自动控制原理

汪 晶

QQ:150302300

第四章 线性系统的根轨迹分析

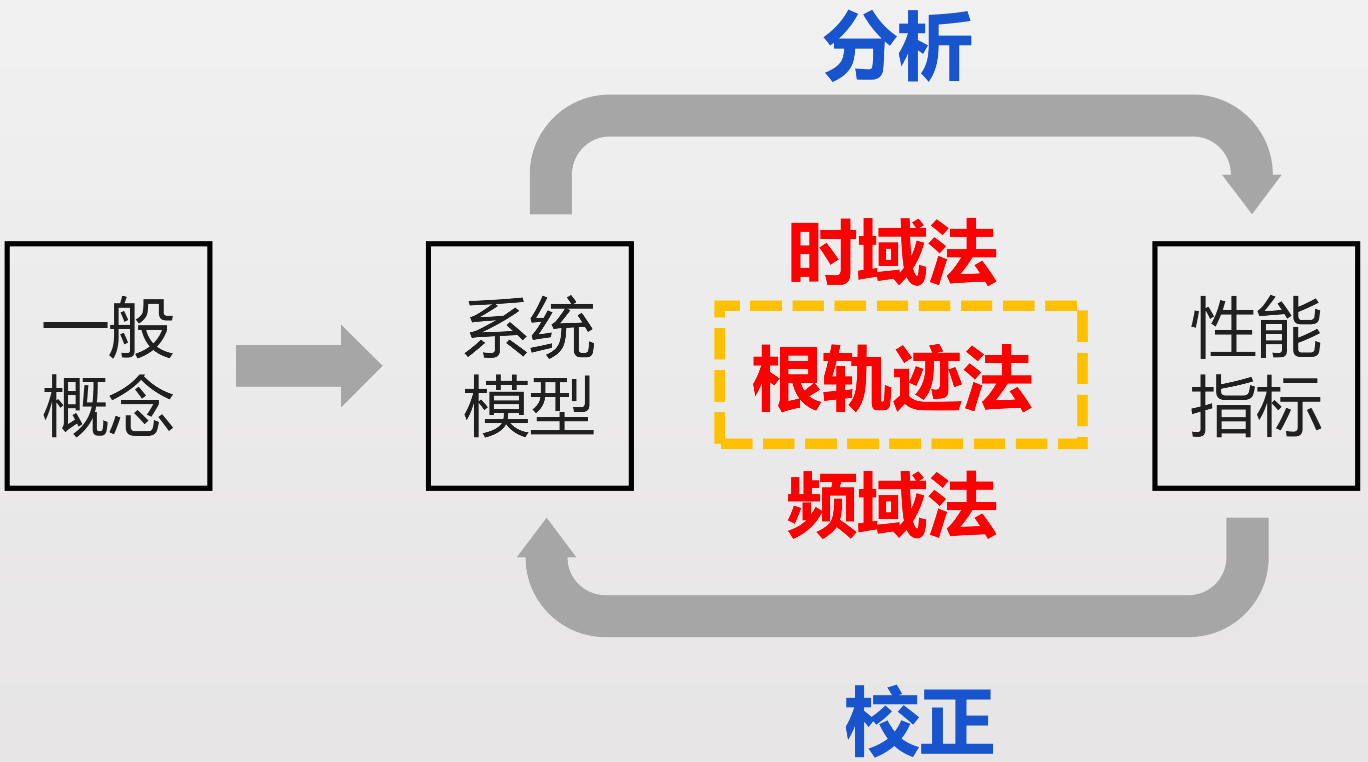
本章知识点：

■根轨迹的基本概念

■根轨迹的绘制法则

■参数根轨迹

■利用根轨迹分析系统的性能

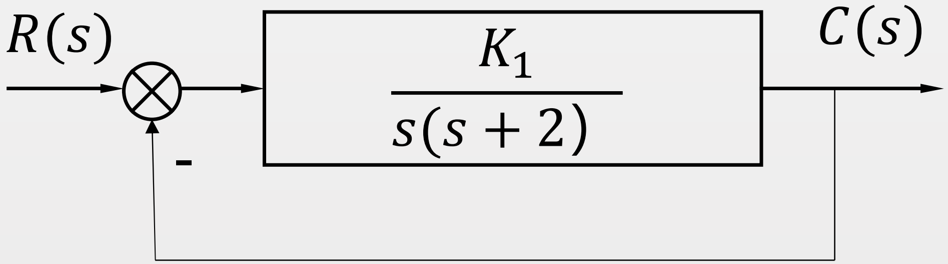

分析
一般概念
系统模型
时域法
根轨迹法
频域法
性能指标
校正

根轨迹： 系统中的某一或某些参量由$0 \to \infty$变化时，特征方程的根（闭环极点）在s平面上相应变化所描绘出来的轨迹。

根轨迹法：求解系统特征方程式的根的图解方法

- 直观、形象；
- 适合于研究当系统中某一参数变化时，系统性能的变化趋势；
- 近似方法，不十分精确。

第一节 根轨迹的基本概念



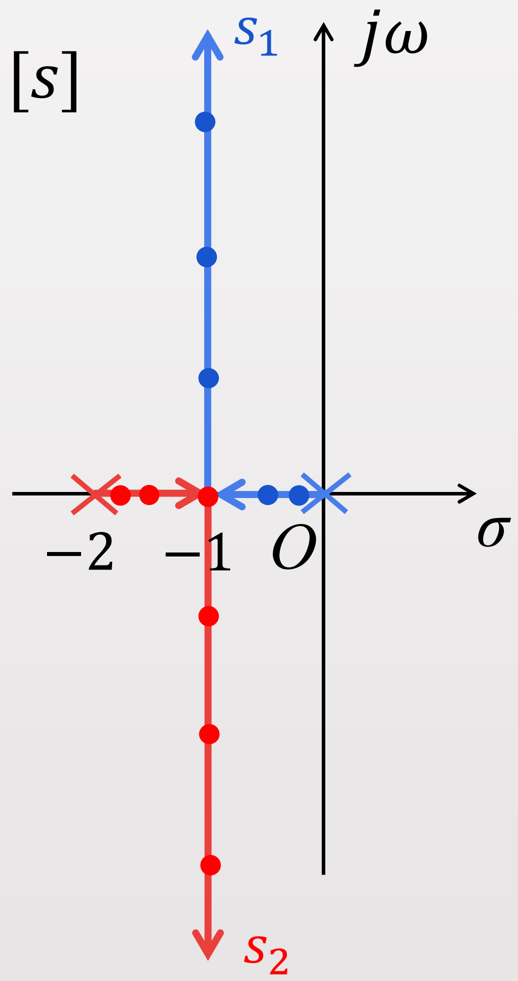
$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2s + K_1}$$

$$D(s) = s^2 + 2s + K_1 = 0$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K_1}$$

K_1	$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K_1}$
0	$s_1=0,\ s_2=-2$（开环极点）
0.36	$s_1=-0.2,\quad s_2=-1.8$
0.64	$s_1=-0.4,\quad s_2=-1.6$
1	$s_1=s_2=-1$
2	$s_{1,2}=-1\pm j1$
5	$s_{1,2}=-1\pm j2$
10	$s_{1,2}=-1\pm j3$
$\vdots$	$\vdots$
∞	$s_{1,2}=-1\pm j\infty$

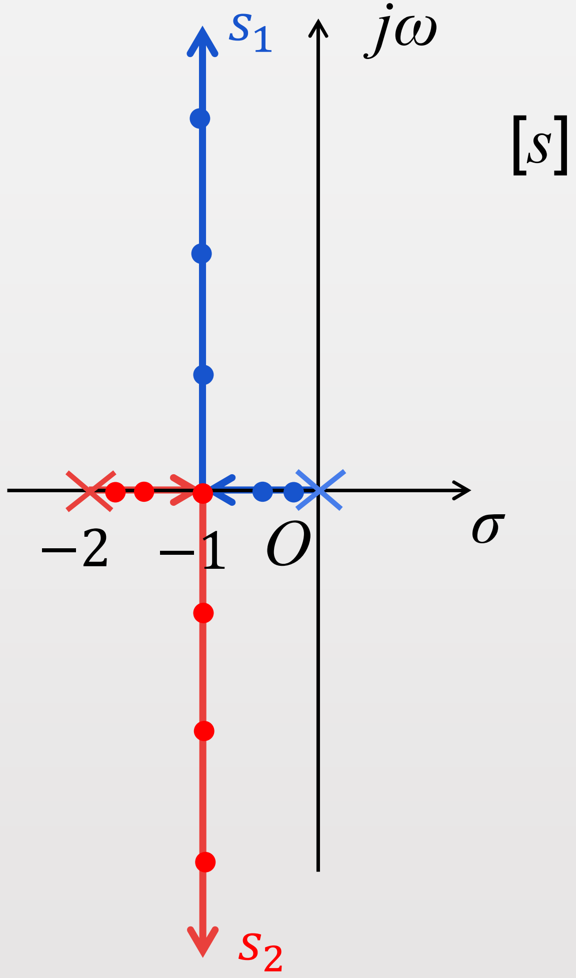


根轨迹图

K_1	**稳定性**	**稳态误差**	**暂态性能**
$(0,1)$	稳定	(开环传递函数决定)阶跃信号作用下一直为0;斜坡信号作用下逐渐减小	过阻尼 t_s减小 无超调
1			临界阻尼 $t_s = 3$ 无超调
$(1,\infty)$			欠阻尼 $t_s = 3$ M_p增大

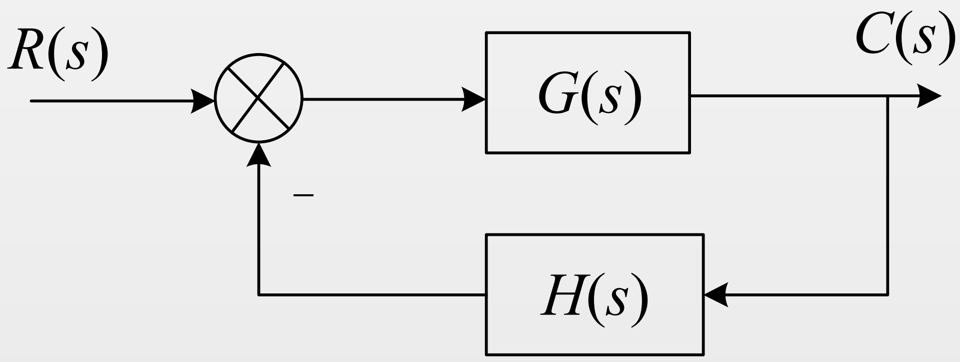
以系统开环增益为可变参量绘制的根轨迹称为

常规根轨迹



根轨迹

第二节 绘制根轨迹的基本条件和基本规则



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

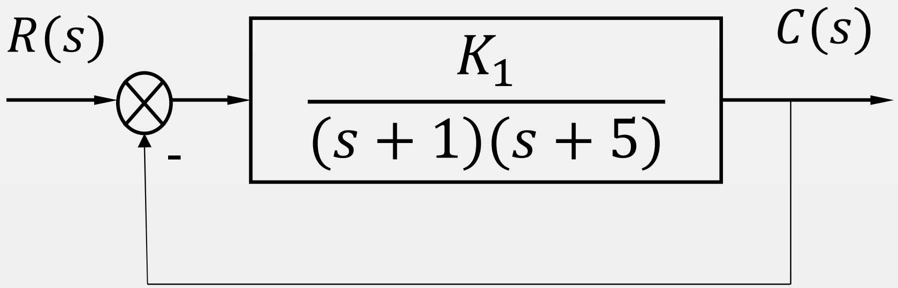
$$\boldsymbol{G(s)H(s) = -1}$$ **根轨迹方程**

$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm(2q+1)\pi \end{cases} \qquad (q=0,1,2,\ \ldots)$$

$$G(s)H(s)=\frac{K_1\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=-1$$

$$\begin{cases} K_1\dfrac{\prod_{j=1}^{m}\boxed{|(s-z_j)|}}{\prod_{i=1}^{n}|(s-p_i)|}=1 & \textbf{幅值条件} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\boxed{\angle(s-z_j)}-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=\pm(2q+1)\pi & \textbf{相位条件} \end{cases}$$

例：判断s_i是否为根轨迹上的点



$$G(s)=\frac{K_1}{(s+1)(s+5)}$$

模值条件：$K_1=|s+1|\,|s+5|$

相角条件：$-\angle(s+1)-\angle(s+5)=\pm(2q+1)\pi$

$s_1=-2$时　$K_1=|-2+1|\,|-2+5|=3$

$-\angle(-2+1)-\angle(-2+5)=-\pi-0=-\pi$

$s_2=-8$时　$K_1=|-8+1|\,|-8+5|=21$

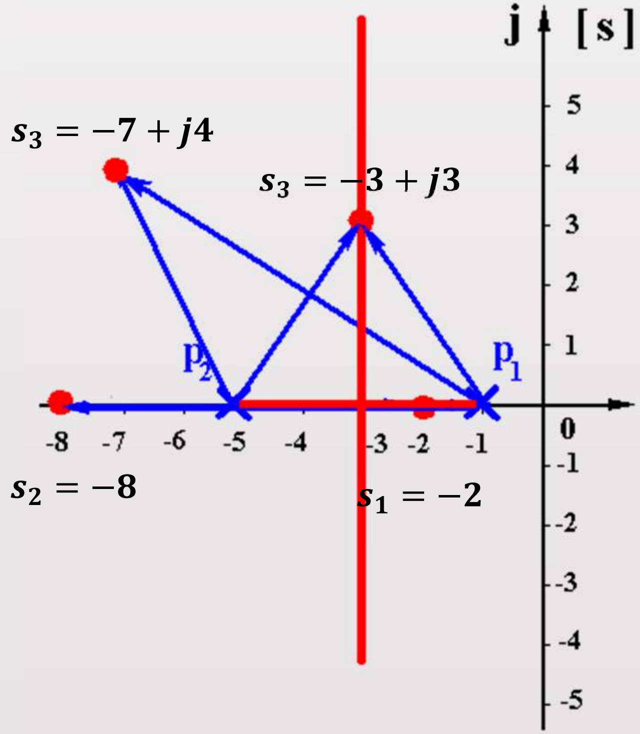
$-\angle(-8+1)-\angle(-8+5)=-\pi-\pi=0$

$s_3=-7+j4$时　$K_1=|-7+j4+1|\,|-7+j4+5|=32.25$

$-\angle(-7+j4+1)-\angle(-7+j4+5)\neq\pm(2q+1)\pi$

$s_4=-3+j3$时　$K_1=|-3+j3+1|\,|-3+j3+5|=13$

$-\angle(-3+j3+1)-\angle(-3+j3+5)=\pi$



$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}|(s-p_i)|}{\prod_{j=1}^{m}|(s-z_j)|} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=\pm(2q+1)\pi \end{cases}$$

幅值条件

相位条件

满足相位条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件

用幅值条件确定根轨迹上某点对应的 K_1 值

绘制根轨迹的基本规则

规则一（对称性）：

系统根轨迹的各条分支是连续的，而且对称与实轴。

系统特征方程为代数方程，当系数连续变化时，代数方程的根也连续变化。

特征方程的根或为实数，或为共轭复数，因此必对称于实轴。

规则二（起点和终点）：

■根轨迹的分支数=开环极点数n

■根轨迹n条分支起始于开环极点，有 m条终止与开环零点，另外有$n-m$条趋向无穷远处

$$K_1=\frac{\prod_{i=1}^{n}|(s-p_i)|}{\prod_{j=1}^{m}|(s-z_j)|}=\frac{s^{n-m}\prod_{i=1}^{n}\left|(1-\frac{p_i}{s})\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|(1-\frac{z_j}{s})\right|}$$

