قضیهٔ فشردگی :

فرض کنید (a_n) ، (b_n) ، (c_n) دنباله‌هایی باشند که برای هر $n \geq N$ ، $a_n \leq b_n \leq c_n$

و بعلاوه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ در اینصورت $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

* برای هر عدد حقیقی r ، دنباله‌ای گویا مانند (a_n) موجود است که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$

$$a_n = \frac{[nr]}{n} \in \mathbb{Q} \qquad \underbrace{\frac{nr-1}{n}}_{c_n} < \underbrace{\frac{[nr]}{n}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{nr}{n}}_{b_n}$$

همگرا به r ، همگرا به r

ق فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r$$

* از این موضوع نتیجه می‌شود که اعداد گویا در $\mathbb{R}$ چگالند، یعنی بین هر دو عدد حقیقی عددی گویا موجود است.

$$\exists a_n \xrightarrow{} \underset{\text{دلخواه}}{r} \in (a,b)$$

* برای هر عدد حقیقی r ، دنباله‌ای اصم مانند (b_n) موجود است که $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$

$$b_n = \frac{[nr]}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}^c$$

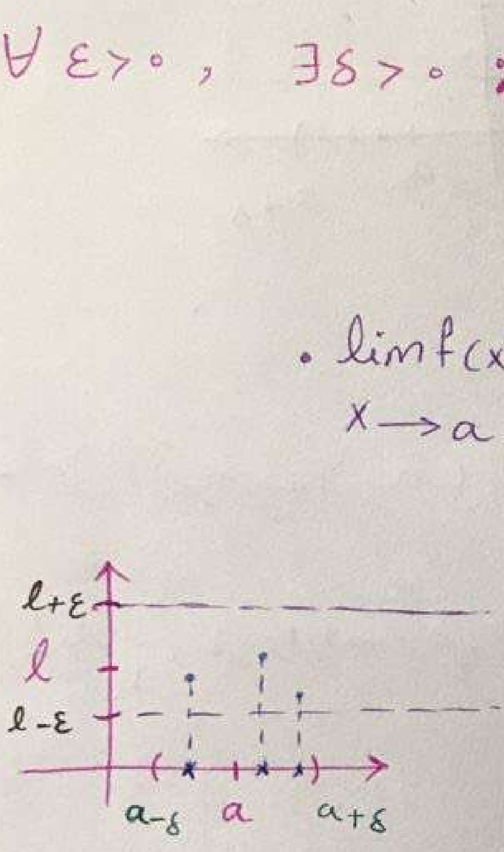
* از این موضوع نتیجه می‌شود که اعداد اصم در $\mathbb{R}$ چگالند، یعنی بین هر دو عدد حقیقی، عددی اصم موجود است.

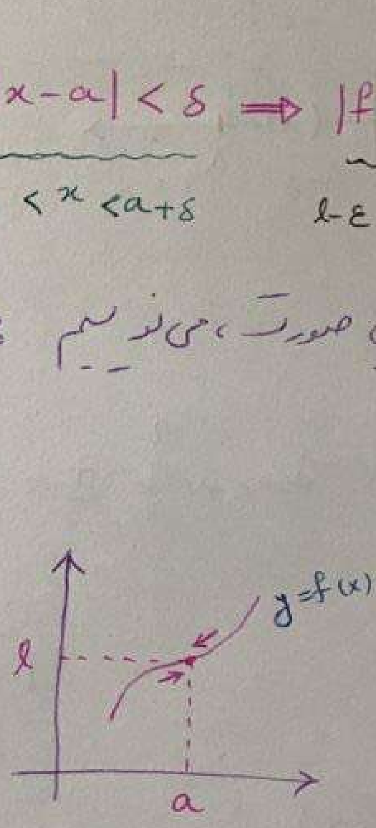
حد توابع :

تابع $f: D \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. گوییم این تابع در $x=a$ حد دارد و حد آن برابر l است، هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \delta>0 : \forall x, \left(\underbrace{0<|x-a|<\delta}_{a-\delta<x<a+\delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-l|<\varepsilon}_{l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon}\right).$$

و در این صورت، می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.





* حد چپ :

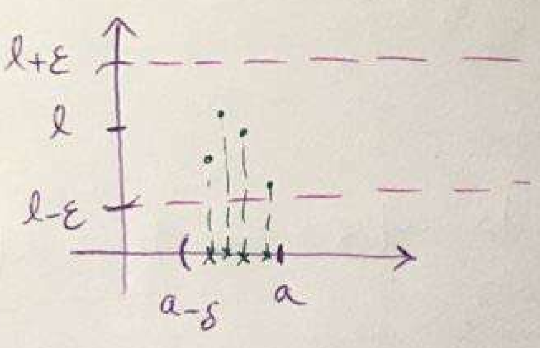
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

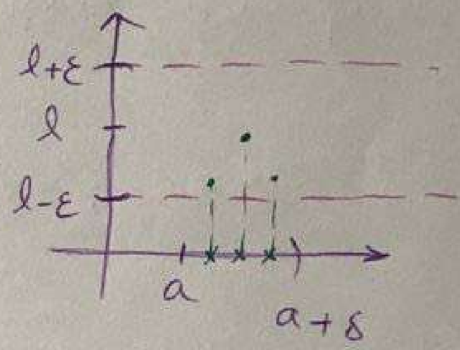
$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall x, \left(a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right).$$

