دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

فصل ۱ - اصول بنیادی شمارش
بخش اول

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

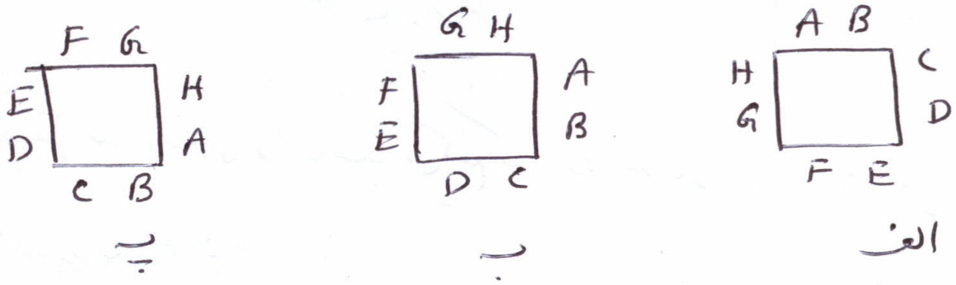
ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

1

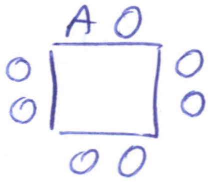
Fundamental Principles of Counting

سوال ۲۸ - صفحه ۱۶ - تمرینات ۱.۱ و ۲.۱

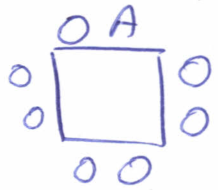
الف) به چند طریق ۸ نفر می‌توانند دور میز مربعی بنشینند، با این فرض که شکل‌های الف و ب یکی هستند ولی پ متفاوت است؟



الف) راه حل اول - A را در یکی از ۸ جا ثابت فرض می‌کنیم.



← بقیه به $7!$ حالت می‌توانند بنشینند



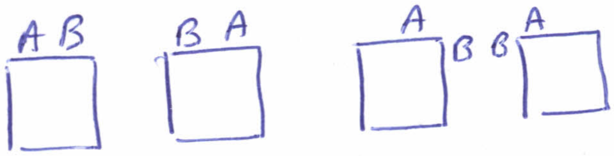
← بقیه به $7!$ حالت می‌توانند بنشینند

$$\underbrace{7!+7!=2\times7!}_{\text{کل حالات}}$$

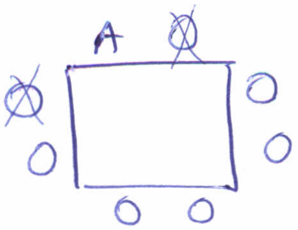
راه حل دوم ← $\frac{8!}{4}$

ب) اگر A و B با هم ناسازگار باشند، چند طریق متفاوت برای نشستن امکان پذیر است مشروط بر آنکه A و B کنار هم نباشند؟

کل حالاتی که A و B کنار یکدیگر هستند:



راه حل اول - $\underbrace{2\times7!}_{\text{پاسخ بخش الف}} - \underbrace{4\times6!}_{\text{۴ حالت فوق و نشستن سایر افراد}} = 10\times6!$

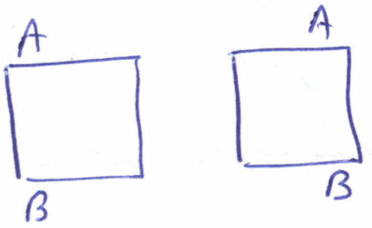


راه حل دوم - ابتدا A را ثابت در نظر بگیریم: در اینصورت B تنها در یکی از ۵ مکان می‌تواند بنشیند.

$$\frac{\overset{\text{حالات A}}{8}\times\overset{\text{حالات B}}{5}\times\overset{\text{سایرین}}{6!}}{4}=10\times6!$$

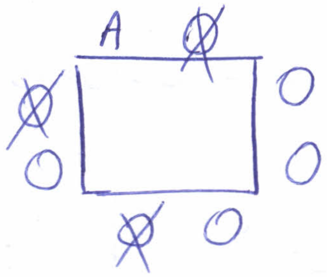
پ) در چند تا از طرق نشستن قسمت ب ، A و B مقابل یکدیگر در دو طرف میز قرار نمی‌گیرند!

راه حل اول



$$\underbrace{(10 \times 6!)}_{\text{پاسخ بخش ب}} - (2 \times 6!) = 8 \times 6!$$

راه حل دوم: بطور مستقیم تعداد حالاتی را حساب می‌کنیم که B نه تنها در کنار A ننشیند بلکه در روبروی A هم ننشیند.



