

自动控制原理

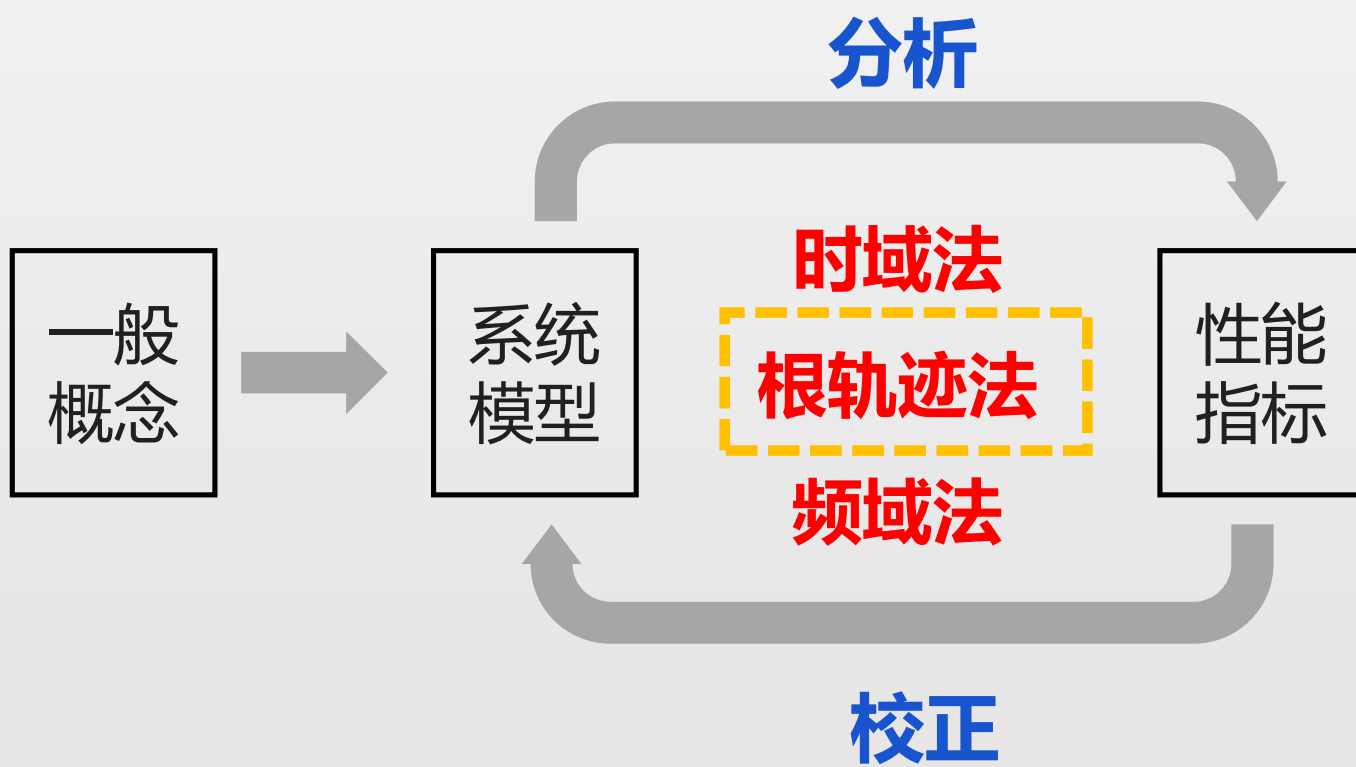
汪 晶

QQ:150302300

第四章 线性系统的根轨迹分析

本章知识点:

- 根轨迹的基本概念
- 根轨迹的绘制法则
- 参数根轨迹
- 利用根轨迹分析系统的性能

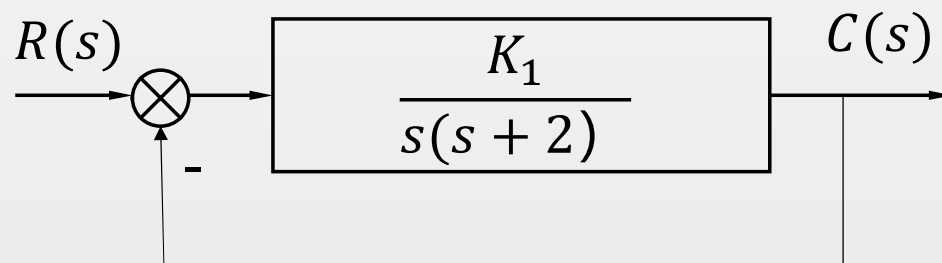


根轨迹：系统中的某一或某些参量由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，特征方程的根（闭环极点）在 s 平面上相应变化所描绘出来的轨迹。

根轨迹法：求解系统特征方程式的根的图解方法

- 直观、形象；
- 适合于研究当系统中某一参数变化时，系统性能的变化趋势；
- 近似方法，不十分精确。

第一节 根轨迹的基本概念



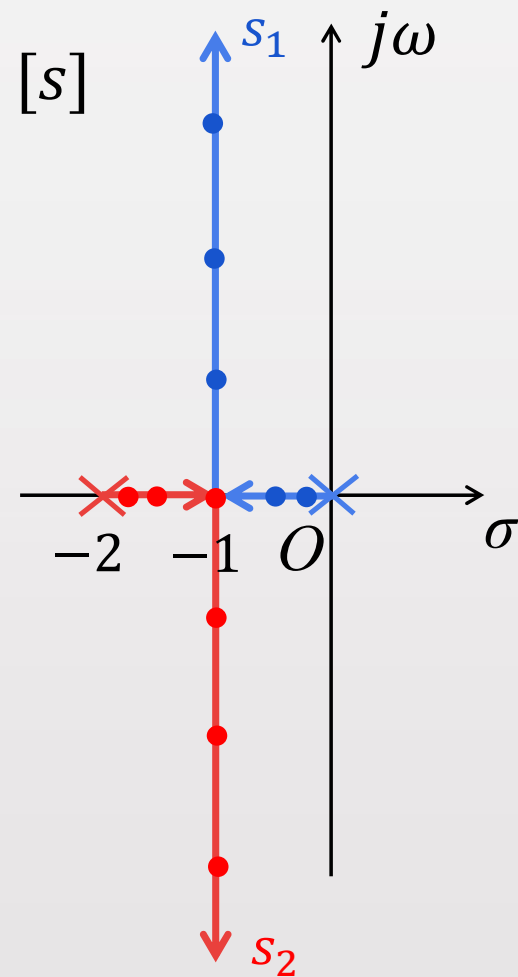
$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2s + K_1}$$

$$D(s) = s^2 + 2s + K_1 = 0$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K_1}$$

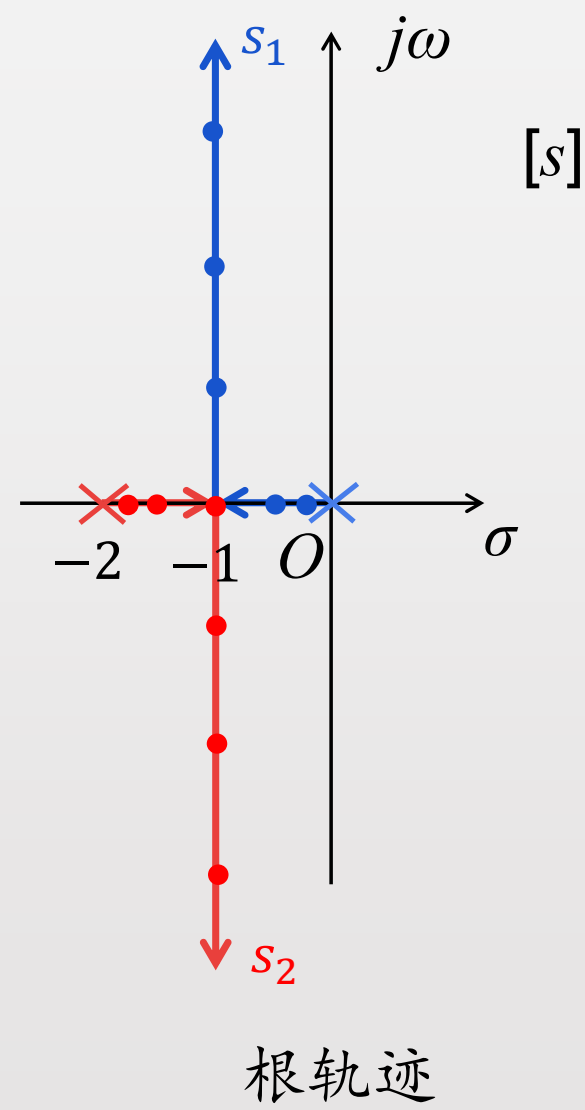
K_1	$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K_1}$
0	$s_1 = 0, s_2 = -2$ (开环极点)
0.36	$s_1 = -0.2, s_2 = -1.8$
0.64	$s_1 = -0.4, s_2 = -1.6$
1	$s_1 = s_2 = -1$
2	$s_{1,2} = -1 \pm j1$
5	$s_{1,2} = -1 \pm j2$
10	$s_{1,2} = -1 \pm j3$
\vdots	\vdots
∞	$s_{1,2} = -1 \pm j\infty$



根轨迹图

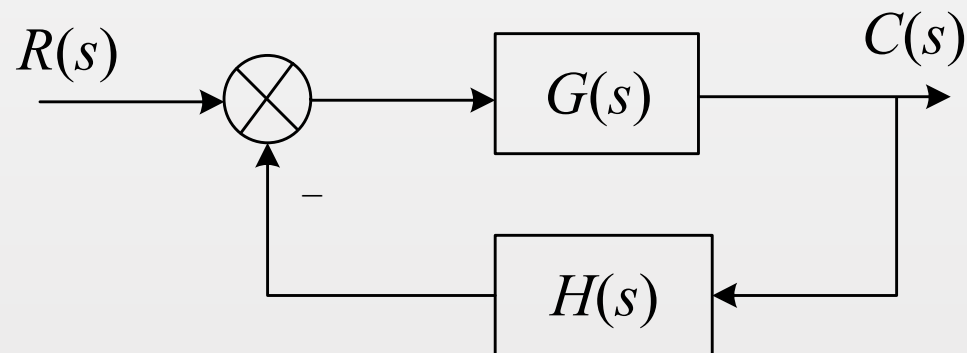
K_1	稳定性	稳态误差	暂态性能
$(0,1)$	稳定	(开环传递函数决定) 阶跃信号作用下一直为0; 斜坡信号作用下逐渐减小	过阻尼 t_s 减小 无超调
1			临界阻尼 $t_s = 3$ 无超调
$(1, \infty)$			欠阻尼 $t_s = 3$ M_p 增大

以系统开环增益为可变参量绘制的根轨迹称为**常规根轨迹**



第二节 绘制根轨迹的基本条件和基本规则

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

根轨迹方程

$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm (2q + 1)\pi \quad (q=0,1,2, \dots) \end{cases}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \frac{\prod_{j=1}^m |(s - z_j)|}{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|} = 1 \\ \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2q + 1)\pi \end{array} \right.$$

幅值条件

相位条件

例：判断 s_i 是否为根轨迹上的点

$$G(s) = \frac{K_1}{(s+1)(s+5)}$$

模值条件： $K_1 = |s+1| |s+5|$

相角条件： $-\angle(s+1) - \angle(s+5) = \pm(2q+1)\pi$

$$s_1 = -2 \text{ 时 } K_1 = |-2+1| |-2+5| = 3$$

$$-\angle(-2+1) - \angle(-2+5) = -\pi - 0 = -\pi$$

$$s_2 = -8 \text{ 时 } K_1 = |-8+1| |-8+5| = 21$$

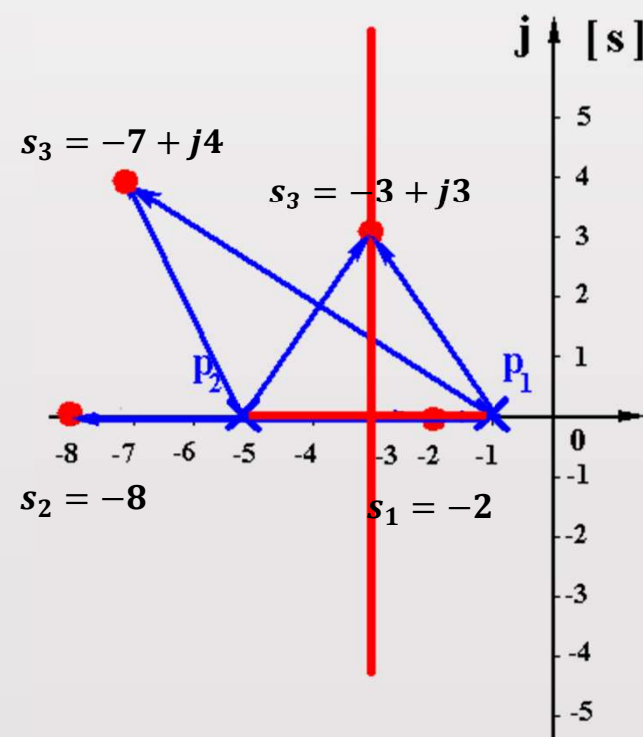
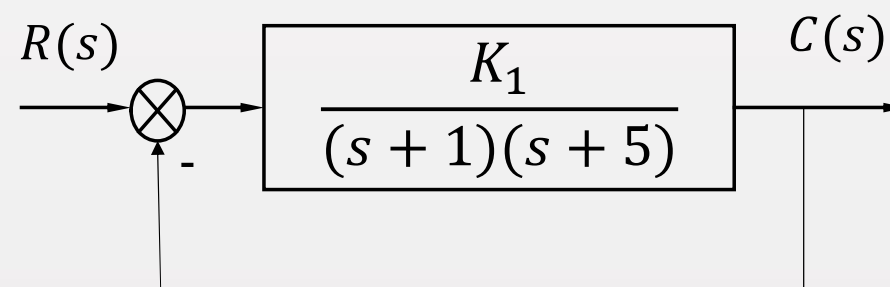
$$-\angle(-8+1) - \angle(-8+5) = -\pi - \pi = 0$$

$$s_3 = -7 + j4 \text{ 时 } K_1 = |-7+j4+1| |-7+j4+5| = 32.25$$

$$-\angle(-7+j4+1) - \angle(-7+j4+5) \neq \pm(2q+1)\pi$$

$$s_4 = -3 + j3 \text{ 时 } K_1 = |-3+j3+1| |-3+j3+5| = 13$$

$$-\angle(-3+j3+1) - \angle(-3+j3+5) = \pi$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} K_1 = \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{j=1}^m |(s - z_j)|} & \text{幅值条件} \\ \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2q + 1)\pi & \text{相位条件} \end{array} \right.$$

满足相位条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件

用幅值条件确定根轨迹上某点对应的 K_1 值

绘制根轨迹的基本规则

规则一（对称性）：

系统根轨迹的各条分支是连续的，而且对称与实轴。

系统特征方程为代数方程，当系数连续变化时，代数方程的根也连续变化。

特征方程的根或为实数，或为共轭复数，因此必对称于实轴。

规则二（起点和终点）：

- 根轨迹的分支数=开环极点数 n
- 根轨迹 n 条分支起始于开环极点，有 m 条终止与开环零点，另外有 $n - m$ 条趋向无穷远处

$$K_1 = \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{j=1}^m |(s - z_j)|} = \frac{s^{n-m} \prod_{i=1}^n \left|1 - \frac{p_i}{s}\right|}{\prod_{j=1}^m \left|1 - \frac{z_j}{s}\right|}$$

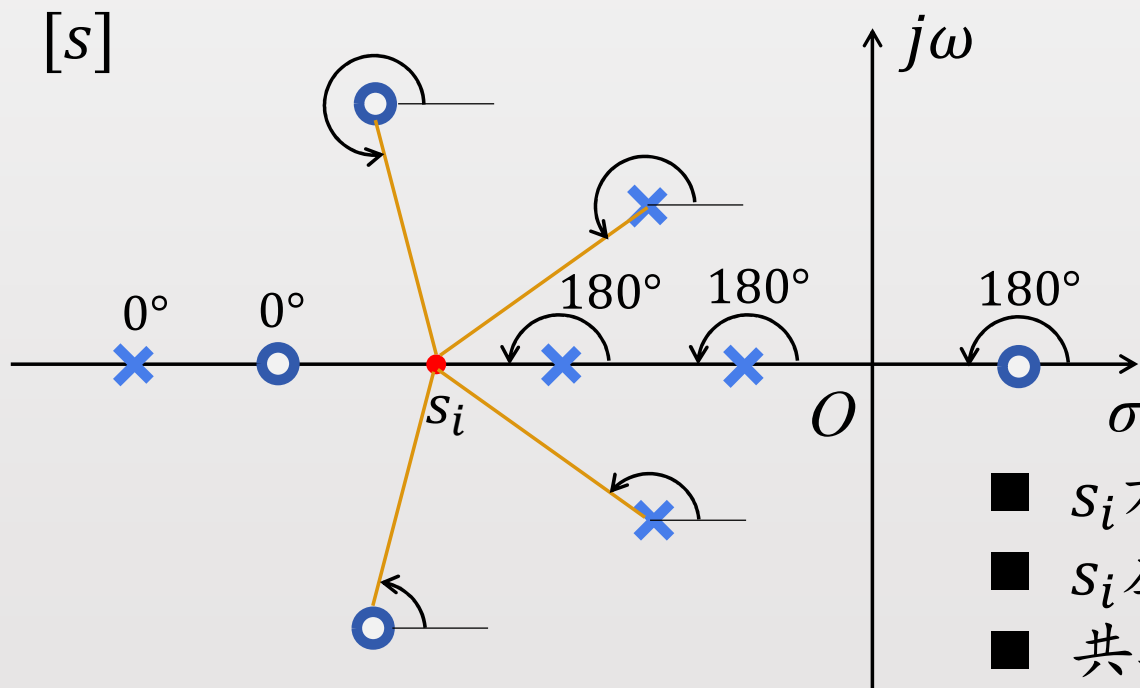
$$K_1 = 0 \text{ 时} \quad s = p_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$K_1 = \infty \text{ 时} \quad s = z_j (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$s = \infty$$

