自动控制原理

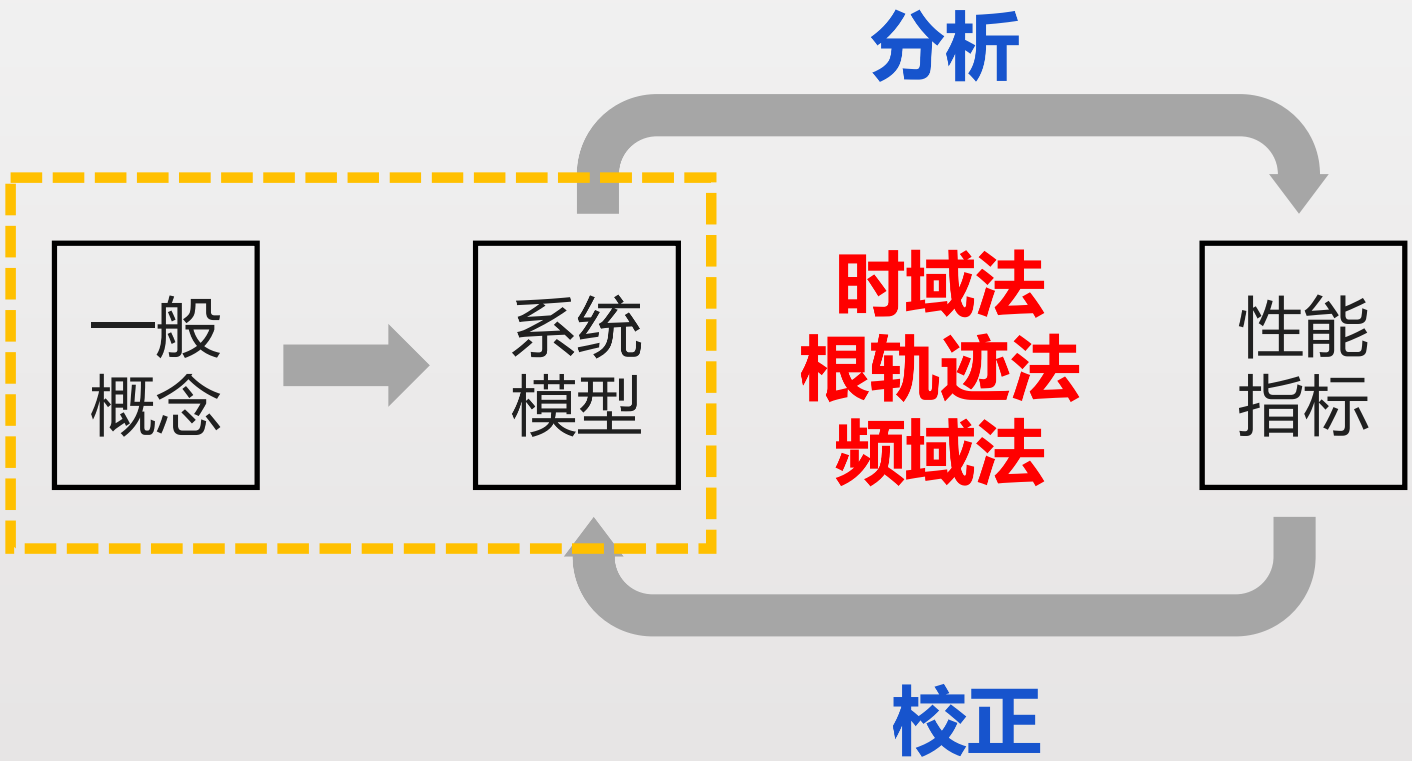
汪 晶

QQ:150302300

第二章 线性系统的数学模型

本章知识点：

■线性系统的输入－输出时间函数描述
■建立系统数学模型的机理分析法
■传递函数的定义与物理意义
■典型环节的数学模型
■框图及化简方法
■信号流程图与梅逊公式应用


分析
一般
概念
系统
模型
时域法
根轨迹法
频域法
性能
指标
校正

建立数学模型的方法

1. 解析法（理论建模）
2. 实验法（系统辨识）

经典控制理论中系统数学模型常见的描述形式

1. 微分方程（时域模型）
2. 传递函数（复域模型）
3. 频率特性（频域模型）

第一节 线性系统的输入-输出时间函数描述

线性定常系统微分方程的一般形式：

$r_1(t)$

$r_2(t)$

$c_1(t)$

$c_2(t)$

$ar_1(t) \pm br_2(t)$ $\qquad$ $ac_1(t) \pm bc_2(t)$

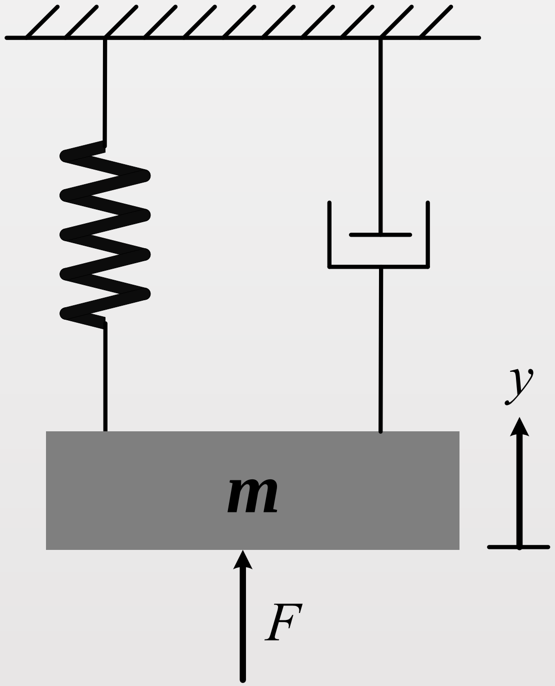
$$a_0 \frac{\mathrm{d}^n c(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} c(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} + a_n c(t)$$

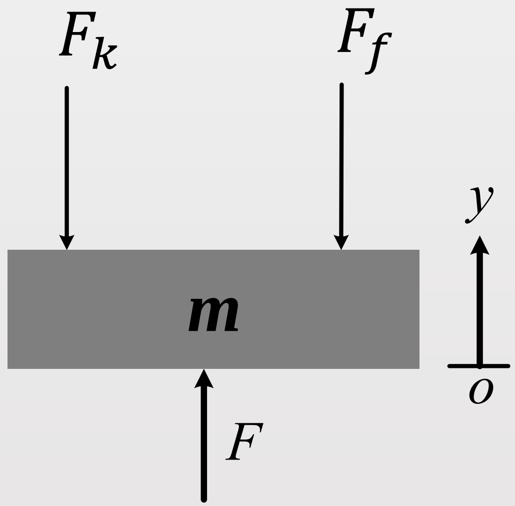
$$= b_0 \frac{\mathrm{d}^m r(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_1 \frac{\mathrm{d}^{m-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + b_m r(t)$$

解析法列写系统微分方程的步骤：

1. 确定系统或元部件的输入、输出变量;
2. 依据各元部件输入、输出变量所遵循的物理定律列写微分方程组;
3. 消去中间变量，求出仅含输入、输出变量的线性常微分方程;
4. 将微分方程整理成规范形式，即将输出变量及其各阶导数项放在等号左边，输入变量及其各阶导数项放在等号右边，分别按降阶顺序排列。

例：弹簧阻尼系统，图中质量为m的物体受到外力F的作用，产生位移y，求该系统的输入-输出描述

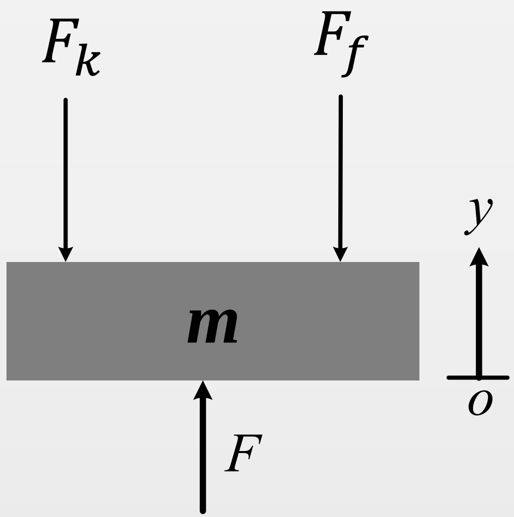




解：（1）输入量为F，输出量为y;

（2）分析物体m的受力情况，列写微分方程组;

