تمرین تحویلی شماره ۶

معادلات $\begin{cases} u - x^{۲} - y^{۲} = ۰ \\ v - y^{۲} - xy = ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $P = (x, y, u, v) = (۱, ۱, ۲, ۲)$. نشان دهید که در دستگاه بالا می توان x و y را در یك همسایگی P به عنوان توابعی بر حسب u و v نوشت. به علاوه، اگر

$$f(x, y) = x^{۳} + y\cos(\pi x)$$

آن گاه مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial u}(P)$.

پاسخ

$$\begin{cases} F(u, v; x, y) = u - x^{۲} - y^{۲} = ۰ \\ G(u, v; x, y) = v - y^{۲} - xy = ۰ \end{cases}$$

داریم:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P = \det\begin{pmatrix} -۲x & -۲y \\ -y & -۲y - x \end{pmatrix}|_P \qquad (۰,۵ \text{ نمره})$$

$$= \det\begin{pmatrix} -۲ & -۲ \\ -۱ & -۳ \end{pmatrix} = ۴ \neq ۰ \qquad (۰,۵ \text{ نمره})$$

پس بنابر قضیه تابع ضمنی، در نزدیکی نقطه P، x, y را می توان به صورت توابعی بر حسب u, v نوشت که در معادلات فوق صدق می کنند. (۰,۵ نمره)

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = ۰ \\ \frac{\partial G}{\partial u} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ - ۲xx_u - ۲yy_u = ۰ \\ -۲yy_u - x_u y - xy_u = ۰ \end{cases} \qquad (۱ \text{ نمره})$$

بنابراین در نقطه $(x, y) = (۱, ۱)$ داریم:

$$\begin{cases} -۲x_u(P) - ۲y_u(P) = -۱ \\ -۳y_u(P) - x_u(P) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \quad x_u(P) = \frac{۳}{۴}, y_u(P) = -\frac{۱}{۴} \qquad (۱ \text{ نمره})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۳x^{۲} - \pi y \sin(\pi x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\pi x) \qquad (۰,۵ \text{ نمره})$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (۰,۵ \text{ نمره})$$

با جایگذاری نقطه P

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = (۳).(\frac{۳}{۴}) + (-۱).(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۰}{۴} \qquad (۰,۵ \text{ نمره})$$