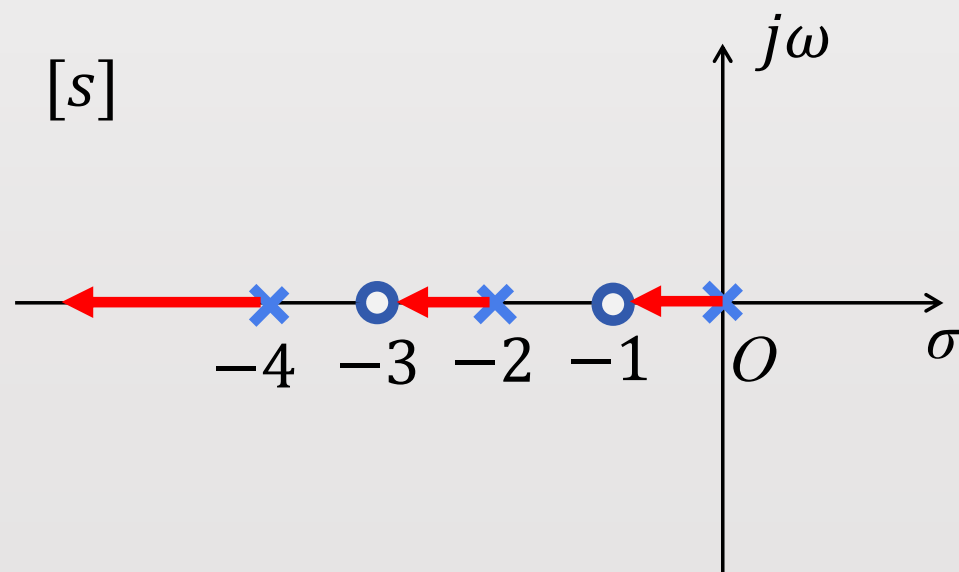
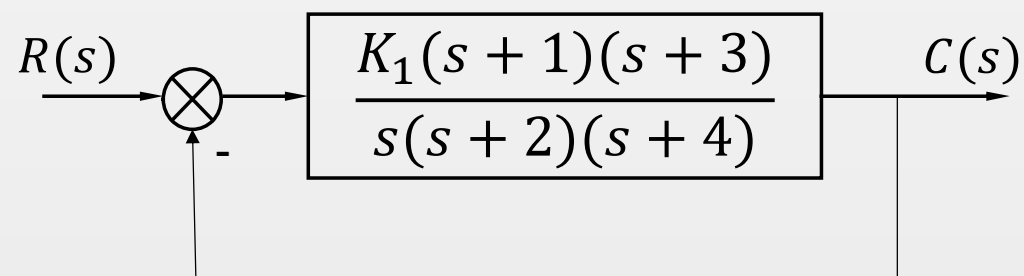
规则三（实轴上的根轨迹）：

在 s 平面实轴的线段上存在根轨迹的条件是，其右边开环零点和开环极点数目之和为奇数。



- s_i 右边实轴上零极点与 s_i 相位为 π
- s_i 左边实轴上零极点与 s_i 相位为 0
- 共轭零点（极点）与 s_i 相位之和为 2π
- ➡ s_i 右边实轴上零极点数为奇数即满足相角条件

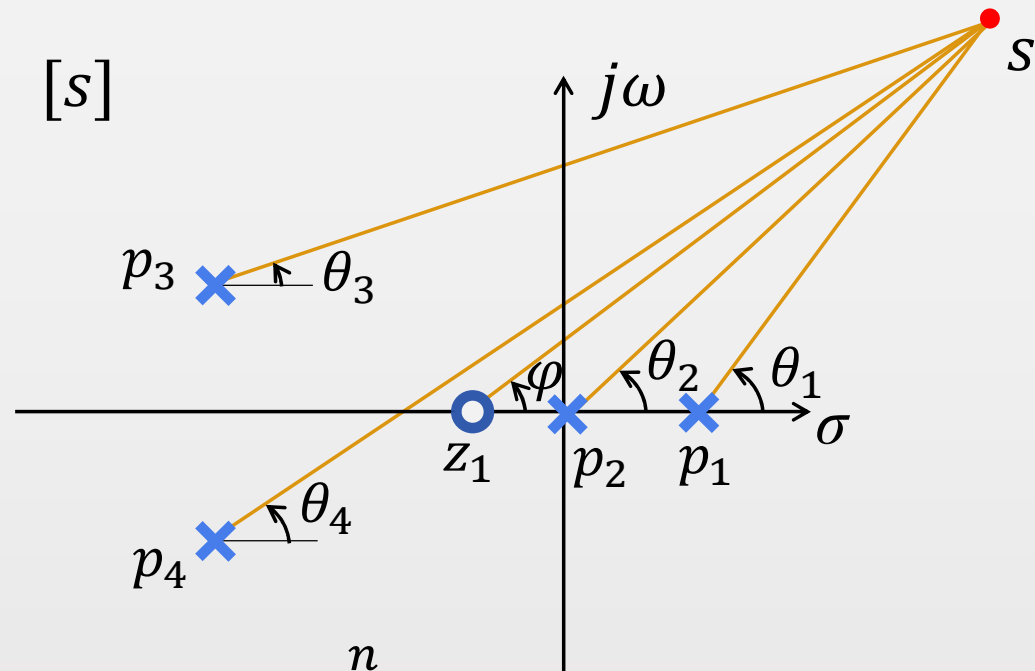
例：设控制系统的框图如图所示。要求绘制系统在实轴上的根轨迹。



规则四（渐近线的相位）：

根轨迹中 $n - m$ 条趋向无穷远处的分支的渐近线的相位角为

$$\varphi_a = \pm \frac{(2q + 1)\pi}{n - m} \quad (q=0,1,2,\dots)$$



$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2q + 1)\pi$$

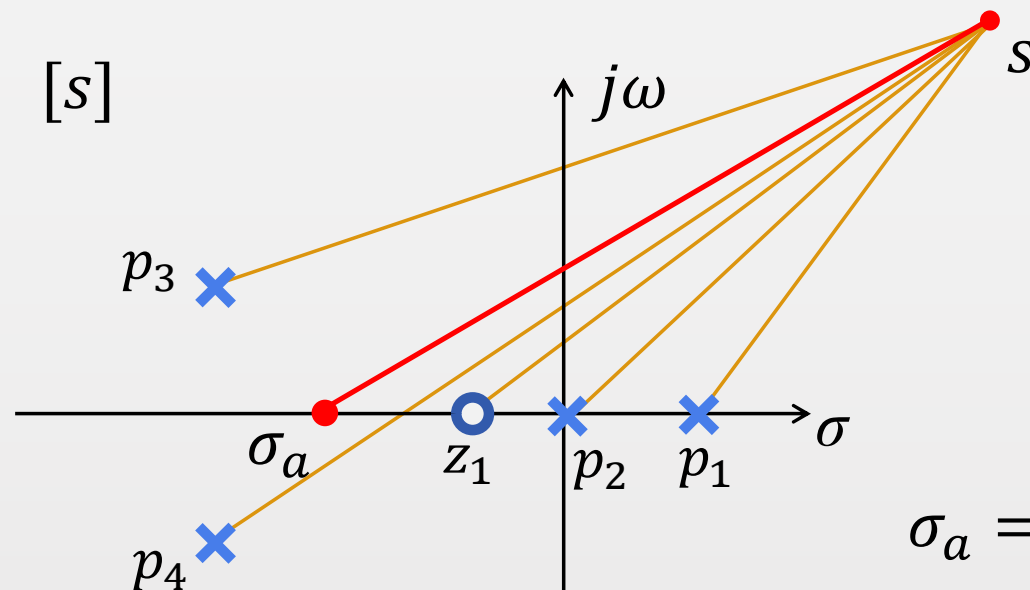
$$m\varphi_a - n\varphi_a = \pm(2q + 1)\pi$$

$$\varphi_a = \pm \frac{(2q + 1)\pi}{n - m}$$

规则五（渐近线的交点）：

伸向无穷远处根轨迹的渐近线与实轴交于一点，其坐标为 $(\sigma_a, j0)$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$



$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{j=1}^m |(s - z_j)|} = \frac{s^n + (\sum_{i=1}^n -p_i)s^{n-1} + \dots}{s^m + (\sum_{j=1}^m -z_j)s^{m-1} + \dots} \\
 &\quad \text{(长除法)} = s^{n-m} + \left[\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{j=1}^m (-z_j) \right] s^{n-m-1} + \dots \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^n |(s - \sigma_a)|}{\prod_{j=1}^m |(s - \sigma_a)|} = (s - \sigma_a)^{n-m} = \underline{s^{n-m} + (n-m)(-\sigma_a)s^{n-m-1} + \dots}
 \end{aligned}$$

例：绘制开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$ 的单位反馈系统的根轨迹

解：①在 s 平面中确定开环零、极点的位置。

② $n=3, m=0$, 应有三个分支，从开环极点出发，都趋向无穷远处。

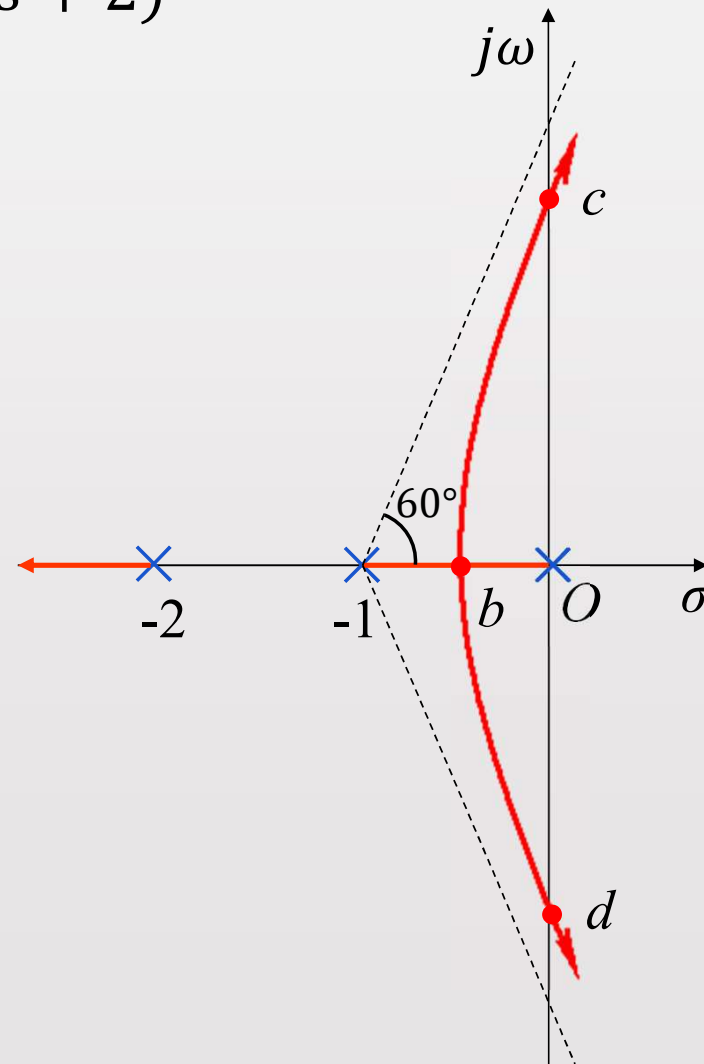
③确定实轴上的根轨迹。

④确定渐近线的位置。

$$\varphi_a = \pm \frac{(2q+1)180^\circ}{n-m} = \pm \frac{(2q+1)\pi}{3}$$

$$q=0, \varphi_a = \pm 60^\circ \quad q=1, \varphi_a = \pm 180^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$



规则六（分离点）：

复平面上根轨迹的分离点必须满足方程 $\frac{dK_1}{ds} = 0$

$$D(s) = 1 + \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

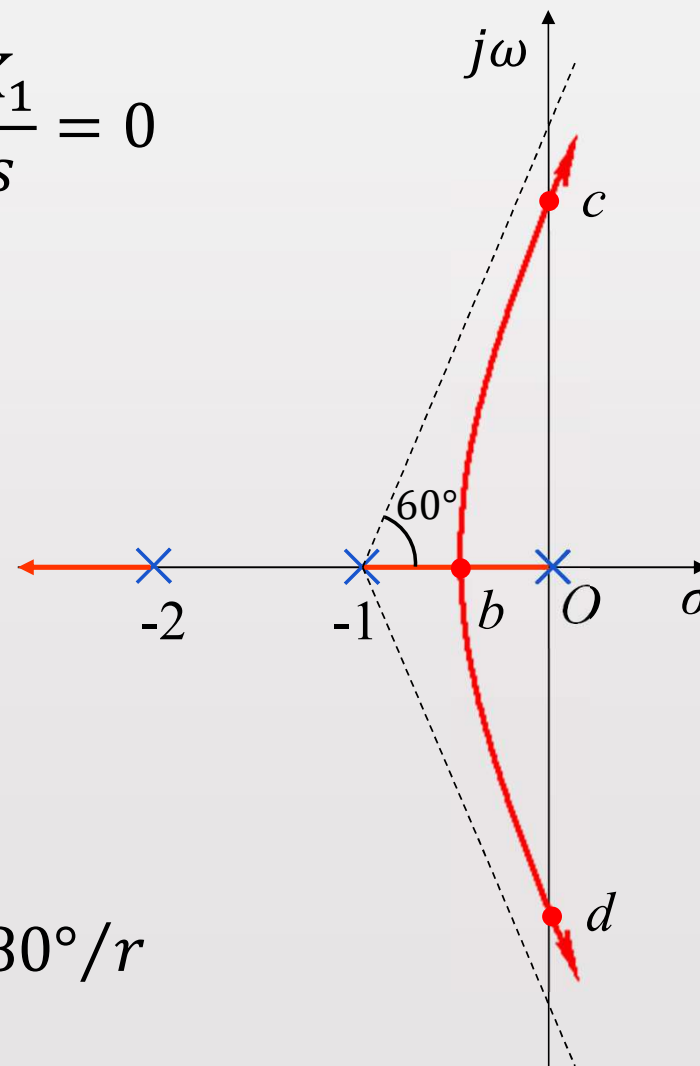
$$K_1 = -s(s+1)(s+2)$$

$$\frac{dK_1}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

$$s_1 = -0.423 \quad \checkmark$$

~~$$s_2 = -1.577$$~~

在分离点处根轨迹离开实轴的相角应为 $\pm 180^\circ/r$
(r 为趋向或离开实轴的根轨迹分支数)



规则六方法②（重根法）：
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j}$$

证明：
$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

设分离点为 d ，为一重根，则必同时满足 $D(s) = 0$, $D'(s) = 0$

$$K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j) = - \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad \frac{d}{ds} [K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j)] = \frac{d}{ds} [- \prod_{i=1}^n (s - p_i)]$$

两式相除得：
$$\frac{\frac{d}{ds} [\prod_{j=1}^m (s - z_j)]}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} = \frac{\frac{d}{ds} [\prod_{i=1}^n (s - p_i)]}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$\frac{\frac{d}{ds} [\prod_{j=1}^m (s - z_j)]}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} = \frac{\frac{d}{ds} [\prod_{i=1}^n (s - p_i)]}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$\frac{d[\ln \prod_{j=1}^m (s - z_j)]}{ds} = \frac{d[\ln \prod_{i=1}^n (s - p_i)]}{ds}$$

$$\frac{d[\sum_{j=1}^m \ln(s - z_j)]}{ds} = \frac{d[\sum_{i=1}^n \ln(s - p_i)]}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{d \ln(s - z_j)}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{d \ln(s - p_i)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j}$$