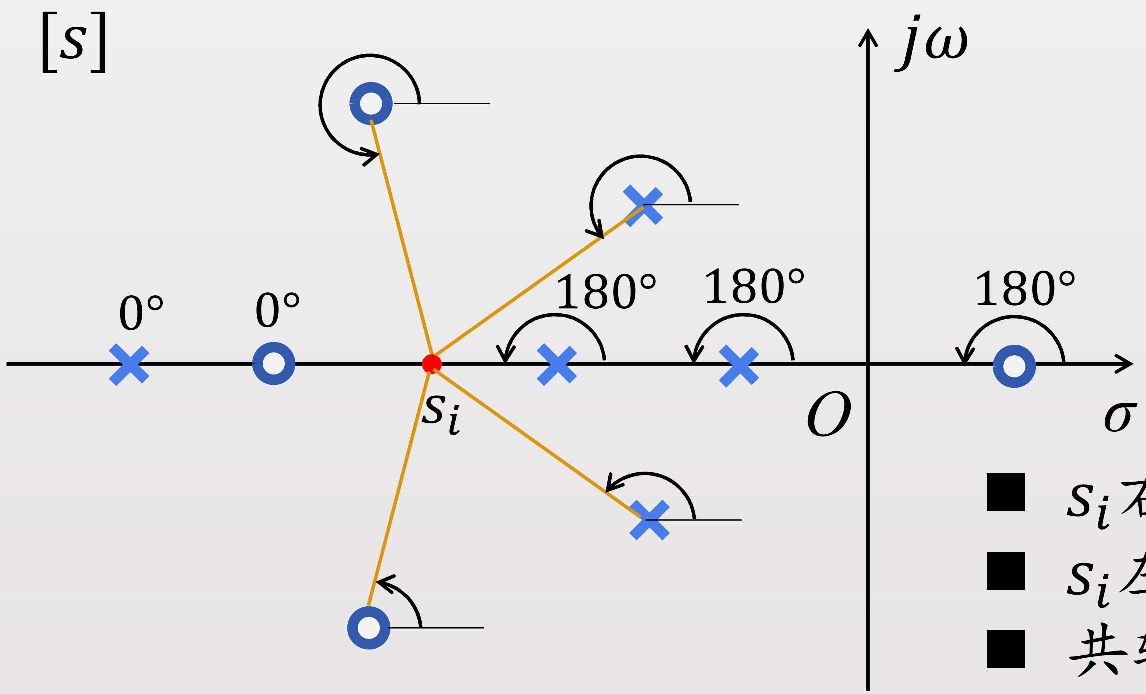
$K_1=0$时 $\quad s=p_i(i=1,2,\cdots n)$

$K_1=\infty$时 $\quad s=z_j(j=1,2,\cdots m)$

$s=\infty$

规则三（实轴上的根轨迹）：

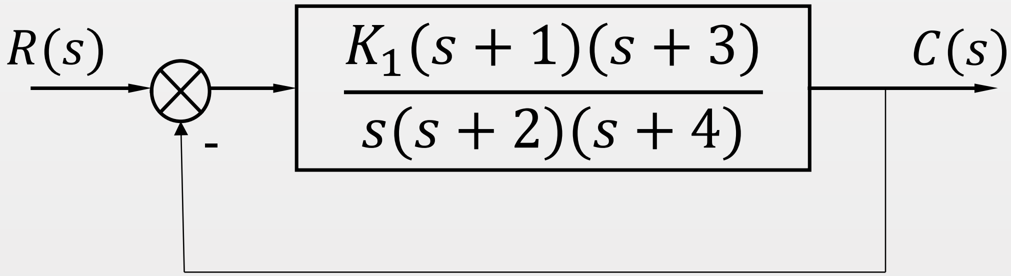
在s平面实轴的线段上存在根轨迹的条件是，其右边开环零点和开环极点数目之和为奇数。

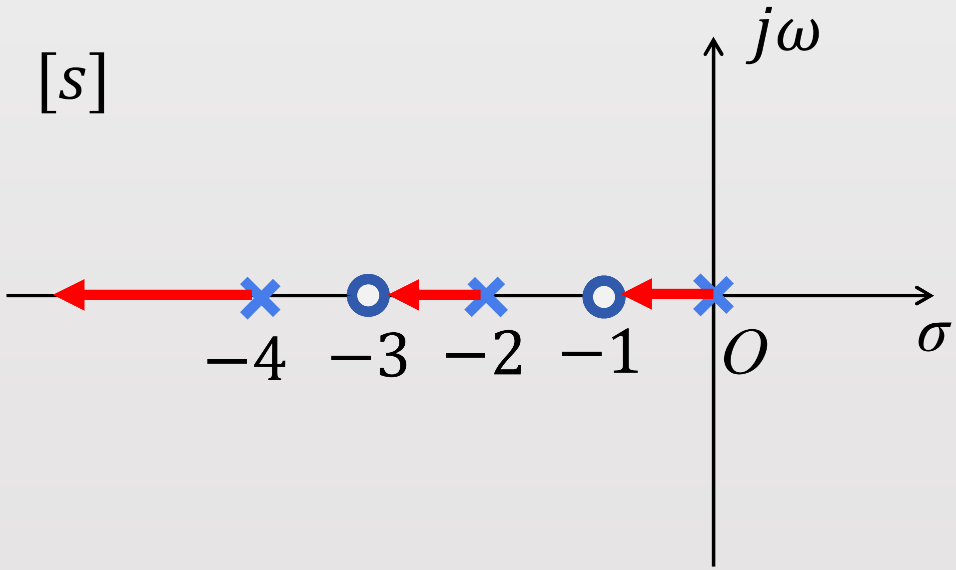


- s_i右边实轴上零极点与s_i相位为π
- s_i左边实轴上零极点与s_i相位为0
- 共轭零点（极点）与s_i相位之和为2π

➲ s_i右边实轴上零极点数为奇数即满足相角条件

例：设控制系统的框图如图所示。要求绘制系统在实轴上的根轨迹。

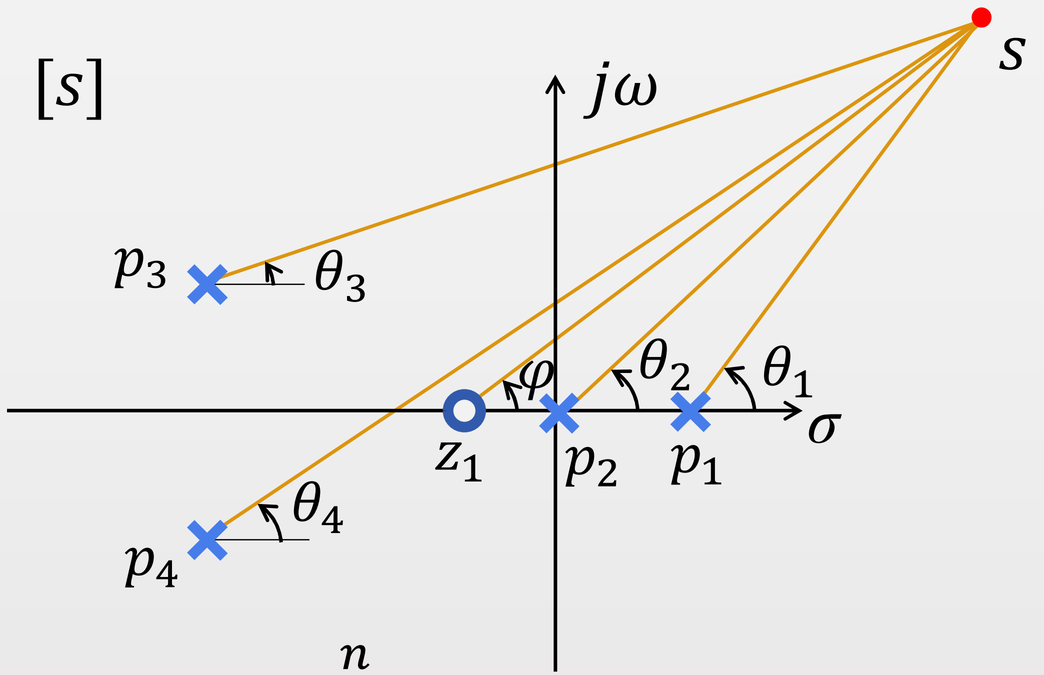




规则四（渐近线的相位）：

根轨迹中$n-m$条趋向无穷远处的分支的渐近线的相位角为

$$\varphi_a = \pm\frac{(2q+1)\pi}{n-m} \qquad (q=0,1,2,\ldots)$$



←假设为无穷远点

$$\sum_{j=1}^{m} \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) = \pm(2q+1)\pi$$

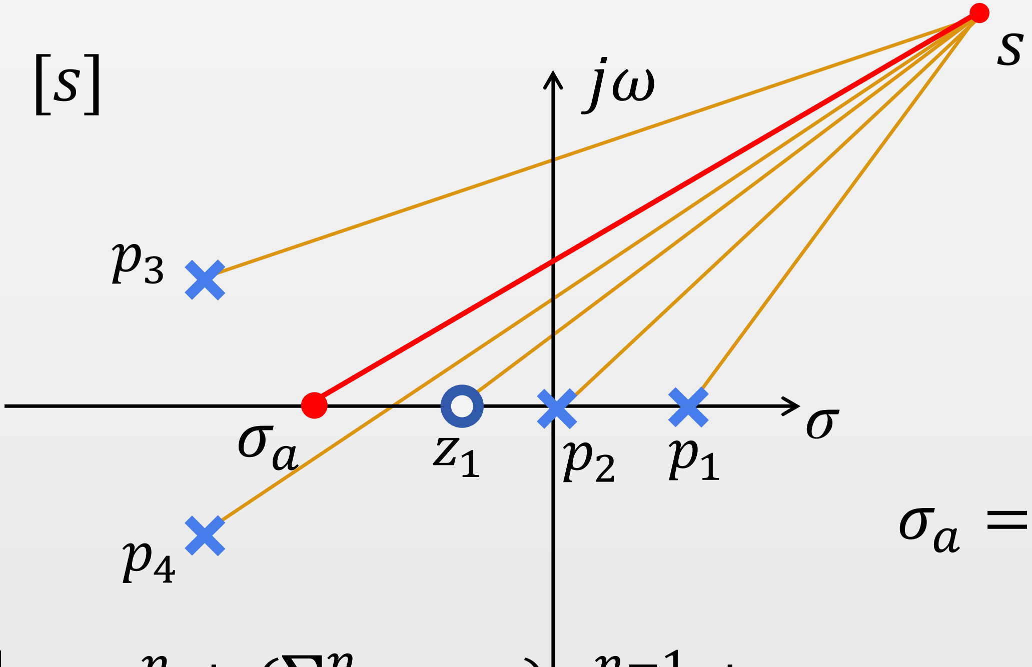
$$m\varphi_a - n\varphi_a = \pm(2q+1)\pi$$

$$\varphi_a = \pm\frac{(2q+1)\pi}{n-m}$$

规则五（渐近线的交点）：

伸向无穷远处根轨迹的渐近线与实轴交于一点，其坐标为$(\sigma_a\ ,j0)$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}$$



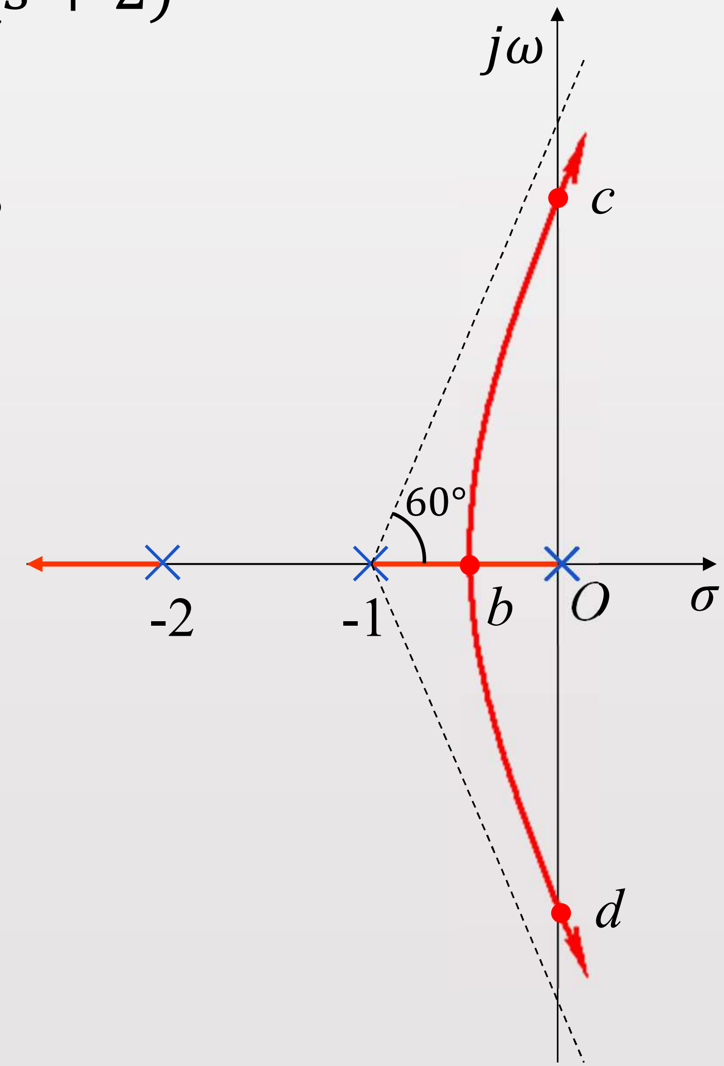
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

$$K_1 = \frac{\prod_{i=1}^{n}|(s-p_i)|}{\prod_{j=1}^{m}|(s-z_j)|} = \frac{s^n + (\sum_{i=1}^{n} -p_i)\, s^{n-1} + \cdots}{s^m + (\sum_{j=1}^{m} -z_j)\, s^{m-1} + \cdots}$$

（长除法） $$= s^{n-m} + \underline{[\sum_{i=1}^{n}(-p_i) - \sum_{j=1}^{m}(-z_j)]\, s^{n-m-1}} + \cdots$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}|(s-\sigma_a)|}{\prod_{j=1}^{m}|(s-\sigma_a)|} = (s-\sigma_a)^{n-m} = s^{n-m} + \underline{(n-m)(-\sigma_a)s^{n-m-1}} + \cdots$$

例：绘制开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$ 的单位反馈系统的根轨迹



解：①在s平面中确定开环零、极点的位置。

②n=3,m=0,应有三个分支，从开环极点出发，都趋向无穷远处。

③确定实轴上的根轨迹。

④确定渐近线的位置。

$$\varphi_a=\pm\frac{(2q+1)180°}{n-m}=\pm\frac{(2q+1)\pi}{3}$$

$q=0,\varphi_a=\pm 60°$ $\qquad$ $q=1,\varphi_a=\pm 180°$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=\frac{0-1-2}{3}=-1$$

规则六（分离点）：

复平面上根轨迹的分离点必须满足方程 $\frac{dK_1}{ds} = 0$

$$D(s) = 1 + \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$K_1 = -s(s+1)(s+2)$$

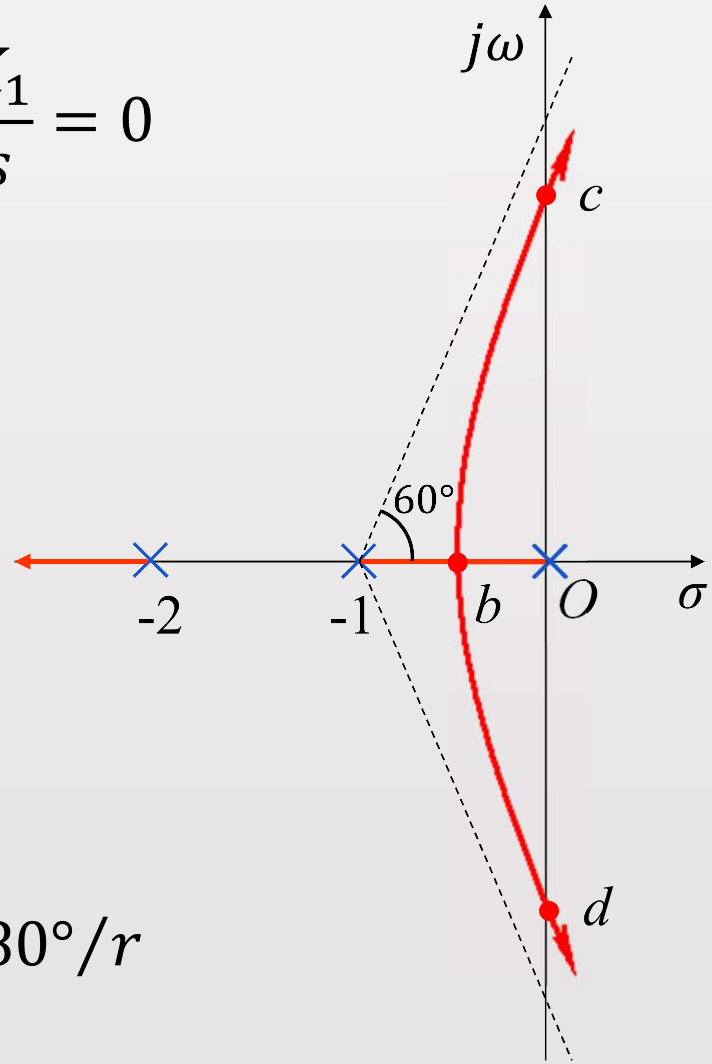
$$\frac{dK_1}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

$$s_1 = -0.423 \quad \surd$$

$$\cancel{s_2 = -1.577}$$

在分离点处根轨迹离开实轴的相角应为$\pm 180°/r$

(r为趋向或离开实轴的根轨迹分支数)



