

# 自动控制原理

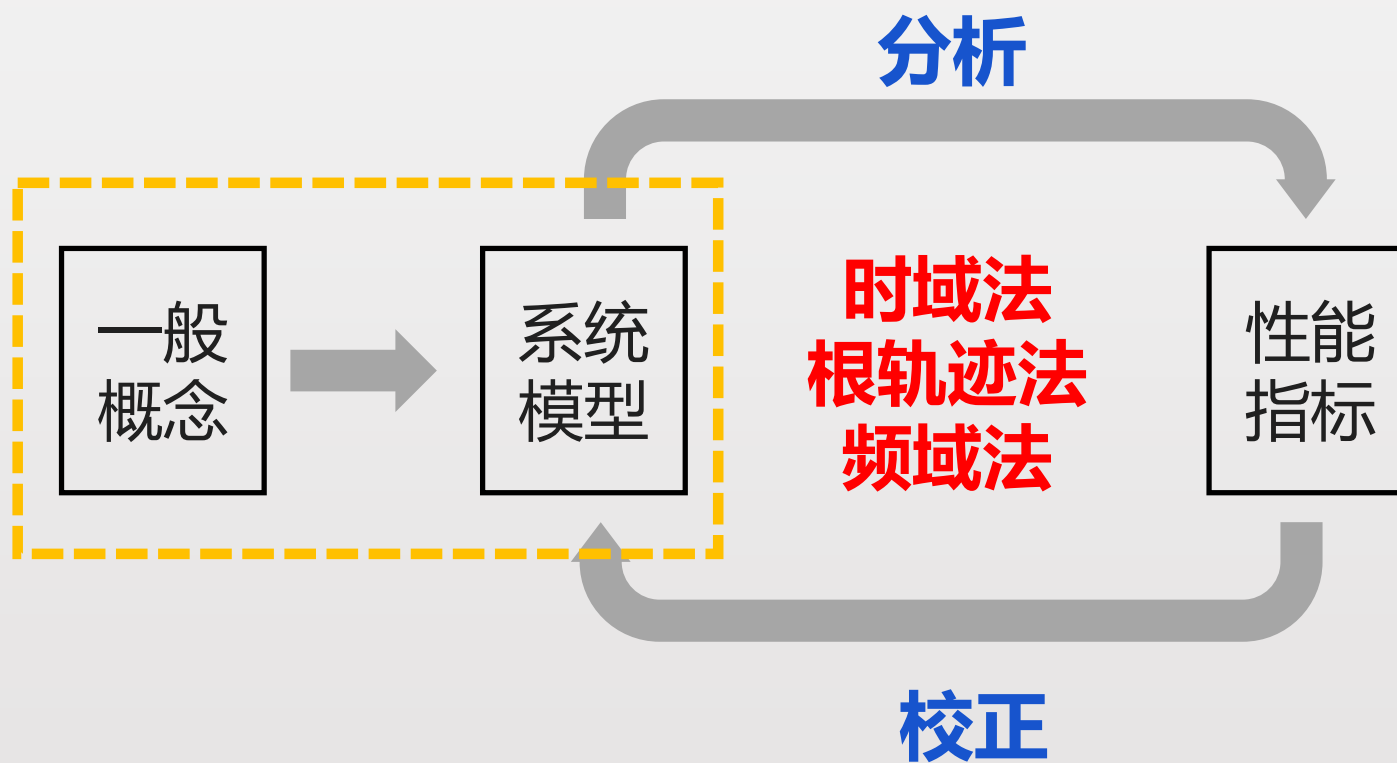
汪 晶

QQ:150302300

## 第二章 线性系统的数学模型

### 本章知识点：

- 线性系统的输入－输出时间函数描述
- 建立系统数学模型的机理分析法
- 传递函数的定义与物理意义
- 典型环节的数学模型
- 框图及化简方法
- 信号流程图与梅逊公式应用



## 建立数学模型的方法


1. 解析法（理论建模）
2. 实验法（系统辨识）

## 经典控制理论中系统数学模型常见的描述形式

1. 微分方程（时域模型）
2. 传递函数（复域模型）
3. 频率特性（频域模型）

# 第一节 线性系统的输入-输出时间函数描述

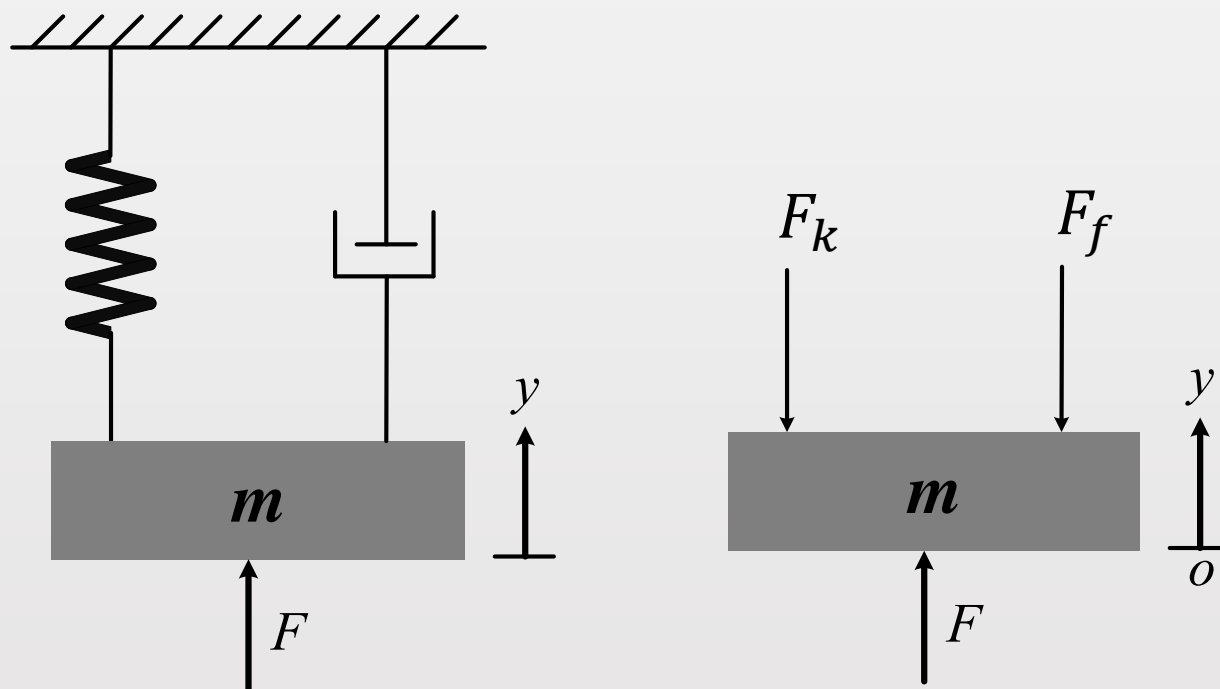
线性定常系统微分方程的一般形式：


$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} r_1(t) \\ r_2(t) \end{array} & \xrightarrow{r(t)} & \boxed{\text{系统}} \xrightarrow{c(t)} \begin{array}{l} c_1(t) \\ c_2(t) \end{array} \\ ar_1(t) \pm br_2(t) & & ac_1(t) \pm bc_2(t) \end{array}$$
$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ = & b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned}$$

## 解析法列写系统微分方程的步骤：

1. 确定系统或元部件的输入、输出变量；
2. 依据各元部件输入、输出变量所遵循的物理定律列写微分方程组；
3. 消去中间变量，求出仅含输入、输出变量的线性常微分方程；
4. 将微分方程整理成规范形式，即将输出变量及其各阶导数项放在等号左边，输入变量及其各阶导数项放在等号右边，分别按降阶顺序排列。

例：弹簧阻尼系统，图中质量为 $m$ 的物体受到外力 $F$ 的作用，产生位移 $y$ ，求该系统的输入-输出描述



解：（1）输入量为 $F$ ，输出量为 $y$ ；

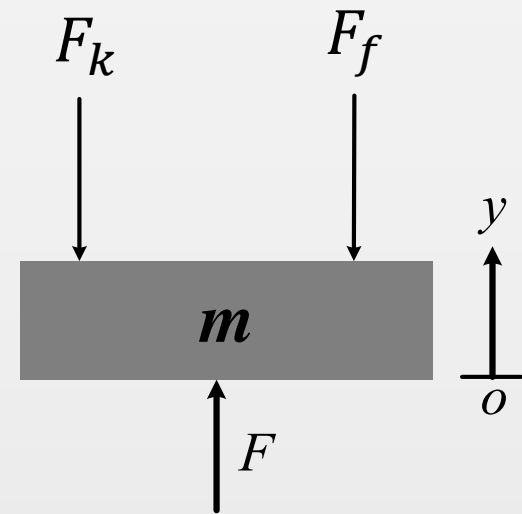
（2）分析物体 $m$ 的受力情况，列写微分方程组；

根据牛顿定律： $\sum F = F - F_k - F_f = ma$

$$F_k = ky \quad (k: \text{弹簧系数})$$

$$F_f = fv = f \frac{dy}{dt} \quad (f: \text{粘滞摩擦系数})$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} \quad (a: \text{加速度})$$



(3) 消去中间变量求出描述系统输入-输出关系的微分方程

$$F - ky - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

(4) 将微分方程整理成规范形式

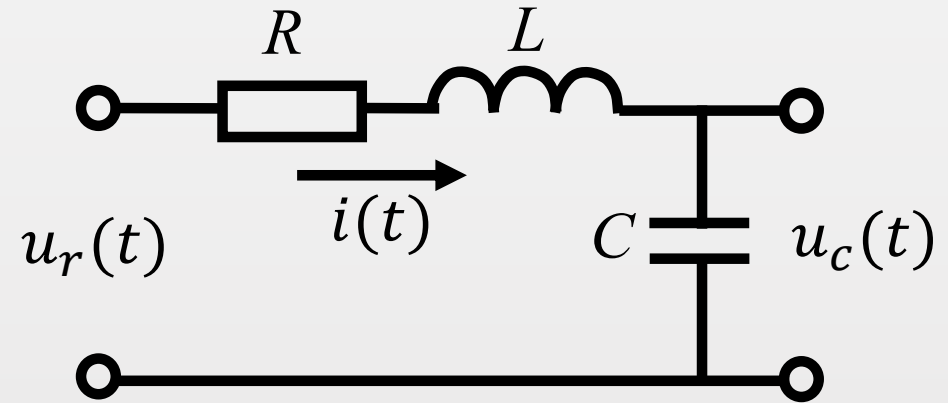
$$m \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F$$



