一、试求下列周期信号的频谱。

(1) $f(t)=\cos\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　　　(2) $f(t)=\sin(2t)+\cos(4t)+\sin(6t)$

（1）解：$f(t)=\cos\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\left[e^{j\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)}\right]=\dfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j3t}+\dfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j3t}$，$\omega_0=3$

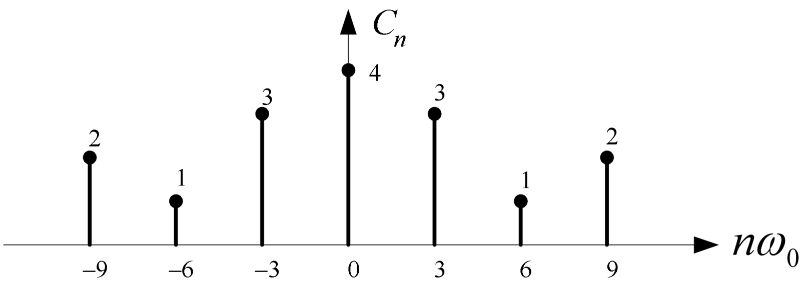
所以，$c_1=\dfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},c_{-1}=\dfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}},c_n=0(n\neq\pm1)$

（2）解：$f(t)=\sin 2t+\cos 4t+\sin 6t=\dfrac{1}{2j}\left(e^{j2t}-e^{-j2t}\right)+\dfrac{1}{2}\left(e^{j4t}+e^{-j4t}\right)+\dfrac{1}{2j}\left(e^{j6t}-e^{-j6t}\right)$

$=-0.5j\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)+0.5\left(e^{j2\omega_0 t}+e^{-j2\omega_0 t}\right)-0.5j\left(e^{j3\omega_0 t}-e^{-j3\omega_0 t}\right)$，$\omega_0=2$

所以，$c_1=-0.5j,c_{-1}=0.5j,c_2=0.5,c_{-2}=0.5,c_3=-0.5j,c_{-3}=0.5j,c_n=0(n\neq\pm1,\pm2,\pm3)$

二、已知连续周期信号的频谱图如图，试写出该信号的 Fourier 级数表示式。



解：由图可知 $\omega_0=3$

$$C_0=4\quad C_{\pm1}=3\quad C_{\pm2}=1\quad C_{\pm3}=2$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$=4+3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})+(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t})+2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t})$$

$$=4+6\cos(\omega_0 t)+2\cos(2\omega_0 t)+4\cos(3\omega_0 t)$$

三、试求连续信号 $f(t)=e^{-2t}\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的频谱函数，ω_0 为常数。

解：$f(t)=e^{-2t}\cos(\omega_0 t)u(t)=e^{-2t}u(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$，利用频域卷积特性，得

$$F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2+j\omega}*\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{2+j(\omega+\omega_0)}\right]$$

四、已知 $F\left[f(t)\right]=F(j\omega)$，试计算下列连续信号的频谱函数。

$(1)\ f_1(t)=f(t-5)$

解：利用 **FT** 的时移特性，有

$$F_1(j\omega)=F(j\omega)\cdot e^{-j5\omega}$$

$(2)\ f_2(t)=f(5t)$

解：利用 **FT** 的展缩特性，有

$$F_2(j\omega)=\frac{1}{5}F\left(j\frac{\omega}{5}\right)$$

$(3)\ f_3(t)=f(5-5t)$

解：

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(-t)\leftrightarrow F(-j\omega)$$

$$f\left[-(t-5)\right]=f(5-t)\leftrightarrow F(-j\omega)\cdot e^{-j5\omega}$$

$$f(5-5t)\leftrightarrow\frac{1}{5}F\left(-j\frac{\omega}{5}\right)\cdot e^{-j5\frac{\omega}{5}}=\frac{1}{5}F\left(-j\frac{\omega}{5}\right)\cdot e^{-j\omega}$$

即：$F_3(j\omega)=\frac{1}{5}F\left(-j\frac{\omega}{5}\right)\cdot e^{-j\omega}$

$(4)\ f_4(t)=f(t)*\delta(t-2)$

解：利用 **FT** 的卷积特性，得

$$F_4(j\omega)=F(j\omega)\cdot 1e^{-j2\omega}=F(j\omega)e^{-j2\omega}$$