فصل ۹ – توابع مولد
بخش دوم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

9

Generating Functions

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

دنباله‌ی b_n با $b_0=1$ و رابطه‌ی $b_{n+1}=b_0b_n+b_1b_{n-1}+\cdots+b_nb_0$ برای $n\geq 0$ تعریف شده است.

الف ـ با استفاده از مفهوم پیچش دنباله‌ها، نشان دهید تابع مولد این دنباله $b(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ است.

ب ـ با استفاده از قسمت الف، b_n را بدست آورید. (فرض کنید $b_n\geq 0$ است)

(الف) فرض می‌کنیم $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ تابع مولد برای دنباله‌ی $b_0, b_1, \dots$ باشد.

حال پیچش $f(x)$ با خودش را بدست می‌آوریم:

$f(x)$ دنباله متناظر با: $b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \cdots$

$f(x)$ دنباله متناظر با: $b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \cdots$

$\Longrightarrow$ پیچش $f(x)$ با خودش:

$$f^2(x)=b_0b_0x^0+(b_0b_1+b_1b_0)x^1+(b_0b_2+b_1b_1+b_2b_0)x^2+\cdots+(b_0b_n+b_1b_{n-1}+\cdots+b_nb_0)x^n$$

$$\Longrightarrow f^2(x)=b_1x^0+b_2x^1+b_3x^2+\cdots+b_{n+1}x^n$$

به منظور یکسان سازی اندیس b_i با توان x، طرفین بالا را در x ضرب می‌کنیم:

$$\Longrightarrow xf^2(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}$$

$$\Longrightarrow xf^2(x)=f(x)-b_0x^0 \Longrightarrow xf^2(x)=f(x)-b_0$$

$$\Longrightarrow x^2f(x)=f(x)-1 \Longrightarrow x^2f(x)-f(x)+1=0$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

(ب)

حال باید دنباله متناظر با $\sqrt{1-4x}$ را محاسبه کنیم.

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(r-1)\right)}{r!} x^r$$

در اینصورت ضریب x^n برابر خواهد بود با:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-4)^n = \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}$$

بنابراین $f(x)$ را $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ را به عنوان پاسخ بر می‌گزینیم. توجه کنیم که پاسخ دیگر مقادیر منفی برای b_n تولید می‌کند.

$$f(x) = \frac{1-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2n-1}\right)\binom{2n}{n}x^n\right)}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)\binom{2n}{n}x^{n-1}$$

بنابراین ضریب جمله x^n برابر خواهد بود با $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n+1)-1}\right)\binom{2(n+1)}{n+1}$

که بعد از ساده کردن خواهیم داشت:

ضریب x^n یا همان b_n در دنباله تولید شده توسط $f(x)$: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n+1)-1}\right)\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

$b_0 = 1$

به ازای $n\in\mathbb{Z}^+$، d_n تعداد پریش‌های $\{1,2,\dots,n\}$ را نشان می‌دهد.

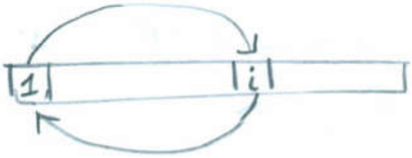
الف) اگر $n>2$، (بدون استفاده از فرمول تعداد پریش‌ها) نشان دهید d_n در رابطهٔ بازگشتی

$$d_n=(n-1)(d_{n-1}+d_{n-2}),\qquad d_2=1,\ d_1=0$$

صدق می‌کند.

الف) با توجه به اینکه عدد 1 در کدام یک از مکان‌های 2 تا n قرار گیرد می‌توان تعداد پریش‌ها را افراز کرد:

I - عدد 1 که در مکان یک قرار دارد با عدد موجود در مکان iام جایشان عوض می‌شود:



چون 1 می‌تواند به هر یک از $n-1$ مکان دیگر برود و سایر $n-2$ عدد می‌توانند به d_{n-2} حالت بین خودشان پریش شوند. بنابراین کل حالات برابر می‌شود:

$(n-1)d_{n-2}$

II - عدد 1 که در مکان یک قرار دارد به مکان iام برود ($2\le i\le n$) اما عدد موجود در مکان iام جای 1 نیاید.