规则七（与虚轴的交点）：

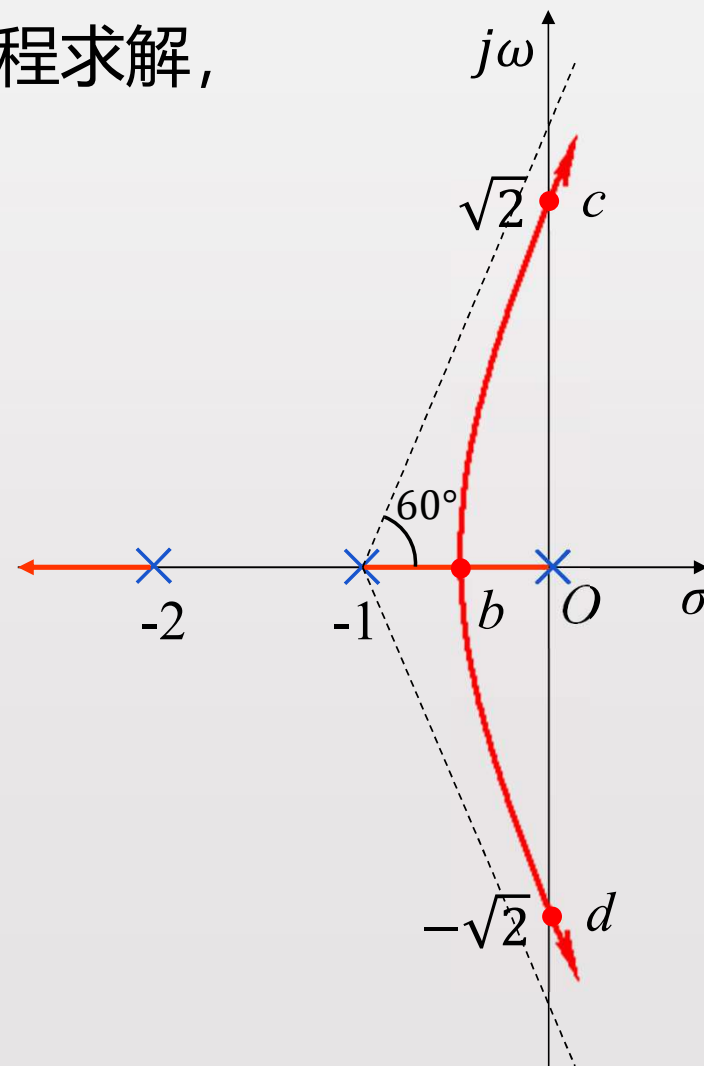
根轨迹与虚轴的交点可用 $s = j\omega$ 代入特征方程求解，或者利用劳斯判据确定。

$$D(s) = 1 + \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 2) + K_1 = 0$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K_1 = 0$$

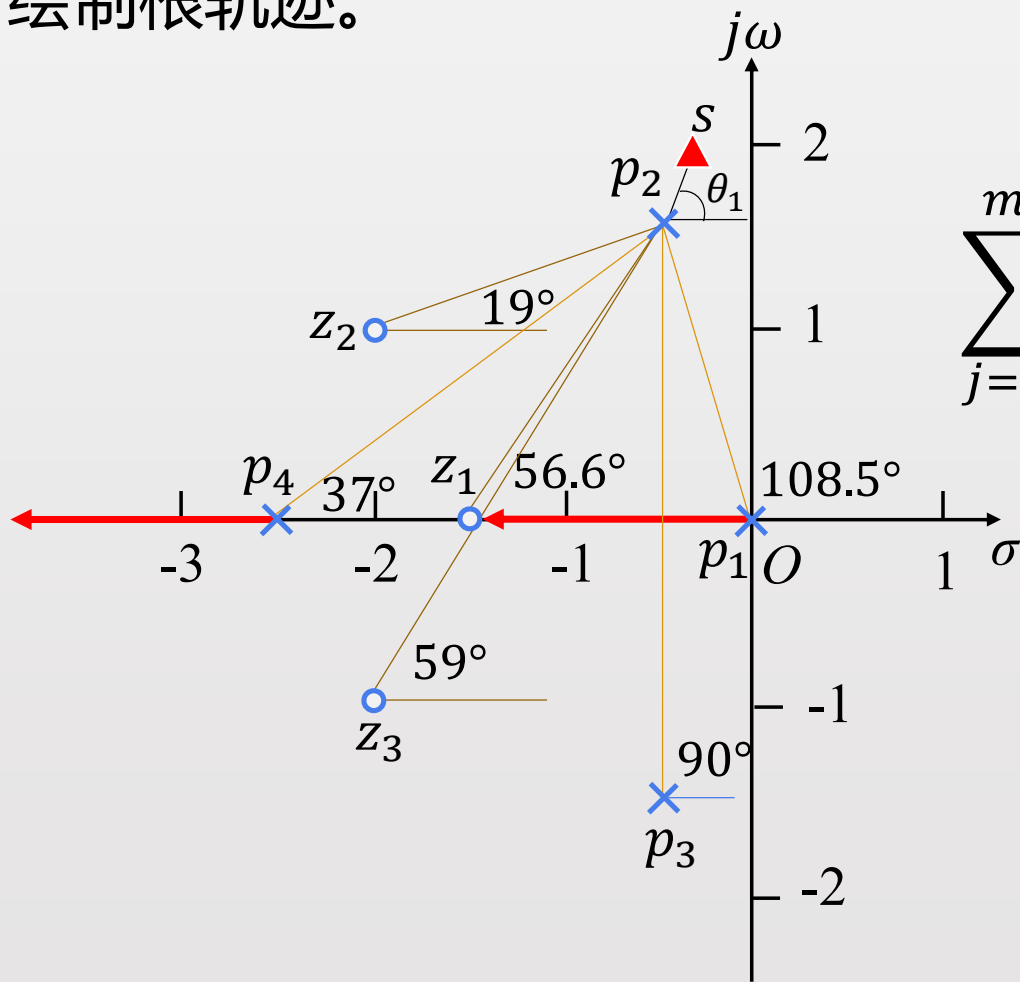
$$\begin{cases} K_1 - 3\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \quad \omega = 0, \pm\sqrt{2}, \quad K_1 = 6$$



规则八（**出射角和入射角**）：

- 根轨迹离开开环极点处的切线与正实轴的夹角称为出射角；
- 根轨迹进入开环零点处的切线与正实轴的夹角称为入射角。
- 出射角和入射角可直接利用相角条件求出。

例：单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1(s + 1.5)(s + 2 \pm j)}{s(s + 2.5)(s + 0.5 \pm j1.5)}$
绘制根轨迹。

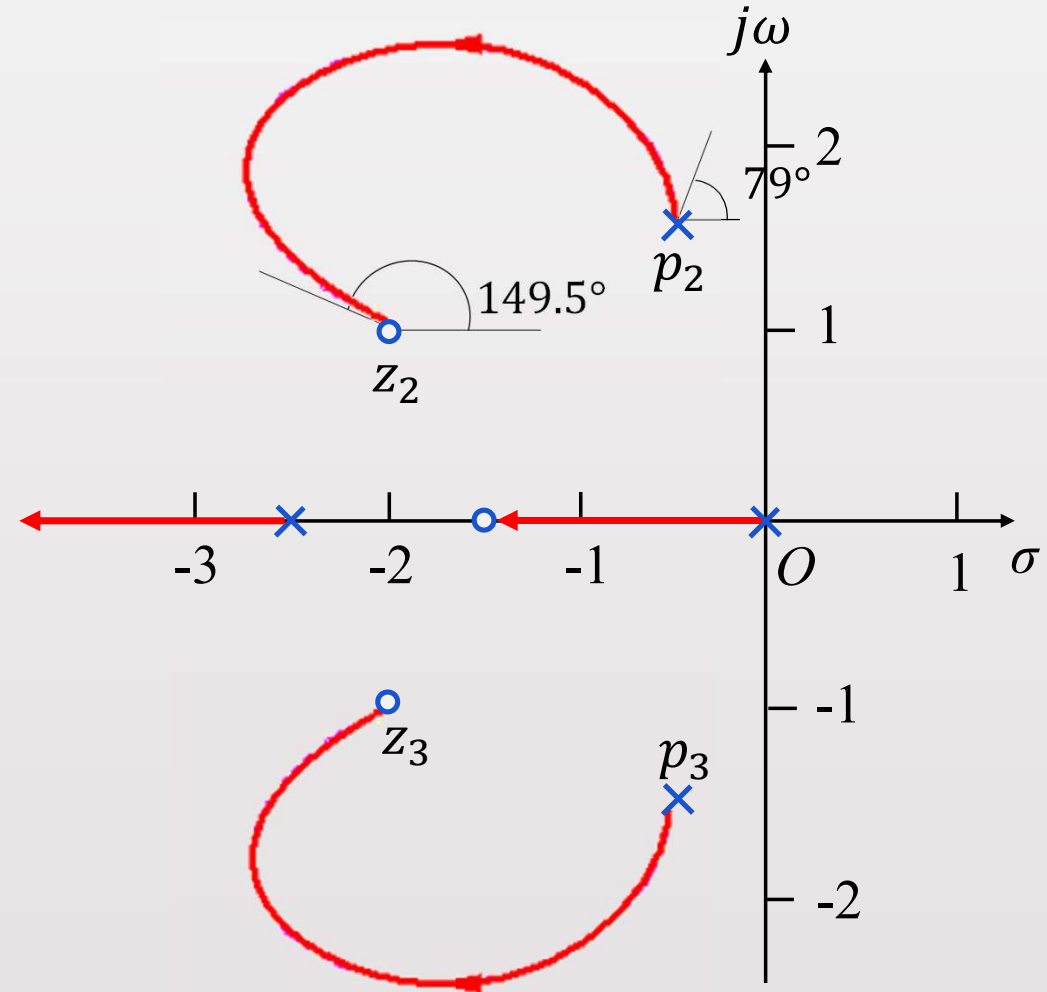
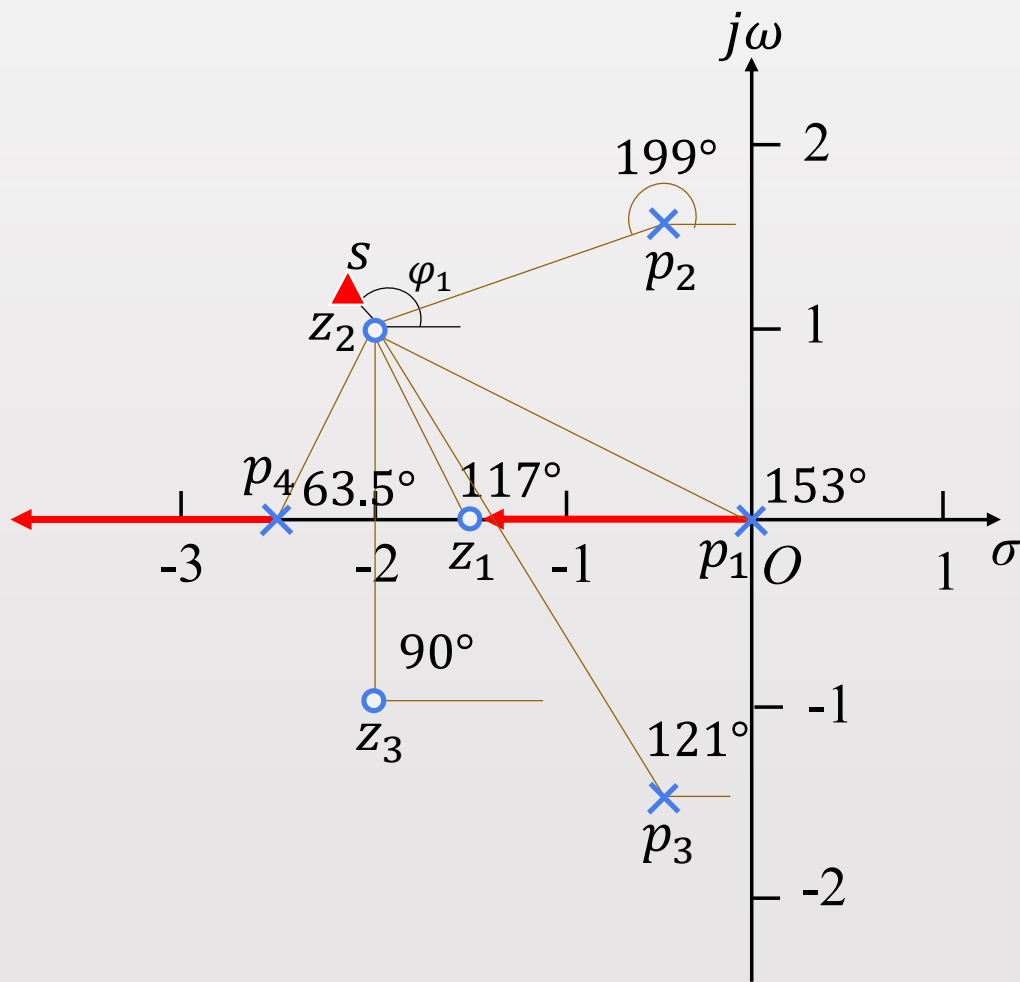


$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2q + 1)\pi$$

$$56.6^\circ + 19^\circ + 59^\circ - [\theta_1 + 108.5^\circ + 90^\circ + 37^\circ] = -180^\circ$$

$$\theta_1 = 79^\circ$$

$$[\varphi_1 + 117^\circ + 90^\circ] - [199^\circ + 153^\circ + 121^\circ + 63.5] = -180^\circ \quad \varphi_1 = 149.5^\circ$$



序号	内容	规则
1	对称性	连续并对称于实轴
2	起点和终点	n 条分支起始于开环极点, 其中 m 条终止与开环零点, 另外有 $n - m$ 条趋向无穷远处
3	实轴上线段	其右边开环零点和开环极点数目之和为奇数
4	渐近线相位	$n - m$ 条, $\varphi_a = \pm \frac{(2q + 1)\pi}{n - m}, (q = 0, 1, 2 \cdots)$
5	渐近线交点	$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$
6	分离点	$\frac{dK_1}{ds} = 0$
7	与虚轴的交点	$s = j\omega$ 代入特征方程求解
8	出射角和入射角	直接利用相位条件求出

规则九（根之和）：

$n - m \geq 2$ 时，闭环根之和等于开环极点之和。
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

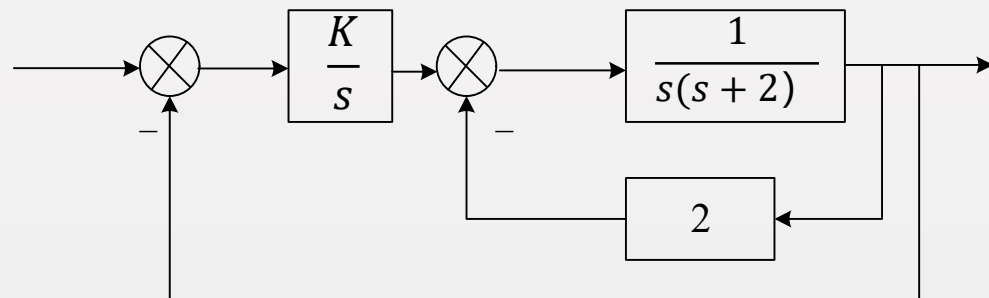
证明：
$$G(s)H(s) = \frac{K_1(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{K_1(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

由代数定理：
$$-a_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i = -a_{n-1} = C$$

$$\begin{array}{rcl} D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} & + a_{n-2}s^{n-2} & + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots + a_0 \\ & + K_1s^{n-2} & + K_1b_{n-3}s^{n-3} + \cdots + K_1b_0 \\ \hline & = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + (a_{n-2} + K_1)s^{n-2} + (a_{n-3} + K_1b_{n-3})s^{n-3} + \cdots + (a_0 + K_1b_0) \end{array}$$

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = 0$$

例：已知系统结构图，绘制根轨迹。



解：
$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{2}{s(s+2)}} = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

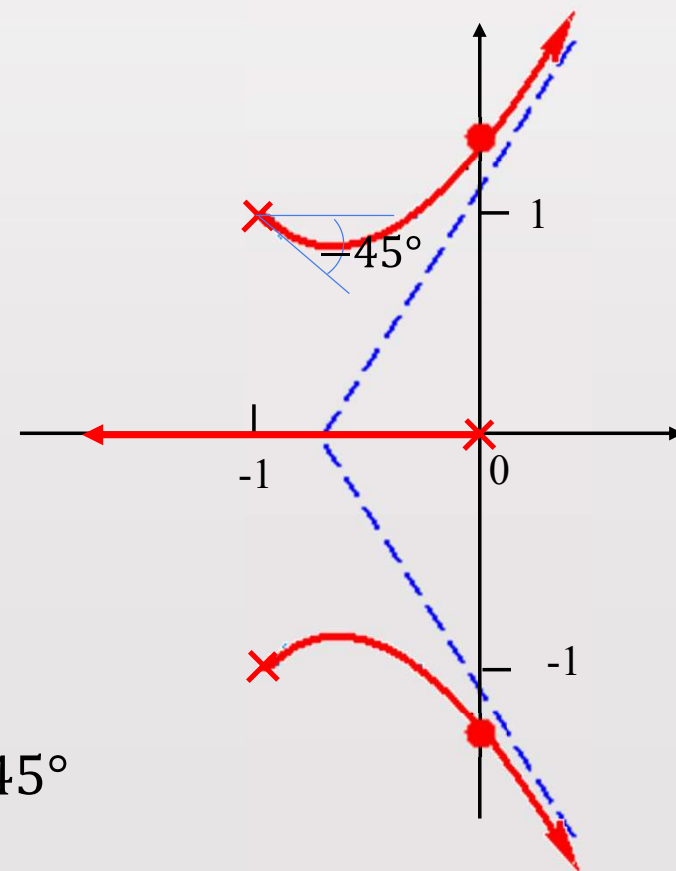
① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, 0]$