* حد راست:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \delta > 0 : \forall x \ (a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

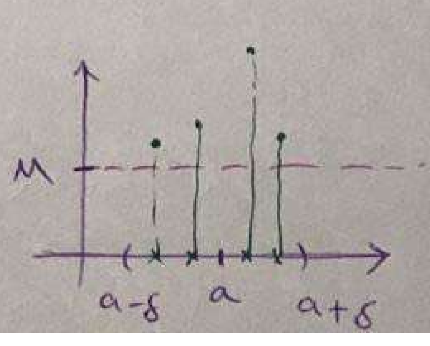




- حال، اگر هر یک از a یا l عدد نباشند و $\pm\infty$ باشند، حالات مختلف دیگری را داریم، که در ادامه برخی را به عنوان نمونه می‌بینیم:

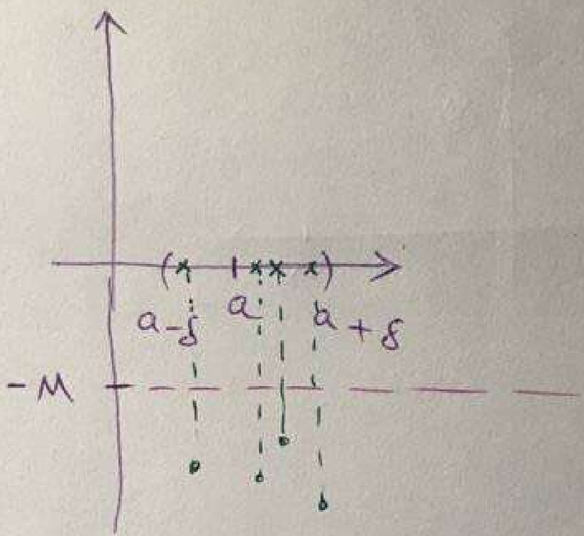
• $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0 ,\ \exists \delta > 0 : \forall x \ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$



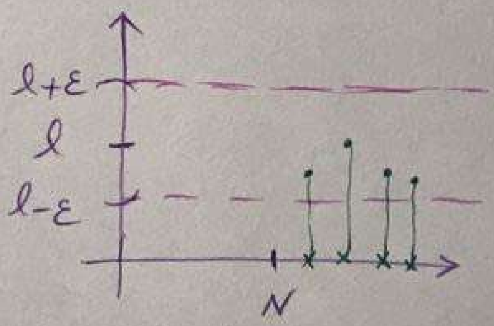
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M).$



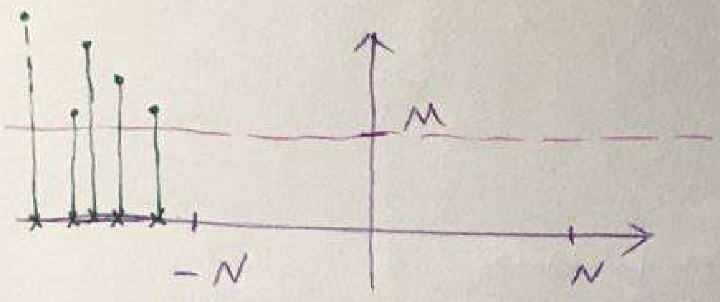
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x \ (x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall M>0,\ \exists N>0 :\ \forall x\ (x<-N \Rightarrow f(x)>M).$$



* حد در صورت وجود منحصر به فرد است.

* حد $f(x)$ در $x=a$ برابر l است، اگر و تنها اگر حد چپ و حد راست $f(x)$ در $x=a$ برابر با l باشند.

گزاره: فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $K\in\mathbb{R}$.

۱) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = L\pm M$

۲) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = LM$

۳) $\lim_{x\to a} Kf(x) = Kl$

۴) اگر $M\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

۵) اگر $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim (f(x))^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$

(مشروط به اینکه اگر $m<0$، آنگاه $l\neq 0$ و همچنین اگر n زوج باشد آنگاه $L>0$)

گزاره،

گزاره: اگر بازه‌ای حول a موجود باشد که برای هر x در آن بازه داشته باشیم $f(x)\le g(x)$ و بعلاوه داشته باشیم: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ آنگاه $L\le M$

(*) **گزاره:** اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $l>0$، آنگاه بازه‌ای حول a موجود است که برای هر x در آن بازه داریم: $f(x)>0$

قضیه فشردگی (ساندویچ):

فرض کنید I بازه‌ای حول a باشد و برای هر x در I

داشته باشیم: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

به علاوه $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ در این صورت

$g(x)$ نیز در a حد دارد و $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = 0 \longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad *$$

$\xleftarrow{\text{تعریف حد}}$

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \xrightarrow{\text{فشردگی}}$ ✓

(اگر $\lim f(x)$ موجود باشد $|f(x)|$ همگراست

اما برعکس آن درست نیست)

- اگر $g(x)$ در بازه‌ای حول a کراندار باشد و $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ اگر

آنگاه $\lim_{x \to 0} f(x) g(x) = 0$