

preview

بزرگترین مرجع کتابهای الکترونیکی فارسی و انگلیسی
بزرگترین مرجع نرم افزارهای کاربردی و تخصصی
بزرگترین مرجع دانلود کلیپهای موبایل



www.IranMeet.com

INFO@IRANMEET.COM

فیزیک

جلد اول

(ویراست چهارم)

دابوت رزنیک، دیوید هالیدی، سینت اس. کرین

ترجمه

جلال الدین پاشایی راد، محمد خرمی، محمدرضا بهاری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

Ramin.samad@yahoo.com

*Physics*

(4 th Edition)

Volume 1

Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane
John Wiley & Sons, 1992

فیزیک
(ویراست چهارم)
جلد اول

تألیف رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کنث اس. کرین
ترجمه دکتر جلال الدین پاشایی راد، دکتر محمد خرمی، محمدرضا بهاری
نسخه پرداز: زهرا دلاوری

حروفچین: پروین حاج اسماعیل زنجانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۸۱
تعداد ۵۰۰۰

چاپ و صحافی: معراج
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Resnick, Robert
فیزیک / رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کنث اس. کرین؛ ترجمه جلال الدین پاشایی راد، محمد خرمی،
محمدرضا بهاری. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱.
ج: مصور، چندول، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی، ۱۰۹۲. فیزیک؛ ۹۵)

ISBN 964-01-8176-5 (دوره)
ISBN 964-01-1092-2 (ج. ۱)

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیبا.
عنوان اصلی:
در چاپهای قبلی دیوید هالیدی به عنوان تویسته اول ذکر شده است.
واژنهای:

۱. فیزیک. الف. هالیدی، دیوید، ۱۹۱۶— . ۲. Halliday, David, . ۳. Krane, Kenneth, کنث

S. پاشایی راد، جلال الدین، ۱۳۲۴— . ۴. مترجم. ۵. خرمی، محمد، ۱۳۲۸— . ۶. مترجم. ۷. بهاری،
محمدرضا، ۱۳۲۷— . ۸. مترجم. ۹. مرکز نشر دانشگاهی، ز. عنوان.

۵۲۰ QC21/2/۵۲۸۷

۱۳۸۱ کتابخانه ملی ایران
۸۱-۳۷۸۵۹

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحة	عنوان	صفحة	عنوان
۴۱	۳ بردارها	۱	پیشگفتار
۴۱	۱-۳ بردار و اسکالر		
۴۲	۲-۳ جمع بردارها: روش نموداری	۳	۱ اندازه‌گیری
۴۳	۳-۳ مؤلفه‌های بردار	۳	۱-۱ کمیتهای فیزیکی، استانداردها، و یکاهای
۴۵	۴-۳ جمع بردارها: روش مؤلفه‌ای	۴	۱-۲ سیستم بین‌المللی یکاهای
۴۷	۵-۳ ضرب بردارها	۵	۱-۳ استاندارد زمان
۵۰	۶-۳ قوانین برداری در فیزیک	۶	۱-۴ استاندارد طول
۵۲	پرسنها	۹	۱-۵ استاندارد جرم
۵۳	مسئله‌ها	۱۰	۱-۶ دقت و رقمهای بامعنى
۵۸	۴ حرکت دو بعدی و سه بعدی	۱۱	۱-۷ تحلیل ابعادی
۵۸	۱-۴ مکان، سرعت، و شتاب	۱۲	پرسنها
۶۰	۲-۴ حرکت با شتاب ثابت	۱۳	مسئله‌ها
۶۲	۳-۴ حکمت پرتابی ✓		
۶۶	۴-۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت	۱۷	۲ حرکت در یک بعد
۶۸	۵-۴ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای (اختیاری)	۱۷	۱-۲ سینماتیک ذره
۷۰	۶-۴ حرکت نسبی	۱۹	۲-۲ توصیف حرکت
۷۴	پرسنها	۲۰	۳-۲ سرعت متوسط
۷۵	مسئله‌ها	۲۳	۴-۲ سرعت لحظه‌ای
۸۶	۵ نیرو و قوانین نیوتون	۲۵	۵-۲ حرکت شتابدار
۸۶	۱-۵ مکانیک کلاسیک	۲۷	۶-۲ حرکت با شتاب ثابت
۸۷	۲-۵ قانون اول نیوتون	۲۹	۷-۲ سقوط آزاد اجسام ✓
۸۸	۳-۵ نیرو ✓	۳۰	۸-۲ گالیله و سقوط آزاد (اختیاری)
		۳۱	۹-۲ اندازه‌گیری شتاب سقوط آزاد (اختیاری)
		۳۳	پرسنها
			مسئله‌ها

صفحه	عنوان	صفحة	عنوان
۱۸۱	۵-۸ سیستمهای پایستار دو و سه بعدی (اختیاری)	۸۹	۴-۵ جرم
۱۸۲	۶-۸ پایستگی انرژی در دستگاه ذرات	۹۱	۵-۵ قانون دوم نیوتون
۱۸۶	۷-۸ جرم و انرژی (اختیاری)	۹۲	۶-۵ قانون سوم نیوتون
۱۸۸	۸-۸ کوانتش انرژی (اختیاری)	۹۵	۷-۵ یکاهاي نيرو
۱۹۰	پرسشها	۹۰	۸-۵ وزن و جرم
۱۹۱	مسئله‌ها	۹۷	۹-۵ اندازه‌گيری نيرو
۲۰۱	۹ سیستمهای ذرات	۱۰۲	۱۰-۵ کاريدهاie قوانين نيوتون
۲۰۱	۱-۹ سیستمهای دودره‌اي	۱۰۵	۱۱-۵ کاريدهاie ديگري از قوانين نيوتون
۲۰۳	۲-۹ سیستمهای بس-ذرره‌اي	۱۰۷	پرسشها
۲۰۸	۳-۹ مرکز جرم اجسام صلب		مسئله‌ها
۲۱۰	۴-۹ تکانه خطی ذره	۱۱۶	۶ ديناميک ذرات
۲۱۱	۵-۹ تکانه خطی سیستمی از ذرات	۱۱۶	۱-۶ قوانين نيرو
۲۱۲	۶-۹ پایستگی تکانه خطی	۱۱۷	۲-۶ نيري اصطکاك
۲۱۵	۷-۹ کار و انرژی در سیستمی از ذرات (اختیاری)	۱۲۲	۳-۶ ديناميک حرکت دايره‌اي يکناخت
۲۱۹	۸-۹ سیستمهای با جرم متغير (اختیاری)	۱۲۵	۴-۶ معادلات حرکت: نيروهای ثابت و متغير
۲۲۳	پرسشها	۱۲۷	۵-۶ نيروهای وابسته به زمان: روش‌هاي تحليلي
۲۲۵	مسئله‌ها	۱۲۸	۶-۶ نيروهای وابسته به زمان: روش‌هاي عددی (اختیاری)
۲۳۲	۱۰ بخورد	۱۲۹	۷-۶ اصطکاك شاره‌ها و حرکت پرتابي
۲۳۲	۱-۱۰ بخورد چيست؟	۱۳۲	۸-۶ چارچوبهای نالخت و شبهنيرو (اختیاری)
۲۳۳	۲-۱۰ ضربه و تکانه	۱۳۴	۹-۶ محدوديتهای قوانين نيوتون (اختیاری)
۲۳۵	۳-۱۰ پایستگی تکانه در حین بخورد	۱۳۶	پرسشها
۲۳۷	۴-۱۰ بخورد در يك بعد	۱۳۸	مسئله‌ها
۲۴۰	۵-۱۰ بخورد در دو بعد	۱۴۸	۷ کار و انرژی
۲۴۴	۶-۱۰ چارچوب مرجع مرکز جرم	۱۴۸	۱-۷ کاري که نيري ثابت انجام مي دهد
۲۴۷	۷-۱۰ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی (اختیاری)	۱۵۱	۲-۷ کاري که نيري متغير انجام مي دهد: مورد يك بعدی
۲۴۹	پرسشها	۱۵۴	۳-۷ کاري که نيري متغير انجام مي دهد: مورد دو بعدی (اختیاری)
۲۵۱	مسئله‌ها		۴-۷ انرژي جنبشي و قضيه کار-انرژي
۲۵۹	۱۱ سينماتيك دوراني	۱۵۶	۵-۷ توان
۲۵۹	۱-۱۱ حرکت دوراني	۱۵۸	۶-۷ چارچوبهای مرجع (اختیاری)
۲۶۰	۲-۱۱ متغيرهای حرکت دوراني	۱۵۹	۷-۷ انرژي جنبشي در سرعتهای زياد (اختیاری)
۲۶۲	۳-۱۱ دوران با شتاب زاويه‌اي ثابت	۱۶۱	پرسشها
۲۶۳	۴-۱۱ كميتهای دوراني به صورت كميتهای برداری	۱۶۳	مسئله‌ها
۲۶۵	۵-۱۱ روابط ميان متغيرهای خطی و زاويه‌ای:	۱۶۳	۸ پايستگي انرژي
	صورت اسکالار		۱-۸ نيروهای پايستار
۲۶۷	۶-۱۱ روابط ميان متغيرهای خطی و زاويه‌ای:	۱۷۰	۲-۸ انرژي پتانسيل
	صورت برداری (اختیاری)	۱۷۰	۳-۸ سیستمهای پایستار يك بعدی
۲۶۸	پرسشها	۱۷۳	۴-۸ سیستمهای پایستار يك بعدی: حل كامل
۲۷۰	مسئله‌ها	۱۷۴	
		۱۷۷	

صفحه

عنوان

صفحه

۳۳۰	۲-۱۴ گرانیگاه	۲۷۴	۱۲ دینامیک دورانی
۳۳۲	۳-۱۴ مثالهای از تعادل	۲۷۴	۱-۱۲ دینامیک دورانی: مرور کلی
۳۳۸	۴-۱۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثی اجسام صلب در میدان گرانشی	۲۷۵	۲-۱۲ انرژی جنبشی ناشی از دوران و لختی دورانی
۳۳۹	۵-۱۴ کشناسانی	۲۷۸	۳-۱۲ لختی دورانی اجسام صلب
۳۴۳	پرسشها	۲۸۱	۴-۱۲ گشتاور نیروی وارد بر یک ذره
۳۴۴	مسئله‌ها	۲۸۸	۵-۱۲ دینامیک دورانی جسم صلب
۳۵۳	پیوستها	۲۹۴	۶-۱۲ ترکیب حرکتهای دورانی و انتقالی
۳۵۴	پیوست الف سیستم بین‌المللی یکاها (SI)	۲۹۶	پرسشها
۳۵۶	پیوست ب بعضی ثابت‌های بنیادی فیزیک	۳۰۳	مسئله‌ها
۳۵۸	پیوست ج اطلاعات نجومی	۳۰۳	۱۳ تکانه زاویه‌ای
۳۶۰	پیوست د خواص عناصر	۳۰۵	۱-۱۳ تکانه زاویه‌ای ذره
۳۶۴	پیوست ه جدول تنایی عناصر	۳۰۷	۲-۱۳ سیستمهای ذرات
۳۶۵	پیوست و ذرات بنیادی	۳۱۱	۳-۱۳ تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای
۳۶۷	پیوست ز ضرایب تبدیل	۳۱۷	۴-۱۳ پایستگی تکانه زاویه‌ای
۳۷۱	پیوست ح فرمولهای ریاضی	۳۱۸	۵-۱۳ فرفره چرخان
۳۷۴	پیوست ط برنامه‌های کامپیوتری	۳۱۹	۶-۱۳ کواتش تکانه زاویه‌ای (اختیاری)
۳۷۸	پیوست ی برنگان جایزه نوبل	۳۲۲	۷-۱۳ مروری بر دینامیک دورانی
۳۸۵	پاسخ مسائل شماره فرد	۳۲۹	پرسشها
		۳۲۹	مسئله‌ها
			۱۴ شرایط تعادل
			۱-۱۴ شرایط تعادل

پیشگفتار

حرکت دورانی شبیه به ترتیب ارائه مطالب حرکت انتقالی شده است). فصلهای مربوط به ترمودینامیک را قدری جابه‌جا و بازنویسی اساسی کرده‌ایم، و ضمن تأکید بیشتر بر جنبه‌های آماری، رنگ و بوی جدیدی به موضوع داده‌ایم.

۴. در پاسخ به درخواستهای خوانندگان، چندین مبحث کلاسیکی جدید، از جمله تحلیل ابعادی، نیروی مقاومت شاره‌ها، کشسانی، کشش سطحی، چسبیندگی (ویسکوزیته)، و آکوستیک موسیقیایی را (به مطالب ویراست قبلی) اضافه کرده‌ایم.

۵. مفاهیم جدیدتر را هم در تمام کتاب پراکنده‌ایم؛ از جمله کواتشن ارزی و تکانه زاویه‌ای، واپاشی هسته‌ای و ذرات بنیادی، نظریه آشوب، نسبیت عام، و آمار کواتنومی. منظورمان از گنجاندن این مطالب، بررسی منسجم فیزیک جدید نبوده است (که مفاهیم آن را در ۸ فصل اضافی نسخه مفصل جلد دوم آورده‌ایم)، بلکه می‌خواسته‌ایم مرزهای فیزیک کلاسیک و ارتباط آن با فیزیک جدید را به دانشجو نشان بدھیم.

۶. مسئله‌های آخر فصل را افزایش چشمگیری داده‌ایم. در این ویراست ۱۵۱۹ مسئله آورده‌ایم که در مقایسه با ۹۵۸ مسئله در ویراست قبلی، یک افزایش ۵۹ درصدی است. تعداد پرسش‌های آخر فصل را هم از ۶۱۴ به ۸۲۱ رسانده‌ایم، یعنی ۳۴ درصد زیاد کرده‌ایم.

۷. تعداد مثالهای داخل متن را از ۱۳۵ در ویراست قبلی، به ۱۸۳ در ویراست فعلی رسانده‌ایم (۳۶ درصد)؛ در واقع افزایش از این هم بیشتر است، چون بعضی مثالهای ویراست قبلی به بهانه معرفی مبحث جدیدی بود، در حالی که در این ویراست همه مطالب جدید را فقط در متن آورده‌ایم و غرض از مثالها فقط تمرین کاربرد این مطالب است.

۸. روشهای کامپیوتری را، از طریق بعضی مثالها و تعدادی پروژه در آخر فصلها، معرفی کرده‌ایم. چند برنامه کامپیوتری هم به صورت پیوست در انتهای کتاب آورده‌ایم تا دانشجویان به کاربردهای دیگر این روشهای هم پردازند.

۹. تعداد مراجع متن را افزایش داده‌ایم و بسیاری از مقالات این مراجع را روزآمد کرده‌ایم. منظور از بعضی مقالات (که اغلب از مجلات عمومی مثل سایت‌فیک آمریکن انتخاب شده‌اند) فراهم کردن زمینه وسیعتری برای دانشجو از طریق مطالعه کاربردهای جالب مباحثت

اولین ویراست این کتاب با عنوان فیزیک برای دانشجویان علوم و مهندسی در سال ۱۹۶۰، و سومین ویراست آن با عنوان فیزیک در سال ۱۹۷۷ منتشر شد. کتابی که در دست دارد ویراست چهارم (۱۹۹۲) است که همکار جدیدی هم به مؤلفان قبلی آن اضافه شده است.

کتاب را روزآمد کرده‌ایم و ملاحظات مربوط به پیش‌رفتهای جدید فیزیک و آموزش فیزیک را در آن گنجانده‌ایم. برای تغییراتی که در این ویراست اعمال شده است، علاوه بر مطالعات خودمان در باره مباحث متعدد، از نظریات بسیاری از خوانندگان ویراستهای قبلی هم استفاده کرده‌ایم، و توصیه‌های داوران و مورکنندگان معهد کتاب را هم به کار گرفته‌ایم. تغییرات و اصلاحاتی که در این ویراست اعمال کرده‌ایم از این قرارند:

۱. ملاحظات مربوط به ارزی را، از قضیه کار و ارزی گرفته تا ترمودینامیک، در تمام کتاب یکدست کرده‌ایم. مثلاً کار را همیشه کاری گرفته‌ایم که روی سیستم انجام می‌شود، و در نتیجه، چه در مکانیک و چه در ترمودینامیک، برای کار از علامت قراردادی یکسانی استفاده کرده‌ایم. توجه به این قبیل جزئیات، به دانشجویان در فهم مفاهیم مشترکی که در زمینه‌های مختلف فیزیک ظاهر می‌شوند کمک می‌کند.

۲. نسبیت خاص را، که در ویراستهای قبلی به صورت یک مبحث تکمیلی آورده می‌شد، در خود متن گنجانده‌ایم. دو فصل را به نسبیت خاص اختصاص داده‌ایم: یکی را بعد از امواج مکانیکی و دیگری را بعد از امواج الکترومغناطیسی آورده‌ایم. مفاهیم مربوط به نسبیت خاص (از قبیل حرکت نسبی، چارچوب مرجع، تکانه، و ارزی) را در ضمن بسیاری از مباحث کتاب، در فصلهای سینماتیک، دینامیک، و الکترومغناطیس برسی کرده‌ایم. چنین رهیافتی را باید جزئی از فیزیک کلاسیک تلقی کرد. اما برای همراهی با مدرسانی که مایل‌اند نسبیت خاص را به پایان درس موقول کنند، مطالب مربوط به آن را در بخش‌های مشخصی از هر فصل آورده‌ایم تا بشود فعلًا از کنارشان گذشت.

۳. در مقایسه با ویراست سوم، فصلهای ۲ و ۳ را جایه‌جا کرده‌ایم و در نتیجه سینماتیک یک‌بعدی قبل از بردارها آمده است. تمام مطالب مربوط به تکانه زاویه‌ای را به فصل ۱۳ برده‌ایم (که بعد از سینماتیک دورانی و دینامیک دورانی می‌آید، و در نتیجه ترتیب ارائه مطالب

به هم بخورد. بسته به طرح درس و مدت کلاسها، می‌شود بخش‌های دیگری را هم حذف کرد یا حتی کل بعضی فصلها را به اختصار برگزار کرد. [در "راهنمای مدرس"، که جزء ضمایم متن اصلی این کتاب است، پیشنهادهایی برای انتخاب مباحث مناسبتر برای دوره‌های کوتاه‌تر آمده است]. در چنین مواردی البته باید دانشجویانِ کنجدکاو و علاقه‌مند را ترغیب کرد که خودشان مستقل‌باشند و فصلهای حذف شده را مطالعه کنند و معلوماتشان را گسترش بدهند. برای مدرسانی که می‌خواهند مطالب را به‌طور کامل — مثلاً به دانشجویانِ رشته فیزیک و دانشجویانِ ممتازِ رشته‌های دیگر علوم و مهندسی، یا به هر حال در دوره‌های سه‌ترمی — تدریس کنند، این کتاب به قدر کافی جامع و مفصل هست که تجربه خوبی برای دانشجویان باشد. امیدواریم که این کتاب "نقشه راههای" فیزیک باشد؛ می‌شود راههای مختلفی، مستقیم و غیر مستقیم، انتخاب کرد، و ضرورتی ندارد که در اولین سفر همه راهها را طی کنیم. مسافر مشتاق را می‌شود دوباره به نقشه احالة کرد تا در آن بگردد و راههایی را که در سفر قبلی اش طی نکرده است امتحان کند.

از همه همکاران و کسانی که در تهیه این کتاب به ما کمک کردند
صمیمانه سپاسگزاریم.

سپتامبر ۱۹۹۱

دیوید هالیدی

سیائل، واشنگتن

راپرت رزنیک

استیتو پلی‌تکنیک رسلر

کنت کرین

دانشگاه ایالتی اوهايو

مربوط است. در موارد دیگر، که معمولاً شامل موضوعاتی است که امیدواریم هم دانشجویان و هم مدرسان به اهمیت آموزشی آنها توجه کنند، به مقالاتی ارجاع داده‌ایم که از مجلاتی مانند آمریکن جورنال آو فیزیکس یا فیزیکس توڈی انتخاب شده‌اند.

۱۰. شکلهای کتاب عموماً از تو ترسیم شده‌اند و تعداد آنها در جلد اول تقریباً دو برابر شده و از ۴۶۳ به ۸۹۹ رسیده است. در مواردی یک رنگ دیگر هم به شکلهای اضافه کرده‌ایم تا واضح‌تر و برای آموزش مفیدتر باشند.

۱۱. بسیاری از استنتاجها، انباتها، واستدلالها را محکم‌تر کرده‌ایم، و هر جا که فرض یا تقریبی به کار گرفته باشیم آن را به وضوح اظهار کرده‌ایم. بنابراین، بی‌آنکه سطح کتاب را بالاتر برده باشیم، دقت و استحکام آن را بیشتر کرده‌ایم. نگران این بوده‌ایم که دانشجو قلمرو اعتبار هر استدلالی را بشناسد و می‌خواسته‌ایم او را ترغیب کنیم که چنین سوالاتی را در نظر بگیرد که: آیا این یا آن نتیجه خاص همیشه صدق می‌کند یا فقط گاهی صادق است؟ چه اتفاق می‌افتد وقتی به حد کوانتمی یا نسبیتی تزدیک می‌شویم؟

اگرچه سعی کرده‌ایم مطالبی را هم از ویراست قبلی حذف کنیم، اما اضافات ویراست جدید آنقدر زیاد بوده که در مجموع حجم کتاب را بیشتر کرده است. باید تأکید کنیم که کمتر مدرسی خواهد خواست یا خواهد توانست که به همه مطالب کتاب، از اول تا آخر، بپردازد. ما تلاش کرده‌ایم کتابِ کامل و دقیقی از کلیات فیزیک تدوین کنیم، اما مدرس می‌تواند برای هر چه پربار کردنِ زحماتش، به راههای متعددی عمل کند. مدرسی که می‌خواهد مباحث محدودتری را در نظر بگیرد اما عمیق‌تر به آنها بپردازد (این روشی است که اخیراً به آن "کمتری که بیشتر است" می‌گویند)، می‌تواند راه مناسبی از میان این راهها انتخاب کند. بعضی بخشها را صریحاً "اختیاری" اعلام کرده‌ایم (که با حروف کوچکتر جاپ شده‌اند)؛ منظورمان این بوده است که می‌شود این بخشها را کنار گذاشت بی‌آنکه پیوستگی مطالب کتاب

اندازه‌گیری

فیزیک، با آن همه زیبایی ریاضیاتی بعضی از پیچیده‌ترین و مجردترین نظریه‌هایش، نهایتاً یک علم تجربی است. بنابراین، کسانی که اندازه‌گیری‌های دقیق انجام می‌دهند باید استانداردهای مشترکی را بپذیرند تا بتوانند نتایج اندازه‌گیری‌هایشان را برحسب آنها بیان کنند. بهاین ترتیب، نتایج هر آزمایشگاه را می‌توان به آزمایشگاههای دیگر ارائه داد، و امکان تأیید این نتایج را فراهم کرد.

در این فصل بهمعرفی بعضی از یکاهای اصلی کمیتهای فیزیکی و استانداردهای پذیرفته شده برای سنجش آنها می‌پردازیم. روش درست بیان نتایج محاسبات و اندازه‌گیریها را از لحاظ مناسب بودن تعداد ارقام با معنی بررسی می‌کنیم و اهمیت توجه به ابعاد کمیتهای موجود در معادلات را نشان می‌دهیم. در فصلهای بعدی، هرجا لازم باشد، یکاهای اصلی دیگر و یکاهای مشتق از آنها را هم تعریف خواهیم کرد.

خیلی از کمیتهای پیچیده‌تر را می‌توان برحسب این کمیتهای پایه بیان کرد. مثلاً تا مدت‌ها دقت اندازه‌گیری طول و زمان از خیلی از کمیتهای فیزیکی دیگر بیشتر بود و این دو کمیت را عموماً برای تعیین استاندارد بدکار می‌بردند. دقت اندازه‌گیری سرعت کمتر بود، و بنابراین به عنوان کمیتی مشتق (زمان/طول = سرعت) در نظر گرفته می‌شد. اما امروزه دقت سنجش سرعت نور، بیش از دقت استاندارد پیشین طول است؛ البته هنوز هم طول را کمیتی بنیادی می‌دانیم، اما استاندارد آن را از استاندارد سرعت و زمان به دست می‌آوریم.

بهاین ترتیب، مسئله اساسی آن است که کمترین تعداد ممکن کمیتهای فیزیکی را به عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کنیم و استانداردهایی برای سنجش آنها تعریف کنیم. این استانداردها باید دست‌یافتنی و تغییرناپذیر باشند، که البته ممکن است تأمین هر دوی این ویژگیها با هم کارساده‌ای نباشد. مثلاً اگر قرار است استاندارد کیلوگرم، یک جسم تغییرناپذیر باشد، باید این جسم دور از دسترس باشد، یعنی در چنان اندیشه‌ای نگهداری شود که از دستکاری، یا مثلاً خوردگی، مصون بماند.

توافقهای مربوط به استانداردها، حاصل یک رشته مذاکرات بین‌المللی در "کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها" بوده است. این مجمع جهانی در سال ۱۹۶۸ (۱۲۶۹ شمسی) تأسیس شد و نوزدهمین دور مذاکرات آن در سال ۱۹۹۱ صورت گرفت. وقتی استانداردی پذیرفته شد، می‌توانیم آن را برای اندازه‌گیری در گستره

۱- کمیتهای فیزیکی، استانداردها، و یکاهای واحدهای ساختاری فیزیک، همین کمیتهای هستند که برای بیان قوانین این علم بدکار می‌روند: طول، جرم، زمان، نیرو، سرعت، چگالی، مقاومت ویژه، دما، شدت روشنایی، شدت میدان مغناطیسی، و بسیاری کمیتهای دیگر. خیلی از این واژه‌ها، مثل طول و نیرو، در شمار واژه‌های روزمره‌اند. مثلاً ممکن است گفته شود: "او در طول زندگی اش فشار زیادی را تحمل کرده است." اما، در فیزیک نباید گول معنی روزمره این واژه‌ها را خورد. تعریف علمی دقیق طول و فشار، هیچ ربطی به معنی این دو واژه در جمله بالا ندارد.

می‌توانیم، مثلاً طول جیزی را با یک کمیت جبری دلخواه مثل *L* مشخص کنیم، و فرض کنیم که این کمیت دقیقاً معین است. اما اگر بخواهیم یکایی به مقدار خاصی از این کمیت نسبت بدهیم، ناچاریم یک استاندارد تعیین کنیم. بهاین ترتیب، کسانی که بخواهند طولهای مختلف را با هم مقایسه کنند، یکایی یکسانی در اختیار خواهند داشت که طول را با آن می‌سنجند. زمانی یکای طول یارد بود، که از اندازه دور کم فرمانروا به دست می‌آمد. تصویر مشکلات ناشی از چنین استانداردی بسیار آسان است: این استاندارد برای همه کسانی که بخواهند استانداردهای ثانویه خودشان را با آن میزان کنند، به راحتی قابل وصول نیست، و دیگر اینکه با گذشت زمان، تغییرناپذیر هم نیست.

خوشبختانه لزومی به تعریف استاندارد برای همه کمیتهای فیزیکی نیست. تعیین استاندارد برای بعضی از کمیتهای پایه ساده‌تر است.

جدول ۱. یکاهای اصلی SI

نام	نام	کیت
s	ثانیه	زمان
m	متر	طول
kg	کیلوگرم	جرم
mol	مول	مقدار ماده
K	کلوین	دماهی ترمودینامیکی
A	آمپر	جریان الکتریکی
cd	کاندلا	شدت نور

جدول ۲. پیشوندهای *SI

نام	نام	ضریب	نام	نام	ضریب
d	دسی	10^{-1}	E	اگزا	10^{18}
c	سانتی	10^{-2}	P	پتا	10^{15}
m	میلی	10^{-3}	T	ترا	10^{12}
μ	میکرو	10^{-6}	G	گیگا	10^9
n	نانو	10^{-9}	M	مگا	10^6
p	پیکو	10^{-12}	k	کیلو	10^3
f	فتو	10^{-15}	h	هکتو	10^2
a	آتو	10^{-18}	da	دکا	10^1

* پیشوندهایی را که در این کتاب زیاد به کار می‌روند با حروف سیاه مشخص کردۀایم.

نوشت. پیشوندهای مربوط به ضریبهای بزرگتر از یک، ریشه یونانی دارند و پیشوندهای مربوط به ضریبهای کوچکتر از یک، ریشه لاتین (جز فمتو و آتو، که ریشه دانمارکی دارند).^{۲۱}

در تکمیل جدول ۱، باید هفت مجموعه دستورالعمل داشته باشیم تا بتوانیم یکاهای اصلی SI را در آزمایشگاه تولید کنیم. دستورالعملهای مربوط به زمان، طول، و جرم را در سه بخش بعدی شرح می‌دهیم.

در کتاب SI، دو سیستم مهم دیگر هم برای یکاهای داریم. یکی سیستم گاؤسی است که در خیلی از منابع فیزیک مورد استفاده است. این سیستم را در این کتاب به کار نخواهیم برد. ضرایب تبدیل یکاهای این سیستم به سیستم SI، در پیوست ز آمده است.

سیستم دیگر، سیستم بریتانیایی است، که هنوز هم در بعضی کشورها و از جمله در ایالات متحده امریکا کاربردهای روزمره دارد. کمیتها

۱. نگاه کنید به

Robert A. Nelson, "SI: The International System of Units", (American Association of Physics Teachers, 1981).

2. Le Système International d'Unités.

Ramin.samad@yahoo.com

وسيعی به کار بيريم؛ مثلاً از ثانية، يكاي زمان، برای اندازه‌گيری زمانهایي از طول عمر پروتون (بيش از 10^{30} ثانية) گرفته تا طول عمر ناپايدارترین ذره آزمایشگاهی (حدود 10^{-22} ثانية) استفاده می‌کنیم. وقتی می‌گوییم عمر پروتون، بر حسب یکای ثانية، منظورمان این است که نسبت این کیت به بازه زمانی ای که به عنوان ثانية استاندارد اختیار شده است، 10^{30} است. برای انجام چنین سنجشی، باید به نحوی بتوان سنجه‌های آزمایشگاهی را با استاندارد مقایسه کرد. خیلی از این مقایسه‌ها غیرمستقیم است: هیچ سنجه‌ای نمی‌تواند در گستره 40 مرتبه بزرگی دقیق باشد. با وجود این، برای پیشرفت علم ضروری است که اگر پژوهشگری یک بازه زمانی را با سنجه‌اش ثبت می‌کند، بتواند این مقدار را به نحوی به ثانية استاندارد مربوط کند. جستجو برای استانداردهای دقیق‌تر یا دستیافتنی‌تر به خودی خود یک مسئله مهم علمی است که فیزیکدانان و پژوهشگران دیگری در آزمایشگاههای سراسر جهان به آن می‌پردازن. در ایالات متحده امریکا، آزمایشگاههای " مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی " (که قبلًا دفتر ملی استانداردها نامیده می‌شد) وظيفة نگهداری، تولید، و آزمودن استانداردهای را که پژوهشگران علوم پایه و همچنین مهندسان و علم پیشگان در صنعت به کار می‌برند، به عهده دارد. بهبود استانداردها در سالهای اخیر، بسیار چشمگیر بوده است: دقت ثانية استاندارد، از زمان ویراست اول این کتاب (۱۹۶۰) تاکنون، بیش از 10^{50} برابر شده است.

۱-۲ سیستم بین‌المللی یکاهای کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، در طی مذاکرات سالهای ۱۹۵۴ تا ۱۹۷۱ هفت کیت را به عنوان کمیتی‌ای اصلی انتخاب کرده است. سیستم بین‌المللی یکاهای SI،^{۲۲} مبتنی بر همین کمیتی‌هاست، که فهرستی از آنها هم در جدول ۱ آمده است.

در این کتاب با سیاری از یکاهای فرعی SI — مثل یکای سرعت، نیرو، و مقاومت الکتریکی — سروکار خواهیم داشت. این یکاهای از یکاهای جدول ۱ مشتق می‌شوند. مثلاً یکای نیرو نیوتون (N) است. این یکا، بر حسب یکاهای اصلی SI، به صورت

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

تعريف می‌شود. (در فصل ۵ خواهیم دید که چرا.) اگر بخواهیم کمیتی‌ای مثل توان یک نیوتون، یا زمان بین دو رویداد هسته‌ای را بر حسب یکاهای SI بیان کنیم، با اعدادی بسیار بزرگ، یا بسیار کوچک، مواجه می‌شویم. برای ساده شدن بیان چنین کمیتی‌ها، کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها طی مذاکرات سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۵ خود توصیه کرد که از پیشوندهایی که در جدول ۲ آمده است استفاده شود. به این ترتیب، می‌توانیم توان خروجی یک نیوتون معمولی برق، $10^1 \times 10^3$ وات، را به صورت 10^4 گیگاوات یا 10^3 GW را بیان کنیم. همچنین، یک بازه زمانی معمول در فیزیک هسته‌ای، مثل $10^{-9} \times 235$ ثانية، را می‌شود به صورت 235 پیکوپاسکال

جدول ۳. مقادیر اندازه‌گیری شده چند بازه زمانی.*

بازه زمانی	ثانیه
طول عمر پروتون	$> 10^{30}$
نیمه عمر واپاشی بثای مضاعف ^{82}Se	2×10^{12}
سن جهان	5×10^{10}
سن هرم خنوپس	1×10^{11}
میانگین عمر انسان (در ایالات متحده امریکا)	2×10^9
دوره تناوب گردش زمین به دور خورشید (۱ سال)	3×10^7
دوره تناوب چرخش زمین حول محور خودش (۱ روز)	9×10^4
دوره تناوب گردش ماهواره کم ارتفاع نوعی به دور زمین	5×10^3
فاصله زمانی بین ضربانهای عادی قلب	8×10^{-1}
دوره تناوب دیابارون تولیدکننده نت لای (وسط)	2×10^{-2}
دوره تناوب نوسانهای میکروموج 3cm	1×10^{-10}
دوره تناوب نوعی چرخش‌های مولکولی	1×10^{-11}
کوتاهترین شب نوری تولیدشده (تا سال ۱۹۹۰)	6×10^{-15}
طول عمر نایاب‌ترین ذرات	$< 10^{-22}$

* مقادیر تقریبی‌اند.

قرنهای متمادی پدیده تکرارشونده چرخش زمین حول محور خودش، که مدت روز را تعیین می‌کند، به عنوان مقیاس زمان به کار می‌رفت. بعدها یک ثانیه (میانگین خورشیدی) برابر با $1/86400$ روز (میانگین خورشیدی) تعریف شد.

ساعتهای بلور کوارتز، که براساس ابقای الکتریکی ارتعاشات دوره‌ای بلور کوارتز کار می‌کنند، به عنوان استاندارد ثانویه زمان به کار می‌روند. ساعت کوارتز را می‌شود با استفاده از رصدۀای نجومی، بر حسب چرخش زمین مدرج کرد و برای سنجش زمان در آزمایشگاه به کار برد. خطای انباسته بهترین این ساعتها، در طول سال، حداقل $5\text{ }\mu\text{s}$ بوده است. اما حتی این دقت هم برای علوم و تکنولوژی جدید کافی نیست.^۱ برای دستیابی به استاندارد زمانی بهتر، ساعتهای اتمی در چندین کشور ساخته شده است. شکل ۱ چنین ساعتی را نشان می‌دهد. کار این ساعت، براساس بسامد مشخصه تابش میکروموجی است که از اتمهای عنصر سزیم گسیل می‌شود. این ساعت، که در مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی در ایالات متحده امریکا نگهداری می‌شود، مبنای تعیین زمان جهانی هماهنگ (UTC) در این کشور است.

شکل ۲ تغییرات دوره تناوب چرخشی زمین را نسبت به ساعت

۱. برای مطالعه تاریخچه زمان‌سنجی، نگاه کنید به

Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World, David S. Landes (Harvard University Press, 1983).

برای پیش‌رفتهای اخیر در سنجش دقیق زمان به "Precise Measurement of Time," Norman F. Ramsey, *American Scientist*, January–February 1988, p. 42.

برای توضیح سیستمهای مختلف ثبت زمان به "Time and the Amateur Astronomer," Alan M. MacRobert, *Sky and Telescope*, April 1989, p. 378.

و یکاهای اصلی مکانیک در این سیستم، طول (فوتو)، نیرو (پاوند)، و زمان (ثانیه)‌اند. ضریب تبدیل این یکاهای به یکاهای SI هم در پیوست ز آمده است. ما در این کتاب عموماً یکاهای SI را به کار بردیم (و در بعضی موارد به معادلهای بریتانیایی آنها هم اشاره کردیم). تنها در سه کشور (میانمار، لیبریا، و ایالات متحده امریکا) است که استانداردهای ملی اندازه‌گیری مبتنی بر سیستمی جز SI‌اند.

مثال ۱. هر کمیت فیزیکی را می‌شود در ۱ ضرب کرد (چون مقدارش را تغییر نمی‌دهد). مثلاً $60\text{s} = 60\text{s}/1\text{min} = 1\text{min}$ است، پس $60\text{s}/1\text{min} = 1$ است. با استفاده به همین ترتیب، $12\text{in} = 1\text{ft}/12\text{in} = 1$ است. با ضرایب تبدیل مناسب، (الف) سرعت 55 مایل بر ساعت را برحسب متر بر ثانیه، و (ب) حجم مخزنی را که $16\text{ گالن بنzin می‌گیرد}$ برحسب سانتی‌متر مکعب بدست بیاورید.

حل: (الف) برای ضرایب تبدیل، به روابط $(1\text{mi}=1609\text{m})$ و $(1\text{h}=3600\text{s})$ و $(1\text{mi}=1609\text{m})$ باید داریم (نگاه کنید به پیوست ز). به این ترتیب نیاز داریم (یعنی $1609\text{m}/1609\text{m}=1$)

$$\frac{1609\text{ m}}{1\text{ mi}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 25\text{ m/s}$$

(ب) یک گالن مایع 231 اینچ مکعب ، و 254 cm^3 است.

پس

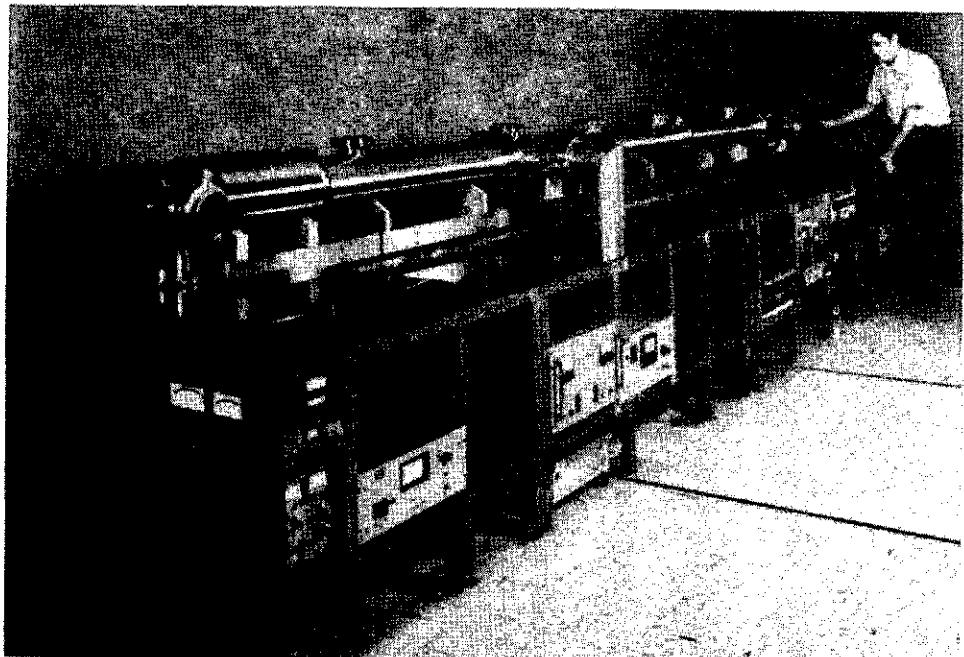
$$16\text{ gal} \times \frac{231\text{ in}^3}{1\text{ gal}} \times \left(\frac{254\text{ cm}}{1\text{ in}}\right)^2 = 1 \times 10^3\text{ cm}^3 = 1\text{ lit}\text{r}$$

توجه کنید که در این دو محاسبه، ضرایب تبدیل را چنان به کار بردیم که یکاهای ناخواسته در صورت یک کسر و مخرج کسر دیگر ظاهر شوند، و یکدیگر را حذف کنند.

۱-۳ استاندارد زمان^۱

سنجش زمان دو جنبه دارد. برای امور روزمره، و برای بعضی از مقاصد علمی، لازم است بدانیم چه وقت از روز است تا بتوانیم ترتیب وقایع را تعیین کنیم. در بسیاری از کارهای علمی، می‌خواهیم بدانیم که فلان رویداد چقدر طول می‌کشد (بازه زمانی قدر است). پس هر استاندارد زمانی باید بتواند به این دو پرسش پاسخ بدهد. "فلان رویداد در چه زمانی وقوع یافته؟" و "چقدر طول کشیده است؟" جدول ۳ گستره بازه‌های زمانی سنجش پذیر را نشان می‌دهد. نسبت حدود بالا و پایین این گستره از مرتبه 10^{62} است.

هر پدیده تکرارشونده‌ای را می‌شود به عنوان مقیاس زمان به کار برد. برای سنجش زمان با چنین پدیده‌ای، عده تکرارهای پدیده را (با اضافه کسری از یک دور در صورت لزوم) می‌شماریم. به این منظور می‌توانیم مثلاً از آونگ، سیستم جرم‌فنر، یا بلور کوارتز استفاده کنیم.

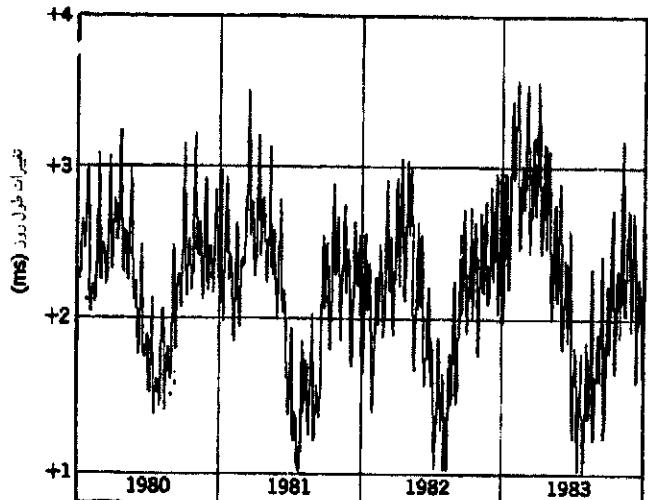


شکل ۱. استاندارد بسامد اتمی (سزیم) شماره ۶-NBS در مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی در بولدر کلرادو. این استاندارد اصلی یکای زمان در ایالات متحده امریکاست.

دو تا ساعت جدید سزیم، طی ۳۰۰۰۰۰ سال حداقل ممکن است ۱۸ با هم اختلاف پیدا کنند. ساعتها میز هیدروزن به دقت باور نکردنی ۱۸ در ۳۰۰۰۰۰۰ سال رسیده‌اند. ساعتها که مبتنی بر یک تک اتم محبوس باشند شاید بتوانند این دقت را به اندازه ۳ مرتبه بزرگی زیاد کنند. شکل ۳ پیشرفت چشمگیر زمان سنجی را طی حدود ۳۰۰ سال نشان می‌دهد. این تاریخچه، با ساعت آونگی آغاز می‌شود، که کریستین هویگنس آن را در سال ۱۶۵۶ اختراک کرد، و با ساعتها میز هیدروزن امروزی به پایان می‌رسد.

۱-۴ استاندارد طول^۲

اولین استاندارد بین‌المللی طول، میله‌ای از جنس آلیاژ پلاتین-ایریدیم، به نام متر استاندارد، بود که دراداره بین‌المللی اوزان و مقیاسها، در نزدیکی پاریس، نگهداری می‌شد. یک متر، طبق تعریف، برابر بود با فاصله بین دو شیار باریک که نزدیک دو انتهای میله حک شده بود؛ در شرایطی که میله در دمای صفر درجه کلاسیوس (سانتی‌گراد)، و در وضعیت مکانیکی معینی قرار داشت. به ملاحظات تاریخی، قرار بود این متر برابر با یک دهمیلیونیم فاصله قطب شمال تا استوا، روی نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، باشد. اما اندازه‌گیری دقیق‌نشان داد که طول میله متر استاندارد، کمی (در حدود ۲۳° درصد) با این مقدار تفاوت دارد. از آنجا که متر استاندارد، چندان در دسترس نیست، بدلهای



شکل ۲. تغییرات طول روز در یک دوره ۴ ساله. دقت کنید که مقیاس عمودی تنها $3 \text{ ms} = 0.0003 \text{ m}$ است.^۱

سزیم، در یک دوره ۴ ساله نشان می‌دهد. پس ببینید که دوره تناوب چرخش زمین، برای کار دقیق، چه استاندارد ضعیفی برای زمان است. تغییراتی را که در شکل ۲ می‌بینیم می‌شود به اثرهای کشنده [جزء و مدل] ماه، و تغییرات فصلی بادهای جو زمین نسبت داد.

در سیزدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۶۷، ثانیه ساعت سزیم به عنوان استاندارد جهانی زمان پذیرفته شد. تعریف ثانیه این است:

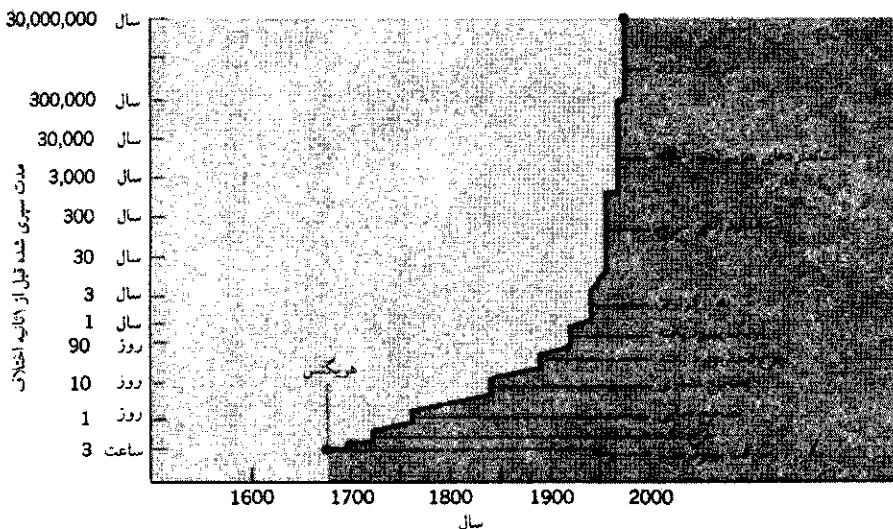
یک ثانیه برابر است با مدت ۹۱۹۶۳۱۷۷۰ ارتعاش تابشی (با طول موج خاص) که از اتم سزیم گسیل می‌شود.

۱. نگاه کنید به

"The Earth's Rotation Rate", John Wahr, *American Scientist* January-February 1985, p. 41.

۲. نگاه کنید به

"The New Definition of the Meter," P. Giacomo, *American Journal of Physics*, July 1984, p. 607.



شکل ۳. پیشرفت زمان‌سنجی در طی قرون. ساعتهای آونگی اولیه، در هر چند ساعت یک ثانیه جلو با عقب می‌افتدند؛ ساعتهای امروزی میزr هیدروژن، هر ۳۰۰۰۰۰۰ سال یک ثانیه اختلاف پیدا می‌کنند.

دیگری هم دارد. اتمهای ^{86}Kr همه‌جا پیدا می‌شوند، همسان‌اند، و نوری با طول موج بکسان گسیل می‌کنند، طول موج خاصی که انتخاب شده است، مشخصه انحصاری ^{86}Kr ، و بسیار تیز و مشخص است.

این ایزوتوب را می‌شود به‌آسانی در شکل خالص‌اش فراهم کرد. تا سال ۱۹۸۳، دقتهای مورد نیاز به‌حدی رسید که دیگر استاندارد ^{86}Kr هم نمی‌توانست پاسخگوی آن باشد. در این سال، گام متهو راهنمای برداشته شد. تعریف متر عوض شد؛ طبق تعریف جدید، متر فاصله‌ای است که نور در باره زمانی مشخصی می‌پیماید. بهبیان هفدهمین کنفرانس عمومی اوزان مقیاسها:

متر طول راهی است که نور در خلا در باره زمانی $1/299792458$ ثانیه می‌پیماید.

این معادل آن است که بگوییم سرعت نور، اکنون طبق تعریف برابر است با

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (\text{دقیقاً})$$

این تعریفِ جدید لازم بود، زیرا سنجش سرعت نور چنان دقیق شده بود که صریح تکرار پذیری تولید متر ^{86}Kr ، عاملی محدودکننده به حساب می‌آمد. بنابراین، معقول می‌نمود که سرعت نور را به عنوان کمیتی تعریف شده پذیریم و آن را، همراه با استاندارد دقیقاً تعریف شده زمان (ثانیه)، برای تعریف جدید متر بدکار ببریم.

جدول ۴، گستره طولهای مختلف را، بر حسب استاندارد متر، نشان می‌دهد.

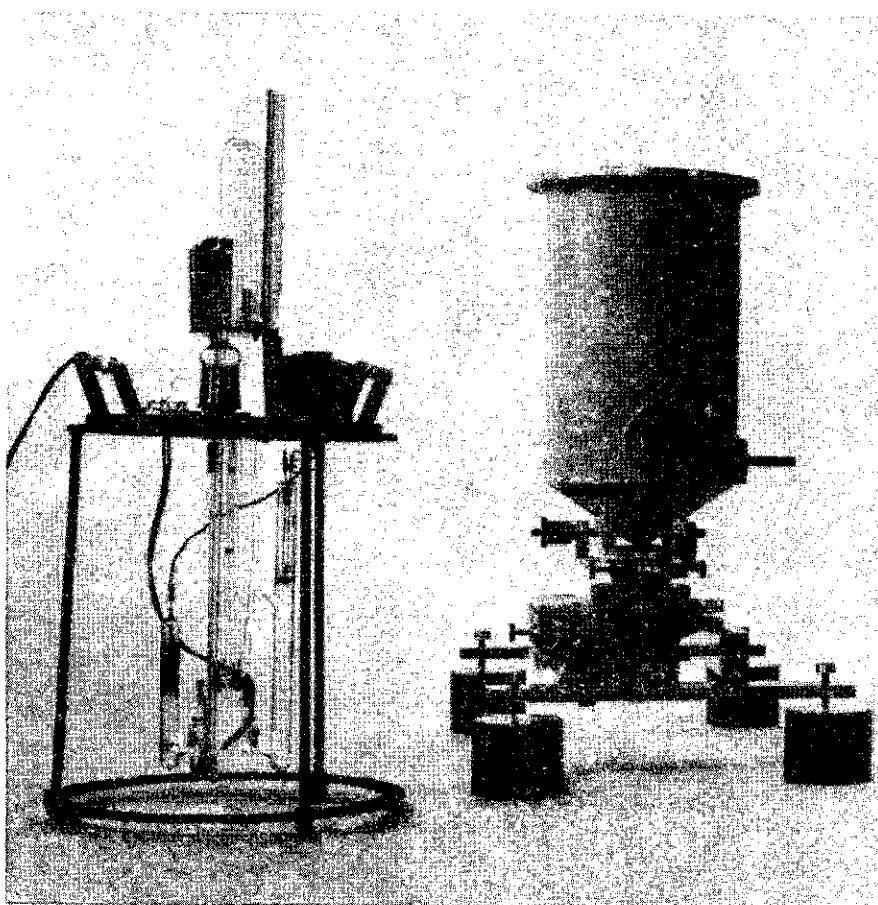
۱. شاخص 86 در ^{86}Kr ، عدد جرمی (عدد پرتوهایها به اضافه عدد پرتوهای هسته) این ایزوتوب کربیتون است. گاز کربیتون طبیعی، شامل ایزوتوبهای 82 ، 80 ، 78 ، 84 ، 83 و 86 است. طول موج تابش انتخاب شده در هر یک از این ایزوتوبهای، در حدود 1 در 10^5 با ایزوتوبهای دیگر متفاوت است. این اختلاف از دقت استاندارد، در حدود 1 در 10^9 ، خیلی بیشتر است. در مورد ساعت سزیم، این عنصر تنها یک ایزوتوب طبیعی دارد، که عدد جرمی آن 133 است.

دقیقی از روی آن ساخته شد و به عنوان نمونه‌های اصلی در اختیار مؤسسه‌ات و آزمایشگاه‌های استانداردها در سراسر دنیا قرار گرفت. از این استانداردهای ثانویه، برای مدرج کردن میله‌های سنجش، که از استانداردهای ثانویه هم قابل وصولتر بودند، استفاده می‌شد. بنابراین، تا همین اواخر، مأخذ همه وسائل و میله‌های سنجش طول — که طی مقایسه‌های پیچیده‌ای به‌کمک میکروسکوپ و ابزارهای تقسیم‌کننده تولید می‌شدند — متر استاندارد بود.

دقت فرایندهای مقایسه خراشهای روی میله به وسیله میکروسکوپ، دیگر برای تکنولوژی و علوم جدید کافی نیست. در سال ۱۸۹۳، آلبرت مایکلسون، فیزیکدان امریکایی، متر استاندارد را با طول موج نور سرخی که از اتم کادمیم گسیل می‌شود مقایسه کرد و به این وسیله استانداردی دقیق‌تر و قابل وصولتر به دست آورد. مایکلسون طول میله متر را به دقت اندازه گرفت و دریافت که متر استاندارد، 1553163.5 برابر این طول موج است. در هر آزمایشگاهی، به راحتی می‌شد لامپ کادمیم مشابهی تهیه کرد. به این ترتیب، مایکلسون روشی یافت که دانشمندان سراسر جهان می‌توانستند با آن استاندارد دقیقی از طول داشته باشند، بی‌آنکه به میله متر استاندارد رجوع کنند.

با وجود این پیشرفت تکنولوژیکی، میله فلزی تا سال ۱۹۶۰ همچنان استاندارد رسمی طول بود، تا آنکه در این سال، در یاردهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، یک استاندارد اتمی برای متر پذیرفته شد. این استاندارد، عبارت است از طول موج (در خلا) نور سرخ-نارنجی معینی که از یک ایزوتوب خاص کربیتون^۱، 1 در ^{86}Kr ، در شرایط تخلیه الکتریکی گسیل می‌شود (شکل ۴). به طور مشخص، یک متر برابر با 1650763.73 طول موج این نور تعریف شد. با فراهم شدن امکان اندازه‌گیری طولهایی به اندازه کسری از طول موج، دانشمندان با این استاندارد جدید می‌توانستند طولها را با خطای کمتر از 1 در 1 با هم مقایسه کنند.

انتخاب استاندارد اتمی، علاوه بر افزایش دقت سنجش طول، مزایای



شکل ۴. یک لامپ کربیتون در آزمایشگاههای ملی فیزیک، تدینگتون، انگلستان. لوله شیشه‌ای در سیستم طرف چپ، حاوی گاز Kr^{86} است. این گاز، در اثر تحریک با جریان الکتریکی، نور گسیل می‌کند. لامپ را در زمانی طرف راست می‌گذارند تا آن را در دمای نیتروژن مایع ($-210^{\circ}C$) نگه دارد. نور از سوراخ کوچک زمزا مشاهده می‌شود.

از ما ($10^{16} m \times 10^{\circ} R^4$) چند سال نوری است.
حل: ضریب تبدیل سال به ثانیه عبارت است از

$$1 y = 1 y \times \frac{265,250 d}{1 y} \times \frac{24 h}{1 d} \times \frac{60 \text{ min}}{1 h} \times \frac{60 s}{1 \text{ min}} \\ = 3,16 \times 10^7 s$$

سرعت نور، تا سه رقم با معنی $10^8 m/s \times 10^0 R^3$ است. بنابراین، نور در یک سال، مسافت

$$(3,16 \times 10^7 s) (3,00 \times 10^8 m/s) = 9,48 \times 10^{15} m$$

را می‌پیماید. پس

$$9,48 \times 10^{15} m = 1 \text{ سال نوری}$$

فاصله پروکسیماقطرس از ما برابر است با

$$\text{سال نوری} = \frac{1 \text{ سال نوری}}{9,48 \times 10^{15} m} = 10^{16} m \times 10^{\circ} R^4$$

نزدیکترین ستاره از زمین در فاصله ۲ ر^۴ سال نوری قرار دارد.

جدول ۴. مقادیر اندازه‌گیری شده بعضی طولها*

طول	متر
فاصله دورترین اختروش رصد شده	2×10^{26}
فاصله کهکشان امرأة‌السلسله از ما	2×10^{22}
شعاع کهکشان ما	6×10^{19}
فاصله نزدیکترین ستاره از ما (پروکسیماقطرس)	4×10^{16}
شعاع میانگین مدار دورترین سیاره (بلوتون)	6×10^{12}
شعاع خورشید	7×10^8
شعاع زمین	6×10^6
ارتفاع قله اورست	9×10^3
قد یک آدم معمولی	2×10^0
ضخامت هر صفحه این کتاب	1×10^{-2}
اندازه یک ویروس معمولی	1×10^{-6}
شعاع اتم هیدروژن	5×10^{-11}
شعاع مؤثر پروتون	1×10^{-10}

* مقادیر تقریبی‌اند.

مثال ۲. سال نوری که یک مقیاس طول است (نه مقیاس زمان) برابر با مسافتی است که نور در یک سال می‌پیماید. ضریب تبدیل سال نوری به متر را حساب کنید، و تعیین کنید که فاصله ستاره کسی‌لان‌پل

جدول ۵. مقادیر اندازه‌گیری شده بعضی از جرمها*.

کیلوگرم	جسام
1×10^{-21}	عال شناخته شده (تخمين)
2×10^{-20}	کوهکشان ما
2×10^{-19}	خورشید
6×10^{-18}	زمین
7×10^{-17}	ماه
7×10^{-16}	کشتی اقیانوس پیما
4×10^{-15}	فیل
6×10^{-14}	انسان
3×10^{-13}	دانه انگور
7×10^{-12}	ذره غبار
1×10^{-11}	ویروس
5×10^{-10}	مولکول پنی سیلین
4×10^{-9}	اتم اورانیم
2×10^{-8}	بروتون
9×10^{-7}	الکترون
* مقادیر تقریبی اند.	

جدول ۶. نتایج اندازه‌گیری جرم چند اتم.

خطا (u)	جرم (u)	ایزوتوپ
1×10^{-20} ر	1×10^{-20} ر	^{1}H
(دقیق)	12×10^{-20} ر	^{12}C
17×10^{-20} ر	63×10^{-20} ر	^{63}Cu
12×10^{-20} ر	10×10^{-20} ر	^{102}Ag
6×10^{-20} ر	136×10^{-20} ر	^{136}Cs
7×10^{-20} ر	189×10^{-20} ر	^{190}Pt
24×10^{-20} ر	238×10^{-20} ر	^{238}Pu

در مقیاس اتمی، استاندارد دیگری برای جرم وجود دارد که جزو یکاهای SI نیست. این استاندارد، جرم اتم ^{12}C است که، طبق توافق بین‌المللی، دقیقاً برابر با ۱۲ یکای جرم اتمی (u) تعريف می‌شود. جرم اتمهای دیگر را می‌توان، به‌کمک طیفسنجن جرمی، با دقت خوبی تعیین کرد (شکل ۶؛ و پخشش ۲-۳۴). جدول ۶ جرم چند اتم را، همراه با برآورد خطاهای سنجش آنها، نشان می‌دهد. علت نیاز به چنین استانداردی برای جرم آن است که، به‌لطف روش‌های آزمایشگاهی امروزی، دقت مقایسه جرم اتمهای مختلف می‌تواند بیش از آنی باشد که با کیلوگرم استاندارد امکان دارد. به‌حال در جانشین کردن یک استاندارد اتمی جرم به‌جای استاندارد کیلوگرم پیشرفته‌ای حاصل شده است. رابطهٔ تقریبی استاندارد اتمی فعلی و استاندارد اصلی چنین است

$$1 u = 10^{-22} kg$$

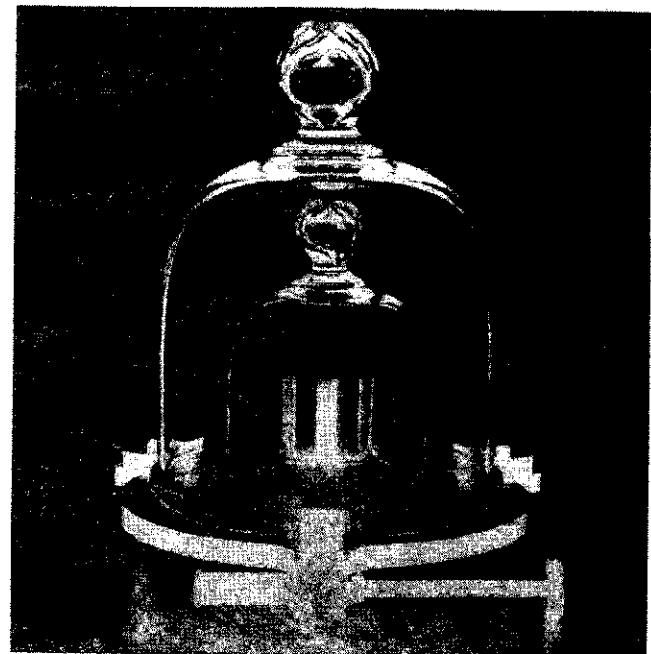
یکای دیگری در SI که به یکای بالا مربوط می‌شود مول است.

۱-۵ استاندارد جرم

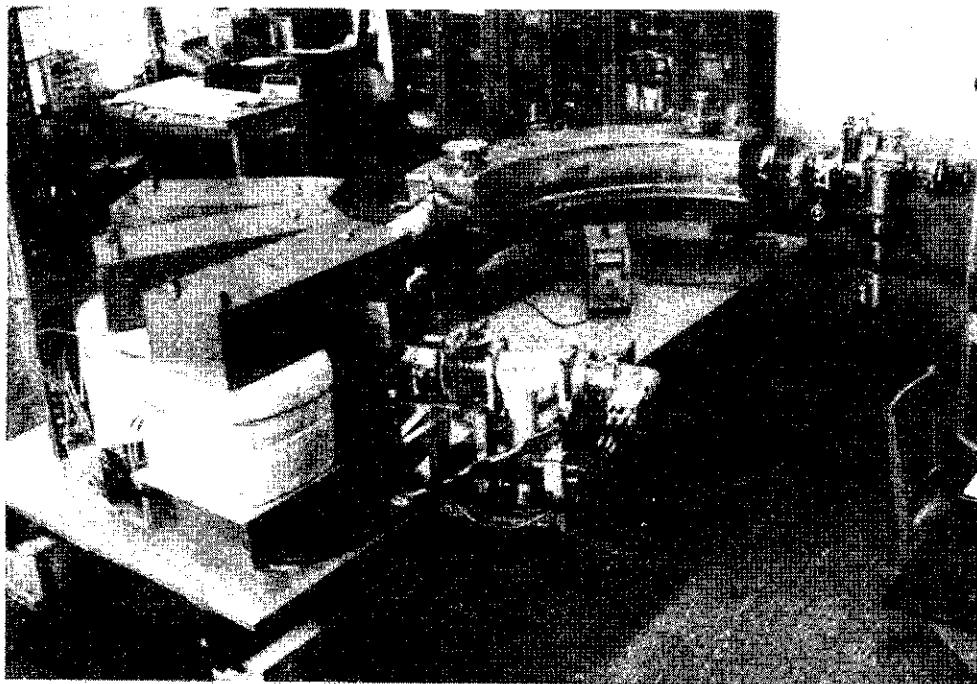
استاندارد SI جرم، استوانه‌ای از جنس پلاتین-ایریدیم است که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقایسها نگهداری می‌شود، و بنابر توافق بین‌المللی، جرم آن ۱ کیلوگرم تعیین شده است. استانداردهای ثانوی برای مؤسسات استاندارد به همهٔ کشورهای جهان فرستاده می‌شوند. جرم اجسام دیگر را می‌توان، با استفاده از ترازووهای دوکفه‌ای با بازووهای یکسان، با دقت 1×10^{-8} تعیین کرد.

نسخهٔ بدلی از استاندارد بین‌المللی جرم، به نام کیلوگرم سرنومنه شماره ۲۰، در ایالات متحدهٔ امریکا در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی، زیر یک سرپوش، نگهداری می‌شود (شکل ۵). این استاندارد را، حداقل سالی یکبار، برای کنترل مقادیر استانداردهای سوم از زیر سرپوشها بیرون می‌آورند. سرنومنه شماره ۲۰ را از سال ۱۸۸۹ تاکنون دوباره فرانسه برده‌اند و با کیلوگرم اصلی مجدد مقایسه کرده‌اند. هنگامی‌که این جسم را از زیر سرپوش خارج می‌کنند، همیشه دو نفر حضور دارند: یکی کیلوگرم را با پنس نگه می‌دارد، و دومی مراقب است که اگر کیلوگرم از دست اوی افتاد آن را بگیرد.

جدول ۵ اندازه‌های چند جرم را نشان می‌دهد. توجه کنید که حدود گسترهٔ این جرمها تا 10^{-23} مرتبهٔ بزرگی با هم اختلاف دارند. بیشتر این جرمها را به‌طور غیرمستقیم با کیلوگرم استاندارد مقایسه کرده‌اند. برای تعیین جرم زمین می‌توان نیروی جاذبهٔ گرانشی بین دو کرهٔ سربی را در آزمایشگاه، سنجید و آن را با جاذبهٔ زمین می‌سنجیم. مثلاً کرد (بخش ۳-۱۶). جرم کره‌ها را باید با مقایسهٔ مستقیم با استاندارد کیلوگرم به‌دست آورد.



شکل ۵. استاندارد ملی سرنومنه کیلوگرم شماره ۲۰، زیر سرپوش دوگانه‌اش در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی ایالات متحدهٔ امریکا.



شکل ۶. یک طیفسنج جرم با قدرت تفکیک زیاد در دانشگاه مانیتووبا در کانادا. از چنین ابزارهایی برای تعیین دقیق جرم اتمها، مانند آنهایی که در جدول ۶ آمده است، استفاده می‌شود.

که برای سنجش مقدار ماده بیکار می‌رود. یک مول اتم ^{12}C ، مقدار ماده‌ای است که دقیقاً ۱۲ گرم جرم دارد و تعداد اتمهای آن برابر با ثابت آووگادرو، N_A ، است

$$\text{ذره بر مول} = 6 \times 10^{23} \times 221367$$

این عدد با آزمایش به دست می‌آید و خطای آن در حدود یک در میلیون است. یک مول از هر ماده‌ای شامل همین تعداد جزء بنیادی (atom، مولکول، یا هر چیز دیگر) از آن ماده است. پس ۱ مول گاز هلیم N_A اتم He دارد، ۱ مول اکسیژن شامل N_A مولکول O_2 است، و ۱ مول آب N_A مولکول H_2O دارد.

برای ارتباط دادن یکاهای اتمی جرم به یکاهای بزرگ، باید از ثابت آووگادرو استفاده کرد. جانشینی کردن استاندارد کیلوگرم با استانداردهای اتمی مستلزم آن خواهد بود که دقت سنجش مقدار N_A ، حداقل دو مرتبه بزرگی بیشتر شود تا بتوان جرم اجسام را با دقت 1×10^{-8} در تعیین کرد.

قاعده ۱. از چپ شروع کنید و بدون در نظر گرفتن صفرهای سمت چپ عدد، تعداد رقها را تا نخستین رقم مشکوک بشمارید. به این ترتیب $x = 3m$ = ۳ نیز تعداد رقمهای بامعنى را تغییر نمی‌دهد. اما اگر $x = 3m$ = ۳۰۰۰ km بتویسیم $x = 3m$ = ۳۰ km (یا $x = 3m$ = ۳۰۰ cm)، که همان است، معنی اش این است که مقدار x را تا دو رقم بامعنى می‌دانیم. به ویژه باید داشته باشید که، اگر دقت داده‌های اولیه به شما اجازه نمی‌دهد، نباید همه ۹ یا 10 رقمی را که روی صفحه ماشین حسابات ظاهر می‌شود در نتیجه بتویسید! بیشتر محاسباتی که ما در این کتاب انجام می‌دهیم تا دو یا سه رقم بامعنى است.

مراقب نمادگذاریهای میهم باشید: معلوم نیست که $m = 300\text{ m}$ یک رقم بامعنى، دورقم بامعنى، یا سه رقم بامعنى دارد؛ نیز توان گفت که صفرهای این عبارت، اطلاعاتی در بردارند یا صرفاً برای مشخص کردن مرتبه رقم 3 اند. در این مورد برای روشترکردن وضعیت رقمهای بامعنى، باید بتویسیم $x = 3 \times 10^2$ یا $x = 3 \times 10^3$ یا $x = 3 \times 10^0$ یا $x = 3 \times 10^{-1}$ را.

قاعده ۲. هنگام ضرب و تقسیم، تعداد رقمهایی که در نتیجه نگه

۱-۶ دقت و رقمهای بامعنى
با بهتر شدن کیفیت سنجه‌ها و پیچیده تر شدن روش‌های سنجش، می‌توان دقت آزمایشها را مدام بالا برد؛ یعنی می‌توان نتایجی با رقمهای بامعنى بیشتر به دست آورد و خطای اندازه‌گیری را کم کرد. هم تعداد رقمهای بامعنى، و هم خطای شناههای حاکی از براورده مازدقت نتیجه‌اند. یعنی $x = 3m$ = ۳ اطلاعات کمتری از $x = 3m$ = ۳۰۰۰ در بردارد. وقتی اظهار می‌کنیم $x = 3m$ = ۳۰۰۰ است، منظورمان این است که تا حد معقولی مطمئنیم که x بین $2m$ و $4m$ است. اما زمانی که می‌گوییم $x = 3m$ = ۳۰۰۰، منظور این است که x احتسالاً بین $2m$ و $4m$ است.

خطای مطلق سنجش وزن شخص و گر به یکسان است (۱lb)، اما خطای نسبی سنجش وزن شخص، یک مرتبه بزرگی از خطای نسبی سنجش وزن گر به کمتر است. اگر با این روش بخواهید یک چه گربه یک پاوندی را وزن کنید، خطای نسبی سنجش 100% می‌شود. این نشان می‌دهد که تفیریق دو عدد نزدیک بهم چه خطری دارد: خطای نسبی حاصل تفیریق می‌تواند بسیار بزرگ باشد.

می‌دارید باید بیشتر از تعداد رقمهای بامعنى عددی باشد که کمترین دقت را دارد. پس

$$2 \times 3,14159 = 7,2$$

گاهی لازم است که این قاعده را با دقت بیشتری بهکار ببریم. مثلاً

$$1 \times 10^3 = 1,000$$

زیرا اگرچه $9,8$ به لحاظ فنی تنها دو رقم بامعنى دارد، اما خیلی نزدیک به عددی با سه رقم بامعنى است. بنابراین، حاصل ضرب را باید با سه رقم بامعنى بیان کرد.

قاعده ۳. هنگام جمع و تفیریق، کم معنی ترین رقمهای حاصل در همان جای (نسبی) ظاهر می‌شوند که در اعداد اولیه بوده‌اند. در این موارد آنچه اهمیت دارد تعداد رقمهای بامعنى نیست، بلکه جای قرارگرفتن آنهاست. مثلاً

10^3	kg
2×10^3	kg
3×10^3	kg
10^6	kg

کم اهمیت‌ترین رقم، یا نخستین رقم مشکوک، را با حرف سیاه نشان داده‌ایم. طبق قاعده ۱، باید فقط یک رقم مشکوک داشته باشیم. پس نتیجه را باید به صورت 10^6 kg بیان کنیم، زیرا اگر 10^3 kg مشکوک باشد، "۱۹" ای که بعد از آن آمده است اطلاعاتی دربرناردد و بی فایده است.

مثال ۳. شخصی می‌خواهد یک گر به خانگی را وزن کند. تنها وسیله‌ای که در اختیار دارد یک ترازوی معمولی خانگی است. این ترازو رقمهی است و نتیجه را به شکل عددی صحیح، برحسب پاوند، بیان می‌کند. بنابراین، شخص ابتدا خودش را وزن می‌کند: 119 پاوند. سپس گر به را بغل می‌گیرد و وزن مجموع خودش و گر به را تعیین می‌کند: 128 پاوند. خطای نسبی یا درصد خطای اندازه‌گیری وزن شخص و وزن گر به چقدر است؟ حل: کم معنی ترین رقم، رقم یکان است. بنابراین، خطای سنجش وزن شخص، در حدود یک پاوند است؛ یعنی ترازو همه مقادیر بین 118 lb و 120 lb را 119 lb نشان می‌دهد. بنابراین، خطای نسبی برابر است با

$$\frac{1}{119} \text{ lb} = 0,008 \text{ lb}$$

وزن گر به $1 \text{ lb} = 119 \text{ lb} - 128 \text{ lb} = 9 \text{ lb}$ است. اما خطای سنجش وزن گر به هم حدود 11 lb است. پس خطای نسبی در این مورد برابر است با

$$\frac{1}{9} \text{ lb} = 11 \text{ lb}$$

مثال ۴. برای اینکه جسمی را واداریم که با سرعت ثابت روی دائیه حرکت کند، به نیرویی به نام "نیروی مرکزگرای" نیاز داریم. (حرکت دائیه‌ای در فصل ۴ بررسی می‌شود). نیروی مرکزگرای را تحلیل ابعادی کنید.

حل: اول از خودمان می‌رسیم که "نیروی مرکزگرای" F ، به چند متغیرهای دینامیکی‌ای می‌تواند بستگی داشته باشد؟ این جسم

فرض می‌کنیم بستگی زمان پلانک به این ثابت‌ها به صورت زیر باشد

$$t_p \propto c^i G^j h^k$$

باید نمایهای i , j , و k را بیندازیم، معادله ابعادی رابطه بالا عبارت است از

$$[t_p] = [c^i][G^j][h^k]$$

$$\begin{aligned} T &= (LT^{-1})^i (L^r T^{-r} M^{-1})^j (ML^r T^{-1})^k \\ &= L^{i+rj+rk} T^{-i-rj-k} M^{-j+k} \end{aligned}$$

نمایهای دو طرف را برابر می‌گذاریم، نتیجه می‌شود که

$$i = i + 3j + 2k \quad : \text{نمای L}$$

$$1 = -i - 2j - k \quad : \text{نمای T}$$

$$0 = -j + k \quad : \text{نمای M}$$

این سه معادله را حل می‌کنیم و سه مجهول را به دست می‌آوریم

$$i = -\frac{5}{2}, \quad j = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} t_p &\propto c^{-5/2} G^{1/2} h^{1/2} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} \\ &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg})(6.67 \times 10^{-33} \text{kg m}^3/\text{s})}{(3 \times 10^8 \text{m/s})^5}} \\ &= 1.35 \times 10^{-33} \text{s} \end{aligned}$$

ثابت پلانک، طبق تعریف معمول، با یک ضریب $(2\pi)^{-1/2}$ (با عبارت بالا فرق می‌کند). چنین ضرایب بی‌بعدی را نمی‌توان با تحلیل ابعادی بدست آورد.

به همین ترتیب، می‌توانیم طول پلانک و جرم پلانک را هم به دست بیاوریم (مسائل ۴۱ و ۴۲). این کمیتها هم تعبیرهای بنیادی دارند.

پرسشها

۱. این گفته را نقد کنید: "یک استاندارد، یکباره‌که انتخاب شد، به صرف "استاندارد" بودنش، تغییرناپذیر است".

۲. به نظر شما یک استاندارد، به جز دسترس پذیری و تغییرناپذیری، چه خواص مطلوب دیگری باید داشته باشد؟

۳. آیا می‌توانیم سیستمی از یکاهای پایه (جدول ۱) داشته باشیم که

زمان جزء آن نباشد؟

Ramin.samad@yahoo.com

محرك تنها سه‌ویژگی دارد که می‌توانند مهم باشند: جرم m , سرعت v , و شعاع مسیر دایره‌ای r . بنابراین، نیروی مرکزگرای F , صرفنظر از ثابت‌های بی‌بعد، باید از چنین معادله‌ای به دست بیاید:

$$F \propto m^a v^b r^c$$

که در آن، \propto یعنی "متاسب است با"، و a , b و c نمایهای عددی اند که باید از تحلیل ابعادی به دست بیایند. چنانکه در بخش ۲-۱ گفتیم (و در فصل ۵ خواهیم دید)، یکای نیرو kg m/s^2 است، یعنی بعد آن $[F] = MLT^{-2}$ است. پس معادله ابعادی نیروی مرکزگرا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$[F] = [m^a][v^b][r^c]$$

$$MLT^{-2} = M^a(L/T)^b L^c$$

$$= M^a L^{b+c} T^{-b}$$

سازگاری ابعادی مستلزم آن است که ابعاد بنیادی دو طرف معادله یکسان باشد. پس نمایها را در دو طرف برابر می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$\text{نمای M} : a = 1$$

$$\text{نمای T} : b = 2$$

$$\text{نمای L} : c = -1 \quad \text{و از آنجا} \quad b + c = 1$$

بنابراین

$$F \propto \frac{mv^2}{r}$$

رابطه واقعی نیروی مرکزگرا، که از قوانین نیوتون و هندسه حرکت دایره‌ای به دست می‌آید، $F = mv^2/r$ است. می‌بینیم که تحلیل ابعادی، بستگی دقیق این نیرو با متغیرهای مکانیکی را به ما داده است! اما همیشه هم نتیجه به‌این خوبی نیست، چون تحلیل ابعادی چیزی در مورد ثابت‌های بی‌بعد نمی‌گوید، در این مورد خاص، ثابت موردنظر ۱ بوده است.

مثال ۵. یکی از مراحل مهم تحول جهان، بلاfaciale پس از مهبانگ، زمان پلانک t_p است. مقدار این کمیت به سه ثابت بنیادی بستگی دارد: (۱) سرعت نور (ثابت بنیادی نسبیت)، $c = 10^8 \text{m/s}$; (۲) ثابت گرانش نیوتون (ثابت بنیادی گرانش)، $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; و (۳) ثابت پلانک (\hbar ، ثابت بنیادی مکانیک کوانتومی)، $\hbar = 6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$. مقدار زمان پلانک را، با استفاده از تحلیل ابعادی، به دست بیاورید. حل: با توجه به یکاهای این سه کمیت، ابعاد آنها را می‌نویسیم

$$[c] = [\text{m/s}] = LT^{-1}$$

$$[G] = [\text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg}] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$[\hbar] = [\text{kg m}^2/\text{s}] = ML^2 T^{-1}$$

۱۸. چرا شرکت‌کنندگان در کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۸۳، سرعت نور را دقیقاً برابر با 10^8 m/s تعریف نکردند؟ آیا این انتخاب، کار را ساده‌تر نمی‌کرد؟ چرا سرعت نور را دقیقاً 1 m/s اختیار نکردند؟ آیا امکان هر دو انتخاب بالا برای آنها وجود داشت؟ اگر داشت، چرا هر دو را کنار گذاشتند؟

۱۹. روشی برای سنجش (الف) شعاع کره زمین، (ب) فاصله میان خورشید و زمین، و (ج) شعاع خورشید، پیشنهاد کنید.

۲۰. روشی برای سنجش (الف) ضخامت یک صفحه کاغذ، (ب) ضخامت یک حباب صابون، و (ج) قطر آتم، پیشنهاد کنید.

۲۱. اگر کسی بگوید که ابعاد همه اجسام، یک شبه نصف شده است، چگونه می‌توان ادعای او را رد کرد؟

۲۲. آیا استاندارد فعلی کیلوگرم برای جرم، قابل حصول، تعییر ناپذیر، قابل بازسازی، و تخریب ناپذیر هست؟ آیا مقایسه جرم‌های مختلف با آن ساده است؟ آیا استانداردهای اتمی، از هر نظر بهتر نیستند؟ چرا برای جرم هم، مثل طول و زمان، استاندارد اتمی اختیار نمی‌کنیم؟

۲۳. چرا داشتن دو استاندارد جرم، یکی کیلوگرم و یکی جرم آتم ${}^{12}\text{C}$ ، مفید است؟

۲۴. رابطه میان جرم کیلوگرم استاندارد و جرم آتم ${}^{12}\text{C}$ چگونه به دست می‌آید؟

۲۵. برای تعیین جرم اجسام جدول ۵، روشهایی عملی پیشنهاد کنید.

۲۶. اجمامی پیشنهاد کنید که جرم آنها در گستره وسیع بین جرم کشتی آقianoس پیما و جرم ما (جدول ۵) واقع باشد و این جرمها را تخمین بزنید.

۲۷. مخالفان سیستم متريک (در کشورهایی که این سیستم را نپذيرفته‌اند) اغلب سفسطه می‌کنند که، مثلاً "به جای اينکه ۱lb کره بخرید، باید 454kg کره بخرید." منظورشان اين است که زندگی مشکلتر می‌شود. اين نوع استدلالها را چگونه باید رد کرد؟

مسئله‌ها

بخش ۲-۱ سیستم بین‌المللی یکاهای

۱. با استفاده از پیشوندهای جدول ۲، این عبارتها را بیان کنید.

(الف) 10^6 فون؛ (ب) 10^{-6} فون؛ (ج) کارت؛ (د) 10^9 لو؛

(ه) 10^{12} ورس؛ (و) 10^{-1} مال؛ (ز) 10^{-2} مانتال؛ (ح) 10^{-9} مسکن؛

(ط) 10^{-12} لو؛ (ی) 10^{-18} ماتیک؛ (ک) $10^2 \times 2$ مرغ. خودتان هم عبارتهای مشابهی بسازید!

۲. بعضی از پیشوندهای یکاهای SI، وارد زندگی روزمره هم شده‌اند.

(الف) حقوق سالانه 36K (یعنی $\$36\text{k}$) معادل هفته‌ای چقدر است؟ (ب) جایزة بزرگ یک بخت‌آزمایی، 10 مگا‌دollar است که طی

۱. رجوع کنید به صفحه ۶۱ کتاب

A Random Walk in Science, compiled, R. L. Weber; Crane, Russak & Co., New York, 1974.

۴. از هفت یکای پایه جدول ۱، تنها یکی — کیلوگرم — پیشوند دارد (جدول ۲). آیا معمولتر نیست که جرم استوانه پلاستین-ایریدیم (در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها) را، به جای 1kg برابر با 1g تعریف کنند؟

۵. پیشوند "میکرو" در عبارت "اجاق میکروموج" نشانه چیست؟ پیشنهاد شده است که به موادغذایی که با تابش پرتو گاما قابلیت نگهداری آن را زیاد کرده‌ایم، "پیکوموجیده" بگوییم. فکر می‌کنید معنی این اصطلاح چیست؟

۶. خلی از پژوهشگران، براساس شواهدی، معتقدند که ادراکات فراحسی واقعیت دارند. با فرض اینکه چنین پدیده‌ای واقعاً در طبیعت وجود داشته باشد، برای توصیف کمی آن دنبال کدام کمیت یا کمیتهای فیزیکی باید گشته؟

۷. عده‌ای از فیزیکدانها و فیلسوفها معتقدند که اگر نتوان روشی برای تعیین یک کمیت فیزیکی توصیف کرد، آن کمیت آشکار ناپذیر است؛ کمیتی است که باید آن را رها کرد زیرا واقعیت فیزیکی ندارد. همه دانشمندان چنین نظری ندارند. به نظر شما، نکات مثبت و منفی این دیدگاه چیست؟

۸. چند پدیده تکرارشونده طبیعی نام ببرید که بتواند استانداردهای مناسب زمان باشند.

۹. می‌شد "۱ ثانیه" را به عنوان زمان یک بیضی رئیس وقت اتحادیه معلمان فیزیک امریکا تعریف کرد. گالیله هم در بعضی کارهایش ضربان بیض خود را به عنوان زمان سنج به کار گرفت. چرا تعریفی که براساس ساعتهاي اتمی باشد بهتر است؟

۱۰. ویزیگهای یک ساعت خوب چیست؟

۱۱. با توجه به آنچه درباره آونگ می‌دانید، بگویید که اشکالات استفاده از دوره تناوب آونگ به عنوان استاندارد زمان چیست.

۱۲. در روز 30 زوئن سال ۱۹۸۱، دقیقه بین ساعت $59 : 10$ و ساعت $00 : 11$ صبح را 16 گرفتند. همچنین، روز آخر سال ۱۹۸۹ را هم، به اندازه 18 ، طولانیتر اختیار کردند. گاه به گاه، این یک ثانیه اضافی (کبیسه) را وارد می‌کنند، چون سرعت چرخش زمین، براساس استاندارد اتمی، در حال کند شدن است. چرا این کار، یعنی تنظیم دوباره ساعتها به این شکل، کار خوبی است؟

۱۳. یک استگاه رادیویی "روی ۵ FM" باند 89.5 می‌داند. معنی این عدد چیست؟

۱۴. چرا در SI، یکای پایه‌ای برای مساحت یا حجم وجود ندارد؟

۱۵. در ابتدا متر را برابر با یک 10^6 میلیونیم فاصله قطب شمال تا استوای از طریق نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، تعریف کرده بودند. این تعريف، به مقدار 23.000% با میله متر تفاوت دارد. آیا معنی اش این است که میله متر استاندارد تا این اندازه خطأ دارد؟

۱۶. آیا می‌توان طول یک خط خمیده را اندازه گرفت؟ اگر می‌شود، چگونه؟

۱۷. هنگامی که میله متر را به عنوان استاندارد طول برگزیدند، مشخص کردند که این تعریف، در چه دمایی است. آیا می‌توان طول را ویژگی بنیادی نامید در حالی که برای تعیین استاندارد آن باید کمیت فیزیکی دیگری، مثل دما، را مشخص کرد؟

ساعت	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
A	۱۲:۳۶:۴۰	۱۲:۳۶:۵۶	۱۲:۳۷:۱۲	۱۲:۳۷:۲۷	۱۲:۳۷:۴۴	۱۲:۳۷:۵۹	۱۲:۳۸:۱۴
B	۱۱:۵۹:۵۹	۱۲:۰۰:۰۲	۱۱:۵۹:۵۷	۱۲:۰۰:۰۷	۱۲:۰۰:۵۶	۱۱:۵۹:۵۶	۱۲:۰۰:۰۳
C	۱۵:۵۰:۴۵	۱۵:۵۱:۴۳	۱۵:۵۲:۴۱	۱۵:۵۳:۳۹	۱۵:۵۴:۳۷	۱۵:۵۵:۳۵	۱۵:۵۶:۳۳
D	۱۲:۰۳:۵۹	۱۲:۰۲:۵۲	۱۲:۰۱:۴۵	۱۲:۰۰:۳۸	۱۱:۵۹:۳۱	۱۱:۵۸:۲۴	۱۱:۵۷:۱۷
E	۱۲:۰۳:۵۹	۱۲:۰۲:۴۹	۱۲:۰۱:۵۴	۱۲:۰۱:۵۲	۱۲:۰۱:۳۲	۱۲:۰۱:۲۲	۱۲:۰۱:۱۲

میکروسکوپیکی به کار می‌رود. هر شیک 8×10^{-8} است. تعداد شیکهای یک ثانیه بیشتر است یا تعداد ثانیه‌های یک سال؟ (ب) قدمت انسان در حدود 10^5 سال است، در حالی که سن جهان در حدود 10^{10} سال است. اگر سن جهان را ۱ روز بگیریم، قدمت انسان چند ثانیه می‌شود؟ ۸. رکوردهایی که دو دونده در دو مسابقه متفاوت دو به مسافت یک مایل به دست آورده‌اند؛ ۳ دقیقه و 58×10^{-3} ثانیه، و ۳ دقیقه و 58×10^{-3} ثانیه، است. حداکثر خطای در تعیین مسافت دو مسابقه برحسب فوت چقدر باید باشد تا بتوانیم نتیجه بگیریم که دونده‌ای که این مسافت را در زمان کمتری طی کرده، واقعاً سریعتر دویده است؟

۹. یک ساعت آونگی (با صفحه ۱۲ ساعته) به اندازه 1min/day جلو می‌رود. اگر این ساعت را میزان کنیم چقدر طول می‌کشد تا دوباره زمان درست را نشان بدهد؟

۱۰. پنج دستگاه ساعت در آزمایشگاهی آزمایش می‌شوند. هر روز درست سر ظهر، که با ساعت اتنی معلوم می‌شود، رقمی که ساعتها نشان می‌دهند ثبت می‌شود. این کار به مدت یک هفته ادامه می‌باید. نتایج آزمایش در جدول بالا آمده است. این ساعتها را به ترتیب بهتر بودن زمان سنجی آنها مرتب کنید. علت انتخاب خودتان را بیان کنید.

۱۱. سن جهان در حدود $10^{17} \times 5$ است؛ دوام کوتاهترین تپ [پالس] نور که (تا سال 1990) در آزمایشگاه تولید شده است، تها $10^{-15} \times 6$ بوده است (جدول ۳). یکباره زمانی فیزیکی ذکر کنید که، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً وسط این دو عدد باشد.

۱۲. با این فرض که طول روز به طور یکنواخت، به مقدار 15×10^{-3} در

قرن زیاد می‌شود، اثر تجمعی این پدیده بر سنجش زمان در طی 20×10^{-3} قرن را حساب کنید. چنین کاوشی در سرعت چرخش زمین را از روی مشاهدات مربوط به کسوف در این دوره (20 قرن) پیدا کرده‌اند.

۱۳. زمانی که طول می‌کشد تا ماه، نسبت به ستاره‌های ثابت، به مکان اولیه خود برگردد، 3×27 روز است و آن را ماه نجومی می‌نامند. بازه زمانی بین دو وضعیت یکسان ماه را ماه قمری می‌نامند. ماه قمری از ماه نجومی طولانی‌تر است. چرا و چقدر؟

بخش ۴-۱ استاندارد طول

۱۴. قد شخصی $1.9 \times 10^{-9}\text{m}$ است. این کمیت برحسب یکاهای بریتانیایی چقدر است؟

۲۰ سال پرداخت می‌شود. برنده جایزه، هرماه چقدر پول می‌گیرد؟ (ج) ظرفیت دیسک سخت یک کامپیوتر $30 \times 10^{-6}\text{MB}$ است. اگر هر کلمه ۸ بایت را اشغال کند، این کامپیوتر چند کلمه گنجایش دارد؟ مقصود کامپیوتر کارها از کیلو، 10^{24} (یعنی 2^{10}) است، نه 10^{10} .

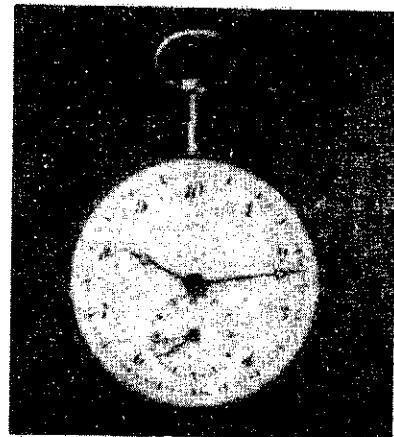
بخش ۴-۲ استاندارد زمان

۳. انریکو فرمی زمانی گفته بود که مدت استاندارد یک جلسه درس ($50 \times 10^{-3}\text{min}$) نزدیک به یک میکروفن است. هر میکروفن چند دقیقه است و درصد اختلاف این رقم با تقریب فرمی چقدر است؟

۴. فاصله نیویورک و لوس‌آنجلس در حدود $3000 \times 10^{-3}\text{mi}$ است؛ اختلاف زمانی این شهرها، $3h$ است. محیط زمین چقدر است؟

۵. یکی از ارقام معمول برای تعداد ثانیه‌های موجود در یک سال، $10^7 \times \pi$ است. این مقدار چند درصد خطای دارد؟

۶. کمی پس از انقلاب فرانسه، کوانسیون ملی به عنوان بخشی از برنامه معرفی سیستم متریک، تلاش کرد زمان را هم دهدی کند. در این تلاش، که البته موفق نشد، هر شباهه روز که از نیمه شب آغاز می‌شد، به 10×10^{-3} ساعت دهدی تقسیم شده بود، و هر ساعت برابر با 100×10^{-3} دهدی بود. عقربه‌های ساعتی که از آن دوران باقی مانده است، روی ساعت 8×10^{-3} دهدی و دقیقه 22.8×10^{-3} دهدی متوقف شده‌اند. ساعت (به معیار خودمان) چند است؟ (شکل ۷).



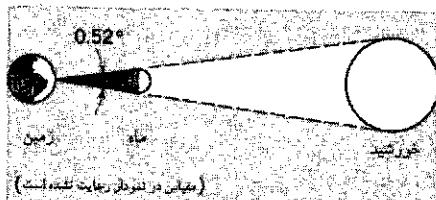
شکل ۷. مسئله ۶

۷. (الف) شیک یکی از واحدهای زمان است که، گاهی، در فیزیک

کنید. در نوشه‌های عامه‌خوان از سال‌نوری خیلی استفاده می‌شود، اما پارسک را عموماً اخترشناسان به کار می‌برند.

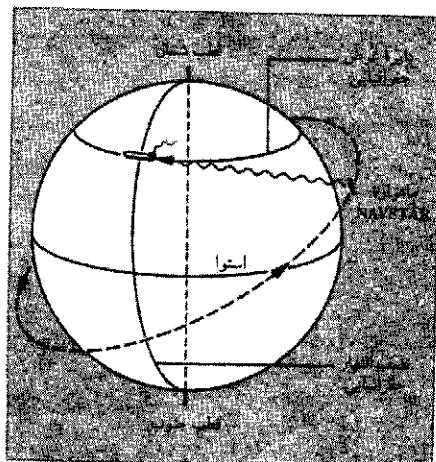
۲۴. شعاع مؤثر پروتون 10^{-15} m است؛ شعاع جهان مشاهده‌پذیر (براساس فاصله دورترین اختروش مشاهده‌پذیر) 10^{16} m است (جدول ۴). یک مسافت فیزیکی ذکر کنید که مقدار آن، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً در وسط این دو عدد باشد.

۲۵. فاصله متوسط خورشید از زمین، 390° برابر فاصله متوسط ماه از زمین است. کسوف کامل را در نظر بگیرید (ماه بین زمین و خورشید؛ شکل ۸) و (الف) نسبت قطر خورشید به قطر ماه، و (ب) نسبت حجم خورشید به حجم ماه را حساب کنید. (ج) ماه از زمین تحت زاویه 52° دیده می‌شود و فاصله زمین از ماه 10^5 km است. قطر ماه را حساب کنید.



شکل ۸. مسئله ۲۵

۲۶. سیستم ناوبری یک نفتکش، با استفاده از ماهواره‌های سیستم جهانی تعیین موقعیت (GPS/NAVSTAR)، عرض و طول جغرافیایی مکان را به ترتیب برابر با $N^{43^{\circ}26'25''}$ و $W^{22^{\circ}48'37''}$ تعیین می‌کند (شکل ۹). اگر خطای این اعداد 5° باشد، خطای سنجش نفتکش در راستای (الف) شمال-جنوب (نصف‌النهاری که از آن نقطه می‌گذرد) و (ب) شرق-غرب (مداری که از آن نقطه می‌گذرد) چقدر است؟ (ج) نفتکش در کجاست؟



شکل ۹. مسئله ۲۶

۱۵. (الف) هم مسابقه دو 100 یارد داریم و هم مسابقه دو 100 متر. کدام‌یک طولانی‌تر است؟ چند متراً چند فوت؟ (ب) هم رکوردهای دو یک مایل را نسبت می‌کنند و هم رکوردهای دو یک مایل متريک (۱۵۰۰ متر) را. این دو مسافت را با هم مقایسه کنید.

۱۶. پایداری ساعتهای سزیومی که به عنوان استاندارد اتمی زمان به کار می‌روند، چنان است که دو ساعت سزیومی در طی حدود 300000 سال حداقل 18 با هم اختلاف خواهند داشت. اگر فاصله میان نیویورک و سان‌فرانسیسکو (2572 mi) هم با همین دقت تعیین شده باشد، اختلاف دوبار سنجش این مسافت چقدر خواهد بود؟

۱۷. جنوبگان تقریباً به شکل نیم‌دایره‌ای به شعاع 2000 km است. ضخامت متوسط پوشش یخی آن 3000 m است. جنوبگان چند سانتی‌متر مکعب یخ دارد؟ (خمیدگی زمین را در نظر نگیرید).

۱۸. هکتار یکی از یکاهای مساحت است که معمولاً برای سنجش مساحت زمینها به کار می‌رود. هر هکتار طبق تعریف 10^4 m^2 است. در یک معدن روباز زغال‌سنگ، هر سال 77 هکتار زمین به عمق 26 m حفاری می‌شود. چند کیلومتر مکعب خاک در سال از این معدن بیرون می‌آید؟

۱۹. زمین تقریباً به شکل کره‌ای است به شعاع $10^6 \text{ m} \times 6.37$. (الف) محیط آن چند کیلومتر است؟ (ب) مساحت سطح آن چند کیلومتر مربع است؟ (ج) حجم آن چند کیلومتر مکعب است؟

۲۰. مقدار تقریبی حداقل سرعت چند جانور بر حسب یکاهای متفاوت، در سطرهای پایین ذکر شده است. این سرعتها را به m/s تبدیل کنید و جانوران را به ترتیب صعودی حداقل سرعتشان مرتب کنید: سنجاب، 19 km/h ; خرگوش، 30 cm/h ; حزلون، 30 mi/h ; عنکبوت، 8 ft/s ; چیتا، 9 km/min ; انسان، 100 cm/s ; روباه، 110 m/min ; شیر، 190 km/day .