② 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{0 - 1 - 1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$$

③ 与虚轴交点： $D(s) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$

$\text{Im}[D] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \quad \omega = \pm\sqrt{2}$

④ 出射角： $0 - [\theta_1 + 90^\circ + 135^\circ] = -180^\circ \Rightarrow \theta_1 = -45^\circ$



例：单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$ ，绘制根轨迹

解： $G(s) = \frac{K_1}{s(s+20)(s+2 \pm j4)}$ $K = \frac{K_1}{400}$

① 实轴上的根轨迹： $[-20, 0]$

② 渐近线： $\sigma_a = \frac{0 - 20 - 2 - 2}{4} = -6$

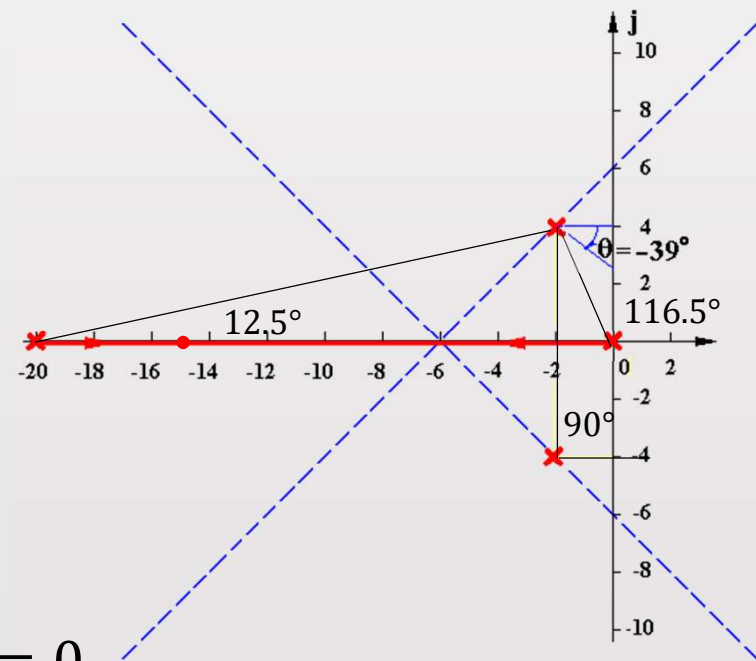
$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

③ 出射角： $-\left[\theta_1 + 90^\circ + 116.5^\circ + 12.5^\circ\right] = -180^\circ$

$$\Rightarrow \theta_1 = -39^\circ$$

④ 分离点： $D(s) = s^4 + 24s^3 + 100s^2 + 400s + K_1 = 0$

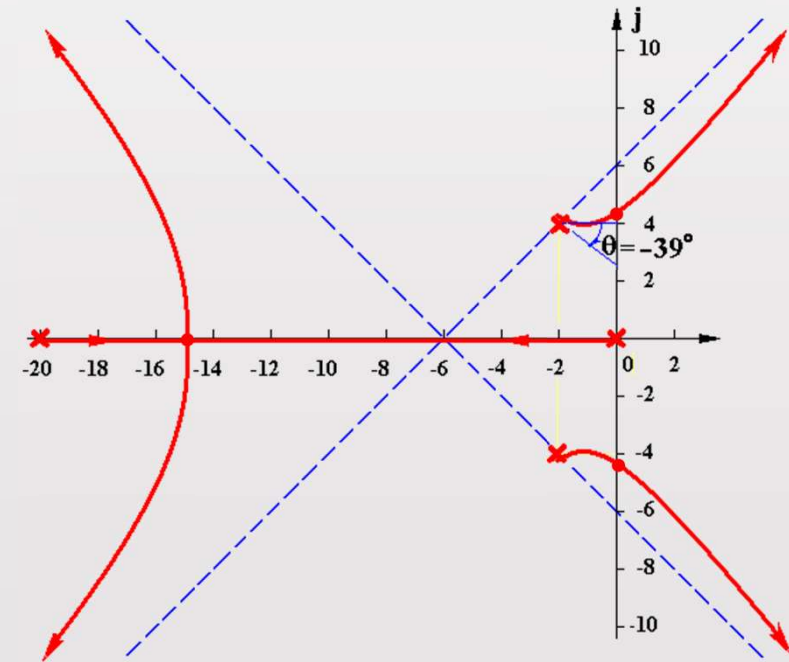
$$\frac{dK_1}{ds} = \frac{-d(s^4 + 24s^3 + 100s^2 + 400s)}{ds} \quad s^3 + 18s^2 + 50s + 100 = 0 \quad s = -15.1$$



④ 虚轴交点: $D(s) = s^4 + 24s^3 + 100s^2 + 400s + K_1 = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{Im}[D(j\omega)] = -24\omega^3 + 400\omega = 0 \\ \operatorname{Re}[D(j\omega)] = \omega^4 - 100\omega^2 + K_1 = 0 \end{cases}$$

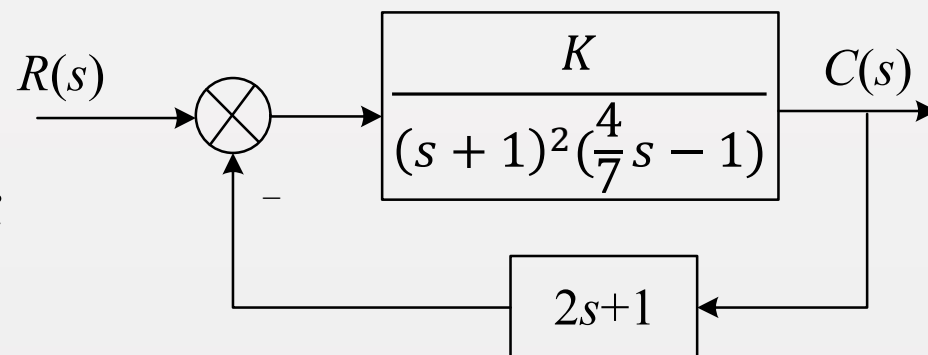
$$\omega = \sqrt{400/24} = 4.1 \quad K_1 = 1389$$



例：系统结构图如图所示

(1) 绘制当 $K_1 = 0 \rightarrow \infty$ 时系统的根轨迹；

(2) 分析系统稳定性随 K 变化的规律。



解： $G(s) = \frac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)} = \frac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})} \quad K_1 = 3.5K$

① 实轴上的根轨迹： $[-0.5, 1.75]$

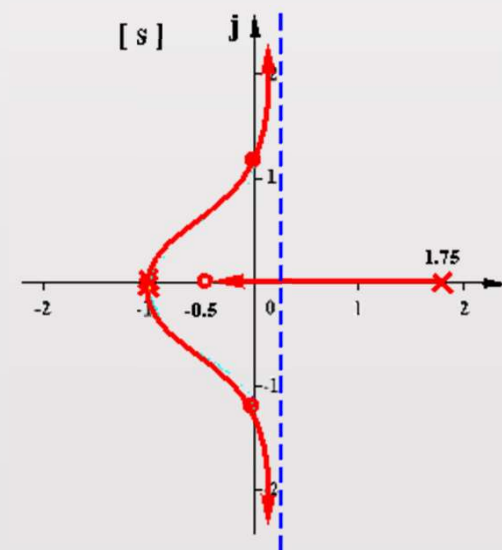
② 渐近线： $\sigma_a = \frac{-2 + 7/4 + 1/2}{3-1} = \frac{1}{8} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ$

③ 出射角： $180^\circ - [2\theta + 180^\circ] = -180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$

④ 与虚轴交点： $D(s) = 4s^3 + s^2 + (14K - 10)s + 7(K - 1) = 0$

$$\text{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + 7(K - 1) = 0 \quad \omega = 0 \quad K = 1$$

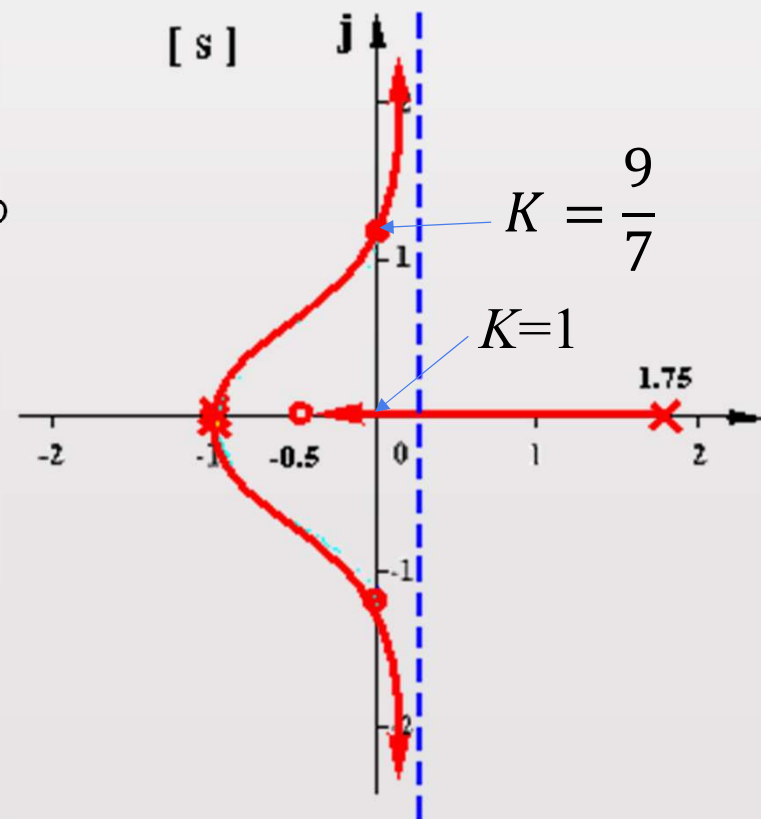
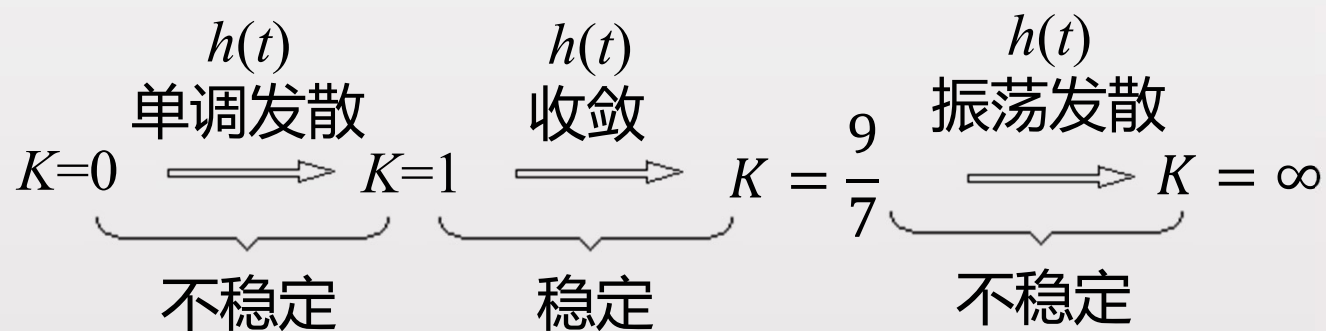
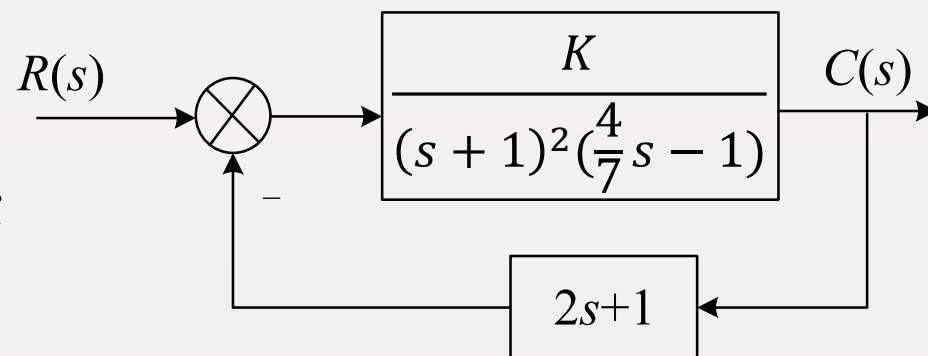
$$\text{Im}[D(j\omega)] = -4\omega^3 + (14\omega - 10)\omega = 0 \quad \omega = \sqrt{2} \quad K = 9/7$$



例：系统结构图如图所示

(1) 绘制当 $K_1 = 0 \rightarrow \infty$ 时系统的根轨迹；

(2) 分析系统稳定性随 K 变化的规律。



例：某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1(s+2)}{s(s+1)}$ ，证明复平面的根轨迹为圆弧。

解： $G(s) = \frac{K_1(s+2)}{s(s+1)} \quad \begin{cases} K = 2K_1 \\ v = 1 \end{cases}$

$$D(s) = s(s+1) + K_1(s+2) = s^2 + (1+K_1)s + 2K_1$$

$$s_{1,2} = \frac{-(1+K_1) \pm \sqrt{(1+K_1)^2 - 8K_1}}{2}$$

$$= \frac{-(1+K_1)}{2} \pm j \frac{\sqrt{8K_1 - (1+K_1)^2}}{2} = \sigma \pm j\omega$$

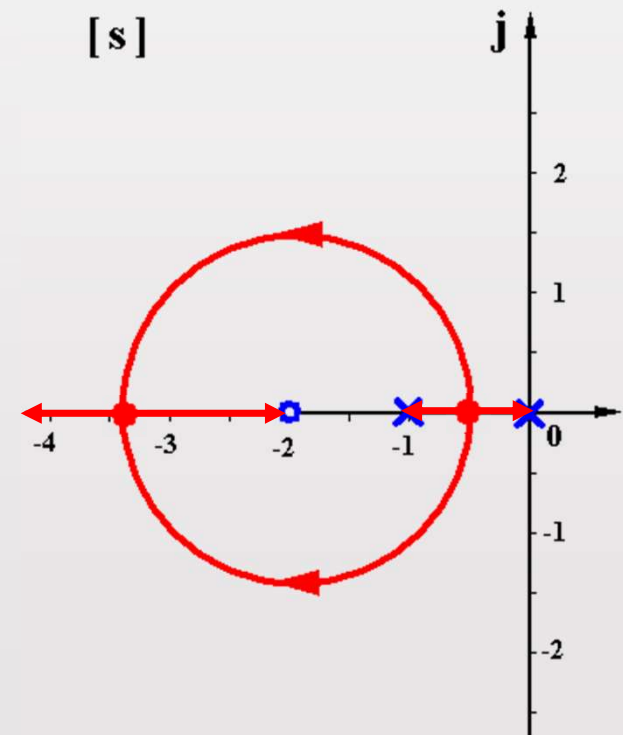
$$\sigma = \frac{-(1+K_1)}{2} \Rightarrow K_1 = -2\sigma - 1$$

$$\omega^2 = \frac{8K_1 - (1+K_1)^2}{4} = \frac{-8(2\sigma+1) - 4\sigma^2}{4} = -\sigma^2 - 4\sigma - 2$$

$$\sigma^2 + 4\sigma + 4 + \omega^2 = 2 \quad (\sigma + 2)^2 + \omega^2 = \sqrt{2}^2$$

虚部为0, $\Delta = (1+K_1)^2 - 8K_1 = K_1^2 - 6K_1 + 1 = 0$

$$\begin{cases} K_{d_1} = 0.1716 \\ K_{d_2} = 5.828 \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = -0.5858 \\ d_2 = -3.4142 \end{cases}$$



性能分析:

$K_1 = 0 \Rightarrow K_{d1} \Rightarrow K_{d2} \Rightarrow \infty$

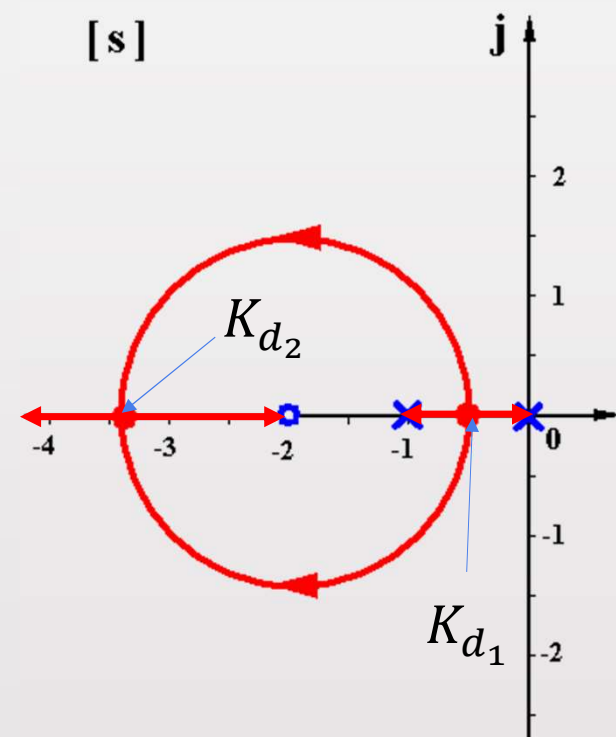
暂态性能:

$h(t)$ 单调	$h(t)$ 振荡	$h(t)$ 单调
$t_s \downarrow$	$t_s \downarrow$	$t_s \downarrow$
$M_p = 0$	$M_p \sim$	$M_p = 0$

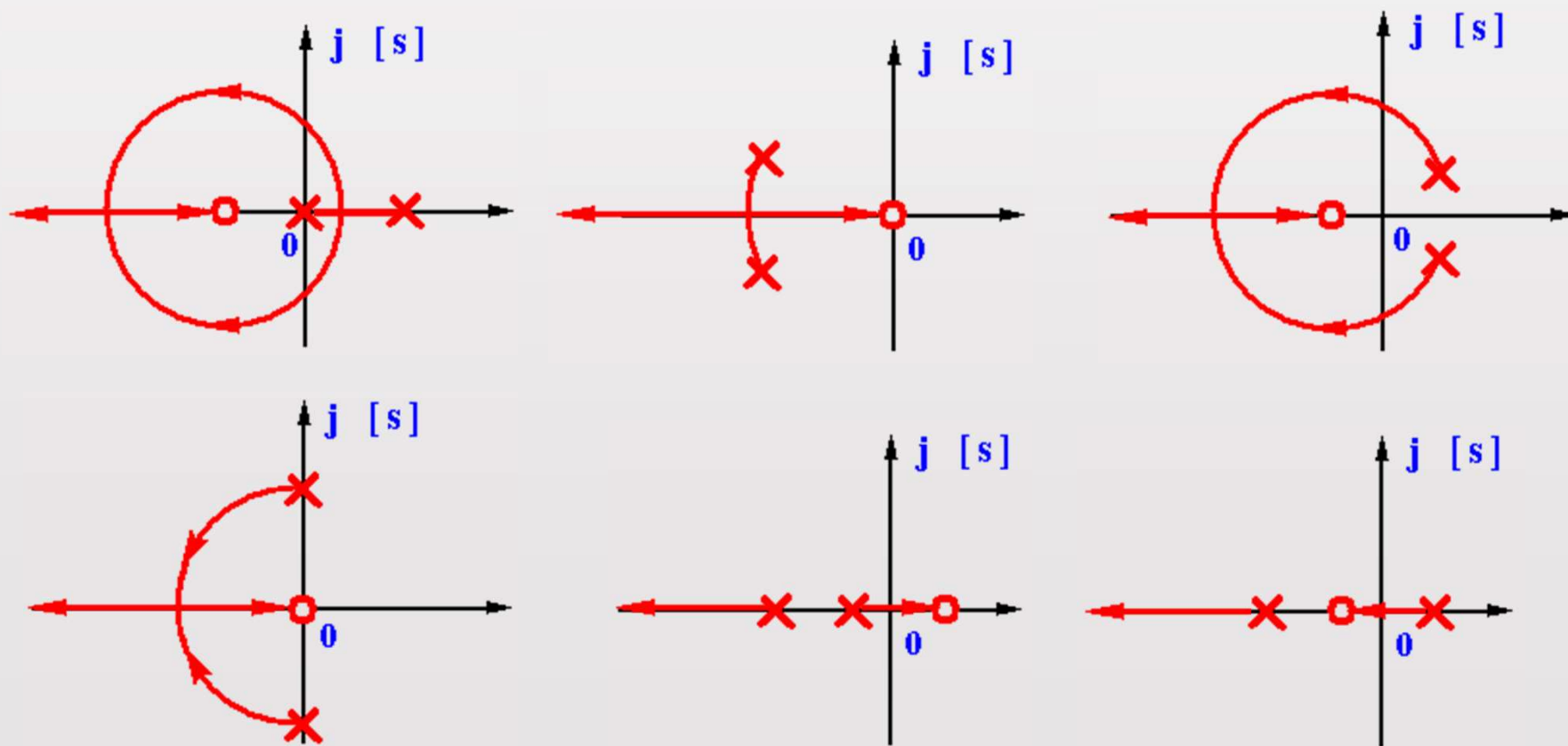
稳定性:

绝对稳定

稳态性能: $r(t) = t$ 时, $e_{sr} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2K_1}$, $K_1 \uparrow \Rightarrow e_{sr} \downarrow$



定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



第三节 广义根轨迹

参数根轨迹：除根轨迹增益 K_1 以外的其他参量（如开环零点、开环极点、时间常数、反馈比例系数等）从零变化到无穷大时绘制的根轨迹。

例：系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1(s + \alpha)}{s(s^2 + 2s + 2)}$ ，绘制以 α 为参变量的参数根轨迹，并讨论 α 值对系统稳定性的影响

$$D(s) = 1 + \frac{K_1(s + \alpha)}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + (2 + K_1)s + K_1\alpha = 0$$

$$G^*(s) = \frac{K_1\alpha}{s^3 + 2s^2 + (2 + K_1)s}$$

等效开环传递函数

$$\xrightarrow{K_1=1} \frac{\alpha}{s(s^2 + 2s + 3)}$$

$$G^*(s) = \frac{\alpha}{s(s^2 + 2s + 3)}$$

$$\varphi_a = \pm \frac{(2q + 1)\pi}{3}$$

$$= \pm 60^\circ, 180^\circ, \quad q = 0, 1$$

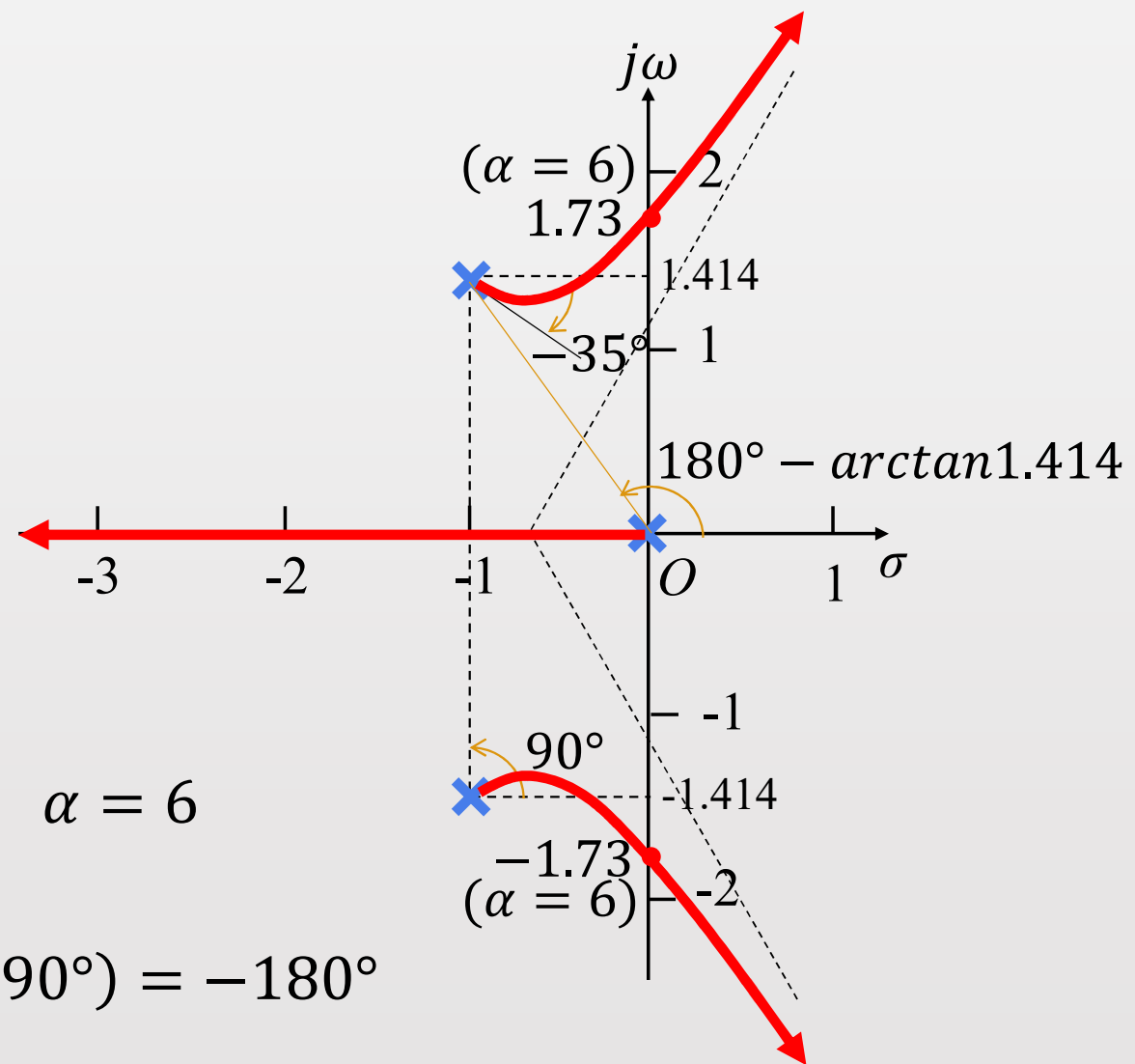
$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 1}{3} = -0.667$$

$$(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + \alpha = 0$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\omega^2 = 0 \\ 3\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \quad \omega = 0, \pm 1.73, \quad \alpha = 6$$

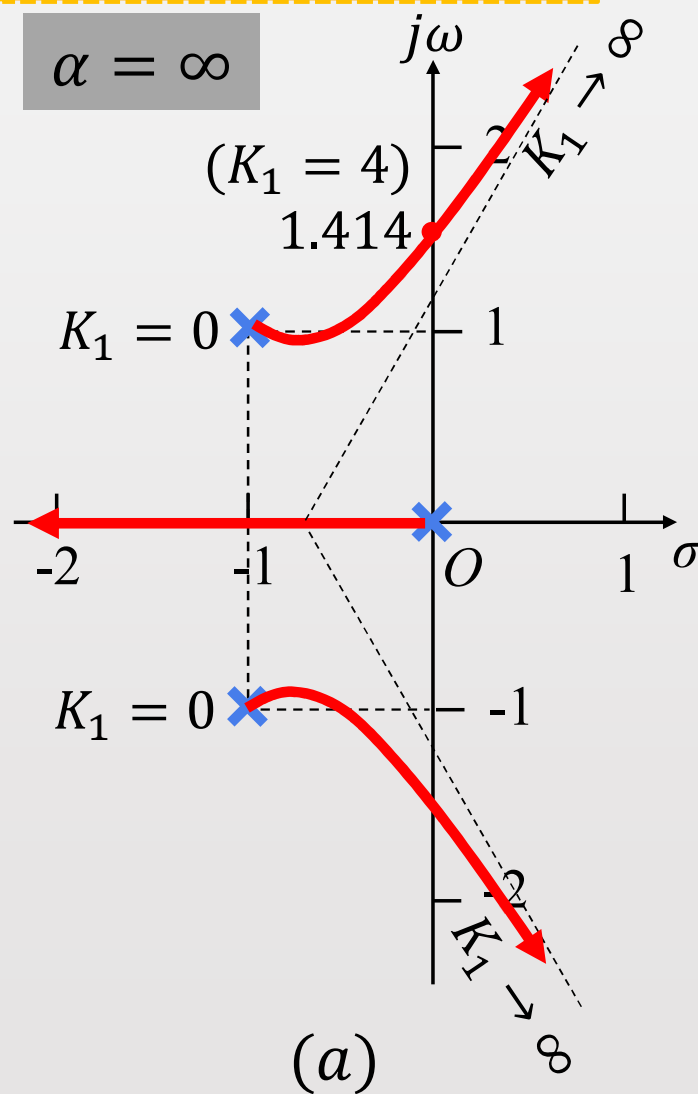
$$0 - (\varphi + 180^\circ - \arctan 1.414 + 90^\circ) = -180^\circ$$

$$\varphi = -35^\circ$$

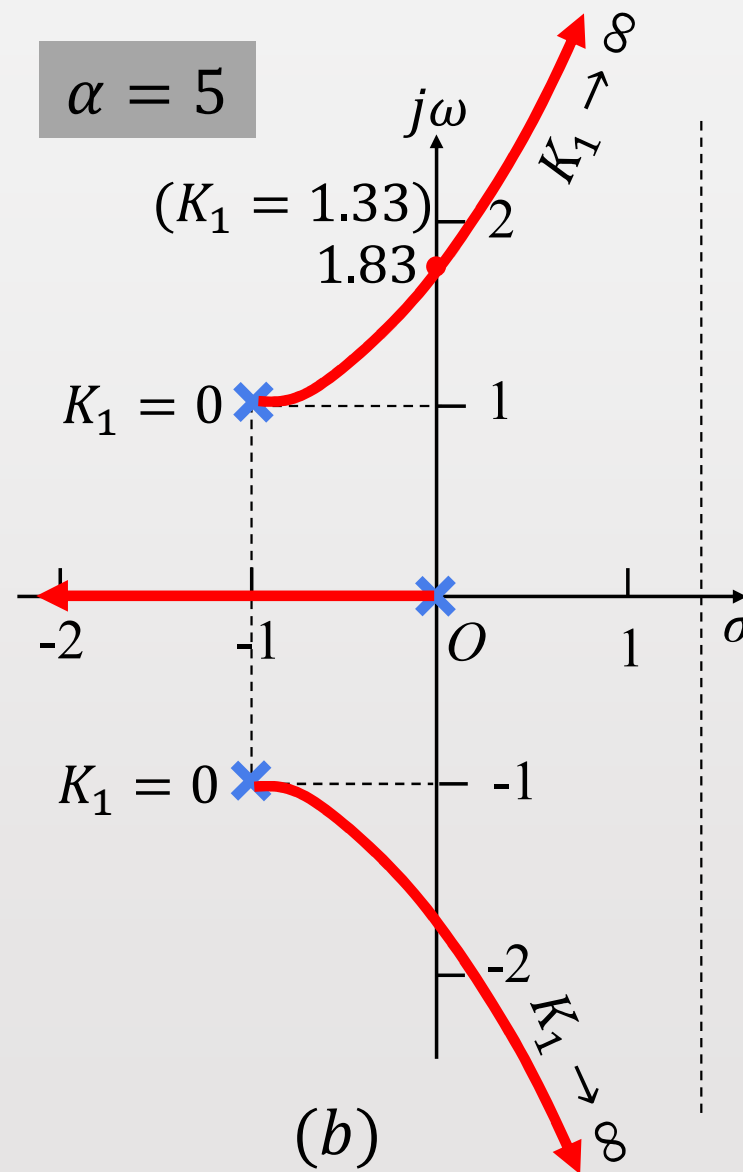


$$G(s) = \frac{K_1(s + \alpha)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

