ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

نکاتی از جبر خطی: ماتریس‌های معین، نیمه‌معین، و نامعین

فرض کنید که A یک ماتریس $n \times n$ متقارن با درایه‌های حقیقی است. به‌ازای هر بردار ستونی $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ با درایه‌های حقیقی، قرار می‌دهیم:

$$Q(X) = X^T A X$$

در این صورت، ماتریس A را

- معین مثبت گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) > 0$.
- معین منفی گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) < 0$.
- نیمه‌معین مثبت گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) \geq 0$.
- نیمه‌معین منفی گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) \leq 0$.
- نامعین گوییم، هرگاه بردارهای ناصفر X و Y وجود داشته باشند که $Q(X) > 0$ و $Q(Y) < 0$.

قضیه

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n$$

که در آن A ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی است. در این صورت:

۱. اگر به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $D_i > 0$، آن‌گاه A معین مثبت است.

۲. اگر به‌ازای اندیس‌های زوج i داشته باشیم $D_i > 0$، و به‌ازای اندیس‌های فرد i داشته باشیم $D_i < 0$، آن‌گاه A معین منفی است.

۳. اگر $D_n = \det A \neq 0$، و هیچ‌یک از شرایط ۱ و ۲ برقرار نباشند، آن‌گاه A نامعین است.

۴. اگر $D_n = \det A = 0$، آن‌گاه A نه معین مثبت است و نه معین منفی، اما ممکن است نیمه‌معین یا نامعین باشد.

در ادامه‌ی این فایل، به کاربردهای مشتقات جزیی در بهینه‌سازی و مقادیر اکسترمم توابع می‌پردازیم.

نقاط بحرانی، منفرد، و اکسترمم نسبی

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $P \in U$. نقطه‌ی P را

- یک نقطه‌ی بحرانی f گوییم، هرگاه $\nabla f(P) = 0$.
- یک نقطه‌ی منفرد یا تکین f گوییم، هرگاه $\nabla f(P)$ وجود نداشته باشد.
- یک نقطه‌ی مینیمم نسبی یا موضعی f گوییم، هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که به‌ازای هر نقطه‌ی $x \in U$ در این همسایگی، $f(x) \geq f(P)$.
- یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی یا موضعی f گوییم، هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که به‌ازای هر نقطه‌ی $x \in U$ در این همسایگی، $f(x) \leq f(P)$.
- یک نقطه‌ی مینیمم مطلق یا سراسری f گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in U$، داشته باشیم $f(x) \geq f(P)$.
- یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق یا سراسری f گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in U$، داشته باشیم $f(x) \leq f(P)$.

توجه:

به مقادیر یک تابع در نقاط مینیمم نسبی و نقاط ماکسیمم نسبی، به‌ترتیب مقادیر مینیمم نسبی و مقادیر ماکسیمم نسبی آن تابع گفته می‌شود؛ مثلاً اگر $f(x,y)=1-(x-y)^2$ و $g(x,y)=1+(x-y)^2$، آن‌گاه هر نقطه به فرم $(x,y)=(a,a)$ یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی برای f و یک نقطه‌ی مینیمم نسبی برای g است. بنابراین، مقدار ماکسیمم نسبی f و مقدار مینیمم نسبی g متناظر با نقاط یادشده برابر با 1 هستند (توجه کنید که مقدار ماکسیمم مطلق f و مقدار مینیمم مطلق g نیز برابر با 1 هستند).

توجه:

اگر نقطه‌ی P یک نقطه‌ی مینیمم نسبی یا ماکسیمم نسبی برای یک تابع باشد، آن‌گاه به P یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیز گفته می‌شود. هم‌چنین، به هر یک از نقاط ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق یک تابع، یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق نیز گفته می‌شود.

قضیه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است. در این صورت، هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی (به‌ویژه اکسترمم مطلق) f دارای یکی از شرایط زیر است:

۱. یک نقطه‌ی بحرانی است.
۲. یک نقطه‌ی منفرد است.
۳. یک نقطه‌ی مرزی است.

قضیه

فرض کنید که $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است، که در آن U یک ناحیه‌ی بسته و کران‌دار است. در این صورت، برد f یک زیرمجموعه‌ی کران‌دار از $\mathbb{R}$ است، و f مقادیر اکسترمم مطلق خود را می‌گیرد (یعنی نقاط $P, Q \in U$ وجود دارند که P نقطه‌ی ماکسیمم مطلق f، و Q نقطه‌ی مینیمم مطلق f است).