规则六方法②（重根法）： $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s-z_j}$$

证明： $$D(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{K_1\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

设分离点为d，为一重根，则必同时满足$D(s)=0$，$D'(s)=0$

$$K_1\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=-\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) \qquad \frac{d}{ds}\left[K_1\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)\right]=\frac{d}{ds}\left[-\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)\right]$$

两式相除得： $$\frac{\frac{d}{ds}\left[\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)\right]}{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}=\frac{\frac{d}{ds}\left[\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)\right]}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$\frac{\frac{d}{ds}[\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)]}{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)} = \frac{\frac{d}{ds}[\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)]}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$\frac{d[\ln\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)]}{ds} = \frac{d[\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)]}{ds}$$

$$\frac{d[\sum_{j=1}^{m}\ln(s-z_j)]}{ds} = \frac{d[\sum_{i=1}^{n}\ln(s-p_i)]}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{d\ln(s-z_j)}{ds} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\ln(s-p_i)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s-z_j}$$

规则七（与虚轴的交点）：

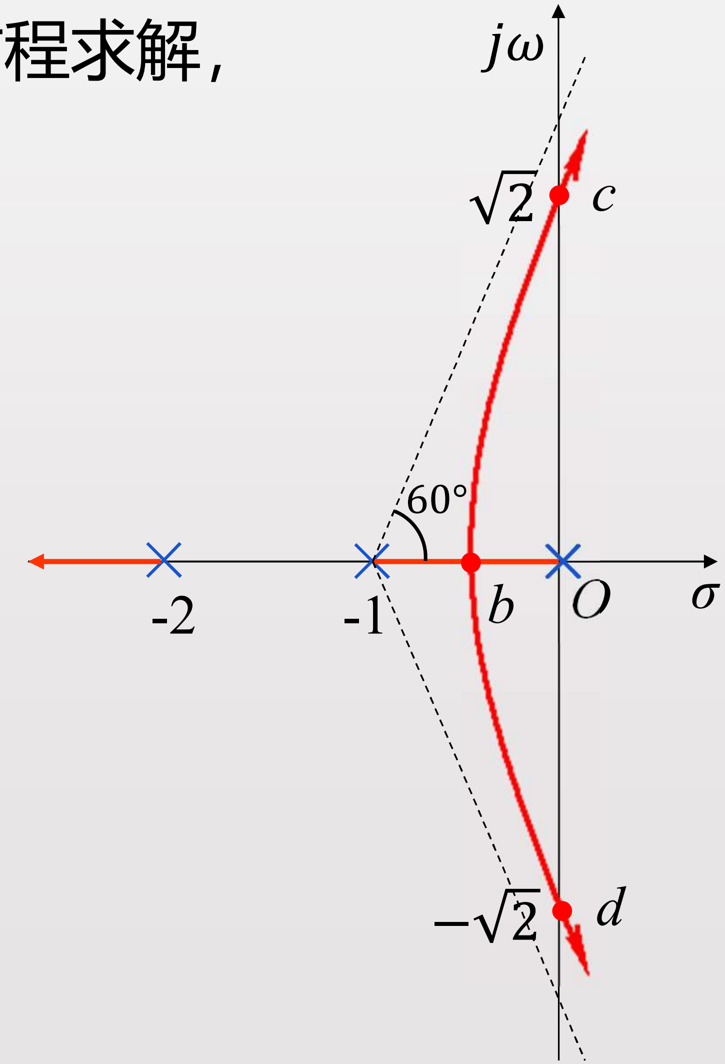
根轨迹与虚轴的交点可用$s = j\omega$代入特征方程求解，或者利用劳斯判据确定。

$$D(s) = 1 + \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 2) + K_1 = 0$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K_1 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 - 3\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \qquad \omega=0, \pm\sqrt{2}, \quad K_1 = 6$$



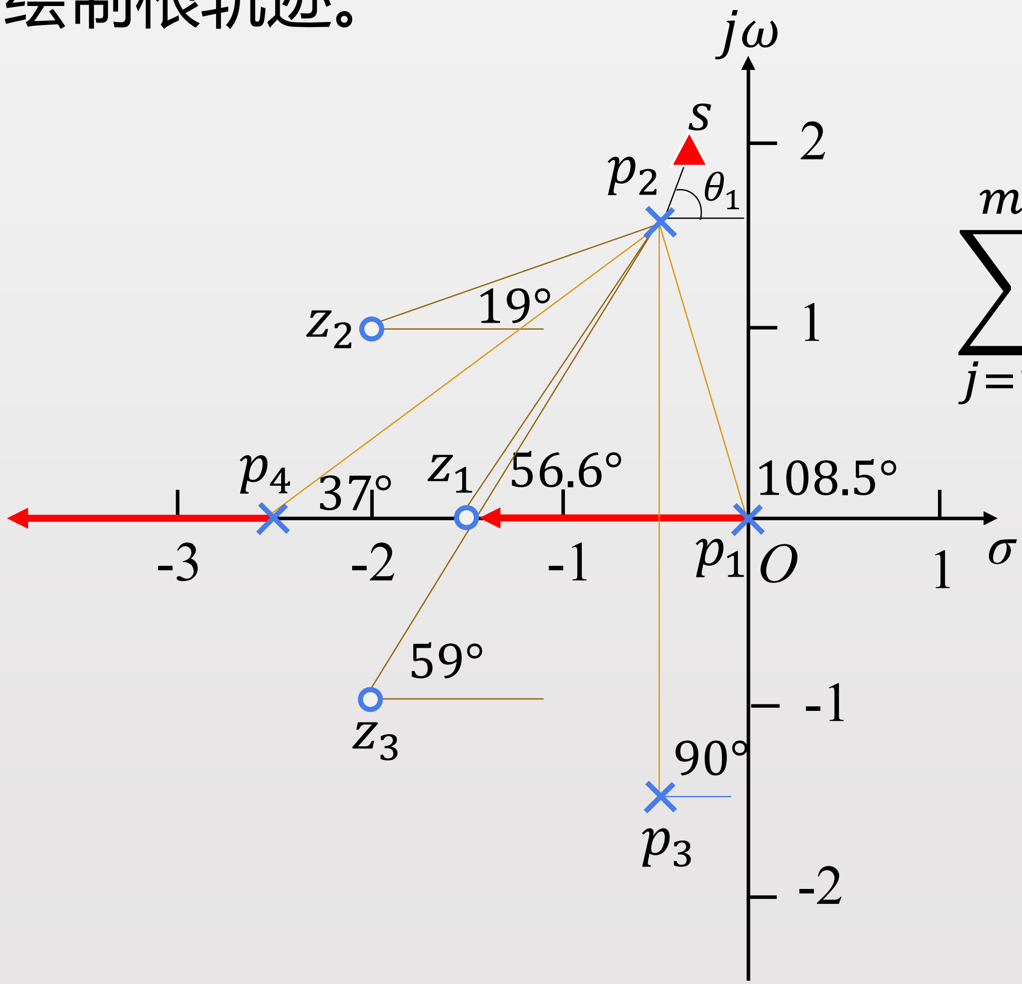
规则八（出射角和入射角）：

■根轨迹离开开环极点处的切线与正实轴的夹角称为出射角；

■根轨迹进入开环零点处的切线与正实轴的夹角称为入射角。

■出射角和入射角可直接利用相角条件求出。

例：单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K_1(s+1.5)(s+2\pm \mathrm{j})}{s(s+2.5)(s+0.5\pm \mathrm{j}1.5)}$ 绘制根轨迹。



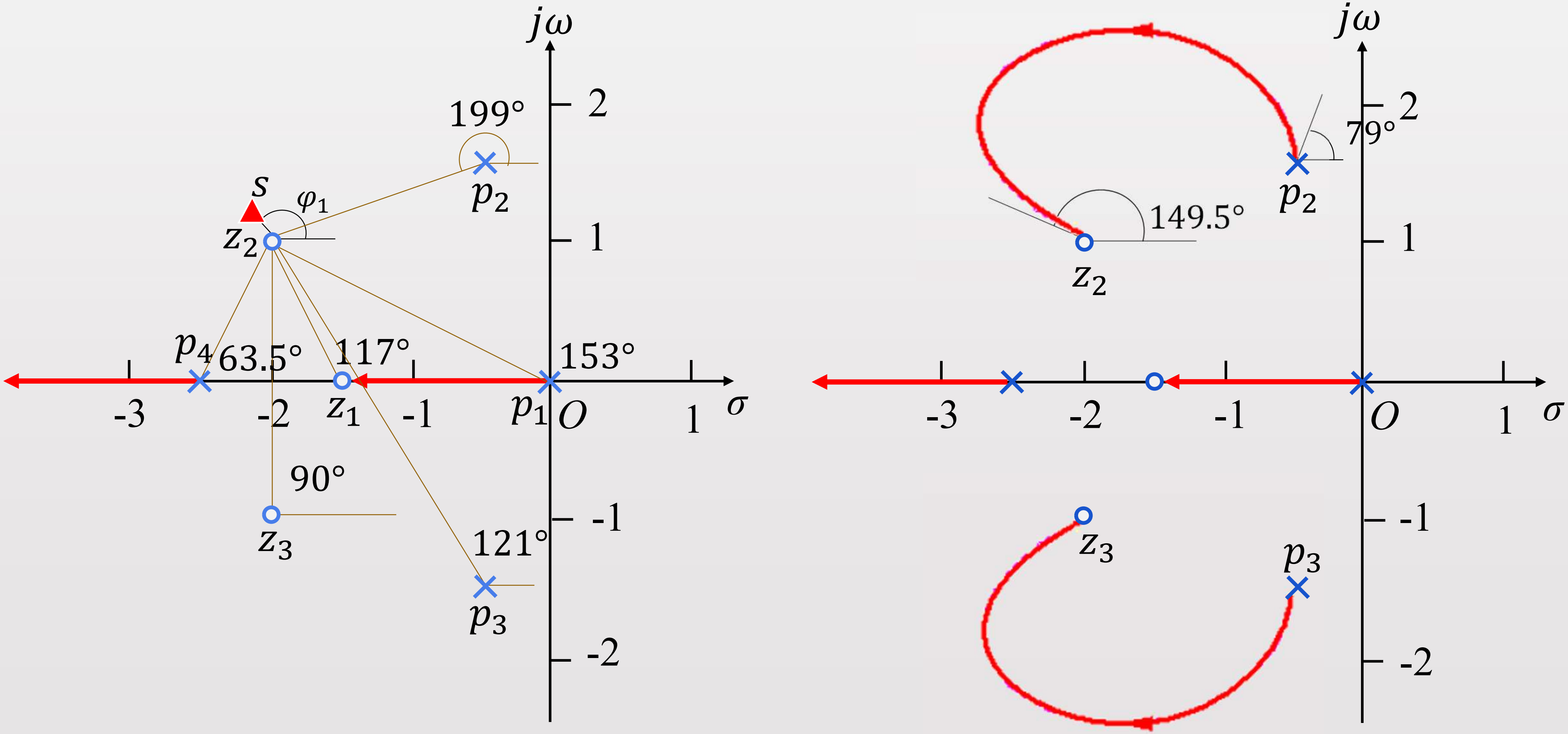
$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=\pm(2q+1)\pi$$

$$56.6^\circ+19^\circ+59^\circ-[\theta_1+108.5^\circ+90^\circ+37^\circ]=-180^\circ$$

$$\theta_1=79^\circ$$

$$[\varphi_1 + 117° + 90°] - [199° + 153° + 121° + 63.5] = -180°$$

$$\varphi_1 = 149.5°$$



序号	内容	规则
1	对称性	连续并对称于实轴
2	起点和终点	n条分支起始于开环极点，其中m条终止与开环零点，另外有$n-m$条趋向无穷远处
3	实轴上线段	其右边开环零点和开环极点数目之和为奇数
4	渐近线相位	$n-m$条，$\varphi_a=\pm\dfrac{(2q+1)\pi}{n-m},(q=0,1,2\cdots)$
5	渐近线交点	$\sigma_a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}$
6	分离点	$\dfrac{dK_1}{ds}=0$
7	与虚轴的交点	$s=j\omega$代入特征方程求解
8	出射角和入射角	直接利用相位条件求出

规则九（根之和）：

$n-m \geq 2$时，闭环根之和等于开环极点之和。$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$

证明： $G(s)H(s) = \dfrac{K_1(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} = \dfrac{K_1(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$

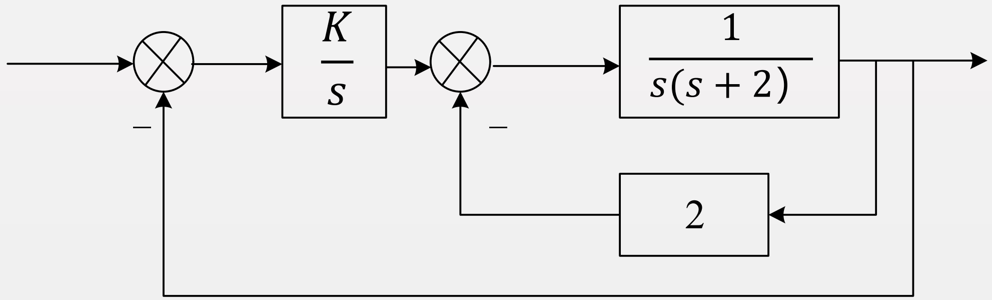
由代数定理： $-a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -a_{n-1} = C$

$$\begin{aligned} D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} \quad & +a_{n-2}s^{n-2} \quad +a_{n-3}s^{n-3} + \cdots + a_0 \\ & +K_1 s^{n-2} \quad + K_1 b_{n-3}s^{n-3} + \cdots + K_1 b_0 \end{aligned}$$

$$= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + (a_{n-2} + K_1)s^{n-2} + (a_{n-3} + K_1 b_{n-3})s^{n-3} + \cdots + (a_0 + K_1 b_0)$$

$$D(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = 0$$

例：已知系统结构图，绘制根轨迹。



解：$G(s)=\dfrac{K}{s}\dfrac{\dfrac{1}{s(s+2)}}{1+\dfrac{2}{s(s+2)}}=\dfrac{K}{s(s^2+2s+2)}$

