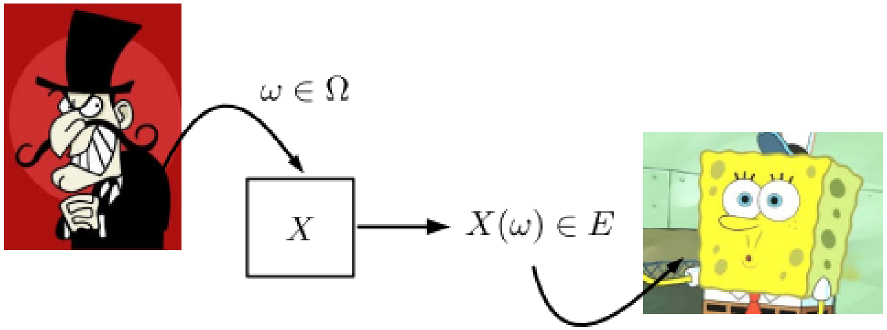
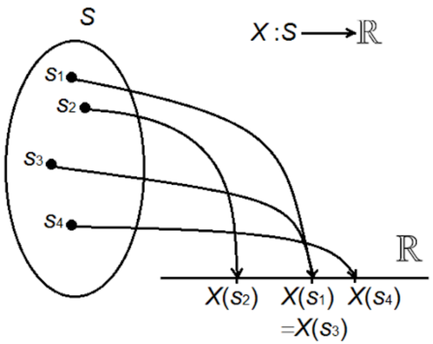
آمار و احتمالات مهندسی

فصل: متغیرهای تصادفی پیوسته

مدرس: مشکانی فراهانی





متغیر تصادفی پیوسته

و

تابع چگالی احتمال

متغیر تصادفی پیوسته و توزیع احتمالات آن

- **تعریف:** متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته گویند.

- **تابع چگالی احتمال:**
- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع f(x) را تابع چگالی احتمال X می‌نامند هرگاه :

$$
\begin{aligned}
&۱)\quad f_X(x) > ۰, \qquad \forall\, x \in R_X \\
&۲)\quad \int_{R_X} f_X(x)\, dx = ۱
\end{aligned}
$$

مثال ۱ – الف

- مقدار ثابت c را چنان تعیین کنید که تابع زیر یک تابع چگـالی احتمـال باشد.

$$f\left(x\right)=cx\left(۱-x\right), \qquad ۰<x<۱$$

- راه‌حل

$$۱)\quad c>۰$$

$$۲)\quad \int_{R_X} f_X\left(x\right)dx=\int_{۰}^{۱} cx\left(۱-x\right)dx$$

$$=c\int_{۰}^{۱}\left(x-x^{۲}\right)dx$$

$$=c\left[\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۱}$$

$$=\frac{c}{۶}=۱ \qquad \Rightarrow \qquad c=۶$$

مثال ۱ - ب ، ج

$$f\left(x\right) = ce^{-۲x}, \qquad x > 0$$

Solution :

$$۱) \quad c > ۰$$

$$۲) \quad \int_{R_X} f_X\left(x\right)dx = \int_{۰}^{\infty} ce^{-۲x}\,dx$$

$$= c\left[\frac{e^{-۲x}}{-۲}\right]_{۰}^{\infty}$$

$$= c\left[۰ - \frac{۱}{-۲}\right] = ۱$$

$$\Rightarrow \quad c = ۲$$

$$f\left(x\right) = \frac{c}{\sqrt{x}}, \qquad ۰ < x < 4$$

Solution :

$$۱) \quad c > ۰$$

$$۲) \quad \int_{R_X} f_X\left(x\right)dx = \int_{۰}^{۴} \frac{c}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= c\int_{۰}^{۴} x^{\frac{-۱}{۲}}\,dx$$

$$= c\left[۲\sqrt{x}\right]_{۰}^{۴}$$

$$= c\left[۴ - ۰\right] = ۱$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۱ - هـ، و

