大学物理III

教师：吉彦达

理学院451

手机：18851657390

QQ：170487819

群名称:NUAA2020大物III吉彦达班

群 号:1059153402

Code：NUAA2020

邮箱：jiyanda@nuaa.edu.cn

物理学中的矢量运算

一、矢量的概念

标量：**只有大小和正负，没有方向**

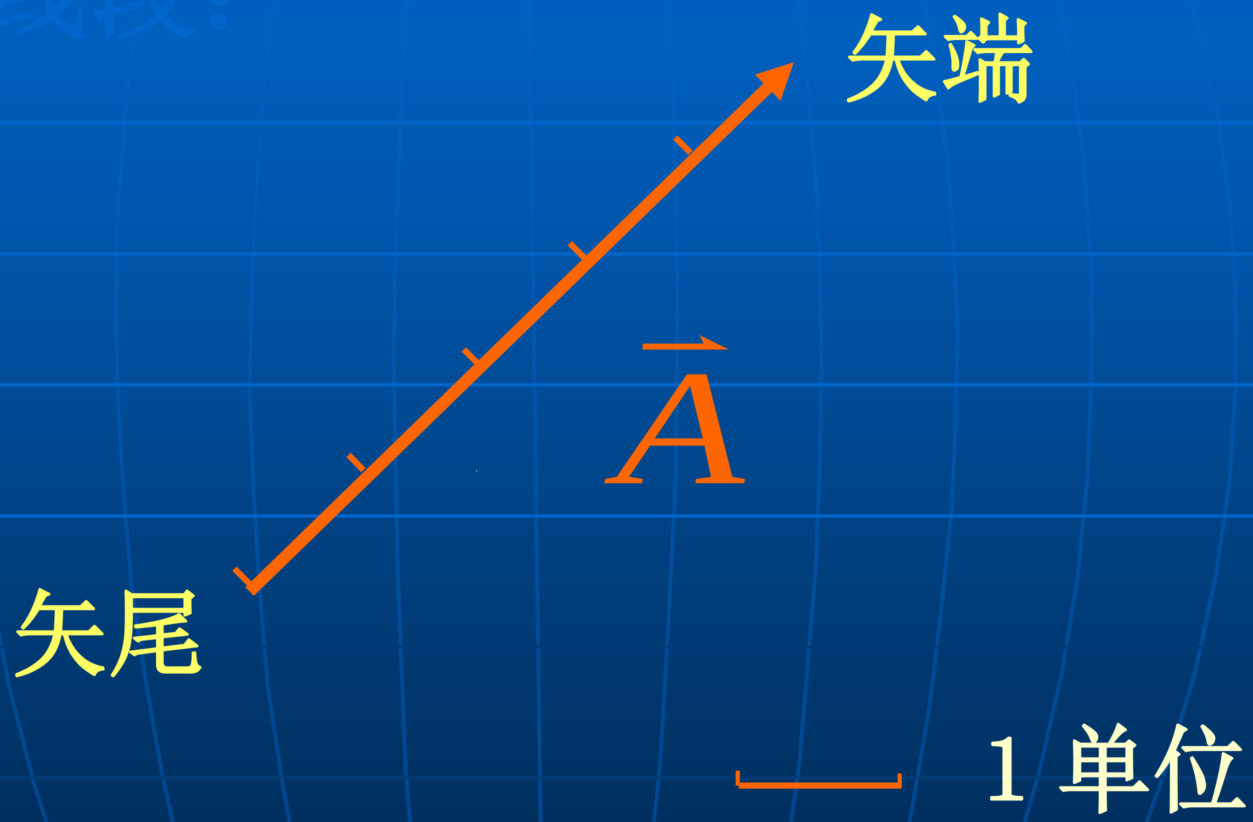
------ 时间、质量、功、能量

矢量：**既有大小又有方向**

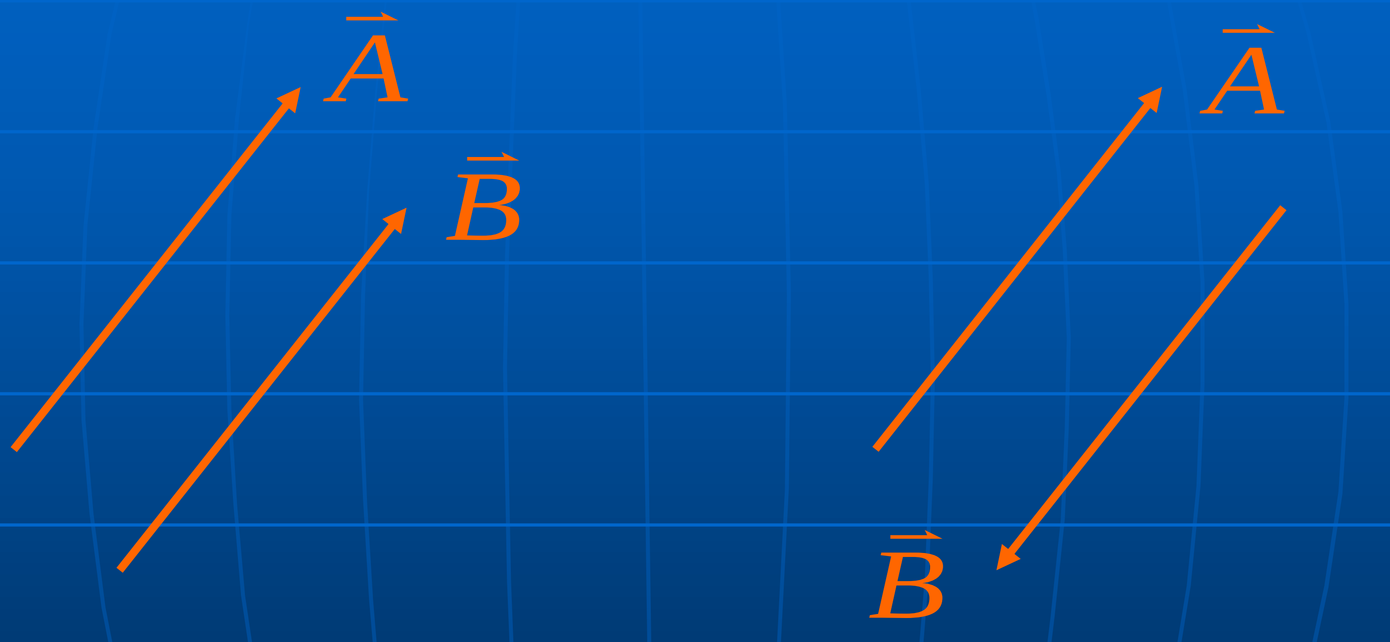
------ 速度、力、动量、冲量

1.矢量的几何表示法

有向线段：

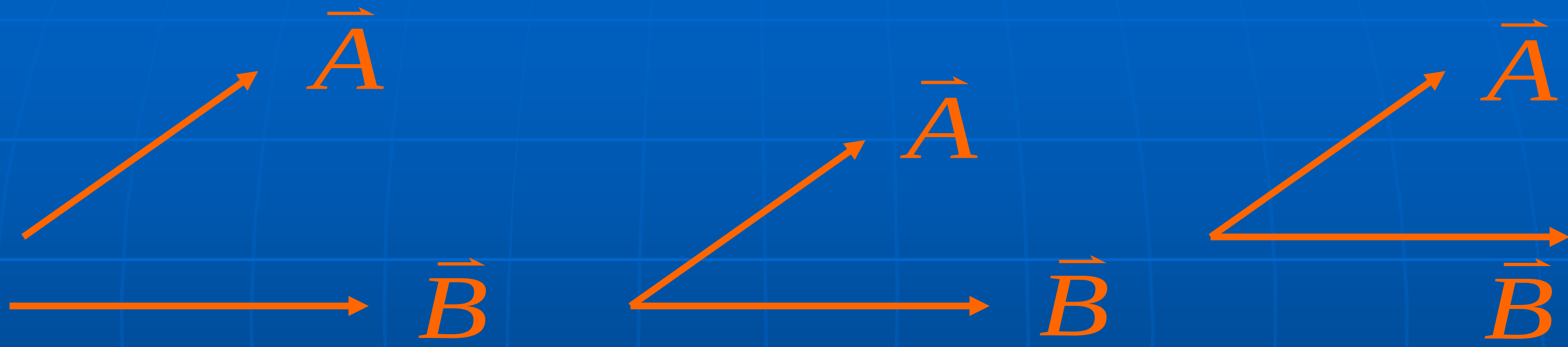


矢量的比较