۲۱. سرعت یک سفينة فضایی 19200 mi/h است، این سرعت بر حسب سال نوری بر قرن، چقدر است؟

۲۲. یک نوع اتومبیل جدید، مجهز به یک نمایشگر میزان مصرف سوخت است. راننده می‌تواند، با یک کلید، یکاهای بریتانیایی یا SI را انتخاب کند. اعداد نمایش بریتانیایی بر حسب gal/L است، اما نمایش بر عکس آن، یعنی بر حسب km/L است. نمایش SI برای معادل 30 mi/gal چه عددی است؟

۲۳. فاصله‌های نجومی در مقایسه با ابعاد زمینی آنقدر بزرگ‌اند که برای درک آسانتر فواصل نسبی اشیای نجومی از یکاهای طولی استفاده می‌شود که خیلی از یکاهای معمولی بزرگ‌ترند: یک یکای نجومی (AU) برابر است با فاصله متوسط زمین از خورشید، یعنی 10^8 km . یک پارسک (pc) مسافتی است که طول یک یکای نجومی از آن فاصله، تحت یک ثانية قوسی دیده شود، یک سال نوری (ly) مسافتی است که نور، با سرعت 10^5 km/s در $3 \times 10^5 \text{ s}$ در خلا فضایی یک سال می‌پیماید. (الف) فاصله زمین تا خورشید را بر حسب پارسک و سال نوری بیان کنید. (ب) سال نوری و پارسک را بر حسب کیلومتر بیان

شده بود. یک طول موج این تایش، بر حسب نانومتر، چقدر است؟ نتیجه را با تعداد مناسبی از رقمهای بامعنى بیان کنید.

۳۸. (الف) $132\text{ cm}^0 + 3776\text{ cm}^0$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنى، حساب کنید. (ب) $26325\text{ cm}^0 - 16264\text{ cm}^0$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنى، حساب کنید.

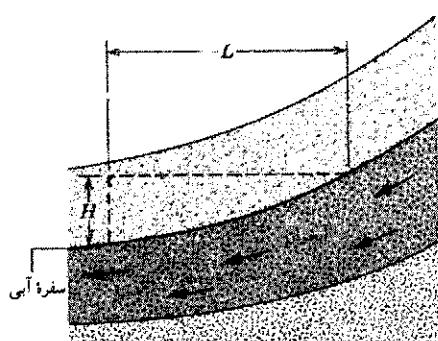
۳۹. (الف) طول یک صفحه مستطیلی فلزی $8\text{ cm} \times 43\text{ cm}$ و عرض آن 12 cm است. مساحت این صفحه را، با رقمهای بامعنى به تعداد درست حساب کنید. (ب) شاعع یک صفحه فلزی گرد 37 cm است. مساحت صفحه را، با تعداد درست رقمهای بامعنى، حساب کنید.

بخش ۷-۱ تحلیل ابعادی

۴۰. سنگهای متخلخل می‌توانند آب زیرزمینی را از خودشان عبور بدهند. حجم V آب، که در زمان t از سطح مقطعی به مساحت A عبور می‌کند، از رابطه

$$\frac{V}{t} = KA \frac{H}{L}$$

به دست می‌آید، که در آن H برابر با مقدار کاهش ارتفاع سطح ستر نسبت بهافق، در طی مسافت L است (شکل ۱۰). این رابطه را قانون دارسی^۱ می‌نامند. کمیت K رسانندگی هیدرولیکی بستر است یکای SI کمیت K چیست؟



شکل ۱۰. مسئله ۴۰

۴۱. در مثال ۵، ثابت‌های h , G , و c را ترکیب کردیم و کمیتی با بعد زمان به دست آوردیم. با تکرار همین کار کمیتی با بعد طول به دست بیاورید و مقدار عددی آن را محاسبه کنید. ثابت‌های بی بعد را کنار بگذارید. این طول پلانک است؛ اندازه جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

۴۲. روش مسئله ۴۱ را تکرار کنید و کمیتی با بعد جرم به دست بیاورید. این کمیت جرم پلانک است، یعنی جرم جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

¹. Darcy

بخش ۱-۵ استاندارد جرم

۲۷. با استفاده از ضرایب تبدیل و داده‌های این فصل، حساب کنید که در 50 kg را هیدروژن چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

۲۸. مولکول آب (H_2O) دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن دارد. جرم اتم هیدروژن 11 g و جرم اتم اکسیژن 16 g است. (الف) جرم یک مولکول آب چند کیلوگرم است؟ (ب) در آب اقیانوسهای جهان چند مولکول آب وجود دارد؟ جرم کل اقیانوسهای جهان 10^{11} kg است.

۲۹. در قاره اروپا، یک "پاوند" نیم کیلوگرم است. کدام یک از این خریدها بضرفه‌تر است؟ یک پاوند پاریسی قهوه به قیمت 30 دلار یا یک پاوند نیویورکی به قیمت 40 دلار ؟

۳۰. ابعاد یک اتاق $12\text{ ft} \times 13\text{ ft} \times 21\text{ ft}$ است. جرم هوای موجود در آن چقدر است؟ چگالی هوا، در دمای اتاق و فشار عادی جو، 21 kg/m^3 است.

۳۱. طول ضلع یک حبه قند معمولی 1 cm است. طول ضلع جعبه‌ای که درست یک مول حبه قند در آن جا بگیرد چقدر است؟

۳۲. شخصی، با وزن غذایی، هفته‌ای 23 kg (حدود 5 lb) وزن کم می‌کند. آهنگ کاهش وزن این شخص بر حسب میلی‌گرم بر ثانیه چقدر است؟

۳۳. فرض کنید 12 h طول می‌کشد که مخزنی محتوی 5700 m^3 آب خالی شود. آهنگ خروج آب (بر حسب kg/s) از این مخزن چقدر است؟ چگالی آب 1000 kg/m^3 است.

۳۴. شاعع متوسط دانه‌های ماسه در ساحل کالیفرنیا $50\text{ }\mu\text{m}$ است. مساحت کلی چه جرمی از این ماسه‌ها برابر با مساحت سطح مکعبی به ضلع 1 m است؟ ماسه از جنس سیلیسیم دیوکسید است، که جرم هر مترمکعب آن 2600 kg است.

۳۵. کیلوگرم استاندارد (شکل ۵) به شکل استوانه‌ای است که ارتفاع آن با قطرش برابر است. نشان بدید که در میان استوانه‌هایی با حجم یکسان، استوانه‌ای که قطر و ارتفاعش برابر باشد کمترین مساحت سطح را دارد. به این ترتیب، آثار سایش و آلودگی سطحی استوانه استاندارد به حداقل می‌رسد.

۳۶. برای تخمین فاصله بین دو اتم یا دو مولکول مجاور در یک ماده جامد، می‌توان دو برابر شاعع کره‌ای را در نظر گرفت که حجم آن برابر با حجم بر اتم آن ماده باشد. فاصله بین اتمهای مجاور را (الف) در آهن و (ب) در سدیم حساب کنید. چگالی آهن و سدیم به ترتیب 7870 kg/m^3 و 1013 kg/m^3 است. جرم هر اتم آهن 10^{-26} kg و 10^{-27} kg ، و جرم هر اتم سدیم 10^{-26} kg است.

بخش ۱-۶ دقت و ارقام بامعنى

۳۷. طی سالهای 1983 تا 1986 ، متر برابر با 73 cm^0 طول موج نور قرمز-نارنجی خاصی که از اتمهای کریپتون گسیل می‌شود تعریف

حرکت در یک بعد

مکانیک، قدیمی ترین شاخه علوم فیزیکی، علم بررسی حرکت اجسام است. از محاسبه مسیر توپ بیسبال یا مسیر سفینه فضایی ای که به مریخ می رود گرفته تا تحلیل ردّ حرکتهای ذرات بنیادی ای که از برخورد ذرات در بزرگترین شتابدهنده‌ها حاصل می‌شوند، همه جزو مسائل مکانیک‌اند. بخشی از مکانیک که به توصیف حرکت اختصاص دارد سینماتیک نامیده می‌شود (سینماتیک برگرفته از معادل واژه حرکت در زبان یونانی است؛ "سینما" به معنی تصاویر متحرک را هم از همین واژه گرفته‌اند). به آن بخشی از مکانیک که به تحلیل عمل حرکت مربوط می‌شود دینامیک می‌گویند، (برگرفته از معادل یونانی واژه نیرو؛ دینامیت هم از همین واژه می‌آید). در این فصل، تنها به سینماتیک در یک بعد می‌پردازیم. در دو فصل بعدی این نتایج را به دو و سه بعد تعیین می‌دهیم. مطالعه دینامیک را در فصل ۵ آغاز خواهیم کرد.

آن، با حرکت نقاط روی محورش فرق می‌کند. (اما چرخ لغزان این خاصیت را دارد. بنابراین چرخ را هم مثل اجسام دیگر، می‌توانیم برای بعضی از محاسبات مانند ذره در نظر بگیریم و برای بعضی دیگر نمی‌توانیم). تا جایی که تنها با متغیرهای سینماتیکی سروکار داریم، علی‌الخصوص وجود ندارد که حرکت قطار و الکترون را بر یک اساس بررسی نکنیم. هر دو نمونه‌هایی از حرکت ذره‌اند.

همه انواع حرکت راست خط ذره را بررسی می‌کنیم. ذره ممکن است سرعت بگیرد، سرعت کم کند، و حتی بایستد و برگردد. به دنبال توصیفی می‌گردیم که همه این امکانات را در برداشته باشد.

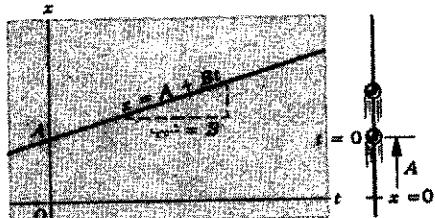
۱-۲ سینماتیک ذره

برای شروع مطالعه، مورد ساده‌ای را در نظر می‌گیریم: ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند. حرکت راست خط خوبی‌اش این است که با آن می‌توانیم مقاهیم بنیادی سینماتیک، مثل سرعت و شتاب را بدون نیاز به ریاضیات مربوط به برداهارا، که معمولاً برای تحلیل حرکتهای دو بعدی و سه بعدی به کار می‌رود، به سادگی معرفی کنیم. البته در همین شکل محدود حرکت هم می‌توانیم خیلی از وضعیت‌های واقعی را بررسی کنیم: سنگ در حال سقوط، قطار شتابدار، اتومبیل در حال ترمز، گوی هاکی در حال لغزش، صندوقی که از شیبی بالا کشیده می‌شود، الکترونهای سریع لامپ پرتو \times ، و نظایر آنها نمونه‌هایی از این مواردند.

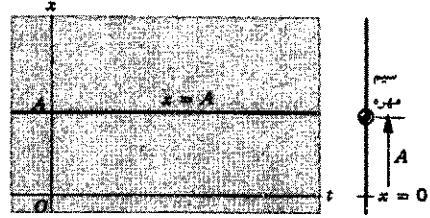
در این موارد حالت حرکت می‌تواند تغییر کند (مثلاً ممکن است به گوی هاکی ضربه بزنیم تا شروع به حرکت کند)، جهت حرکت هم می‌تواند تغییر کند (مثلاً می‌شود سنگ را به هوا پرتاب کرد تا دوباره به زمین برگردد)، اما در هر حال این حرکت باید مقید به یک خط راست باشد. برای اینکه بحث را باز هم ساده‌تر کرده باشیم، فعلًاً فقط به حرکت یک ذره می‌پردازیم. یعنی اجسام پیچیده را هم مثل یک نقطه‌مدادی فرض می‌کنیم. به این ترتیب، می‌توانیم از همه حرکتهای درونی ممکن چشمپوشی کنیم — مثلاً از حرکت چرخشی (فصلهای ۱۱ تا ۱۳) یا از حرکت ارتعاشی اجزای جسم (فصل ۱۵). در این بحث مواردی را در نظر می‌گیریم که همه اجزای جسم، دقیقاً در یک جهت حرکت می‌کنند. چرخ غلتان چنین خاصیتی ندارد زیرا حرکت نقاط روی لبه

حرکت ذره را به دو طریق توصیف می‌کنیم: با معادلات ریاضی و با نمودار. هر دو راه برای مطالعه سینماتیک مفیدند، و ما هم از هر دو استفاده می‌کنیم. معمولاً روش ریاضی برای حل مسائل بیشتر است، زیرا دقت بیشتری از روش نموداری دارد. روش نموداری از این جهت مفید است که خیلی وقتیاً بصیرت فیزیکی بیشتری، نسبت به معادلات ریاضی، به دست می‌دهد.

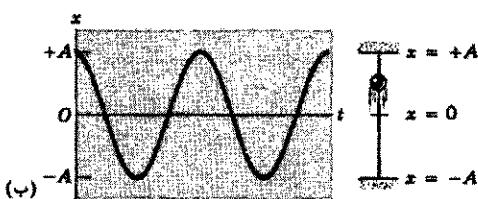
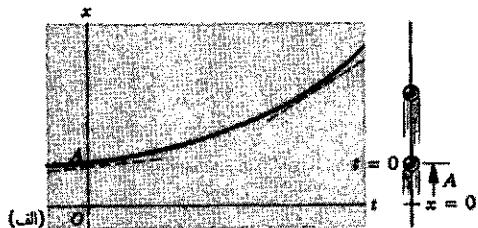
اگر بستگی ریاضی مکان x ذره (نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع معین) به زمان t را برای همه زمانها داشته باشیم، توصیف کاملی از حرکت ذره به دست می‌آید. این همان تابع $(t)x$ است. در مثالهای زیر، چند نمونه از انواع ممکن حرکت را همراه با توابع و نمودارهای توصیف‌کننده آنها در نظر می‌گیریم:



شکل ۲. مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت B در جهت مثبت x روی سیمی می‌لغزد؛ مهره در زمان صفر از $x = A$ شروع به حرکت می‌کند و حرکت آن با خط $x = A + Bt$ توصیف می‌شود.



شکل ۱. مهره‌ای که می‌تواند آزادانه در یک بعد روی سیمی حرکت کند؛ راستای (ثابت) حرکت دلخواه است و الزاماً قائم نیست. در این مورد، مهره در مختصه x برابر با A ساکن است، و "حرکت" آن با خط راست افقی $x = A$ توصیف می‌شود.



شکل ۳. (الف) مهره‌ای که در یک بعد با سرعت فرازینه در جهت مثبت در روی سیم می‌لغزد. سرعت مهره برابر است با شیب منحنی ای که حرکت آن را توصیف می‌کند؛ می‌توانید بینید که چگونه شیب منحنی به طور پیوسته زیاد می‌شود. (ب) مهره‌ای در یک بعد روی سیم بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند.

راست. دو نمونه از این نوع حرکت عبارت است از:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2 \quad (3)$$

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (4)$$

در اولی با فرض $C > 0$ ، شیب به طور پیوسته زیاد می‌شود و حرکت ذره مدام سریعتر می‌شود (شکل ۳الف). در دومی، ذره بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند (شکل ۳ب)، و سرعت آن نیز همراه با تغییر علامت شیب منحنی در شکل ۳اب، تغییر علامت می‌دهد.

توصیف کامل حرکت، معمولاً پیچیده‌تر از آن است که تا به حال با مثالهای ساده نشان داده‌ایم. به این مثالها توجه کنید:

۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. اتومبیلی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، شتاب می‌گیرد، و به سرعت معینی رسد. سپس مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سرانجام ترمز می‌کند و می‌ایستد. شکل ۴ این حرکت را نشان می‌دهد. این حرکت را نمی‌شود صرفاً با یک معادله توصیف کرد؛ برای حالت‌های سکون بلطفاً از نفع معادله ۱ بدکار ببریم، برای بخش شتابدار تندشونده

۱. سکون. در این حالت ذره همیشه در نقطه A است:

$$x(t) = A \quad (1)$$

نمودار این "حرکت" در شکل ۱ آمده است. برای توضیح این نمودار، فرض می‌کنیم ذره مهره‌ای است که بدون اصطکاک روی سیم بلندی می‌لغزد. در این مورد، مهره در نقطه $x = A$ در حالت سکون است. دقیق کنید که در نمودار، x را متغیر وابسته (روی محور قائم) و t را متغیر مستقل (روی محور افقی) می‌گیریم.

۲. حرکت با سرعت ثابت. آهنگ حرکت ذره را با سرعت آن توصیف می‌کنیم. در حرکت یک بعدی، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ ذره اگر در جهت افزایش x حرکت کند سرعت مثبت است، و اگر در جهت کاهش x حرکت کند سرعت منفی است. اندازه سرعت هم معیار دیگری از آهنگ حرکت است. اندازه سرعت همیشه مثبت است و اطلاعی در باره جهت حرکت در بر ندارد.

در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان بر حسب زمان خطی راست با شیب ثابت است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که شیب هرتابعی مشخص‌کننده آهنگ تغییر آن است. در اینجا، آهنگ تغییر مکان سرعت است، و هر چه شیب نمودار بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در شکل ریاضیاتی داریم

$$x(t) = A + Bt \quad (2)$$

که نمایش معمول یک خط راست با شیب B است (البته خط را اغلب با $b = mx + b$ نشان می‌دهند).

شکل ۲ حرکت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در زمان $t = 0$ در نقطه $x = A$ است. این ذره با سرعت ثابت در جهت افزایش x حرکت می‌کند. به این ترتیب، همان‌طور که از شیب مثبت نمودار برمی‌آید، سرعت آن مثبت است.

۳. حرکت شتابدار. در این مورد سرعت ذره تغییر می‌کند (شتاب، طبق تعریف، برابر است با آهنگ تغییر سرعت)؛ بنابراین، شیب نمودار هم متغیر است. پس نمودار چنین حرکتهایی منحنی است. نماین



شکل ۶. یک گلوله خمیر را به بالا پرتاب می‌کنیم؛ گلوله تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، سپس برمی‌گردد و به زمین می‌افتد، و به محض برخورد به زمین ساکن می‌شود. این منحنی حرکت گلوله را توصیف می‌کند. در حرکت واقعی، نقطه تیز در $x(t)$ کمی گرد است.

اولیه گلوله‌ای است که به طرف بالا پرتاب شده است. سرعت در اوج مسیر (که در آنجا شبیه صفر است) به صفر می‌رسد و پس از آن خمیر به طرف پایین حرکت می‌کند و اندازه سرعت آن دائمًا بیشتر می‌شود. هنگامی که خمیر به زمین می‌خورد، آنَا به حالت سکون در می‌آید و سرعت آن صفر می‌شود.

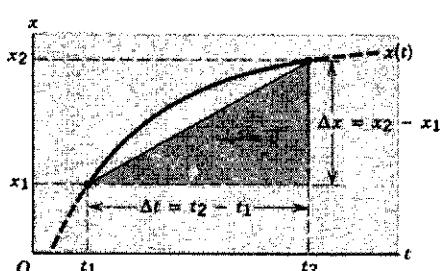
توجه داشته باشید که نمودارهای این بخش اگرچه حرکت را نمایش می‌دهند اما نشان‌دهنده شکل مسیری نیستند که ذرات واقعاً می‌سیمایند. مثلاً در شکل ۶، ذره فقط روی یک خط به بالا و پایین حرکت می‌کند و مسیر آن شبیه به منحنی این شکل نیست.

۲-۳ سرعت متوسط

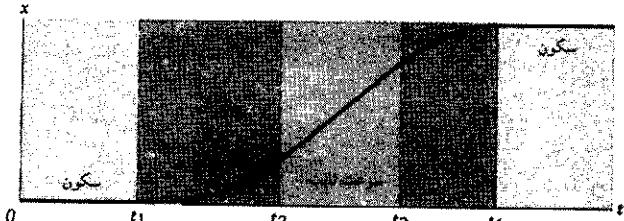
اگر حرکت ذره با نمودارهای از نوع شکل ۱ یا ۲ توصیف شود، سرعت را می‌توانیم به سادگی در هر بازه زمانی ای به دست بیاوریم؛ سرعت ثابت، و برابر با شبیه خط است. در موارد پیچیده‌تر، مثل شکلهای ۳ تا ۶، که سرعت تغییر می‌کند، بهتر است که سرعت متوسط \bar{v} را تعریف کنیم. (پاره خط روی نماد هر کمیت فیزیکی برای نشان دادن متوسط آن کمیت است).

در شکل ۷ ذره در زمان t_1 در نقطه x_1 است، و در زمان t_2 به نقطه x_2 می‌رسد. سرعت متوسط ذره در این بازه زمانی، طبق تعریف، برابر است با

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5)$$



شکل ۷. سرعت متوسط در بازه Δt بین t_1 و t_2 از روی جایی $x(t)$ در این بازه بدست می‌آید، شکل واقعی منحنی $x(t)$ در این بازه، در تعیین سرعت متوسط ندارد.

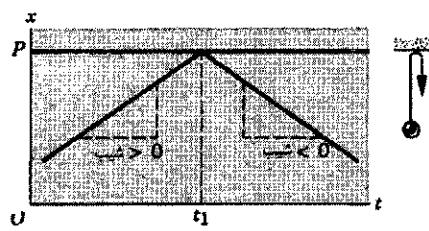


شکل ۸. این منحنی اتومبیل را توصیف می‌کند که از $t = t_1$ تا $t = t_2$ در حالت سکون است، و از این لحظه شروع به شتاب گرفتن می‌کند. در $t = t_2$ شتاب خود را از دست می‌دهد و مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در زمان $t = t_2$ ترمز می‌کند، و سرعتش به تدریج کم می‌شود تا آنکه در زمان $t = t_4$ به صفر می‌رسد.

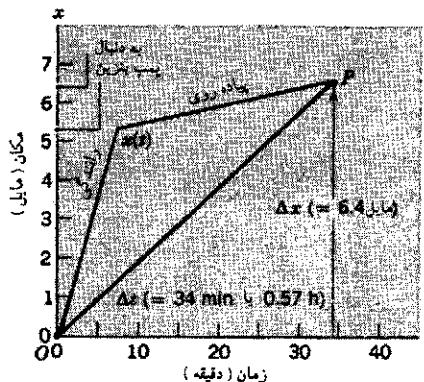
رابطه‌ای از نوع معادله ۳، برای بخش سرعت ثابت رابطه‌ای از نوع معادله ۲، و برای بخش ترمز هم رابطه‌ای دیگر، باز هم از نوع معادله ۳. دقت کنید که نمودار این حرکت دو ویژگی دارد: $x(t)$ پیوسته است (نمودار پرشی ندارد) و شبیه نیز پیوسته است (نمودار نقاط تیز ندارد). انتظار داریم که $x(t)$ همواره پیوسته باشد؛ در غیر این صورت، اتومبیل در نقطه‌ای تا پایدید می‌شود و در نقطه‌ای دیگر ظاهر می‌شود. بعداً خواهیم دید که نقاط تیز نمودار، نقاطی‌اند که در آنها سرعت به طور آنی تغییر می‌کند. این البته گویای یک وضعیت کاملاً فیزیکی نیست، اما تقریب خوبی برای بعضی وضعیت‌های فیزیکی است.

۵. جسمی که به مانع برمی‌خورد و بازمی‌گردد. یک "گوی" هاکی با سرعت ثابت روی یخ می‌لغزد، به دیوار برمی‌خورد، و در جهت مخالف و با همان اندازه سرعت بازمی‌گردد. شکل ۵ این حرکت را نشان می‌دهد؛ در اینجا فرض شده است که برخورد آنَا جهت حرکت را معکوس می‌کند. در واقع اگر "نقطه" برخورد را دقیقاً برسی کنیم، درستی یابیم که این نقطه تیز نیست بلکه کمی گرد است. این امر ناشی از کشسانی دیوار و گوی هاکی است.

۶. گلوله خمیر چسبینde. دانشجویی یک گلوله خمیر مدلسازی را به بالا پرتاب می‌کند؛ نقطه رها کردن توپ بالای سر دانشجو است. توپ تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، و سپس برمی‌گردد و به زمین می‌چسبد. شکل ۶ این حرکت را نشان می‌دهد. شبیه منحنی در $t = t_1$ سرعت



شکل ۵. یک توپ هاکی با سرعت ثابت روی یخ حرکت می‌کند و در زمان t_1 در $x = P$ به یک دیواره صلب برمی‌خورد؛ پس از برخورد از دیواره برمی‌گردد و با سرعتی بهمان اندازه سرعت اولیه ولی در خلاف جهت آن حرکت می‌کند. حرکت توپ یک بعدی است. در مورد اجسام واجهنه واقعی، نقطه تیز در $x(t)$ به این تیزی نیست.



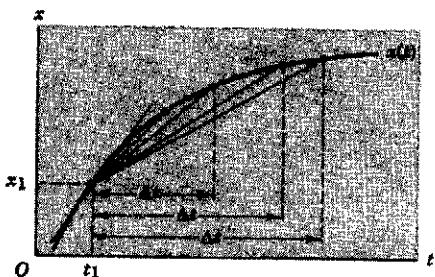
شکل ۸. مثال ۱. خطهایی که با "رانتگی" و "پیاده روی" مشخص شده‌اند، حرکت با سرعتهای ثابت متفاوت با هم را در دو بخش سفر، نشان می‌دهند. سرعت متوسط، شیب خط OP است.

نودار (t) در شکل ۸، به تصور مسئله کمک می‌کند. نقاط O و P بازه‌ای را مشخص می‌کنند که می‌خواهیم سرعت متوسط را در آن به دست بیاوریم. این کمیت، شیب خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

۴-۲ سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط برای بررسی رفتار کلی ذره در یک بازه مفید است، اما برای بررسی جزئیات حرکت کافی نیست. مناسب‌تر آن است که یک تابع ریاضی، $v(t)$ ، داشته باشیم که سرعت ذره را در هر زمان دلخواه به دست بدهد. این تابع، سرعت لحظه‌ای است؛ از این به بعد، همه جا منظور مان از "سرعت" همین سرعت لحظه‌ای است.

اگر سرعت متوسط را برای Δt هایی که دائمًا کوچک‌تر می‌شوند حساب کنیم (شکل ۹)، در حالت حدی $\Delta t \rightarrow 0$ ، خطی که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند به مماس بر منحنی $v(t)$ در آن نقطه می‌کند و سرعت متوسط نیز به سرعت لحظه‌ای در آن نقطه



شکل ۹. بازه Δt را دائمًا کوچک می‌کنیم. در این مورد، t_1 را ثابت نگه داشته‌ایم و سر دیگر بازه، t_2 را به t_1 نزدیک می‌کنیم. در حد، بازه به صفر

که در آن

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (6)$$

و

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (7)$$

Δx جایه‌جایی (یعنی تغییر در مکان ذره در بازه زمانی Δt) است. از شکل ۷ می‌بینیم که آن صرفاً همان شب خطر راستی است که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند.

سرعت متوسط معرف رفتار متوسط در بازه زمانی Δt است. رفتار واقعی ذره بین x_1 و x_2 برای محاسبه سرعت متوسط اهمیتی ندارد. با متوسطگیری در واقع جزئیات حرکت بین x_1 و x_2 حذف می‌شود. اگر فرض کنیم که ساعتها همیشه به جلو حرکت می‌کنند ($t_2 > t_1$)، علامت آن را علامت $\Delta x = x_2 - x_1$ تعیین می‌کند. اگر آن مثبت باشد، حرکت ذره به طور متوسط چنان است که آن با افزایش زمان زیاد می‌شود. (ممکن است ذره در ناحیه‌ای از این بازه به عقب هم برگردد. اما به هر حال مختصه x آن در انتهای بازه، بزرگ‌تر از همین مختصه‌اش در ابتدای بازه است). اگر آن منفی باشد، ذره به طور متوسط روبرو به عقب حرکت می‌کند. به خصوص توجه کنید که طبق تعریف آن، در هر حرکتی که نقطه انتهایی و ابتدایی یکی باشد، سرعت متوسط صفر است؛ فرقی هم نمی‌کند که قطعه خاصی در بازه مورد نظر، چقدر سریع طی شده باشد، زیرا جایه‌جایی صفر است. در مسابقات اتومبیلرانی ای که مسیر آنها بسته است، اگر بازه زمانی را ابتدا تا انتهای مسابقه بگیریم، سرعت متوسط صفر است!

مثال ۱. دارید اتومبیل خود را در یک جاده مستقیم می‌رانید. سرعت اتومبیل 43mi/h است و با این سرعت 52mi را می‌پیمایید. اینجا بنزین اتومبیلتان تمام می‌شود و شما ناچار می‌شوید 27min را دیگر تا نزدیک‌ترین پمپ بنزین پیاده بروید. زمان این پیاده روی 27min است. سرعت متوسط شما، از زمانی که اتومبیل بهراه افتاد تا زمانی که به پمپ بنزین رسیدید، چقدر است؟

حل: برای اینکه سرعت متوسط را از معادله ۵ به دست بیاورید باید Δx یعنی کل مسافتی را که پیموده‌اید (جایه‌جایی شما)، و Δt یعنی زمان سپری شده را بدانید. این دو کمیت عبارت‌اند از

$$\Delta x = 52\text{mi} + 27\text{mi} = 79\text{mi}$$

و

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{52\text{mi}}{43\text{mi/h}} + 27\text{min} \\ &= 1.2\text{h} + 27\text{min} = 3.4\text{h} = 0.57\text{h} \end{aligned}$$

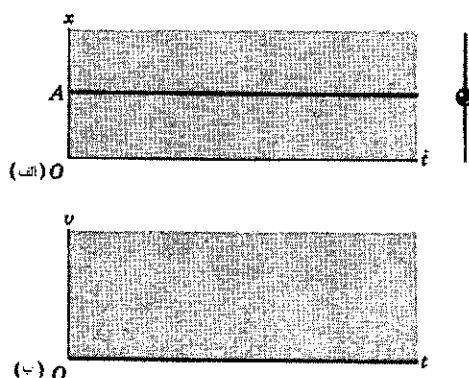
بنابراین، از معادله ۵، نتیجه می‌شود که

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{64\text{mi}}{0.57\text{h}} = 112\text{mi/h}$$

جدول ۱. فرایند حدگیری

سرعت متوسط	بازه‌ها		نقطه پایانی		نقطه ابتدایی	
(m/s)	$\Delta t(s)$	$\Delta x(m)$	$t_1(s)$	$x_1(m)$	$t_1(s)$	$x_1(m)$
۷۰	۱۰۰۰	۷۰۰۰	۲۰۰۰	۱۳۰۰۰	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۶۰	۰۵۰۰	۳۰۰۰	۱۵۰۰	۹۰۰۰	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۸	۰۴۰۰	۲۳۲۰	۱۴۰۰	۸۳۲۰	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۵	۰۲۵۰	۱۳۷۵	۱۲۵۰	۷۳۷۵	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۴	۰۲۰۰	۱۰۸۰	۱۲۰۰	۷۰۸۰	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۲	۰۱۰۰	۰۵۲۰	۱۱۰۰	۶۵۲۰	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۱	۰۰۵۰	۰۲۵۵	۱۰۵۰	۶۲۵۵	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۱	۰۰۳۰	۰۱۵۲	۱۰۳۰	۶۱۵۲	۱۰۰۰	۶۰۰۰
۵۰	۰۱۰	۰۰۵۰	۱۰۱۰	۶۰۵۰	۱۰۰۰	۶۰۰۰

تبديل می‌شود.



شکل ۱۰. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در نقطه‌ای از سیم، A در حالت سکون است.

۱. سکون. از معادله ۱ داریم $A = x(t)$. پس

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0 \quad (10)$$

چون مشتق هر کمیت ثابتی صفر است. شکل ۱۰، $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.

۲. حرکت با سرعت ثابت. از معادله ۲ داریم $x(t) = A + Bt$ پس

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt) = 0 + B \quad (11)$$

سرعت لحظه‌ای (ثابت) B است؛ (شکل ۱۱).

۳. حرکت شتابدار. با استفاده از معادله ۳، $x(t) = A + Bt + Ct^2$ نتیجه می‌شود که

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^2) = 0 + B + 2Ct \quad (12)$$

سرعت با گذشت زمان تغییر می‌کند؛ اگر $B > C$ باشد، سرعت زیاد می‌شود. شکل ۱۲ منحنیهای $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.

طرف راست معادله ۸ در واقع مشتق $x(t)$ نسبت به t ، یا همان dx/dt است. پس

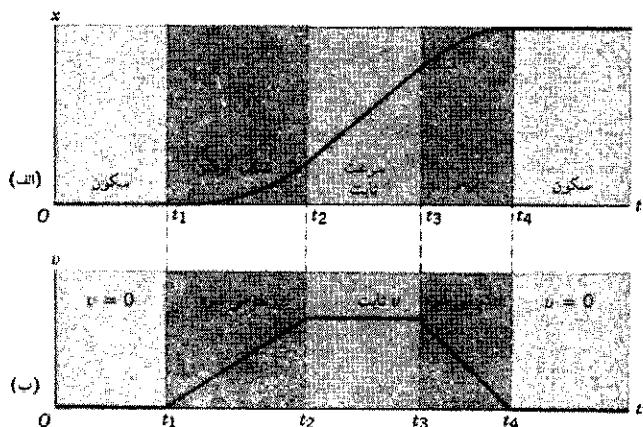
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (8)$$

سرعت (لحظه‌ای) صرفاً آهنگ تغییر مکان نسبت به زمان است. جدول ۱ مثالی است از این فرایند حدگیری، و نشان می‌دهد که چگونه مقدار متوسط به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند. داده‌های جدول ۱ را با استفاده ازتابع $x(t) = ۳۰۰۰ + ۱۰۰۰t + ۲۰۰۰t^2$ محاسبه کردۀایم t بر حسب s و x بر حسب متر است. نقطه (t_1, x_1) را ثابت گرفته‌ایم و نقطه (t_2, x_2) را به تدریج به (t_1, x_1) نزدیکتر کردۀایم تا فرایند حدگیری را شبیه‌سازی کنیم. به نظر می‌رسد که حد سرعت متوسط در $t_1 = ۰$ s به $v = ۵۰$ m/s می‌باشد که با مشتق‌گیری از تابع $x(t)$ عبارتی برای سرعت لحظه‌ای بدست می‌آید

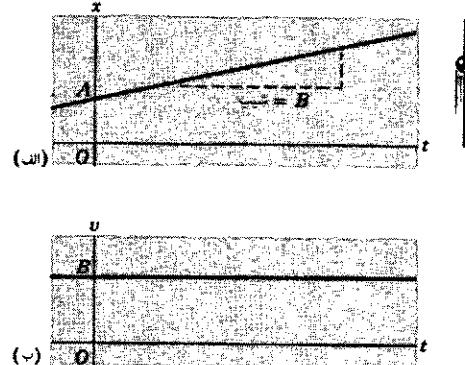
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3000 + 1000t + 2000t^2) \\ &= 0 + 1000 + 2(2000t) = 0 + 4000t \end{aligned}$$

این تابع هم بهارای $t_1 = ۰$ s، همان مقدار 50 m/s را می‌دهد. پس معلوم است که با کوچک شدن بازه، مقدار متوسط واقعاً به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند.

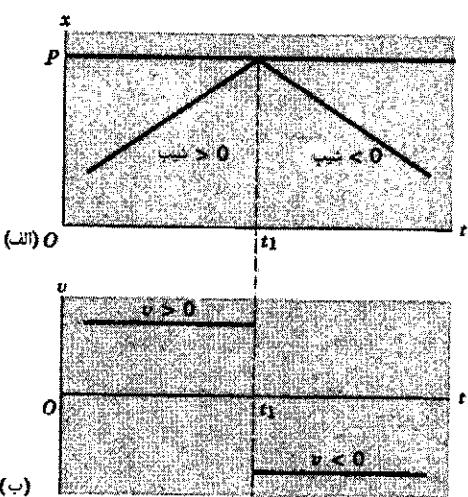
بنابراین، اگر $x(t)$ را بدانیم، می‌توانیم $v(t)$ را با مشتق‌گیری به دست بیاوریم. در روش نموداری هم می‌توان شبیه (نقاط مختلف) را به دست آورد و به کمک آن $v(t)$ را رسم کرد. حالا می‌خواهیم مثالهای بخش ۲-۲ را مرور کنیم. سه مثال اول، در مورد همان مهره‌ای است که روی یک سیم راست طویل می‌لغزد.



شکل ۱۳. (الف) مکان و (ب) سرعت اتومبیلی که از حالت سکون شروع می‌کند، برای مدتی سرعتش زیاد می‌شود، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و آن وقت سرعتش کم می‌شود تا دوباره به حالت سکون برسد. نمودار پایین (t) v را نشان می‌دهدکه دقیقاً متاظر با نمودار (t) x در بالا (و نمودار شکل ۴) است. برای اتومبیلهای واقعی، تغییر سرعت باید هموار باشد نه ناگهانی، بنابراین نقاط تیز نمودار (t) v گرد می‌شود.



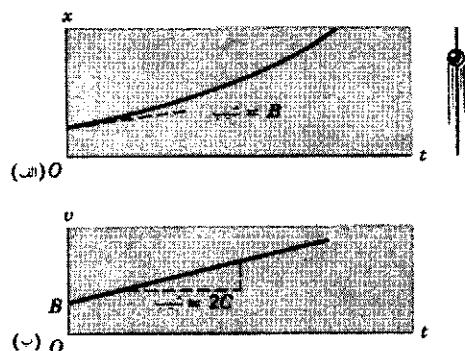
شکل ۱۱. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت روی سیمی می‌لغزد. سرعت برابر با شیب نمودار (t) x یعنی B است. نمودار (t) v همان خط افقی $v = B$ است.



شکل ۱۴. (الف) مکان و (ب) سرعت یک "گوی" هاکی که به سطحی سخت برمی‌خورد و از آن وامی جهد. در این نمودار ایده‌آل، در $t = t_1$ علامت سرعت ناگهانی عوض می‌شود، اما برای گوی واقعی، تغییر سرعت در بازه‌ای کوچک (ولی غیر صفر) انجام می‌شود و نقطه تیز نمودار (t) x هم گرد می‌شود.

ولی درجهت مخالف (سرعت منفی) بازمی‌گردد. شکل ۱۴، $v(t)$ را نشان می‌دهد. دقت کنید که "نقطه تیز" نمودار (t), x ، موجب نایوسنگی در نمودار (t) v می‌شود. هیچ‌یک از این دو در واقعیت اتفاق نمی‌افتد.

۶. گلوله خمیری چسبنده. در این مورد، شکل ۱۵، v اولیه توب مثبت است (جهت رو به بالا را مثبت اختیار کرده‌ایم)، اما به تدریج کم می‌شود. حرکت با معادله‌ای شبیه به معادله ۱۲، اما با $C < 0$ ، در نقطه اوج $v = 0$ است، پس در این نقطه،



شکل ۱۲. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره شتابدار که در یک بعد روی سیمی لغزد. از شیب فزاینده (t) x، و همچنین از افزایش خطی (t) v معلوم است که سرعت با گذشت زمان زیاد می‌شود.

۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. منحنی (t) v را می‌شود از روش شکل ۴، و بدون نوشتن (t) x، به دست آورد. در بازه اول، اتومبیل در حال سکون و $v = 0$ است. در بازه بعدی، اتومبیل شتاب می‌گیرد و (t) v به شکل معادله ۱۲ است. در بازه‌ای که سرعت اتومبیل تغییر نمی‌کند، v مقدار ثابتی است (برای سرعت در پایان بازه‌ای که اتومبیل شتاب دارد) و بنابراین، در این بازه $C = 0$ صفر است. سرانجام، در مرحله ترمزگرفتن، (t) v باز هم به شکل معادله ۱۲ است، اما در این مورد با $C < 0$ (شیب منفی). شکل ۱۳ نمودار این حرکت را نشان می‌دهد.

در عمل، نمی‌شود آنرا از حالت سکون به حالت حرکت شتابدار، یا از حالت حرکت شتابدار به حالت حرکت یکنواخت (با سرعت ثابت) رسید. یعنی در شکل ۱۳، نقاط تیز منحنی (t) v را باید برای اتومبیلهای واقعی کمی گرد کرد، و معادله حرکت هم بیچیده‌تر از معادله ۱۲ می‌شود. اینجا هم برای سادگی فرض کرده‌ایم که رفتار اتومبیل، همان رفتار ایده‌آلی است که در شکل ۱۳ می‌بینیم.

۵. گوی هاکی که به مانع برمی‌خورد و برمی‌گردد. گوی پیش از برخورد سرعت ثابتی دارد و پس از برخورد هم Ramin.samad@yahoo.com

اگر تغییر سرعت در بازه‌های یکسان متوالی یکی نباشد، شتاب متغیر است. در این مورد بهتر است که شتاب لحظه‌ای تعريف کنیم:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

یا

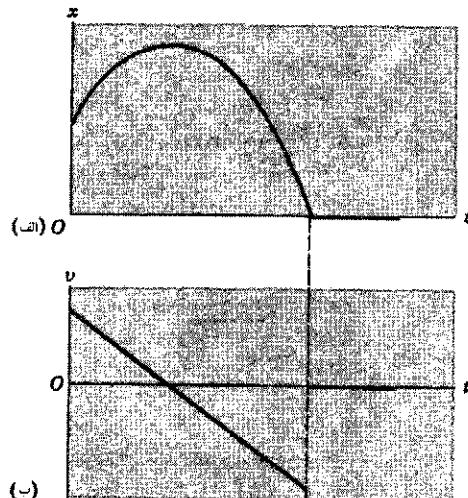
$$a = \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

این تعريف، مشابه معادله ۹ برای سرعت لحظه‌ای است. دقت کنید که مثبت و منفی بودن شتاب به مثبت و منفی بودن v ربطی ندارد. مثلاً ممکن است که a مثبت و v منفی باشد: شتاب a ، تغییر سرعت را می‌دهد؛ این تغییر، چه سرعت مثبت باشد چه منفی، می‌تواند افزایش یا کاهش باشد. مثلاً آسانسوری را در نظر بگیرید که به طرف بالا (که آنرا جهت مثبت سرعت می‌گیریم). حرکت می‌کند. این آسانسور می‌تواند به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > 0$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < 0$) و حرکتش کند شود (اما همچنان به طرف بالا باشد). آسانسوری که به طرف پایین حرکت می‌کند هم می‌تواند به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < 0$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > 0$) و حرکتش کند شود. وقتی شتاب و سرعت در جهت‌های مختلف باشند، یعنی مقدار سرعت در حال کاهش باشد، می‌گوییم که ذره شتاب کاهنده دارد.

شتاب (معادله ۱۴) همان شبی نمودار $v(t)$ است. اگر (t) ثابت باشد، $a = 0$ است؛ اگر (t) خط راست باشد، a ثابت و برابر با شبی خط است. اگر (t) منحنی باشد، a هم تابعی از t خواهد بود که با مشتق‌گیری از (t) v به دست می‌آید.

اگرون می‌توانیم شتاب را هم در نمودارهای شکل ۱۵ تا شکل ۱۷ وارد کنیم. برای مثال، نمودارهای مربوط به اتومبیل را که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند در شکل ۱۶ آورده‌ایم. بقیه موارد را، به عنوان تمرین، به خواننده وامی‌گذاریم.

مثال ۲. شکل ۱۷‌الف، شش "عکس لحظه‌ای" از ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. در $t = 0$ ، ذره در نقطه $x = +10\text{ m}$ را در طرف راست مبدأ داشت؛ در $t = 2.5\text{ s}$ ذره در $x = +5\text{ m}$ در حال سکون است؛ در $t = 4\text{ s}$ ، به $x = -1\text{ m}$ برگشته است. شکل ۱۷ ب نمودار مکان x بر حسب زمان t است. شکلهای ۱۷ ج و ۱۷ د هم به ترتیب سرعت و شتاب ذره را نشان می‌دهند. (الف) سرعت متوسط را در بازه‌های AD و DF پیدا کنید. (ب) شبی $x(t)$ را در نقاط B و F تخمین بزنید و با نقاط متناظر روی منحنی $v(t)$ مقایسه کنید. (ج) شتاب متوسط را در بازه‌های AD و DF پیدا کنید. (د) شبی $v(t)$ را در نقطه D تخمین بزنید و با مقدار (t) متناظر آن مقایسه کنید.



شکل ۱۵. (الف) مکان و (ب) سرعت یک گلوله خمیر که به روش شکل ۶ به بالا پرتاب می‌شود. در دنیای واقعی، سرعت نمی‌تواند به طور ناگهانی از یک مقدار غیر صفر به صفر برسد، "پرش" قائم در نمودار $v(t)$ (در زمانی که گلوله به زمین می‌خورد) هم باید تدریجی تر باشد.

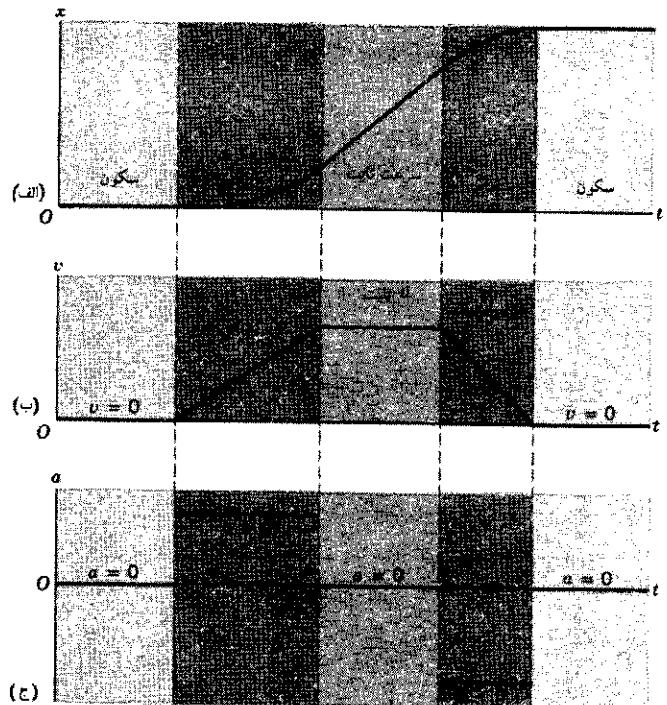
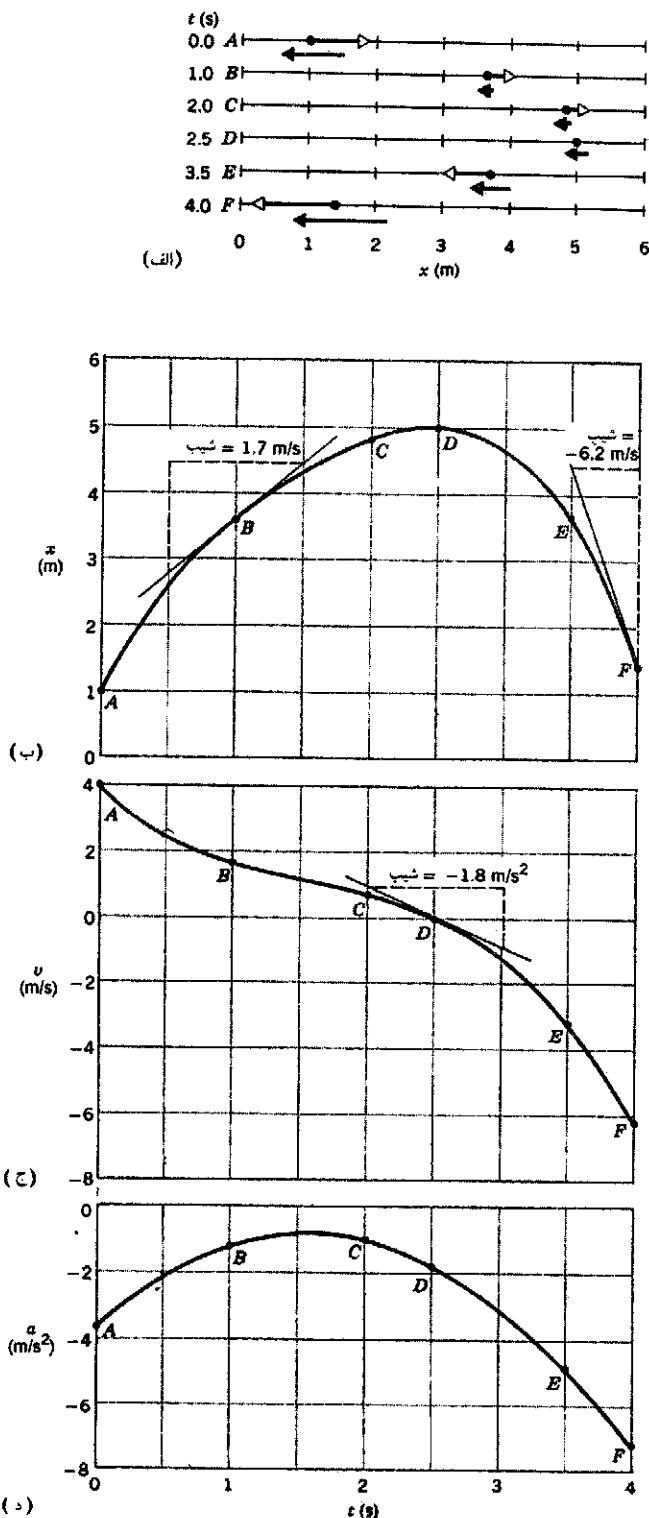
خط (t) v محور را قطع می‌کند. هنگامی که خمیر به زمین می‌چسبد، v آنرا صفر می‌شود. باز هم " نقطه‌ای تیز" در نمودار $x(t)$ که در t ناپیوستگی ایجاد می‌کند؛ در واقع امر، این نقطه گرد می‌شود و ناپیوستگی‌ای هم در کار نیست).

۵-۲ حرکت شتابدار

دیدیم (شکلهای ۱۲، ۱۳، و ۱۵) که در طی حرکت، سرعت ذره می‌تواند با زمان تغییر کند، تغییر سرعت در زمان را شتاب می‌نامند. مشابه با معادله ۵ می‌توان شتاب متوسط را از روی تغییر سرعت، $\bar{v} = v_2 - v_1$ در بازه زمانی Δt حساب کرد:

$$\bar{v} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (13)$$

یکای شتاب، سرعت بر زمان است، مثلاً متر بر ثانیه بر ثانیه، m/s^2 . از شتاب متوسط \bar{v} هم، درست مثل سرعت متوسط \bar{v} نمی‌توان تغییر (t) را در زمانهای مختلف بازه Δt به دست Δv آورد؛ \bar{v} تنها به تفاضل سرعت در انتهای و ابتدای بازه بستگی دارد. اگر \bar{v} برای همه چنین بازه‌هایی ثابت (منجمله صفر) باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که شتاب ثابت است. در این صورت، تغییر سرعت در همه بازه‌هایی که مدت برابر دارند یکی است. مثلاً چنانکه بعداً در همین فصل خواهیم دید، شتاب ناشی از نقل زمین، در نزدیکی سطح آن تقریباً ثابت و برابر با 9.8 m/s^2 است. سرعت اجسام افتادن، هر ثانیه 9.8 m/s تغییر می‌کند؛ در ثانیه اول 9.8 m/s زیاد می‌شود، در ثانیه بعد 9.8 m/s دیگر، و به همین ترتیب.



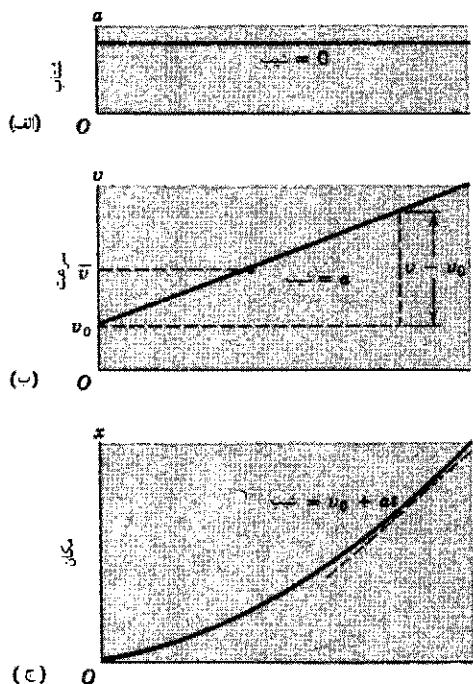
شکل ۱۶. (الف) مکان و (ب) سرعت، و (ج) شتاب اتومبیلی که از حالت سکون به راه می‌افتد، برای مدتی شتاب می‌گیرد، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سپس ترمز می‌کند و شتاب منفی می‌گیرد تا دوباره به حالت سکون برسد. در واقع نمی‌توان شتاب اتومبیل را به طور ناگهانی از مقداری به مقداری دیگر تغییرداد؛ هم $v(t)$ برای اتومبیلهای واقعی همواره پیوسته‌اند؛ منحنی‌های همواری بخش‌های تخت $a(t)$ را به هم وصل می‌کنند و نقاط تیز $v(t)$ گرد می‌شوند.

حل: (الف) از معادله ۵

$$\begin{aligned}\bar{v}_{AD} &= \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{5.0\text{ m} - 1.0\text{ m}}{2.5\text{ s} - 0.0\text{ s}} \\ &= \frac{4.0\text{ m}}{2.5\text{ s}} = +1.6\text{ m/s} \\ \bar{v}_{DF} &= \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{1.0\text{ m} - 5.0\text{ m}}{4.0\text{ s} - 2.5\text{ s}} \\ &= \frac{-4.0\text{ m}}{1.5\text{ s}} = -2.7\text{ m/s}\end{aligned}$$

علامت مثبت \bar{v}_{AD} نشان می‌دهد که ذره در بازه AD ، به طور متوسط، در جهت افزایش x حرکت می‌کند (یعنی به طرف راست در شکل ۱۷ الف). علامت منفی \bar{v}_{DF} نشان می‌دهد که ذره در بازه DF ، به طور متوسط، در جهت کاهش x حرکت می‌کند (یعنی به طرف چپ در شکل ۱۷ الف).

شکل ۱۷. (الف) شش "عکس لحظه‌ای" متولی از ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند. پیکان روی ذره سرعت لحظه‌ای، و پیکان زیر ذره شتاب لحظه‌ای آن را نشان می‌دهد. (ب) نمودار $x(t)$ برای حرکت ذره. شش نقطه A تا F متاظر با شش تصویر لحظه‌ای‌اند. (ج) نمودار $v(t)$. (د) نمودار $a(t)$.



شکل ۱۸. (الف) شتاب ثابت ذره، برابر با شیب (ثابت) v . (ب) سرعت ذره $v(t)$ ، که در هر نقطه برابر با شیب منحنی $x(t)$ است. سرعت متوسط \bar{v} هم، که در حالت شتاب ثابت برابر با میانگین v و v_0 است، در شکل مشخص شده است. (ج) مکان $x(t)$ ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مکان اولیه ذره $x_0 = 0$ فرض شده است.

فرض کنید که شتاب ثابت حرکت، a باشد (شکل ۱۸الف). وقتی a ثابت است، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای با هم برابرند، و فرمولهایی را که برای این دو به دست آوردهیم می‌شود در هر دو مورد به کار برد. جسمی در زمان $t = 0$ ، با سرعت v_0 حرکت می‌کند و در زمان بعدی t سرعت آن به v می‌رسد. معادله ۱۳، برای این بازه، به شکل زیر در می‌آید:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

یا

$$v = v_0 + at \quad (15)$$

به کمک این نتیجه مهم، می‌توان سرعت را در همه زمانهای بعدی به دست آورد. معادله ۱۵، سرعت را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد. این تابع را می‌شود با $v(t)$ نشان داد، اما ما معمولاً آن را با همان v نشان می‌دهیم. دقت کنید که معادله ۱۵ به شکل $y = mx + b$ است، که یک خط راست را توصیف می‌کند. a ، چنانکه قبله، توضیح داده‌ایم، شیب است و v_0 محل تقاطع خط با محور سرعت (مقدار v در $t = 0$) است. شکل ۱۸ ب این خط راست را نشان می‌دهد. برای کامل کردن تحلیل سینماتیک شتاب ثابت، باید بستگی مکان به زمان را به دست بیاوریم. برای این منظور، به رابطه‌ای برای سرعت

می‌شود این کمیتها را براورد کرد:

$$\text{نقطه } B: \text{شیب } = \frac{4,5m - 2,8m}{1,5s - 0,5s} = +1,7m/s = +1,7m/s$$

$$\text{نقطه } F: \text{شیب } = \frac{1,4m - 4,5m}{4,0s - 3,0s} = -3,1m = -6,2m/s$$

از منحنی $v(t)$ در نقاط B و F در شکل ۱۷ ج هم $v_B = +1,7m/s$ و $v_F = -6,2m/s$ براورد می‌شود، که با شیب $x(t)$ سازگار است. همان‌طور که انتظار می‌رود، $v(t) = dx/dt$ است. (ج) از معادله ۱۳،

$$\begin{aligned} \bar{a}_{AD} &= \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{0^{\circ}m/s - 4,0^{\circ}m/s}{2,0s - 0^{\circ}s} \\ &= -4,0^{\circ}m/s = +1,6m/s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{AF} &= \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-6,2m/s - 4,0^{\circ}m/s}{4,0s - 0^{\circ}s} \\ &= -10,2m/s = -2,6m/s^2 \end{aligned}$$

(د) از خط مماس بر $v(t)$ در نقطه D این کمیت را تخمین می‌زنیم.

$$\begin{aligned} \text{شیب } &= \frac{-1,9m/s - 0^{\circ}m/s}{2,0s - 2,0^{\circ}s} = \frac{-1,8m/s}{1,0s} \\ &= -1,8m/s^2 \end{aligned}$$

در نقطه D نمودار $a(t)$ ، دیده می‌شود که $a_D = -1,8m/s^2$. از نمودار $v(t)$ شکل ۱۷ ج، معلوم می‌شود که شیب $v(t)$ همواره منفی است. پس $a(t)$ هم باید منفی باشد. شکل ۱۷ د، همین را نشان می‌دهد.

۲-۶ حرکت با شتاب ثابت

موارد حرکت با شتاب ثابت (یا تقریباً ثابت) کم نیست: دو نمونه‌ای که تا به حال دیده‌ایم، یکی سقوط اجسام در نزدیکی سطح زمین و دیگری حرکت اتومبیلی است که ترمز کرده است. در این بخش، چند نتیجه مفید برای این حالت خاص به دست می‌آوریم. اما به خاطر داشته باشید که این حالت خاص است. نتایج این بخش را نمی‌شود در مواردی که a ثابت نیست به کار برد. از نمونه‌های حرکت با شتاب متغیر، می‌توان از حرکت وزنه آونگ، حرکت موشکی که به طرف مدارش به دور زمین پرتاب می‌شود، و حرکت قطره بارانی که در هوا (در معرض مقاومت هوا) سقوط می‌کند نام برد.

جدول ۲. معادلات حرکت با شتاب ثابت.^۱

شامل					معادله	شماره معادله
t	a	v	v_0	x		
✓	✓	✓	✓	✗	$v = v_0 + at$	۱۵
✓	✓	✗	✓	✓	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	۱۹
✗	✓	✓	✓	✓	$v' = v'_0 + 2a(x - x_0)$	۲۰
✓	✗	✓	✓	✓	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	۲۱
✓	✓	✓	✗	✓	$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	۲۲

۱. پیش از استفاده از معادلات این جدول باید مطمئن شوید که شتاب واقعاً ثابت است.

مطرح می‌شود: متلاً با معلوم بودن a ذره چه مسافتی (و نه چه مدتی) باید حرکت کند تا سرعت آن از v_0 به v برسد؟ در این موارد زمان ظاهر نمی‌شود. بنابراین می‌توانیم متغیر تاخوسته t را بین معادلات ۱۵ و ۱۹ حذف کنیم:

$$v' = v'_0 + 2a(x - x_0) \quad (۲۰)$$

از حذف کردن متغیرها یا پارامترهای دیگر، معادلات ۲۱ و ۲۲ حاصل می‌شوند. با این معادلات، که در جدول ۲ آمده‌اند، مجموعه معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت کامل می‌شود. با مشتق‌گیری از معادله ۱۹، می‌توان دید که این معادله یک نتیجه درست سینماتیکی است (مشتق این معادله، باید سرعت باشد):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2) = v_0 + at = v$$

و این همان عبارتی است که قبلاً برای سرعت به دست آورده‌یم. در استفاده از معادلات جدول ۲ برای حل مسائل، مبدأ دستگاه مختصات را می‌توانید هر نقطه‌ای که راحت‌تر است بگیرید. چهار تا از معادلات جدول ۲ به x بستگی دارند و در هر چهار معادله $x_0 - x$ هم ظاهر شده است. در واقع، هر چهار معادله به تفاصل $x - x_0$ بستگی دارند. معمولاً مبدأ را چنان می‌گیریم که $x_0 = 0$ شود. به این ترتیب، معادلات تا حدی ساده‌تر می‌شوند. هر یک از جهت‌های محور مختصات را می‌شود جهت مثبت گرفت. با انتخاب جهت مثبت، هر جایه‌جایی، سرعت، و شتابی اگر در آن جهت باشد مثبت، و اگر در خلاف آن جهت باشد منفی است. در همه مراحل حل یک مسئله خاص، باید مبدأ و جهت محورهای مختصات ثابت بماند.

مثال ۳. راننده‌ای ترمز می‌کند و سرعت اتومبیلش را، در طی مسافت $50m$ ، از $10m/h$ به $85km/h$ می‌رساند. (الف) شتاب اتومبیل، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (ب) این حرکت شتابدار چقدر طول کشیده است؟ (ج) اگر راننده بخواهد اتومبیل را با همین شتاب متوقف کند، چه مدت زمان بیشتری برای این کار لازم است و در این مدت، اتومبیل چه مسافت اضافی ای را می‌پیماید؟

متوسط در رازه زمانی \bar{v} تا t نیاز داریم. اگر نمودار v بر حسب زمان خط راست باشد (شکل ۱۸ ب)، مقدار متوسط \bar{v} به ازای زمان وسط این رازه به دست می‌آید و برابر با میانگین سرعت در زمان \bar{v} و زمان t است:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0) \quad (۱۶)$$

با استفاده از معادله ۱۵ می‌شود v را حذف کرد:

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at \quad (۱۷)$$

با استفاده از معادله ۵ (تعريف سرعت متوسط)، و با فرض اینکه ذره در زمان \bar{v} در نقطه x_0 و در زمان t در نقطه x است، سرعت متوسط را می‌توان چنین نوشت

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - \bar{v}} \quad (۱۸)$$

از ترکیب معادلات ۱۷ و ۱۸، این نتیجه برای $x(t)$ به دست می‌آید:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (۱۹)$$

پس اگر a ، و شرایط اولیه x_0 و v_0 (مکان و سرعت در $t = 0$) معلوم باشد، با استفاده از معادله ۱۹ می‌توانیم مکان x را در هر زمان بعدی به دست بیاوریم. هدف تحلیل سینماتیکی ما هم همین است. مسافت خالص پیموده شده از نقطه شروع، $x - x_0$ را جایه‌جایی می‌نامند. اغلب، برای سادگی، مبدأ مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_0 = 0$ باشد. شکل ۱۸ ج نمودار x بر حسب t را برای شتاب ثابت نشان می‌دهد.

دقت کنید که چهار متغیر (x, v, a, t) و دو شرط اولیه (x_0, v_0) داریم. معادلات ۱۵ و ۱۹ به همین شکل برای تحلیل سینماتیک مسئله، به عنوان مسئله مقدار اولیه، بدکار می‌روند: با داشتن شرایط فیزیکی (یعنی شتاب a و شرایط اولیه (x_0, v_0) ، می‌توان v و x را در هر زمانی به دست آورد. اما در خیلی از موارد، مسئله به صورت متفاوت

مثال ۴. یک ذره آلفا (هسته اتم هلیم) در لوله‌ای راست و توانایی به طول 2 m حرکت می‌کند. این لوله بخشی از یک شتابدهنده ذرات است.

(الف) اگر ذره با سرعت 10^6 m/s به طرف $x_0 = 0$ را به طرف $x = 2\text{ m}$ وارد باشد، سرعت ذره (که ثابت فرض می‌شود) چقدر است؟ (ب) ذره چه مدت در لوله است؟

حل: (الف) مسحور x را مواری بالوله، جهت مثبت را جهت حرکت ذره، و مبدأ را ورودی لوله می‌گیریم. $x_0 = 0$ ، $v_0 = 0$ معلوم‌اند و a مجهول است. معادله‌ای است، که a را از آن بدست می‌آوریم:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(5 \times 10^6 \text{ m/s})^2 - (0 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(2\text{ m})} = +6 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$$

(ب) از معادله ۲۱، $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{2x}{v_0 + at} = \frac{2(2\text{ m})}{0 + 6 \times 10^{12} \text{ m/s} \times 0.0001 \text{ s}} = 8 \times 10^{-8} \text{ s} = 8 \mu\text{s}$$

۷- سقوط آزاد اجسام

یکی از آشناترین نمونه‌های حرکت با شتاب (تقریباً) ثابت، حرکت جسمی است که به طرف زمین سقوط می‌کند. اجسامی را در نظر بگیرید که در خال سقوط می‌کنند، یعنی مقاومت هوا بر حرکت آنها مؤثر نیست. از بررسی حرکت این اجسام، به واقعیت جالبی می‌رسیم: همه اجسام، مستقل از اندازه، شکل، یا ترکیب‌شان، در نزدیکی سطح زمین با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند. این شتاب، که آنرا با w نشان می‌دهیم، شتاب سقوط آزاد (یا گاهی شتاب ناشی از گرانی) نامیده می‌شود. البته این شتاب به فاصله جسم افتادن از مرکز زمین بستگی دارد (فصل ۱۶)، اما اگر مسافت سقوط در مقایسه با شعاع زمین (۶۴۰۰ km) کوچک باشد، شتاب را می‌توان در مدت سقوط ثابت گرفت.

در نزدیکی سطح زمین، اندازه w تقریباً 9.8 m/s^2 است. ما هم همه جای این کتاب همین مقدار را به کار می‌بریم، مگر آنکه صریحاً مقدار دقیق‌تری را ذکر کنیم. جهت شتاب سقوط آزاد در هر نقطه، جهت "پایین" را در آن نقطه مشخص می‌کند.

معمول‌اً از اجسام افтан صحبت می‌کنیم، اما به اجسامی که به طرف بالا حرکت می‌کنند هم همان شتاب سقوط آزاد (با همان اندازه و جهت) وارد می‌شود. یعنی سرعت ذره به طرف بالا باشد چه به طرف پایین، جهت شتاب آن، تحت تأثیر گرانش زمین، همیشه به طرف پایین است.

حل: (الف) جهت مثبت را همان جهت سرعت می‌گیریم. مبدأ را نیز جان می‌گیریم که نقطه آغاز ترمز کردن، $x_0 = 0$ باشد. سرعت اولیه، $v_0 = 85 \text{ km/h}$ در $t = 0$ ، و سرعت نهایی، $v = 45 \text{ km/h}$ در زمان (t)، یعنی وقتی که اتومبیل شتاب جابه‌جا شده، معلوم است. به معادله‌ای نیاز داریم که شامل شتاب (مجهول) باشد، اما شامل زمان نباشد. معادله ۲۰ چنین معادله‌ای است، که a را از آن بدست می‌آوریم:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45 \text{ km/h})^2 - (85 \text{ km/h})^2}{2(10.5 \text{ km})} = -248 \times 10^3 \text{ km/h}^2 = -191 \text{ m/s}^2$$

این شتاب کاهنده است و علامتش منفی است، یعنی در خلاف جهتی است که آن را مثبت اختیار کردۀ‌ایم.

(ب) معادله‌ای می‌خواهیم که شتاب در آن نباشد تا بتوانیم زمان را از داده‌های اولیه به دست بیاوریم. از جدول ۲ مشاهده می‌کنیم که معادله ۲۱ این ویژگی را دارد. از این معادله t را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + at} = \frac{2(10.5 \text{ km})}{85 \text{ km/h} + 45 \text{ km/h}} = 1.62 \times 10^{-3} \text{ h} = 5.8 \text{ s}$$

در حل این قسمت، می‌توانستیم معادله‌ای به کار ببریم که شامل شتاب هم باشد اما در آن صورت خطایی که ممکن است در حل قسمت (الف) به وجود آمده باشد، در قسمت (ب) هم وارد می‌شود. توجه کنید که در حل قسمتهای مستقل یک مستقل، در صورت امکان، همیشه بهتر است که به داده‌های اولیه برگردیم و مستقله را مستقیماً با آنها حل کنیم.

(ج) حالا که شتاب معلوم است، زمانی را حساب می‌کنیم که در آن سرعت اتومبیل از 85 km/h به $v = 0$ می‌رسد. برای این کار معادله ۱۵ مناسب است، که از آن t را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 85 \text{ km/h}}{-248 \times 10^3 \text{ km/h}^2} = 1.23 \times 10^{-3} \text{ h} = 12.3 \text{ s}$$

اتومبیل 12.3 s از ترمز، یا 5.8 s (یعنی $5.8 \text{ s} - 12.3 \text{ s} = 4.5 \text{ s}$) متوقف می‌شود. برای پیدا کردن مسافت، معادله ۲۰ را به کار می‌بریم:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (85 \text{ km/h})^2}{2(-248 \times 10^3 \text{ km/h}^2)} = 146 \text{ km} = 146 \text{ m}$$

مسافت اضافی‌ای که اتومبیل می‌یابد تا سرعتش از 45 km/h به $v = 0$ برسد برابر با $10.5 \text{ m} - 146 \text{ m} = 41 \text{ m}$ است.

t	s	m	m/s	m/s^2
0	0	0	-9.8	
1.0	-4.9	-9.8	-9.8	
2.0	-19.6	-19.6	-9.8	
3.0	-44.1	-29.4	-9.8	
4.0	-78.4	-39.2	-9.8	

شکل ۱۹. مثال ۵. ارتفاع، سرعت، و شتاب جسمی که در حال سقوط آزاد است.

می‌کند. به همین ترتیب می‌توانیم مکان و سرعت را در $t = 2\text{ s}$, $t = 3\text{ s}$, و $t = 4\text{ s}$ بدست بیاوریم (شکل ۱۹).

مثال ۶. توپی را از زمین با سرعت 25 m/s در راستای عمودی به بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به نقطه اوج مسیر خود برسد؟ (ب) توپ تا کجا بالا می‌رود؟ (ج) در چه زمانهایی توپ در ارتفاع 27 m از سطح زمین واقع می‌شود؟

حل: (الف) سرعت توپ، در نقطه اوج، صفر می‌شود. با داشتن $v_0 = 25\text{ m/s}$ و $v = 0$ ، می‌خواهیم t را حساب کنیم. از معادله ۲۳ بدست می‌آید:

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{25\text{ m/s} - 0}{9.8\text{ m/s}^2} = 2.57\text{ s}$$

(ب) از داده‌های اولیه استفاده می‌کنیم تا خطای احتمالی قسمت (الف) وارد این قسمت نشود. از معادله ۲۵، با $y_0 = 0$ ، می‌شود y را بدست آورده:

$$y = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(25\text{ m/s})^2 - 0}{2(9.8\text{ m/s}^2)} = 32.4\text{ m}$$

(ج) در این حالت معادله ۲۴ به کار می‌آید، زیرا t تنها مجهول آن است. جون می‌خواهیم t را بدست بیاوریم. از معادله ۲۴ را، با

مقدار دقیق شتاب سقوط آزاد در هر نقطه تابع عرض جغرافیایی و ارتفاع آن نقطه از سطح زمین است. همچنین، یکسان نبودن چگالی نقاط مختلف پوسته زمین هم باعث تفاوت‌هایی در شتاب سقوط آزاد در نقاط مختلف می‌شود که به هر حال قابل ملاحظه است. این ازها را در فصل ۱۶ بررسی خواهیم کرد.

معادلات جدول ۲ (برای شتاب ثابت) را می‌شود در مورد سقوط آزاد هم به کار برد. تنها چند تغییر کوچک اعمال می‌کنیم: (۱) راستای سقوط آزاد را با y مشخص می‌کنیم و جهت مثبت آن را رو به بالا می‌گیریم. بعداً، در فصل ۴، که حرکت دو بعدی را بررسی می‌کنیم، مختصه x را برای حرکت افقی به کار خواهیم برد. (۲) به جای شتاب ثابت a در جدول ۲، $-g$ می‌گذاریم، چون جهت مثبت y را رو به بالا گرفته‌ایم و شتاب در خلاف این جهت (منفی) است. توجه کنید که شتاب (رو به پایین) را $-g$ گرفته‌ایم، پس g عددی مثبت است. با این تغییرات کوچک، معادلات جدول ۲ به این شکل در می‌آیند:

$$v = v_0 - gt \quad (21)$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (22)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (23)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad (24)$$

$$y = y_0 + vt + \frac{1}{2}gt^2 \quad (25)$$

مثال ۵. جسمی از حالت سکون شروع به سقوط آزاد می‌کند. مکان و سرعت جسم را پس از گذشت 1 s , 2 s , 3 s , و 4 s پیدا کنید.

حل: نقطه شروع را مبدأ می‌گیریم. سرعت اولیه (صفرا) و شتاب را می‌دانیم، و زمان هم معلوم است. برای یافتن مکان، معادله ۲۴ را با $y_0 = 0$ و $v_0 = 0$ به کار می‌بریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

1 s را در معادله بالا قرار می‌دهیم

$$y = -\frac{1}{2}(9.8\text{ m/s}^2)(1\text{ s})^2 = -4.9\text{ m}$$

برای یافتن سرعت، معادله ۲۳ را، باز هم با $y_0 = 0$ ، $v_0 = 0$ ، به کار می‌بریم:

$$v = -gt = -(9.8\text{ m/s}^2)(1\text{ s}) = -9.8\text{ m/s}$$

8 s را پس از شروع سقوط، جسم 49 m زیر (y منفی است) نقطه شروع است و با سرعت 9.8 m/s به طرف پایین (v منفی است) حرکت

سرعت در سطح آب، 116m/s به طرف بالاست. حالا بخش سقوط آزاد حرکت رو به بالا را بررسی می‌کنیم. در اینجا سرعتی که در بالا به دست آمد، سرعت اولیه است. معادله 25 برای سقوط آزاد را به کار می‌بریم. طبق معمول، نقطه اوج نقطه‌ای است که سرعت ذله را آن صفر می‌شود:

$$y - y_0 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(116\text{m/s})^2 - 0}{2(9,8\text{m/s}^2)} = 687\text{m}$$

برای اینکه مطمئن شوید که مسئله را فهمیده‌اید، نمودارهای $y(t)$ ، $v(t)$ و $a(t)$ را (مثل شکل 16) رسم کنید. در این مسئله مهم توجه کنید که کدام متغیرها بیوسته‌اند و کدام ناپیوسته. رفتار یک موشک واقعی چه تفاوتی با این مسئله ایده‌آل دارد؟

$= y$ ، به شکل معادله درجه دوم می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + y_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}(9,8\text{m/s}^2)t^2 - (25,2\text{m/s})t + 270\text{m} = 0$$

از حل این معادله جوابهای $t = 152\text{s}$ و $t = 362\text{s}$ به دست می‌آید. در $t = 152\text{s}$ ، سرعت توب برابر است با

$$v = v_0 - gt = 25,2\text{m/s} - (9,8\text{m/s}^2)(152\text{s}) \\ = 103\text{m/s}$$

و در $t = 362\text{s}$

$$v = v_0 - gt = 25,2\text{m/s} - (9,8\text{m/s}^2)(362\text{s}) \\ = -103\text{m/s}$$

این دو سرعت مقادیر مساوی ولی جهت‌های مخالف دارند. باید توانید نشان بدهید که اگر مقاومت هوا نباشد، زمانی که طول می‌کشد تا توب تا نقطه اوج صعود کند، برابر با زمانی است که طول می‌کشد تا توب همین مسافت را سقوط کند، و اندازه سرعت توب در هر نقطه، هنگام بالا رفتن و هنگام پایین آمدن، یکی است. وقت کنید که جواب قسمت (الف) برای لحظه رسیدن توب به نقطه اوج ($t = 257\text{s}$) درست در وسط دو زمانی است که در قسمت (ج) به دست آمد، آیا می‌توانید بگویید چرا؟ آیا می‌توانید بطور کیفی اثر مقاومت هوا را بر زمانهای صعود و سقوط پیش‌بینی کنید؟

مثال ۷. موشکی از عمق 125m در آب، از حالت سکون در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. مقدار شتاب این موشک، که آن را تاب فرض می‌کنیم، مجھول است (این شتاب از برایند اثر موتورهای موشک، گرانش زمین، نیروی ارشمیدس، و مقاومت آب حاصل می‌شود). موشک در مدت 2s به سطح آب می‌رسد، و در لحظه خروج از آب، موتورهای آن به طور خودکار خاموش می‌شوند (تا ریدایب آن آسان نباشد) و به صعود خود ادامه می‌دهد. این موشک تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟ (اترها مربوط به سطح آب را نماید بگیرید).

حل: در اینجا هم، مثل مسئله سقوط آزاد، برای بررسی حرکت موشک در هوا باید سرعت اولیه آن را در این بخش از حرکتش بدانیم. بنابراین، طرح مسئله به این شکل است که بخش زیر آب را بررسی کنیم، سرعت موشک را در سطح آب به دست بیاوریم، و این سرعت را به عنوان سرعت اولیه بخش سقوط آزاد به کار ببریم. این دو بخش را باید جداگانه حل کرد، زیرا شتاب موشک در سطح آب تغییر می‌کند. در زیر آب، تغییر مکان، زمان، و سرعت اولیه (صفر) معلوم‌اند. به شتاب نیاز نداریم، می‌خواهیم سرعت نهایی را به دست بیاوریم؛ معادله ۲۱ جدول ۲، همان رابطه مناسب است:

$$v = \frac{2(y - y_0)}{t} = \frac{2(125\text{m})}{2\text{s}} = 116\text{m/s}$$

۸-۲ گالیله و سقوط آزاد (اختیاری)

ماهیت حرکت اجسام افтан از مدتها پیش جزء مسائل مورد علاقه در فلسفه طبیعی بوده است. ارسطو مدعی بود که "حرکت رو به پایین ... هر جسمی که وزنی دارد، متناسب با اندازه‌اش، تندتر است." یعنی اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند. قرنها طول کشید تا گالیله گالیلی [گالیله] (۱۵۶۴ تا ۱۶۴۲) حکم درست را صادر کرد: "اگر اثر مقاومت هوا حذف شود، همه اجسام با سرعت یکسان سقوط می‌کنند." گالیله، در سالهای بعدی زندگی‌اش، رساله‌ای به نام گفتگوهایی درباره دو علم جدید نوشت و در آن به تفصیل مطالعات خودش درباره حرکت را بیان کرد.

این باور ارسطو که اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند، دیدگاهی است که عموم آن را درست می‌پنداشند. ظاهرًا نمایش کلاسی مشهوری هم آن را تأیید می‌کند: اگر یک توب و یک صفحه کاغذ را با هم رها کنید، توب خیلی زودتر به زمین می‌رسد. اما اگر اول کاغذ را را مجله کنید و نمایش را تکرار کنید، توب و کاغذ تقریباً همزمان به زمین می‌رسند. در حالت اول، اثر مقاومت هواست که باعث می‌شود کاغذ کندتر از توب حرکت کند. در حالت دوم، اثر مقاومت هوا بر کاغذ کاهش یافته و تقریباً با اثر مقاومت هوا بر توب برابر شده است. بنابراین، دو جسم تقریباً با یک سرعت سقوط می‌کنند. البته می‌توان این را مستقیماً با بررسی سقوط اجسام در خلا آزمایش کرد. حتی در خلاهای جزئی هم، که به سادگی قابل دسترسی‌اند، دیده می‌شود که یک پر و یک توب سریعی که هزاران بار از پر سنگین‌تر است، با سرعت‌هایی سقوط می‌کنند که عملانه‌تری توان اختلافی بین آنها مشاهده کرد. در سال ۱۹۷۱، یک فضانورد امریکایی (دیوید اسکات)، یک پر و یک چکش را در ارتفاعی مشاهده اول—همزمان به سطح ماه رسیدند. هر دو—در حد خطای مشاهده اول—همزمان به سطح ماه رسیدند. اما در زمان گالیله روش مؤثری برای تولید خلا جزئی در کار نبود

بود. دقت این روش نهایتاً به حدود $1 \text{ در } 10^6$ رسید. این دقت برای تشخیص اختلاف مقادیر و در دو طبقه یک ساختمان کافی است. دقت روش آونگ به همین حد محدود می‌شود زیرا خطأ در تعیین رفتار واقعی نقطه لولای آونگ نمی‌گذارد که دقت سنجش طول آونگ را از حد معینی بیشتر کنیم. اخیراً برای دقیقتر کردن اندازه‌گیری و آزمایشگران دوباره به روش سقوط آزاد روی آورده‌اند. دقت این روش، با استفاده از تداخل سنجی لیزری، تقریباً به $1 \text{ در } 10^6$ رسیده است. با این دقت می‌شود تعییرات میدان گرانشی زمین را در مسافت قائمی به طول 1cm سنجید؛ چنین گرانشی سنجی می‌تواند تعییر میدان گرانشی ناشی از خود آزمایشگری را که 1m آن طرفت از دستگاه ایستاده است حس کند! رسیدن به چنین دقتی، موفقیت بزرگی برای روش‌های دقیق آزمایشگاهی است. مثلاً شاید تصور کنید که برای حذف اثر مقاومت هوا بر سقوط آزاد، جسم را باید در خلا رها کرد. این البته حرف درستی است، اما بهترین خلاهای آزمایشگاهی فعلی هم نمی‌توانند شرایطی را که برای دقت 10^{-9} در سنجش و لازم است فراهم کنند. برای کاهش اثر مقادیر ناچیز گاز باقی‌مانده که حتی در خلاهای شدید هم حضور دارد، جسمی را که قرار است سقوط آزاد کند در یک جعبه خلا می‌گذاریم و جعبه را هم با جسم رها می‌کنند. گاز باقی‌مانده چون همراه جسم سقوط می‌کند، مقاومتی در برابر حرکت جسم نشان نمی‌دهد.

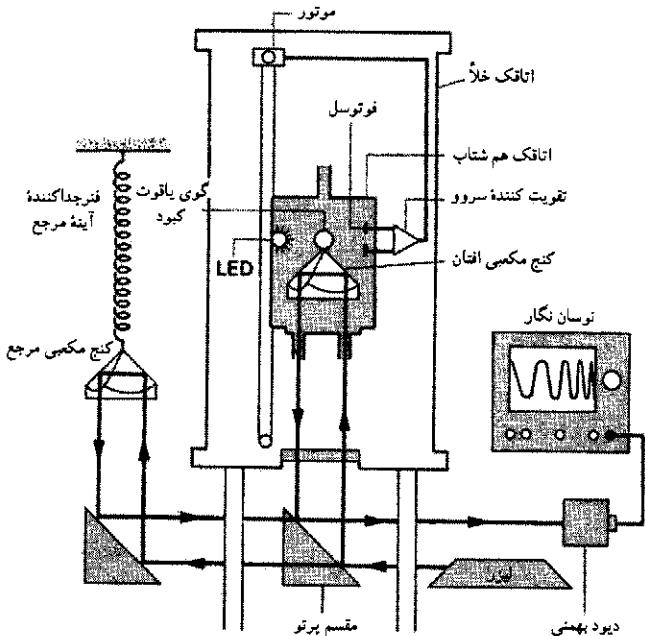
شکل ۲۰ طرحی از یک دستگاه سقوط آزاد را نشان می‌دهد که

و همچنین، وسیله‌ای با دقت کافی برای تعیین زمان سقوط اجسام وجود نداشت تا بتوان اطلاعات عددی قابل اطمینان به دست آورد. (دانسته مشهوری که می‌گوید گالیله دو جسم را از بالای برج پیزا، رها کرد و مشاهده کرد که هر دو همزمان به زمین می‌رسند، به احتمال بسیار زیاد فقط افسانه است. با توجه به ارتفاع برج و اجسامی که گذته می‌شود گالیله به کار برده است، در صورت وقوع این آزمایش، به علت وجود مقاومت هوا، جسم سنگین‌تر و بزرگ‌تر می‌باشد. در این صورت، گالیله متر جلوتر از جسم سبکتر به زمین رسیده باشد. در این ادعای ظاهراً ادعای ارسطو را تأیید کرده بوده است!) با این همه گالیله ادعای خود را با غلتباندن توبی روی سطح شیبدار ثابت کرد. ابتدا نشان داد که سینماتیک توبی که روی سطح شیبدار به پایین می‌غلند شبیه سینماتیک توبی است که آزادانه سقوط می‌کند. سطح شیبدار فقط موجب می‌شود که اثر شتاب ناشی از گرانش زمین کم شود؛ به این ترتیب، حرکت کند می‌شود و سنجش آن ساده‌تر می‌شود. بعلاوه، در سرعنهای کم، اهمیت مقاومت هوا هم کمتر می‌شود.

گالیله از آزمایشهاش دریافت که مسافت‌هایی که در بلازه‌های زمانی یکسان متواتی طی می‌شوند، متناسب با اعداد فرد $1, 2, 5, 3, 7, \dots$ و غیره‌اند. کل مسافتی که از زمان شروع حرکت تا انتهای هر یک از این بازه‌ها طی می‌شود متناسب است با $1, (4 = 1 + 3), (9 = 1 + 3 + 5), (16 = 1 + 3 + 5 + 7), \dots$ یعنی برابر است با محدود اعداد $1, 2, 3, 4, \dots$ و الی آخر. اما اگر مسافت طی شده متناسب با محدود زمان باشد، تغییر سرعت مستقیماً متناسب با زمان است؛ نتیجه‌ای که خاص حرکت با شتاب ثابت است. سرانجام، گالیله دریافت که نتایج حاصل از حرکت بستگی به جرم توب ندارند. به این ترتیب، به اصطلاح خودمان، شتاب سقوط آزاد مستقل از جرم جسم افتدان است.

۹-۲ اندازه‌گیری شتاب سقوط آزاد (اختیاری)

اندازه‌گیری و یکی از آزمایش‌های استاندارد در آزمایشگاه فیزیک پایه است. به این منظور مثلاً می‌توان زمانی را که طول می‌کشد تا ذره‌ای از حالت سکون مسافت معینی را سقوط کند اندازه گرفت و سپس، با استفاده از معادله $2\frac{s}{g}$ را تعیین کرد. در این مورد به دقت حدود 1% رسید. روشی بهتر وجود دارد و آن استفاده از آونگ است. نیروی محرك آونگ از جاذبه زمین بر وزنه آن تأمین می‌شود. در فصل ۱۵ خواهیم دید که مقدار g را می‌توان با اندازه‌گیری دوره تناوب نوسان آونگی به طول معین، بدست آورد. با اندازه‌گیری زمان لازم چندین نوسان، مقدار دقیقی برای دوره تناوب بدست می‌آید. در این مورد با استفاده از دستگاه‌های معمولی آزمایشگاهها می‌توان به سادگی به دقتی در حدود 1% رسید. چنین دقتی برای مشاهده اختلاف مقادیر و در سطح دریا و در قله یک کوه (مثلی به ارتفاع 10000ft یا 3km)، یا برای مشاهده اختلاف مقادیر و در استوا و در قطب، کافی است. به مدت چند قرن، دقیق‌ترین روش سنجش و همان روش آونگ



شکل ۲۰. نمودار دستگاه سنجش سقوط آزاد. نوسان نگار الگوی تداخلهای ویرانگر و سازنده را نشان می‌دهد. این تداخل ناشی از پرتو لیزری است که از کنج افتاب بازتابیده می‌شود و با پرتو حاصل از کنج مرجع ترکیب می‌شود. اندازه‌گیری شتاب را موتوری به طرف پایین حرکت می‌دهد، چنان که همراه با کنج سقوط کند.

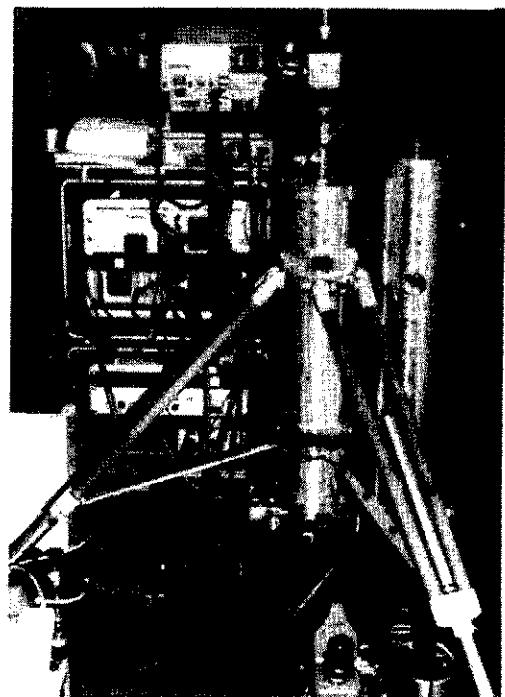
رمان را می‌توان با اثری که این تغییرات بر و می‌گذارند مشاهده کرد. به این ترتیب، می‌توان حرکت صفحات پوسته زمین و فعالیتهای لرزه‌ای زمین را دنبال کرد. تغییرات کوچک در میدان گرانشی زمین می‌تواند بر مدار ماهواره‌ها و مسیر موشکهای قاره‌پیما تأثیر بگذارد، و در علم پایه، با اندازه‌گیریهای دقیق و امکان آزمون جزئیات درکی که از نظریه گرانشی داریم فراهم می‌شود؛ نظریه‌ای که بیش از سه قرن پیش، آیاک نیوتون آن را پایه‌گذاری کرد.

پرسشها

۱. آیا اندازه سرعت یک جسم می‌تواند منفی باشد؟ اگر می‌گویید بله، مثالی بیاورید؛ اگر می‌گویید نه، توضیح بدهید که چرا.
۲. خرگوشی در هر ثانیه نصف فاصله باقی‌مانده بین بینی خود و سر یک کاهو را می‌پیماید. آیا این خرگوش اصولاً می‌تواند به کاهو برسد؟ مقدار حدی سرعت متوسط خرگوش چقدر است؟ نمودارهای سرعت و مکان خرگوش را بر حسب زمان رسم کنید.
۳. متوسط اندازه سرعت، برابر است با طول مسیر پیموده شده تقسیم بر مدت حرکت. آیا این کمیت با اندازه سرعت متوسط فرق دارد؟ مثالی بیاورید که نظرتان را تأیید کند.
۴. در یک میدان بخصوص مسابقات اتومبیلرانی، اتومبیلی دور اول از یک مسیر ۲ دوری را با سرعت متوسط 90 mi/h می‌پیماید. راننده می‌خواهد سرعت اتومبیل را در دور دوم چنان زیاد کند که سرعت متوسطش در کل مسابقه 180 mi/h باشد. نشان بدهید که این کار ممکن نیست.
۵. باب یک مسابقه دو 100 m را با اختلاف 10 m از جودی می‌برد، و دفعه بعد برای اینکه به جودی شانس بردن داده باشد، موقع شروع مسابقه 10 m از جودی عقبتر می‌ایستد. آیا بار شانس باب و جودی برای برنده شدن واقعاً مساوی است؟
۶. اگر سرعت ثابت باشد، آیا ممکن است که سرعت متوسط در بازه‌ای با سرعت در یکی از لحظات آن باره متفاوت باشد؟ اگر پاسختان مثبت است مثالی بزنید، اگر منفی است بگویید چرا.
۷. اگر شتاب حرکت یکنواخت نباشد، آیا هیچ وقت ممکن است که میانگین سرعت ذرهای که در راستای محور x حرکت می‌کند $(v + v) \frac{t}{2}$ باشد؟ جواب خودتان را با استفاده از نمودار ثابت کنید.
۸. آیا سرعت سنج ماشین همان اندازه سرعتی را که تعریف کردیم می‌ستجد؟
۹. (الف) آیا ممکن است سرعت جسمی صفر باشد ولی شتاب آن غیر صفر باشد؟ (ب) آیا ممکن است سرعت جسمی ثابت باشد ولی اندازه سرعت متغیر باشد؟ در هر مورد، اگر جواب مثبت است مثالی بیاورید؛ اگر منفی است بگویید چرا.
۱۰. آیا ممکن است جهت سرعت جسمی که شتاب ثابت دارد، معکوس شود؟ اگر می‌گویید بله، مثال بیاورید؛ اگر می‌گویید نه بگویید که چرا.

دکتر جیمز فالر و همکارانش آنرا در " مؤسسه مشترک اختر فیزیک آزمایشگاهی " در بولدر، کلرادو، طراحی کرده‌اند. جسم افتان، یک کنج بازتابنده است، در واقع کنجدی است از یک مکعب شبشهای که سه وجه آن با لایه بازتابنده آندود شده است. ویژگی مفید این وسیله آن است که نور از هر جهتی که به داخل کنج بتاگد، درست در جهت مخالف بازتابیده می‌شود. (فضانوردان آپولو آرایه‌ای از چنین بازتابنده‌هایی را در ماه نصب کرده‌اند؛ با تاباندن باریکه لیزر از زمین به ماه و دریافت بازتاب این باریکه، می‌توان فاصله زمین تا ماه را به دقت سنجید.) یک باریکه لیزر را از جسم افتان بازمی‌تابد و باریکه‌های فرودی و بازتابیده با هم تداخل می‌کنند و در حین سقوط جسم مرتباً یکدیگر را تقویت و تضعیف می‌کنند. مسافتی که جسم افتان می‌پیماید تا از یک تداخل ویرانگر به تداخل ویرانگر بعدی برسیم نصف طول موج نور است. بنابراین، کل مسافت سقوط آزاد را می‌توان، تنها با شمردن عده تداخلهای ویرانگر، با دقت کسری از طول موج نور به دست آورد. همزمان با فاصله زمانی بین دو تداخل ویرانگر با ساعت اتمی اندازه‌گیری می‌شود. به این ترتیب، مسافت و زمان هر دو با هم به دست می‌آیند، مثل همان روش‌هایی که خودتان ممکن است در آزمایشگاه فیزیک پایه به کار بگیرید. شکل ۲۱، تصویر این ابزار عالی را نشان می‌دهد.

ساختن گرانی سنج‌های دقیقتر، نتایج عملی مهمی دارد. نگاشت میدان گرانشی زمین، به یافتن منابع نفت یا کانیهای دیگر کمک می‌کند (نگاه کنید به شکل ۵ در فصل ۱۶). تغییرات پوسته زمین در طی



شکل ۲۱. عکسی از دستگاه سقوط آزاد (که نمودار از در شکل ۲۰ آمده است). این تجهیزات را می‌توان به راحتی حمل کرد و را در هر محلی که لازم است اندازه گرفت.

۱۶. شخصی که بر لبه صخره‌ای مرتفع ایستاده است، توپی را با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا و توپی دیگر را با سرعت اولیه v_1 رو به پایین پرتاب می‌کند. کدام توب در پای صخره با سرعت بیشتری به زمین برخورد می‌کند؟ مقاومت هوا را ندیده بگیرید.

۱۷. جسمی از موشکی که با شتاب $a = 9.8 \text{ m/s}^2$ رو به بالا حرکت می‌کند رها می‌شود. شتاب رو به پایین این جسم چقدر است؟

۱۸. ذره‌ای را در نظر بگیرید که از حالت سکون ($v = 0$) از نقطه $x = 0$ و در زمان $t = t_0$ با شتاب a شروع به حرکت کند. از معادله $x = \frac{1}{2}at^2$ برای حرکت با شتاب ثابت نتیجه می‌شود که ذره در دو زمان متقاولت $\sqrt{\frac{2x}{a}} + \sqrt{\frac{2x}{a}}$ در نقطه x است. معنی ریشه منفی این معادله درجه دو چیست؟

۱۹. مقدار g در سیاره‌ای نصف مقدار آن در زمین است. زمان لازم برای سقوط اجسام از حالت سکون در این سیاره، چه ربطی با زمان مشابه در زمین دارد؟ مسافت‌های سقوط را یکی بگیرید.

۲۰. (الف) سنگی با سرعت معینی در سیاره‌ای که شتاب سقوط آزاد در سطح آن دو برابر همین شتاب در سطح زمین است، به طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع اوچ این سنگ را با ارتفاع مشابه در زمین مقایسه کنید. (ب) اگر سرعت اولیه را دو برابر کنیم، ارتفاع اوچ چه تغییری می‌کند؟

۲۱. توپی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن مقاومت هوا، فکر می‌کنید زمان صعود توب بیشتر باشد یا زمان سقوط آن؟ چرا؟

۲۲. نمودار کافی سرعت بر حسب زمان را برای جسم افتانی که (الف) مقاومت هوا در برابر حرکت آن ناچیز است و (ب) مقاومت هوا در برابر حرکت آن قابل ملاحظه است، رسم کنید.

۲۳. دو توب را به فاصله 15 m از هم رها می‌کنیم. (الف) فاصله بین دو توب با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ (ب) نسبت سرعت توب اول به سرعت توب دوم، v_1/v_2 ، با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم بپوشید، و پاسخهای کیفی بدهید.

۲۴. پرسش ۲۳ را، با در نظر گرفتن مقاومت هوا، دوباره پاسخ بدهید؛ باز هم پاسخهای کیفی.