حالات A ، حالات B ، سایرین

$$\frac{8 \times 4 \times 6!}{4} = 8 \times 6!$$

مثال ۱.۴۱ صفحه 33 کتاب انگلیسی

در یک رشته از حروف داده شده، یک Run به زیررشته‌ای گفته می‌شود که همه حروفش یکی باشد.

به عنوان مثال، رشته زیر که حاوی 10 تا O، و 5 تا E است از 7 تا run تشکیل شده است:

$$\underbrace{OO}_{Run}\ \underbrace{E}_{Run}\ \underbrace{OOOO}_{Run}\ \underbrace{EEE}_{Run}\ \underbrace{OOO}_{Run}\ \underbrace{E}_{Run}\ \underbrace{O}_{Run}$$

حال سوال این است که به چند طریق 5 تا E و 10 تا O می‌توانند تشکیل 7 تا run را بدهند؟

دو حالت کلی وجود دارد، رشته‌ای که دارای 7 تا run است یا با E شروع شود یا با O شروع گردد.

حالت اول $\longrightarrow$ $\underbrace{E\ldots}_{x_1}\ \underbrace{O\ldots}_{x_2}\ \underbrace{E\ldots}_{x_3}\ \underbrace{O\ldots}_{x_4}\ \underbrace{E\ldots}_{x_5}\ \underbrace{O\ldots}_{x_6}\ \underbrace{E\ldots}_{x_7}$

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_5+x_7=5 & x_1,x_3,x_5,x_7>0 \\ x_2+x_4+x_6=10 & x_2,x_4,x_6>0 \end{cases}$$

تعداد پاسخ: $\binom{4}{1}\binom{9}{7}$

حالت دوم $\longrightarrow$ $\underbrace{O\ldots}_{w_1}\ \underbrace{E\ldots}_{w_2}\ \underbrace{O\ldots}_{w_3}\ \underbrace{E\ldots}_{w_4}\ \underbrace{O\ldots}_{w_5}\ \underbrace{E\ldots}_{w_6}\ \underbrace{O\ldots}_{w_7}$

$$\begin{cases} w_1+w_3+w_5+w_7=10 & w_1,w_3,w_5,w_7>0 \\ w_2+w_4+w_6=5 & w_2,w_4,w_6>0 \end{cases}$$

تعداد پاسخ: $\binom{4}{2}\binom{9}{6}$

$$\boxed{\text{تعداد کل پاسخ: } \binom{4}{1}\binom{9}{7}+\binom{4}{2}\binom{9}{6}}$$

تمرین ۱۱ - صفحهٔ ۴۲ - تمرینات ۲.۱

- دو رشته از اعداد n رقمی را هم‌ارز گویند هرگاه یکی از دیگری با آرایش دیگری بدست آید.

مثال: 20331 و 01332 هم‌ارزند. (رقم نخست سمت چپ می‌تواند صفر باشد)

الف) چند عدد 5 رقمی غیر هم‌ارز وجود دارد؟

$$\boxed{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 5}$$

x_i: تعداد عدد i (رقم i)

$0 \le i \le 9$

پاسخ الف: $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5}$

ب) اگر ارقام ۱، ۳، 7 می‌توانند حداکثر یک بار ظاهر شوند، چند عدد صحیح پنج رقمی ناهم‌ارز وجود دارد؟

در واقع معادلهٔ نوشته شده $x_0 + x_1 + \cdots + x_9 = 5$ را تحت شرایط مختلف زیر حل می‌کنیم:

- اگر ۱، 3 و 7 کلاً نداشته باشیم: $\binom{3}{0}\binom{7+5-1}{5}$

- اگر دقیقاً یکی از سه عدد ۱، 3 و 7 داشته باشیم: $\binom{3}{1}\binom{7+4-1}{4}$

- اگر دقیقاً دوتا از سه عدد ۱، 3 و 7 داشته باشیم: $\binom{3}{2}\binom{7+3-1}{3}$

- اگر هر سه عدد ۱، 3 و 7 را داشته باشیم: $\binom{3}{3}\binom{7+2-1}{2}$

پس پاسخ قسمت ب:

$$\binom{3}{0}\binom{7+5-1}{5} + \binom{3}{1}\binom{7+4-1}{4} + \binom{3}{2}\binom{7+3-1}{3} + \binom{3}{3}\binom{7+2-1}{2}$$

$$= \binom{11}{5} + 3\binom{10}{4} + 3\binom{9}{3} + \binom{8}{2}$$

تمرین ۲۱ـ صفحه 43 - تمرینات ۴.۱

دستور Writeln چند بار در قطعه برنامه پاسکال زیر اجرا می‌گردد؟

```
For i=1 to 20 do
    For j=1 to i do
        For k=1 to j do
            For m=1 to k do
                Writeln((i*j)+(k*m));
```

هربار که دستور writeln اجرا می‌گردد، معادل است با یک پاسخ نامعادله زیر:

$$1 \le m \le k \le j \le i \le 20 \qquad (*)$$

و هر جواب نامعادله (*)، متناظر است با یک جواب برای معادله زیر:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} + x_{20} = 4 \qquad (**)$$

$$x_i \ge 0 \qquad 1 \le i \le 20$$

تعداد جواب معادله فوق: $\binom{20+4-1}{4} = \binom{23}{4}$

و برعکس: یعنی هر پاسخ برای معادله (**) یک پاسخ معادل برای نامعادله (*) است.