（a） $\vec{A} = \vec{B}$　　（b） $\vec{A} = -\vec{B}$

矢量的平移



大小和方向均保持不变

$\longrightarrow$ 平移不变性

2.矢量的模和单位矢量

矢量的模：$|\vec{A}|$ 或 A 表征矢量的大小

单位矢量 $\vec{A}_0$：$|\vec{A}_0|=1$ 方向与 $\vec{A}$ 相同

$$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{A}_0$$

负矢量 $-\vec{A}$：方向与 $\vec{A}$ 相反，大小相等

3.矢量乘以数值的意义

$$\vec{B} = n\vec{A}$$

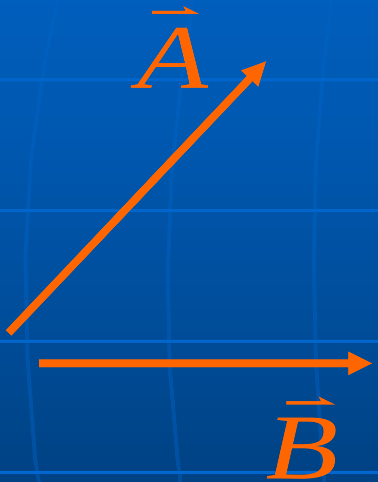
（1）n 为纯数，则 $\left|\vec{B}\right| = \left|n\vec{A}\right|$，方向与 $\vec{A}$ 相同或相反 → 矢量拉伸或收缩