例： $R$ - $L$ - $C$ 串联电路，试列出以 $u_r(t)$ 为输入量， $u_c(t)$ 为输出量的微分方程式。

解：（1）确定输入量为 $u_r(t)$ ，  
输出量为 $u_c(t)$ ，中间变量 $i(t)$ ；

（2）列写微分方程组：

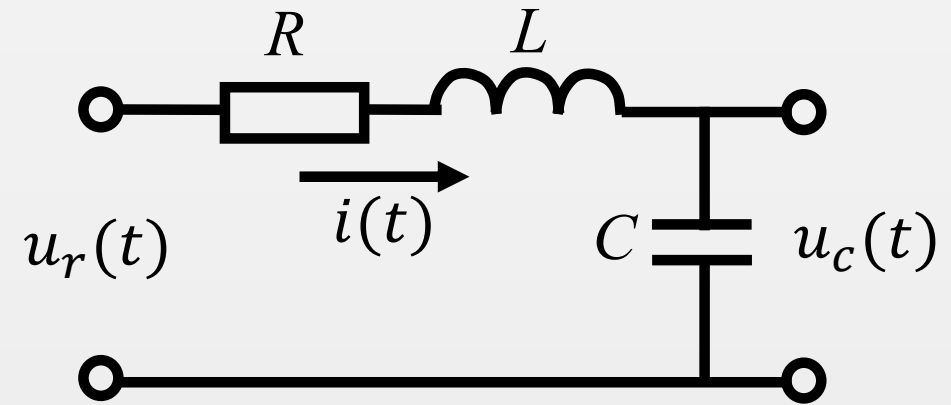


由KVL：

$$u_r(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t)$$

由电容特性：

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$



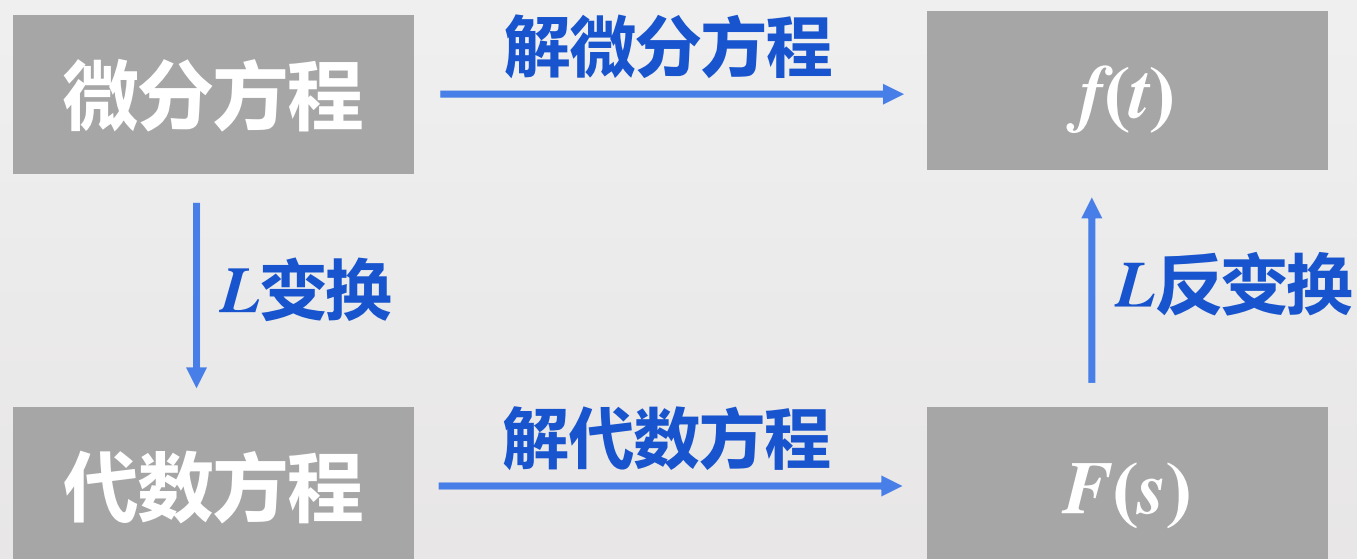
(3) 消去中间变量

$$u_r(t) = RC \frac{du_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t)$$

(4) 将微分方程整理成规范形式

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

# 微分方程求解方法



# 用拉氏变换方法解微分方程

系统微分方程  $\begin{cases} y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_2 \cdot y(t) = 1(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

$L$ 变换  $(s^2 + a_1 s + a_2) \cdot Y(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + a_1 s + a_2)}$$

$L$ 反变换  $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$

常见函数 $L$ 变换	$f(t)$	$F(s)$
单位脉冲	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡	$t$	$1/s^2$
单位加速度	$t^2/2$	$1/s^3$
指数函数	$e^{-at}$	$1/(s + a)$
正弦函数	$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
余弦函数	$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$

序号	$L$ 变换重要定理	
1	线性性质	$L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$
2	微分定理	$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$
3	积分定理	$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$
4	实位移定理	$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau \cdot s} \cdot F(s)$
5	复位移定理	$L[e^{A \cdot t} f(t)] = F(s - A)$
6	初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$
7	终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$

例：已知  $F(s) = \frac{1}{s(s+a)}$  ，求  $f(t) = ?$

$$\text{解： } F(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(s+a) - s}{s(s+a)}$$

$$= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{a} [1 - e^{-at}]$$

例：已知  $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$  , 求  $f(t) = ?$

解.  $F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+3}$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2} \\ C_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$F(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$



## 第二节 线性系统的输入-输出传递函数描述

**传递函数：**在零初始条件下，线性定常系统输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

**零初始条件：**

①输入是在 $t = 0$ 以后才作用于系统，因此，系统输入量及其各阶导数在 $t \leq 0$ 时均为0；

②在输入作用于系统之前时，系统是“相对静止”的，即系统输出量及其各阶导数在 $t \leq 0$ 时的值也为0。

微分方程一般形式：

$$a_0 c^{(n)} + a_1 c^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} c' + a_n c = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} r' + b_m r(t)$$

$L$ 变换：

$$[a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n] C(s) = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m] R(s)$$

**传递函数：** 
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = G(s)$$

**极点：**传递函数分母 $s$ 多项式的根，也即线性微分方程特征方程的特征值。

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

**零点：**传递函数分子 $s$ 多项式的根。

$$b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m = 0$$

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

考虑到零极点都有实数和共轭复数的情况

首1标准型

$$G(s) = K_1 \frac{\prod_{j=1}^{m_1} (s - z_j) \prod_{k=1}^{m_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i) \prod_{l=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_l \omega_l s + \omega_l^2)}$$

$K_1$  : 根轨迹增益

尾1标准型

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^{m_1} (\tau_j s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

$K$  : 放大系数、增益

## 传递函数的性质：

$$\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = G(s)$$

- ①传递函数 $G(s)$ 是复变量 $s$ 的有理分式函数，具有复变函数的所有性质；  
实际物理系统传递函数的分母阶次总是大于或等于分子阶次，即 $n \geq m$
- ②传递函数 $G(s)$ 只取决于系统或元部件自身的结构和参数，与外作用的形式和大小无关；
- ③传递函数 $G(s)$ 与微分方程有直接联系；  
复变量 $s$ 相当于时域中的微分算子

例：图为RC四端无源网络。  $U_1(t)$ 输入量，  $U_2(t)$ 为输出量，试求出该系统的传递函数。

解：设回路电流  $i_1$ 、 $i_2$ ，列写方程组如下：

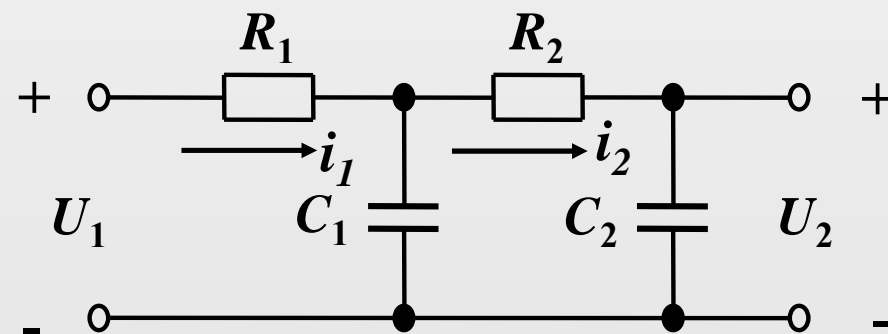
$$U_1 = R_1 i_1 + U_{c1} \quad (1)$$

$$U_{c1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad (2)$$

$$U_{c1} = R_2 i_2 + U_{c2} \quad (3)$$

$$U_{c2} = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad (4)$$

$$U_2 = U_{c2} \quad (5)$$



$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1$$

$RC$ 四端网络的数学模型，为二阶线性常微分方程

设初始状态为零，对方程两边求拉氏变换，得

$$R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 U_2(s) + [R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2] s U_2(s) + U_2(s) = U_1(s)$$

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}$$

此即为 $RC$ 四端网络的传递函数

# 传递函数的局限性

① 原则上不反映非零初始条件时系统响应的全部信息；

② 适合于描述单输入/单输出系统；

③ 只能用于表示线性定常系统。

$$\begin{aligned} & a_0 c^{(n)} + a_1 c^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} c' + a_n c \\ & = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} r' + b_m r(t) \end{aligned}$$

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 4c = 2\dot{r} + 4r$$

$$\ddot{c} + 2 \cdot \dot{c} \cdot c + 4c^3 + 4 = 2\dot{r} + 4r \cdot c$$

$$\ddot{c} + \underline{a_1(t)}\dot{c} + \underline{a_2(t)}c = 2\dot{r} + 4r$$

## 第四节 典型环节的数学模型

**典型环节：** { 比例环节  
惯性环节  
积分环节  
微分环节（一阶复合微分环节、二阶复合微分环节）  
振荡环节  
纯滞后环节



## 比例环节

**运动方程**： $c(t) = Kr(t) \quad t \geq 0$

$K$ 为比例系数或放大系数

**$L$ 变换**： $C(s) = KR(s)$

**传递函数**： $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$

**常见物理系统**：杠杆、放大器、电位器、齿轮系、测速发电机等

## 惯性环节

**运动方程：**  $\tau \frac{d}{dt} c(t) + c(t) = Kr(t)$

$K$ : 比例系数       $\tau$ : 时间常数

**$L$ 变换：**  $\tau sC(s) + C(s) = KR(s)$

**传递函数：**  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$

**常见物理系统：**  $R - C$  电路、直流电机的励磁回路

## 积分环节

**运动方程：**  $c(t) = K \int r(t) dt$

**L变换：**  $C(s) = K \cdot \frac{1}{s} R(s)$

**传递函数：**  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s}$

**常见物理系统：**水箱（流量-液位）、电机拖动系统、电容上的电压与电流

## 微分环节（理想）

运动方程： $c(t) = \tau \frac{d}{dt} r(t)$

$L$ 变换： $C(s) = \tau s R(s)$

传递函数： $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s$

常见物理系统：不存在

## 实际微分环节例子：RC电路

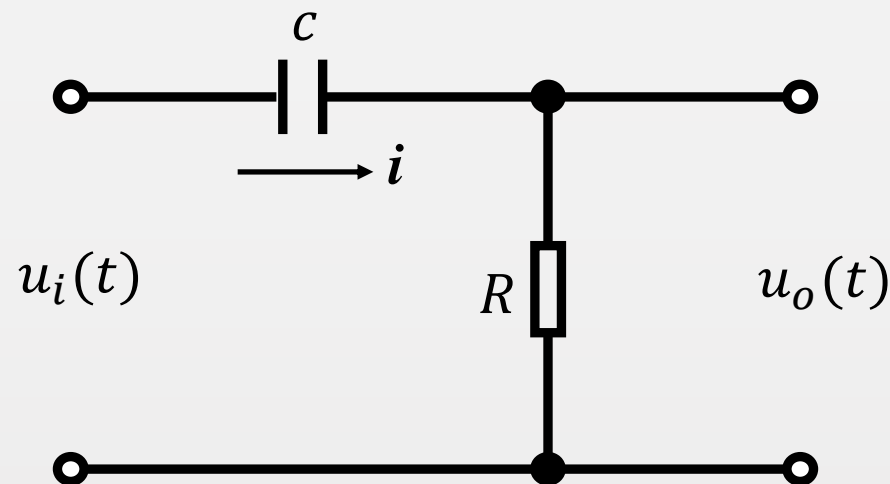
$$\begin{cases} u_i(t) = \frac{1}{C} \int i dt + iR \\ u_o(t) = iR \end{cases}$$