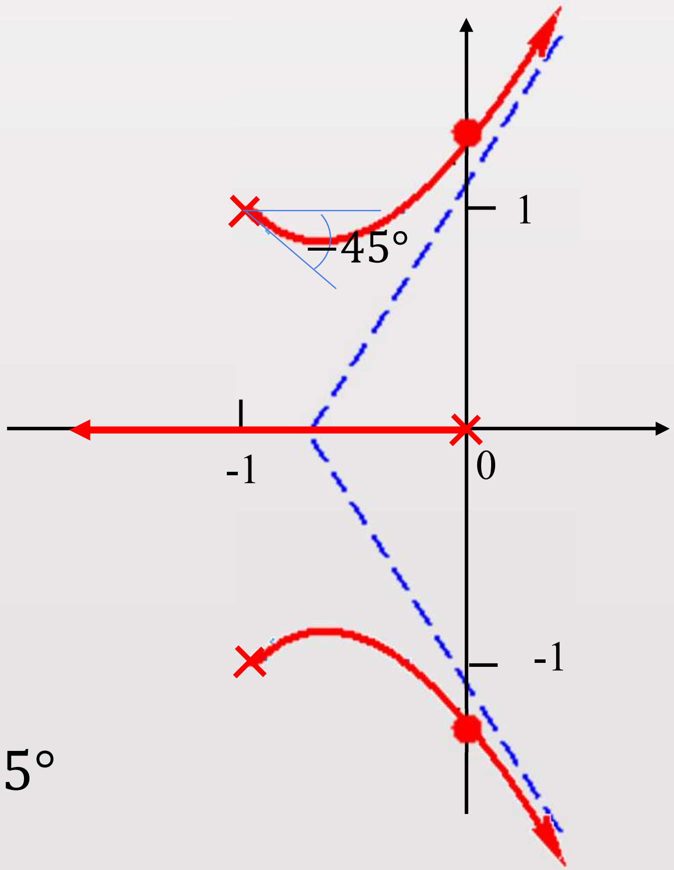
① 实轴上的根轨迹(-∞,0]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-1}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°，180°\end{cases}$

③与虚轴交点：$D(s)=(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0$

$\mathrm{Im}[D]=-\omega^3+2\omega=0 \qquad \omega=\pm\sqrt{2}$

④出射角：$0-[\theta_1+90°+135°]=-180° \quad \Rightarrow \theta_1=-45°$



例：单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_1}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$，绘制根轨迹

解：$G(s)=\dfrac{K_1}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$ $\quad K=\dfrac{K_1}{400}$

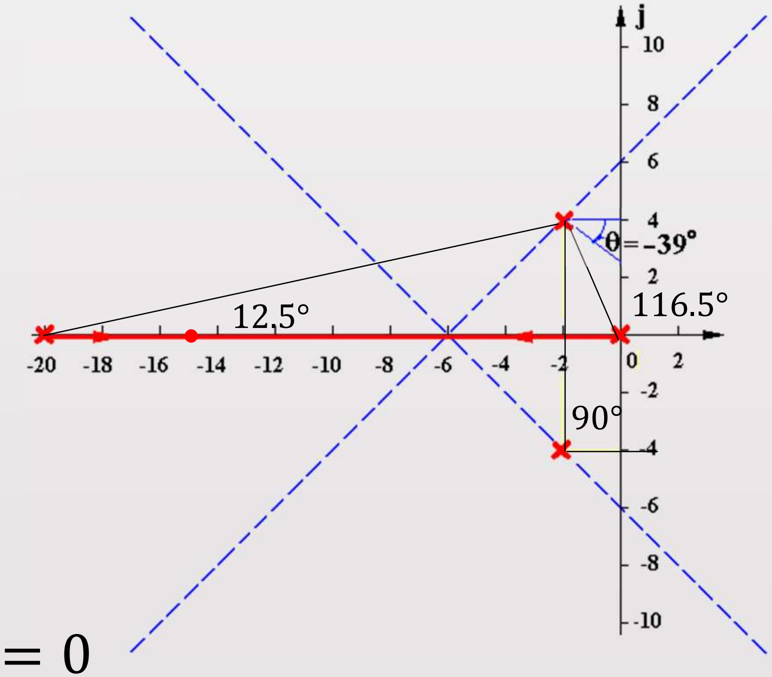
① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

② 渐近线：$\sigma_a=\dfrac{0-20-2-2}{4}=-6$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45°,\ \pm135°$$

③ 出射角：$-[\theta_1+90°+116.5°+12.5°]=-180°$

$$\Rightarrow\quad \theta_1=-39°$$



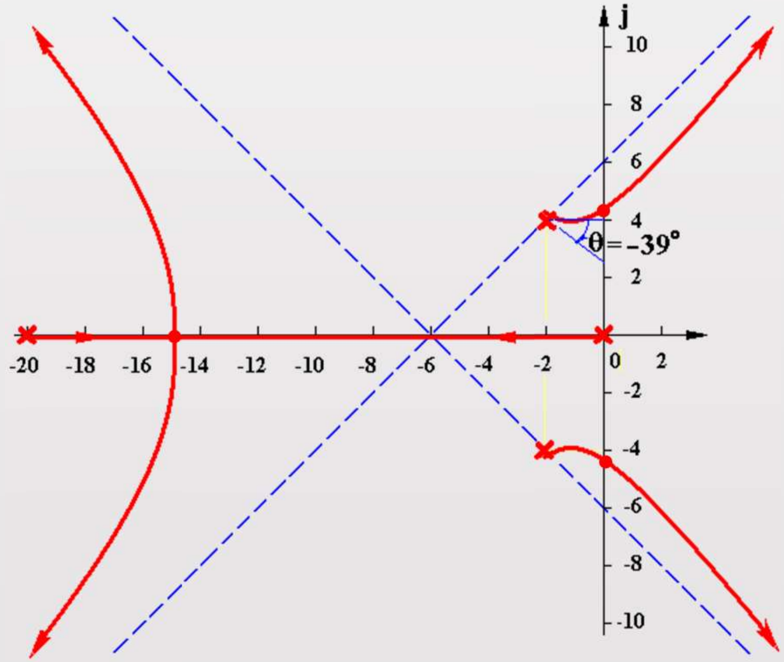
④ 分离点：$D(s)=s^4+24s^3+100s^2+400s+K_1=0$

$$\frac{dK_1}{ds}=\frac{-d(s^4+24s^3+100s^2+400s)}{ds}\qquad s^3+18s^2+50s+100=0\qquad s=-15.1$$

④ 虚轴交点： $D(s) = s^4 + 24s^3 + 100s^2 + 400s + K_1 = 0$

$$\begin{cases} \mathrm{Im}[D(j\omega)] = -24\omega^3 + 400\omega = 0 \\ \mathrm{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 100\omega^2 + K_1 = 0 \end{cases}$$

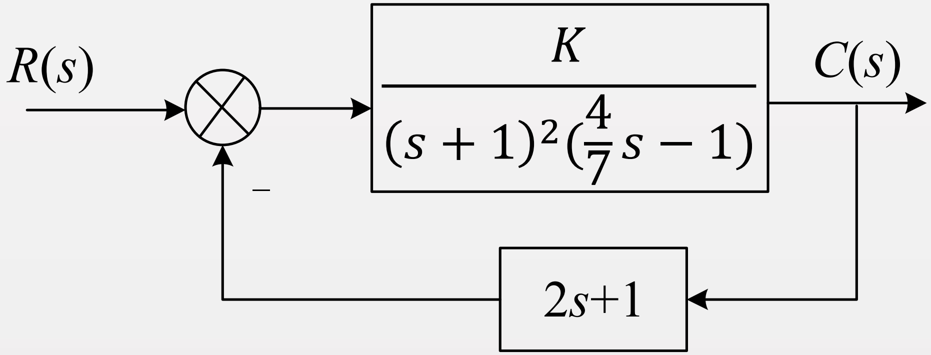
$\omega = \sqrt{400/24} = 4.1 \qquad K_1 = 1389$



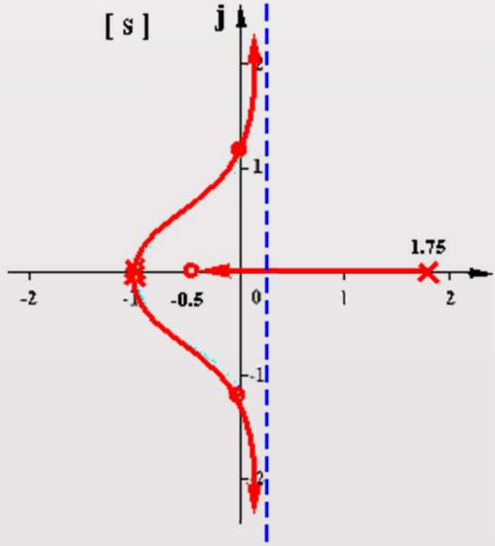
例：系统结构图如图所示

（1）绘制当$K_1 = 0 \to \infty$ 时系统的根轨迹；

（2）分析系统稳定性随 K 变化的规律。



解：$G(s) = \dfrac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)} = \dfrac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})}$　　$K_1 = 3.5K$



① 实轴上的根轨迹：[-0.5, 1.75]

② 渐近线：$\sigma_a = \dfrac{-2+7/4+1/2}{3-1} = \dfrac{1}{8}$　$\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90°$

③ 出射角：　$180° - [2\theta + 180°] = -180°$　$\Rightarrow \theta = 90°$

④ 与虚轴交点：$D(s) = 4s^3 + s^2 + (14K-10)s + 7(K-1) = 0$

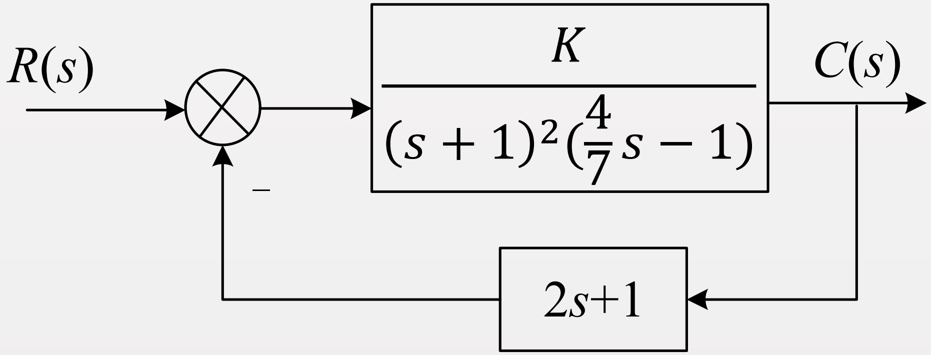
$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + 7(K-1) = 0$　　$\omega = 0$　$K = 1$

$\mathrm{Im}[D(j\omega)] = -4\omega^3 + (14\omega - 10)\omega = 0$　　$\omega = \sqrt{2}$　$K = 9/7$

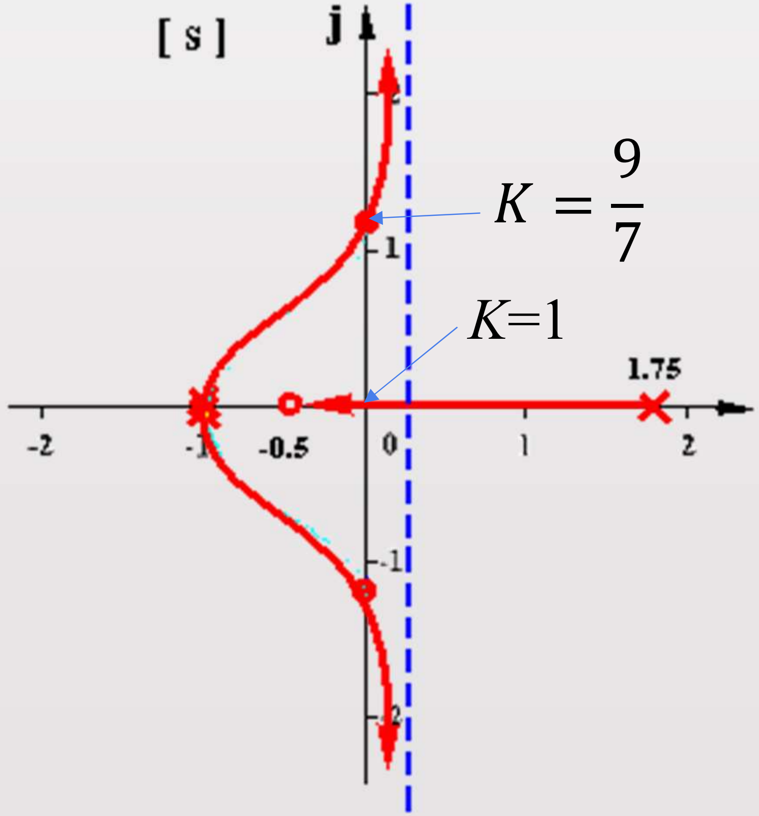
例：系统结构图如图所示

（1）绘制当$K_1 = 0 \to \infty$时系统的根轨迹；

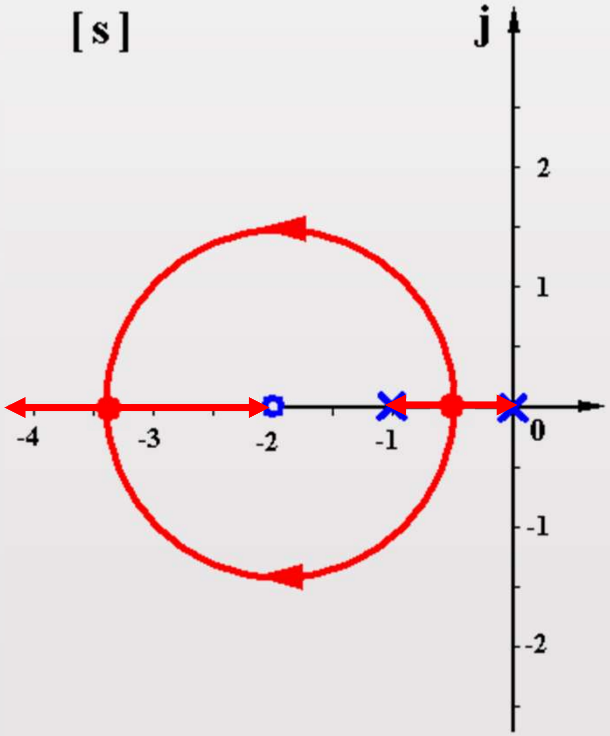
（2）分析系统稳定性随 K 变化的规律。



$$K=0 \underbrace{\xrightarrow{h(t)\ \text{单调发散}}}_{\text{不稳定}} K=1 \underbrace{\xrightarrow{h(t)\ \text{收敛}}}_{\text{稳定}} K=\frac{9}{7} \underbrace{\xrightarrow{h(t)\ \text{振荡发散}}}_{\text{不稳定}} K=\infty$$



例：某单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\frac{K_1(s+2)}{s(s+1)}$，证明复平面的根轨迹为圆弧。



解： $G(s)=\dfrac{K_1(s+2)}{s(s+1)}$ $\quad\begin{cases} K=2K_1 \\ v=1 \end{cases}$

$$D(s)=s(s+1)+K_1(s+2)=s^2+(1+K_1)s+2K_1$$

$$s_{1,2}=\frac{-(1+K_1)\pm\sqrt{(1+K_1)^2-8K_1}}{2}$$

$$=\frac{-(1+K_1)}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K_1-(1+K_1)^2}}{2}=\sigma\pm j\omega$$

$$\sigma=\frac{-(1+K_1)}{2}\quad\Rightarrow\quad K_1=-2\sigma-1$$

$$\omega^2=\frac{8K_1-(1+K_1)^2}{4}=\frac{-8(2\sigma+1)-4\sigma^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$$

$$\sigma^2+4\sigma+4+\omega^2=2\qquad(\sigma+2)^2+\omega^2=\sqrt{2}^2$$

虚部为0，$\Delta=(1+K_1)^2-8K_1=K_1^2-6K_1+1=0$ $\quad\begin{cases} K_{d_1}=0.1716 \\ K_{d_2}=5.828 \end{cases}\quad\begin{cases} d_1=-0.5858 \\ d_2=-3.4142 \end{cases}$