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Solution :

1) $c > 0$

2) $$\int_{R_X} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx$$

$$= c\Big[\operatorname{Arctan}(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= c\left[\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = c\left|1 - x\right|, \qquad 0 < x < 2$$

$$= \begin{cases} c(1-x), & 0 < x \le 1 \\ c(x-1), & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Solution :

1) $c > 0$

2) $$\int_{R_X} f_X(x)\,dx = \int_0^1 c(1-x)\,dx + \int_1^2 c(x-1)\,dx$$

$$= c\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + c\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= c\left[1 - \frac{1}{2}\right] + c\left[0 - \frac{-1}{2}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = 1$$

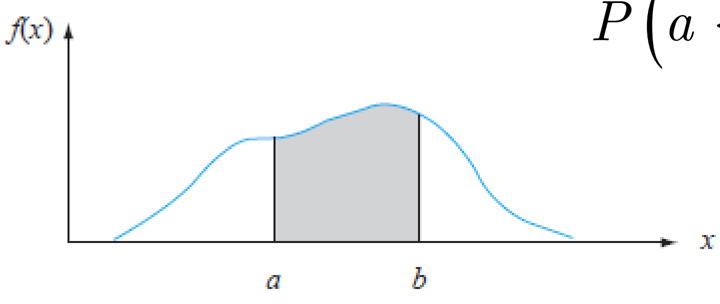
محاسبه‌ی احتمال (با استفاده از تابع چگالی احتمال)

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، بنا بر تعریف، احتمال هر پیشامد $A \subseteq R_X$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P\left(A\right) = \int_A f\left(x\right) dx$$

- برای مثال اگر $A = \left\{ a < X < b \right\}$ داریم:

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx$$



چند نکته

- در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته، $f(x)$ نمایان‌گر احتمال در نقطه x است و احتمال فقط در نقاط تکیه‌گاه مثبت و در سایر نقاط برابر صفر است؛ در حالی که در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی پیوسته، $f(x)$ نشان‌دهنده‌ی هیچ احتمالی نیست و احتمال قطعه‌ای از مساحت واقع در زیر نمودار تابع $f(x)$ است.

- احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقاً مقدار معینی مانند a را بگیرد برابر صفر است:

$$P\left(X=a\right)=P\left(a\leq X\leq a\right)=\int_a^a f\left(x\right)dx=0$$

- افزودن یا کاستن یک یا چند نقطه‌ی شمارا در پیشامدهای مربوط به متغیرهای تصادفی پیوسته هیچ تأثیری در مقدار احتمال آنها نخواهد داشت:

$$P\left(a\leq X\leq b\right)=P\left(a\leq X<b\right)=P\left(a<X\leq b\right)=P\left(a<X<b\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

مثال ۲

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است؛ مطلوبست:

الف- تعیین مقدار k　　　　ب- محاسبه‌ی احتمال‌های زیر

$$f\left(x\right)=k\frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}},\qquad x\geq\beta,\quad \alpha,\beta>۰$$

- راه‌حل

$$۱)\ k>۰$$

$$۲)\ \int_{\beta}^{\infty}k\frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}}\,dx=k\beta^{\alpha}\int_{\beta}^{\infty}x^{-\left(\alpha+۱\right)}\,dx$$

$$=\left[\frac{k\beta^{\alpha}}{-\alpha x^{\alpha}}\right]_{\beta}^{\infty}$$

$$=\frac{k\beta^{\alpha}}{\alpha\beta^{\alpha}}=۱$$

$$\Rightarrow\quad k=\alpha$$

$$P\left(X=۴\beta\right)=۰$$

$$P\left(X>۲\beta\right)=\int_{۲\beta}^{\infty}f\left(x\right)dx$$

$$=\int_{۲\beta}^{\infty}\alpha\frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}}\,dx$$

$$=\left[-\frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha}}\right]_{۲\beta}^{\infty}$$