根据牛顿定律：$\sum F = F - F_k - F_f = ma$



$F_k = ky$　　（k: 弹簧系数）

$F_f = fv = f\dfrac{dy}{dt}$　　（f: 粘滞摩擦系数）

$a = \dfrac{d^2y}{dt^2}$　　（a: 加速度）

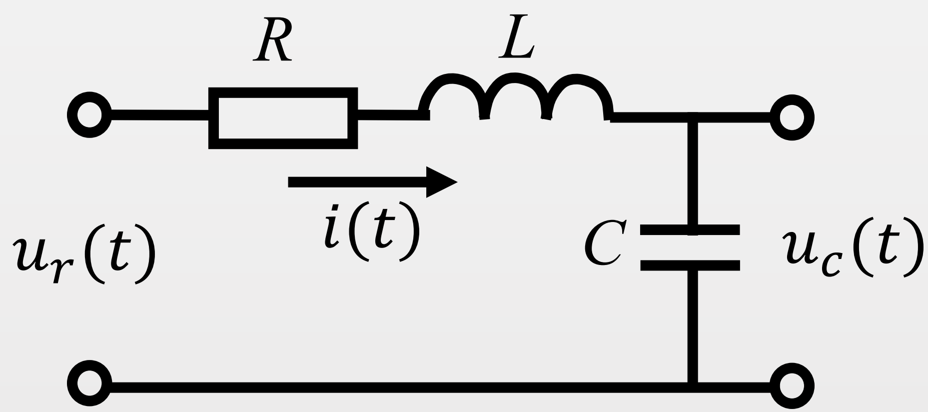
（3）消去中间变量求出描述系统输入-输出关系的微分方程

$$F - ky - f\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

（4）将微分方程整理成规范形式

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F}$$

例：R-L-C串联电路，试列出以$u_r(t)$为输入量，$u_c(t)$为输出量的微分方程式。



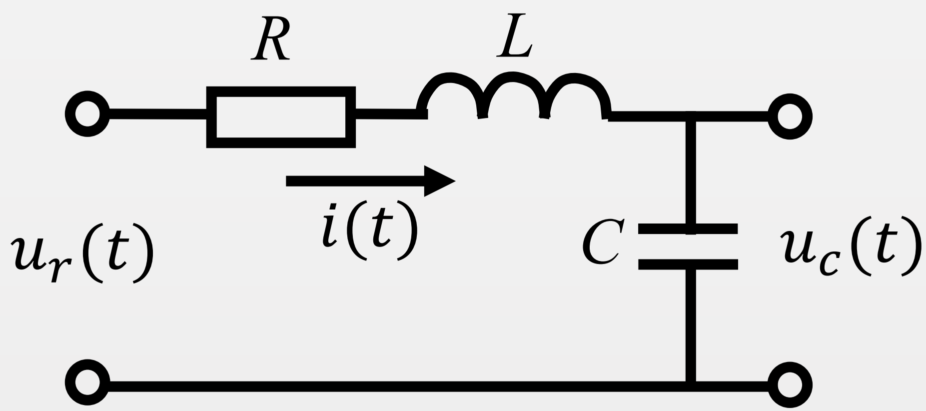
解：（1）确定输入量为$u_r(t)$，

输出量为$u_c(t)$，中间变量$i(t)$；

（2）列写微分方程组：

由KVL：
$$u_r(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_c(t)$$

由电容特性：
$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$



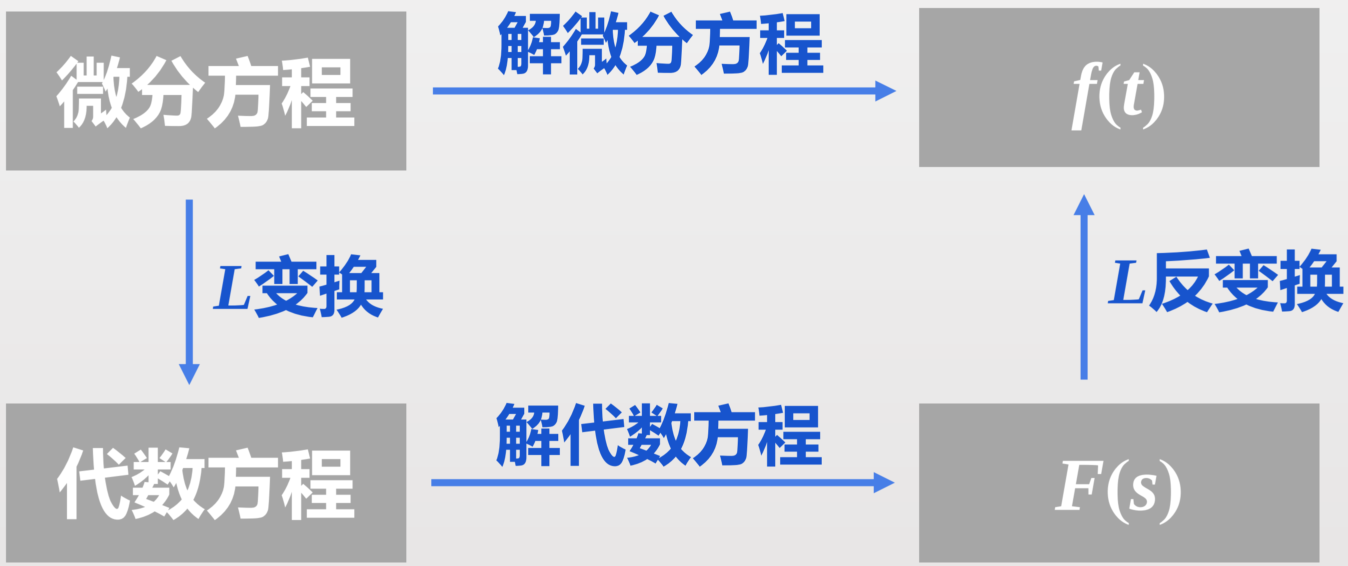
（3）消去中间变量

$$u_r(t) = RC\frac{du_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t)$$

（4）将微分方程整理成规范形式

$$\boxed{LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)}$$

微分方程求解方法



用拉氏变换方法解微分方程

系统微分方程 $\begin{cases} y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_2 \cdot y(t) = \boxed{1(t)} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

L变换 $\quad (s^2 + a_1 s + a_2) \cdot Y(s) = \dfrac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + a_1 s + a_2)}$$

L反变换 $\quad y(t) = L^{-1}[Y(s)]$

常见函数L变换	$f(t)$	$F(s)$
单位脉冲	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡	t	$1/s^2$
单位加速度	$t^2/2$	$1/s^3$
指数函数	e^{-at}	$1/(s+a)$
正弦函数	$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
余弦函数	$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

序号	L变换重要定理	
1	线性性质	$L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$
2	微分定理	$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$
3	积分定理	$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$
4	实位移定理	$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau \cdot s} \cdot F(s)$
5	复位移定理	$L[e^{A \cdot t} f(t)] = F(s-A)$
6	初值定理	$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$
7	终值定理	$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$

例：已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)}$ ，求 $f(t)=?$

解： $F(s)=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(s+a)-s}{s(s+a)}$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{a}[1-e^{-at}]$$

例：已知 $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2+4s+3}$，　求$f(t)=?$

解. $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\dfrac{C_1}{s+1}+\dfrac{C_2}{s+3}$

$$C_1=\lim_{s\to-1}(s+1)\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

$$C_2=\lim_{s\to-3}(s+3)\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{-3+2}{-3+1}=\frac{1}{2}$$

$$F(s)=\frac{1/2}{s+1}+\frac{1/2}{s+3}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

第二节 线性系统的输入-输出传递函数描述

传递函数：在零初始条件下，线性定常系统输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比。

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

零初始条件：

①输入是在$t=0$以后才作用于系统，因此，系统输入量及其各阶导数在$t\le 0$时均为0;

②在输入作用于系统之前时，系统是“相对静止”的，即系统输出量及其各阶导数在$t\le 0$时的值也为0。

微分方程一般形式：

$$a_0c^{(n)}+a_1c^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}c'+a_nc=b_0r^{(m)}+b_1r^{(m-1)}+\ldots+b_{m-1}r'+b_mr(t)$$

L变换：

$$[a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}s+a_n]C(s)=[b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m]R(s)$$

传递函数： $$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}=G(s)$$

极点:传递函数分母s多项式的根，也即线性微分方程特征方程的特征值。

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n=0$$

对应经典法

本质都是将微分方程化成代数方程进行求解

零点:传递函数分子s多项式的根。

$$b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m=0$$

$$G(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

考虑到零极点都有实数和共轭复数的情况

首1标准型
$$G(s)=K_1\frac{\prod_{j=1}^{m_1}(s-z_j)\prod_{k=1}^{m_2}(s^2+2\zeta_k\omega_ks+{\omega_k}^2)}{s^v\prod_{i=1}^{n_1}(s-p_i)\prod_{l=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_l\omega_ls+{\omega_l}^2)}$$

K_1： 根轨迹增益

尾1标准型
$$G(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m_1}(\tau_js+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2s^2+2\zeta_k\tau_ks+1)}{s^v\prod_{i=1}^{n_1}(T_is+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2s^2+2\zeta_lT_ls+1)}$$

K： 放大系数、增益

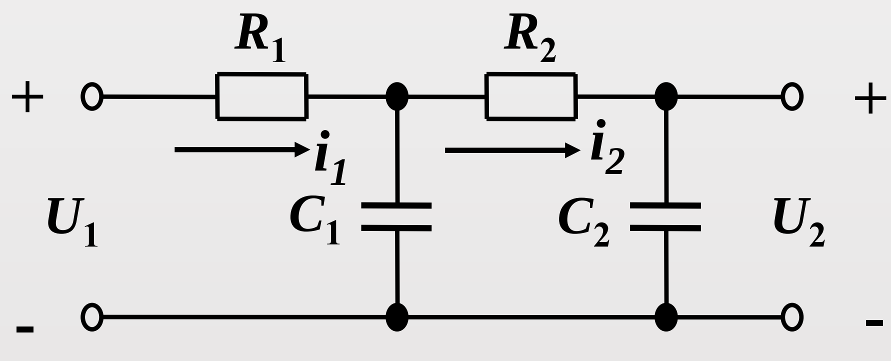
传递函数的性质：

$$\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = G(s)$$

①传递函数$G(s)$ 是复变量s的有理分式函数，具有复变函数的所有性质；
实际物理系统传递函数的分母阶次总是大于或等于分子阶次，即$n \geq m$
②传递函数$G(s)$只取决于系统或元部件自身的结构和参数，与外作用的形式和大小无关；
③传递函数$G(s)$ 与微分方程有直接联系；
复变量s相当于时域中的微分算子

例：图为RC四端无源网络。 $U_1(t)$输入量， $U_2(t)$为输出量，试求出该系统的传递函数。

解：设回路电流i_1 、i_2 ，列写方程组如下：



$$U_1 = R_1 i_1 + U_{c1} \qquad (1)$$

$$U_{c1} = \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)dt \qquad (2)$$

$$U_{c1} = R_2 i_2 + U_{c2} \qquad (3)$$

$$U_{c2} = \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \qquad (4)$$

$$U_2 = U_{c2} \qquad (5)$$

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2U_2}{dt}+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)\frac{dU_2}{dt}+U_2=U_1$$

RC四端网络的数学模型，为二阶线性常微分方程

设初始状态为零，对方程两边求拉氏变换，得

$$R_1C_1R_2C_2\ s^2\ U_2(s)+[R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2]sU_2(s)+U_2(s)=U_1(s)$$

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}$$

此即为RC四端网络的传递函数

传递函数的局限性

① 原则上不反映非零初始条件时系统响应的全部信息；

② 适合于描述单输入/单输出系统；

③ 只能用于表示线性定常系统。

$$a_0c^{(n)} + a_1c^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}c' + a_nc = b_0r^{(m)} + b_1r^{(m-1)} + \ldots + b_{m-1}r' + b_mr(t)$$

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 4c = 2\dot{r} + 4r$$

$$\ddot{c} + 2 \cdot \underline{\dot{c} \cdot c} + \underline{4c^3} + \underline{4} = 2\dot{r} + 4\underline{r \cdot c}$$

$$\ddot{c} + \underline{a_1(t)}\dot{c} + \underline{a_2(t)}c = 2\dot{r} + 4r$$

第四节 典型环节的数学模型

典型环节：

- 比例环节
- 惯性环节
- 积分环节
- 微分环节 （一阶复合微分环节、二阶复合微分环节）
- 振荡环节
- 纯滞后环节

比例环节

运动方程： $c(t) = Kr(t) \qquad t \geq 0$

K为比例系数或放大系数

L变换： $C(s) = KR(s)$

传递函数： $$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$$

常见物理系统： 杠杆、放大器、电位器、齿轮系、测速发电机等

惯性环节

运动方程： $\tau \frac{d}{dt}c(t)+c(t)=Kr(t)$

K:比例系数　　　　τ:时间常数

L变换： $\tau sC(s)+C(s)=KR(s)$

传递函数： $$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{\tau s+1}$$

常见物理系统： $R-C$电路、直流电机的励磁回路

积分环节

运动方程： $c(t) = K\int r(t)\,dt$

L变换： $C(s) = K \cdot \frac{1}{s} R(s)$

传递函数： $\boldsymbol{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s}}$

常见物理系统：水箱（流量-液位）、电机拖动系统、电容上的电压与电流

微分环节（理想）

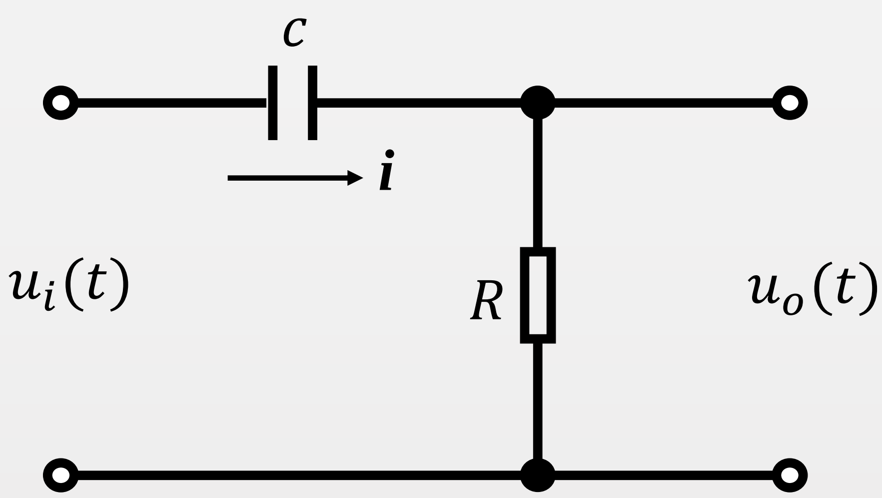
运动方程： $c(t) = \tau \frac{d}{dt} r(t)$

***L*变换：** $C(s) = \tau s R(s)$

传递函数： $\boldsymbol{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s}$

常见物理系统： 不存在

实际微分环节例子：RC电路



$$\begin{cases} u_i(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i dt + iR \\ u_o(t) = iR \end{cases}$$

$$RC\frac{du_i(t)}{dt} = u_o(t) + RC\frac{du_o(t)}{dt}$$

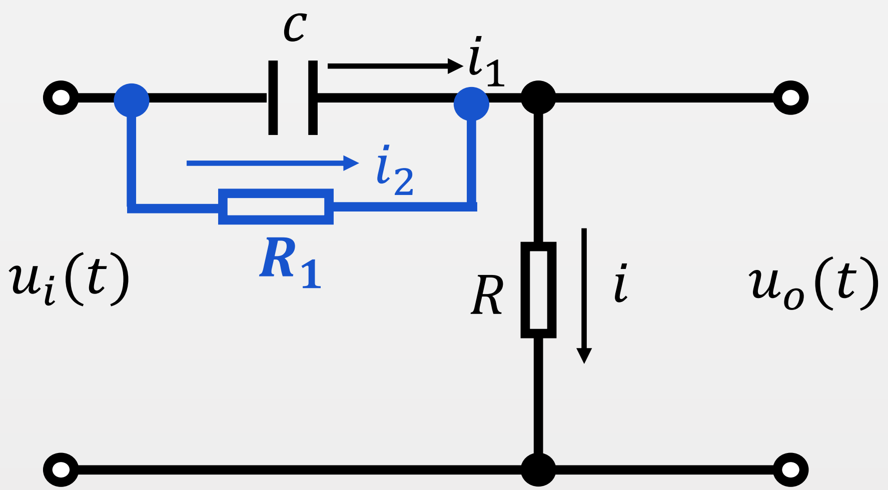
$$RCsU_i(s) = U_o(s) + RCsU_o(s) = (RCs+1)U_o(s)$$

$$G(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \qquad (\tau = RC)$$

微分环节(τs)和惯性环节$\left(\dfrac{1}{\tau s+1}\right)$的串联组合

更进一步：

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}R_1C\frac{du_i(t)}{dt}+\frac{R_2}{R_1+R_2}u_i(t)$$
$$=\frac{R_2}{R_1+R_2}R_1C\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)$$



$$G'(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\alpha\left(\frac{\boxed{\tau s+1}}{\alpha\tau s+1}\right)\qquad \alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2}\qquad \tau=R_1C$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\tau s}{\tau s+1}}$$

