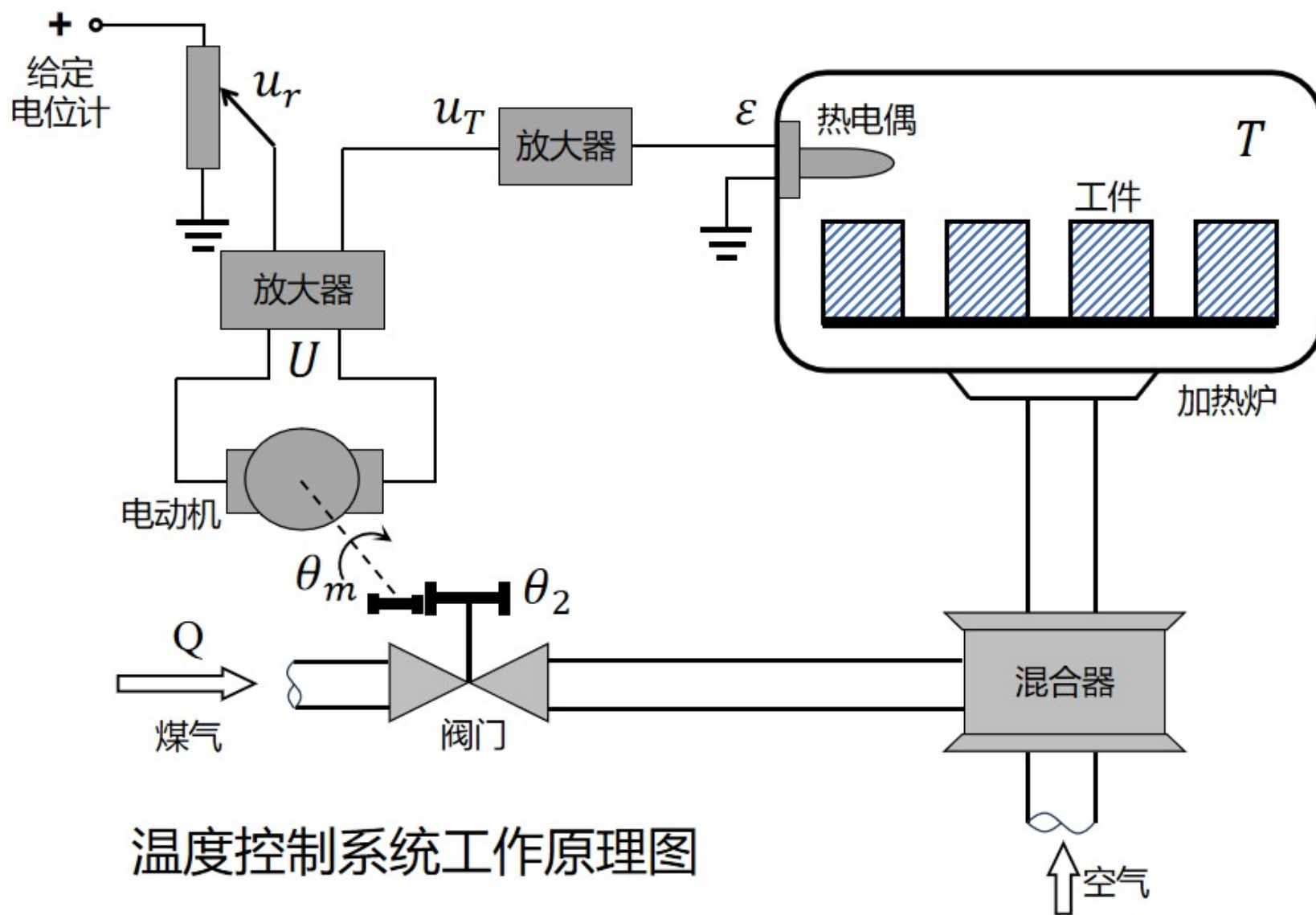
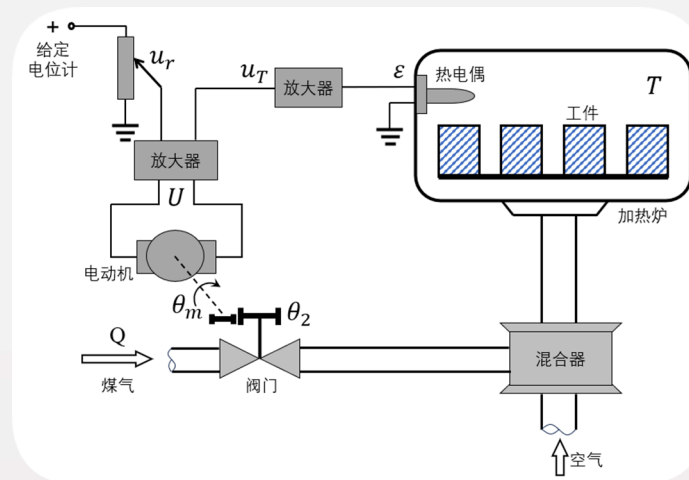
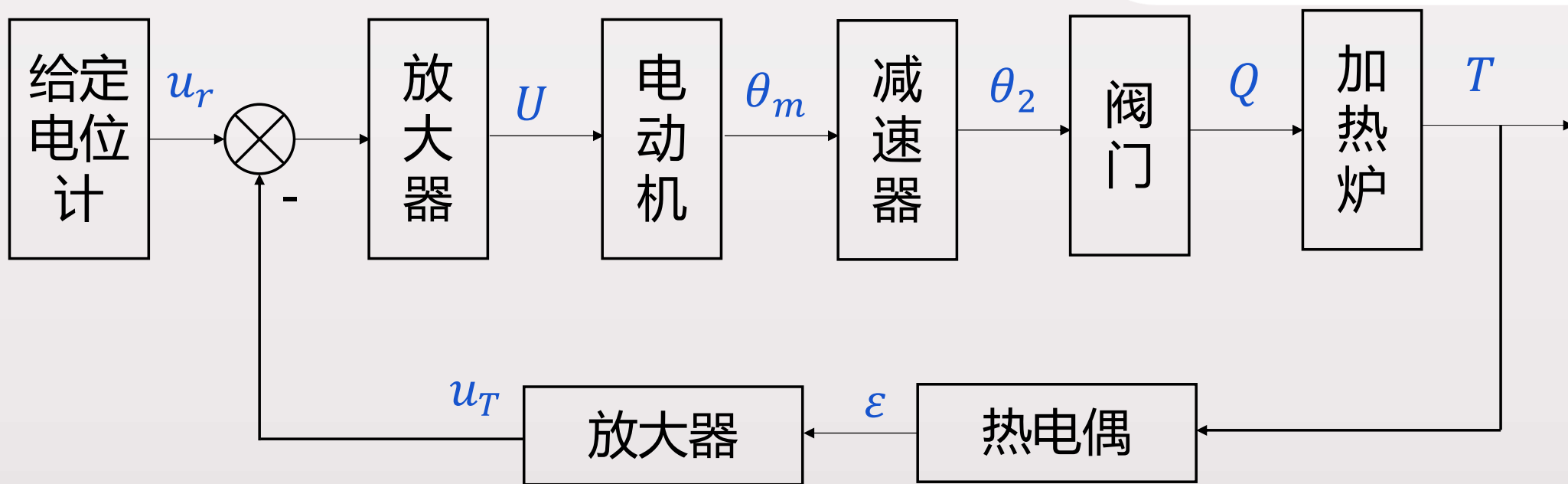