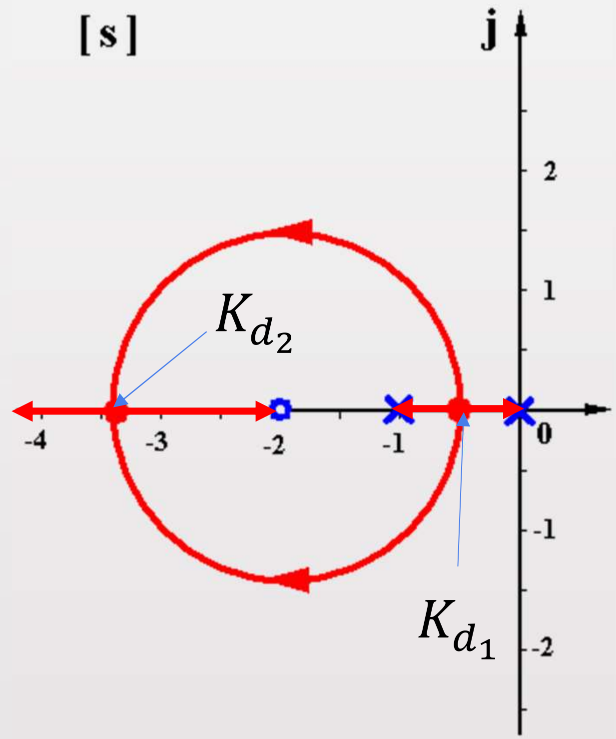
性能分析：

$K_1 = 0 \longrightarrow K_{d_1} \longrightarrow K_{d_2} \longrightarrow \infty$

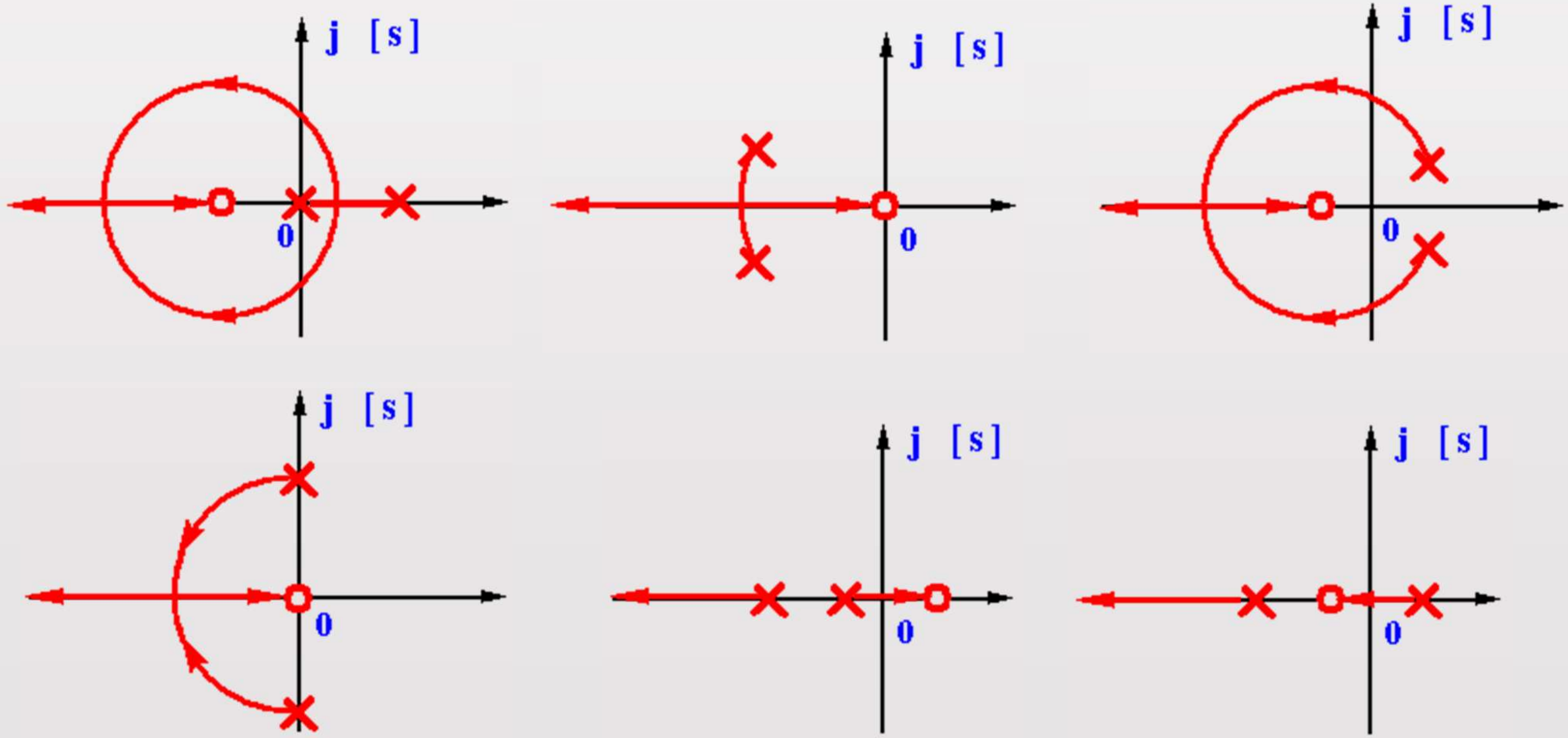
暂态性能：	$h(t)$单调 $t_s \downarrow$ $M_p = 0$	$h(t)$振荡 $t_s \downarrow$ $M_p \curvearrowright$	$h(t)$单调 $t_s \downarrow$ $M_p = 0$

稳定性： 绝对稳定

稳态性能： $r(t) = t$时， $e_{sr} = \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{2K_1}$， $K_1\uparrow \;\Rightarrow\; e_{sr}\downarrow$



定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



第三节 广义根轨迹

参数根轨迹： 除根轨迹增益K_1以外的其他参量（如开环零点、开环极点、时间常数、反馈比例系数等）从零变化到无穷大时绘制的根轨迹。

例：系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_1(s+\alpha)}{s(s^2+2s+2)}$，绘制以$\alpha$为参变量的参数根轨迹，并讨论$\alpha$值对系统稳定性的影响

$$D(s)=1+\frac{K_1(s+\alpha)}{s(s^2+2s+2)}=0$$

$$s^3+2s^2+(2+K_1)s+K_1\alpha=0$$

$$G^*(s)=\frac{K_1\alpha}{s^3+2s^2+(2+K_1)s}$$

等效开环传递函数

$$\xRightarrow{K_1=1}\frac{\alpha}{s(s^2+2s+3)}$$

$$G^*(s) = \frac{\alpha}{s(s^2+2s+3)}$$

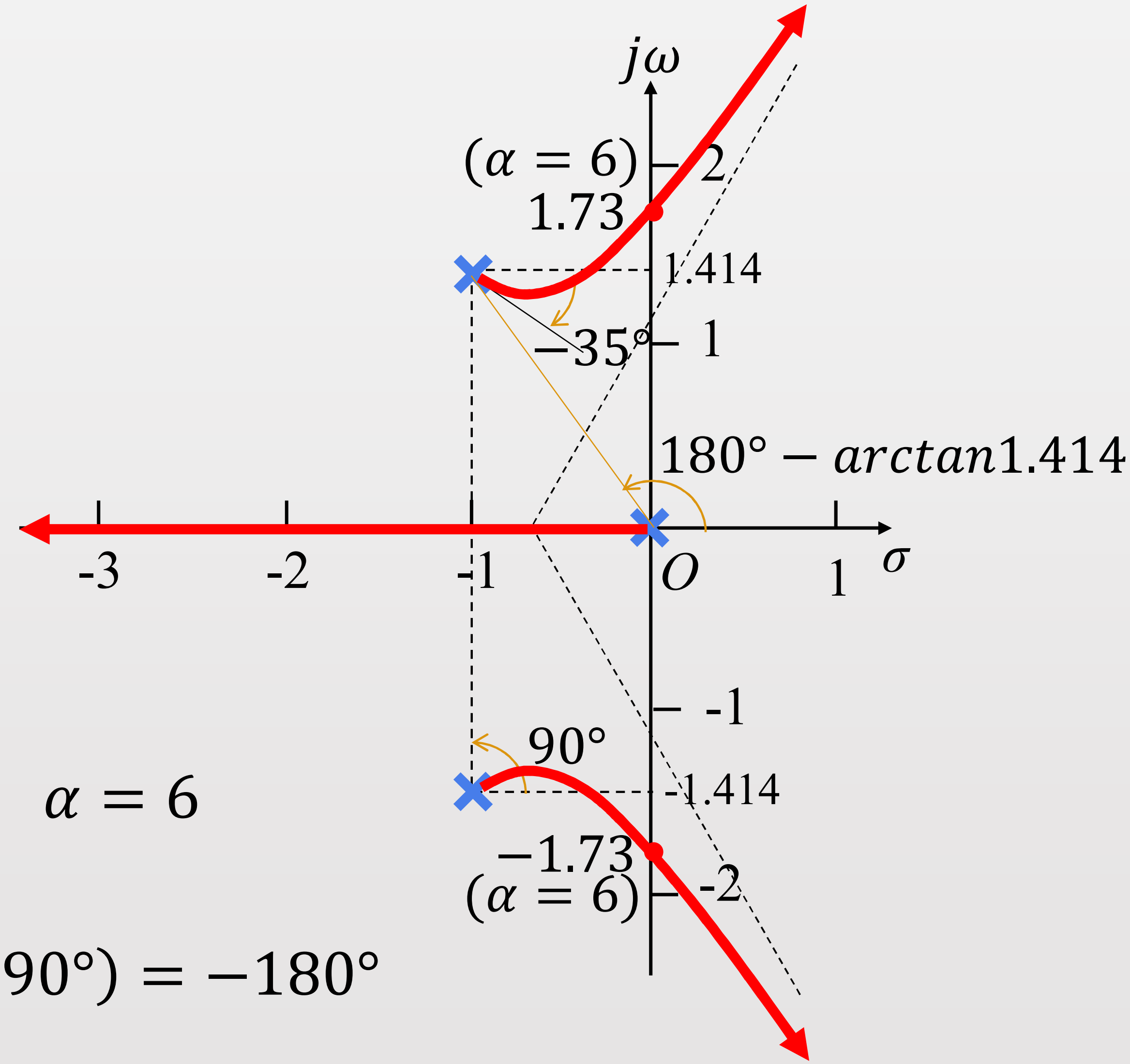
$$\varphi_a = \pm\frac{(2q+1)\pi}{3}$$
$$= \pm 60°, 180°, \qquad q = 0,1$$

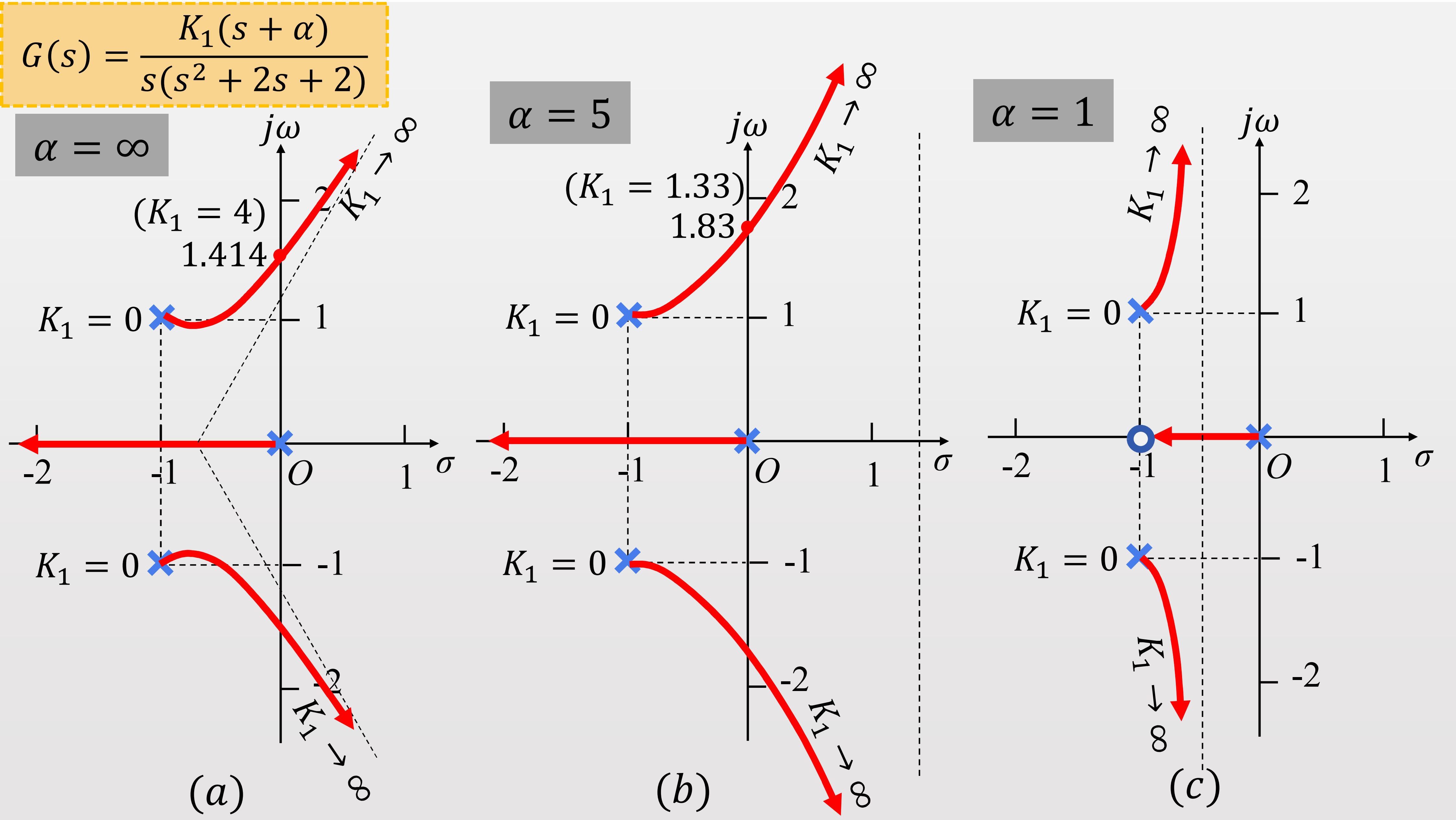
$$\sigma_a = \frac{0-1-1}{3} = -0.667$$

$$(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + \alpha = 0$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\omega^2 = 0 \\ 3\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \qquad \omega = 0, \pm 1.73, \quad \alpha = 6$$

$$0 - (\varphi + 180° - arctan1.414 + 90°) = -180°$$
$$\varphi = -35°$$




$G(s) = \frac{K_1(s+\alpha)}{s(s^2+2s+2)}$
$\alpha = \infty$
$(K_1 = 4)$
1.414
$K_1 = 0$
$K_1 = 0$
$K_1 \to \infty$
$K_1 \to \infty$
$j\omega$
σ
O
(a)
$\alpha = 5$
$(K_1 = 1.33)$
1.83
$K_1 = 0$
$K_1 = 0$
$K_1 \to \infty$
$K_1 \to \infty$
(b)
$\alpha = 1$
$K_1 = 0$
$K_1 = 0$
$K_1 \to \infty$
$K_1 \to \infty$
(c)

讨论：附加开环零点对系统性能的影响

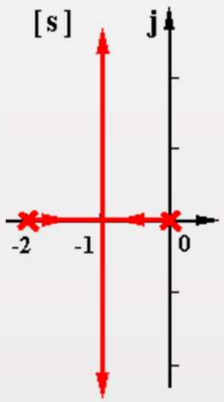
渐近线相位：$\varphi_a = \pm(2q+1)180°/(n-m)$

随着m增大而增加,根轨迹向左方向弯曲

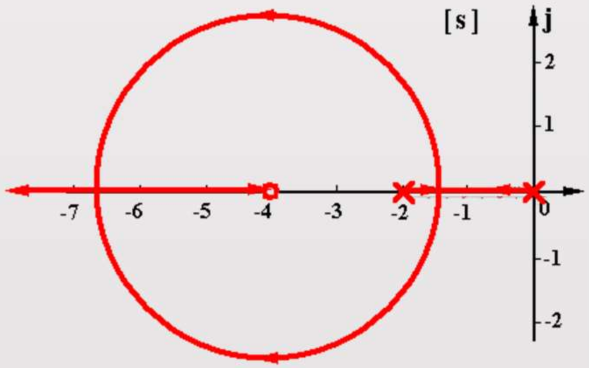
渐近线交点：$\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i)/(n-m)$

