

مثال - تابع مولد تعداد *composition* های اعداد طبیعی

- تابع مولد تولیدکننده تعداد *composition* های اعداد طبیعی را به دست آورید. ضریب x^n در این تابع باید نشان دهنده تعداد *composition* های عدد n باشد.

$$\begin{array}{l}
 \left(\frac{x}{1-x} \right)^1 = (x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^1 \quad \longrightarrow \quad \text{ضریب } x^n \text{ نشان دهنده تعداد } composition \text{ های عدد } n \text{ که دارای ۱ جمع‌وند است:} \\
 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 = (x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^2 \quad \longrightarrow \quad \text{ضریب } x^n \text{ نشان دهنده تعداد } composition \text{ های عدد } n \text{ که دارای ۲ جمع‌وند است:} \\
 \dots \dots \dots \\
 \left(\frac{x}{1-x} \right)^n = (x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^n \quad \longrightarrow \quad \text{ضریب } x^n \text{ نشان دهنده تعداد } composition \text{ های عدد } n \text{ که دارای } n \text{ جمع‌وند است:} \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}$$

+ {

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x} \right)^i = \dots + \textcolor{red}{A}x^n + \dots$$

بنابراین تابع مولد مورد نظر برابر خواهد بود با:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x} \right)^i$$

مثال - تابع مولد تعداد *composition* های اعداد طبیعی - ادامه

البته می توان تابع به دست آمده را ساده تر کرد:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i$$

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{1-x} \quad \longrightarrow \quad f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} y^i = y \sum_{i=0}^{\infty} y^i = y \left(\frac{1}{1-y} \right) \\ &= \left(\frac{x}{1-x} \right) \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{1-x} \right)} \right] = \left(\frac{x}{1-x} \right) \left[\frac{1}{\frac{1-x-x}{1-x}} \right] \\ &= x/(1-2x) = x[1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots] \\ &= 2^0 x + 2^1 x^2 + 2^2 x^3 + 2^3 x^4 + \dots \end{aligned}$$

ضریب x^n که نشان دهنده تعداد کل *composition* های عدد n است، برابر با 2^{n-1} خواهد بود.

مثال

- با استفاده از مفهوم تابع مولد، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ را تعیین کنید با این شرط که هر یک از زیرمجموعه‌ها فاقد دو عضو متوالی از S باشند.

هر زیرمجموعه ۴ عضوی از S ، همانند $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ خواهد بود. از آنجایی که این ۴ عضو متفاوت با یکدیگر هستند می‌توان آن‌ها را به صورت مرتب شده و به صورت زیر در نظر گرفت:

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 15$$

حال، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\underbrace{(a_1 - 1)}_{c_1} + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{c_3} + \underbrace{(a_4 - a_3)}_{c_4} + \underbrace{(15 - a_4)}_{c_5} = 14$$

و به معادله زیر می‌رسیم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$$

این شرط تضمین می‌کند که هیچ دو عضو متوالی در یک زیرمجموعه قرار نمی‌گیرند. $c_1, c_5 \geq 0$ $c_2, c_3, c_4 \geq 2$

بین پاسخ‌های معادله فوق و زیرمجموعه‌های چهار عضوی (فاقد اعضای متوالی) تناظر یک‌به‌یک وجود دارد.

مثال - ادامه

حال، باید معادله زیر را حل کنیم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$$

$$c_1, c_5 \geq 0 \quad c_2, c_3, c_4 \geq 2$$

تابع مولد متناظر با حل معادله فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^3(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= x^6(1 - x)^{-5}. \end{aligned}$$

حال باید در عبارت $x^6(1 - x)^{-5}$ ضریب x^{14} ، و یا در عبارت $(1 - x)^{-5}$ ضریب x^8 را پیدا کرد:

ضریب x^8 در عبارت $(1 - x)^{-5}$ برابر است با:

$$\binom{-5}{8}(-1)^8 = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$