۲۵. اگر m یک سنگ سبک و M یک سنگ سنگین باشد، بنا به ادعای ارسسطو، M باید سریعتر از m سقوط کند. گالیله سعی کرد نشان بدهد که این ادعای ارسسطو با منطق سازگار نیست. استدلال گالیله چنین بود: M را به هم بیندید و سنگ بزرگتری بسازید. در این حالت، m باید مراحم سقوط M شود زیرا کنترل از M حرکت می‌کند. پس سنگ مرکب باید تندتر از m و کنترل از M سقوط کند؛ اما طبق ادعای ارسسطو، سنگ جدید $(M + m)$ سنگینتر از M است و باید تندتر از M حرکت کند. آیا اگر استدلال گالیله را بپذیریم، می‌توان گفت که M و m باید با یک سرعت سقوط کنند؟ در این صورت چه نیازی به آزمایش است؟ اگر فکر می‌کنید که استدلال گالیله نادرست است، بگویید چرا؟

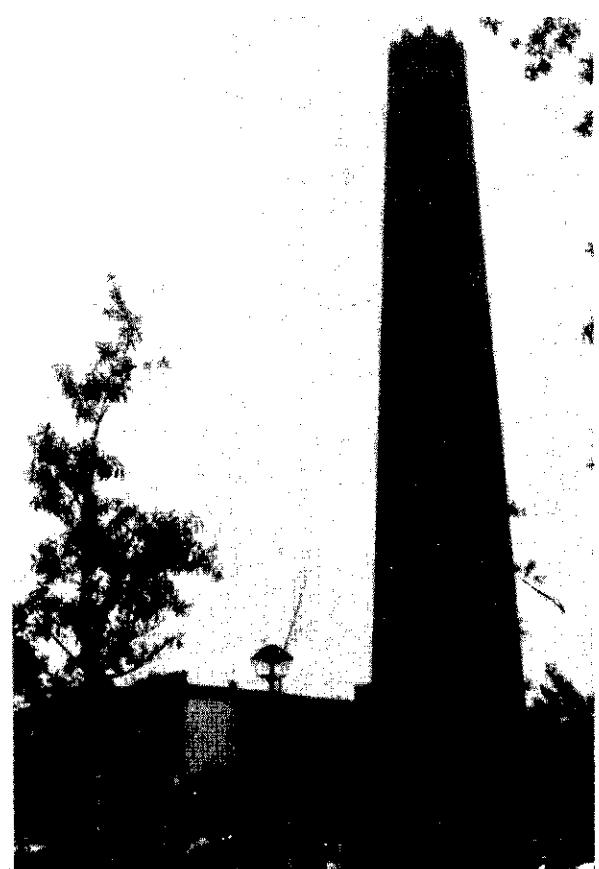
۱۱. شکل ۳۰، سرهنگ جان استپ را در سورتمه موشکی خود که در حال ترمز است، نشان می‌دهد (نگاه کنید به مسئله ۳۴). (الف) بدن این فضانورد یک شتاب سنج است نه یک سرعت سنج. این موضوع را توضیح بدهید. (ب) آیا می‌توانید از روی شکل، جهت شتاب را تعیین کنید؟

۱۲. آیا ممکن است شتاب جسمی در حال کاهش و سرعت آن در حال افزایش باشد؟ اگر جوابتان بله است مثالی بیاورید؛ اگر نه، بگویید چرا؟

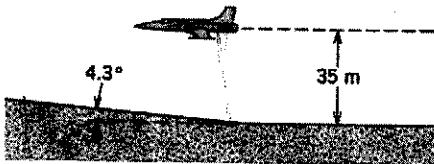
۱۳. کدام یک از اینها غیرممکن است؟ (الف) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن هم به طرف شرق است؛ (ب) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن به طرف غرب است؛ (ج) سرعت جسمی صفر و شتاب آن غیرصفر است؛ (د) شتاب جسمی ثابت، اما سرعت آن متغیر است؛ (ه) سرعت جسمی ثابت و شتاب آن متغیر است.

۱۴. چند مورد مثال بیاورید که در آنها نمی‌توان از مقاومت هوا در برابر سقوط اجسام چشم پوشید.

۱۵. شکل ۲۲ یک برجی را در بالیمور، مریلند، نشان می‌دهد. این برج در سال ۱۸۲۹ بنا شد و از آن برای ساختن گلوله‌های سربی تفنگ استفاده می‌شد. برای این کار، سرب مذاب را در اندازه‌های لازم برای یک گلوله، از بالای برج به پایین می‌ریختند. گلوله‌های سربی در پایین برج به درون یک مخزن آب می‌افتدند و منجمد می‌شدند. ارتفاع برج، 230 ft است. این روش ساختن گلوله چه مزیتها و می‌تواند داشته باشد؟



شکل ۲۲. پرسش ۱۵

- مدت چقدر بوده است؟ آیا عجیب است که برای حل مسئله به سرعت هوایپما نیاز نداریم؟
۶. سرعت مجاز اتومبیلها در بزرگراهی از 55 km/h (یعنی 55 mi/h) تا 85 km/h (یعنی 85 mi/h) است. اگرین مسافت را بیشترین سرعت مجاز بیماییم، در اثر این تغییر چقدر در وقتان صرفه جویی می‌شود؟
۷. شخصی از سن آتنویو به هوستون می‌رود؛ نصف مدت سفر را با سرعت 35 km/h (یعنی 35 mi/h) و نصف دیگر را با سرعت 55 km/h (یعنی 55 mi/h) می‌بیماید. در بازگشت، نصف مسافت را با سرعت 35 km/h و نصف دیگر را با سرعت 55 km/h می‌بیماییم، در اثر این تغییر چقدر در وقتان صرفه جویی می‌شود؟
۸. یک هوایپای جت پیشرفته در یک مانور مخفی شدن از دید رادار، در ارتفاع 35 m از سطح زمین پرواز می‌کند. ناگهان هوایپای به یک شیب رو به بالای 45° می‌رسد (که البته تشخیص این شیب کوچک چندان ساده نیست)؛ نگاه کنید به شکل ۲۴. خلبان چه مدت فرستاده دارد که، قبل از برخورد با زمین، خط پرواز را تصویح کند؟ سرعت پرواز 130 km/h است.
- 
- شکل ۲۴. مسئله ۸
۹. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطه $x = 3t - 4t^2 + t^3$ به دست می‌آید؛ بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) مکان ذره در $t = 0$ ، $t = 1\text{ s}$ ، $t = 2\text{ s}$ ، $t = 3\text{ s}$ و $t = 4\text{ s}$ کجاست؟ (ب) جایه‌جایی ذره بین لحظات $t = 0$ و $t = 4\text{ s}$ چقدر است؟ از $t = 0$ تا $t = 4\text{ s}$ کجاست؟ (ج) سرعت متوسط ذره در بازه $t = 2\text{ s}$ تا $t = 4\text{ s}$ چقدر است؟ در بازه $t = 3\text{ s}$ تا $t = 4\text{ s}$ چقدر؟
۱۰. اتومبیلی با سرعت ثابت 40 km/h از تپه‌ای بالا می‌رود و با سرعت ثابت 60 km/h از همان تپه پایین می‌آید. متوسط اندازه سرعت اتومبیل در کل مسیر چقدر است؟
۱۱. سرعت متوسط خودتان را در هر یک از این دو حالت حساب کنید. (الف) مسافت 240 ft را با سرعت 40 ft/s راه می‌روید و سپس 240 ft دیگر را با سرعت 10 ft/s می‌روید. (ب) به مدت 1 min با سرعت 40 ft/s راه می‌روید و سپس به مدت 1 min دیگر با سرعت 10 ft/s می‌روید.
۱۲. دو قطار با سرعت 34 km/h ، روی یک ریل به طرف هم حرکت می‌کنند. هنگامی که فاصله آنها از یکدیگر 10 km است، پرنده‌ای از سریک قطار پرواز می‌کند تا به قطار دیگر برسد، و سپس دوباره به

۲۶. معادلات سینماتیکی حرکت (جدول ۲) تحت اثر وارونگی زمان، یعنی گذاشتن t – به جای t ، چه می‌شوند؟ توضیح بدهید.

۲۷. انتظار داریم روابطی که واقعاً کلی هستند، مثل روابط جدول ۲، مستقل از دستگاه مختصات، معتبر باشند. اگر معادلات کلی از نظر بعدی هم سازگار باشند، آن وقت، مستقل از یکاهایی که به کار می‌بریم، معتبر خواهند بود. در این صورت، آیا اصول نیازی به یکاهای دستگاههای مختصات داریم؟

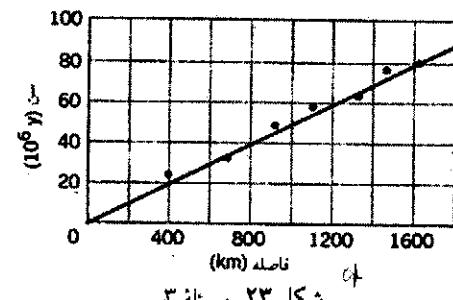
مسئله‌ها

بخش ۳-۲ سرعت متوسط

۱. اتومبیل شما با سرعت 88 km/h (یعنی 55 mi/h) در حرکت است. شما به مدت 18 به تصادفی که کنار جاده اتفاق افتاده است نگاه می‌کنید. در این مدت، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌بیماید؟

۲. یک بازیکن بیسیال، توپی را با سرعت افقی 16 km/h پرتاب می‌کند. بازیکنی که چوب بیسیال را در دست دارد، 18.4 m از محل پرتاب توپ فاصله دارد. چقدر طول می‌کشد تا توپ به چوب بیسیال برسد؟

۳. شکل ۲۳، رابطه بین سن قدیمی ترین رسویها در اقیانوس، و فاصله این رسویها از یک پشته خاص را نشان می‌دهد. سن رسویها بر حسب میلیون سال و فاصله بر حسب کیلومتر است. ماده، تقریباً با سرعت یکنواخت، از این پشته بیرون می‌زند و به اطراف حرکت می‌کند. سرعت حرکت رسویها از این پشته را بر حسب سانتی‌متر بر سال، پیدا کنید.

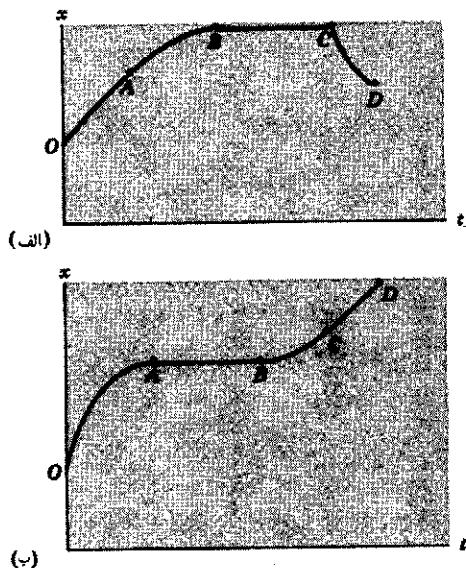


شکل ۲۳. مسئله ۳

۴. کارل لویس، دو 100 m را در زمانی در حدود 10 s می‌دود؛ بیل راجرز، ماراتون، 42.6 km (۳۸۵yd) را در زمانی در حدود 2 h و 10 min می‌دود. (الف) سرعت متوسط هر یک چقدر است؟ (ب) اگر کارل لویس می‌توانست سرعت دو 100 m را در ماراتون حفظ کند، چه مدتی طول می‌کشید تا مسیر ماراتون را طی کند؟

۵. فیزیکدان مشهوری به مدت چند ماه، هر هفته یک بار از بوسنون در ماساچوست به زنو در سویس می‌رفت و برمی‌گشت؛ فاصله بین این دو شهر 400 km است. متوسط اندازه سرعت فیزیکدان در این

۱۸. شکل ۲۷ الف نمودار x بر حسب t ذره‌ای را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. (الف) در هر یک از بازه‌های OA , AB , BC , و CD , سرعت آیا مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ همچنین تعیین کنید که در هر بازه شتاب $+$, $-$ یا 0 است. (ب) در این نمودار آیا بازه‌ای وجود دارد که شتاب در آن به وضعیت باشد؟ (از رفتار منحنی در نقاط مرزی بازه‌ها چشم پوشید).



شکل ۲۷. (الف) مسئله ۱۸ و (ب) مسئله ۱۹

۱۹. پرسشهای مسئله قبل را در مورد حرکت طبق نمودار شکل ۲۷ ب، پاسخ بدهید.

۲۰. شکل ۲۸ نمودار مکان-زمان ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. به طور کیفی، منحنیهای سرعت-زمان و شتاب-زمان حرکت این ذره را رسم کنید.



شکل ۲۸. مسئله ۲۰

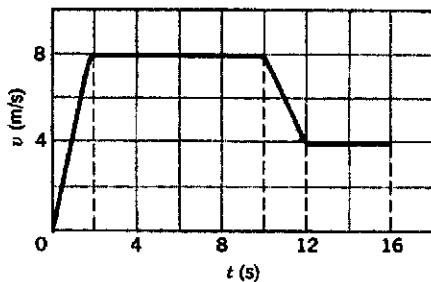
۲۱. در هر یک از حالت‌های زیر، نموداری رسم کنید که نمایش ممکنی از مکان-زمان ذره‌ای باشد که در راستای محور x حرکت می‌کند: در $t = 1s$, (الف) سرعت ذره صفر و شتاب آن مثبت است؛ (ب) سرعت ذره صفر و شتاب آن منفی است. (ج) سرعت ذره منفی و شتاب آن مثبت است؛ (د) سرعت ذره منفی و شتاب آن منفی است. (ه) در کدام یک از موارد بالا، اندازه سرعت ذره، در $t = 1s$ در حال افزایش است؟ ۲۲. مکان ذره‌ای با رابطه $x = 2t^3$ بیان می‌شود، که x بر حسب متغیر t بر حسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط و شتاب متوسط ذره

طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را تا زمان برخورد دو قطار تکرار می‌کند. سرعت پرواز پرنده، 58 km/h است. (الف) پیش از برخورد، پرنده چند بار بین دو قطار رفت و آمد می‌کند؟ (ب) کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟

بخش ۲-۴ سرعت لحظه‌ای

۱۳. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطه $x = 9.75 + 1.50t^2$ به دست می‌آید که در آن x بر حسب ثانیه متر و t بر حسب ثانیه است. بازه زمانی بین $t = 2s$ و $t = 3s$ را در نظر بگیرید: (الف) سرعت متوسط در این بازه چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای در $t = 2s$ چقدر است؟ (د) سرعت لحظه‌ای در $t = 2.5s$ چقدر است؟ (ه) سرعت لحظه‌ای در زمانی که ذره در وسط فاصله مکانهای متناظر با $t = 2s$ و $t = 3s$ است چقدر است؟

۱۴. شکل ۲۵ نمودار سرعت زمان دونده‌ای را نشان می‌دهد. این دونده در مدت $16s$ چه مسافتی را می‌پیماید؟

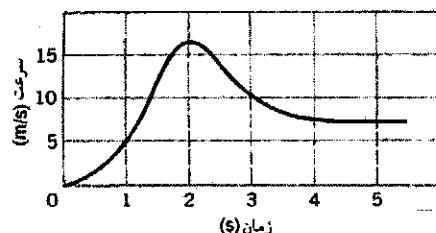


شکل ۲۵. مسئله‌های ۱۴ و ۱۵

بخش ۲-۵ حرکت شتابدار

۱۵. شتاب دونده مسئله ۱۴ در $t = 11s$ در $v = 18 \text{ m/s}$ در جهت $x +$ است. ۱۶. سرعت ذره‌ای 18 m/s در جهت $x +$ است. بعد $4s$ آن 3 m/s در جهت مخالف است. شتاب متوسط ذره در این بازه 2 s چقدر است؟

۱۷. شکل ۲۶ نمودار سرعت-زمان جسمی است که روی خط راست حرکت می‌کند. نمودار شتاب-زمان این جسم را رسم کنید.



شکل ۲۶. مسئله ۱۷

۲۸. در یک بازی کامپیوتری، لکه‌ای طبق رابطه $x = 90t^3 - 750t^2 + 750t$ روی صفحه نمایش [مانیتور] حرکت می‌کند. در این رابطه، x فاصله لکه از لبه چپ صفحه، بر حسب ثانیه است. اگر لکه به یکی از دو لبه صفحه، $x = 15\text{cm}$ یا $x = 0$ برسد، دوباره از لبه چپ شروع به حرکت می‌کند. (الف) چه مدت پس از شروع حرکت، لکه به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد؟ (ب) در این لحظه لکه کجاست؟ (ج) در این لحظه شتاب لکه چقدر است؟ (د) پس از سکون لحظه‌ای، لکه در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (ه) لکه در چه زمانی از صفحه خارج می‌شود؟

بخش ۶-۲ حرکت با شتاب ثابت

۲۹. جامیوجتی باید روی باند به سرعت 36 km/h (22 m/s) برسد تا بتواند از زمین کنده شود. اگر طول باند (1 km) را باشد، حداقل شتاب (ثابت) لازم برای اینکه هواییما در این باند از سکون به سرعت لازم برسد چقدر است؟

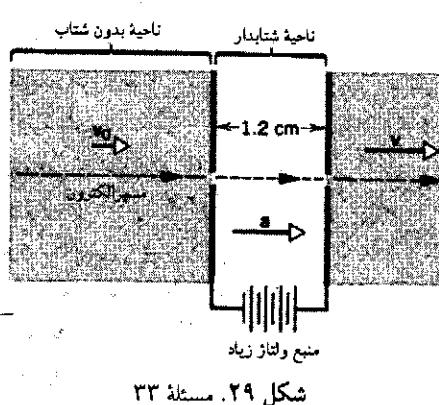
۳۰. فضایمایی در فضای تهی با شتاب ثابت 9 m/s^2 حرکت می‌کند. (الف) اگر فضایمایی از حالت سکون شروع به حرکت کند، چقدر طول می‌کشد تا سرعت آن به یک دهم سرعت نور برسد؟ (ب) در این مدت، فضایمایی چه مسافتی را می‌پیماید؟ (سرعت نور $3 \times 10^8\text{ m/s}$)

۳۱. مارزنگی می‌تواند سرش را با شتاب 50 m/s^2 به طرف قربانی اش حرکت بدهد. اگر اتومبیلی می‌توانست با این شتاب حرکت کند، چقدر طول می‌کشد تا سرعت آن از صفر به 100 km/h برسد؟

۳۲. یک میون (که نوعی ذره بینایی است) با سرعت 10^6 m/s به یک میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. میدان الکتریکی به این ذره شتاب 10^{12} m/s^2 در خلاف جهت سرعت اولیه‌اش می‌دهد.

میون چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳۳. الکترونی با سرعت اولیه 10^5 m/s به وارد تا خیهای به طول 12 cm را می‌شود. در این ناحیه، الکترون در اثر میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲۹) و با سرعت 29 m/s و با سرعت $5.8 \times 10^6\text{ m/s}$ از آن خارج می‌شود. شتاب الکترون، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (این همان چیزی است که در بخش تفنجک الکترونی لامپ پرتوکاتد اتفاق



شکل ۲۹. مسئله ۳۳

بین $t = 0$ و $t = 1\text{ s}$ چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای و شتاب لحظه‌ای ذره در $t = 1\text{ s}$ چقدر است؟ (ج) مقادیر لحظه‌ای و متوسط را با هم مقایسه کنید. در هر حالت کمیت بزرگتر را تعیین کنید و بگویید که چرا بزرگتر است؟

۲۳. ذره‌ای طبق رابطه $x = 50t + 10t^2$ در راستای محور x حرکت می‌کند؛ بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط ذره را در 3 s اول حرکت، (ب) سرعت لحظه‌ای ذره را در $t = 3\text{ s}$ ، و (ج) شتاب لحظه‌ای ذره را در $t = 3\text{ s}$ پیدا کنید.

۲۴. شخصی از $t = 0$ تا $t = 5\text{ min}$ ایستاده است، از $t = 10\text{ min}$ تا $t = 10\text{ min}$ به عجله با سرعت 2 m/s راه می‌رود. سرعت متوسط و شتاب متوسط او در بازه‌های زمانی (الف) از 2 min تا 8 min و (ب) از 3 min تا 9 min چقدر است؟

۲۵. در جدول زیر مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، در زمانهای مختلف فهرست شده است:

$x(\text{m})$	$t(\text{s})$
۰	۰
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۱۳	۱۳
۲۰	۲۰

(الف) نمودار جابه‌جایی (نه مکان) بر حسب زمان رارسم کنید.

(ب) سرعت متوسط ذره را در بازه‌های 0 تا 1 s ، 1 s تا 2 s ، 2 s تا 3 s و 3 s تا 4 s بدست بیاورید. (ج) شب منحنی ای را که در قسمت (الف) رسم کردید، در $t = 4\text{ s}$ ، $t = 3\text{ s}$ ، $t = 2\text{ s}$ ، $t = 1\text{ s}$ و $t = 0$ به دست بیاورید. (د) نمودار شب منحنی را بر حسب زمان رارسم کنید. (یکای شب منحنی) (ه) از روی منحنی قسمت (د) شتاب ذره را در زمانهای $t = 2\text{ s}$ ، $t = 3\text{ s}$ ، $t = 4\text{ s}$ و $t = 5\text{ s}$ بدست بیاورید.

۲۶. مکان ذره‌ای بر محور x ، بر حسب زمان، از رابطه $x = At^2 - Bt^3$ به دست می‌آید، که x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) یکاهای SI برای A و B چه هستند؟ در بقیه مسئله، فرض کنید مقادیر عددی A و B ، به ترتیب برابر با 3 و 1 یکای SI باشند. (ب) در چه زمانی ذره به بیشترین مقدار مثبت x می‌رسد؟ (ج) کل طول مسیری که ذره در 4 s اول حرکت می‌پیماید چقدر است؟ (د) جابه‌جایی ذره در 4 s اول چقدر است؟ (ه) سرعت ذره در $t = 2\text{ s}$ ، $t = 3\text{ s}$ و $t = 4\text{ s}$ چقدر است؟ (و) شتاب ذره در $t = 1\text{ s}$ ، $t = 2\text{ s}$ ، $t = 3\text{ s}$ و $t = 4\text{ s}$ چقدر است؟ (ز) سرعت متوسط ذره در بازه زمانی $t = 2\text{ s}$ تا $t = 4\text{ s}$ چقدر است؟

۲۷. الکترونی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. شتاب این الکترون، به طور خطی با زمان زیاد می‌شود: $a = kt$ ، که در آن $a = 5\text{ m/s}^2$ و $k = 1.5\text{ m/s}^3$ است. (الف) نمودار a بر حسب t را برای 10 s اول حرکت رسم کنید. (ب) با استفاده از نمودار قسمت (الف)، نمودار v را بر حسب t بر حسب t را رسم کنید و سرعت الکترون را در 5 s بعد از شروع حرکت تخمین بزنید. (ج) از روی منحنی v بر حسب t قسمت (ب)، منحنی x بر حسب t را رسم کنید و تخمین بزنید که الکترون در 5 s اول حرکت چه مسافتی را می‌پیماید.

۴۹. قطاری از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. سرعت قطار که در یک لحظه 33°m/s است، 16°m/s بعد به 54°m/s می‌رسد. (الف) شتاب قطار، (ب) زمان لازم برای طی این مسافت 16°m ، (ج) زمان لازم برای اینکه قطار از سکون به سرعت 33°m/s برسد. و (د) مسافتی که قطار تا رسیدن به سرعت 33°m/s می‌پیماید چقدر است؟

۵۰. اتومبیلی با شتاب ثابت، مسافت 58°m بین دو نقطه را در 8°m/s می‌پیماید. سرعت اتومبیل در لحظه عبور از نقطه دوم 15°m/s است. (الف) سرعت اتومبیل در نقطه اول چقدر است؟ (ب) شتاب اتومبیل چقدر است؟ (ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطه اول، اتومبیل در حالت سکون بوده است؟

۴۱. یک قطار زیرزمینی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیمة اول مسافت بین دو ایستگاه را با شتاب 2°m/s^2 را + طی می‌کند. نیمة دوم را با شتاب 2°m/s^2 را - می‌پیماید تا در ایستگاه بعدی متوقف شود. فاصله دو ایستگاه از هم 10 km را است. (الف) زمان طی فاصله دو ایستگاه، (ب) بیشترین مقدار سرعت قطار در این فاصله چقدر است؟

۴۲. طول مسیر یک آسانسور 624 ft است. بیشترین سرعت آسانسور 1000 ft/min و شتاب (ثابت) آن 4° ft/s^2 است. (الف) آسانسور از حالت سکون تا رسیدن به بیشترین سرعتش چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا آسانسور تمام مسیر را پیماید؟ توجه کنید که آسانسور در انتهای مسیر باید متوقف شود.



شکل ۳۱. مسئله ۴۲

۴۳. راننده‌ای برای متوقف کردن اتومبیلش بهشدت ترمز می‌کند. مسافت توقف را می‌توان حاصل جمع "مسافت واکنش" و "مسافت ترمز" در نظر گرفت. مسافت واکنش برابر است با حاصل ضرب سرعت اولیه در زمان واکنش، و مسافت ترمز فاصله‌ای است که اتومبیل پس از

می‌افتد. لامپ پرتو کاتد در گیرنده تلویزیون هم به کار می‌رود). ۴۴. در ۱۹ مارس ۱۹۸۶، سرهنگ جان پی استاپ یک رکورد جهانی برای حرکت روی سطح زمین با جاگذاشت. او یک سورتمه موشکی را با سرعت 1020 km/h در سرمه، رانده و سورتمه را طی زمان 25 از این سرعت به حالت سکون بسازد. نکال ۳۰. شتاب سرمه g (شتاب گرانشی) بیان کنید. (دققت کنید که بدن این شخص مثل شتاب سنج عمل می‌کند نه سرعت سنج).



شکل ۳۰. مسئله ۴۴

۴۵. ترمزهای اتومبیل شما می‌توانند شتاب کند کننده 17 ft/s^2 تولید کنند. اگر در بزرگراهی با سرعت 85 mi/h در حرکت باشید و ناگهان با علامت بیشترین سرعت مجاز برابر با 55 mi/h مواجه شوید، حداقل چقدر طول می‌کشد که اتومبیل را به سرعت مجاز برسانید؟

۴۶. یک اتومبیل با لاستیکهای خوب، در یک جاده خشک می‌تواند با شتاب کند کننده 11 m/h.s (4.92 m/s^2) ترمز کند. (الف) چقدر طول می‌کشد تا اتومبیلی که با سرعت 55 mi/h (یعنی 24.6 m/s) در حرکت است متوقف شود؟ (ب) در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

۴۷. تیری را از کمان مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تیر در بازگشت با سرعت 26 ft/s به زمین برخورد و به اندازه $in 9$ در آن فرو می‌رود. (الف) شتاب (ثابت) توقف این تیر، و (ب) زمان لازم برای متوقف شدن آن در زمین چقدر است؟

۴۸. وکیلی در مورد مسائل فیزیکی یکی از بیرونده‌هایش با شما مشورت می‌کند: اتومبیلی در حال حرکت بوده است و راننده مجور به توقف اضطراری می‌شود. ترمزها قفل می‌شوند، چرخهای اتومبیل روی جاده می‌لغزند و ردی به طول 19.2 ft روی جاده می‌ماند. مسئله این است که آیا سرعت اتومبیل، پیش از توقف، از حد مجاز 30 mi/h بیشتر بوده است یا نه. افسر پلیس، با فرض اینکه شتاب کند کننده ترمز از شتاب سقوط آزاد (یعنی 32 ft/s^2) بیشتر نبوده است، راننده را جریمه نمی‌کند. به نظر شما آیا سرعت راننده کمتر از حد مجاز بوده است؟ توضیح بدهید.

در طی مسافت 186ft متوقف شود، و در سرعت 30mi/h در طی 8.0ft . فرض کنید زمان واکنش راننده (که طی آن شتاب صفر است) و همچنین شتاب حاصل از ترمز برای هر دو سرعت یکی است. (الف) زمان واکنش راننده و (ب) شتاب ترمز را حساب کنید.

بعض ۷-۲ سقوط آزاد اجسام

۵۰. قطرهای باران از ابری درارتفاع 1700m از سطح زمین، به زمین سقوط می‌کنند. اگر مقاومت هوا سرعت را کم نمی‌کرد، این قطرهای با چه سرعتی به زمین می‌رسیدند؟ در این صورت، آیا قدم زدن در زیر باران بی خطر بود؟

۵۱. تنها کابل نگهدارنده یک آسانسور (خالی) مخصوص عملیات ساختمانی، که در بالاترین نقطه ساختمان نیمه‌کارهای به ارتفاع 120m توقف کرده است، ناگهان پاره می‌شود. (الف) آسانسور با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر است؟ (ج) سرعت آن در نیمه راه چقدر است؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نیمه راه برسد؟ ۵۲. آچاری از دست کارگری رها می‌شود و با سرعت 240m/s به زمین می‌خورد. (الف) این آچار از چه ارتفاعی رها شده است؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر بوده است؟

۵۳. تویی را به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت اولیه آن باید چقدر باشد تا ارتفاع اوج آن 53.7m شود؟ (ب) در این شرایط توب چه مدت در هوا می‌ماند؟

۵۴. سنگی از صخرهای به ارتفاع 100m پایین می‌افتد. چقدر طول می‌کشد تا (الف) 50.0m اول و (ب) 50.0m بعدی را طی کند؟ ۵۵. فضانوری که در یکی از سیاره‌های منظمه شمسی فرود آمده است متوجه می‌شود که اگر سنگ کوچکی با سرعت 146m/s به طرف بالا پرتاب شود، 77.8s بعد به سطح سیاره بازمی‌گردد. این فضانور را روی کدام سیاره فرود آمده است؟ (راهنمایی: از اطلاعات مندرج در پیوست ج استفاده کنید).

۵۶. تویی را با سرعت اولیه 5.0m/s ، از ارتفاع 5.8m به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت توب در لحظه برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توب به زمین برسد؟ (ج) اگر توب را از همان ارتفاع و با همان سرعت اولیه به طرف بالا پرتاب می‌کردیم، جواب قسمتهای (الف) و (ب) چه می‌شد؟

۵۷. شکل ۲ وسیله ساده‌ای برای اندازه‌گیری زمان واکنش را نشان می‌دهد. این وسیله، نواری مقواهی است که مقیاس‌بندی شده و ده نقطه‌بزرگ هم روی آن مشخص شده است. دوست شما نوار را، با شست و انگشت اشاره‌اش، از نقطه بالایی می‌گیرد. شست و انگشت اشاره شما روی نقطه پایینی است، اما موازنی که نوار را لمس نکند. دوستان نوار را رها می‌کند و شما سعی می‌کنید که پس از دیدن این رویداد، هر چه سریعتر نوار را بگیرید. عدد مربوط به نقطه‌ای که شما نوار را در آن می‌گیرید، زمان واکنش شمامست. فاصله نقطه زیرین از شاخصهای 5.0ms ، 10.0ms ، 20.0ms ، و 25.0ms باید چقدر باشد؟

تمرز کردن و قبل از توقف کامل می‌پساید. جدول زیر مقادیر نوعی این کمیتها را به دست می‌دهد.

سرعت اولیه (m)	مسافت واکنش (m)	مسافت ترمز (m)	مسافت توقف (m/s)
۱۲۵	۵	۷۵	۱۰
۳۵	۲۰	۱۵	۲۰
۶۷.۵	۴۵	۲۲.۵	۳۰

(الف) زمان واکنش این راننده چقدر است؟ (ب) مسافت توقف اتومبیل، با سرعت اولیه 25m/s چقدر است؟

۴۴. «تله سرعت» که در بزرگراهها نصب می‌شود، مشکل از دو نوار به فاصله 110m از یکدیگر است که در اثر فشار فعال می‌شوند. راننده‌ای در بزرگراهی که سرعت مجاز در آن 90km/h است با سرعت 120km/h می‌راند. درست زمانی که از نوار اول می‌گذرد متوجه پلیس می‌شود و سرعت خود را کم می‌کند. چه شتاب کننده‌ای لازم است تا سرعت متوسط اتومبیل، بین دو نوار، کمتر از حد مجاز سرعت شود؟

۴۵. اتومبیلی به محض سبز شدن چراغ راهنمایی با شتاب 2.2m/s^2 شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی که با سرعت ثابت 95m/s در حرکت است، از اتومبیل سبقت می‌گیرد. (الف) در چه فاصله‌ای پس از این نقطه، اتومبیل از کامیون جلو می‌زند؟ (ب) در این لحظه سرعت اتومبیل چقدر است؟ (خوب است که نمودار کیفی x بر حسب t را برای هر یک از دو وسیله رسم کنید).

۴۶. قطاری با سرعت v_1 در حرکت می‌کند. لوکوموتیوان یک قطار باری را می‌بیند که به فاصله d جلوتر از قطار خودش، با سرعت v_2 در همان جهت حرکت می‌کند. v_2 کوچکتر از v_1 است؛ بنابراین، لوکوموتیوان ترمز می‌کند تا به قطار جلویی نخورد. سرعت قطار با شتاب ثابت a کم می‌شود. نشان بدھید که

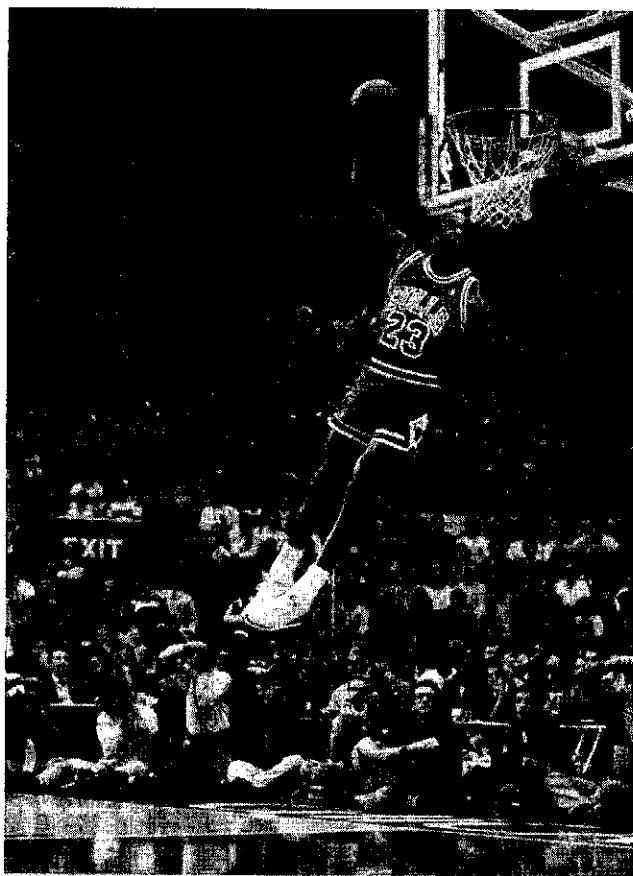
$$\text{اگر } \frac{v_2}{2} - \frac{v_1}{2a} > d \text{ باشد، برخورد صورت نمی‌گیرد.}$$

$$\text{اگر } \frac{v_2}{2} - \frac{v_1}{2a} < d \text{ باشد، برخورد صورت می‌گیرد.}$$

(خوب است که نمودار کیفی x بر حسب t را برای هر قطار رسم کنید.) ۴۷. اتومبیلی با سرعت 35mi/h (یعنی 56km/h) حرکت می‌کند. راننده متوجه می‌شود که 110ft (یعنی 34m) جلوتر از او مانع وجود دارد و ترمز می‌کند. چهار ثانیه بعد، اتومبیل به مانع برمی‌خورد. (الف) شتاب ثابت اتومبیل، پیش از برخورد چقدر بوده است؟ (ب) در لحظه برخورد، سرعت اتومبیل چقدر بوده است؟

۴۸. دونده‌ای در مسابقه دو، با شتاب 2.8m/s^2 به سرعت بیشینه خود می‌رسد و این سرعت را تا آخر مسیر حفظ می‌کند. اگر کل مسیر مسابقه در 22.5m طی شده باشد، (الف) زمان سپری شده و (ب) مسافت طی شده در بعضی شتابدار حرکت را حساب کنید.

۴۹. در یک کتابچه راهنمای اتومبیل آمده است که اتومبیلی (با ترمزهای خوب) که با سرعت 50mi/h در حرکت باشد می‌تواند



شکل ۳۳. مسئله ۶۱



شکل ۳۲. مسئله ۵۷

۵۸. توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم. 2m/s طول می‌کشد تا توب به ارتفاع 36.8m برسد. (الف) سرعت اولیه آن چقدر بوده است؟
 (ب) سرعت آن در این ارتفاع چقدر است؟ (ج) توب تا چه ارتفاعی بالاتر می‌رود؟

۵۹. شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و، در حالی که به آبریز نیوتون فکر می‌کند، ناخودآگاه سیبی را از دستش رها می‌کند. سیب از لبه پل می‌افتد و در همان لحظه لبه جلویی کامیونی که از زیر پل می‌گذرد درست زیر لبه پل است. سرعت کامیون 55km/h (یعنی 34mi/h) و طول آن 12m (یعنی 39ft) است. سیب درست مماس بر لبه عقب کامیون به زمین می‌رسد. در این صورت، ارتفاع لبه پل از زمین چقدر بوده است؟

۶۰. موشکی در راستای قائم از سطح زمین پرتاب می‌شود و به مدت 20s با شتاب ثابت 20m/s^2 به بالا حرکت می‌کند. در این لحظه سوخت موشک به کلی تمام می‌شود و حرکت آن به شکل سقوط آزاد ادامه می‌یابد. (الف) بیشترین ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) از زمان برخاستن موشک، چقدر طول می‌کشد تا موشک دوباره به زمین برگردد؟ (از تغییرات g در اثر تغییر ارتفاع چشم بیوشید.)

۶۱. یک بازیکن بسکتبال 76cm به طرف بالا می‌پرد تا توب را توی سبد "بکوید". (الف) صعود 15cm بالایی مسیر چقدر طول می‌کشد؟ (ب) صعود 15cm پایینی مسیر چقدر؟ آیا به کمک این اعداد می‌تواند

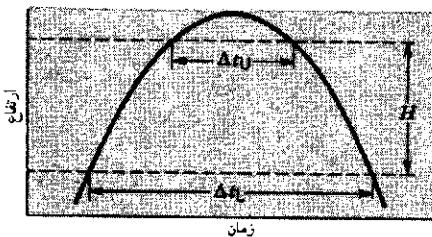
۷۰. بالونی با سرعت 12 m/s در ارتفاع 81 m از سطح زمین به طرف بالا حرکت می‌کند. در این لحظه، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) این بسته با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ و (ب) قدر طول می‌کشد تا به زمین برسد؟

۷۱. چترباری پس از پرش از هلیکوپتر، 52 m بدون اصطکاک سقوط می‌کند. سپس چترش را باز می‌کند و با شتاب کند کننده 2.9 m/s^2 به حرکتش ادامه می‌دهد، تا اینکه با سرعت 2 m/s به زمین می‌رسد. (الف) این چتربار چه مدت در هوا بوده و (ب) سقوط او از چه ارتفاعی شروع شده است؟

۷۲. یک توپ سربی از تخته پرشی که 6 m بالاتر از سطح آب استخراج دارد به آب می‌افتد. توپ با سرعت معینی بر سطح آب می‌خورد و تمام مسافت زیر آب را با همین سرعت می‌پیماید. وقتی توپ به کف استخر می‌رسد 97 cm از شروع سقوط گذشته است. (الف) عمق استخر چقدر است؟ (ب) فرض کنید استخر را از آب خالی کنیم و توپ را از همان تخته پرش چنان برتاب کنیم که باز هم 97 cm بعد به کف استخر برسد. توپ با چه سرعت اولیه‌ای برتاب شده است؟

۷۳. اندازه‌گیری شتاب g در "آزمایشگاه ملی فیزیک" در انگلستان (که کارش تحقیق درباره استانداردهاست) به این ترتیب انجام شده است که یک گلوله شیشه‌ای را در یک لوله خلاً مستقیماً به بالا برتاب می‌کنند. گلوله بالا می‌رود و بر می‌گردد؛ نگاه کنید به شکل ۳۵. فرض کنید Δt_L زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در پایین لوله، و Δt_U زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در بالای لوله باشد. فاصله بین این دو نقطه، H است. نشان بدھید که

$$g = \frac{\Delta H}{\Delta t_L - \Delta t_U}$$



شکل ۳۵. مسئله ۷۳

۷۴. یک بولبرینگ فولادی از شیروانی ساختمانی (با سرعت اولیه صفر) به پایین می‌افتد. ناظری که کنار پنجره‌ای به ارتفاع 120 cm ایستاده است، متوجه می‌شود که 125 s را طول می‌کشد تا بولبرینگ از بالا تا پایین پنجه را طی کند. بولبرینگ به زمین می‌خورد، یک برخورد کاملاً کشسان با سطح پیاده رو انجام می‌دهد، و 2 m/s از اینکه از لبه پایینی پنجه گذشته بود، دوباره به آنجا بر می‌گردد. ارتفاع ساختمان چقدر است؟ (اندازه سرعت توپ، پس از برخورد کاملاً کشسان، همان اندازه سرعت پیش از برخورد است.)

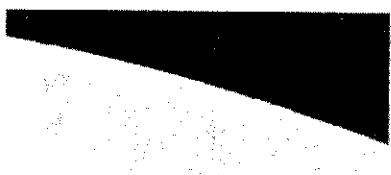
در مدتی که این شتاب اعمال می‌شود، کره چه مسافتی را می‌پیماید؟ ۶۵. توپی از ارتفاع 2 m رها می‌شود و پس از برخورد به زمین تا ارتفاع 9 m را به بالا بر می‌گردد. اگر این توپ به مدت 96 ms با سطح زمین در تماس بوده باشد، در این مدت چه شتاب متوسطی (اندازه و جهت) داشته است؟

۶۶. چند سال پیش، زنی از بالای ساختمانی به ارتفاع 144 ft سقوط کرد و روی یک جعبه هواکش افتاد. جعبه را 18 in در هم فرو برد و بی‌هیچ جراحت شدیدی، زنده ماند. شتابی که این زن طی برخورد با جعبه متحمل شده (با فرض ثابت بودن این شتاب) چقدر بوده است؟ پاسخ را برحسب و بیان کنید.

۶۷. جسمی از حالت سکون رها می‌شود و نیمی از کل مسیر خود را در آخرین ثانیه سقوط آزادش می‌پیماید. (الف) زمان و (ب) ارتفاع این سقوط چقدر بوده است؟ درباره جواب غیرقابل قبول معادله درجه دومی که به دست می‌آورید توضیح بدهید.

۶۸. دو جسم، از یک ارتفاع و از حالت سکون، به حالت آزاد سقوط می‌کنند. سقوط جسم دوم زمانی شروع می‌شود که اولی 5 m از آن جلوتر است. چه مدت پس از شروع سقوط جسم اول، فاصله دو جسم از یکدیگر به 10 m می‌رسد؟

۶۹. کلارا، و کمی پس از او جیم، از یک بل به پایین پریده‌اند؛ شکل ۳۴. جیم چه مدت بعد از کلارا پریده است؟ فرض کنید که قد جیم 170 cm است و سطح پرش را لبه بالایی شکل بگیرید. فاصله‌ها را از روی شکل بسنجید.



شکل ۳۴. مسئله ۶۹

خارج می‌شود؛ سپس برمی‌گردد و در مرز پایین پنجره از دید خارج می‌شود. اگر کل زمانی که لنگه کفش در معرض دید است ۷۴۸° باشد، لنگه کفش تا چه ارتفاعی از لبه بالایی پنجره بالاتر رفته است؟

۷۵. شخصی که در انتهای اتاقی رو بروی پنجره‌ای به ارتفاع ۱m را ایستاده است مشاهده می‌کند که لنگه کفشی در نزدیکی سطح خارجی پنجره در راستای قائم صعود می‌کند و در مرز بالای پنجره از دید

بردارها

در خیلی از قوانین فیزیک، بین کمیتها نه تنها روابط جبری بلکه روابط هندسی هم ظاهر می‌شوند. مثلاً مجسم کنید فرقه‌ای را که دارد به سرعت حول محورش می‌چرخد و در همین حال خود محور دوران هم به کنده حول راستای قائم در گردش است. نمایش این ارتباط هندسی با معادلات جبری مشکل است. اما با استفاده از نمایش برداری متغیرهای فیزیکی، تنها یک معادله برای توصیف رفتار فرقه کافی است، به کمک بردارها می‌شود بسیاری از قوانین فیزیک را به صورت موجزتری بیان کرد. گاهی در شکل برداری قوانین فیزیکی می‌توانیم ارتباطها یا تقارنهایی را ببینیم که دیدنشان در معادلات جبری، به خاطر پیچیدگی ظاهر این معادلات، دشوار است. در این فصل، بعضی از ویژگیها و کاربردهای بردار را مطالعه می‌کنیم و با عملیات ریاضی مربوط به بردارها آشنا می‌شویم. خواهیم دید که نمادهای آشنا حساب، مثل $+$, $-$, \times ، در مورد بردارها معنی متفاوتی پیدا می‌کنند.

باشد؛ پیکان تنها اثر کلی و نهایی حرکت را نشان می‌دهد نه جزئیات حرکت واقعی را.

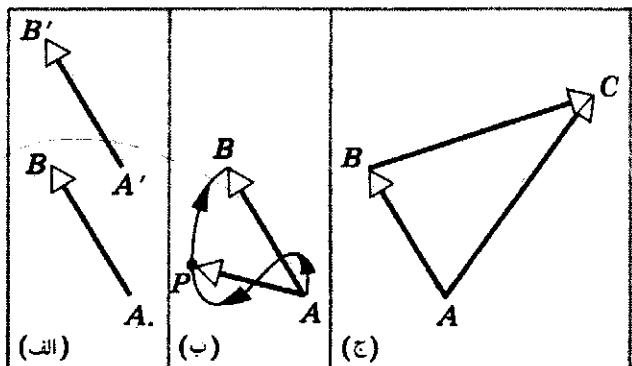
شکل ۱ ب، مسیر واقعی یک ذره از A تا B را نشان می‌دهد. این مسیر با خط AB فرق دارد. اگر می‌توانستیم از ذره در نظر گیریم، و مدتی بعد در یکی از نقاط میانی مسیر مثل P عکس بگیریم، بردار جابه‌جایی AP را بدست می‌آوردیم که حرکت کلی را در این بازه زمانی نشان می‌دهد، اگرچه درباره مسیر واقعی حرکت از A تا P چیزی نمی‌گوید. بعلاوه، جابه‌جایی ای مثل $A'B'$ (شکل ۱الف) که مواری، هم جهت، و هم طول با AB باشد نیز نماینده تغییر مکانی درست مثل AB است. بین این دو جابه‌جایی تمایزی قائل نمی‌شویم. بنابراین، جابه‌جایی با طول و جهت مشخص می‌شود.

به همین ترتیب می‌توان جابه‌جایی بعدی ذره از B به C را نشان داد (شکل ۱ج). اثر کلی دو جابه‌جایی معادل با یک جابه‌جایی از A به C است. می‌گوییم که AC جمع یا برایند دو جابه‌جایی AB و BC است. توجه کنید که این جمع، جمع جبری نیست و تنها با یک عدد مشخص نمی‌شود.

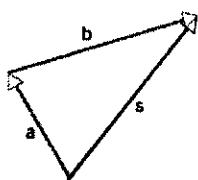
کمیتهایی را که مثل جابه‌جایی رفتار می‌کنند بردار می‌نامیم. بنابراین، بردارها کمیتهایی هستند که جهت و اندازه دارند و طبق قواعد معینی (که شرح خواهیم داد) با هم ترکیب می‌شوند. بردار جابه‌جایی نمونه خوبی برای بردارهاست. کمیتهای فیزیکی دیگری هم هستند که آنها

۱-۳ بردار و اسکالار

تغییر مکان ذره را جابه‌جایی می‌نامند. اگر ذره از نقطه A به نقطه B برود (شکل ۱الف)، جابه‌جایی آن را می‌توانیم با کشیدن خطی از A به B نشان بدهیم. برای نمایش جهت این جابه‌جایی می‌توانیم در نقطه B یک علامت پیکان بگذاریم، تا معلوم شود که جابه‌جایی از A به B بوده است. لزومی ندارد که مسیر ذره از A به B خط راست بوده



شکل ۱. بردارهای جابه‌جایی. (الف) بردارهای AB و $A'B'$ یکسان‌اند زیرا طول و جهت آنها یکی است. (ب) مسیر واقعی ذره از A به B می‌تواند به شکل این منحنی باشد، اما جابه‌جایی، بردار AB است. جابه‌جایی تا نقطه میانی P بردار AP است. (ج) پس از جابه‌جایی AB ، ذره یک جابه‌جایی دیگر، BC ، هم پیدا می‌کند. اثر کلی این دو جابه‌جایی، بردار AC است.



شکل ۱. جمع برداری $s = a + b$. این شکل را با شکل ۱ج مقایسه کنید.

قواعد جمع برداری به روش نموداری اینها هستند: (۱) بردار a را، در مقیاس مناسب، در جهت مورد نظر نسبت به محورهای مختصات رسم می‌کنیم. (۲) بردار b را با همان مقیاس و در جهت مناسب طوری رسم می‌کنیم که دم آن در سر a باشد (جهت بردارها گاهی ممکن است یکی باشد). (۳) از دم a خطی به سر b می‌کشیم. به این ترتیب، بردار برابر s (یعنی جمع دو بردار) به دست می‌آید. اگر a و b بردارهای جابه‌جایی باشند، s هم یک جابه‌جایی است که معادل با دو جابه‌جایی متوازی a و b است. با تعمیم این روش می‌توان جمع چند بردار را هم به دست آورد.

از آنجا که بردارها با اعداد معمولی فرق می‌کنند، انتظار داریم عملیات مربوط به آنها هم قواعد متفاوتی داشته باشند. معنی علامت "+" در معادله ۱، با معنی این علامت در حساب یا جبر اسکالارها متفاوت است؛ این علامت، در مورد بردارها، به معنی انجام عملیاتی است که با عملیات مربوط به اسکالارها تفاوت دارد.

از بررسی دقیق شکل ۲، دو ویژگی مهم جمع برداری معلوم می‌شود:

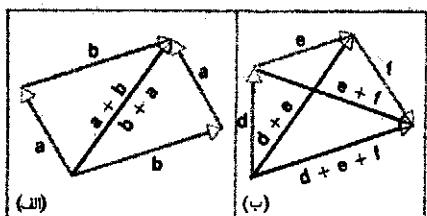
$$a + b = b + a \quad (2) \quad (\text{قانون جابه‌جایی})$$

و

$$d + (e + f) = (d + e) + f \quad (3) \quad (\text{قانون شرکت‌پذیری})$$

معنی این قوانین آن است که ترتیب یا نوع گروه‌بندی بردارها، اثری در نتیجه جمع برداری ندارد. از این نظر، جمع برداری و جمع اسکالار شبهه هم‌اند.

از شکل ۲، طرز استفاده از روش نموداری برای جمع بیش از دو بردار—در این مورد $d + e + f$ ، معلوم می‌شود: دم هر بردار را



شکل ۲. (الف) قانون جابه‌جایی جمع برداری: $a + b = b + a$. (ب) قانون شرکت‌پذیری جمع برداری: $d + (e + f) = (d + e) + f$.

را با بردار نشان می‌دهند: مثلث نیرو، سرعت، شتاب، میدان الکتریکی، و میدان مغناطیسی. سیاری از قوانین فیزیک را می‌توان، با استفاده از بردار، به شکل جمع و جور نوشت. نمایش برداری، عملیات شامل این قوانین را هم اغلب بسیار ساده‌تر می‌کند.

بعضی کمیتها را می‌توان با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص کرد. چنین کمیتها را، که تنها مقدار دارند، اسکالار می‌نامند. از جمله کمیتها فیزیکی اسکالار، می‌توان از جرم، طول، زمان، چگالی، انرژی، و دما نام برد. با اسکالارها می‌توان طبق قوانین جبر معمولی کار کرد.

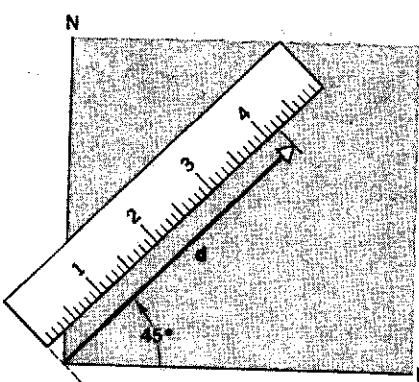
۲-۳ جمع بردارها: روش نموداری

برای نمایش بردار در نمودارها، یک پیکان می‌کشیم. طول پیکان باید متناسب با اندازه بردار باشد (یعنی باید یک مقیاس انتخاب کنیم). راستای خط، راستای بردار است و جهت پیکان هم جهت بردار را مشخص می‌کند. مثلث جابه‌جایی 42 cm در جهت شمال شرقی را می‌توان در مقیاس 1 cm به ازای 10 m ، با پیکانی به طول 4 cm و 45° به طرف بالا می‌سازد. نوک پیکان در انتهای بالای خط است (شکل ۲). بردارها را در متن‌های چایی معمولاً با حروف سیاه نشان می‌دهند، مثل d . در دستنویسها برای مشخص کردن کمیتها برداری معمولاً یک علامت پیکان بالای نماد آنها می‌گذارند. مثلث d .

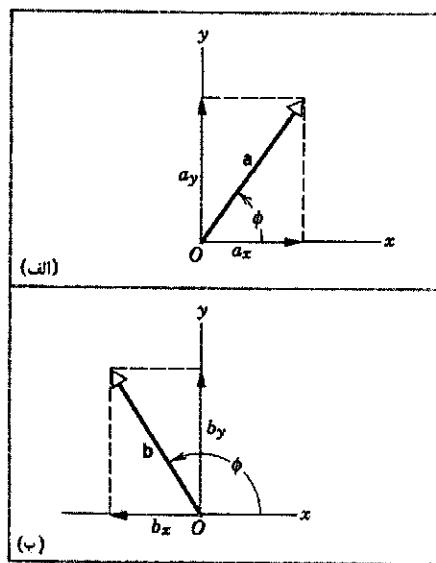
خیلی وقتها فقط اندازه (یا طول) بردار برای ما مهم است نه جهت آن. اندازه d گاهی با $|d|$ نشان داده می‌شود؛ ما در بیشتر موارد، اندازه را با شکل ایتالیک نماد، d ، نشان می‌دهیم. نماد سیاه، هر دو ویژگی بردار، هم اندازه و هم جهت، را نشان می‌دهد. در متون دستنویس، اندازه بردار را معمولاً با نماد بدون پیکان نشان می‌دهند.

اکنون شکل ۲ را در نظر بگیرید که در آن همان بردارهای شکل ۱ج را با اسمی دیگر آورده‌ایم. رابطه بین این بردارها را می‌توان چنین نوشت

$$a + b = s \quad (1)$$



شکل ۳: بردار d شانده‌شده یک جابه‌جایی به اندازه 42 cm (در مقیاس $1\text{ cm} = 10\text{ m}$) در جهت 45° شمال شرقی است. Ramin.samad@yahoo.com



شکل ۶. (الف) مولفه بردار a در جهت محور x , a_x و مولفه آن در جهت محور y , a_y است. (ب) مولفه x بردار b منفی است.

بين 90° و 180° باشد (شکل ۶ب)، مولفه x بردار منفی و مولفه y آن مثبت خواهد بود. مولفه‌های بردار شیوه کمیتهای اسکالرند: در هر دستگاه مختصات، هر مولفه تنها با یک عدد و یک علامت جبری مشخص می‌شود.

برداری را که به مولفه‌هایش تجزیه شده باشد می‌توانیم با استفاده از خود این مولفه‌ها هم مشخص کنیم. در این صورت به جای دو عدد a (اندازه بردار) و ϕ (جهت بردار نسبت به محور x) دو عدد دیگر a_x و a_y را در اختیار داریم. می‌شود از توصیف بردار بر حسب مولفه‌هایش (a_x و a_y) به توصیف آن بر حسب اندازه و جهت (a, ϕ) رسید و بالعکس. این دو توصیف با هم معادل‌اند. با توجه به شکل ۶الف، می‌توانیم a و ϕ را بر حسب a_x و a_y بدست بیاوریم:

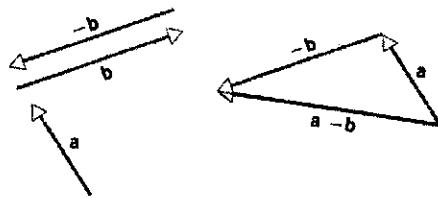
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (6\text{الف})$$

و

$$\tan \phi = a_y / a_x \quad (6\text{ب})$$

رباعی که ϕ در آن است از روی علامت a_x و a_y معین می‌شود.

در سه بعدی هم، برای بدست آوردن مولفه‌ها همین کار را می‌کنیم: کافی است از سر بردار به هر یک از محورهای مختصات x , y , z و یا خطی عمود کنیم. شکل ۷ نموداری است که به کمک آن تشخیص مولفه‌ها آسانتر می‌شود. ابتدا مولفه (یا تصویر) a را بر صفحه xy بدست می‌آوریم، و بعد مولفه‌های a_x و a_y را از تجزیه این بردار تعیین می‌کنیم. البته می‌توانستیم به جای اینکه



شکل ۵. نمایش تفاضل دو بردار: (ب) $a - b = a + (-b)$

روی سر بردار قبلي می‌گذاریم. بردار مجموع، برداری است که از دم بردار اول به سر بردار آخر رسم می‌شود.

با تعریف قرینه بردار (یا منفی بردار)، می‌توان عمل تفریق را هم وارد جبر برداری کرد. قرینه هر بردار، بردار دیگری است با همان طول اما در جهت مخالف. در این صورت، تفاضل دو بردار را این‌طور تعریف می‌کنیم (شکل ۵):

$$a - b = a + (-b) \quad (4)$$

برداری به اندازه بردار b و در خلاف جهت آن است. از معادله $a - a = a + (-a) = 0$ معلوم می‌شود که 0 می‌باشد. این عملیات از جایه‌جایی استفاده کردیم، اما بهیاد داشته باشید که، این قواعد برای همه کمیتهای برداری — مثلاً سرعت، یا نیرو — بدکاریم روند.

۳-۳ مولفه‌های بردار

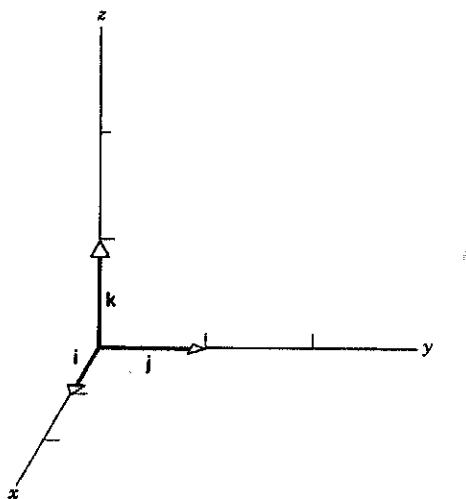
جمع برداری را با روش نموداری معرفی کردیم، اما این روش برای بردارهای سه‌بعدی چندان مفید نیست و خیلی وقت‌ها حتی در حالت دو بعدی هم مشکلاتی دارد. روش دیگر جمع برداری، روش تحلیلی است. در این روش باید بردار را به مولفه‌هایش، نسبت به یک دستگاه مختصات خاص، تجزیه کرد.

شکل ۶الف بردار a را نشان می‌دهد که دم آن روی مبدأ دستگاه مختصات دکارتی است. از سر a دو خط عمود بر محورهای مختصات می‌کشیم. کمیتهای a_x و a_y را که به این ترتیب بدست می‌آیند، مولفه‌های (دکارتی) بردار a می‌نامند. هم این کار تجزیه بردار به مولفه‌هایش است. این مولفه‌ها، بردار a را به طور کامل و یکتا مشخص می‌کنند: با داشتن a_x و a_y ، برای هر چیزی می‌شود بردار a را بازسازی کرد. مولفه‌های بردار می‌توانند مثبت، منفی، یا صفر باشند. شکل ۶ب بردار b را نشان می‌دهد که برای آن $a_x < 0$ و $a_y > 0$ است.

روشن است که a_x و a_y از روابط زیر بدست می‌آیند:

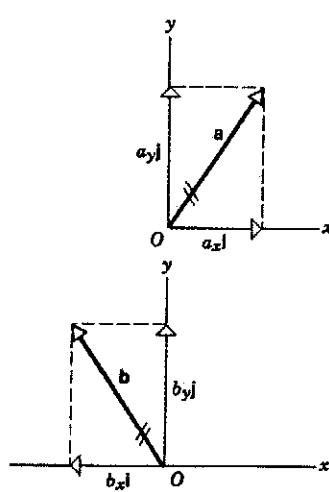
$$a_y = a \sin \phi \quad \text{و} \quad a_x = a \cos \phi \quad (5)$$

در این روابط، ϕ زاویه‌ای است که بردار a با جهت مثبت محور x می‌سازد؛ این زاویه در جهت پاد ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. چنان‌که از شکل ۶ دیده می‌شود، علامت جبری مولفه‌های بردار بستگی به این دارد که زاویه ϕ در کدام ربع صفحه مختصات باشد. مثلاً اگر ϕ

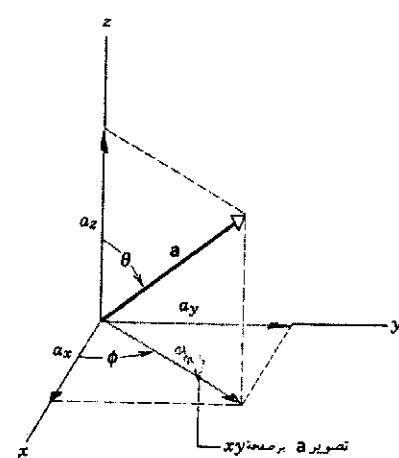


شکل ۶. بردارهای یکه \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , که به ترتیب برای مشخص کردن چهت مثبت محورهای x , y , و z به کار می‌روند. این بردارها بدون بعدن و طولشان یک است.

معادله برداری a با روابط اسکالار معادله ۶ هم ارز است. هر دو معادله، بردار a , (یا a و ϕ) را به مؤلفه‌هایش (a_x و a_y) مربوط می‌کنند. گاهی کمیت‌های $a\hat{i}$ و $a\hat{j}$ در معادله ۶ برا مولفه‌های برداری a می‌نامیم. شکل ۹ بردارهای a و b شکل ۶ را بر حسب مولفه‌های برداریشان نشان می‌دهد. با استفاده از مولفه‌های بردار به جای خود بردار خیلی از مسائل فیزیک ساده می‌شوند. به این معنی که اثر یک کمیت برداری را می‌توان با اثر مولفه‌های برداری آن معادل گرفت. در آینده، هر جا لازم باشد، صریحاً به مولفه‌های برداری اشاره می‌کنیم؛ هر جا که واژه مولفه را به



شکل ۹. مولفه‌های برداری a و b . در همه مسائل فیزیکی مربوط به بردارها، می‌توان خود بردار، مثلاً a ، یا دو مولفه برداری آن، a_x و a_y را به کار برداشت. نتیجه یکی است. اثر بردار a با اثر خالص دو بردار a_x و a_y معادل است. وقتی به جای یک بردار از مولفه‌هایش استفاده می‌کنیم، خوب است یک خط در دو بعد را روی خود بردار بزنیم تا یادمان باشد که دوباره آن را به حساب نیاوریم.



شکل ۷. بردار سه‌بعدی a ، با مولفه‌های a_x , a_y , و a_z . مولفه‌های x و y را معمولاً از روی تصویر a بر صفحه xy بدست می‌آورند. زاویه θ بین a و محور z را زاویه تطبی می‌نامند. زاویه ϕ در صفحه xy ، بین تصویر a و محور x ، زاویه سمتی نامیده می‌شود. (زاویه سمتی ϕ در اینجا هم همان مشخصاتی را دارد که در شکل ۶ داشت).

با تصویر a در صفحه xy کار کنیم، مستقیماً خود a را روی سه محور تصویر کنیم، و دقیقاً همان مولفه‌ها را بدست بیاوریم، اما نمایش این کار در صفحه، به خوبی حالت قبل ممکن نیست. از روابط هندسی شکل ۷، مولفه‌های بردار a به صورت زیر بدست می‌آیند

$$a_x = a \sin \theta \cos \phi, \quad a_y = a \sin \theta \sin \phi, \quad (7)$$

$$a_z = a \cos \theta$$

در تجزیه بردار به مولفه‌هایش، گاهی مفید است که برداری به طول یک درجهٔ معین تعریف کنیم. اغلب راحت‌تر است که بردارهای یکه را در چهت محورهای دستگاه خاصی که به کار می‌بریم بگیریم. در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه در چهت مثبت x , y , و z را معمولاً به ترتیب، با \hat{i} , \hat{j} و \hat{k} نمایش می‌دهند (شکل ۸). در نمادگذاری دستگاه بردارهای یکه را معمولاً با "کلاه" مثل \hat{i} , \hat{j} , و \hat{k} مشخص می‌کنند.

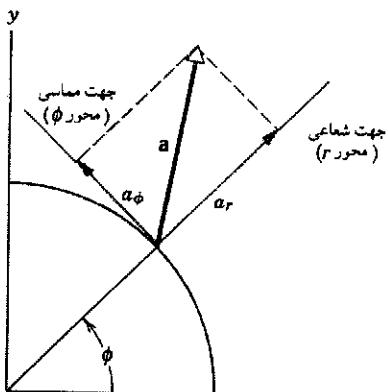
دقت کنید که لازم نیست \hat{i} , \hat{j} و \hat{k} در مبدأ باشند. اینها را هم، مثل بردارهای دیگر، می‌توانیم به هر کجای فضای مختصات که بخواهیم منتقل کنیم؛ تنها کافی است که جهتشان نسبت به محورهای مختصات تغییر نکند.

در حالت کلی، هر بردار a را در دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌توان بر حسب مولفه‌هایش و بردارهای یکه نوشت:

$$a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (\text{الف})$$

$$a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad (\text{ب})$$

نهایی به کار ببریم، منظورمان کمیتهای اسکالاری از نوع a_x و a_y است.



شکل ۱۱. تجزیه بردار a به مؤلفه‌های شعاعی و مماسی. این مؤلفه‌ها کاربرد زیادی در بررسی حرکت دایره‌ای (فصلهای ۴ و ۱۱) دارند.

تمیمهای سه بعدی شکل ۱۱ (مختصات استوانه‌ای یا کروی)، در تحلیل بسیاری از موارد مهم فیزیکی، برتری چشمگیری بر دستگاه مختصات دکارتی دارند. مثلاً نیروی گرانشی زمین که بر اجسام دور وارد می‌شود تقارن کروی دارد. بنابراین، توصیف خواص آن در مختصات کروی بسیار ساده‌تر است. نیروی مغناطیسی حاصل از سیمیهای بلند و راست حامل جریان تقارن استوانه‌ای دارد. پس، توصیف آن در مختصات استوانه‌ای ساده‌تر می‌شود.

۳.۴ جمع بردارها: روش مؤلفه‌ای

دیدیم که چگونه بردارها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. اکنون جمع برداری را با یک روش تحلیلی بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که s جمع بردارهای a و b باشد:

$$s = a + b \quad (9)$$

اگر دو بردار، مثل s و a ، با هم برابر باشند، باید اندازه‌شان یکی باشد و در یک جهت باشند. چنین چیزی تنها وقتی ممکن است که مؤلفه‌های متاظر آنها یکسان باشد. بر این نتیجه‌گیری مهم تأکید می‌کنیم:

دو بردار فقط به شرطی با هم برابرند که مؤلفه‌های نظریشان با هم برابر باشند.

در مورد بردارهای معادله ۹، می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

از برابرگرفتن مؤلفه‌های x در دو طرف معادله ۱۰ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x \quad (11\text{الف})$$

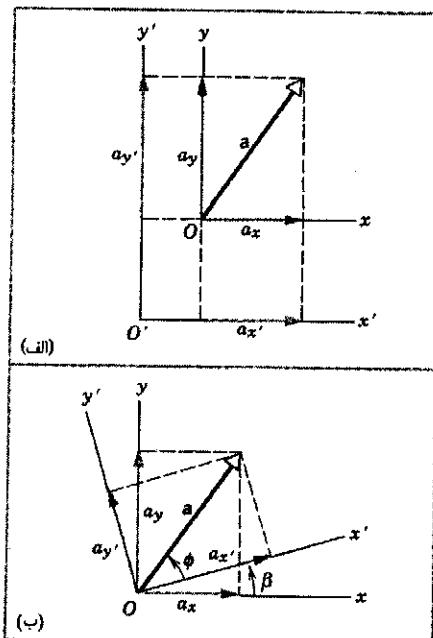
و برای مؤلفه‌های y نتیجه می‌شود که

$$s_y = a_y + b_y \quad (11\text{ب})$$

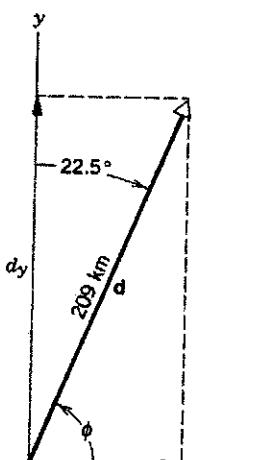
دستگاه‌های مختصات دیگر (اختیاری)

دستگاه‌های مختصات دیگری هم هستند که ممکن است برای تحلیل شرایط فیزیکی معینی مفید باشند. مثلاً دستگاه مختصات دو بعدی xy را می‌توان به دو طریق تغییر داد: (۱) می‌توان مبدأ دستگاه مختصات را به محل دیگری در صفحه xy منتقل کرد که به این کار می‌گویند انتقال دستگاه مختصات، یا (۲) می‌توان محورهای xy را حول مبدأ ثابت چرخاند، که عبارت است از دوران دستگاه مختصات. در هر مورد، بردار را ثابت نگه می‌داریم و محورهای مختصات را تغییر می‌دهیم. شکل ۱۰ اثر این دو تغییر را نشان می‌دهد. مؤلفه‌ها در مورد اول (شکل ۱۰(الف)) تغییر نمی‌کنند، اما در مورد دوم (شکل ۱۰(ب)) تغییر می‌کنند.

در شرایطی که وضعیت فیزیکی مورد نظر، تقارن خاصی دارد، شاید بهتر باشد دستگاه مختصات دیگری برای تجزیه بردار به مؤلفه‌هایش انتخاب کنیم. مثلاً می‌شود جهت‌های شعاعی و مماسی دستگاه مختصات قطبی را انتخاب کرد؛ شکل ۱۱. در این مورد هم، مؤلفه‌های روی هر محور را درست شبیه به دستگاه xy معمولی به دست می‌آوریم؛ یعنی از سر بردار به هر محور خطی عمود می‌کنیم.



شکل ۱۰. (الف) مبدأ O دستگاه مختصات شکل ۶(الف) به نقطه O' رفته یا منتقل شده است. مؤلفه‌های x و y بردار a با مؤلفه‌های x' و y' آن برابرند. (ب) محورهای x و y به اندازه زاویه β چرخیده‌اند. مؤلفه‌های x' و y' با مؤلفه‌های x و y متقابل اند (دقت کنید که مؤلفه y' در این مورد از مؤلفه x' کوچکتر است، در حالی که در شکل ۶(الف) مؤلفه y از مؤلفه x بزرگ‌تر بود)، اما بردار a عوض نشده است. محورهای مختصات را به اندازه چه زاویه‌ای باید چرخاند تا مؤلفه y' صفر شود؟



شکل ۱۲. مثال ۱.

$$d_y = d \sin \phi = (209 \text{ km}) (\sin 67.5^\circ) = 193 \text{ km}$$

در این مثال مؤلفه‌های دکارتی را بدکار بردیم، گرچه سطح زمین خمیده است و نمی‌تواند دکارتی باشد. مثلاً هواپیمایی که از استوا در جهت شمال شرقی شروع به پرواز کند، سرانجام به نقطه‌ای می‌رسد که در شمال نقطه شروع حرکت است؛ چنین چیزی هرگز نمی‌تواند در دستگاه‌های مختصات تخت رخ بدهد. به همین ترتیب، دو هواپیمایی که از دو نقطه متفاوت روی استوا، همزمان با سرعت یکسان، به طرف شمال (در مسیرهای موازی با هم) پرواز کنند. سرانجام در قطب شمال به هم بر می‌خورند. این هم در دستگاه‌های مختصات تخت غیرممکن است. اما اگر محاسبات ما محدود به فواصلی باشد که در مقایسه با ساعت زمین (6400 km) کوچک‌اند، با خیال آسوده می‌توانیم مختصات دکارتی را برای تحلیل جابه‌جایی‌های روی سطح زمین بدکار ببریم.

مثال ۲. اتومبیلی در یک جاده تخت 32 km به طرف شرق می‌رود. سپس در یک تقاطع به سوی شمال می‌پیچد و 47 km در آن جهت طی می‌کند. جابه‌جایی کل این اتومبیل را پیدا کنید.

حل: یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به زمین اختیار می‌کنیم. جهت مثبت x آنرا به طرف شرق، و جهت مثبت y آنرا به طرف شمال می‌گیریم. شکل ۱۳، دو جابه‌جایی متواالی a و b را نشان می‌دهد. جابه‌جایی کل $s = a + b$ می‌دهد. جابه‌جایی کل s به دست می‌آید. چون b در راستای x و a در راستای y مؤلفه‌ای ندارند، از معادلات ۱۱ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x = 32 \text{ km} + 0 = 32 \text{ km}$$

$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47 \text{ km} = 47 \text{ km}$$

مجموعه این دو معادله جبری با تک رابطه برداری معادله ۹ هم ارز است.

به جای مشخص کردن مؤلفه‌های s ، می‌توان طول و جهت آن را مشخص کرد:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \quad (12\text{الف})$$

و

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x} \quad (12\text{ب})$$

قاعدۀ جمع برداری با این روش از این قرار است. (۱) هر بردار را به مؤلفه‌هایش تجزیه می‌کنیم و علامت جبری هر مؤلفه را هم در نظر می‌گیریم. (۲) مؤلفه‌های مربوط به هر محور را، با درنظرگرفتن علامت جبری‌شان، با هم جمع می‌کنیم. (۳) مجموعهایی که به این ترتیب حاصل می‌شوند، مؤلفه‌های بردار مجموعاند. با داشتن مؤلفه‌های بردار مجموع، به راحتی می‌شود آن را در فضا بازسازی کرد.

جمع کردن بردارها با روش تجزیه به مؤلفه‌ها (به جای جمع مستقیم خود بردار با استفاده از روابط مثلثاتی) این مزیت را دارد که در آن همیشه با مثلثهای قائم‌الزاویه سروکار داریم، و این محاسبات را ساده می‌کند.

در جمع برداری به روش مؤلفه‌ای، با انتخاب به جای محورهای مختصات می‌توان کار را ساده‌تر کرد. بعضی وقتها، مؤلفه‌های بردار را نسبت به یک دسته محورهای خاص از همان ابتدا می‌دانیم؛ در این صورت، محورهایی که باید انتخاب کرد واضح است. در موارد دیگر با انتخاب معمول محورها می‌توانیم کار تجزیه بردار به مؤلفه‌ها را بسیار راحت‌تر کنیم. مثلاً محورها را می‌توان چنان انتخاب کرد که لااقل یکی از بردارها با یک محور موازی باشد؛ در این صورت، مؤلفه‌های آن بردار در راستای محورهای دیگر صفر می‌شوند.

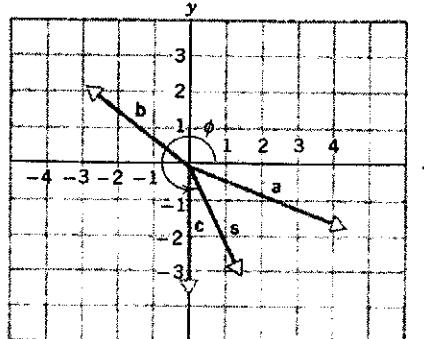
مثال ۱. هواپیمایی 209 km روی خط راستی در جهت 22.5° شرقی نسبت به شمال می‌پیماید. این هواپیما از مبدأ خود چقدر به شمال و چقدر به شرق رفته است؟

حل: جهت مثبت محور x را جهت شرق و جهت مثبت محور y را جهت شمال اختیار می‌کنیم. بردار جابه‌جایی (شکل ۱۲) یا از مبدأ (نقطۀ شروع)، با زاویۀ 22.5° نسبت به محور y (شمال) متمایل به جهت مثبت محور x (شرق) می‌کشیم. طول بردار اندازه 209 km را نشان می‌دهد. این بردار را d می‌نامیم؛ d_x مسافت پیموده شده به طرف شرق و d_y مسافت پیموده شده به طرف شمال است. داریم

$$\phi = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$$

بنابراین (از معادله ۵)

$$d_x = d \cos \phi = (209 \text{ km}) (\cos 67.5^\circ) = 80 \text{ km}$$

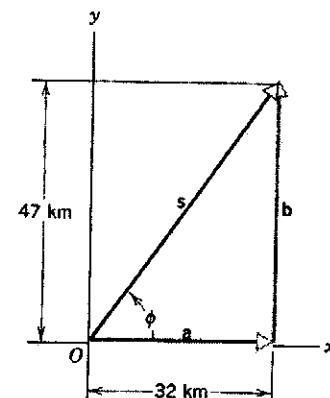


شکل ۱۴. مثال ۳.

معلوم می شود که اندازه s برابر با $\sqrt{3^2 + 4^2}$ است و زاویه ϕ که s با جهت مثبت x می سازد عبارت است از

$$\phi = \tan^{-1}(-\frac{4}{3}) = -53.1^\circ = 29.4^\circ$$

که پادساعتگرد از جهت $+x$ + اندازه گیری می شود. خیلی از ماشین حسابهای جیبی، جواب \arctan را بین $+90^\circ$ و -90° می دهند. مثلاً در مورد این مثال -53.1° (از ماشین حساب) به دست می آید که می دانیم با 29.4° هم از است. اما توجه کنید که اگر می خواستیم $(-\frac{4}{3})$ را حساب کنیم باز هم همین جواب را می گرفتیم، در حالی که باید زاویه ای در ربع دوم به دست بیاوریم. در این نوع مسائل اگر شکلی نظری شکل ۱۴ بکشیم جلوی اشتیاه گرفته می شود، و در صورت لزوم می توانیم مقدار حاصل از ماشین حساب را، با استفاده از اتحاد $\tan(\theta) = \tan(180^\circ - \phi)$ ، به زاویه ای تبدیل کنیم که در ربع درست واقع شده است.



شکل ۱۵. مثال ۲.

به این ترتیب، اندازه و جهت s (از معادله ۱۲) عبارت است از

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32\text{km})^2 + (47\text{km})^2} = 57\text{km}$$

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{47\text{km}}{32\text{km}} = 1.47, \quad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56^\circ$$

پس، اندازه بردار جابه جایی کل برابر با 57km ، و جهت آن 56° به طرف شمال شرق است.

مثال ۳. سه بردار که در یک صفحه واقع شده اند، در یک دستگاه مختصات دکارتی عبارت اند از

$$a = 4\text{i} - 3\text{j}$$

$$b = -2\text{i} + 2\text{j}$$

$$c = -3\text{i} - 4\text{j}$$

یکای مؤلفه ها یکسان است. بردار برایند s ، یعنی جمع این سه بردار را پیدا کنید.

حل: معادلات ۱۱ را به مورد سه بردار تعمیم می دهیم؛ نتیجه می شود که

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4\text{i} - 2\text{j} + 0 = 4\text{i} - 2\text{j}$$

و

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1\text{i} + 2\text{j} - 3\text{i} = -4\text{i} + 2\text{j}$$

بنابراین

$$s = s_x\text{i} + s_y\text{j} = 4\text{i} - 2\text{j}$$

شکل ۱۶ همه این بردارها را نشان می دهد. با استفاده از معادلات ۶

$a^{1/2}b^{1/2}\tan(\phi/2)$, اما چنین چیزی در فیزیک به درد نمی‌خورد. با تعریف معمول ضرب اسکالر, خیلی از کمیتی‌های مهم فیزیکی را می‌توانیم برحسب حاصل ضرب اسکالر دو بردار بیان کنیم، از جمله کار مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی، پتانسیل الکتریکی، توان الکتریکی، و چگالی انرژی الکترومغناطیسی را در فصلهای بعدی همین کتاب، این کمیت‌ها را برحسب همین حاصل ضرب تعریف خواهیم کرد.

اگر دو بردار برهم عمود باشند، حاصل ضرب نقطه‌ای آنها صفر می‌شود. با استفاده از تعریف ضرب نقطه‌ای، می‌توان روابط زیر را برای بردارهای یکه دکارتی i , j , و k بدست آورد:

$$\begin{aligned} i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ i \cdot j &= i \cdot k = j \cdot k = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

با استفاده از این روابط، حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار a و b را در دستگاه مختصات سه‌بعدی xyz می‌توانیم برحسب مؤلفه‌های این دو بردار بنویسیم (مسئله ۳۵):

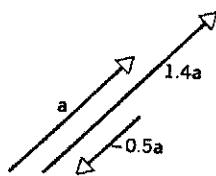
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (15)$$

۳. ضرب دو بردار با حاصل بردار. حاصل ضرب برداری^۱ دو بردار a و b , که به صورت $a \times b$ نشان داده می‌شود، بردار c است، $(c = a \times b)$ چنانکه اندازه آن، طبق تعریف، برابر است با

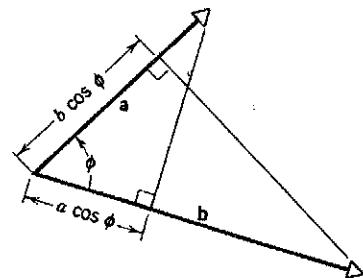
$$c = |a \times b| = ab \sin \phi \quad (16)$$

که ϕ زاویه (کوچک) بین a و b است. البته a و b با هم دو زاویه متقابلاً می‌سازند: یکی ϕ (شکل ۱۶) و دیگری $\phi - 2\pi$, در عملیات برداری همیشه زاویه کوچکتر را انتخاب می‌کنیم. برای حاصل ضرب اسکالار (معادله ۱۲) فرقی نمی‌کند که کدام بردار را انتخاب کنیم، چون $\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos(\phi)$ است. اما در معادله ۱۶ فرق می‌کند، چون $\phi = -\sin(2\pi - \phi) = -\sin(\phi)$ است.

راستای c , حاصل ضرب برداری a و b , طبق تعریف بر صفحه مشکل از a و b عمود است. برای تعیین جهت بردار c از "قاعده دست راست" (شکل ۱۷) استفاده می‌کنیم: (دو بردار a و b بکشید که دم آنها روی هم باشد و محوری در نظر بگیرید که از مبدأ a و b بگذرد و بر صفحه آنها عمود باشد. انگشتان دست راست را دور این محور بیچید و بردار a را از طریق زاویه کوچکتر بین a و b , با نوک انگشتان به طرف بردار b بچرخانید؛ در این عمل شست را کشیده نگه دارید. جهت شست، جهت حاصل ضرب برداری $a \times b$ را نشان می‌دهد. این دستوارالعمل، یک قرارداد است. دو بردار a و b یک صفحه تشکیل می‌دهند؛ دو جهت (مخالف) برای بردار c عمود بر این صفحه وجود دارد. انتخاب ما بر اساس قرارداد دست راست



شکل ۱۵. ضرب اسکالار c در بردار a , بردار c را می‌دهد که اندازه آن $|c|$ برابر اندازه a است. جهت c همان جهت a است اگر c مثبت باشد، و خلاف جهت a است اگر c منفی باشد. در این شکل $c = +5$ و $c = -5$ مثال زده شده است.



شکل ۱۶. حاصل ضرب اسکالار $ab \cos \phi$ (عنی $ab \cdot a \cos \phi$) در واقع حاصل ضرب اندازه یک بردار (متلاً) a و مؤلفه بردار دیگر در جهت بردار اولی ϕ ($b \cos \phi$) است.

۱. ضرب اسکالار در بردار، معنی ضرب اسکالار در بردار ساده است: حاصل ضرب اسکالار c در بردار a , که با ca نشانش می‌دهیم، طبق تعریف، برداری است که اندازه آن $|c|$ برابر اندازه بردار a است. جهت ca همان جهت a است اگر c مثبت باشد، و در خلاف جهت a است اگر c منفی باشد (شکل ۱۵). برای تقسیم بردار بر اسکالار، در واقع بردار را در معکوس آن اسکالار ضرب می‌کنیم. اغلب، اسکالار موردنظر یک عدد خالص نیست، بلکه کمیتی فیزیکی است که بعد و یکا دارد.

۲. ضرب دو بردار با حاصل اسکالار. حاصل ضرب اسکالار دو بردار a و b , که با $a \cdot b$ نشانش می‌دهیم، طبق تعریف برابر است با

$$a \cdot b = ab \cos \phi \quad (13)$$

که در آن، a اندازه بردار a , b اندازه بردار b , و ϕ کسینوس زاویه بین دو بردار است (شکل ۱۶). به خاطر نقطه بین a و b , این ضرب را ضرب نقطه‌ای a و b نیز می‌نامند و آن را "ا نقطه b " می‌خوانند. حاصل ضرب نقطه‌ای مستقل از دستگاه مختصاتی است که انتخاب می‌شوند.

چون a و b اسکالارند و ϕ عددی خالص است، حاصل ضرب اسکالار دو بردار هم اسکالار است. حاصل ضرب اسکالار دو بردار را می‌توان حاصل ضرب اندازه یک بردار در مؤلفه بردار دوم در جهت اولی در نظر گرفت، شکل ۱۶؛ پس این حاصل ضرب را می‌توان به صورت $(a \cdot b) \cos \phi$ یا به صورت $a(b \cos \phi)$ بیان کرد. می‌توانستیم $b \cdot a$ را هر چیزی تعریف کنیم، بلطفاً

۱. به این ضرب "ضرب داخلی" هم می‌گویند. (وا

Ramin samad@yahoo.com

و متفاوت، می شود نشان داد (مسئله ۳۶) که

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} \\ &\quad + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (17)$$

علت اینکه حاصل ضرب برداری را این طور تعریف می کنیم آن است که چنین تعریفی در فیزیک مفید است. در فیزیک اغلب به کمیتهایی برمی خوریم که بردارند و حاصل ضرب برداری آنها، با تعریف بالا، معنی فیزیکی مهمی دارد. از جمله کمیتهای که حاصل ضرب برداری اند می توانیم از گشتاور، تکانه زاویه ای، نیروی وارد بر بارهای متحرک در میدان مغناطیسی، و شار انرژی الکترومغناطیسی را نام ببریم. بعداً که این کمیتها را بررسی می کنیم، ارتباطشان با حاصل ضرب خارجی دو بردار را هم مشخص خواهیم کرد.

حاصل ضربهای تعیین یافته بردارها (اختیاری)

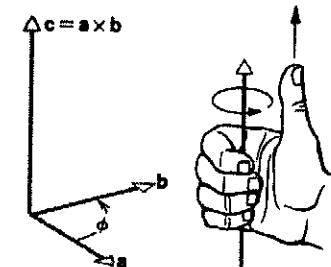
حاصل ضرب اسکالر، ساده‌ترین حاصل ضرب دو بردار است. ترتیب عوامل بر این حاصل ضرب اثری ندارد. حاصل ضرب برداری در ردیف بعدی است. در این مورد ترتیب عوامل بر حاصل ضرب مؤثر است، اما این تأثیر تنها به صورت یک منهای یک است؛ اگر ترتیب عوامل را عوض کنیم، جهت حاصل ضرب هم عوض می شود. حاصل ضربهای مفید دیگری هم برای بردارها داریم که البته پیچیده‌ترند. مثلاً، با ضرب هر یک از سه مؤلفه یک بردار در سه مؤلفه برداری دیگر، می شود یک تانسور ساخت. به این ترتیب تانسور (از رتبه دو) با ۹ عنصر، بردار با سه عنصر، و اسکالر با یک عنصر مشخص می شوند. تنش مکانیکی، لختی دورانی، و کرنش از جمله کمیتهای فیزیکی اند که می توانیم آنها را با تانسور نمایش بدهیم. البته کمیتهای پیچیده‌تر از این هم می توانند در کار باشند، اما در این کتاب فقط با اسکالر و بردار سروکار خواهیم داشت.

مثال ۴. بردار \mathbf{a} در صفحه xy در جهت 250° پادساعتگرد نسبت به جهت مشتت محور x قرار دارد و اندازه آن $4\sqrt{3}$ واحد است. اندازه بردار \mathbf{b} برابر با 5 واحد، و جهت آن جهت مشتت محور z است. (الف) حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. (ب) حاصل ضرب برداری $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را بدست بیاورید.

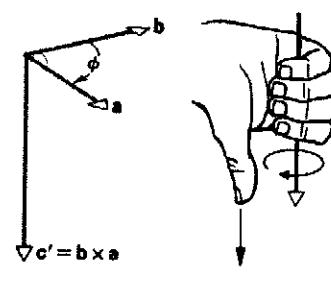
حل: (الف) چون \mathbf{a} و \mathbf{b} برهم عمودند، زاویه ϕ بین آنها 90° ، و اسکالر برابر است با

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = ab \cos 90^\circ = 0$$

که با این امر که هیچ یک از این دو بردار، مؤلفه‌ای در راستای بردار دیگر ندارد.



(الف)



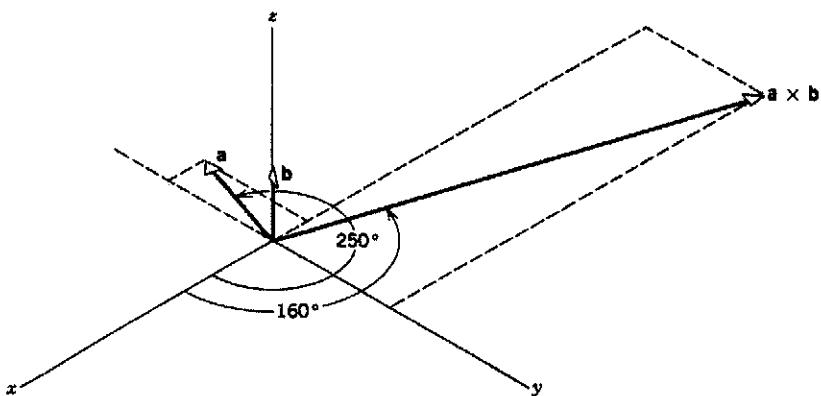
(ب)

شکل ۱۷. قاعدة دست راست برای حاصل ضرب برداری. (الف) بردار \mathbf{a} با انگشت‌های دست راست بچرخانید تا روی \mathbf{b} بیفتد. شست شما جهت \mathbf{c} را نشان می‌دهد. (ب) با عکس این عمل (چرخاندن \mathbf{b} به سمت \mathbf{a}) معلوم می‌شود که $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

است. (قرارداد دست چپ، برای حاصل ضرب برداری جهتی مخالف جهت بالا می‌دهد).

اگر ϕ برابر با 90° باشد، \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} (یعنی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$)، بر هم عمودند. و جهتهای یک دستگاه مختصات قائم سه‌بعدی را مشخص می‌کنند. دقت کنید که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ با $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ فرق دارد، یعنی ترتیب عوامل در حاصل ضرب برداری مهم است. در حاصل ضرب اسکالر چنین نیست، زیرا ترتیب عوامل در جبر یا حساب اثری بر حاصل ضرب ندارد. در واقع، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ است (شکل ۱۷). این را از اینجا می‌توان فهمید که $b a \sin \phi$ با $a b \sin \phi$ برابر است، اما جهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بر خلاف جهت $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ است. حاصل ضرب برداری هم، با توجه به تعریف بالا، مستقل از محورهای مختصاتی است که انتخاب می‌کنیم.

سه بردار یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} در یک دستگاه مختصات راستگرد با رابطه $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ بهم مربوط می‌شوند. (در واقع، به همین ترتیب است که مقصود از دستگاه راستگرد تعریف می‌شود. ما همواره از دستگاه مختصات راستگرد استفاده می‌کنیم، مگر آنکه خلاف آن را ذکر کنیم.) با حفظ ترتیب دوری \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} ، می توانیم روابط $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$ را هم بنویسیم. اگر ترتیب دوری را عوض کنیم، یک علامت منفی وارد می‌شود، مثلاً $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$. حاصل ضرب برداری دو بردار یکه یکسان صفر است ($\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$)؛ در واقع، حاصل ضرب هر بردار در خودش صفر است ($\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$). با استفاده از این روابط برای حاصل ضرب برداری بردارهای یکه یکسان



شکل ۱۸. مثال ۲.

در روابط بالا، β زاویه چرخش دستگاه جدید نسبت به دستگاه قدیم است.

معادلات ۱۸ مثالی از معادلات تبدیل‌اند، که مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در یک دستگاه مختصات را به مؤلفه‌های آن در هر دستگاه دوران یافته تبدیل می‌کنند. با استفاده از این معادلات می‌شود تعریفی عامت و دقیق برای بردار ارائه کرد. تا اینجا بردار را کمیتی فیزیکی تعریف کردیم که هم اندازه دارد و هم جهت، و عملیات با آن تابع قواعد خاصی است. اکنون، به جای این تعریف، تعریف مشخص‌تری ارائه می‌کنیم:

هر کمیت فیزیکی (مثلاً سرعت یا نیرو) را می‌توان با بردار نشان داد اگر مؤلفه‌های آن، تحت دوران، طبق قواعد معادلات ۱۸ تبدیل شوند.

معادلات ۱۸ برای بردارهای فضای دو بعدی‌اند، اما می‌شود آنها را به سبعدهم تمییم داد. در هر حال همین مورد دو بعدی برای نشان دادن همه مفاهیم اساسی کافی است.

چنانکه از شکل ۱۰ معلوم است، بردارها در اثر انتقال یا دوران محورهای مختصات تغییر نمی‌کنند یا تاوردا می‌مانند. کمیتهای فیزیکی معینی هستند که این خاصیت را دارند؛ مثلاً در مورد سرعت، شما و دوستان، که در خانه‌ای در آن طرف خیابان است، هر دو یک سرعت برای اتومبیلی که از خیابان می‌گذرد به دست می‌آورید. (البته تا وقتی که خانه‌های شما نسبت به هم ساکن باشند!) کمیتهایی که چنین خواصی دارند، و از قواعد حساب برداری این فصل پیروی می‌کنند، با بردار نشان داده می‌شوند. از جمله این کمیتها می‌توان از سرعت، شتاب، نیرو، تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای، و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نام برد. معادلاتی که این کمیتها را به هم مربوط می‌کنند معادلات برداری‌اند؛ مثلاً $s \cdot b = s$ اسکالر است)، $a + 2b = c$ ، $a \times b = c$ و غیره. خیلی از کمیتهای فیزیکی هم با اسکالار و معادلات اسکالار توصیف می‌شوند، مثلاً دما، فشار، جرم، انرژی، و زمان. یکی از ویژگیهای معادلات برداری آن است که بین کمیتهای فیزیکی، نه تنها روابط ریاضی بلکه روابط هندسی هم برقرار می‌کنند.

(ب) اندازه حاصل ضرب برداری از معادله ۱۶ به دست می‌آید:

$$|a \times b| = ab \sin \phi = (7\sqrt{5})(5\sqrt{5}) \sin 90^\circ = 35$$

جهت حاصل ضرب برداری بر صفحه متشکل از a و b عمود است. بنابراین، چنانکه در شکل ۱۸ نشان داده است، بردار حاصل ضرب در صفحه xy (عمود بر b ، و با زاویه $90^\circ - 160^\circ = 25^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور x واقع است (عمود بر a و طبق قاعدة دست راست).

با استفاده از معادله ۱۷ می‌شود مؤلفه‌های $a \times b$ را به دست آورد. ابتدا باید مؤلفه‌های a و b را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} a_x &= 7\sqrt{5} \cos 250^\circ = -2.5 & b_x &= 0 \\ a_y &= 7\sqrt{5} \sin 250^\circ = -7.0 & b_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 5.0 \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a \times b &= [(-7.0)(0) - (0)(0)]i \\ &\quad + [(0)(0) - (-2.5)(-7.0)]j \\ &\quad + [(-2.5)(0) - (-7.0)(0)]k \\ &= -35i + 13j \end{aligned}$$

که با اندازه و جهت بردار حاصل ضرب در شکل ۱۸ سازگار است.

۳-۶ قوانین برداری در فیزیک^۱ (اختیاری)

شکل ۱۰ ب را در نظر بگیرید؛ می‌شود نشان داد (موضوع مستانه ۵۱) که رابطه مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی a در دستگاه دوران یافته ($x'y'z'$) با مؤلفه‌های همین بردار در دستگاه اصلی (xyz) به صورت زیر است:

$$a_{x'} = a_x \cos \beta + a_y \sin \beta \quad (۱۸\text{الف})$$

$$a_{y'} = -a_x \sin \beta + a_y \cos \beta \quad (۱۸\text{ب})$$

^۱. جذف این بخش لطمی به پیوندگی مطالب این فصل نیز نزد.

کنیم، که یکی نسبت به دیگری چرخیده باشد، البته معلوم می‌شود که مؤلفه‌های بردارهای F (نیرو)، v (سرعت)، و B (میدان مغناطیسی) در دو دستگاه متفاوت‌اند (شکل ۱۰ ب). اما ناظرهای هر دو دستگاه این قانون فیزیکی را به شکل واحدی می‌بینند. یعنی در دستگاه چرخیده هم، بردارهای تبدیل‌یافته در رابطه $B' \times v' = F'$ صدق می‌کند.

این خواص تبدیل، برای طبیعت چنان بدیهی به نظر می‌رسند که اغلب پیش خودمان فرض می‌کنیم که طبیعت باید این طور رفتار کند. مثلاً، صرفنظر از آثار صرفاً موضعی، نیروی الکتریکی بین دو الکترون که به فاصله معینی از یکدیگرند، نباید به این بستگی داشته باشد که مکان نسبی این دو الکترون را در راستای شمال به جنوب می‌ستجمی یا در راستای شرق به غرب. تصور جهانی که چنین خوشفتران باشد چندان دشوار نیست؛ مثلاً، ممکن است که طول بردار، در اثر انتقال یا دوران عوض شود. فیزیکدانها و ریاضیدانها در این باره تأمل کرده‌اند که چرا جهان ما چنین تقارنهایی (مثلاً انتقال یا دوران) دارد، و در اینجا که بین تقارنهای طبیعت و کمیتهای معینی که طی فرایندهای فیزیکی پایسته می‌مانند (یعنی مقدار کل آنها تغییر نمی‌کند)، روابط جالبی وجود دارد. مثلاً، ناوردایی قوانین فیزیک تحت تقارن انتقال زمان (یعنی اینکه قانونی که مثلاً دو شنبه برقرار باشد، سه شنبه هم برقرار است) مستقیماً به قانون پایستگی انرژی می‌انجامد.