توجه: در معادله ** ، منظور از x_i، یعنی از عدد i چه تعداد انتخاب کرده‌ام.

(در مجموع می‌خواهیم ۴ عدد از اعداد بین ۱ تا 20 انتخاب کنیم).

تمرین ۲۸ ـ صفحهٔ ۵۹ ـ تمرینات ۱.۴

برای محاسبه جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید.

$x_i \ge 0 \quad 1 \le i \le 3$

```
x1 , x2 : integer

for x1 = 0 to 10 do
    for x2 = 0 to 10 - x1 do
        Writeln ( x1 , x2 , 10 - x1 - x2 )
```

هر کدام از سه تایی‌ها که برنامه چاپ می‌کند یک پاسخ صحیح برای معادله داده شده است.

تمرین ۵ - صفحه ۴۹ - تمرینات تکمیلی

چند طریق برای نصب ۲۵ پرچم مختلف بر ۱۰ دیرک شماره گذاری شده وجود دارد
درصورتی که ترتیب پرچم‌ها در هر دیرک

الف) مورد نظر نباشد

$$10^{25}$$

ب) مورد نظر باشد.

$$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=25 \quad \longrightarrow \quad \binom{25+10-1}{25}=\binom{34}{25}$$

$x_i \geq 0$

$1 \leq i \leq 10$

کل حالات: $\binom{34}{25} \times 25! = \dfrac{34!}{9!}$

پ) مورد نظر باشد و قرار باشد هر دیرک حداقل دارای یک پرچم باشد.

$$x_1+\cdots+x_{10}=25 \quad \Longrightarrow \quad (y_1+1)+(y_2+1)+\cdots+(y_{10}+1)=25$$

$x_i \geq 1$

$1 \leq i \leq 10$

$y_i \geq 0$

$1 \leq i \leq 10$

$x_i = y_i + 1$

$$\Longrightarrow \quad y_1+\cdots+y_{10}=15 \quad \Longrightarrow \quad \binom{15+10-1}{15}=\binom{24}{15}$$

$y_i \geq 0$

$1 \leq i \leq 10$

کل حالات: $\binom{24}{15} \times 25!$

تمرین ۲۳ - صفحه ۵۱ - تمرینات تکمیلی

فرض کنیم n فرد باشد. به چند طریق می‌توانیم n تا ۱ و r تا ۰ را چنان مرتب کنیم که ردیفی (فهرستی از نمادهای یک ان کنار هم) حاوی دقیقاً k تا ۱، ($k \leq n < 2k$) را داشته باشیم؟

راه حل اول -

سه حالت برای این k تا ۱ وجود دارد:

I

$$\underbrace{111\cdots1}_{1 \text{ تا } k}\ 0\ \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\substack{r-1 \text{ تا صفر} \\ 1 \text{ تا } n-k}} \longrightarrow \text{تعداد حالات}: \frac{(n-k+r-1)!}{(r-1)!\,(n-k)!}$$

II مشابه بالا (حالت I) با این تفاوت که k تا ۱ در انتهای لیست بیاید.

III

$$\underbrace{\cdots\cdots}\ 0\ \underbrace{111\cdots111}_{1 \text{ تا } k}\ 0\ \underbrace{\cdots\cdots} \longrightarrow \text{تعداد حالات}: \frac{(n-k+r-2+1)!}{(n-k)!\,(r-2)!}$$

0 تا $r-2$

1 تا $n-k$

$$\text{کل حالات}: 2 \times \frac{(n-k+r-1)!}{(r-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k+r-2+1)!}{(n-k)!\,(r-2)!}$$

$$= 2 \times \frac{(n-k+r-1)!}{(r-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k+r-1)! \times (r-1)}{(n-k)!\,(r-2)! \times (r-1)}$$

$$= 2 \times \frac{(n-k+r-1)!}{(r-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k+r-1)!\,(r-1)}{(n-k)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{(n-k+r-1)!}{(r-1)!\,(n-k)!} \times (2+r-1) = \binom{n-k+r-1}{r-1}\binom{r+1}{1}$$

راه حل دوم —

r تا ۰ را در نظر می‌گیریم :

۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ...... ۰ ۰ ۰

حال $r+1$ تا مکان برای قرار دادن k تا 1 پشت سر هم داریم .