$$RC \frac{du_i(t)}{dt} = u_o(t) + RC \frac{du_o(t)}{dt}$$

$$RCsU_i(s) = U_o(s) + RCsU_o(s) = (RCs + 1)U_o(s)$$

$$G(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \quad (\tau = RC)$$

微分环节 ( $\tau s$ ) 和惯性环节 ( $\frac{1}{\tau s + 1}$ ) 的串联组合



更进一步：

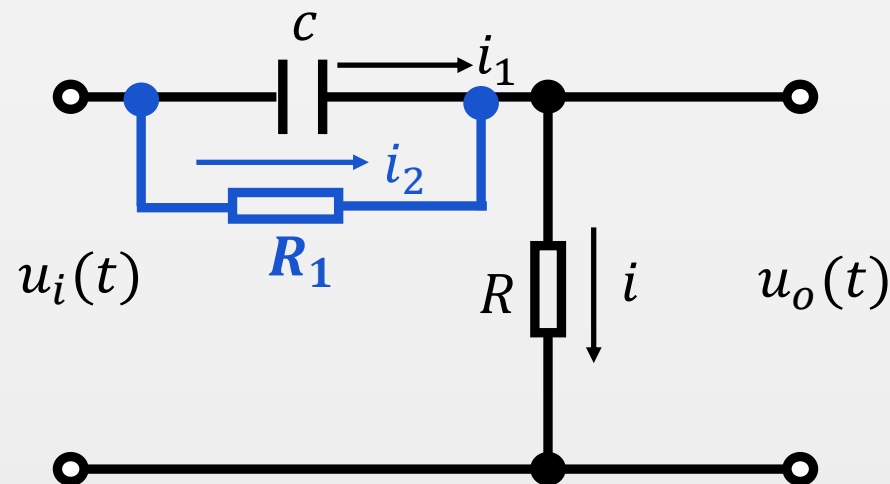
$$\begin{aligned} & \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 C \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_i(t) \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 C \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) \end{aligned}$$

$$G'(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \alpha \left( \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \right) \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \tau = R_1 C$$

$$G(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

一个比例环节 (1) 和微分环节 ( $\tau s$ ) 的并联组合

**$\tau s + 1$ ：比例微分（一阶复合微分）环节**



## 二阶复合微分环节

**运动方程：**  $c(t) = \tau^2 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t)$

**L变换：**  $C(s) = \tau^2 s^2 R(s) + 2\zeta\tau s R(s) + R(s)$

**传递函数：**  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$

## 振荡环节

**运动方程：**  $\tau^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$

$\tau$ : 时间常数;  $\zeta$ : 阻尼系数 (阻尼比), 且  $0 \leq \zeta < 1$

**L变换：**  $\tau^2 s^2 C(s) + 2\zeta\tau s C(s) + C(s) = R(s)$

**传递函数：**  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$

**常见物理系统：** 弹簧-质块-阻尼器系统、 $R-L-C$  电路



## 纯滞后（纯延迟）环节

**运动方程：**  $c(t) = r(t - \tau)$        $\tau$  纯滞后时间

**L变换：**  $C(s) = e^{-\tau s} R(s)$

**传递函数：**  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$

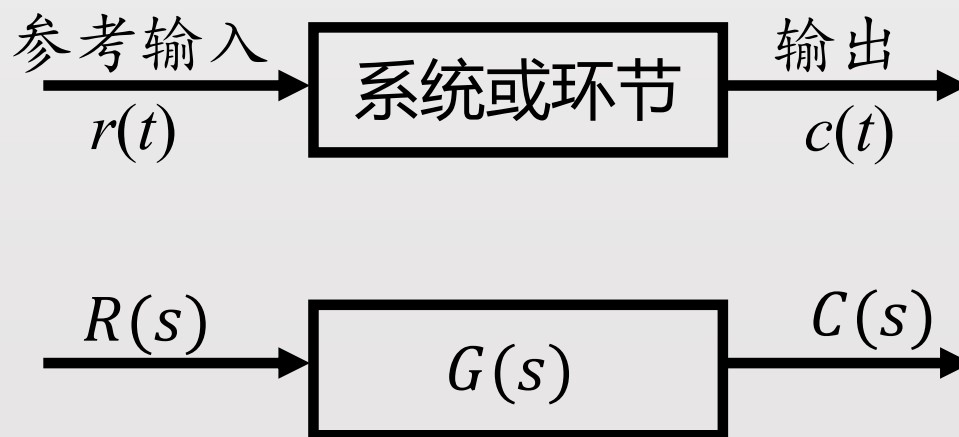
**常见物理系统：** 传输延迟、测量点与混合点之间信号延迟

典型环节	传递函数	常见物理系统
比例环节	$K$	杠杆、放大器、电位器、齿轮系、测速发电机等
惯性环节	$1/\tau s + 1$	$R - C$ 电路、直流电机的励磁回路
积分环节	$1/s$	水箱（流量-液位）、电机拖动系统、电容上的电压与电流
理想微分环节	$\tau s$	$K \frac{\prod_{j=1}^{m_1} (\tau_j s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$
一阶比例微分	$\tau s + 1$	
二阶比例微分	$\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$	
振荡环节	$1/\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$	弹簧质块阻尼系统、 $R - L - C$ 电路
纯滞后环节	$e^{-\tau s}$	传输延迟、测量点与混合点之间信号延迟

- 一个元件的数学模型可能是若干个典型环节的数学模型的组合；
- 若干个元件的数学模型的组合也可能就是一个典型环节的数学模型；
- 任一传递函数都可看作典型环节的组合。

## 第六节 框图及其化简方法

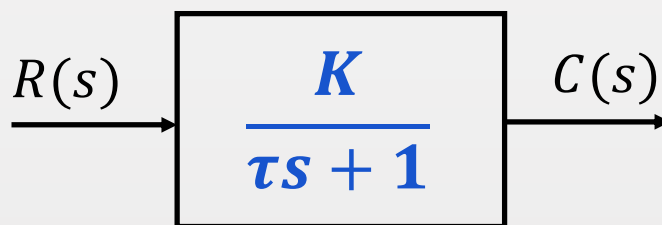
**框图**：又称为方块图或结构图，是描述组成系统的各元部件之间信号传递关系的图形化数学模型。



## 典型环节框图



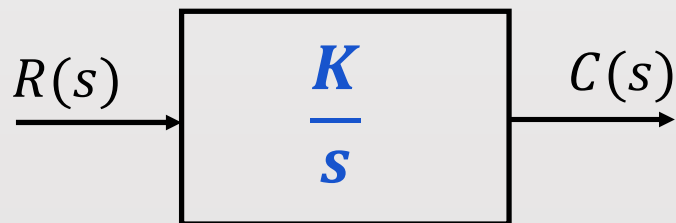
比例环节



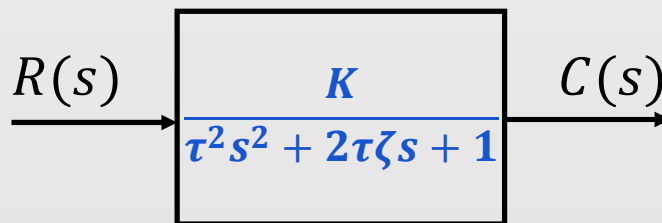
惯性环节



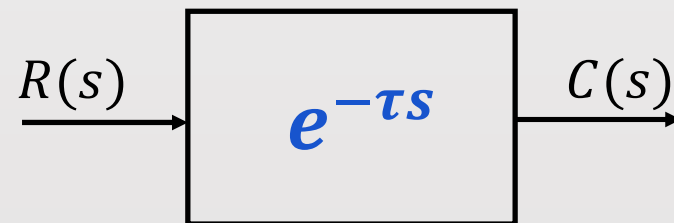
微分环节



积分环节



振荡环节

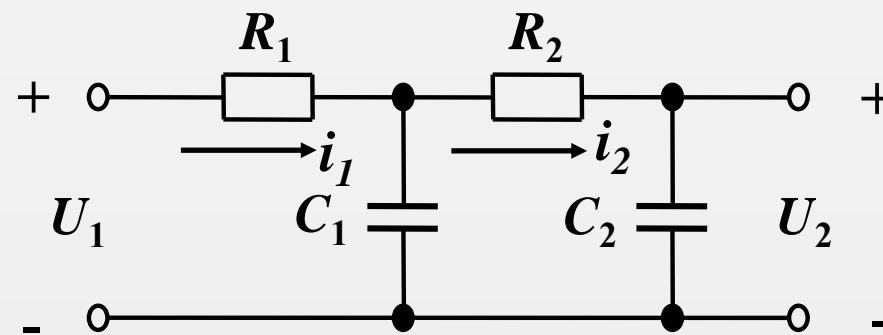


滞后环节

# 框图的绘制

- ① 考虑负载效应分别列写系统各元部件的微分方程或传递函数，并将它们用方框表示；
- ② 根据各元部件的信号流向，用信号线依次将各方框连接起来，便可得到系统的框图。

