ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

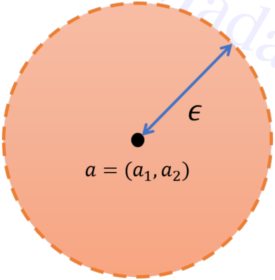
حد و پیوستگی توابع چندمتغیره

همسایگی‌های نقاط در صفحه

یک **همسایگی** برای نقطه‌ی $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ به شعاع $\epsilon > 0$ در $\mathbb{R}^2$، عبارت است از:

$$N_\epsilon(a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}}_{|x-a|} < \epsilon\}$$

به مجموعه‌ی $N_\epsilon(a)$ یک **گوی** به **مرکز** a و **شعاع** ϵ هم گفته می‌شود.



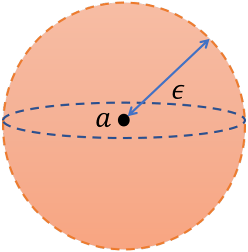
همسایگی‌های نقاط در فضا

یک همسایگی برای نقطه‌ی $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ به شعاع $\epsilon>0$ در $\mathbb{R}^3$، عبارت است از:

$$N_\epsilon(a)=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : |x-a|<\epsilon\}$$

که در آن:

$$|x-a|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2}$$



به مجموعه‌ی $N_\epsilon(a)$ یک گوی به مرکز a و شعاع ϵ هم گفته می‌شود.

حد توابع چندمتغیره

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ و $L \in \mathbb{R}$. گوییم f در $x = a$ **حد** دارد و حد آن برابر با L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \left(\lim_{(x_1,\ldots,x_n) \to (a_1,\ldots,a_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = L \right)$$

هرگاه

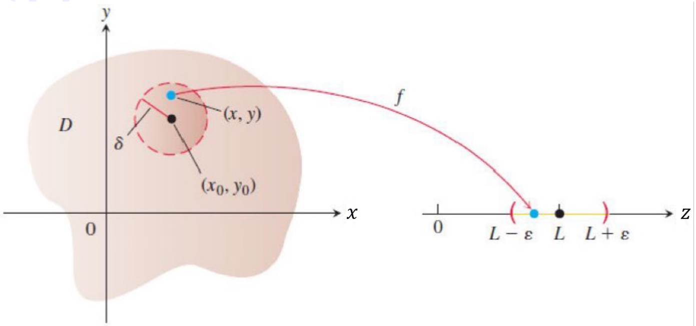
۱. هر همسایگی a شامل نقاطی از دامنه‌ی f به‌جز a باشد، و

۲. $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in D, (|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$

- شرط $|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$ را با فرض $x = (x_1, \ldots, x_n)$ به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta \implies |f(x_1, \ldots, x_n) - L| < \epsilon$$

شهود تعریف حد:



◄ حد یک تابع چندمتغیره در صورت وجود، یکتا است.

قضیه

فرض کنید $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^n$. اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

آن‌گاه:

۱. $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

۲. $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = LM$

۳. اگر $M \neq 0$، آن‌گاه داریم $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$.

قضیه

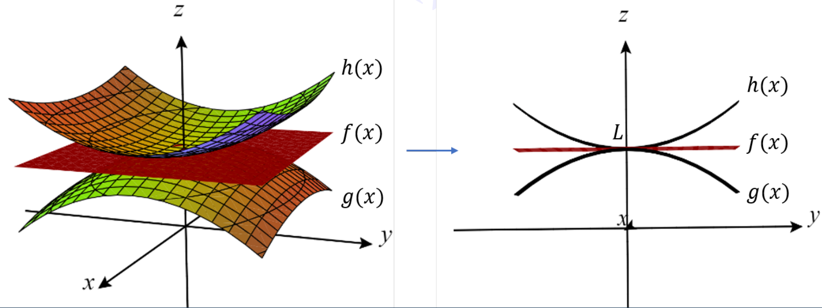
فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی هستند که $\mathrm{Im}(f) \subseteq I$.
هم‌چنین، فرض کنید که $a \in \mathbb{R}^n$، $\lim_{x \to a} f(x) = L$، $L \in I$، و F در L پیوسته است. در این صورت، داریم:

$$\lim_{x \to a} (F \circ f)(x) = F(L)$$

قضیه‌ی فشردگی

فرض کنید $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع هستند و $a \in \mathbb{R}^n$. اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $x \in N_\delta(a) \cap D$ که $x \neq a$ (یعنی به‌ازای هر $x \in D$ که $0 < |x - a| < \delta$) بتوان نتیجه گرفت که $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \implies \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{و وجود دارد} \quad \lim_{x \to a} f(x)$$



- فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $a \in \mathbb{R}^n$. در این صورت:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$$

- بنابراین، اگر $h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع دیگری باشد که در یک همسایگی a، داشته باشیم $0 \leq |f(x)| \leq h(x)$، آن‌گاه بنابر قضیه‌ی فشردگی:

$$\lim_{x \to a} h(x) = 0 \implies \lim_{x \to a} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

پیوستگی توابع چندمتغیره

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $a \in D$. در این صورت، f را در $x = a$ **پیوسته** گوییم، هرگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

قضیه

فرض کنید توابع $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $a \in D$ پیوسته هستند. در این صورت، $f \pm g$ و fg هم در $x = a$ پیوسته هستند. همچنین، اگر $g(a) \neq 0$، آنگاه $\frac{f}{g}$ نیز در $x = a$ پیوسته است.

قضیه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی هستند با $\mathrm{Im}(f) \subseteq I$.
اگر f در $a \in D$ و F در $f(a)$ پیوسته باشند، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \to a} F(f(x)) = F(f(a))$$

یعنی $F \circ f$ در $x = a$ پیوسته است.

مثال

نشان دهید که تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ که به صورت $f(x,y,z)=x$ تعریف می‌شود، روی $\mathbb{R}^3$ پیوسته است.

پاسخ:

فرض کنید $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ دل‌خواه است. باید نشان دهیم:

$$\lim_{(x,y,z)\to(a_1,a_2,a_3)} f(x,y,z)=f(a_1,a_2,a_3)=a_1$$

از این‌رو، فرض کنید $\epsilon>0$ دل‌خواه است. باید نشان دهیم $\delta>0$ وجود دارد که:

$$|(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)|<\delta \implies |f(x,y,z)-f(a_1,a_2,a_3)|<\epsilon$$

داریم:

$$|(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2},$$

$$|f(x,y,z)-f(a_1,a_2,a_3)|=|x-a_1|$$

ادامه‌ی مثال

پس، معادلاً باید نشان دهیم $0 < \delta$ وجود دارد که:

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2} < \delta \implies |x-a_1| < \epsilon$$

توجه کنید که همواره:

$$|x-a_1| = \sqrt{(x-a_1)^2} \leq \sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}$$

بنابراین، اگر $\epsilon = \delta$، آن‌گاه

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2} < \delta(=\epsilon)$$

نتیجه می‌دهد که $|x-a_1| < \epsilon$.

- به طور مشابه با مثال قبل، اگر توابع $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ به صورت $g(x, y, z) = y$ و $h(x, y, z) = z$ تعریف شوند، آن‌گاه مانند $f(x, y, z) = x$ روی $\mathbb{R}^3$ پیوسته هستند.
- بنابراین، از نکته‌ی بالا و قضایایی که داشتیم نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌ای سه‌متغیره روی $\mathbb{R}^3$ پیوسته است. این مطلب، به‌سادگی قابل تعمیم به چندجمله‌ای‌های با n متغیر است؛ یعنی همه‌ی چندجمله‌ای‌های با n متغیر روی $\mathbb{R}^n$ پیوسته هستند.
- تابع $f(x, y, z) = xyz + x^2y^3 - \sqrt{2}z^3 + \frac{1}{5}$ مثالی از یک چندجمله‌ای با 3 متغیر است.
- اگر $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آن گاه از نکات بالا، ترکیب F (در صورت امکان) با یک چندجمله‌ای تعریف‌شده روی $\mathbb{R}^n$ یا هر زیرمجموعه‌ی آن، تابعی پیوسته است. به عنوان مثال، توابع مثلثاتی، لگاریتمی و نمایی می توانند به جای F قرار گیرند.