تقارن انعکاسی، بردارهای قطبی، و بردارهای محوری نوع دیگری از تبدیل وجود دارد که کاملاً با انتقال و دوران متفاوت است. این تبدیل، وارون کردن دستگاه مختصات است، یعنی $x \rightarrow -x$ ، $y \rightarrow -y$ ، و $z \rightarrow -z$. به این ترتیب کل سیستم، نسبت به مبدأ مختصات، وارون می‌شود.

ممکن است تصور کنید که برای اعمال این تبدیل بر معادلات، کافی است که مؤلفه‌های هر بردار را منفی کنیم. (اسکالرها در اثر این تبدیل عوض نمی‌شوند). اگر جهت محور x را معکوس کنیم و برداره را عوض نکنیم، روش است که $-a_x \rightarrow a_x$. بنابراین، به جای اینکه دستگاه مختصات وارون رسم کنیم می‌توانیم بردار a را در همان دستگاه مختصات قدیم بکشیم. این تصور برای دسته بزرگی از کمیتهای فیزیکی‌ای که با بردار نمایش داده می‌شوند درست است؛ سرعت، شتاب، نیرو، تکانه خطی، و میدان الکتریکی از آن جمله‌اند. این بردارهای خوش‌رفتار را به‌طور کلی بردار قطبی می‌نامند.

گروه دیگری از بردارها هستند که تحت وارونی چنین رفتار نمی‌کنند. مثلاً، غالباً مفید است که ذره‌ای را که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای θ مشخص کنیم (شکل ۱۹). اندازه θ ، عملاً می‌گوید که سرعت دوران ذره چقدر است؛ جهت θ بر صفحه دایره عمود است و با قاعده دست راست بددست می‌آید. (اگر انگشتان دست راست خود را در جهت θ است) شما در جهت θ است)

حالا فرض کنید مدار ذره را نسبت به مبدأ وارون کنیم، شکل ۱۹.

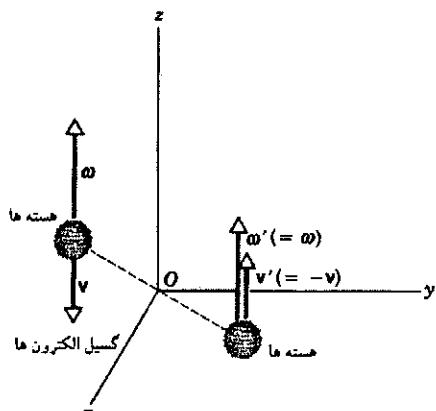
حالا چند مثال می‌آوریم از معادلاتی که بعداً در همین کتاب به تفصیل بررسی شان خواهیم کرد؛ فعلًاً این معادلات را تنها به عنوان مثالهایی از شکلهای اساسی مطرح می‌کنیم.

با قانون دوم نیوتون، $F = ma$ ، شروع می‌کنیم (فصل ۵). این قانون، نیروی F لازم را، برای اینکه ذره‌ای به جرم m شتاب a پیدا کند، به دست می‌دهد. طرف راست معادله عبارت است از اسکالر جرم ضرب در بردار شتاب؛ طرف چپ بردار نیرو است. این معادله ساده می‌نماید، اما بسیار غنی است. ضرب را واقع سه معادله مستقل به دست دو طرف را مساوی می‌گیریم. پس در واقع سه معادله جرم و مؤلفه‌های می‌نماید. به این ترتیب، مثلاً مؤلفه y نیرو هیچ اثری بر مؤلفه x یا z حل کرد. به این ترتیب، مثلاً مؤلفه y نیرو هیچ اثری بر مؤلفه x یا z شتاب ندارد؛ یا می‌توانیم بگوییم که جهت نیروی وارد بر سیستم، جهت شتاب آن را تعیین می‌کند (چون اگر برداری را در یک اسکالر مشیت ضرب کنیم، بردار دیگری در همان جهت به دست می‌آید). در فصل بعدی، که حرکت دو بعدی پرتابه تحت اثر گرانش را بررسی می‌کنیم، از این واقعیت استفاده خواهیم کرد.

قوانین شامل حاصل ضرب اسکالر در زمینه‌های متفاوتی پیش می‌آیند. نخستین مثالی که به آن برمی‌خوریم، تعریف کار مکانیکی W است؛ کاری که نیروی F وارد بر سیستم انجام می‌دهد تا آن را به اندازه d جابه‌جا کند. این کمیت اسکالر، حاصل ضرب اسکالر نیرو و جابه‌جایی است: $W = F \cdot d = Fd \cos \phi$ (فصل ۷). لزومی ندارد که نیرو با جابه‌جایی موازی باشد؛ مثلاً تصور کنید سورتمهای را با طنابی که از روی شانه‌تان رکرده‌اید روی زمین می‌کشید. جابه‌جایی افقی است، اما نیرو (که در راستای طناب اعمال می‌شود) هم مؤلفه افقی دارد و هم مؤلفه عمودی. دقت کنید که، طبق رابطه هندسی شکل ۱۷، فقط مؤلفه F در راستای d (یعنی $\phi = 0$) در انجام کار شرکت می‌کند. اینجا هم، معادله برداری اطلاعاتی درباره روابط هندسی دربر دارد.

مثالی از قوانین فیزیکی شامل حاصل ضرب برداری، معادله $B \times v = qv$ است (فصل ۳۴). این معادله نیروی F وارد بر بار الکتریکی q را که با سرعت v در میدان مغناطیسی B حرکت می‌کند به دست می‌دهد. شکل هندسی این نیرو (که از معادله برداری بالا به دست می‌آید) موجب می‌شود که مسیر ذرات بردار به صورت مدارهای دایره‌ای در بیاید؛ این همان چیزی است که در شتاب‌هندۀ های عظیم ذرات، مثل سیکلوترون، اتفاق می‌افتد. دقت کنید که نیرو همیشه هم بر سرعت و هم بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. اگر این معادله برداری نبود، درک اینکه چرا نیرو چنین رفتاری دارد دشوار می‌شد.

قوانین فیزیکی‌ای که با معادلات برداری بیان می‌شوند جهانی اند و به دستگاه مختصات به کار رفته بستگی ندارند. مثلاً، اگر حرکت ذرات بردار در میدان مغناطیسی را در دو دستگاه مختصات بررسی



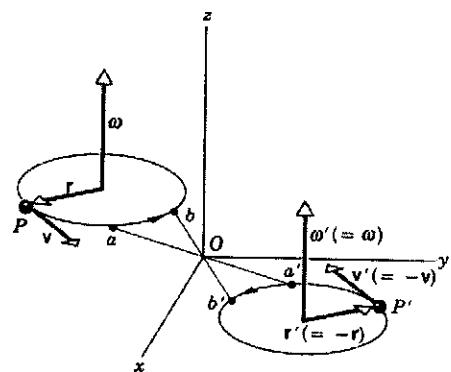
شکل ۲۰. مجموعه‌ای از هسته‌های چرخان، که با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شوند، عمدتاً در جهت مخالف ω الکترون گسیل می‌کنند. در آزمایش وارونه، الکترونها در جهت ω گسیل می‌شوند. آزمایش اصلی و آزمایش وارونه کاملاً با هم متفاوت‌اند. این نشان می‌دهد که تقارن وارونی در این واپاشها نقض می‌شود.

اتم الکترون گسیل می‌کند. هسته اتم، مثل یک فرفه کوچک، حول محور خود می‌چرخد، و می‌شود به هر هسته برداری مانند ω نسبت داد که دوران آن را مشخص می‌کند. در آزمایش واپاشی بتا، جهت گسیل الکترون نسبت به جهت ω را برسی می‌کردند (شکل ۲۰). اگر تعداد الکترونها بیکم می‌شوند، آنها برابر با آنها بود که در خلاف جهت گسیل می‌شوند. اما معلوم بود که در خلاف جهت گسیل می‌شوند، آزمایش وارونه هم درست است. اما آزمایش اصلی می‌بود و تقارن وارونی صدق می‌کرد. اما معلوم شد که بیشتر الکترونها در خلاف جهت گسیل می‌شوند. بنابراین، در آزمایش وارونه بیشتر الکترونها در جهت گسیل می‌شوند (زیرا در اثر وارونی علامت v عوض می‌شود اما علامت ω عوض نمی‌شود). آزمایش اصلی با تصویر آینه‌ای اش متفاوت است: بنابراین، تقارن وارونی و قانون پایستگی مربوط به آن، پایستگی پاریته، در این مورد معتبر نیست.^۱

این آزمایش نحوه تفکر فیزیکدانها را در باره فرایندهای بنیادی دگرگون کرد، و یک سرنخ اساسی در مورد ماهیت قانون فیزیکی ای که در پس واپاشی بتا وجود دارد، به دست داد. این قانون، یکی از چهار نیروی بنیادی است که می‌شناسیم. این آزمایش پیشگام سلسله آزمایش‌هایی بود که روابط دیگری میان خواص تبدیل، اصول ناوردایی، و تقارن آشکار کرد.

پرسشها

۱. در سال ۱۹۶۹، سه فضانورد آپولو از پایگاه کیپ کاناورال پرواز کردند، به ماه رفتند، برگشتند، و در نقطه معینی در اقیانوس آرام فرود آمدند



شکل ۱۹. ذره P که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شود. اگر همه مختصات را نسبت به مبدأ O وارون کنیم، ذره "وارونه" P' هم روی دایره می‌گردد و با بردار سرعت زاویه‌ای ω' مشخص می‌شود.

بردار r ، محل ذره P نسبت به مرکز دایره، به $-r = r'$ تبدیل می‌شود. سرعت هم به $-v = v'$ تبدیل می‌شود. از آنجا که ذره اولیه از a به b می‌رود، ذره وارون شده از a' به b' می‌رود و جهت دوران (ساعتگرد یا پاد ساعتگرد) عوض نمی‌شود، پس $\omega = \omega'$ است. بنابراین سرعت زاویه‌ای، برخلاف بردارهای قطبی r و v ، تحت وارونی مختصات تغییر جهت نمی‌دهد. چنین برداری را بردار محوری یا شبه بردار می‌نامند: گشتاور و میدان مغناطیسی هم از این نوع بردارها هستند.

در فصل ۱۱، مبحث حرکت دورانی، خواهیم دید که بین بردارهای r و v و ω یک رابطه حاصل ضرب برداری وجود دارد، $r \times v = \omega$. اگر قرار بود که هر سه بردار تحت وارونی تغییر جهت بدنهند، رابطه بین سه بردار وارونه به شکل $r \times (-r) = \omega \times (-\omega) = -\omega$ در می‌آمد. اما این تناقض است: $r \times \omega$ نمی‌تواند هم با $-v$ و هم با v برابر باشد (مگر اینکه v صفر باشد که اینجا چنین نیست). بنابراین، لازم است که رابطه تبدیل ω ، حتماً به شکل $\omega = \omega'$ باشد تا رابطه فیزیکی $r \times \omega = v$ در دستگاه وارونه هم شکل خود را حفظ کند، یعنی $r' \times \omega' = v'$. این همان چیزی است که از ناوردایی قوانین فیزیک تحت یک تبدیل خاص مختصات می‌فهمیم. یعنی، اگر یک قانون فیزیکی را به شکل معادله در یک دستگاه مختصات بنویسیم، بردارها را مطابق با تبدیل مختصات مورد نظر تبدیل کنیم، و بردارهای تبدیل‌یافته را در معادله مورد نظر بگذاریم، باید معادله‌ای به دست بیاید که با معادله اول هم ارز است.

تا حدود سال ۱۹۵۶ تصور بر این بود که قوانین فیزیک تحت وارونی از نوع شکل ۱۹، (و الیه تحت انتقال و تحت دوران) تغییر نمی‌کنند. اما در سال ۱۹۵۶ کشف شد که تقارن وارونی، در نوع خاصی از واپashیهای پرتوza، واپاشی بتا، نقض می‌شود. در اینجا عبارت "تحت

۱. نگاه کنید به The New Ambidextrous Universe, Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

که رویداد b پیش از c و پس از a رخ داده باشد. به این ترتیب، ترتیب رویدادهای بالا، a , b , c است. پس زمان به نوعی جهت دارد، که به کمک آن می‌توان گذشته، حال، و آینده را از هم تشخیص داد. پس آیا زمان بردار است؟ اگر نه چرا؟

۱۳. آیا قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای تفریق بردارها هم صادق‌اند؟

۱۴. آیا حاصل ضرب اسکالار می‌تواند منفی شود؟

۱۵. (الف) آیا از $a \cdot b = 0$ نتیجه می‌شود که a و b بر هم عمودند؟
(ب) آیا از $a \cdot c = a \cdot b$ می‌شود که $b = c$ است؟

۱۶. آیا اگر $a \times b = 0$ باشد، a و b با هم موازی‌اند؟ آیا عکس این هم درست است؟

۱۷. بردار a موازی محور دوران زمین، و در جهت جنوب به شمال است. بردار b در راستای قائم رو به بالا، و در مکان شماست. جهت بردار $a \times b$ چیست؟ در چه نقاطی از سطح زمین، اندازه بردار $a \times b$ بیشینه است؟ در چه نقاطی کمینه است؟

۱۸. در کدام یک از عملیات زیر لازم است که دستگاه مختصات را مشخص کنیم (الف) در جمع دو بردار، (ب) در ضرب اسکالار دو بردار، (ج) در ضرب برداری دو بردار، یا (د) در تعیین مؤلفه‌های دو بردار؟

۱۹. (الف) نشان بدید که اگر همه مؤلفه‌های یک بردار را وارونه کنیم، جهت خود بردار هم وارونه می‌شود. (ب) نشان بدید که اگر مؤلفه‌های دو بردار را وارونه کنیم، حاصل ضرب برداری آنها عوض نمی‌شود.

(ج) پس آیا حاصل ضرب برداری، بردار است؟

۲۰. در مورد جمع، تفریق، و ضرب بردارها صحبت کردیم. فکر می‌کنید چرا از تقسیم بردارها حرفی نزدیم؟ آیا می‌شود چنین عملی هم تعریف کرد؟

۲۱. قرارداد معمول در جبر برداری، قاعدة دست راست است، که ماهم آن را به کار بردیم. به نظر شما اگر قرارداد دست چپ را به کار می‌بردیم چه تغییراتی لازم می‌بود؟

۲۲. (الف) خودتان را قانون کنید که حاصل ضرب برداری دو بردار قطبی، یک بردار محوری است. (ب) حاصل ضرب برداری یک بردار قطبی و یک بردار محوری چیست؟

مسئله‌ها

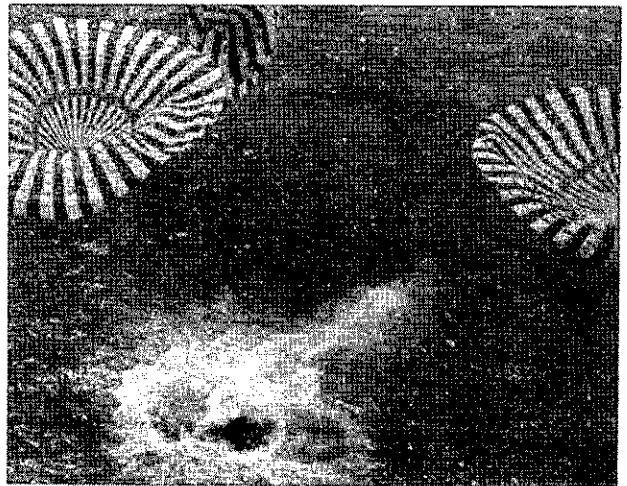
بخش ۲-۳ جمع برداری؛ روش نموداری

۱. دو جابه‌جایی، به اندازه‌های $3m$ و $4m$ ، در نظر بگیرید. این جابه‌جاییها را چنان با هم ترکیب کنید که اندازه جابه‌جایی برابر (الف) $7m$ ، (ب) $1m$ ، و (ج) $5m$ شود.

۲. دو بردار a و b چه خاصیتی داشته باشند تا (الف) $c = a + b$ باشد؛ (ب) $c = a - b$ باشد؛ (ج) $c = a + b$ باشد؟

۳. شخصی \tilde{m} در جهت 35° شرق شمال، و سپس $170^\circ m$ مستقیماً به طرف شرق حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از روش

(شکل ۲۱). یک افسر ارشد نیروی دریایی در پایگاه با آنها خداخافظی کرد و سپس با یک کشتی هواپیمایی به اقیانوس آرام رفت تا فضانوردان را از آب بگیرد. جابه‌جایی فضانوردان و این افسر را با هم مقایسه کنید.



شکل ۲۱. پرسش ۱

۲. سگی 100m به طرف جنوب، سپس 100m به طرف شرق، بعد 100m به طرف شمال می‌دود و سرانجام به نقطه شروع حرکت خود می‌رسد، یعنی جابه‌جایی کل او صفر می‌شود. نقطه شروع کجاست؟ قطب شمال یک جواب بدیهی است اما جوابهای دیگر هم وجود دارند، که نزدیک قطب جنوب‌اند. این حرکت را توصیف کنید.

۳. آیا می‌توان دو بردار با اندازه‌های متفاوت داشت که برابرنشان صفر شود؟ سه بردار چطور؟

۴. آیا ممکن است اندازه برداری صفر باشد ولی یکی از مؤلفه‌های آن صفر نباشد؟

۵. آیا می‌شود که مجموع اندازه‌های دو بردار با اندازه مجموع همان دو بردار یکی باشد؟

۶. آیا ممکن است که اندازه تقاضل دو بردار بزرگتر از اندازه هر یک از دو بردار باشد؟ آیا اندازه تقاضل دو بردار می‌تواند بزرگتر از اندازه مجموع همان دو بردار باشد؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید که d باشد؛ اگر نه، توضیح بدید که چرا؟ $d = d_1 + d_2$ یا $d \geq d_2$ یا $d \geq d_1$

۸. اگر مجموع سه بردار صفر شود، این سه بردار الزاماً در یک صفحه‌اند. این گفته را توجیه کنید.

۹. آیا بردارهای یکتا z ، z و k یکا دارند؟

۱۰. توضیح بدید که اطلاعات موجود در بردارها به چه معنی بیش از اطلاعات موجود در اسکالارهاست؟

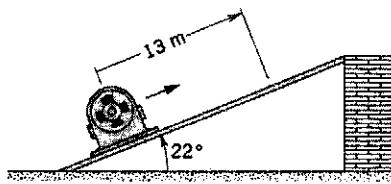
۱۱. چند کمیت اسکالار نام ببرید. آیا مقدار یک کمیت اسکالار به دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد؟

۱۲. رویدادها را می‌توان به ترتیب زمانی مرتب کرد. مثلاً ممکن است

بخش ۳-۳ مؤلفه‌های بردار

۱۰. (الف) بردار a در صفحه xy و در جهت 252° پاد ساعتگرد از جهت مثبت محور x است. اندازه a , $a = 7\sqrt{3}$ واحد است. مؤلفه‌های این بردار را به دست بیاورید. (ب) مؤلفه x برداری -25° واحد و مؤلفه y آن $+43^\circ$ واحد است. اندازه این بردار و زاویه آن را با جهت مثبت محور x به دست بیاورید.

۱۱. یک دستگاه مکانیکی سنگین را روی سطح شیبداری که با افق زاویه 22° می‌سازد، به اندازه 13m به طرف بالای سطح هل می‌دهیم. (شکل ۲۳). (الف) ارتفاع دستگاه نسبت به مکان اولیه اش چقدر است؟ (ب) این دستگاه چقدر در جهت افقی حرکت کرده است؟



شکل ۲۳. مسئله ۱۱

۱۲. طول عقریه دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از محور تا نوک، 113cm است. بردار جابه‌جایی نوک عقریه را (الف) از یک ربع گذشته تا نیم ساعت، (ب) در نیم ساعت بعدی، و (ج) در مدت یک ساعت تعیین کنید.

۱۳. شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که در فاصله 42km و در جهت 35° شمال شرق محل خودش واقع شده است؛ اما مجبور است که از راه خیابان برود. خیابانها هم یا شمالی-جنوبی اند یا شرقی-غربی، کمترین مسافتی که این شخص باید بپیماید تا به مقصد برسد چقدر است؟

۱۴. کشتی‌ای عازم نقطه‌ای در فاصله 124km در جهت شمال است. توفان غیرمنتظره‌ای کشتی را به نقطه‌ای در فاصله 72.6km شمال و 31.4km شرق مبدأ می‌راند. این کشتی باید چقدر و در چه جهتی حرکت کند تا به مقصد مورد نظر برسد؟

۱۵. گسل گسیختگی‌ای است در سنگ که سطوح متقابل سنگ در راستای آن، نسبت به هم و موازی با یکدیگر، جابه‌جا شده‌اند. این جابه‌جایی، اغلب با زمین لرزه همراه است. در شکل ۲۴، نقاط A و B پیش از گسیختگی روی هم بوده‌اند. مؤلفه جابه‌جایی کل AB در راستای محور افقی گسل را لغزش افقی می‌نامند (AC). مؤلفه جابه‌جایی کل در راستای محور با تندرین شیب گسل را لغزش عمیقی می‌نامند (AD). (الف) اگر لغزش افقی 22m و لغزش عمیقی 17m باشد، جابه‌جایی کل چقدر است؟ (ب) اگر صفحه گسل با افق زاویه 52° داشته باشد، جابه‌جایی عمودی خالص B در اثر گسیختگی

(الف) چقدر است؟

نموداری، جابه‌جایی کل او را، نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) اندازه این جابه‌جایی را با مسافتی که پیموده است مقایسه کنید.

۴. شخصی 1km به طرف شمال، سپس 2km به طرف غرب، و سرانجام 2km به طرف جنوب حرکت می‌کند. (الف) یک نمودار برداری برای این حرکت رسم کنید. (ب) پرنده‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست پرواز می‌کند. این پرنده باید چقدر و در چه جهتی پرواز کند تا به مقصد این شخص برسد؟

۵. دو بردار a و b را با هم جمع می‌کنیم. به روش تصویری و به کمک نمودارهای برداری نشان بدید که اندازه بردار باینند نمی‌تواند بزرگ‌تر از $a+b$ یا کوچک‌تر از $|a-b|$ باشد. (خطهای قائم علامت قدر مطلق است).

۶. اتومبیلی 54km در جهت شرق، سپس 32km در جهت شمال،

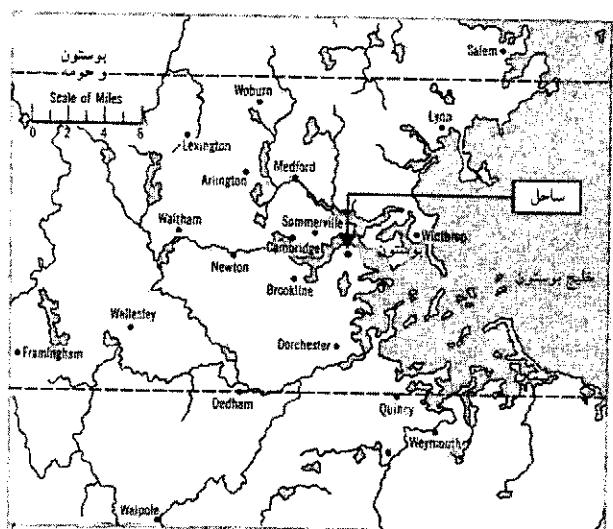
و سرانجام 27km در جهت 28° شرق شمال حرکت می‌کند. نمودار

برداری این حرکت را بکشید و جابه‌جایی کل اتومبیل را تعیین کنید.

۷. بردار a به اندازه 2R واحد، و در جهت شرق است. بردار b به اندازه 3R واحد، و درجهت 30° غرب شمال است. با استفاده از نمودار برداری، اندازه و جهت (الف) $a+b$ ، و (ب) $a-b$ را پیدا کنید.

۸. گلف بازی توپ گلف را در سه مرحله به سوراخ می‌اندازد. در ضربه اول، توپ 12ft به طرف شمال می‌رود، در ضربه دوم 8ft به جنوب شرقی، و در ضربه سوم 3ft به جنوب غربی، چه جابه‌جایی ای لازم بود تا توپ فقط با یک ضربه به سوراخ برسد؟ نمودار بکشید.

۹. بانکی در مرکز شهر بوستون را دزد می‌زند (شکل ۲۲ نقشه محل را نشان می‌دهد). دزدان، برای فرار از چنگ پلیس، این مسیر را با هلیکوپتر می‌پیمایند؛ اول 50mi در جهت 45° جنوب شرق، سپس 32mi در جهت 26° شمال غرب، و سرانجام 16mi در جهت 18° شرق جنوب. اینجاست که پلیس دزدرا را دستگیر می‌کند. این محل کدام شهر است؟ (با استفاده از روش نموداری این جابه‌جاییها را روی نقشه با هم جمع کنید).

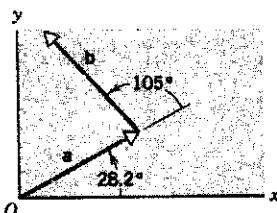


شکل ۲۲. مسئله ۹

از تخته سنگی به ارتفاع ۴۸m پایین می‌اندازد. دستگاه مختصات را طوری بگیرید که مبدأ آن محل سکه، هنگامی که شخص جلوی خانه‌اش است، باشد و جهت مثبت محورهای x و y ، و z آنرا به ترتیب به طرف شرق، شمال، و بالا انتخاب کنید. (الف) جایه‌جایی سکه را بر حسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) این شخص، از راه دیگری، به در خانه‌اش برمی‌گردد. برایند جایه‌جاییهای او در کل حرکت چیست؟

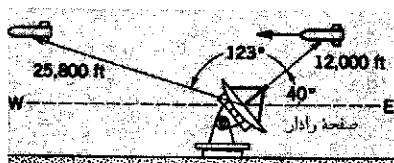
۲۲. ذره‌ای در سه مرحله متوالی در صفحه‌ای جایه‌جایی شود: ۱۳m را به طرف جنوب غربی ۲۶m را به طرف شرق، و ۹۴m را در جهت 64° شمال شرق. محور x را درجهت شرق و محور y را در جهت شمال بگیرید. (الف) مؤلفه‌های هر جایه‌جایی، (ب) مؤلفه‌های برایند جایه‌جاییها، (ج) اندازه و جهت جایه‌جایی برایند، و (د) جایه‌جایی ای که ذره را به مبدأ بار می‌گرداند پیدا کنید.

۲۳. دو بردار a و b هر کدام به اندازه $12r_1$ واحدند. جهت‌گیری آنها طبق شکل ۲۶، و مجموع برداری شان r است. (الف) مؤلفه‌های x و y بردار r ، (ب) اندازه r ، و (ج) زاویه r نسبت به جهت مثبت محور x را پیدا کنید.



شکل ۲۶. مسئله ۲۶

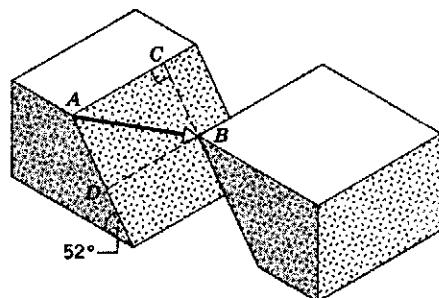
۲۴. ایستگاه راداری موشکی را که از شرق به آن نزدیک می‌شود "مشاهده" می‌کند. در ابتدا، موشک به فاصله 12000 ft از ایستگاه و تحت زاویه 40° بر فراز افق است. رادار موشک را به اندازه 123° دیگر در صفحه شرق-غرب دنبال می‌کند (شکل ۲۷). در پایان، فاصله موشک از ایستگاه به 25800 ft می‌رسد. جایه‌جایی موشک در این مدت چیست؟



شکل ۲۷. مسئله ۲۷

۲۵. دو بردار به اندازه‌های a و b داریم که اگر داشтан را بر هم منطبق کنیم، با هم زاویه θ می‌سازند. با محاسبه مؤلفه‌های این دو بردار در راستای دو محور متعامد، ثابت کنید که اندازه مجموع آنها برابر است با

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$



شکل ۲۴. مسئله ۲۴

۱۶. چرخی به شعاع 45 cm ، روی سطحی انقی، بی‌لغزش، می‌غلند (شکل ۲۵). P نقطه‌ای است که روی چرخ علامت‌گذاری شده است. در زمان t_1 ، نقطه P تماش بین چرخ و سطح است. در زمان t_2 ، پس از t_1 ، چرخ نیم دور چرخیده است. جایه‌جایی P در طی این حرکت چقدر است؟



شکل ۲۵. مسئله ۲۵

۱۷. ابعاد افقی $14\text{ft} \times 12\text{ft} \times 10\text{ft}$ است. مگسی از یک گوشة اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سر دیگر قطري که از این گوشه می‌گذرد می‌رسد. (الف) بردار جایه‌جایی را در دستگاهی که محورهای مختصات آن با الهای اتاق موازی اند پیدا کنید. (ب) اندازه این جایه‌جایی چقدر است؟ (ج) آیا امکان دارد که مگس از یک مسیر کوتاه‌تر، به مقصد برسد؟ از یک مسیر بلندتر چطور؟ از مسیر دیگری با همان طول چطور؟ (د) اگر مگس، به جای پرواز کردن، راه ببرد، کوتاه‌ترین مسیری که او را به مقصد می‌رساند کدام است؟

بخش ۳-۴ جمع برداری؛ روش مؤلفه‌ای

۱۸. (الف) جمع دو بردار $j = 5i + 3j$ و $a = -3i + 2j$ را بر حسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) اندازه و جهت $a + b$ را به دست بیاورید. ۱۹. دو بردار $a = -i + j + 4k$ و $b = 4i - 3j + K$ را در نظر بگیرید. (الف) $a + b$ را پیدا کنید. (ب) بردار c را جنان تعیین کنید که $a + b + c = 0$ باشد.

۲۰. دو بردار $j = 4i - 3j - 8j$ و $a = 4i + 8j$ را در نظر بگیرید. اندازه و جهت هر یک از بردارهای زیر را (نسبت به جهت مثبت محور x) پیدا کنید. (الف) a ، (ب) b ، (ج) $a + b$ ، (د) $a - b$ ، و (ه) $a \cdot b$. ۲۱. (الف) شخصی از در خانه‌اش 1400 m به طرف شرق و 2100 m به طرف شمال می‌رود. سپس سکه‌ای از جیش در می‌آورد و آن را

”غرب“، و (ه) ”جنوب“ ضربدر ”جنوب“ را به دست بیاورید. همه بردارها را یکه بگیرید.

۳۵. دو بردار $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ، بر حسب مؤلفه های دو بردار از معادله ۱۵ به دست می آید.

۳۶. دو بردار $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ، بر حسب مؤلفه های دو بردار از معادله ۱۷ به دست می آید.

۳۷. نشان بدھید که $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ را می شود با این دترمینان 3×3 نشان داد:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

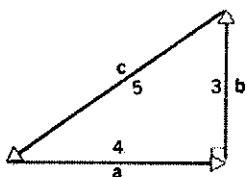
۳۸. با استفاده از معادلات ۱۳ و ۱۵، زاویه میان دو بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

۳۹. سه بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ،

(ب) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ، و (ج) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ را حساب کنید.

۴۰. بردارهای $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ را به دست بیاورید. (ب) زاویه بین \mathbf{r} و محور z و (ج) زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} را محاسبه کنید.

۴۱. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم الزاویه می سازند (شکل ۲۸) (الف) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ، (ب) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ ، و (ج) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ را حساب کنید.



شکل ۲۸. مستله های ۴۱ و ۴۲

۴۲. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم الزاویه می سازند. شکل ۲۸. (الف) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ، (ب) $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ ، و (ج) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ را حساب کنید.

۴۳. بردار \mathbf{a} در صفحه yz است و با محور $y +$ زاویه 60° می سازد. مؤلفه z این بردار مثبت، و اندازه آن $2\sqrt{3}$ واحد است. بردار \mathbf{b} در صفحه xz است و با محور $x +$ زاویه 48° می سازد. مؤلفه z این بردار مثبت، و اندازه آن $4\sqrt{2}$ واحد است. (الف) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ، (ب) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، و (ج) زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} را پیدا کنید.

۴۴. (الف) دیدیم که قانون جابه جایی در مورد حاصل ضرب برداری نقطه ”جنوب“ (ج) ”شرق“ ضربدر ”بالا“، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ مینی، $\mathbf{Ramin.samad@zahro.ac.ir}$

۲۶. ثابت کنید که اگر مجموع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد، طول آن دو بردار یکی است.

۲۷. (الف) سه بردار یکه در راستای یالهای مکعبی به ضلع a بگیرید و قطرهای مکعب را (که از مرکز مکعب می گذرند و دو رأس متقابل را به هم وصل می کنند) بر حسب آنها و طول ضلع مکعب، بیان کنید. (ب) زاویه قطر مکعب را با یالهای مجاورش پیدا کنید. (ج) طول قطر مکعب چقدر است؟

۲۸. مسافری از واشنگتن دی سی به مانیل پرواز می کند. (الف) بردار جابه جایی او را به دست بیاورید. (ب) اندازه این بردار چقدر است؟ عرض و طول جغرافیایی این دو شهر به ترتیب 39° شمال- 77° غرب و 15° شمال- 121° شرق است. (راهنمایی: از شکل ۷ و معادلات ۷ استفاده کنید. محور z را در راستای محور دوران زمین بگیرید. به این ترتیب، ”عرض جغرافیایی $-\theta = 90^\circ$ “ و ”طول جغرافیایی $\phi = 6370 \text{ km}$ “ خواهد بود. شعاع زمین 6370 km است).

۲۹. فرض کنید که N عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است. در این صورت،

$$\cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \cdots + \cos \left(N - 1 \right) \frac{2\pi}{N} = 0.$$

يعني

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

همچنین

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

این دو رابطه را اثبات کنید. برای این کار جمع N بردار به طول یکسان را در نظر بگیرید که هر یک با قبلی زاویه $2\pi/N$ می سازد.

بخش ۳-۵ ضرب بردارها

۳۰. بردار \mathbf{d} به اندازه $2\sqrt{6} \text{ m}$ و در جهت شمال است. اندازه و جهت بردارهای (الف) $-\mathbf{d}$ ، (ب) $\mathbf{d}/2$ ، (ج) $2\mathbf{d}$ ، و (د) $5\mathbf{d}$ را به دست بیاورید.

۳۱. نشان بدھید که بردار \mathbf{a} هر چه باشد، (الف) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ و (ب) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ است.

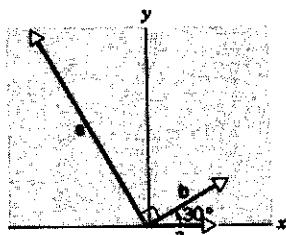
۳۲. اندازه بردار \mathbf{a} 12° واحد و اندازه بردار \mathbf{b} 5° واحد است. زاویه میان این دو بردار را پیدا کنید.

(ب) حاصل ضرب برداری این دو بردار را پیدا کنید.

۳۳. دو بردار \mathbf{r} و \mathbf{s} در صفحه xy اند. اندازه این دو بردار به ترتیب $4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ واحد است. جهت این دو بردار به ترتیب 220° و 85° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x است. (الف) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ و (ب) $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ را پیدا کنید.

۳۴. حاصل ضربهای (الف) ”شمال“ ضربدر ”غرب“، (ب) ”پایین“ نقطه ”جنوب“ (ج) ”شرق“ ضربدر ”بالا“، $\mathbf{Ramin.samad@zahro.ac.ir}$

۵۰. سه بردار شکل ۳۱ به اندازه‌های $3, b = 4, a = 1^\circ$ و $c = 10$ دارد.
 (الف) مؤلفه‌های x و y این سه بردار را پیدا کنید. (ب) اعداد p و q را چنان تعیین کنید که $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ باشد.



شکل ۳۱. مسئله ۵۰

قانون جابه‌جایی در مورد حاصل ضرب اسکالر درست است؛ یعنی،
 (ب) نشان بدید که قانون پخشی، هم در مورد حاصل ضرب برداری درست است
 یعنی

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

و

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

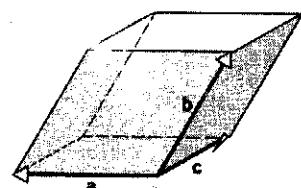
(ج) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل ضرب برداری درست است؟
 یعنی، آیا $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ با $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ برابر است؟ (د) آیا قانون
 شرکت‌پذیری در مورد حاصل ضرب اسکالر معنی دارد؟
 ۴۵. نشان بدید که مساحت مثلثی که با بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} ساخته
 می‌شود (شکل ۲۹) برابر با $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ است. (خطوط قائم به معنی
 اندازه بردار است).



شکل ۲۹. مسئله‌های ۴۵ و ۴۶

۴۶. نشان بدید که اندازه حاصل ضرب برداری برابر با مساحت
 متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن به اندازه عوامل ضرب باشند
 (شکل ۲۹). به این ترتیب، آیا فکر نمی‌کنید که بتوانیم برای
 نمایش عنصر سطحی که جهتی در فضا دارد هم از بردار استفاده
 کنیم؟

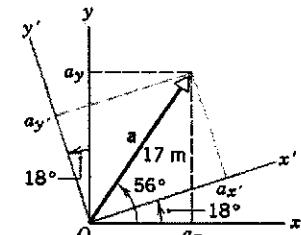
۴۷. نشان بدید که قدر مطلق $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ برابر با حجم متوازی‌السطحی
 است که با سه بردار \mathbf{a}, \mathbf{b} و \mathbf{c} ساخته می‌شود (شکل ۳۰).



شکل ۳۰. مسئله ۴۷

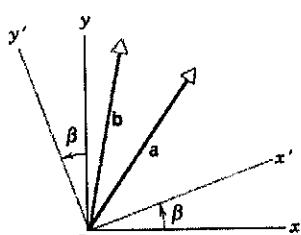
۴۸. مؤلفه‌های دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} ، بر حسب یکای دلخواه، $a_x = 3r^\circ$
 و $a_y = 1r^\circ$; $b_x = 4r^\circ$, $b_y = 5r^\circ$ است. (الف) زاویه میان \mathbf{a} و \mathbf{b} چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌های بردار \mathbf{c} را که عمود بر \mathbf{a} ، در صفحه xy ، و به اندازه 5° واحد است، پیدا کنید.

۴۹. زاویه میان قطرهای حجمی مکعب را محاسبه کنید. (مسئله ۲۷).



شکل ۳۲. مسئله ۵۲

۵۲. شکل ۳۲ دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد
 که زاویه بین محورهای "نظیر" آنها β است. به طور تحلیلی ثابت
 کنید که اندازه وجهت $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ مستقل از دستگاه مختصاتی است که
 برای محاسبه این بردار به کار می‌رود. (راهنمایی: معادلات ۱۸ را به کار
 بگیرید).



شکل ۳۳. مسئله ۵۲

۴

حرکت دو بعدی و سه بعدی

این فصل، ترکیبی از مفاهیم فصل ۲ و ۳ است. اینجا هم حرکت ذرات را بر حسب مکان، سرعت، و شتاب آنها توصیف می کنیم؛ همان کاری که در فصل ۲ کردیم. اما دیگر مثل فصل ۲ ذرات را مقید نمی کنیم که روی خط راست حرکت کنند؛ در اینجا می گذاریم که ذره به هر جای دستگاه مختصات سه بعدی برود. استفاده از نمادگذاری برداری، بررسی مؤلفه های x ، y ، و z حرکت را تا حد زیادی ساده می کند. خواهیم دید که معادلات سینماتیکی فصل ۲ را در حالت کلی هم می شود به کار برد؛ کافی است که به جای متغیر یک بعدی، بردار متضطرر با آن را بگذاریم. به عنوان نمونه هایی از کاربرد روش های برداری، دو حرکت آشنا را بررسی می کنیم؛ یکی حرکت پرتا به در میدان گرانشی زمین با سرعت اولیه ای که هم مؤلفه افقی و هم مؤلفه عمودی دارد، و دیگری حرکت ذره در مسیر دایره ای.

در مختصات دکارتی، مکان ذره با x ، y ، و z مشخص می شود.
اینها مؤلفه های بردار \mathbf{r} ، یعنی بردار مکان ذره اند:

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk \quad (1)$$

فرض کنید که ذره از نقطه r_1 در زمان t_1 ، به نقطه r_2 در زمان t_2 برود؛
شکل ۲ الف جابه جایی (تغییر مکان) ذره در بازه $t_2 - t_1$ ، $\Delta t = t_2 - t_1$ ، بردار $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ است. سرعت متوسط $\bar{\mathbf{v}}$ در بازه t برابر است با

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (2)$$

در معادله ۲، برای بدست آمدن $\bar{\mathbf{v}}$ ، بردار $\Delta\mathbf{r}$ در اسکالار $1/\Delta t$ ضرب شده است. پس جهت $\bar{\mathbf{v}}$ همان جهت $\Delta\mathbf{r}$ است.
دقت کنید که رابطه سه بردار \mathbf{r}_1 ، \mathbf{r}_2 ، $\Delta\mathbf{r}$ ، و $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ با هم، همان رابطه سه بردار a ، b ، و s در شکل ۳ فصل ۳ است. یعنی، با استفاده از روش نموداری سر به دم برای جمع برداری، برایند $\Delta\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ، بردار \mathbf{r}_2 است. پس $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}$ ، یا $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.
 $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

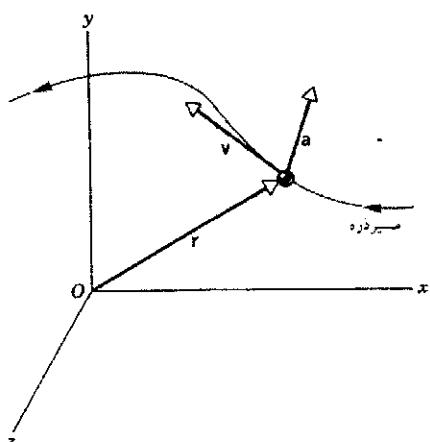
با کوچکتر کردن Δt ، بردار $\Delta\mathbf{r}$ به سرعت واقعی نزدیک می شود (شکل ۲ ب) و در حد $0 \rightarrow \Delta t$ ، به مماس بر مسیر میل می کند. در این حد، سرعت متوسط هم به سرعت لحظه ای v می گراید:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3)$$

با تعمیم معمولی از تعریف قبلى از مشتق (معادله ۸ فصل ۲)، کمیت $Raminn_samad@yahoo.com$ $\Delta\mathbf{r}$ را به صورت مشتق بردار \mathbf{r} نسبت به زمان نمایش

۱- مکان، سرعت، و شتاب

شکل ۱ ذره ای را که روی مسیری منحنی در فضای سه بعدی حرکت می کند در زمان t نشان می دهد. مکان، یا جابه جایی از مبدأ، ذره را با بردار \mathbf{r} می سنجیم. سرعت را با بردار \mathbf{v} نشان می دهیم. این بردار چنانکه بعداً خواهیم دید، باید بر مسیر ذره مماس باشد. شتاب را با بردار \mathbf{a} نشان می دهیم. جهت این بردار، چنانکه بعداً روشن خواهد شد، در حالت کلی رابطه ای با مکان ذره یا با جهت \mathbf{v} ندارد.



شکل ۱. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره ای که روی مسیری دلخواه حرکت می کند. اندازه های این بردارها، و همین طور جهت های آنها ارتبا طی با با تعمیم معمولی از تعریف قبلى از مشتق (معادله ۸ فصل ۲)، کمیت $Raminn_samad@yahoo.com$ $\Delta\mathbf{r}$ را به صورت مشتق بردار \mathbf{r} نسبت به زمان نمایش

به طور خلاصه، رابطه برداری معادله ۴ کاملاً با سه رابطه برداری معادله ۶ هم ارز است.
تعیین این مفاهیم به شتاب، مشابه بخش ۲-۵، سرراست است.
شتاب متوسط از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (7)$$

و شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است وقتی که بازه زمانی به سمت صفر میل می‌کند:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (8)$$

اینجا هم کمیت طرف راست عبارت از مشتق v نسبت به زمان است:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

و سرانجام با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر در دو طرف معادله بالا خواهیم داشت

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (10)$$

توجه کنید که معادلات برداری، هم برای ساده کردن نمادگذاری به درد می‌خورند (مثلاً معادله ۹، به تنهایی، سه رابطه معادله ۱۰ را دربر دارد) و هم برای جدا کردن مؤلفه‌ها از یکدیگر (مثلاً a_x اثری بر v_y یا v_z ندارد).

همچنین دقت کنید که چون بردار v هم جهت دارد و هم اندازه، از معادله ۹ معلوم می‌شود که تغییر جهت سرعت هم می‌تواند شتاب ایجاد کند، حتی اگر اندازه سرعت تغییر نکند. در واقع حرکتی که اندازه سرعت در آن ثابت است هم می‌تواند شتابدار باشد. یعنی، چون $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ است، مؤلفه‌ها می‌توانند چنان تغییر کنند که اندازه v ثابت بماند. آشناترین مثال چنین حرکتی، حرکت دایره‌ای یکنواخت است، که آن را در بخش ۴-۴ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱. ذره‌ای در صفحه xy حرکت می‌کند و مختصات x و y آن به صورت $x(t) = t^3 - 32t$ و $y(t) = t^2 + 12$ به زمان بستگی دارند. x و y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. مکان، سرعت، و شتاب ذره را در $t = 3s$ تعیین کنید.

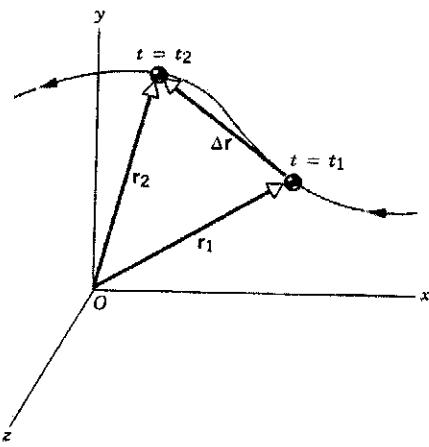
حل: مکان از معادله ۱ به دست می‌آید. با گذاشتن $(x(t)$ و $y(t)$ از روابط بالا، نتیجه می‌شود که

$$r = xi + yj = (t^3 - 32t)i + (5t^2 + 12)j$$

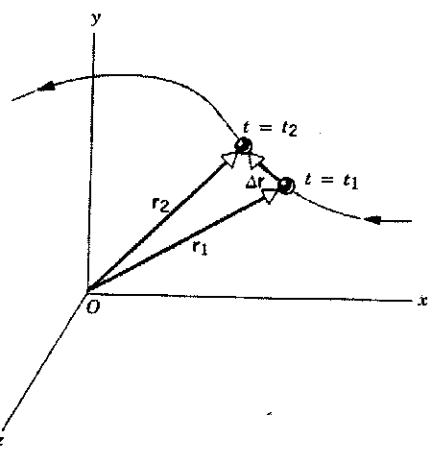
و با محاسبه این عبارت به ازای $t = 3s$

$$r = -69i + 57j$$

Ramin.samad@yahoo.com



(الف)



(ب)

شکل ۲. (الف) ذره در بازه Δt ، از t_1 تا t_2 از نقطه r_1 به نقطه r_2 می‌رود. جابه‌جایی ذره در این بازه، $r_2 - r_1 = \Delta r$ است. (ب) با کوچک شدن بازه، بردار جابه‌جایی به مسیر واقعی ذره نزدیک می‌شود.

می‌دهیم:

$$v = \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

بردار Δr ، در حد $\Delta t \rightarrow 0$ ، بر مسیر مماس می‌شود. به همین ترتیب، بردار v هم در طی حرکت همه جا بر مسیر ذره مماس است.

معادله ۴ هم، مثل همه معادلات برداری دیگر، با سه معادله اسکالر هم ارز است. برای درک این موضوع، بردار v را بر حسب مؤلفه‌هایش می‌نویسیم و r را از معادله ۱ در معادله ۴ می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} v_x i + v_y j + v_z k &= \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) \\ &= \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \end{aligned} \quad (5)$$

برای اینکه دو بردار با هم برابر باشند باید تک تک مؤلفه‌های متناظرشان با هم برابر باشند. پس، از مقایسه طرفهای راست و چپ معادله ۵ معلوم می‌شود که

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (6)$$

است. همچنین دقت کنید که جهت a ارتباط خاصی با جهت v یا جهت r ندارد.

۲-۴ حرکت با شتاب ثابت

حالا حرکت با شتاب ثابت را بررسی می‌کنیم. در این مورد خاص، طی حرکت ذره، اندازه و جهت شتاب a هیچ یک تغییر نمی‌کنند. بنابراین، مؤلفه‌های a هم تغییر نمی‌کنند. چنین وضعیتی را می‌توانیم به شکل جمع سه مؤلفه حرکت با شتاب ثابت، که همزمان در سه راستای عمود بر هم انجام می‌شوند توصیف کنیم. در حالت کلی ذره روی مسیری منحنی حرکت می‌کند. حتی اگر یکی از مؤلفه‌های شتاب، مثلاً a_x ، صفر باشد، مسیر حرکت می‌تواند منحنی باشد؛ زیرا در این حالت مؤلفه سرعت متاناظر با آن \ddot{x} ، مقداری ثابت است که می‌تواند صفر نباشد. مثالی از این مورد اخیر، حرکت پرتابه است. مسیر حرکت یک منحنی در صفحه قائم است و شتاب ذره با چشیوشنی از مقاومت هوا، شتاب ثابت g است، که تنها در راستای قائم مؤلفه دارد.

برای بدست آوردن شکل کلی معادلات حرکت با شتاب ثابت، کافی است بگذاریم

$$a_x = \text{const.} \quad a_y = \text{const.} \quad a_z = \text{const.}$$

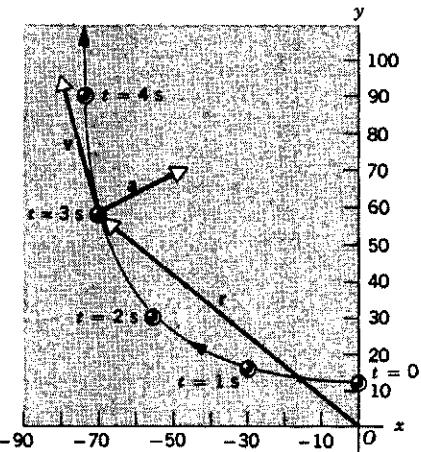
پرتابه در $t = 0$ از نقطه اولیه $r_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ با سرعت اولیه $v_0 = v_{x_0}\mathbf{i} + v_{y_0}\mathbf{j} + v_{z_0}\mathbf{k}$ شروع به حرکت می‌کند. از اینجا بعد، مثل بخش ۲-۶ عمل می‌کنیم و متاناظر با معادله ۱۵ فصل ۲، سه معادله اسکالار به دست می‌آوریم: $v_z = v_{z_0} + a_z t$, $v_y = v_{y_0} + a_y t$, $v_x = v_{x_0} + a_x t$. این سه معادله را می‌شود به شکل یک معادله برداری نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + at \quad (11)$$

بهیاد داشته باشید که این معادله، یا هر معادله برداری دیگری، سه معادله اسکالار مستقل از هم در بر دارد.

جمله دوم طرف راست معادله ۱۱، حاصل ضرب یک بردار در یک اسکالار است. چنانکه در بخش ۵-۳ دیدیم، حاصل برداری به اندازه at و در جهت a است.

با ادامه کار به روش بخش ۶-۲، پنج معادله برای توصیف حرکت سه بعدی با شتاب ثابت به دست می‌آید. جدول ۱ این پنج معادله را نشان می‌دهد. اینها را با پنج معادله متاناظر یک بعدی جدول ۲ فصل ۲ مقایسه کنید. به جز معادله ۱۳ که معادله‌ای اسکالار است (هر چند شامل بردار)، هر یک از معادلات جدول ۱ سه معادله اسکالار مستقل از هم در بر دارند. مؤلفه x معادلات ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵، همان معادلات



شکل ۳. مثال ۱. مسیر ذره، و مکان ذره در $t = 0$ ، $t = 1s$ ، $t = 2s$ و $t = 3s$ را روی شکل مشخص شده است. همچنین، بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره در $t = 3s$ را روی شکل نشان داده شده‌اند. توجه کنید که ارتباط خاصی بین جهت‌های r ، v ، a وجود ندارد.

در این رابطه، یکای مؤلفه‌های r ، متر است
مؤلفه‌های سرعت از معادله ۶ بدست می‌آیند:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 32t) = 3t^2 - 32$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(10t + 12) = 10t$$

از معادله ۵ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = (3t^2 - 32)\mathbf{i} + 10t \mathbf{j}$$

و در $t = 3s$

$$\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$$

که یکای آن m/s است.
مؤلفه‌های شتاب عبارت اند از

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 32) = 6t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

شتاب در $t = 3s$ برابر است با

$$\mathbf{a} = 18\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

شکل ۳ مسیر حرکت را از $t = 0$ تا $t = 4s$ نشان می‌دهد.
بردارهای مکان، سرعت، و شتاب در $t = 3s$ را روی شکل مشخص شده‌اند. توجه کنید که v بر مسیر، در مکان متاناظر با $t = 3s$ ، مماس

جدول ۱. معادلات برداری حرکت با شتاب ثابت.

شامل					معادله	شماره معادله
t	a	v	v_0	r		
✓	✓	✓	✓	✗	$v = v_0 + at$	۱۱
✓	✓	✗	✓	✓	$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	۱۲
✗	✓	✓	✓	✓	$v \cdot v = v_0 \cdot v_0 + 2a \cdot (r - r_0)$	۱۳*
✓	✗	✓	✓	✓	$r = r_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	۱۴
✓	✓	✓	✗	✓	$r = r_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	۱۵

* این معادله شامل ضرب اسکالر یا نقطه‌ای در بردار است، که در بخش ۵ تعریف شد.

و محور y را در جهت جانبی می‌گیریم. مؤلفه‌های شتاب برابرند با

$$a_x = g \sin 10^\circ = ۱.۷\text{m/s}^2$$

$$a_y = ۰.۵\text{m/s}^2$$

توجه کنید که این مؤلفه‌ها مستقل از هم‌اند. مؤلفه a_x ، ناشی از گرانش و به طرف پایین شیب همواری است، و ربطی به وزیدن یا نوزیدن باد جانبی ندارد. a_y هم شتاب جانبی است که از باد حاصل می‌شود، چه سطح شیبدار باشد و چه نباشد. امکان کاربرد مستقل این دو مؤلفه، گویای ماهیت حساب برداری است.

$t = ۰$ را زمانی می‌گیریم که اسکی باز شروع به حرکت می‌کند. داریم

$$v_x = v_{x_0} + a_x t = ۹\text{m/s} + (۱.۷\text{m/s}^2)t$$

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = ۰ + (۰.۵\text{m/s}^2)t$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= ۰ + (۹\text{m/s})t + (۰.۸\text{m/s}^2)t^2 \end{aligned}$$

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2}a_y t^2 = ۰ + ۰ + (۰.۲\text{m/s}^2)t^2$$

فعلاً فرض می‌کنیم که اسکی باز پیش از آنکه از لبه جانبی شیب خارج شود، به پایین شیب می‌رسد. (بعداً می‌توانیم درستی این فرض را وارسی کنیم) اول باید زمانی این رویداد (عنی زمانی که می‌شود) را به دست آوریم:

$$125\text{m} = (۹\text{m/s})t + (۰.۸\text{m/s}^2)t^2$$

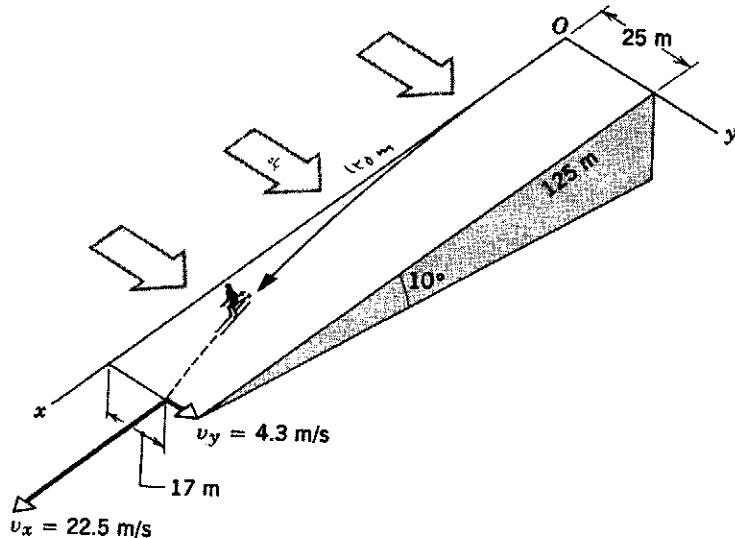
از حل این معادله درجه دو، دو جواب داریم: $t = ۷.۹\text{s}$ و $t = -18.5\text{s}$. بدهست می‌آید. فعلاً فقط جواب مثبت را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن، مختصه y متضطر باین زمان را حساب می‌کنیم:

$$y = (۰.۲\text{m/s}^2)t^2 = (۰.۲\text{m/s}^2)(۷.۹\text{s})^2 = ۱۷\text{m}$$

متضطر در جدول ۲ فصل ۲ است. چون معادله ۱۳ اسکالر است، مؤلفه x (یا هر مؤلفه دیگری) ندارد.

مثال ۲. اسکی بازی روی شیب همواری از دامنه کوه پایین می‌آید. زاویه خط شیب به طرف پایین (شمال-جنوب) با افق 10° است. بادی از جهت غرب می‌وزد که به اسکی باز یک شتاب جانبی به اندازه ۰.۵m/s^2 می‌دهد (شکل ۴). اسکی باز از گوشه شمال غربی شیب شروع به حرکت می‌کند. مؤلفه سرعت اولیه او در جهت شیب ۹m/s و در جهت جانبی صفر است. شیب بدون اصطکاک است و ۱۲۵m طول و ۲۵m عرض دارد. (الف) سرعت او در آن نقطه چقدر است؟ (ب) شیب از آن خارج می‌شود؟ (ب) سرعت او در آن نقطه چقدر است؟ (راهنمایی: شتاب گرانشی در راستای صفحه‌ای با زاویه شیب θ ، برابر با $g \sin \theta$ است).

حل: (الف) مبدأ را گوشه شمال غربی، محور x را رو به پایین شیب،



شکل ۴. مثال ۲.

می‌کنیم که اثر هوا بر حرکت پرتابی قابل اغماض است. در فصل ۶، اثر مقاومت هوا را (که اغلب قابل توجه است) بررسی خواهیم کرد. حرکت پرتابی، حرکتی است با شتاب ثابت g ; این شتاب به طرف پایین است. ممکن است سرعت این حرکت مؤلفه افقی داشته باشد، اما شتاب آن مؤلفه افقی ندارد. در دستگاه مختصاتی که جهت مثبت محور y آن در امتداد قائم رو به بالا باشد، می‌شود گفت $-g = a_y$ (اینجا هم، مثل فصل ۲، g همواره یک عدد مثبت است) و $a_x = 0$. علاوه، فرض می‌کنیم v_0 در صفحه xy باشد، یعنی $v_0 = v_{x_0}$ است. چون a_z هم صفر است، از مؤلفه z معادله ۱۱ معلوم می‌شود که $v_z = v_0$ همواره برابر با صفر است. پس کافی است که فقط رویدادهای صفحه xy را بررسی کنیم.

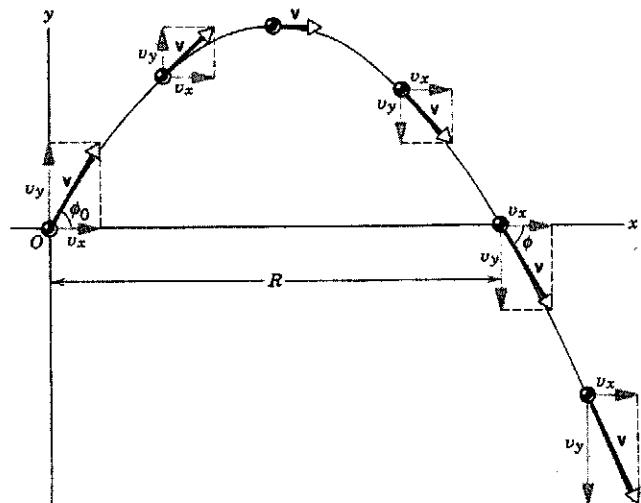
مبدأ مختصات را نقطه‌ای می‌گیریم که حرکت پرتابی از آن شروع می‌شود (شکل ۵)، مثلاً نقطه‌ای که در آن توپ از دست پرتاب کننده رها می‌شود. با این انتخاب، $v_0 = v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0$ است. سرعت در $t = 0$ ، زمان شروع حرکت پرتابی، v_0 است که با جهت مثبت محور x زاویه ϕ_0 می‌سازد. به این ترتیب، مؤلفه‌های x و y بردار v_0 (شکل ۵) عبارت‌اند از

$$v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0 \quad v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0 \quad (16)$$

چون شتاب مؤلفه افقی ندارد، مؤلفه افقی سرعت ثابت است. مقادیر $a_x = 0$ و $a_y = -g$ را در مؤلفه x معادله ۱۱ می‌گذاریم تیجه می‌شود که

$$v_x = v_{x_0} + a_x t = v_0 \cos \phi_0 \quad (17)$$

مؤلفه افقی سرعت، در تمام مدت پرواز، برابر با مقدار اولیه آن است.



شکل ۵. مسیر پرتابه، سرعت اولیه v_0 و مؤلفه‌های آن، و سرعت v با مؤلفه‌هایش درینج لحظه مختلف پس از پرتاب. دقت کنید که طی حرکت، $v_x = v_0$ است. فاصله افقی R ، برد پرتابه است.

جا به جایی جانبی m 17° ، کمتر از عرض شیب (25°) است. پس فرض ما درست است، اسکی باز به فاصله 170m از لبه غربی شیب، از انتهای شیب خارج می‌شود.

(ب) مؤلفه‌های سرعت را می‌شود مستقیماً در $t = 7.94\text{s}$ حساب کرد:

$$v_x = 9^\circ \text{m/s} + (17^\circ \text{m/s}) (7.94\text{s}) = 22.5\text{m/s}$$

$$v_y = 43\text{m/s} = (45\text{m/s}) (7.94\text{s}) \cos 9^\circ$$

دقت کنید که در حل این مسئله، محورهای x و y را در صفحه شیب انتخاب کردیم. به این ترتیب، مسئله سه بعدی به مسئله‌ای دو بعدی تبدیل شده اگر از اول در دستگاه مختصاتی کار می‌کردیم که صفحه xy آن در سطح افقی، و محور z آن در راستای قائم بود، شتاب سه مؤلفه پیدا می‌کرد و مسئله پیچیده‌تر می‌شد. معمولاً در حل مسائل، آزادیم که جهت محورهای مختصات و محل مبدأ را به دلخواه انتخاب کنیم، به شرط آنکه این انتخاب را در تمام مراحل حل مسئله ثابت نگه داریم.

ریشه منفی، $t = -18.5\text{s}$ ، چه می‌شود؟ معادلات اولیه حرکت را از زمان $t = 0$ به بعد نوشتمیم، پس زمان مثبت، حرکت بعدی اسکی باز روی شیب را توصیف می‌کند. زمان منفی باید مربوط به حرکت اسکی باز پیش از عبور از گوشش شمال غربی شیب (مبدأ انتخابی ما) باشد. جواب منفی می‌گوید که اسکی باز می‌توانسته است پیش از رسیدن به مبدأ در $t = 0$ ، یک مسیر محتمل قبلی را پیموده باشد و با سرعت درست (سرعت اولیه مسئله ما) به نقطه مبدأ رسیده باشد. طی این بخش قبلی حرکت، اسکی باز باید قبل از رسیدن به گوشش شمال غربی، مسافت 125m را (در جهت بالای شیب) در 18.5s پیموده باشد. مؤلفه‌های سرعت را در $t = -18.5\text{s}$ به دست بیاورید و چگونگی حرکت اسکی باز را در آن زمان تعیین کنید. مختصه y متناظر، $t = -18.5\text{s}$ چه بوده است؟ آیا این جواب معقول است؟ بیشترین مقدار مختصات x و y در بازه بین $t = 0$ و $t = -18.5\text{s}$ طی این مقدار است؟

از حل ریاضی مسائل فیزیکی، خیلی وقتها نتایج غیرمنتظره‌ای به دست می‌آید؛ مثل همین زمان منفی در مثال بالا. اگر در این مسئله فرض کنیم که حرکت اسکی باز در $t = 0$ شروع شده است، ریشه منفی برایمان اهمیتی ندارد. اما بد نیست که هر وقت به چنین جوابهایی برسوردید، معنی فیزیکی آنها را بررسی کنید.

۴-۳ حرکت پرتابی

حرکت پرتابی، نمونه‌ای از حرکت با شتاب ثابت است. حرکت دو بعدی ذره‌ای است که به طور مایل در هوا پرتاب می‌شود. حرکت (ایده‌آل) عمومی بیسبال یا توپ گلف، مثالی از این نوع حرکت است. فعلاً فرض

حرکت کرده بود. برای پیدا کردن برد کافی است در معادله ۲۳ بگذاریم
 $x = v_0 \sin \phi_0 t$ و $y = v_0 \cos \phi_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ است؛ جواب دیگر، برد را
 می‌دهد:

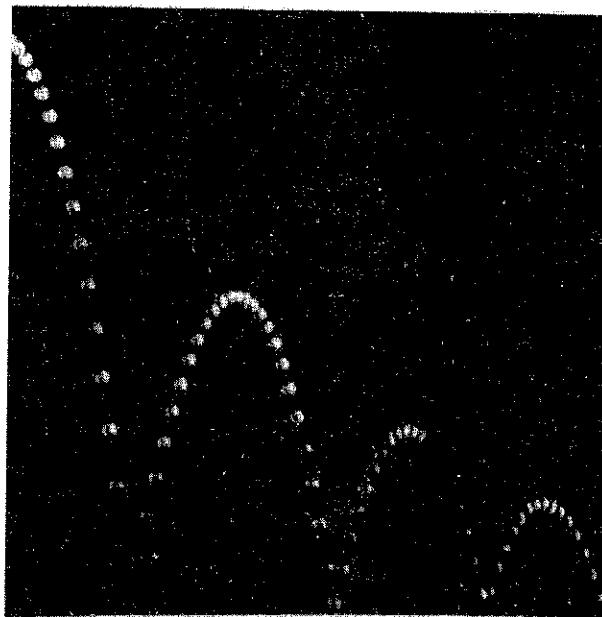
$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin \phi_0 \cos \phi_0$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 \quad (24)$$

در این رابطه، از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ استفاده کردایم. توجه کنید که اگر سرعت اولیه ثابت باشد، بیشترین مقدار برد بهارای $45^\circ = \phi_0$ به دست می‌آید. در این حالت، $R = \frac{v_0^2}{g}$ است.

چوشهایی که به دست آورده‌یم، شکل ایده‌آل حرکت پرتابی بود. یک عامل مهم، یعنی گرانش را در نظر گرفتیم؛ اما عامل دیگری هم وجود دارد که می‌تواند بر حرکت پرتابه اثر کند و اغلب اهمیت دارد— مقاومت هوایی. در سرعت‌های کم، معمولاً می‌شود مقاومت هوا را نادیده گرفت، اما در سرعت‌های زیاد، مسیر پرتابه دیگر به شکل سه‌می معادله ۲۳ نیست، و برد پرتابه ممکن است خیلی کمتر از مقداری باشد که از معادله ۲۴ به دست می‌آید. در فصل ۶ آثار مقاومت هوا را بررسی خواهیم کرد؛ فعلًاً فرض می‌کنیم که معادلات این بخش، حرکت پرتابی را به خوبی توصیف می‌کنند.

شکل ۶ مسیر پرتابه‌ای را نشان می‌دهد که اثر مقاومت هوا بر آن ناجیز است. مسیر کاملاً شبیه به سه‌می است. در شکل ۷ حرکت



شکل ۶. عکسی با فلاش‌های بی‌دربی (استروبوسکوپیک) از توب گلفی که از طرف چپ وارد عکس می‌شود و به سطح سختی بر می‌خورد، و از آن وامی جهد. حرکت توب، بین دو برخورد، مسیر سه‌می مشخصه حرکت پرتابی را نشان می‌دهد. چرا نکر می‌کنید که ارتفاع جهشها به تدریج کم می‌شود؟ (پاسخ را در فصلهای ۸ و ۱۰ پیدا خواهید کرد.)

مُؤلفه عمودی سرعت، در اثر شتاب ثابت رو به پایین، تغییر می‌کند. مقادیر $-g$ و $a_y = -g$ را در مؤلفه y معادله ۱۱ می‌گذاریم. خواهیم داشت

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin \phi_0 - gt \quad (18)$$

مُؤلفه قائم سرعت، درست مثل سرعت سقوط آزاد رفتار می‌کند. (در واقع اگر حرکت شکل ۵ را در دستگاه مرجعی بررسی کنیم که با سرعت v_{x_0} به طرف راست حرکت می‌کند، حرکت ذره حرکت جسمی است که با سرعت اولیه $v_0 \sin \phi_0$ درجهت عمودی به بالا پرتاپ شده است). اندازه بردار سرعت در هر لحظه برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (19)$$

زاویه بردار سرعت با افق در هر لحظه، زاویه ϕ ، از این رابطه به دست می‌آید:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x} \quad (20)$$

بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر ذره در آن نقطه مماس است (شکل ۵).

مختصه x مکان ذره در هر لحظه، از مؤلفه x معادله ۱۲ (جدول ۱) به دست می‌آید. اگر مقادیر $x_0 = 0$ ، $a_x = 0$ ، و $v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0$ را در این معادله قرار بدھیم نتیجه می‌شود که

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (v_0 \cos \phi_0) t \quad (21)$$

مختصه y هم از مؤلفه y معادله ۱۲ به دست می‌آید. با $y_0 = 0$ ، $a_y = -g$ ، $v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0$ ، و

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \sin \phi_0) t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (22)$$

معادلات ۲۱ و ۲۲، x و y را به صورت توابعی از پارامتر مشترک t ، زمان پرواز، به دست می‌دهند. t را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

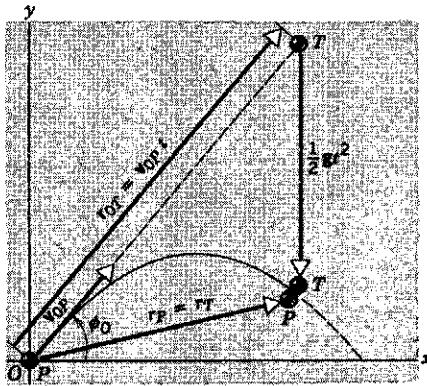
$$y = (\tan \phi_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2 \quad (23)$$

این معادله y را به x مربوط می‌کند و در واقع معادله مسیر پرتابه است. چون v_0 ، ϕ_0 ، و g ثابت‌اند، شکل کلی معادله بالا

$$y = bx - cx^2$$

است، که معادله سه‌می است. پس مسیر پرتابه هم سه‌می است (شکل ۵).

بود افقی R پرتابه (شکل ۵) طبق تعریف، مسافتی است در راستای افقی که پرتابه می‌پیماید تا به سطحی برسد که از آن شروع به



شکل ۸. جایه جایی پرتابه نسبت به مبدأ را، در هر زمان t ، می شود مجموع دو بردار داشت: $v_{0,p}$ در جهت θ_p و $v_t^2 / 2gt$ در راستای قائم رو به پایین است.

به اندازه $g t^2 / 2$ نسبت به نقطه تعليق هدف (كه اگر گرانش نبود به آن می رسید) سقوط کرده است. هدف هم در اين مدت به همين اندازه از محل اولية خود سقوط کرده است. زمانی که گلوله به خط سقوط هدف می رسد، همان قدر پايین تر از مكان اولية هدف است که خود هدف پايین تر است. پس گلوله به هدف می خورد. گلوله اگر سرعته از اين حرکت کند (v بزرگتر باشد)، برد بيشتری هم خواهد داشت و در نقطه بالاتری به خط سقوط هدف می رسد؛ اما چون اين رويداد، نسبت به حالت قبل، زودتر خ می دهد، هدف هم در اين مدت، كمتر سقوط کرده است و باز هم برخورد صورت می گيرد. برای سرعتهای كمتر هم، همين استدلال مشاهده را توضیح می دهد.
با استفاده از معادله ۱۲

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

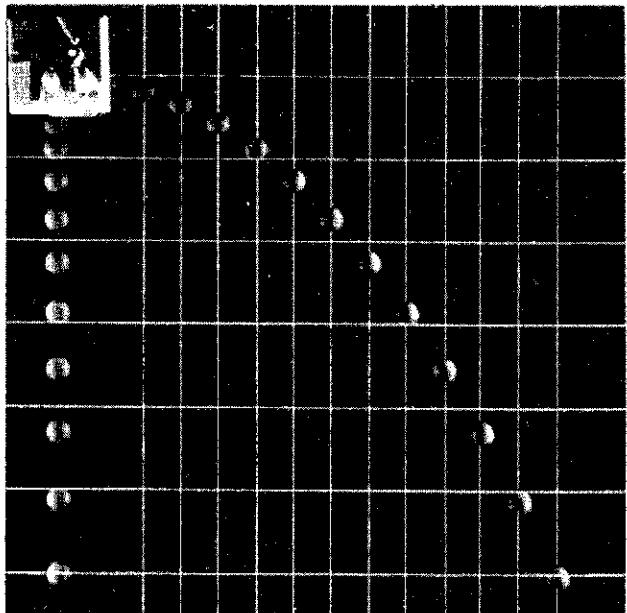
مي توانيم موقع را به طور تحليلي هم نشان بدھيم. به كمك اين معادله، مكان پرتابه و هدف را در زمان دلخواه t به دست می آورييم. برای پرتابه P ، $r_0 = 0$ و $a = g$ است، پس

$$r_P = v_{0,p} t + \frac{1}{2} g t^2$$

برای هدف T ، $r_0 = 0$ ، $v_0 = 0$ و $a = g$ است، پس

$$r_T = r_{0,T} + \frac{1}{2} g t^2$$

اگر قرار باشد برخورد صورت بگيرد، r_P باید با r_T برابر شود. مقایسه دو معادله نشان می دهد که اين برخورد همشه در زمانی اتفاق می افتد که $t = r_{0,T} / v_{0,p}$ شود، يعني در زمان $t = r_{0,T} / v_{0,p}$ (شکل ۸) که در غياب گرانش، پرتابه بی شتاب می بايست در امتداد خط پرتاب به هدف ثابت می رسید. چون ضرب شدن بردار در يك اسکالار، جهت آن را تغيير نمی دهد، از معادله $r_{0,p} t = r_{0,T}$ نتیجه می شود که $r_{0,T}$ و



شکل ۷. توب I از حالت سکون رها می شود و در همان زمان، توب II طرف راست پرتاب می شود. توجه کنید که توپها در راستای قائم دقیقاً با یک سرعت سقوط می کنند؛ حرکت افقی توب II بر سرعت سقوط قائم آن اثری ندارد. فاصله بین نوردهیهای متواتی این عکس استروبی ۳۰S را بوده است. آیا سرعت افقی توب II ثابت به نظر می رسد؟

پرتابهای که به طور افقی پرتاب شده با حرکت جسمی که همان رها شده و سقوط آزاد می کند مقایسه شده است. در اینجا می توانید پیش بینیهای معادلات ۲۱ و ۲۲ را، به مازای ϕ ، مستقیماً تحقیق کنید. توجه کنید که (۱) حرکت افقی پرتابه اول واقعاً همانی است که از معادله ۲۱ به دست می آید؛ مؤلفه x در بازه های زمانی یکسان افزایش یکسانی دارد، و این افزایش مستقل از حرکت در راستای y است؛ و (۲) مؤلفه y حرکتهای دو پرتابه یکسان است: مسافت طی شده در بازه های یکسان برای هر دو پرتابه یکی است، و به حرکت افقی یکی از آنها بستگی ندارد.

زدن هدف در حال سقوط

يکي از نمایشهاي زيباي کلاسي اين است که: با یک تفنگ بادي هدفي را که در ارتفاع بالاتری از تفنگ معلق است نشانه می گيريم و به آن شلیک می کنیم. ترتیبی داده شده است که هدف، همزمان با خروج "گلوله" از لوله تفنگ، رها می شود و سقوط آزاد می کند. در اين نمایش سرعت اولية گلوله هر چه باشد، گلوله همیشه به هدف در حال سقوط می خورد.

ساده ترین راه فهمیدن اين موضوع اين است: اگر شتاب گرانش نبود، هدف سقوط نمی کرد و گلوله درست در جهت خطی که آن را به هدف وصل می کند حرکت می کرد (شکل ۸). گرانش موجب می شود که هر دو جسم با سرعت یکسان، نسبت به نقطه ای که در صورت نبودن گرانش در آنجا می بودند سقوط کنند. بنابراین، در زمان t گلوله

از هواپیما از چشم دوربینی در همان هواپیما، یا در هواپیمای دیگری که "بابه‌پایی" اولی پرواز می‌کند، دیده‌اید؟

مثال ۴. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیه $15,5 \text{ m/s}$ با زاویه 36° نسبت به افق شوت می‌کند. با فرض اینکه توپ در یک صفحه قائم حرکت کند، (الف) زمان t_1 برای اینکه توپ به نقطه اوج مسیر خود برسد چقدر است؟ (ب) توپ تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟ (ج) برد توپ و زمان پرواز آن چقدر است؟ (د) سرعت توپ را در لحظه برخورد به زمین پیدا کنید.

حل: (الف) در نقطه اوج، مؤلفه قائم سرعت صفر است. t را از معادله ۱۸ به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v_0 \sin \phi_0 - v_y}{g}$$

در این معادله اگر مقادیر

$$v_y = 0, v_0 = 15,5 \text{ m/s}, \phi_0 = 36^\circ, g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

را بگذاریم، نتیجه می‌گیریم

$$t_1 = \frac{(15,5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2} = 0,93 \text{ s}$$

(ب) توپ در $0,93 \text{ s}$ به نقطه اوج می‌رسد از معادله ۲۲

$$y = (v_0 \sin \phi_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

علوم می‌شود که

$$y_{\max} = (15,5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ)(0,93 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2)(0,93 \text{ s})^2 = 4,2 \text{ m}$$

(ج) برد R از رابطه ۲۴ به دست می‌آید

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 = \frac{(15,5 \text{ m/s})^2}{9,8 \text{ m/s}^2} \sin 72^\circ = 23,3 \text{ m}$$

می‌توانیم در معادله ۲۲ بگذاریم $y = 0$ و زمان t_2 برای برگشت توپ به زمین را پیدا کنیم. نتیجه می‌شود که

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \phi_0}{g} = \frac{2(15,5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ)}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,86 \text{ s}$$

توجه کنید که $t_2 = 2t_1$ است، که البته باید هم باشد چون زمان لازم برای بالا رفتن توپ (رسیدن آن از زمین به نقطه اوج) با زمان لازم برای سقوط توپ (رسیدن آن از نقطه اوج به زمین) برابر است.

۷. باید هم جهت باشد. یعنی تفنگ را باید درست به طرف مکان اولیه هدف نشانه گرفت.

مثال ۳. می‌خواهیم بسته‌ای را از هواپیما روی هدف بیندازیم. هواپیما با سرعت ثابت افقی 155 km/h در ارتفاع 155 m از هدف پرواز می‌کند؛ جهت پرواز آن به طرف نقطه‌ای مستقیماً دربالای هدف است. زاویه خط دید هدف از هواپیما، α ، در لحظه رها کردن بسته چقدر باشد تا بسته به هدف برسد (شکل ۹)؟

حل: دستگاه مرجعی انتخاب می‌کنیم که نسبت به زمین ثابت، و مبدأ آن O . نقطه رها شدن بسته باشد. حرکت بسته در لحظه رها شدن همان حرکت هواپیماست. پس سرعت اولیه بسته، v_0 ، در راستای افق و اندازه آن 155 km/h است. زاویه پرتاب ϕ صفر است. زمان سقوط از معادله 22 به دست می‌آید. با $\alpha = 0^\circ$ و $y = -225 \text{ m}$ نتیجه می‌شود که

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225 \text{ m})}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 6,78 \text{ s}$$

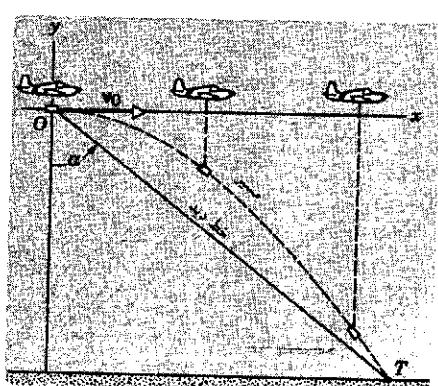
توجه کنید که زمان سقوط در پرتاب افقی، به سرعت هواپیما بستگی ندارد. (در پرتاب مایل چنین نیست؛ مسئله ۳۸). مسافت افقی ای که بسته در این مدت می‌پیماید از معادله ۲۱ به دست می‌آید:

$$x = v_{x_0} t = (155 \text{ km/h})(1 \text{ h}/3600 \text{ s})(6,78 \text{ s}) = 0,292 \text{ km} = 292 \text{ m}$$

بنابراین، زاویه دید (شکل ۹) باید برابر باشد با

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{x}{|y|} = \tan^{-1} \frac{292 \text{ m}}{225 \text{ m}} = 52^\circ$$

آیا مسیر حرکت بسته از دیدگاه دستگاه مرجعی که نسبت به هواپیما ساکن است، سهمی به نظر می‌رسد؟ (آیا تاکنون فیلمی از پرتاب بمب



شکل ۹. مثال ۳.

شکل ۱۰الف این حرکت را نشان می دهد. فرض کنید که P_1 مکان ذره در زمان t_1 و P_2 مکان آن در زمان $t_2 = t_1 + \Delta t$ باشد و سرعت در P_1 بردار v_1 است که در این نقطه مماس بر منحنی است. سرعت در P_2 بردار v_2 است. اندازه v_1 و v_2 یکسان و برابر با v است، اما جهت آنها یکی نیست. طول مسیری که طی زمان Δt پیموده شده، همان طول قوس $P_1 P_2$ است که برابر است با $r\theta$ (اگر θ را بر حسب رادیان بسنجیم)، و همچنین برابر است با $v\Delta t$. پس،

$$r\theta = v\Delta t \quad (25)$$

اکنون دو بردار v_1 و v_2 را به صورت شکل ۱۰ب، از یک نقطه رسم می کنیم. این کار مجاز است، به شرطی که اندازه و جهت بردارها، همان اندازه و جهتشان در شکل ۱۰الف باشد. به کمک شکل ۱۰ب، تغییر سرعت ذره از P_1 به P_2 ، کاملاً مشهود است. این تغییر، $v_2 - v_1 = \Delta v$ ، برداری است که باید به v_1 اضافه کنیم تا v_2 به دست بیابد. اگر این تغییر سرعت در بازه $P_1 P_2$ را از نقطه وسط قوس $P_1 P_2$ بکشیم، Δv به طرف مرکز دایره خواهد بود.

مثلث $OQ_1 Q_2$ که مشتمل از v_1 ، v_2 و Δv است با مثلث $CP_1 P_2$ (شکل ۱۰ج)، که از وتر $P_1 P_2$ و شعاعهای CP_1 و CP_2 ساخته می شود مشابه است چون که هر دو مثلث متساوی الساقین اند و زاویه رأسشنان با هم برابر است؛ زاویه θ بین v_1 و v_2 همان زاویه است زیرا v_1 بر CP_1 و v_2 بر CP_2 است. در شکل ۱۰ب، با توجه به نیمساز زاویه θ می بینیم که

$$\frac{1}{2}\Delta v = v \sin \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

حالا با استفاده از نتایج معادلات ۲۵ و ۲۶ برای Δv و Δt ، اندازه شتاب متوسط را در این بازه زمانی به دست می آوریم:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \sin(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \quad (27)$$

برای بدست آوردن شتاب لحظه‌ای، حد این عبارت را در $\theta \rightarrow 0$ در نظر می گیریم. اگر Δt کوچک باشد، زاویه θ هم کوچک می شود. در این مورد می توانیم نزدیک زاویه کوچک $\sin x \approx x$ را به کار ببریم. (این رابطه فقط وقتی درست است که زاویه بر حسب رادیان بیان شود). مثلاً، اگر $x = 5^\circ = 873\text{ rad}$ باشد، $\sin x = 0.0872$ است. پس برای زوایای کوچک $\sin(\theta/2) \approx (\theta/2) \sin(0)$ است و کسر دوم طرف راست معادله ۲۷ به ۱ می گراید. دقت کنید که در کسر اول طرف راست معادله ۲۷، نه v و نه r هیچ یک به Δt بستگی ندارند. بنابراین مقدار این کسر در حدگیری تغییر نمی کند. به این ترتیب، اندازه شتاب لحظه‌ای به دست می آید:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v^2}{r} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} = \frac{v^2}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}$$

می شود دید که این نتایج با معادله $x_0 + v_{x_0} t = x$ هم سازگارند. اگر بگذاریم $x = t_2$ باید برابر با R شود. از معادله ۲۱

$$R = v_{x_0} t_2 = (v_0 \cos \phi_0) t_2 = 23.3\text{ m}$$

که همان مقداری است که قبلاً به دست آمد.
(د) برای پیدا کردن سرعت توپ در لحظه برخورد با زمین، معادله ۱۷ را به کار می بیریم و v_x را به دست می آوریم. v_x در طول حرکت ثابت می باشد:

$$v_x = v_0 \cos \phi_0 = (15.5\text{ m/s}) (\cos 36^\circ) = 12.5\text{ m/s}$$

از معادله ۱۸ هم v_y را در t_2 به دست می آوریم:

$$v_y = v_0 \sin \phi_0 - gt = (15.5\text{ m/s}) (\sin 36^\circ) - (9.8\text{ m/s}^2)(1.86\text{ s}) = -9.1\text{ m/s}$$

پس اندازه سرعت برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5\text{ m/s})^2 + (-9.1\text{ m/s})^2} = 15.5\text{ m/s}$$

و جهت آن از این رابطه به دست می آید

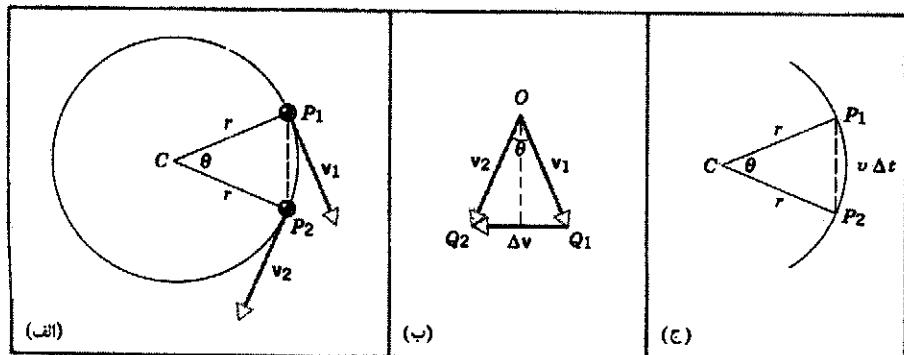
$$\tan \phi = v_y / v_x = -9.1 / 12.5$$

بنابراین، $-36^\circ = \phi$ ، یا 36° ساعتگرد نسبت به محور x است. توجه کنید که $-\phi = \phi$ است، یعنی همان است که از تقارن مسئله انتظار می رود (شکل ۵).

اندازه سرعت نهایی با اندازه سرعت اولیه برابر از آب در آمد. می توانید بگویید چرا؟ آیا این صرفاً یک تصادف است؟

۴- حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت پرتابی، هم اندازه و هم جهت شتاب ثابت است، اما اندازه و جهت سرعت هر دو تغییر می کنند. اکنون حالت خاصی را بررسی می کنیم که ذره روی دایره حرکت می کند و اندازه سرعت آن ثابت است. چنانکه بعداً خواهیم دید، در این حرکت اندازه سرعت و اندازه شتاب، هر دو، ثابت‌اند اما جهت هر یک از این دو بردار به طور پیوسته تغییر می کند. این وضعیت را حرکت دایره‌ای یکنواخت می نامند. از نمونه‌های این نوع حرکت می توانیم از حرکت ماهواره‌های زمین و حرکت نقاط روی اجسام چرخانی مثل یقه‌های پنکه، صفحه گرامافون، و دیسک کامپیوتر نام ببریم. در واقع، اگر بتوانیم خودمان را ذره فرض کنیم، ما هم به خاطر چرخش زمین حرکت دایره‌ای یکنواخت داریم.



شکل ۱۰. حرکت دایره‌ای یکنواخت (الف) ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازه سرعت آن ثابت می‌ماند. سرعت ذره در دو نقطه P_1 و P_2 نشان داده شده است. (ب) تغییر سرعت ذره از P_1 تا P_2 است. (ج) ذره در زمان Δt قوس P_1P_2 را طی می‌کند.

سرعت است. از نظر ابعادی

$$[a] = \frac{[v^r]}{[r]} = \frac{(L/T)^2}{L} = \frac{L}{T^2}$$

که همان بعد معمول شتاب است. پس یکای این شتاب ممکن است km/h^2 , m/s^2 , $km/h \cdot m/s$.

شتاب ناشی از تغییر جهت سرعت همانقدر واقعی است و همانقدر از هر نظر، "شتاب" است که شتاب ناشی از تغییر اندازه سرعت. شتاب، طبق تعریف، آهنگ تغییر زمانی سرعت است؛ سرعت هم بردار است، یعنی هم تغییر اندازه آن می‌تواند منجر به شتاب شود هم تغییر جهش. ویژگی‌های جهتی کمیتهای فیزیکی برداری را نمی‌شود نادیده گرفت؛ تغییرات جهتی این کمیتها درست همانقدر اهمیت دارد که تغییرات مقداری آنها.

باید بر این نکته تأکید کرد که لزومی ندارد در جهت شتاب، حرکت داشته باشیم، و در حالت کلی هیچ رابطه مشخصی بین جهتی a و v وجود ندارد. شکل ۱۲ مثالهایی را نشان می‌دهد که در آنها راویه θ بین v و a از 0° تا 180° تغییر می‌کند. تنها در یک مورد، که $\theta = 0^\circ$ است، حرکت در جهت a است.

مثال ۵. ما به دور زمین می‌گردد و زمان یک گردش کامل آن $3\text{ روز} = 27\text{ روز}$ است. فرض کنید که مدار دایره‌ای، و شعاع آن 238000 مایل است. اندازه شتاب ما به طرف زمین چقدر است؟

حل: $3 \times 10^8 \text{ m} = 3,82 \times 10^8 \text{ m} = r$ است. زمان یک گردش کامل (z مان تراویب) $10^6 \text{ s} = 2,36 \times 10^6 \text{ s} = T$ است. بنابراین اندازه سرعت ما (که آن را ثابت فرض می‌کنیم) برابر است با

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3,82 \times 10^8 \text{ m})}{2,36 \times 10^6 \text{ s}} = 1018 \text{ m/s}$$

شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a = \frac{v^r}{r} = \frac{(1018 \text{ m/s})^2}{3,82 \times 10^8 \text{ m}}$$

$$= 271 \text{ m/s}^2 \quad \text{یا} \quad 276 \times 10^{-4} g_n$$

با استفاده از تقریب زاویه کوچک، به جای حد باقی مانده ۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

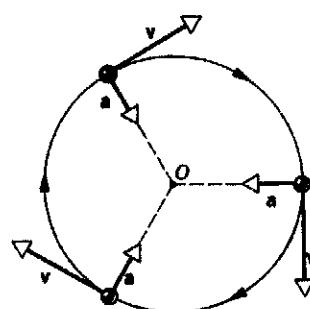
$$a = \frac{v^2}{r} \quad (28)$$

چون جهت شتاب متوسط همان جهت Δv است، جهت a همیشه شعاعی و به طرف مرکز دایره، (یا هر قوس دایره‌ای از مسیر حرکت) است.

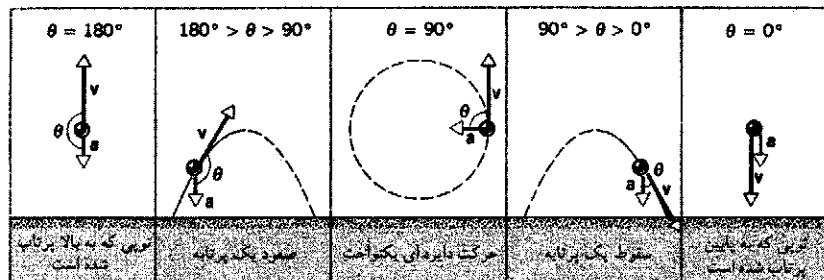
شکل ۱۱ رابطه لحظه‌ای بین v و a را در نقاط مختلف مسیر نشان می‌دهد. اندازه v ثابت است، اما جهت آن مدام تغییر می‌کند. این سرعت منجر به شتابی (a) می‌شود که آن هم اندازه‌اش ثابت است ولی جهتی مدام تغییر می‌کند. سرعت v همواره مسas بر دایره و در جهت حرکت است؛ شتاب a همواره در راستای شعاع و به طرف داخل است. به همین علت، a را شتاب شعاعی، یا مرکزگرا می‌نامند. در بخش بعدی، معادله ۲۸ را با استفاده از بردارهای یکه به دست خواهیم آورد.

هم در سقوط آزاد و هم در حرکت پرتایی، جهت و اندازه a ثابت است، و می‌توانیم معادلات مربوط به شتاب ثابت را به کار ببریم. این معادلات را نمی‌شود برای حرکت دایره‌ای یکنواخت به کار برد، زیرا a جهت تغییر می‌کند و بنابراین ثابت نیست.

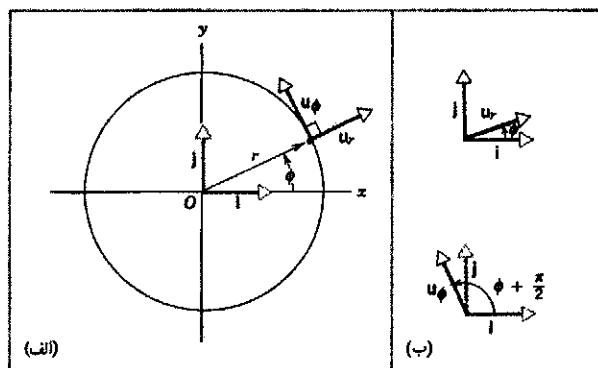
یکای شتاب مرکزگرا همان یکای شتاب ناشی از تغییر اندازه



شکل ۱۱. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب a همواره به طرف مرکز دایره است، و بنابراین همواره بر v عمود است.



شکل ۱۲. رابطه هندسی میان v و a برای حرکتهای مختلف.



شکل ۱۳. (الف) ذره‌ای که در جهت پادساعتگرد روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. (ب) بردارهای یکه u_r و u_ϕ و رابطه آنها با θ و ω .

می‌شود. با استفاده از روش‌های برداری می‌توانیم ارتباط میان سرعت و شتاب، وجهت شتاب را تعیین کنیم. ابتدا معادله ۲۸ برای شتاب مرکزگرا در سرعت ثابت را دوباره، این بار با روش‌های برداری کلی تر، به دست می‌آوریم. شکل ۱۳ ذره‌ای را نشان می‌دهد که حول مبدأ O یک دستگاه مرجع، حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. برای این حرکت، مختصات قطبی r و ϕ مفیدتر از مختصات دکارتی x و y است، زیرا r در طی حرکت ثابت می‌ماند و ϕ با زمان به صورت خطی ساده‌ای افزایش می‌یابد؛ رفتار x و y طی این نوع حرکت پیچیده‌تر است. رابطه این دو دسته مختصات با هم به شکل زیر است

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \quad (29)$$

یا (رابطه معکوس)

$$x = r \cos \phi \quad \text{و} \quad y = r \sin \phi \quad (30)$$

در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه \hat{a} و $\hat{\omega}$ را برای توصیف حرکت در صفحه xy به کار می‌بریم، اینجا بهتر است دو بردار یکه جدید، u_r و u_ϕ ، معرفی کنیم. طول این دو بردار هم، مثل \hat{a} و $\hat{\omega}$ یک است. اینها هم بی‌بعدند، و فقط جهت مشخص می‌کنند.

۱. می‌توان از این بخش گذشت یا آن را تا بحث مربوط به حرکت دورانی در فصل ۱۱ به تعریق اندادخت.

g_n (معنی $g_n = 9.81 \text{ m/s}^2$) مقدار استاندارد بین‌المللی پذیرفته شده برای g است. این مقدار استاندارد، که در واقع مقدار تقریبی شتاب سقوط آزاد در سطح دریا در عرض جغرافیایی 45° است، خیلی وقتی به عنوان مقیاسی برای شتاب به کار می‌رود. مثلاً شتاب وارد بر خلبانهای جت، یا شتاب وارد بر مسافران ارابه‌های تفریحی بازیگارها را معمولاً بر حسب g_n بیان می‌کنند.