复习课

# 自动控制系统举例



温度控制系统工作原理图



温度控制系统方框图

**传递函数:** 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

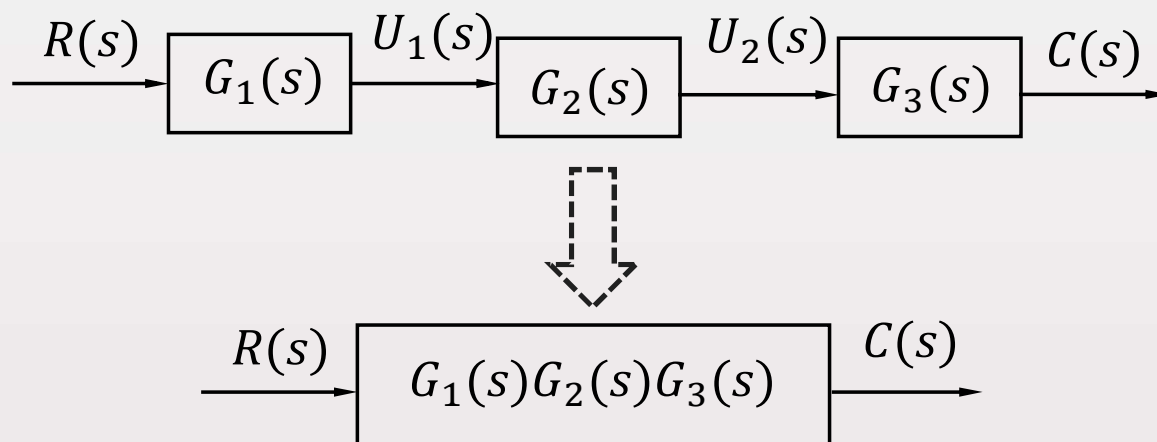
**极点:**传递函数分母 $s$ 多项式的根, 也即线性微分方程特征方程的特征值。  
$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

**零点:**传递函数分子 $s$ 多项式的根。  
$$b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m = 0$$

典型环节	传递函数
比例环节	$K$
惯性环节	$1/(\tau s + 1)$
积分环节	$1/s$
理想微分环节	$\tau s$
一阶比例微分	$\tau s + 1$
二阶比例微分	$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$
振荡环节	$\frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}, \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
纯滞后环节	$e^{-\tau s}$

# 环节的串联

**特点:** 前一个环节的输出信号就是后一环节的输入信号。



$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

# 环节的并联

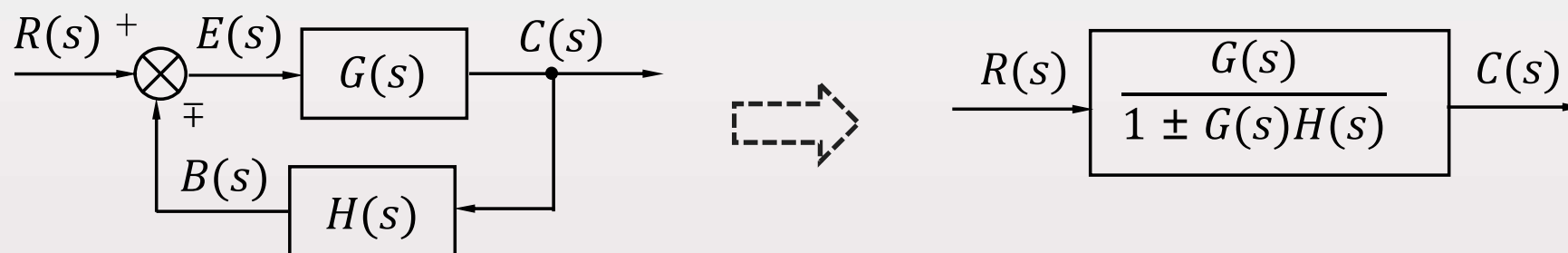
**特点:** 各环节的输入信号相同，输出信号相加（或相减）



$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

# 反馈连接

**特点：**将系统或环节的输出信号反馈到输入端，并与原输入信号进行比较后再作为输入信号



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$



**稳**  
(基本要求) { 充要条件:  $\text{Re}[s_i] < 0, i = 1, 2, \dots$   
稳定判据: Routh判据

**劳斯判据:** 系统极点全部在复平面的左半平面的充分必要条件是方程的各项系数全部为正值, 并且劳斯表的第一列都具有正号。  
(几种特殊的情况)

特征方程  $D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$

## 劳斯表

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^2$	$e_1$	$e_2$			
$s^1$	$f_1$				
$s^0$	$g_1$				

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

...

...

