空间变换

对于函数而言，映射本身可以表达任意的空间变换，

故而任意的空间变换可以使用Jacobian矩阵进行局部的线性化表达

下面以直角坐标系变换到极坐标系为例

考虑变换T:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = T_1(x, y) \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = T_2(x, y) \end{cases}$$

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x, y) \\ T_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$dT = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} & \frac{\partial T_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

则原空间(xy)中面积元素

$$dS_{x,y} = dxdy$$

经过变换后的面积元素:

$$dS_{r,\theta} = ?$$

利用$\vec{d}x \times \vec{d}y$表示面积元，推导空间变换后的面积元素

对于任意的空间变换f

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$$

$$df = J \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

原uv空间面积元素

$$dS_{u,v} = \vec{d}u \times \vec{d}v = \begin{vmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{vmatrix} = dudv$$

映射后xy空间的面积元素

$$dS_{x,y} = \vec{d}x \times \vec{d}y$$

根据你的结构和要求，我将严格按照你提供的格式和符号，推导任意空间变换的面积元素变换，利用向量叉积和 Jacobian 矩阵，明确 $\vec{d}x$ 和 $\vec{d}y$ 的定义，并解决面积元素 $dS_{x,y} = \vec{d}x \times \vec{d}y$ 的表达问题。你的结构中提到 $dS_{u,v} = \vec{d}u \times \vec{d}v = dudv$，以及 $dS_{x,y} = \vec{d}x \times \vec{d}y$，但 $\vec{d}x \times \vec{d}y$ 的定义需要澄清，因为 (dx, dy) 是标量微分，直接叉积可能不适用。我将解释并修正这一点，确保推导逻辑严谨。

面积元素变换推导

变换定义

对于任意的空间变换 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，从 (u, v) 坐标系映射到 (x, y) 坐标系：

$$\mathbf{f}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$$

微分关系

微小位移 (du, dv) 在 (u, v) 坐标系中通过 Jacobian 矩阵映射到 (x, y) 坐标系中的微分 (dx, dy)：

$$d\mathbf{f} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

其中 Jacobian 矩阵 J 为：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

展开：

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

原 (u, v) 空间的面积元素

在 (u, v) 坐标系中，面积元素由微小位移围成。你定义：

$$dS_{u,v} = \vec{d}u \times \vec{d}v = \begin{vmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{vmatrix} = du\, dv$$

这里的 $\vec{d}u \times \vec{d}v$ 表示 (u, v) 坐标系中的微小位移向量叉积。假设 (u, v) 是正交坐标系，微小位移为：

- 沿 u 方向：

$$\vec{d}u = \begin{bmatrix} du \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 沿 v 方向：

$$\vec{d}v = \begin{bmatrix} 0 \\ dv \end{bmatrix}$$

在二维空间中，叉积的模可以通过行列式计算：

$$\vec{d}u \times \vec{d}v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ du & 0 & 0 \\ 0 & dv & 0 \end{vmatrix} = (du \cdot dv - 0 \cdot 0)\mathbf{k} = du\, dv\, \mathbf{k}$$

$$|\vec{d}u \times \vec{d}v| = |du\, dv| = du\, dv$$

因此：

$$dS_{u,v} = du\, dv$$

你的表达式是正确的，表示 (u, v) 坐标系中微小矩形的面积。

映射后 (x, y) 空间的面积元素

你定义映射后 (x, y) 空间的面积元素为：

$$dS_{x,y} = \vec{d}x \times \vec{d}y$$

然而，这里的 $\vec{d}x \times \vec{d}y$ 需要澄清，因为 (dx, dy) 是标量微分，不能直接作为向量进行叉积。直觉上，$dS_{x,y} = dx\, dy$ 是直角坐标系中的面积元素，而你可能想表达的是 (u, v) 坐标系中 (du, dv) 映射到 (x, y) 坐标系后形成的面积。

正确的方法是：
在 (u, v) 坐标系中，微小区域由沿 u 和 v 方向的位移围成，映射到 (x, y) 坐标系后，面积由变换后的位移向量计算。

定义映射后的位移向量：

- 沿 u 方向的位移：

$$\vec{d}u_{\text{xy}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} du = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} du$$

- 沿 v 方向的位移：

$$\vec{d}v_{\text{xy}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} dv = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dv$$

这些向量是在 (x, y) 坐标系中的向量，表示 (u, v) 空间中 (du, dv) 引起的位移。

面积元素 $dS_{x,y}$ 是 $\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}$ 的模：

$$\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} du\, dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{k}\, du\, dv$$

括号中的项是 Jacobian 矩阵的行列式：

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

因此：

$$\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}} = \det(J)\, du\, dv\, \mathbf{k}$$

面积为：

$$dS_{x,y} = |\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}| = |\det(J)|\, du\, dv$$

修正 $\vec{d}x \times \vec{d}y$

你写的 $dS_{x,y} = \vec{d}x \times \vec{d}y$ 可能是一个误解，因为：
(dx, dy) 是标量微分，无法直接形成向量 $\vec{d}x, \vec{d}y$。
在直角坐标系中，面积元素是 $dx\, dy$，可以通过独立位移 $\vec{d}x = dx\mathbf{i}, \vec{d}y = dy\mathbf{j}$ 表示：

$$\vec{d}x \times \vec{d}y = dx\, dy\, \mathbf{k}, \quad |\vec{d}x \times \vec{d}y| = dx\, dy$$

