دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

مسئله‌هایی مرتبط با فصل‌های اول، هشتم و نهم

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

1 — Fundamental Principles of Counting

8 — The Principle of Inclusion and Exclusion

9 — Generating Functions

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

اتحاد ترکیباتی زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r}=\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1} \qquad n,r\in N,\ n\geq r$$

(اتحاد فوق به اتحاد Chu Shih-chieh یا اتحاد Hockey-stick معروف است)

راه حل: فرض کنید $X=\{a_1,a_2,\dots,a_{n-r+1},\dots,a_{n+1}\}$ یک مجموعهٔ $n+1$ عضوی باشد. حال می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های $r+1$ عضوی مانند A را از مجموعهٔ X بشماریم.

حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

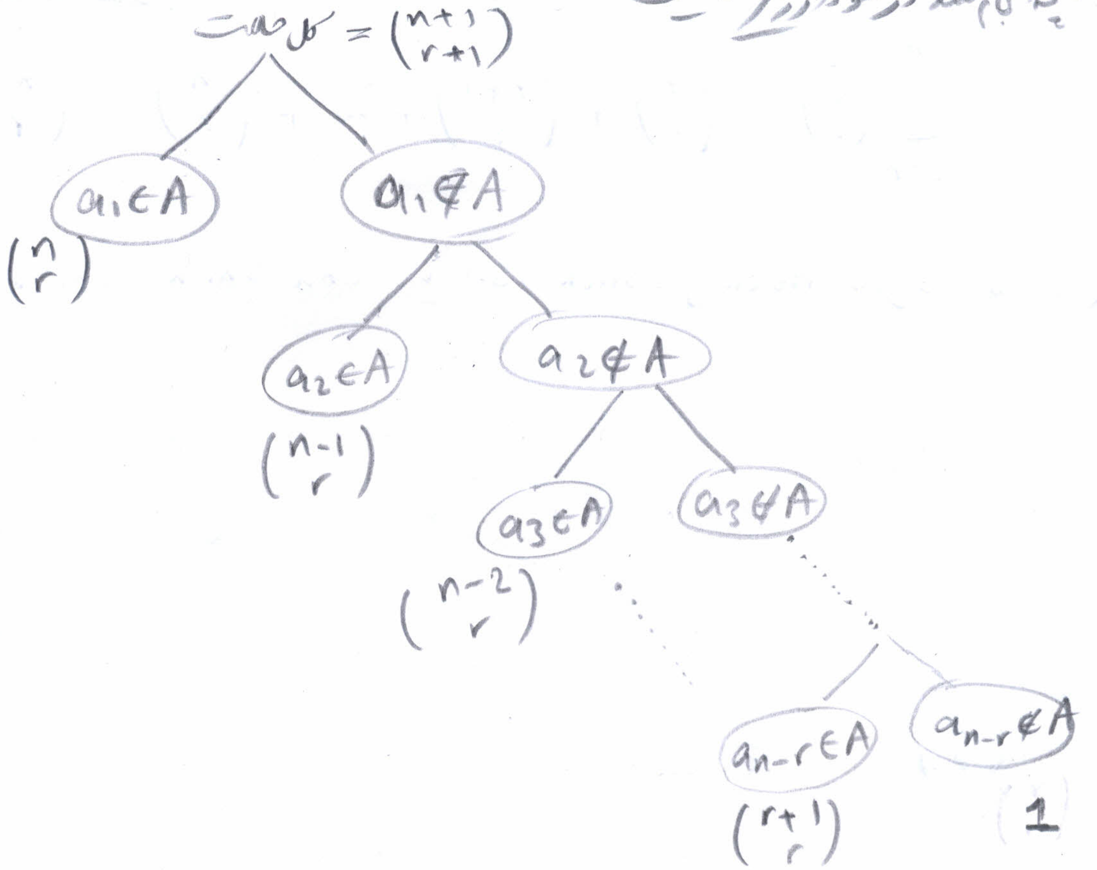
	تعداد حالات
$a_1\in A \Leftarrow$ r عضو دیگر از $X-\{a_1\}$ باید انتخاب کنیم و در A قرار دهیم $\Leftarrow$	$\binom{n}{r}$
$a_1\notin A$, $a_2\in A \Leftarrow$ r عضو دیگر از $X-\{a_1,a_2\}$ باید انتخاب کنیم $\Leftarrow$	$\binom{n-1}{r}$
$\vdots$	$\vdots$
$a_1,\dots,a_{n-r-1}\notin A$ و $a_{n-r}\in A \Leftarrow$ r عضو دیگر از $X-\{a_1,a_2,\dots,a_{n-r}\}$ باید انتخاب کنیم $\Leftarrow$	$\binom{(n+1)-(n-r)}{r}=\binom{r+1}{r}$
$a_1,\dots,a_{n-r}\notin A \Leftarrow$ تمامی $r+1$ عضو باقی‌مانده در $\{a_{n-r+1},\dots,a_{n+1}\}$ باید انتخاب شود. $\Leftarrow$	1