مثال

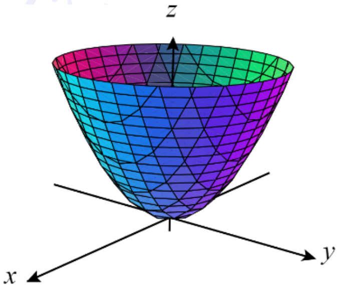
در مورد نقاط بحرانی توابع زیر بحث کنید:

$$f(x,y)=x^2+y^2,\quad g(x,y)=1-x^2-y^2,\quad h(x,y)=y^2-x^2,$$
$$k(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad l(x,y)=1-x$$

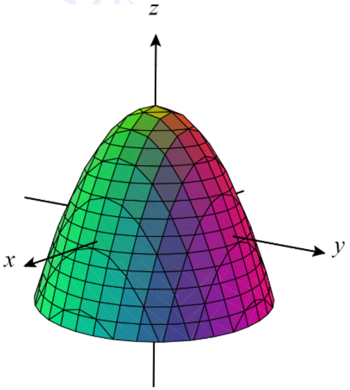
پاسخ:

- $f(x,y)=x^2+y^2$:

داریم $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$؛ پس $\nabla f(x,y)=(0,0)$ نتیجه می‌دهد که $(x,y)=(0,0)$. از آنجا که f همواره نامنفی است، نقطه‌ی $(0,0)$ مینیمم مطلق تابع f است. توجه کنید که f نقطه‌ی ماکسیمم مطلق ندارد.



◂ $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$:



داریم $\nabla g(x,y) = (-2x, -2y)$. بنابراین، $\nabla g(x,y) = (0,0)$ نتیجه می‌دهد که $(x,y) = (0,0)$. توجه کنید که به‌ازای هر $(x,y) \in \mathbb{R}^2$، داریم:

$$g(x,y) = 1 - (x^2 + y^2) \leq 1 = g(0,0)$$

پس، $(0,0)$ نقطه‌ی ماکسیمم مطلق تابع g است. البته، تابع g دارای مینیمم مطلق نیست.

- $h(x,y) = y^2 - x^2$:

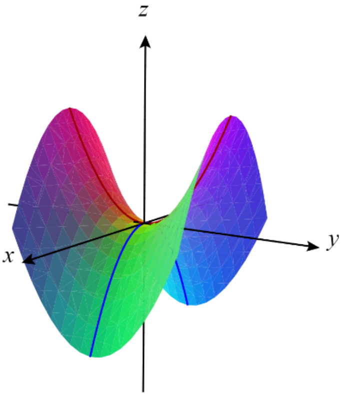
داریم $\nabla h(x,y) = (-2x, 2y)$. بنابراین، $\nabla h(x,y) = (0,0)$ نتیجه می‌دهد که $(x,y) = (0,0)$. توجه کنید که به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ با $x, y \neq 0$، داریم:

$$h(0,y) = y^2 > 0 = h(0,0)$$

$$h(x,0) = -x^2 < 0 = h(0,0)$$

بنابراین، $(0,0)$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست.

در شکل، خم قرمز رنگ، متشکل از نقاط $(0, y, h(0,y))$، و خم آبی رنگ، متشکل از نقاط $(x, 0, h(x,0))$ است.



◂ $k(x,y)=\sqrt{y^2+x^2}$:

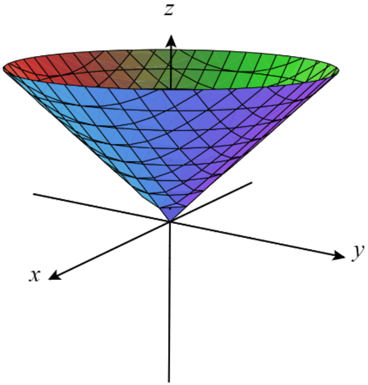
داریم:

$$\nabla k(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}},\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)$$

توجه کنید که مشتقات جزیی اول k در $(0,0)$ موجود نیستند. پس، گرادیان k در $(0,0)$ تعریف نمی‌شود. از این‌رو، $\nabla k(x,y)=(0,0)$ دارای هیچ جوابی نیست؛ یعنی k دارای نقطه‌ی بحرانی نیست. (بنابراین، $(0,0)$ یک نقطه‌ی منفرد است. داریم:

$$k(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0=k(0,0)$$

پس، $(0,0)$ نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع k است.)



◄ $l(x,y)=1-x$:

داریم:

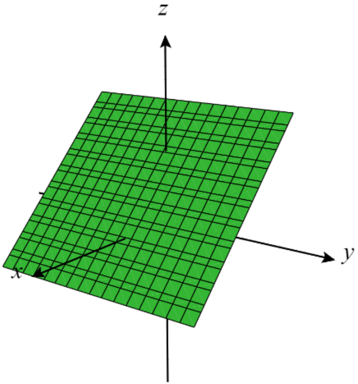
$$\nabla l(x,y)=(-1,0)$$

توجه کنید که $\nabla l(x,y)=(0,0)$ دارای هیچ جوابی نیست؛ یعنی l دارای نقطه‌ی بحرانی نیست. اما اگر دامنه‌ی l را به دیسک $x^2+y^2\leq 1$ محدود کنیم، آن‌گاه با توجه به بسته و کران‌دار بودن دامنه، l مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق خود را می‌گیرد. روی دیسک یادشده، داریم $-1\leq x\leq 1$، که نتیجه می‌دهد:

$$l(1,0)=0\leq 1-x=l(x,y)$$

$$l(x,y)=1-x\leq 2=l(-1,0)$$

پس، نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ به‌ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق l روی دیسک یادشده هستند.