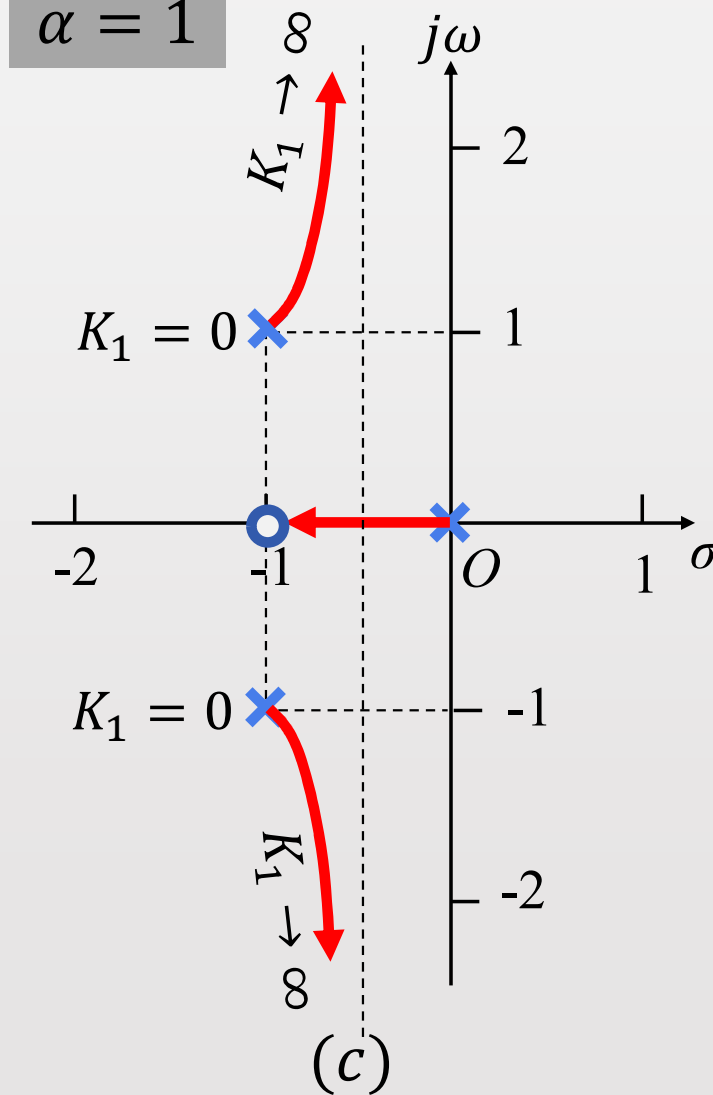
$\alpha = \infty$



$\alpha = 5$



$\alpha = 1$



讨论：附加开环零点对系统性能的影响

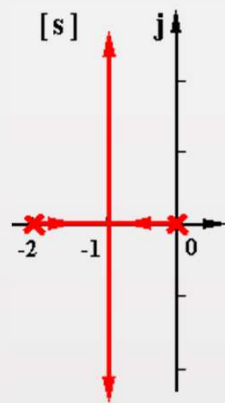
渐近线相位： $\varphi_a = \pm(2q + 1)180^\circ / (n - m)$

随着 m 增大而增加,根轨迹向左方向弯曲

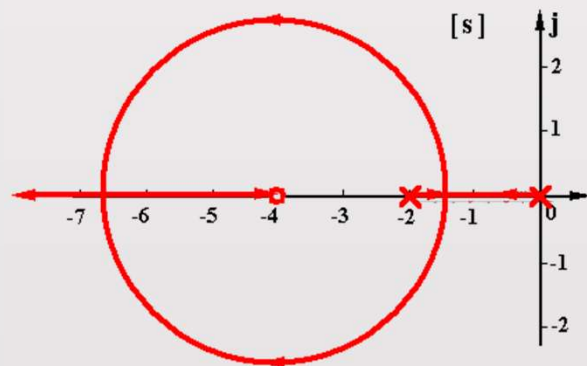
渐近线交点： $\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i) / (n - m)$

随着 z_i 增大 (z_i 点在实轴上向右移) 而左移

提高了系统的相对稳定性



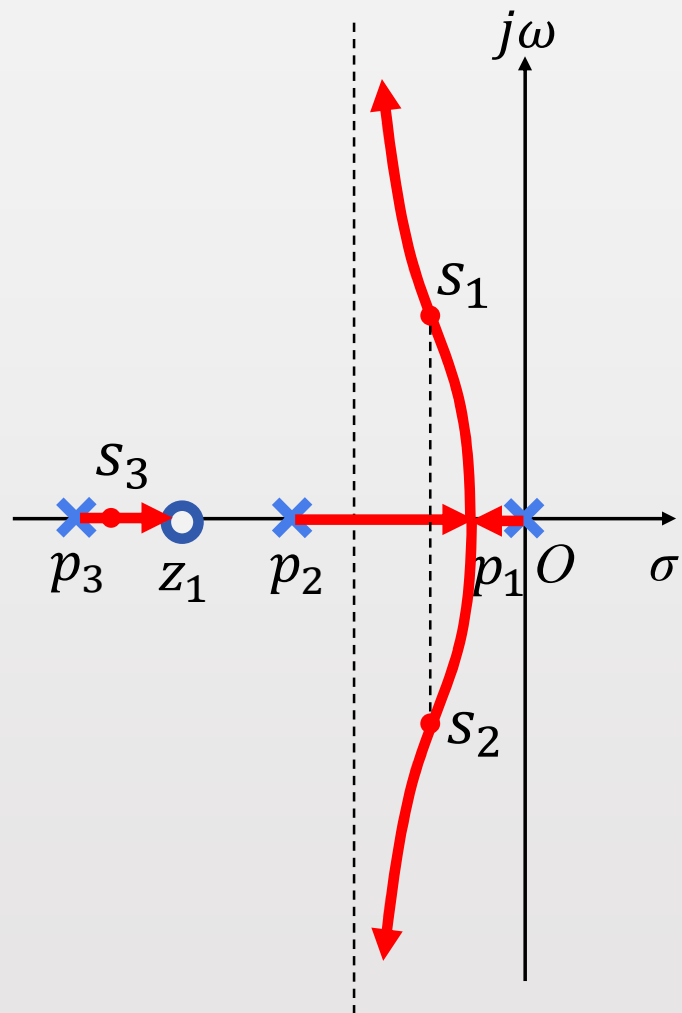
$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$



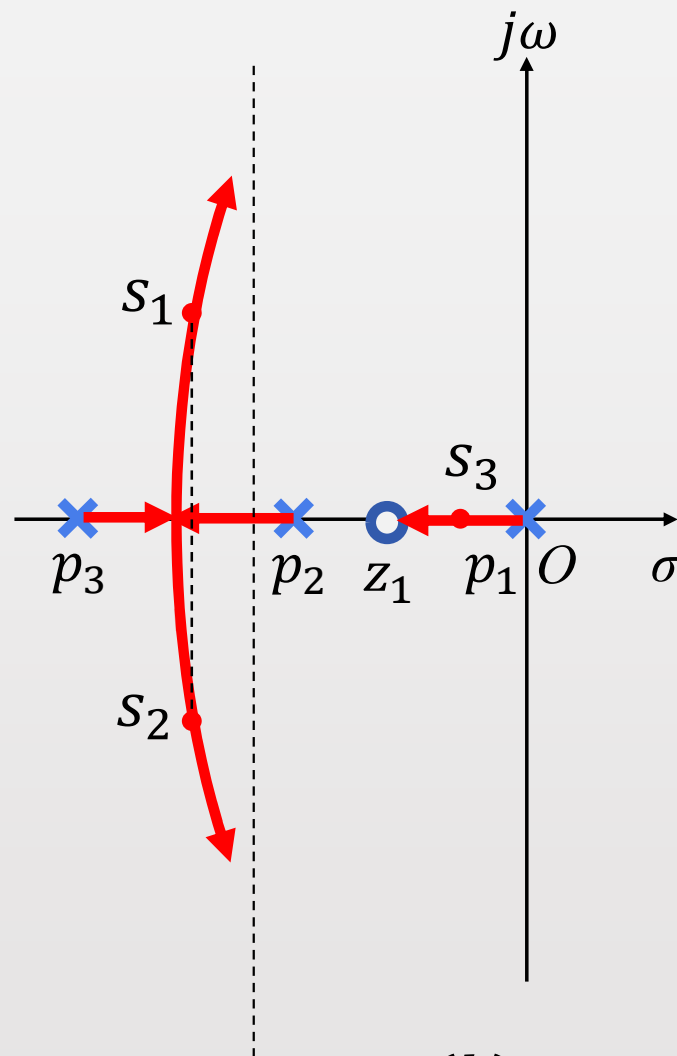
PD控制

$$G_{PD}(s) = \frac{K_1(0.25s+1)}{s(s+2)}$$

提高系统动态性能



(a)



(b)

稳定裕度:
图(b)优于图(a)

动态性能:
图(a)优于图(b)

讨论：附加开环极点对系统性能的影响？

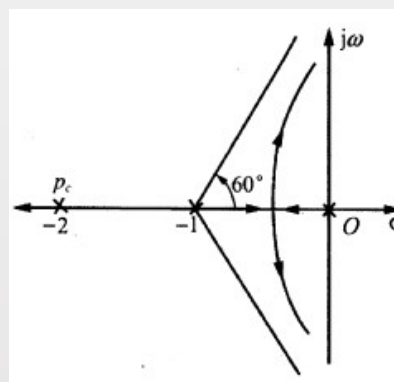
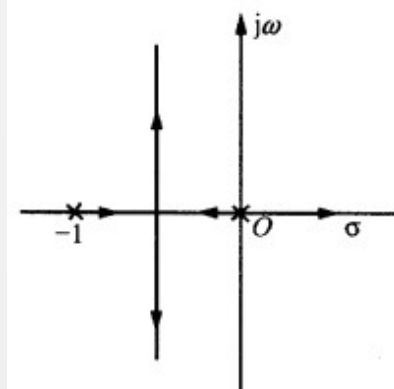
渐近线相位： $\varphi_a = \pm(2q + 1)180^\circ / (n - m)$

随着 n 增大而减小, 根轨迹向右方向弯曲

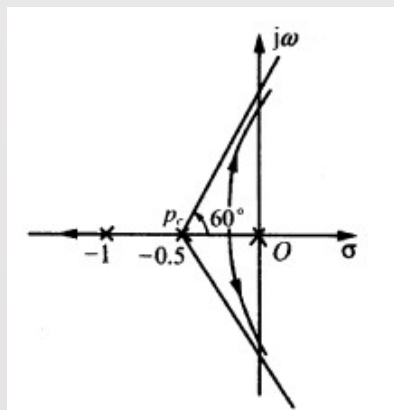
渐近线交点： $\sigma_a = (\sum p_i - \sum z_i) / (n - m)$

随着 p_i 增大（ p_i 点在实轴上向右移）而右移
向右弯曲趋势随着所增加的极点移近原点而加剧

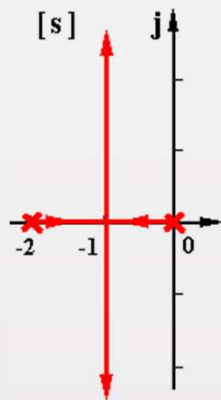
降低了系统的相对稳定性



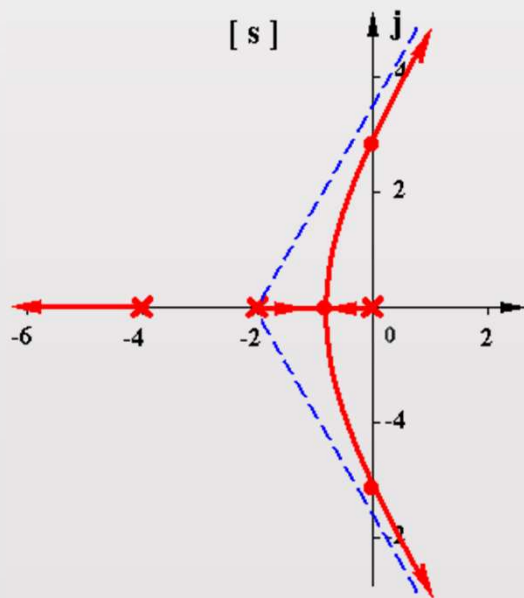
$$p_c = -2$$



$$p_c = -1$$



$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$

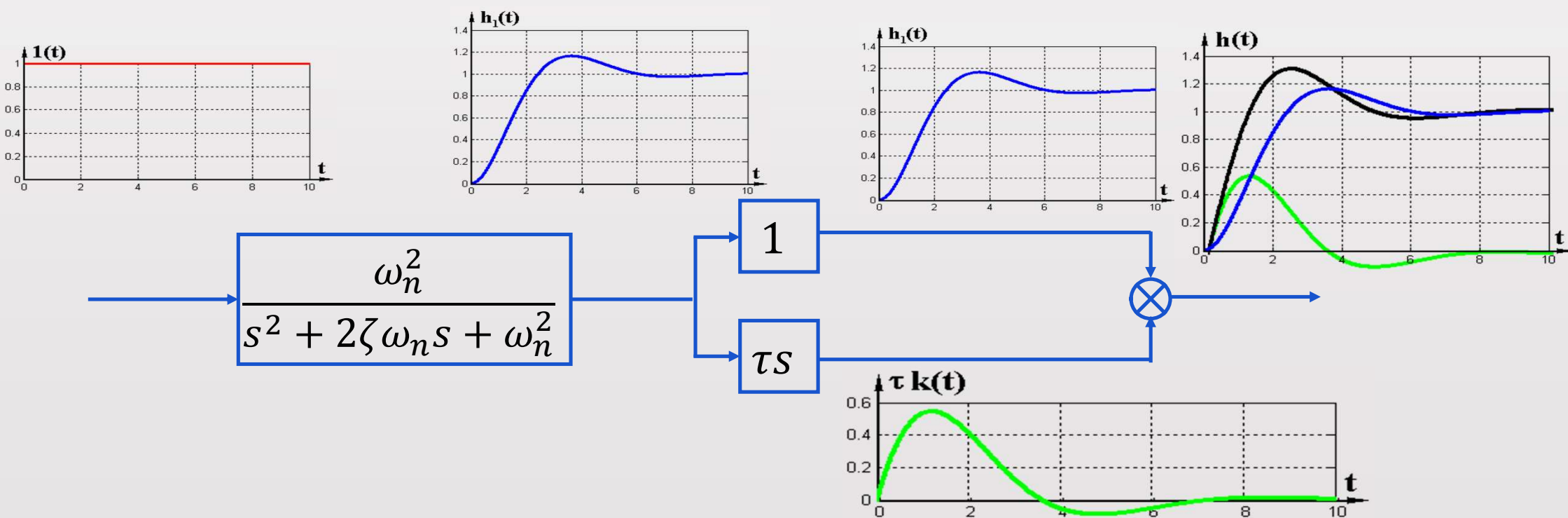


$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)(s+4)}$$

降低系统动态性能

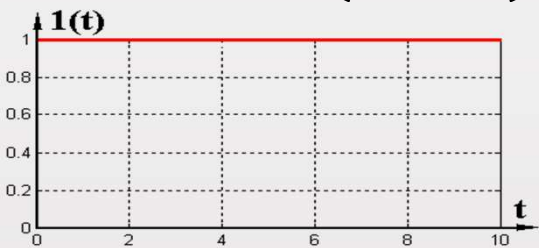
讨论：附加闭环零点对系统动态性能的影响？

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

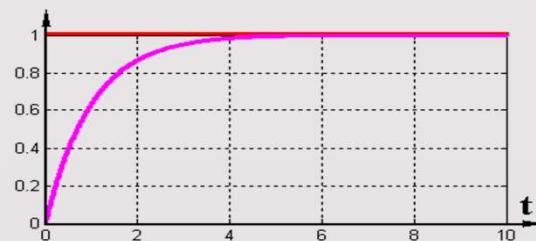


讨论：附加闭环极点对系统动态性能的影响？

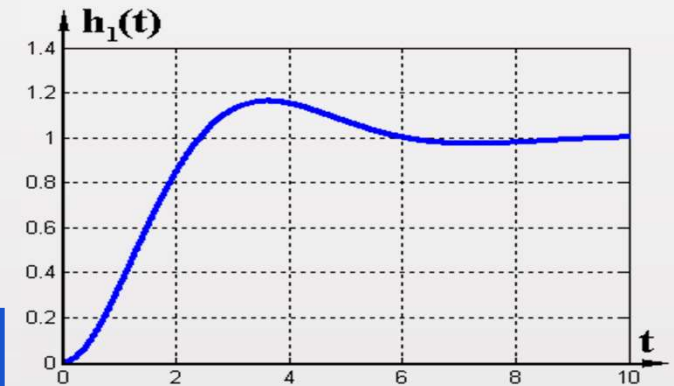
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$



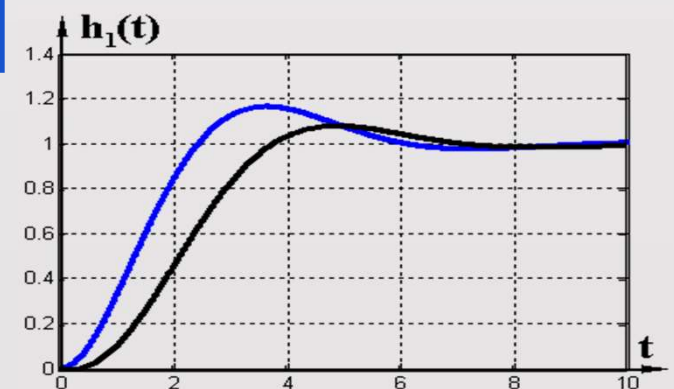
$$\frac{1}{\tau s + 1}$$



$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



多回路系统根轨迹：

根轨迹不仅适用于单回路系统，而且适用于多回路系统。

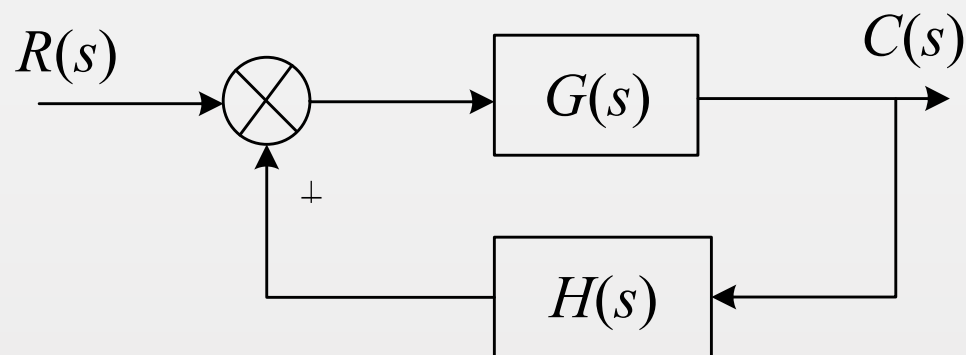
方法是：从内环开始，分层绘制，逐步扩展到整个系统。

零度根轨迹

特征方程： $1 - G(s)H(s) = 0$

$$G(s)H(s) = \mathbf{1}$$

$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \mathbf{\pm 2q\pi} \end{cases}$$