مثال ۶. ماهواره‌ای در ارتفاع $h = 210 \text{ km}$ از سطح زمین، به دور زمین می‌گردد. در این ارتفاع، $g = 9.2 \text{ m/s}^2$ است. (این مقدار از 9.81 m/s^2 کمتر است چون g با زیاد شدن ارتفاع کم می‌شود، فصل ۱۶) سرعت این ماهواره را پیدا کنید. شعاع زمین $R = 6370 \text{ km}$

حل: ماهواره هم، مثل اجسام دیگر نزدیک به زمین، یک شتاب g به طرف مرکز زمین دارد. این شتاب، همراه با سرعت مماسی ماهواره، موجب می‌شود که حرکت ماهواره دایره‌ای باشد. پس شتاب مرکزگرا همان شتاب گرانشی g است، و از معادله 28 ($a = v^2/r$) بازاری

$g = R + h$ و $a = g$ به دست می‌آید

$$g = \frac{v^2}{R + h}$$

با

$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(6580 \text{ km})(9.2 \text{ m/s}^2)(10^3 \text{ m/km})}$$

$$= 7780 \text{ m/s} \quad \text{یا} \quad 17400 \text{ mi/h}$$

با این سرعت، ماهواره در هر 48 h یک بار به دور زمین می‌گردد.

۴-۵ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای (اختیاری)
چنانکه در بخش پیش دیدیم، ذره‌ای که با (مقدار) سرعت ثابت روی قوسی از دایره حرکت می‌کند شتاب مرکزگرا دارد. ایته اگر اندازه سرعت ثابت نباشد باز هم شتاب مرکزگرا در کار هست، اما در این حالت ذره یک شتاب مماسی هم دارد که موجب تغییر سرعت مماسی آن

ذره با سرعت ثابت روی دایره حرکت می‌کند، پس $d\phi/dt$ برابر است با زاویه‌ای که در یک دور طی می‌شود (2π رادیان) تقسیم بر زمان پیمودن یک دور (مسافت $2\pi r$ تقسیم بر سرعت v):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r} \quad (37)$$

اکنون اگر معادله ۳۷ را در معادله ۳۶ بگذاریم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v \frac{v}{r} \\ &= -\mathbf{u}_r \frac{v^2}{r} \end{aligned} \quad (38)$$

می‌بینیم که اندازه شتاب، ثابت و برابر با v^2/r است (همان طور که در معادله ۲۸ به دست آورده‌یم)، و جهت شتاب، شعاعی و به طرف داخل است (یعنی، برخلاف جهت \mathbf{u}_r). ضمن حرکت ذره روی دایره، جهت \mathbf{u}_r و \mathbf{a} نسبت به محورهای مختصات x و y تغییر می‌کند، زیرا جهت شعاعی تغییر می‌کند.

شتاب مماسی در حرکت دایره‌ای اکنون حالت کلی تری را بررسی می‌کنیم که در آن اندازه سرعت v ذره‌ای که روی دایره حرکت می‌کند ثابت نیست. در این مورد هم از روش‌های برداری و مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. اینجا هم سرعت از معادله ۳۳ به دست می‌آید:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_\phi$$

با این تفاوت که در این مورد نه تنها \mathbf{u}_ϕ بلکه v (اندازه سرعت) هم با زمان تغییر می‌کند. با استفاده از رابطه مشتق حاصل ضرب، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi \frac{dv}{dt} \quad (39)$$

در معادله ۳۴، جمله دوم طرف راست معادله ۳۹ وجود نداشت، زیرا v را ثابت فرض کرده بودیم. جمله اول طرف راست معادله ۳۹، جنانکه قبلاً به دست آورده‌یم، $(v^2/r)\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_T$ است. به این ترتیب، معادله ۳۹ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T \quad (40)$$

که در آن، $a_R = dv/dt$ و $a_T = v^2/r$ است. جمله اول، $-\mathbf{u}_r a_R$ ، مؤلفه برداری \mathbf{a} در راستای شعاعی به طرف مرکز دایره است، و ناشی از تغییر جهت سرعت حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار \mathbf{a}_R و اندازه آن، هر دو را شتاب مرکزگرا می‌نامند. جمله دوم، $\mathbf{u}_\phi a_T$ ، مؤلفه برداری \mathbf{a} در جهت مماس بر مسیر ذره است، و ناشی از تغییر اندازه سرعت حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار \mathbf{a}_T و اندازه آن a_T ، هر دو را شتاب مماسی می‌نامند.

برداریکه \mathbf{u}_r در هر نقطه در جهت افزایش r در آن نقطه است. این بردار در راستای شعاع و به طرف خارج از مرکز است. برداریکه \mathbf{u}_ϕ در هر نقطه در جهت افزایش ϕ در آن نقطه است. این بردار در هر نقطه بر دایره‌ای به مرکز مبدأ که از آن نقطه می‌گذرد مماس، و در جهت پاد ساعتگرد است. جنانکه در شکل ۱۳ الف می‌بینیم، \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ برهم عمودند. اختلاف \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ ، نقطه به نقطه عوض می‌شود؛ بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} در این است که جهت \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ ، نقطه به نقطه عوض می‌شود؛ بنابراین وقتی از عبارتهای شامل \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ بردارهای ثابتی نیستند. بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} را می‌توانیم ثابت بگیریم، اما \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ را نمی‌توانیم. بردارهای یکه \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ را می‌شود بر حسب بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} به صورت زیر نوشت (شکل ۱۳ ب):

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\phi &= \mathbf{i} \cos(\phi + \pi/2) + \mathbf{j} \sin(\phi + \pi/2) \\ &= -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi \end{aligned} \quad (32)$$

در جملاتی از نوع $\mathbf{i} \cos \phi$ بردار را در اسکالار ضرب کرده‌ایم و ترتیب نوشتن عاملها مهم نیست؛ این جمله را به شکل $i(\cos \phi)$ هم می‌شود نوشت. اگر ذره با اندازه سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، بردار سرعت آن مؤلفه شعاعی ندارد، و کلاً در جهت \mathbf{u}_ϕ است. به علاوه، اندازه سرعت همان v ثابت است. پس،

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_\phi \quad (33)$$

یعنی v بر دایره مماس است و اندازه‌اش ثابت است، اما جهتش تغییر می‌کند. حالا می‌توانیم شتاب را به دست بیاوریم:

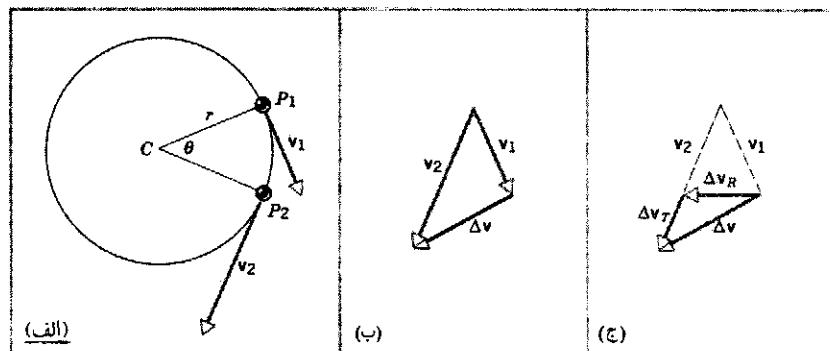
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{u}_\phi) = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} \quad (34)$$

توجه کنید که سرعت ثابت v از مشتق بیرون می‌آید. برای به دست آوردن مشتق برداریکه \mathbf{u}_ϕ ، معادله ۳۲ را به کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\mathbf{i} \frac{d(\sin \phi)}{dt} + \mathbf{j} \frac{d(\cos \phi)}{dt} \\ &= -\mathbf{i} \cos \phi \frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= (-\mathbf{i} \cos \phi - \mathbf{j} \sin \phi) \frac{d\phi}{dt} \\ &= -\mathbf{u}_r \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (35)$$

در آخرین مرحله، معادله ۳۱ را به کار برده‌ایم. به این ترتیب،

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v \frac{d\phi}{dt} \quad (36)$$



شکل ۱۴. (الف) در حرکت دایره‌ای غیر یکنواخت، اندازه سرعت متغیر است. (ب) تغییر سرعت از P_1 تا P_2 شامل دو بخش است: Δv ناشی از تغییر جهت v ، و Δv_T ناشی از تغییر اندازه v در حد $\Delta t \rightarrow 0$ به طرف مرکز دایره، و Δv_R مماس بر مسیر است.

طرف داخل است. این رد در اتفاق حباب پر از هیدروژن مایع تشکیل شده است. حرکت الکترون، در اثر حرکت در مایع اتفاق طوری کند می شود که سرعت v آن به طور منظم کاهش می یابد. بنابراین، الکترون در هر نقطه یک شتاب مماسی a_T دارد که از dv/dt بدست می آید. البته الکترون روی دایره حرکت نمی کند ولی قوهای کوچک مارپیچ کاملاً شبیه قوهای دایره‌ای به شعاع r است. پس شتاب مرکزگرای a_R در هر نقطه r/v^2 است، که در آن r شعاع مسیر در آن نقطه است. با کاهش انرژی ذره، r و v ، هر دو، کوچک می شوند. شتاب شعاعی الکترون ناشی از میدان مغناطیسی ای است که در اتفاق حباب حضور دارد. این میدان بر صفحه شکل ۱۵ عمود است (فصل ۳۴).

اندازه شتاب لحظه‌ای برابر است با

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \quad (41)$$

اگر اندازه سرعت ثابت باشد، $0 = a_T = dv/dt =$ معادله ۴۰ به معادله ۳۸ تبدیل می شود. اگر اندازه سرعت ثابت نباشد، صفر a_T نمی شود و a_R هم، نقطه به نقطه تغییر می کند. اندازه سرعت v ممکن است چنان تغییر کند که a_T ثابت نباشد؛ در این صورت، a_R و a_T هر دو، نقطه به نقطه تغییر می کنند.

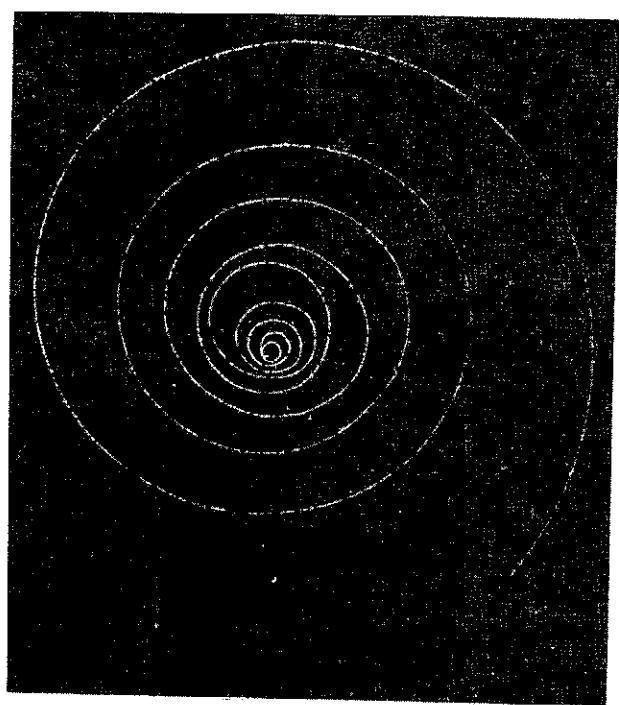
شکل ۱۵ رد یک الکترون پر از روی است که به شکل مارپیچی به

۴.۶ حرکت نسبی

فرض کنید در اتمobilی نشسته اید که با سرعت ثابت 55mi/h حرکت می کند. اجسام دیگر موجود در اتمobil هم با همان سرعت حرکت می کنند؛ سرعت آنها نسبت به زمین 55mi/h است، اما نسبت به شما صفر است. در این اتمobil می توان یک دسته آزمایش معمولی فیزیک انجام داد؛ نتیجه این آزمایشها از حرکت یکنواخت اتمobil متأثر نمی شود. مثلاً می توانید توپ را (در دستگاه مرجع خودتان) به بالا پرتاب کنید؛ خواهید دید که توپ مستقیماً به پایین سقوط می کند. توپ (به خاطر حرکت اتمobil) حرکت افقی دارد، اما شما هم همان حرکت افقی را دارید، در حرکت افقی نسبی صفر است.

اما نتیجه از دید ناظر زمینی فرق می کند. توپ یک مؤلفه افقی سرعت دارد که 55mi/h است، و یک مؤلفه عمودی که ناشی از حرکتی است که شما به آن می دهید. می دانیم که پرتابهای با این سرعت، مسیر سهمی دارد. بنابراین، معادلاتی که شما و ناظر زمینی برای توصیف حرکت به کار می بردید، با هم متفاوت‌اند، اما قوانین فیزیکی ای که بر حرکت توپ حاکم‌اند از نظر هر دو ناظر یکی است؛ مثلاً هر دو شما یک مقدار برای شتاب سقوط آزاد بدست می آورید.

اتومobil دیگری که با سرعت 57mi/h از شما سبقت بگیرد، از نظر شما (نسبت به چارچوب مرجع شما) به آهستگی با سرعت $(57\text{mi/h} - 55\text{mi/h}) = 2\text{mi/h}$ در حرکت است. اگر شواهد خارجی مبنای نظری که از کنار شما می گذرند، هوایی که از اطراف



شکل ۱۵. رد یک الکترون در اتفاق حباب هیدروژن مایع. الکترون یک شتاب شعاعی دارد، که ناشی از میدان مغناطیسی است. این شتاب می خواهد که مسیر حرکت را دایره‌ای کند. اما الکترون، در اثر برخورد با انتهای هیدروژن، کند می شود. بنابراین، یک شتاب مماسی هم دارد. مسیر حاصل از این دو شتاب، مارپیچ است.

نشان داده شده است، S و S' هر یک، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصات خودشان تعیین می‌کنند. ذره P از دید S در نقطه متناظر با بردار r_{PS} ، و از دید S' در نقطه متناظر با بردار $r_{PS'}$ است. از شکل ۱۶ می‌بینیم که رابطه میان این سه بردار به صورت زیر است

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{S'S} + \mathbf{r}_{PS'} = \mathbf{r}_{PS'} + \mathbf{r}_{S'S} \quad (42)$$

در رابطه بالا، برای عوض کردن ترتیب بردارها، از قانون جایه‌جایی بذیری جمع برداری استفاده کرده‌ایم و باز هم به ترتیب شاخصها دقت کنید. رابطه ۴۲، به زبان غیر ریاضی، می‌گوید که: "مکان P از دید S برابر است با مکان P از دید S' به اضافه مکان S' از دید S ". فرض کنید ذره P با سرعت $\mathbf{v}_{PS'}$ نسبت به S' حرکت می‌کند. S چه سرعتی برای این ذره اندازه‌گیری می‌کند؟ برای پاسخ به این سؤال کافی است که از معادله ۴۲ نسبت به زمان مشتق بگیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt}$$

آنچه تغییر هر بردار مکان، سرعت متناظر با آن بردار است. پس،

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PS'} + \mathbf{v}_{S'S} \quad (43)$$

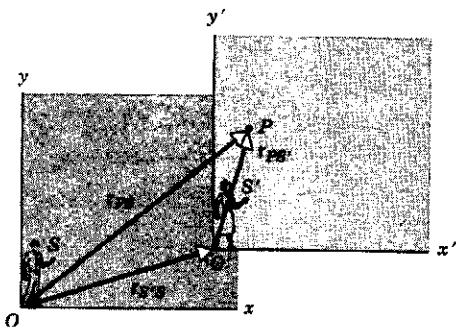
بنابراین، سرعت P نسبت به S در هر لحظه برابر است با سرعت P نسبت به S' به اضافه سرعت S' نسبت به S . معادلات ۴۲ و ۴۳ که برای حرکت دو بعدی به دست آورده‌ایم، برای حرکت سه بعدی هم کاملاً معتبرند.

معادله ۴۳ یک قانون تبدیل سرعت است. به کمک این قانون می‌توانیم سرعتی را که ناظر یک چارچوب مرجع، مثلاً S' ، می‌سنجد، به سرعتی که ناظر دیگری، مثلاً S می‌سنجد تبدیل کنیم. کافی است که سرعت نسبی در چارچوب مرجع را بدانیم. این قانون تبدیل سرعت با مشاهدات روزمره و مقایمین بنیادی فضا و زمان در فیزیک کلاسیک گالیله و نیوتون، به خوبی سازگار است. در واقع، معادله ۴۳ را اغلب شکل گالیله‌ای قانون تبدیل سرعتها می‌نامند.

در اینجا تنها حالت خاص بسیار مهمی را بررسی می‌کنیم که سرعت دو چارچوب مرجع نسبت به هم ثابت است؛ یعنی هم جهت و هماندازه S و S' ثابت است. \mathbf{v}_{PS} و $\mathbf{v}_{PS'}$ ، یعنی سرعتهای ذره از S و S' ، می‌توانند ثابت نباشند، و البته در حالت کلی با هم برابر نیستند. اما اگر یکی از ناظرها، مثلاً S' ، سرعت P را ثابت بیند، هر دو جمله طرف راست معادله ۴۳ مستقل از زمان می‌شود، و به این ترتیب طرف چپ این معادله هم باید مستقل از زمان باشد. بنابراین، اگر ناظری سرعت ذره‌ای را ثابت بیند، همه ناظرها دیگری هم که نسبت به این ناظر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، سرعت آن ذره را ثابت خواهند دید.

با مشتق‌گیری از معادله ۴۳ نتیجه مهم‌تری به دست می‌آید:

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt} \quad (44)$$



شکل ۱۶. ناظرها S و S' ، که نسبت به هم حرکت می‌کنند، ذره P را مشاهده می‌کنند. این دو ناظر، در لحظه مشاهده، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصات خودشان، به ترتیب با \mathbf{r}_{PS} و $\mathbf{r}_{PS'}$ می‌سنجند. در همین لحظه ناظر S مکان S' را نسبت به مبدأ O ، با $\mathbf{r}_{S'S}$ می‌سنجد.

اتومبیل به عقب هجوم می‌برد، دست انداز جاده، و صدای موتور را کنار بگذارید و فقط به "اتومبیل" توجه کنید، هیچ راهی ندارید برای اینکه "واقعاً" تعیین کنید که کدام اتومبیل دارد حرکت می‌کند. مثلًاً اگر اتومبیل دیگر ساکن باشد و اتومبیل شما با سرعت 2mi/h به عقب برود، باز هم نتیجه مشاهدات شما همین خواهد بود.

در این بخش، توصیف حرکت یک ذره را از دید دو ناظر، که نسبت به هم حرکت یک‌نواخت دارند، بررسی می‌کنیم. دو نفر را در نظر بگیرید که یکی در اتومبیلی که با سرعت ثابت در جاده‌ای مستقیم حرکت می‌کند نشسته و دیگری کنار جاده ایستاده است. ذره‌ای که هر دو ناظر مشاهده می‌کنند ممکن است مثلاً توپی باشد که از یک اتومبیل به هوا یا به طرف اتومبیل دیگر پرتاب می‌شود.

دو ناظر را S و S' می‌نامیم. هر ناظر، چارچوب مرجعی دارد که یک دستگاه مختصات دکارتی به آن متصل است. برای سادگی فرض می‌کنیم که هر ناظر در مبدأ دستگاه مختصات مربوط به خودش واقع شده است. تنها یک قید روی حرکت نسی دو دستگاه می‌گذاریم: سرعت نسبی میان S و S' باید ثابت باشد منظور این است که هم اندازه و هم جهت سرعت ثابت باشد. دقت کنید که این محدودیت روی سرعت ذره‌ای که ناظرها S و S' مشاهده می‌کنند نیست. لزومی ندارد که ذره با سرعت ثابت حرکت کند؛ ذره می‌تواند شتاب داشته باشد.

شکل ۱۶ دو دستگاه مختصات مربوط به S و S' را در زمان t نشان می‌دهد. برای سادگی، فقط حرکت دو بعدی را بررسی می‌کنیم. شکل ۱۶ دو صفحه xy و $x'y'$ را، که در واقع یک صفحه‌اند، نشان می‌دهد. مبدأ دستگاه S' ، نسبت به مبدأ دستگاه S ، با بردار $\mathbf{r}_{S'S}$ مشخص می‌شود. به ترتیب شاخصهای پایین بردار خوب توجه کنید: شاخص اول نقطه‌ای را که محل آن مورد نظر است مشخص می‌کند (در این مورد، مبدأ دستگاه مختصات S') و شاخص دوم دستگاهی را که محل نقطه نسبت به آن مورد نظر است (در این مورد، دستگاه مختصات S).

در شکل ۱۶ یک ذره (P) هم در صفحه مشترک xy و $x'y'$ قرار دارد.

جمله آخر معادله ۴۴ صفر است، چون فرض کردہ ایم که سرعت نسبی دو چارچوب مرجع ثابت است، پس

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt}$$

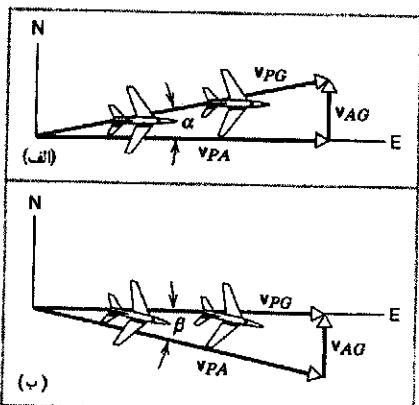
اگر در دو طرف این معادله، به جای مشتق سرعت، شتاب متناظر با آن را قرار بدهیم می بینیم که

$$a_{PS} = a_{PS'} \quad (45)$$

یعنی، شتاب P از دید دو ناظر یکی است!

در فصل بعدی خواهیم دید که شتاب کمیتی بنیادی در رفتار دینامیکی اجسام است: قانون دوم نیوتون $F = ma$. F ، نیروی a ، جرم m ، و شتاب a را به هم مربوط می کند. معادله ۴۵ در شرایط خاصی که چارچوبهای مرجع S و S' نسبت به هم با سرعت ثابت (هم از نظر جهت و هم از نظر اندازه) در حرکت باشند به دست آمد. چنین چارچوبهایی را که ممکن است نسبت به هم در حرکت باشند اما ناظرهای آنها برای یک جسم معین، شتاب یکسانی مشاهده می کنند، چارچوب مرجع لخت می نامند. در فصل بعد خواهیم دید که این چارچوبها، به ویژه از این نظر مهم‌اند که قوانین نیوتون تنها در آنها برقرار است.

در اینجا مثالی از یک قانون فیزیکی می آوریم که می شود آن را برای تعیین لخت بودن یا نبودن چارچوبهای مرجع به کار برد. جرمی را به یک سر نخی بیندید و سر دیگر نخ را در دست بگیرید تا جرم آویزان شود. جاذبه گرانشی زمین بر جرم، آن را به طرف مرکز زمین می کشد؛ راستای نخ را می شود برای تعریف محور قائم به کار برد. اگون همین آزمایش را در اتومبیلی که با سرعت ثابت 55mi/h بر خط مستقیم حرکت می کند تکرار کنید. نتیجه عوض نمی شود: نخ در همان راستای قائم آویزان می ماند. این اتومبیل هم، مثل زمین، یک چارچوب مرجع لخت است. اگر این آزمایش را در اتومبیلی که در حال سرعت گرفتن، ترمز کردن، یا دور زدن باشد انجام بدهید، نخ از راستای قائم منحرف می شود. چارچوبهای شتابدار (حتی اگر شتابشان شتاب مرکزگرا باشد) چارچوب نالخت‌اند. ز در واقع زمین هم فقط به طور تقریبی یک چارچوب لخت است. به خاطر چرخش زمین به دور محور خودش، دو ناظر در عرضهای جغرافیایی متفاوت، نسبت به هم یک سرعت مماسی دارند که جهت آن با چرخش زمین تغییر می کند. البته این اثر کوچک و در بسیاری از موارد قابل چشمپوشی است! اما در کارهای بسیار دقیق باید آن را در نظر گرفت. ضمناً در مقیاس بزرگ، این پدیده می تواند آثار چشمگیری داشته باشد. مثلاً نالخت بودن چارچوب مرجع سطح زمین باعث چرخش باد حول مراکز پر فشار یا کم فشار می شود. این چرخش می تواند توفانهایی شدید و مخرب به بار بیاورد. در بخش ۸-۶ آثار دیگری را که در چارچوبهای نالخت مشاهده می شود بررسی خواهیم کرد.



شکل ۱۷. (الف) هوابیمی که جهتگیری آن به طرف شرق است و بادی به طرف شمال به آن می وزد. (ب) برای حرکت به طرف شرق، هوابیمی باید قدری به درون باد جهتگیری کند.

مثال ۷. قطب‌نمای هوابیمی نشان می دهد که سر هوابیما به طرف شرق است؛ سرعت‌ستنج، آن که سرعت را نسبت به هوا می سنجد، مقدار 215km/h را نشان می دهد. باد ثابتی با سرعت 65km/h به طرف شمال می وزد. (الف) اندازه سرعت هوابیما نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) اگر خلبان بخواهد به طرف شرق برود، هوابیما را باید در چه جهتی هدایت کند، یعنی قطب‌نمای چه جهتی را باید نشان بدهد؟ حل: (الف) در این مسئله، "ذره" متحرک، هوابیمی P است. دو چارچوب مرجع داریم، زمین (G) و هوا (A). زمین را دستگاه S و هوا را دستگاه S' می‌گیریم. معادله ۴۳ را، با تغییر ساده‌ای در نمادگذاری، چنین می‌نویسیم

$$v_{PG} = v_{PA} + v_{AG}$$

شکل ۱۷ الف این بردارها را نشان می دهد، که یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می دهند. جمله‌های این رابطه، به ترتیب عبارت اند از سرعت هوابیما نسبت به زمین، سرعت هوابیما نسبت به هوا، و سرعت هوا نسبت به زمین (یعنی سرعت باد). توجه کنید که جهتگیری هوابیما به طرف شرق است، همان چیزی که قطب‌نمای نشان می دهد.

اندازه سرعت هوابیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215\text{km/h})^2 + (65\text{km/h})^2} = 225\text{km/h}$$

زاویه α ، از شکل ۱۷ الف، از رابطه زیر بدست می آید:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1} \frac{65\text{km/h}}{215\text{km/h}} = 16.8^\circ$$

بنابراین، هوابیما نسبت به زمین با سرعت 225km/h در جهت 16.8° شمالی نسبت به شرق پرواز می کند. توجه کنید که سرعت هوابیما نسبت به زمین، از سرعت آن نسبت به باد بیشتر است.

تولید می‌کنند. بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متحرک نور عملاً طی حرکت پرتو نور خودشان را باز تولید می‌کنند. اینشتین استدلال کرد که اگر معادله 43 درست باشد، ناظر S می‌تواند پرتو نوری با سرعت c در جهت x' بفرستد، و ناظر S' می‌تواند با $c = v_{PS}$ در جهت x نسبت به S حرکت کند و پرتو نور را بگیرد. درست مثل اتمبیلی که با همان سرعت اتومبیل شما، کنار اتومبیلتان حرکت کند. در این صورت، پرتو نور، از دید ناظر S' ، ساکن به نظر می‌رسد. این، از نظر اینشتین، تناقض شدیدی بود؛ چطور ممکن است پرتو نوری را، که اصولاً میدان الکترومغناطیسی متحرک است، "ساکن" ببینیم؟ اینشتین برای حل این مشکل راهی پیشنهاد کرد که به نظر خودش بدیهی بود: هیچ پرتو نوری را نمی‌توان "ساکن" دید. پس حتماً باید نتیجه گرفت که معادله 43 ، برای سرعتهای نزدیک به c ، غلط است. اینشتین یک گام از این هم جلوتر رفت: اظهار کرد که هر دو ناظر S و S' باید دقیقاً یک مقدار برای سرعت نور به دست بیاورند، سرعت نسبی شان هر چه می‌خواهد باشد! این حکم با عقل متعارف و با پیش‌بینی معادله 43 ، مغایر به نظر می‌رسد؛ اگر دو ناظر با سرعت $v_{PS} = 9999999c$ نسبت به هم حرکت کنند، چطور ممکن است که نتیجه اندازه‌گیری هر دو شان از سرعت پرتو نوری که بکی از آنها گسیل کرده است یکسان و برابر با c باشد؟

توصیف ریاضی کامل این مسئله را به فصل 21 موكول می‌کنیم؛ اینجا فقط مختصری در مورد حالت خاصی که همه سرعتها در راستای x (یا x') باشد صحبت می‌کنیم. در این حالت، نتیجه اینشتین برای تبدیل سرعتها چنین است:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS}v_{S'S}/c^2} \quad (46)$$

بینید که چه نتیجه‌زیابی است. اگر v_{PS} و $v_{S'S}$ (نسبت به c) کوچک باشند، مخرج معادله 46 خیلی نزدیک به 1 می‌شود، و معادله 46 به معادله 43 تبدیل می‌شود. در سرعتهای کم، تبدیل گالیله‌ای سرعت جواب قابل قبول می‌دهد. اگر $c = v_{PS}$ باشد (S' پرتو نور را مشاهده می‌کند)، از معادله 46 نتیجه می‌شود که $v_{PS} = c$ ، و فرقی هم نمی‌کند که مقدار $v_{S'S}$ چه باشد. همه ناظرها سرعت نور را یکسان می‌ستند؛ یعنی مقداری که می‌ستند به سرعت نسبی شان بستگی ندارد.

فرض اینشتین، و سینماتیک و مکانیکی که به دنبال آن می‌آید، لازم نمی‌دارد که فیزیک نیوتونی را کنار بگذاریم؛ تنها می‌گوید که محاسبات نیوتونی را به سرعتهای بسیار کوچک، در مقایسه با c ، محدود کنیم. برای اجسام متحرکی که معمولاً با آنها سروکار داریم، این محدودیت به خوبی برقرار است. حتی سرعت سریعترین موشکهایی که بشر ساخته است ($s = 10^3 \text{ m/s}$ ، آنقدر کمتر از سرعت نور $s = 10^8 \text{ m/s}$ $\times 10^3$ است، که فرمول گالیله را با اطمینان به کار ببریم، بی‌آنکه مرتب خطاً قابل توجهی شده باشیم. اما ذراتی مثل الکترون یا پروتون را می‌شود به راحتی تا سرعتهای خیلی نزدیک به c شتاب داد. در این سرعتهای زیاد باشد از یک فیزیک جدید، با معادلات جدید سینماتیکی

(ب) به این منظور، هواپیما باید طوری در مقابل باد جهت‌گیری کند که سرعت هواپیما نسبت به زمین به طرف شرق باشد. سرعت باد همان است که بود، و نمودار برداری معادله 43 به صورت شکل 17 ب است. توجه کنید که در این مورد هم این سه بردار یک مثلث قائم الزاویه می‌سازند، با این تفاوت (نسبت به شکل 17 الف) که این بار وتر مثلث v_{PG} است نه v_{PA}

در این مورد، سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 - (65 \text{ km/h})^2} \\ = 205 \text{ km/h}$$

چنانکه جهت‌گیری هواپیما در شکل 17 ب نشان می‌دهد، هواپیما باید به اندازه زاویه β به درون باد هدایت شود. این زاویه برابر است با

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \sin^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 17.6^\circ$$

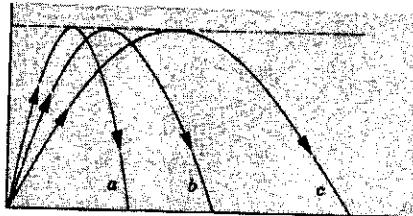
همان‌طور که می‌بینید، در این حالت سرعت هواپیما نسبت به زمین کمتر از سرعت آن نسبت به هواست.

حرکت نسبی در سرعتهای زیاد (اختیاری)
مطلوبی که در مورد حرکت نسبی گفته شد، مبنای مکانیک نیوتونی است، که بررسی آن را از فصل 5 شروع خواهیم کرد. در اینجا هیچ محدودیتی روی سرعت نسبی چارچوبهای مرجع، یا روی سرعت ذراتی که بررسی می‌شوند وجود ندارد (تها کافی است که سرعت نسبی چارچوبهای مرجع ثابت باشد). دو قرن پس از نیوتون، آلبرت اینشتین سعی کرد نتیجه کاربرد معادله 43 را برای پرتو نوری که با سرعت $s = 299792458 \text{ m/s}$ در خلا حرکت می‌کند، مجسم کند. فرض کنید ناظر S' پرتو نوری را مشاهده می‌کند که با سرعت c در جهت مثبت x' در حرکت است. باز فرض کنید خود S' هم نسبت به S با سرعت $v_{S'S} = 1 \text{ m/s}$ در همان جهت x' حرکت می‌کند. ناظر S چه سرعتی برای پرتو نور می‌ستجد؟ مکانیک نیوتونی طبق معادله 43 جواب می‌دهد:

$$v_{PS} = 299792458 \text{ m/s} + 1 \text{ m/s} = 299792459 \text{ m/s}$$

اینشتین البته کتابهای درسی اش را خوانده بود و می‌دانست که مکانیک نیوتونی درباره مشاهده سرعت توسط ناظرهای متحرک نسبت به یکدیگر، چه می‌گوید؛ این را هم می‌دانست که نور یک شئ متحرک عادی نیست. پرتوهای نور به شکل خاصی حرکت می‌کنند. نور تابش الکترومغناطیسی است، و می‌شود آن را بر حسب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی سازنده‌اش تحلیل کرد. میدان الکتریکی متحرک میدان مغناطیسی تولید می‌کنند، و میدان مغناطیسی متحرک میدان الکتریکی

۹. شکل ۱۹، مسیر سه توپ فوتbal را نشان می دهد. (الف) کوتاهترین مدت پرواز، (ب) بزرگترین مؤلفه قائم سرعت در زمان شروع حرکت، (ج) بزرگترین مؤلفه افقی سرعت در زمان شروع حرکت، و (د) کمترین سرعت در زمان شروع حرکت، مربوط به کدام یک از این مسیرهاست؟ (مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.)



شکل ۱۹. پرسن ۹

۱۰. تفngی، وقتی به طرف هدفی هم تراز با خودش نشانه برود، به هدف می زند. نشان بدید که اگر این تفng به طرف هدفهای بالاتر یا پایین تر از خودش نشانه روی شود، به شرط آنکه فاصله هدف عوض نشود، همیشه "بالا می زند".

۱۱. پیتر برانکازیو در کتاب "دانش ورزش" در مورد پرتابهای مثل گوی بیسبال یا گوی گلف می نویسد: "با فرض اینکه بقیه شرایط یکسان باشد، برد پرتابهای در روزهای گرم بیشتر است تا در روزهای سرد، در سطوح مرتفع بیشتر است تا در سطح دریا، و در هوای مرتکب بیشتر است تا در هوای خشک". آیا می توانید درستی این گفته ها را توضیع بدید؟

۱۲. نمودار ارتفاع-زمان پرتابهای که در راستای قائم به بالا پرتاب شود، سهمی است. مسیر پرتابهای هم که به طور مایل به بالا پرتاب شود سهمی است. آیا این شباهت تصادفی است؟ جواب خودتان را توجیه کنید.

۱۳. توپهای بلندبرد را در زاویه "برد بیشینه" 45° تنظیم نمی کنند، بلکه در زاویه های بزرگتر، در گستره 55° تا 65° تنظیم می کنند. زاویه 45° چه اشکالی دارد؟

۱۴. آیا در حرکت پرتابه، اگر مقاومت هوا قابل چشمپوشی باشد، هیچ وقت لازم می شود که حرکت را، به جای دو بعدی، سه بعدی در نظر بگیریم؟
۱۵. آیا ممکن است که اندازه سرعت ثابت باشد ولی حرکت شتابدار باشد؟ آیا می شود با شتاب صفر روی یک مسیر منحنی حرکت کرد؟

۱۶. مهره ای را در نظر بگیرید که در امتداد سیم بدون اصطکاکی به شکل مارپیچ با سرعت ثابت می لغزد و حلقه هایی را که به تدریج کوچکتر می شوند طی می کند. شتاب این مهره را به طور کیفی توصیف کنید.
۱۷. نشان بدید که اگر هم چرخش و هم گردش زمین را به حساب

و دینامیکی، استفاده کرد. این فیزیک جدید، اساس نظریه نسبیت خاص است، که آن را به تفصیل بیشتر در فصل ۲۱ مطالعه خواهیم کرد.

پرسشها

۱. آیا ممکن است جهت شتاب جسمی تغییر کند، بی آنکه جهت سرعت آن تغییر کند؟

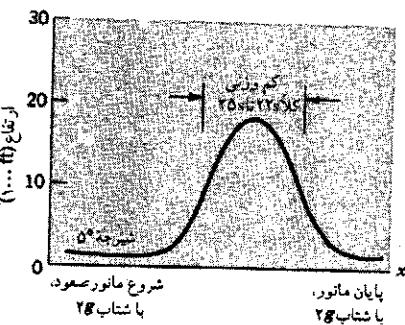
۲. اگر v و a به ترتیب نماینده سرعت و شتاب اتومبیلی باشد، وضعیت حرکت در هر یک از این حالتها چگونه است؟ (الف) v و a موازی و هم جهت‌اند؛ (ب) v و a موازی و در جهت‌های مخالفاند؛ (ج) v و a برهم عمودند؛ (د) v صفر و a مخالف صفر است؛ (ه) a صفر و v مخالف صفر است.

۳. آیا در پرش طول، ارتفاعی هم که ورزشکار به آن می رسد اهمیت دارد؟ چه عواملی برد پرش را تعیین می کنند؟

۴. الکترونهای باریکه ای را که از تفng الکترونی خارج می شود، و نیز مولکولهای جریان آبی را که از لوله بیرون می زند در نظر بگیرید. چرا در اثر گرانش، الکترون به اندازه مولکول آب سقوط نمی کند؟ فرض کنید که حرکت اولیه ذرات، در هر دو مورد، افقی است.

۵. سرعت پرتابه در کدام نقطه یا نقاط مسیر کمینه است؟ در کجا بیشینه است؟

۶. شکل ۱۸ مسیر پرواز یکی از هواپیماهای جت ناسا را نشان می دهد. هدف از این پرواز شبیه سازی شرایط کم وزنی برای مدتی کوتاه است. استدلال کنید که اگر مسیر هواپیما، سهمی خاصی باشد، مسافران آن احساس بی وزنی خواهند کرد.



شکل ۱۸. پرسن ۶

۷. پرتابهای از نقطه ای بالاتر از سطح زمین پرتاب می شود. زاویه پرتاب متناظر با بیشترین برد کمتر از 45° است. آیا می توانید این مشاهده را توضیح بدید؟

۸. پرتابهای را در اوج مسیرش در نظر بگیرید. در این نقطه (الف) سرعت پرتابه، برحسب v و ϕ ، چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر و در کدام جهت است؟ (ج) جهت شتاب پرتابه چه ارتباطی با جهت سرعت آن دارد؟

۱. در این باره می توانید رجوع کنید به

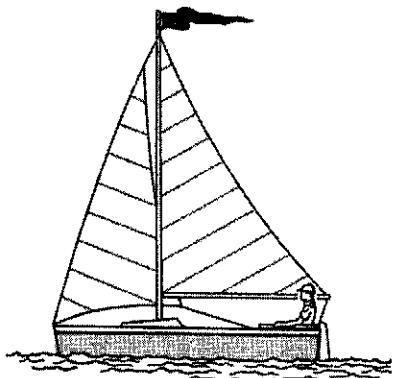
"A Puzzle in Elementary Ballistics," Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, p. 246.

۲۵. سطلی زیر باران است. باران به طور یکنواخت می‌بارد و در سطل جمع می‌شود. آیا اگر باد افقی ثابتی بوزد، آهنگ جمع شدن آب در سطل تغییر می‌کند؟

۲۶. شیشه جلوی اتوبوسی در صفحه قائم است. این اتوبوس زیر باران شدید با سرعت u_0 حرکت می‌کند. قطرات باران با سرعت حد u_0 در راستای قائم سقوط می‌کنند. این قطره‌ها با چه زاویه‌ای به شیشه جلو می‌خورند؟

۲۷. فرض کنید بارانی با قطره‌های منظم و عمود بر زمین می‌بارد و شما می‌خواهید در زیر این باران مسافت معینی را طوری طی کنید که حتی‌امکان کمتر خیس بشوید (یعنی قطره‌های کمتری به شما اصابت کند). آیا باید خیلی تند بروید؟ خیلی آهسته راه بروید؟ یا یک سرعت میانی مناسب انتخاب کنید؟^۱

۲۸. شکل ۲۱ چه ایرادی دارد؟ قایق دارد با نیروی باد حرکت می‌کند.



شکل ۲۱. پرسش ۲۸

۲۹. تبدیل گالیله‌ای سرعت (معادله ۴۳) از تجربیات روزمره چنان به ذهن ما آشناست که گاهی ادعا می‌شود که "صحبت آن بدیهی است و نیاز به اثبات ندارد." بسیاری از (با اصطلاح) ابطالهای نظریه نسبت هم در واقع مبتنی بر همین ادعایست. چگونه می‌شود این ادعا را رد کرد؟

مسئله‌ها

بخش ۱-۴ مکان، سرعت، و شتاب

۱. هوایی‌ای از شهر A ، 410 mi به طرف شرق پرواز می‌کند و در مدت 45 min به شهر B می‌رسد. سپس 820 mi به طرف جنوب پرواز می‌کند و در مدت $1h30\text{ min}$ به شهر C می‌رسد. (الف) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی مربوط به کل مسیر را به دست بیاورید.

۱. نگاه کنید به

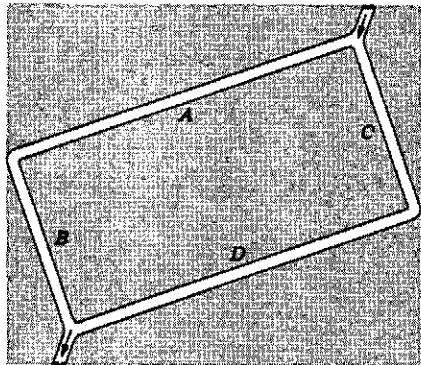
"An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", S. A. Stern, *American Journal of Physics*, September 1983, p. 815.

بیاوریم، کتابی که روی میزبان است، شبها تندتر از روزها حرکت می‌کند. این گفته در کدام چارچوب مرجع درست است؟

۱۸. هوانوردی در پایان یک شیرجه، روی قوسی از دایره حرکت می‌کند. گفته می‌شود که هوانورد، با شتاب $3g$ از حالت شیرجه خارج شده است. معنی این عبارت را توضیح دهید.

۱۹. آیا می‌شود شتاب یک پرتابه را بر حسب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی آن در هر نقطه از مسیر حرکت نشان داد؟ اگر چنین است، آیا این نمایش مزیتی هم دارد؟

۲۰. لوله‌ای به شکل مستطیلی با گوشه‌های گرد در صفحه قائم قرار دارد (شکل ۲۰). دو بلبرینگ را در گوشة بالای سمت راست، یکی را در مسیر AB و دیگری را در مسیر CD رها می‌کنیم. کدام یک زودتر به گوشة پایین سمت چپ می‌رسد؟



شکل ۲۰. پرسش ۲۰

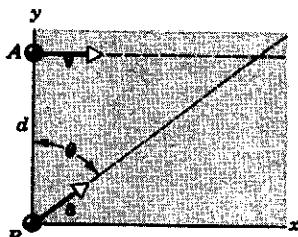
۲۱. آیا اگر شتاب جسمی در یک چارچوب مرجع خاص ثابت باشد، در چارچوبهای مرجع دیگر هم الزاماً ثابت است؟

۲۲. کودکی در قطاری که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. این کودک تویی را مستقیماً به بالا پرتاپ می‌کند. آیا توپ پشت سرش می‌افتد، جلویش می‌افتد، یا توی دستهایش؟ اگر در مدتی که توپ در هواست، قطار به طرف جلو شتاب بگیرد، یا روی ریل منحنی حرکت کند، توپ در برگشت چه وضعیتی خواهد داشت؟

۲۳. شخصی روی سکوی عقبی قطاری که سرعت ثابت دارد، ایستاده است. این شخص در حالی که روی ریل خم شده است، سکه‌ای را رها می‌کند. مسیر حرکت سکه را از دید این ناظرها بررسی کنید: (الف) خود شخص، (ب) شخصی که نزدیک ریل ایستاده است، و (ج) شخصی که در قطار دیگری است که روی ریل موازی با ریل قطار اول، و در جهت مخالف این قطار حرکت می‌کند.

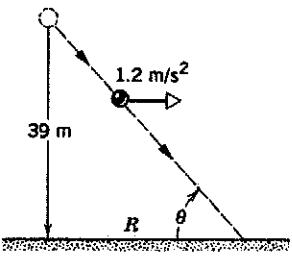
۲۴. آسانسوری با سرعت ثابت پایین می‌آید. شخصی در این آسانسور، سکه‌ای را رها می‌کند. شتاب سکه افتان (الف) از دید این شخص و (ب) از دید شخصی که نسبت به چاه آسانسور ساکن است چقدر است؟

(شکل ۲۲). ذره B , هنگامی که A از محور z می گذرد، با سرعت صفر و شتاب ثابت ($a = 40 \text{ m/s}^2$) از مبدأ شروع به حرکت می کند. زاویه θ بین a و جهت مثبت محور z چقدر باشد تا دو ذره با هم برخورد کنند؟



شکل ۲۲. مسئله ۹

۱۰. توپی از ارتفاع 39 m رها می شود. باد، افقی می وزد و به توب شتاب 20 m/s^2 را می دهد. (الف) نشان بدھید که توب روی یک خط راست حرکت می کند و مقادیر R و θ در شکل ۲۳ را پیدا کنید. (ب) چه مدتی طول می کشد تا توب به زمین برسد؟ (ج) توب با چه سرعتی به زمین می خورد؟



شکل ۲۳. مسئله ۱۰

بخش ۳-۴ حرکت پرتابی

۱۱. توپی روی میزی افقی به ارتفاع 23 ft می غلتند و از آن به زمین می افتد. نقطه برخورد توپ به زمین در فاصله افقی 11 ft از R میز است. (الف) توب چه مدتی در هوا بوده است؟ (ب) سرعت آن هنگام افتدان از میز چقدر بوده است؟

۱۲. الکترون هم، مثل همه انواع دیگر ماده، تحت تأثیر گرانش سقوط می کند. الکترونی با سرعت $10^7 \text{ m/s} \times 10^0 \text{ m/s}^2$ (یک دهم سرعت نور) به طور افقی پرتاب می شود. این الکترون، طی مسافت افقی 1 m ، چقدر سقوط می کند؟

۱۳. پیکانی با سرعت اولیه 10 m/s به طرف مرکز تخته هدف، نقطه P پرتاب می شود و 19 s بعد در نقطه Q که در امتداد قائم زیر P است فرو می رود؛ شکل ۲۴. (الف) فاصله PQ چقدر است؟ (ب) فاصله پرتاب کننده از هدف چقدر بوده است؟

(ب) بردار سرعت متوسط و (ج) متوسط اندازه سرعت را پیدا کنید.

۲. مکان ذره ای در صفحه xy با رابطه $\mathbf{r} = (2t^3 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^2)\mathbf{j}$ بیان می شود، که در آن t بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) \mathbf{r} (ب) v (ج) a را در $t = 2 \text{ s}$ حساب کنید.

۳. بالونی در مدت $3 \text{ h } 24 \text{ min}$ ، از نقطه رهاسدنش در سطح زمین، 87 km به شمال، 97 km به شرق، و 29 km به طرف بالا می رود. (الف) اندازه سرعت متوسط بالون و (ب) زاویه بردار سرعت متوسط با سطح افقی را پیدا کنید.

۴. سرعت ذره ای در صفحه xy از رابطه $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ به دست می آید، که در آن v بر حسب متر بر ثانیه و t بر حسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره را در $t = 3 \text{ s}$ پیدا کنید. (ب) شتاب در چه زمانی صفر می شود (اگر اصولاً صفر شود؟) (ج) سرعت در چه زمانی صفر می شود (اگر اصولاً صفر شود؟) (د) سرعت در چه زمانی 10 m/s می شود (اگر اصولاً چنین زمانی در کار باشد؟)

بخش ۴-۲ حرکت با شتاب ثابت

۵. در یک لامپ پرتو کاتدی، باریکه ای از الکترونها با سرعت $10^8 \text{ cm/s} \times 10^6 \text{ cm/s}$ به طور افقی وارد ناحیه ای به طول 23 cm می دارد که به الکترونها شتاب رو به پایین $1.2 \times 10^{14} \text{ cm/s}^2$ دارد. (الف) چه مدت طول می کشد تا الکترونها از ناحیه میان صفحات بگذرند؟ (ب) جایه جایی عمودی باریکه طی این مدت چقدر است؟ (ج) مؤلفه های افقی و عمودی سرعت باریکه، هنگام خروج از این ناحیه چقدر است؟

۶. یک قایق بادبانی پختوردی، با شتاب ثابت حاصل از باد، روی سطح دریاچه پیخزده ای حرکت می کند. سرعت آن در زمان معینی $42 \text{ s} - 8 \text{ s}$ (بر حسب m/s) است. سه ثانیه بعد، قایق به حالت سکون لحظه ای می رسد. شتاب قایق در این مدت چه بوده است؟

۷. ذره ای چنان حرکت می کند که مکان آن بر حسب زمان به صورت زیر تغییر می کند:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + tk$$

(الف) سرعت و (ب) شتاب آن را بر حسب زمان بنویسید. (ج) مسیر ذره به چه شکلی است؟

۸. ذره ای در $t = 0$ ، با سرعت اولیه $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \text{ m/s}$ ، از مبدأ حرکت می کند. شتاب این ذره ثابت و برابر با $\mathbf{a} = -1\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \text{ m/s}^2$ بر حسب m/s^2 است. (الف) ذره در چه زمانی به بیشترین مختصه x خود می رسد؟ (ب) سرعت ذره در این زمان چقدر است؟ (ج) در این زمان، ذره کجاست؟

۹. ذره A در راستای خط $d(30 \text{ m}) = y$ ، با سرعت ثابت

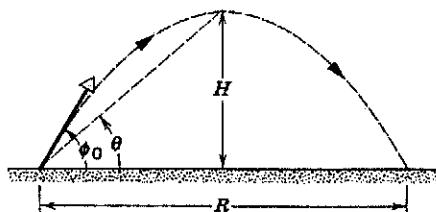
مسیرش به دیوار می‌خورد؟



شکل ۲۵. مسئله ۱۹

۲۰. نشان بدهید که ارتفاع نقطه اوج پرتابه، $y_{\max} = v_0 \sin \phi / 2g$ است.

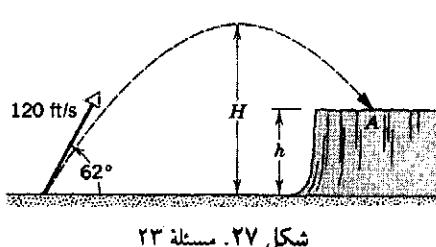
- (الف) پرتابهای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویه ϕ بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. نشان بدهید که نسبت ارتفاع نقطه اوج H به برد R برابر است با $H/R = 1/4 \tan \phi$.
 (ب) زاویه پرتاب چقدر باشد تا ارتفاع اوج با برد افقی برابر شود؟ (شکل ۲۶).



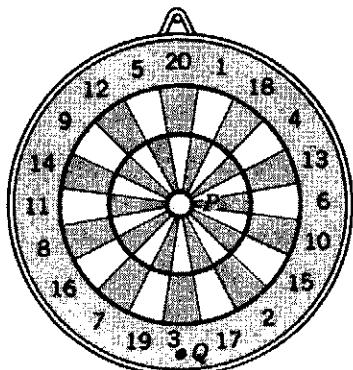
شکل ۲۶. مسئله‌های ۲۱ و ۲۲

۲۲. پرتابهای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویه θ بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. (الف) نشان بدهید که رابطه زاویه فراز نقطه اوج نسبت به نقطه پرتاب (θ) در شکل ۲۶)، با ϕ چنین به صورت $\tan \theta = 1/2 \tan \phi$ است. (ب) رابطه‌ای $= 45^\circ$ را بازیاری کنید.

۲۳. سنگی را از سطح زمین با سرعت اولیه 120 ft/s درجهت 62° بالاتر از سطح افق به طرف صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌کنند (شکل ۲۷). این سنگ 5.5 s پس از پرتاب در نقطه A به زمین می‌خورد. (الف) ارتفاع صخره (h)، (ب) سرعت سنگ درست پیش از برخورد در نقطه A ، و (ج) ارتفاع اوج سنگ نسبت به زمین (H) را پیدا کنید.



شکل ۲۷. مسئله ۲۳



شکل ۲۴. مسئله ۱۳

۱۴. تفنگی به طور افقی به طرف هدفی به فاصله 130 ft نشانه رفته است. گلوله 75 in زیر هدف می‌خورد. (الف) زمان پرواز گلوله چقدر بوده است؟ (ب) سرعت خروج گلوله چقدر بوده است؟

۱۵. گلوله‌ای با سرعت 250 m/s از سطح زمین شلیک می‌شود. (الف) گلوله چه مدتی در هوا می‌ماند؟ (ب) فاصله افقی نقطه برخورد گلوله به زمین از نقطه شلیک چقدر است؟ (ج) مؤلفه قائم سرعت گلوله، هنگام برخورد با زمین، چقدر است؟

۱۶. یک بازیکن بیسیال، توپ را با سرعت 92 mi/h به طور افقی پرتاب می‌کند. فاصله پرتاب‌کننده تا بازیکنی که چوب بیسیال را در دست دارد، 60 ft است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ 30 ft افقی اول مسیر را بپیماید؟ چقدر طول می‌کشد تا توپ 30 ft دوم را بپیماید؟ (ب) در طی 30 ft افقی اول، توپ تحت تأثیر گرانش چقدر سقوط می‌کند؟ (ج) در 30 ft دوم چقدر؟ (د) چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟ مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.

۱۷. دریک داستان پلیسی، جسدی به فاصله 15 ft از دیوار ساختمانی، و زیر پنجره‌ای باز به ارتفاع 80 ft پیدا می‌شود. حدس می‌زیند که مرگ تصادفی بوده است یا خیر؟ چرا؟

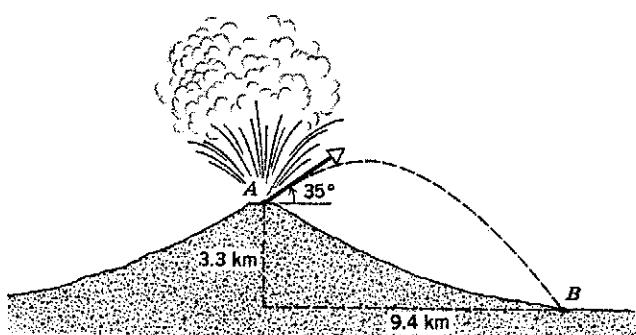
۱۸. گلوله‌ای را با سرعت اولیه 15 m/s و با زاویه 20° زیر سطح افقی، از بالای صخره‌ای پرتاب می‌کنیم. (الف) جایه‌جایی افقی و (ب) جایه‌جایی عمودی گلوله 2.3 s بعد از پرتاب چقدر است؟

۱۹. توپ کوچکی را با سرعت 25.3 m/s با زاویه 42° بالاتر از سطح افق، مستقیماً به طرف دیواری پرتاب می‌کنیم (شکل ۲۵). دیوار 21.8 m از نقطه پرتاب توپ فاصله دارد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به دیوار برخورد کند؟ (ب) توپ چقدر بالاتر از نقطه پرتاب به دیوار می‌خورد؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت توپ در لحظه برخورد به دیوار چقدر است؟ (د) آیا توپ پس از گذشتن از نقطه اوج

برای اینکه قابل زدن باشد، باید حداقل 30 ft و حداقل 360 ft را نقطه پرتاب پایین تر باشد.

۳۲. طبق معادله ۲۴، برد پرتابهای نه تنها به π و ϕ ، بلکه به مقدار شتاب گرانشی g هم بستگی دارد. این شتاب، در نقاط مختلف زمین فرق می کند. در سال ۱۹۳۶، جسی اونس در بازیهای المپیک برلن ($1956\text{ m/s}^2 = g$) رکورد جهانی 9.8128 m/s^2 را برای پرش طول بجا گذاشت. اگر او با همان مقدار π و ϕ ، در المپیک ۱۹۵۶ ملبورن ($9.7999\text{ m/s}^2 = g$) شرکت می کرد، رکوردهش چقدر تغییر می کرد؟

۳۳. هنگام فوران آتشفشار، ممکن است قطعات سنگ جامد هم از دهانه آتشفشار به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابهای را پاره های آتشفشاری می نامند. شکل ۲۹ مقطع کوه فوجی (در ژاپن) را نشان می دهد. (الف) پاره ای که با زاویه 35° نسبت به سطح افقی از دهانه خارج می شود سرعتش چقدر باشد تا در نقطه B در پای کوه A آتشفشار به زمین برسد؟ (ب) زمان حرکت این پاره در هوا چقدر است؟



شکل ۲۹. مستانه ۲۹

۳۴. یک بازیکن بیسیال می خواهد توپ را به نقطه ای در فاصله 127 ft پرتاب کند. بیشترین سرعتی که او می تواند به توپ بدهد 85 mi/h است. (الف) اگر توپ را به طور افقی و از بالاتر از سطح زمین پرتاب کند، چه بر سر توپ می آید؟ (ب) توپ را باید با چه زاویه ای به طرف بالا پرتاب کند تا بازیکن دیگری که در نقطه فروود توپ ایستاده است بتواند آن را بگیرد؟ فرض کنید گیرنده توپ هم آن را 3 ft بالاتر از سطح زمین می گیرد. (ج) مدت پرواز توپ در این مورد چقدر است؟

۳۵. بازیکنی توپ بسکتبال را با زاویه 55° بالاتر از سطح افقی به طرف حلقه پرتاب می کند؛ شکل ۳۰. سرعت اولیه توپ چقدر باشد تا توپ مستقیماً وارد حلقه شود؟ قطر حلقه 18 in است. اطلاعات دیگر را از شکل ۳۰ بخوانید.

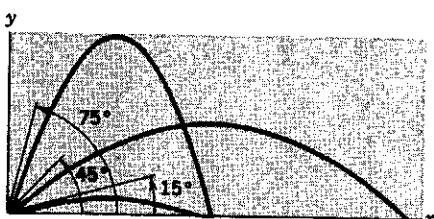
۱. وجوع کنید به

"The Earth's Gravity", Weikko A. Heiskanen, Scientific American, September 1955, p. 164.

۲۴. در المپیک ۱۹۶۸ مکزیکو سیتی، باب بیمون رکورد 8.90 m را برای پرش طول بجا گذاشت. فرض کنید سرعت اولیه او در لحظه آغاز پرش 9.50 m/s (تقرباً برابر با سرعت دونده های سرعت) بوده باشد، اختلاف این رکورد با رکوردي که در همین شرایط و در غیاب مقاومت هوا بدست می آمد چقدر است؟ مقدار g در مکزیکو سیتی 9.78 m/s^2 است.

۲۵. در مثال ۳، (الف) اندازه سرعت بسته در موقع برخورد با هدف و (ب) زاویه برخورد نسبت به راستای قائم چقدر است؟ (ج) چرا زاویه برخورد با زاویه دیگر هدف از نقطه پرتاب برابر نیست؟

۲۶. (الف) گالیله در کتاب دو علم جدید می تویسید که "برای زاویه های پرتابی که به یک اندازه از 45° بیشتر یا کمتر باشند، برد یکسان است" این گفته را اثبات کنید (شکل ۲۸). (ب) دو زاویه پرتابی را پیدا کنید که بردشان بازای سرعت اولیه 30 m/s برابر با 20° باشد.



شکل ۲۸. مستانه ۲۸

۲۷. تردستی می تواند پنج توپ را در حرکت نگه دارد. او توپها را پشت سر هم تا ارتفاع 30 m به هوا پرتاب می کند. (الف) مدت بین دو پرتاب متالی چقدر است؟ (ب) وقتی که یکی از توپها بدست تردست می رسد، بقیه توپها کجاها هستند؟ (از زمان لازم برای اینکه تردست توپ را از یک دستش بدست دیگر بدهد صرف نظر کنید).

۲۸. گلوله های تفنگی با سرعت 150 ft/s از لوله خارج می شوند. هدف در فاصله 150 ft از تفنگ است. چقدر بالاتر از هدف را باید نشانه گرفت تا گلوله به هدف بخورد؟

۲۹. توپی از بالاترین پله پلکانی قل می خورد و با سرعت افقی 5 ft/s از لبه آن رها می شود. ارتفاع هر پله 8 in است. اولین پله ای که توپ روی آن می افتد پله چندم است؟ ۳۰. توپی را از زمین به هوا پرتاب می کنیم. سرعت توپ در ارتفاع 1 m به صورت $v = 7.61 + 1.6t\text{ m/s}$ است (t محور افقی است و y محور قائم به طرف بالا). (الف) ارتفاع اوج توپ چقدر است؟ (ب) کل مسافت افقی ای که توپ می بیند چقدر است؟ (ج) (اندازه و جهت) سرعت توپ را در لحظه پیش از برخورد به زمین بدست بیاورید.

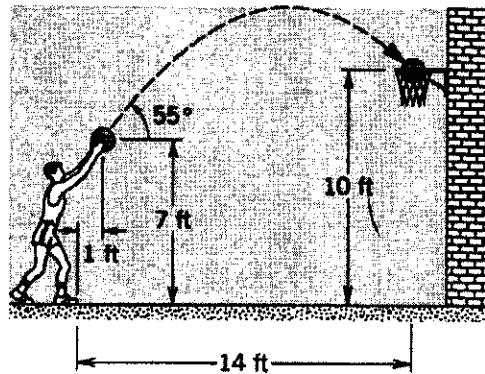
۳۱. منطقه پرتاب توپ در زمین بیسیال، 1 ft بالاتر از زمین بازی است. آیا پرتاب کننده می تواند توپی سریع را به طور افقی با سرعت 92 mi/h پرتاب کند. چنانکه توپ در منطقه ضربه قابل زدن باشد؟ منطقه ضربه 65 ft با منطقه پرتاب فاصله دارد، فرض کنید که توپ،

۳۸. بمب‌افکنی با زاویه 56° نسبت به راستای قائم شیرجه می‌رود و بمبی را در ارتفاع 730 m رها می‌کند. بمب 10 s بعد به زمین می‌رسد، اما به هدف برنمی‌خورد. (الف) سرعت بمب‌افکن، موقع رها کردن بمب، چقدر بوده است؟ (ب) بمب، در طی پروازش، چه مسافت افقی ای پیموده است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت بمب، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر بوده‌اند؟ (د) اندازه سرعت، و زاویه برخورد بمب نسبت به محور قائم، در زمان برخورد بمب با زمین چقدر بوده است؟

۳۹. طول هواییای B-۵۲ (شکل ۳۲) 49 m است. این هواییما دارد با سرعت 820 km/h (یعنی 510 mi/h) بر فراز منطقه‌ای که قرار است بمباران شود پرواز می‌کند. فاصله حفره‌هایی که بمبها روی زمین ایجاد می‌کنند از یکدیگر چقدر خواهد بود؟ هر کمیت دیگری را که لازم دارد مستقیماً روی شکل اندازه‌گیری کنید، فرض کنید باد نمی‌وزد و مقاومت هوا را هم تأثیر نماید. مقاومت هوا چه تأثیری بر جواب شما خواهد داشت؟

۴۰. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیه 44 ft/s با زاویه 42° بالاتر از سطح افقی شوت می‌کند. در همان لحظه بازیکن دیگری که به فاصله 65 yd از قبلی در جهت حرکت افقی توپ ایستاده است شروع به دویدن می‌کند تا توپ را بگیرد. سرعت متوسط این بازیکن چقدر باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟ از مقاومت هوا چشمیوشاً کنید.

۴۱. (الف) تنیس بازی در یک مسابقه، چنان "سرو می‌زند" که به توپ سرعت 23 m/s می‌دهد (این مقدار توسط رادار ثبت می‌شود). اگر توپ 37 m بالاتر از سطح زمین و در راستای افق از راکت جدا شده باشد، در چه فاصله‌ای از بالای تور عبور می‌کند؟ تور در فاصله 12 m از محل سرویس است و 90° ارتفاع دارد. (ب) فرض کنید تنیس باز به همان ترتیب سرو بزند، اما توپ با زاویه 50° پایین‌تر از سطح افقی از راکت جدا شود. آیا این بار هم توپ از تور می‌گذرد؟ ۴۲. یک بازیکن بیسیبال، توپ را با چوب بیسیبال در ارتفاع 4 ft از سطح زمین چنان می‌زند که زاویه پرتاب توپ 45° و برد افقی آن

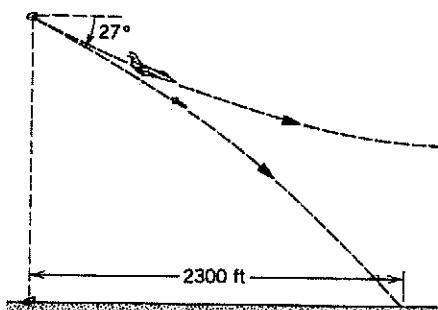


شکل ۳۵. مسئله ۳۵

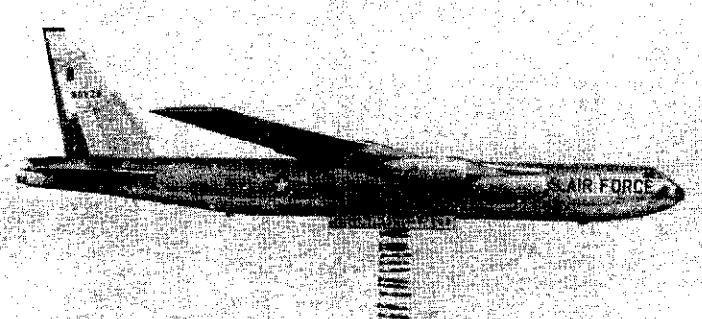
۴۳. فوتبالیستی توپ را چنان شوت می‌کند که زمان پرواز آن یعنی 4.5 s و برد آن 50.8 m (یعنی 50 yd) است. توپ در ارتفاع 5 m (یعنی 5 ft) از سطح زمین، از پای بازیکن جدا می‌شود.

(اندازه و جهت) سرعت اولیه توپ چقدر بوده است؟

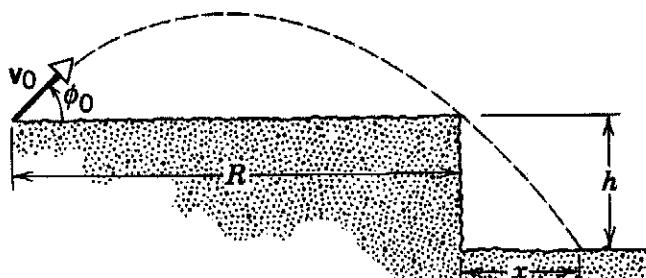
۴۴. هواییما با سرعت 180 mi/h و با زاویه 27° پایین‌تر از افق در حال شیرجه است که یک "گولزنک" را در از آن رها می‌شود. فاصله افقی میان نقطه رها شدن گولزنک و نقطه برخورد آن با زمین 2300 ft است. گولزنک (الف) چه مدتی در هوا بوده؟ و (ب) در چه ارتفاعی از هواییما رها شده است؟ (شکل ۳۶)



شکل ۳۶. مسئله ۳۶



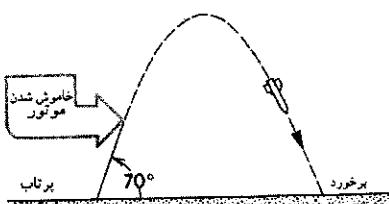
شکل ۳۷. مسئله ۳۷



شکل ۳۵. مسئله ۴۶

۴۷. متصلی را در از زمین پرتابهای را "مشاهده می کند" که دارد نزدیک می شود. در یک لحظه معین، اطلاعات دریافتی از حرکت پرتابه این است: پرتابه در نقطه اوج است و با سرعت v به طور افقی حرکت می کند؛ فاصله مستقیم پرتابه از محل L است؛ پرتابه تحت زاویه θ ، بالاتر از سطح افقی، دیده می شود. (الف) فاصله D بین ناظر و نقطه برخورد پرتابه به زمین چقدر است؟ v را بر حسب مقادیر مشاهده شده v , L , θ , D ، و مقدار معلوم g به دست بیاورید. فرض کنید زمین مسطح است و ناظر در صفحه مسیر پرتابه است. (ب) آیا پرتابه از ناظر می گذرد یا جلوی او به زمین می خورد؟

۴۸. موشکی از حالت سکون، با شتاب 46°m/s^2 و روی خط راستی با زاویه 70° نسبت به سطح افقی، شروع به حرکت می کند. مدت پرواز تحت تأثیر نیروی پیشان، 5°s است. پس از این مدت، موتور خاموش می شود و موشک در مسیری سهموی به زمین بر می گردد؛ شکل ۳۶. (الف) زمان پرواز، از لحظه پرتاب تا نقطه برخورد، چقدر است؟ (ب) ارتفاع اوج موشک چقدر است؟ (ج) فاصله نقطه پرتاب از نقطه برخورد چقدر است؟ از تغییر v و با ارتفاع صرف نظر کنید.



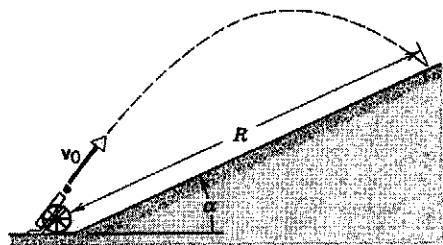
شکل ۳۶. مسئله ۴۸

۴۹. سلاح ضد تانکی روی لبه سطحی است که 6°m بالاتر از دشت اطراف است؛ شکل ۳۷. خدمه سلاح، یکی از تانکهای دشمن را در دشت در فاصله افقی 20 km از سلاح می بیند که ساکن است. در همین لحظه، خدمه تانک متوجه سلاح ضد تانک می شوند و با شتاب 90°m/s^2 شروع به حرکت در جهت مخالف می کنند و از سلاح دور می شوند. سلاح ضد تانک می تواند گلوله ای با سرعت 40 m/s و با زاویه 10° بالاتر از سطح افقی شلیک کند. خدمه سلاح باید چه

۳۵ ft می شود. توپ از زمین خارج می شود و به نزدیکی به ارتفاع $24 ft$ می رسد که $320 ft$ از نقطه پرتاب فاصله دارد. آیا توپ از بالای نزدیکی می گذرد؟ اگر می گذرد، در چه فاصله ای؟

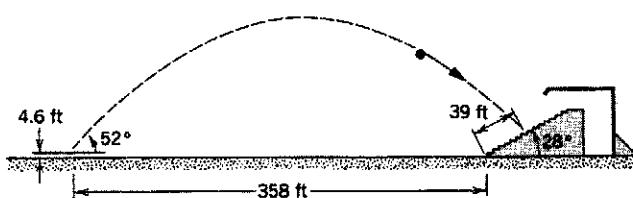
۴۳. بازیگنی می تواند توپ فوتbal را با سرعت 25 m/s شوت کند. زاویه شوت نسبت به سطح زمین در چه گستره ای باشد تا توپ درست از زیر تیر افقی وارد دروازه شود؟ دروازه 50 m دورتر است و ارتفاع تیر افقی آن از سطح زمین 344 m است.

۴۴. توپی گلوله هایش را با سرعت v پرتاب می کند. این توپ در پای تپه ای به زاویه شیب α قرار دارد؛ شکل ۳۳. زاویه پرتاب گلوله نسبت به سطح افقی چقدر باشد تا برد گلوله ها روی تپه بیشینه شود؟



شکل ۳۳. مسئله ۴۴

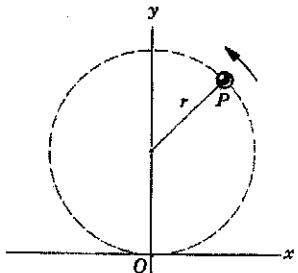
۴۵. در یک بازی بیسبال، بازیگنی توپ را با چوب خود در ارتفاع 46°ft از سطح زمین می زند. زاویه پرتاب توپ نسبت به سطح افقی 52° است. توپ در جایگاه تماشاگران، و به فاصله 39°ft از پایین آن، فرود می آید؛ شکل ۳۴. شیب جایگاه 28° است و پایین ترین نیمکتهای آن 358 ft از محل ضربه فاصله دارند. توپ با چه سرعتی از چوب بازیگن جدا شده است؟ (مقاومت هوا ناچیز است).



شکل ۳۴. مسئله ۴۵

۴۶. پرتابهایی را از فاصله R از لبه صخره ای به ارتفاع h چنان پرتاب می کنیم که در نقطه ای به فاصله افقی x از بازی صخره فرود بیایند؛ شکل ۳۵. ϕ و v را چنان تعیین کنید که x کمینه شود. فرض کنید می توانیم v را از صفر تا مقدار بیشینه متنه v_{\max} تغییر بدیم و ϕ را هم به دلخواه تنظیم کنیم. شرط مسئله این است که پرتابه باید تنها یک بار به زمین بخورد.

می‌کند و هر 20 s یک دور می‌زند؛ شکل ۳۸. ذره در $t = 0$ از O می‌گذرد. (الف) اندازه و جهت بردار مکان ذره در زمانهای 5 s ، 7 s ، و 10 s (نسبت به O)؛ (ب) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی در بازه $0\text{ s} \leq t \leq 5\text{ s}$ از پایان ثانیه پنجم تا پایان ثانیه دهم؛ (ج) بردار سرعت متوسط در این بازه؛ (د) بردار سرعت لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه؛ و (ه) بردار شتاب لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه را پیدا کنید. زاویه‌ها را در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x بستجید.

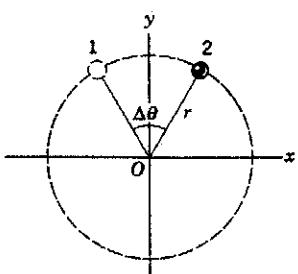


شکل ۳۸. مسئله ۵۸

۵۹. ذره‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات O ، با سرعت v به طور یکنواخت حرکت می‌کند. (الف) نشان بدید که زمان Δt لازم برای جابه‌جایی زاویه‌ای ذره به اندازه $\Delta\theta$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} \frac{\Delta\theta}{360^\circ}$$

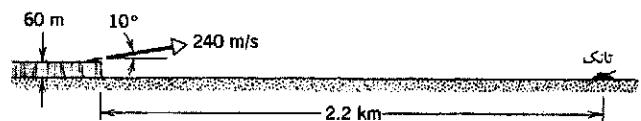
که در آن $\Delta\theta$ بر حسب درجه و r شعاع دایره است. (ب) در شکل ۳۹، مؤلفه‌های x و y سرعت در نقاط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. نشان بدید که برای دو نقطه متقاضی نسبت به محور y ، و به از 90° ، $\Delta\theta = 90^\circ$ خواهیم داشت. $\bar{a}_x = -v^2/r$ و $\bar{a}_y = -v^2/r$. (ج) نشان بدید که اگر $\Delta\theta = 30^\circ$ باشد، $\bar{a}_x = -v^2/r$ و $\bar{a}_y = -v^2/r$ است. (د) نشان بدید که در حد $\Delta\theta \rightarrow 0$ ، $\bar{a}_x \rightarrow -v^2/r$ و $\bar{a}_y \rightarrow -v^2/r$ است، و اینکه تقارن دورانی ایجاد می‌کند که این نتیجه برای همه نقاط روی دایره درست باشد.



شکل ۳۹. مسئله ۵۹

۶۰. گودکی سنگی را که به نخی بسته است روی دایره‌ای افقی به شعاع 4 m را در ارتفاع 1.9 m از سطح زمین می‌گرداند. نخ پاره می‌شود و سنگ به طور افقی پرتاب می‌شود و 11 m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

مدتی بعد از شروع حرکت تانک شلیک کنند تا گلوله به تانک بخورد؟



شکل ۳۷. مسئله ۴۹

۵۰. بازیکنی می‌تواند توپ بیسیال را حداقل تا فاصله 60 m پرتاب کند. همین بازیکن توپ را حداقل تا چه ارتفاعی می‌تواند پرتاب کند؟ فرض کنید که توپ در هر دو حالت، از ارتفاع 1.6 m را با سرعت اولیه یکسان رها می‌شود.

بخش ۴-۵ حرکت دایره‌ای یکنواخت

۵۱. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون روی مداری دایره‌ای به شعاع $1.0 \times 10^{-11}\text{ m}$ پرتاب می‌شود. (الف) با سرعت $2.9 \times 10^5\text{ m/s}$ و با دور $2.18 \times 10^6\text{ s}$ به دور پیوelon می‌گردد. شتاب الکترون در این مدل چقدر است؟

۵۲. فضانوردی در یک دستگاه گریز از مرکز (سانتریفوژ) به شعاع 2.4 m چرخانده می‌شود. (الف) به ازای چه سرعتی، شتاب فضانورد 8.4 g می‌شود؟ (ب) این سرعت متناظر با چند دور بر دقیقه است؟

۵۳. ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به ارتفاع 640 km از سطح زمین حرکت می‌کند. زمان یک دور چرخش ماهواره 98 min است. (الف) سرعت ماهواره چقدر است؟ (ب) شتاب سقوط آزاد در مدار ماهواره چقدر است؟

۵۴. شاعع چرخ و فلکی 15 m است. این چرخ و فلک، هر دقیقه پنج بار به دور محور افقی اش می‌گردد. (الف) (اندازه و جهت) شتاب مسافران را در بالاترین نقطه چرخ و فلک پیدا کنید. (ب) شتاب مسافران را در پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک پیدا کنید.

۵۵. پنکه‌ای در هر دقیقه 1200 دور می‌زند. نقطه‌ای در بالای پره را در نظر بگیرید که 15 m از محور فاصله دارد. (الف) در هر دور، این نقطه چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) سرعت این نقطه چقدر است؟ (ج) شتاب این نقطه چقدر است؟

۵۶. قطار سریع‌السیر TGV آتلانتیک، در مسیر بین پاریس و لمان در فرانسه کار می‌کند. بیشترین سرعت این قطار 310 km/h است. (الف) اگر قرار باشد این قطار با همین سرعت از پیچی بگذرد، و اگر شتاب مجاز مسافران 5.0 g باشد، شاعع پیچ حدافل چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شاعع پیچی 9.4 km/h باشد، سرعت قطار در آن پیچ حداقل چقدر می‌تواند باشد؟

۵۷. فرض بر این است که بعضی از ستاره‌های نوترونی (ستاره‌های فوق العاده چگال) با آهنگ حدود 1 rev/s به دور خود می‌چرخدند. اگر شاعع چنین ستاره‌ای 20 km باشد (که نوعاً چنین است)، (الف) سرعت نقاط واقع بر استوای این ستاره چقدر است؟ (ب) شتاب مرکزگرای این نقاط چقدر است؟

۵۸. ذره P با سرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع 3 m حرکت

بخش ۶-۴ حرکت نسبی

۶۷. شخصی پله برقی ساکنی به طول ۱۵m را در ۹۰° می بیماید. اگر شخصی روی همین پله برقی باشد و پله برقی حرکت کند، همان مسیر در ۶۰° طی می شود. اگر شخصی از پله برقی بالا برود و پله هم در حرکت باشد، بیمودن این مسیر چقدر طول می کشد؟ آیا جواب به طول پله برقی بستگی دارد؟

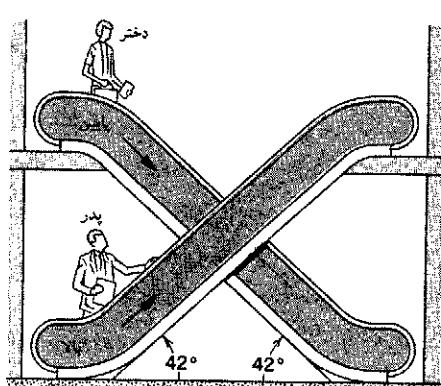
۶۸. پایانه فرودگاه زنون در سویس، یک "پیاده روی متحرک" دارد که حرکت مسافر را در یک راهرو طویل سریع می کند. بیت از این پیاده رو استفاده نمی کند و راهرو را در ۱۵۰s می بیماید. پل فقط روی پیاده رو می ایستد و راهرو را در ۷۰s می بیماید. مری ضمن استفاده از پیاده رو، روی آن راه هم می رود. با فرض اینکه سرعت راه رفتن مری و پیشتر یکسان باشد، چقدر طول می کشد تا مری راهرو را ببیناید؟

۶۹. زمان برنامه ریزی شده یک پرواز بین قاره‌های به مسافت ۲۷۰۰mi در جهت غرب ۵۰min بیشتر است تا در جهت شرق. سرعت هواییما نسبت به هوا ۶۰۰mi/h است. در تعیین این برنامه، چه فرضی درباره سرعت وزش باد شده است؟ باد را شرقی غربی در نظر بگیرید.

۷۰. برف در راستای قائم با سرعت ثابت ۷.۸m/s می بارد. راننده‌ای اتومبیل اش را روی جاده‌ای مسطح با سرعت ۵۵km/h می راند. از دید راننده، دانه‌های برف (الف) با چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، و (ب) با چه سرعتی سقوط می کنند؟

۷۱. قطاری با سرعت ۲۸m/s (نسبت به زمین) به طرف جنوب در حرکت است. در مسیر باران می بارد و باد باران را به طرف جنوب کج می کند. مسیر قطره‌های باران، از دید ناظر ساکن بر زمین، با راستای قائم زاویه ۶۴° می سازد. اما ناظر سوار بر قطار، بارش باران را دقیقاً عمود به سطح زمین می بیند. سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

۷۲. در یک فروشگاه بزرگ، شخصی روی پله برقی ای با زاویه شیب ۴۲° که با سرعت ۷۵m/s به بالا می رود ایستاده است. این شخص از کنار دخترش می گذرد که روی پله برقی مشابهی ایستاده است و دارد از طبقه بالا به پایین می آید؛ شکل ۴۱. بردار سرعت شخص را نسبت به دخترش بینا کنید.



شکل ۴۱. مسئله ۷۲

۶۱. (الف) با استفاده از داده‌های پیوست ج، نسبت شتابهای مرکزگرای زمین و زحل را، در گردش به دور خورشید، به دست بیاورید. فرض کنید که هر دو سیاره با سرعت ثابت در مدار دایره‌ای به دور خورشید می گردند. (ب) نسبت فاصله این دو سیاره از خورشید چقدر است؟ (ج) جوابهای دو قسمت (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید و رابطه ساده‌ای بین شتاب مرکزگرا و فاصله از خورشید پیشنهاد کنید. فرضیه خودتان را با محاسبه همین نسبت برای دو سیاره دیگر بیازماید.

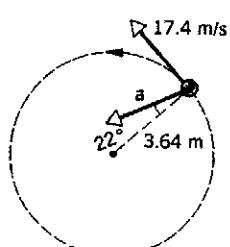
۶۲. (الف) شتاب مرکزگرای اجسام واقع بر استوای زمین (به علت چرخش زمین به دور خودش) چقدر است؟ (ب) دوره تناوب چرخش زمین باید چقدر می بود تا شتاب مرکزگرای اجسام روی استوا $9.8m/s^2$ باشد؟

۶۳. شتاب ناشی از چرخش زمین شخصی که در عرض جغرافیایی 40° است، چقدر است؟

۶۴. فرض کنید شخصی با ۱۱.۶m/s قدر به مدت ۲۴h در عرض جغرافیایی 50° صاف ایستاده باشد. (الف) در این مدت، مسافتی که "نوك" سر او می بیناید چقدر بیشتر از مسافتی است که نوك پایش می بیناید؟ (ب) شتاب نوك سر او چقدر بزرگتر از شتاب نوك پاهایش است؟ فقط آثار ناشی از چرخش زمین را در نظر بگیرید.

بخش ۵-۴ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای

۶۵. ذره‌ای در مسیر دایره‌ای به شعاع ۳۶۴m حرکت می کند. در یک لحظه معین، سرعت ذره $17.4m/s$ ، و شتاب آن در جهت 22° است؛ شکل ۴۰. (الف) آهنگ افزایش اندازه سرعت ذره چقدر است؟ (ب) اندازه شتاب ذره چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئله ۶۵

۶۶. ذره‌ای طبق معادلات

$$x = R \sin \omega t + \omega R t$$

$$y = R \cos \omega t + R$$

در صفحه حرکت می کند؟ ω و R ثابت‌اند. مسیر حرکت این ذره را چرخ زاد می نامند. این منحنی، مسیر نقطه‌ای است بر محیط چرخی که بدون لغزش در راستای محور x می غلتند. (الف) مسیر را رسم کنید. (ب) سرعت و شتاب لحظه‌ای ذره را، در حالتی که در بیشترین و کمترین مقدار y است، به دست بیاورید.

۷۶. آسانسوری با شتاب 4 m/s^2 بالا می‌رود. در لحظه‌ای که سرعت آن 8 m/s به طرف بالاست، پیچ لقی از سقف آسانسور رها می‌شود. بلندی آنکه آسانسور 9 ft است. (الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور و (ب) مسافت سقوط پیچ از دید ناظر زمین چقدر است؟

۷۷. هواپیمای سبکی با سرعت 480 km/h نسبت به هوا پرواز می‌کند. مقصد خلبان نقطه‌ای در فاصله 810 km به طرف شمال است. خلبان متوجه می‌شود که هواپیما را باید به اندازه 21° از شمال به طرف شرق هدایت کند تا به مقصد برسد. هواپیما در مدت 9 h به مقصد می‌رسد. اندازه و جهت سرعت باد را پیدا کنید.

۷۸. پلیس ایالت نیوهمپشیر برای پاییدن سرعت اتومبیل‌ها در بزرگراه‌ها، از هواپیما استفاده می‌کند. فرض کنید سرعت یکی از این هواپیماها، در هوای ساکن، 135 mi/h باشد. هواپیما مستقیماً به طرف شمال پرواز می‌کند تا همواره بر فراز یک بزرگراه شمالی-جنوبی باشد. یک ناظر زمینی با رادیو به خلبان خبر می‌دهد که بادی با سرعت 70 mi/h جریان دارد، اما فراموش می‌کند جهت باد را بگوید. خلبان مشاهده می‌کند که با وجود باد، باز هم هواپیماش می‌تواند 135 mi بر فراز بزرگراه را طی 1 h بپیماید. یعنی اندازه سرعت هواپیما نسبت به زمین، همان است که در هوای آرام بود. (الف) باد در چه جهتی می‌وزد؟ (ب) سر هواپیما در چه جهتی است، یعنی زاویه بین محور هواپیما و بزرگراه چقدر است؟

۷۹. شخصی می‌تواند قایقی را با سرعت 40 mi/h در آب ساکن براند. (الف) اگر او بخواهد از عرض رودخانه‌ای بگذرد که سرعت جریان آن 2 mi/h است، قایقش را باید در چه جهتی هدایت کند تا درست به نقطه مقابل برسد؟ (ب) اگر عرض رودخانه 4 mi باشد، چقدر طول می‌کشد تا از رودخانه بگذرد؟ (ج) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای 2 mi پایین‌تر برود و بگردد؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای 2 mi بالاتر برود و بگردد؟ (ه) قایق را در چه جهتی براند تا در کوتاه‌ترین زمان ممکن از رودخانه بگذرد؟ این زمان چقدر است؟

۸۰. واگن چوبی روی ریل مستقیمی با سرعت v_1 حرکت می‌کند. راهنمی با قنگ پرقدرتی به آن شلیک می‌کند سرعت اولیه گلوله v_2 است. گلوله از هر دو دیواره جانبی واگن می‌گذرد و دو سوراخ ایجاد می‌کند. این سوراخها، از دید ناظر واگن، درست روی روی هم‌اند. گلوله در چه جهتی، نسبت به واگن شلیک شده است؟ فرض کنید که گلوله هنگام ورود به واگن منحرف نشده، اما سرعتش به اندازه 20% کم شده است. فرض کنید $v_1 = 85 \text{ km/h}$ و $v_2 = 65 \text{ m/s}$. (تعجب می‌کنید که برای حل مسئله لازم نیست که عرض واگن معلوم باشد؟)

۸۱. مردی می‌خواهد با قایق از رویی به عرض 50 m بگذرد. سرعت حاصل از پاروزنی او (نسبت به آب) 3 m/s است. سرعت جریان آب 2 km/h و سرعت پیاده‌روی مرد در ساحل 5 km/h است. (الف) مسیری را پیدا کنید که این شخص بتواند از طریق آن در

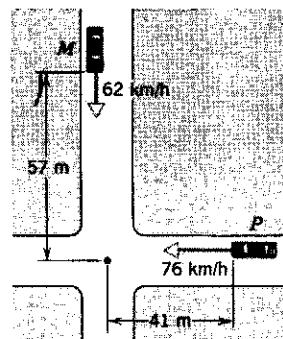
۷۳. خلبانی باید در جهت شرق از A به B برود. بعد در جهت غرب به A برگردد. سرعت هواپیما نسبت به هوا v و سرعت هوا نسبت به زمین u است. فاصله A تا B برابر با l است، و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت می‌ماند. (الف) نشان بدهید که اگر $v = u$ باشد (هوای ساکن)، زمان رفت و برگشت $\frac{l}{v} + \frac{l}{u}$ است. (ب) فرض کنید که سرعت باد در جهت شرق (یا غرب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_E = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

(ج) فرض کنید که سرعت باد در جهت شمال (یا جنوب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/u^2}}$$

(د) در قسمتهای (ب) و (ج) باید فرض کرد که $v < u$ است. چرا؟ ۷۴. دو بزرگراه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ شکل ۴۲. در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده است، اتومبیل پلیس (P) در فاصله 41 m از تقاطع است و با سرعت 76 km/h حرکت می‌کند. اتومبیل سواری (M) از تقاطع فاصله دارد و با سرعت 57 m/h در حرکت است. سرعت (اندازه و زاویه) بردار سرعت نسبت به خط دید اتومبیل M را نسبت به اتومبیل پلیس پیدا کنید.



شکل ۴۲. مسئله ۷۴

۷۵. هلی‌کوپتری بر فراز یک دشت مسطح، روی خط راست پرواز می‌کند. سرعت هلی‌کوپتر ثابت، و برابر با 24 m/s است. ارتفاع پرواز هم ثابت، و برابر با 5 m است، بسته‌ای با سرعت افقی 12 m/s نسبت به هلی‌کوپتر، و در خلاف جهت حرکت هلی‌کوپتر، از آن رها می‌شود. (الف) سرعت اولیه بسته نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) فاصله افقی بین هلی‌کوپتر و بسته، در لحظه برخورد بسته به زمین چقدر است؟ (ج) زاویه بردار سرعت بسته با زمین، درست پیش از برخورد، از دید ناظر زمین چقدر است؟ (د) این زاویه از دید خلبان هلی‌کوپتر چقدر است؟

بی آنکه نیاز به تغییر بقیه مقادیر باشد. برنامه را با مسئله زیر آزمایش کنید.
نتایج کامپیوتی را با نتایج حاصل از عبارتهای جبری مناسب مقایسه کنید.

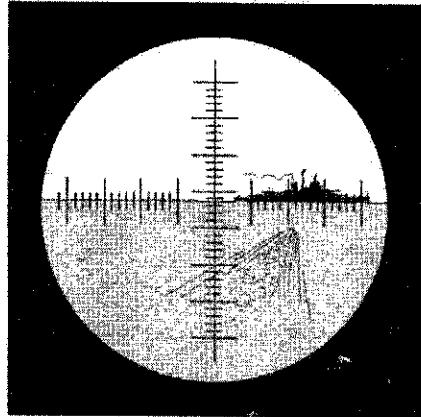
پرتابه‌ای با سرعت $v = 50 \text{ m/s}$ و با زاویه 25° بالاتر از افق، از زمین شلیک می‌شود. (الف) $x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)$ را در $t = 0$ تا 10s از 0° تا 90° به دست بیاورید. (ب) دو زمان متوالی را که لحظه رسیدن پرتابه به نقطه اوج بین آن دو است پیدا کنید. حالا برنامه را دوباره اجرا کنید. این بار t_1 را زمان کوچکتر دو زمان بالا، و Δt را 0.5s بگیرید. با استفاده از جدول، مختصات نقطه اوج را تا 2 رقم با معنی بدست بیاورید. (ج) با استفاده از همین روش، زمان، مختصات، و مؤلفه‌های سرعت پرتابه را در موقعی که به ارتفاع نقطه شلیک برگشته است پیدا کنید.

۸۶. ذره‌ای با شتاب $a = -45^\circ$ و $a_x = -a_y$ در صفحه xy حرکت می‌کند. (در این مسئله، همه طولها بر حسب سانتی‌متر و همه زمانها بر حسب ثانیه‌اند). در $t = 0$ ، ذره با سرعت $v_x = 10\text{ m/s}$ و $v_y = 2$ از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد. برنامه‌ای بنویسید که متغیرهای زیر را، که حرکت ذره را توصیف می‌کنند، تنها برای موقعی که ذره درربع اول (طرف راست بالا) دستگاه مختصات است جدول بندی کند. t, x, y, r, θ (معنی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1} y/x$)، v_x, v_y, v, θ (معنی $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$). با استفاده از جدولی که حاصل می‌شود، به این پرسشها پاسخ بدهید. (الف) ذره در چه زمانی و در کدام نقطه از ربع اول خارج می‌شود؟ (ب) بیشترین فاصله ذره از مبدأ چقدر است، و در این نقطه چه سرعتی دارد؟ (ج) ذره، در لحظه‌ای که سرعت آن 20° است، در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (د) ذره در چه نقطه‌ای خط 45° (نیمساز ربع اول) را قطع می‌کند؟

۸۷. مختصات جسمی که روی دایره به شعاع R به طور یکنواخت حرکت می‌کند، $x = R \cos \omega t$ و $y = R \sin \omega t$ است؛ w ثابت و زاویه ω بر حسب رadian است. برنامه‌ای بنویسید یا الگوریتمی طرح کنید، که بردار سرعت متوسط را در بازه زمانی t_1 تا t_2 محاسبه کند. به ازای $t = 0$ محاسبه کند. به ازای $R = 1.5\text{m}$ و $\omega = 50^\circ \text{rad/s}$ حساب کنید که $x(t) = [x(t_0) + \Delta t) - x(t_0)]/\Delta t$ و $y(t) = [y(t_0) + \Delta t) - y(t_0)]/\Delta t$ چقدر است. برنامه را چنان تنظیم کنید که بشود در هر اجرا مقادیر $x, y, t, \Delta t$ را به راحتی تغییر داد. اگر همه متغیرها را با دقت مضاعف بگیرید، افت دقت در محاسبات کم می‌شود. (الف) به ازای $t = 1\text{s}$ $x = 1.5\text{m}$ ، $y = 0$ ، $t = 1\text{s}$ و $\Delta t = 0.1\text{s}$ را حساب کنید. عبارت اخیر برایر است با حاصل ضرب اسکالار بردارهای مکان و سرعت متوسط که صفر است اگر این دو بردار برابر هم عمود باشند. حالا این محاسبه را به ازای $t = 1\text{s}$ ، $\Delta t = 0.1\text{s}$ ، $\Delta t = 0.01\text{s}$ ، $\Delta t = 0.001\text{s}$ و $\Delta t = 0.0001\text{s}$ تکرار کنید. دقت کنید که مؤلفه‌های x ، مرتباً به مقادیر حدی خودشان، که مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای v اند، نزدیکتر می‌شوند، و خود v هم مرتباً به جهت بردار مکان (معنی مماس بر دایره) نزدیکتر می‌شود.

کوთاهترین زمان ممکن درست به نقطه مقابل در آن طرف رودخانه برسد. (حرکت می‌تواند ترکیبی از قایق رانی و پیاده‌روی باشد). (ب) این زمان چقدر است؟

۸۲. رزم ناوی با سرعت 24km/h به طرف شرق می‌رود. از یک زیردریایی در فاصله 40 km از دری را با سرعت 50 km/h به طرف آن شلیک می‌شود؛ شکل ۴۳. ناو از زیردریایی، در جهت 20° شرق شمال مشاهده می‌شود. (الف) از در در چه جهتی شلیک شود تا به ناو اصابت کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا از در به ناو برسد؟



شکل ۴۳. مسئله ۸۲

۸۳. الکترونی با سرعت 420 cm/s نسبت به ناظر B حرکت می‌کند. ناظر B با سرعت 300 cm/s ، در همان جهت حرکت الکترون، نسبت به ناظر A در حرکت است. سرعت الکترون از دید ناظر A چقدر است؟

۸۴. رصد نشان می‌دهد که کهکشان آلفا با سرعت 350 cm/s از ما دور می‌شود. کهکشان بتا هم، که درست در نقطه مقابل کهکشان آلفاست، با همین سرعت از ما دور می‌شود. از دید ناظر آلفا (الف)، کهکشان ما و (ب) کهکشان بتا با چه سرعتی از کهکشان خودش دور می‌شوند؟

پروژه‌های کامپیوتی

۸۵. کامپیوت می‌تواند جدولی از مختصات، مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب یک جسم در زمانهای معین را تهیه کند. به کمک این جدول می‌توانیم کمیتهای مورد نظر، مثلاً اوج مسیر، زمان برگشت به زمین، وغیره را جستجو کنیم. برنامه‌ای بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات و مؤلفه‌های سرعت یک پرتابه را در پایان بازه‌های زمانی Δt از زمان t_1 تا زمان t_2 محاسبه کند. فرض کنید پرتابه در $t = 0$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. کامپیوت باید $v_x = v_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$ ، $x = v_0 t \cos \theta_0$ ، $y = v_0 t \sin \theta_0$ ، $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ، $\theta = \tan^{-1} v_y/v_x$ را به ازای $t = t_1$ ، $t = t_1 + \Delta t$ ، $t = t_1 + 2\Delta t$ ، $t = t_1 + N\Delta t$ ، ...، $t = t_1 + 2\Delta t$ ، $t = t_1 + \Delta t$ ابتدا مقادیر $v_0, \theta_0, t_1, \Delta t, N$ را به کامپیوت بدهید. برنامه را چنان تنظیم کنید که در هر اجرا به راحتی بشود $t_1, \Delta t$ ، و N را تغییر داد.

