

تمرین تحویلی شماره ۱

فرض کنید $\alpha(t) = (\cos(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \sin(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \frac{\sqrt{2}}{4}t)$ داده شده است. کنج فرنه این خم، یعنی $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ را در نقطه دلخواه t از دامنه‌اش بیابید. در ادامه فرض کنید abc سه رقم آخر سمت راست شماره دانشجویی‌تان است. خم پارامتری جدید زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta(t) = \sqrt{2}(a+1)\mathbf{T}(t) + (b+\kappa(t))\mathbf{N}(t) + \sqrt{2}(c+\tau(t))\mathbf{B}(t),$$

که در آن κ و τ به ترتیب انحنا و تاب خم α هستند. با مفروضات بالا، ابتدا ضابطه صریح خم β را بنویسید و سپس انحنا و تاب آن را بیابید و نتیجه بگیرید مسیر خم β ؛ یعنی تصویر آن، یک دایره است.

پاسخ: برای خم α در یک نقطه دلخواه t از دامنه‌اش داریم:

$$\mathbf{T}(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \frac{\sqrt{2}}{4}). \quad (۲۵, \circ, \text{نمره})$$

$$\mathbf{N}(t) = (-\cos(\frac{\sqrt{2}}{4}t), -\sin(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \circ). \quad (۲۵, \circ, \text{نمره})$$

$$\mathbf{B}(t) = (\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\frac{\sqrt{2}}{4}t), -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \frac{\sqrt{2}}{4}). \quad (۲۵, \circ, \text{نمره})$$

$$\kappa(t) = \tau(t) = \frac{1}{4}. \quad (۲۵+۰, ۲۵, \circ, \text{نمره})$$

بنابراین با توجه ضابطه خم β و محاسبات بالا، اگر قرار دهیم $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t))$ آنگاه خواهیم داشت:

$$x(t) = -(a-c+\frac{1}{4})\sin(\frac{\sqrt{2}}{4}t) - (b+\frac{1}{4})\cos(\frac{\sqrt{2}}{4}t), \quad (۲۵, \circ, \text{نمره})$$

$$y(t) = (a-c+\frac{1}{4})\cos(\frac{\sqrt{2}}{4}t) - (b+\frac{1}{4})\sin(\frac{\sqrt{2}}{4}t) \quad (۲۵, \circ, \text{نمره})$$

$$z(t) = a+c+\frac{3}{4}. \quad (۲۵, \circ, \text{نمره})$$

حال با توجه به فرمولهای محاسباتی برای انحنا و تاب یک خم بر حسب پارامتر دلخواه داریم:

$$\kappa_{\beta}(t) = \frac{\|\beta'(t_*) \times \beta''(t_*)\|}{\|\beta'(t_*)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + (2-4c)a + 2b^2 + 2c^2 + 2b - 2c + 1}} \quad (۱ \text{ نمره})$$

$$\tau_{\beta}(t) = \frac{(\beta'(t_*) \times \beta''(t_*)) \cdot \beta'''(t_*)}{\|\beta'(t_*) \times \beta''(t_*)\|^2} = \circ. \quad (۱ \text{ نمره})$$

حال با توجه به اینکه تاب خم β در تمام نقاط صفر است، این خم مسطح است. از طرف دیگر چون انحنای خم β نیز در تمام نقاط ثابت مثبت است، خم یک دایره به شعاع $\frac{1}{\kappa}$ است. (۱ نمره)

توجه داشته باشید که دانشجو باید پارامترهای $abcd$ را در مرحله اول جایگذاری کرده باشد.

اگر دانشجویی بنویسد که خم β در صفحه $z = a + c + \frac{3}{4}$ قرار دارد، پس تاب آن صفر است، نمره این بخش را به طور کامل می‌گیرد.