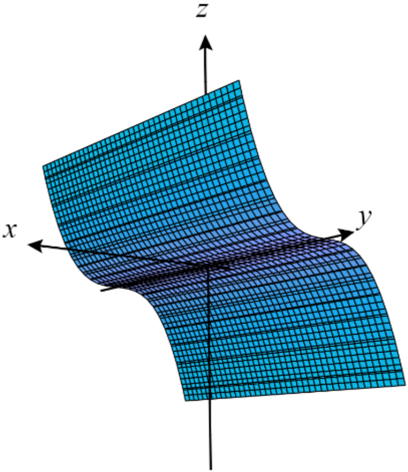


نقاط زینی

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع و $P \in U$ یک نقطه‌ی درونی است. در این صورت، نقطه‌ی P یک نقطه‌ی زینی تابع f نامیده می‌شود، هرگاه P یک نقطه‌ی بحرانی f باشد، اما یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی f نباشد.

※ در مثال قبل، نقطه‌ی $(0,0)$ یک نقطه‌ی زینی تابع $h(x,y) = y^2 - x^2$ است.

توجه: نمودار یک تابع حول یک نقطه‌ی زینی، لزوماً شبیه زین نیست. مثلاً نمودار تابع $f(x,y)=x^3$ را در نظر بگیرید:



ماتریس هسیَن (Hessian)

فرض کنید که تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته در یک همسایگی $P \in U$ است. به‌ازای هر $x \in U$ در این همسایگی، ماتریس هسین f در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

※ از پیوستگی مشتقات جزیی دوم f در همسایگی یادشده نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، داریم $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$. بنابراین، $H(x)$ یک ماتریس متقارن است.

قضیه (آزمون مشتق دوم)

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی نقطه‌ی $P \in U$ دارای مشتقات جزیی دوم پیوسته است. اگر P یک نقطه‌ی بحرانی f باشد، آنگاه

۱. اگر $H(P)$ معین مثبت باشد، آنگاه P یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است.
۲. اگر $H(P)$ معین منفی باشد، آنگاه P یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی f است.
۳. اگر $H(P)$ نامعین باشد، آنگاه P یک نقطه‌ی زینی f است.
۴. اگر $H(P)$ معین مثبت، معین منفی یا نامعین نباشد، آنگاه نتیجه‌ای در مورد P نمی‌توان گرفت.

مثال

اگر $f(x,y,z) = x^2 + 12yz + (y-z)^3$، آن‌گاه نقاط بحرانی f و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

پاسخ: داریم:

$$f_1(x,y,z) = 2x, \quad f_2(x,y,z) = 12z + 3(y-z)^2,$$
$$f_3(x,y,z) = 12y - 3(y-z)^2$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{array}{lll} f_{11}(x,y,z) = 2, & f_{12}(x,y,z) = 0, & f_{13}(x,y,z) = 0 \\ f_{21}(x,y,z) = 0, & f_{22}(x,y,z) = 6(y-z), & f_{23}(x,y,z) = 12 - 6(y-z) \\ f_{31}(x,y,z) = 0, & f_{32}(x,y,z) = 12 - 6(y-z), & f_{33}(x,y,z) = 6(y-z) \end{array}$$

ادامه‌ی مثال

پس، داریم:

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6(y-z) & 12-6(y-z) \\ 0 & 12-6(y-z) & 6(y-z) \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

حال، نقاط بحرانی f را می‌یابیم. توجه می‌کنیم که:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 12z + 3(y-z)^2, 12y - 3(y-z)^2)$$

بنابراین، $\nabla f(x,y,z) = 0$ نتیجه می‌دهد که:

$$2x = 0, \quad 12z + 3(y-z)^2 = 0, \quad 12y - 3(y-z)^2 = 0$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، $x = 0$، و از حاصل‌جمع دو طرف نظیر تساوی‌های دوم و سوم نتیجه می‌شود که $z = -y$. بنابراین، از آنجا که $12y - 3(y-z)^2 = 0$، داریم $12y - 12y^2 = 0$، و از این‌رو $y = 0$ یا $y = 1$. پس، نقاط بحرانی f عبارت‌اند از:

$$P = (0,0,0), \quad Q = (0,1,-1)$$

پس، می‌توان نوشت:

$$H(P) = H(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

ادامه‌ی مثال

حال، داریم:

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = -288$$

بنابراین، $H(P)$ نامعین است، و از این‌رو $P = (0, 0, 0)$ یک نقطه‌ی زینی f است.

ادامه‌ی مثال

هم‌چنین، داریم:

$$H(Q) = H(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

از این‌رو، داریم:

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 24 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 288 > 0$$

پس، $H(Q)$ معین مثبت است، و بنابراین Q یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است.