一个比例环节(1)和微分环节(τs)的并联组合

$\tau s+1$：比例微分（一阶复合微分）环节

二阶复合微分环节

运动方程： $c(t) = \tau^2 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t)$

***L*变换**$\therefore C(s) = \tau^2 s^2 R(s) + 2\zeta\tau s R(s) + R(s)$

传递函数： $\boldsymbol{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$

振荡环节

运动方程： $\tau^2 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$

τ：时间常数；ζ：阻尼系数（阻尼比），且$0 \le \zeta < 1$

L变换： $\tau^2 s^2 C(s) + 2\zeta\tau s C(s) + C(s) = R(s)$

传递函数： $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$

常见物理系统： 弹簧-质块-阻尼器系统、$R - L - C$电路

纯滞后（纯延迟）环节

运动方程： $c(t) = r(t-\tau)$ w: 纯滞后时间

L变换： $C(s) = e^{-\tau s}R(s)$

传递函数： $$\boldsymbol{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}}$$

常见物理系统： 传输延迟、测量点与混合点之间信号延迟

典型环节	传递函数	常见物理系统
比例环节	K	杠杆、放大器、电位器、齿轮系、测速发电机等
惯性环节	$1/_{\tau s+1}$	$R-C$电路、直流电机的励磁回路
积分环节	$1/_{s}$	水箱（流量-液位）、电机拖动系统、电容上的电压与电流
理想微分环节	τs	
一阶比例微分	$\tau s+1$	
二阶比例微分	$\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1$	
振荡环节	$1/_{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$	弹簧质块阻尼系统、$R-L-C$电路
纯滞后环节	$e^{-\tau s}$	传输延迟、测量点与混合点之间信号延迟

$$K\frac{\prod_{j=1}^{m_1}(\tau_j s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2 s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{s^v\prod_{i=1}^{n_1}(T_i s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2 s^2+2\zeta_l T_l s+1)}$$

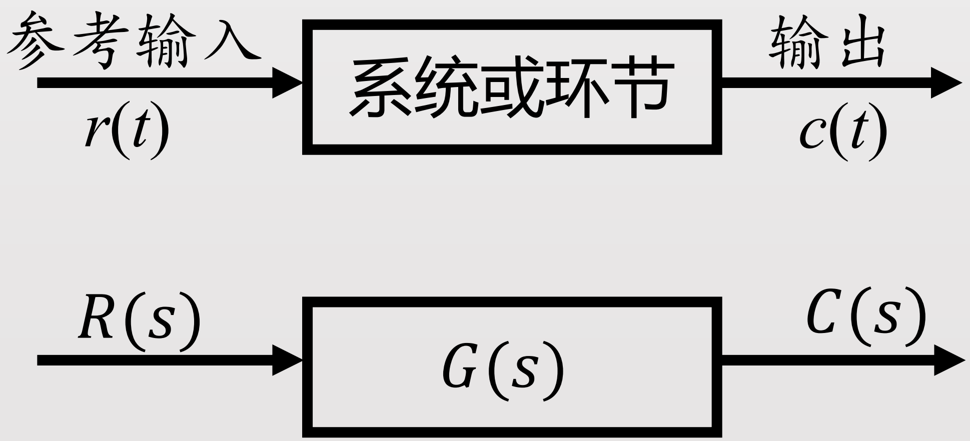
■一个元件的数学模型可能是若干个典型环节的数学模型的组合；

■若干个元件的数学模型的组合也可能就是一个典型环节的数学模型；

■任一传递函数都可看作典型环节的组合。

第六节 框图及其化简方法

框图：又称为方块图或结构图，是描述组成系统的各元部件之间信号传递关系的图形化数学模型。



典型环节框图

$R(s) \rightarrow \boxed{K} \rightarrow C(s)$

比例环节

$R(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{K}{\tau s + 1}} \rightarrow C(s)$

惯性环节

$R(s) \rightarrow \boxed{\tau s} \rightarrow C(s)$

微分环节

$R(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{K}{s}} \rightarrow C(s)$

积分环节

$R(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}} \rightarrow C(s)$

振荡环节

$R(s) \rightarrow \boxed{e^{-\tau s}} \rightarrow C(s)$

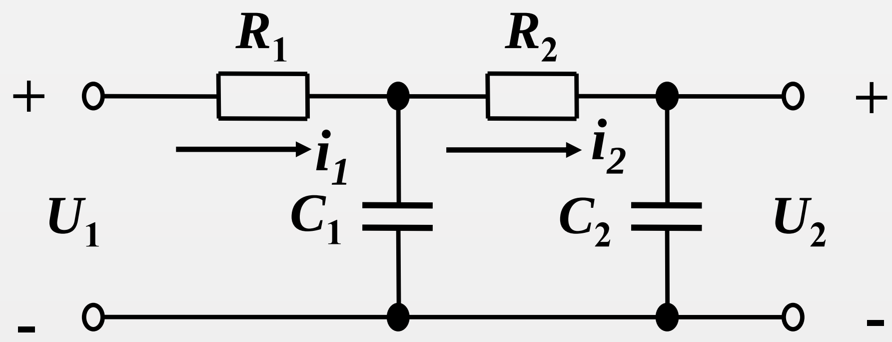
滞后环节

框图的绘制

① 考虑负载效应分别列写系统各元部件的微分方程或传递函数，并将它们用方框表示；

② 根据各元部件的信号流向，用信号线依次将各方框连接起来，便可得到系统的框图。

例：画出如下四端网络方框图



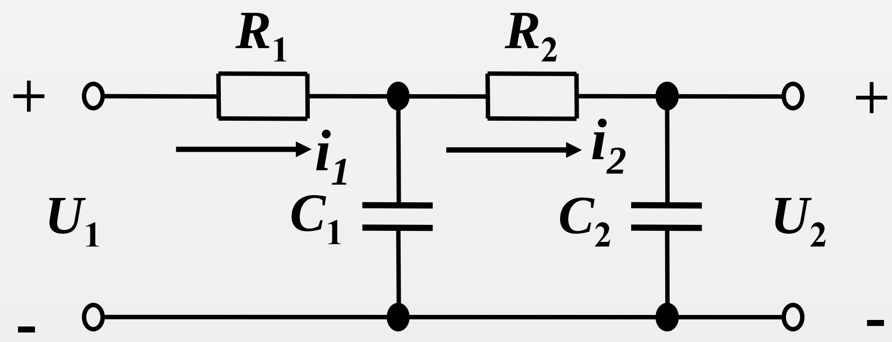
RC组成的四端网络

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 + U_{c1} \\ U_{c1} = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt \\ U_{c1} = R_2 i_2 + U_2 \\ U_2 = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2 dt \end{cases}$$

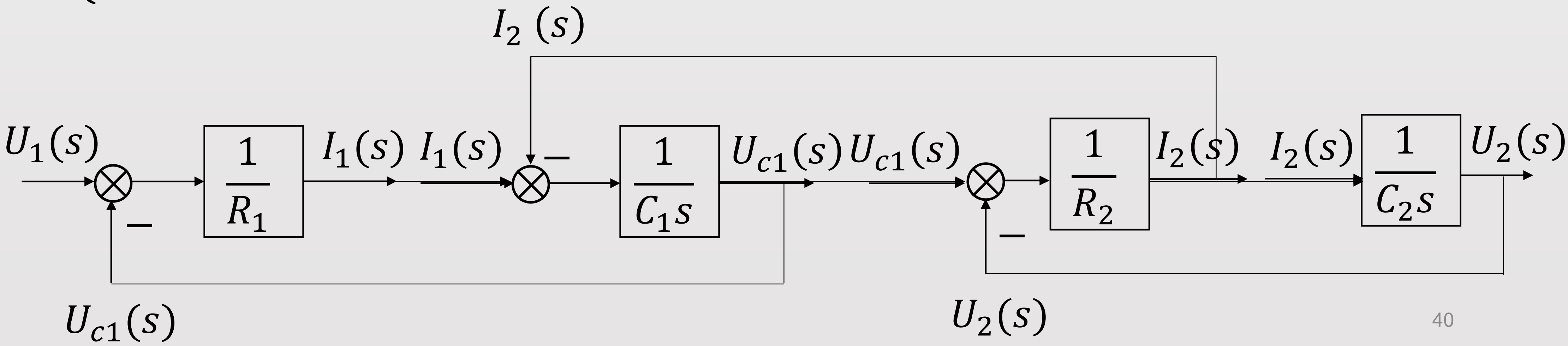
L变换

$$\begin{cases} U_1(s) - U_{c1}(s) = R_1 I_1(s) \\ U_{c1}(s) = \dfrac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] \\ U_{c1}(s) - U_2(s) = R_2 I_2(s) \\ U_2(s) = \dfrac{1}{C_2 s} I_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{I_1(s)}{U_1(s)-U_{c1}(s)} = \dfrac{1}{R_1} \\ \dfrac{U_{c1}(s)}{I_1(s)-I_2(s)} = \dfrac{1}{C_1 s} \\ \dfrac{I_2(s)}{U_{c1}(s)-U_2(s)} = \dfrac{1}{R_2} \\ \dfrac{U_2(s)}{I_2(s)} = \dfrac{1}{C_2 s} \end{cases}$$