$$=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\alpha}$$

مثال ۳

- میزان تحمل خاک زیر پایه‌ی یک ستون بین ۶ تا ۱۵ تن بر متر مربع تغییر می‌کند. تابع چگالی احتمال آن در این تکیه‌گاه به صورت زیر است. اگر این ستون برای تحمل بار ۷/۵ تن بر متر مربع طراحی شود، احتمال شکستن پایه‌ی ستون چه‌قدر است؟

$$f_Y(y) = \frac{۱}{۲/۷}\left(۱ - \frac{y}{۱۵}\right), \qquad y \in [۶\,,\,۱۵]$$

- **راه‌حل**

$$P(Y > ۷/۵) = \int_{۷/۵}^{۱۵} \frac{۱}{۲/۷}\left(۱ - \frac{y}{۱۵}\right) dy$$

$$= \frac{۱}{۲/۷}\left[y - \frac{y^{۲}}{۳۰}\right]_{۷/۵}^{۱۵}$$

$$= \frac{۱}{۲/۷}\left[(۱۵ - ۷/۵) - (۷/۵ - ۱/۸۷۵)\right]$$

یادآوری

- در فضای احتمال **گسسته**، احتمال وقوع یک پیشامد را به صورت زیر حساب می‌کردیم:

$$P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)}$$

- در فضای احتمال **پیوسته**، احتمال وقوع یک پیشامد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P\left(A\right)=\frac{\left|A\right|}{\left|S\right|}$$

مثال ۴

- یک عدد تصادفی از بازه‌ی $\left(\circ, \frac{\pi}{۲}\right)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که سینوس آن از کسینوس آن بیشتر باشد، چه قدر است؟

- **راه‌حل:**
- X: عدد انتخاب شده

$$P\left(\text{Sin}\, X > \text{Cos}\, X\right) = P\left(\tan X > ۱\right)$$
$$= P\left(X > \frac{\pi}{۴}\right)$$
$$= \frac{\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲} - \circ} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۵

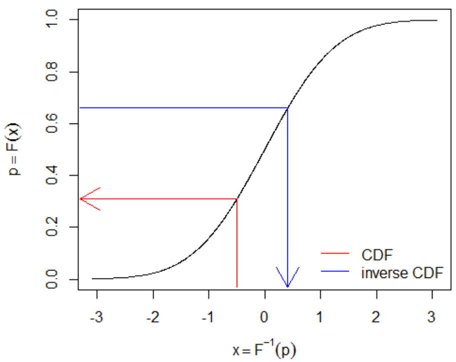
- فرض کنید X یـک نقطـه‌ی تصـادفی از بـازه‌ی (۳ , ۰) باشـد. احتمـال پیشامد $X^2 - 5X + 6 > 0$ چه‌قدر است؟

- **راه‌حل:**

$$
\begin{aligned}
P\left(X^2 - 5X + 6 > 0\right) &= P\left(\left(X-2\right)\left(X-3\right) > 0\right) \\
&= P\left(X < 2, X < 3\right) + P\left(X > 2, X > 3\right) \\
&= P\left(X < 2\right) + P\left(X > 3\right) \\
&= \frac{2-0}{3-0} + 0
\end{aligned}
$$

تابع توزیع تجمعی

برای متغیرهای تصادفی پیوسته



تابع توزیع تجمعی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X\left(t\right)=P\left(X\leq t\right)=\int_{-\infty}^{t}f\left(x\right)dx$$

مثال ۶

- مقاومت جانبی اسکلت یک ساختمان کوچک R متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است. تابع توزیع $F_R(r)$ را حساب کنید.