一直进行到其余的 $b$ 值全部等于零为止

一直进行到 $s^0$ 行为止

准  
(稳态要求)

{判断稳定性  
静态误差系数法

系统 型别	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
II	0	0	$\frac{1}{K}$

快  
(动态要求)

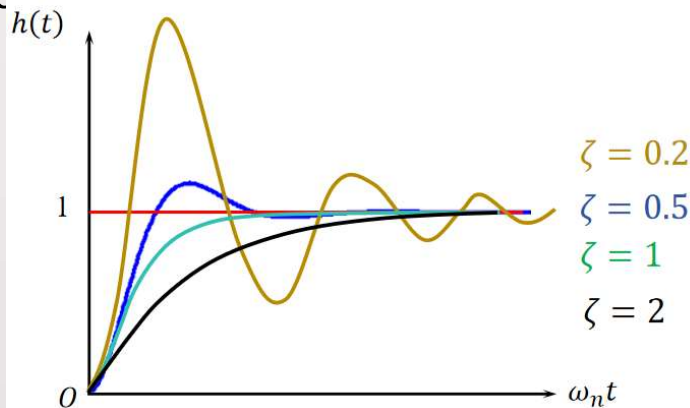
暂态指标:  $t_s$ 、 $M_p$

一阶系统:  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad t_s = 3\tau$

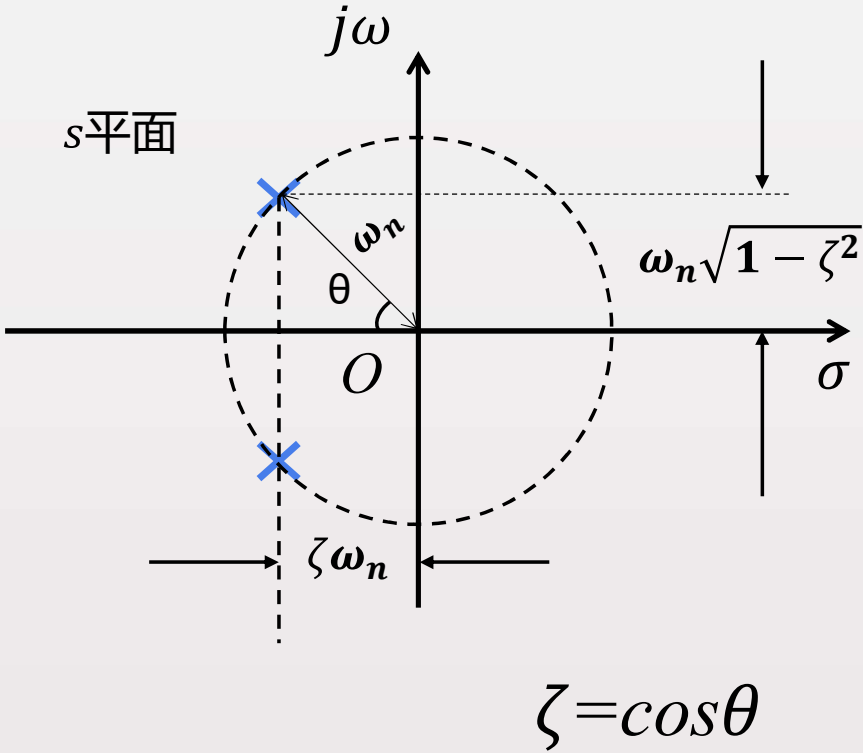
二阶系统:  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$

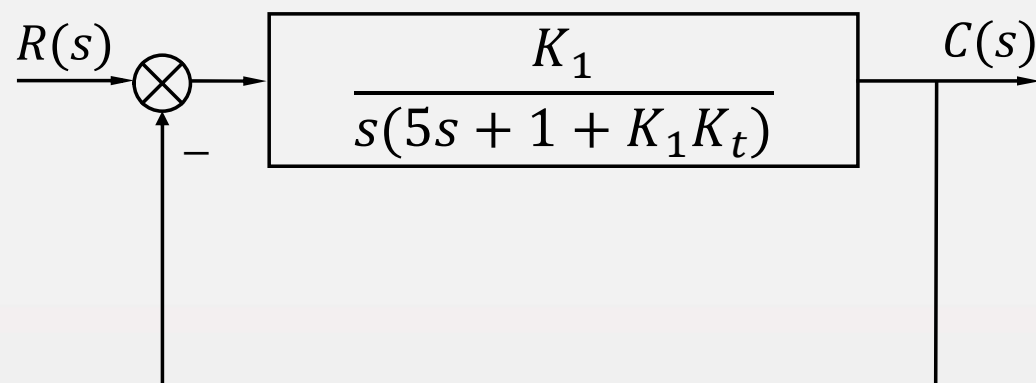
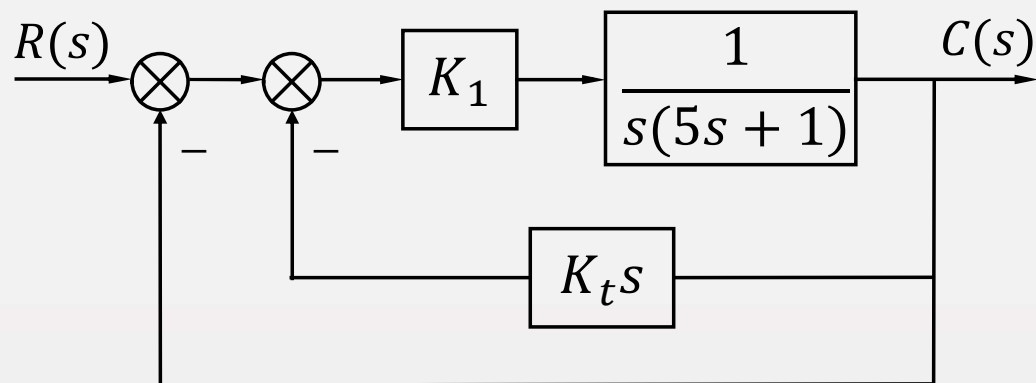
$$0 < \zeta < 1 \left\{ \begin{array}{l} t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \\ M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \end{array} \right.$$

高阶系统: 主导闭环极点



$\theta$	$\zeta$	$M_p$
$60^\circ$	0.5	16.3%
$45^\circ$	0.707	5%
$30^\circ$	0.866	0.43%





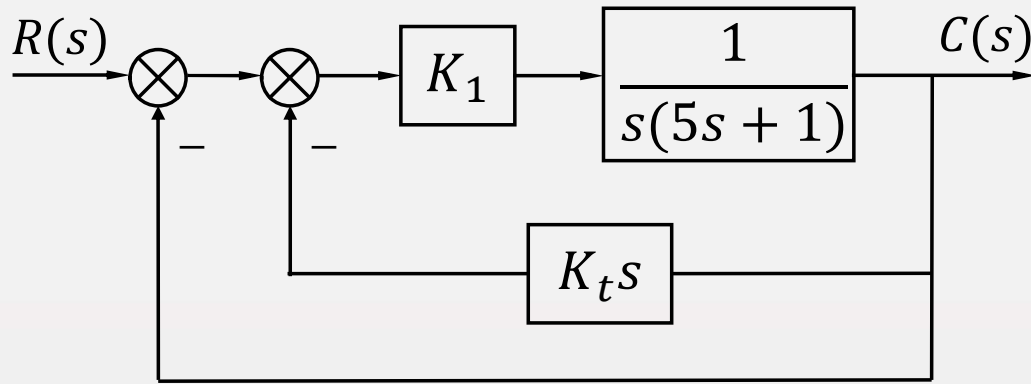
开环传递函数:  $G(s) = \frac{K_1}{s(5s+1+K_1K_t)}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{开环增益 } K = \frac{K_1}{1+K_1K_t} \\ \text{I型} \end{array} \right.$

$$r(t) = 1(t) \quad e_{sr} = 0$$

$$r(t) = t \quad e_{sr} = \frac{1}{K} = \frac{1+K_1K_t}{K_1}$$

$$r(t) = t^2/2 \quad e_{sr} = \infty$$



闭环传递函数:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{5s^2 + (1 + K_1 K_t)s + K_1}$$

