

تمرین تحویلی شماره ۱۲

میدان برداری

$$F = (2x^2 - 4y^3, 4x^3 + 8y^2)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید C مرز ناحیه محصور توسط $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $x \geq 0$ و $y \leq 0$ باشد و C دارای جهت مثبت قراردادی است. انتگرال

$$\oint_C (2x^2 - 4y^3)dx + (4x^3 + 8y^2)dy$$

را محاسبه کنید.

پاسخ

$$P = 2x^2 - 4y^3 \quad \text{و} \quad Q = 4x^3 + 8y^2$$

طبق قضیه گرین داریم:

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy & (1 \text{ نمره}) \\ &= \iint_D (12x^2 + 12y^2) dx dy & (1 \text{ نمره}) \\ &= 12 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a r^2 dr d\theta & (2 \text{ نمره}) \\ &= 12 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^a d\theta \\ &= 12 \times \frac{\pi}{2} \left(\frac{a^3}{3} \right) & (1 \text{ نمره}) \end{aligned}$$