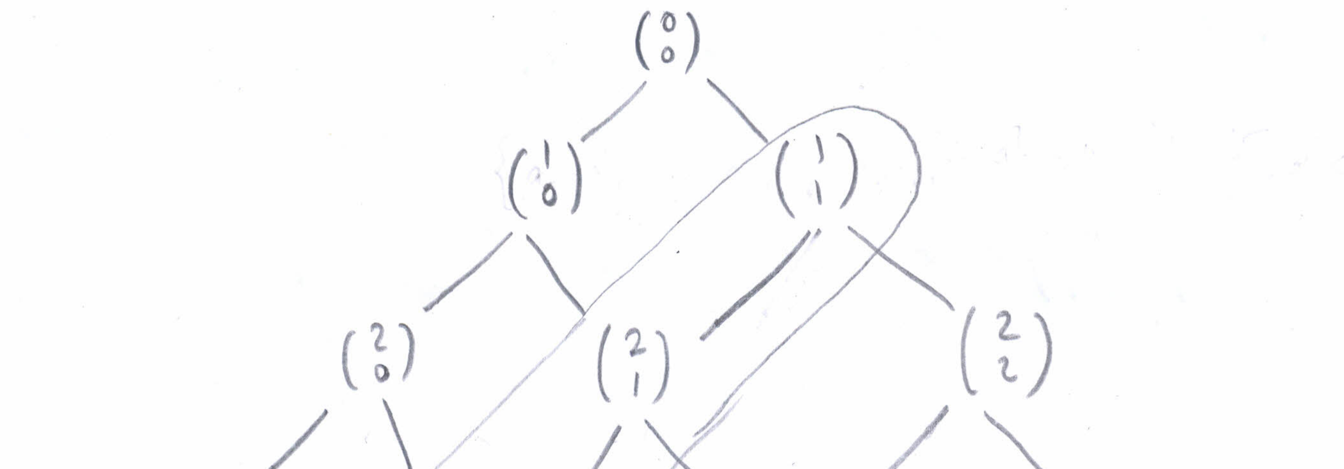
از طرفی می‌دانیم پاسخ مسئله $\binom{n+1}{r+1}$ است (تعداد زیرمجموعه‌های $r+1$ عضوی از یک مجموعهٔ $n+1$ عضوی)

پس داریم:

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n-1}{r}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

آنچه انجام شده در نمودار زیر نمایش داده شده است :





$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} = \binom{4}{2}$$

فرض کنید $1 \le r \le n$ باشد، حال کوچکترین عضو هر زیرمجموعهٔ r عضوی از $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. میانگین این کوچکترین عضوها را بدست آورید.