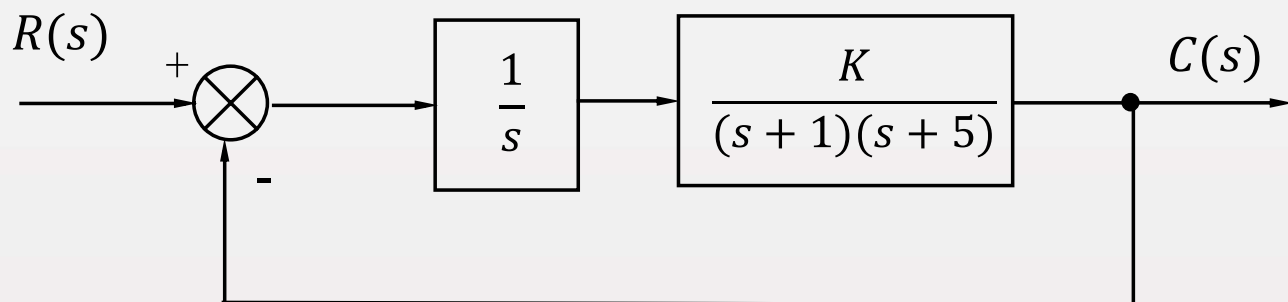
系统稳定

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{K_1}{5} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{1 + K_1 K_t}{5} \end{cases} \quad \text{设 } K_1 = 10 \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{2} \\ \zeta = \frac{1}{10\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} K_t \end{cases}$$

当 $K_t < 1.314$ 时, 系统处于欠阻尼状态,  $K_t$ 增加时,  $\zeta$ 增大, 最大超调量 $M_p$ 减小, 调整时间 $t_s$ 减小

当 $K_t > 1.314$ 时, 系统处于过阻尼状态,  $K_t$ 增加时,  $\zeta$ 增大, 无超调, 调整时间 $t_s$ 增大

例：设反馈控制系统如图所示，求满足稳定要求时 $K$ 的临界值



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K}$$

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K$$

$s^3$	1	5
$s^2$	6	$K$
$s^1$	$\frac{30-K}{6}$	
$s^0$	$K$	

$$\begin{cases} \frac{30-K}{6} > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

$$0 < K < 30$$

$$K_c = 30$$



序号	内容	规则
1	对称性	连续并对称于实轴
2	起点和终点	$n$ 条分支起始于开环极点, 其中 $m$ 条终止与开环零点, 另外有 $n - m$ 条趋向无穷远处
3	实轴上线段	其右边开环零点和开环极点数目之和为奇数
4	渐近线相位	$n - m$ 条, $\varphi_a = \pm \frac{(2q + 1)\pi}{n - m}, (q = 0, 1, 2, \dots)$
5	渐近线交点	$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$
6	分离点	$\frac{dK_1}{ds} = 0$
7	与虚轴的交点	$s = j\omega$ 代入特征方程求解
8	出射角和入射角	直接利用相位条件求出

绘制开环传递函数为  $G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$  的单位反馈系统的根轨迹

解：①在 $s$ 平面中确定开环零、极点的位置。

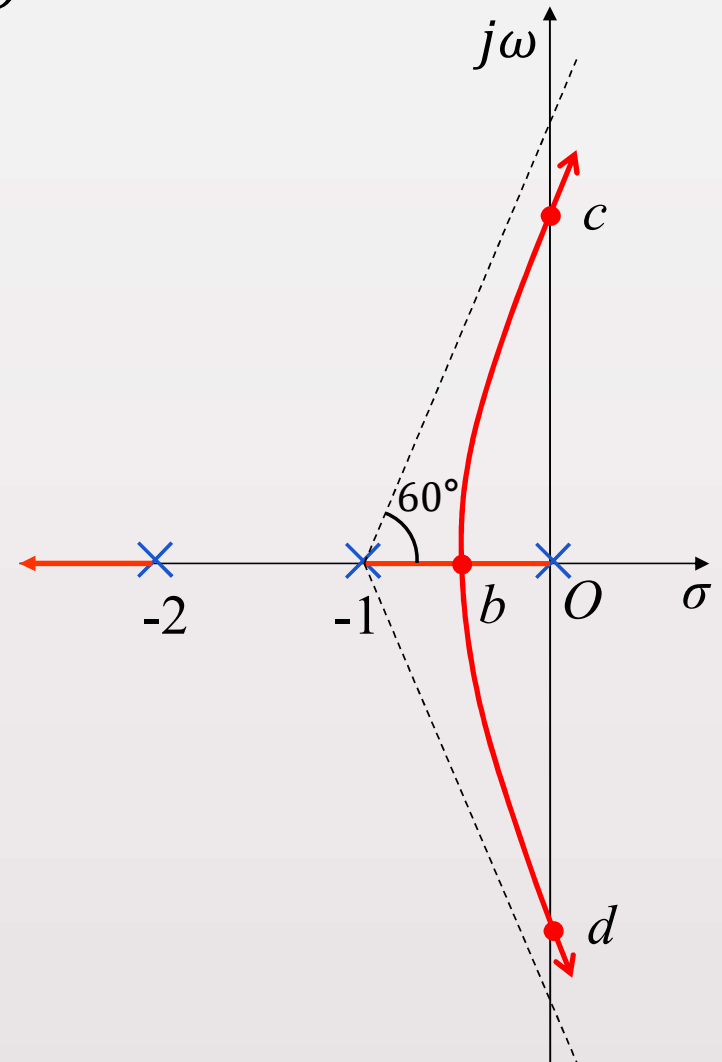
② $n=3, m=0$ , 应有三个分支, 从开环极点出发, 都趋向无穷远处。