می‌توان از این $r+1$ تا مکان یکی را انتخاب کرد : $\binom{r+1}{1}$: حالت‌های ممکن

بعد $n-k$ تا 1 باقی‌مانده را در r محل باقی‌مانده می‌گذاریم :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n-k \qquad \xrightarrow{\text{تعداد پاسخ معادله}} \quad : \binom{n-k+r-1}{n-k}$$

$$x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq r$$

پس کل حالات می‌شود :

$$\binom{n-k+r-1}{r-1}\binom{r+1}{1}$$

تمرین ۲۹ _ صفحهٔ ۵۲ _ تمرینات تکمیلی

پ) اگر ترتیب مورد نظر باشد، تعداد طرقی را که بتوان عدد طبیعی n را بصورت حاصلجمعی از ۱ها و ۲ها نوشت بیابید:

اگر n فرد باشد در اینصورت تعداد ۱ها برابر است با: $2k+1$

$0 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$

حال $2k+1$ تا ۱ را در نظر میگیریم: (به ازای یک k خاص) ...۱...۱...۱...۱......۱...

در میان $2k+1$ تا ۱، دقیقاً $2k+2$ جا وجود دارد که میتوان عدد 2 را با تکرار نوشت

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2k+2}=\underbrace{\frac{1}{2}\left[n-(2k+1)\right]}_{\text{تعداد کل ۲ها}}$$

تعداد جوابهای معادله:

$$\binom{\frac{n}{2}-\frac{2k}{2}-\frac{1}{2}+(2k+2)-1}{\frac{n}{2}-\frac{2k}{2}-\frac{1}{2}}=\binom{\frac{n+1}{2}+k}{\frac{n-1}{2}-k}$$

با توجه به اینکه k میتواند بین ۰ تا $\left[\frac{n}{2}\right]$ باشد ($0\le k\le \left[\frac{n}{2}\right]$)

پس داریم:

کل جوابها:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{\frac{n+1}{2}+k}{\frac{n-1}{2}-k}$$

اگر n زوج باشد، در این صورت تعداد ۱ ها برابر است با $2k$

$0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

حال $2k$ تا ۱ را برای (یک k خاص) در نظر می‌گیریم:

$\ldots 1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots$

در میان $2k$ تا ۱، دقیقاً $2k+1$ تا جا برای 2 داریم. (با تکرار)

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[n - 2k\right]}_{\text{تعداد 2 ها}}$$

$$\text{تعداد جواب‌های معادله} = \binom{\frac{n}{2} - \frac{2k}{2} + 2k+1 - 1}{\frac{n}{2} - \frac{2k}{2}} = \binom{\frac{n}{2} + k}{\frac{n}{2} - k}$$

با توجه به اینکه $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$، پس داریم:

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} : \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{\frac{n}{2} + k}{\frac{n}{2} - k}$$

درحالی که n زوج است $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$. بنابراین می‌توانستیم در روند حل این بخش از مسئله، از $\frac{n}{2}$ به جای $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ استفاده کنیم.

سوال ۳۱ـ صفحه ۳۲ ـ تمرینات ۳.۱

نشان دهید اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه:

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

فرض کنید از میان $2n+2$ شیء مختلف قصد داریم $n+1$ شیء را انتخاب کنیم.

راه حل اول: $\binom{2n+2}{n+1}$

راه حل دوم: حال فرض کنید که تکلیف دو شیء از قبل معلوم باشد (مثلاً اشیاء O_1، O_2) در این صورت ۴ حالت مختلف وجود دارد که این دو شیء در انتخاب نهایی حضور داشته باشند یا نه.

حضور O_1	حضور O_2	تعداد حالات
✓	✓	$\binom{2n}{n-1}$
✓	X	$\binom{2n}{n}$
X	✓	$\binom{2n}{n}$
X	X	$\binom{2n}{n+1}$

پس کل حالات برابر است با:

$$\binom{2n}{n-1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}$$

$$= 2\binom{2n}{n-1} + 2\binom{2n}{n} = 2\left[\binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n}\right]$$

هر دو راه حل جهت شمردن تعداد اعضای یک مجموعه، راه حل های صحیحی هستند لذا با هم برابرند:

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

(روش شمارش مضاعف)
Double Counting

* نکته: می‌توانستیم در روند حل مسأله ما از اتحاد پاسکال هم استفاده بکنیم:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$