مثال‌هایی از پیوستگی

با توجه به پیوستگی توابعی که ذیلاً از آن‌ها حد گرفته می‌شود، داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} 2x - y^2 = 2(2) - 3^2 = -5$$

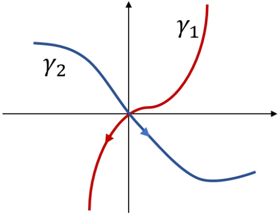
$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{3},2\right)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sin(xy)} + \cosh(x^3)}{\ln(\cos(x)) - x^4y^2 + 1} = \frac{e^0 + \cosh(0)}{\ln(\cos(0)) - 0 + 1} = 2$$

چگونگی اثبات وجود نداشتن حد

در حالت یک متغیره، به منظور اثبات وجود نداشتن حد یک تابع مثل $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $x = x_0$، می‌توانستیم نشان دهیم حدود چپ و راست f در $x = x_0$ مقادیر متفاوتی دارند یا دست‌کم یکی از آن‌ها وجود ندارد.

در حالت دو متغیره، مفهوم مسیر مطرح می‌شود. به این صورت که به منظور اثبات وجود نداشتن حد تابع $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}^2$، دو مسیر (در واقع خم) مختلف پیوسته‌ی γ_1 و γ_2 در دامنه‌ی تابع پیدا می‌کنیم که a در تصویر آن‌ها قرار دارد، اما حدود $g \circ \gamma_1$ و $g \circ \gamma_2$ در نزدیکی $x = a$ با هم متفاوت هستند (یا دست‌کم یکی از آن‌ها وجود ندارد). در شکل زیر، دو مسیر مختلف که به مبدأ می‌رسند را مشاهده می‌کنید:



مثال

فرض کنید $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. در این صورت، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را بررسی کنید.

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- مسیر $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0\times y}{0^2+y^2}=0$$

- مسیر $x=y$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

با توجه به نکات قبل، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال

فرض کنید $f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$. در این صورت، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را بررسی کنید.

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- مسیر $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2\times 0^2\times y}{0^4+y^2}=0$$

- مسیر $y=x^2$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{2x^4}=1$$

بنابراین، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

- توجه کنید که در این مثال، به‌ازای هر عدد صحیح k، روی مسیر $y=kx$ حد تابع صفر است. بنابراین، از مسیر سهمی استفاده کردیم.

مثال

فرض کنید $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. در این صورت، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ را بررسی کنید.

پاسخ:

به‌ازای هر $(x,y) \neq (0,0)$ داریم:

$$0 \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} |y| \leq |y|$$

حال، چون $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$، بنابر قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

مثال

فرض کنید $m, n \geq 0$ اعدادی صحیح هستند. در این صورت، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{x^2+y^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ: از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم؛ یعنی قرار می‌دهیم:

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

توجه کنید که $(x,y) \to (0,0)$ معادل است با $r \to 0^+$؛ در حالی که θ کاملاً آزاد است. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\left(r^m \cos^m(\theta)\right)\left(r^n \sin^n(\theta)\right)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} r^{m+n-2} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta)
\end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

پس، می‌توان حالت‌هایی که در ادامه می‌آیند را در نظر گرفت.

۱. $m+n>2$:

در این صورت، واضح است که $\lim_{r\to 0^+} r^{m+n-2}\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)=0$.

۲. $m+n=2$:

در این صورت، باید $\lim_{r\to 0^+}\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)$ را بررسی کنیم. حال، دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- $\theta=0$:

در این حالت، به‌وضوح حد فوق 0 یا 1 است؛ بسته به اینکه $n\neq 0$ یا $n=0$.