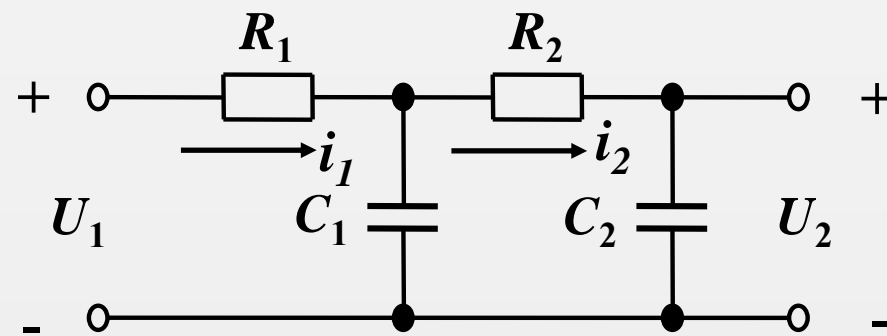
例：画出如下四端网络方框图



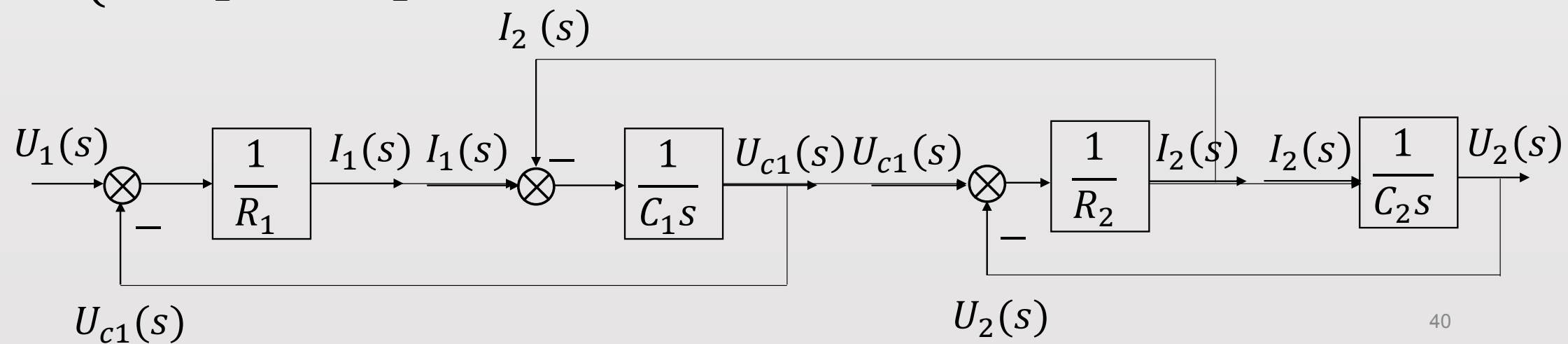
RC组成的四端网络

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = R_1 i_1 + U_{c1} \\ U_{c1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \\ U_{c1} = R_2 i_2 + U_2 \\ U_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \end{array} \right. \xrightarrow{L\text{变换}} \left\{ \begin{array}{l} U_1(s) - U_{c1}(s) = R_1 I_1(s) \\ U_{c1}(s) = \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] \\ U_{c1}(s) - U_2(s) = R_2 I_2(s) \\ U_2(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{I_1(s)}{U_1(s) - U_{c1}(s)} = \frac{1}{R_1} \\ \frac{U_{c1}(s)}{I_1(s) - I_2(s)} = \frac{1}{C_1 s} \\ \frac{I_2(s)}{U_{c1}(s) - U_2(s)} = \frac{1}{R_2} \\ \frac{U_2(s)}{I_2(s)} = \frac{1}{C_2 s} \end{array} \right.$$



RC组成的四端网络





# 框图的等效变换

**框图的等效变换相当于在框图上进行数学方程的运算。**

常用的方框图等效变换方法可归纳为两类：

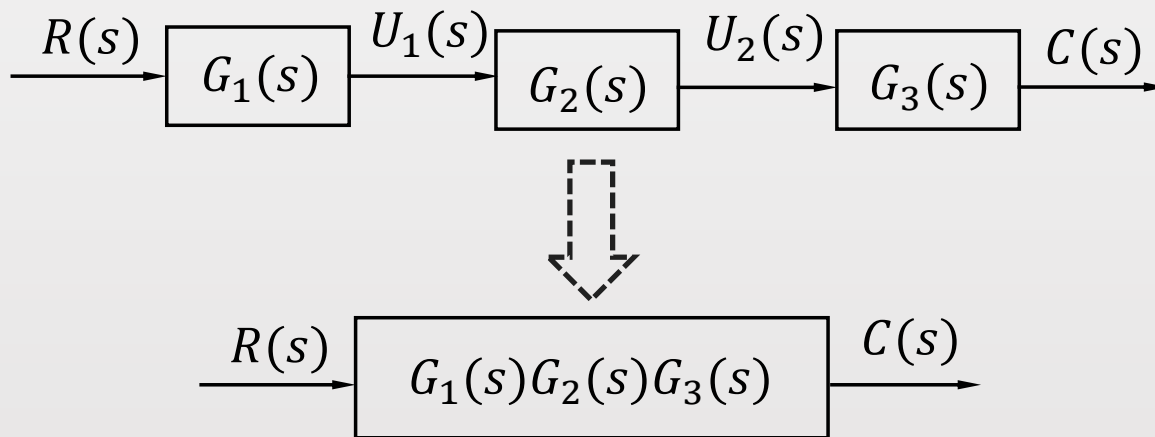
- 环节的合并（串联、并联、反馈）
- 信号分支点或相加点的等效移动

框图变换必须遵循的原则是：

变换前、后的数学关系保持不变

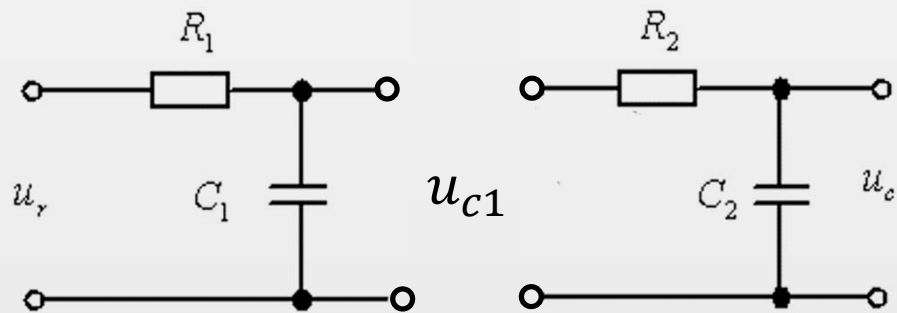
# 环节的串联

**特点:** 前一个环节的输出信号就是后一环节的输入信号。



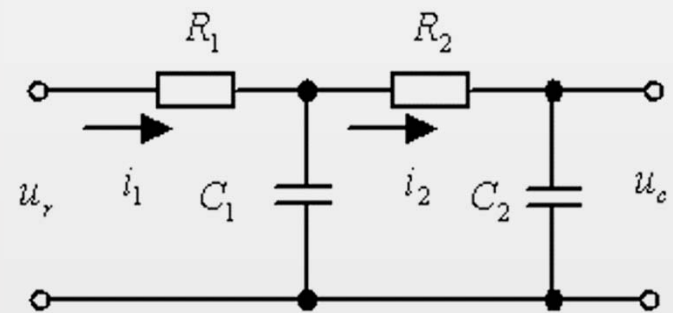
$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

## 负载效应



$$R_1 C_1 \frac{du_{c1}}{dt} + u_{c1} = u_r \quad R_2 C_2 \frac{du_c}{dt} + u_c = u_{c1}$$

$$G_1(s) = \frac{U_{c1}}{U_r} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \quad G_2(s) = \frac{U_c}{U_{c1}} = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$



$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$G(s) = \frac{U_c}{U_r} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

$$G_1(s)G_2(s) \neq G(s)$$

# 环节的并联

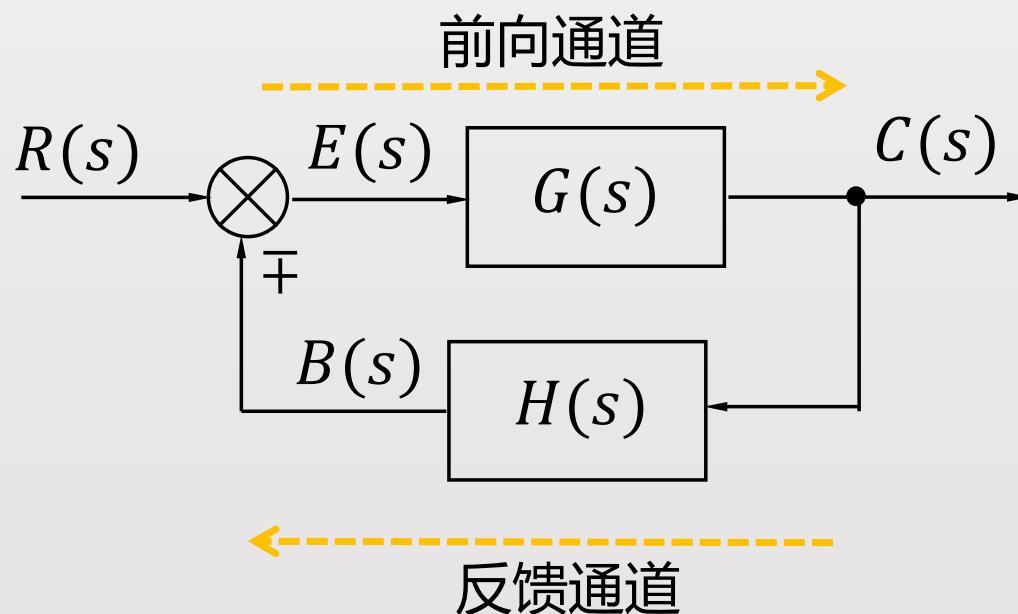
**特点:** 各环节的输入信号相同，输出信号相加（或相减）



$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

# 反馈连接

**特点：**将系统或环节的输出信号反馈到输入端，并与原输入信号进行比较后再作为输入信号



$$\begin{cases} E(s) = R(s) - B(s) \\ B(s) = C(s)H(s) \\ C(s) = E(s)G(s) \end{cases}$$

$$C(s) = [R(s) - C(s)H(s)]G(s)$$

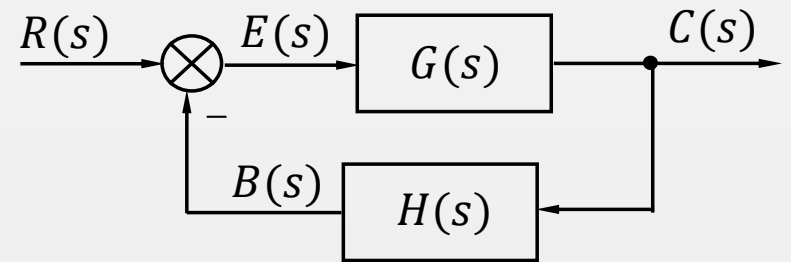
闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

$$= \frac{\text{前向通道传递函数}}{1 \pm \text{开环传递函数}}$$

开环传递函数

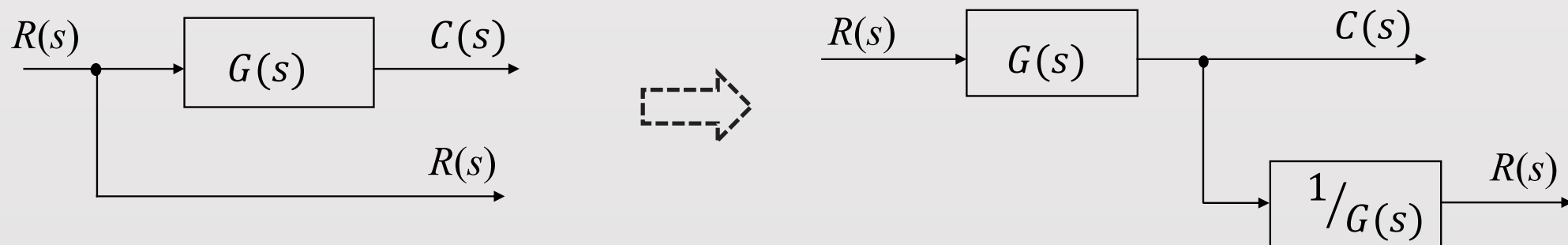
$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$