قضیه (آزمون مشتق دوم برای حالت خاص دومتغیره)

فرض کنید که $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی نقطه‌ی $P = (a,b) \in U$ دارای مشتقات جزیی دوم پیوسته است. اگر P یک نقطه‌ی بحرانی f باشد، و

$$A = f_{11}(a,b), \quad B = f_{12}(a,b) = f_{21}(a,b), \quad C = f_{22}(a,b)$$

آن‌گاه:

- اگر $A > 0$ و $AC - B^2 > 0$، آن‌گاه P یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است.
- اگر $A < 0$ و $AC - B^2 > 0$، آن‌گاه P یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی f است.
- اگر $AC - B^2 < 0$، آن‌گاه P یک نقطه‌ی زینی f است.
- اگر $AC - B^2 = 0$، آن‌گاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال

فرض کنید که $f(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y$. در این صورت، نقاط بحرانی f و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

پاسخ: داریم:

$$f_1(x,y)=9x^2-9,\quad f_2(x,y)=2y+4$$

بنابراین، داریم:

$$f_{11}(x,y)=18x,\quad f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=0,\quad f_{22}(x,y)=2$$

توجه کنید که $\nabla f(x,y)=(9x^2-9,2y+4)$. پس، $\nabla f(x,y)=(0,0)$ نتیجه می‌دهد که $9x^2-9=2y+4=0$، و از این‌رو داریم $x=\pm1$ و $y=-2$. پس، $P=(1,-2)$ و $Q=(-1,-2)$ تنها نقاط بحرانی f هستند.

ادامه‌ی مثال

به منظور تعیین نوع نقاط P و Q، از آزمون مشتق دوم برای توابع دومتغیره استفاده می‌کنیم. داریم:

$$A(P) = f_{11}(P) = 18, \quad B(P) = f_{12}(P) = 0, \quad C(P) = f_{22}(P) = 2$$

پس، $A(P) = 18 > 0$ و $A(P)C(P) - B(P)^2 = 36 > 0$. از این‌رو، P یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است. به‌علاوه، داریم:

$$A(Q) = f_{11}(Q) = -18, \quad B(Q) = f_{12}(Q) = 0, \quad C(Q) = f_{22}(Q) = 2$$

پس، $A(Q)C(Q) - B(Q)^2 = -36 < 0$. از این‌رو، Q یک نقطه‌ی زینی f است.

روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

※ فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است.

※ همچنین، فرض کنید که $m \leq n-1$ و $g_{(1)}, \ldots, g_{(m)} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیز دارای مشتقات جزیی اول پیوسته هستند.

※ دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} g_{(1)}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_{(m)}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

※ فرض کنید که $P = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی f در بین نقاطی است که در دستگاه بالا صدق می‌کنند.

※ تابع $L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{(i)}(x_1, \ldots, x_n)$$

ادامه‌ی روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

※ بنابر قضیه‌ای (که اثبات نمی‌کنیم) $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $(P, b_1, \dots, b_m)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع L است. یعنی، داریم:

$$\nabla L(P, b_1, \dots, b_m) = 0$$

※ سپس، به منظور یافتن P دستگاه زیر را حل می‌کنیم، که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 : & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_{(1)}}{\partial x_1}(x) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_{(m)}}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_{(1)}}{\partial x_n}(x) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_{(m)}}{\partial x_n}(x) = 0 \\ g_{(1)}(x) = 0 \\ \vdots \\ g_{(m)}(x) = 0 \end{array} \right. \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 : & \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 : & \\ \vdots & \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 : & \end{array}$$

ادامه‌ی روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

⁕ در این روش، به منظور یافتن نقاط اکسترمم مطلق f با قیدهای یادشده، به‌ازای هر نقطه‌ی بحرانی L مثل $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$، مقدار $f(a_1, \ldots, a_n)$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت، بسته به اینکه می‌خواهیم مینیمم مطلق یا ماکسیمم مطلق f را بیابیم، نقاطی که به‌ترتیب کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار f را به‌دست می‌دهند، نقاط مینیمم مطلق یا ماکسیمم مطلق f هستند.

مثال

مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y,z) = xy + 2z$ را روی دایره‌ی فصل مشترک صفحه‌ی $x+y+z=0$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=24$ بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z) = x+y+z, \quad h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-24$$

در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) \\ &= xy + 2z + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-24) \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x}=0: & \left\{\begin{array}{lr} y+\lambda+2\mu x=0 & (1)\\ x+\lambda+2\mu y=0 & (2)\\ 2+\lambda+2\mu z=0 & (3)\\ x+y+z=0 & (4)\\ x^2+y^2+z^2-24=0 & (5) \end{array}\right. \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0: & \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \mu}=0: & \end{array}$$

دستگاه بالا را به طریقی که در ادامه می‌آید، حل می‌کنیم:

$$(1)-(2): \quad (y-x)-2\mu(y-x)=0 \implies y=x \ \text{یا}\ \mu=\frac{1}{2}$$

ادامه‌ی مثال

- $\mu = \frac{1}{2}$:

در این صورت، معادله‌های (1) و (3) به صورت زیر تغییر خواهند کرد:

$$\begin{cases} x + \lambda + y = 0 & (1') \\ 2 + \lambda + z = 0 & (3') \end{cases}$$