随着z_i增大（ z_i点在实轴上向右移）而左移

提高了系统的相对稳定性



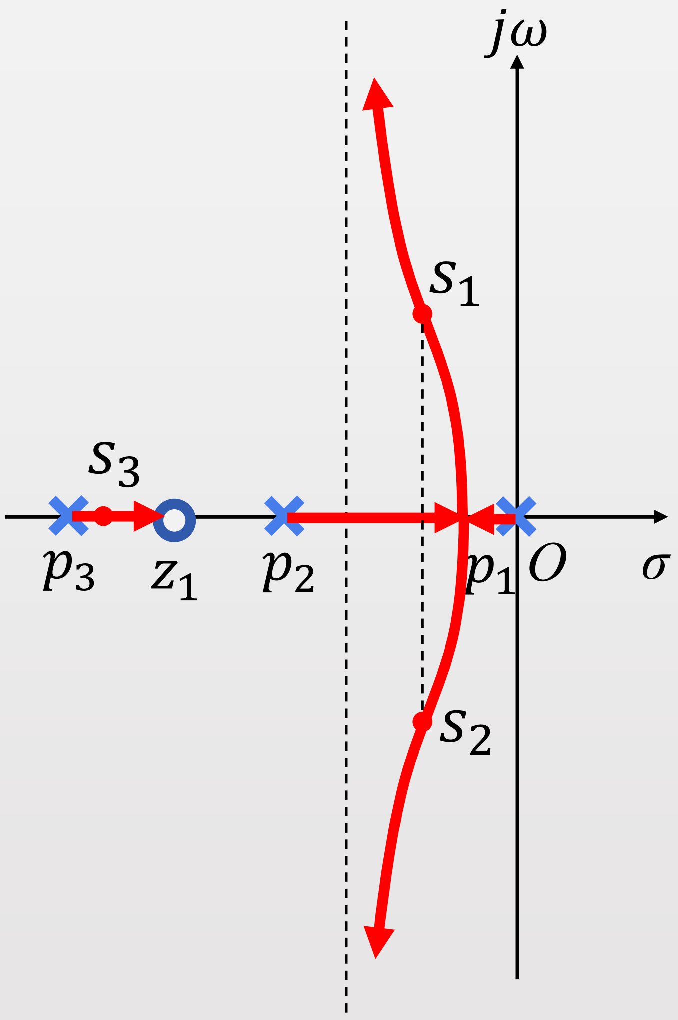
$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$



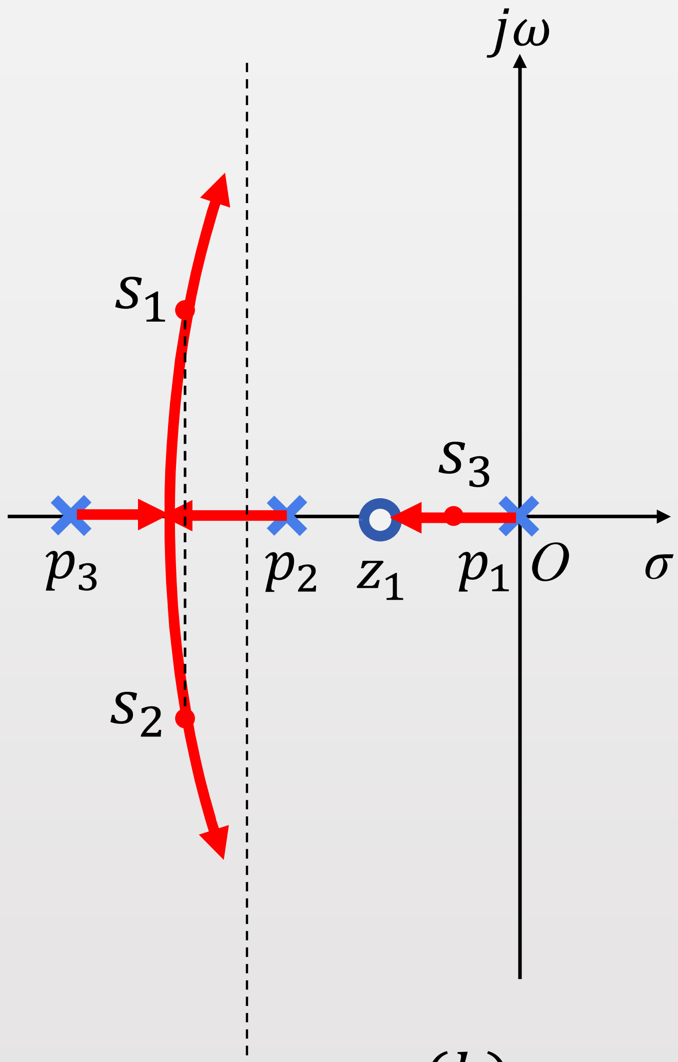
$$G_{PD}(s) = \frac{K_1(0.25s+1)}{s(s+2)}$$

提高系统动态性能

PD控制



(a)

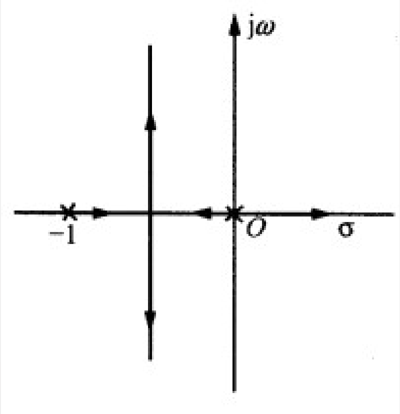


(b)

稳定裕度:
图(b)优于图(a)

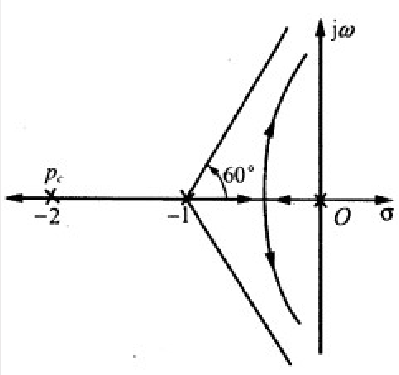
动态性能:
图(a)优于图(b)

讨论：附加开环极点对系统性能的影响?



渐近线相位：$\varphi_a = \pm(2q+1)180°/(n-m)$

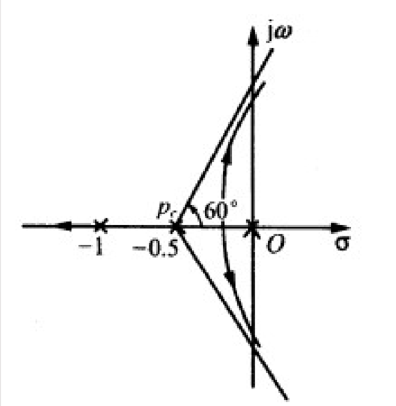
随着n增大而减小,根轨迹向右方向弯曲



$p_c = -2$

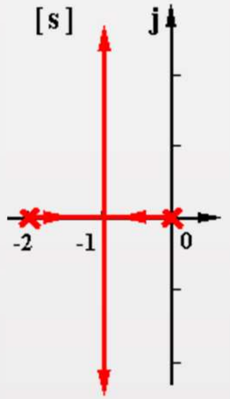
渐近线交点：$\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i)/(n-m)$

随着p_i增大（ p_i点在实轴上向右移）而右移
向右弯曲趋势随着所增加的极点移近原点而加剧

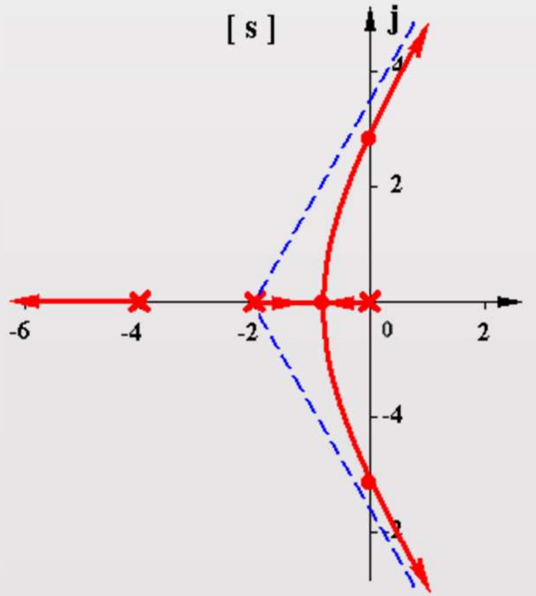


$p_c = -1$

降低了系统的相对稳定性



$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$

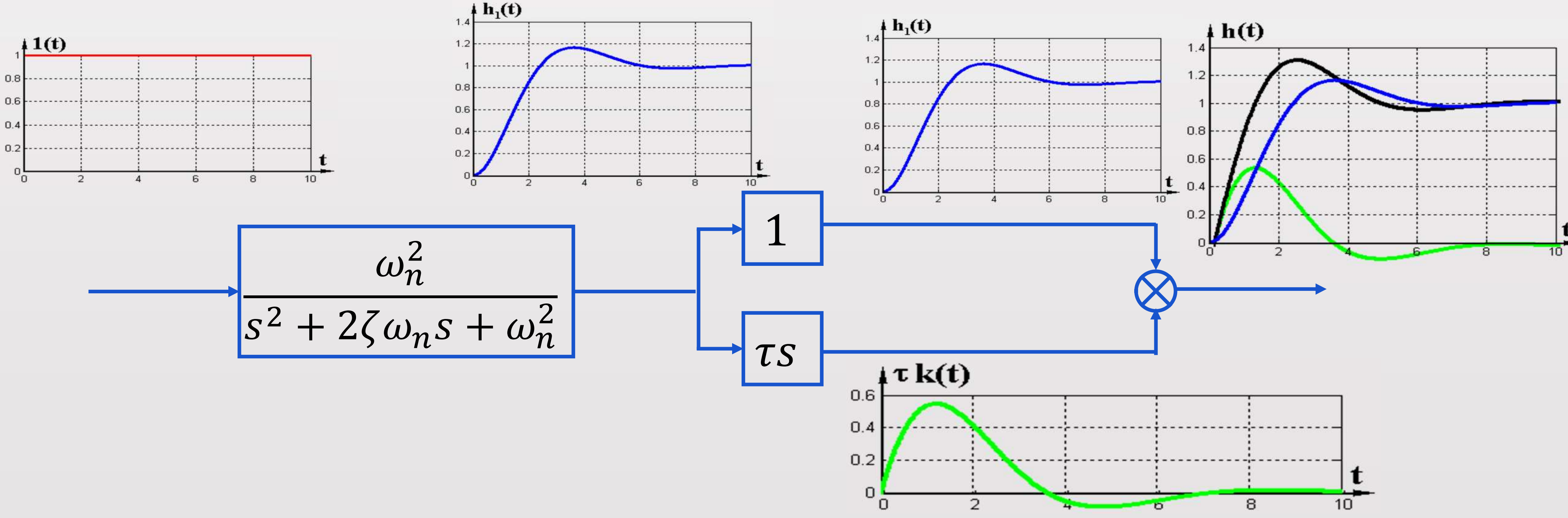


$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)(s+4)}$$

降低系统动态性能

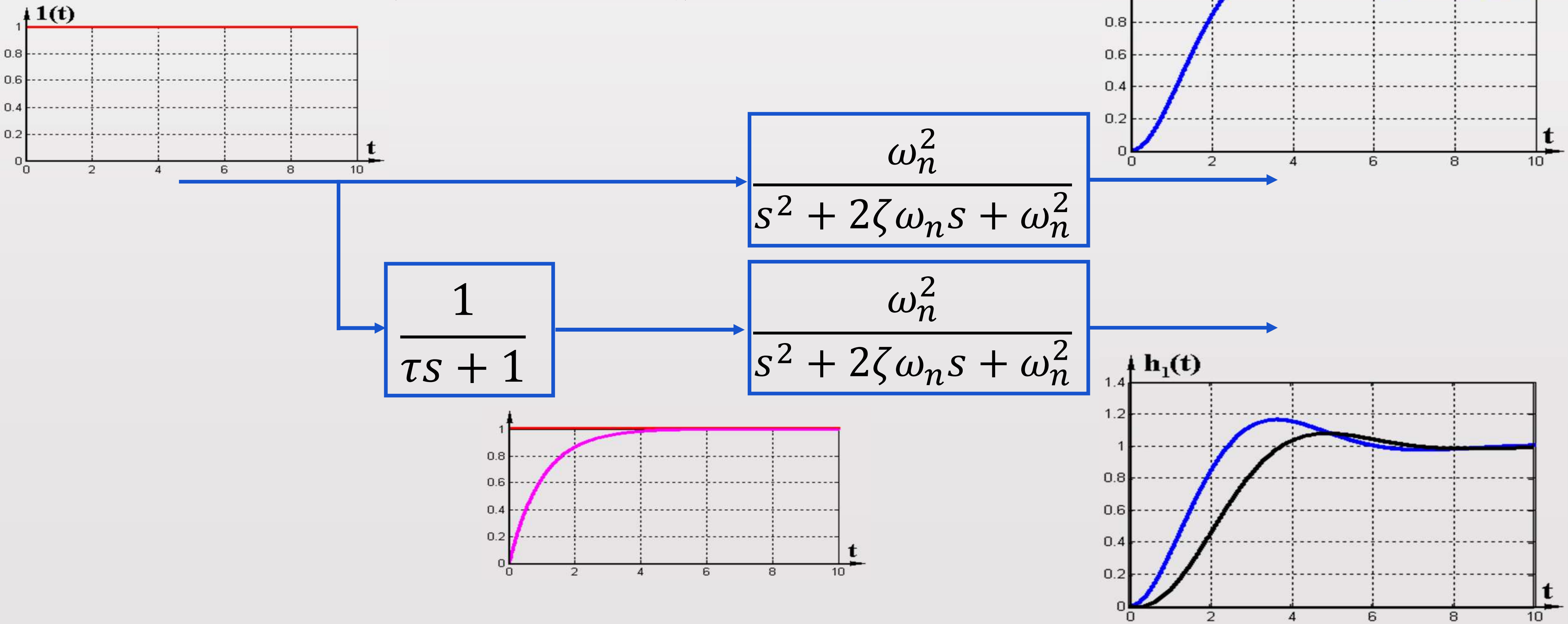
讨论：附加闭环零点对系统动态性能的影响？

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$



讨论：附加闭环极点对系统动态性能的影响?

