دانشگاه صنعتی امیرکبیر
( پلی تکنیک تهران )
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

# فصل ۹ – توابع مولد

## بخش سوم

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

# 9

# Generating Functions

**ارائه دهنده:** مرتضی دامن افشان

به ازای $n,k\in \mathbb{N}$ و $k\leq n$ ، فرض کنید $p(n,k)$ تعداد پارتیشن های عدد $n$ دقیقاً به $k$ جمع وند را نشان دهد. ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{m} p(n,k) = p(n+m\,,\,m)$$

رسم نمودار فرز

$p(n,1)$

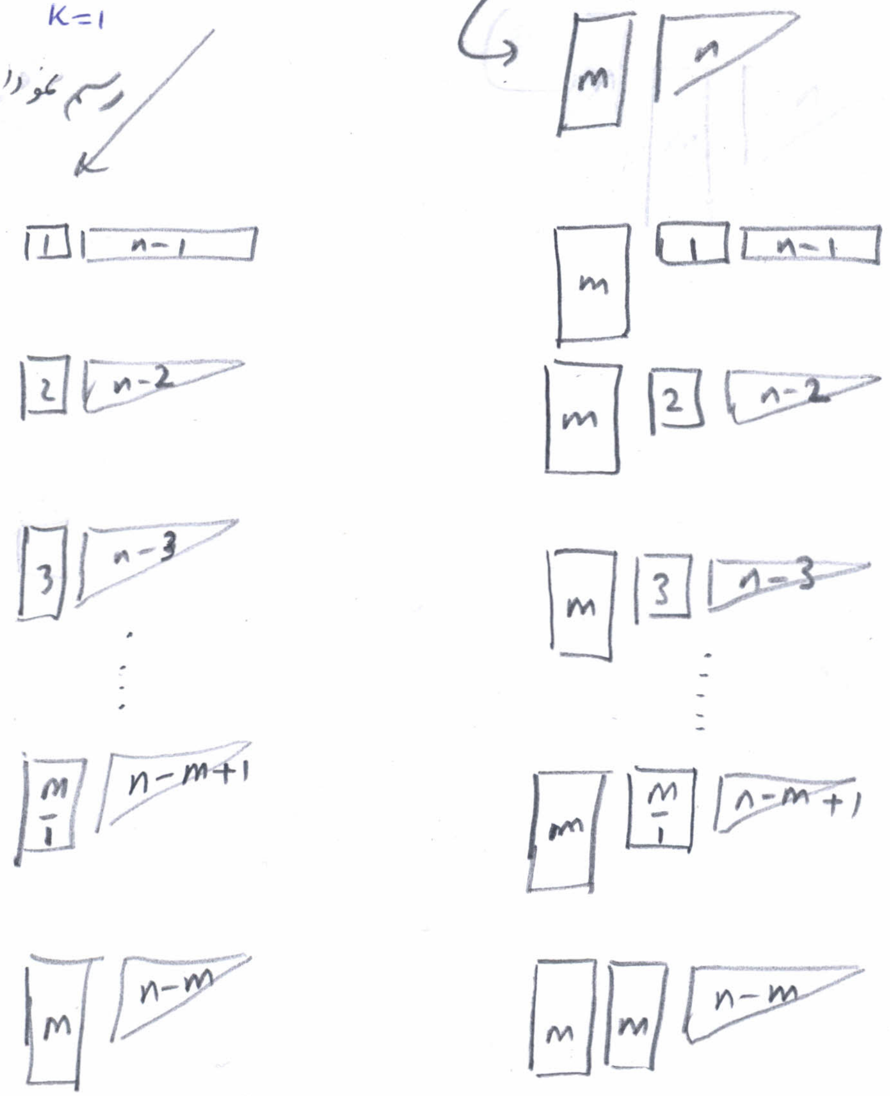
$p(n,2)$

$p(n,3)$

$\vdots$

$p(n,m-1)$

$p(n,m)$




نمودارهای فرز در سمت راست با سمت چپ در تناظر یک به یک هستند پس تساوی برقرار است.

مثال: $p(5,1)+p(5,2)+p(5,3)=p(8,3)$

سوال ۱۲ تمرینات تکمیلی - صفحه ۵۸۰
(فصل ۹)

فرض کنیم S مجموعه حاوی n شیء متمایز باشد. تحقیق کنید که $\frac{e^x}{(1-x)^k}$ تابع مولد نمایی برای تعداد طرق انتخاب m شیء ($0 \le m \le n$) از اشیای S و توزیع این اشیا بین k ظرف متمایز است درصورتیکه ترتیب اشیا در هر ظرف مهم باشد.

$$S = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o_{m+1} \dots o_n\}$$

فرض کنید m را فعلاً ثابت بگیریم. در اینصورت به $\binom{n}{m}$ طریق می‌توان m شیء را از میان n شیء انتخاب کرد. بعد شیء اول را به k طریق، شیء دوم را به k+1 طریق .... و شیء mام را به k+m-1 طریق می‌توان در k ظرف قرارداد بطوریکه ترتیب اشیا در ظرف مهم باشد.

پس کل حالات می‌شود:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} k(k+1)\dots(k+m-1)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \times \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} \times \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!\,m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} \times \binom{m+k-1}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k-1}{m} \frac{n!}{(n-m)!}$$

I

حال ضریب $\frac{x^n}{n!}$ را در تابع $\frac{e^x}{(1-x)^k}$ محاسبه می‌کنیم

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \left( \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right)$$

$$(1-x)^{-k} = \left( \binom{-k}{0}(-x)^0 + \binom{-k}{1}(-x)^1 + \binom{-k}{2}(-x)^2 + \cdots \right)$$

پس ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در تابع $\frac{e^x}{(1-x)^k}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\binom{-k}{0}(-1)^0 (1) + \binom{-k}{1}(-1)^1 (n) + \binom{-k}{2}(-1)^2 (n)(n-1) + \cdots$$

$$+ \binom{-k}{n}(-1)^n n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{-k}{m}(-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{k+m-1}{m}(-1)^m (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{k+m-1}{m} \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{II}$$

$$\text{I} = \text{II}$$

به ازای $n \geq 0$ ، سکه‌ای را $2n$ بار پرتاب می‌کنیم .