$$f_R(r) = \frac{۳}{۵۰۰}(r-۱۰)(۲۰-r), \qquad r \in [۱۰,۲۰]$$

- **راه‌حل**

$$F_R(t) = \int_{۱۰}^{t} \frac{۳}{۵۰۰}(r-۱۰)(۲۰-r)\,dr$$

$$= \frac{۳}{۵۰۰}\int_{۱۰}^{t}\left(-r^{۲}+۳۰r-۲۰۰\right)dr$$

$$= \frac{۳}{۵۰۰}\left[\frac{-r^{۳}}{۳}+۱۵r^{۲}-۲۰۰r\right]_{۱۰}^{t}$$

$$= \frac{۳}{۵۰۰}\left[\frac{-t^{۳}}{۳}+۱۵t^{۲}-۲۰۰t+\frac{۲۵۰۰}{۳}\right]$$

$$F_R(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۱۰ \\ \dfrac{۳}{۵۰۰}\left[\dfrac{-t^{۳}}{۳}+۱۵t^{۲}-۲۰۰t+\dfrac{۲۵۰۰}{۳}\right], & ۱۰ \le t < ۲۰ \\ ۱, & t \ge ۲۰ \end{cases}$$

مثال ۷- الف

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است؛ تابع توزیع تجمعی X را به دست آورید.

$$f(x) = ۴\, e^{-۲x}\left(۱ - e^{-۲x}\right), \qquad x > ۰$$

- **راه‌حل**

$$F_X(t) = \int_{۰}^{t} ۴\, e^{-۲x}\left(۱ - e^{-۲x}\right) dx$$

$$= ۴\int_{۰}^{t}\left(e^{-۲x} - e^{-۴x}\right) dx$$

$$= ۴\left[\frac{e^{-۲x}}{-۲} - \frac{e^{-۴x}}{-۴}\right]_{۰}^{t}$$

$$= e^{-۴t} - ۲\, e^{-۲t} + ۱$$

$$\Rightarrow \quad F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۰ \\ e^{-۴t} - ۲\, e^{-۲t} + ۱, & t \geq ۰ \end{cases}$$

مثال ۷– ب

$$f(x) = |۱ - x|, \qquad ۰ < x < ۲$$

$$= \begin{cases} ۱ - x, & ۰ < x \le ۱ \\ x - ۱, & ۱ \le x < ۲ \end{cases}$$

- **راه‌حل**

$$F_X(t) = \int_۰^t (۱ - x)\, dx = \left[x - \frac{x^۲}{۲}\right]_۰^t = t - \frac{t^۲}{۲}$$

$$F_X(t) = \int_۰^۱ (۱ - x)\, dx + \int_۱^t (x - ۱)\, dx = \left[x - \frac{x^۲}{۲}\right]_۰^۱ + \left[\frac{x^۲}{۲} - x\right]_۱^t = \frac{۱}{۲} + \frac{t^۲}{۲} - t + \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad F_X(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۰ \\ t - \frac{t^۲}{۲}, & ۰ \le t < ۱ \\ \frac{t^۲}{۲} - t + ۱, & ۱ \le t < ۲ \\ ۱, & t \ge ۲ \end{cases}$$

نکته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f_x(.) و تـابع توزیع تجمعی $F_X(.)$ باشد، داریم:

$$F'_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \mathrm{f}_X(x)$$

$$f \xrightarrow{\text{انتگرال}} F$$

$$F \xrightarrow{\text{مشتق}} f$$

مثال ۸

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر است. تابع چگـالی احتمـال X را به دست آورید.

$$F\left(x\right)=۱-\frac{۹}{x^{۲}},\qquad x > 3$$

- **راه‌حل**

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=۲\times ۹\ x^{-۳}$$

$$F\left(x\right)=۱-e^{-۳x},\qquad x > ۰$$

راه‌حل

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=۳\ e^{-۳\ x}$$

مثال ۹

- نقطه‌ای به تصادف از داخل دایره‌ای به شعاع r انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را برابر فاصله‌ی نقطه‌ی انتخابی تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم. مطلوب است:

الف- تعیین تابع توزیع تجمعی X

ب- تعیین تابع چگالی احتمال X

ج- محاسبه‌ی احتمال زیر

$$a) \quad F(x) = P(X \le x) = \frac{\pi x^۲}{\pi r^۲} = \left(\frac{x}{r}\right)^۲ \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} ۰, & x < ۰ \\ \left(\frac{x}{r}\right)^۲, & ۰ \le x < r \\ ۱, & x \ge r \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = F'(x) = \frac{۲x}{r^۲}, \qquad ۰ < x < r$$

$$c) \quad P\left(\frac{r}{۳} < X < \frac{r}{۲}\right) = F\left(\frac{r}{۲}\right) - F\left(\frac{r}{۳}\right) = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۹} = \frac{۵}{۳۶}$$

نکته

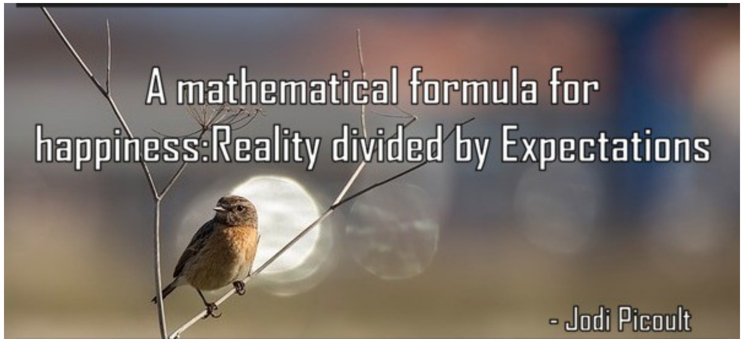
- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، احتمال هر پیشامد $A \subseteq R_X$ با استفاده از روابط بیان شده در تعریف تابع توزیع تجمعی به دست می‌آید.

- مراجعه شود به فایل:

آمار مهندسی – فصل ۲ و ۳ – متغیر تصادفی گسسته – سلاید ۲۲

امید ریاضی

متغیرهای تصادفی پیوسته



امید ریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، امید ریاضی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left(X\right) = \int\limits_{R_X} x \ f\left(x\right) dx$$

مثال ۱۰

- قطر سوراخ‌های ایجاد شده به وسیله‌ی مته‌ای بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f\left(x\right) = ۱۰\, e^{-۱۰\left(x-۵\right)}, \qquad x > ۵$$

اگر چه اندازه‌ی قطر مورد نظر ۵ میلی‌متر است، لرزش‌ها، سایش ابزار و سایر عوامل غیر قابل کنترل باعث تولید قطرهایی با اندازه‌ی بزرگتر از ۵ میلی‌متر می‌شوند. متوسط قطر سوراخ‌های ایجاد شده را به دست آورید.

$$E\left(X\right) = \int_{R_X} x\, f\left(x\right) dx$$

$$= \int_{۵}^{\infty} ۱۰\, x\, e^{-۱۰\left(x-۵\right)}\, dx$$

$$= \left[-e^{-۱۰\left(x-۵\right)}\left(x + \frac{۱}{۱۰}\right)\right]_{۵}^{\infty}$$

$$= ۵ / ۱$$

مشتق	انتگرال
$derivative$	$Integral$
x	$۱۰\, e^{-۱۰\left(x-۵\right)}$
۱	$-\, e^{-۱۰\left(x-۵\right)}$
۰	$\frac{۱}{۱۰}\, e^{-۱۰\left(x-۵\right)}$

مثال ۱۱ – الف

- مدت زمان استفاده‌ی خانواده‌ای از جاروبرقی در طول سال، در واحد ۱۰۰ ساعت، متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<1 \\ b(2-x), & 1\le x<2 \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف- اگر E(X)=1 باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

$$\int_{R_X} f(x)\,dx = 1 \qquad *$$

$$\int_0^1 ax\ dx + \int_1^2 b(2-x)\ dx$$

$$= a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + b\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{a}{2} + b\left(2-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1$$

$$E(X) = \int_{R_X} xf(x)\,dx = 1 \qquad **$$

$$\int_0^1 x.ax\ dx + \int_1^2 x.b(2-x)\ dx$$

$$= a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + b\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{a}{3} + b\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} = 1$$