از رابطه‌ی (4) داریم $x + y = -z$، و از این‌رو با جای‌گذاری در رابطه‌ی $(1')$ داریم $0 = \lambda - z$، که نتیجه می‌دهد $z = \lambda$. حال، با جای‌گذاری در رابطه‌ی $(3')$ نتیجه می‌گیریم که $z = -1$. پس، معادله‌های (4) و (5) به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} x + y = 1 & (4') \\ x^2 + y^2 = 23 & (5') \end{cases}$$

از $(4')$ داریم $y = 1 - x$، و از این‌رو رابطه‌ی $(5')$ به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$x^2 + (1-x)^2 = 23 \implies x^2 - x - 11 = 0 \implies x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، دو نقطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$P_1 = \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, -1\right), \quad P_2 = \left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+3\sqrt{5}}{2}, -1\right)$$

- $x = y$:

در این صورت، از معادله‌ی (4) داریم $z = -2x$، و از این‌رو بنابر معادله‌ی (5) داریم:

$$x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 24 \implies x = \pm 2$$

بنابراین، نقاط زیر به‌دست می‌آیند:

$$P_3 = (2, 2, -4), \quad P_4 = (-2, -2, 4)$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$f(P_1) = \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right) + 2(-1) = -13$$

$$f(P_2) = \left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right) + 2(-1) = -13$$

$$f(P_3) = (2)(2) + 2(-4) = -4$$

$$f(P_4) = (-2)(-2) + 2(4) = 12$$

بنابراین، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق f روی خم فصل مشترک داده‌شده، به‌ترتیب برابر با 12 و -13 هستند.

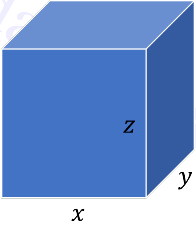
مثال

می‌خواهیم یک مکعب مستطیل بسازیم. به منظور ساخت قاعده‌ی این مکعب مستطیل، می‌خواهیم از ماده‌ای استفاده کنیم که قیمت هر واحد آن دو برابر قیمت هر واحد ماده‌ای است که در سقف و دیواره‌های مکعب به کار برده می‌شود. اگر بخواهیم که حجم این مکعب مستطیل $10\,m^3$ باشد، آن‌گاه ابعاد مکعب چگونه باشند تا هزینه‌ی ساخت مکعب مینیمم شود؟

پاسخ:

اگر C هزینه‌ی هر واحد از ماده‌ای باشد که می‌خواهیم در دیواره‌ها یا سقف مکعب به کار ببریم، آن‌گاه هزینه‌ی ساخت مکعب برابر است با:

$$3Cxy + 2Czy + 2Cxz$$



ادامه‌ی مثال

پس، معادلاً باید مقدار مینیمم تابع $(x,y,z>0)$ $f(x,y,z)=3xy+2yz+2xz$ را با قید $xyz=10$ بیابیم. با فرض $(x,y,z>0)$ $g(x,y,z)=xyz-10$، از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=3xy+2yz+2xz+\lambda(xyz-10)$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial L}{\partial x}=0: & \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0: & \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0: & \end{array}\left\{\begin{array}{ll}3y+2z+\lambda yz=0 & (1)\\ 3x+2z+\lambda xz=0 & (2)\\ 2y+2x+\lambda xy=0 & (3)\\ xyz-10=0 & (4)\end{array}\right.$$

حال، داریم:

$$(1)-(2):\quad 3(y-x)+\lambda z(y-x)=0 \implies (y-x)(3+\lambda z)=0$$

ادامه‌ی مثال

پس، داریم $y = x$ یا $\lambda z = -3$.

- $\lambda z = -3$:

در این صورت، با جای‌گذاری در معادله‌ی (2) داریم $z = 0$، که با معادله‌ی (4) در تناقض است. پس، این حالت غیرممکن است.

- $y = x$:

با جای‌گذاری در معادله‌ی (3) داریم:

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0 \implies x(4 + \lambda x) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } \lambda x = -4$$

توجه کنید که $x = 0$ با معادله‌ی (4) در تناقض است. پس، حتماً باید $\lambda x = -4$. حال، با جای‌گذاری مقدار اخیر در رابطه‌ی (2) داریم $3x = 2z$. سپس، با جای‌گذاری در معادله‌ی (4) داریم:

$$x^2\left(\frac{3}{2}x\right) = 10 \implies x^3 = \frac{20}{3} \implies x = \sqrt[3]{\frac{20}{3}}$$

ادامه‌ی مثال

پس، فقط نقطه‌ی $P = (x_0, y_0, z_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{20}{3}}, \sqrt[3]{\frac{20}{3}}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\right)$ به‌دست می‌آید. بنابر روش ضرایب لاگرانژ، P یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق یا مینیمم مطلق f روی رویه‌ی $xyz = 10$ است. داریم $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{\frac{20}{3}} < 2$ و $z_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{20}{3}} < 3$، و از این‌رو:

$$f(P) = 3x_0y_0 + 2y_0z_0 + 2x_0z_0 < 3(2)(2) + 2(2)(3) + 2(2)(3) = 36$$

با این‌حال، $(2, 5, 1)$ نقطه‌ای در دامنه‌ی f و رویه‌ی $xyz = 10$ است، و داریم:

$$f(2, 5, 1) = 3(2)(5) + 2(5)(1) + 2(2)(1) = 44 > 36 > f(P)$$

پس، P یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق نیست. بنابراین، P یک نقطه‌ی مینیمم مطلق است.