- $\theta=\frac{\pi}{4}$:

$$\lim_{r\to 0^+}\cos^m\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+n}=\frac{1}{2}$$

بنابراین، در این حالت، حد داده شده وجود ندارد.

ادامه‌ی مثال

۳. $m+n=1$:

در این حالت، داریم $(m,n)=(1,0)$ یا $(m,n)=(0,1)$. اگر $(m,n)=(1,0)$، آن‌گاه باید $\lim_{r\to 0^+}\frac{\cos(\theta)}{r}$ را بررسی کنیم. حال، دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- $\theta=\frac{\pi}{2}$:
  در این صورت، واضح است که حد فوق برابر با 0 است.
- $\theta=0$:
  در این صورت، حد فوق برابر است با:

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\cos(0)}{r}=\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}=\infty$$

بنابراین، در حالت $(m,n)=(1,0)$ حد وجود ندارد. به طور مشابه، می‌توان دید که در حالت $(m,n)=(0,1)$ نیز حد وجود ندارد.

ادامه‌ی مثال

۴. $m+n=0$:

در این صورت، داریم $m=n=0$. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\lim_{r\to 0^+} r^{m+n-2}\cos^m(\theta)\sin^n(\theta) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^2} = \infty$$

نکته:

در محاسبه‌ی حدود توابع کسری در $a \in \mathbb{R}^2$، با برابر قرار دادن صورت و مخرج کسر، می‌توانیم به یک مسیر در دامنه برسیم که گاهی در اثبات وجود نداشتن حد، کمک‌کننده است. البته a باید روی مسیر به‌دست‌آمده باشد، و این مسیر در اطراف a پیوسته باشد.

مثلاً در بررسی حد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{y+y^3}$، با برابر قراردادن صورت و مخرج کسر، مسیر $x = y + y^3 - y^2$ را خواهیم داشت که شامل $(0,0)$ است، و این مسیر در اطراف این نقطه نیز پیوسته است. اما اگر حد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه با برابر قراردادن صورت و مخرج کسر، به عبارت زیر می‌رسیم:

$$x^2y = x^2 + y^2 \implies x^2(y-1) = y^2$$

نقطه‌ی $(0,0)$ در این عبارت صدق می‌کند؛ اما در نقاط (x,y) با $y \neq 0$ نزدیک به $(0,0)$، $y - 1 < 0$ و لذا $x^2(y-1) < 0$؛ در حالی که $y^2 > 0$. پس، در عبارت بالا، سمت چپ منفی و سمت راست مثبت است. از این‌رو، این خم در اطراف $(0,0)$ تعریف نشده است، و لذا پیوسته نیست.

مثال

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x-y}$ را بررسی کنید.

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- $y = 0$:

  واضح است که $\frac{y^2}{x-y}$ روی این مسیر برابر با صفر است.

- $x = y^2 + y$ (مسیر حاصل از برابر قراردادن صورت و مخرج):

  در این صورت، حد داده‌شده، روی این مسیر برابر است با:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{(y^2+y)-y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

بنابراین، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x-y}$ وجود ندارد.

مثال

آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در $(0,0)$ پیوسته است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پاسخ: داریم:

$$0\leq\left|\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right|\leq\frac{|x-y|^2}{|x|+|y|}=\underbrace{\left(\frac{|x-y|}{|x|+|y|}\right)}_{\leq 1}|x-y|\leq|x-y|$$

حال، با توجه به اینکه $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x-y|=0$، از قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}=0=f(0,0)$$

پس، f در $(0,0)$ پیوسته است.

مثال

$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y-e^x}{1-y^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- $y = e^x$:

واضح است که تابع $\frac{y-e^x}{1-y^2}$ روی این مسیر برابر با صفر است.

- $x = 0$:

در این صورت، روی این مسیر، حد داده‌شده برابر است با:

$$\lim_{y\to1} \frac{y-e^0}{1-y^2} = \lim_{y\to1} \frac{y-1}{(1-y)(1+y)} = \lim_{y\to1} -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین، $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y-e^x}{1-y^2}$ وجود ندارد.