مثال ۱۱ – ب

$$\begin{cases} ۱) \quad a+b=۲ \\ ۲) \quad a+۲b=۳ \end{cases} \Rightarrow a=۱ \qquad b=۱$$

ب- اگر $X > \frac{۱}{۲}$ باشد، احتمال این‌که X از $\frac{۳}{۲}$ کمتر باشد، چه‌قدر است؟

$$P\left(X<\frac{۳}{۲} \mid X>\frac{۱}{۲}\right)=\frac{P\left(X<\frac{۳}{۲}\ ,\ X>\frac{۱}{۲}\right)}{P\left(X>\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{P\left(\frac{۱}{۲}<X<\frac{۳}{۲}\right)}{P\left(X>\frac{۱}{۲}\right)}$$

$$=\frac{\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x\,dx+\int_{۱}^{\frac{۳}{۲}}\left(۲-x\right)dx}{\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x\,dx+\int_{۱}^{۲}\left(۲-x\right)dx}=\frac{\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{۱}+\left[۲x-\frac{x^۲}{۲}\right]_{۱}^{\frac{۳}{۲}}}{\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{۱}+\left[۲x-\frac{x^۲}{۲}\right]_{۱}^{۲}}=\frac{\left[\frac{۳}{۸}\right]+\left[\frac{۳}{۸}\right]}{\left[\frac{۳}{۸}\right]+\left[\frac{۱}{۲}\right]}=\frac{۶}{۷}$$

مثال ۱۱ – ج

- ج– تابع توزیع تجمعی X را به دست آورید.

$$F_X\left(t\right)=\int_{\circ}^{t} x\ dx = \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{t} = \frac{t^{۲}}{۲}$$

$$F_X\left(t\right)=\int_{\circ}^{۱} x\ dx + \int_{۱}^{t}\left(۲-x\right) dx = \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{۱} + \left[۲x-\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۱}^{t} = \frac{۱}{۲}+۲t-\frac{t^{۲}}{۲}-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad F_X\left(t\right)=\begin{cases} \circ, & t<\circ \\ \frac{t^{۲}}{۲}, & \circ\le t<۱ \\ ۲t-\frac{t^{۲}}{۲}-۱, & ۱\le t<۲ \\ ۱, & t\ge ۲ \end{cases}$$

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تـابع چگـالی احتمـال $f(x)$ باشـد، امید ریاضی $g(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left[g\left(X\right)\right]=\int_{R_X} g\left(x\right)f\left(x\right)dx$$

مثال ۱۲

- فرض کنید طول کابل‌های رایانه بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی زیر باشد؛ امید ریاضی $\left(X-۱۲۰۵\right)^{۲}$ را محاسبه کنید.

$$f\left(x\right) = ۰/۱, \qquad ۱۲۰۰ < x < ۱۲۱۰$$

- **راه‌حل**

$$E\left[\left(X-۱۲۰۵\right)^{۲}\right] = \int_{۱۲۰۰}^{۱۲۱۰} \left(X-۱۲۰۵\right)^{۲} \times \frac{۱}{۱۰}\,dx$$

$$= \frac{۱}{۱۰}\left[\frac{U^{۳}}{۳}\right]_{-۵}^{۵}$$

$$= \frac{۲۵۰}{۳۰}$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی (گسسته و پیوسته)

- در تعریف امید ریاضی داشتیم: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، امید ریاضی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left(X\right) = \int_{R_X} x\ f\left(x\right)\ dx$$

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی عدد ثابت c را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم:

$$E\left(c\right) = \int_{R_X} c\ f\left(x\right)\ dx = c\int_{R_X} f\left(x\right)\ dx = c$$