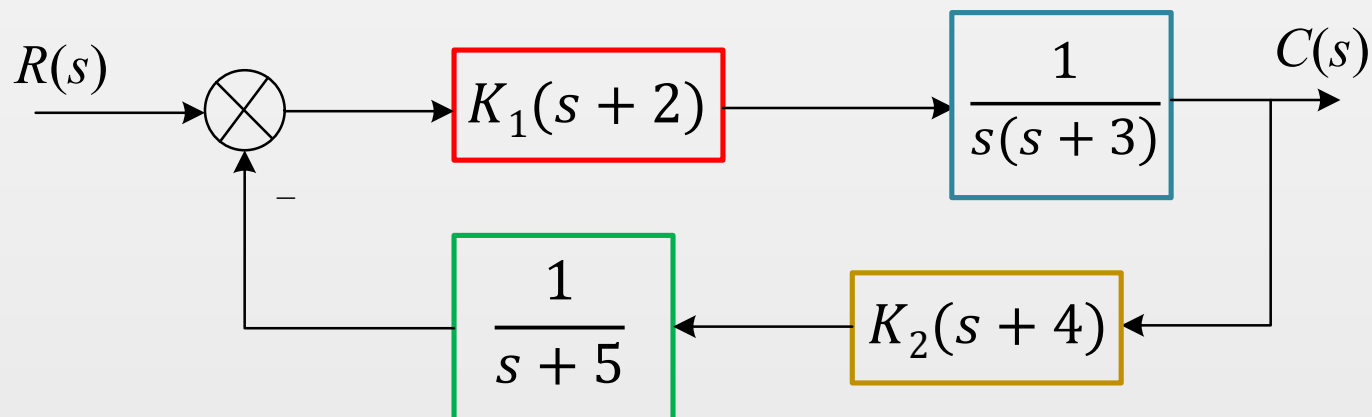


正反馈回路

$$(q=0,1,2, \dots)$$

序号	内容	规则
1	对称性	连续并对称于实轴
2	起点和终点	n 条分支起始于开环极点, 其中 m 条终止与开环零点, 另外有 $n - m$ 条趋向无穷远处
3	实轴上线段	其右边开环零点和开环极点数目之和为 偶数
4	渐近线相位	$n - m$ 条, $\varphi_a = \pm \frac{2q\pi}{n - m}, (q = 0, 1, 2 \dots)$
5	渐近线交点	$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$
6	分离点	$\frac{dK_1}{ds} = 0$
7	与虚轴的交点	$s = j\omega$ 代入特征方程求解
8	出射角和入射角	直接利用相位条件求出

第五节 利用根轨迹分析系统的性能



$$G(s) = \frac{K_1 K_2 (s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1 (s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5) + K_1 K_2 (s+2)(s+4)}$$

闭环极点与开环零点、开环极点及 $K_1 K_2$ 均有关

闭环零点=前向通道零点+反馈通道极点

利用根轨迹法分析系统动态性能的基本步骤

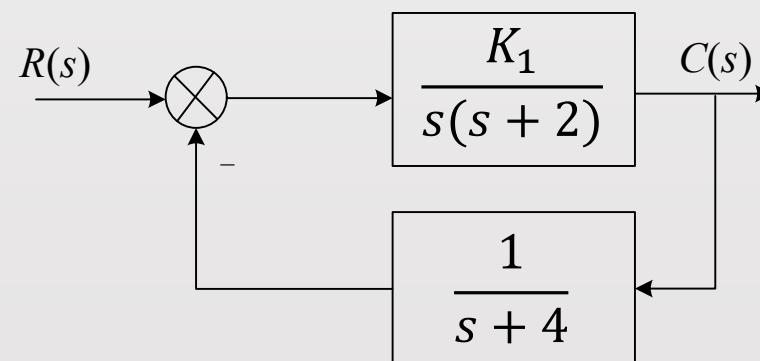
- ① 绘制系统根轨迹；
- ② 依题意确定闭环极点位置；
- ③ 确定闭环零点；
- ④ 保留主导极点, 估算系统性能。

例：已知系统结构图， $K_1 = 0 \rightarrow \infty$ ，绘制系统根轨迹并确定：

- (1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；
- (2) 复极点对应 $\zeta = 0.5$ 时的 K 值及闭环极点位置；
- (3) 当 $s_3 = -5$ 时，求 $s_{1,2}$ 的值以及相应开环增益 K
- (4) 当 $K_1 = 4$ 时，求 $s_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标 (M_p, t_s)。

解：

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s+2)(s+4)} \quad \begin{cases} K = K_1/8 \\ v = 1 \end{cases}$$



① 实轴上的根轨迹: $(-\infty, -4], [-2, 0]$

② 渐近线: $\sigma_a = (-2 - 4)/3 = -2$ $\varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

③ 分离点: $D(s) = s(s+2)(s+4) + K_1 = s^3 + 6s^2 + 8s + K_1 = 0$

$$\frac{dK_1}{ds} = -(3s^2 + 12s + 8) = 0 \Rightarrow s = -0.845$$

$$K_1 = |s||s+2||s+4| \stackrel{s=-0.845}{=} 3.08$$

④ 虚轴交点: $\text{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 8\omega = 0$
 $\text{Re}[D(j\omega)] = -6\omega^2 + K_1 = 0$

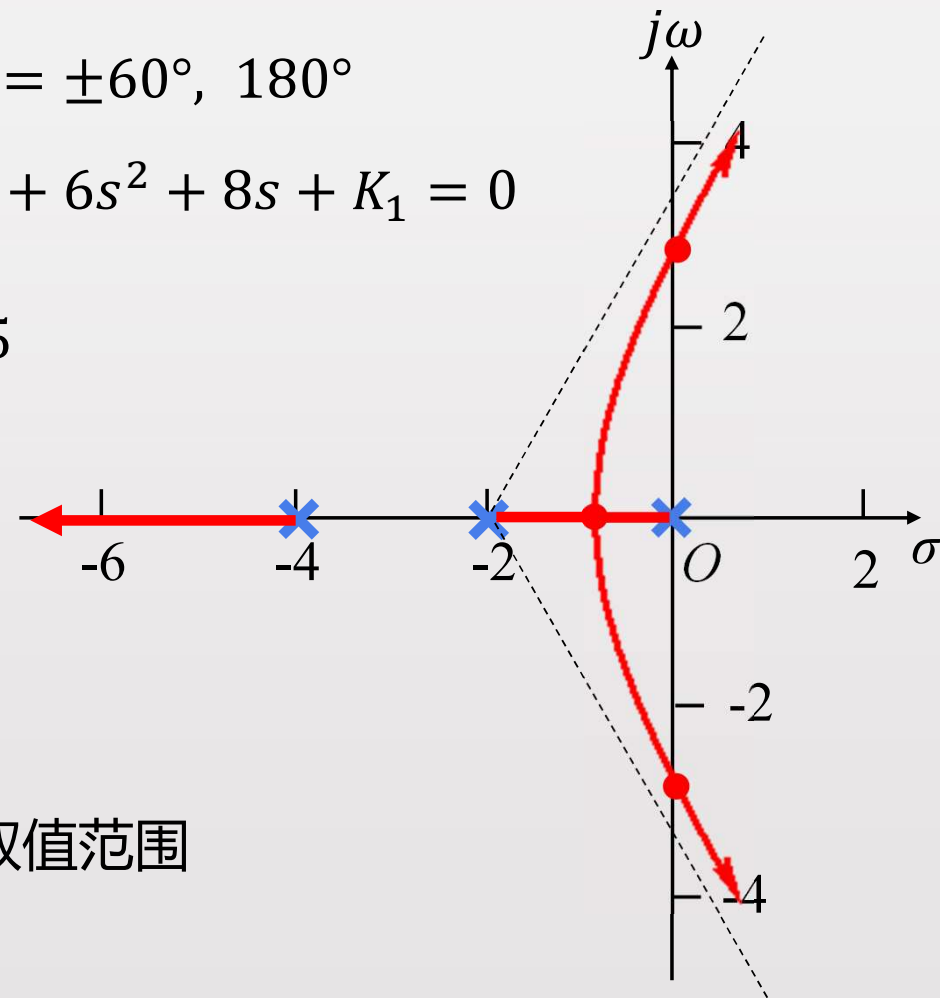
$$\omega = \pm\sqrt{8} = \pm 2.828 \quad K_1 = 48$$

(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

$$3.08 < K_1 < 48$$

$$0.385 < K < 6$$

$$K = K_1/8$$



(2) 复极点对应 $\zeta = 0.5$ 时的 K 值及闭环极点位置

$$s_1 = -\frac{1}{2}\omega_n + j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n \quad s_2 = -\frac{1}{2}\omega_n - j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n$$

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + 6s^2 + 8s + K_1$$

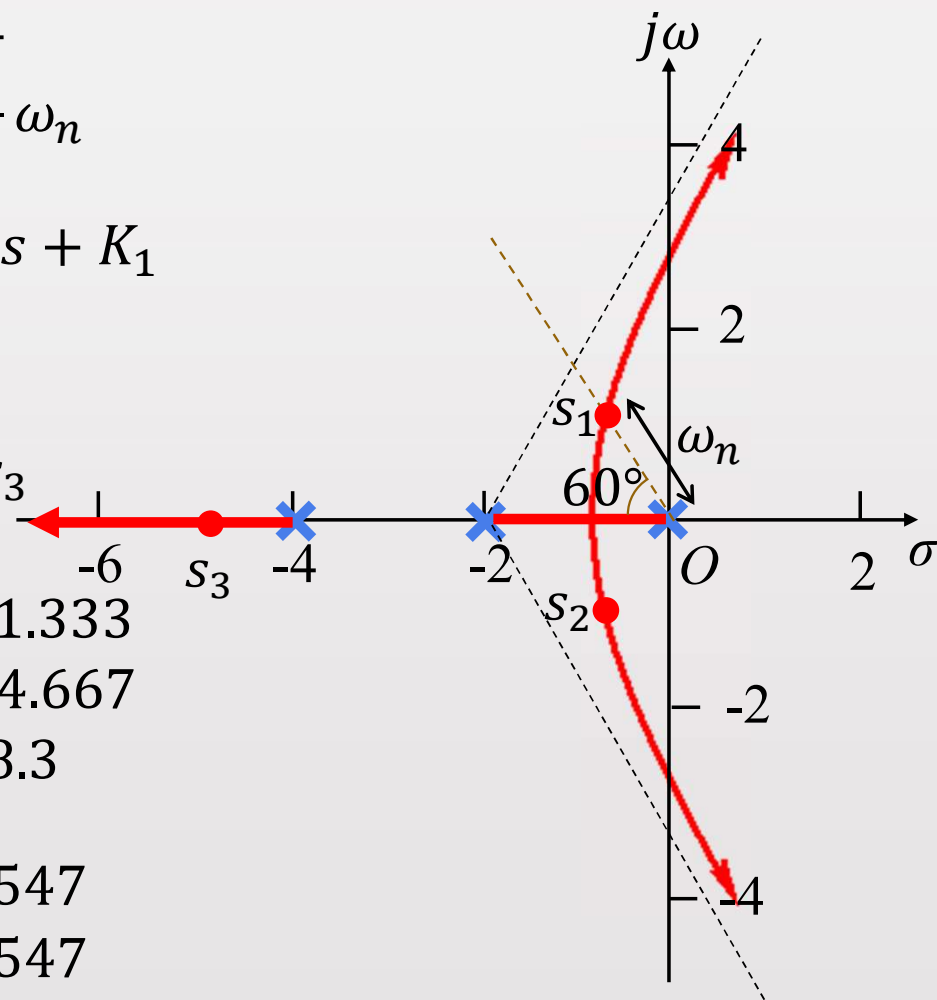
$$= (s^2 + \omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)$$

$$= s^3 + (\omega_n - s_3)s^2 + \omega_n(\omega_n - s_3)s - \omega_n^2 s_3$$

比较系数，应有

$$\begin{cases} \omega_n - s_3 = 6 \\ \omega_n(\omega_n - s_3) = 8 \\ -\omega_n^2 s_3 = K_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_n = 1.333 \\ s_3 = -4.667 \\ K_1 = 8.3 \end{cases}$$

$$K = K_1/8 = 1.0375 \quad \begin{cases} s_1 = -0.667 + j1.1547 \\ s_2 = -0.667 - j1.1547 \\ s_3 = -4.667 \end{cases}$$



(3) 当 $s_3 = -5$ 时, 求 $s_{1,2}$ 的值以及相应开环增益 K

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + K_1 = (s + 5)(s^2 + s + 3)$$

$$\begin{cases} s_1 = -0.5 + j1.6583 \\ s_2 = -0.5 - j1.6583 \end{cases}$$

$$K_1 = 15$$

$$K = K_1/8 = 15/8 = 1.875$$

$$\begin{array}{r} s^2 + s + 3 \\ s + 5 \overline{) s^3 + 6s^2 + 8s + K_1} \\ \underline{s^3 + 5s^2} \\ s^2 + 8s \\ \underline{s^2 + 5s} \\ 3s + K_1 \\ \underline{3s + 15} \\ 0 \end{array}$$

(4)当 $K_1=4$ 时, 求 $s_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标(M_p, t_s)。

三阶系统必有一个实根, 设为 s_3

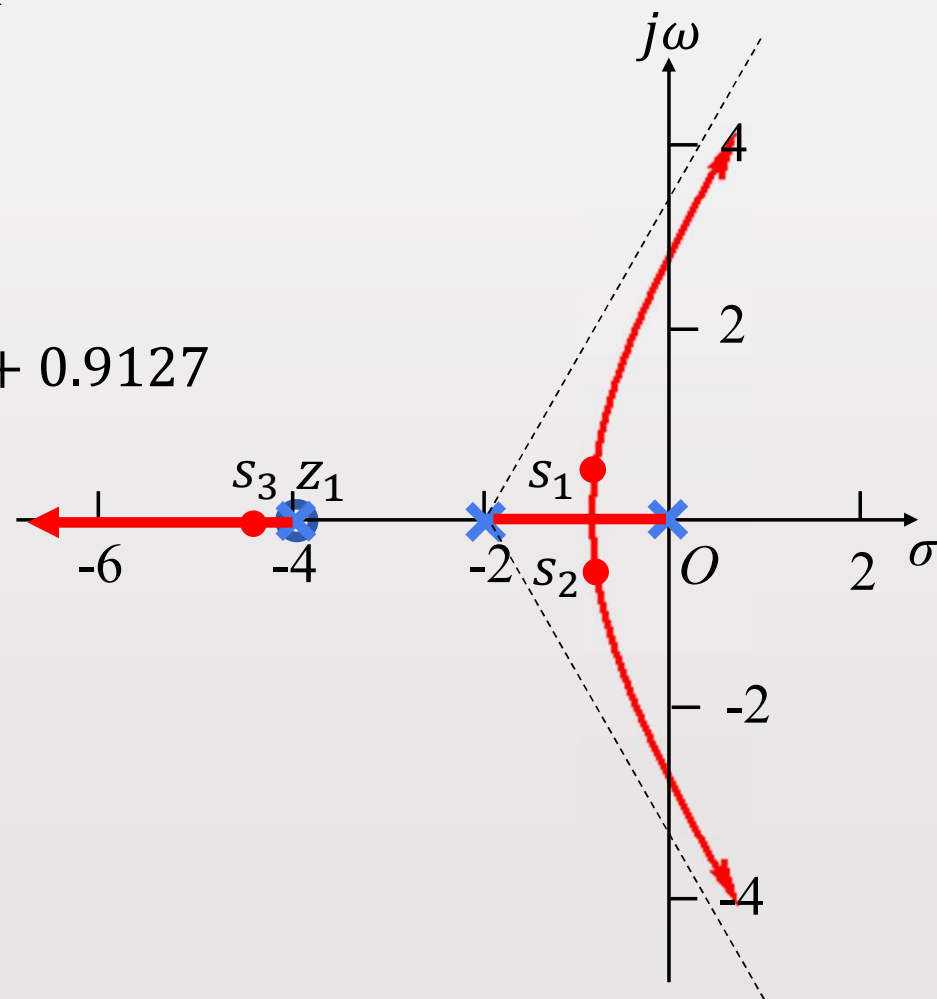
$$K_1 = |s_3| |s_3 + 2| |s_3 + 4| = 4 \quad s_3 = -4.383$$

$$\frac{D(s)}{s + 4.383} = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s + K_1}{s + 4.383} = s^2 + 1.617s + 0.9127$$

$$\begin{cases} s_1 = -0.808 + j0.509 \\ s_2 = -0.808 - j0.509 \end{cases}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1(s + 4)}{s(s + 2)(s + 4) + K_1}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{K_1=4}{=} \frac{4(s + 4)}{(s + 4.383)[s + 0.808 \pm j0.509]} \\ &= \frac{4(s + 4)}{(s + 4.383)[s^2 + 1.617s + 0.9127]} \end{aligned}$$

