یادآوری: تابع $g(x)$ را بر بازه‌ی I کران‌دار گوییم، هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد، به طوری که

$$\forall x \in I, \quad |g(x)| < M.$$

- مثال: مطلوبست حد روبه‌رو:

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = ?$$

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \quad , \quad g(x) = \sin \frac{1}{x}$$ کران‌دار $\longrightarrow$ پاسخ = صفر.

Date :

Page : (   )

- تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=c$ از دامنه‌اش پیوسته گوییم، هرگاه $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ پیوسته چپ

c^+ و راست

- **گزاره:** اگر f, g دو تابع پیوسته در c باشند، آنگاه $f+g$ ، fg ، $\frac{f}{g}$ (که $g(c)\neq 0$) و $f^{\frac{m}{n}}$ (که اگر n زوج و $f(c)>0$ و اگر $m<0$ ، $f(c)\neq 0$) نیز همگی پیوسته از $x=c$ هستند.

- **گزاره:** اگر $f\circ g(x)$ روی بازه‌ای شامل c تعریف شده باشد و $\lim_{x\to c} g(x) = L$ و $f(x)$ در L پیوسته باشد، آنگاه $f\circ g(x)$ نیز در $x=c$ حد دارد داریم: $\lim_{x\to c} f\circ g(x) = f(L)$ علاوه اگر $g(x)$ در $x=c$ پیوسته باشد، آنگاه $f\circ g(x)$ در $x=c$ پیوسته است و داریم $\lim_{x\to c} f\circ g(x) = f\circ g(c)$.

قضیه: فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی باشد و $a\in I$ در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ a_n که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

مثال: نشان دهید که حد تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ در $x=0$ موجود نیست.

$$a_n=\frac{1}{2\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\begin{cases} f(a_n)=\sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}=\sin 2\pi n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \\ f(b_n)=\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \end{cases}$$

پس از قضیه قبل $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ موجود نباشد.

* $\lim_{x\to a} f(x)=l \longleftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h)=l$

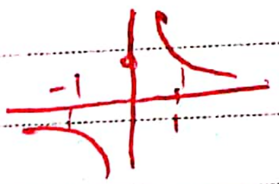
قضیه اکسترمم: فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ باشد آنگاه نقاط $x_1,x_2\in[a,b]$ ای یافت می‌شوند بطوری که برای هر x از $[a,b]$ داریم:

$$\underbrace{f(x_1)}_{\text{min مطلق}}\le f(x)\le \underbrace{f(x_2)}_{\text{max مطلق}}$$

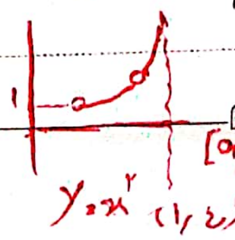
(اصطلاحاً گوییم f، max و min مطلق خود را می‌گیرد و اختیار می‌کند)

مثال: $[-1,1]$ پیوسته نیست

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$



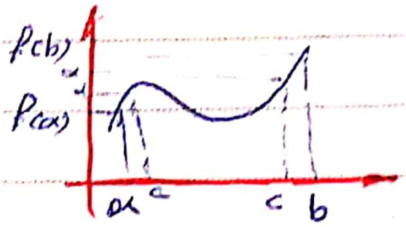
* بسته بودن و کران‌دار بودن بازه در قضیه اکسترمم علاوه پیوستگی برای این بازه مهم است.



بسته بودن $[a,b]$

* بازه‌های بی‌کران: $(-\infty,a)$ ، $(a,+\infty)$ ، $(-\infty,+\infty)$

• قضیهٔ مقدار میانی: فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد. α مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. در اینصورت $c \in [a,b]$ ای موجود است که $f(c)=\alpha$.



* در حالت خاص، اگر با شرایط قضیهٔ مقدار میانی داشته باشیم $f(a).f(b)<0$، آنگاه $c\in[a,b]$ ای موجود است که $f(c)=0$. (قضیهٔ بولتزانو).

مثال: نشان دهید $f(x)=x^5+x^3+x^2-1$ در $[0,1]$ ریشه دارد.

• چون چندجمله‌ای است پیوسته است، پس برای آن مقدار میانی حالت خاص داریم

$$\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(1)=2>0 \end{cases} \longrightarrow \exists\, c\in[0,1] ; f(c)=0$$

مثال: فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ پیوسته است. نشان دهید $c\in[0,1]$ ای موجود است که $f(c)=c$.

تعریف کنید: $\begin{cases} g(x)=f(x)-x \\ g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R} \end{cases}$ پیوسته است

$$\begin{cases} g(0)=f(0)\geq 0 \\ g(1)=f(1)-1\leq 0 \end{cases} \longrightarrow \exists\, c\in[0,1] ; g(c)=0 \longrightarrow f(c)=c$$

Page : (   )　　　　Date :

$f(0)=f(2\pi)$ و

مثال: فرض کنید f روی $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد. نشان دهید $c\in[0,2\pi]$ وجود دارد

که $f(c)=f(c+\pi)$.

$f(c)-f(c+\pi)=0$

$g(x)=f(x)-f(x+\pi)$ تعریف کنید که پیوسته

$g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} g(0)=f(0)-f(\pi) \\ g(\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=f(\pi)-f(0) \end{cases}$$

$\rightarrow g(0)\,g(\pi)\leq 0 \xrightarrow[\text{برای } g \text{ روی } [0,\pi]]{\text{از قضیه مقدار میانی}} \exists\, c:\ g(c)=0$

- **مثال**: فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0,1]$ باشد و $f(0)=f(1)$. نشان دهید $a \in [0,\frac{1}{2}]$ ای موجود است که $f(a+\frac{1}{2})=f(a)$.

حل: تابع کمکی $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$ را روی $[0,\frac{1}{2}]$ در نظر می‌گیریم. g روی این بازه پیوسته است و داریم:

$$\begin{cases} g(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)=f(\frac{1}{2})-f(1) \\ g(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2}) \end{cases} \Longrightarrow g(0)\cdot g(\frac{1}{2}) \leq 0 \xrightarrow{\text{ق م میانی}} \exists a \in [0,\tfrac{1}{2}]:$$

$$g(a)=0$$

$$\downarrow$$

$$f(a+\frac{1}{2})=f(a).$$