- به عنوان مثال:

$$E\left(۵\right) = ۵ \qquad E\left(-۱۱\right) = -۱۱ \qquad E\left(۰\right) = ۰$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی (گسسته و پیوسته)

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد، امید ریاضی تابع cX، که در آن c یک عدد ثابت است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left(cX\right) = \int_{R_X} c\ x\ f\left(x\right) dx = c\int_{R_X} x\ f\left(x\right) dx = c\ E\left(X\right)$$

- به عنوان مثال:

$$E\left(۲X\right) = ۲E\left(X\right) \qquad E\left(-۵Y\right) = -۵E\left(Y\right)$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی (گسسته و پیوسته)

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی تابع $a\ g\left(X\right) \pm b\ h\left(X\right)$ را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی صفحه‌ی قبل داریم:

$$\begin{aligned} E\left[a\ g\left(X\right) \pm b\ h\left(X\right)\right] &= \int_{R_X} \left[a\ g\left(X\right) \pm b\ h\left(X\right)\right] f\left(x\right) dx \\ &= a \int_{R_X} g\left(x\right) f\left(x\right) dx \pm b \int_{R_X} h\left(x\right) f\left(x\right) dx \\ &= a\ E\left[g\left(X\right)\right] \pm b\ E\left[h\left(X\right)\right] \end{aligned}$$

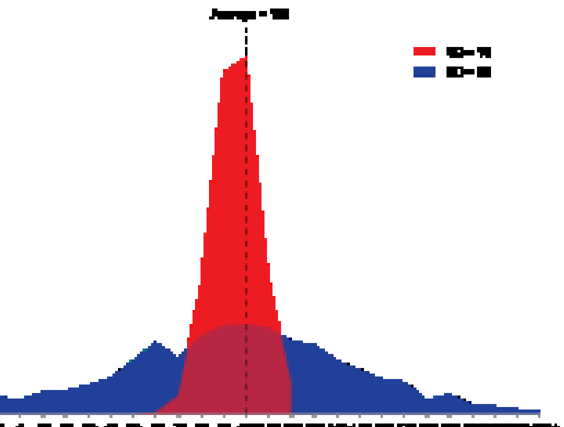
- به عنوان مثال:

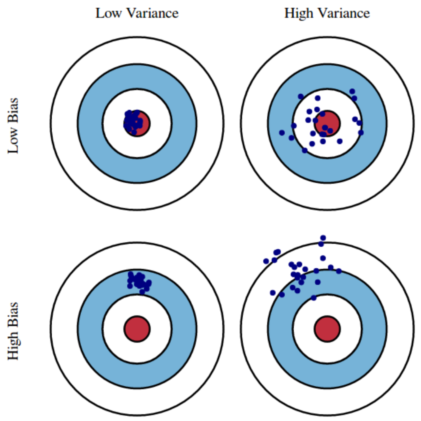
$$E\left(۳X^{۲} - ۷\ln X\right) = ۳E\left(X^{۲}\right) - ۷E\left(\ln X\right)$$

$$E\left(-۲X + ۵X^{۳} - ۱\right) = -۲E\left(X\right) + ۵E\left(X^{۳}\right) - ۱$$

واریانس و انحراف معیار

برای متغیرهای تصادفی پیوسته





واریانس و انحراف معیار

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با میانگین E(X) یا μ باشد، آنگاه واریانس X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^{2} = Var\left(X\right) = E\left[\left(X-\mu\right)^{2}\right] = E\left(X^{2}\right) - \left\{E\left(X\right)\right\}^{2}$$

- **اثبات: در فایل متغیرهای گسسته آورده شده است.**

$$E\left(X\right) = \int_{R_X} x\ f\left(x\right)\, dx$$

$$E\left(X^{2}\right) = \int_{R_X} x^{2}\ f\left(x\right)\, dx$$

- **انحراف معیار:** جذر واریانس را انحراف معیار نامیده و آن را با σ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۳