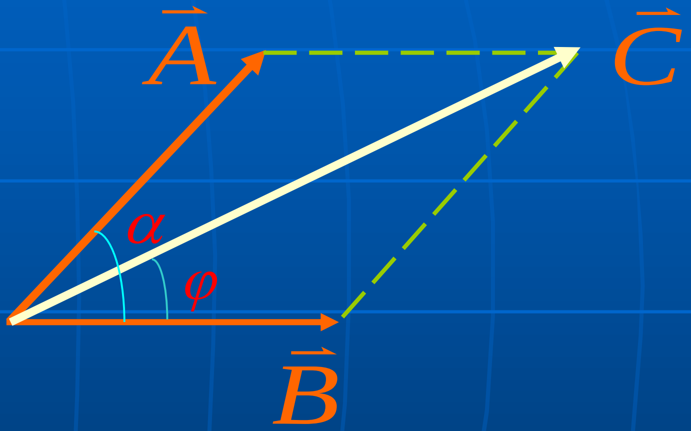
（2）n 为有量纲量，得到一个新矢量，且 $\left|\vec{B}\right| = \left|n\vec{A}\right|$，方向与 $\vec{A}$ 相同或相反

二、矢量和与矢量差

1.矢量的合成（相加）

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$



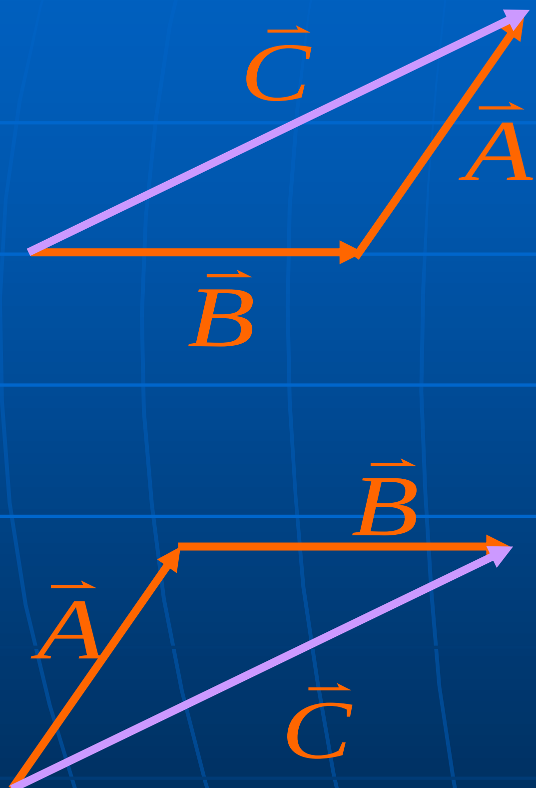


平形四边形法则

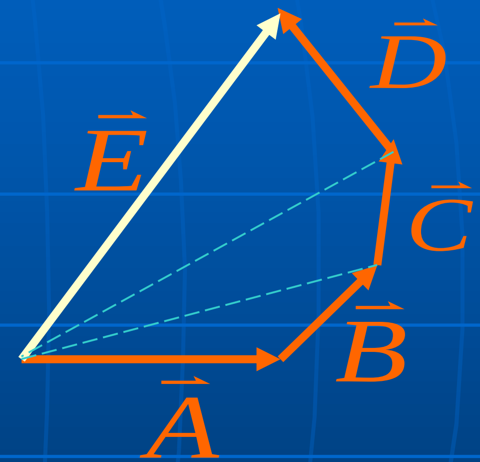
$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\alpha}$$