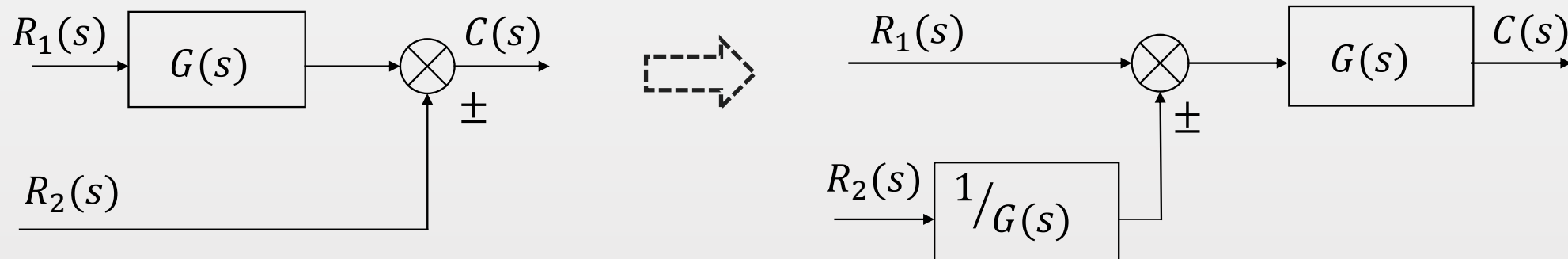
## 引出点前移



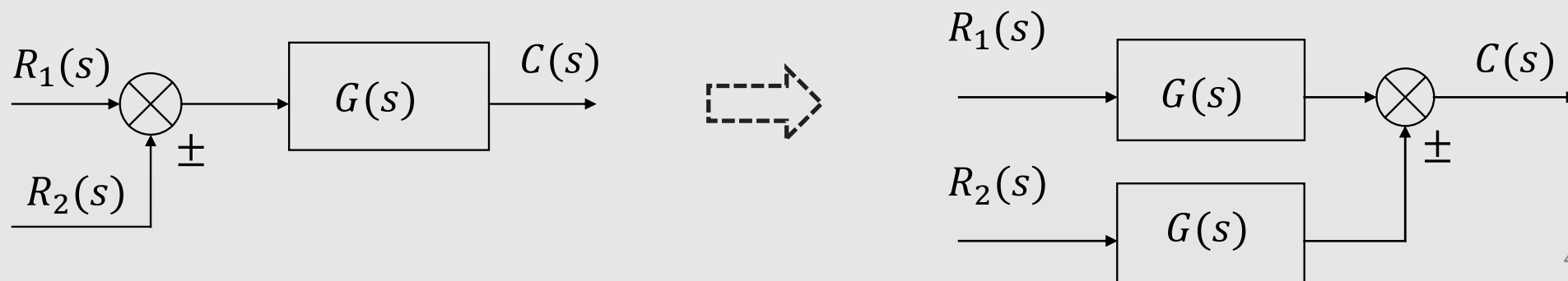
## 引出点后移



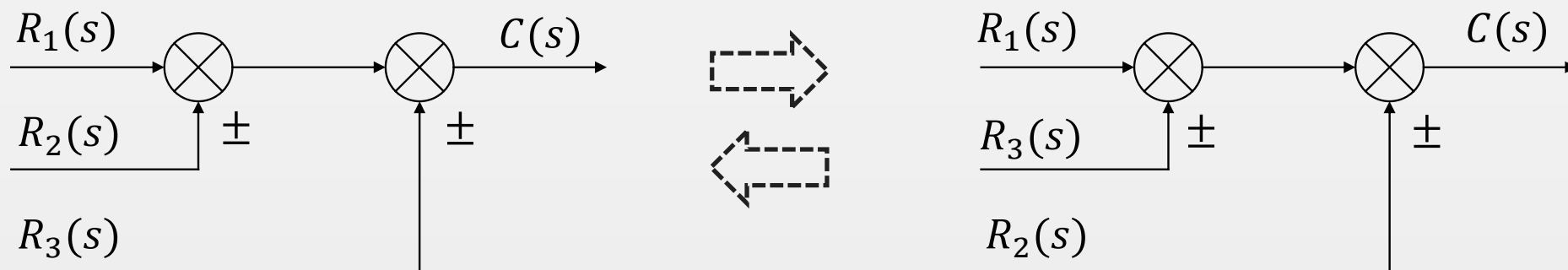
## 汇合点前移



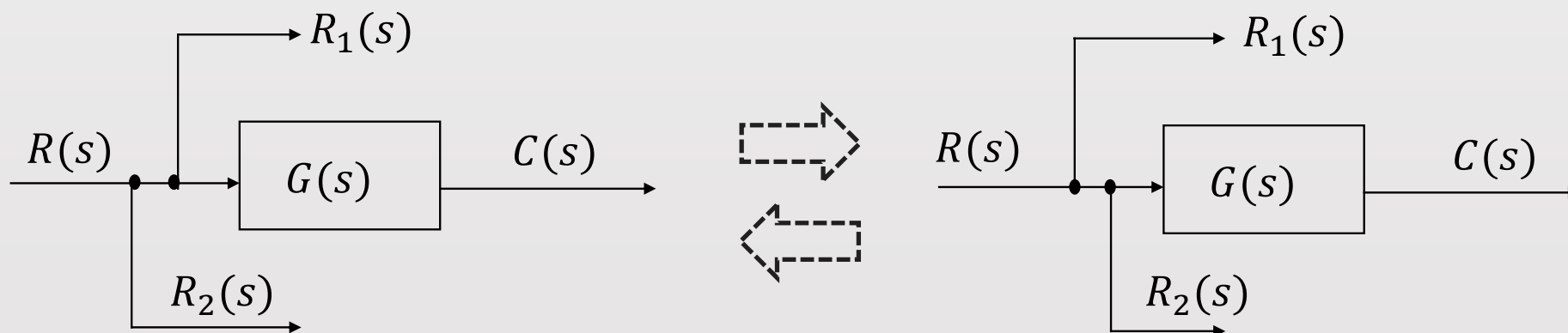
## 汇合点后移



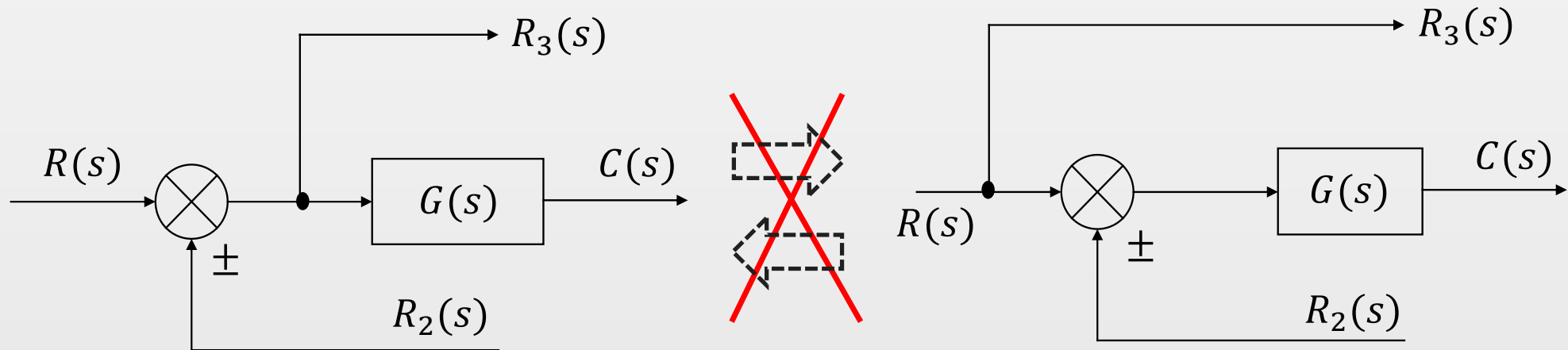




相邻的信号汇合点位置可以互换



同一信号的引出点位置可以互换



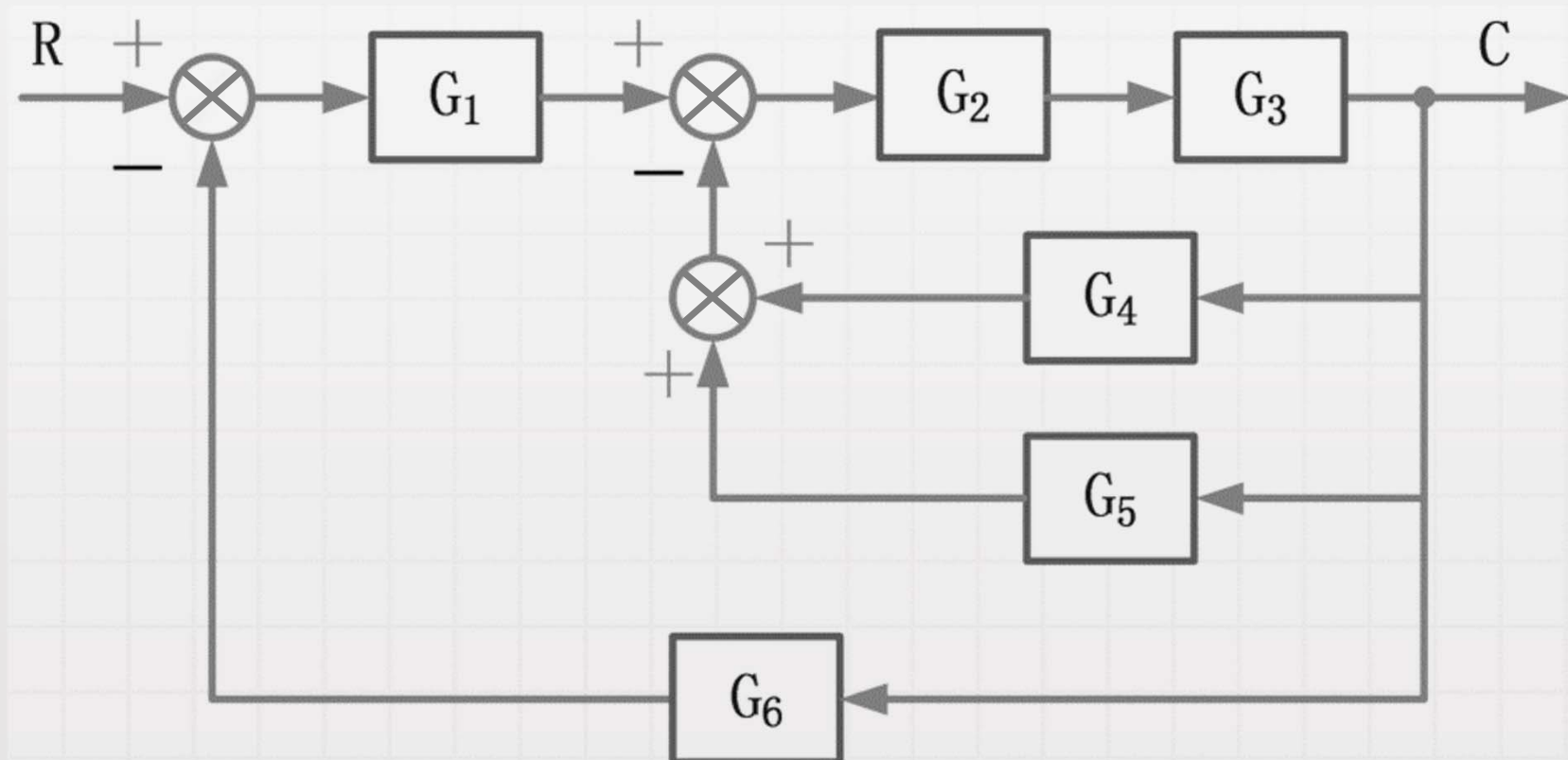
💣 汇合点和引出点在一般情况下，不能互换

■结构图的变换是**手段**，结构图的化简才是**目的**

■变换和化简的基本原则是**等效原则**