③确定实轴上的根轨迹。

④确定渐近线的位置。

$$\varphi_a = \pm \frac{(2q+1)180^\circ}{n-m} = \pm \frac{(2q+1)\pi}{3}$$
$$q=0, \varphi_a = \pm 60^\circ \quad q=1, \varphi_a = \pm 180^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$



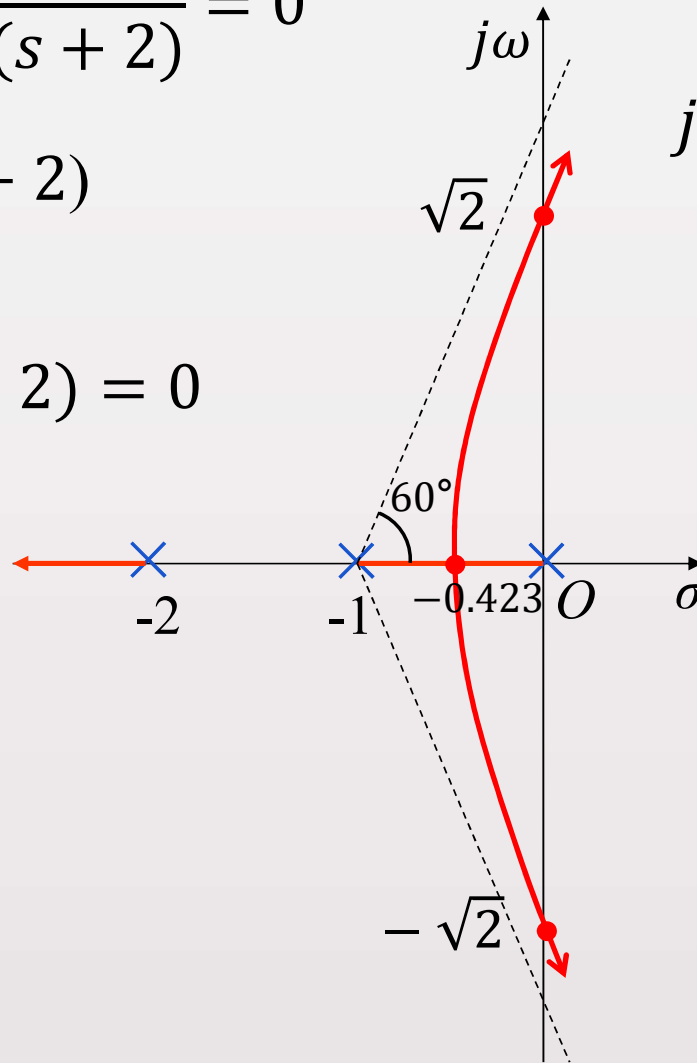
$$D(s) = 1 + \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$K_1 = -s(s+1)(s+2)$$

$$\frac{dK_1}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

$$s_1 = -0.423 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{s_2 = -1.577}}$$



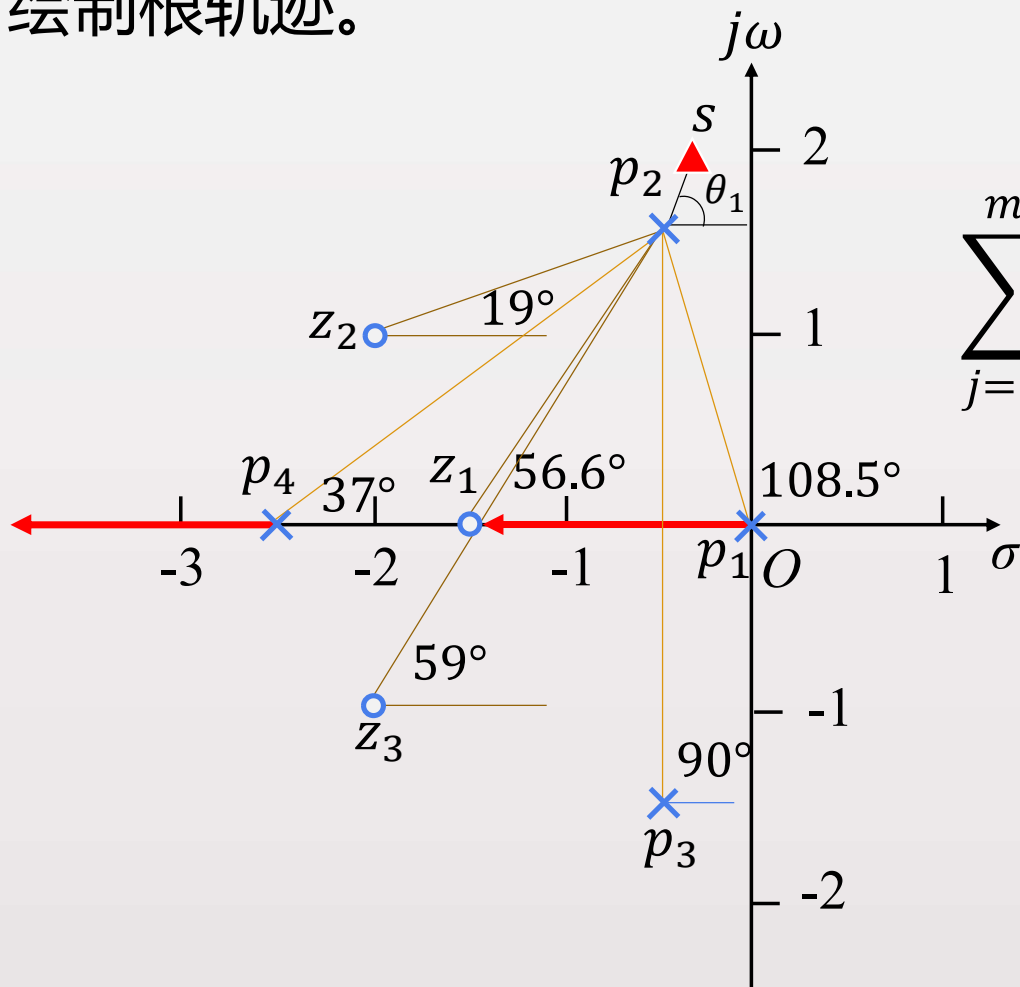
$$j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 2) + K_1 = 0$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K_1 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 - 3\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases}$$

$$\omega = 0, \pm\sqrt{2}, \quad K_1 = 6$$

单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K_1(s + 1.5)(s + 2 \pm j)}{s(s + 2.5)(s + 0.5 \pm j1.5)}$   
 绘制根轨迹。

