اشکان شکیبا ۹۹۳۱۰۲۰ گروه ۱۲

۱) ابتدا ماکسیمم تابع $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

نقاط بحرانی:

$$f''(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-1$

$$f'(1)=\frac{1}{2} \ , \ f'(-1)=-\frac{1}{2}$$

نقاط تکین:

دلتای مخرج منفی‌ست، پس مخرج ریشه ندارد و تابع در R مشتق پذیر است:

پس نقطه تکین ندارد

نقاط مرزی: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \ , \ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$

بنابراین ماکسیمم تابع در نقطه $x=1$ اتفاق می‌افتد که $f'(1)=\frac{1}{2}$

و مینیمم در $x=-1$ که $f(-1)=\frac{-1}{2}$؛ بنابراین: $\forall x\in R: \frac{-1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$

اکنون فرض می‌کنیم a و b وجود دارند که $|f(b)-f(a)| > \frac{1}{2}|b-a|$:

(برهان خلف) در آن صورت می‌توان نوشت:

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} > \frac{1}{2}$$

و از قضیه مقدار میانگین می دانیم:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow |f'(c)| = \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = \frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|}$$

بنابراین:

$$|f'(c)| > \frac{1}{2}$$

همچنین:

$$\forall x \in R : -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

$|f'(c)| > \frac{1}{2}$ و $\forall x \in R : |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$: پس به تناقض رسیدیم که نادرستی

فرض خلف را نتیجه می دهد؛ پس حکم درست است و

$$\forall a,b \in R : |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

۲) برای اثبات صعودی بودن $g(x)$، کافیست ثابت کنیم $\forall x \in (0,1) : g'(x) \geqslant 0$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

می دانیم که x^2 همواره نامنفی ست، پس کافی ست ثابت کنیم

Subject
Year: Month: Date:

$\forall x\in(0,1): \quad f'(x)x - f(x) \geq 0$.

تابع کمکی h را به شکل روبرو تعریف می‌کنیم:

$h(x) = f'(x)x - f(x)$

$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\left(f'(x)x - f(x)\right) = 0 \quad (\mathrm{I})$

$h'(x) = f''(x)x + f'(x) - f'(x) = f''(x)\,x$

f' صعودی‌ست (در بازه $(0,1)$) $\Rightarrow \forall x\in(0,1): f''(x) \geq 0$

$\Rightarrow \forall x\in(0,1): h'(x) \geq 0$

بنابراین تابع $h(x)$ در بازه $(0,1)$ صعودی‌ست که از عبارت

(I) می‌توان نتیجه گرفت:

$\forall x\in(0,1): \quad h(x) > 0$

$\Rightarrow \forall x\in(0,1): \quad f'(x)x - f(x) > 0$

$\Rightarrow \forall x\in(0,1): g'(x) > 0 \Rightarrow$ تابع g در بازه $(0,1)$ صعودی‌ست

۳) تابع D را به شکل روبرو تعریف می کنیم:

$$D=\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}=\sqrt{16+(y-5)^2}=\sqrt{y^2+6y+25}$$

$$\Rightarrow D'=\frac{y+3}{\sqrt{y^2+6y+25}}$$

نقاط بحرانی: $D'=0 \Rightarrow y+3=0 \Rightarrow y=-3$

نقاط تکین: مخرج ریشه ندارد $(\Delta<0)$؛ بنابراین تابع مشتق پذیر است و نقطه تکین ندارد.

نقاط مرزی: $\lim_{y\to+\infty} D=\lim_{y\to-\infty} D=+\infty$

اما نقطه $y=-3$ بر روی تابع وجود ندارد، بنابراین باید نقطه‌ای که نزدیک‌ترین y را به $y=-3$ دارد در نظر بگیریم؛ یعنی نقطه‌ای با $y=0$ (چون $y\geq 0$) که برابر است با $(0,0)$.

البته برای اطمینان، می توان با جایگذاری $y=\frac{x^2}{16}$ ، تابع D را

برحسب x نوشت که در آن صورت با حل معادله $D'=0$

به $x=0$ می‌رسیم که نقطه مورد نظر آن بر روی تابع ، همان

$(0,0)$ است:

$$D=\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{16}-5\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{x^4}{256}+\frac{3x^2}{8}+25}$$

$$\Rightarrow D'=\frac{\frac{x^3}{64}+\frac{3x}{4}}{2\sqrt{\frac{x^4}{256}+\frac{3x^2}{8}+25}}$$

نقاط بحرانی: $D'=0 \Rightarrow \frac{x^3}{64}+\frac{3x}{4}=0 \Rightarrow x=0$

$$\rightarrow D(0)=5 \ , \ y=0$$

نقاط تکین: تابع نقطه تکین ندارد

نقاط مرزی: $\lim\limits_{x\to+\infty} D=+\infty \ , \ \lim\limits_{x\to-\infty} D=+\infty$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ = نزدیک‌ترین نقطه ، 5 = کمترین فاصله