مثال

کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$ را در نظر بگیرید. فرض کنید (α,β,γ) نقطه‌ای روی کره است که در بین نقاط کره کم‌ترین فاصله را از نقطه‌ی $(3,1,-1)$ دارد. مقدار $\alpha+\beta-\gamma$ در کدام گزینه آمده است؟

۱. $\frac{10}{\sqrt{11}}$
۲. $\frac{11}{\sqrt{11}}$
۳. $\frac{12}{\sqrt{11}}$
۴. $\frac{13}{\sqrt{11}}$

ادامه‌ی مثال

پاسخ: تابع فاصله‌ی نقاط $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ از $(3,1,-1)$، یعنی $d:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

بنابراین، باید نقاط مینیمم مطلق d را روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$ بیابیم. معادلاً، نقاط مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=(d(x,y,z))^2$ را روی کره‌ی یادشده می‌یابیم. قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$$

حال، به منظور استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}L(x,y,z,\lambda)&=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)\\&=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x}=0: & \left\{\begin{array}{lr}
2(x-3)+2\lambda x=0 \xrightarrow{\lambda\neq-1} x=\frac{3}{1+\lambda} & (1)\\
2(y-1)+2\lambda y=0 \xrightarrow{\lambda\neq-1} y=\frac{1}{1+\lambda} & (2)\\
2(z+1)+2\lambda z=0 \xrightarrow{\lambda\neq-1} z=-\frac{1}{1+\lambda} & (3)\\
x^2+y^2+z^2-4=0 & (4)
\end{array}\right.\\
\frac{\partial L}{\partial y}=0: & \\
\frac{\partial L}{\partial z}=0: & \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0: &
\end{array}$$

با جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده برای x، y و z در رابطه‌ی (4)، داریم:

$$\frac{9}{(1+\lambda)^2}+\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\frac{1}{(1+\lambda)^2}=4$$

که نتیجه می‌دهد $\frac{11}{(1+\lambda)^2}=4$، و از این‌رو داریم:

$$1+\lambda=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، دو نقطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$P=\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right),\quad Q=\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

داریم:

$$f(P)=\left(\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2=15-4\sqrt{11}$$

$$f(Q)=\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2=15+4\sqrt{11}$$

پس، $f(P)<f(Q)$، و از این‌رو P نزدیک‌ترین نقطه‌ی کره به نقطه‌ی $(3,1,-1)$ است. از فرض سؤال نتیجه می‌شود که

$$P=(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\implies \alpha+\beta-\gamma=\frac{10}{\sqrt{11}}$$

پس، گزینه‌ی ۱ درست است.

مثال

تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2$$

۱. نقاط بحرانی f را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

۲. ماکسیمم و مینیمم مطلق f را روی گوی بسته‌ی $x^2+y^2+z^2\leq 1$ بیابید.

پاسخ ۱: داریم:

$$f_1(x,y,z)=x^3-x^2-2x,\quad f_2(x,y,z)=2y,\quad f_3(x,y,z)=z$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
f_{11}(x,y,z)&=3x^2-2x-2, & f_{12}(x,y,z)&=f_{13}(x,y,z)=0\\
f_{22}(x,y,z)&=2, & f_{21}(x,y,z)&=f_{23}(x,y,z)=0\\
f_{33}(x,y,z)&=1, & f_{31}(x,y,z)&=f_{32}(x,y,z)=0
\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 2x - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال، نقاط بحرانی f را می‌یابیم. داریم:

$$\nabla f(x,y,z) = (x^3 - x^2 - 2x, 2y, z)$$

بنابراین، $\nabla f(x,y,z) = 0$ نتیجه می‌دهد که $y = z = 0$ و

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \implies x(x+1)(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = 2$$

در نتیجه، نقاط بحرانی زیر را داریم:

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (-1,0,0), \quad P_3 = (2,0,0)$$

ادامه‌ی مثال

- P_1:

$$H(P_1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم:

$$D_1 = -2 < 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -4 < 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 < 0$$

پس، $H(P_1)$ نامعین است. از این‌رو، P_1 یک نقطه‌ی زینی f است.

ادامه‌ی مثال

- P_2:

$$H(P_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم:

$$D_1 = 3 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

پس، $H(P_2)$ معین مثبت است. از این‌رو، P_2 یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است.

ادامه‌ی مثال

- P_3:

$$H(P_3) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم:

$$D_1 = 6 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 12 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 12 > 0$$

پس، $H(P_3)$ معین مثبت است. از این‌رو، P_3 یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است.