**الف)** اگر $a_n$ تعداد دنباله‌های مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آن‌ها $n$ رو و $n$ پشت است ، $a_n$ را برحسب $n$ بیابید.

$$a_n=\binom{2n}{n}$$

**ب)** ثابت‌های $r$ ، $s$ و $t$ را چنان بیابید که $f(x) \overset{}{=} (r+sx)^t$ ، $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

$$(r+sx)^t = r^t\left(1+\frac{s}{r}x\right)^t = r^t\left(\binom{t}{0}\left(\frac{s}{r}x\right)^0+\binom{t}{1}\left(\frac{s}{r}x\right)^1+\cdots\right.$$
$$\left.+\cdots+\binom{t}{n}\left(\frac{s}{r}x\right)^n+\cdots\right)$$

$$= f(x)$$
$$= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$
$$= \binom{2(0)}{0} + \binom{2}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots + \cdots$$
$$= 1 + 2x + 6x^2 + \cdots$$

$\Rightarrow r^t\binom{t}{0}\left(\frac{s}{r}\right)^0=1 \leftarrow$ ضرایب جمله صفرم با یکدیگر برابر هستند

$\Rightarrow \boxed{r=1}$

---

$\Rightarrow r^t\binom{t}{1}\left(\frac{s}{r}\right)^1=2 \leftarrow$ ضرایب جمله یکم با یکدیگر برابر هستند

$\Rightarrow r^t\, t\,\frac{s}{r}=2 \Rightarrow ts=2 \quad (\mathrm{I})$

---

$\Rightarrow r^t\binom{t}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2=6 \leftarrow$ ضرایب جمله دوم با یکدیگر برابر هستند

$\Rightarrow r^t\,\frac{t(t-1)}{2}\,\frac{s^2}{r^2}=6 \Rightarrow t(t-1)s^2=12 \Rightarrow s(t-1)=6 \quad (\mathrm{II})$

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{s(t-1)}{ts} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow t-1=3t \Rightarrow \boxed{t=-\frac{1}{2}} \;,\; \boxed{s=-4}$$

با جایگذاری $r$ و $s$ و $t$ در $(r+sx)^t$ داریم:

$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ تابع مولد دنباله $\binom{2n}{n}$ است. $(n\geq 0)$

پ) فرض کنیم $b_n$ تعداد دنباله های مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آنها فقط پس از آنکه هر $2n$ پرتاب انجام گرفت، تعداد رو ها و پشت ها برای نخستین بار برابر شوند.

(مثلاً اگر $n=3$ باشد، در اینصورت HHHTTT و HHTHTT در $b_n$ به حساب می آیند، ولی HTHHTT و HHTTHT به حساب نمی آیند.

تعریف می کنیم $b_0=0$.

نشان دهید به ازای هر $n\geq 1$ داریم:

$$a_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

منظور از $a_n$: تعداد دنباله های مرکب از $2n$ پرتاب که در آنها $n$ رو و $n$ پشت است.

می توان تعداد این دنباله ها را برحسب زمانی که تعداد رو ها و پشت ها برای نخستین بار با هم برابر می شود افراز کرد:

تعداد حالات بقیه پرتاب ها $a_0 \times b_n \rightarrow$ بعد از $2n$ بار پرتاب برای بار اول یکی شوند

تعداد حالات دو پرتاب دیگر $a_1 \times b_{n-1} \rightarrow$ 〃 〃 $2(n-1)$ 〃 〃

$\vdots \qquad \vdots$

$a_n \times b_0 \rightarrow$ (توجه کنیم $b_0=0$ فرض شد.)

$$\Longrightarrow a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

ت) فرض کنیم $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. نشان دهید $g(x)=1-\frac{1}{f(x)}$ و سپس $b_n$ ،

برای $n\geq 1$ را به دست آورید.

ابتدا $f(x)\,g(x)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f(x)\longrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \cdots\cdots a_n \cdots$$

$$g(x)\longrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \cdots\cdots b_n \cdots$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)\,x^n$$

برای $n\geq 1$ داریم: $a_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$

پس داریم:

$$f(x)\,g(x)=a_0b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)\,x^n$$

$$=0+\sum_{n=1}a_nx^n$$

$$=0+f(x)-a_0$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x)=f(x)-a_0=f(x)-1$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x)=f(x)-1$$

$$\Rightarrow g(x)=1-\frac{1}{f(x)}$$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{f(x)} = 1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

حال باید به دنبال یافتن ضریب $x^n$ در $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ باشیم.

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \left( \binom{\frac{1}{2}}{0}(-4x)^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4x)^1 + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n + \dots \right)$$

$\Rightarrow$ ضریب جمله $n$ ام: $\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n \Rightarrow$ باید ساده شود

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{(-1)(1)(3)\cdots(2n-3)}{n!}2^n$$

قبلاً راجع به ساده‌سازی کسر روبرو بحث شده است.

$\vdots$

$$= \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}$$

پس ضریب جمله $n$ ام در $g(x)$ یا همان $1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ برابر است با:

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} & \\ b_0 = 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ ضریب جمله $x^n$ در $g(x)$ برابر است با