$$\varphi=\arctan\frac{A\sin\alpha}{B+A\cos\alpha}$$

三角形法则



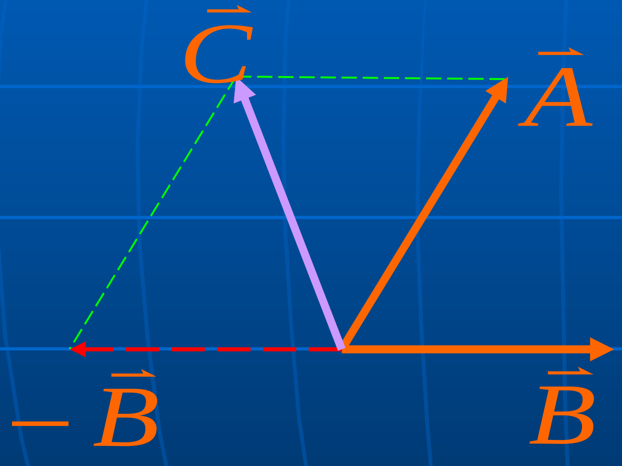
多边形法则

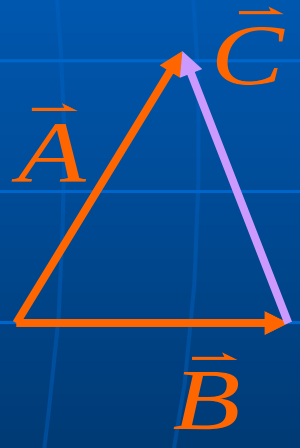


$$\vec{E}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$$

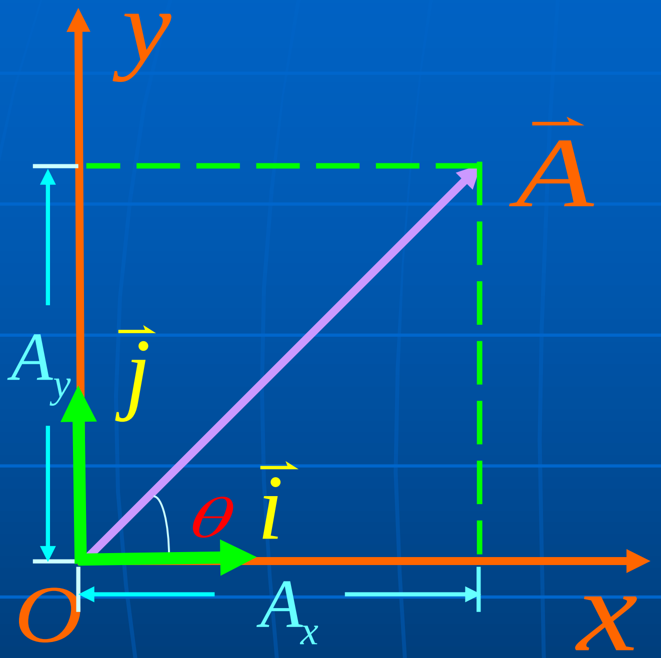
2.关于矢量差（相减）

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$





3.矢量的分量表示法



$$A_x = A\cos\theta$$

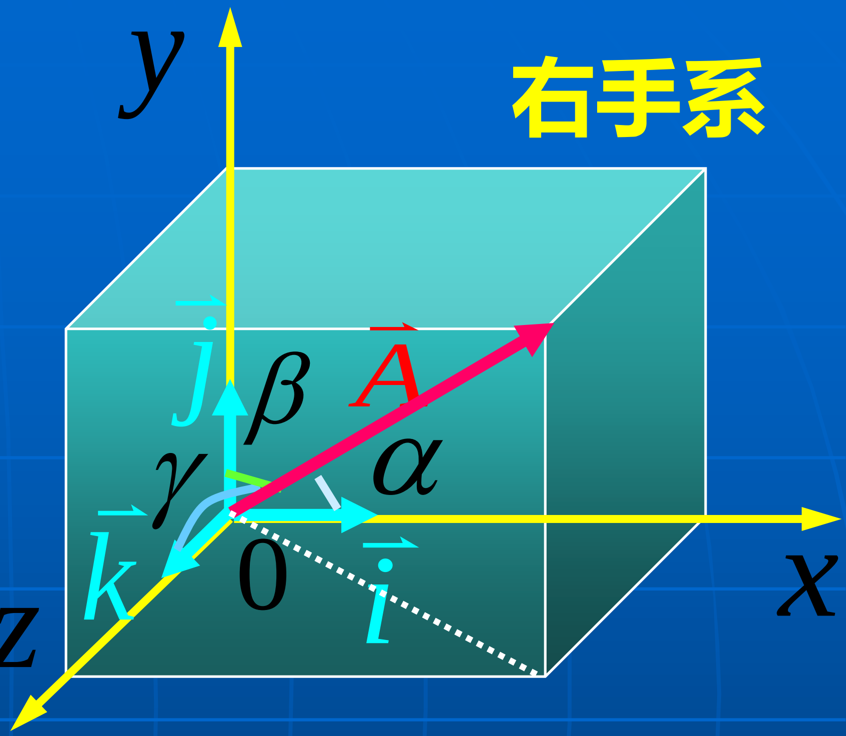
$$A_y = A\sin\theta$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$$