RC组成的四端网络



框图的等效变换

框图的等效变换相当于在框图上进行数学方程的运算。

常用的方框图等效变换方法可归纳为两类：

■环节的合并（串联、并联、反馈）

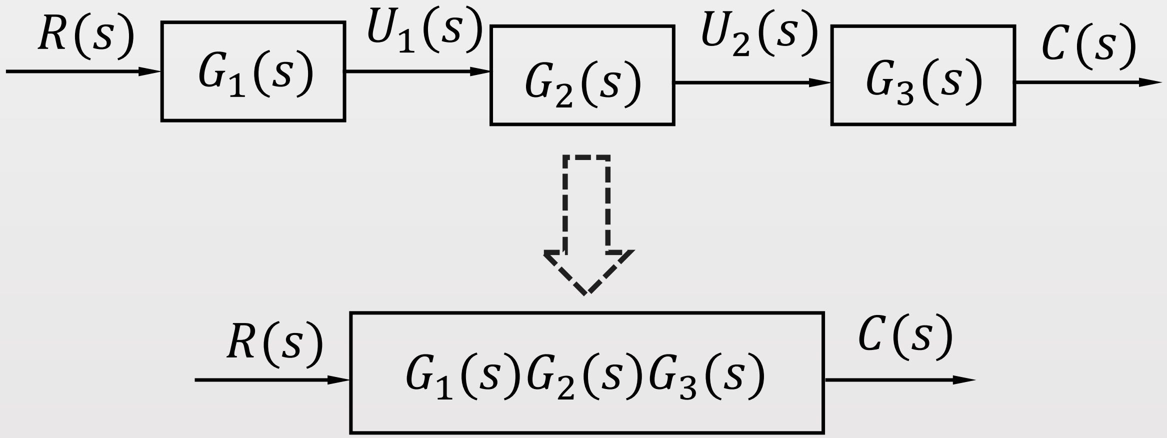
■信号分支点或相加点的等效移动

框图变换必须遵循的原则是：

变换前、后的数学关系保持不变

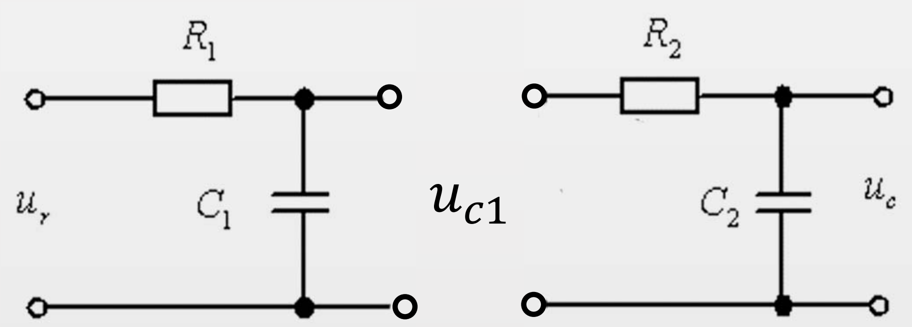
环节的串联

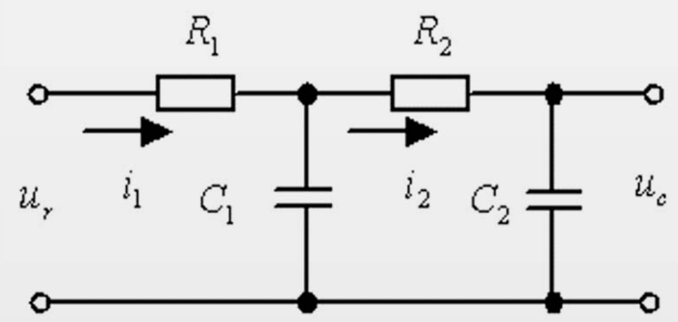
特点: 前一个环节的输出信号就是后一环节的输入信号。



$$G(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)$$

负载效应





$$\boldsymbol{R_1C_1\frac{du_{c1}}{dt}+u_{c1}=u_r} \qquad \boldsymbol{R_2C_2\frac{du_c}{dt}+u_c=u_{c1}}$$

$$\boldsymbol{R_1R_2C_1C_2\frac{d^2u_c}{dt^2}+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)\frac{du_c}{dt}+u_c=u_r}$$

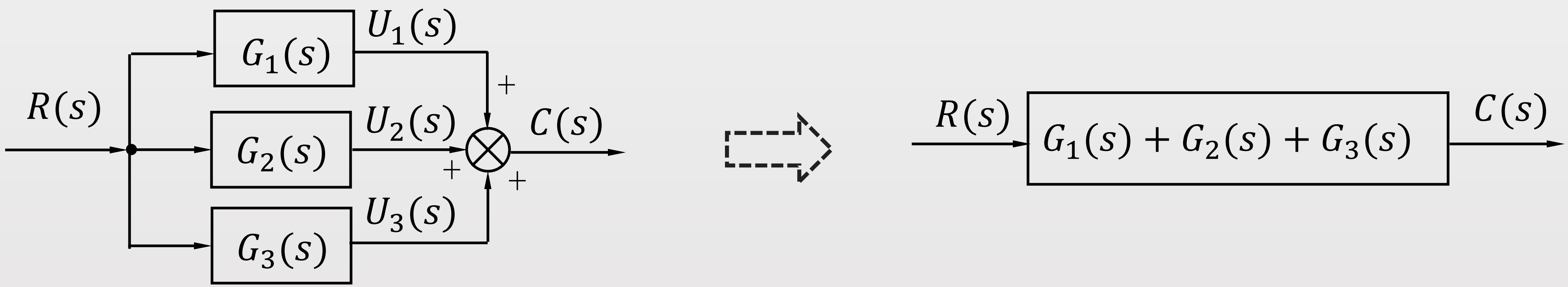
$$G_1(s)=\frac{U_{c1}}{U_r}=\frac{1}{R_1C_1s+1} \qquad G_1(s)=\frac{U_c}{U_{C1}}=\frac{1}{R_2C_2s+1}$$

$$G(s)=\frac{U_c}{U_r}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

$$G_1(s)G_2(s)\neq G(s)$$

环节的并联

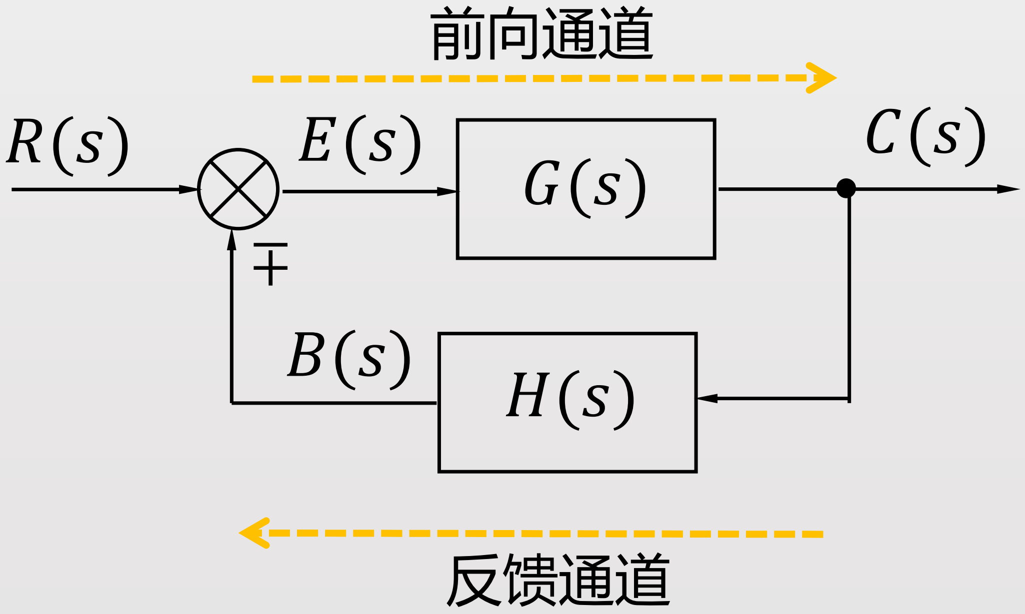
特点: 各环节的输入信号相同，输出信号相加（或相减）



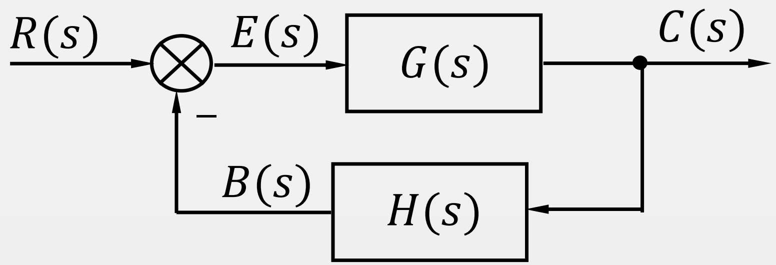
$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s)$$

反馈连接

特点：将系统或环节的输出信号反馈到输入端，并与原输入信号进行比较后再作为输入信号



$$\begin{cases} E(s) = R(s) - B(s) \\ B(s) = C(s)H(s) \\ C(s) = E(s)G(s) \end{cases}$$

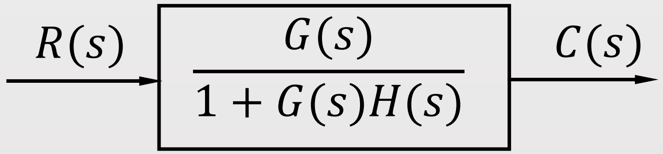


$$C(s) = [R(s) - C(s)H(s)]G(s)$$

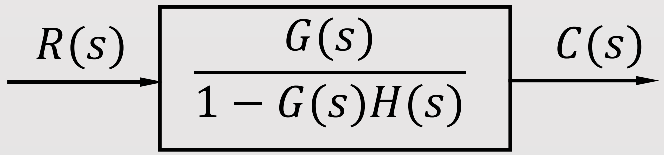
闭环传递函数 $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1 \pm G(s)\,H(s)}$