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{(\tau s+1)(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2)}$$



多回路系统根轨迹：

根轨迹不仅适用于单回路系统，而且适用于多回路系统。

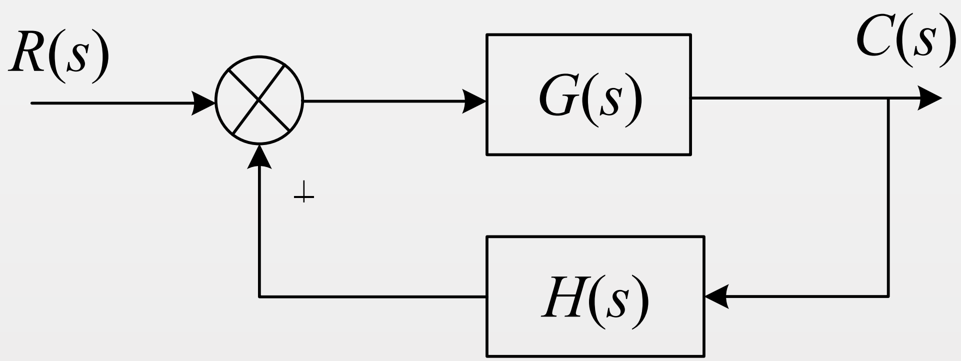
方法是：从内环开始，分层绘制，逐步扩展到整个系统。

零度根轨迹

特征方程：$1 - G(s)H(s) = 0$

$$G(s)H(s) = \mathbf{1}$$

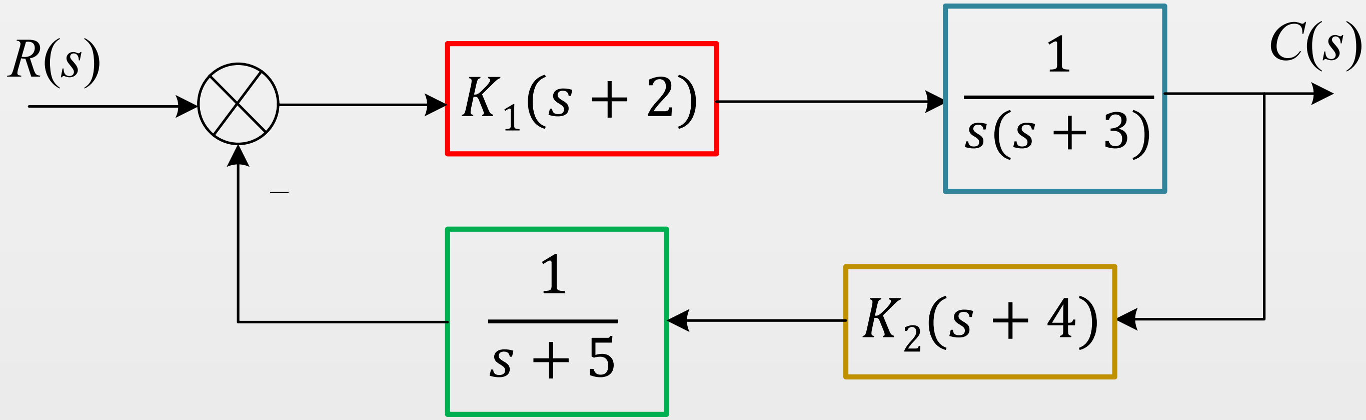
$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm 2q\pi \end{cases} \qquad (q=0,1,2,\ \ldots)$$



正反馈回路

序号	内容	规则
1	对称性	连续并对称于实轴
2	起点和终点	n条分支起始于开环极点，其中m条终止与开环零点，另外有$n-m$条趋向无穷远处
3	实轴上线段	其右边开环零点和开环极点数目之和为**偶数**
4	渐近线相位	$n-m$条，$\varphi_a=\pm\frac{2q\pi}{n-m},(q=0,1,2\cdots)$
5	渐近线交点	$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}$
6	分离点	$\frac{dK_1}{ds}=0$
7	与虚轴的交点	$s=j\omega$代入特征方程求解
8	出射角和入射角	**直接利用相位条件求出**

第五节 利用根轨迹分析系统的性能



$$G(s)=\frac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}$$

$$\Phi(s)=\frac{K_1\,(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5)+K_1K_2(s+2)(s+4)}$$

闭环极点与开环零点、开环极点及 K_1K_2 均有关

闭环零点=前向通道零点+反馈通道极点

利用根轨迹法分析系统动态性能的基本步骤

① 绘制系统根轨迹；

② 依题意确定闭环极点位置；

③ 确定闭环零点；

④ 保留主导极点，估算系统性能。

例：已知系统结构图，$K_1 = 0 \to \infty$，绘制系统根轨迹并确定：

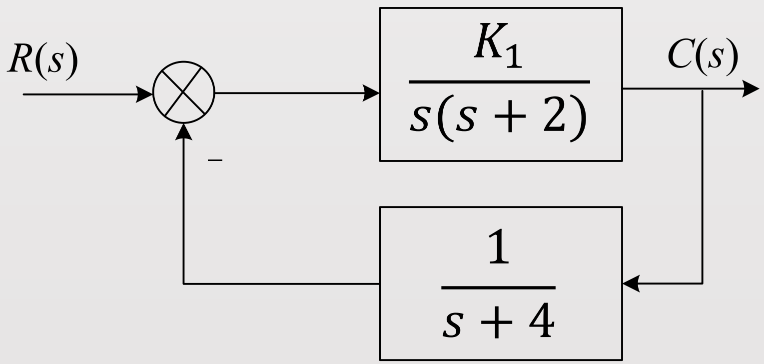
(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

(2) 复极点对应 $\zeta = 0.5$ 时的 K 值及闭环极点位置；

(3) 当 $s_3 = -5$时， 求$s_{1,2}$ 的值以及相应开环增益K

(4) 当 K_1 =4 时， 求$s_{1,2,3}$并估算系统动态指标(M_p, t_s)。

解：



$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)(s+4)} \qquad \begin{cases} K = K_1/8 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\frac{K_1}{s(s+2)}$$

$$\frac{1}{s+4}$$

① 实轴上的根轨迹：(-∞,-4]，[-2,0]

② 渐近线： $\sigma_a = (-2-4)/3 = -2$ $\varphi_a = \pm 60°，180°$

③ 分离点： $D(s) = s(s+2)(s+4) + K_1 = s^3 + 6s^2 + 8s + K_1 = 0$

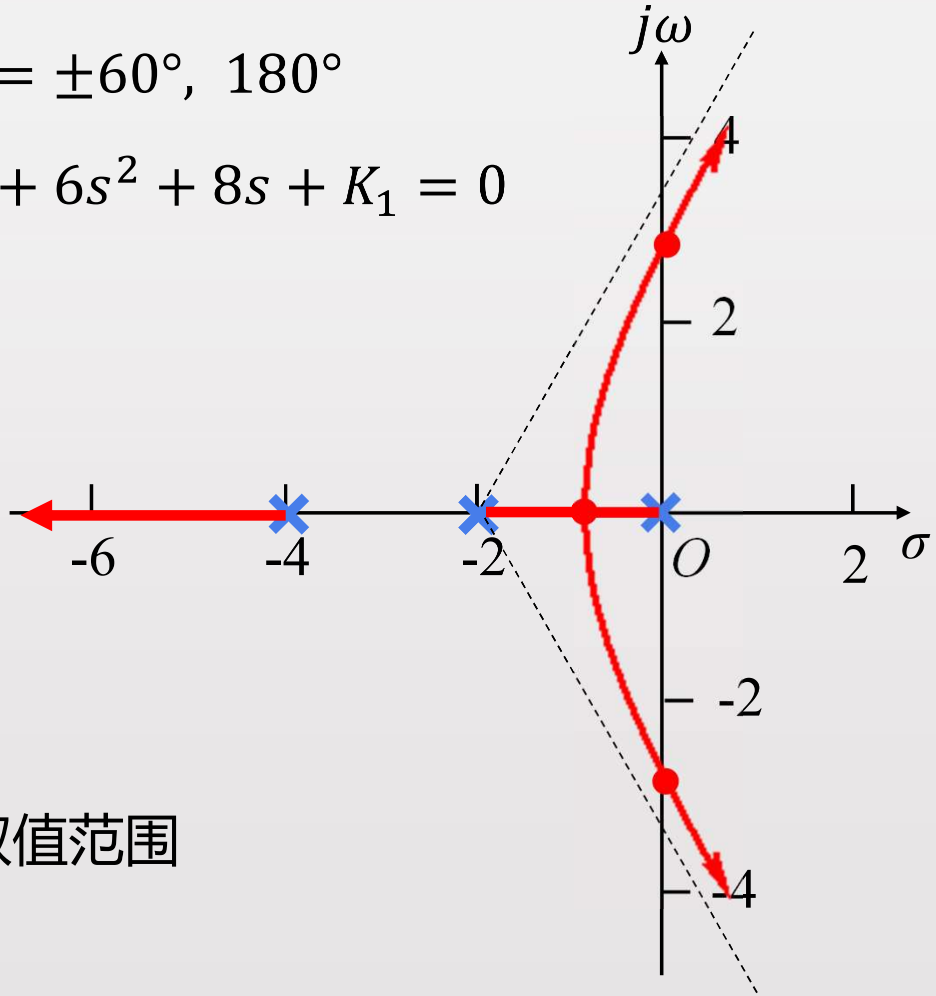
$$\frac{dK_1}{ds} = -(3s^2 + 12s + 8) = 0 \;\Rightarrow\; s = -0.845$$

$$K_1 = |s||s+2||s+4| \overset{s=-0.845}{=} 3.08$$

④ 虚轴交点： $\mathrm{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 8\omega = 0$

$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = -6\omega^2 + K_1 = 0$

$$\omega = \pm\sqrt{8} = \pm 2.828 \qquad K_1 = 48$$



(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

$$3.08 < K_1 < 48$$

$$K = K_1/8$$

$$0.385 < K < 6$$

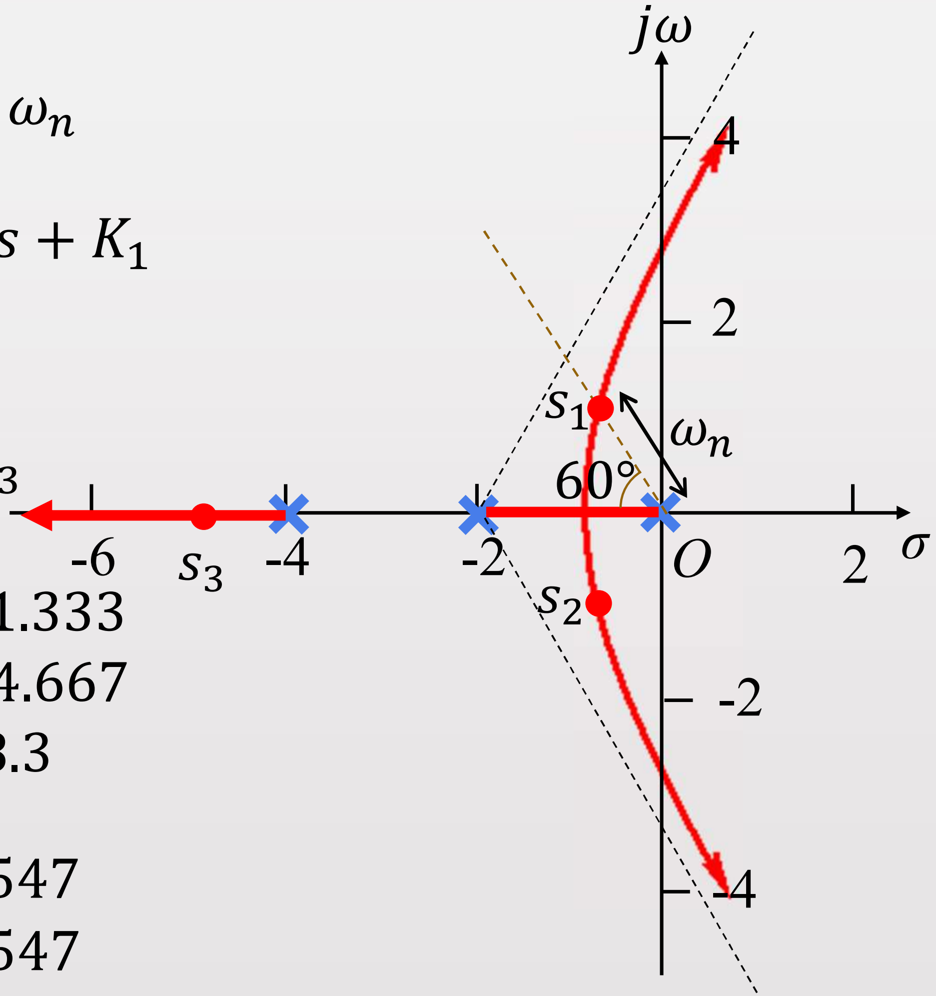
(2)复极点对应 $\zeta = 0.5$ 时的 K 值及闭环极点位置

$$s_1 = -\frac{1}{2}\omega_n + j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n \qquad s_2 = -\frac{1}{2}\omega_n - j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n$$

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + 6s^2 + 8s + K_1$$

$$= (s^2 + \omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)$$

$$= s^3 + (\omega_n - s_3)s^2 + \omega_n(\omega_n - s_3)s - \omega_n^2 s_3$$



比较系数，应有 $\begin{cases} \omega_n - s_3 = 6 \\ \omega_n(\omega_n - s_3) = 8 \\ -\omega_n^2 s_3 = K_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_n = 1.333 \\ s_3 = -4.667 \\ K_1 = 8.3 \end{cases}$

$K = K_1/8 = 1.0375$ $\begin{cases} s_1 = -0.667 + j1.1547 \\ s_2 = -0.667 - j1.1547 \\ s_3 = -4.667 \end{cases}$

(3) 当 $s_3=-5$时， 求$s_{1,2}$的值以及相应开环增益K

$$D(s)=s^3+6s^2+8s+K_1 \quad =(s+5)(s^2+s+3)$$

$$\begin{cases} s_1=-0.5+j1.6583 \\ s_2=-0.5-j1.6583 \end{cases}$$

$$K_1=15$$

$$K=K_1/8=15/8=1.875$$

$$\begin{array}{r l}
 & s^2 \quad +s \quad +3 \\ \hline
s+5 \; \big) & s^3+6s^2+8s+K_1 \\
 & s^3+5s^2 \\ \hline
 & s^2+8s \\
 & s^2+5s \\ \hline
 & 3s+K_1 \\
 & 3s+15 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

(4)当 K_1 =4 时， 求$s_{1,2,3}$并估算系统动态指标(M_p, t_s)。

三阶系统必有一个实根， 设为 s_3

$$K_1 = |s_3||s_3+2||s_3+4| = 4 \qquad s_3 = -4.383$$

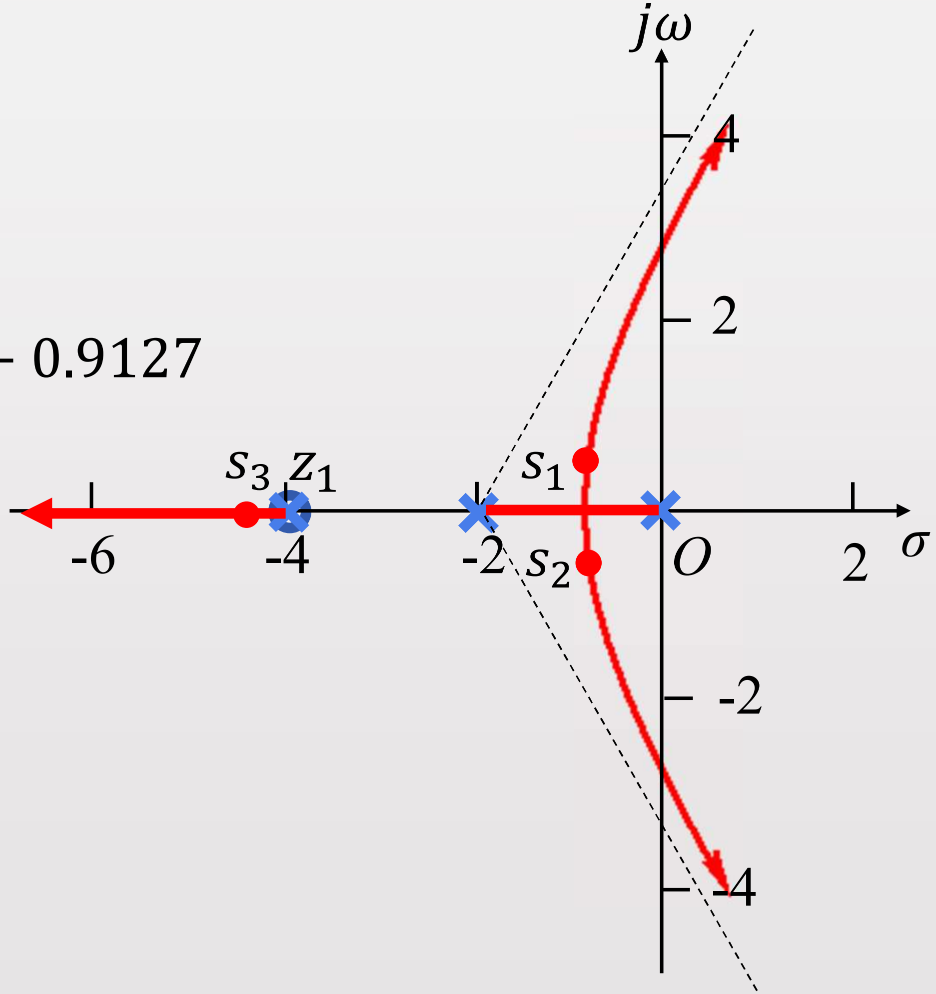
$$\frac{D(s)}{s+4.383} = \frac{s^3+6s^2+8s+K_1}{s+4.383} = s^2+1.617s+0.9127$$

$$\begin{cases} s_1 = -0.808 + j0.509 \\ s_2 = -0.808 - j0.509 \end{cases}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1(s+4)}{s(s+2)(s+4)+K_1}$$

$$\overset{K_1=4}{=} \frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s+0.808 \pm j0.509]}$$

$$= \frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s^2+1.617s+0.9127]}$$



