به نام خدا

ریاضی ۲

کتاب: آدامز (بخش ۲)

$f: \underset{\text{دامنه}}{R} \to \underset{\text{برد}}{R}$ تابع یک متغیره

$f: R^n \to R$ تابع n متغیره حقیقی مقدار

$f: R \to R^n$ تابع یک متغیره برداری $\to f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)) \to$ که هر یک از f_i ها به صورت $f_i: R \to R$ هستند

$f: R^n \to R^n$ تابع n متغیره برداری $\to f(x_1, \dots, x_n) = (\dots, \dots, \dots) = (f_1(x_1,\dots,x_n), \dots, f_n(x_1,\dots,x_n)) \to$ که در آن برای هر $i \leq m$ داریم: $f_i: R^n \to R$

* یادآوری مفاهیم R^n: $R^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in R\}$

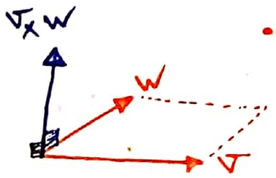
* جمع در R^n: $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

* اندازه بردار در R^n: $v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \to |v| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

* ضرب نقطه‌ای: $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

در R^2 و R^3 یادآوری می‌کنیم که اگر v و w دو بردار دلخواه باشند آنگاه: $v \cdot w = |v||w| \cos\theta$ به موجب فرمول فوق زاویه بین دو بردار در R^n را به صورت $\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$ تعریف می‌کنیم و دو بردار ناصفر v و w را برهم عمود گوییم هرگاه (زاویه بین دو بردار) $v \cdot w = 0$.

* در R^3 ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: حاصلضرب خارجی دو بردار v و w در فضای R^3 را برداری تعریف می‌کنیم که اندازه آن برابر است با اندازه مساحت متوازی‌الاضلاعی که از دو بردار v و w ساخته می‌شود. به علاوه راستای آن بر صفحه شامل v و w عمود است و جهت آن از قاعده دست راست مشخص می‌شود.



- اصطلاحاً گوییم بردارهای v و w و $v \times w$ یک دستگاه راستگرد است.
- چهار انگشت بردار اول، کف دست بردار دوم، انگشت شست جهت ضرب خارجی را نشان می‌دهد.

$$\left.\begin{matrix} v = (v_1, v_2, v_3) \\ w = (w_1, w_2, w_3) \end{matrix}\right\} \to v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

* $v \times w = |v||w| \sin\theta$

- در R^3 اگر سه بردار v و w و t را در نظر بگیریم در این صورت حاصلضرب مختلط این سه بردار را به صورت $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{t})$ نمایش می‌دهیم که برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که توسط سه بردار v و w و t ساخته می‌شود و از فرمول زیر می‌توان مقدار آن را بدست آورد:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}$$

کاربرد: اگر سه بردار v، w و t در یک صفحه قرار داشته باشند، در این صورت $v\cdot(w\times t)=0$ خواهد بود و بالعکس.

پس برای بررسی اینکه سه بردار در یک صفحه قرار دارند کافی است در تساوی فوق را بررسی کنیم که حاصل صفر باشد.

* در فضای R^2 هر دو بردار مانند v_1 و v_2 که هیچ یک مضربی از دیگری نباشند $(v_1\neq\lambda v_2)$ تشکیل یک پایه می‌دهند.

یعنی هر بردار در R^2 را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از v_1 و v_2 نوشت. به بیان دیگر:

$R^2=\{av_1+bv_2 \mid a,b\in R\}$ ⟵ مثلاً در R^2 مجموعهٔ $\{i,j\}$ یک پایه برای R^2 است. $i(1,0)$ ، $j(0,1)$

به صورت مشابه در R^3 نیز هر سه برداری که در یک صفحه قرار نداشته باشند یک پایه برای R^3 می‌سازند. به عنوان مثال:

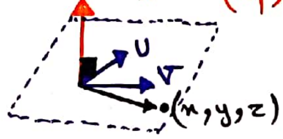
مجموعهٔ $\{i,j,k\}$ یک پایه برای R^3 است. $i(1,0,0)$ ، $j(0,1,0)$ ، $k(0,0,1)$

* خط و صفحه در R^3:

اگر u و v دو بردار غیر هم راستا در R^3 باشند در این صورت صفحهٔ شامل بردارهای u و v به صورت زیر به دست می‌آید:

$\{au+bv \mid a,b\in R\}$

$n=v\times u=(n_1,n_2,n_3)$



$(x,y,z)\perp(n_1,n_2,n_3)$

معادلهٔ صفحه‌ای که شامل u و v است و از مبدأ می‌گذرد به صورت ⟵ $n_1x+n_2y+n_3z=0$

معادلهٔ صفحه‌ای که از یک نقطه $A\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ می‌گذرد و موازی بردارهای u و v باشد ⟵ $n_1(x-a)+n_2(y-b)+n_3(z-c)=0$

لذا معادلهٔ صفحه در R^3 که از $A(a,b,c)$ بگذرد و بر بردار $\vec n(n_1,n_2,n_3)$ عمود باشد، به صورت زیر است:

$$n_1x+n_2y+n_3z=\underbrace{n_1a+n_2b+n_3c}_{d\ \text{عدد ثابت}}$$

* منحنی‌ها:

فرض کنید که تابع f به صورت زیر است: $f:\overset{\text{نقطه}}{R}\to\overset{\text{یک بردار}}{R^n}$

$f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))$ که در آن $f_i:R\to R$ ، $1\leq i\leq n$.

به توابع f_i توابع مؤلفه‌ای f گفته می‌شود در این صورت تابع f را یک تابع برداری یک متغیره یا به اصطلاح یک منحنی یا خم می‌نامیم.

به عنوان مثال اگر t را زمان در نظر بگیریم و برای یک ذره در حال حرکت در فضا در لحظهٔ t موقعیت ذره را با تابع $r(t)$ نمایش می‌دهیم در این صورت واضح است که $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ که به تابع $r(t)$ تابع مکان یا تابع ذره گفته می‌شود.

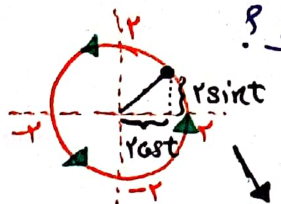
تابع برداری: تابعی که متغیر به ما یک بردار می‌دهد یعنی دامنه‌اش اسکالر و برد آن یک بردار می‌باشد.

Ex) $f(t)=(t^2,\sin t,2t-\cos t)$ ⟵ تابع برداری تک متغیره   Ex) $y=x^2$ ⟵ تابع اسکالر   Ex) $x=a$ ⟵ عدد اسکالر

Ex) ذره‌ای در صفحه در حرکت است و موقعیت این ذره با تابع $r(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ ، $0 \le t \le 2\pi$ مشخص می‌شود. مسیر حرکت این ذره چیست؟

$2\cos t = x(t)$
$2\sin t = y(t)$
$\longrightarrow x^2(t) + y^2(t) = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4(1) = 4 \longrightarrow$

دایره‌ای به شعاع ۲ حول مبدأ مختصات می‌باشد

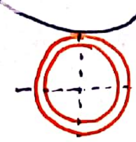


منحنی مسیر حرکت یک دایره به شعاع ۲ حول مبدأ که یکبار و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است.

$t=0 \to r=(2,0)$ ، $t=\pi \to r=(-2,0)$ ، $t=2\pi \to r=(2,0)$

$t=\frac{\pi}{2} \to r=(0,2)$ ، $t=\frac{3\pi}{2} \to r=(0,-2)$

* قرارداد: در جهت افزایش t حرکت می‌کنیم که جهت حرکت روی منحنی را بیابیم.

Ex) $0 \le t \le 4\pi$ ← دو بار دایره به شعاع ۲ را می‌پیماید  و  نیم دایره ← $0 \le t \le \pi$

* حد و مشتق توابع برداری یک متغیره (منحنی‌ها):

$f: R \to R^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$

$\lim_{t \to a} f(t) = (\lim_{t \to a} f_1(t), \dots, \lim_{t \to a} f_n(t))$ ، $f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$

Ex) اگر $f(t) = (t^2+4+\cos t \, , \, \frac{\sin t}{t}+1)$. مطلوب است محاسبه موارد ذیل:

$\lim_{t \to 0} f(t) = (\lim_{t \to 0} (t^2+4+\cos t), \lim_{t \to 0} (\frac{\sin t}{t}+1)) = (5,2)$

$f'(t) = (2t - \sin t \, , \, \frac{t\cos t - \sin t}{t^2})$

Ex) اگر $f(t) = (t^2+1 \, , \, 4t^3-2)$ مطلوب است محاسبه $f''(t)$ در نقطه $\frac{1}{8}$:

$f'(t) = (2t \, , \, 12t^2) \longrightarrow f''(t) = (2, 24t) \longrightarrow f''(\frac{1}{8}) = (2, \frac{24}{8}) = (2,3)$