دو بردار با هم موازی باشند، صفر است. محاسبه را به ازای $t_0 = 1s$ و $\Delta t = 1s$ ، $\Delta t = 1s$ و $\Delta t = 1s$ انجام بدھید. توجه کنید که \bar{a} مدام به مقدار حدی اش، که شتاب لحظه‌ای a است، نزدیکتر می‌شود، و خود a هم به جهت بردار مکان نزدیکتر می‌شود. مؤلفه‌های a عبارت‌اند از $a_x = -\omega^2 R \cos \omega t$ و $a_y = -\omega^2 R \sin \omega t$. این مقادیر را به دست بیاورید و با نتایج حاصل از برنامه خودتان مقایسه کنید. همچنین تحقیق کنید که نتایج حاصل از برنامه شما هم مقدار $a = v^2/R$ را برای اندازه شتاب به دست می‌دهد.

چنانکه مستقیماً با مشتق‌گیری می‌شود نشان داد، مؤلفه‌های v عبارت‌اند از $v_x = -\omega R \sin \omega t$ و $v_y = \omega R \cos \omega t$. این مقادیر را به دست بیاورید و به کمک آن ببینید که برنامه شما با چه دقیقی v را تخمین زده است. (ب) حالا برنامه را تغییر بدھید و $\bar{a}_x = [v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)]/\Delta t$ ، $\bar{a}_y = [v_y(t_0 + \Delta t) - v_y(t_0)]/\Delta t$ و $\bar{a}_x = [v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)]/\Delta t$ را حساب کنید. برای این کار، عبارت $v_x(t) = \omega R \cos \omega t$ و $v_y(t) = -\omega R \sin \omega t$ را به کار ببرید. $x\bar{a}_x - y\bar{a}_y$ را هم حساب کنید. قدر مطلق این مقدار اندازه حاصل ضرب برداری بردارهای مکان و شتاب است، که اگر این

۵

نیرو و قوانین نیوتون

در فصلهای ۲ و ۴، حرکت ذرات را بررسی کردیم. نیرسیدیم که چه چیزی "باعث" حرکت می‌شود؛ صرفاً توصیف حرکت بر حسب بردارهای \vec{v} ، \vec{a} پرداختیم. در این فصل و فصل بعدی، علمت حرکت را بررسی می‌کنیم. این بخش از مکانیک را دینامیک می‌نامند.

رهیافتی به دینامیک که ما در این فصل و فصل بعدی اختیار کردیم عموماً مکانیک کلاسیک نامیده می‌شود. این رهیافت در قرنهای هفدهم و هیجدهم فرمولبندی و با موفقیت آزموده شد. در قرن ما نظریه‌های جدیدی (نسبیت خاص و عام و مکانیک کوانتومی) ظهور کرده‌اند که واقعیتها بی‌فراتر از تجربیات روزمره را آشکار می‌کنند؛ این واقعیتها در حوزه‌هایی بروز می‌کنند که در آنها مکانیک کلاسیک نمی‌تواند پیش‌بینی‌های سازگار با تجربه ارائه کند. اما همین نظریه‌ها هم در حد اجسام معمولی به مکانیک کلاسیک تحويل می‌شوند.

بدون نیاز به نسبیت خاص و عام یا مکانیک کوانتومی هم می‌شود آسمان‌خراش‌های عظیم ساخت و خواص مواد سازنده آنها را بررسی کرد؛ می‌شود هوای‌ها‌یی ساخت که صدها نفر را جابه‌جا کنند و نیمی از کره زمین را یکسره بی‌سیمایند؛ و می‌شود فضای‌ها‌یی ساخت که مأموریت‌های مشکلی به سوی دنباله‌دارها، سیاره‌ها، و جز آنها انجام بدهند. اینها همه در قلمرو مکانیک کلاسیک‌اند.

۱- مکانیک کلاسیک

سرعت اولیه مشخص، در محیطی که کاملاً می‌شناسیم رها می‌کنیم.

۳. حرکت بعدی این جسم چگونه است؟ در فصلهای قبلی، اجسام فیزیکی را ذره در نظر گرفتیم، یعنی اجسامی که ساختار یا حرکات درونی‌شان قابل اغماض است و همه اجزائشان دقیقاً یک جور حرکت می‌کنند. در بررسی برهم‌کنشی اجسام با محیط، اغلب باید اجسام گسترشده‌ای را در نظر گرفت که بخش‌های متفاوت‌شان به طرق مختلفی با محیط برهم‌کنش دارند. مثلاً کارگری را در نظر بگیرید که یک صندوق سنگین را روی یک سطح ناهموار

مطالعه را به حرکت یک جسم معین معطوف می‌کنیم. این جسم با اجسام اطراف خودش (یعنی با محیط خودش) برهم‌کنش می‌کند، و به این ترتیب سرعتش تغییر می‌کند: شتاب تولید می‌شود. در جدول ۱، چند حرکت شتابدار معمولی و همچنین در هر مورد مؤثرترین عامل در تولید شتاب آمده است. مستله اساسی مکانیک کلاسیک این است: ۱. جسمی داریم که مشخصات آن (از قبیل جرم، حجم، و بار الکتریکی) را می‌دانیم. ۲. این جسم را، در مکان اولیه مشخص و با

جدول ۱. چند حرکت شتابدار و علمت آنها.

علم اصلی (محیط)	تغییر حرکت	جسم
گرانش (زمین)	افتدن از درخت	سب
گوی دیگر، میز گرانش (زمین)	واجهیدن از یک گوی دیگر	گوی بیلیارد
گرانش (زمین)، اصطکاک (برف)، مقاومت هوا	لغزیدن از تپه به پایین	اسکی باز
میدان الکترومغناطیسی (آهربا و اختلاف ولتاژ)	کانونی شدن و انحراف	برتو الکترون (در تلویزیون)
گرانش (خورشید)	گردش در منظمه شمسی	دبناهالدار هالی

۲-۵ قانون اول نیوتن

مسئله حرکت و علل آن، قرنهای یکی از موضوعات مهم فلسفه طبیعی (آنجه امروز فیزیک می‌نامیم) بود. اما تازه در زمان گالیله و نیوتن بود که پیشرفت چشمگیری به دست آمد. ایزاک نیوتن، که در همان سال مرگ گالیله در انگلستان به دنیا آمد، معمار اصلی مکانیک کلاسیک است. او بود که تفکرات گالیله و پیشینیانش را کاملاً به شمر رساند. سه قانون حرکت نیوتن، ابتدا (در سال ۱۶۸۶) در کتابش، اصول ریاضی فلسفه طبیعی، منتشر شد. این کتاب را اغلب به نام اصلی اش "پرینکیپیا" می‌نامند.

پیش از گالیله، بیشتر فلاسفه می‌پنداشتند که نوعی اثر یا "نیرو" لازم است تا جسمی در حال حرکت بماند. آنها فکر می‌کردند اجسام زمانی در "حالت طبیعی" خودشان هستند که ساکن باشند. مثلاً گمان می‌کردند برای اینکه جسمی با سرعت ثابت روی خط راست حرکت کند، یک عامل خارجی لازم است تا پیوسته آن را براند؛ در غیر این صورت به گمان آنها، جسم "طبیعتاً" می‌ایستاد.

کسی که بخواهد این اتفاق را تجربه کند، اول باید راهی بیابد که همه آثار محیطی یا همه نیروها را، برای جسم مورد بررسی حذف کند. این کار خیلی سخت است، اما در موارد خاصی می‌شود نیروها را فوق العاده کوچک کرد. اگر حرکت اجسام را، هنگامی که نیروها را کوچک و کوچکتر می‌کنیم، بررسی کنیم، می‌توانیم تصویری از حالتی که نیروهای خارجی واقعاً صفر شده‌اند بدست بیاوریم.

فرض کنید جسم آزمونی، مثلاً یک قالب، را روی سطح افقی زبری بگذاریم. اگر قالب را روی صفحه بلغزانیم، خواهیم دید که حرکتش به تدریج کند می‌شود و می‌ایستد. در واقع همین قبیل مشاهدات بود که توقف حرکت در غیاب عامل خارجی را تأیید می‌کرد. در این مورد، عامل خارجی فشار دست است، که با برداشتن آن جسم متوقف می‌شود. اما می‌توانیم برای مردود شمردن این فکر، چنین استدلال کنیم: فرض کنید آزمایش را تکرار می‌کنیم، اما این بار با قالبی صافتر و سطحی صافتر، خواهیم دید که سرعت جسم آهسته‌تر از حالت پیش کم می‌شود. قالب و سطح را باز هم صیقلی‌تر می‌کنیم و این بار روان‌کننده هم به کار می‌بریم. خواهیم دید که آهنگ کاهش سرعت قطعه مرتباً کمتر می‌شود و قطعه هر بار مسافت بیشتری را تا زمان توقف می‌پیماید. شاید خودتان با ریل هوا هم آزمایش کرده باشید: می‌شود اجسام را بر ریل هوا روی لایه نازکی از هوای شناور کرد. با چنین ابزاری به حد بدون اصطکاک نزدیک می‌شویم: حتی ضربه کوچکی به جسم کافی است تا آن را، با سرعت کم و تقریباً ثابت، روی ریل براند.

حالا می‌توانیم بروندی کنیم و بگوییم که اگر می‌شد اصطکاک را کاملاً حذف کرد، اجسام به طور نامحدود با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کردند. برای به حرکت درآوردن اجسام نیرو لازم است، اما برای اینکه جسمی به حرکت با سرعت ثابت ادامه بدهد نیروی خارجی لازم نیست.

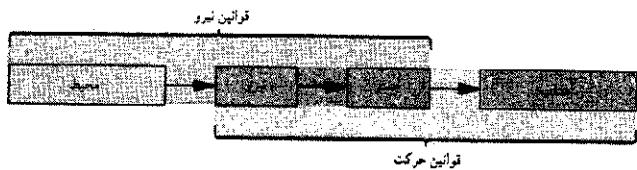
دستیابی به شرایطی که هیچ نیروی خارجی‌ای بر جسم اثر نکند

هل می‌دهد. کارگر به یکی از وجوده قائم صندوق نیرو وارد می‌کند؛ در همین حال، به گف افقی صندوق نیروی بازدارنده اصطکاک وارد می‌شود. همچنین ممکن است وجه جلویی صندوق تحت اثر مقاومت هوا قرار بگیرد.

در قسمتهای بعدی همین کتاب، مکانیک اجسام گسترش را هم به تفصیل بررسی خواهیم کرد. فعلًا همچنان فرض می‌کنیم که همه قسمتهای جسم یک نوع حرکت دارند و در نتیجه می‌توانیم جسم را ذره در نظر بگیریم. در این شرایط، مهم نیست که محیط به کجای جسم اثر می‌کند؛ هدف اصلی ما فعلًا بررسی اثر خالص محیط است.

ایزاک نیوتن (۱۶۴۲ تا ۱۷۲۷) با ارائه قوانین حرکت و قانون گرانش جهانی خود، این مسئله مکانیک کلاسیک را، لااقل برای بسیاری از محیط‌ها، حل کرد. برنامه حل این مسئله، در چارچوب مکانیک کلاسیک، چنین است: ۱. از مفهوم نیرو (F) را که فعلًا به صورت هل دادن یا کشیدن در نظر می‌گیریم—معرفی می‌کنیم و آنرا بر حسب ستایی (a) که به یک جسم استاندارد معین می‌دهد تعریف می‌کنیم. ۲. روشی برای نسبت دادن جرم (m) به اجسام اختیار می‌کنیم؛ به این ترتیب می‌توانیم بفهمیم که اجسام با جرم‌های متفاوت در محیط‌های یکسان شتابهای مختلفی می‌گیرند. ۳. سرانجام، سعی می‌کنیم راهی برای محاسبه نیروهای وارد بر جسم، بر حسب خواص اجسام و محیط آنها، پیدا کنیم؛ یعنی دنبال قوانین نیرو می‌گردیم. نیرو، که اساساً واسطه محیط با حرکت جسم است، هم در قوانین حرکت (که می‌گوید یک جسم معین تحت تأثیر نیروی معین چه شتابی دارد) ظاهر می‌شود و هم در قوانین نیرو (که می‌گوید جگونه می‌توان نیروی وارد بر جسمی معین در محیطی معین را حساب کرد). قوانین حرکت و قوانین نیرو، با هم، قوانین مکانیک را تشکیل می‌دهند (شکل ۱).

باشد آن را به صورت واحد در نظر گرفت، و این برنامه وقتی موفق است که بتوانیم به این دو پرسش پاسخ مثبت بدیم: ۱. آیا نتایج حاصل از برنامه با تجربه سازگار است؟ ۲. آیا شکل قوانین نیرو شکل ساده‌ای دارند؟ تاج افتخار مکانیک نیوتنی این است که واقعاً می‌شود یه هر دو پرسش پاسخ مثبت داد.



شکل ۱. برنامه ما در مکانیک. سه جعبه سمت چپ نشان می‌دهند که نیرو برهمنش جسم و محیط آن است. سه جعبه سمت راست نشان می‌دهند که نیروی وارد بر جسم، به آن شتاب می‌دهد.

که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی شود. اگر جسم در حالت سکون نماند، چارچوب لخت نیست. به همین ترتیب می شود جسم متحرکی را (که باز هم نیروی خالصی بر آن وارد نشود) در این چارچوب گذاشت؛ اگر (اندازه یا جهت) سرعت تغییر کند، چارچوب لخت نیست. چارچوبی که به این آزمون در همه نقاط مختلف پاسخ مثبت بدهد (جسم ساکن همچنان ساکن بماند و سرعت جسم متحرک ثابت بماند) یک چارچوب لخت است. همین که یک چارچوب لخت پیدا کردیم، به سادگی می توانیم بسیاری چارچوبهای لخت دیگر هم پیدا کنیم، چون، هر چارچوب مرجعی که نسبت به چارچوب اول با سرعت ثابت حرکت کند هم یک چارچوب لخت است.

در این کتاب، تقریباً همیشه قوانین مکانیک کلاسیک را از دیدگاه ناظرهای چارچوبهای لخت به کار می برمی. گاهگاهی هم مسأله را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت — مثلاً اتمیل شتابدار، صفحه دور، یا ماهواره های گردان در مدار — بررسی می کنیم. اگرچه زمین در حال چرخش است، می توانیم چارچوب مرجع وابسته به آن را، در اکثر موارد عملی، یک چارچوب تقریباً لخت در نظر بگیریم، اما در کاربردهای بزرگ مقیاس، مثلاً در تحلیل حرکت موشکهای قاره پیما یا بررسی باد و جریانهای اقیانوس، نالخت بودن زمین چرخان اهمیت پیدا می کند.

توجه کنید که قانون اول فرقی میان اجسام ساکن و اجسام متحرک با سرعت ثابت قائل نمی شود. اگر نیروی خالص وارد بر جسم صفر باشد، هر دو حرکت "طبیعی" اند. اگر جسمی را که نسبت به یک چارچوب مرجع ساکن است از دید چارچوب مرجع دیگری، که با سرعت ثابت نسبت به اولی حرکت می کند، بررسی کنیم، این موضوع روشنتر می شود. ناظر چارچوب اول جسم را ساکن می بیند؛ ناظر چارچوب دوم همان جسم را در حال حرکت با سرعت ثابت می بیند. هر دو ناظر در می یابند که جسم شتاب ندارد، یعنی سرعت آن تغییر نمی کند، و هر دو از قانون اول نتیجه می گیرند که نیروی خالصی بر جسم اثر نمی کند.

اگر برهم کنش خالصی بین جسم و اشیای محیط وجود داشته باشد، این اثر ممکن است حالت "طبیعی" حرکت جسم را تغییر بدهد. برای تحقیق این موضوع باید مفهوم نیرو را بدقت بررسی کنیم.

۳-۵ نیرو

برای پروانه ای مفهوم نیرو، آن را به طور عملیاتی تعریف می کنیم. در زبان روزمره، نیرو همان هل دادن یا کشیدن است. برای سنجش کمی چنین نیروهایی، آنها را بر حسب شتابی که به یک جسم استاندارد می دهند تعریف می کیم.

به عنوان جسم استاندارد، کیلوگرم استاندارد را به کار می برمی (یا فرض می کنیم که داریم به کار می برمی!). به این جسم، طبق تعریف، جرم m_0 دقیقاً برابر با 1kg نسبت داده شده است (شکل ۵ در فصل ۱). بعداً توضیح خواهیم داد که چگونه به هر جسم دیگری جرم نسبت می دهیم.

دشوار است. نیروی گرانش بر همه اجسامی که روی زمین، یا نزدیک آن، واقع شده اند اثر می کند؛ نیروهای بازدارنده ای مثل اصطکاک یا مقاومت هوا هم با حرکت اجسام بر سطح زمین یا در هوا مقابله می کنند. خوشبختانه لازم نیست به خلا فضاهای دور برویم تا بتوانیم حرکت اجسام را به دور از نیروهای خارجی بررسی کنیم چون، تا آنجا که تنها حرکت انتقالی کلی جسم مطرح است، بین جسمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی شود، و جسمی که مجموع یا برایند نیروهای خارجی وارد بر آن صفر است، تفاوتی وجود ندارد. معمولاً برایند همه نیروهای وارد بر جسم را نیروی "خالص" می نامیم. مثلث نیروی وارد از دست به قالب لغزنده، می تواند با نیروی اصطکاک وارد بر قالب مقابله کند و نیروی رو به بالای سطح افقی می تواند با نیروی گرانش مقابله کند. به این ترتیب، نیروی خالص وارد بر قالب می تواند صفر شود، و قطعه می تواند با سرعت ثابت حرکت کند.

نیوتون این اصل را به عنوان نخستین قانون از قوانین سه گانه اش برگزید:

جسمی را در نظر بگیرید که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی شود. اگر این جسم ساکن باشد، در حالت سکون باقی خواهد ماند. اگر در حال حرکت باشد، با سرعت ثابت به حرکتش ادامه خواهد داد.

قانون اول نیوتون در واقع گزاره ای درباره چارچوبهای مرجع است. به طور کلی، شتاب اجسام بستگی به چارچوب مرجعی دارد که این شتاب نسبت به آن سنجیده می شود. اما قوانین مکانیک کلاسیک تنها در چارچوبهای مرجع خاصی درست اند، در آنها بیکه ناظرهای اشان همگی شتاب یکسانی برای جسم متحرک می سنجند. به کمک قانون اول نیوتون می شود این گروه چارچوبهای مرجع را مشخص کرد. به این منظور، قانون اول را چنین بیان می کنیم:

می توان دسته ای از چارچوبهای مرجع یافت که اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم در این چارچوبها صفر باشد.

تمایل اجسام برای باقی ماندن در حالت سکون یا در حرکت راستخط یکنواخت را لختی، و قانون اول نیوتون را اغلب قانون لختی می نامند. چارچوبهایی هم که این قانون در آنها برقرار است چارچوبهای لخت نامیده می شوند. قبل از بخش ۶-۴ در باره این چارچوبها صحبت کردیم؛ به خاطر دارید که ناظرهای چارچوبهای مرجع لخت متفاوت (که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می کنند) همه یک شتاب می سنجند. بنابراین، فقط یک چارچوب نیست که شتاب در آن صفر است: مجموعه ای از چارچوبهای مرجع هست که همگی چنین خاصیتی دارند.

برای اینکه بینیم یک چارچوب مرجع خاص لخت هست یا نه، جسم آزمونی را به حالت سکون در آن رها می کنیم و مطمئن می شویم

محور x تولید می‌کند، و نیروی N در جهت محور x هم شتاب $3m/s^2$ در جهت محور y به جسم می‌دهد؛ شکل ۳.الف. اگر دو نیرو را با هم اعمال کنیم؛ شکل ۳.ب، خواهیم دید که شتاب جسم $5m/s^2$ و در جهت خطی است که با محور x زاویه 37° می‌سازد. اگر به جسم نیروی N در این جهت وارد می‌شود همین شتاب به دست می‌آمد. برای به دست آوردن این نتیجه، می‌توانستیم اول دو نیروی $4N$ و $3N$ را جمع برداری کنیم (شکل ۳.ج) تا برابر $5N$ در جهت 37° از محور x به دست بیاید، و بعد این نیروی خالص را به جسم اعمال کنیم. با آزمایشها ای این نوع معلوم می‌شود که نیرو بردار است: یعنی اندازه و جهت دارد، و طبق قانون جمع می‌شود.

توجه کنید که دو روش تحلیل داریم که هر دو باید به یک نتیجه بینجامند. ۱. می‌توانیم شتاب حاصل از هر نیرو را پیدا کنیم و شتابها را با هم جمع برداری کنیم. ۲. می‌توانیم نیروها را جمع برداری کنیم، برابر a حاصل را به جسم اعمال کنیم و شتاب را به دست بیاوریم.

۴-۵ چرم

در بخش ۳-۵، فقط شتابهای یک جسم خاص، یعنی کیلوگرم استاندارد را بررسی کردیم. از اینجا توانستیم نیرو را به طور کمی تعریف کنیم. اما بینیم نیرو بر اجسام دیگر چه اثری می‌گذارد؟ چون جسم استاندارد را دلخواه انتخاب کرده بودیم، طبیعی است که برای هر جسمی، شتاب مستقیماً متناسب با نیرویی باشد که برآن وارد می‌شود. پرسش مهمی که باقی می‌ماند این است: اثیر یک نیروی یکسان بر اجسام متفاوت چگونه است؟

پاسخ کیفی این سؤال از تجربیات روزمره حاصل می‌شود. نیروهای یکسان، شتابهای متفاوتی به اجسام متفاوت می‌دهند. یک نیروی معین، به توب پیسال شتاب بیشتری می‌گذارد تا به یک اتمبیل. برای به دست آوردن پاسخ کمی به این پرسش، به روشی برای اندازه‌گیری جرم نیاز داریم، یعنی به روشی برای سنجش خاصیتی از جسم که مقاومت آن را در برابر تغییر حرکتش تعیین می‌کند.

فرض کنید که فنری به جسم استانداردمان (کیلوگرم استاندارد، که خودمان به آن جرم m ، دقیقاً برابر با $1kg$ نسبت دادیم) بندیم و آن را به روش شکل ۲.ب، چنان بکشیم که شتاب آن a ، مثلاً $4m/s^2$ ، شود. تغییر طول ΔL فنر را، که متاظر با نیرویی است که از فنر بر جسم وارد می‌شود، دقیقاً اندازه می‌گیریم.

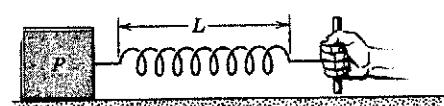
اکنون دو جسم استاندارد یکسان را به فنر می‌بندیم و همان نیروی سابق را به آنها وارد می‌کنیم (یعنی فنر را آنقدر می‌کشیم تا افزایش طول آن به همان اندازه ΔL باشد. شتاب مجموعه دو جسم را اندازه می‌گیریم، و می‌بینیم $5m/s^2$ را می‌شود. اگر سه جسم استاندارد به کار برد بودیم و همان نیرو را اعمال می‌کردیم، شتاب مجموعه را برابر $7.5m/s^2$ دست می‌آوردیم.

برای اینکه محیطی داشته باشیم که نیرو وارد کند، جسم استاندارد را روی یک میز افقی با اصطکاک ناجیز می‌گذاریم و یک فنر به آن فنر را به راست می‌کشیم، چنانکه با آزمون خطأ به حالتی برسیم که شتاب جسم استاندارد دقیقاً برابر با مقدار ثابت $1m/s^2$ باشد. در این حالت می‌گوییم که فنر (که جسم با اهمیت محیط است) طبق تعریف هر کیلوگرم استاندارد نیروی ثابتی به اندازه "۱ نیوتون" (با اختصار $1N$) وارد می‌کند. متوجه می‌شویم که فنر، در حالتی که این نیرو را وارد می‌کند، به اندازه ΔL ، نسبت به طول معمولی اش، کشیده شده است (شکل ۲.ب).

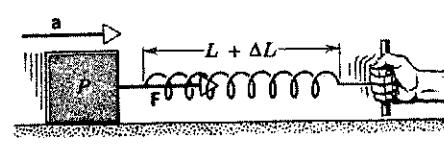
می‌شود آزمایش را تکرار کرد، و این بار فنر سخت‌تری به کار برد یا فنر را بیشتر کشید، تا شتابی که برای جسم استاندارد اندازه می‌گیریم برابر با $2m/s^2$ بشود. در این حالت می‌گوییم که فنر نیروی $2N$ به جسم استاندارد وارد می‌کند. به طور کلی، اگر مشاهده کنیم که این جسم در یک محیط معین شتاب a دارد، می‌گوییم که محیط بر جسم $1kg$ استاندارد نیروی F وارد می‌کند. که در آن F (برحسب نیوتون) از لحاظ عددی برابر با a (برحسب متر بر محدود ثانیه) است.

حالا ببینیم که آیا نیرو، که به شکل بالا تعریف کردیم، یک کمیت برداری است یا نه. در شکل ۲.ب به نیروی F اندازه نسبت دادیم. به راحتی می‌توانیم به آن جهت هم نسبت بدیم، که این جهت همان جهت شتابی است که همین نیرو ایجاد کرده است. اما برای اینکه کمیتی بردار باشد کافی نیست که اندازه و جهت داشته باشد؛ این کمیت باید از قوانین جمع برداری فصل ۳ هم تعیین کند. تها با آزمایش می‌شود فهمید که نیرو، که به روش بالا تعریف شد، واقعاً طبق این قوانین رفتار می‌کند یا خیر.

یک نیروی $4N$ در راستای محور x و یک نیروی $3N$ در راستای محور y اعمال می‌کنیم. این نیروها را یکبار جداگانه و بعد با هم به جسم استاندارد، که همچنان روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد، وارد می‌کنیم. شتاب جسم چه خواهد بود؟ از آزمایش نتیجه می‌شود که نیروی $4N$ در جهت محور x ، شتاب $4m/s^2$ در جهت

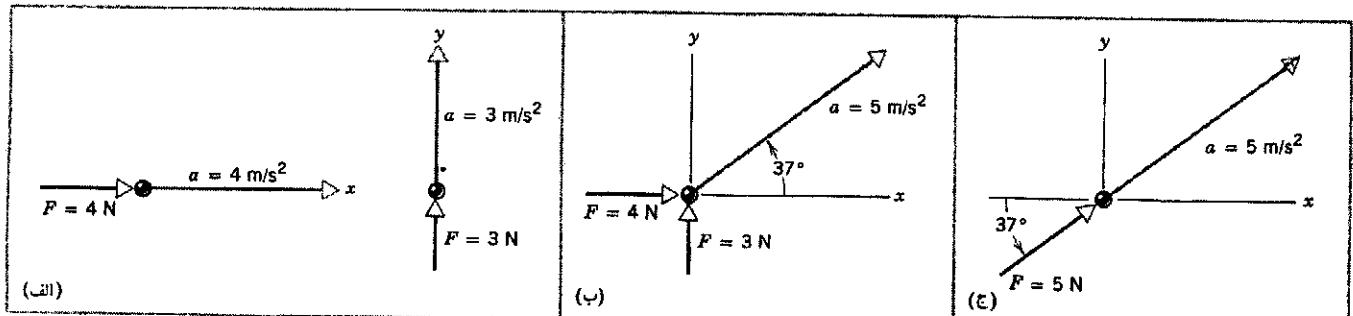


(الف)



(ب)

شکل ۲. (الف) "ذرة" P (کیلوگرم استاندارد) در حالت سکون روی یک سطح افقی بدون اصطکاک. (ب) جسم، با کشیدن فنر به طرف راست، شتاب گرفته است.



شکل ۳. (الف) نیروی 4 N در جهت x ، شتاب 3 m/s^2 در جهت y تولید می‌کند، و نیروی 3 N در جهت y . (ب) اگر دو نیرو با هم اعمال شوند، شتاب برابر با 5 m/s^2 در جهتی است که نشان داده شده است. (ج) این شتاب را می‌شود با یک نیروی 5 N در جهت مشخص شده تولید کرد.

خواهیم دید که نسبت شتابها، a_0/a'_0 ، برابر با همان نسبت آزمایش قبلی است؛ یعنی

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a'_0} = \frac{a'_0}{a'_1}$$

مثالاً، فرض کنید نیروی بزرگتری اعمال کنیم، چنانکه فنر به اندازه $5\Delta L$ کشیده شود. در این حالت خواهیم دید که جرم m_0 شتاب 5 m/s^2 را داشته باشد، و جرم مجهول m_1 شتاب 7.5 m/s^2 را دارد. از اینجا جرم مجهول چنین بدست می‌آید:

$$m_1 = m_0 \left(\frac{a'_0}{a'_1} \right) = \left(\frac{3\text{ m/s}^2}{0.75\text{ m/s}^2} \right) = 4.0\text{ kg}$$

که همان مقداری است که در آزمایش قبل به دست آمد. مهم نیست که مقدار نیروی مشترکی که به کار می‌بریم چقدر باشد، در هر حال مقداری که برای m_1 حاصل می‌شود یکی است. نسبت جرم m_1/m_0 مستقل از نیروی مشترکی است که اعمال شده است؛ جرم از خواص بنیادی جسم است و بستگی به مقدار نیرویی که برای مقایسه جرم مجهول با جرم استاندارد به کار رفته است ندارد. پس به کمک این روش می‌توانیم جرم اجسام را از مقایسه با کیلوگرم استاندارد به دست بیاوریم.

این روش را می‌شود به مقایسه مستقیم جرم هر دو جسمی تعیین داد. مثلاً، فرض کنید که ابتدا جسم دلخواه دیگری را به همان روش قبلی با جسم استاندارد مقایسه و جرم آن، مثلاً m_2 ، را تعیین کنیم. اکنون می‌توانیم دو جسم m_2 و m_1 را مستقیماً با هم مقایسه کنیم؛ در اثر نیروی F'' ، شتابهای a''_2 و a''_1 به دست می‌آیند. نسبت جرمها که طبق معمول از رابطه

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a''_1}{a''_2} \quad (\text{به ازای نیروی یکسان})$$

تعیین می‌شود، برابر با همان نسبتی است که از دو جرم m_2 و m_1 که مستقیماً از مقایسه با جرم استاندارد به دست آمده باشند، حاصل

از این مشاهدات معلوم می‌شود که به ازای نیروی ثابت، هرچه جرم بزرگتر باشد شتاب کوچکتر می‌شود. از این آزمایش و آزمایش‌های مشابه دیگر، نتیجه می‌گیریم که شتابی که یک نیروی معین تولید می‌کند، تناسب معکوس با جرم جسمی دارد که شتاب می‌گیرد. به بیان دیگر: جرم اجسام متناسب با عکس شتابی است که از یک نیروی معین می‌گیرند. به این ترتیب، جرم جسم را می‌توانیم معیاری کنیم از مقاومت آن در برابر یک نیروی معین در نظر بگیریم.

با این مشاهده، روش مستقیمی برای مقایسه جرم اجسام مختلف به دست می‌آید: کافی است شتاب اجسام تحت تأثیر یک نیروی معین را بسنجیم و با هم مقایسه کنیم. نسبت جرم‌های دو جسم برابر با عکس نسبت شتابهایی است که در اثر آن نیرو کسب می‌کنند، یعنی

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a'_1} \quad (\text{به ازای نیروی یکسان})$$

اینجا در واقع داریم شتاب a_1 جسمی به جرم مجهول m_1 را با شتاب a'_1 جسم استاندارد به جرم m_0 مقایسه می‌کنیم.

مثالاً، فرض کنید نیرویی اعمال کنیم که به جرم استاندارد شتاب 2.0 m/s^2 بدهد. همان نیرو را به جسمی به جرم مجهول m_1 وارد می‌کنیم (برای این کار فنر را به همان اندازه ΔL می‌کشیم)، و شتاب a_1 را می‌سنجیم، که مثلاً برابر با 0.5 m/s^2 می‌شود. حالا می‌توانیم m_1 را از رابطه بالا بیاوریم. نتیجه می‌شود که

$$m_1 = m_0 \left(\frac{a_0}{a'_1} \right) = \left(\frac{2.0\text{ m/s}^2}{0.5\text{ m/s}^2} \right) = 4.0\text{ kg}$$

شتاب جسم دوم، در اثر همان نیروی وارد بر جسم اول، یک چهارم شتاب جسم اول است؛ بنابراین، جرم آن چهار برابر جرم جسم اول است. این مثال رابطه معکوس میان جرم و شتاب را به ازای نیروی معین، نشان می‌دهد.

آزمایش بالا را برای همین دو جسم تکرار می‌کنیم، اما این بار به هر دو نیروی F' وارد می‌کنیم، که با F متفاوت است. این نیرو به جسم استاندارد شتاب a' و به جرم مجهول شتاب a'_1 می‌دهد.

مربوط می‌کنند. لازم است تأکید کنیم که $\sum F_x$ جمع جبری مؤلفه‌های x همه نیروها، $\sum F_y$ جمع جبری مؤلفه‌های y همه نیروها، و $\sum F_z$ جمع جبری مؤلفه‌های z همه نیروهای وارد بر m است. در به دست آوردن جمع جبری، باید علامت مؤلفه‌ها (یعنی جهت نیروها نسبت به هندیگر) را در نظر گرفت.

در تحلیل مسائل به کمک قانون دوم نیویتون، خوب است نموداری رسم کنیم که جسم مورد نظر را به شکل یک نقطه، و نیروهای وارد آن را به شکل بردارهایی که بر آن اثر می‌کنند نشان بدهد. چنین نمایشی را نمودار جسم آزاد می‌نامند؛ این نمایش یک گام اولیه اساسی، هم در تحلیل مسئله و هم در تجسم وضعیت فیزیکی، است.

مثال ۱. دانشجویی سوتمه بارشده‌ای به جرم $m = 240 \text{ kg}$ را تا مسافت $d = 2,3 \text{ m}$ روی سطح بدون اصطکاک دریاچه یخزده‌ای با نیروی افقی ثابت $N = 13^{\circ} \text{ N}$ (یعنی 29 lb) هل می‌دهد؛ شکل ۴‌الف. اگر سورتمه از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت نهایی آن چه خواهد بود؟

حل: یک محور x افقی می‌کشیم (شکل ۴‌ب)، جهت افزایش x را به طرف راست می‌گیریم، و سورتمه را ذره در نظر می‌گیریم. شکل ۴‌ب یک نمودار جسم آزاد جزئی است. درکشیدن نمودار جسم آزاد، مهم است که همه نیروهای وارد بر ذره را در نظر بگیریم، اما در اینجا دو نیروی عمودی را حذف کردیم. این دو نیرو را — که تاثیری بر حل مسئله ما ندارند — بعداً در همین فصل بررسی خواهیم کرد.

با آزمایش دیگری از همین نوع، می‌شود نشان داد که اگر دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 را به هم بیندیم، جسمی به دست می‌آید که از نظر مکانیکی مثل جسمی به جرم $m_1 + m_2$ رفتار می‌کند. به عبارت دیگر، جرم مانند کیتهای اسکالار جمع می‌شود (اسکالار هم هست). یکی از کاربردهای عملی این روش — تعیین جرم اجسام از راه مقایسه شتاب نسبی آنها در اثر نیروی یکسان — اندازه‌گیری دقیق جرم اتمه است. در این مورد، نیرو نیروی منحرف‌کننده مغناطیسی، و شتاب شتاب مركّب‌است، اما اصول کار دقیقاً همان است که دیدیم. اگر نیروی مغناطیسی وارد بر دو اتم یکسان باشد، نسبت جرم‌های دو اتم برابر با عکس نسبت شتابهای آنهاست. با اندازه‌گیری مقدار انحراف، مثلاً در طیف‌سنج جرمی (شکل ۶ در فصل ۱)، می‌شود نسبت دقیق جرم اتمهای مختلف را سنجید، و با تعریف C^{12} به عنوان استاندارد، می‌شود مقادیر دقیق برای جرمها به دست آورد (مثل مقادیر جدول ۶ در فصل ۱).

۵-۵ قانون دوم نیویتون
حال می‌توانیم همه آزمایشها و تعریفهای قبلی را در یک معادله، معادله بنیادی مکانیک کلاسیک، خلاصه کنیم:

$$(1) \quad \sum \mathbf{F} = ma$$

در این معادله، $\sum \mathbf{F}$ جمع (برداری) همه نیروهایی است که بر جسم اثر می‌کنند، m جرم جسم، و a (بردار) شتاب آن است. معمولاً $\sum \mathbf{F}$ را نیروی برایند یا نیروی خالص می‌نامند.

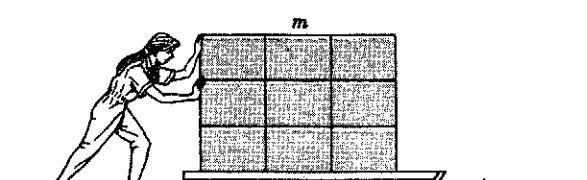
معادله ۱ بیانی از قانون دوم نیویتون است. اگر آن را به شکل $(\sum \mathbf{F})/m = a$ بنویسیم، به سادگی دیده می‌شود که اندازه شتاب جسم مستقیماً متناسب با اندازه نیروی برایند وارد بر آن است، و جهت شتاب هم با جهت نیرو موازی است. همچنین دیده می‌شود که شتاب حاصل از یک نیروی معین، با جرم جسم نسبت عکس دارد.

توجه کنید که قانون اول نیویتون را می‌شود حالت خاصی از قانون دوم تلقی کرد، چون اگر $\sum \mathbf{F} = 0$ باشد، به بیان دیگر، اگر نیروی برایند وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم صفر می‌شود و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و این همان است که قانون اول نیویتون می‌گوید. اما قانون اول یک نقطه مهم و مستقل از قانون دوم هم دارد، و آن تعریف چارچوبهای مرجع لخت است. بدون چنین تعریفی، نمی‌شود چارچوبهای را که قانون دوم نیویتون در آنها معتبر است مشخص کرد. بنابراین هر دو قانون دوم داریم تا سیستم مکانیکی کاملی داشته باشیم.

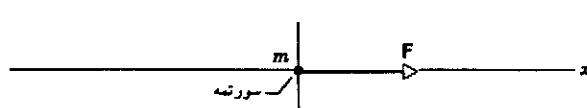
معادله ۱ معادله‌ای برداری است. این معادله را هم، مثل همه معادلات برداری دیگر، می‌توانیم به شکل سه معادله اسکالار بنویسیم:

$$(2) \quad \sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z$$

این سه معادله، مؤلفه‌های x , y , و z نیروی برایند (F_x , F_y , و F_z) را به مؤلفه‌های شتاب (a_x , a_y , و a_z) جسمی، m را به مؤلفه‌های شتاب (F_x , F_y , و F_z) می‌دهد، نشان می‌دهد.



(الف)

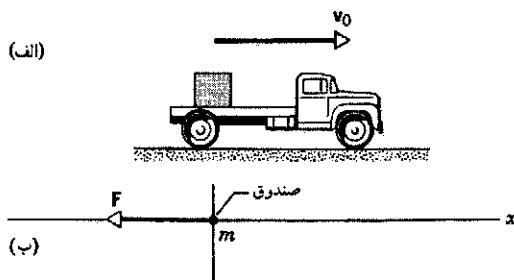


(ب)



(ج)

شکل ۴. مثالهای ۱ و ۲. (الف) دانشجویی سورتمه بارشده را روی سطحی بدون اصطکاک هل می‌دهد. (ب) نمودار جسم آزادی که سورتمه را به شکل "ذره"، همراه با نیروی وارد بر آن، نشان می‌دهد. (ج) نمودار جسم آزاد دیگری که نیروی وارد بر جسم را، وقتی که دانشجو آن را در جهت مخالف هل می‌دهد، نشان می‌دهد.



شکل ۵. مثال ۳. (الف) صندوقی در کامیونی که سرعتش در حال کم شدن است. (ب) نمودار جسم آزاد صندوق.

(که فرض می‌کنیم ثابت است) بر صندوق وارد می‌شود؟ فرض کنید صندوق روی کفه نمی‌لغزد.

حل: ابتدا شتاب (ثابت) صندوق را پیدا می‌کنیم. به این منظور از معادله ۱۵ فصل ۲ ($v = v_0 + at$) استفاده می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(62 \text{ km/h}) - (12 \text{ km/h})}{17 \text{ s}} \\ = \left(-\frac{1 \text{ km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) = -9.5 \text{ m/s}^2$$

جهت مشت راستای افقی را به طرف راست گرفته‌ایم. پس بردار شتاب به طرف چپ است.

نیروی وارد بر صندوق از قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$F = ma \\ = (360 \text{ kg})(-9.5 \text{ m/s}^2) = -340 \text{ N}$$

نیرو هم در همان جهت شتاب، یعنی به طرف چپ شکل ۵ ب است. این نیرو از طریق یک عامل خارجی به صندوق وارد می‌شود، مثلاً از طریق تسمه‌ها یا وسایل دیگری که برای محکم نگهداشتن صندوق به کار رفته است. اگر صندوق را نسبت به باشند، نیرو باید از اصطکاک بین صندوق و کفه تأمین شود. اگر این اصطکاک برای تأمین 340 N نیرو کافی نباشد، صندوق روی کفه می‌لغزد، و از دید ناظر ساکن نسبت به زمین، سرعتش با آهنگ کمتری (از کامیون) کند می‌شود.

فرض می‌کنیم که تنها نیروی افقی وارد بر سورتمه، نیروی F است که دانشجو وارد می‌کند. حالا می‌توانیم شتاب سورتمه را از قانون دوم نیوتون به دست بیاوریم:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{130 \text{ N}}{240 \text{ kg}} = 0.54 \text{ m/s}^2$$

جون شتاب ثابت است، می‌شود معادله ۲۰ فصل دوم [$v = v_0 + 2ax$] را به کار برد و سرعت نهایی را به دست آورد. می‌گذاریم $x = d$ و $v = v_0$ را حساب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود که

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{(2)(0.54 \text{ m/s}^2)(23 \text{ m})} = 1.6 \text{ m/s}$$

نیرو، شتاب، جابه‌جاوی، و سرعت نهایی سورتمه، همه مشت اند: یعنی جهت آنها، در شکل ۴ ب به طرف راست است.

توجه کنید که دانشجو، برای اینکه بتواند همین نیروی ثابت را مدام اعمال کند، باید پیوسته تندتر و تندتر حرکت کند تا از سورتمه شتابدار عقب نماند. سرانجام، سرعت سورتمه از بیشترین مقدار سرعت دویدن دانشجو بیشتر می‌شود، و از آن پس دانشجو دیگر نمی‌تواند به سورتمه نیرو وارد کند. از این پس (اگر اصطکاک نباشد) سورتمه با سرعت ثابت به لغزش خود ادامه خواهد داد.

مثال ۲. دانشجوی مثال ۱ می‌خواهد جهت سرعت سورتمه را در مدت 4.5 s بر عکس کند. به این منظور چه نیروی ثابتی باید بر سورتمه وارد کند؟

حل: با استفاده از معادله ۱۵ فصل ۲ ($v = v_0 + at$)، شتاب (ثابت) جسم را پیدا می‌کنیم:

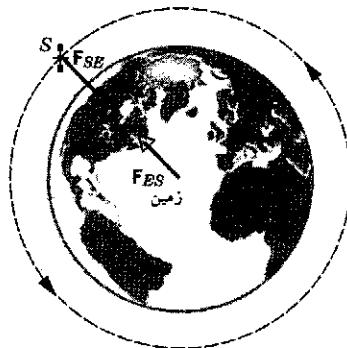
$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-1.6 \text{ m/s}) - (1.6 \text{ m/s})}{4.5 \text{ s}} = -0.71 \text{ m/s}^2$$

اندازه این شتاب، بزرگتر از اندازه شتاب مثال ۱ (0.54 m/s^2) است؛ پس در این حالت دانشجو قادر است باید سورتمه را شدیدتر هل بدهد. این نیروی (ثابت) F' به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$F' = ma = (240 \text{ kg})(-0.71 \text{ m/s}^2) \\ = -170 \text{ N} (= -38 \text{ lb})$$

علامت منفی نشان می‌دهد که دانشجو سورتمه را در جهت کاهش x ، یعنی به طرف چپ در نمودار جسم آزاد شکل ۴ ج، هل می‌دهد.

مثال ۳. صندوقی به جرم m برابر با 360 kg روی کفه کامیونی که با سرعت v برابر با 120 km/h در حرکت است قرار دارد، و نسبت به کامیون ساکن است (شکل ۵ الف). راننده ترمز می‌کند و طی 17 s سرعت را به 62 km/h می‌رساند. طی این مدت چه نیرویی



شکل ۷. ماهواره‌ای در مدار زمین. نیروهایی که در شکل می‌بینید یک زوج عمل-عکس‌العمل‌اند. توجه کنید که این دو نیرو بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند.

همین است. اگر این دو نیرو بر یک جسم اثر می‌کردند، نیروی خالص وارد بر آن جسم صفر می‌شد و حرکت شتابداری وجود نمی‌داشت.

هنگامی که چوب بیسیال به توب می‌خورد، چوب نیرویی بر توب وارد می‌کند. (عمل) و توب هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر چوب وارد می‌کند. هنگامی که فوتیالیستی توب را شوت می‌کند، یا نیرویی بر توب وارد می‌کند (عمل)، و توب هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر پا وارد می‌کند. هنگامی که دارید سعی می‌کنید اتمبیل وامانده‌ای را هل بدھید، می‌توانید حس کنید که اتمبیل هم شما را به عقب هل می‌دهد. در هر مرور، اگر هدف ما بررسی دینامیک بکی از دو جسم باشد – مثلاً فقط توب بیسیال – تنها بکی از زوج نیروهای عمل-عکس‌العمل را در نظر می‌گیریم؛ نیروی دیگر به جسم دیگری وارد می‌شود، و فقط وقتی به آن نیاز داریم که بخواهیم دینامیک آن جسم دیگر را بررسی کنیم.

در مثالهای زیر می‌بینیم که قانون سوم چگونه عمل می‌کند:

۱. ماهواره‌ای که در مدار زمین است. شکل ۷ ماهواره‌ای را نشان می‌دهد که به دور زمین می‌گردد. تنها نیروی وارد بر آن است، نیرویی که از (جادبۀ گرانشی) زمین بر ماهواره وارد می‌شود. عکس‌العمل متناظر با این نیرو کجاست؟ این نیرو F_{SE} است، نیروی ناشی از جاذبۀ گرانشی ماهواره که بر زمین وارد می‌شود.

شاید فکر کنید که ماهواره به این کوچکی نمی‌تواند جاذبۀ گرانشی قابل ملاحظه‌ای بر زمین وارد کند، اما این کار را می‌کند، درست همان‌طور که لازمه قانون سوم نیویتون است. اگر فقط اندازه دو نیرو را در نظر بگیریم، می‌دانیم که $F_{ES} = F_{SE}$ (به خاطر دارید که اندازه هر برداری مثبت است). نیروی F_{ES} باعث می‌شود که زمین شتاب بگیرد، اما چون جرم زمین خیلی زیاد است، این شتاب آنقدر کوچک است که آشکار



$$F_{AB} = -F_{BA}$$

شکل ۶. قانون سوم نیویتون. جسم دوم هم نیرویی بر جسم اول وارد می‌کند. به علاوه، معلوم می‌شود که همواره اندازه این دو نیرو یکسان و جهت آنها مخالف هم است. پس هیچ نیرویی به صورت تک نیروی مجزا نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنید که چنین نمی‌بود. دو جسم A و B را در نظر بگیرید که از محیط منزوی‌اند، و فرض کنید که A نیرویی بر B وارد می‌کند اما B نیرویی بر $A + B$ غیر صفر می‌شد و جسم مركب می‌باشد شتاب می‌گرفت. اگرچنان چیزی در کار بود، چشمۀ بی‌پایانی از انزی می‌داشتم که می‌توانست $A + B$ را، بی‌هیچ هزینه‌ای در فضا حرکت بدهد: قایقهای بادبانی می‌توانستند با دمیدن نفس مسافران به بادبانهایشان حرکت کنند، و سفینه‌های فضایی می‌توانستند با فشاری که فضانوراند بر دیواره‌هایشان وارد می‌کردند شتاب بگیرند. ناممکن بودن این چیزها نتیجه‌ای از قانون سوم نیویتون است.

به دلخواه، یکی از نیروهای برهمنش بین دو جسم را نیروی "عمل" و دیگری را نیروی "عکس‌العمل" می‌نامیم. قانون سوم نیویتون، در شکلی که از قدیم رایج بوده است، چنین بیان می‌شود:

هر عملی، عکس‌العملی به همان اندازه و در خلاف جهت عمل دارد.

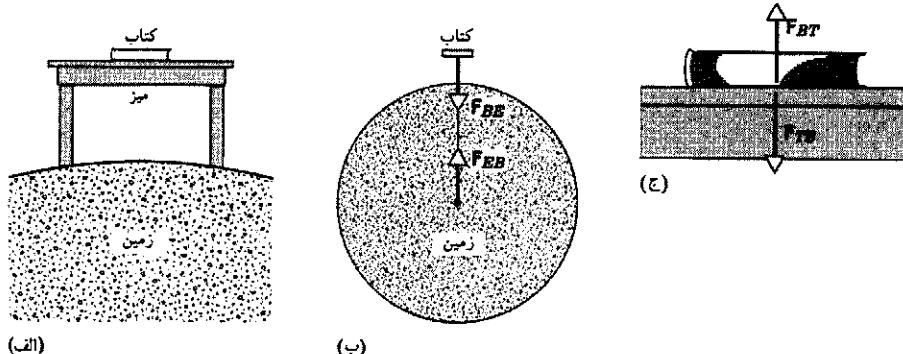
در روایت جدیدتری از قانون سوم، به نیروی متقابلی که دو جسم به هم وارد می‌کنند پرداخته می‌شود:

وقتی دو جسم به یکدیگر نیرو وارد کنند، این دو نیرو هم‌اندازه و در جهت‌های مخالف هم‌اند.

برای صورت‌بندی ریاضی این تعریف، فرض کنید – در شکل ۶ – جسم A نیروی F_{BA} را به جسم B وارد می‌کند؛ آزمایش نشان می‌دهد که جسم B هم نیروی F_{AB} را به جسم A وارد می‌کند. (بدترتب زیروندها توجه کنید؛ نیرو بر جسمی وارد می‌شود که با زیرونده اول مشخص شده است، و این نیرو را جسمی وارد می‌کند که با زیرونده دوم مشخص شده است). این را می‌شود به شکل یک معادله برداری نوشت:

$$F_{AB} = -F_{BA} \quad (3)$$

توجه کنید که عمل و عکس‌العمل همواره بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند؛ تفاوت زیروندهای اول در دو طرف معادله هم باده‌اند.



شکل ۸. (الف) کتابی روی میز در حالت سکون است؛ خود میز هم نسبت به زمین ساکن است. (ب) کتاب و زمین نیروهای گرانشی برهمن وارد می‌کنند، که یک زوج عمل-عکس العمل اند. (ج) میز و کتاب نیروهای تماسی عمل-عکس العمل بر هم وارد می‌کنند.

را به جلو می‌راند. شکل، سه زوج عمل-عکس العمل را نشان می‌دهد:

$$(صندوق ۱ و صندوق ۲) \quad F_{21} = -F_{12}$$

$$(کارگر و صندوق ۱) \quad F_{1W} = -F_{W1}$$

$$(کارگر و زمین) \quad F_{WG} = -F_{GW}$$

شتاب جسم ۲، طبق قانون دوم نیویتون، از نیروی خالص وارد برآن به دست می‌آید:

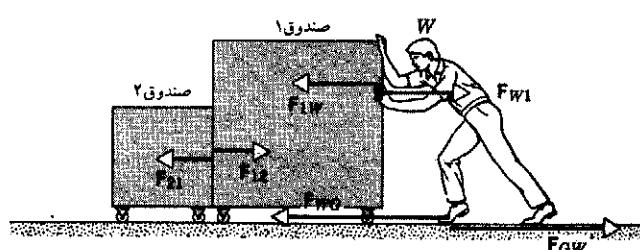
$$F_{21} = m_2 a_2$$

شتاب صندوق ۱ هم از نیروی خالص وارد بر این صندوق تعیین می‌شود:

$$F_{1W} - F_{12} = m_1 a_1$$

در رابطه بالا جمع برداری دو نیرو را به صورت تفاضل اندازه دو نیرو نوشته‌ایم، چون این دو در جهت مخالف هم بر صندوق ۱ اثر می‌کنند. اگر دو صندوق در تماس با هم بمانند، شتابشان باید یکی باشد. این شتاب را با a نشان می‌دهیم و دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$F_{1W} = (m_1 + m_2)a$$



شکل ۹. کارگری صندوق ۱ را هل می‌دهد، و صندوق ۱ هم صندوق ۲ را هل می‌دهد. صندوقها روی چرخ‌اند و می‌توانند آزادانه حرکت کنند؛ یعنی اصطکاک صندوقها با زمین ناجیز است.

۲. کتابی که روی میز ساکن است. شکل ۸الف کتابی را نشان می‌دهد که روی میزی، به حالت سکون، قرار دارد. زمین کتاب را با نیروی F_{BE} به طرف پایین می‌کشد، اما کتاب شتاب نمی‌گیرد چون این نیرو با نیروی تماسی F_{BT} خشی می‌شود. این نیرو با نیروی اول هماندازه و در جهت مخالف آن است، و میز آن را بر کتاب وارد می‌کند.

شکل ۸ب این زوج عمل-عکس العمل را نشان می‌دهد. هم‌اندازه F_{BT} و F_{BE} هم‌اندازه و در جهت مخالف همانند، اما زوج عمل-عکس العمل نیستند. چرا؟ چون هر دو بر یک جسم - به کتاب - وارد می‌شوند. این دو نیرو هم دیگر را خشی می‌کنند، و به همین علت است که شتاب کتاب صفر است.

هر یک از این دو نیرو البته باید در جایی یک نیروی عکس العمل متناظر هم داشته باشد. این عکس العملها کجا هستند؟ عکس العمل F_{BE} نیروی F_{BB} است، نیروی (گرانشی) وارد بر زمین از طرف کتاب. شکل ۸ب این زوج عمل-عکس العمل را نشان می‌دهد.

شکل ۸ج عکس العمل F_{BT} را نشان می‌دهد، که نیروی F_{TB} است، یعنی نیروی تماسی ای که کتاب بر میز وارد می‌کند. زوجهای عمل-عکس العمل این مسئله، که کتاب هم در آنها دخیل است، و اجسامی که این نیروها بر آنها اثر می‌کنند، عبارت‌اند از

$$\text{زوج اول: } F_{BE} = -F_{EB} \quad (\text{کتاب و زمین})$$

$$\text{زوج دوم: } F_{BT} = -F_{TB} \quad (\text{کتاب و میز})$$

۳. هل دادن یک ردیف صندلی. شکل ۹ کارگری (W) را نشان می‌دهد که دو صندوق را هل می‌دهد. هر یک از این دو صندوق روی صفحه چرخداری است که می‌تواند با اصطکاک ناجیزی روی زمین حرکت کند. کارگر نیروی F_{W1} را بر صندوق ۱ وارد می‌کند، و صندوق ۱ هم با نیروی عکس العمل F_{W2} کارگر را به عقب می‌راند. صندوق ۱ صندوق ۲ را با نیروی F_{21} هل می‌دهد. (توجه کنید که کارگر مستقیماً بر صندوق ۲ نیروی وارد نمی‌کند). کارگر برای اینکه به جلو حرکت کند باید یک نیروی F_{GW} بر زمین وارد کند. کارگر F_{W1} را بر زمین ناجیز است.

F' (که همان عکس العمل به F است)، w (وزن فنر که معمولاً قابل چشمپوشی است)، و P (که از سقف به فنر وارد می‌شود). وقتی فنر در حالت سکون است، نیروی خالص وارد بر آن باید صفر شود:

$$\bullet \quad P + w + F' = 0$$

عکس العمل به P نیرویی است که (مثلاً به اسم P') که بر سقف اثر می‌کند. چون در این نمودارها سقف را به عنوان جسم مستقلی بررسی نکرده‌ایم، P' را هم نشان نداده‌ایم.

۷-۵ یکاهای نیرو

قانون دوم نیوتن ($ma = F$) هم، مثل همه معادلات دیگر، باید از نظر ابعادی سازگار باشد. بعد طرف راست T [m][a] = ML/T^2 است (از فصل ۱ به خاطر دارید که [] نماد بعد است)، بنابراین، بعد نیرو هم باید همین باشد.

$$[F] = ML/T^2$$

منشأ نیرو هرچه باشد گرانشی، الکتریکی، هسته‌ای، یا هر چیز دیگر - و معادله توصیف‌کننده آن هر قدر بیچیده هم باشد، بعد آن همین است. در سیستم یکاهای SI، جرم را بر حسب kg و شتاب را بر حسب m/s^2 می‌سنجند. برای اینکه به جرم 1 kg 1 m/s^2 شتاب بدھیم، باید 1 kg m/s^2 نیرو به آن وارد کنیم. این ترکیب نه چندان خوش دستی یکاها را نیوتون (مخفف N) می‌نامند:

$$1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

اگر جرم را بر حسب kg و شتاب را بر حسب m/s^2 بسنجیم، قانون دوم نیوتون نیرو را بر حسب N بدهست می‌دهد.

دو سیستم رایج دیگر، سیستم cgs (سانتی‌متری‌گرم‌ثانیه) و سیستم بریتانیایی‌اند. در سیستم cgs، جرم را بر حسب گرم و شتاب را بر حسب cm/s^2 می‌سنجند. یکای نیرو در این سیستم دین (dyne) نامیده می‌شود که معادل است با $g \cdot cm/s^2$. از آنجاکه $1\text{ g} = 10^{-5}\text{ dyne}$ و $100\text{ cm/s}^2 = 1\text{ m/s}^2$ است، نتیجه می‌شود $1\text{ N} = 10^5\text{ dyne}$. دین یکایی بسیار کوچک است؛ تقریباً برابر با وزن یک میلی‌مترمکعب آب. (یک نیوتون در حدود وزن نیم فنجان آب است).

در سیستم بریتانیایی، نیرو را بر حسب پاوند، و شتاب را بر حسب ft/s^2 می‌سنجند. در این سیستم، جرمی که دراثر نیروی 1 lb شتاب 1 ft/s^2 می‌گیرد، یک اسلág است.

سیستمهای پایه دیگری هم هستند که گاه به گاه به کار می‌روند، اما این سه سیستم فعلًاً از همه رایج‌ترند. این یکاهای رایج در جدول ۲ فهرست شده‌اند؛ جدول مفصلتری در پیوست ز آمده است.

۸-۵ وزن و جرم

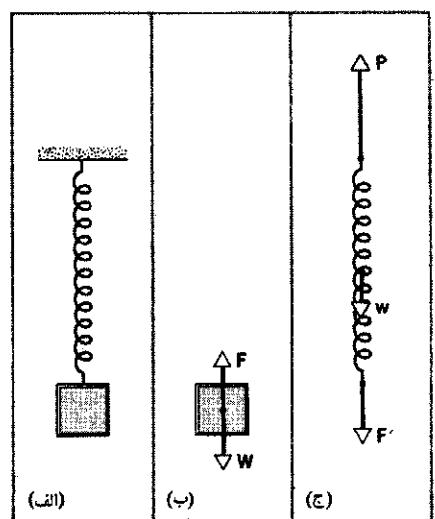
وزن هر جسم در روی زمین نیروی گرانشی‌ای است که زمین بر آن بارداری می‌کند. وزن هم، مثل همه نیروهای دیگر، کمیتی برداری

اگر مجموعه صندوقهای ۱ و ۲ را به صورت یک جسم واحد به جرم $m_1 + m_2$ در نظر می‌گرفتیم هم همین معادله به دست می‌آمد. نیروی خارجی خالص وارد بر این جسم مجموع، F_{TW} است. در این صورت، دو نیروی تماسی در مرز میان صندوق ۱ و صندوق ۲ نیروهای داخلی‌اند و در معادله توصیف کننده جسم یکباره وارد نمی‌شوند. نیروهای اتمی‌ای که ذرات جسم را کنار هم نگه می‌دارند هم همین طور؛ هر نیروی داخلی‌ای در واقع یکی از اعضای زوج عمل-عکس‌العملی است که بر اجزای مختلف (مثلاً دو اتم) اثر می‌کنند. این نیروها، وقتی که معادلات مربوط به اجزای مختلف را با هم جمع می‌کنیم، در مجموع صفر می‌شوند.

توجه کنید که در این مثال، کارگر عامل فعالی است که صندوقها را حرکت می‌دهد، اما آنچه این کار را ممکن می‌کند نیروی عکس‌العمل زمین است. اگر بین زمین و کفشهای کارگر اصطکاکی وجود نمی‌داشت، کارگر نمی‌توانست سیستم را به جلو براند.

۴. جسمی که از فنر آویزان است. شکل ۱۰ الف جسمی را نشان می‌دهد که، به حالت ساکن، از فنری آویزان است. سر دیگر فنر به سقف متصل است. نیروهای وارد بر جسم، یکی وزن آن W (به طرف پایین) و دیگری نیروی F (به طرف بالا) است که از فنر وارد می‌شود. جسم تحت تأثیر این نیروها در حالت سکون است، اما این دو نیرو زوج عمل-عکس‌العمل نیستند، چون که در این مورد هم بر یک جسم وارد می‌شوند. عکس‌العمل به نیروی W نیروی گرانشی‌ای است که جسم بر زمین وارد می‌کند، و در شکل نیامده است.

عکس‌العمل به F (نیرویی که از فنر بر جسم وارد می‌شود) نیرویی است که از جسم بر فنر وارد می‌شود. برای نشان دادن این نیرو، نیروهای وارد بر فنر را در شکل ۱۰ ج نمایش داده‌ایم. این نیروها عبارت‌اند از



شکل ۱۰. (الف) جسمی که در حالت سکون از فنری آویزان است. (ب) نیروهای وارد بر جسم. (ج) نیروهای وارد بر فنر.
Ramin.samad@yahoo.com

جدول ۲. یکاهای کمیتی‌های دخیل در قانون دوم نیوتون.

سیستم	نیرو	جرم	شتاب
SI	نیوتون (N)	کیلوگرم (kg)	m/s ^۲
cgs	دین	گرم (g)	cm/s ^۲
بریتانیایی	پاوند	اسلگ	ft/s ^۲

است. جهت این بردار جهت نیروی گرانشی است، یعنی به طرف مرکز زمین. اندازه نیرو بحسب یکاهای وزن، مثلاً پاوند یا نیوتون، بیان می‌شود.

باید فعلاً فرض کنیم که سطح زمین نماینده چارچوب مرجعی است که به قدر کافی لخت است. جسمی به جرم m را نزدیک سطح زمین رها می‌کنیم و می‌گذاریم که تحت اثر گرانش زمین آزادانه سقوط کند. تنها یک نیرو بر جسم اثر می‌کند، که وزن W جسم است. شتاب جسم همان شتاب سقوط آزاد a است. قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = ma$ ، را برای این جسم در حال سقوط آزاد به کار می‌بریم؛ $W = mg$ به جای F و g را به جای a می‌گذاریم؛ نتیجه می‌شود که وزن W را زن و شتاب سقوط، هر دو بردارهایی در جهت مرکز زمین‌اند. پس می‌شود نوشت

$$W = mg \quad (4)$$

که در آن W اندازه بردار وزن و g اندازه بردار شتاب است. البته برای تعیین وزن اجسام، لازم نیست که آنها در حال سقوط آزاد باشند. اگر جسمی در نزدیکی سطح زمین در حالت سکون باشد، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، برای اینکه جسم در حالت سکون بماند باید نیرویی به اندازه mg اما در جهت مخالف وزن جسم بر آن اثر کند. در شکل ۱، فرازین نیرو را تأمین می‌کند. نیرویی که فنر بر جسم وارد می‌کند. باید، از نظر عددی، برابر با mg باشد. در شکل ۸، میز نیرویی رو به بالای F_{BT} بر کتاب وارد می‌کند و آنرا در حالت تعادل نگه می‌دارد؛ اندازه این نیرو با وزن کتاب (mg) برابر است.

چون g در نقاط مختلف یکی نیست، وزن یک جسم (W) هم در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. مثلاً وزن جسمی به جرم 1 kg در نقطه‌ای با 9.8 m/s^2 است، اما همین جسم در جایی با 9.78 m/s^2 وزنی برابر با 9.78 N دارد. اگر این دو وزن را با سنجش مقدار کشیدگی فنر تعیین کنیم، خواهیم دید که کشیدگی‌های لازم برای معادل کردن جسم ۱ کیلوگرمی در دو محل مختلف، کمی با هم تفاوت دارند. بنابراین، برخلاف جرم، که یک خاصیت ذاتی هر جسم است، وزن اجسام به موقعیت آنها نسبت به مرکز زمین بستگی دارد. چنانکه در بخش بعد می‌بینیم، ترازووهای فنری در نقاط مختلف روی زمین ممکن است مقادیر مختلفی نشان بدهند، اما ترازووهای وزنهای (یا تعادلی) در تمام این نقاط یک مقدار نشان می‌دهند.

چون زمین به دور خودش می‌چرخد، سطح آن نمی‌تواند یک چارچوب مرجع لخت باشد. همه چارچوبهای مرجع واقع بر سطح زمین، در اثر چرخش، شتاب مرکزگرا دارند. شتاب سقوط آزادی که در این چارچوب نالخت می‌سنجیم، دست‌کم دو مؤلفه دارد: یکی ناشی از جاذبه گرانشی زمین و دیگری ناشی از چرخش آن. اثرکوچکی که این چرخش بر جا می‌گذارد آن است که شتاب سقوط آزاد از استوا (جایی که شتاب مرکزگرا بیشینه است) تا قطبها (جایی که شتاب مرکزگرا صفر است) در حدود ۳٪ تغییر کند. فعلًا از این اثرکوچک نالختی در وزن اجسام صرف‌نظر می‌کنیم، اما در فصل ۱۶ دوباره به آن بر می‌گردیم. در بخش ۸ آثار دیگر نالختی چارچوبها بر اجسام را بررسی می‌کنیم.

در آن نواحی‌ای از فضای که آثار گرانشی وجود نداشته باشد وزن اجسام صفر می‌شود، اما خواصی که به جرم سنتگی دارد، مثلاً مقاومت در برابر شتاب گرفتن تغییر نمی‌کند و مثل همان خواص در روی زمین است، در سفینه‌ای که فارغ از میدان گرانشی در فضای حرکت می‌کند، بلند کردن قطعه بزرگی از سرب کار ساده‌ای است. ($W = ma$ ، اما اینجا هم اگر فضانوردی به این قطعه لگد بزند، شست پایش درد می‌گیرد ($a \neq 0$)).

برای شتاب دادن به اجسام در فضای تهی از گرانش همان‌قدر نیرو لازم است که در سطح بدون اصطکاکی روی زمین، چون که جرم اجسام در نقاط مختلف فرق نمی‌کند. اما نیروی لازم برای بالاکشیدن اجسام در مقابل جاذبه گرانشی، در سطح زمین بیشتر است تا در نقاطهای که در فاصله زیادی از زمین واقع شده است، چون وزن اجسام در نقاط مختلف متفاوت است.

در هر نقطه معین (که g مقدار مشخصی دارد)، جرم و وزن با هم متناسب‌اند. مثلاً گاهی می‌نویستند $2\text{ lb} = 1\text{ kg}$ ، که در آن، " = " یعنی "معادل است با". این تنها یک تاظر عددی است نه یک معادله واقعی. (زیرا در معادلات، دو کمیت با ابعاد متفاوت نمی‌توانند با هم برابر باشند!) مسئله تا حدی شبیه به آن است که بگوییم $1\text{ ft} = 1\text{ m}$ سیب: اگر صحبت بر سر قیمت باشد، x یک مقدار دارد، و اگر بر سر حجم آبی باشد که در هر کدام هست، مقدار دیگری که کاملاً با اولی متفاوت است.

رابطه بین جرم و وزن، تنها به‌ازای یک مقدار معین g معتبر است، بنابراین باید این رابطه را با احتیاط به کار برد. در غیر این صورت ممکن است چار سردرگمی یا حتی سردد شوید. مثلاً، اگر روزگاری فضایی‌مای خودتان را در ماه متوقف کردید و در یکی از رستورانهای مشهور آن، طبق عادت، یک همبرگر ریب یاوندی سفارش دادید، ممکن است ساندویچی به قطر تقریباً ۱ فوت نصبیتان شود (گرانش ماه در حدود یک ششم گرانش زمین است. در سطح ماه $1\text{ kg} = 0.38\text{ lb}$ است). اگر همین سفارش را در سطح خورشید بدھید، همیرگری به دستان می‌رسد که قطر آن به زحمت به 1 m می‌رسد، اما البته کاملاً مغز بخت شده است! (در خورشید، $1\text{ kg} = 62\text{ lb}$ است). واضح

از هر ستاره یا سیاره‌ای باشند، حاصل می‌شود. فضانوردان در این نواحی، در فضایمایی که با موتور خاموش در حرکت باشد، آزادانه شناور می‌شوند. اگر فضایما حول محوری بچرخد، فضانوردانی که عمود بر محور چرخش روی سطح چرخانی ایستاده باشند، احساس "وزن مصنوعی" می‌کنند، چون‌که این سطح باید فضانوردان را به بالا براند تا نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای آنها را تأمین کند. این نیروی رو به "بالا" (که از سطح به پای فضانوردان وارد می‌آید)، مثل وزن احساس می‌شود.

اگر از روی تخته پرش شیرجه برویم، یا از روی ترامبولین به هوا بپریم، در هوا در حالت سقوط آزاد خواهیم بود؛ سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند، و خودمان را "بی وزن" احساس می‌کنیم. همین طور اگر در اتفاقی در نزدیکی سطح زمین در حال سقوط آزاد باشیم، و خود اتفاق هم در حال سقوط آزاد باشد، بار هم سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند و احساس "بی وزن" خواهیم کرد. در چنین حالتی، آزادانه در اتفاق شناور خواهیم بود. سه نمونه از چنین وضعیتی عبارت‌اند از: ۱. فضایمایی در مدار زمین که در بالا بررسی اش کردیم، ۲. اتفاق آسانسوری که کابل آن بریده است و دارد سقوط می‌کند، و ۳. هوایمایی که روی مسیر سهمی معینی حرکت می‌کند. فرض کنید هوایمایی دارد اوج می‌گیرد و در لحظه معینی در حال بالا رفتن با سرعت $\frac{1}{2}$ در جهتی است که با سطح افقی زاویه ϕ می‌سازد. اگر شما یکی از مسافران هوایما باشید، و اگر خود هوایما در آن لحظه ناگهان ناپذید شود، مسیر شما به شکل مسیر سهمی سقوط آزاد (معادله 23 در فصل 4) خواهد بود. اگر به جای اینکه هوایما ناپذید شود، خلبان آن را در همین مسیر هدایت کند، هوایما عملأ در حال سقوط آزاد خواهد بود و اجسام داخل آن در حالت "بی وزنی" شناور خواهند شد. در واقع از چنین سیستمی برای آموزش فضانوردان استفاده شده است، تا به حالت "بی وزنی" در فضایمایی مدارگرد عادت کنند. در هر یک از سه وضعیت بالا، وزن شما فقط به مقدار خیلی کمی نسبت به حالتی که روی زمین ایستاده‌اید تغییر می‌کند، اما در کار نبودن سطحی که به شما نیرو وارد کند موجب احساس "بی وزنی" می‌شود.

۹-۵ اندازه‌گیری نیرو

در بخش ۳-۵ نیرو را از طریق اندازه‌گیری شتابی که به یک جسم استاندارد در اثر کشیده شدن با فنر کسب می‌کند تعریف کردیم. این روش، که می‌توانیم آن را یک روش دینامیک برای سنجش نیرو بنامیم، اگرچه برای تعریف نیرو مناسب است، اما همین‌تهی یک روش واقعاً عملی برای سنجش نیرو نیست. (سنجش مستقیم شتاب هم عموماً آسان نیست). روش دیگر اندازه‌گیری نیرو مبتنی بر سنجش تغییر شکل یا تغییر اندازه جسمی (متلاً فنر) است که در حالتی که شتاب ندارد نیرو بر آن وارد می‌شود. این را می‌توانیم روش استاتیک سنجش نیروها بنامیم. اساساً وقت استاتیک این است که اگر جسمی تحت اثر چند نیرو

است که ما در واقع بر حسب مقدار ماده (جرم) سفارش می‌دهیم، نه بر حسب وزن. یک همبرگر 10^0 گرمی (در حدود $1/4$ پاوند روی زمین) در همه جای عالم دقیقاً یک اندازه دارد.

بی وزنی

عکس‌های فضانوردان در فضایمایی مدارگرد (متلاً در شکل 11). آنها را در حالتی نشان می‌دهد که آزادانه شناورند؛ این حالت را معمولاً "بی وزنی" می‌نامند. اما بنابر تعریف ما از وزن، این فضانوردان به هیچ وجه بی وزن نیستند؛ در واقع، شاید وزن آنها فقط کمتر از 10% نسبت به حالت عادی در سطح زمین کم شده باشد. این کاهش وزن هم به خاطر آن است که گرانش زمین با افزایش ارتفاع ضعیف‌تر می‌شود.

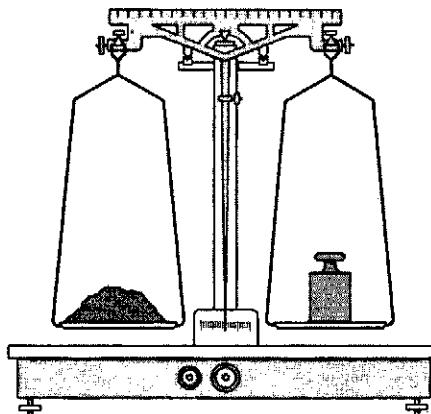
به دو دلیل است که گفته می‌شود این فضانوردها "بی وزن"‌اند:

۱. از دید ناظرهای خارجی، فضانوردان در حال سقوط آزاد به طرف مرکز زمین‌اند. اینکه ارتفاع آنها کم نمی‌شود تنها به این علت است که سرعت مماسی فضایمایی چنان تنظیم شده است که گرانش شتاب مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین کند. ۲. چون خود سفینه هم عیناً مثل سرنشیتانش سقوط می‌کند، "کف"‌ای در کار نیست که با فضانوردها در تماس باشد و آنها را متعادل نگه دارد. احساس یا ادراک روانی ما از وزن، مربوط است به تیرویی که کف زمین بر ما وارد می‌کند. اگر در آب شناور باشیم، احساس می‌کنیم سبکتریم یعنی احساسمان از وزن کمتر می‌شود (اما از جرم باز هم احساس کاملی داریم؛ متلاً وقتی بخواهیم با شنا کردن در آب شتاب بگیریم). اگر سوار بر آسانسوری باشیم، وقتی آسانسور به طرف بالا شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان زیاد می‌شود، وقتی به طرف پایین شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان کم می‌شود. این اثر که آن را در مثال 7 بررسی خواهیم کرد، نتیجه افزایش یا کاهش نیروی رو به بالایی است که کف آسانسور اعمال می‌کند.

بی وزنی واقعی تنها در اعماق فضا، در نقاطی که خیلی دور



شکل ۱۱. فضانوردهای شاتل فضایی در یک حالت سقوط آزادند، و این شناوری آنها طوری به نظر می‌رسد که انگار بی وزن‌اند.



شکل ۱۳. ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم طول، که جوتهای مختلف را از طریق توزین آنها با هم مقایسه می‌کند.

برای سنجش هر نیروی مجهولی (نه الزاماً کشش زمین بر اجسام) به کار برد.

استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای با بازوهای هم طول (شکل ۱۳)، روش استاتیک دیگری برای سنجش نیروهای است. رایج‌ترین کاربرد عملی این روش، مقایسه وزنهای معلوم و مجهول است؛ وقتی بازوها متعادل می‌شوند یعنی وزن اجسام دو طرف یکی است. به علاوه، چون و برای هر دو بازوی ترازوی یکی است، برابری وزنها به معنی برابری جرمهاست. بنابراین، ترازوی دوکفه‌ای با سنجش وزن اجسام در واقع برابر نسبی جرم‌های آنها را تعیین می‌کند. (وزنهای معلوم این ترازوها را معمولاً با جرم‌شان برحسب گرم مشخص می‌کنند). این سیستم در هر مقدار و، جز صفر، کار می‌کند؛ ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم طول را می‌شود، به همان خوبی زمین، برای مقایسه جرم اجسام در کره ماه هم بکار برد. اما در فضای بدون گرانش، یا در بی‌وزنی نسبی در مدارهای زمین، چنین ترازویی به درد نمی‌خورد.

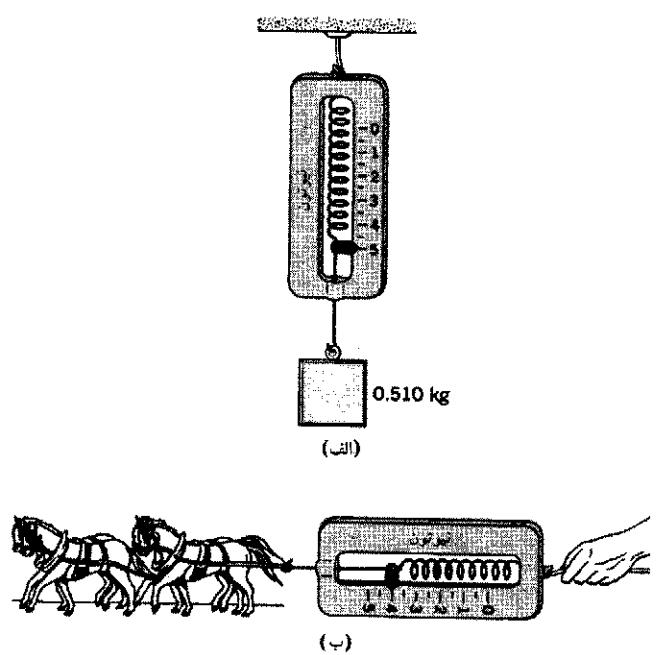
۵- ۱۰. کاربردهای قوانین نیوتون

هر مسئله‌ای که قرار است با استفاده از قوانین نیوتون حل شود رهیافت خاص خود را می‌طلبد، اما چند قاعدة عمومی وجود دارد که برای راه‌اندازی حل همه انواع این مسائل به کار می‌رود. در این بخش، این قواعد را معرفی می‌کنیم و کاربردشان را با چندین مثال نشان می‌دهیم. بهترین راه یادگیری این قواعد، مطالعه مثالهایست.

مراحل اساسی در کاربرد قوانین نیوتون اینها هستند: ۱. جسمی را که می‌خواهید وضعیتش را تحلیل کنید خوب مشخص کنید. گاهی ممکن است دو یا چند جسم مورد نظر باشند؛ در این صورت معمولاً هر یک را باید جداگانه بررسی کرد. ۲. محیطی را که نیروها از آن به جسم وارد می‌شوند — سطح، اشیای دیگر، زمین، فنر-ریسمان، و مانند آن — شناسایی کنید. ۳. یک چارچوب مرجع لخت (بدون شتاب) مناسب انتخاب کنید. ۴. یک دستگاه مختصات مناسب (در

قرار بگیرد و شتاب آن صفر باشد، جمع برداری نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. و این البته همان قانون دوم نیوتون است. اگر فقط یک نیرو بر جسمی اثر کند به آن شتاب می‌دهد؛ برای اینکه این شتاب را صفر کنیم، می‌توانیم نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت نیروی اول به جسم وارد کنیم. در عمل کاری می‌کنیم که جسم در حالت سکون قرار بگیرد. اگر نیروی معینی را به عنوان نیروی یکه انتخاب کنیم، می‌توانیم نیرو را بسنجیم. متلاکش زمین بر یک جسم استاندارد در یک نقطه معین را می‌شود نیروی یکه اختیار کرد.

یکی از ابزارهای رایج سنجش نیرو ترازوی فنری است (شکل ۱۲). ترازوی فنری شامل یک فنر مارپیچی است که در یک سر آن شاخصی وجود دارد که روی مقیاس حرکت می‌کند. نیرویی که براین ترازو وارد شود طول فنر را تغییر می‌دهد. اگر جسمی به وزن $N = 10.2\text{ kg}$ در جایی که $g = 9.8\text{ m/s}^2$ است) را از این ترازو باویزیم، فنر کشیده می‌شود تا نیرویی به اندازه وزن جسم و در جهت مخالف وزن به آن وارد کند. در این نقطه نشانه‌ای می‌گذاریم و آن را با "نیروی $N_{\text{ر}} = 2.0\text{ N}$ " برچسب می‌زنیم. حالا می‌توانیم همین کار را با وزنهای $N = 3.0\text{ N}$ و غیره را تکرار کنیم و نشانه‌های متناظر با این نیروها را روی ترازو مشخص کنیم. به این ترتیب، فنر مدرج می‌شود. فرض بر این است که نیروهایی که فنر را تا نقطه یکسانی بکشند، یکسان‌اند. حالا می‌شود این ترازوی مدرج را، به روش شکل ۱۲ ب



شکل ۱۲. (الف) برای مدرج کردن ترازوی فنری، در نقطه‌ای با g معین، جرم معلومی به آن می‌آویزیم و نیروی متناظر با آن جرم راعلامتگذاری می‌کنیم. در شکل، جرم 5.10 kg ، به ازای $g = 9.8\text{ m/s}^2$ ، متناظر با نیروی 5.0 N است. (ب) ترازوی مدرج را می‌توانیم برای سنجش نیروهای مجهول به کار ببریم. اساس کار همه ترازوهای فنری — متلاکش زمین بر اداره پست، ترازوهای یک کفه‌ای فروشگاهها، و ترازوهای حمام — همین است.

مثال ۴. شکل ۱۴ الف قطعه‌ای به جرم $m = 15 \text{ kg}$ را نشان می‌دهد که با سه ریسمان نگه داشته شده است. کشش هر سه ریسمان را پیدا کنید.

حل: گره محل تلاقی سه ریسمان را به عنوان "جسم" در نظر می‌گیریم. شکل ۱۴ ب نمودار جسم-آزاد گره را نشان می‌دهد، که تحت اثر سه نیروی T_A , T_B , و T_C (کشش ریسمانها) در حالت سکون است. (فرض کردہ‌ایم که گره هم، مثل خود ریسمانها، بی‌جرم است؛ بنابراین وزن آن وارد نمودار نمی‌شود). محورهای x و y را مثل شکل ۱۴ ب انتخاب می‌کنیم؛ به این ترتیب، می‌توانیم نیروها را به مؤلفه‌های x و y تجزیه کنیم. مؤلفه‌های شتاب صفرند، بنابراین،

$$\sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = ma_x = 0$$

$$\sum F_y = T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = ma_y = 0$$

از شکل ۱۴ ب دیده می‌شود که

$$T_{Ax} = -T_A \cos 30^\circ = -86.6 T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \sin 30^\circ = 50.0 T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \cos 45^\circ = 70.7 T_B$$

$$T_{By} = T_B \sin 45^\circ = 70.7 T_B$$

و

$$T_{Cx} = 0$$

$$T_{Cy} = -T_C$$

در ادامه، نمودار جسم-آزاد خود جرم m را بررسی می‌کنیم؛ شکل ۱۴ ج. فقط مؤلفه y وارد می‌شود، و باز هم شتاب صفر است:

$$T_{Cy} - mg = ma_y = 0$$

چون T_C فقط مؤلفه y دارد، می‌شود نوشت

$$T_C = mg = (15 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 147 \text{ N}$$

حالا می‌توانیم معادلات مربوط به مؤلفه‌های x و y نیروهای وارد بر گره را چنین بازنویسی کنیم:

$$\text{مؤلفه } x: T_A + 70.7 T_B = 0$$

$$\text{مؤلفه } y: T_A + 70.7 T_B - T_C = 0$$

مقدار به دست آمده برای T_C را در جای T_C قرار می‌دهیم و دو معادله را حل می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$T_A = 108 \text{ N}$$

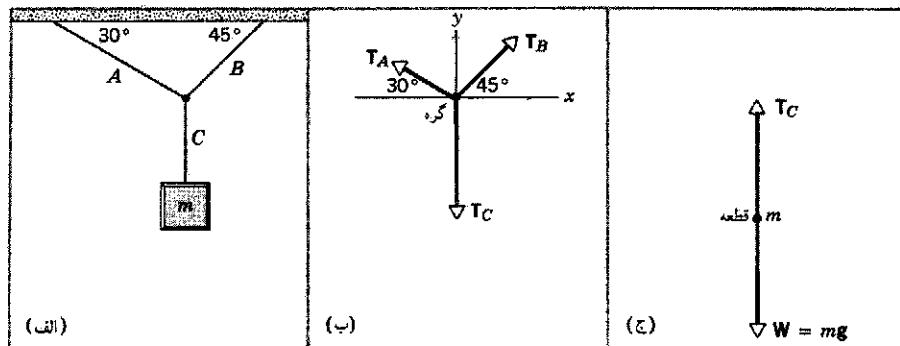
$$T_B = 132 \text{ N}$$

چارجوب مرجعی که انتخاب کرده‌اید) مشخص کنید؛ مبدأ و جهت محورها را چنان انتخاب کنید که مسئله را تا حد ممکن ساده کنند. اگر دقت کافی داشته باشید، می‌توانید برای هر جزئی از یک مسئله پیچیده دستگاه مختصات جداگانه‌ای به کار ببرید. ۵. نمودار جسم-آزادی رسم کنید و در آن هر جسم را به شکل یک ذره، همراه با همه نیروهای وارد بر آن، نمایش بدهید. ۶. حالا می‌توانید قانون دوم نیوتون را برای همه مؤلفه‌های نیرو و شتاب به کار بگیرید.

در مثالهای زیر فرضهایی می‌کنیم که مسئله را ساده می‌کنند، اما در مقابل بخشی از واقعیت فیزیکی را از دست می‌دهیم. اجسام را مثل ذره در نظر می‌گیریم، به این ترتیب همه نیروهای وارد بر جسم مورد نظر در یک نقطه اثر می‌کنند. همه حرکات را بدون اصطکاک فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که همه ریسمانها بدون جرم‌اند (برای شتاب دادن به آنها نیروی لازم نیست) و تغییر طول نمی‌دهند (یعنی کشیده نمی‌شوند؛ بنابراین، اجسامی که حرکت خطی دارند و با ریسمان کشیده به هم متصل‌اند، سرعت و شتاب یکسان دارند). قرقه‌ها بدون جرم‌اند (نیرویی برای چرخاندن‌شان لازم نیست) و محورشان هم بدون اصطکاک است. همه اجسام صلب‌اند (زیرا بار تغییر شکل نمی‌دهند و نیرو آن‌ا در آنها منتقل می‌شود). مثالهای زیر، با وجود این ساده‌سازیها، دید خوبی از روش‌های اساسی تحلیل دینامیکی به دست می‌دهند. بعداً در همین کتاب عوامل روش‌های جدیدی را مطرح می‌کنیم که به کمک آنها می‌توانیم وضعیتها فیزیکی را به شکل واقعی تری تحلیل کنیم. مثلاً، در فصل ۶ نیروی اصطکاک را در تحلیل مسئله می‌گنجانیم، و در فصل ۱۲ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جرم قرقه و اصطکاک محور آن را وارد مسئله کرد. فعلاً از این آثار، که می‌دانیم مهم‌اند، چشم می‌پوشیم تا بهتر بتوانیم روی روش‌های روشی اساسی‌تر مورد استفاده در حل مسائل تأکید کنیم.

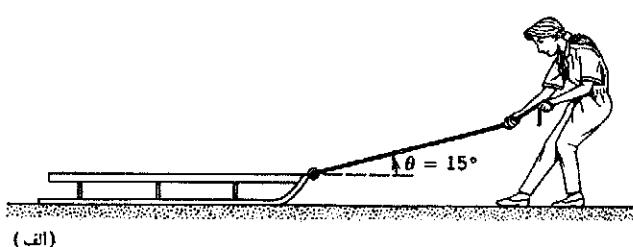
در مثال زیر، کشش T را معرفی می‌کنیم، نیرویی که ریسمان با آن اجسام متصل به خود را می‌کشد. در ریسمانهایی که ضخامتشان ناچیز است، چهت کشش همواره باید با خود ریسمان موازی باشد. (این گفته، چنانکه در فصل ۱۴ خواهیم دید، در مورد تیرهای کلفت و سخت درست نیست). در ریسمانهایی که جرم‌شان ناچیز است، کشش به طور یکنواخت در طول ریسمان منتقل می‌شود، یعنی در دو سر ریسمان یکسان است.

از دید میکروسکوپیکی، هر جزء از ریسمان جزء مجاور خود را می‌کشد (و خودش هم، طبق قانون سوم نیوتون، توسط آن کشیده می‌شود). به این ترتیب است که نیروی کشش از یک سر ریسمان به جسمی که به سر دیگر آن متصل است منتقل می‌شود. بر جزء 2 ریسمان، یک کشش T در یک چهت وارد می‌شود که ناشی از جزء $1 - 2$ است، و یک کشش T برابر با قبلی و در خلاف چهت آن که ناشی از جزء $1 + 2$ است. اگر ریسمان را در نقطه‌ای دلخواه ببریم و به محل برش یک نیروسنج فنری بیندیم (که به روش بخش ۹-۵ مدرج شده است)، نیروسنج مستقیماً کشش T را نشان خواهد داد.

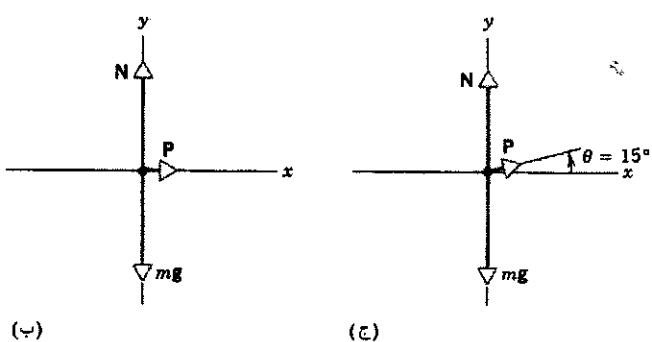


شکل ۱۴. مثال ۴. (الف) قطعه‌ای از سه ریسمان A , B , و C ، و آویزان است. (ب) نمودار جسم‌آزاد گهای که سه ریسمان را به هم متصل می‌کند. (ج) نمودار جسم‌آزاد قطعه.

این نتایج را امتحان کنید (در همه مسائل این کار را بکنید) تا بینید که جمع برداری این سه نیرو واقعاً صفر است.



(الف)



(ب)

(ج)

شکل ۱۵. مثال ۵. (الف) سورتمه‌ای روی سطح افقی بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم‌آزاد سورتمه در حالت $\theta = 0^\circ$. (ج) نمودار جسم‌آزاد سورتمه در حالت $\theta = 15^\circ$.

آمده است. سطح یک نیروی عمودی N بر سورتمه وارد می‌کند. نیروها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را بدکار می‌بریم:

$$\sum F_x = P = ma_x \quad \text{مؤلفه } x:$$

$$\sum F_y = N - mg = ma_y \quad \text{مؤلفه } y:$$

اگر قرار باشد حرکت عمودی‌ای نداشته باشیم، سورتمه روی سطح می‌ماند و $a_y = 0$ است، بنابراین

$$N = mg = (7,5\text{kg})(9,8\text{m/s}^2) = 74\text{N}$$

شتان افقی برابر است با

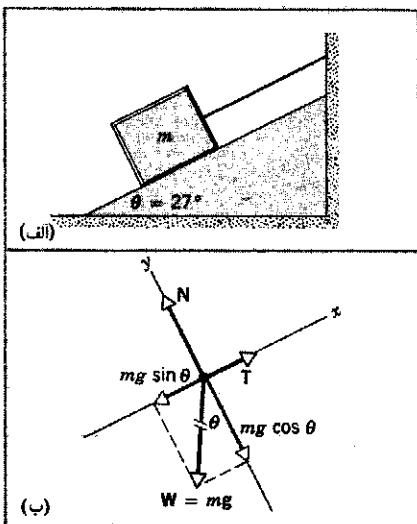
$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21\text{N}}{7,5\text{kg}} = 2,8\text{m/s}^2$$

در مثال بعد، یک نیروی دیگر را معرفی می‌کنیم: نیروی عمود بر سطح N که سطوح بر اجسام وارد می‌کنند. کتاب روی میز شکل ۸ را در نظر بگیرید. زمین نیرویی رو به پایین به کتاب وارد می‌کند (وزن کتاب)، اما کتاب در حالت تعادل است، پس برایند نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. نیروی دیگری که بر کتاب وارد می‌شود نیروی رو به بالا است که میز وارد می‌کند F_{BT} در شکل ۸. در عمل، این نیرو است که کتاب را روی سطح میز نگه می‌دارد. اگر اصطکاک نباشد، سطح فقط می‌تواند نیروی عمودی اعمال کند، یعنی فقط نیروهایی که بر سطح عمود باشند. (توجه کنید که کتاب هم نیرویی رو به پایین بر میز وارد می‌کند).

اگر دستمان را روی کتاب بگذاریم و آن را، با نیروی P ، به پایین فشار بدهیم نیروی عمودی سطح میز بر کتاب هم باید افزایش پیدا کند تا در این حالت برابر با مجموع وزن کتاب و نیروی P شود. اگر P به اندازه کافی بزرگ باشد، به حالتی می‌رسیم که میز دیگر نمی‌تواند نیروی عمودی کافی به طرف بالا تأمین کند، و کتاب میز را می‌شکند. کشش و نیروی عمود بر سطح نمونه‌هایی از نیروهای تنسی اند؛ نیرویی که جسمی که با جسم دیگر در تماس است، از طریق همین تماس، بر آن وارد می‌کند. منشأ این نیروها اتمهای اجسام‌اند، که هر یک نیروی بر اتم مجاور وارد می‌کند. نیروهای تنسی تا وقتی تأمین می‌شوند که از نیروهای بین اتنی بزرگتر نشوند؛ در غیر این صورت پیوند بین اتمها می‌شکند، و ریسمان پاره می‌شود یا سطح چند تکه می‌شود.

مثال ۵. سورتمه‌ای به جرم $m = 7,5\text{kg}$ روی سطحی بدون اصطکاک به وسیله ریسمانی کشیده می‌شود (شکل ۱۵). نیروی ثابت $P = 21\text{N}$ به ریسمان اعمال می‌شود. حرکت را در حالتی که (الف) ریسمان افقی است و (ب) ریسمان با سطح افقی زاویه $\theta = 15^\circ$ می‌سازد، تحلیل کنید.

حل: (الف) نمودار جسم‌آزاد با ریسمان افقی در شکل ۱۵ ب



شکل ۱۶.۶. مثال ۶. (الف) جرم m به کمک ریسمانی روی سطح شیبداری، در حالت سکون نگه داشته شده است. (ب) نمودار جسم-آزاد کنید که دستگاه مختصات xy را مایل گرفته ایم تا محور x با سطح موازی باشد. وزن mg را به مؤلفه ها تجزیه کرده ایم.

این معادلات را امتحان کنید. آیا معقول اند؟ در حد $\theta = 0^\circ$ چه می شود؟ به نظر می رسد که کشنش صفر می شود. آیا انتظار دارید که کشنش برای قطعه ای که روی یک سطح افقی ساکن است صفر باشد؟ در حالت $\theta = 0^\circ$, نیروی عمود بر سطح چه می شود؟ آیا معقول است؟ و T و N , در حد $\theta = 90^\circ$ چه می شوند؟ باید عادت کنید که، پیش از آغاز عملیات جبری برای حل مسئله، چنین پرسشهایی از خودتان پنکنید. اگر اشتباہی شده باشد، حالا بهترین زمان یافتن و تصحیح آن است.

معادلات را حل می کنیم:

$$T = mg \sin \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) = 8.0 \text{ N}$$

$$N = mg \cos \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\cos 27^\circ) = 157 \text{ N}$$

(ب) اگر ریسمان پاره شود، کشنش از معادلات حذف می شود و قطعه دیگر در حالت تعادل نخواهد بود. در این حالت قانون دوم نیوتون می گوید که:

$$\sum F_x = -mg \sin \theta = ma_x \quad :x$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = ma_y \quad :y$$

بریدن ریسمان حرکت در راستای y را تغییر نمی دهد (قطعه از سطح بالا نمیرید!)، سه اینجا هم $a_y = 0$ است، و نیروی عمود بر سطح

توجه کنید که اگر سطح واقعاً بدون اصطکاک باشد (جنانکه ما فرض کردہ ایم)، شخص نمی تواند به مدت زیادی این نیرو را به سورتمه اعمال کند. سورتمه، بعد از 3.0 s حرکت با این شتاب، سرعتی برابر با 84 m/s یا 188 mi/h پیدا می کند.

(ب) اگر نیروی کشنش افقی نباشد، نمودار جسم-آزاد به صورت شکل ۱۵.۷ است، و معادلات مربوط به این حالت، به شکل زیرند:

$$\sum F_x = P \cos \theta = ma_x \quad :x$$

$$\sum F_y = N + P \sin \theta - mg = ma_y \quad :y$$

فعلاً فرض می کنیم که سورتمه روی سطح می ماند؛ یعنی $a_y = 0$ است. پس

$$N = mg - P \sin \theta = 74 \text{ N} - (21.0 \text{ N})(\sin 15^\circ)$$

$$= 69 \text{ N}$$

$$a_x = \frac{P \cos \theta}{m} = \frac{(21.0 \text{ N})(\cos 15^\circ)}{7.5 \text{ kg}} = 27.0 \text{ m/s}^2$$

نیروی عمود بر سطح، همواره بر سطح تماس عمود است؛ با مختصاتی که در شکل ۱۵.۷ انتخاب کردہ ایم، N باید مثبت باشد، اگر θ را زیاد کنیم N کم می شود و سرانجام، در نقطه ای، صفر می شود. در این نقطه سورتمه، تحت تأثیر مؤلفه رو به بالای P ، از سطح جدا می شود و باید حرکت عمودی آن را هم تحلیل کنیم. برای این مقادیر P و θ که ما به کار بردهیم، سورتمه روی سطح باقی می ماند و $a_y = 0$ است.