s_3到虚轴的距离大于5倍的$s_{1,2}$到虚轴距离，

并且s_3与零点z_1构成偶极子，

视 $s_{1,2}$为主导极点

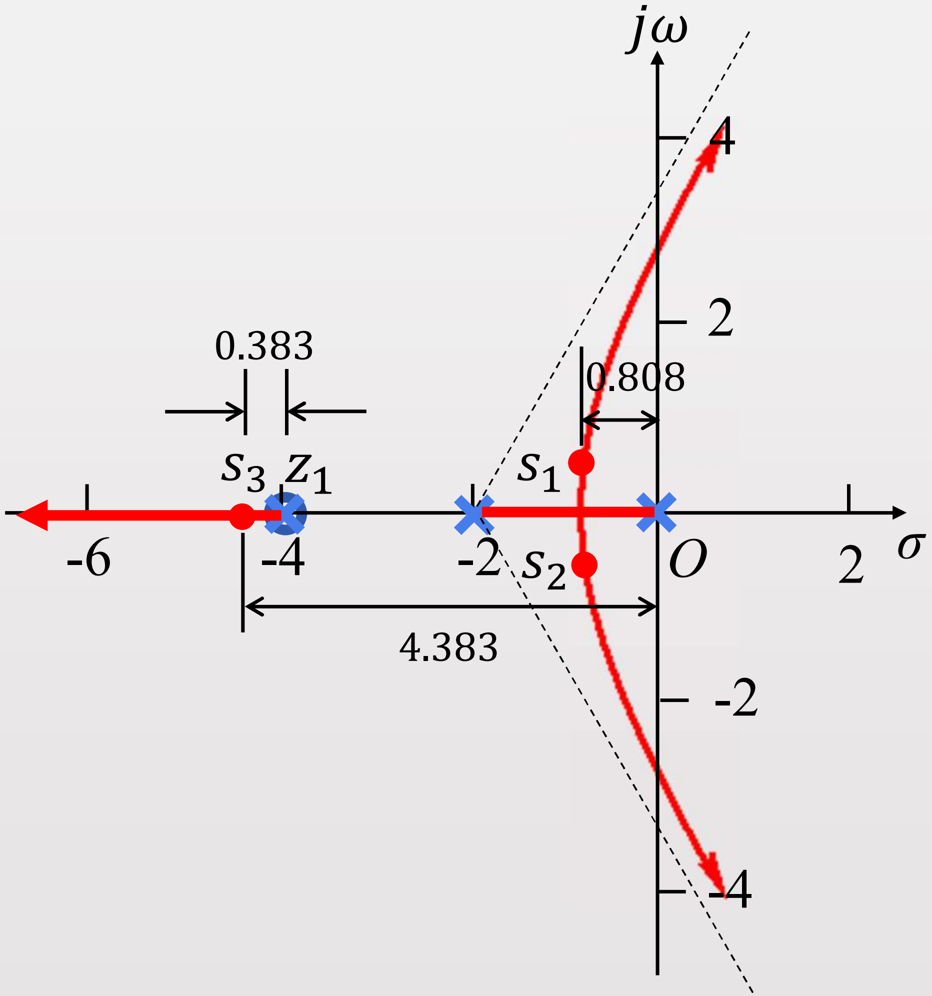
$$\Phi(s)=\frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s^2+1.617s+0.9127]}$$

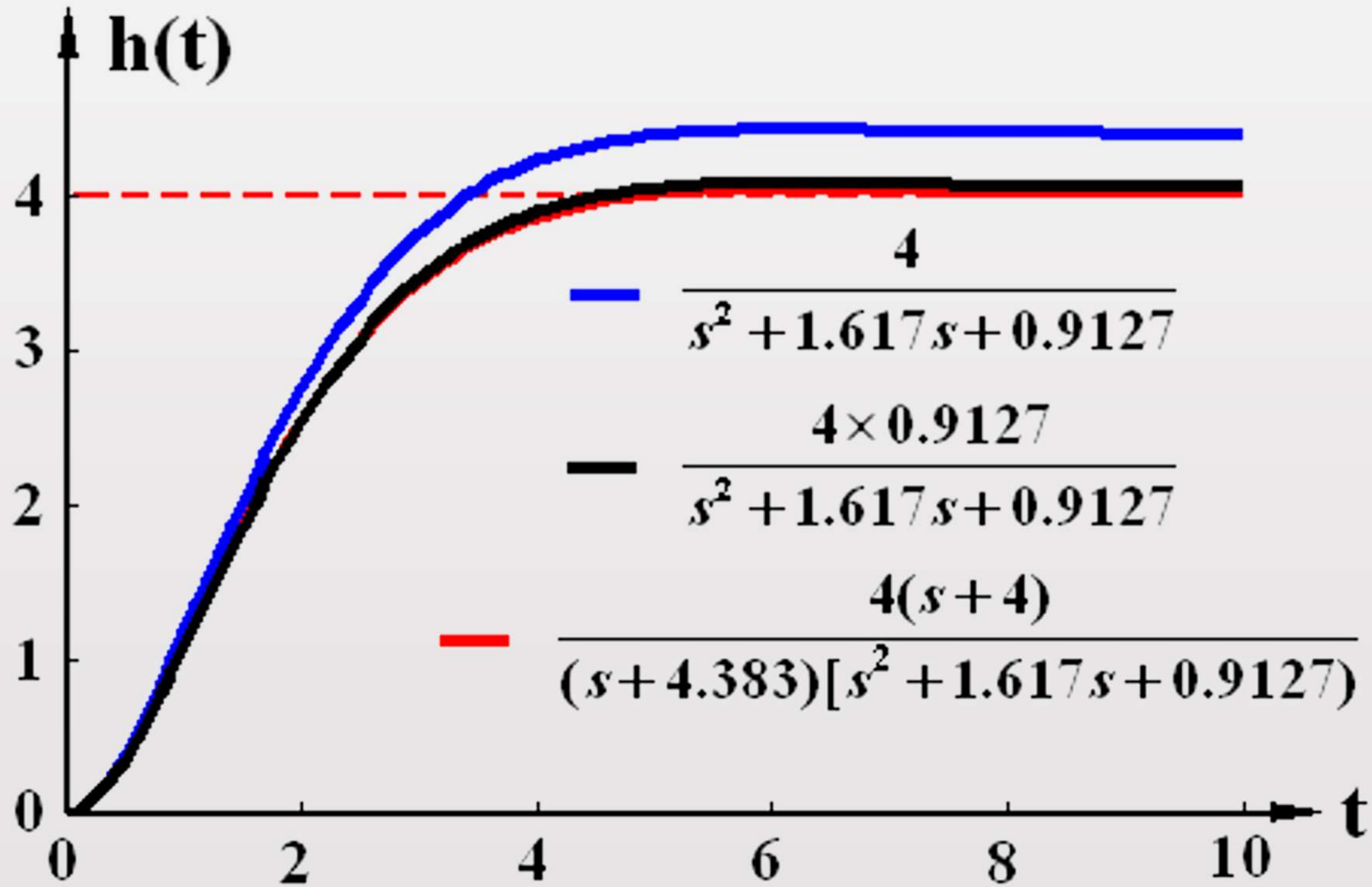
$$=\frac{4\times 4\div 4.383}{s^2+1.617s+0.9126}$$

$$=\frac{3.65}{s^2+1.617s+0.9126}$$

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{0.9126}=0.955\\ \zeta=1.617/(2\times 0.955)=0.8463\end{cases}$$

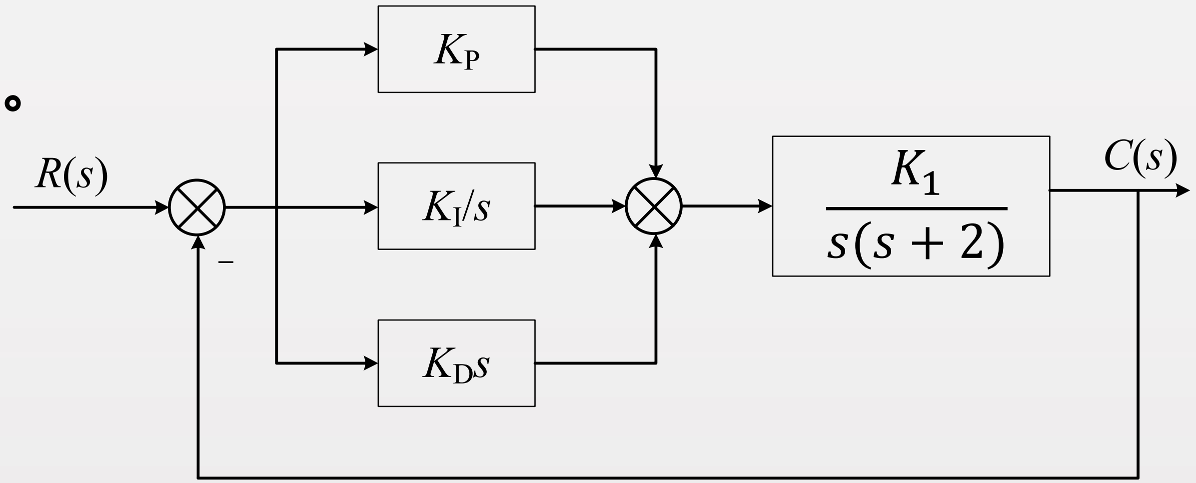
$$\begin{cases}M_p=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}=0.689\%\\ t_s=3/\zeta\omega_n=3/0.808=3.713\end{cases}$$





h(t)
t
0
1
2
3
4
0
2
4
6
8
10
$\frac{4}{s^2+1.617s+0.9127}$
$\frac{4\times 0.9127}{s^2+1.617s+0.9127}$
$\frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s^2+1.617s+0.9127)}$

例：PID控制系统结构图如图所示。

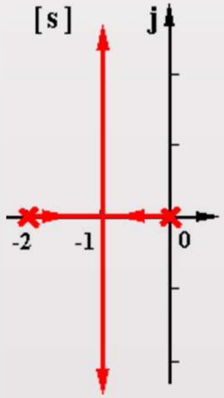


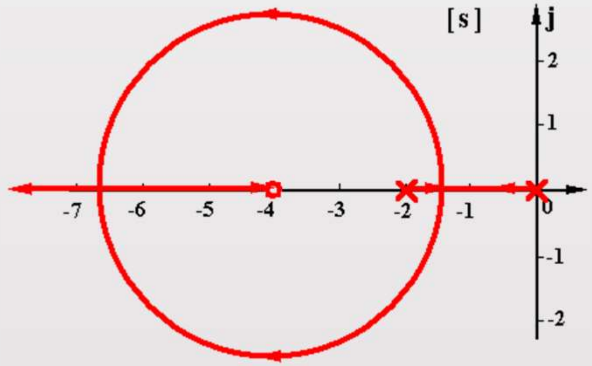
设$\begin{cases} K_P = 1 \\ K_I = 1.5 \\ K_D = 0.25 \end{cases}$，采用$\begin{cases} P \\ PD \\ PI \\ PID \end{cases}$控制，

$K_1 = 0 \rightarrow \infty$，分别绘根轨迹。

解. (1) P: $G_P(s) = \dfrac{K_1}{s(s+2)}$ $\quad \begin{cases} K = K_1/2 \\ v = 1 \end{cases}$

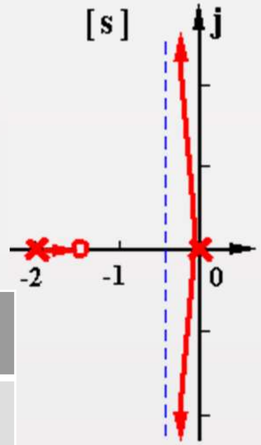
(2) PD: $G_{PD}(s) = \dfrac{K_1(0.25s+1)}{s(s+2)}$ $\quad \begin{cases} K = K_1/2 \\ v = 1 \end{cases}$

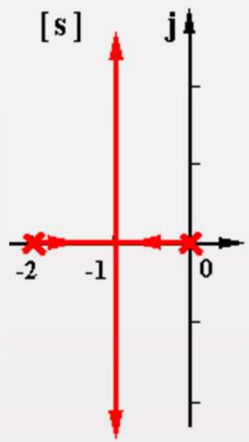




	稳态误差	动态性能指标
P	K与v不变，稳态精度不变	欠阻尼时t_s固定值
PD		可同时改善M_p与t_s（根轨迹左半圆），**动态性能指标改善**

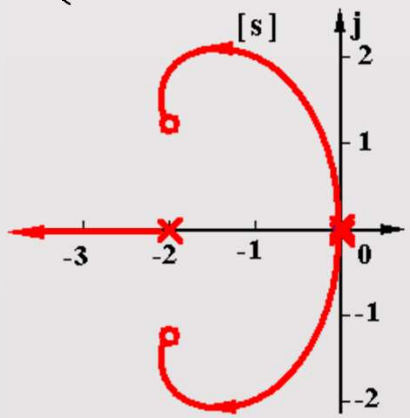
(3) PI: $G_{PI}(s)=\dfrac{K_1(1+1.5/s)}{s(s+2)}=\dfrac{K_1(s+1.5)}{s^2(s+2)}$ $\quad \begin{cases} K=3K_1/4 \\ v=2 \end{cases}$



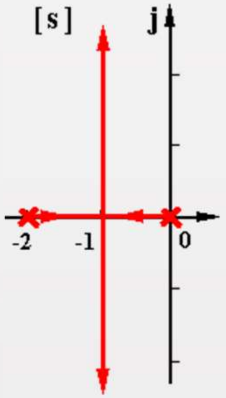


	稳态误差	动态性能指标
P	K,v增大，**稳态精度提高**	欠阻尼时t_s固定值
PI		M_p与t_s增大，**动态性能指标变差**

(4) PID: $G_{PID}(s)=\dfrac{K_1(1+0.25s+1.5/s)}{s(s+2)}=\dfrac{0.25K_1(s+2\pm j\sqrt{2})}{s^2(s+2)}$ $\quad \begin{cases} K=3K_1/4 \\ v=2 \end{cases}$

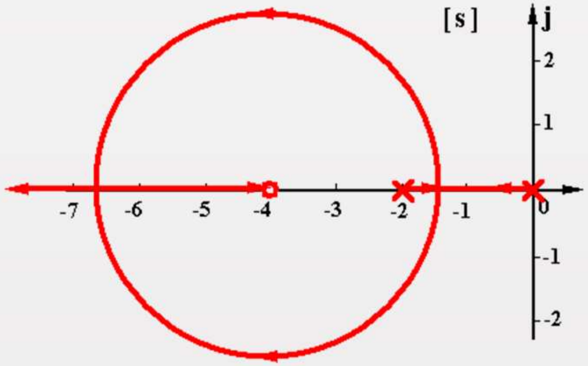


	稳态误差	动态性能指标
PI	K与v不变，稳态精度不变	可使M_p与t_s减小，**动态性能指标改善**
PID		



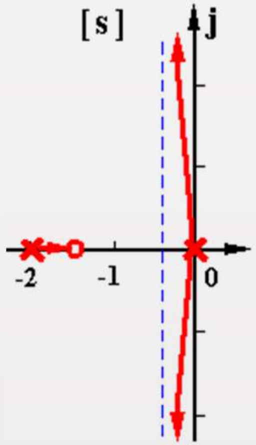
P控制

$$G_P(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$



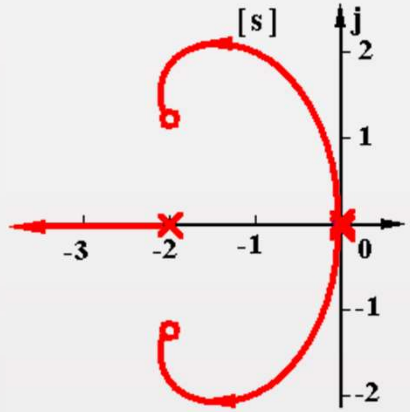
PD控制

$$G_{PD}(s) = \frac{K_1(0.25s+1)}{s(s+2)}$$



PI控制

$$G_{PI}(s) = \frac{K_1(s+1.5)}{s^2(s+2)}$$



PID控制

$$G_{PID}(s) = \frac{0.25K_1[s+2 \pm j\sqrt{2}]}{s^2(s+2)}$$