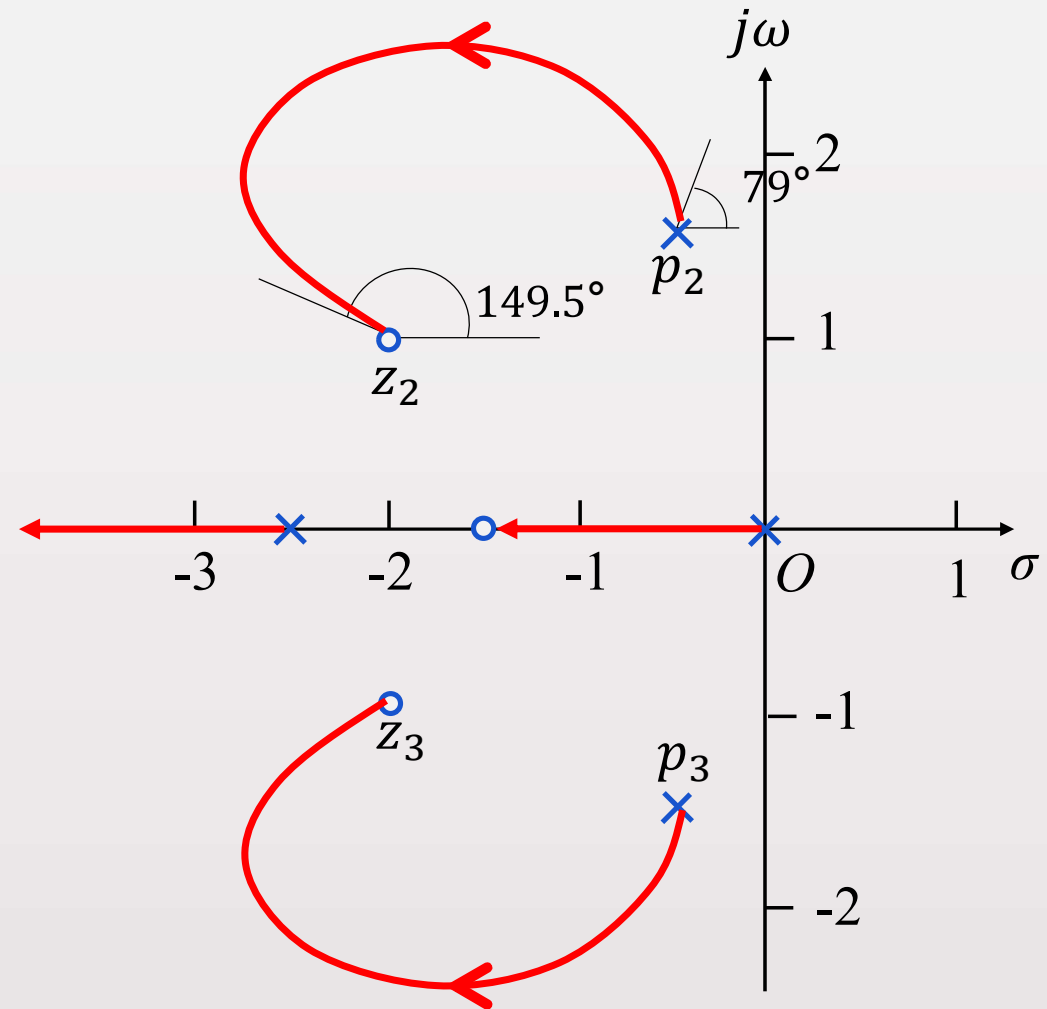
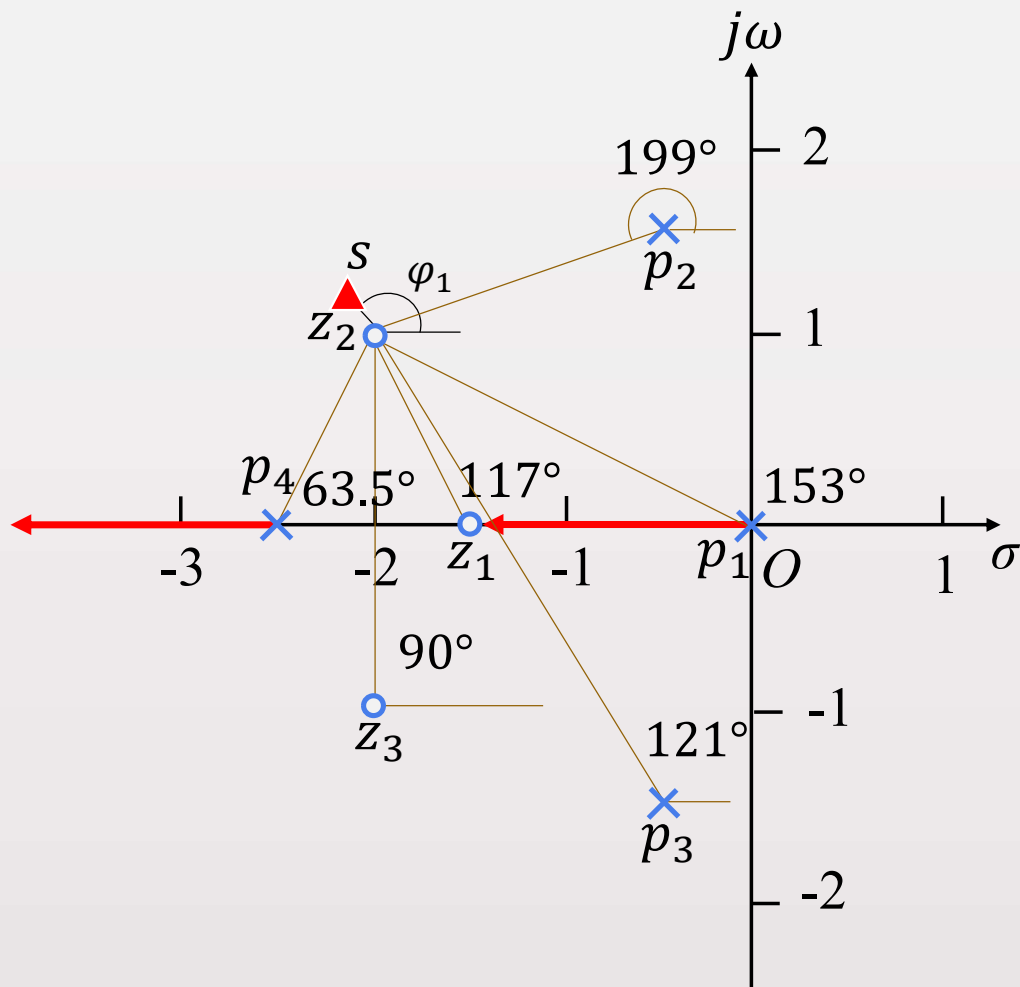