* برخی خواص مشتق توابع برداری یک متغیره: اگر فرض کنیم که $u(t)$ و $v(t)$ دو تابع برداری یک متغیره باشند یعنی

$v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ و $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$

در این صورت داریم:

(1) $\frac{d}{dt}(u(t)+v(t)) = u'(t) + v'(t)$ (2) $\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t)\, v(t) + u(t)\, v'(t)$

به علاوه اگر $\lambda: R \to R$ تابعی مشتق‌پذیر باشد در این صورت:

(3) $\frac{d}{dt}(\overset{\text{تابع اسکالر}}{\lambda(t)} \underset{\text{ضرب اسکالر}}{\cdot} \underset{\text{بردار}}{u(t)}) = \lambda'(t) \cdot u(t) + \lambda(t) \cdot u'(t)$

(4) $\frac{d}{dt}(u(t) \underset{\text{ضرب خارجی}}{\times} v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$

✓ در ضرب خارجی ترتیب مهم است

* (5) $\frac{d}{dt}|u(t)| = \frac{u(t) \cdot u'(t)}{|u(t)|}$ *

اگر $\lambda: R \to R$ باشد، داریم:

(۴) $\frac{d}{dt}(U(\lambda(t)))' = \lambda'(t) . U'(\lambda(t))$

تمرین) رابطه (۴) را اثبات کنید.

اثبات ش(۵) $U(t) = (U_1(t), U_2(t), U_3(t)) \to |U(t)|' = ? \leftarrow$ می‌دانیم: $(\sqrt{f(t)})' = \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}$

$$|U(t)| = \sqrt{U(t).U(t)} \to |U(t)|' = \frac{(U(t).U(t))'}{2\sqrt{U(t).U(t)}} \to |U(t)|' = \frac{\cancel{2}\, U(t).U'(t)}{\cancel{2}\,|U(t)|} = \frac{U(t).U'(t)}{|U(t)|}$$

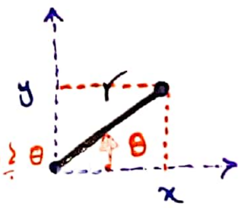
(اهمیت) اگر یک ذره در فضا طوری حرکت کند که اندازه بردار مکان آن یعنی $r(t)$ همواره عددی ثابت باشد یعنی برای هر t داشته باشیم $|r(t)| = k$ در این صورت:

$$\forall t ;\ r(t) \perp r'(t) \xrightarrow{\text{اثبات}} (۵ج): \frac{d}{dt}(|r(t)|) = 0 = \frac{r(t).r'(t)}{|r(t)|}$$

Ex) $r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \to |r(t)| = 2 \to r(t) \perp r'(t)$:

$$\begin{cases} r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \\ r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \end{cases} \to r(t) \perp r'(t)$$

یادآوری از مختصات قطبی:



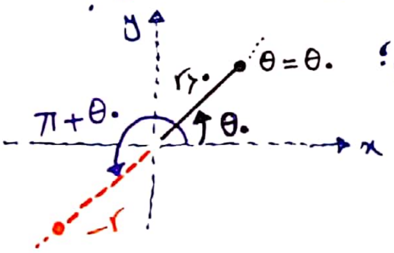
θ پادساعتگرد می‌باشد

قطبی (r,θ)

$x = r\cos\theta$ ، $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\theta$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$

در دستگاه مختصات قطبی به وضوح همواره $r \geq 0$ و در نقطه مبدأ مختصات یعنی $r=0$ مقدار θ تعریف نمی‌شود. البته در برخی از منحنی‌هایی که به صورت قطبی $r = f(\theta)$ ارائه می‌شوند گاهی اوقات r منفی بدست می‌آید تعبیر آن این است که از روی پرتو $\theta = \theta_0$ در واقع $\theta_0 + \pi$ به اندازه r پیش رفته‌ایم!

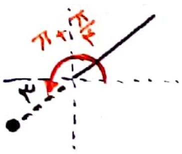


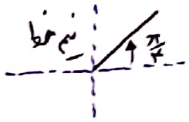
چون در روابط داریم: $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

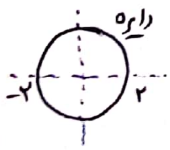
$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

Ex) منحنی $r=2$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ را جداگانه مشخص کنید.

Ex) مختصات نقطه $r=-3$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ را مشخص کنید.

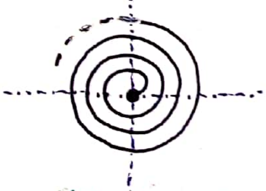






Ex) منحنی $r = \theta$ را توصیف کنید.

شکل حلزونی



یعنی $r(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$