برای لحظه‌ای فرض کنید i جای 1 باید حال تعداد پریش‌هایی که همه بجز 1 باید تحت آن قرار گیرند (وحتی i هم که الآن در جای 1 است باید قرار نگیرد) برابر است با:

$(n-1)d_{n-1}$

از آنجایی که پاسخ‌های I و II اشتراکی با هم ندارند و کل پریش‌ها را شامل می‌شوند بنابراین

$$\boxed{\begin{cases} d_n=(n-1)(d_{n-1}+d_{n-2}) \\ d_2=1 \quad d_1=0 \end{cases}}$$

ب) چگونه d_0 را تعریف کنیم تا نتیجه الف برای $n\ge 2$ معتبر باشد.

ب)

$$d_n=(n-1)(d_{n-1}+d_{n-2})$$

$$d_2=(2-1)(d_1+d_0)\Longrightarrow 1=1(0+d_0)\Longrightarrow \boxed{d_0=1}$$

پ) نتیجه قسمت الف را به صورت $d_n - nd_{n-1} = -[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}]$ بازنویسی می‌کنیم.
چگونه می‌توان $d_n - nd_{n-1}$ را برحسب d_{n-2} , d_{n-3} بیان کرد؟

$$d_n - nd_{n-1} = -[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}] = -[-[d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}]]$$
$$= (-1)^2 (d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}) = d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}$$

ت) نشان دهید $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}]$$
$$= (-1)^2 [d_{n-2} + (n-2)d_{n-3}]$$
$$= (-1)^2 [(n-3)d_{n-3} + (n-3)d_{n-4} + (n-2)d_{n-3}]$$
$$= (-1)^2 [-d_{n-3} + (n-3)d_{n-4}]$$
$$= (-1)^3 [d_{n-3} - (n-3)d_{n-4}]$$
$$\vdots$$
$$= (-1)^i [d_{n-i} - (n-i)d_{n-i-1}]$$

حال اگر در عبارت فوق به جای i قرار دهیم $n-2$ خواهیم داشت:

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)^{n-2} [d_2 - 2d_1]$$
$$= (-1)^{n-2}[1 - 2(0)] = (-1)^{n-2} = (-1)^n$$

پس تساوی روبه‌رو برقرار است:

$$\boxed{d_n - nd_{n-1} = (-1)^n}$$

ث) فرض کنیم $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n x^n}{n!}$. پس از ضرب دو طرف معادله قسمت (پ) در $\frac{x^n}{n!}$

و جمع کردن به ازای $n\geq 2$ ، تحقیق کنید $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

بنابراین $d_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$.

$$d_n-n\,d_{n-1}=(-1)^n$$

$$\frac{x^n}{n!}\left(d_n-n\,d_{n-1}\right)=\frac{x^n}{n!}(-1)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(d_n-n\,d_{n-1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

یادآوری : $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$ $\Leftarrow$ بنابراین سمت راست عبارت بالا برابر خواهد بود با :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}-\left(\frac{(-x)^0}{0!}+\frac{(-x)^1}{1!}\right)=e^{-x}-1+x$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(d_n-n\,d_{n-1}\right)=e^{-x}-1+x$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}d_n\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}d_{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}=e^{-x}-1+x$$

$$\Longrightarrow \left[f(x)-\left(d_0\frac{x^0}{0!}+d_1\frac{x^1}{1!}\right)\right]-x\left[\sum_{n=2}^{\infty}d_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]=e^{-x}-1+x$$

$$\Longrightarrow \left[f(x)-d_0-d_1x\right]-x\left[f(x)-d_0\right]=e^{-x}-1+x$$

$\Longrightarrow$ پس از ساده‌سازی : $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

دنباله متناظر e^{-x} : $\frac{1}{0!}$, $\frac{-1}{1!}$, $\frac{1}{2!}$, $\frac{-1}{3!}$, ...

دنباله متناظر $\frac{1}{1-x}$: 1 , 1 , 1 , 1 , ...