$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm (2q + 1)\pi$$

$$56.6^\circ + 19^\circ + 59^\circ - [\theta_1 + 108.5^\circ + 90^\circ + 37^\circ] = -180^\circ$$

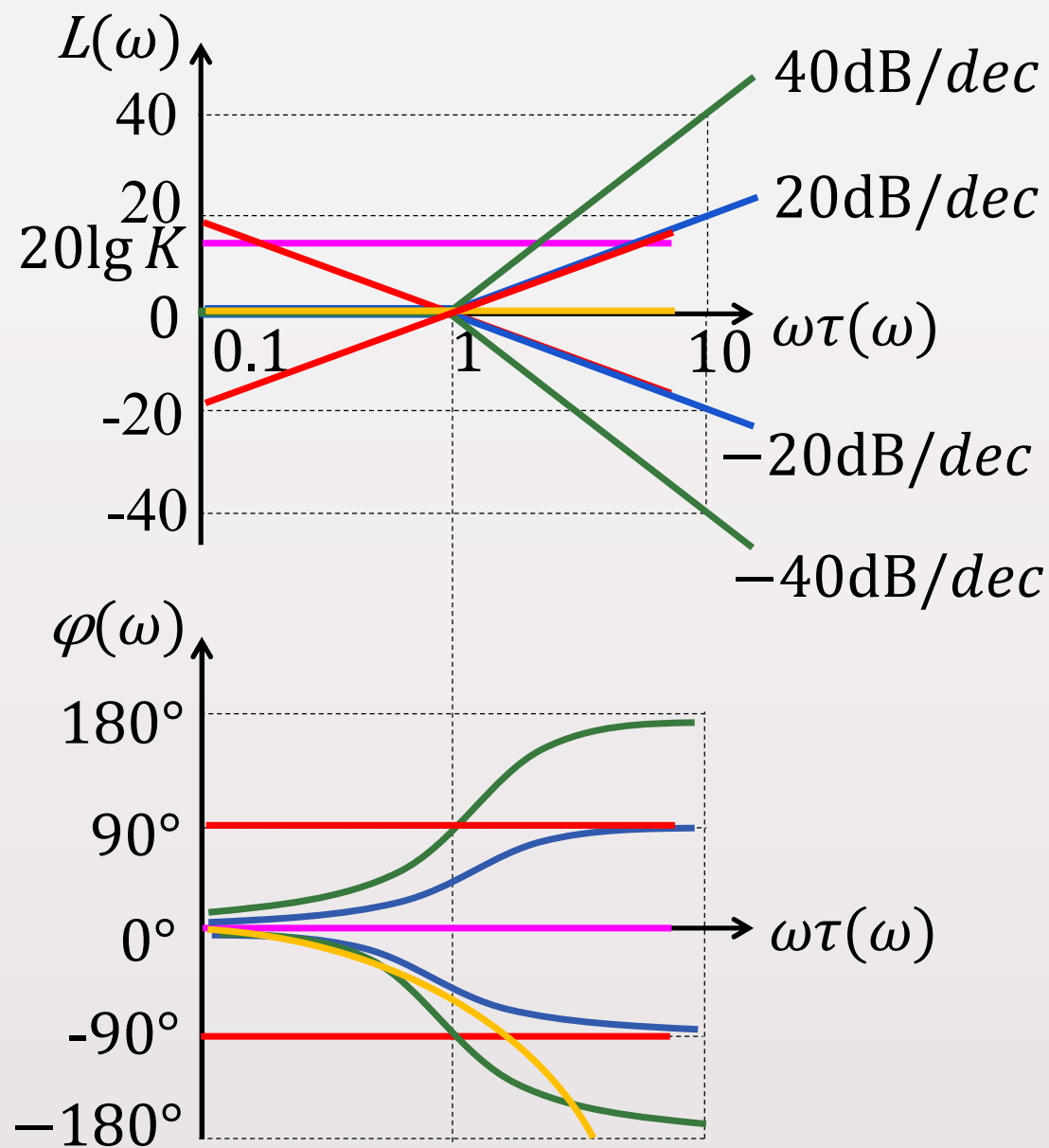
$$\theta_1 = 79^\circ$$

$$[\varphi_1 + 117^\circ + 90^\circ] - [199^\circ + 153^\circ + 121^\circ + 63.5] = -180^\circ \quad \varphi_1 = 149.5^\circ$$



# 典型环节对数频率特性曲线

(Bode) :



## 绘制 $L(\omega)$ 的步骤

(1)化 $G(s)$ 为**尾1**标准型（典型环节串联形式）

(2)顺序列出各典型环节的**交接频率**

(3)确定低频段  $\left\{ \begin{array}{l} \text{基准点}(\omega = 1, L(\omega) = 20\lg K) \text{或} (\omega = K^{\frac{1}{v}}, L(\omega) = 0) \\ \text{斜率}(-20v \text{ dB/dec}) \end{array} \right.$

(4)顺序作图	{	惯性环节	$-20 \text{ dB/dec}$
		一阶比例微分	$20 \text{ dB/dec}$
		振荡环节	$-40 \text{ dB/dec}$
		二阶比例微分	$40 \text{ dB/dec}$

## 采用Bode图的Nyquist稳定判据（对数稳定判据）：

闭环控制系统稳定的充要条件是，当 $\omega$ 由0变到 $\infty$ 时，在开环对数幅频特性 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\varphi(\omega)$ 曲线穿越 $-\pi$ 线的次数（正穿越与负穿越次数之差）为 $P/2$ ， $P$ 为 $s$ 平面右半部开环极点数目。