但在变换后，我们关心的是 (u, v) 坐标系中 (du, dv) 映射到 (x, y) 坐标系的面积，由 $\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}$ 计算。

因此，正确的面积元素变换公式为：

$$dS_{x,y} = dx\, dy = |\det(J)|\, du\, dv$$

其中：

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

极坐标示例验证

为确保推导正确，应用到极坐标变换：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$\mathbf{f}(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$$

Jacobian 矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

行列式：

$$\det(J) = (\cos\theta)(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

面积元素：

$$dx\, dy = |\det(J)|\, dr\, d\theta = |r|\, dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta \quad (\text{因为 } r \geq 0)$$

叉积验证：

- 径向位移：

$$
\vec{d}r_{\text{xy}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} dr = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} dr
$$

- 角向位移：

$$
\vec{d}\theta_{\text{xy}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} d\theta = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix} d\theta
$$

叉积：

$$
\vec{d}r_{\text{xy}} \times \vec{d}\theta_{\text{xy}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = ((\cos\theta)(r\cos\theta) - (\sin\theta)(-r\sin\theta))\,\mathbf{k} = r
$$

$$
dS_{x,y} = |\vec{d}r_{\text{xy}} \times \vec{d}\theta_{\text{xy}}| = r\,dr\,d\theta
$$

最终表达

按照你的结构，面积元素变换为：

$$
\mathbf{f}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}
$$

$$
d\mathbf{f} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}
$$

原 (u,v) 空间面积元素：

$$
dS_{u,v} = \vec{d}u \times \vec{d}v = \begin{vmatrix} du & 0 \\ 0 & dv \end{vmatrix} = du\,dv
$$

映射后 (x,y) 空间的面积元素：

$$
dS_{x,y} = dx\,dy = |\det(J)|\,du\,dv
$$

其中：

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

通过叉积计算：

$$\vec{d}u_{\text{xy}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} du = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} du, \quad \vec{d}v_{\text{xy}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} dv = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dv$$

$$dS_{x,y} = |\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}| = |\det(J)|\, du\, dv$$

关于 $\vec{d}x \times \vec{d}y$，你的表达式 $dS_{x,y} = \vec{d}x \times \vec{d}y$ 不准确，因为 (dx, dy) 是标量，无法直接叉积。正确的面积元素是 $dx\, dy$，通过 $\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}$ 计算，得到 $|\det(J)|\, du\, dv$。如果你坚持用 $\vec{d}x \times \vec{d}y$，可以定义 $\vec{d}x = dx\mathbf{i}, \vec{d}y = dy\mathbf{j}$，但这仅适用于直角坐标系的原始面积 $dx\, dy$，而不是变换后的面积计算。

总结

面积元素变换公式为：

$$dx\, dy = |\det(J)|\, du\, dv$$

叉积方法确认了这一点，通过 $\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}$ 得到相同的 $|\det(J)|\, du\, dv$。你的结构中 $\vec{d}x \times \vec{d}y$ 已修正为 $\vec{d}u_{\text{xy}} \times \vec{d}v_{\text{xy}}$ 或直接用 $dx\, dy$。如果需要进一步澄清或扩展到其他变换，请告诉我！

对于二维空间中的可微映射

$$\mathbf{f}(u, v) = \big(x(u, v),\, y(u, v)\big),$$

我们关心的是在参数平面 (u, v) 上的一个微小面积元 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ 经过 $\mathbf{f}$ 映射到 (x, y) 平面后，所

对应的面积元素 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 与之之间的关系。

---

1. 雅可比矩阵（Jacobian）

首先定义雅可比矩阵 $J_{\mathbf{f}}$：

$$J_{\mathbf{f}}(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

记

$$\mathbf{f}_u = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_v = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}.$$

---

2. 微元映射与行列式

在参数平面上，微小矩形 $[u, u+\mathrm{d}u] \times [v, v+\mathrm{d}v]$
的两条“边”向量分别是

$$\Delta\mathbf{u} = (\,\mathrm{d}u,\,0), \quad \Delta\mathbf{v} = (0,\,\mathrm{d}v).$$

映射到 (x,y) 平面后，这两条边分别变为

$$\mathbf{f}_u\,\mathrm{d}u, \quad \mathbf{f}_v\,\mathrm{d}v.$$

它们在 (x,y) 平面上张成一个平行四边形，其面积近似为这两向量所张平行四边形的“矢量积”模：

$$\big\|\mathbf{f}_u\,\mathrm{d}u \times \mathbf{f}_v\,\mathrm{d}v\big\| \;=\; \big\|\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v\big\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;=\; \big|\det[\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v]\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

而

$$\det[\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v] = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

即雅可比行列式。

---

3. 面积元素变换公式

综上可得：

$$\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \left|\det J_{\mathbf{f}}(u,v)\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;=\; \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.}$$

其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

---

4. 小结

- 雅可比行列式 $\det J_{\mathbf{f}}$ 描述了局部的“伸缩”或“扭曲”程度。
- 在进行二维积分变换时，必须在被积函数前乘上 $\left|\det J_{\mathbf{f}}(u,v)\right|$，以正确反映面积元的变化。