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۲: بنابر قضیه‌ای، نقاط اکسترمم f نقاط بحرانی هستند، یا نقاط مرزی، یا نقاط منفرد. حال، از آنجا که f همه‌جا دارای مشتقات جزیی است، نقاط اکسترمم f روی گوی بسته‌ی $x^2+y^2+z^2\leq 1$، نقاط بحرانی هستند، یا نقاط مرزی. در قسمت ۱، نقاط بحرانی f را روی $\mathbb{R}^3$ به‌دست آوردیم. توجه می‌کنیم که فقط نقطه‌ی P_1 در درون گوی داده‌شده قرار دارد، در حالی‌که P_1 یک نقطه‌ی زینی است. پس به‌اجبار، نقاط اکسترمم مطلق f روی مرز گوی بسته‌ی داده‌شده یعنی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ واقع هستند. به منظور یافتن مقادیر اکسترمم مطلق f روی کره‌ی یادشده (و در نتیجه روی گوی بسته‌ی $x^2+y^2+z^2\leq 1$)، از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. با فرض اینکه $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}L(x,y,z,\lambda)&=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)\\&=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}=0: \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0: \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0: \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x^3-x^2-2x+2\lambda x=0 \qquad (1) \\ 2y+2\lambda y=0 \implies (1+\lambda)y=0 \implies y=0 \text{ یا } \lambda=-1 \\ z+2\lambda z=0 \implies (1+2\lambda)z=0 \implies z=0 \text{ یا } \lambda=-\frac{1}{2} \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \qquad (2) \end{array} \right.$$

بنابراین، y و z هم‌زمان غیر صفر نیستند. از این‌رو، سه حالت ممکن داریم:

- $y=z=0$:

از رابطه‌ی (2) داریم $x^2=1$، و لذا $x=\pm 1$. پس، دو نقطه‌ی $Q_1=(1,0,0)$ و $Q_2=(-1,0,0)$ را داریم (البته Q_2 همان P_2 در جواب قسمت ۱ است).

ادامه‌ی مثال

- $y = 0$ و $\lambda = -\frac{1}{2}$:

از رابطه‌ی (1) داریم:

$$x^3 - x^2 - 3x = 0 \implies x(x^2 - x - 3) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

اگر $x = 0$، آنگاه از رابطه‌ی (2) داریم $z^2 = 1$، و لذا $z = \pm 1$. پس، نقاط زیر را داریم:

$$Q_3 = (0, 0, 1), \quad Q_4 = (0, 0, -1)$$

حال، اگر $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$، آنگاه $|x| > 1$، و لذا هیچ نقطه‌ای با مؤلفه‌ی اول برابر با چنین xهایی روی مرز کره وجود ندارد.

ادامه‌ی مثال

- $z = 0$ و $\lambda = -1$:

از رابطه‌ی (1) داریم:

$$x^3 - x^2 - 4x = 0 \implies x(x^2 - x - 4) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

اگر $x = 0$، آن‌گاه از رابطه‌ی (2) داریم $y^2 = 1$، و لذا $y = \pm 1$. پس، نقاط زیر را داریم:

$$Q_5 = (0, 1, 0), \quad Q_6 = (0, -1, 0)$$

حال، اگر $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$، آن‌گاه $|x| > 1$، و لذا هیچ نقطه‌ای با مؤلفه‌ی اول برابر با چنین xهایی روی مرز کره وجود ندارد.

ادامه‌ی مثال

بنابراین، نقاط اکسترمم زیر روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{array}{lll} Q_1=(1,0,0), & Q_2=(-1,0,0), & Q_3=(0,0,1), \\ Q_4=(0,0,-1), & Q_5=(0,1,0), & Q_6=(0,-1,0) \end{array}$$

داریم:

$$\begin{array}{lll} f(Q_1)=-\frac{13}{12}, & f(Q_2)=-\frac{5}{12}, & f(Q_3)=\frac{1}{2}, \\ f(Q_4)=\frac{1}{2}, & f(Q_5)=1, & f(Q_6)=1 \end{array}$$

پس، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی گوی بسته‌ی $x^2+y^2+z^2\leq 1$ به‌ترتیب برابر هستند با 1 و $-\frac{13}{12}$.

مثال

مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y,z)=xy+2z$ را با قیدهای زیر بیابید:

$$x+y+z\geq 0,\qquad x^2+y^2+z^2\leq 24$$

پاسخ: از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. اما توجه می‌کنیم که قیدها در روش ضرایب لاگرانژ به صورت معادله هستند و نه نامعادله. بنابراین، می‌توانیم با اضافه کردن دو متغیر s و t، نامعادله‌های بالا را به معادله تبدیل کنیم. برای این منظور، تابع داده‌شده و قیدها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x,y,z,s,t)=xy+2z,\quad x+y+z-s^2=0,\quad x^2+y^2+z^2-24+t^2=0$$

قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z,s,t)=x+y+z-s^2,\quad h(x,y,z,s,t)=x^2+y^2+z^2-24+t^2$$