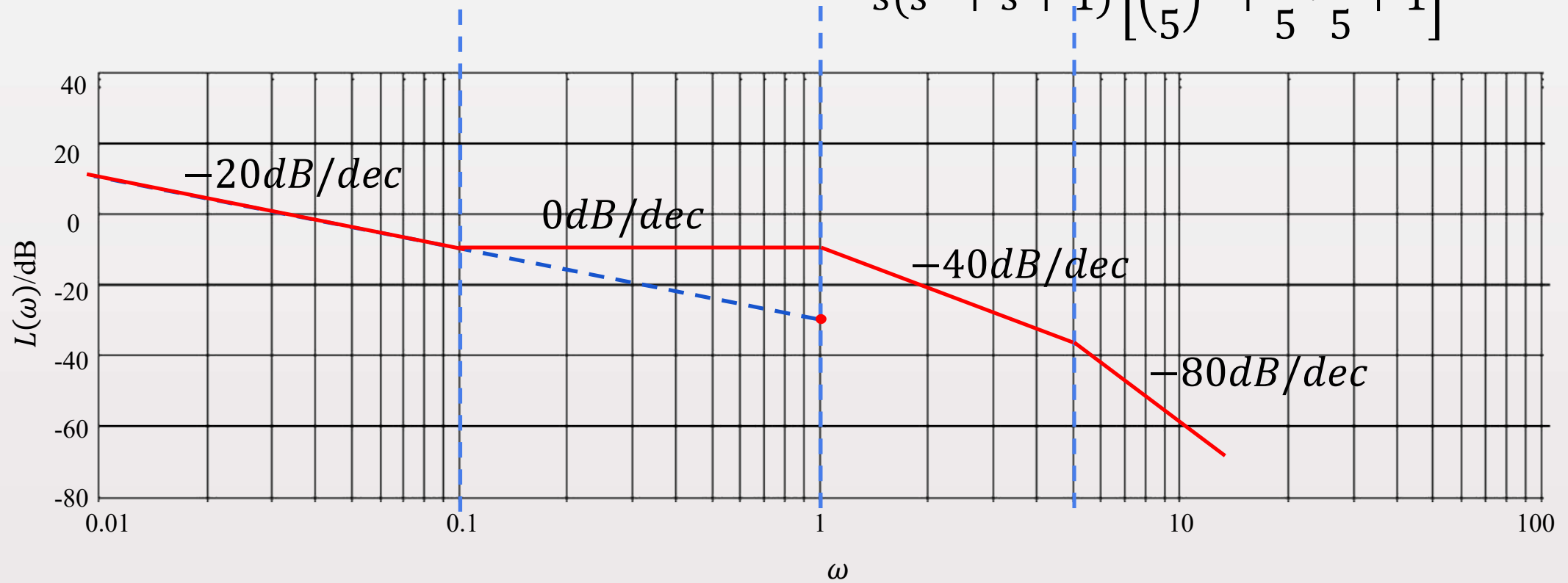
例：已知系统开环传递函数  $G(s) = \frac{8(s + 0.1)}{s(s^2 + s + 1)(s^2 + 4s + 25)}$ ，绘制bode图

解：①  $G(s) = \frac{0.032 \left( \frac{s}{0.1} + 1 \right)}{s(s^2 + s + 1) \left[ \left( \frac{s}{5} \right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{5} + 1 \right]}$

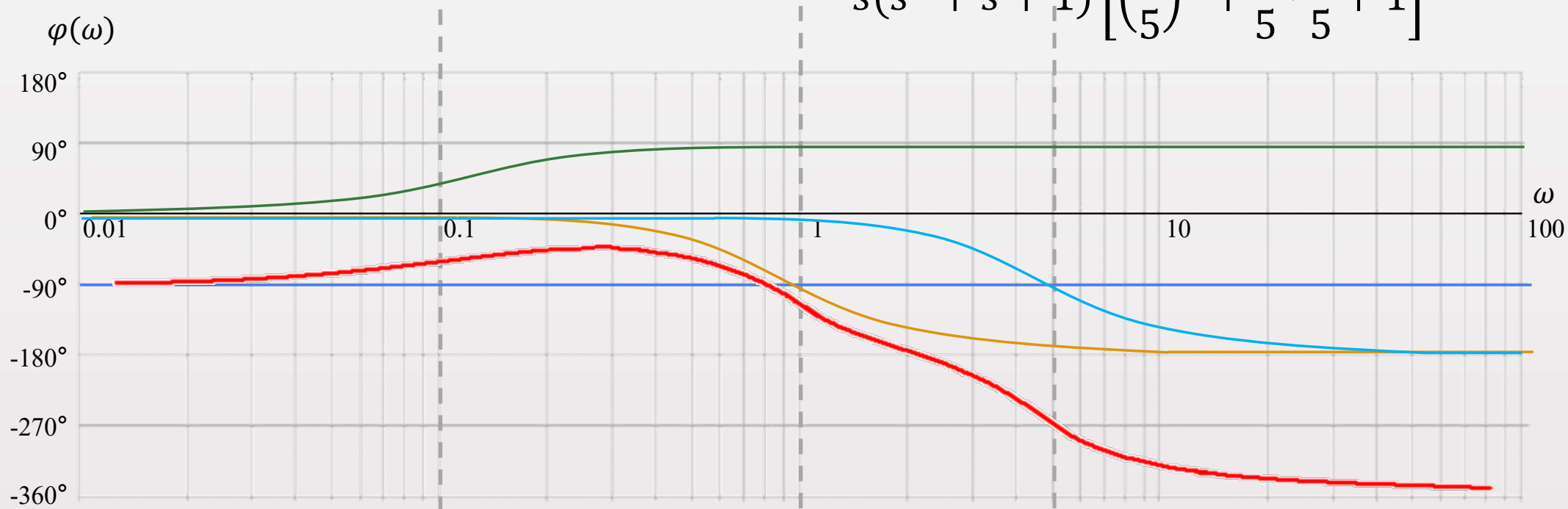
② 
$$\begin{cases} \omega_1 = 0.1 & \Rightarrow 20 \text{ dB/dec} \\ \omega_2 = 1 & \Rightarrow -40 \text{ dB/dec} \\ \omega_3 = 5 & \Rightarrow -40 \text{ dB/dec} \end{cases}$$

③ 基准线： 
$$\begin{cases} \text{基点：} \omega = 1, 20 \lg 0.032 = -30 \text{ dB} \\ \text{斜率：} -20 \nu = -20 \text{ dB/dec} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{0.032 \left( \frac{s}{0.1} + 1 \right)}{s(s^2 + s + 1) \left[ \left( \frac{s}{5} \right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{5} + 1 \right]}$$



$$G(s) = \frac{0.032 \left( \frac{s}{0.1} + 1 \right)}{s(s^2 + s + 1) \left[ \left( \frac{s}{5} \right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{5} + 1 \right]}$$



$s$ 平面右半部开环极点数目  $P = 0$

$L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\varphi(\omega)$ 曲线穿越 $-\pi$ 线的次数为0次 =  $P/2$

系统稳定