راه حل:

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ که کوچکترین عضوشان k است برابر است با $\binom{n-k}{r-1}$ به شرط $1 \le k \le n-r+1$

نکته: اگر $k > n-r+1$ باشد دراینصورت نمی‌توان زیرمجموعهٔ r عضوی داشت که k کوچکترین عضو آن باشد.

پس جمع کل تمامی کوچکترین عضوها برابر است با:

$$S = \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}$$

$$= 1\binom{n-1}{r-1} + 2\binom{n-2}{r-1} + \dots + (n-r+1)\binom{r-1}{r-1}$$

$$= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \dots + \binom{r-1}{r-1} \qquad \text{سطر اول}$$

$$+ \binom{n-2}{r-1} + \dots + \binom{r-1}{r-1} \qquad \text{سطر دوم}$$

$$\vdots$$

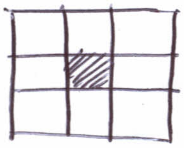
$$+ \binom{r-1}{r-1} \qquad \text{سطر آخر}$$

با استفاده از اتحاد Chu Shih-Chieh یا Hockey Stick در هر سطر داریم:

$$S = \underbrace{\binom{n}{r}}_{\text{جمع سطر ۱}} + \underbrace{\binom{n-1}{r}}_{\text{جمع سطر ۲}} + \dots + \underbrace{\binom{r}{r}}_{\text{جمع سطر آخر}} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$\text{میانگین} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } r \text{ عضوی}} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

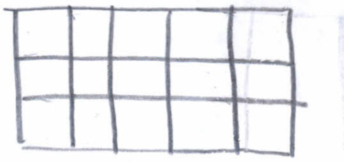
به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول ۳×۸ را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کرد به طوری که شکل زیر در آن یافت نشود؟



(*)

راه حل:

ابتدا جدول ۳×۵ را در نظر بگیرید:

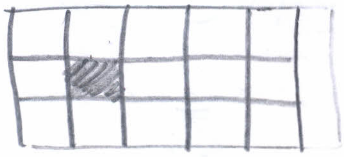


در این جدول ، به تعداد سه جدول ۳×۳ (مربع) وجود دارد. این مربع‌ها را به ترتیب از چپ به راست با SQ_1 تا SQ_3 نشان می‌دهیم.

حال c_i (برای $1 \le i \le 3$) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

c_i : مربع SQ_i به شکل الگوی نشان داده شده در شکل (*) باشد.

مثلاً اگر جدول ۳×۵ ای c_1 را فقط برآورده کند باید به شکل زیر باشد:



حال باید طبق اصل شمول و عدم شمول $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3)$ را محاسبه کنیم.

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3) = N_0 - \sum_{i=1}^{3} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le 3} N(c_i c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le 3} N(c_i c_j c_k)$$

$$= 2^{15} - \binom{3}{1} \times 2^6 + \underbrace{N(c_1c_2)}_{0} + \underbrace{N(c_1c_3)}_{1} + \underbrace{N(c_2c_3)}_{0} - 0$$

$$= 2^{15} - 3 \times 2^6 + 1$$

به چند طریق می‌توان عدد 2730 را بصورت حاصلضرب دو عدد طبیعی a و b نوشت بطوریکه $a \geq b \geq 2$ باشد؟ (با صرفنظر از ترتیب a و b در ضرب نهایی)

راه حل :
$$2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

حال مسئله تبدیل می‌شود به افراز مجموعهٔ $\{2,3,5,7,13\}$ به دو مجموعه بطوریکه حاصلضرب اعضای یکی از مجموعه‌ها برابر با a و حاصلضرب اعضای مجموعهٔ دیگر برابر با b باشد پس:

پاسخ : $S(5,2)$

(عدد استرلینگ نوع دوم)

نکته: اگر مسئله می‌خواست تعداد کل روش‌هایی که عدد 2730 را می‌توان بصورت حاصلضرب حداقل دو عدد طبیعی بزرگتر از ① نوشت درآنصورت پاسخ برابر بود با : $\sum_{i=2}^{5} S(5,i)$

نکات تکمیلی درخصوص اعداد استرلینگ نوع دوم

- به ازای $m \geq n$ ، $\sum_{i=1}^{n} S(m,i)$ برابر است با تعداد حالات ممکن توزیع m شیء متمایز بین n ظرف یکسان درصورتیکه خالی بودن بعضی از ظروف مجاز باشد.