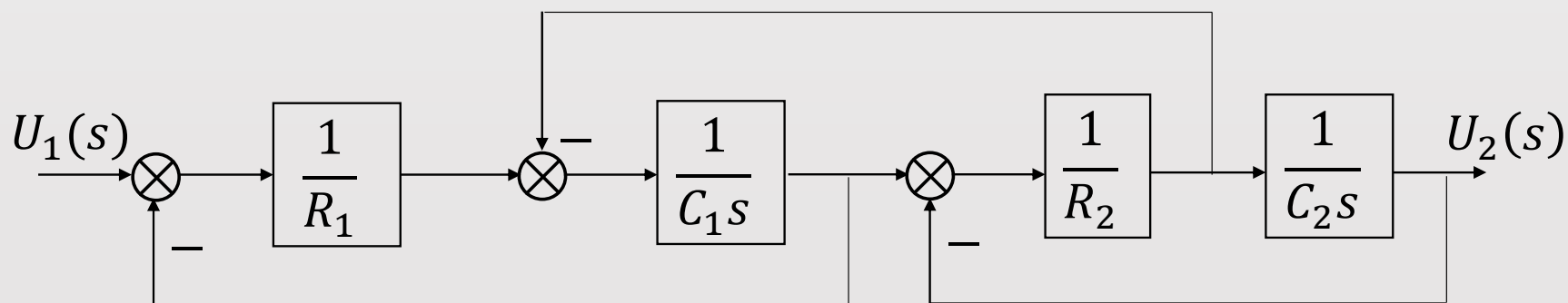
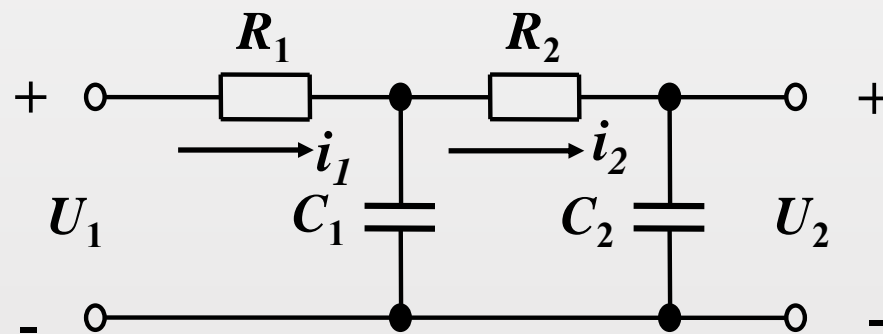
在结构图的变换和化简过程中，只能减少或增加一些中间变量，但各变量之间的**数学关系不能改变**。

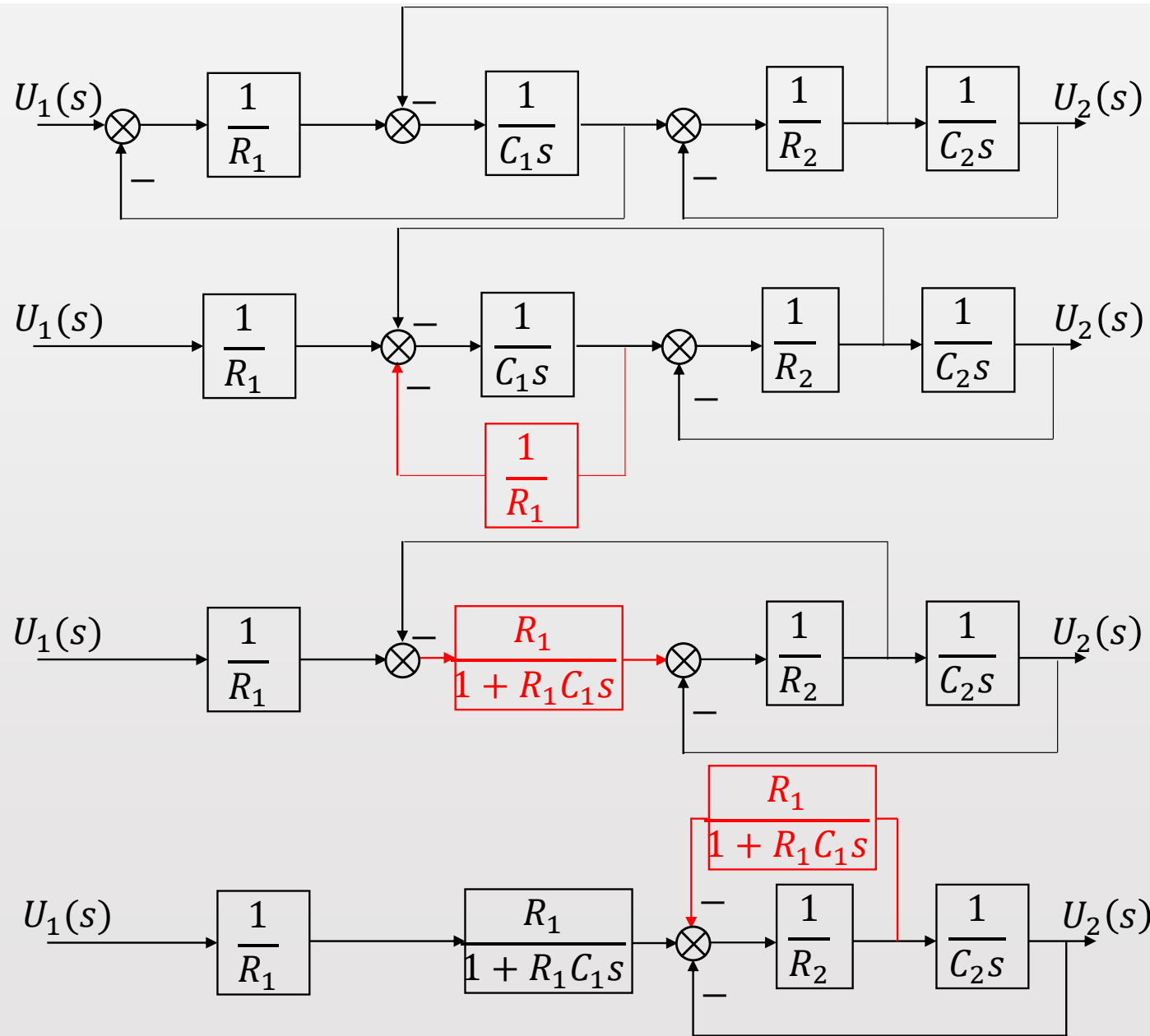
例2-6-1 试求图所示多回路系统的闭环传递函数 $C(s)/R(s)$  P37

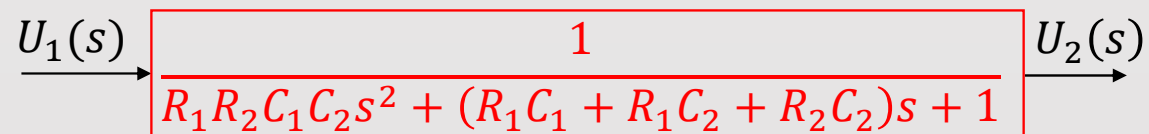
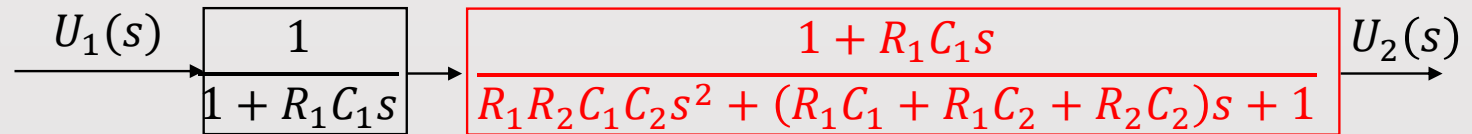
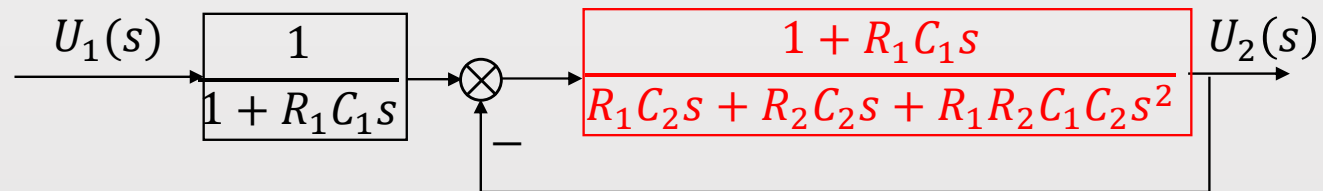
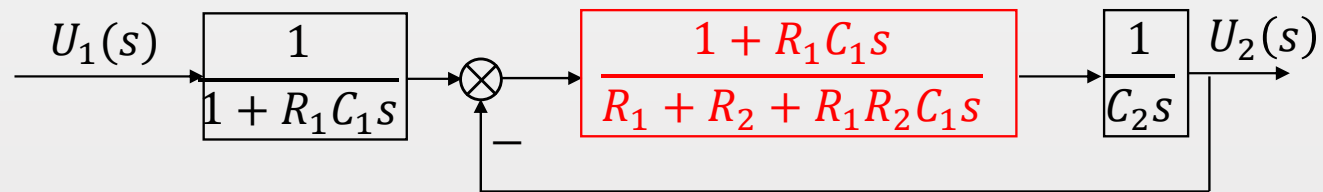
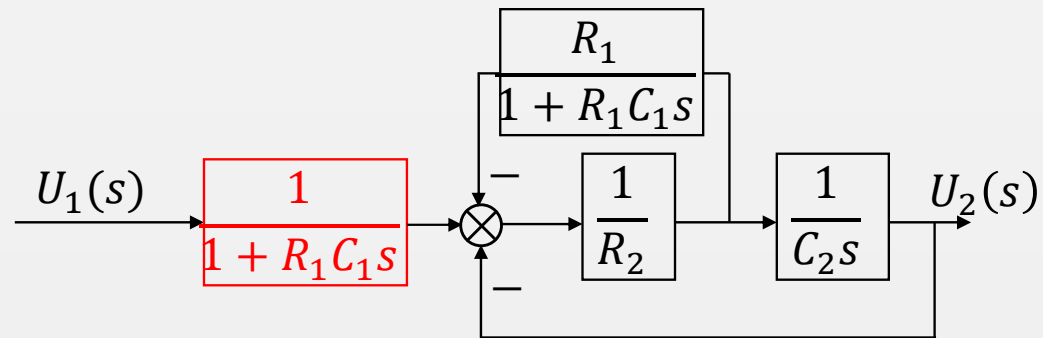