مثال ۶. قطعه ای به جرم $m = 18.0 \text{ kg}$ به کمک ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی که شیب 27° دارد نگه داشته شده است (شکل ۱۶.۶الف). (الف) کشنش ریسمان و نیروی عمود بر سطحی را که سطح بر قطعه وارد می کند پیدا کنید. (ب) فرض کنید ریسمان پاره می شود و حرکت بعدی را توصیف کنید.

حل: (الف) نمودار جسم-آزاد قطعه در شکل ۱۶.۷ آمده است.

نیروهای مؤثر بر قطعه عبارت اند از نیروی عمودی N ، وزن $W = mg$ ، قطعه، و کشنش T ریسمان، دستگاه مختصاتی انتخاب می کنیم که محور x آن موازی با سطح، و محور y آن عمود بر سطح باشد. با این انتخاب، دو تا از نیروها (T و N) خود به خود به مؤلفه هایشان تجزیه شده اند، و حرکتی که روی سطح انجام می شود هم یک بعدی است.

در حالت استاتیک شتابی وجود ندارد و مجموع نیروها باید صفر باشد. وزن به مؤلفه های x ($-mg \cos \theta$) و y ($-mg \sin \theta$) و

تجزیه می شود و معادلات نیرو چنین اند

$$\sum F_x = T - mg \sin \theta = ma_x = 0 \quad :x$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = ma_y = 0 \quad :y$$

هم برابر است با $mg \cos \theta$, یا 157N . در جهت x خواهیم داشت

$$a_x = -g \sin \theta = -(9,8\text{m/s}^2)(\sin 27^\circ) = -445\text{m/s}^2$$

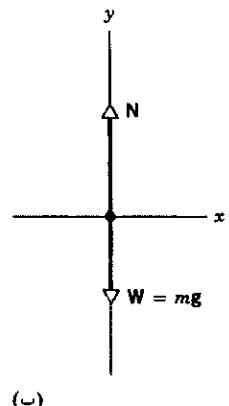
علامت منفی نشان می‌دهد که قطعه در جهت منفی x , یعنی به طرف پایین سطح, حرکت می‌کند. حالتهای حدی $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ را بررسی کنید. آیا اینها با انتظارات شما سازگارند؟

مثال ۷. شخصی به جرم $72,2\text{kg}$, در آسانسوری روی یک ترازوی یک کفهای ایستاده است شکل (۱۷الف). در حالتی که اتفاق آسانسور (الف) با سرعت ثابت پایین می‌آید و (ب) با شتاب $3,20\text{m/s}^2$ بالا می‌رود، ترازو چه مقداری را نشان می‌دهد؟

حل: ابتدا نتیجه‌ای عام برای مقادیر دلخواه شتاب عمودی a به دست می‌آوریم. چارچوب مرجع لخت خود را خارج از آسانسور می‌گیریم (مثالاً چاه آسانسور ساختمان), زیرا آسانسور شتابدار چارچوب مرجع لختی نیست. هم و هم a را ناظر می‌سنجد که در این چارچوب خارجی است. شکل ۱۷ ب نمودار جسم‌آزاد شخص را نشان می‌دهد. نیروهای دخیل در مسئله عبارت‌اند از نیروی رو به پایین وزن و نیروی رو به بالا عمود بر سطح که ترازو اعمال می‌کند. نیروی عمود بر سطح از طرف ترازو بر شخص وارد می‌شود؛ ترازو نیروی رو به پایینی را نشان می‌دهد که از طرف شخص بر ترازو وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتون، اندازه این دو نیرویکی است. بنابراین، اگر نیروی عمود بر سطح را تعیین کنیم، مقداری که ترازو نشان می‌دهد به دست می‌آید.

از نمودار جسم‌آزاد داریم

$$\sum F_y = N - mg = ma$$



شکل ۱۷. (الف) شخصی در آسانسور روی ترازو ایستاده است. (ب) نمودار جسم‌آزاد شخص. اندازه نیروی عمود بر سطح N , که ترازو آن را وارد می‌کند، همان مقداری است که ترازو نشان می‌دهد. (ترازوهای تجاری از این نوع را بر حسب کیلوگرم مدرج می‌کنند نه نیوتون).

$$N = m(g + a)$$

اگر $a = 0$ باشد، یعنی آسانسور ساکن باشد یا، مثل قسمت (الف)، با سرعت ثابت حرکت کند، نتیجه می‌شود که

$$N = mg = (72,2\text{kg})(9,8\text{m/s}^2) = 708\text{N} (= 159\text{lb})$$

اگر $a = 3,20\text{m/s}^2$ باشد، قسمت (ب)، نتیجه می‌شود که

$$N = m(g + a) = (72,2\text{kg})(9,8\text{m/s}^2 + 3,20\text{m/s}^2) = 722\text{N}$$

$$= 159\text{lb}$$

مقداری که ترازو نشان می‌دهد، یعنی نیروی عمودی کف بر شخص، هنگامی که آسانسور شتاب رو به بالا دارد (a در دستگاه مختصاتی که تعریف کردیم مثبت است) بیشتر می‌شود، و هنگامی که آسانسور شتاب رو به پایین دارد کمتر می‌شود، در سقوط آزاد ($a = -g$) ترازو صفر را نشان می‌دهد (نیروی عمود بر سطح صفر است).

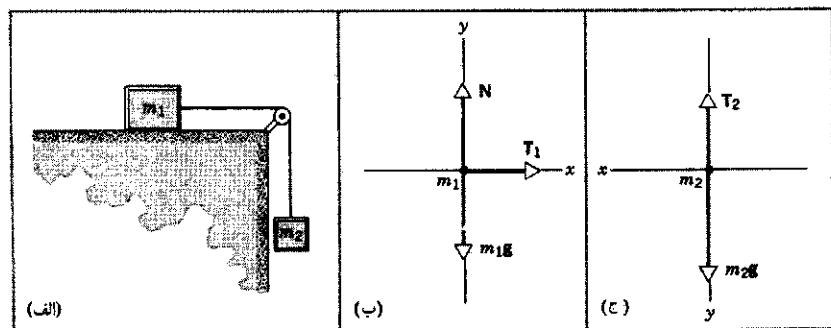
۱۱-۵ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

در اینجا چند کاربرد دیگر قوانین نیوتون را بررسی می‌کنیم. در این مثالها چند جسم وجود دارند که باید آنها را تک‌تک تحلیل کرد، اما این اجسام کاملاً مستقل از هم نیستند زیرا حرکت یک جسم مقید به حرکت جسمی دیگر است، مثل حالتی که دو جسم با رسیمانی به طول ثابت به هم بسته شده‌اند. این مثالها را مطالعه کنید، و توجه کنید که برای هر جسم دستگاه مختصات جداگانه‌ای انتخاب شده است.

مثال ۸. شکل ۱۸الف قطعه‌ای به جرم m_1 را نشان می‌دهد که روی سطح افقی بدون اصطکاکی واقع شده است. این قطعه توسط رسیمانی به جرم ناچیز که به قطعه آویزانی به جرم m_2 متصل است کشیده می‌شود. رسیمان از روی فقره‌ای می‌گذرد که جرم آن قابل چشمپوشی است و محور آن هم با اصطکاکی ناچیز می‌چرخد. کشش رسیمان و شتاب قطعات را پیدا کنید.

حل: در این مسئله دو جسم دخیل است؛ برخلاف مسائل قبلی ای که در آنها و تنها یک جسم مورد نظر بود. شکل‌های ۱۸ ب و ۱۸ج نمودار جسم‌آزاد این دو جسم مجزا را نشان می‌دهند. لزومی ندارد که برای هر دو جسم دستگاه مختصات یکسانی به کار ببریم، تا جایی که در هر زیرسیستم به طور سازگار عمل کنیم، مهم نیست که محورهای مختصات هر بخش را چگونه تعریف می‌کنیم.

نیروهای وارد بر قطعه ۱ عبارت‌اند از نیروی عمودی N , وزن، و کشش رسیمان. چون انتظار داریم که قطعه ۱ به طرف راست شتاب بگیرد، این جهت را جهت مثبت x می‌گیریم. همچنین انتظار داریم



شکل ۱۸.۸. مثال ۸. (الف) ریسمانی قطعه m_1 را روی سطح افقی صافی می‌کشد. ریسمان از روی قرقه‌ای می‌گذرد و به قطعه m_2 متصل است.
 (ب) نمودار جسم آزاد قطعه m_1 . (ج) نمودار جسم آزاد قطعه m_2 .

از حل معادلات اول و سوم نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \quad (5)$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (6)$$

بررسی حالات حدی این نتایج مفید است. اگر m_1 صفر شود چه می‌شود؟ انتظار داریم که ریسمان شل شود ($T = 0$) و سقوط m_2 آزاد می‌کند ($a = g$). معادلات هم، به درستی، همین را پیش‌بینی می‌کنند. اگر m_2 صفر باشد، نیروی افقی ای بر قطعه ۱ وارد نمی‌شود و این قطعه شتاب نمی‌گیرد؛ اینجا هم، معادلات ما نتیجه درست می‌دهند.

توجه کنید که، همان طور که انتظار می‌رود، $g < a$ است. همچنین دقت کنید که T با $m_2 g$ برابر نیست. تنها اگر قطعه ۲ در حالت تعادل آویزان باشد ($a = 0$) است که $T = m_2 g$ می‌شود. اگر قطعه ۲ به طرف پایین شتاب داشته باشد، $T < m_2 g$ می‌شود؛ اگر قطعه به طرف بالا شتاب داشته باشد، $T > m_2 g$ می‌شود.
 آیا معادلات ۵ و ۶ در حد 0 درست می‌دهند؟

مثال ۹. دو جرم نامساوی را در نظر بگیرید که با ریسمانی که از روی قرقه‌ای می‌گذرد به هم متصل‌اند (شکل ۱۹). قرقه ایده‌آل است (جرم آن ناچیز است و با اصطکاک ناچیزی حول محورش می‌چرخد). این دستگاه را مانشی آتود^۱ هم می‌نامند. فرض کنید که m_2 بزرگتر از m_1 باشد. کشش ریسمان و شتاب جرمها را پیدا کنید.

حل: چون پیش‌بینی می‌کنیم که جرمها فقط شتاب عمودی داشته باشند، جهت مثبت y را برای هر جرم، جهت حرکت آن

که قطعه ۱ روی سطح افقی باقی بماند؛ بنابراین، مؤلفه y شتاب آن صفر است. به این ترتیب، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون به این شکل در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \text{مؤلفه } x: & \sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x} \\ \text{مؤلفه } y: & \sum F_y = N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0 \end{aligned}$$

برای قطعه ۲، محور y را عمودی و رو به پایین می‌گیریم، یعنی در همان جهتی که انتظار داریم جهت شتاب قطعه ۲ باشد. برای این قطعه لازم نیست که مؤلفه x را بررسی کنیم، و مؤلفه y قانون دوم نیوتون نتیجه می‌دهد که

$$\sum F_y = m_2 g - T_1 = m_2 a_{2y}$$

ریسمان را بی جرم فرض کردیم، پس نیروی خالص وارد بر آن باید صفر باشد. کشش‌های T_1 و T_2 که از ریسمان بر قطعات وارد می‌شوند عکس‌العملهای T_1 و T_2 را دارند، که اندازه‌شان با دو نیروی اول برابر است، و نیروهایی هستند که قطعات بر ریسمان وارد می‌کنند. اگر ریسمان راست می‌بود، صفر شدن نیروی خالص وارد بر آن نتیجه می‌داد که $T_1 = T_2$. وجود قرقه ایده‌آل (بدون جرم و بدون اصطکاک) که جهت کشش ریسمان را عوض می‌کند هم تغییری در این نتیجه نمی‌دهد: اندازه کشش در تمام طول ریسمان ثابت است. این کشش مشترک را با متغیر T نشان می‌دهیم.

اگر ریسمان تغییر طول هم نتواند بدهد (یعنی کشیده نشود)، هر حرکت قطعه ۱ در جهت x دقیقاً متناظر با همان حرکت قطعه ۲ در جهت y است. در نتیجه، شتاب دو قطعه یکی است. این شتاب مشترک را می‌نامیم. حالا سه معادله داریم:

$$T = m_1 a$$

$$N = m_1 g$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

۱. جرج آتود (۱۷۴۵ تا ۱۸۰۷) یک ریاضیدان انگلیسی بود که در سال ۱۷۸۴ این ایزار را برای تماش قوانین حرکت شتابدار و سنجش و اختیاع کرد. او با کوشک کردن اختلاف میان m_1 و m_2 می‌توانست آثار سقوط آزاد را "کند کند" و زمان حرکت وزنه افتخار را با یک ساعت آونگ‌دار اندازه بگیرد؛ ساعت آونگ‌دار دقیق‌ترین این‌ای بود که آتود ده آن زمان برای سنجش بازه‌های زمانی در اختیار داشت.

جسم پیش‌بینی می‌کنیم. در اینجا هم، مثل مثالهای قبلی، انتظار داریم که مقدار کشنش در همه جا یکسان باشد، و اندازه شتاب حرکت عمودی که مقدار m_1 با حرکت m_1 روی صفحه یکی باشد. فرض می‌کنیم که m_1 در جهت مثبت x حرکت می‌کند (اگر فرضمان غلط باشد، a منفی در می‌آید). معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای m_1 عبارت است از

$$\sum F_x = T - m_1 g \sin \theta = m_1 a \quad :x$$

$$\sum F_y = N - m_1 g \cos \theta = 0 \quad :y$$

و برای m_2 به صورت زیر است

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a$$

از حل همزمان این معادلات نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_1 + m_2} g \quad (9)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \theta) \quad (10)$$

توجه کنید که این نتایج، به ازای $\theta = 0^\circ$ (یعنی حرکت قطعه ۱ افقی است) به همان نتایج مثال ۸ تبدیل می‌شوند و به ازای $\theta = 90^\circ$ (یعنی حرکت قطعه ۲ عمودی است) به نتایج مثال ۹.

با جاشتنی مقادیر عددی معلوم می‌شود که

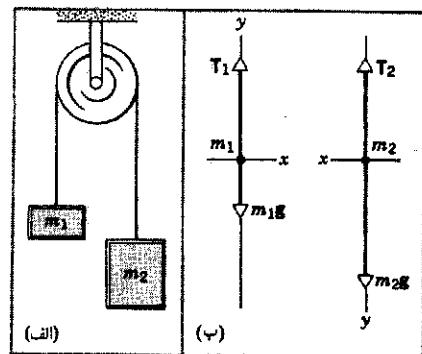
$$a = \frac{2.6\text{kg} - (9.5\text{kg})(\sin 34^\circ)}{9.80\text{m/s}^2} = \frac{9.5\text{kg} + 2.6\text{kg}}{9.80\text{m/s}^2} = -2.2\text{m/s}^2$$

شتاب منفی درآمده است، که نشان می‌دهد حدس اولیه ما درباره جهت حرکت غلط بوده است. قطعه ۱ به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، و قطعه ۲ به بالا می‌رود. چون معادلات دینامیکی شامل نیروهایی نبودند که به جهت حرکت بستگی داشته باشند، این حدس اولیه غلط اتری بر معادلات ندارد و می‌شود پذیرفت که مقدار حاصل برای a درست است. در حالت کلی، اگر نیروهای اصطکاکی را هم، که در خلاف جهت حرکت اند، در نظر بگیریم، دیگر چنین نخواهد بود.

کشنش ریسمان برابر است با

$$T = \frac{(9.5\text{kg})(2.6\text{kg})}{9.5\text{kg} + 2.6\text{kg}} (1 + \sin 34^\circ) = 31\text{N}$$

این مقدار بیشتر از وزن m_2 ($m_2 g = 26\text{N}$) است، و این با رویه بالا بودن شتاب m_2 سارگار است.



شکل ۱۹. مثال ۹. (الف) نمودار ماشین آتوود، شامل دو جرم آویزان که با ریسمانی به هم متصل‌اند که از روی فرقه‌ای می‌گذرد. (ب) نمایش جسم-آزاد m_2 و m_1

می‌گیریم. کافی است که مؤلفه‌های y را بررسی کنیم. شکل ۱۹ ب نمودارهای جسم-آزاد را نشان می‌دهد. معادلات حرکت عبارت از

$$\sum F_y = T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad :y$$

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad :y$$

که در آن a_1 و a_2 ، به ترتیب، شتاب m_1 و شتاب m_2 ‌اند. در اینجا هم، مثل مثال قبلی، اگر ریسمان بی جرم باشد و کشیده نشود، و قرقه هم بی جرم و بدون اصطکاک باشد، $T_1 = T_2 = T$ و $a_1 = a_2 = a$ است. (فرض می‌کنیم که این قرقه ایده‌آل اندازه کشنش یا شتاب را در طول ریسمان تغییر نمی‌دهد؛ کارش فقط این است که جهت کشنش و شتاب را عوض کند.) حالا اگر دو معادله بالا را، پس از جایگذاری مقادیر مشترک حل کنیم، نتیجه می‌شود که

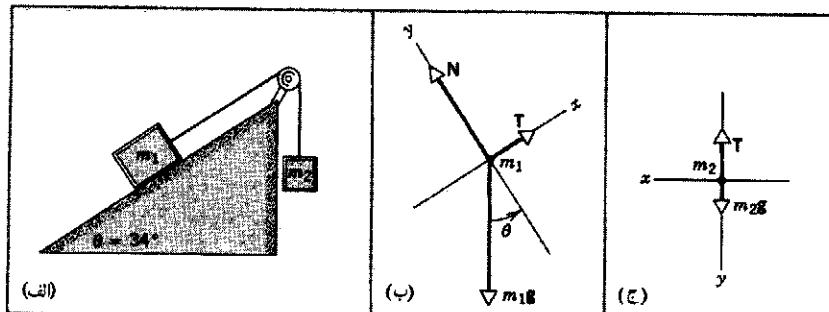
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (7)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (8)$$

حالتهای حدی $\theta = 0^\circ$ ، $m_1 = m_2 = 0$ ، $a_1 = a_2 = 0$ و $T = 0$ را بررسی کنید. توجه کنید که $T < m_1 g < m_2 g$ و مطمئن شوید که علت آن را درک کرده‌اید.

مثال ۱۰. دستگاه مکانیکی شکل ۱۰ الف را در نظر بگیرید؛ $m_2 = 2.6\text{kg}$ ، $m_1 = 9.5\text{kg}$ و $\theta = 34^\circ$ است. سیستم را از حالت سکون رها می‌کنیم، حرکت را توصیف کنید.

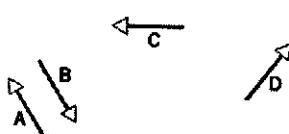
حل: شکل‌های ۱۰ ب و ۱۰ ج نمودار جسم-آزاد قطعات ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. دستگاه‌های مختصات را طبق شکل گرفته‌ایم تا برای هر جسم، یک محور مختصات موازی با شتاب را باشد که برای



شکل ۲۰. مثال ۱۰. (الف) قطعه m_1 روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد. قطعه m_2 از ریسمانی، که به m_1 متصل است، آویزان است. (ب) نمودار جسم آزاد m_1 . (ج) نمودار جسم آزاد m_2 .

۷. فرض کنید جسمی تحت تأثیر دو نیرو شتاب گرفته است. آیا می‌شود نتیجه گرفت که (الف) اندازه سرعت جسم نمی‌تواند ثابت باشد؛ (ب) سرعت هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر شود؛ (ج) مجموع دو نیرو نمی‌تواند صفر باشد؛ (د) دو نیرو باید همراهستا باشند؟

۸. شکل ۲۲ چهار نیرو با اندازه یکسان را نشان می‌دهد. چه ترتیبی از سه ناازاین نیروها، اگر بر جسمی اثر کند، آنرا در حالت تعادل نگه می‌دارد؟



شکل ۲۲. پرسشن ۸

۹. اسبی را وادار می‌کنند که از ایه‌ای را بکشد. اسب از این کار امتناع می‌کند و در دفاع از خودش قانون سوم نیوتون را دلیل می‌آورد: کشش اسب بر از ایه هم اندازه و در خلاف جهت کشش از ایه بر اسب است. «حالا اگر من هیچ‌گاه نتوانم نیروی بیش از آنجه از ایه اسبه بر من وارد می‌کند بر آن وارد کنم، چطور می‌توانم از ایه را به حرکت در بیاورم؟» لطفاً باسخ این اسب را بدھید.

۱۰. کدام‌یک از این زوجها زوج عمل-عکس العمل اند؟ (الف) زمین ملخی هوا را به طرف دم خود می‌راند؛ هوا هوابیما را به جلو می‌راند. (ج) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد و آن را به حرکت در می‌آورد؛ (ج) اسبی گاری‌ای را به عقب می‌کشد. (د) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد، اما آن را حرکت نمی‌دهد؛ گاری اسب را به عقب می‌کشد. (ه) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد، اما آن را حرکت نمی‌دهد؛ زمین نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت بر گاری وارد می‌کند. (و) زمین گاری را به پایین می‌کشد؛ سطح زمین گاری را، با نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت، به بالا می‌راند.

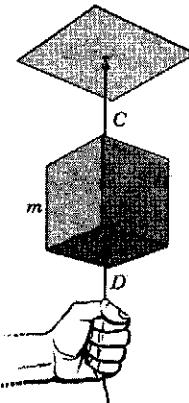
۱۱. عبارت زیر درست است: آن را توضیح بدھید. در مسابقه طناب‌کشی، تیمی برئه می‌شود که زمین را (در راستای افقی) پیشتر هل بدھد.

۱۲. دو نفر می‌خواهند طنابی را پاره کنند، ابتدا هر کدام یک سر طناب را می‌گیرند و به طرف خودشان می‌کشند، اما موفق نمی‌شوند. بعد یک

پرسشها

۱. چرا زمانی که اتوبوس ترمز کند تا بایستد به جلو می‌افتد، و زمانی که از حالت سکون شتاب می‌گیرد به عقب؟ مسافران سرپایی قطار زیرزمینی اغلب بهاین نتیجه می‌رسند که بهتر است موقع شروع حرکت یا شروع توقف، به طرف پنجره‌های جانبی بایستند، و موقع حرکت با سرعت ثابت، به طرف جلو یا عقب، چرا؟

۲. قطعه‌ای به جرم m با رسان C از سقف آویزان است، و ریسمان مشابه D هم به ته آن متصل است (شکل ۲۱). اگر D را به سرعت بکشید، خود آن پاره می‌شود، اما اگر D را به آهستگی بکشید، C پاره می‌شود. چرا؟



شکل ۲۱. پرسشن ۲

۳. اغلب می‌گویند، جرم هر جسم "مقدار ماده" موجود در آن است. این عبارت را تقد کنید.

۴. اگر نیرو، طول، و زمان را کمیتهای بنیادی بگیریم، بعد جرم چه خواهد بود؟

۵. آیا می‌شود قانون اول نیوتون را فقط حالت خاص $\Rightarrow g$ قانون دوم دانست؟ اگر چنین باشد، آیا واقعاً نیازی به قانون اول هست؟ توضیح بدھید.

۶. آیا رابطه‌ای بین نیروی وارد بر یک جسم و جهت حرکت آن جسم وجود دارد؟ اگر دارد چه رابطه‌ای؟

چنان تنظیم کرد که "کیپ بسته شود"، و تکیه‌گاه سر در صندلیهای جلو نباید درست پشت گردن قرار بگیرد بلکه باید آنها را چنان تنظیم کرد که سطح بالایشان با بالای گوشها همتراز شود. قوانین نیوتون چگونه این توصیه‌های ایمنی را توجیه می‌کنند؟

۲۲. پیکانی را از کمان رها می‌کنید و مسیر سهموی آن را در هوا، تا نقطه برخورد به زمین تعقیب می‌کنید. می‌بینید که پیکان در حین پرواز طوری می‌پیچد که همواره بر مسیر پروازش مماس باشد. چه چیزی باعث این می‌شود؟

۲۳. در یک مسابقه طناب‌کشی، سه مرد در نقطه A طناب را به طرف چپ و سه مرد در نقطه B طناب را به طرف راست می‌کشند. اندازه دو نیرو با هم برابر است. یک وزنه 51 kg از وسط طناب به طور عمودی او بیرون است. (الف) آیا اینها می‌توانند طناب AB را افقی نگه دارند؟ (ب) اگر نمی‌توانند توضیح بدهدید چرا. اگر می‌توانند اندازه نیروهای لازم در نقاط A و B را تعیین کنید.

۲۴. پرنده‌ای از روی یک سیم تلگراف کشیده شده بلند می‌شود. آیا این کار کشش سیم را تعییر می‌دهد؟ اگر تعییر می‌دهد، آیا مقدار این تعییر کمتر از وزن پرنده است، با آن برابر است، یا از آن بیشتر است؟

۲۵. ریسمان بی‌جرمی از روی فرقه بدون اصطکاکی گذشته است. می‌میونی یک سر طناب را گرفته است، و آینه‌ای هم‌وزن می‌میون، به سر دیگر طناب، در همان ارتفاع می‌میون، بسته شده است. آیا می‌میون می‌تواند (الف) با بالارفتن از طناب، (ب) با پایین آمدن از طناب، یا (ج) با رها کردن طناب، از تماشای تصویر خودش معاف شود؟

۲۶. در نوامبر ۱۹۸۴ جوآلن و دیل گاردنر (فضانوردان امریکایی) یک ماهواره مخابراتی وستار-۶ را، که در مدار نادرستی افتاده بود، گرفتند و در محفظه بار فضایی (دیسکاوری) (شکل ۲۳) قرار دادند. جوآلن در توصیف این تجربه درباره ماهواره گفته بود "سنگین نیست؛ جرم زیادی دارد." منظورش چه بوده است؟

۲۷. فرض کنید مسافر سفینه‌ای هستید که در مدار قرار گرفته است. در پیش یک ظرف دراز و پاریک را که تنها یک زیتون دارد برمی‌دارید. چند راه برای درآوردن زیتون از ظرف، چه راههایی، که در همه آنها اینرسی زیتون یا اینرسی ظرف استفاده شده باشد، پیشنهاد می‌کنید؟

۲۸. دسته جاروبی را در نظر بگیرید که به هر سر آن یک میخ فروکرده‌اند. این چوب را از میخایش روی دو گیلاس پر گذاشتند (شکل ۲۴). آزمایشگر با میله سفتی، ضربه سریع و محکمی به دسته جارو می‌زند. دسته جارو می‌شکند و به زمین می‌افتد، اما گیلاسها سالم می‌مانند و مایع درون آنها هم نمی‌ریزد. این شیرین‌کاری جالب، در اواخر قرن گذشته خیلی رواج داشت. فیزیک این قضیه چیست؟ (اگر خواستید امتحان کنید، اول با قوطیهای خالی نوشابه تمرین کنید. می‌توانید از مدرستان خواهش کنید که با این شیرین‌کاری، یک نمایش درسی در

سر طناب را به دیوار می‌بندند و سر دیگر را با هم می‌کشند. آیا این روش بهتر از روش اول است؟ توضیح بدهید.

۱۳. جرم شما بر حسب اسلام چقدر است؟ وزن شما بر حسب نیوتون چقدر است؟

۱۴. شخصی موقع پرکردن فرم مشخصات خود، در جلوی کلمه وزن می‌نویسد 78 kg ، اما وزن نیرو است و کیلوگرم یکای جرم. وقتی یکاهای جرم را برای بیان وزن به کار می‌بریم، منظورمان چیست؟ چرا وزن را بر حسب نیوتون بیان نمی‌کنیم؟ وزن این شخص چند نیوتون است؟ چند پاآند است؟

۱۵. عبارتهای زیر درباره جرم و وزن از ورقه‌های امتحانی گرفته شده‌اند. نظرتان درباره آنها چیست؟ (الف) جرم و وزن کمیت فیزیکی واحدی هستند که بر حسب یکاهای متفاوتی بیان شده‌اند. (ب) جرم خاصیت یک جسم به تنهایی است، اما وزن ناشی از برهه‌کشش دو جسم است. (ج) وزن اجسام متناسب با جرمشان است. (د) با تعییر وزن اجسام در نقاط مختلف، جرم آنها هم تعییر می‌کند.

۱۶. یک نیروی افقی بر جسمی اثر می‌کند که می‌تواند آزادانه حرکت کند. آیا این نیرو، اگر کمتر از وزن جسم باشد، می‌تواند به جسم شتاب بدهد؟ ۱۷. چرا شتاب اجسامی که سقوط آزاد می‌کند مستقل از وزنشان است؟

۱۸. برای تجربه کردن بی‌وزنی، حتی اگر به مدت خیلی کوتاهی باشد، چه راههایی به نظرتان می‌رسد؟

۱۹. در چه اوضاع و احوالی وزن شما صفر می‌شود؟ آیا پاسخ به چارچوب مرجع بستگی دارد؟

۲۰. "بازوی مکانیکی" فضاییمای شاتل، در حالتی که 12 m دراز شده باشد، می‌تواند ماهواره‌ای به جرم 220 kg را جابه‌جا کند (شکل ۲۳). اما روی زمین، همین سیستم "دستکاری از دور" وزن خودش را هم نمی‌تواند تحمل کند. در شرایط "بی‌وزنی" شاتل در مدار، اصولاً چرا لازم است که RMS بتواند نیرو وارد کند؟



شکل ۲۳. پرستهای ۲۰ و ۲۶

در آسانسوری در حالت تعادل اند؛ یعنی، قرقه تمایلی به چرخیدن ندارد. کسی که فیزیک بلد باشد چه نتیجه‌ای از این مشاهده می‌گیرد؟ ۳۶. شکل ۲۵ دنباله‌دار کوهوتک را نشان می‌دهد که در سال ۱۹۷۳ ظاهر شد. این دنباله‌دار هم، مثل همه دنباله‌دارهای دیگر، در اثر جاذبه گرانشی خورشید به دور خورشید می‌گردد. هسته دنباله‌دار توده نسبتاً پر جرمی است که در نقطه P شکل قرار دارد. دم دنباله‌دار در اثر بادهای خورشیدی تشکیل می‌شود. بد خورشیدی آنبویی از ذرات بارداری است که از خورشید به بیرون فواران می‌کنند. آیا می‌توانند چیزی درباره جهت نیرویی که بر هسته دنباله‌دار وارد می‌شود بگویید؟ اگر می‌توانند چه چیزی؟ درباره جهت شتاب هسته چطوره؟ درباره جهت حرکت آن چطوره؟



شکل ۲۵. برسنهاي ۳۶ و ۳۷

۳۷. دنباله‌دارها عموماً یک دم غبار دارند (شکل ۲۵) که متشکل است از ذرات غباری که در اثر فشار نور خورشید، به طرف مخالف خورشید رانده می‌شوند. چرا این دم اغلب خمیده است. ۳۸. آیا می‌توانید یک پدیده فیزیکی مثال بزنید که زمین در آن دخیل باشد ولی نتوانیم در تحلیل این پدیده زمین را "ذره" در نظر بگیریم؟

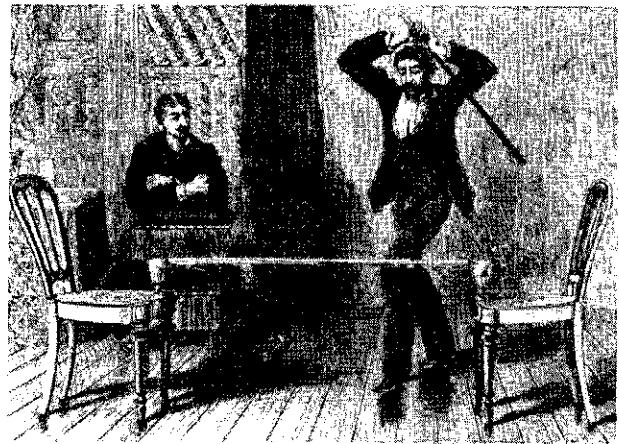
مسئله‌ها

بخش ۵-۵ قانون دوم نیوتن

۱. فرض کنید نیروی گرانشی خورشید ناگهان قطع شود، چنانکه زمین دیگر در قید خورشید نباشد و از مدار آن رها شود. در این صورت چقدر طول می‌کشد تا زمین به فاصله مدار فعلی پلoton از خورشید برسد؟ (راهنمایی: بعضی از داده‌های مورد نیازتان را می‌توانید از پیوست ج به دست بیاورید).

۲. قطعه‌ای به جرم 5kg را که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حالت سکون است با نیروی افقی ثابت 38N می‌کشیم. (الف) شتاب آن چقدر می‌شود؟ (ب) چه مدتی باید آن را کشید تا سرعت آن 2m/s شود؟ (ج) در این مدت، قطعه چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳. الکترونی در خط مستقیم از کاتد یک لامپ خلا به آند آن می‌رود.



شکل ۲۶. برسن ۲۶

۲۹. آسانسوری متکی به یک تک کابل است و وزنه مقابل هم ندارد. مسافران در طبقه هم‌کف سوار می‌شوند، به طبقه آخر می‌روند، و پیاده می‌شوند و آنجا مسافران جدیدی سوار می‌شوند و به طبقه همکف می‌آیند. طی این رفت و برگشت، چه موقع کشش کابل برابر با وزن آسانسور به علاوه وزن مسافران است؟ چه موقع از آن بیشتر است؟ چه موقع از آن کمتر است؟

۳۰. در عرشۀ فضایی دیسکاوری در مدار هستید و شخصی دو توب چوبی به ظاهر کاملاً یکسان به شما می‌دهد. یکی از این توبها یک هسته سربی دارد و دیگری ندارد چند راه برای تشخیص توبها از هم پیشنهاد می‌کنید.

۳۱. روی سکوی یک ترازوی فنری بایستید و وزن خودتان را بخوانید. بعد روی آن یک قدم بردارید. خواهید دید که در ابتدای گام، ترازو وزن کمتری نشان می‌دهد و در پایان گام وزن بیشتری، چرا؟

۳۲. آیا می‌توانید خودتان را با ترازویی وزن کنید که حداقل وزنی که می‌تواند نشان بدهد کمتر از وزن شماست؟ اگر می‌توانید، چگونه؟

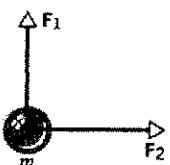
۳۳. وزنهای با رسمنانی از سقف آسانسوری آوریان است. در کدام یک از حالات زیر، رسمنان بیشترین کشش را دارد؟ در کدام یک کمترین کشش را؟ (الف) آسانسور در حال سکون است؛ (ب) آسانسور با سرعت ثابت بالا می‌رود؛ (ج) آسانسوری با سرعت کم‌شونده پایین می‌آید؛ (د) آسانسور با سرعت زیادشونده پایین می‌آید.

۳۴. شخصی در آسانسوری روی یک ترازوی فنری ایستاده است. در کدام یک از حالات زیر، ترازو کمترین وزن را نشان می‌دهد؟ در کدام یک بیشترین وزن را؟ (الف) آسانسور ساکن است؛ (ب) آسانسور کابلش بریده است و دارد سقوط آزاد می‌کند؛ (ج) آسانسور به طرف بالا شتاب دارد؛ (د) آسانسور به طرف پایین شتاب دارد؛ (ه) آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۳۵. دو جرم نامساوی که توسط نخی از دو طرف قرقماهی آوریانند،

1 km^3 و جرم آن 930 kg است. در نزدیکی سطح زمین، خورشید می‌تواند نیروی $29N$ بر بادبان وارد کند. (الف) چنین نیرویی چه شتابی به قایق می‌دهد؟ (ب) شتابهای کوچک هم، اگر به مدت کافی به طور پیوسته اعمال شوند، می‌توانند آثار بزرگی تولید کنند. اگر این قایق از حالت سکون شروع به حرکت کند، پس از ۱ روز چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ج) سرعت آن چقدر می‌شود؟

۱۰. دو نیروی F_1 و F_2 بر جرم m اثر می‌کنند (شکل ۲۷). اگر $F_1 = ۳N$ ، $F_2 = ۵N$ ، $m = ۰.۲kg$ باشد، شتاب برداری جسم را به دست بیاورید.



شکل ۲۷. مسئله ۱۰

۱۱. جسمی به جرم $۵kg$ با سرعت $۴2m/s$ در جهت محور x از مبدأ می‌گذرد. به این جسم نیروی $۱9N$ در جهت مثبت محور y وارد می‌شود. حساب کنید که پس از گذشت $۱5s$ (الف) سرعت جسم چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

۱۲. نیروی معینی به جسم m_1 شتاب $۱2m/s^2$ و نیروی معینی به جسم m_2 شتاب $۳m/s^2$ می‌دهد. همین نیرو به جسم m_1 شتاب $۳m/s^2$ می‌دهد. این نیرو به جسمی که جرمش برابر با (الف) تقاضا m_1 و m_2 و (ب) مجموع m_1 و m_2 باشد، چه شتابی می‌دهد؟

۱۳. (الف) با چشمپوشی از نیروهای گرانشی، حساب کنید چه نیروی لازم است تا فضاییابی به جرم ۱۲۰۰ تن متريک را طی ۳ روز از حالت سکون به یک دهم سرعت نور برساند. چه نیروی لازم است تا طی ۲ ماه چنین شود؟ (یک تن متريک برابر با $۱۰۰۰kg$ است.) (ب) فرض کنید که در این لحظه موتورها خاموش شوند. در هر یک از این دو مورد، چقدر زمان دیگر لازم است تا فضایابی کلام مسافت ۵ ماه نوری را بپیماید؟ (۱ ماه را مساوی ۳۰ روز بگیرید.)

بخش ۵-۶ قانون سوم نیوتون

۱۴. دو قطعه به جرم‌های $۴6kg$ و $m_1 = ۳8kg$ و $m_2 = ۳kg$ ، توسط ریسمان سبکی، روی میز افقی بدون اصطکاکی، به هم متصل‌اند. در لحظه خاصی که شتاب جرم m_2 برابر با $۲6m/s^2$ است، (الف) نیروی وارد m_2 و (ب) شتاب m_1 چقدر است؟

۱۵. کوکی به جرم $۴0kg$ و سورتمه‌ای به جرم $۴kg$ روی سطح دریاچه بخزدهای به فاصله $۱5m$ از هم قرار دارند. کوک با استفاده از طنابی، نیروی $۲N$ بر سورتمه وارد می‌کند و آن را به طرف خودش می‌کشد. (الف) شتاب سورتمه چقدر است؟ (ب) شتاب کوک چقدر

۱. نگاه کنید به "The Wind from the Sun"، که یک داستان علمی تخیلی جالب از آرتوروسی کلارک است.

فاصله آند از کاتد $۱5cm$ است. الکترون با سرعت صفر شروع به حرکت می‌کند و با سرعت $۱0^6m/s$ به آند می‌رسد.

(الف) با این فرض که شتاب ثابت است، نیروی وارد بر الکترون را محاسبه کنید. جرم الکترون $۹ \times 10^{-۳1}\text{ kg}$ است. این نیرو منشأ الکتریکی دارد. (ب) نیروی گرانشی وارد بر الکترون را حساب کنید.

۴. نوترونی با سرعت $۱0^7m/s$ بر $۴ \times 10^{-۴}\text{ cm}$ حرکت می‌کند. برد نیروهای

هسته‌ای بسیار کوتاه است؛ نیروی هسته‌ای در خارج هسته عمل‌اصرف

است، اما در داخل هسته بسیار قوی است. اگر نوترون را هسته‌ای به

قطر $۱0^{-۱4}\text{ m}$ به دام بیندازد و به حالت سکون در بیاورد،

کمترین مقدار نیروی لازم برای این کار، چقدر است؟ این نیرو را ثابت

فرض کنید. جرم نوترون $۶ \times 10^{-۲7}\text{ kg}$ است.

۵. در نوع تعییر شکل یافته‌ای از بازی "طناب‌کشی" دو نفر، به جای

طناب، سورتمه‌ای به جرم $25kg$ را در دو جهت مختلف هم می‌کشند.

اگر این دو سورتمه را با نیروی $۹0N$ و $۹2N$ به طرف خود بکشند،

شتاب سورتمه چقدر می‌شود؟

۶. باریکه نور که از چشمۀ لیزری ماهواره‌ای گسیل شده، به جسمی

که از موشکی رها شده است برخورد می‌کند (شکل ۲۶). این باریکه

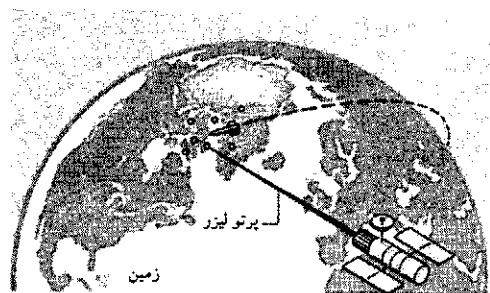
نیروی $۲7 \times 10^{-5}N$ بر هدف وارد می‌کند. اگر مدت تابش باریکه

$۴s$ باشد، جسم در این مدت چقدر جابه‌جا می‌شود؟ (الف) فرض

کنید جسم سلاحی به جرم $28kg$ است. (ب) فرض کنید جسم

یک هدف کاذب به جرم $21kg$ است. (این جابه‌جاها را با مشاهده

باریکه بازتابیده هم می‌شود سنجید).



شکل ۲۶. مسئله ۶

۷. اتومبیلی با سرعت $۵3km/h$ به پایه پلی برخورد می‌کند. یکی از

مسافران که بلا فاصله پشت یک بالشک هوا نشسته است، $۶5cm$

(نسبت به جاده) حرکت می‌کند تا نهایتاً توسط بالشک متوقف شود.

ضمن این توقف چه نیرویی بر بالاتنه این شخص، که جرم آن $۳9kg$

است، وارد می‌شود؟ نیرو را ثابت فرض کنید.

۸. الکترونی به طور افقی با سرعت $۱0^7m/s$ وارد میدان

الکتریکی ای می‌شود که به آن نیروی عمودی ثابتی به اندازه

$۴5 \times 10^{-19}N$ وارد می‌کند. طی مدتی که الکترون مسافت افقی

$۳3mm$ را می‌پیماید، در راستای عمودی چقدر منحرف می‌شود؟

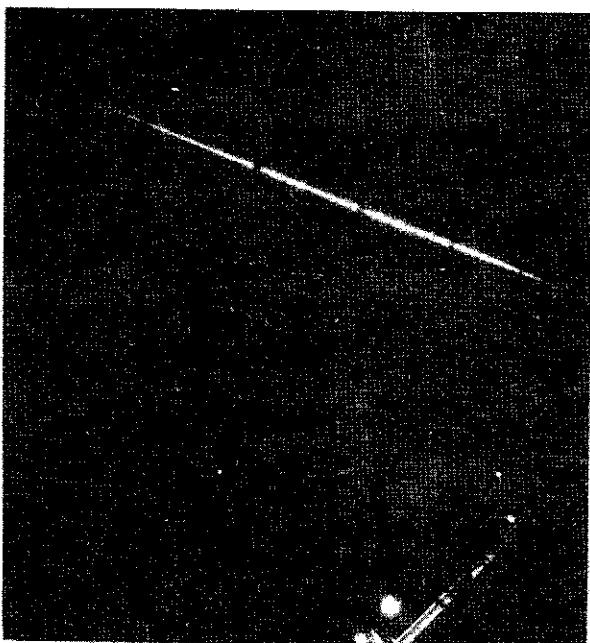
۹. "فایق" خورشیدی دیانا برای سفر در منظومه شمسی با استفاده

از فشار نور خورشید طراحی شده است. مسافت "بادبان" این فایق

متصل است، که سر دیگر ش به دیوار وصل شده است؛ شکل ۲۸ ب. نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد؟ (وزن نیروسنج ناقیز است). ۲۵. کره بارداری به جرم $kg = 10^{-4} \times 28$ از ریسمانی آویزان است. یک نیروی الکتریکی در راستای افقی بر این کره وارد می‌شود، چنانکه ریسمان، در حالت سکون، با راستای قائم زاویه 33° می‌سازد. (الف) اندازه نیروی الکتریکی و (ب) کشنش ریسمان را پیدا کنید.

۲۶. اتومبیلی به وزن $lb = 30000 \approx N = 12000$ که با سرعت $km/h = 80 \approx mi/h = 50$ متوقف می‌شود. (الف) نیروی ترمز و (ب) زمان لازم برای توقف را به دست بیاورید. با همان نیروی ترمز (ج) مسافت و (د) زمان لازم برای توقف از سرعت اولیه $km/h = 40 \approx mi/h = 25$ را حساب کنید.

۲۷. شهابی به جرم $kg = 25$ به طور عمودی با شتاب $m/s^2 = 9.8$ به درون جو زمین سقوط می‌کند. علاوه بر گرانش، نیروی بازدارنده‌ای (ناشی از کشنش اصطکاکی جوا) هم بر شهاب وارد می‌شود. اندازه این نیروی بازدارنده چقدر است؟ (شکل ۲۹).



شکل ۲۹. مسئله ۲۷

۲۸. آسانسوری به وزن $lb = 6200$ با کابلی بالا کشیده می‌شود. شتاب آسانسور $s^2 = 3.8 ft/s^2$ است. (الف) کشنش کابل چقدر است؟ (ب) اگر شتاب آسانسور $s^2 = 3.8 ft/s^2$ به طرف پایین بود، اما همچنان به طرف بالا حرکت می‌کرد، کشنش کابل چقدر می‌شد؟

۲۹. مردی به جرم $kg = 83$ (وزن $lb = 180$) از لیه پنجره ای به روی یک سکوی بتنی می‌پردازد، لبه پنجره $m = 48$ (یعنی $ft = 16$)

است؟ (ج) این دو درجه فاصله‌ای از مکان اولیه کودک به هم می‌رسند؟ فرض کنید نیرو ثابت می‌ماند و هیچ اصطکاکی هم وجود ندارد.

بخش ۸-۵ وزن و جرم

۱۶. وزن هر یک از اجسام (الف) تا (ج) بر حسب نیوتون و جرم آنها بر حسب کیلوگرم چقدر است؟ (الف) یک بسته $lb = 5$ شکر، (ب) یک ورزشکار $lb = 240$ ، (ج) یک اتومبیل $ton = 1.1$.

۱۷. (الف) جرم یک اتومبیل سورتمه‌ای $lb = 1420$ و (ب) وزن یک بیپ گرمایی $kg = 12$ چقدر است؟

۱۸. فضانوردی به جرم $kg = 75$ زمین را ترک می‌کند. حساب کنید که وزن او (الف) در روی زمین، (ب) در مریخ ($g = 3.72 m/s^2$)، (ج) در فضای بین سیارات چقدر است. (د) در هر مورد جرم او چقدر است؟

۱۹. ذره‌ای در نقطه‌ای که شتاب گرانی $s^2 = 8.80$ است وزنی برای با $N = 26$ دارد. (الف) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که شتاب گرانی $s^2 = 4.60$ باشد چقدر است؟ (ب) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که نیروی گرانشی صفر باشد چقدر است؟

۲۰. هواپیمایی به جرم $kg = 12000$ با سرعت $km/h = 87$ در امتداد افق پرواز می‌کند. نیروی بالابرندۀای که از هوا بر هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟

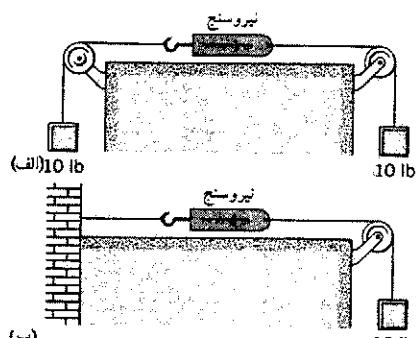
۲۱. نیروی خالص وارد بر اتومبیلی به وزن $lb = 3900$ ، که با شتاب $s^2 = 13$ حرکت می‌کند. چقدر است؟

۲۲. یک سورتمه موشکی آزمایشی به جرم $kg = 523$ ، می‌تواند طی $2s = 18$ از سکون به سرعت $km/h = 1620$ برسد، نیروی خالص لازم برای این کار چقدر است؟

۲۳. هواپیمایی قبل از برخاستن از زمین با شتاب $s^2 = 2.3$ ($7.55 ft/s^2$) روی باند فرودگاه حرکت می‌کند. این هواپیما دو موتور جت دارد، که هر کدام نیروی $N = 10^5$ ($157 ton$) تولید می‌کند. وزن هواپیما چقدر است؟

بخش ۸-۵ کاربردهای قوانین نیوتون

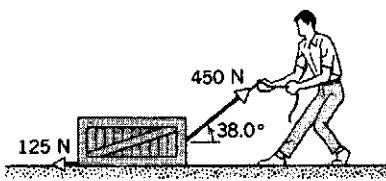
۲۴. (الف) دو وزنه $lb = 10$ ، طبق شکل ۲۸ (الف)، به یک نیروسنج متصل‌اند. نیروسنج چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) یک وزنه $lb = 10$ به نیروسنجی



شکل ۲۸. مسئله ۲۴

بالاتر از سکو است، مرد فراموش می‌کند زانوهایش را خم کند و پس از برخورد به سکو طی مسافت 2cm (یعنی $2\text{cm}/87\text{in}$) متوقف می‌شود. (الف) شتاب متوسط مرد از زمانی که پاهایش به سکو می‌رسد تا زمان توقف کامل چقدر است؟ (ب) در این پرش چه نیروی متوسطی بر استخوانبندی او وارد می‌شود؟

۳۵. قطعه‌ای با سرعت اولیه v روی سطح شیدار بدون اصطکاکی به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود. زاویه سطح شیدار θ است. (الف) این قطعه تا چه مسافتی روی این سطح بالا می‌رود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا به آنجا برسد؟ (ج) سرعت قطعه هنگامی که در برگشت به نقطه اولیه می‌رسد چقدر است؟ مقدار عددی جوابها را به ازای $v = 25\text{ m/s}$ و $\theta = 30^\circ$ به دست بیاورید.

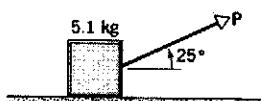


شکل ۳۱. مسئله ۳۶

۳۱. لامپ در راستای قائم از ریسمانی آویزان است. ریسمان و لامپ در آسانسوری هستند که به پایین می‌آید. آسانسور پیش از توقف شتاب کندکننده 4m/s^2 (یعنی 4ft/s^2) دارد. (الف) اگر کشش ریسمان 18N (یعنی 1lb) باشد، جرم لامپ چقدر است؟ (ب) اگر آسانسور با شتاب رو به بالای 4m/s^2 (یعنی 4ft/s^2) به طرف بالا حرکت کند، کشش ریسمان چقدر می‌شود؟

۳۲. نخ قلاب ماهیگیری باید چه کششی را تحمل کند تا بتواند یک ماهی 19lb را که با سرعت 2ft/s رو به بالای 2ft شنا می‌کند، طی مسافت 5in متوقف کند؟

۳۳. جسمی به جرم 1kg را با ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی می‌کشد. ریسمان نیروی $P = 12\text{N}$ در زاویه $\theta = 25^\circ$ به طرف افقی وارد می‌کند: (شکل ۳۳). (الف) شتاب جسم چقدر است؟ (ب) نیروی P را به آهستگی زیاد می‌کنیم. مقدار P درست پیش از بلند شدن جسم از سطح چقدر است؟ (ج) شتاب جسم درست پیش از بلند شدن آن از سطح، چقدر است؟



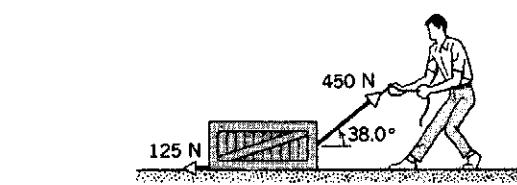
شکل ۳۳. مسئله ۳۳

۳۴. چگونه می‌توانیم جسمی به وزن 10lb را با استفاده از طنابی که فقط تحمل 87lb کشش را دارد از بالای بامی به پایین بفرستیم تا آنکه طناب پاره بشود؟

۳۵. قطعه‌ای از حالت سکون از بالای سطح شیداری به طول 16m رها می‌شود، و بعد به پایین می‌رسد. در همان لحظه‌ای که قطعه اول رها می‌شود، قطعه دیگری از پایین سطح شیدار طوری به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود که همزمان با قطعه اول به پایین سطح برگردد. (الف) شتاب هر یک از این قطعات را پیدا کنید. (ب) سرعت

اولیه قطعه دوم چقدر بوده است؟ (ج) این قطعه چقدر از سطح شیدار بالا می‌رود؟ (د) زاویه سطح شیدار با سطح افقی چقدر است؟

۳۶. کارگری صندوقی را با طنابی روی کف کارگاه می‌کشد. کارگر نیروی 450 N به طناب وارد می‌کند، و سر طناب 38° بالاتر از سطح افقی است. کف نیروی بازدارنده افقی ای به اندازه 125 N بر صندوق وارد می‌کند (شکل ۳۱). اگر (الف) جرم صندوق 96 kg باشد و (ب) وزن آن 96 N باشد، شتاب صندوق چقدر است؟



شکل ۳۱. مسئله ۳۶

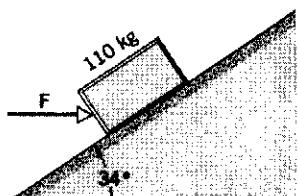
۳۷. جرم آسانسوری با بارش 1600 kg است. این آسانسور که با سرعت 12m/s به طرف پایین در حرکت است، طی مسافت 42m متوقف می‌شود. کشش کابل نگهدارنده، طی مدتی که آسانسور متوقف می‌شود چقدر است؟

۳۸. جسمی از یک ترازوی فنی که به سقف آسانسوری متصل شده، آویزان است. وقتی آسانسور ساکن است، ترازو 65N را نشان می‌دهد. (الف) اگر آسانسور با سرعت ثابت 8m/s به طرف بالا حرکت کند، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) وقتی آسانسور با سرعت 8m/s با شتاب کندشونده 2m/s^2 به طرف بالا در حرکت باشد، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟

۳۹. وزنه کوچکی توسط قطعه نخی به جرم ناجیز از سقف واگن قطاری آویزان است. چنین شاغلی می‌تواند مانند شتاب سنج عمل کند. (الف) نشان بدید که رابطه شتاب افقی واگن با زاویه θ ، که ریسمان با راستای قائم می‌سازد، $a = gtan\theta$ است. (ب) را به ازای $20^\circ = \theta$ حساب کنید. (ج) θ را به ازای 5m/s^2 حساب کنید.

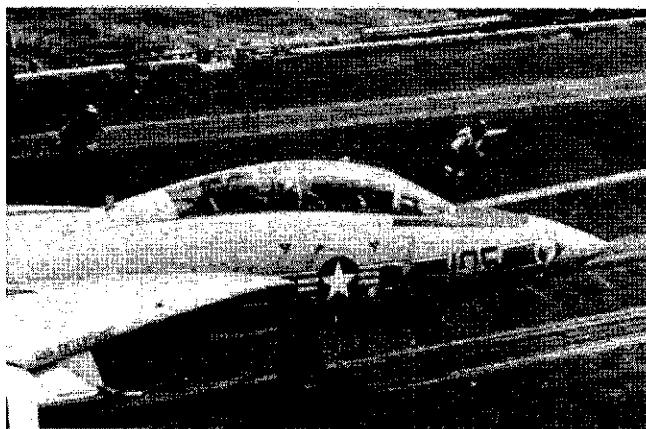
۴۰. یک موتور جت به جرم 1400 kg با سه بست به بدنه یک هواپیمای مسافری متصل است (در عمل هم همین طور است، شکل ۳۲). فرض کنید که هر بست یک سوم بار را تحمل می‌کند. (الف) نیروی وارد بر هر بست را، در حالتی که هواپیما منتظر خالی شدن باند است تا شروع به حرکت کند، حساب کنید. (ب) طی پرواز هواپیما ناگهان به جریان متلاطمی بر می‌خورد که به آن شتاب 6m/s^2 به طرف بالا می‌دهد. نیروی وارد بر هر بست، در این شرایط چقدر است؟ چرا فقط از سه بست استفاده می‌شود؟

- (الف) نیروی افقی لازم برای این کار (F) چقدر است؟
 (ب) نیرویی که سطح شیبدار بر صندوق وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۳۴. مسئله ۴۲

۴۴. یک جت نظامی (شکل ۳۵) به جرم 26ton , باید به سرعت 280 ft/s نسبت به هوا برسد تا بتواند شروع به پرواز کند. موتور خود جت نیروی 2400 lb تولید می‌کند. این جت باید از ناو هوایی‌سابری که طول عرضه پرواز آن 30 ft است به هوا بلند شود. برتاب‌کننده ناو چه نیرویی باید بر هوایی‌ما اعمال کند؟ فرض کنید که هم برتاب‌کننده و هم موتور در تمام مسافت 30 ft ، نیروی ثابتی اعمال می‌کنند.



شکل ۳۵. مسئله ۴۴

۴۵. موشک سیاره‌نشینی به سطح کالیستو، یکی از اقمار سیاره مشتری، نزدیک می‌شود (شکل ۳۶). اگر موتور موشک نیروی رو به بالای $N 3260$ تولید کند، سیاره‌نشین با سرعت ثابت فرود می‌آید. کالیستو جزو ندارد. اگر نیروی رو به بالا $N 2200$ باشد، سیاره‌نشین با شتاب $a 390\text{ m/s}^2$ به طرف پایین می‌آید. (الف) وزن سیاره‌نشین در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟ (ب) جرم سیاره‌نشین چقدر است؟ (ج) شتاب گرانشی در نزدیکی سطح کالیستو

حدقدر است؟

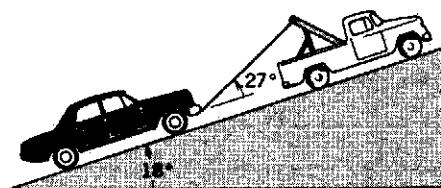
Ramin.Samad@yahoo.com



شکل ۳۲. مسئله ۴۰

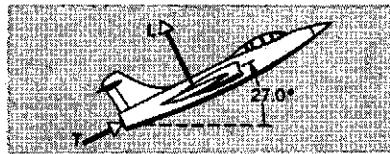
۴۱. چند کارگر در طبقه بالای ساختمانی وسایل و دستگاه‌هایی را در یک آسانسور باری می‌گذارند تا به طبقه پایین بفرستند، اما کابل کهنه آسانسور تحمل این همه بار را ندارد و پاره می‌شود. جرم آسانسور با بار، در لحظه حادثه 160 kg است. هنگام سقوط آسانسور، ریلهای هدایت‌کننده آن نیروی بازدارنده ثابتی به اندازه $N 3700$ بر اتفاق وارد می‌کنند. آسانسور با چه سرعتی به کف محفظه‌اش برخورد می‌کند؟ کف محفظه بالا پایین‌تر است.

۴۲. اتومبیلی به جرم 1200 kg را با طنابی که به پشت کامیونی بسته شده است به بالای سطح شیبداری با زاویه 18° یدک می‌کشند. زاویه طناب با سطح شیبدار 27° است (شکل ۳۳). اگر طناب بتواند کشش 46kN را تحمل کند، اتومبیل را طی مدت 7.5s ، از حالت سکون، حداکثر تا چه مسافتی می‌شود یدک کشید؟ نیروهای بازدارنده وارد بر اتومبیل را در نظر نگیرید.



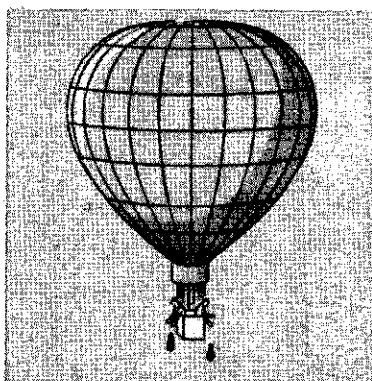
شکل ۳۳. مسئله ۴۲

۴۳. صندوقی به جرم 110 kg را با سرعت ثابت روی سطحی به شیب 34° هل می‌دهیم (شکل ۳۴).

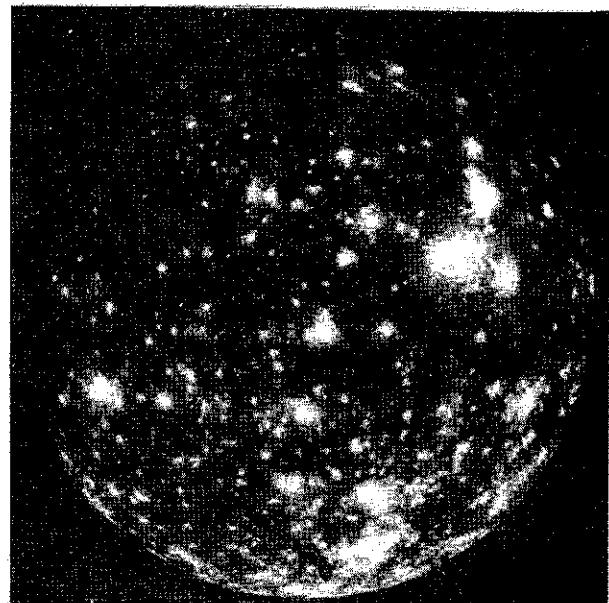


شکل ۳۸. مسئله ۴۸

۴۹. یک بالون پژوهشی به جرم M با شتاب رو به پایین در راستای قائم پایین می‌آید (شکل ۳۹). چقدر بار باید از بالون بیرون ریخت تا بالون شتاب رو به بالای a پیدا کند؟ فرض کنید نیروی بالابرندۀ بالون تغییری نمی‌کند.



شکل ۳۹. مسئله ۴۹



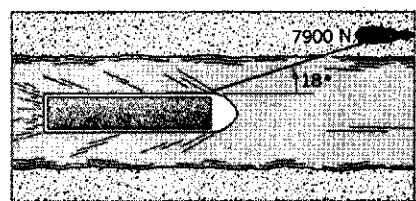
شکل ۳۶. مسئله ۴۵

۴۶. روزگاری کرجیها را با اسب می‌کشیدند و در کanal جلو می‌بردند (شکل ۳۷). فرض کنید اسب نیروی N ، با زاویة 18° نسبت به جهت حرکت در کanal، بر کرجی وارد کند. جرم کرجی 950 kg و شتاب آن 12 m/s^2 است. آب چه نیرویی بر کرجی وارد می‌کند؟

۵۰. موشکی به جرم 30 kg از زمین با زاویة فراز 58° آتش می‌شود. موتور موشک به مدت 48 s یک نیروی پیشران به مقدار 61 kN در زاویة ثابت 58° با سطح افقی تولید می‌کند و بعد خاموش می‌شود. از جرم سوخت مصرف شده و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. (الف) ارتفاع موشک در نقطه خاموش شدن موتور و (ب) کل فاصله میان نقطه پرتاب و نقطه برخورد موشک به زمین را پیدا کنید.

۵۱. مکعبی به جرم m روی سطح شیدار بدون اصطکاکی که در آسانسوری واقع شده است به پایین می‌لغزد. زاویة سطح نسبت به کف آسانسور θ است. شتاب این مکعب نسبت به سطح شیدار را در حالت‌های زیر پیدا کنید. (الف) آسانسور با سرعت ثابت v پایین می‌آید. (ب) آسانسور با سرعت ثابت v بالا می‌رود. (ج) آسانسور با شتاب ثابت تندکننده a پایین می‌آید. (د) آسانسور با شتاب ثابت کندکننده a پایین می‌آید. (ه) کابل آسانسور باره می‌شود. (و) در قسمت (ج) سطح شیدار چه نیرویی بر مکعب وارد می‌کند؟

۵۲. در شکل ۱۸، فرض کنید که $m_1 = 4\text{ kg}$ و $m_2 = 1\text{ kg}$ بخش ۱۱-۵ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

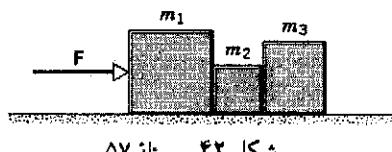


شکل ۳۷. مسئله ۴۶

۴۷. موشکی با بارش 510 kg جرم دارد. نیروی پیشران موشک در حالتی که موشک (الف) بلا فاصله پس از روشدن روی سکوی پرتاب به حالت "شناور" درآمده است و (ب) با شتاب 18 m/s^2 به طرف بالا، حرکت می‌کند چقدر است؟

۴۸. جت جنگنده‌ای با زاویة 27° نسبت به سطح افقی، و با شتاب 26.2 m/s^2 از زمین جدا می‌شود (شکل ۳۸). (الف) نیروی پیشران T موتور هواپیما و (ب) نیروی بالابرندۀ L را که ناشی از هوا و عمود بر بالهای هواپیماست به دست بیاورید.

حالت (ب) m_2 بر m_3 و (ج) m_1 بر m_2 چه نیرویی وارد می‌کند؟



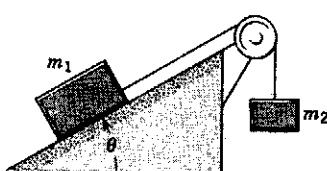
شکل ۴۲. مسنله ۵۷

۵۸. زنجیری شامل ۵ حلقه، هر یک به جرم 100 g ، را با شتاب ثابت 250 m/s^2 در راستای قائم بالا می‌بریم (شکل ۴۳). (الف) نیرویی که حلقه‌های مجاور بر هم وارد می‌کنند، (ب) نیروی F که عامل خارجی بر حلقه بالانی وارد می‌کند، و (ج) نیروی خالص وارد بر هر حلقه را حساب کنید.



شکل ۴۳. مسنله ۵۸

۵۹. جسمی به جرم $m_1 = 3\text{ kg}$ روی سطح شیبداری به زاویه $\theta = 28^\circ$ واقع شده و با ریسمانی که از فقره کوچک بی جرم و بدون اصطکاکی عبورکرده، به جسم دیگری به جرم $m_2 = 1.86\text{ kg}$ متصل شده است. m_2 به طور قائم از ریسمان آویزان است (شکل ۴۴). (الف) شتاب هر جسم چقدر است؟ (ب) کشنش ریسمان چقدر است؟



شکل ۴۴. مسنله ۵۹

۶۰. چتربازی به جرم 77 kg ، کسی پس از باز شدن چترش با شتاب رو به پایین 2.5 m/s^2 سقوط می‌کند. جرم چتر 2.2 kg است. (الف) نیروی رو به بالای هوا بر چتر چقدر است؟ (ب) نیروی رو به پایینی که شخص بر چتر وارد می‌کند چقدر است؟

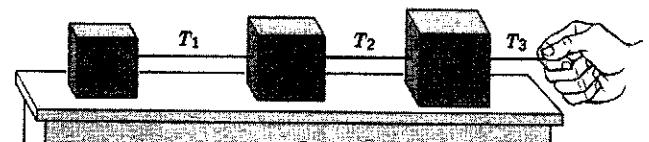
۶۱. آسانسوری شامل اتافک (A)، وزنه مقابل (B)، موتور (C)، و کابل و فقره است (شکل ۴۵). جرم اتافک 1000 kg و جرم وزنه مقابل 1400 kg است. اصطکاک و جرم کابل و فقره‌ها را به حساب نیارید. آسانسور با شتاب تندکننده 32 m/s^2 به بالا می‌رود و وزنه مقابل هم با همین شتاب به پایین می‌آید. (الف) کشنش T_1 و (ب) کشنش

است. (الف) شتاب دو قطعه و (ب) کشنش ریسمان را پیدا کنید. ۵۳. مردی به جرم 110 kg با گرفتن طنابی خودش را از ارتفاع 12 m به سطح زمین می‌رساند. طناب از روی فقره بدون اصطکاکی گذشته و سر دیگریش به کیسه شنی به جرم 74 kg بسته شده است. (الف) مرد با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) آیا راهی هست که با سرعت کمتری به زمین بخورد؟

۵۴. میمونی به جرم 11 kg از طنابی بسیار سبک بالا می‌رود. طناب (بدون اصطکاک!) از روی شاخه درختی گذشته است و به باری به جرم 15 kg متصل است. (الف) میمون حداقل با چه شتابی باید از طناب بالا برود تا بتواند بار را از زمین بلند کند؟ (ب) اگر پس از بلند شدن بار از زمین، میمون بالا رفتن خود را متوقف کند و از طناب آویزان بماند، (ب) شتاب میمون و (ج) کشنش طناب چقدر می‌شود؟

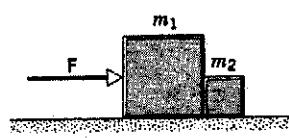
۵۵. سه جسم روی میز افقی بدون اصطکاکی به هم بسته شده‌اند، و با نیروی 5 N به طرف راست کشیده می‌شوند (شکل ۴۰). اگر $m_1 = 2\text{ kg}$, $m_2 = 3\text{ kg}$, و $m_3 = 1\text{ kg}$ باشد، (الف) شتاب سیستم و (ب) کشنشهای T_1 و T_2 را بدست بیاورید.

تبادل نیرو بین اجسامی که به دنبال هم کشیده می‌شوند، مثلًاً اگنهای قطار که لکوموتیو آنها را می‌کشد، مثل همین سیستم است.



شکل ۴۰. مسنله ۵۵

۵۶. دو جسم روی میز بدون اصطکاکی با هم در تماس‌اند. نیرویی افقی F به یکی از آنها اعمال می‌شود (شکل ۴۱). (الف) اگر $m_1 = 2\text{ kg}$, $m_2 = 3\text{ kg}$ باشد، نیروی $F = 3\text{ N}$ واردد که اگر همین نیروی تتماسی بین دو جسم را پیدا کنید. (ب) نشان بدید که اگر همین نیروی خارجی را، به جای m_1 ، به m_2 وارد کنیم، نیروی تتماسی بین اجسام 1.2 N می‌شود، که با مقدار حاصل از قسمت (الف) فرق می‌کند. چرا چنین است؟

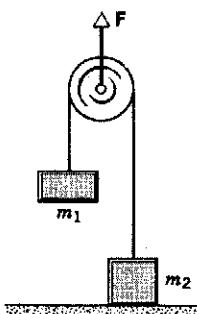


شکل ۴۱. مسنله ۵۶

۵۷. شکل ۴۲ سه صندوق به جرم‌های $m_1 = 45\text{ kg}$, $m_2 = 22\text{ kg}$, و $m_3 = 34\text{ kg}$ را روی سطح افقی بدون اصطکاکی نشان می‌دهد. (الف) چه نیروی افقی‌ای (F) لازم است تا کل مجموعه را با شتاب 32 m/s^2 را به طرف راست براند؟ در این

T_2 در کابل چقدر است و (ج) موتور چه نیرویی به کابل وارد می‌کند؟

زمین بماند؛ (ب) اگر F برابر با 110 N باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) باکشش حاصل از قسمت (ب)، شتاب m_1 چقدر است؟

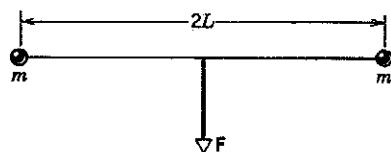


شکل ۴۷. مسئله ۶۳

۶۴. دو ذره، هر یک به جرم m با ریسمان سبکی به طول $2L$ بهم متصل‌اند (شکل ۴۸). نیروی ثابت F در نقطه میانی ریسمان ($x = 0$) در جهت عمود بر راستای اولیه ریسمان برآن وارد می‌شود. نشان بدهید که شتاب هر جرم در راستای عمود بر F برابر است با

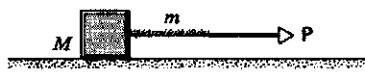
$$a_x = \frac{F}{2m} \frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}}$$

که در آن، x فاصله عمودی هر جرم از خط اثر F است. وضعیت را در حالت $L = x$ بررسی کنید.



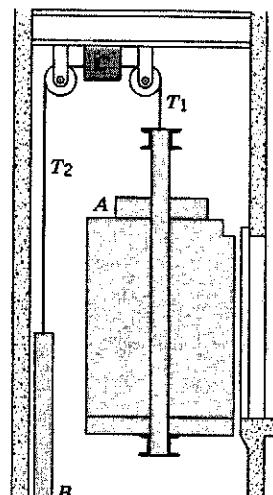
شکل ۴۸. مسئله ۶۴

۶۵. جسمی به جرم M روی سطح افقی بدون اصطکاکی با طنابی به جرم m کشیده می‌شود (شکل ۴۹). نیروی افقی P بر انتهای طناب وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که طناب، هر چقدر ناجیز به هر حال باید "شکم بدده". حالا با فرض ناجیز بودن مقدار خمیدگی طناب، (ب) شتاب طناب و جسم، (ج) نیرویی که طناب بر جسم وارد می‌کند، و (د) کشش طناب در وسط آن را حساب کنید.



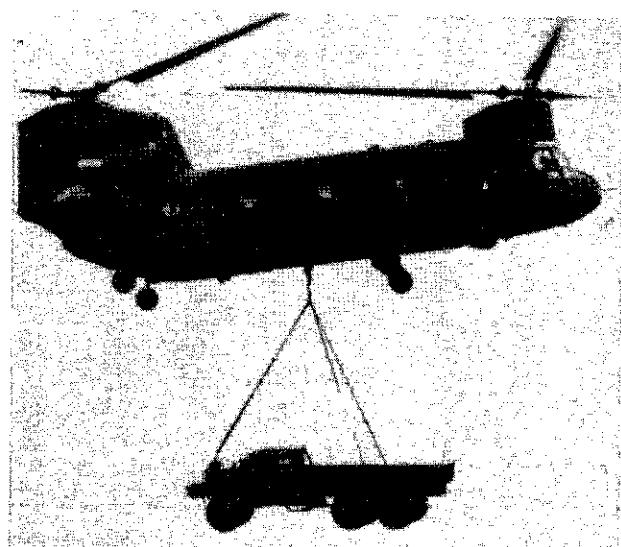
شکل ۴۹. مسئله ۶۵

۶۶. شکل ۵۰ بخشی از یک دستگاه "تلکابین" را نشان می‌دهد. بیشترین جرم مجاز هر اتاقک با محتوایتش 280 kg است. اتاقکها به یک کابل نگهدارنده سوارند و با کابل دیگری که به دکلها متصل است کشیده می‌شوند. اگر اتاقکها با شتاب 1 m/s^2 در امتداد



شکل ۴۵. مسئله ۶۱

۶۲. هلیکوپتری به جرم 15000 kg اتومبیلی به جرم 4500 kg را با شتاب 2 m/s^2 از زمین بلند می‌کند. (الف) نیروی عمودی ای را که هوا بر پروانه‌های هلیکوپتر وارد می‌کند و (ب) کشش بخش بالایی کابل نگهدارنده را پیدا کنید (شکل ۴۶).



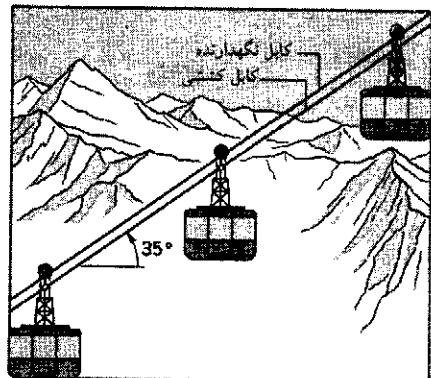
شکل ۴۶. مسئله ۶۲

۶۳. محور قرقه شکل ۴۷ با نیروی F به بالا کشیده می‌شود. فرض کنید قرقه و ریسمان بی‌جرم‌اند و محور هم بدون اصطکاک است. دو جسم، m_1 به جرم 2 kg و m_2 به جرم 1 kg ، به دور ریسمانی بسته شده‌اند که از روی قرقه می‌گذرد. جسم m_2 روی زمین است. (الف) نیروی F از چه مقداری بیشتر نباشد تا m_2 روی

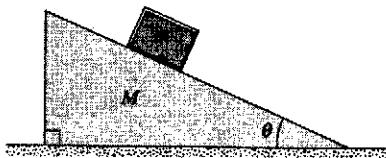
قرقره متصل به آن هم کلاً $43lb$ است. وزن طناب ناچیز است. شخص باید با چه نیرویی طناب را بکشد تا بتواند خودش سکو را با شتاب $12ft/s^2$ را به بالا حرکت بدهد؟

۶۸. جسمی به جرم m روی گوه قائم الزاویه‌ای به جرم M و زاویه شیب θ واقع شده است. گوه روی یک میز افقی قرار دارد (شکل ۵۲). (الف) M باید چه شتابی (a) نسبت به میز داشته باشد تا m نسبت به گوه ساکن بماند؛ تماس گوه و جسم را بدون اصطکاک فرض کنید. (ب) چه نیروی افقی F باید به این سیستم وارد کرد تا نتیجه (الف) حاصل شود؛ سطح میز را هم بدون اصطکاک فرض کنید. (ج) فرض کنید نیرویی به M وارد نمی‌کنیم و همه سطوح را هم بدون اصطکاک بگیرید. حالا حرکت حاصل را توصیف کنید.

شیب 35° به بالا کشیده شوند، اختلاف کشنش دو قسمت مجاور کابل کشنش (در دو طرف اتفاق) چقدر است؟

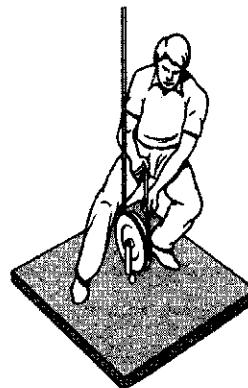


شکل ۵۰. مسئله ۶۶



شکل ۵۲. مسئله ۶۸

۶۷. در شکل ۵۱، وزن شخص $180lb$ است؛ وزن سکو و قرقره



شکل ۵۱. مسئله ۶۷

۶

دینامیک ذرات

در فصل ۵ قوانین نیوتون را معرفی کردیم و مثالهایی از کاربردهایشان ارائه دادیم. این مثالها را مخصوصاً ساده کرده بودیم تا کاربرد قوانین را شناسان بدهیم. اما در این روند ساده‌سازی بیش از حد، بخشی از دید فیزیکی از دست می‌رود. مثلاً یکی از مسائل مهم مکانیک، که به ویژه در طراحی سیستم‌های مکانیکی وارد می‌شود، مسئله اصطکاک است. در تمام مثالهای فصل ۵ فرض شده بود اصطکاک حضور ندارد.

در این فصل بررسی کاربردهای قوانین نیوتون را ادامه می‌دهیم؛ نیروهای اصطکاک را معرفی، و آثارشان را مطالعه می‌کنیم. نیروهای متغیر را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلات حرکت وابسته به چنین نیروهایی را حل کرد. سرانجام، نشان می‌دهیم که استفاده از چارچوبهای مرجع نالخت موجب بروز آثاری می‌شود که می‌توان آنها را با وارد کردن نیروهای لختی یا شبیه نیروها تحلیل کرد. این نیروها، برخلاف آنها که در فصل ۵ بررسی کردیم، ناشی از جسم خاصی در محیط ذره نیستند.

و معمولی می‌توانید متوجه ضعیف بودن گرانش بشوید—مثلاً با بلند کردن چند تکه کاغذ بهوسیله شانه باردار، یا بلند کردن چند سوزن یا گیره کاغذ بهوسیله یک آهربای کوچک. نیروی مغناطیسی آهربای کوچکی می‌تواند بر نیروی گرانشی ای که کل زمین بر این اجسام وارد می‌کند غلبه کند!

برای هر چه ساده‌تر کردن این تصویر، فیزیکدانها کوشیده‌اند عده نیروها را از چهار هم کمتر کنند. در سال ۱۹۶۷، نظریه‌ای مطرح شد که طبق آن می‌شود نیروی الکترومغناطیسی و نیروی ضعیف را اجزای یک نیروی واحد، نیروی الکتروضعیف، در نظر گرفت. ترکیب یا وحدت این دو نیرو شبهی است به وحدت نیروهای مجزای الکتریکی و مغناطیسی در قرن نوزدهم، که به نیروی واحد الکترومغناطیسی منجر شد. نظریه‌های جدید دیگری موسوم به نظریه‌های وحدت بزرگ هم ارائه شده‌اند که نیروهای قوی و الکتروضعیف را در یک چارچوب واحد ترکیب می‌کنند، و حتی "نظریه‌های همه‌چیز"ی وجود دارند که می‌خواهند گرانش را هم در این وحدت بگنجانند.

یکی از پیش‌بینیهای چنین نظریه‌هایی آن است که پروتون (ذره هسته‌ای که بار مثبت دارد) پایدار نیست بلکه در مدتی بسیار زیاد، شاید 10^{32} سال، وامی پاشد. (این زمان خیلی خیلی زیادی است؛ مقایسه کنید با سن عالم که فقط 10^{10} سال است). یکی از راههای آزمودن این نظریه آن است که مجموعه‌ای از 10^{32} پروتون (معادل با مکعبی از آب به ضلع تقریباً ۱۷ متر) را به مدت یک سال مشاهده

۱- قوانین نیرو
پیش از اینکه به کاربرد قوانین نیوتون برگردیم، باید مختصراً از ماهیت خود نیروها صحبت کنیم. تا اینجا معادلات حرکت را برای تحلیل و محاسبه آثار نیروها به کار برده‌ایم، اما این معادلات چیزی درباره علم نیرو نمی‌گویند. برای اینکه بفهمیم که نیرو ناشی از چیست باید درک میکروسکوپی مفصلی از برهم‌کنش اجسام با محیط‌شان داشته باشیم. به نظر می‌رسد که طبیعت، در بنیادی ترین سطح خود، از طریق عده کمی نیروی بینایی عمل می‌کند. فیزیکدانها به طور معمول از چهار نیرو به عنوان نیروهای بنیادی نام می‌برند: ۱. نیروی گرانشی، که ناشی از حضور ماده است (یا، اگر بخواهیم با نظریه نسبیت عام سازگارتر باشیم، منشأ آن ماده و انرژی است)؛ ۲. نیروی الکترومغناطیسی، که شامل برهم‌کنشهای پایه‌ای الکتریکی و مغناطیسی است و پیوند میان اتمها، و ساختار جامدات از آثار آن است؛ ۳. نیروی هسته‌ای ضعیف، که موجوب بعضی از فرایندهای واپاشی پرتوza، و بعضی از واکنشهای میان ذرات بنیادی می‌شود؛ و ۴. نیروی قوی، که بین ذرات بنیادی عمل می‌کند و اجزای هسته را به هم پیوند می‌دهد.

در میکروسکوپیک ترین مقیاس، مثلاً برای دو پروتونی که درست در کنار هم واقع شده باشند، قدرت نسبی این نیروها به ترتیب عبارت است از: قوی (قدرت نسبی = ۱)؛ الکترومغناطیسی (10^{-2})؛ ضعیف (10^{-7})؛ گرانشی (10^{-28}). در مقیاسهای بنیادی، گرانشی فوق العاده ضعیف است و آثار آن قابل چشمپوشی است. با چند آزمایش ساده

باشد، هر محور چرخنده‌ای سرانجام خواهد بود. در اتمبیل، حدود ۲۰٪ توان موتور صرف مقابله با اصطکاک می‌شود. اصطکاک موجب خوردگی و گرفتگی قطعات متحرک می‌شود، و مهندسان تلاش زیادی برای کاهش آن می‌کنند. از طرف دیگر، بدون اصطکاک نمی‌شود راه رفت، نمی‌شود مدادی بدست گرفت، و تازه اگر بشود هم، اصلاً نمی‌شود نوشته، حمل و نقل با وسایل چرخدار هم، چنانکه می‌دانیم، غیرممکن می‌شود.

حالا می‌خواهیم که نیروی اصطکاک را بر حسب خواص جسم و محیط توصیف کنیم؛ یعنی می‌خواهیم قانون نیروی اصطکاک را بدانیم. در آنجه می‌آید، لغزش (نه غلشن) یک سطح خشک (روغنکاری نشده) را بر سطحی دیگر بررسی می‌کنیم. چنانکه بعداً خواهیم دید، اصطکاک در سطح میکروسکوپیک پدیده‌ای بسیار پیچیده است. قوانین نیروی اصطکاک لغزشی خشک، ماهیت تجربی دارند و نتایجشان هم تقریبی است. در این قوانین سادگی، دقت، و زیبایی قانون نیروی گرانشی (فصل ۱۶) یا قانون نیروی الکتروستاتیک (فصل ۲۷) وجود ندارد. اما جالب است که از بررسی سطوح بیشماری معلوم می‌شود که بسیاری از ویژگیهای اصطکاک را به طور کیفی می‌توان براساس چند سازوکار ساده فهمید.^۱

جسمی را در نظر بگیرید که روی میزی افقی ساکن است (شکل ۱(الف)). فرنزی به این جسم می‌پندیم که نیروی افقی F لازم برای به حرکت درآوردن آن را بسنجد. اگر نیروی کوچکی به جسم وارد کنیم، خواهیم دید که جسم حرکت نمی‌کند (شکل ۱(ب)) در این صورت، می‌گوییم که میز هم نیروی اصطکاک مقاوم f را بر جسم وارد می‌کند؛ این نیرو در راستای سطح تماس است. با افزایش نیرویی که اعمال می‌کنیم (شکلهای ۱(ج) و ۱(د)) خواهیم دید که نیروی معینی وجود دارد که در آن، جسم از سطح "کنده می‌شود" و شتاب می‌گیرد (شکل ۱(ه)). پس از شروع حرکت، با کاهش مقدار نیرو خواهیم دید که می‌توان جسم را در حالت حرکت یکنواخت نگه داشت (شکل ۱(و)). شکل ۱(و) نتایج یکی از آزمایش‌های سنجش نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. در حدود $28 = t$ ، اعمال نیرو شروع می‌شود و این نیرو به تدریج افزایش می‌یابد. در این مدت، نیروی اصطکاک هم همراه با F زیاد می‌شود و جسم هنوز ساکن است. در $48 = t$ ، جسم یکباره شروع به حرکت می‌کند و از آن پس نیروی اصطکاک، مستقل از نیرویی که اعمال می‌شود، ثابت می‌ماند.

نیروی اصطکاک بین سطوحی که نسبت به هم ساکن‌اند، نیروی اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود. بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی (متناظر با قله $t = 48$) در شکل ۱(ز) برای است با کمترین مقدار نیروی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند، با شروع حرکت، نیروی اصطکاک بین سطوح معمولاً کم می‌شود، یعنی نیروی کمتری لازم است تا حرکت یکنواخت را حفظ کند (متناظر با نیروی تقریباً ۱). یک مرجع عمومی خوب برای اصطکاک، مقاله‌ای است که در دایرة المعارف بیوتانیکا ویراست چهاردهم، در این باره آمده است.

کنیم و بینیم که آیا یکی از پروندهای آن وامی پاشد یا خیر. برای آزمودن چنین نظریه‌های غریبی، این آزمایشها ضروری‌اند، آزمایش‌هایی که بی‌شایسته به جستجوی یک سوزن در کاهدان نیست. در فصل ۵۶ نسخه طولانی‌تر همین کتاب، در مورد چنین تأملاتی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

خوب‌خانه برای تحلیل سیستمهای مکانیکی نیازی به استفاده از چنین نظریه‌هایی نداریم. در واقع، هر آنچه درباره سیستمهای مکانیکی معمولی مطالعه می‌کنیم فقط به دو نیرو مربوط می‌شود: گرانش و الکترومغناطیس. نیروی گرانشی به طور عمده در جاذبه زمین برابر ظاهر می‌شود، جاذبه‌ای که موجب وزن اجسام می‌شود. جاذبه گرانشی اجسام آزمایشگاهی بر یکدیگر، بسیار ضعیفتر است و تقریباً همیشه می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

همه نیروهای دیگری که معمولاً بررسی‌شان می‌کنیم در نهایت منشأ الکترومغناطیسی دارند: نیروهای تنسی، مثلاً نیروی عمودی که از فشار آوردن جسمی به جسم دیگر ناشی می‌شود و نیروی اصطکاک ناشی از کشیده شدن سطوح اجسام روی یکدیگر است؛ نیروهای چسبندگی، مثلاً مقاومت هوا؛ نیروهای کششی، مثلاً کشش نخ یا طناب؛ نیروهای کشسانی، مثلاً نیروی فن؛ بسیاری نمونه‌های دیگر، همه از این نوع‌اند. خوب‌خانه، در بررسی سیستمهای مکانیکی معمولی می‌توانیم اساس میکروسکوپی را تادیده بگیریم و به جای این زیرساخت‌های پیچیده، یک نیروی مؤثر با اندازه و جهت معین اختیار کنیم.

۲- نیروی اصطکاک^۱

اگر جسمی به جرم m را با سرعت اولیه v روی میزی افقی رها کنیم، سرانجام خواهد بود. این یعنی که جسم در طی حرکتش یک شتاب متوسط \bar{a} دارد که در خلاف جهت حرکت است. هر وقت (در چارچوبهای لخت) بینیم که جسمی شتاب دارد، نیرویی به حرکت جسم واپسی می‌کنیم، که طبق قانون دوم نیوتون تعریف می‌شود. در مورد بالا می‌گوییم که میز، بر جسمی که بر آن می‌لغزد، یک نیروی اصطکاک وارد می‌کند که متوسط آن $m\bar{a}$ است. عموماً منظور مان از اصطکاک، یک برهم‌کنش تنسی بین جامدات است. آثار شبیه به اصطکاکی را که در میانعات و گازها ایجاد می‌شوند با اصطلاحات دیگری توصیف می‌کنیم (بخش ۷.۶).

در واقع، هرگاه که سطح جسمی بر سطح جسم دیگری بلغزد، هر جسم یک نیروی اصطکاک به دیگری وارد می‌کند. نیروی اصطکاک وارد بر هر جسم در جهت خلاف حرکت آن نسبت به جسم دیگر است. نیروی اصطکاک، خود به خود با این حرکت نسبی مقابله می‌کند و هیچ گاه به آن کمک نمی‌کند. حتی اگر هیچ حرکت نسبی‌ای هم در کار نباشد، ممکن است بین سطوح نیروی اصطکاک وجود داشته باشد. تاکنون از آثار نیروی اصطکاک چشم پوشیده‌ایم، اما اصطکاک در زندگی روزمره بسیار مهم است. اگر فقط نیروی اصطکاک در کار

و با نیروی وارد مقابله می‌کند. برای جسمی که روی یک میز افقی ساکن است یا می‌لغزد، اندازه نیروی عمود بر سطح برابر با وزن جسم است. چون جسم شتاب عمودی ندارد، میز باید نیرویی بر آن وارد کرده باشد که به طرف بالاست و اندازه آن با کشش رو به پایین زمین بر جسم، یعنی وزن جسم، برابر است.

نسبت بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی به اندازه نیروی عمودی میان دو سطح را ضریب اصطکاک ایستایی آن سطوح می‌نامند. اگر f_s اندازه نیروی اصطکاک ایستایی باشد، می‌شود نوشته

$$f_s \leq \mu_s N \quad (1)$$

که در آن، μ_s ضریب اصطکاک ایستایی و N اندازه نیروی عمودی است. تساوی فقط وقتی برقرار است که f_s بیشترین مقدارش را داشته باشد. در مورد نیروی اصطکاک جنبشی f_k بین سطوح خشک و روغنکاری نشده هم، دو قانون مشابه برقرار است. ۱. نیروی اصطکاک جنبشی، در گستره وسیعی، تقریباً مستقل از مساحت ناحیه تماس دو سطح است. ۲. نیروی اصطکاک جنبشی متناسب با نیروی عمودی است. نیروی اصطکاک جنبشی، تا حدود زیادی از سرعت نسبی سطوح هم مستقل است.

نسبت اندازه نیروی اصطکاک جنبشی به اندازه نیروی عمود بر سطح را ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامند. اگر f_k نماینده اندازه نیروی اصطکاک جنبشی باشد، داریم

$$f_k = \mu_k N \quad (2)$$

که در آن، μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است.

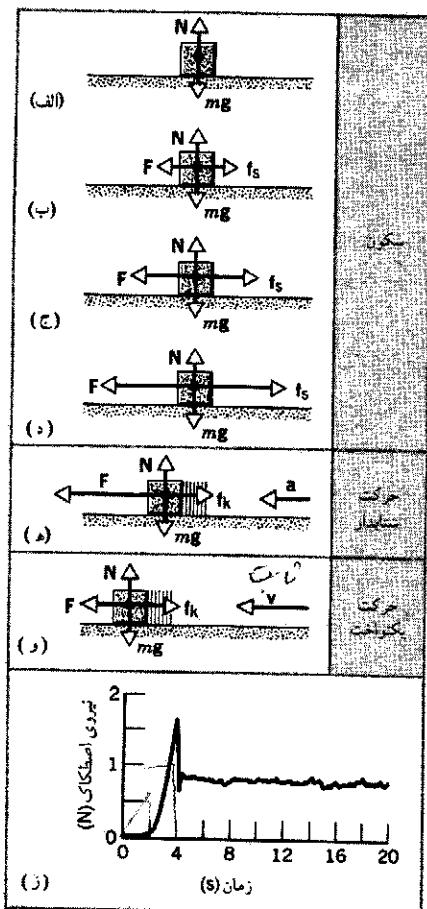
μ_s و μ_k ، هر دو ثابت بدون بعدند، زیرا نسبت (اندازه) دو نیرو هستند. برای هر زوج سطح، معمولاً $\mu_k < \mu_s$ است. مقادیر واقعی μ_s و μ_k به چگونگی سطوح تماس بستگی دارد. در اغلب موارد می‌توان این دو مقدار را (برای یک زوج سطح معین) در گستره وسیعی از نیروها و سرعتهایی که با آنها سروکار داریم، ثابت فرض کرد. هم μ_s و هم μ_k می‌توانند بزرگتر از یک باشند، گرچه معمولاً کوچکتر از یک‌اند. در جدول ۱ مقادیر نوعی μ_s و μ_k برای بعضی مواد آمده است. دقت کنید که روابط ۱ و ۲ فقط بین اندازه نیروی عمودی و نیروی اصطکاک برقرارند. نیروی اصطکاک و نیروی عمود بر سطح، همواره بر هم عمودند.

۱. برای آشایی با جزئیات این آزمایش، رجوع کنید به

"Undergraduate Computer-Interfacing Projects," Joseph Priest and John Snyder, *The Physics Teacher*, May 1987, p. 303.

۲. این دو قانون اصطکاک را ابتدا لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ تا ۱۵۱۹) به طور تجربی کشف کرد. بیان لئوناردو از این دو قانون، با توجه به اینکه دو قرن پیش از پرداخت مفهوم نیرو توسط نیوتون بود، کار سیار مهمی بود. عبارتهای ریاضی قوانین اصطکاک و مفهوم ضریب اصطکاک را بعداً شارل اوگوستین کولن (۱۷۳۶ تا ۱۸۰۶) معرفی کرد. شهرت کولن بیشتر به خاطر مطالعاتش درباره الکتروستاتیک

Ramin samad@yahoo.com



شکل ۱. (الف تا د) نیروی خارجی F که به جسم ساکنی اعمال می‌شود؛ با نیروی اصطکاک f خنثی می‌شود. (۱) هم اندازه، و در خلاف جهت آن است. با افزایش F ، f هم زیاد می‌شود، تا وقتی که به حداقل معینی برسد. (ه) در این حالت، جسم "کنده می‌شود" و به طرف چپ شتاب F می‌گیرد. (و) اگر بخواهیم که جسم با سرعت ثابت حرکت کند، باید نیروی F را از مقداری که درست پیش از به حرکت درآمدن جسم داشت کمتر کنیم. (ز) نتایج تجربی: نیروی F را، از حدود $2s = t$ ، از مقدار صفر زیاد می‌کنیم، و حرکت تقریباً در زمان $s = t$ ناگهان شروع می‌شود.^۱

ثابت در $t > 4s$ در شکل ۱ ز). نیروی اصطکاک بین سطوح متحرک نسبت به یکدیگر را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند.

برای بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی بین هر زوج سطوح خشک روغنکاری نشده، دو قانون تجربی داریم: ۱. این مقدار، در گسترهای وسیع تقریباً مستقل از مساحت ناحیه تماس است و ۲. این مقدار متناسب با نیروی عمود بر سطح است.^۲ نیروی عمود بر سطح (که گاهی آن را نیروی باز می‌نامند) از خواص کشسانی اجسام در حال تماس با هم ناشی می‌شود (فصل ۱۴). چنین اجسامی هرگز به طور کامل صلب نیستند؛ اگر نیرویی بر جسمی وارد شود و جسم تواند در جهت نیرو حرکت کند، تغییر شکل می‌دهد (فسردمکانیک پیوست ۱).

زیاد باشد، ممکن است فلز در محل بعضی از نقاط تماس ذوب شود، اگرچه خود سطح در کل فقط کمی گرم می‌شود. همین رویدادهای "چسبیدن و لغزیدن" اند که موقع مالش سطوح بر یکدیگر تولید صدا می‌کنند؛ مثل جیرجیر گچ روی تخته سیاه.^۱

ضریب اصطکاک به متغیرهای زیادی بستگی دارد، از جمله جنس مواد، پرداخت سطح، لایه‌های سطحی، دما، و میزان ناخالصی. مثلاً، اگر دو سطح فلزی بسیار تمیز را در اتاقکی با خلاً شدید بگذاریم تا لایه سطحی اکسید نتواند تشکیل شود، ضریب اصطکاک بسیار زیاد می‌شود و دو سطح در واقع محکم به هم "جوش می‌خورند". اگر کمی هوا وارد اتاقک کنیم، روی سطح لایه اکسید تشکیل می‌شود و ضریب اصطکاک کم می‌شود و به مقادیر "عادی" اش می‌رسد.