- برای $m,n \in \mathbb{Z}^+$ ، $1 < n < m$ داریم: $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$

-

$S(n,1) = S(n,n) = 1$

$S(n,k) = 0$ if $k > n \geq 1$

$S(n,0) = S(0,k) = 0$ if $n,k \geq 1$

$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ if $n \geq 1$

$S(n,n-1) = \binom{n}{2}$ if $n \geq 1$

$S(0,0) = 1$: همچنین توافق می‌کنیم

تابع مولد تولید کننده سری اعداد فیبوناچی را بدست آورید:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} & n \geq 2 \\ f_0 = 0 \,,\; f_1 = 1 \end{cases}$$

راه حل :

اعداد فیبوناچی را می‌توان بصورت روبرو نوشت :

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= f_1 + f_0 \\ f_3 &= f_2 + f_1 \\ f_4 &= f_3 + f_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال تابع $F(x)$ را تعریف می‌کنیم که دنباله اعداد متناظر با سمت چپ تساوی‌های فوق را تولید کند، که همان دنباله اعداد فیبوناچی است :

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \cdots$$

$$\Big\Downarrow \text{ سری متناظر}$$

$$\langle 0 \,,\; 1 \,,\; f_1 + f_0 \,,\; f_2 + f_1 \,,\; f_3 + f_2 \,,\; \cdots \rangle \quad (*)$$

دنباله $(*)$ را می‌توان بر مجموع سه دنباله زیر شکست : (تابع مولد هر دنباله را می‌دانیم)

$$\begin{array}{rl} & \langle 0, \; 1, \; 0, \; 0, \; 0, \; \cdots \rangle \longleftrightarrow x \\ & \langle 0, \; f_0, \; f_1, \; f_2, \; f_3, \; \cdots \rangle \longleftrightarrow x F(x) \\ + & \langle 0, \; 0, \; f_0, \; f_1, \; f_2, \; \cdots \rangle \longleftrightarrow x^2 F(x) \\ \hline & \langle 0, \; 1 + f_0, \; f_1 + f_0, \; f_2 + f_1, \; f_3 + f_2, \; \cdots \rangle \longleftrightarrow \end{array}$$

$$x + x F(x) + x^2 F(x)$$

پس به این نتیجه رسیدیم که

$$x + xF(x) + x^2F(x) = 0 + (1+f_0)x + (f_1+f_0)x^2 + (f_2+f_1)x^3 + \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ F(x) & = & f_0 & + & f_1 x & + & f_2 x^2 & + & f_3 x^3 + \cdots \end{array}$$

پس داریم:

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

ضریب x را در چند جمله‌ای زیر بیابید :

$$\left(1+\binom{n}{0}x\right)\left(1+\binom{n}{1}x\right)^2\left(1+\binom{n}{2}x\right)^3 \cdots \left(1+\binom{n}{n}x\right)^{n+1}$$

راه حل : ضریب x برابر است با : (با استفاده از بسط دو جمله‌ای یا Binomial Theorem)

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}$$

برای محاسبهٔ حاصل فوق، می‌توان مشتق تابع زیر را در نقطهٔ $x=1$ محاسبه کرد :

$$\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{0}x+\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^{n+1}\right]\Bigg|_{x=1}$$

$$=\frac{d}{dx}\left[x(1+x)^n\right]\Big|_{x=1}$$

$$=\left[1\times(1+x)^n+x(n)(1+x)^{n-1}\right]\Big|_{x=1}$$

$$=\left[2^n+n\,2^{n-1}\right]$$

$$=(n+2)\,2^{n-1}$$