$$= \frac{\text{前向通道传递函数}}{1 \pm \text{开环传递函数}}$$

开环传递函数 $\dfrac{B(s)}{E(s)} = G(s)\,H(s)$

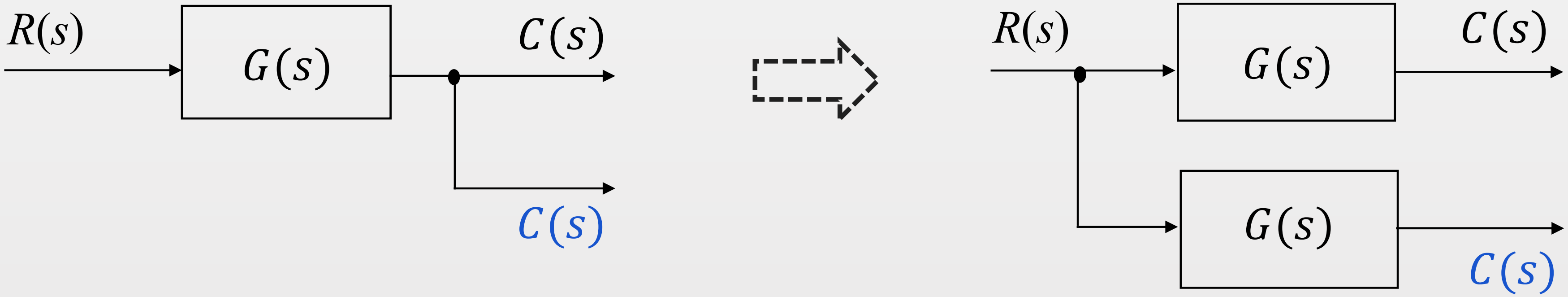


负反馈

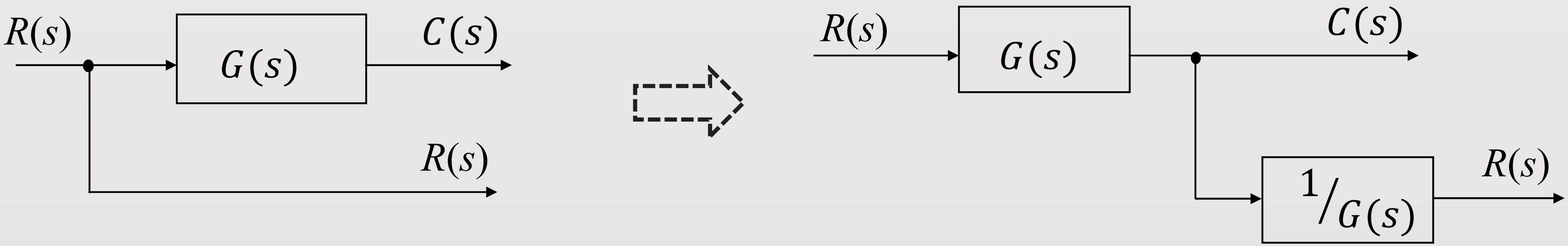


正反馈

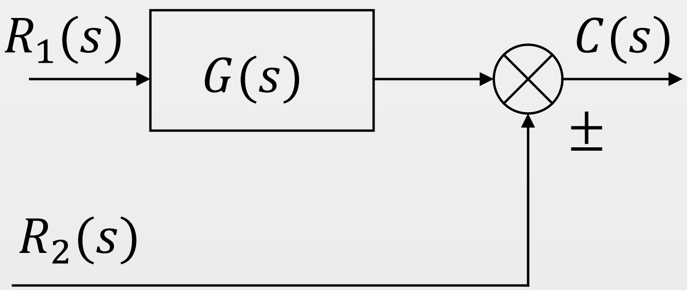
引出点前移



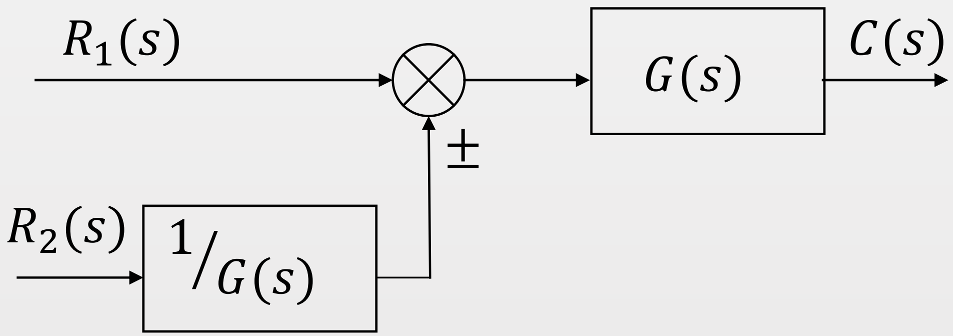
引出点后移



汇合点前移

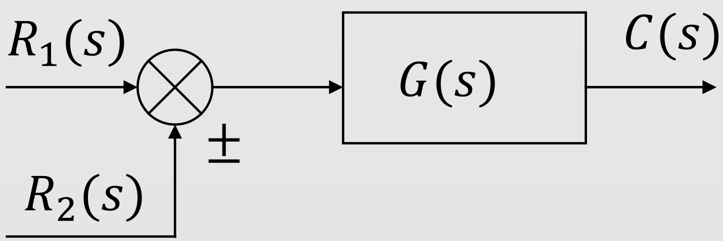


$R_1(s)$
$G(s)$
$C(s)$
$\pm$
$R_2(s)$

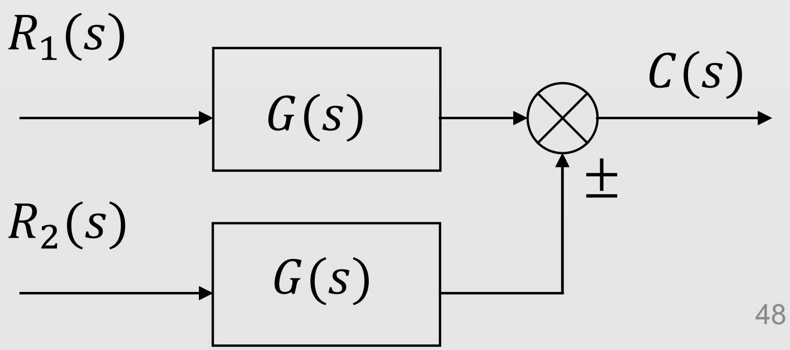


$R_1(s)$
$G(s)$
$C(s)$
$\pm$
$R_2(s)$
$1/G(s)$

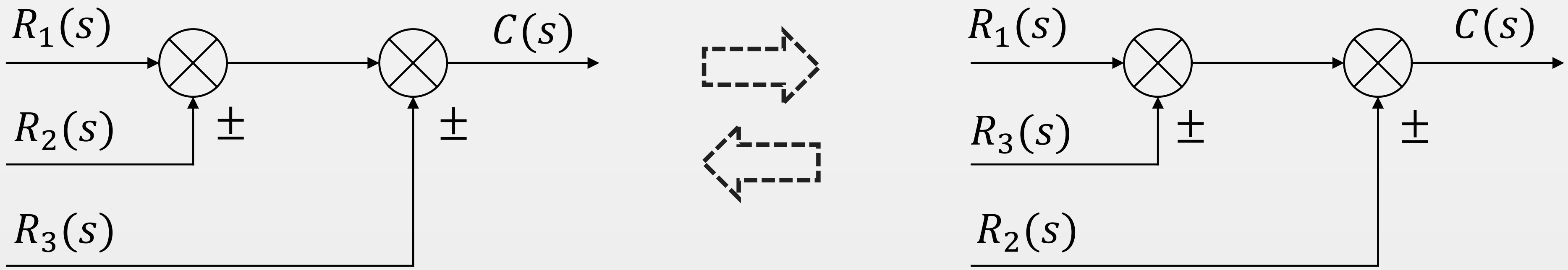
汇合点后移



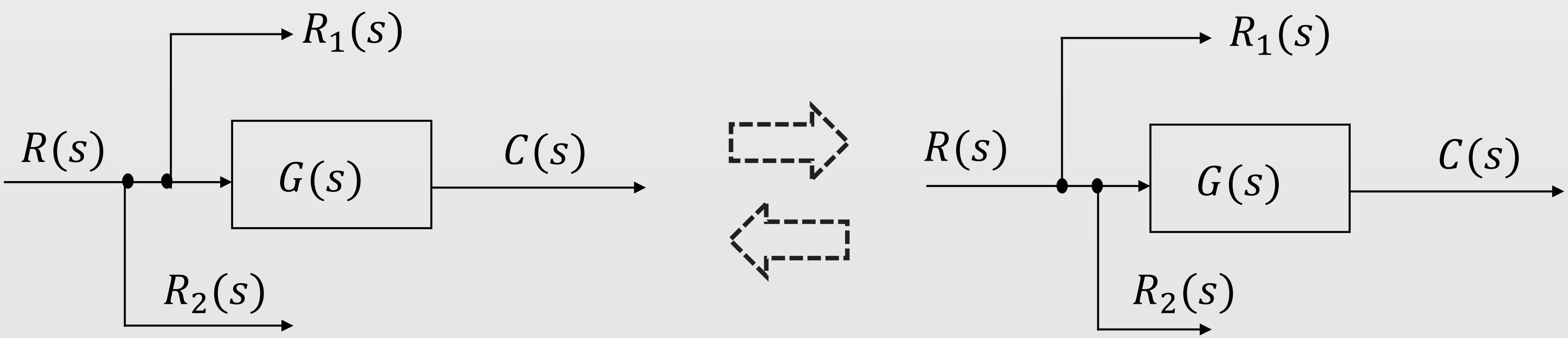
$R_1(s)$
$G(s)$
$C(s)$
$\pm$
$R_2(s)$



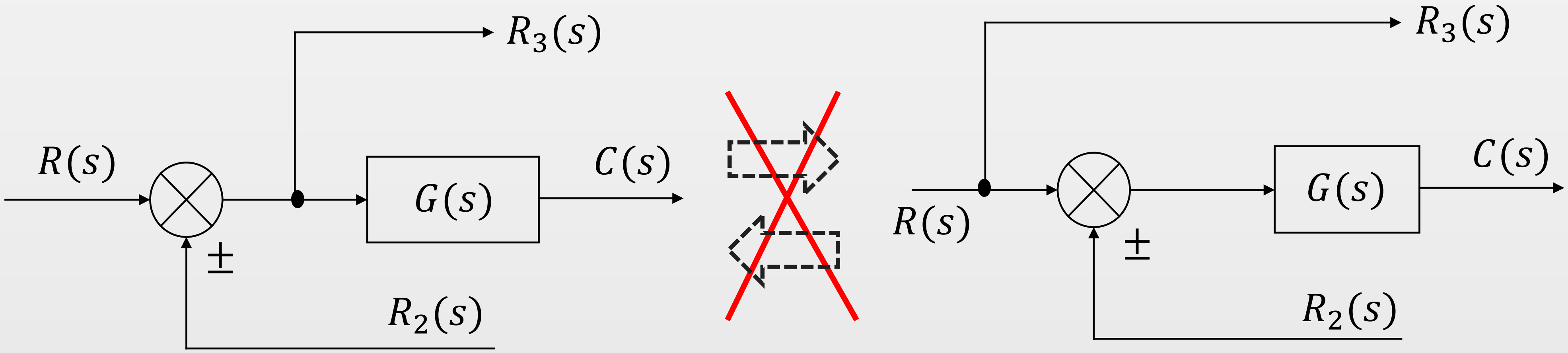
$R_1(s)$
$G(s)$
$C(s)$
$\pm$
$R_2(s)$
$G(s)$