例：已知如图RC四端无源网络的框图，试用框图化简的方法证明传递

函数为 
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$





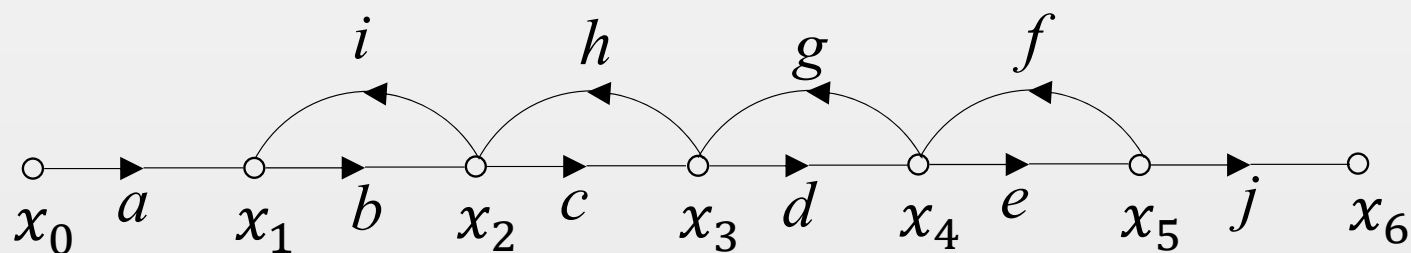


## 第七节 信号流程图

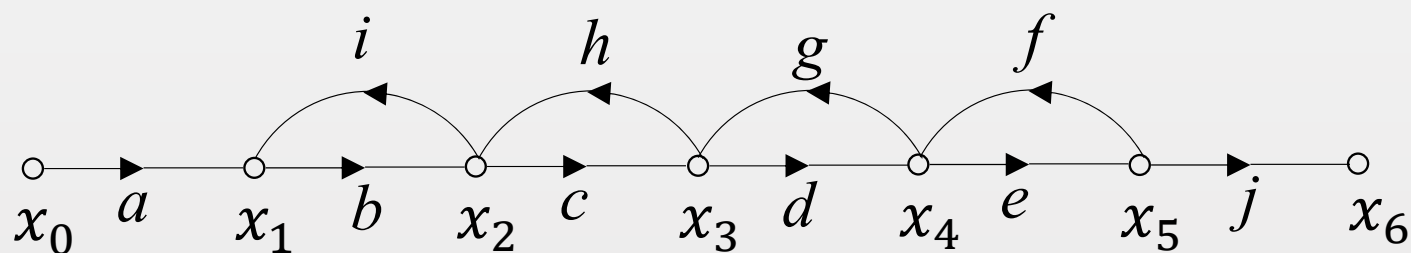
信号流程图（信号流图）和框图类似，都可用来表示系统结构和信号传送过程中的数学关系。

信号流程图也是数学模型一种表示。





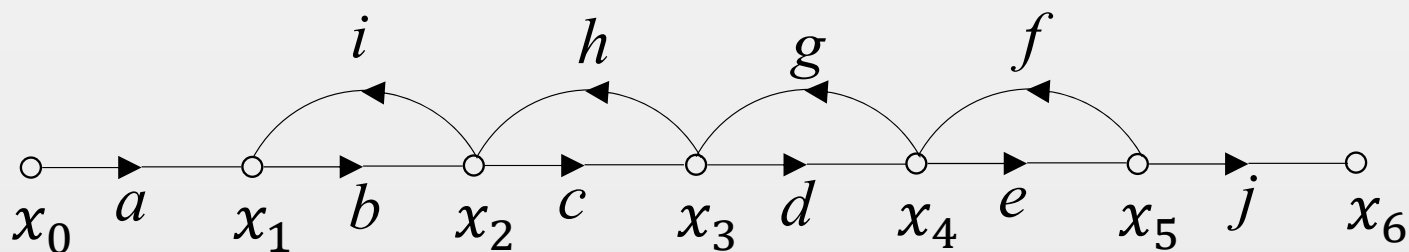
- 小圆圈“○”表示变量，称为**节点**
- 节点之间用有向线段“→”连接，称为**支路**
- 在支路上标明前后两个变量之间的数学关系，称为**传输（增益）**



**源节点：**只有出支路的节点，相当于输入信号。（ $x_0$ ）

**汇节点：**只有入支路的节点，相当于输出信号。（ $x_6$ ）

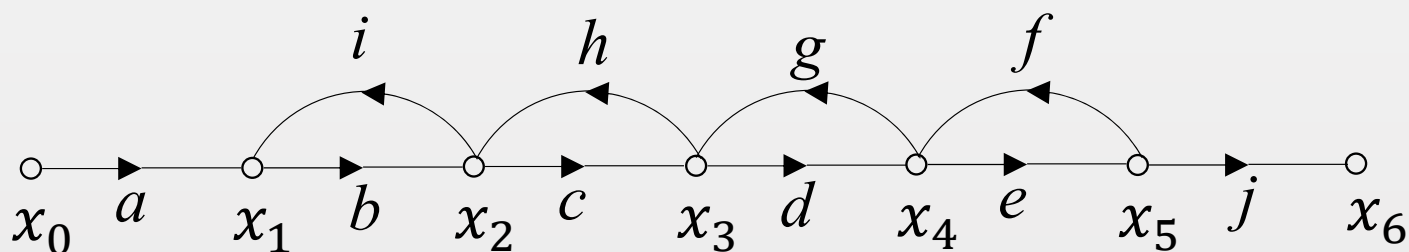
**混合节点：**既有入支路，又有出支路的节点，相当于框图中的比较点或引出点。（ $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ ）



**通道**：又称为路径，是指从一个节点出发，沿着支路的箭头方向相继经过多个节点间的支路。（ $x_0$ 到 $x_3$ 的通道： $x_0-x_1-x_2-x_3$ ）

**通道传输（通道增益）**：沿通道各支路传输的乘积。（ $x_0$ 到 $x_3$ 的通道增益： $abc$ ）

**前向通道**：从源节点开始到汇节点终止，而且每个节点只通过一次的通道称为前向通道。（前向通道增益 $abcdej$ ）

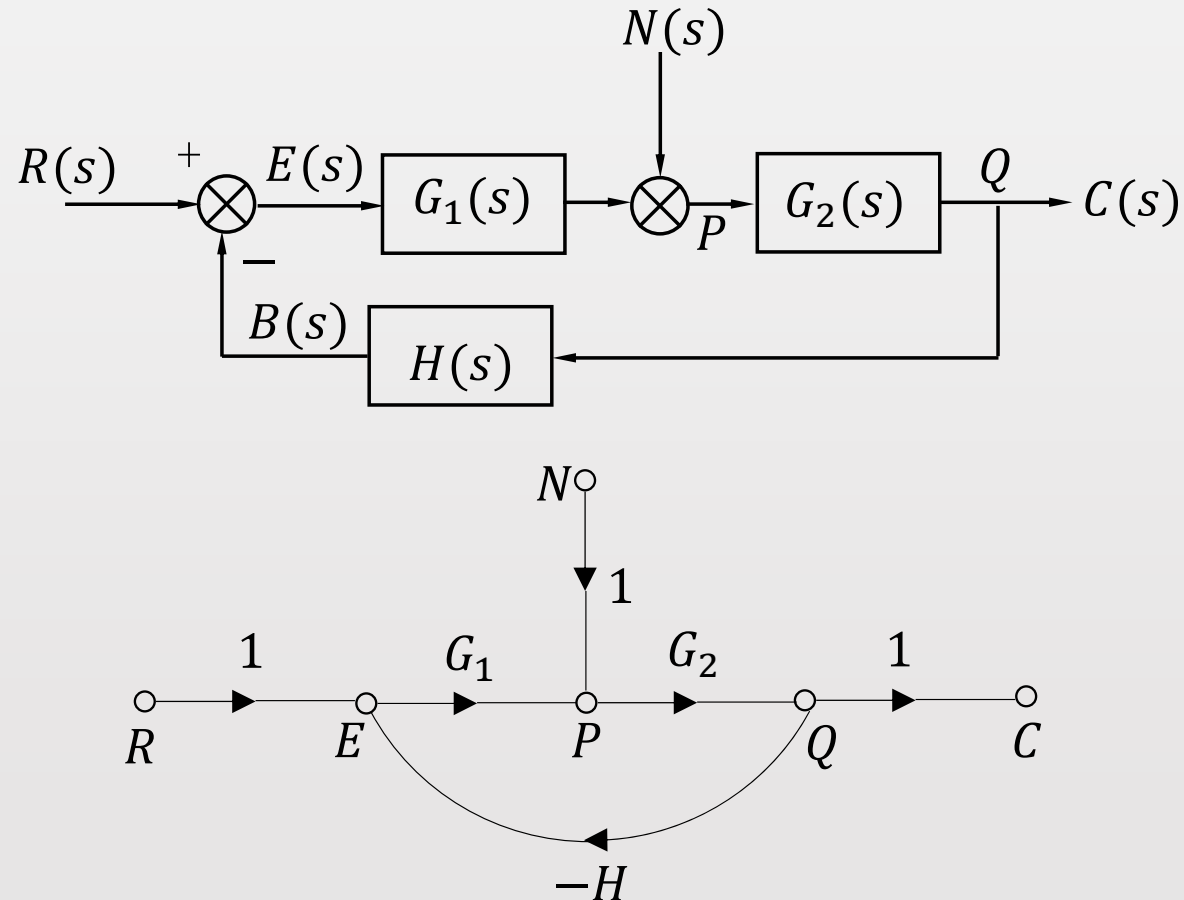


**回路（回环）：**通道的终点就是通道的起点，并且通道中其它节点只经过一次。（共有四个回环， $bi, ch, dg$ 和 $ef$ ）

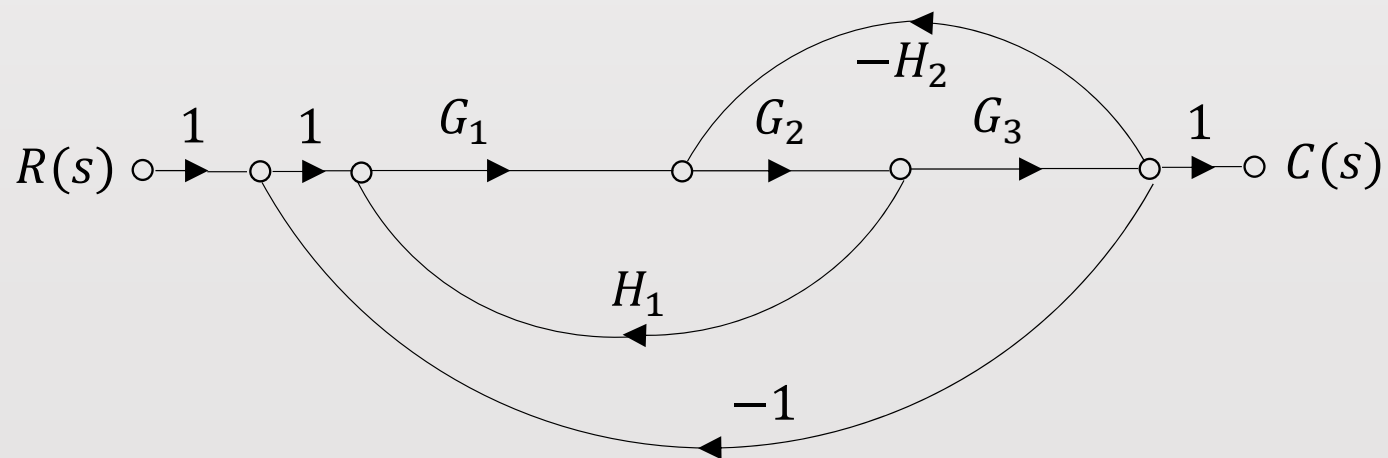
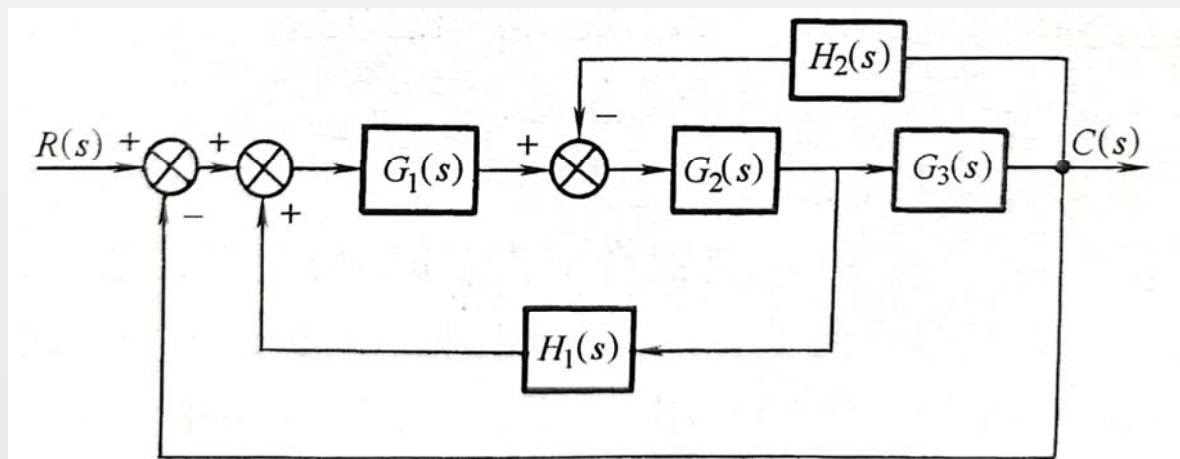
**不接触回环：**如果一些回环没有任何公共节点，就称它们为不接触回环。（两个互不接触的回环有三种组合，即 $bief, bidg$ 和 $chef$ 。本系统没有三个及三个以上互不接触的回环。）