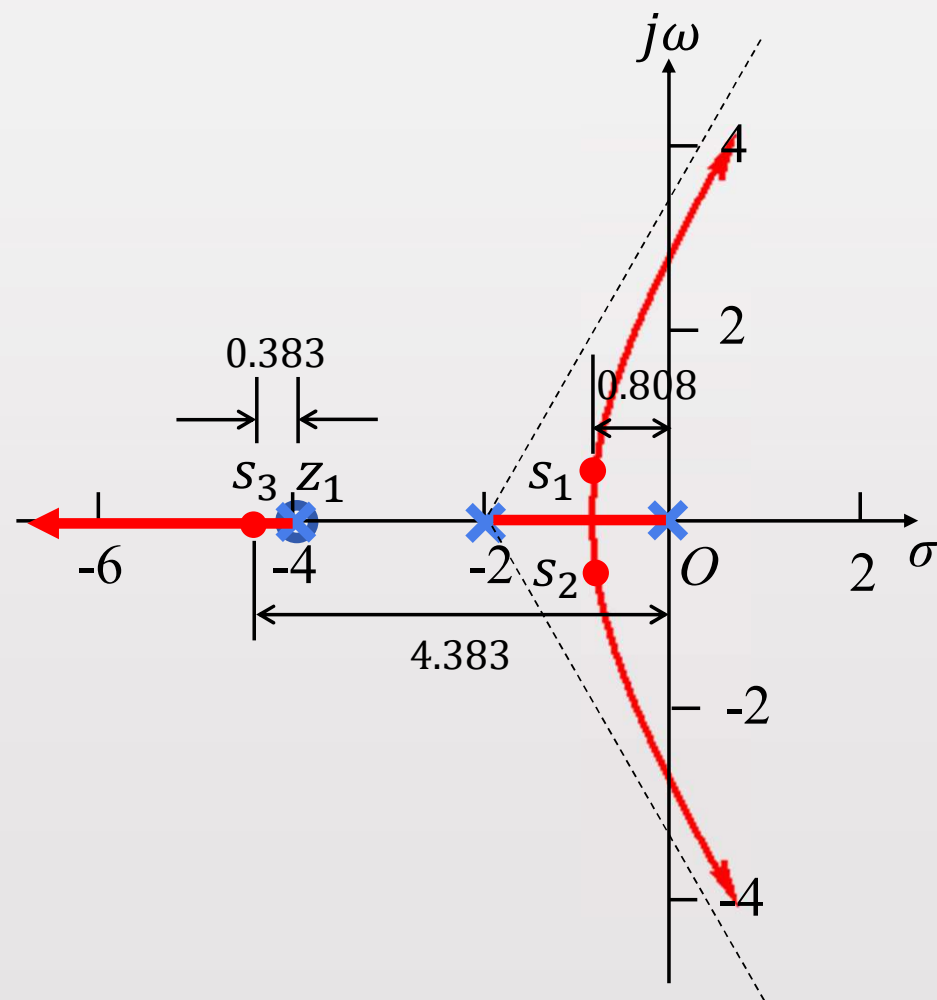


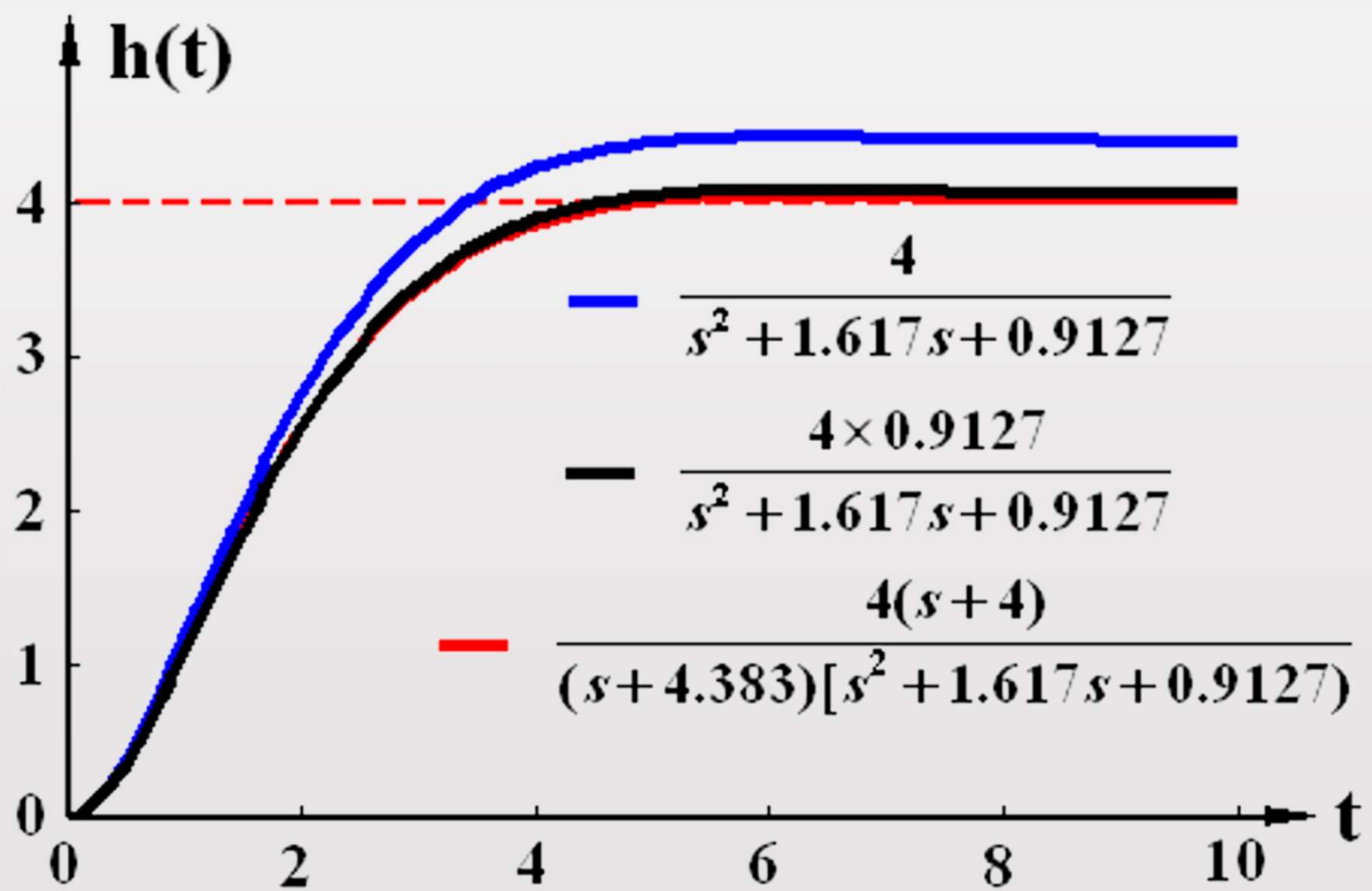
s_3 到虚轴的距离大于5倍的 $s_{1,2}$ 到虚轴距离,
并且 s_3 与零点 z_1 构成偶极子,
视 $s_{1,2}$ 为主导极点

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s^2 + 1.617s + 0.9127]} \\ &= \frac{4 \times 4 \div 4.383}{s^2 + 1.617s + 0.9126} \\ &= \frac{3.65}{s^2 + 1.617s + 0.9126}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{0.9126} = 0.955 \\ \zeta = 1.617 / (2 \times 0.955) = 0.8463 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.689\% \\ t_s = 3/\zeta\omega_n = 3/0.808 = 3.713 \end{cases}$$





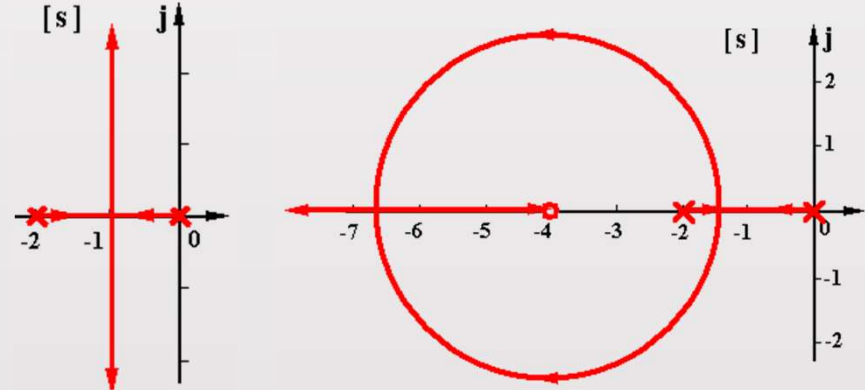
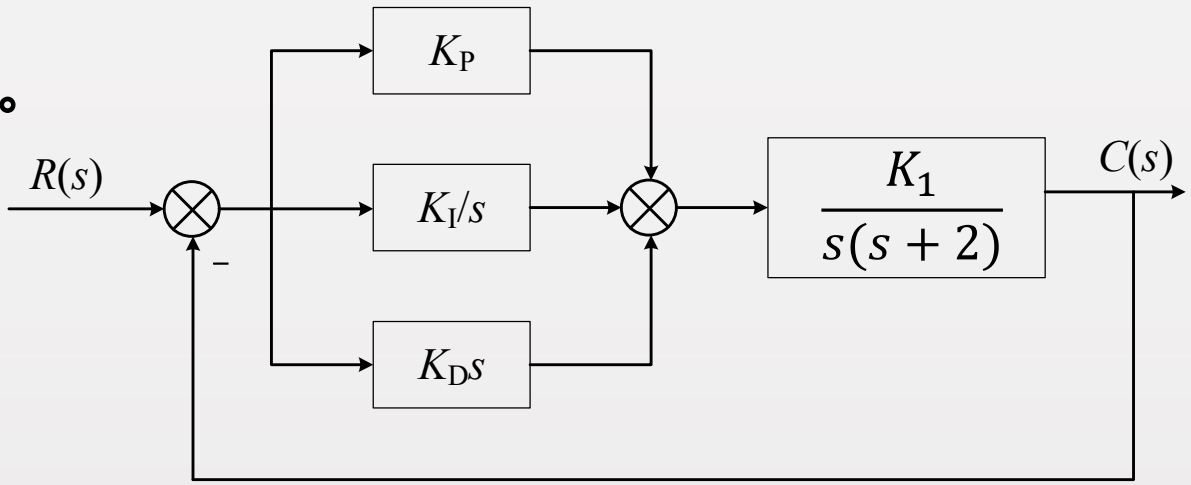
例：PID控制系统结构图如图所示。

设 $\begin{cases} K_P = 1 \\ K_I = 1.5 \\ K_D = 0.25 \end{cases}$, 采用 $\begin{cases} P \\ PD \\ PI \\ PID \end{cases}$ 控制,

$K_1 = 0 \rightarrow \infty$, 分别绘根轨迹。

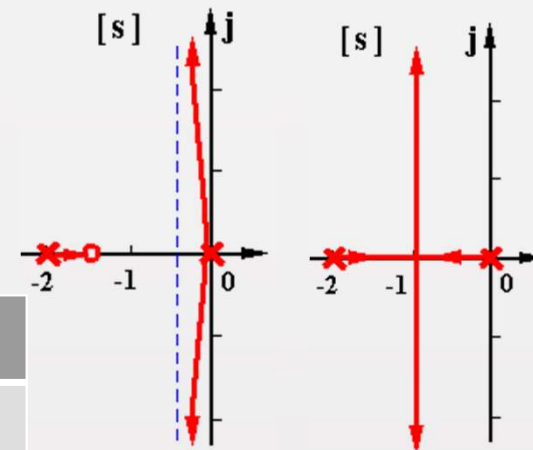
解. (1) P: $G_P(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$ $\begin{cases} K = K_1/2 \\ v = 1 \end{cases}$

(2) PD: $G_{PD}(s) = \frac{K_1(0.25s+1)}{s(s+2)}$ $\begin{cases} K = K_1/2 \\ v = 1 \end{cases}$



	稳态误差	动态性能指标
P	K与v不变, 稳态精度不变	欠阻尼时 t_s 固定值
PD		可同时改善 M_p 与 t_s （根轨迹左半圆）， 动态性能指标改善

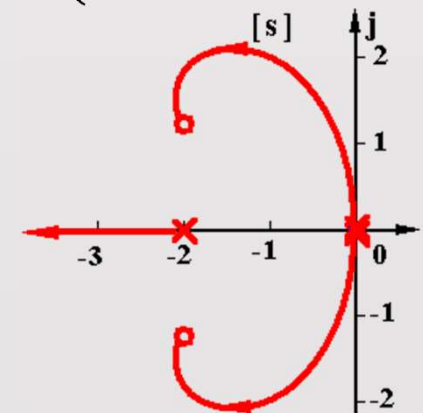
$$(3) \text{ PI: } G_{PI}(s) = \frac{K_1(1 + 1.5/s)}{s(s + 2)} = \frac{K_1(s + 1.5)}{s^2(s + 2)} \quad \begin{cases} K = 3K_1/4 \\ v = 2 \end{cases}$$

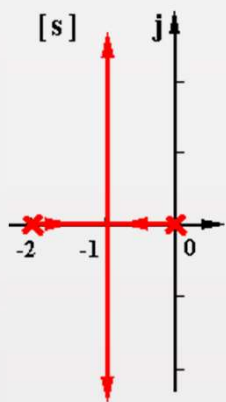


	稳态误差	动态性能指标
P	K, v 增大, 稳态精度提高	欠阻尼时 t_s 固定值
PI		M_p 与 t_s 增大, 动态性能指标变差

$$(4) \text{ PID: } G_{PID}(s) = \frac{K_1(1 + 0.25s + 1.5/s)}{s(s + 2)} = \frac{0.25K_1(s + 2 \pm j\sqrt{2})}{s^2(s + 2)} \quad \begin{cases} K = 3K_1/4 \\ v = 2 \end{cases}$$

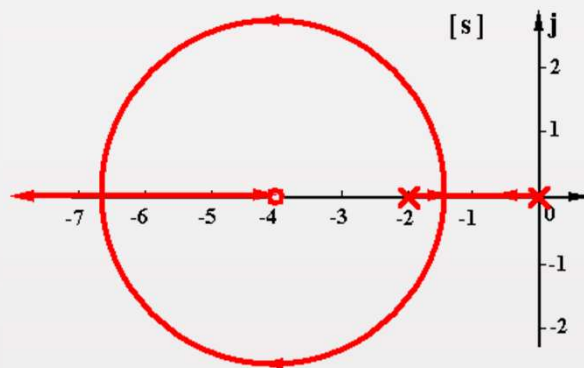
	稳态误差	动态性能指标
PI	K 与 v 不变, 稳态精度不变	可使 M_p 与 t_s 减小, 动态性能指标改善
PID		





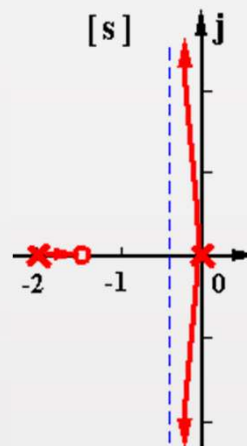
P控制

$$G_P(s) = \frac{K_1}{s(s+2)}$$



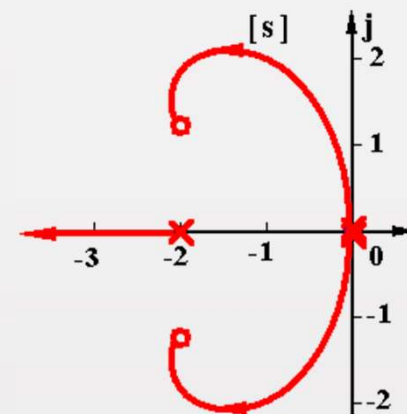
PD控制

$$G_{PD}(s) = \frac{K_1(0.25s+1)}{s(s+2)}$$



PI控制

$$G_{PI}(s) = \frac{K_1(s+1.5)}{s^2(s+2)}$$



PID控制

$$G_{PID}(s) = \frac{0.25K_1[s+2 \pm j\sqrt{2}]}{s^2(s+2)}$$