CÁC TIÊU CHUẨN VÀ ĐỊNH LÝ VỀ CHUỖI

LaTeX by Trần Thành Luân - CLB Hỗ trợ học tập

Định lý 1. **(Điều kiện cần để chuỗi hội tụ)**

Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ là hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

I Chuỗi số dương

1 Tiêu chuẩn tích phân

Định lý 2. Cho $f(x)$ là một hàm số **liên tục, dương, giảm** trên đoạn $[1,\infty)$ và $a_n = f(n)$. Khi chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,

- Nếu $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ là hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng là hội tụ.
- Nếu $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ là phân kỳ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng là phân kỳ.

2 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 3. Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ có $a_n \leq b_n$ với mọi n hoặc kể từ một số n nào đó. Khi đó

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng là hội tụ.
- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là phân kỳ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng là phân kỳ.

Định lý 4. Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

Khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

3 Tiêu chuẩn d'Alambert

Định lý 5. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Khi đó

- Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.
- Nếu $L > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

4 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 6. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Khi đó

- Nếu $L < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.
- Nếu $L > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

II Chuỗi với số hạng có dấu bất kỳ

1 Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý 7. Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ cũng là hội tụ.

Định nghĩa 1. Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là

- Hội tụ tuyệt đối nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là hội tụ.
- Bán hội tụ nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ còn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ.

2 Chuỗi đan dấu $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\right)$

Định lý 8. Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$,

Nếu $\{a_n\}_1^{\infty}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hội tụ, và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n < a_1$.

3 Chuỗi đặc biệt $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right)$

Tiêu chuẩn 1. (Tiêu chuẩn Dirichlet) Nếu

- Dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bị chặn
- b_n là dãy đơn điệu hội tụ đến 0

thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ.

Tiêu chuẩn 2. (Tiêu chuẩn Abel) Nếu

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ
- b_n là một dãy đơn điệu bị chặn

thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ.

III Chuỗi hàm số $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$

1 Chuỗi hàm số hội tụ

Định nghĩa 2. Cho dãy các hàm số $\{a_n(x)\}$,

- Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ.
- Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là phân kỳ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ phân kỳ.

Tập hợp các điểm hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là miền hội tụ.

2 Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định nghĩa 3. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên tập X nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > n(\varepsilon), \forall x \in X$$

- $n(\varepsilon)$ chỉ phụ thuộc vào ε mà không phụ thuộc vào x.
- Ý nghĩa hình học: với n đủ lớn thì $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x) - \varepsilon, S(x) + \varepsilon)\,, x \in X$

Định lý 9. (Tiêu chuẩn Cauchy). Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập X nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left|S_p(x) - S_q(x)\right| < \varepsilon, \forall p, q > n, \forall x \in X$$

Định lý 10. (Tiêu chuẩn Weierstrass). Nếu:

- $|u_n(x)| \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$
- chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

thì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên X.

3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý 11. (Tính liên tục). Nếu

- $u_n(x)$ liên tục trên X với mọi n
- chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X

thì $S(x)$ liên tục trên X, ví dụ:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} u_n(x)$$

Định lý 12. (Tính khả vi). Nếu

- $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a,b) với mọi n
- chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ về $S(x)$ trên (a,b)
- chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$hội tụ đều trên (a,b)

thì $S(x)$ khả vi trên (a,b) và

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

IV Chuỗi luỹ thừa $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)$

Định lý 13. (Định lý Abel). Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x \neq 0$, thì nó cũng hội tụ tại mọi điểm mà $|x| < |x_0|$.

Định lý trên dẫn tới các hệ quả:

Hệ quả 1. Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại $x_0 \neq 0$, thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm x mà $|x| < |x_0|$.

Hệ quả 2. Với mỗi chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ cho trước, chỉ có 3 khả năng sau có thể xảy ra:

- Chuỗi hội tụ tại điểm duy nhất $x = 0$
- Chuỗi hội tụ tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$
- Tồn tại một số thực R sao cho chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < R$ và phân kỳ nếu $|x| > R$.

Chú ý. Về cách tìm bán kính nội tụ R ta áp dụng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc tiêu chuẩn Cauchy để giải.

1 Các tính chất của chuỗi luỹ thừa.

Định lý 14. Giả sử rằng chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ bằng $R > 0$ và đặt $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ với $|x| < R$. Khi đó

- Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên mọi đoạn $[a,b] \subset (-R,R)$.
- $f(x)$ là hàm số liên tục trên $(-R,R)$.
- $f(x)$ là hàm số khả vi (và do đó liên tục) trên khoảng $(-R,R)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} a_n x^n dx\right) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

- f(x) là hàm số khả tích trên mọi đoạn $[a,b] \subset (-R,R)$ và

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$