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{A_y}{A_x}$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$



$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

三、矢量的标积

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \longrightarrow$$ 标量

讨论：

（1）标积满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

（2）两矢量垂直 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

（3）两矢量平行 $\theta=0$，$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB$，$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$

（4）在空间直角坐标系中

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

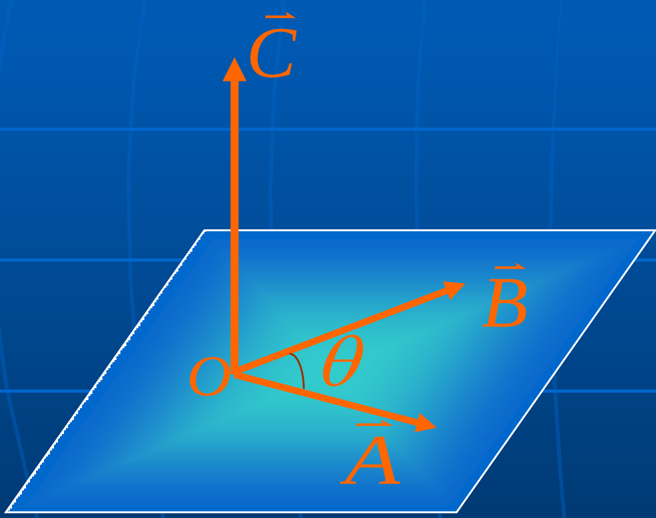
标积的坐标式

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

四、矢量的矢积

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ → 矢量



大小： $\left|\vec{C}\right| = C = AB\sin\theta$

方向： 右手法则

垂直 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 构成的平面

讨论：

（1）矢积不满足交换律 $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

（2）两矢量垂直 $\theta=\dfrac{\pi}{2},\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB$

（3）两矢量平行 $\theta=0,\ \vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$

（4）在空间直角坐标系中

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$ $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

矢积的坐标式

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

五、矢量的导数和积分

1.矢量的导数

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t_2) - \vec{A}(t_1)}{\Delta t}$$

导数的坐标式

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}]$$

$$= \frac{dA_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z(t)}{dt}\vec{k}$$

1）$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$$

2）$$\frac{d}{dt}(m\vec{A}) = \frac{dm}{dt}\vec{A} + m\frac{d\vec{A}}{dt}$$

3）$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

4）$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

2.矢量的积分

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(t)dt = ?$$

$$= \vec{i}\int_{t_1}^{t_2} A_x(t)dt + \vec{j}\int_{t_1}^{t_2} A_y(t)dt + \vec{k}\int_{t_1}^{t_2} A_z(t)dt$$

1） $\int(\vec{A} \pm \vec{B})dt = \int \vec{A}dt \pm \int \vec{B}dt$

2） $\int(m\vec{A})dt = m\int \vec{A}dt \quad (m = \text{常量})$

3） $\int(\vec{C} \cdot \vec{A})dt = \vec{C} \cdot \int \vec{A}dt \ (\vec{C} = \text{常量})$

4） $\int(\vec{C} \times \vec{A})dt = \vec{C} \times \int \vec{A}dt \ (\vec{C} = \text{常量})$

两矢量 $\vec{a}=6\vec{i}+12\vec{j}$，$\vec{b}=-8\vec{i}-6\vec{j}$

试求： （1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$ （2）$\vec{a}\times\vec{b}$

解： （1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=(6\vec{i}+12\vec{j})\cdot(-8\vec{i}-6\vec{j})$

$$=-48-72=-120$$

（2）$\vec{a}\times\vec{b}=(6\vec{i}+12\vec{j})\times(-8\vec{i}-6\vec{j})$

$$=-36\vec{k}+96\vec{k}=60\vec{k}$$