پس، داریم:

$$\begin{aligned}L(x,y,z,s,t)&=f(x,y,z,s,t)+\lambda g(x,y,z,s,t)+\mu h(x,y,z,s,t)\\&=xy+2z+\lambda(x+y+z-s^2)+\mu(x^2+y^2+z^2-24+t^2)\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

پس، دستگاه زیر را داریم:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial z} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial s} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial t} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0: &
\end{array}
\begin{cases}
y + \lambda + 2\mu x = 0 & (1) \\
x + \lambda + 2\mu y = 0 & (2) \\
2 + \lambda + 2\mu z = 0 & (3) \\
-2\lambda s = 0 & (4) \\
2\mu t = 0 & (5) \\
x + y + z - s^2 = 0 & (6) \\
x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2 = 0 & (7)
\end{cases}
$$

با در نظر گرفتن روابط (4) و (5)، چهار حالت ممکن داریم:

$$s = t = 0, \quad \lambda = \mu = 0, \quad \lambda = t = 0, \quad s = \mu = 0$$

ادامه‌ی مثال

(I) $s=t=0$:

در این حالت، قیدها به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$x+y+z=0, \qquad x^2+y^2+z^2=24$$

توجه می‌کنیم که قبل‌تر در مثالی دیگر، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی قیدهای بالا را به‌ترتیب برابر با 12 و -13 به‌دست آوردیم.

(II) $\lambda=\mu=0$:

در این صورت، با رابطه‌ی (3) به تناقض می‌رسیم. پس، این حالت امکان‌پذیر نیست.

ادامه‌ی مثال

(III) $\lambda = t = 0$:

در این صورت، دستگاه یادشده به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0: \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 0: \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 0: \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0: \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= 0:
\end{aligned}
\left\{
\begin{array}{ll}
y + 2\mu x = 0 & (1') \\
x + 2\mu y = 0 & (2') \\
2 + 2\mu z = 0 & (3') \\
x + y + z - s^2 = 0 & (6) \\
x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 & (7')
\end{array}
\right.
$$

پس، داریم:

$$(1') - (2') : \quad (y - x)(1 - 2\mu) = 0 \implies y = x \ \text{ یا } \ \mu = \frac{1}{2}$$

ادامه‌ی مثال

(i) $y = x$:

در این صورت، از رابطه‌ی $(1')$ داریم $x = 0$ یا $\mu = -\frac{1}{2}$. چنان‌چه $x = 0$، آن‌گاه با توجه به $y = x$، داریم $y = 0$، و لذا از رابطه‌ی $(7')$ نتیجه می‌شود که $z^2 = 24$. بنابراین، $z = \pm 2\sqrt{6}$. اما از رابطه‌ی (6) داریم $z = s^2$، که نتیجه می‌دهد z نامنفی است. پس، فقط $z = 2\sqrt{6}$ قابل قبول است. بنابراین، نقطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \left(0, 0, 2\sqrt{6}\right)$$

اما اگر $\mu = -\frac{1}{2}$، آن‌گاه از رابطه‌ی $(3')$ نتیجه می‌شود که $z = 2$. حال، با جای‌گذاری در $(7')$ داریم $2x^2 = 20$، که نتیجه می‌دهد $x = \pm\sqrt{10}$. با این‌حال، جای‌گذاری $x = -\sqrt{10}$ در رابطه‌ی (6) باعث تناقض می‌شود (نتیجه می‌شود که $s^2 < 0$). پس، تنها نقطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$B = (\sqrt{10}, \sqrt{10}, 2)$$

ادامه‌ی مثال

(ii) $\mu = \frac{1}{2}$:
بنابر روابط $(1')$ و $(3')$، داریم $y = -x$ و $z = -2$. حال، با جای‌گذاری در رابطه‌ی (6) به تناقض $s^2 + 2 = 0$ می‌رسیم. پس، این حالت امکان‌پذیر نیست.

(IV) $s = \mu = 0$:
در این صورت، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{rl} \frac{\partial L}{\partial x} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0: & \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} y + \lambda = 0 & \quad (1'') \\ x + \lambda = 0 & \quad (2'') \\ 2 + \lambda = 0 & \quad (3'') \\ x + y + z = 0 & \quad (6'') \\ x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2 = 0 & \quad (7) \end{array} \right.$$

از روابط $(1'')$، $(2'')$ و $(3'')$ نتیجه می‌شود که $x = y = 2$. حال، از رابطه‌ی $(6'')$ داریم $z = -4$. البته با جای‌گذاری این مقادیر در رابطه‌ی (7)، داریم $t = 0$، و لذا نقطه‌ی $C = (2, 2, -4)$ به‌دست می‌آید.

ادامه‌ی مثال

در نهایت، باید مقادیر اکسترمم مطلق به‌دست آمده در حالت‌های (I)، (III) و (IV) را با هم مقایسه کنیم. مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق در حالت (I) به‌ترتیب برابر با 12 و -13 هستند. به‌علاوه، داریم:

$$f(A) = 4\sqrt{6}, \quad f(B) = 14, \quad f(C) = -4$$

پس، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق f با قیدهای داده‌شده در صورت مثال، به‌ترتیب برابر با 14 و -13 هستند.