相邻的信号汇合点位置可以互换



同一信号的引出点位置可以互换



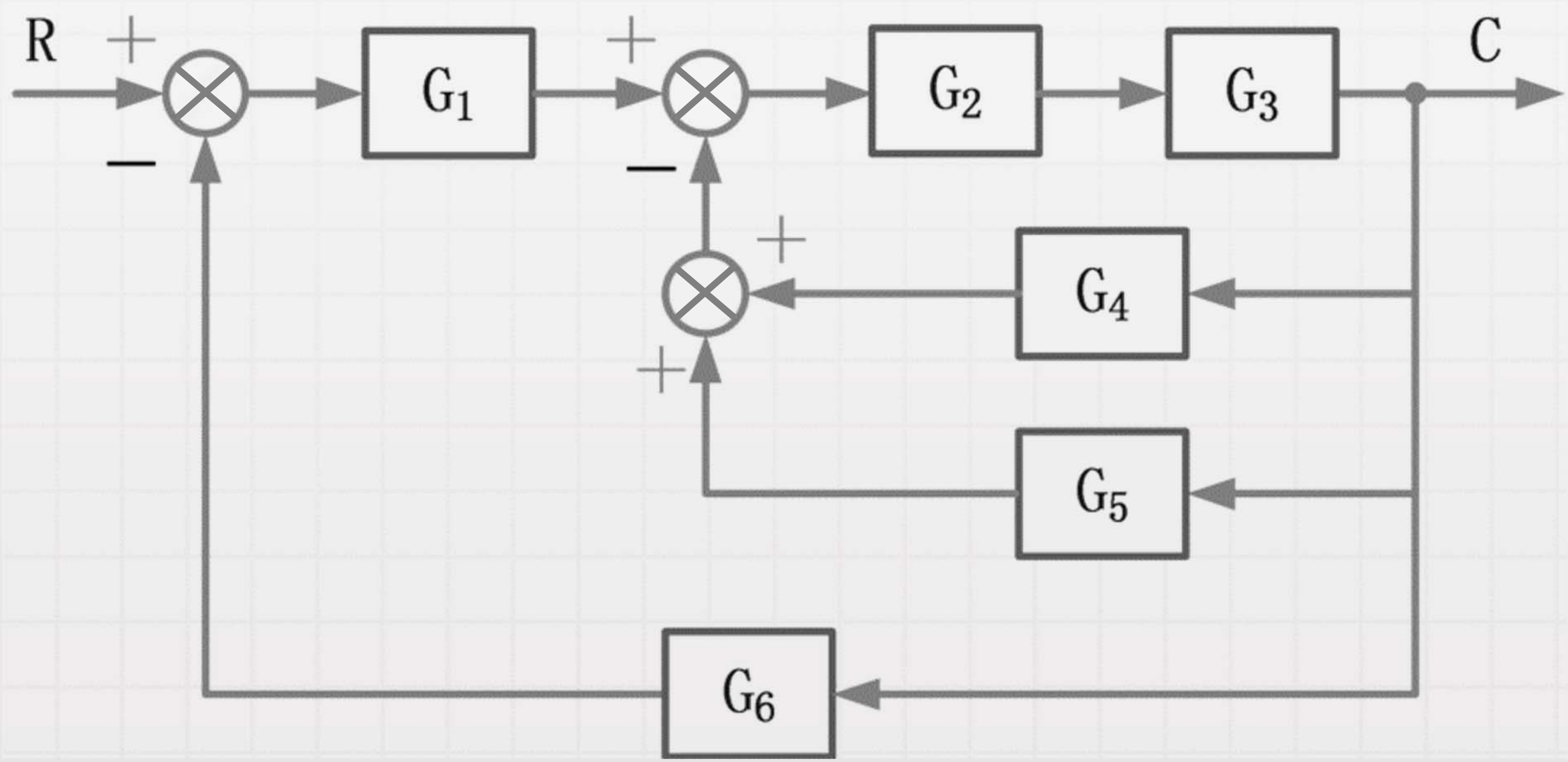
汇合点和引出点在一般情况下，不能互换

■结构图的变换是**手段**，结构图的化简才是**目的**

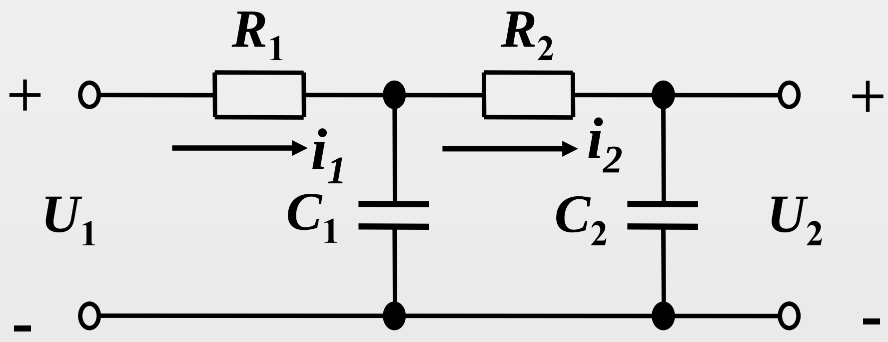
■变换和化简的基本原则是**等效原则**

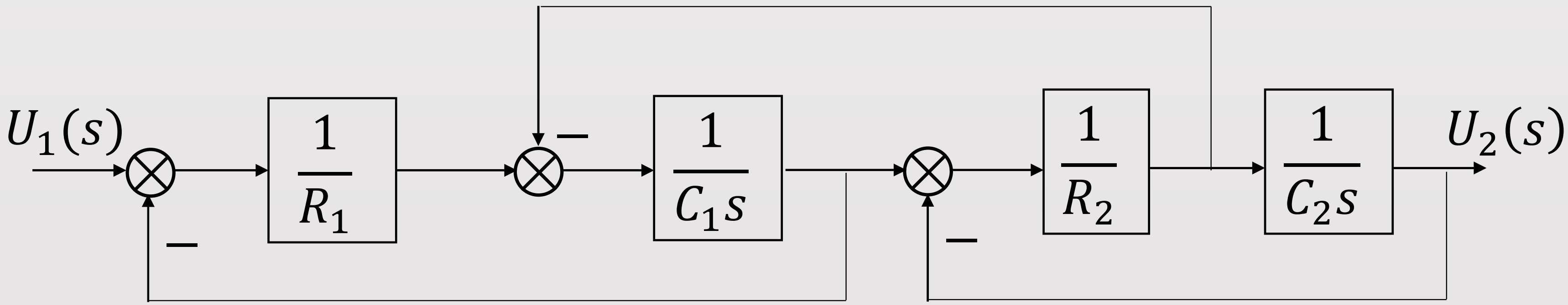
在结构图的变换和化简过程中，只能减少或增加一些中间变量，但各变量之间的**数学关系不能改变**。

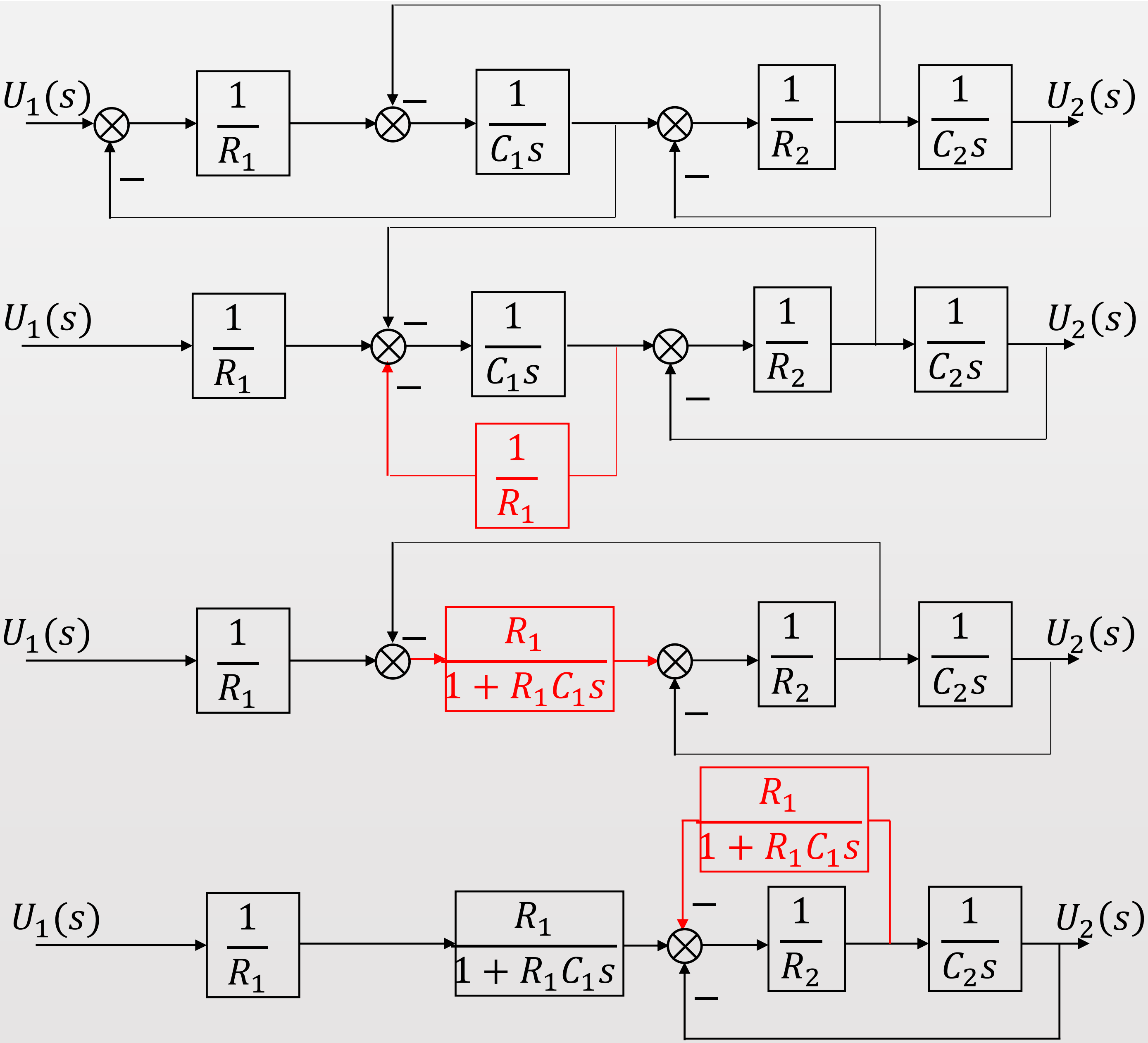
例2-6-1 试求图所示多回路系统的闭环传递函数$C(s)/R(s)$ P37



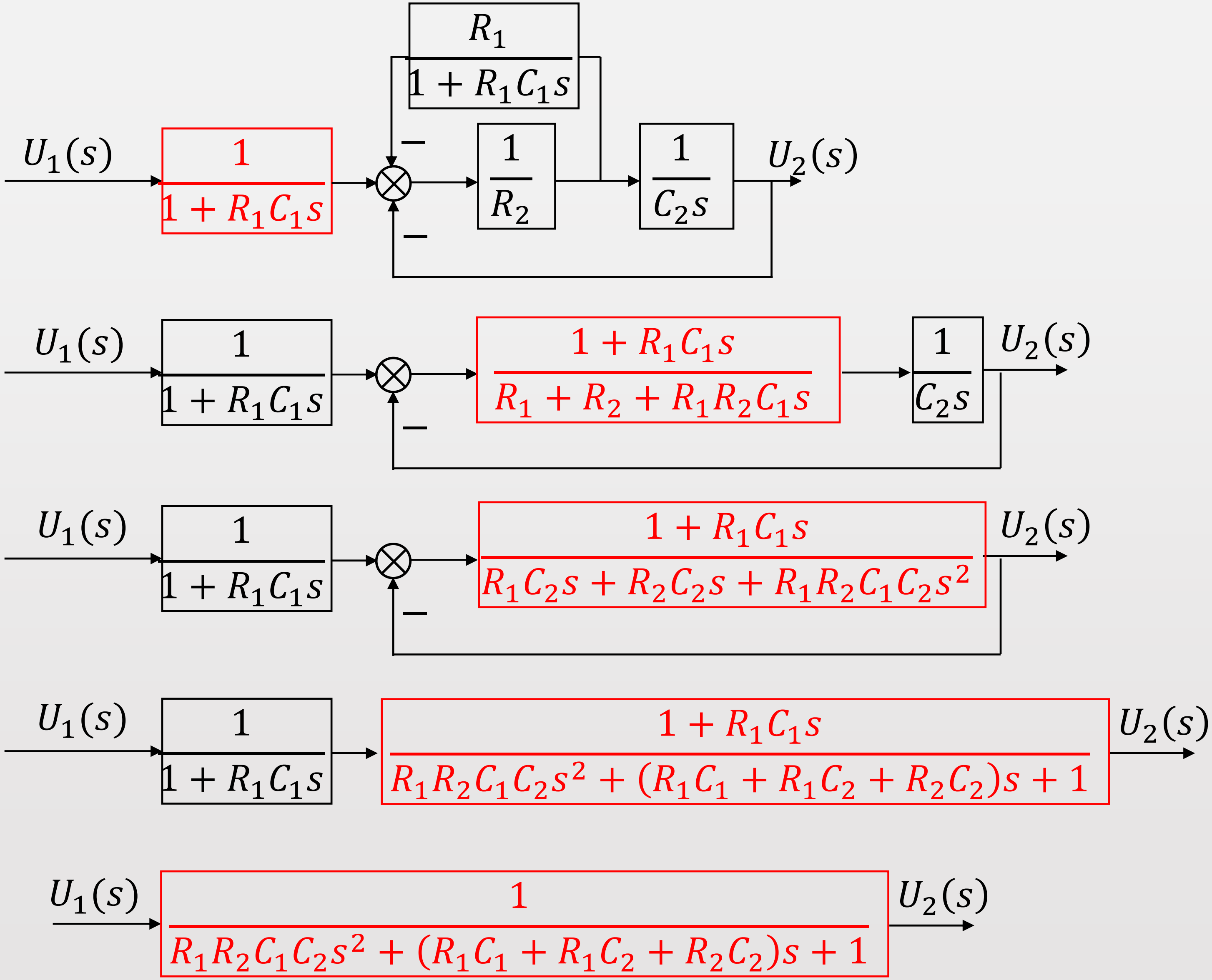
例：已知如图RC四端无源网络的框图，试用框图化简的方法证明传递函数为 $\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)} = \dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)s + 1}$







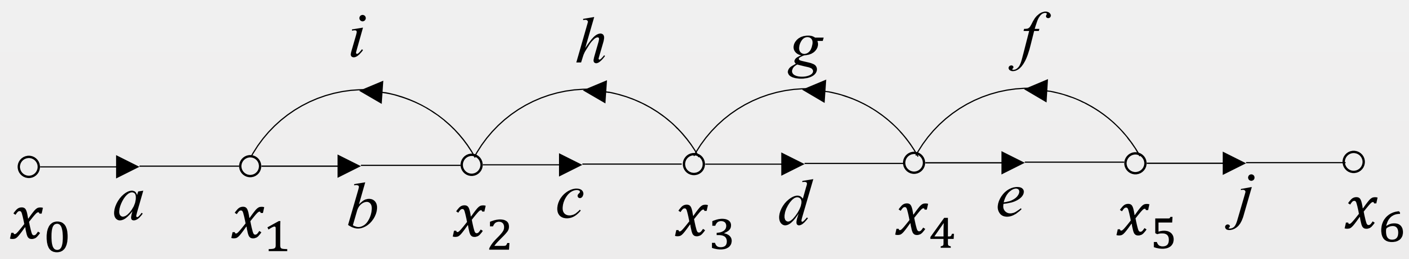
$U_1(s)$
$\frac{1}{R_1}$
$\frac{1}{C_1 s}$
$\frac{1}{R_2}$
$\frac{1}{C_2 s}$
$U_2(s)$
$\frac{R_1}{1+R_1 C_1 s}$


$U_1(s)$
$\frac{1}{1+R_1C_1s}$
$\frac{R_1}{1+R_1C_1s}$
$\frac{1}{R_2}$
$\frac{1}{C_2s}$
$U_2(s)$
$\frac{1+R_1C_1s}{R_1+R_2+R_1R_2C_1s}$
$\frac{1+R_1C_1s}{R_1C_2s+R_2C_2s+R_1R_2C_1C_2s^2}$
$\frac{1+R_1C_1s}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}$
$\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}$

