对称和周期的积分特性

0 对称区间的积分特性

对称区间中积分将消去奇分量 任意函数可表示为奇分量和偶分量

$f(x) = E(x) + O(x)$

$$\begin{cases} f(x) = E(x) + O(x) \\ f(-x) = E(x) - O(x) \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} E(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ O(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

故

$$f(x) = E(x) + O(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = 2E(x)$$

因此，对称区间中积分将消去奇分量。

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} E(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]dx$$

此类问题注意 **1.** 积分区间对称 **2.** $f(x)+f(-x)$ 存在化简可能

1 对称函数的积分特性

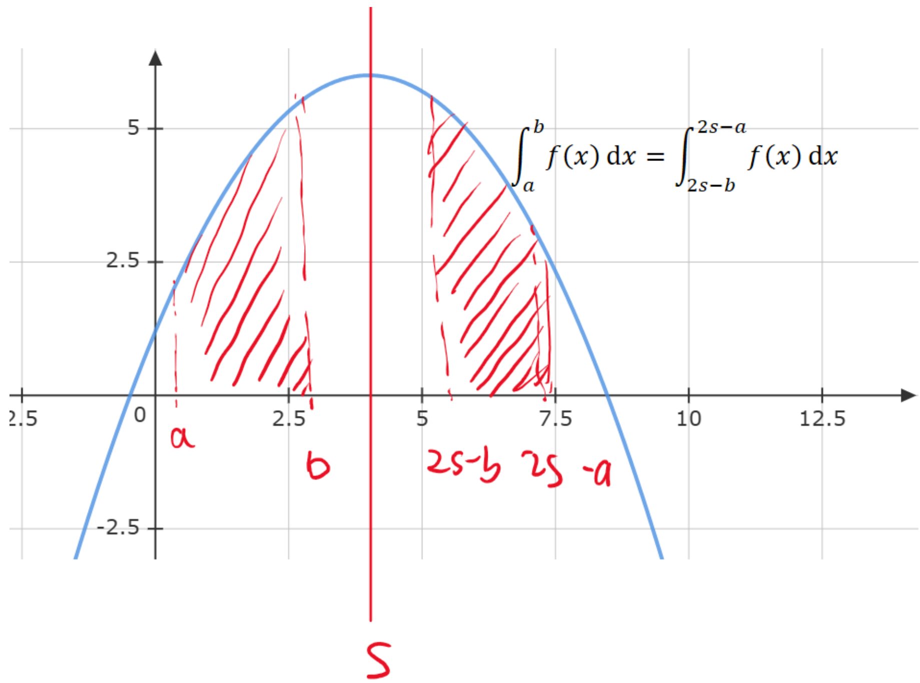
设 $f(x)$ 关于 s 对称，则有

$$f(x) = f(2s - x)$$

则有积分特性

几何直观

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{2s-b}^{2s-a} f(x)dx$$



代数证明:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(2s-x)dx \xlongequal{Let\ u=2s-x} \int_{2s-a}^{2s-b} f(u)-du = \int_{2s-a}^{2s-b} f(x)dx$$

2 周期函数的积分特性

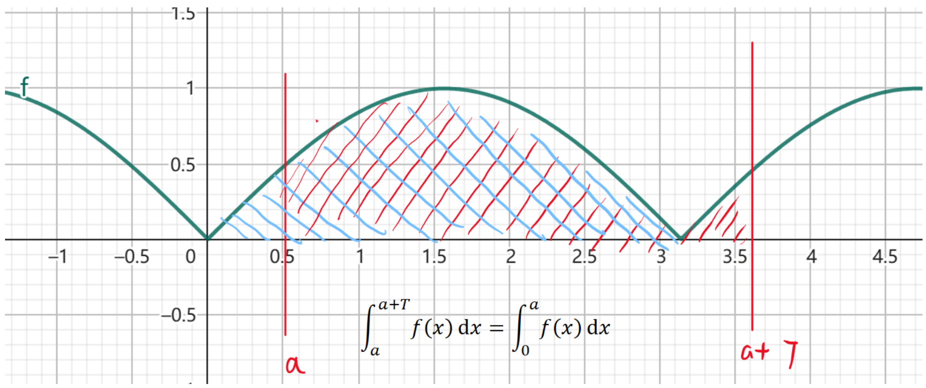
设 $f(x)$ 关于 T 周期，则有

$$f(x) = f(x+T)$$

有积分特性

周期函数从任意点向后积分一周期等于一周期的积分

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$



几何直观:

代数证明:

$$
\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x-T)dx \\
&= \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^T f(x)dx
\end{aligned}
$$

本质约束

$$
\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx
$$