- مدت زمان لازم برای ارائه یک خدمت بانکی به یک مشتری متغیری تصـادفی با تابع چگالی احتمال زیر است؛ واریانس این توزیع را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{2}, \qquad 0 < x < 2$$

- **راه‌حل**

$$E[X] = \int_0^2 x . \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6}$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 . \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

مثال ۱۴

- فرض کنید اندازه‌ی ذرات آلودگی بر حسب میکرومتر به صورت زیر مدل‌بندی شود. انحراف معیار X را تعیین کنید.

$$f\left(x\right) = ۲x^{-۳}, \qquad x > ۱$$

- **راه‌حل**

$$E\left[X\right] = \int_{۱}^{\infty} x.۲x^{-۳}dx = \left[\frac{-۲}{x}\right]_{۱}^{\infty} = ۲$$

$$E\left[X^{۲}\right] = \int_{۱}^{\infty} x^{۲}.۲x^{-۳}dx = ۲\left[\ln\left(x\right)\right]_{۱}^{\infty} = \infty$$

$$Var\left(X\right) = E\left(X^{۲}\right) - E^{۲}\left(X\right) = \infty - \left(۲\right)^{۲} = \infty$$

قضیه

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، در این صورت برای ثابت‌های a و b داریم:

$$Var(aX+b) = a^{۲}\ Var(X), \qquad \sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$$

- **اثبات:**

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E\left[(aX+b) - E(aX+b)\right]^{۲} \\ &= E\left[(aX+b) - aE(X) - E(b)\right]^{۲} \\ &= E\left[(aX - aE(X)) - (b-b)\right]^{۲} \\ &= E\left[a\left(X - E(X)\right)\right]^{۲} \\ &= a^{۲}\ E\left[X - E(X)\right]^{۲} \\ &= a^{۲}\ Var(X) \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X \end{aligned}$$

خواص امید ریاضی و واریانس (خلاصه - متغیرهای گسسته و پیوسته)

• فرض کنید X یک متغیر تصادفی و a و b اعدادی ثابت باشند، آن‌گاه برای هر تابع g(x) داریم:

* $E(a) = a$ • $Var(a) = 0$

* $E(aX) = a\ E(X)$ • $Var(aX) = a^2\ Var(X)$

* $E[ag(X)] = a\ E[g(X)]$ • $Var[ag(X)] = a^2\ Var[g(X)]$

* $E[ag(X) \pm b] = a\ E[g(X)] \pm b$ • $Var[ag(X) \pm b] = a^2\ Var[g(X)]$

* $E[ag_1(X) \pm bg_2(X)] = a\ E[g_1(X)] \pm b\ E[g_2(X)]$

• $Var[ag(X) \pm bg_2(X)] = a^2\ Var[g(X)] + b^2\ Var[g_2(X)]$

مثال ۱۵

- مقدار تقاضای هفتگی برای نوشابه‌ای معین (بر حسب هزار لیتر) در فروشگاهی زنجیره‌ای متغیر تصادفی پیوسته‌ی $g(X) = X^۲ + X - ۲$ است، که در آن X دارای تابع چگالی زیر است. مقدار مورد انتظار تقاضای هفتگی این نوع نوشابه را پیدا کنید.

$$f(x) = ۲(x-۱), \qquad ۱ < x < ۲$$

- **راه‌حل**

$$E\left[X^۲ + X - ۲\right] = E\left(X^۲\right) + E\left(X\right) - ۲ = \frac{۱۷}{۶} + \frac{۵}{۳} - ۲ = ۲/۵$$

$$E\left(X^۲\right) = \int_۱^۲ x^۲ \times ۲(x-۱)\,dx = ۲\left[\frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳}\right]_۱^۲ = \frac{۱۷}{۶}$$

$$E\left(X\right) = \int_۱^۲ x \times ۲(x-۱)\,dx = ۲\left[\frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۲}{۲}\right]_۱^۲ = \frac{۵}{۳}$$