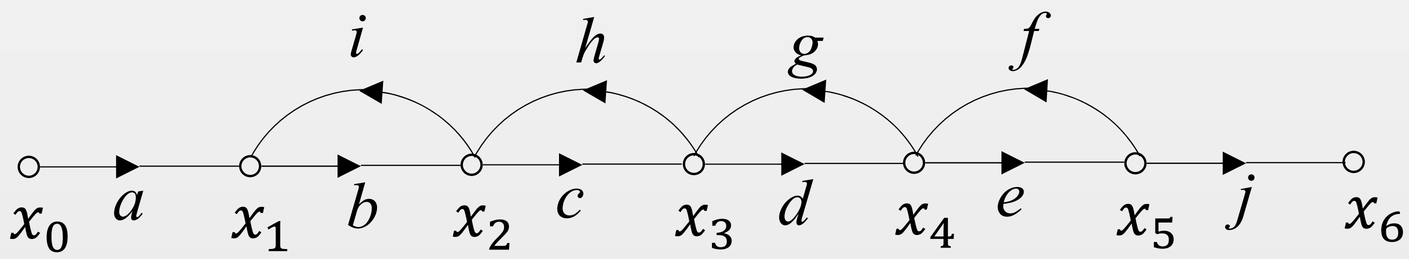
第七节 信号流程图

信号流程图（信号流图）和框图类似，都可用来表示系统结构和信号传送过程中的数学关系。

信号流程图也是数学模型一种表示。



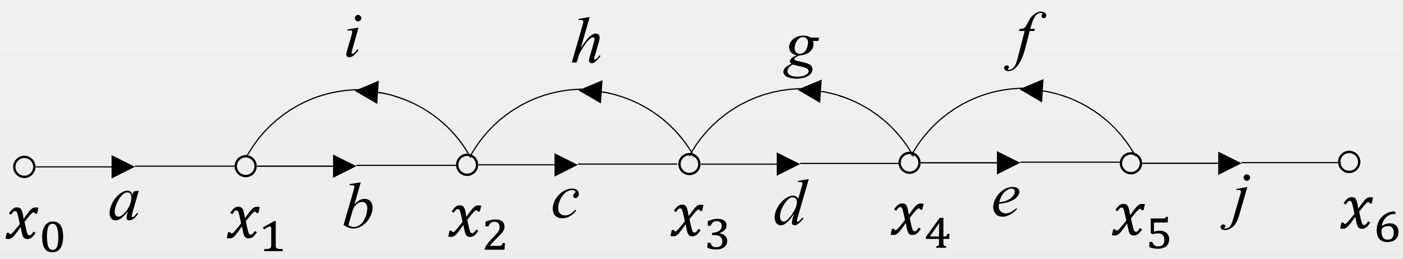
- 小圆圈“○”表示变量，称为**节点**
- 节点之间用有向线段“→”连接，称为**支路**
- 在支路上标明前后两个变量之间的数学关系，称为**传输（增益）**



源节点：只有出支路的节点，相当于输入信号。（ x_0 ）

汇节点：只有入支路的节点，相当于输出信号。（ x_6 ）

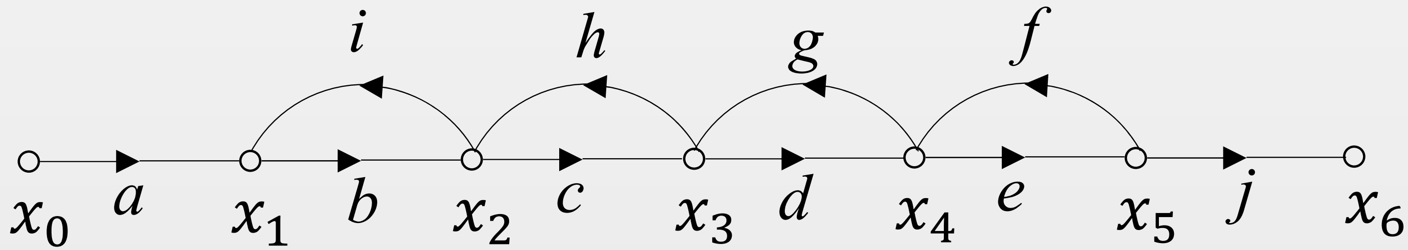
混合节点：既有入支路，又有出支路的节点，相当于框图中的比较点或引出点。（ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 ）



通道：又称为路径，是指从一个节点出发，沿着支路的箭头方向相继经过多个节点间的支路。（x_0到x_3的通道：x_0-x_1-x_2-x_3）

通道传输（通道增益）：沿通道各支路传输的乘积。（x_0到x_3的通道增益：abc）

前向通道：从源节点开始到汇节点终止，而且每个节点只通过一次的通道称为前向通道。（前向通道增益$abcdej$）

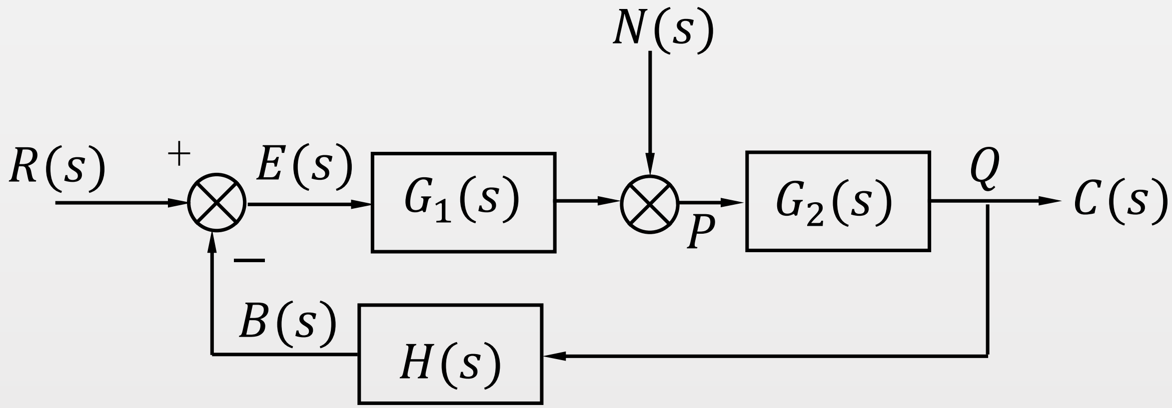


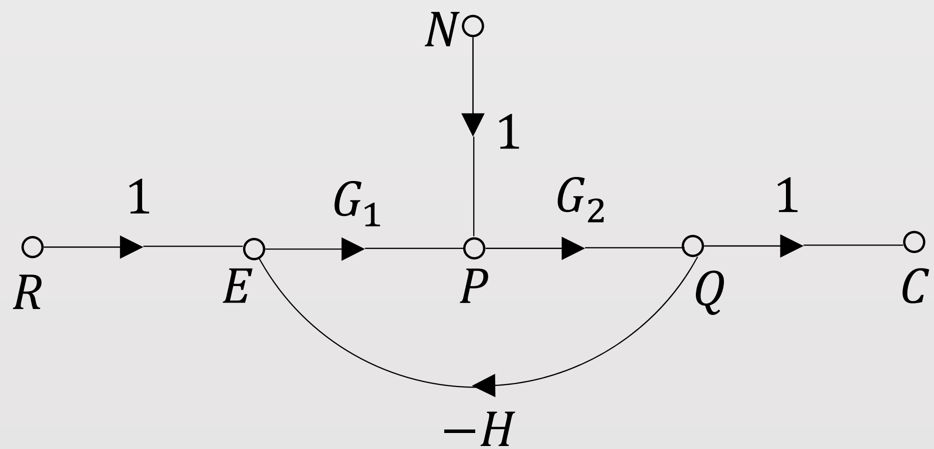
回路（回环）：通道的终点就是通道的起点，并且通道中其它节点只经过一次。（共有四个回环，*bi,ch,dg*和*ef*）

不接触回环：如果一些回环没有任何公共节点，就称它们为不接触回环。（两个互不接触的回环有三种组合，即*bief,bidg*和*chef*。本系统没有三个及三个以上互不接触的回环。）

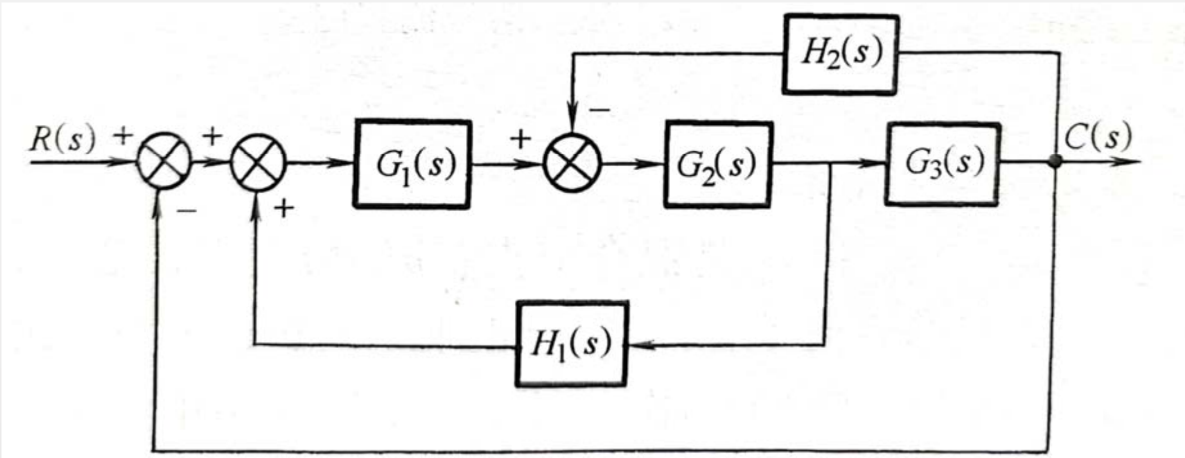
信号流图与框图的对应关系

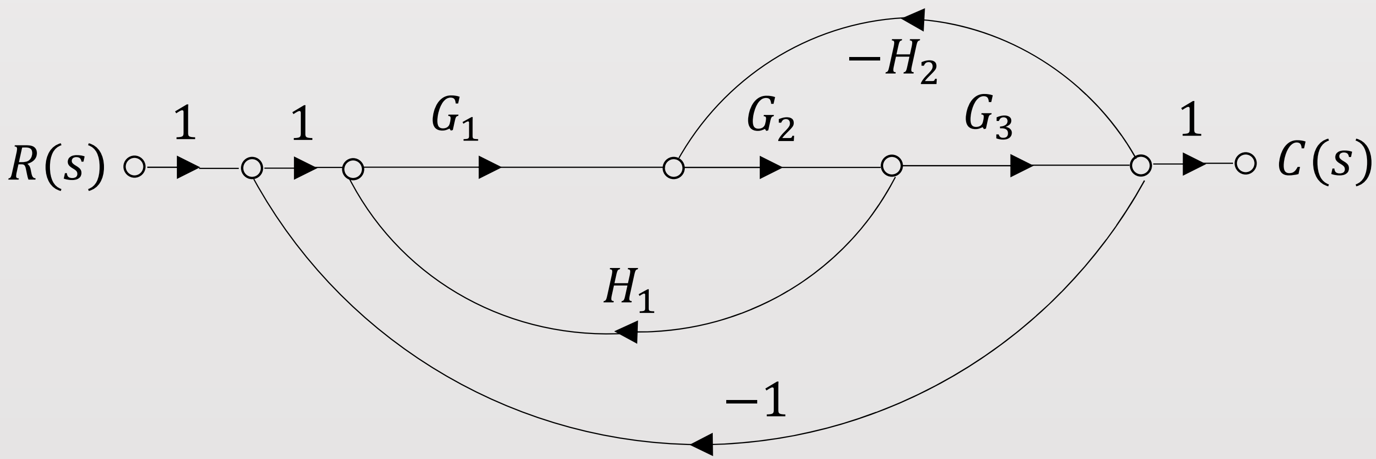
信号流图	框图
源节点	输入信号
汇节点	输出信号
混合节点	汇合点，引出点
支路	环节
支路传输	环节传递函数