مثال

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-x}{x+y}$ را بررسی کنید.

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- $x = 0$:

واضح است که $\frac{\sin(x)-x}{x+y}$ روی این مسیر برابر با صفر است.

- $y = \sin(x) - 2x$ (مسیر حاصل از برابر قراردادن صورت و مخرج):

حد داده‌شده، روی این مسیر برابر است با:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x + (\sin(x) - 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\sin(x) - x} = 1$$

بنابراین، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-x}{x+y}$ وجود ندارد.

توجه: به‌جای مسیر دوم، می‌توانستیم مسیر $y = -\sin(x)$ را نیز در نظر بگیریم.

مثال

فرض کنید m و n اعدادی صحیح و نامنفی هستند. حد زیر را بررسی کنید:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{(x-\alpha)^m(y-\beta)^n}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

پاسخ:

قرار می‌دهیم:

$$X = x-\alpha, \qquad Y = y-\beta$$

در این صورت، داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{(x-\alpha)^m(y-\beta)^n}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X^mY^n}{X^2+Y^2}$$

در حالی که حد اخیر را قبلاً بررسی کرده‌ایم!

مثال

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)+\sin(y)}{x+y}$ را بررسی کنید.

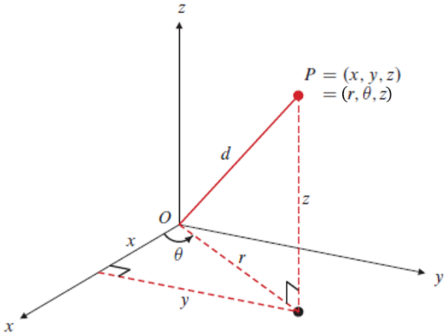
پاسخ:

داریم:

$$\text{حد داده‌شده} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{x+y}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{x+y}{2}}\right)}_{=1} \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) = 1$$

مختصات استوانه‌ای



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

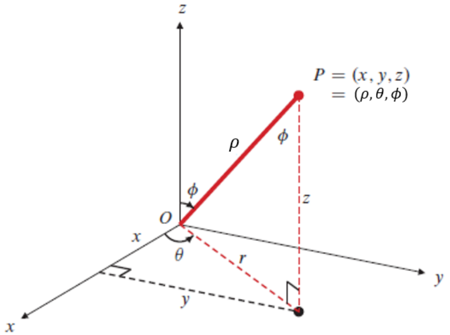
$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

توجه کنید که نقطه‌ی (x, y, z) در مختصات دکارتی با پارامترهای (r, θ, z) در مختصات استوانه‌ای مشخص می‌شود.

مختصات کروی



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = \rho \sin(\phi)$$

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$z = \rho \cos(\phi)$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi$$

مثال

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ را بررسی کنید.

پاسخ: (راه اول)

از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = \rho\cos(\phi)$$

توجه کنید که $(0,0,0) \to (x,y,z)$ معادل است با $\rho \to 0^+$؛ در حالی که θ و ϕ کاملاً آزاد هستند. بنابراین، داریم:

$$\text{حد داده‌شده} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(\rho\sin(\phi)\cos(\theta))(\rho\sin(\phi)\sin(\theta))(\rho\cos(\phi))}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \rho \underbrace{\left(\sin^2(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta)\right)}_{\text{کران‌دار}}$$

$$= 0$$

ادامه‌ی مثال

(راه دوم) استفاده از قضیه‌ی فشردگی

می‌دانیم به‌ازای هر دو عدد حقیقی s و t داریم $st \leq \frac{s^2+t^2}{2}$. بنابراین، به‌ازای هر $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ داریم:

$$0 \leq \left| \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \right| = \left| \frac{xy}{x^2+y^2+z^2} \right| |z| \leq \underbrace{\left| \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2+z^2} \right|}_{\leq \frac{1}{2}} |z| \leq \frac{|z|}{2}$$

حال، با توجه به اینکه $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|z|}{2} = 0$، از قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$$