# 信号流图与框图的对应关系

信号流图	框图
源节点	输入信号
汇节点	输出信号
混合节点	汇合点，引出点
支路	环节
支路传输	环节传递函数



例：根据下图所示的系统框图画信号流程图



## 梅逊公式

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$T$  : 从源节点至任何节点的传输

$P_k$  : 第 $k$ 条前向通道的传输

$\Delta$  : 特征式  $\Delta = 1 - \Sigma L_1 + \Sigma L_2 - \Sigma L_3 + \cdots + (-1)^m \Sigma L_m$

$\Sigma L_1$  : 所有不同回环的传输之和

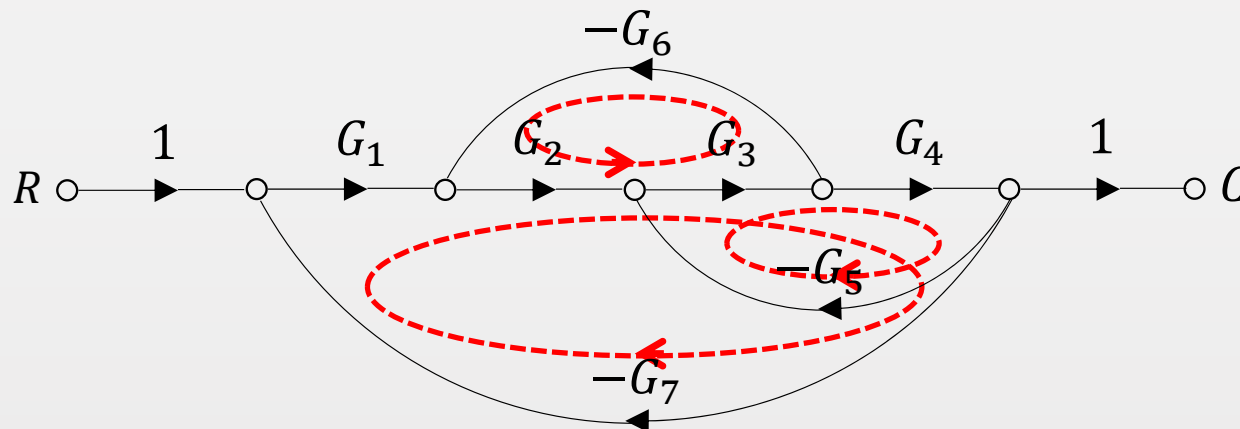
$\Sigma L_2$  : 每两个互不接触回环传输乘积之和

$\Sigma L_3$  : 每三个互不接触回环传输乘积之和

$\Sigma L_m$  : 任何 $m$ 个互不接触回环传输乘积之和

$\Delta_k$  : 第 $k$ 条前向通路特征式的余因子, 即从 $\Delta$ 中除去与第 $k$ 条前向通道 $P_k$ 相接触的回环后余下的部分。 ( 将与第 $k$ 条前向通路相接触的回路传输代以0值, 余下的 $\Delta$ 记为 $\Delta_k$  )

例：用梅逊公式求图所示信号流图的总的传递函数



只有一条前向通道：  $P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$

三个回环：  $-G_2 G_3 G_6$ 、  $-G_3 G_4 G_5$ 、  $-G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$

$$\Sigma L_1 = -G_2 G_3 G_6 - G_3 G_4 G_5 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$$

$$\Sigma L_2 = \Sigma L_3 = \dots = \Sigma L_m = 0$$

$$\Delta = 1 - \Sigma L_1 = 1 + G_2 G_3 G_6 + G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$$

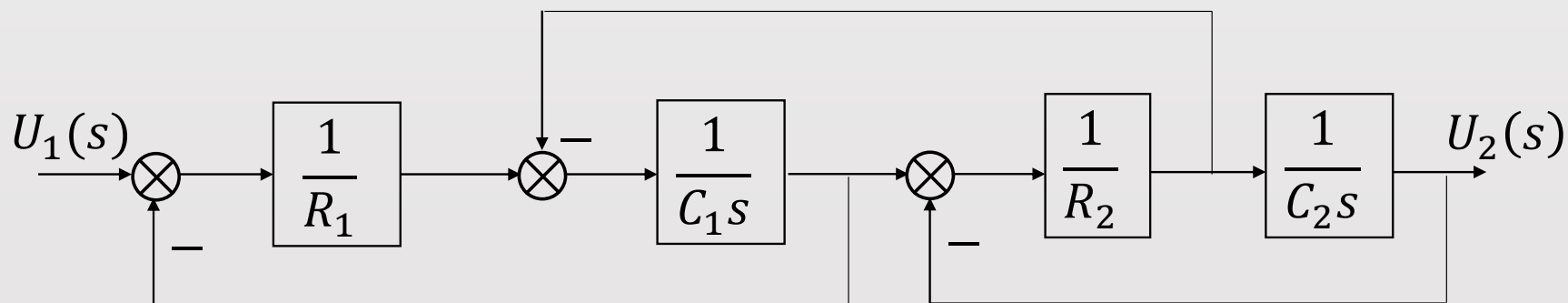
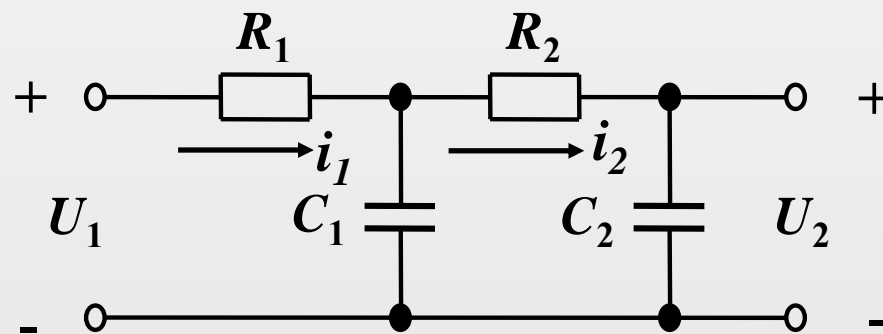
$$\Delta_1 = 1$$

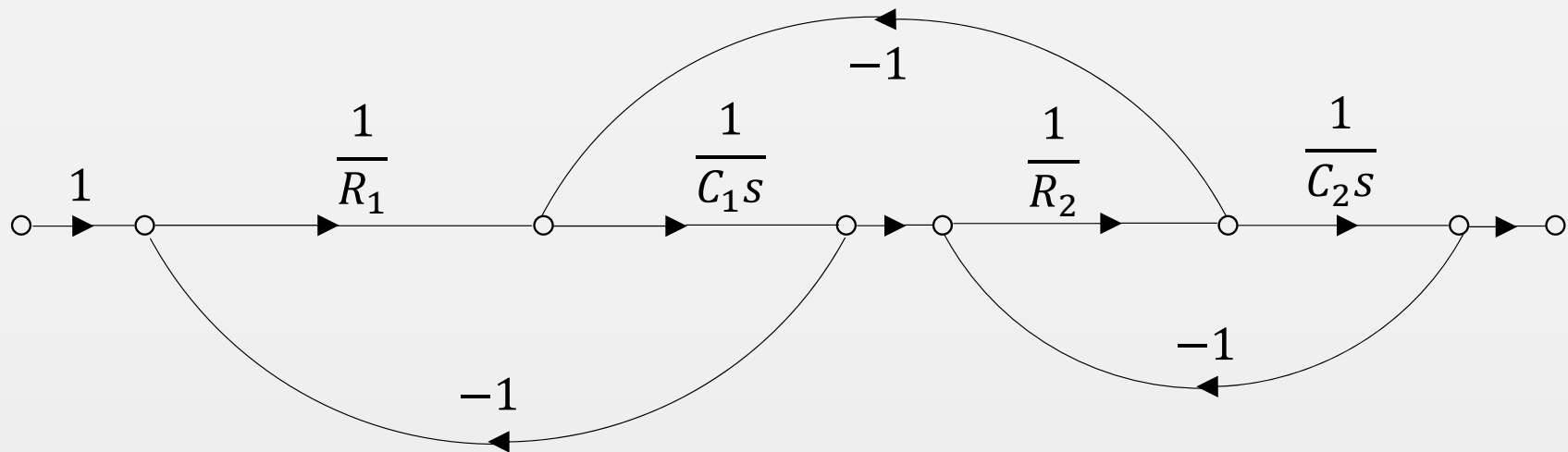
$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_6 + G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$$



例：已知如图RC四端无源网络的框图，试用梅逊增益公式证明传递函数为

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$





只有一条前向通道:  $P_1 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$

三个回环:  $-\frac{1}{R_1 C_1 s}, -\frac{1}{R_2 C_2 s}, -\frac{1}{R_2 C_1 s}$

$$\Sigma L_1 = -\frac{1}{R_1 C_1 s} - \frac{1}{R_2 C_2 s} - \frac{1}{R_2 C_1 s}$$

$$\Sigma L_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

$$\Sigma L_3 = \dots = \Sigma L_m = 0$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1 - \frac{\Sigma L_1}{1} + \frac{\Sigma L_2}{1} \\
&= 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2} \\
&= \frac{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + R_1 C_1 s + R_1 C_2 s + 1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}
\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + R_1 C_1 s + R_1 C_2 s + 1} \cdot \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2} \\
&= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2)s + 1}
\end{aligned}$$

# 系统数学模型建立过程

