 - bc - b^2 + ca & b^2 - ca - c^2 + ab & c^2 - ab \end{vmatrix}$$

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

২৮-১০৬, ১৭৫-০৫-০৫

$$\begin{aligned}
 &= (a-b)(b^2 - c^2 + ab - ca) \\
 &\quad - (b-c)(a^2 - b^2 + ac - bc) \\
 &= (a-b)\{(b+c)(b-c) + a(b-c)\} \\
 &\quad - (b-c)\{(a+b)(a-b) + c(a-b)\} \\
 &= (a-b)(b-c)(b+c+a) - (b-c)(a-b) \\
 &\quad \underline{(a+b+c)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

LIVE

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

প্রমাণ কর যে,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & a+b+2c & \\ \hline 1 & c & \\ \hline c_1' & c_1 + (c_2+c_3) & \\ \hline \end{array}$$

$$C_1' = C_1 + (C_2 + C_3)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & \\ \hline 2a+2b+2c & b & \\ \hline 2a+2b+2c & b+c+2a & \\ \hline 2a+2b+2c & a & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & b + c + 2a - a \\
 & = a + b + c \\
 & = 2(a + b + c)^3 \\
 & = 2(a + b + c) \\
 & \quad | \quad | \quad | \\
 & \quad 1 \quad a \quad b \\
 & R_1' = R_1 - R_2 \\
 & R_2' = R_2 - R_3 \\
 & = 2(a + b + c) \\
 & \quad | \quad | \quad | \\
 & \quad 0 \quad - (a + b + c) \quad (a + b + c) \\
 & \quad | \quad | \quad | \\
 & \quad 0 \quad 1 \quad - (a + b + c) \\
 & = 2(a + b + c) \{ (a + b + c)^2 - 0 \} \\
 & = 2(a + b + c)^3
 \end{aligned}$$

• LIVE

CW

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$C_1' = C_1 - C_2$$

$$C_2' = C_2 - C_3$$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$
$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ (a+b)(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$= abc(a-b)(b-c)$$
$$(b+c)(b-c) \quad a \neq b$$
$$= abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

LIVE

$$\begin{array}{c} \oplus \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \ominus \\ + \\ - \\ + \\ - \end{array} \quad \left\{ \right.$$

নির্ণায়ক সংক্রান্ত সমস্যা

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

$$a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 = 0$$

$$a_2 (b_2 c_3 - c_2 b_3)$$

$$- b_2 (a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_2 (a_2 b_3 - b_2 a_3) = 0$$

H.W

নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক ঘথাক্রেমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে,

$$A_1 = + (b_2 c_3 - c_2 b_3)$$

$$B_1 = - (a_2 c_3 - c_2 a_3)$$

$$C_1 = + (a_2 b_3 - b_2 a_3)$$

১ : ০১

২ : ০৮, ০৭

• LIVE

ANY QUESTION