و $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$ پیچش دو دنباله فوق است. بنابراین ضریب x^n در دنباله متناظر $f(x)$ می‌شود:

$$\frac{1}{0!}(1)+\frac{-1}{1!}(1)+\frac{1}{2!}(1)+\frac{-1}{3!}(1)\cdots$$

$$=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

از طرفی داریم: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n x^n}{n!}$ پس با مساوی قرار دادن ضریب x^n در این دنباله با ضریب بدست آمده داریم:

$$\frac{d_n}{n!}=\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

$$\Rightarrow d_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

فرض کنید $f(x) = 1+x+x^2$ و $g(x) = \frac{2}{2-x}$ باشند، در اینصورت دنباله‌ای بیابید که تابع مولد آن $(f(x))^2 g(x)$ باشد.

$$f(x) = 1+x+x^2 \Rightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} = 1,1,1,0,0,0,\dots$$

$$g(x) = \frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} \Rightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$f^2(x) \cdot g(x) = G\left((a_n)_{n=0}^{\infty}\right) \cdot G\left((a_n)_{n=0}^{\infty}\right) \cdot G\left((b_n)_{n=0}^{\infty}\right)$$

$$\text{Convolution}\left((a_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n)_{n=0}^{\infty}\right) = 1,2,3,2,1,0,0,0,\dots$$

$$\text{Convolution}\left((a_n)_{n=0}^{\infty} \times (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}\right) = \leftarrow$$ اما برای محاسبه

داریم:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \times (a_n)_{n=0}^{\infty} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \dots 0 \dots$$

$$(b_n)_{n=0}^{\infty} = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \dots$$

جمله صفرم   جمله n ام

$$\Rightarrow C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(3) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}(1)$$

$$= \frac{49}{2^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} C_n = \frac{49}{2^n} \quad n \geq 4 \\ C_0 = 1 \quad C_1 = \frac{5}{2} \quad C_2 = \frac{17}{4}, \quad C_3 = \frac{33}{8} \end{array}}$$

تمرین ۶ - تمرینات تکمیلی - صفحه ۵۷۹

در چند شماره تلفن ۱۰ رقمی (فقط ارقام) ۱، ۳، ۵ و ۷ بکار رفته است و در آن که هر یک از این ارقام) یا حداقل ۲ بار بکار رفته است یا اصلاً به کار نرفته است؟

تابع مولد نمایی متناظر برابر است با:

$$f(x) = \underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}\cdots\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}$$

برای هر یک از شماره های ۱، 3، 5، 7 یک چنین عبارت نگهدارنده تعداد داریم.

$$= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4 = \cdots + \bigcirc\,\frac{x^{10}}{10!}+\cdots$$

حال باید ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ در عبارت فوق را بدست آوریم.

$$f(x) = \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4 = \left(e^x - \frac{x^1}{1!}\right)^4 = (e^x - x)^4$$

نکته: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

$$f(x) = (e^x - x)^4 = \binom{4}{0}(e^x)^0(-x)^4 + \binom{4}{1}(e^x)^1(-x)^3 +$$

$$\binom{4}{2}(e^x)^2(-x)^2 + \binom{4}{3}(e^x)^3(-x)^1 + \binom{4}{4}(e^x)^4(-x)^0$$

$$= x^4 - 4e^x x^3 + 6e^{2x}x^2 - 4e^{3x}x + e^{4x}$$

$$= x^4 - 4x^3\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\right) + 6x^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2x)^i}{i!}\right)$$

$$-4x\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3x)^i}{i!}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(4x)^i}{i!}\right)$$

حال باید در عبارت بدست آمده دنبال ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ باشیم :

$$\frac{x^{10}}{10!} \text{ تا به جمله‌ی } = -4x^3\left(\frac{x^7}{7!}\right) + 6x^2\left(\frac{(2x)^8}{8!}\right) - 4x\left(\frac{(3x)^9}{9!}\right) + \frac{(4x)^{10}}{10!}$$

$$\frac{x^{10}}{10!} \text{ تا به جمله‌ی } = \frac{x^{10}}{10!}\underbrace{\left(-4\times10\times9\times8 + 6\times2^8\times10\times9 - 4\times3^9\times10 + 4^{10}\right)}_{\text{ضریب جمله‌ی } \frac{x^{10}}{10!}}$$