例：根据下图所示的系统框图画出信号流程图





梅逊公式 $T=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$

T ：从源节点至任何节点的传输

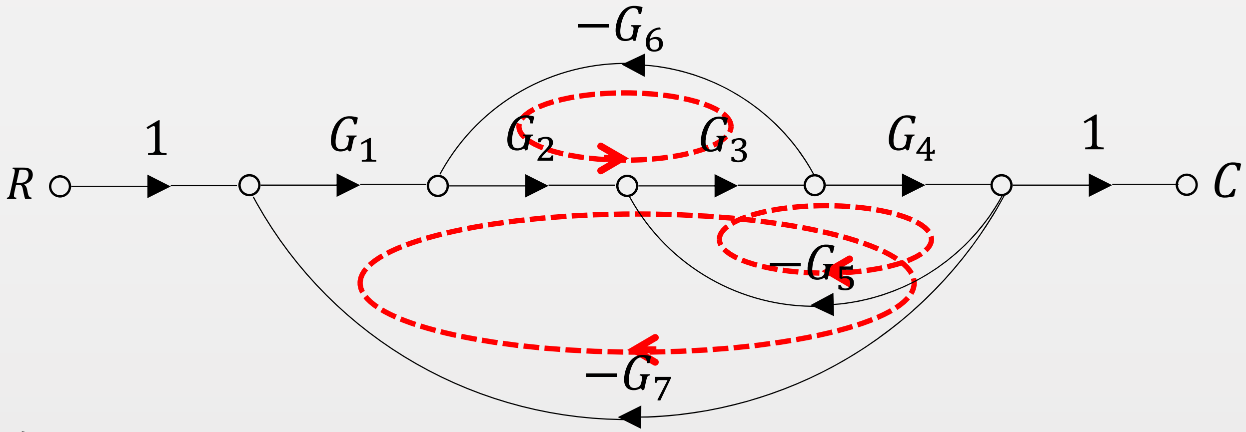
P_k ：第k条前向通道的传输

Δ：特征式 $\Delta=1-\Sigma L_1+\Sigma L_2\text{-}\Sigma L_3+\cdots+(-1)^m\Sigma L_m$

ΣL_1 ：所有不同回环的传输之和
ΣL_2 ：每两个互不接触回环传输乘积之和
ΣL_3 ：每三个互不接触回环传输乘积之和
ΣL_m ：任何m个互不接触回环传输乘积之和

Δ_k： 第k条前向通路特征式的余因子，即从Δ中除去与第k条前向通道P_k相接触的回环后余下的部分。（将与第k条前向通路相接触的回路传输代以0值，余下的Δ记为Δ_k ）

例：用梅逊公式求图所示信号流图的总的传递函数



只有一条前向通道：$P_1 = G_1G_2G_3G_4$

三个回环：$-G_2G_3G_6$、 $-G_3G_4G_5$、 $-G_1G_2G_3G_4G_7$

$$\Sigma L_1 = -G_2G_3G_6 - G_3G_4G_5 - G_1G_2G_3G_4G_7$$

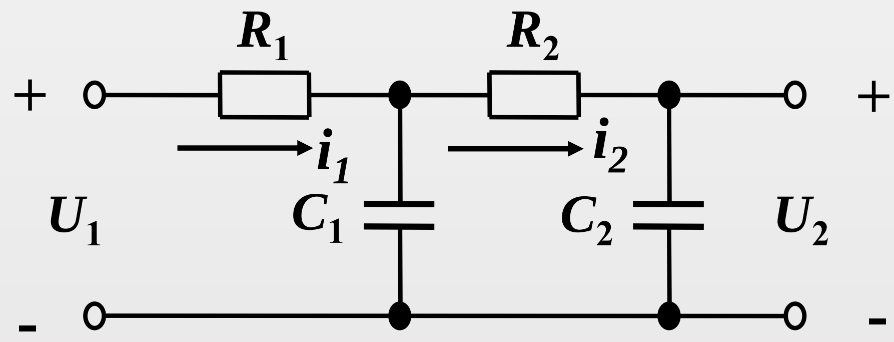
$$\Sigma L_2 = \Sigma L_3 = \cdots = \Sigma L_m = 0$$

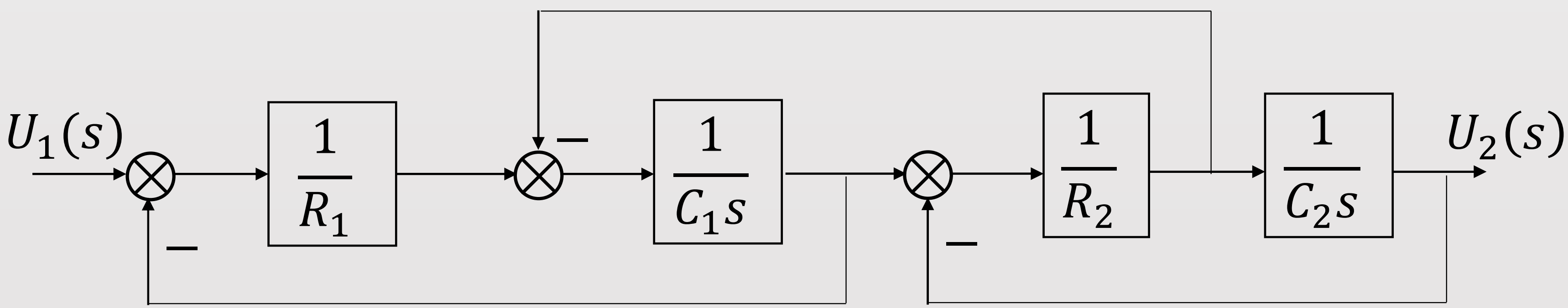
$$\Delta = 1 - \Sigma L_1 = 1 + G_2G_3G_6 + G_3G_4G_5 + G_1G_2G_3G_4G_7$$

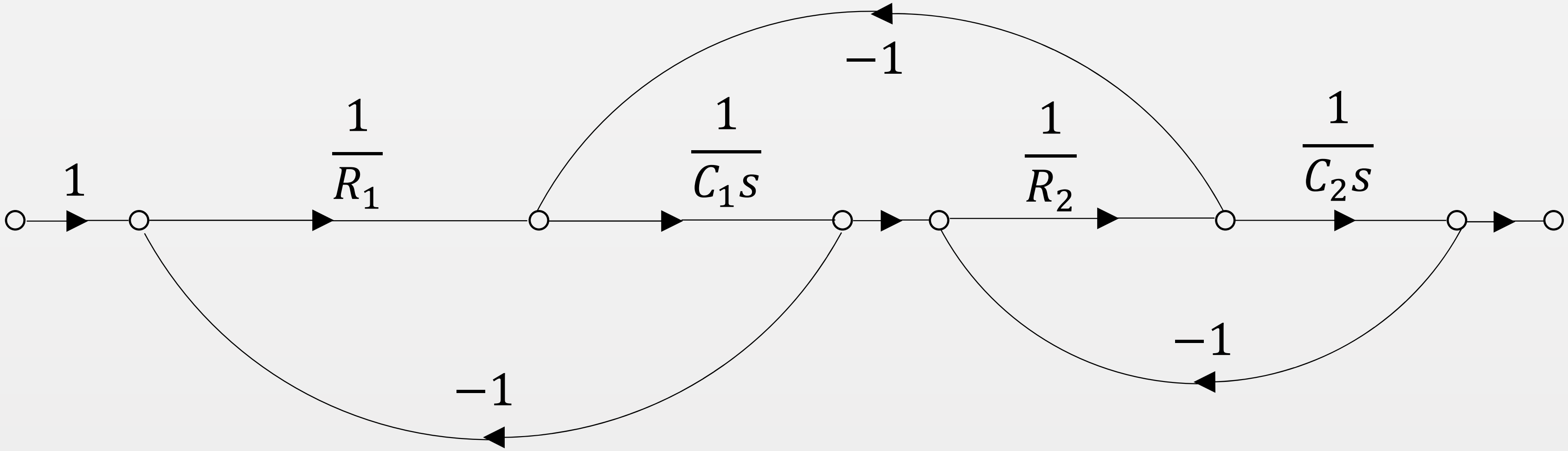
$$\Delta_1 = 1$$

$$T = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3G_6 + G_3G_4G_5 + G_1G_2G_3G_4G_7}$$

例：已知如图RC四端无源网络的框图，试用梅逊增益公式证明传递函数为 $$\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+1}$$







只有一条前向通道：$P_1 = \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$

三个回环： $-\dfrac{1}{R_1 C_1 s}, -\dfrac{1}{R_2 C_2 s}, -\dfrac{1}{R_2 C_1 s}$

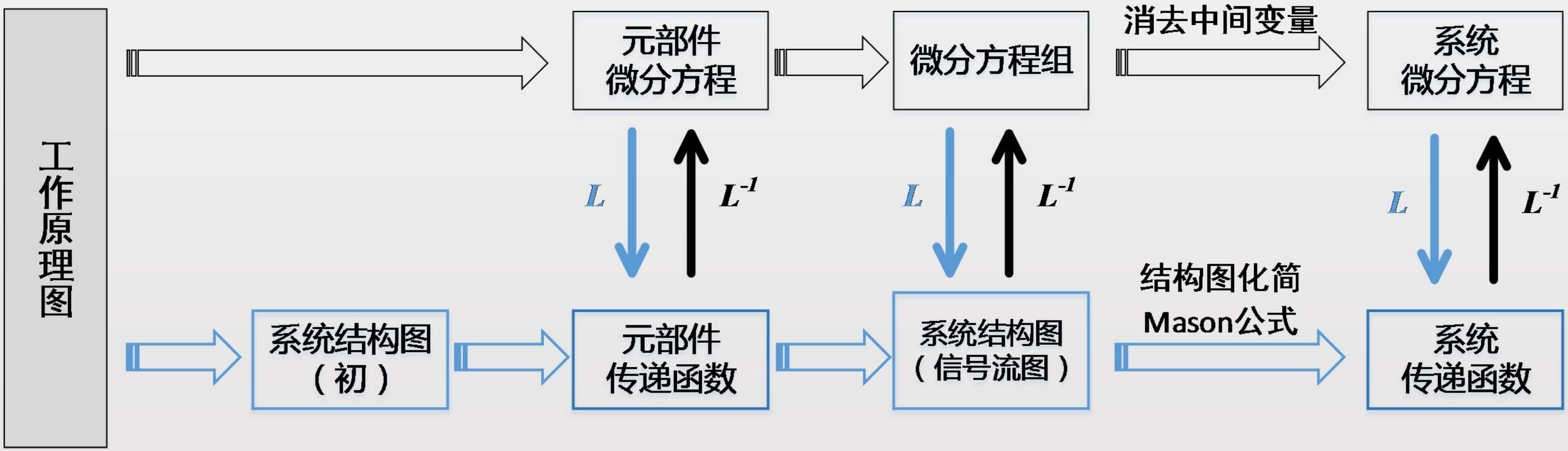
$$\Sigma L_1 = -\frac{1}{R_1 C_1 s} - \frac{1}{R_2 C_2 s} - \frac{1}{R_2 C_1 s}$$

$$\Sigma L_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

$$\Sigma L_3 = \cdots = \Sigma L_m = 0$$

$$\Delta = 1 - \Sigma L_1 + \Sigma L_2$$
$$= 1 + \frac{1}{R_1C_1s} + \frac{1}{R_2C_2s} + \frac{1}{R_2C_1s} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$$
$$= \frac{R_1C_1R_2C_2s^2 + R_2C_2s + R_1C_1s + R_1C_2s + 1}{R_1C_1R_2C_2s^2}$$
$$\Delta_1 = 1$$
$$T = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k\Delta_k = \frac{R_1C_1R_2C_2s^2}{R_1C_1R_2C_2s^2 + R_2C_2s + R_1C_1s + R_1C_2s + 1} \cdot \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$$
$$= \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_2C_2 + R_1C_1 + R_1C_2)s + 1}$$

系统数学模型建立过程


工作原理图
元部件
微分方程
微分方程组
消去中间变量
系统
微分方程
L
L-1
系统结构图
（初）
元部件
传递函数
系统结构图
（信号流图）
结构图化简
Mason公式
系统
传递函数