نیروی اصطکاکی که مانع غلظیدن اجسام بر هم می‌شود، خیلی کمتر از اصطکاک لغزشی است؛ همین است که موجب مزیت چرخ بر سورتمه می‌شود. علت عدمه کاهش اصطکاک این است که در غلشن، جوشهای سطحی میکروسکوپیک از هم کنده و برداشته می‌شوند، در حالی که در لغزش، جوشها کشیده و بریده می‌شوند. چنین است که نیروی اصطکاک غلتشی چندین بار کوچکتر است.

مقاومت اصطکاکی در اصطکاک لغزشی خشک را با روغنکاری می‌توان به مقادیر قابل توجهی کم کرد. یک نقاشی بر دیوار غاری در مصر، که زمان آن در حدود ۱۹۰۰ پیش از میلاد است، مجسمه سنگی بزرگی را نشان می‌دهد که روی سورتمه‌ای کشیده می‌شود، و مردی در جلوی آن، روی مسیر روغن می‌ریزد. روش مؤثرتری هم وجود دارد و آن اینکه لایه‌ای از گاز بین سطوح لغزشده قرار بدنه. ریل هواپی آزمایشگاه و یاتاکان سوار بر "بالشک گاز" دو نمونه از موارد استفاده این روش‌اند. با معلق نگهداشتن اجسام به کمک نیروهای مغناطیسی، اصطکاک را از این هم می‌شود کمتر کرد. قطارهایی که (اخیراً) ساخته می‌شوند) با استفاده از میدان مغناطیسی به حالت تعليق در می‌آیند، قابلیت حرکت بسیار سریع و تقریباً بدون اصطکاک را دارند.

مثال ۱. جسمی روی سطح شیداری که با سطح افقی زاویه θ می‌سازد ساکن است (شکل ۴الف). با زیاد کردن زاویه شیب، درمی‌یابیم که درست در $15^\circ = \theta$ لغزش شروع می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیدار چقدر است؟

حل: نیروهای وارد بر جسم، که آنرا ذره در نظر می‌گیریم، در شکل ۴ ب شنان داده شده است. وزن جسم mg ، نیروی عمودی وارد بر جسم از سطح شیدار N ، و نیروی اصطکاک وارد بر جسم از سطح شیدار f است. توجه کنید که نیروی برایند وارد بر جسم از سطح شیدار، $f + N$ ، دیگر بر سطح تماس عمود نیست (برخلاف حالتی که سطح بدون اصطکاک بود). چون جسم ساکن است، از قانون دوم

جدول ۱. ضرایب اصطکاک.*

مک	می	سطوح
۰۲	۰۲۵ - ۰۳۰	چوب بر چوب
۰۴	۰۹ - ۰۱۰	شیشه بر شیشه
۰۶	۰۷	فولاد بر فولاد، برای سطوح تمیز
۰۵	۰۹	فولاد بر فولاد، برای سطوح روغنکاری شده
۰۸	۰۱	لاستیک بر بتون خشک
۰۴	۰۴	چوب اسکی موم‌زده بر برف خشک
۰۴	۰۴	تلنون بر تلنون

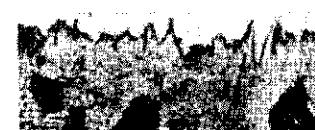
* مقادیر این جدول تقریبی‌اند و فقط برای تخمین مناسب‌اند. مقدار واقعی ضریب اصطکاک هر زوج سطح بستگی به شرایطی از قبیل تمیز بودن سطوح، دما، و رطوبت دارد.

اساس میکروسکوپی اصطکاک (اختیاری)

در مقیاس انتی، صیقلی ترین سطوح هم خیلی با صفحه فرق دارند. مثلاً، شکل ۲ یک نمایه واقعی از سطح فولاد فوق العاده صیقلی است، که البته، برای وضوح، خیلی خیلی درشت شده است. به راحتی می‌توان قبول کرد که وقتی دو جسم با هم در تماس باشند، مساحت میکروسکوپی واقعی ناحیه تماس خیلی کمتر از مساحت واقعی سطوح است؛ در مواردی نسبت این دو مساحت می‌تواند حتی یک بر ده هزار باشد.

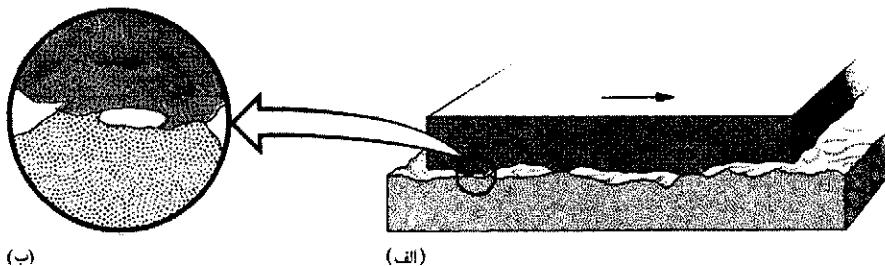
مساحت (میکروسکوپی) واقعی ناحیه تماس با نیروی عمود بر سطح مناسب است، زیرا نقاط تماس، تحت تنشیهای شدیدی که در این نقاط ایجاد می‌شود، مثل مواد پلاستیکی تغییر شکل می‌دهند. در واقع بسیاری از نقاط تماس با هم "جوش سرد" می‌خورند. علت این پدیده، چسبندگی سطحی است؛ در نقاط تماس مولکولهای دو طرف چنان به هم نزدیک می‌شوند که می‌توانند نیروهای قوی بین مولکولی بر هم وارد کنند.

وقتی جسمی (مثلاً فلزی) روی جسم دیگری کشیده می‌شود، دائمآ هزاران جوش کوچک شکسته می‌شود و تماسهای جدیدی برقرار می‌شود (شکل ۳)، و همین پدیده است که موجب مقاومت اصطکاکی می‌شود. آزمایش با ردبایهای پرتوزایی نشان داده است که در این عمل شکستن جوشها، مقادیر کوچکی از یک سطح فلزی می‌تواند کنده شود و به سطح دیگر بچسبد. اگر سرعت نسبی سطح به قدر کافی



شکل ۲. نمایه بزرگ‌شده یک سطح فولادی بسیار صیقلی. ابعاد قائم بی نظمیهای سطح، چند هزار برابر قطر اتم است. برش طوری مایل انجام گرفته که مقیاس عمودی ۱۰ برابر مقیاس افقی بزرگ شده است.

¹. می‌توانید رجوع کنید به "Stick and Slip," Ernest Rabinowicz in *Scientific American*, May 1956, p. 109.



(ب)

(الف)

شکل ۳. سازوکار اصطکاک لغزشی. (الف) سطح بروی، در این نمای بزرگ، روی سطح زیری به طرف راست می‌لغزد. (ب) تصویر بزرگ شده‌ای که در نقطه جوش سرد راشان می‌دهد. برای شکستن این جوشها و ادامه حرکت، نیرو لازم است.

روی کتابتان به پایین می‌لغزد تعیین کنید.

مثال ۲. اتومبیلی با سرعت v_0 روی جاده افقی مستقیمی حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک و جاده μ_s باشد، کمترین مسافت لازم برای توقف اتومبیل چقدر است؟

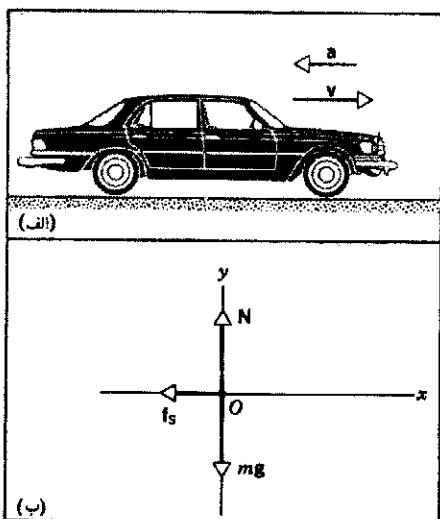
حل: شکل ۵ نیروهای وارد بر اتومبیل را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم اتومبیل در جهت مثبت x حرکت می‌کند. اگر f را ثابت بگیریم، حرکت با شتاب ثابت کند می‌شود.

از رابطه

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

با انتخاب مکان اولیه $x_0 = 0$ و سرعت نهایی $v = 0$ ، نتیجه می‌شود که

$$x = -\frac{v_0^2}{2a}$$



شکل ۵. مثال ۲. (الف) اتومبیلی با شتاب کندکننده. (ب) نمودار جسم آزاد اتومبیل با شتاب کندکننده، که به عنوان ذره در نظر گرفته می‌شود. برای سادگی، نقطه از همه نیروها را در یک جا می‌گیریم: در واقع، سه نیرویی که در شکل مشخص شده‌اند، مجموع نیروهایی هستند که بر هر یک از چهار

در شکل آورده شوند.

Ramin.samat@yahoo.com

نیوتون نتیجه می‌شود که $\sum F_x = 0$. نیروها را به مؤلفه‌های x و y (به ترتیب، در راستای سطح شیبدار و عمود بر آن) تجزیه می‌کنیم.

نتیجه می‌گیریم که برای مؤلفه x : $\sum F_x = f_s - mg \sin \theta = 0$

$$f_s = mg \sin \theta$$

برای مؤلفه y : $\sum F_y = N - mg \cos \theta = 0$

$$N = mg \cos \theta$$

در زاویه θ_s ، که لغزش شروع می‌شود، f_s بیشترین مقدارش را دارد و برابر است با $N \mu_s$. مقادیر بالا را به ازای θ_s به دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg \sin \theta_s}{mg \cos \theta_s} = \tan \theta_s$$

یا

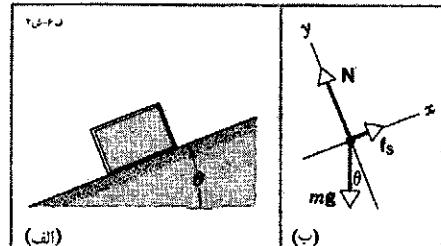
$$\mu_s = \tan \theta_s = \tan 15^\circ = 0.27$$

بنابراین، سنجش زاویه‌ای که لغزش از آن آغاز می‌شود، روش تجربی ساده‌ای برای تعیین ضریب اصطکاک ایستایی بین سطوح است. توجه کنید که نتیجه کار مستقل از وزن جسم است.

با استدلال مشابهی می‌توانید نشان بدید که زاویه سطح شیبدار θ_k ، که به ازای آن جسم (که قبلاً با ضربه کوچکی برای افتاده است) با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu_k = \tan \theta_k$$

که $\theta_k < \theta_s$ است. به کمک خطکش می‌شود تأثیرات زاویه شبی را اندازه گرفت؛ به این ترتیب، می‌توانید μ_s و μ_k را برای سکه‌ای که از



شکل ۴. مثال ۱. (الف) جسمی که روی سطح شیبدار ناهمواری ساکن است.

(ب) نمودار جسم آزاد این جسم.

عقب را سنگین تر کنند، یعنی مثلاً صندوق عقب را بار می‌کنند تا اینمی رانندگی بیشتر شود. این تجربه را چگونه می‌توان با نتیجه مامبینی بر مستقل از جرم بودن مسافت توقف سازگار کرد؟ (راهنمایی: مسئله ۲ را ببینید).

مثال ۳. مثال ۱۰ فصل ۵ را تکرار کنید، اما این بار نیروی اصطکاک میان جسم ۱ و سطح شیدار را هم در نظر بگیرید. مقادیر $\mu_s = ۰.۲۴$ و $\mu_k = ۰.۱۵$ را به کار ببرید.

حل: اگر فرض کنیم، چنانکه در مثال ۱۰ فصل ۵ دیدیم، جسم ۱ از سطح شیدار به پایین می‌لغزد، نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیدار است. شکل ۶ نمودار جسم آزاد m_1 را نشان می‌دهد. در این حالت، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای m_1 عبارت اند از

$$\begin{aligned} \text{مؤلفه } x: & F_x = T + f - m_1 g \sin \theta = m_1 a_{1x} = -m_1 a \\ \text{مؤلفه } y: & F_y = N - m_1 g \cos \theta = m_1 a_{1y} = ۰ \end{aligned}$$

در اینجا صریحاً این انتظار را که a_1 باید در جهت منفی x باشد (یعنی $-a = a_{1x}$)، وارد کرده‌ایم. در معادله مربوط به m_2 هم تغییر مشابهی می‌دهیم:

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y} = -m_2 a$$

گذاشت این $a_{2y} = -a$ ، زیرا انتظار داریم جسم ۲ در جهت منفی y حرکت کند.

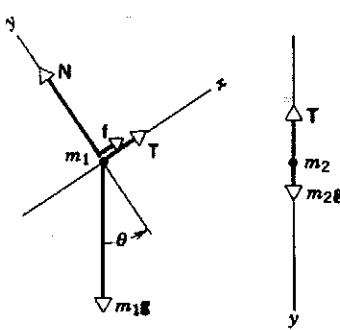
با استفاده از $\theta = \arctan \frac{\mu_k}{\mu_s}$ ، از مؤلفه x معادله $T + \mu_k m_1 g \cos \theta - \mu_s m_1 g \sin \theta = -m_1 a$ نتیجه می‌شود که

$$T + \mu_k m_1 g \cos \theta - \mu_s m_1 g \sin \theta = -m_1 a$$

دو معادله اخیر را با هم حل می‌کنیم، و مجهولهای a و T را به دست می‌آوریم:

$$a = -g \frac{m_1 - m_1 (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}{m_1 + m_2} \quad (۳)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (۴)$$



شکل ۶. مثال ۳. نمودارهای جسم آزاد شکل ۲۰ فصل ۵، با در نظر گرفتن اصطکاک در ایستایی سطح شیدار.

x مسافت توقف است، که طی آن سرعت از v_0 به ۰ می‌رسد. چون a منفی است، x ، چنان که انتظار می‌رود، مثبت است. برای تعیین a ، قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های شکل ۵ ب به کار می‌بریم:

$$\text{مؤلفه } x: x = -f_s/m \quad \text{یا} \quad \sum F_x = -f_s = ma$$

$$\text{مؤلفه } y: y = N = mg \quad \text{یا} \quad \sum F_y = N - mg = ۰$$

بنابراین

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg$$

این مقادیر را در عبارت a جایگذاری می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g$$

به این ترتیب، مسافت توقف برابر است با

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

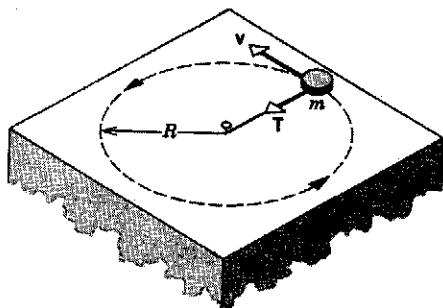
هر چه سرعت اولیه بیشتر باشد، مسافت بیشتری برای توقف لازم است؛ در واقع، این مسافت با محدود سرعت اولیه متناسب است. همچنین، هرچه ضریب اصطکاک میان سطح بیشتر باشد، مسافت کمتری برای توقف لازم است.

در این مثال ضریب اصطکاک ایستایی را به کار بردیم نه ضریب اصطکاک جنبشی را، زیرا فرض کرده‌ایم که لاستیکها روی جاده نمی‌لغزند. بعلاوه، فرض کرده‌ایم که بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی ($N = \mu_s m_1 g$) وارد می‌شود، زیرا می‌خواسته ایم کمترین مسافت توقف را پیدا کنیم. اگر نیروی اصطکاک ایستایی کوچک‌تر باشد، روشن است که مسافت توقف بیشتر می‌شود. روش صحیح تر مز کردن برای توقف در کمترین مسافت، آن است که حرکت اتومبیل را درست در آستانه لغزش نگه داریم. (اتومبیلهای مجهز به سیستم ضد فلی ترمز، خود به خود چنین وضعیتی را فراهم می‌کنند). اگر سطح جاده صاف باشد و پدال ترمز را تا نه فشار بدیم، ممکن است لغزش رخ بدهد. در این حالت، μ_s جانشین μ_m می‌شود و مسافت لازم برای توقف بیشتر می‌شود، زیرا μ_m از μ_s کوچک‌تر است.

به عنوان مثالی مشخص، اگر $v_0 = ۲۷ \text{ m/s} = ۶۰ \text{ mi/h}$ و $\mu_s = ۰.۶$ باشد (که معمولاً هم در همین حدود است) نتیجه می‌شود

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27 \text{ m/s})^2}{2(0.6)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 62 \text{ m}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم اتومبیل است. در اتومبیلهای که متورشان در جلوست ولی نیرو را به چرخ عقب متقل می‌کنند، هنگام رانندگی در جاده‌های برفی اغلب سعی می‌کنند "حرخهای



شکل ۷. قرصی به جرم m با سرعت ثابت در مسیری دایره‌ای بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. تنها نیروی افقی وارد بر قرص کشش T است که ریسمان با آن قرص را می‌کشد؛ همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای است. نیروهای عمودی (N و mg) را در شکل نشان نداده‌ایم.

جهتش مدام تغییر می‌کند. می‌توانید به شکل ۱۱ فصل ۴ برگردید؛ این شکل رابطه برداری بین v و a در حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را نشان می‌دهد.

طبق قانون دوم نیوتون ($\sum F = ma$) بر هر جسم شتابداری باید نیروی خالصی اثر کند. بنابراین (با فرض اینکه در یک چارچوب لخت قرار داریم)، اگر مشاهده کنیم که جسمی حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، می‌توانیم مطمئن باشیم که اندازه نیروی خالص $\sum F$ وارد بر آن از رابطه زیر تعیت می‌کند:

$$\left| \sum F \right| = ma = \frac{mv^2}{r} \quad (5)$$

این جسم در حالت تعادل نیست زیرا نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست. جهت نیروی خالص F در هر لحظه، باید با جهت a در همان لحظه یکی باشد؛ یعنی شعاعی و مرکزگرای. این نیرو را عامل (یا عوامل) خارجی، که در محیط جرم m واقع شده است، بر آن وارد می‌کند.

اگر جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد قرصی باشد که به سر ریسمانی بسته شده است و روی میزی افقی و بدون اصطکاک حرکت می‌کند (شکل ۷)، نیروی خالص وارد بر قرص را کشش T ریسمان تأمین می‌کند. این نیرو به قرص شتاب می‌دهد و جهت سرعت آن را به طور پیوسته تغییر می‌دهد. به این ترتیب است که قرص می‌تواند روی دایره حرکت کند. جهت T همواره به طرف میخی است که در مرکز دایره است، و اندازه آن باید برابر با mv^2/R باشد.

اگر ریسمان را قطع کنیم، دیگر نیروی خالصی وجود ندارد که بر قرص اثر کند. در این صورت، قرص با سرعت ثابت روی یک خط راست، در جهت مماس بر دایره در نقطه‌ای که از قید ریسمان رها شده است، حرکت خواهد کرد. این قرص در راستای شعاع از مرکز دور نمی‌شود، روی مسیر خمیده‌ای هم پیش نمی‌رود، بلکه دقیقاً روی خط راستی در جهت v در لحظه بریدن ریسمان، حرکت می‌کند.

توجه کنید که در حد $\theta \rightarrow 0$ ، معادلات ۳ و ۴ به معادلات ۹ و ۱۰ مثال ۵ فصل ۵ تبدیل می‌شوند (تنها علامت a فرق می‌کند زیرا در این مورد آن را در خلاف جهت قبلی گرفته‌ایم). مقدار عددی a و T را بدست می‌آوریم:

$$a = (-9,80 \text{ m/s}^2)$$

$$\times \frac{26\text{kg} - 9,5\text{kg}(\sin 34^\circ - 15 \cos 34^\circ)}{26\text{kg} + 9,5\text{kg}}$$

$$= 1,2 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{(9,5\text{kg})(26\text{kg})(9,80 \text{ m/s}^2)}{9,5\text{kg} + 26\text{kg}}$$

$$\times (1 + \sin 34^\circ - 15 \cos 34^\circ)$$

$$= 29 \text{ N}$$

مشتبث بودن a با طرح اولیه ما برای معادلات سازگار است؛ جسم به طرف پایین سطح شیدار حرکت می‌کند، همان‌طور که در مثال ۱۰ فصل ۵ حرکت می‌کرد، اما شتاب آن از شتاب حالت بدن اصطکاک (که $1,2 \text{ m/s}^2$ بود) کمتر است.

کشش ریسمان کمتر از حالت بدن اصطکاک (۳۱N) است. جسم ۱، در حضور اصطکاک با شتاب کمتری به پایین سطح شیدار می‌رود؛ بنابراین، ریسمان متصل به جرم ۲ را با شدت کمتری می‌کشد. پرسش دیگری که باید پاسخ بدھیم این است که اصولاً آیا سیستم حرکت می‌کند یا خیر. یعنی، آیا نیروی کافی برای غلبه بر اصطکاک ایستایی و شروع حرکت وجود دارد؟ اگر سیستم ابتدا در حالت سکون باشد، کشش ریسمان برایرا با وزن m_1 ، یعنی $26 \text{ N} = 26\text{kg}(9,8 \text{ m/s}^2)$ است. بیشترین مقدار اصطکاک ایستایی، که با تمایل جسم ۱ برای حرکت به پایین سطح شیدار مخالفت می‌کند، $19 \text{ N} = \mu_s m_1 g \cos \theta$ است. مؤلفه وزن $m_1 g \sin \theta = 52 \text{ N}$ است. وزن m_1 در جهت پایین سطح شیدار (۵۲N) بیش از بنابراین، مؤلفه وزن درجهت پایین سطح شیدار (۵۲N) بیش از مقدار لازم برای غلبه بر مجموع نیروهای کشش و اصطکاک ایستایی ($45 \text{ N} = 45N + 26N$) است، و سیستم واقعاً حرکت می‌کند.

خودتان باید بتوانید نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک ایستایی از 34° بیشتر باشد، حرکتی در کار نخواهد بود.

۶-۳ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

در بخش ۴-۴ دیدیم جسمی که با سرعت ثابت v روی دایره یا کمانی به شعاع r حرکت می‌کند، شتاب مرکزگرای a دارد که اندازه آن v^2/r است. a همواره در راستای شعاع و جهت آن به طرف مرکز دایره است. بنابراین، a یک بردار متغیر است، زیرا، اگرچه اندازه آن ثابت است،

نتیجه می‌دهد که

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + mg = ma$$

روشن است که نیروی خالص وارد بر جسم مخالف صفر است، و باید هم این طور باشد زیرا نیروی لازم است تا جسم بتواند با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند.

T را، در هر لحظه، به دو مؤلفه شعاعی و عمودی تجزیه می‌کنیم:

$$T_z = T \cos \theta \quad T_r = -T \sin \theta$$

اگر جهت شعاعی مثبت را به طرف خارج محور تعریف کنیم، مؤلفه شعاعی منفی می‌شود.
چون جسم شتاب عمودی ندارد، مؤلفه z قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_z = T_z - mg = 0$$

ما

$$T \cos \theta = mg$$

شتاب شعاعی $-v^2/R - a_r$ است؛ علامت منفی به خاطر آن است که شتاب به طرف داخل است (یعنی در خلاف جهت r ، که به عنوان جهت شعاعی مثبت گرفته‌ایم). این شتاب را T_r (مؤلفه شعاعی T) تأمین می‌کند، که همان نیروی مرکزگرای وارد بر m است. بنابراین، از مؤلفه شعاعی قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_r = T_r = ma_r$$

یا

$$-T \sin \theta = -mv^2/R$$

از تقسیم معادلات مؤلفه‌های شعاعی و z برهمن، نتیجه می‌شود که

$$\frac{-T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

v را از این معادله به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{Rg \tan \theta}$$

از این رابطه، سرعت ثابت جسم به دست می‌آید. t را زمان یک گردش کامل جسم می‌گیریم، نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

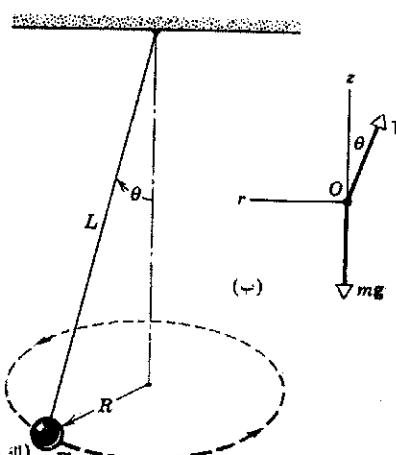
بنابراین، برای اینکه قرص روی دایره حرکت کند، باید نیرویی باشد تا آن را به طرف مرکز دایره، بکشد. نیرویی را که موجب حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌شود نیروی مرکزگرای نامند، زیرا جهت این نیرو "به طرف مرکز" دایره حرکت است؛ اما باید توجه داشت که نام "مرکزگرای" برای نیرو، تنها به این معنی است که جهت آن شعاعی و به طرف داخل است؛ این اسم، هیچ چیز درباره ماهیت نیرو یا جسمی که آن را وارد می‌کند نمی‌گوید؛ در مورد قرص گردان شکل ۷، نیروی مرکزگرای یک نیرویی کششی است که ریسمان آن را فراهم می‌کند؛ در مورد ماه که به دور زمین می‌گردد، نیروی مرکزگرای کشش گرانشی زمین بر ماه است؛ در مورد الکترونی که به دور هسته اتم می‌گردد، نیروی مرکزگرای از نوع الکتروستاتیک است. نیروی مرکزگرای نوع جدیدی از نیرو نیست، بلکه عبارتی برای توصیف رفتار زمانی بعضی نیروهای است، که همه آنها را می‌توان به اجسام معینی در محیط جسم منسوب کرد. نیرو می‌تواند مرکزگرای و اصطکاکی، مرکزگرای گرانشی، مرکزگرای و الکتروستاتیک، یا مرکزگرای و هر نوع دیگری باشد.

حالا چند نمونه از نیروهایی را که مرکزگرای عمل می‌کند بررسی می‌کنیم.

آنگ مخروطی

شکل ۸ جسم کوچکی به جرم m را نشان می‌دهد که به سر ریسمانی به طول L بسته شده است و با سرعت ثابت v روی دایره‌ای افقی می‌گردد. با حرکت جسم، ریسمان سطح جانبی یک مخروط فرضی را می‌روبد. این وسیله را آونگ مخروطی می‌نامند. می‌خواهیم زمان یک دورگردش کامل جسم را به دست بیاوریم

اگر زاویه ریسمان با راستای عمودی θ باشد، شعاع مسیر دایره‌ای $R = L \sin \theta$ است. نیروهای وارد بر جسم عبارت‌اند از وزن جسم mg و کشش ریسمان T (شکل ۸). به این ترتیب، قانون دوم نیوتون



شکل ۸. آونگ مخروطی (الف) جسمی به جرم m ، که از ریسمانی به طول L ازیزان است، روی دایره حرکت می‌کند؛ ریسمان مخروط قائمی با نیم‌زاوية θ می‌سازد. (ب) نمودار جسم آزاد جسم.

هم، مانند محاسبه قبل، نیروها را به مؤلفه‌های شعاعی و قائم تجزیه می‌کنیم. جهت مثبت محوره را رو به بالا می‌گیریم؛ اگر قرار باشد شخص نیفتد، در راستای \hat{z} نباید شتابی داشته باشیم. از مؤلفه \hat{z} قانون دوم نیوتن نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = 0$$

شعاع گردونه را R و سرعت مماسی شخص را v می‌گیریم. شتاب شعاعی شخص v^2/R است؛ بنابراین، مؤلفه شعاعی قانون دوم نیوتن را می‌توان چنین ثابت

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^2}{R}$$

توجه کنید که، در این مورد، N همان نیروی مرکزگراست. اگر μ_s ضریب اصطکاک ایستایی میان شخص و دیواره باشد، برای اینکه درست در آستانه لغش باشیم، باید $N = \mu_s f_s = \mu_s mg$ باشد. پس می‌توانیم بنویسیم

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s mv^2}{R}$$

یا

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} \quad (7)$$

این معادله، ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از لغش را به سرعت مماسی جسمی که واقع بر دیواره است مربوط می‌کند. توجه کنید که این نتیجه بستگی به وزن شخص ندارد.

عمل ضریب اصطکاک بین پارچه لباس شخص و دیواره گردونه (با روکشی از جنس کرباس) در حدود 40° است. شعاع گردونه هم، نواعاً $2^\circ m$ است؛ بنابراین، v باید حداقل در حدود $7^\circ m/s$ باشد. محیط مسیر دایره‌ای $2\pi R = 12.6m$ است؛ با سرعت $m/s = 7^\circ m/s$ ، طی یک دور کامل $12.6m/(7^\circ m/s) = 1.8^\circ s$ است. $t = 1.8^\circ s$ طول می‌کشد. بنابراین، آهنگ دوران گردونه باید $s/d = 1.8^\circ s = 1/1.8^\circ s$ باشد، یا در حدود $33 rpm$ است.

پیچ با شبیه عرضی

فرض کنید که جسم شکل ۱۰۰ الف اتومبیل یا قطاری است که با سرعت ثابت v در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند و در پیچی به شعاع خمس R می‌یابد. علاوه بر دو نیروی قائم، یعنی وزن mg و نیروی عمودی N ، یک نیروی افقی P هم باید بر اتومبیل وارد شود. نیروی P همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت بر دایره است. در مورد اتومبیل، این نیرو از اصطکاک جانبی ای که جاده بر چرخها اعمال می‌کند تأمین می‌شود؛ در مورد قطار، نیرو را ریل بر لبه‌های درونی چرخها وارد می‌کند. در

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}$$

اما $R = L \sin \theta$ است، پس

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}} \quad (8)$$

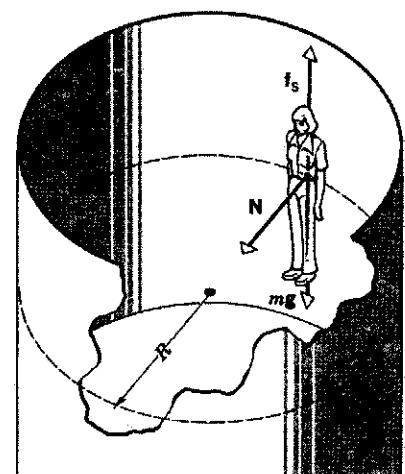
این معادله، رابطه بین t ، L ، و θ را به دست می‌دهد. توجه کنید که t ، که دوره تناوب حرکت نامیده می‌شود، به m بستگی ندارد. اگر $L = 1.2m$ و $\theta = 25^\circ$ باشد، دوره یا زمان تناوب حرکت چقدر می‌شود؟ از رابطه بالا داریم

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{(1.2m)(\cos 25^\circ)}{9.8m/s^2}} = 2.1s$$

گردونه

در بسیاری از پارکهای تفریحی وسیله‌ای به نام گردونه وجود دارد. گردونه فضای استوانه‌ای توخالی‌ای است که می‌شود آن را حول محور قائم مرکزی استوانه به چرخش درآورد. شخص وارد گردونه می‌شود، در را می‌بندد، و کنار دیواره می‌ایستد. گردونه شروع به چرخیدن می‌کند، و به تدریج سرعتش زیاد می‌شود. در یک سرعت معین، "کف" زیر پای شخص به پایین می‌رود و حفره عمیقی زیر پای او ظاهر می‌شود. این شخص البته نمی‌افتد، بلکه "میخکوب" به دیواره گردونه باقی می‌ماند. کمترین سرعت گردونه که می‌تواند شخص را میخکوب نگه دارد قدر است؟

شکل ۹ نیروهای وارد بر شخص را نشان می‌دهد. وزن شخص mg است، نیروی اصطکاک ایستایی میان شخص و دیواره گردونه f_s است، و N نیروی عمود بر سطحی است که دیواره بر شخص وارد می‌کند. (خواهیم دید که همین نیرو، نیروی مرکزگرای لازم است). اینجا



شکل ۹. گردونه. نیروهای وارد بر شخص مشخص شده‌اند.

و از تقسیم این دو معادله بر هم نتیجه می‌شود

$$\tan \theta = v^r / Rg \quad (8)$$

توجه کنید که زاویه مناسب شیب بستگی به سرعت اتمبیل و خشن جاده دارد و مستقل از جرم اتمبیل است؛ یعنی در یک شیب مناسب برای یک سرعت معین، انواع اتمبیلها می‌توانند با اینمی حرکت کنند. شیب عرضی جاده را برای یک خشن معین، براساس سرعت متوسطی که انتظار می‌رود طرح می‌کنند. معمولاً سر پیچ علامتی وجود دارد که سرعت مناسب، یعنی سرعتی را که شیب عرضی برای آن طرح شده است، مشخص می‌کند. اگر سرعت اتمبیل از این مقدار بیشتر شود، نیروی مرکزگرای اضافی را باید اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین کند تا بتوان پیچ را به سلامت طی کرد.

فرمول شیب عرضی را در حالت‌های حدی $v = 0, R \rightarrow \infty, \theta = 90^\circ$ بزرگ، و R کوچک بررسی کنید. به این هم توجه کنید که اگر معادله $\theta = 90^\circ$ حل کنیم، همان نتیجه‌های حاصل می‌شود که برای سرعت وزنه آونگ مخروطی به دست آمد. شکل‌های ۸ و ۱۰ را با هم مقایسه کنید و به شباهت‌هایشان توجه کنید.

۶-۴ معادلات حرکت: نیروهای ثابت و متغیر

باید، به طور خلاصه، پیشرفت‌هاییمان را در مطالعه دینامیک و سینماتیک مرور کنیم. هدف نهایی آن است که حرکت ذره‌ای را که تحت تأثیر چند نیروست توصیف کنیم، طرح این تحلیل را (در یک بعد) می‌توان چنین نشان داد:

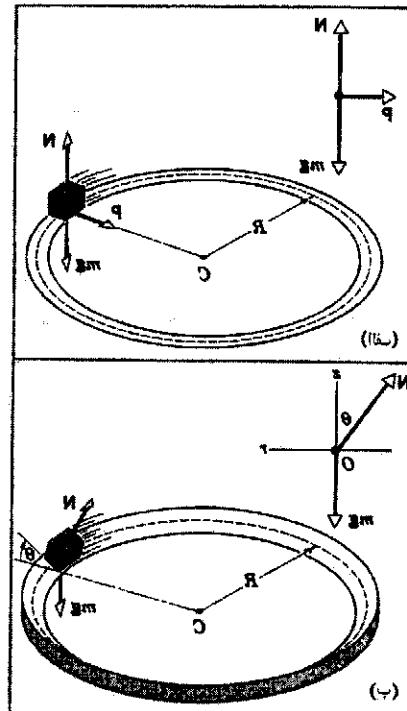
$$\sum F \rightarrow a \rightarrow x(t), v(t)$$

منتظر این است که با استفاده از قوانین نیوتون (که در فصل ۵ بررسی شد)، شتاب هر ذره را از نیروی خالص وارد برآن به دست می‌آوریم. مرحله بعد، مرحله‌ای ریاضی است که در آن مکان و سرعت را (در هر زمان t) از مکان و سرعت اولیه و شتاب محاسبه می‌کنیم.

به استثنای حرکت دایره‌ای که در بخش قبلی مطالعه شد، تا به حال فقط نیروهای ثابت را بررسی کردیم (یعنی نیروهایی که مستقل از زمان، سرعت، یا مکان‌اند). اگر نیرو ثابت باشد، شتاب هم ثابت است، و در حالت شتاب ثابت در یک بعد، $v(t)$ و $x(t)$ به راحتی بدست می‌آیند؛ همان‌طور که در بخش ۶-۲ دیدیم، به این ترتیب، نیروهای ثابت را به طور کامل تحلیل کردیم.

اگر نیرو ثابت نیاشد، باز هم می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون شتاب را به دست بیاوریم اما دیگر نمی‌توانیم فرمولهای شتاب ثابت بخش ۶-۲ را برای محاسبه $v(t)$ و $x(t)$ بدکار ببریم. در این مورد باید از روش‌هایی شامل حساب انتگرال استفاده کنیم.

۱. بخش‌های ۶-۴ تا ۶-۷ شامل مقدماتی از حساب انتگرال‌اند. مطالب این بخشها را می‌توان حذف کرد، یا، تا زمانی که داشجور آشناشی بیشتری با روش‌های انتگرال‌گیری پیدا کند، به تعریق انداشت.



شکل ۱۰. (الف) جاده افقی. نمودار جسم‌آزاد یک جسم متحرک در طرف چپ شکل آمده است. نیروی مرکزگرای باید از اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین شود. (ب) جاده با شیب عرضی. برای پیچیدن این در پیچ، اصطکاک ضرورتی ندارد.

مقدارشان کافی است، و هر دو نیرو هم باعث فرسایش غیر ضروری لاستیکها یا چرخها می‌شوند. به همین دلیل، مسیر را در پیچها با شیب عرضی می‌سازند؛ (شکل ۱۰ ب). در این صورت، نیروی عمودی N ، هم مثل حالت قبل یک مؤلفه عمودی دارد، و هم یک مؤلفه افقی که نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین می‌کند. به این ترتیب، در مسیرهایی که به طور مناسب برای عبور وسایل نقلیه با سرعت معین طراحی شده باشند، نیروی جانبی دیگری لازم نیست. برای محاسبه زاویه مناسب θ ، در غایب اصطکاک، می‌توانیم چنین عمل کنیم: طبق معمول، با قانون دوم نیوتون شروع می‌کنیم و به نمودار جسم‌آزاد شکل ۱۰ ب بر می‌گردیم. شتاب قائم نداریم؛ بنابراین برای مؤلفه قائم نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = N \cos \theta - mg = ma_z = 0$$

مؤلفه شعاعی نیروی عمود بر سطح $-N \cos \theta$ – است، و مؤلفه شعاعی شتاب R/v^2 . بنابراین، از مؤلفه شعاعی قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$\sum F_r = -N \sin \theta = ma_r = -mv^2/R$$

تحلیلی (t) v و (t) x ، مقادیر عددی v و x را در هر زمان t به دست می‌آوریم. این کار را با هر میزان دقت که لازم باشد می‌شود انجام داد. نیروی ثابت کاربرد قوانین نیوتون را نشان می‌دهد، و البته کارکردن با نیروهای ثابت ساده‌تر از کارکردن با نیروهای متغیر است. خوشبختانه در اغلب مسائل عملی نیروهای وجود دارند که در شرایط بسیاری می‌توان به تقریب ثابت فرضشان کرد؛ مثلاً گرانش در زمینی سطح زمین، نیروی اصطکاک، نیروی کشش ریسمان، و مانند آن. اما خیلی از شرایط فیزیکی هم هستند که نمی‌توان با نیروی ثابت به خوبی توصیفشان کرد. در این موارد برای حل مسئله یا باید روش‌های تحلیلی به کار برد یا روش‌های عددی. چند مثال از این نیروها می‌آوریم:

۱. نیروهای وابسته به زمان. در فصل ۲، اتمیل را پس از ترمز کردن، با فرض اینکه شتاب آن ثابت باشد، تحلیل کردیم. در عمل، به تدریت چنین اتفاقی می‌افتد. در سیاری از موارد، به ویژه در سرعتهای زیاد، معمولاً راننده در ابتدا آرام ترمز می‌گیرد و سپس، با کند شدن حرکت، پدال را به تدریج شدیدتر فشار می‌دهد. بنابراین، نیروی ترمز، طی مدتی که حرکت اتمیل کند می‌شود، بستگی به زمان دارد؛ تابع $a(t)$ بستگی به جزئیات ترمز کردن دارد.

مثال دیگر نیروهای وابسته زمان، نیروی مربوط به موجی است که از محیطی می‌گذرد. موج صوتی را در هوا در نظر بگیرید؛ در هر نقطه، موج به طور سینوسی با زمان تغییر می‌کند. بنابراین، نیروی وارد بر تک تک مولکولهای هوا هم در زمان به طور سینوسی، و با همان فرکانس موج، تغییر می‌کند. بستگی زمانی شتاب ذره نیز مثل بستگی زمانی نیروست.

۲. نیروهای وابسته به سرعت. نمونه آشنای نیروهای وابسته به سرعت، نیروی مقاومتی است که بر اجسام متحرک در محیط شاره، مثل هوا یا آب، وارد می‌شود. این نیروی اصطکاکی، با افزایش سرعت زیاد می‌شود. شاید خود شما هم، هنگام راه رفتن در استخر، به این پدیده برخورده باشید. اگر آرام راه بروید، نیروی مقاوم کمی احساس خواهید کرد، اما وقتی به سرعت حرکت می‌کنید، نیروی مقاوم وارد بر پاهایتان می‌تواند بسیار بزرگ باشد. هر چه تندتر حرکت کنید، نیروی مقاوم بیشتر می‌شود.

حرکت پرتابی هم بهشدت تحت تأثیر نیروی اصطکاک شاره‌هاست، هر چند، در تحلیل اجسام افتان و پرتابه‌ها در فصلهای ۲ و ۴ این نیروها را ندیده گرفتیم. بر پرتابه‌ای مثل توپ بیسیبال، به ازای سرعت اولیه ۳-۴ معین، ممکن است حدود نصف مقداری باشد که از تحلیل بخش ۲-۷ بدست می‌آید. جسمی که مسافتی طولانی را سقوط کند، دیگر از معادلات سقوط آزاد بخش ۲-۷ نیروی نخواهد کرد؛ طبق این معادلات، سرعت جسم می‌تواند به طور نامحدود زیاد شود. بر عکس، هر چه سرعت بزرگتر شود، نیروی اصطکاک هم بزرگتر می‌شود، و این نیرو می‌خواهد که جلوی افزایش بیشتر سرعت را بگیرد. در واقع، چنان‌که در بخش ۷-۶ خواهیم دید، سرعت به حدی (سرعت حد) می‌گراید که نمی‌تواند از آن بیشتر شود. (برای بیشتر اقسام، این پدیده در سرعتهای زیاد نمی‌نماید، بلکه تناقض با مسافت‌های سقوط از مرتبه ۱۰۰ m است).

پیش از تحلیل نیروهای متغیر، حساب انتگرال را برای نیروی ثابت بدکار می‌بریم و همان نتایج بخش ۲-۶ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم شتاب a را (از قوانین نیوتون) داریم و می‌خواهیم (t) و $x(t)$ را پیدا کنیم. از اینجا شروع می‌کنیم که $a = dv/dt$. به این ترتیب،

$$dv = a dt \quad (9)$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم. در طرف چپ، متغیر انتگرال گیری سرعت است، و حدود انتگرال گیری از v در زمان 0 تا v در زمان t ، در طرف راست، روی زمان و از 0 تا t انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \quad (10)$$

وقتی شتاب ثابت باشد، a از انتگرال طرف راست بیرون می‌آید و نتیجه می‌شود که

$$v - v_0 = a \int_0^t dt \quad (11)$$

یا

$$v(t) = v_0 + at \quad (12)$$

که همان معادله ۱۵ فصل ۲ است.

در ادامه، با استفاده از $dx/dt = v$ و با یک انتگرال گیری دیگر، (t) را به دست می‌آوریم:

$$dx = v dt = (v_0 + at)dt = v_0 dt + at dt \quad (13)$$

حدود انتگرال از مکان 0 در زمان 0 تا مکان x در زمان t است:

$$\int_x^{x_0} dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \quad (14)$$

چون a ثابت است باز هم آنرا از انتگرال بیرون می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \\ &= v_0 t + a \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \quad (15)$$

این معادله، همان معادله ۱۹ فصل ۲ است.

اگر شتاب ثابت نباشد، انتگرال گیریها مشکلتر می‌شود. گرفتن انتگرال ۱۰ و انتگرال ۱۴ و به دست آوردن توابع صریح ($v(t)$ و $x(t)$) روش تحلیلی حل مسئله است. روش دیگر، روش عددی است، که در آن به کمک کامپیوتر انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم Ramin.somad@yahoo.com!

این را هم با معادلات ۱۴ و ۱۵ مقایسه کنید و بینید که اگر a ثابت باشد، معادله ۱۷ به معادله ۱۵ تبدیل می‌شود.

مثال ۴. اتومبیلی با سرعت 105 km/h (در حدود 29.2 m/s) حرکت می‌کند. راننده ناگهان ترمز می‌کند، اما با نیروی افزایش‌یابنده، طوری که شتاب کنده‌کننده متناسب با زمان به صورت $a(t) = ct$ زیاد می‌شود، که در آن $3 \text{ m/s}^2 = -267 \text{ m/s}^3$ است. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا اتومبیل متوقف شود؟ (ب) در این مدت اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) باید عبارتی برای $v(t)$ پیدا کنیم تا بتوانیم زمانی را که $v = 0$ می‌شود بدست بیاوریم. با استفاده از معادله ۱۶، با $a(t) = ct$ نتیجه می‌شود که

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ct \, dt = v_0 + \frac{1}{2}ct^2$$

به جای $v(t)$ صفر می‌گذاریم و زمان t_1 را، که در آن اتومبیل ساکن می‌شود، بدست می‌آوریم:

$$0 = v_0 + \frac{1}{2}ct_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} = \sqrt{\frac{-2(29.2 \text{ m/s})}{-267 \text{ m/s}^3}} = 4.68 \text{ s}$$

4.68 s طول می‌کشد تا اتومبیل بایستد.

(ب) برای اینکه بینیم اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید، باید عبارتی برای $x(t)$ بدست بیاوریم. بهاین منظور، باید طبق معادله ۱۷ از $v(t)$ انتگرال بگیریم:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}ct^2) \, dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}ct^3$$

با ازای $x_0 = 4.68 \text{ s}$ ، $t = t_1 = 4.68 \text{ s}$ ، مسافت پیموده شده (با $v_0 = 0$) برایست با

$$x(t_1) = 0 + (29.2 \text{ m/s})(4.68 \text{ s})$$

$$+ \frac{1}{6}(-267 \text{ m/s}^3)(4.68 \text{ s})^3 = 91.0 \text{ m}$$

شکل ۱۱ بستگی زمانی x ، v و a را نشان می‌دهد. برخلاف حالت شتاب ثابت، $v(t)$ خط راست نیست.

با این روش ترمز کردن، بیشترین تغییر سرعت در حوالی پایان حرکت انجام می‌شود. تغییر سرعت در نخستین ثانیه پس از ترمز کردن، تنها 3 m/s (در حدود 3 mi/h) است؛ اما در آخرین ثانیه حرکت، سرعت 11.2 m/s (در حدود 25 mi/h) تغییر می‌کند. (به) یاد دارید که در حالت شتاب ثابت، تغییر سرعت در بازه‌های زمانی

برای ۱ یا ۲ متر سقوط در آزمایشگاه، این پدیده قابل چشمیویشی است و می‌توان معادلات بخش ۷-۲ را با اطمینان به کار برد.

۳. نیروهای وابسته به مکان. مثال آشنای نیروهای وابسته به مکان، نیروی بازگرداننده فنری است که به اندازه x از حالت تعادلش کشیده شده است؛ این فنر نیروی $F = -kx$ وارد می‌کند. شتاب جسمی به جرم m که به فنر بسته شده است، $a = F/m = -kx/m$ است. اگر جسم را به فاصله x جابه‌جا کنیم، نیروی برش آن وارد می‌شود که می‌خواهد آن را به طرف نقطه تعادل بکشد. اگر جسم را رها کنیم، به طرف نقطه تعادل حرکت خواهد کرد؛ در بازگشت به طرف تعادل، جابه‌جایی x کم می‌شود و شتاب هم همین طور هنگامی که جسم از نقطه تعادل می‌گذرد، شتاب آن به طور لحظه‌ای صفر می‌شود، اما پس از آن جسم از $x = 0$ هم رد می‌شود و اندازه شتاب دوباره بزرگ می‌شود.

ساده‌ترین راه تحلیل نیروهای وابسته به مکان، استفاده از روش‌های کار و انرژی است، که در فصل ۷ و ۸ به آنها خواهیم پرداخت. در بخش‌های بعدی این فصل چند روش تحلیل نیروهای وابسته به زمان یا سرعت را، با استفاده از قوانین نیوتون، بررسی می‌کنیم.

۶-۵ نیروهای وابسته به زمان: روش‌های تحلیلی

با استفاده از قوانین نیوتون به شکل معمول، برای نیروهای وابسته به زمان، یک شتاب $a(t)$ به دست می‌آید که به زمان بستگی دارد. در این موارد می‌توانیم درست مثل بخش ۶-۴ عمل کنیم و سرعت را با انتگرال‌گیری مستقیم به دست بیاوریم. $a = dv/dt$ را به صورت t (سرعت اولیه v_0) و $t = 0$ (سرعت اولیه v) تا t (انتگرال می‌گیریم. برای سادگی فرض می‌کنیم که حرکت یک بعدی است، اما تعمیم نتایج به سه بعد هم سرراست است. داریم

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= \int_0^t a(t) dt \\ v - v_0 &= \int_0^t a(t) dt \\ v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t) dt \end{aligned} \quad (16)$$

معادلات بالا را با معادلات ۱۰ تا ۱۲ مقایسه کنید؛ تنها تفاوت‌شان در این است که a در داخل انتگرال باقی می‌ماند.

وقتی $v(t)$ به دست آمد، می‌شود این روش را تکرار کرد و $x(t)$ را به دست آورد. از $v = dx/dt$ و $dx = v(t) dt$ داریم $v = dx/dt$ و با انتگرال‌گیری مشابهی از $x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt$ (مکان x تا t (مکان x_0) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx &= \int_0^t v(t) dt \\ x - x_0 &= \int_0^t v(t) dt \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t) dt \end{aligned} \quad (17)$$

که کامپیوتر به خوبی انجام می‌دهد. بنابراین، روش حل عددی مسئله را، با کامپیوتر، می‌توان با دقت دلخواه بهکارگرفت.

شکل ۱۲ طرح کلی این روش را در حالت شتاب متغیر مثال ۴ نشان می‌دهد. ناحیه بین $t = \delta s$ و $t = 5\delta s$ به θ° بازه کوچک، هر یک به اندازه $5\delta s$ ، تقسیم شده است. تابع $a(t)$ را در هر بازه با یک مقدار ثابت (شتاب متوسط، که در این حالت خطی، برابر با a در وسط بازه هم است) تقریب زده‌ایم. در بازه اول، شتاب متوسط از مقادیر a در $t = 0$ و $t = \delta s$ به دست می‌آید:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\delta s} [a(0^\circ) + a(\theta^\circ)] = \frac{1}{\delta s} [0^\circ + (-267 \text{ m/s}^2)] = -67 \text{ m/s}^2$$

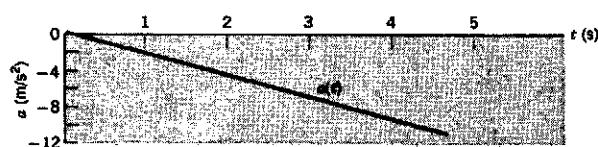
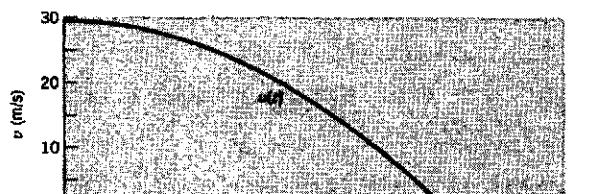
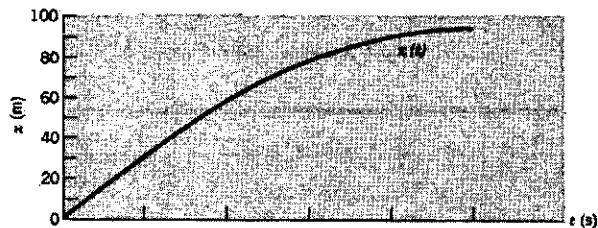
تغییر سرعت در بازه اول، δv_1 ، تقریباً برابر است با

$$\delta v_1 = \bar{a}_1 \delta t = (-67 \text{ m/s}^2)(\delta s) = -34 \text{ m/s}$$

بنابراین، سرعت در $t = \delta s$ عبارت است از

$$v_1 = v_0 + \delta v_1 = 29.2 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s} = 28.9 \text{ m/s}$$

برای یافتن جایه‌جایی طی بازه اول، ابتدا سرعت متوسط را در این بازه



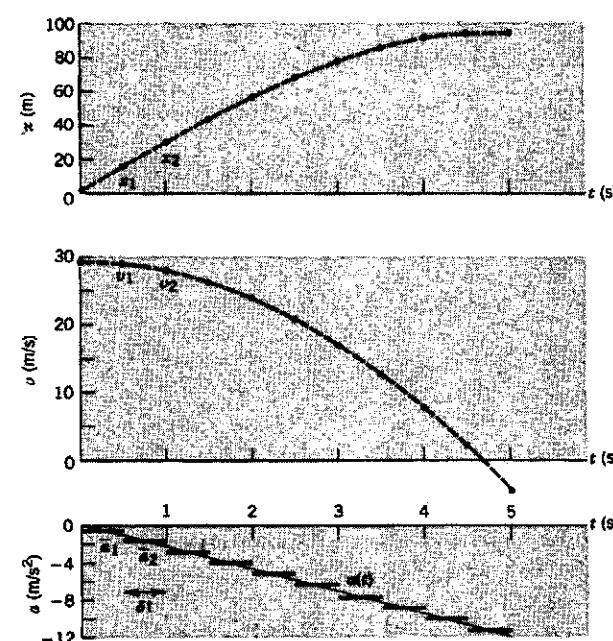
شکل ۱۲. مثال ۴ (a) $x(t)$ و (b) $v(t)$ حاصل از (c) $a(t)$ ، که به‌طور خطی با زمان تغییر می‌کند.

مساوی یکسان بود). فکر می‌کنید که این روش ترمز کردن فایده‌های هم دارد؟ ضرر چطوره؟

۶-۶ نیروهای وابسته به زمان: روش‌های عددی (اختیاری)
با روش تحلیلی بخش قبلی، علی‌الاصول با داشتن $a(t)$ می‌شود $x(t)$ و $v(t)$ را بدست آورد. اما خیلی وقت‌ها این روش عملی یا مطلوب نیست. مثلاً ممکن است انتگرال‌ها شکل تحلیلی نداشته باشند، یا شاید شکل آنها آنقدر پیچیده باشد که جوابهای حاصل کمکی به بصیرت فیزیکی ما از مسئله نکنند. استفاده از روش‌های عددی راه مناسب دیگری در کنار روش‌های تحلیلی است، والبته روش‌های عددی بخصوص وقتی مفیدند که روش‌های تحلیلی قابل استفاده نباشند.

در روش عددی مسئله را به این ترتیب تقریب می‌زنیم: بازه زمان مورد نظر را به تعداد زیادی بازه کوچک تقسیم می‌کنیم، و در هر بازه معادلات مربوط به شتاب ثابت را به کار می‌بریم. اما این مقدار "ثابت" از یک بازه به بازه دیگر تغییر می‌کند. یک انتخاب مناسب برای شتاب ثابت هر بازه، شتاب متوسط آن بازه است.

هرچه بازه‌ها را کوچکتر کنیم، روش بهتر کار می‌کند و جواب دقیق‌تری به دست می‌آید؛ هر چه بازه‌ها کوچکتر باشند، شتاب متوسط (ثابت) بهتر شتاب واقعی را تقریب می‌کند. از طرف دیگر، هر چه بازه‌ها کوچکتر بشوند تعداد آنها زیادتر می‌شود، و به این ترتیب باید محاسبات تکرارشونده متعددی انجام بدھیم. این درست همان نوع کاری است.



شکل ۱۲. جواب عددی (نقاط نشان داده شده در شکل) مثال ۴؛ این جواب را با جواب تحلیلی مقایسه کنید (شکل ۱۱ و منحنیهای خط‌چین)، در هر یک از بازه‌های δs ، شتاب را ثابت فرض می‌کنیم، و مکان و سرعت را در نقطه پایانی بازه-حساب‌دهی‌کنیم، که نقاط رسم شده در شکل را به دست می‌دهند. هر چه بازه‌های بیشتر (و کوچکترای بگیریم، نقاط بیشتر نخواهی هستند) $x(t)$ و $v(t)$ را بدست می‌آید.

از درونیابی سرعت بین نقاط پایانی بازه آخر، نتیجه می‌شود که اتومبیل در حدود زمان 4 s متوقف می‌شود؛ درست همان متداری که در جواب تحلیلی بدست آمده بود، از شکل ۱۲ مسافت پیموده شده را تخمین می‌زنیم؛ این مسافت در حدود 91 m است، که باز هم با مقدار تحلیلی سازگار است.

البته مقدار منفی v در پایان بازه دهم، در این مسئله بی‌معنی است؛ شرایط دینامیکی مسئله چنان است که سرعت نمی‌تواند منفی شود، زیرا با ترمذ کردن نمی‌توان اتومبیل را واداشت که به عقب حرکت کند. اما ادامه محاسبه عددی تا این نقطه از آن جهت مفید است که به تحلیل بازه آخر کمک می‌کند.

در پیوست ب، یک برنامه کامپیوتری (به زبان یسینیک) آمده است که می‌تواند این محاسبه را انجام بدهد. با تغییرات کوچکی در این برنامه، می‌شود همین محاسبات را برای هر شکلی از $a(t)$ انجام داد.

۶-۷ اصطکاک شاره‌ها و حرکت پرتابی

قطره‌های باران از ابرهایی سقوط می‌کنند که ارتفاع (h) آنها از سطح زمین در حدود 2 km است. با استفاده از معادله سقوط آزاد اجسام (معادله ۲۵ فصل ۲)، انتظار داریم که این قطره‌ها با سرعت $v = \sqrt{2gh} \approx 200\text{ m/s}$ ، یا در حدود 44 mi/h به زمین برخورد کنند. برخورد پرتابه‌ای چنین سریع با آدمیزad، حتی اگر این پرتابه قطره باران باشد، مرگ‌آور است؛ پس قطره‌های باران خیلی کنتر از اینها حرکت می‌کنند، و معلوم است که در جایی از محاسبات خطأ کرده‌ایم.

اشکال کار اینجاست که اثر نیروی مقاومت هوا بر قطره افتان را نادیده گرفتایم. این نیرو، نیروی اصطکاک شاره است که بر اجسامی که در آن حرکت می‌کنند وارد می‌شود. چنین نیروهایی، در موارد گوناگون، آثار مهمی دارند؛ مثلاً در اثر این نیرو توب بیسیال به مقدار قابل ملاحظه‌ای از مسیر ایده‌آل بدون اصطکاک منحرف می‌شود؛ این نیرو سرعت اسکی باز را هم کم می‌کند و اسکی باز بدن خودش را در چنان حالتی فرامی‌دهد که اثر آن را کم کند؛ در طراحی هوایی و کشتی هم باید اثر این نیروها را در نظر گرفت. از دید اجسام افتان، از قطره باران گرفته تا چتر باران، نیروی اصطکاک شاره‌ها نمی‌گذارد که سرعت به طور نامحدود زیاد شود، بلکه یک سرعت بیشینه، یا حد، تعیین می‌کند که جسم در حال سقوط نمی‌تواند از آن تندتر حرکت کند.

یکی از ویژگیهای خاص نیروی اصطکاک شاره‌ها آن است که این نیرو به سرعت بستگی دارد؛ هرچه جسم سریعتر حرکت کند، نیروی اصطکاک هم بیشتر می‌شود. بنابراین، برای تحلیل سینماتیک مسئله باید از روش‌های انتگرال استفاده کرد.

اگر نیرو، و در نتیجه شتاب، تابع سرعت باشد، روش‌های بخش ۶-۵ برای نیروهای وابسته به زمان را باید قدری تغییر داد. چنان‌که در معادله $x = \int v dt$ دیدیم، از $v = \frac{dx}{dt}$ شروع می‌کنیم، اما در اینجا a تابع سرعت،

به دست می‌آوریم:

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) = \frac{1}{2}(29,2\text{ m/s} + 28,9\text{ m/s}) \\ = 29,1\text{ m/s}$$

جابه‌جایی δx_1 در این بازه، تقریباً برابر است با

$$\delta x_1 = \bar{v}_1 \delta t = (29,1\text{ m/s})(0,5\text{ s}) = 14,6\text{ m}$$

اگر نقطه شروع را $x_0 = 0$ بگیریم، مکان در پایان بازه اول چنین به دست می‌آید

$$x_1 = x_0 + \delta x_1 = 0 + 14,6\text{ m} = 14,6\text{ m}$$

مقادیر v_1 و x_1 در $t = 0,5\text{ s}$ در شکل ۱۲ رسم شده‌اند. اکنون به بازه دوم می‌رویم و همین روش را تکرار می‌کنیم. در اینجا شتاب متوسط برابر است با

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{2}[a(0,5\text{ s}) + a(1,0\text{ s})] \\ = \frac{1}{2}[(-2,67\text{ m/s}^2)(0,5\text{ s}) + (-2,67\text{ m/s}^2)(1,0\text{ s})] \\ = -2,00\text{ m/s}^2$$

با ادامه کار، به همان روش بازه اول، نتیجه می‌شود که

$$\delta v_2 = \bar{v}_2 \delta t = (-2,00\text{ m/s}^2)(0,5\text{ s}) = -1,0\text{ m/s}$$

$$v_2 = v_1 + \delta v_2 = 28,9\text{ m/s} - 1,0\text{ m/s} = 27,9\text{ m/s}$$

و

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(28,9\text{ m/s} + 27,9\text{ m/s}) \\ = 28,4\text{ m/s}$$

$$\delta x_2 = \bar{v}_2 \delta t = (28,4\text{ m/s})(0,5\text{ s}) = 14,2\text{ m}$$

$$x_2 = x_1 + \delta x_2 = 14,6\text{ m} + 14,2\text{ m} = 28,8\text{ m}$$

مقادیر v_2 و x_2 سرعت و مکان در پایان بازه دوم‌اند، که در شکل ۱۲ در $t = 1,0\text{ s}$ رسم شده‌اند.

با تکرار روش در هر 10 s بازه، نقاط باقی‌مانده شکل ۱۲ به دست می‌آید.

از مقایسه شکلهای ۱۱ و ۱۲، می‌توان دید که توافق جواب عددی با جواب تحلیلی چقدر خوب است، حتی در اینجا که فقط 10 s بازه به کار برده‌ایم. کامپیوتر می‌تواند به سادگی میلیون محاسبات را برای 10000 s بازه انجام بدهد، و در چنین حالتی نقاط رسم شده برای x و v بسیار نزدیک به یک منحنی هموار می‌شوند.

یعنی $a(v)$ است:

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

از این رابطه می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt = t \quad (18)$$

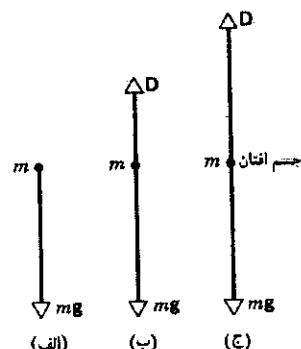
طرف چپ معادله ۱۸ تابعی از v است؛ پس معادله ۱۸ عملأً t را به صورت تابعی از v ، $t(v)$ ، به دست می‌دهد. البته اغلب می‌توانیم نتیجه را "معکوس" کنیم و $v(t)$ را به دست بیاوریم که عموماً برای محاسبات مفیدتر است.

مثال ۵. فرض کنید جسمی به جرم m در هوا سقوط می‌کند و نیروی مقاومت D وارد بر آن به طور خطی با سرعت زیاد می‌شود

$$D = bv$$

و این نیرو همواره در خلاف جهت حرکت سرعت جسم است. ثابت b به خواص جسم (متلاً اندازه و شکل آن) و همچنین به خواص شاره (بهویه چگالی آن) بستگی دارد. با این فرض که جرم m از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت آن بر حسب زمان، یعنی $v(t)$ را پیدا کنید.

حل: شکل ۱۳ نمودار جسم‌آزاد را نشان می‌دهد؛ این نمودار با گذشت زمان عوض می‌شود زیرا D همراه با v تغییر می‌کند. هنگامی که جسم رها می‌شود D صفر است (ازیرا v صفر است)؛ با افزایش $D = mg$ هم زیاد می‌شود. در نقطه خاصی از حرکت که $D = mg$ است،



شکل ۱۳. نیروهای وارد بر جسمی که در هوا سقوط می‌کند. (الف) در لحظه‌ای که جسم رها می‌شود، $D = 0$ است و نیروی اصطکاکی وجود ندارد. (ب) با سرعت گرفتن جسم نیروی اصطکاکی هم زیاد می‌شود. (ج) سرانجام نیروی اصطکاکی با وزن برابر می‌شود؛ از آن پس این نیرو ثابت می‌ماند و جسم با سرعت ثابت، برابر با سرعت حد، سقوط می‌کند.

باشد، نیروی خالصی برجسم اثر نمی‌کند و شتاب جسم صفر می‌شود (شکل ۱۳ج). از این لحظه سرعت ثابت می‌ماند. جواب ریاضی ما هم باید همین خاصیت را نشان بدهد.

قانون دوم نیوتون در مورد این مسئله چنین عبارت است از

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{D} + mg = ma$$

محور y را رو به پایین می‌گیریم؛ به این ترتیب مؤلفه قائم به صورت زیر است

$$\sum F_y = mg - bv = ma$$

یا

$$a = g - \frac{b}{m}v$$

از این عبارت دیده می‌شود که با افزایش v ، سرانجام به جایی می‌رسیم که طرف راست صفر می‌شود، و این رویداد در زمانی است که $g - bv/m = 0$ می‌شود. در این نقطه $v = 0$ می‌شود و از آن پس هم صفر می‌ماند. پس، از اینجا به بعد سرعت ثابت می‌ماند. این همان سرعت حد، $v_T = mg/b$ است.

برای محاسبه $v(t)$ ، معادله ۱۸ را با $v = 0$ به کار می‌بریم:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - (b/m)v} = t$$

انتگرال را می‌توان چنین نوشت

$$-\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv}$$

که به شکل ۱۳ نمودار جسم‌آزاد را نشان می‌دهد؛ این نمودار با

$$-\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv} = -\frac{m}{b} \ln(mg - bv) \Big|_0^v$$

$$= -\frac{m}{b} \ln(mg - bv) + \frac{m}{b} \ln(mg)$$

$$= -\frac{m}{b} \ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) = t$$

این عبارت، رابطه‌ای کاملاً قابل قبول بین v و t است، اما برای آسانتر شدن تعبیر و کاربرد آن، بهتر است رابطه را معکوس کنیم و $v(t)$ را به دست بیاوریم:

$$\ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) = -\frac{bt}{m}$$

$$\frac{mg - bv}{mg} = e^{-bt/m}$$

سرانجام خواهیم داشت

$$v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}) \quad (19)$$

جدول ۲. چند سرعت حد در هوا.

مسافت ۱(m)/۹۵	سرعت حد (m/s)	جسم
۲۵۰۰	۱۴۵	گلوله ۱۶ بارندی
۴۳۰	۶۰	چتر باز در حال سقوط آزاد (نوعی)
۲۱۰	۴۲	توب بیسیال
۱۱۵	۳۱	توب تیپس
۴۷	۲۰	توب بسکبال
۱۰	۹	توب پینگپنگ
۶	۷	قطره باران (به شماع ۱۵mm)
۳	۵	چتر باز (نوعی)

۱. مسافتی که جسم باید از حالت سکون سقوط کند تا به ۹۵٪ سرعت حد خود برسد.

مرجع:

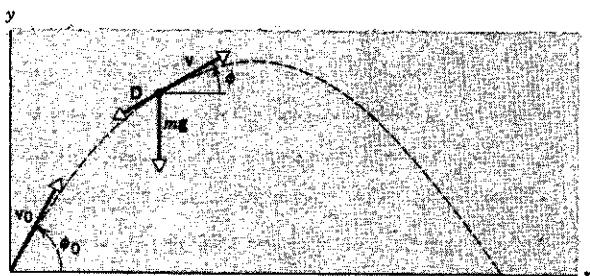
Peter J. Brancazio, Sport Science, Simon & Schuster Inc., New York, 1984.

جدول ۲ فهرستی از مقادیر نوعی است که برای سرعت حد اجسام مختلف در هوا اندازه‌گیری شده است.

حرکت پرتابی با مقاومت هوا (اختیاری)

محاسبات نیروی مقاومت اصطکاکی برای حرکت پرتابی دو بعدی هم مهم است. مثلاً توب بیسیال با سرعت حدوداً 10^0 mi/h یا 45 m/s از "چوب" جدا می‌شود. این مقدار از سرعت حدی توب در هوا بیشتر است (جدول ۲). نیروی اصطکاک هوا، $D = bv$ ، را می‌توان از جواب مثال ۵ تخمین زد. از معادله $20 = bv$ نتیجه می‌شود که ثابت b برابر است با وزن mg توب بیسیال (در حدود $4N$ را، متناظر با جرم 14 kg را) تقسیم بر سرعت حد توب، 42 m/s . پس $b = 33 \text{ N/m/s}$ است. اگر توب با سرعت 45 m/s حرکت کند، نیروی مقاومتی (bv) در حدود 15 N بر آن وارد می‌شود، که از وزن توب بیشتر است و بنابراین اثر قابل ملاحظه‌ای بر حرکت آن می‌گذارد.

شکل ۱۵ نمودار جسم آزاد را در نقطه معینی از حرکت نشان



شکل ۱۵. پرتابهای در حال حرکت. پرتابه با سرعت v در زاویه ϕ نسبت به سطح افقی پرتا می‌شود. در نقطه معینی، سرعت آن v با زاویه ϕ است. وزن و نیروی اصطکاک هوا (که همواره در خلاف جهت v است) در نقطه مورد نظر نشان داده شده است.

Ramin.samad@yahoo.com

اگر t کوچک باشد (در زمانهای ابتدایی سقوط جسم)، می‌توان تابع نمایی را به شکل $1 + x \approx e^x$ برای t های کوچک ($x \ll 1$) تقریب کرد. به این ترتیب،

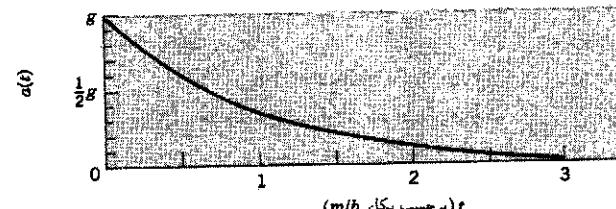
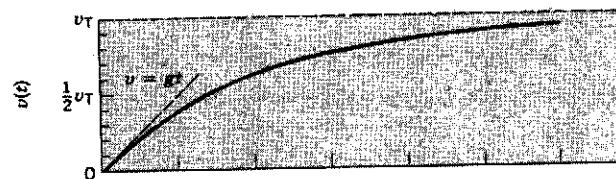
$$v(t) \approx \frac{mg}{b} \left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m} \right) \right] = gt \quad (\text{برای } t\text{ های کوچک})$$

در ابتدای حرکت، پیش از آنکه نیروی اصطکاک قابل ملاحظه شده باشد، حرکت جسم کاملاً نزدیک به سقوط آزاد با شتاب g است. در t های بزرگ، تابع نمایی به صفر می‌گراید (در حد $\infty \rightarrow 0 \rightarrow e^{-x}$). در این حالت سرعت به مقدار حدی اش v_T می‌گراید.

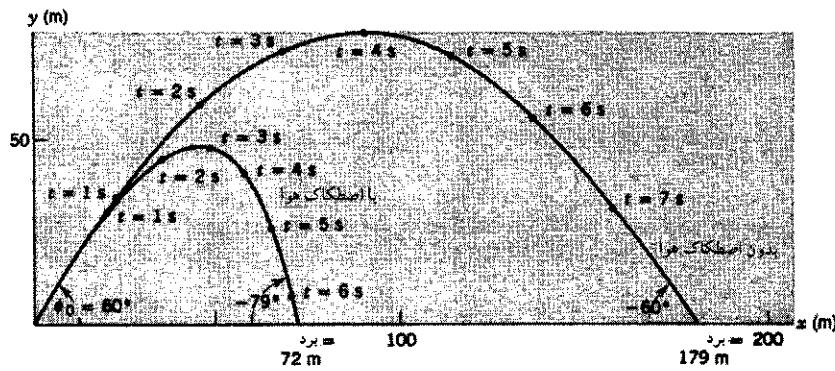
$$v_T = \frac{mg}{b} \quad (20)$$

با داشتن عبارت $v(t)$ ، می‌توان از آن مشتق گرفت و $a(t)$ را به دست آورد، یا از آن انتگرال گرفت و $g(t)$ را به دست آورد. انجام این محاسبات و بررسی نتایج در t های کوچک و t های بزرگ را به عنوان تمرین به عهده دانشجویان گذاشته ایم (مسئله ۱۴). شکل ۱۴ بستگی زمانی a ، v و θ را نشان می‌دهد.

این مثال، یک رهیافت برای تحلیل نیروی اصطکاک شاره‌ها را نشان می‌دهد. رهیافتی دیگر D را به جای v ، متناسب با a فرض می‌کنند. در این مورد هم از همان محاسباتی که به کار بردمیم استفاده می‌شود، اما ریاضیات مستله قدری پیچیده‌تر است. اینجا هم یک سرعت حد به دست می‌آید، اگرچه شکل ریاضی این سرعت با آنچه قبلاً به دست آوردمیم متفاوت است.



شکل ۱۴. مثال ۵. مکان، سرعت، و شتاب یک جسم افتادن که تحت اثر نیروی مقاومت هواست. توجه کنید که شتاب از g شروع می‌شود و به صفر می‌گراید، و سرعت از صفر شروع می‌شود و به v_T می‌گراید.



شکل ۱۶. حرکت پرتابی با نیروی اصطکاک هوا و بدون آن. محاسبه برای $v_0 = 45 \text{ m/s}$ و $\phi = 60^\circ$ انجام شده است.

جسم مورد نظر نسبت داد، و نمی‌توان در رده‌هایی که در بخش ۶-۱ گفته شد طبقه‌بندی کرد و به علاوه، اگر جسم را از دید چارچوبهای لخت بررسی کنیم، شبه‌نیروها ناپذید می‌شوند. شبه‌نیرو صرفاً ایزاری است که به کمک آن می‌شود مکانیک کلاسیک را، به روش‌های معمول، برای بررسی رویدادها از دید چارچوبهای مرجع نالخت به کار برد.^۱

مثالاً ناظر S' را در نظر بگیرید که در کامیون که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. در این کامیون یک ریل هوایی دراز هست که "لغز" ای به جرم 25 kg ، بی‌اصطکاک، روی آن قرار گرفته است (شکل ۱۷الف). راننده ترمز می‌کند، و سرعت کامیون به تدریج کم می‌شود. ناظر S' بر زمین، شتاب ثابت کامیون را -2.8 m/s^2 می‌سنجد. بنابراین، ناظر S' که در کامیون است، هنگام ترمز، در یک چارچوب مرجع نالخت است. S' مشاهده می‌کند که لغز با شتاب $+2.8 \text{ m/s}^2$ به طرف جلو حرکت می‌کند. هر یک از دو ناظر، چگونه با استفاده از قانون دوم نیوتون حرکت جسم لغزنه را توضیح می‌دهد؟ برای ناظر زمینی S ، که در یک چارچوب مرجع نالخت است،

تحلیل مسئله سرراست است. لغز، که پیش از ترمز با سرعت ثابت به جلو می‌رفته است، الان هم دارد همین کار را می‌کند. از دید S ، لغز شتاب ندارد و هیچ نیروی افقی‌ای لازم نیست که بر آن اثر کند. اما S' مشاهده می‌کند که لغز شتاب می‌گیرد و هیچ جسمی هم در محیط این جسم نمی‌باید که نیروی مولود این شتاب را بر آن وارد کند. S' برای اینکه بتواند قانون دوم نیوتون را به کار برد، باید فرض

^۱. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره این محاسبات رجوع کنید به "Trajectory of a Fly Ball", Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985, p. 20.

و نیز به کتاب همین مؤلف *SportScience*. (Simon & Schuster Inc, 1984)

این کتاب شامل سیاری مثالهای جالب از کاربرد اصول فیزیک در ورزش است. همچنین رجوع کنید به

"Physics and Sports: the Aerodynamics of Projectiles" Peter Brancazio.

در کتاب

Fundamentals of Physics, 3rd ed., David Halliday and Robert Resnick, (Wiley, 1988).

می‌دهد. D ، مثل همه نیروی اصطکاکی دیگر، در خلاف جهت v است و فرض می‌کنیم که باد نمی‌وزد. اگر بگیریم $D = -bv$ می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون یک جواب تحلیلی برای مسیر به دست بیاوریم، که نمونه‌ای از آن را در شکل ۱۶ نشان داده‌ایم. مقاومت هوا باعث می‌شود که برد پرتابه از 179 m به 72 m ، و ارتفاع اوج از 78 m به 48 m کاهش بیابد. همچنین توجه کنید که مسیر دیگر نسبت به محور قائمی که از نقطه اوج می‌گذرد متقارن نیست؛ شبیه مسیر در هنگام سقوط خیلی تندر است تا در مرحله صعود. اگر $\phi = 60^\circ$ باشد، پرتابه با زاویه 79° به زمین می‌خورد، در حالی که در غیاب اصطکاک با زاویه 0° به زمین برخورد می‌کرد.

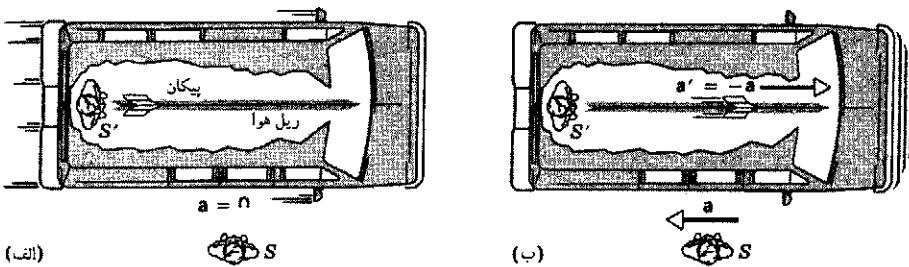
نیروی مقاومت هوا به سرعت پرتابه در هوای ساکن بستگی دارد. اگر باد بوزد، محاسبات را باید تغییر داد، و نتیجه هم تغییر می‌کند. اگر بخواهیم عبارتها بی دیگر (و واقعی تری) برای نیروی مقاومت D بدکار ببریم باید محاسبات را به شکل عددی انجام بدهیم.^۱

۶-۸ چارچوبهای نالخت و شبه نیرو (اختیاری)

در بررسی مکانیک کلاسیک تا اینجا فرض کردیم که اندازه‌گیری و مشاهده در یک چارچوب مرجع لخت انجام می‌شود؛ یعنی در یکی از چارچوبهای مرجعی که با قانون اول نیوتون تعریف می‌شوند، چارچوبهایی که در آنها اگر محيطی نباشد که به جسم مورد نظر نیرو وارد کند ($\sum F = 0$)، این جسم شتاب نمی‌گیرد ($a = 0$). انتخاب چارچوب مرجع همیشه با خودمان است؛ یعنی اگر فقط چارچوبهای لخت را هم بدکار ببریم، هیچ محدودیتی روی پدیده‌های طبیعی ای که می‌شود با مکانیک کلاسیک بررسی کرد نمی‌گذاریم.

با وجود این، در مواردی که مناسب بدانیم، می‌توانیم مکانیک کلاسیک را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت هم بدکار ببریم، یعنی از دید چارچوبهای متصل به جسمی که، از دید چارچوبهای لخت، شتابدار است. چارچوبهای متصل به یک اتمیل شتابدار یا چرخ و فلک چرخان، نمونه‌هایی از چارچوب نالخت‌اند.

برای به کار بردن مکانیک کلاسیک در چارچوبهای نالخت باید نیروهای دیگری به نام شبه نیرو (یا شبه نیروی لختی) وارد کنیم. شبه‌نیروها را بر خلاف نیروهایی که تاکنون دیده‌ایم، نمی‌توان به اجسام خاصی در محیط *Ramin.samad@yahoo.com*



شکل ۱۷. (الف) ناظر زمینی S مشاهده می‌کند که ناظر S' در کامیون با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هر دو ناظر در چارچوبهای مرجع لخت‌اند. (ب) از دید ناظر S ، کامیون با شتاب ثابت a ترمز می‌کند. ناظر S' ، که اکنون در یک چارچوب مرجع نالخت است، مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب ثابت $-a = a'$ روی ریل هوا به جلو می‌رود. ناظر S' این حرکت را با شبیه‌سازی توضیح می‌دهد.

حرکت کنند. تویی که در دست شماست، از دید شما در حالت تعادل است؛ نیروی رو به "پیرون" (مرکزگیری) با شبیه‌سازی رو به "درون" (مرکزگیری) که دست شما به توب وارد می‌کند خشنی می‌شود. از دید ناظر زمینی، که در چارچوب مرجع لخت است، توب روی دایره حرکت می‌کند، و در اثر نیروی مرکزگیرایی که شما توسط دستتان بر آن وارد می‌کنید، شتابی به سوی مرکز دارد. برای ناظر زمینی، نیروی مرکزگیری وجود ندارد، زیرا توب در حالت تعادل نیست و در امتداد شعاع به طرف مرکز دایره شتاب دارد.

بعضی ابرازهای عملی براساس شبیه‌سازی کار می‌کنند. دستگاه سانتریفیوز را در نظر بگیرید، که یکی از مفیدترین وسائل آزمایشگاه است. اگر مخلوطی از مواد را روی دایره‌ای به سرعت بچرخانیم، نیروی مرکزگیری r/mv^2 وارد بر مواد پر جرمتر بیشتر خواهد بود. پس این مواد از محور دوران بیشتر فاصله می‌گیرند. به این ترتیب، سانتریفیوز با استفاده از شبیه‌سازی، مواد را بر حسب جرم‌شان از هم جدا می‌کند، درست همان‌طور که طیف‌سنج جرمی (بخش‌های ۵-۱ و ۴-۵) اتفاقاً اینها را به کمک نیروی الکترومغناطیسی، بر حسب جرم، از هم جدا می‌کند.

یکی دیگر از انواع شبیه‌سازی، نیروی کوریولیس است. روی یک صفحه افقی چرخان، تویی را با سرعت ثابت در راستای شعاع به طرف مرکز صفحه چرخان می‌غلستاند. در لحظه‌ای که توب را در شعاع r رها می‌کنید، سرعت مماسی آن همان سرعت ناقاطی است که در فاصله r از مرکز حرکت دایره‌ای دارند (درست بهاندازه سرعت مماسی خودتان). این توب هر قدر که به مرکز نزدیکتر می‌شود، سرعت مماسی کمتری برای حفظ حرکت دایره‌ای با همان آهنگ محیط اطرافش لازم دارد. اما چون راهی برای کاهش سرعت مماسی نیست (فرض کرده‌ایم که اصطکاک بین توب و کف چرخ و فلک کم است)، توب قادری از خط رنگی نشانه حرکت دورانی یکنواخت (امتداد اولیه غلتش) جلو می‌افتد. یعنی شما در چارچوب مرجع نالخت دور خودتان باید فرض کنید که یک نیروی جانبی-نیروی کوریولیس- باعث می‌شود که توب، با نزدیکتر شدن به مرکز دایره، از خط دورتر شود. اما از دید ناظر زمینی در چارچوب لخت، نیروی کوریولیسی وجود ندارد: توب با سرعت

کند که شبیه‌سازی بر لغزک اثر می‌کند. از دید S' ، نیروی F' باید برابر با ma' باشد، که در آن $(-a) = a'$ شتاب لغزک از دید S' است. اندازه این شبیه‌سازی برابر است با

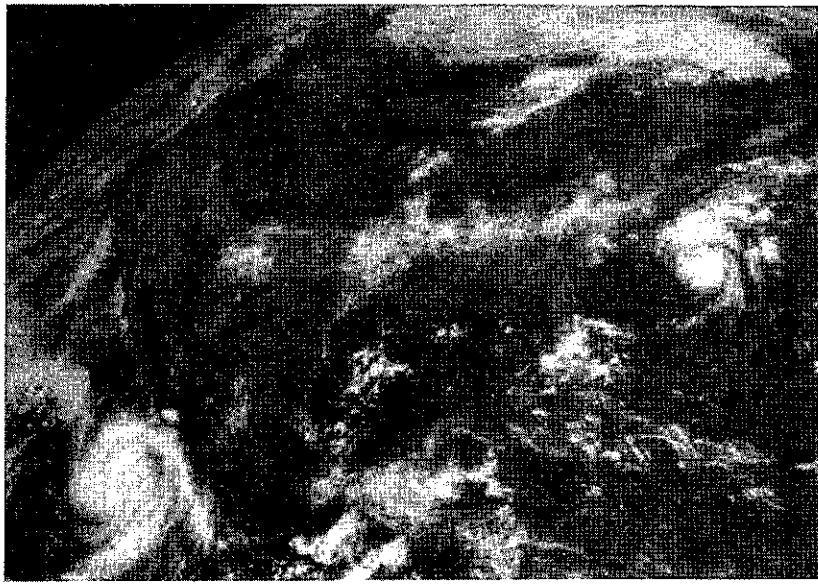
$$F' = ma' = 25\text{kg}(2.8\text{m/s}^2) = 70\text{N}$$

و جهت آن همان جهت a' است، یعنی به طرف جلوی کامیون. این نیرو که از دید S' خیلی واقعی است، از دید ناظر زمینی S وجود ندارد؛ چون S برای توضیح حرکت لغزک اصلاً نیازی به چنین نیرویی ندارد.

یکی از نمودهای اینکه شبیه‌سازی غیر نیوتونی است، این است که این نیرو قانون سوم نیوتون را نقض می‌کند. به مصادق قانون سوم نیوتون، S' باید نیروی عکس‌العملی پیدا کند که از لغزک بر جسمی دیگر وارد می‌شود. چنین نیروی عکس‌العملی نمی‌توان یافت؛ بنابراین، قانون سوم نیوتون نقض می‌شود.

شبیه‌سازی‌ها برای کسانی که تحت تأثیر این نیروها قرار می‌گیرند، کاملاً واقعی‌اند. تصور کنید در اتومبیل نشسته‌اید که سر یک پیج به چپ می‌بیچد. از دید ناظر زمینی، اتومبیل شتاب مرکزگرا دارد و بتایرانی، یک چارچوب نالخت است. اگر صندلیهای اتومبیل مثلًا از جنس وینیل و کم اصطکاک باشد، شما به طرف راست خواهید لغزید. از دید ناظر زمینی، که در یک چارچوب لخت است، این حرکت کاملاً طبیعی است: بدن شما فقط می‌خواهد از قانون اول نیوتون تعیت کند و روی خط راست جلو برود؛ در واقع این اتومبیل است که زیر بدن شما به طرف چپ می‌لغزد. اما شما، در چارچوب نالخت اتومبیل، ناچارید حرکت لغزشی تان را ناشی از شبیه‌سازی بدانید که شما را به طرف راست هل می‌دهد. این نوع شبیه‌سازی را نیروی مرکزگیری می‌نامند، یعنی نیرویی که در جهت دور شدن از مرکز عمل می‌کند.

اگر سوار چرخ و فلک باشید هم در یک چارچوب شتابدار، و در نتیجه نالخت، واقع شده‌اید. در این چارچوب (چرخ و فلک چرخان در صفحه افقی)، به نظر می‌رسد که اجسام در اثر نیروی مرکزگیری می‌خواهند به طرف خارج، یعنی در جهت دور شدن از محور دوران



شکل ۱۸. مرکز کم فشاری بر زمین چرخان. با جریان یافتن هوا به طرف مرکز ناظر نالخت در نیمکره شمالی می بیند که هوا در جهت پادساعتگرد می چرخد. گردباد (عکس سمت راست) چنین مرکز کم فشاری است.

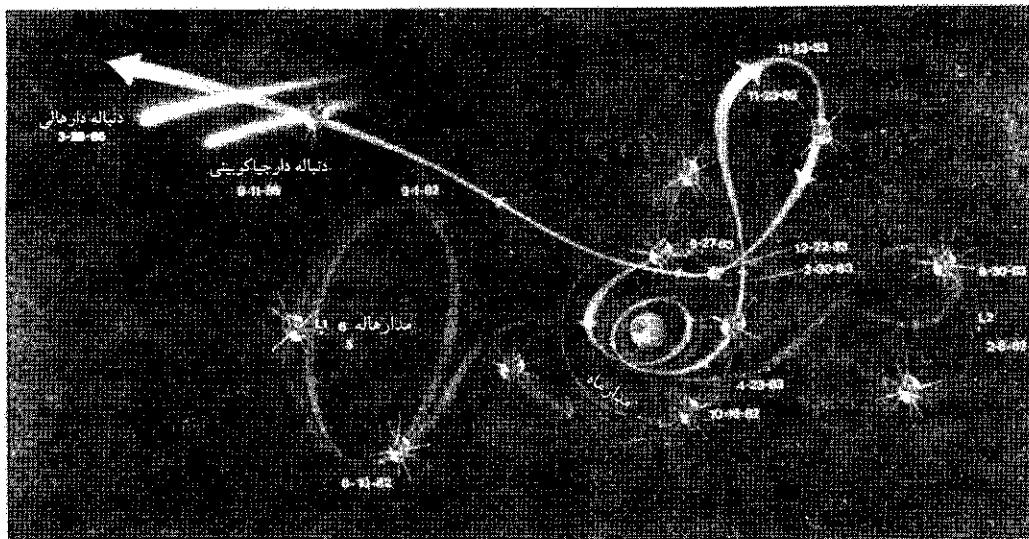
با توجه به آنچه گفته شد، در حل مسائل مکانیک دو راه پیش رو داریم: (۱) یک چارچوب لخت انتخاب کنیم و فقط نیروهای "حقیقی" را در نظر بگیریم، یعنی نیروهایی را که می شود به اجسام معینی در محیط نسبت داد، یا (۲) یک چارچوب نالخت انتخاب کنیم، و علاوه بر نیروهای "حقیقی" شبکه نیروهایی مناسب را هم در نظر بگیریم. ما معمولاً روش اول را به کار می بریم، اما گاهی هم روش دوم را انتخاب می کنیم؛ دو روش کاملاً هم ارزند، و انتخاب بستگی به این دارد که در هر مورد کدامیک ساده‌تر یا متناسب‌تر است.

۶-۹ محدودیتهای قوانین نیوتون (اختیاری)

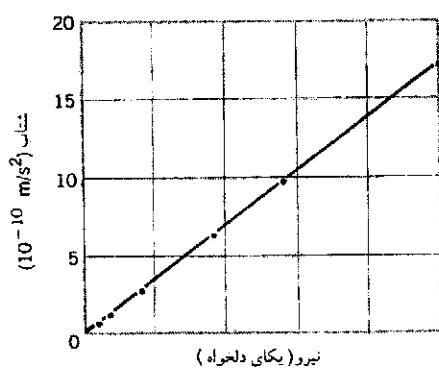
در شش فصل اول کتاب، نظامی برای تحلیل رفتار مکانیکی سیستمها توصیف کرده‌ایم که گستره کاربردهای آن بسیار وسیع است. برای طراحی آسمان‌خراش‌هایی عظیم و پلهای معلق، یا حتی برای محاسبه مسیرهای متعدد فضایی‌ها در سفرهای بین سیارات (شکل ۱۹)، جز معادلات نیوتون عملأً به چیزهای خیلی بیشتری نیاز نیست. مکانیک نیوتونی، که ابزار محاسباتی لازم برای این کار را فراهم کرد، نخستین تحول واقعاً انقلابی در فیزیک نظری بود.

مثالی که ذکر می کنیم گویای اطمینانی است که می توانیم به قوانین نیوتون داشته باشیم. اغلب کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی در حال چرخش‌اند، و با رصد کردن می‌توان سرعت چرخششان را بدست آورد. از این اطلاعات می‌توانیم مقدار ماده‌ای را که باید در کهکشان یا خوشه موجود باشد تا گرانش حاصل از آن بتواند نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش مشاهده شده را تأمین کنند محاسبه کنیم. اما مقدار ماده‌ای که واقعاً با تلسکوپ مشاهده می‌کنیم خیلی کمتر

ثابت روی خطی راست حرکت می‌کند، و این سرعت ثابت را مؤلفه‌های سرعت توب در لحظه رها شدن (از دست شما) تعیین می‌کنند. شاید آشناترین مثال از آثار نیروی کوریولیس، حرکت جو حول مراکز کم فشاری پروفشار باشد. شکل ۱۸ نمودار یک مرکز کم فشار را در نیمکره شمالی نشان می‌دهد. چون فشار هوا در این مرکز از اطراف کمتر است، هوا از همه جهتها به طرف مرکز حرکت می‌کند. چون زمین می‌چرخد (و بنابراین، چارچوب نالخت است) پدیده‌ای شبیه به توب و چرخ و فلك بالا به وجود می‌آید: هوایی که باز جنوب به طرف مرکز می‌آید، کمی از خط فرضی ثابت، نسبت به زمین چرخان، جلو می‌افتد، و هوایی که از شمال می‌آید (مانند تویی که به طرف محیط چرخ و فلك در حرکت باشد) کمی از این خط عقب می‌ماند. نتیجه کلی این است که هوا در جهت پادساعتگرد حول مرکز کم فشار می‌چرخد. به این ترتیب، اثر کوریولیس است که باد را در پدیده‌های گردبادی به چرخش در می‌آورد. در نیمکره جنوبی، جهت این اثر معکوس می‌شود. در حرکت گلوله توپهای بلندبرد، لازم است که اثر کوریولیس ناشی از چرخش زمین به حساب آورده شود. برای گلوله‌ای نوعی به برد 10 km ، پدیده کوریولیس می‌تواند انحرافی به اندازه 2° به وجود بیاورد. تصحیحات لازم برای از بین بردن این انحرافات، در برنامه‌های کامپیوتری ای که برای کنترل نشانه روی سلاحهای بلندبرد به کار می‌رود گنجانده شده است. اما گاهی هم اشتباہ پیش می‌آید. مثلاً در یکی از نبردهای جنگ جهانی اول در ترددیکی جزایر فالکلند، چنین اشتباہی برای ناوگان بریتانیا اتفاق افتاد. دستورالعملهای آتش برای نیمکره شمالی نوشته شده بود، اما جزایر فالکلند در نیمکره جنوبی است، و تصحیحات کوریولیس باید برعکس باشد. گلوله‌های بریتانیاییها به حدود 10° m آن طرفت از هدف اصابت می‌کردند، زیرا تصحیح کوریولیس در خلاف جهتی که باید انجام شده بود!



شکل ۱۹. یک پیروزی برای مکانیک نیوتونی. فضاییمای "کاشف بین‌المللی سیارات" ^۱ در سال ۱۹۷۸ به فضا پرتاب شد، ۴ سال در مداری حول نقطه L_۱ باقی ماند و بادهای خورشیدی را بررسی کرد. سپس دم مغناطیسی زمین را در مداری در طرف شب زمین کشف کرد. در سال ۱۹۸۵ از دم دنباله‌دار "جیا کویینی-زینر"، و در سال ۱۹۸۶ از دم دنباله‌دار هالی گذشت. این فضایما فعلاً در سفری بین سیاره‌ای است و در سال ۲۰۱۲ به نزدیکی زمین باز خواهد گشت. این کاشف سیاره‌ای طی سفرش تاکنون ۳۷ موشک روشن کرده و ۵ بار از کنار ماه گذشته است.



شکل ۲۰. نتایج یکی از آزمایش‌های جدید برای تعیین اینکه آیا قانون دوم نیوتون در شتابهای کوچک کمتر از $10^{-9} m/s^2$ هم معتبر است یا خیر. خط راست نشان می‌دهد که شتاب، تا حد $10^{-10} m/s^2$ ، با نیروی اعمال شده متناسب است؛ یعنی قانون نیوتون حتی در این شتابهای کوچک هم برقرار است.

مقایسه با سرعت نور حرکت می‌کنند به کار برد. نسبیت عام نشان می‌دهد که قوانین نیوتون در حضور نیروهای گرانشی بسیار قوی معتبر نیست. مکانیک کوانتومی می‌گوید که قوانین نیوتون را نمی‌شود به قلمرو اجرامی به کوچکی اتم هم تعیین داد.^۱

نسبیت خاص شامل دیدگاهی غیر نیوتونی از فضا و زمان است. این نظریه را در همه موارد، چه سرعتهای زیاد و چه سرعتهای کم، می‌توان به کاربرد. می‌شود نشان داد که دینامیک نسبیت خاص در

از مقداری است که انتظار باید داشت. بنابراین، گفته شده است که مقداری "مادة تاریک" هم هست که نمی‌توانیم آن را با تلسکوپ ببینیم اما باید باشد تا میدان گرانشی مورد نیاز را تأمین کند. تاکنون توضیح قانع‌کننده‌ای درباره نوع یا ماهیت این مادة تاریک به دست نیامده، و بنابراین توجیهات دیگری برای رفع این ناسازگاری میان مقدار واقعاً مشاهده شده مادة کهکشانها و مقدار لازم برای برقراری قوانین نیوتون، ارائه شده است. یک توضیح آن است که محاسبات ما نادرست‌اند زیرا قوانین نیوتون در اوضاع و احوالی که در مقیاس بسیار بزرگ وجود دارد، یعنی برای شتابهای بسیار کوچک (کمتر از چند $10^{-10} m/s^2$) برقرار نیستند. به خصوص پیشنهاد شده است که شاید در این شتابهای بسیار کوچک، نیرو با a^2 متناسب باشد نه با a .

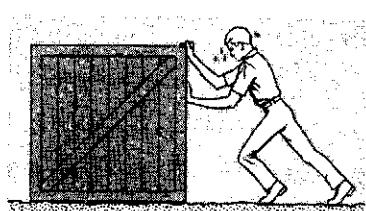
شکل ۲۰ نتایج آزمایشی را نشان می‌دهد که اخیراً گزارش شده و هدف آن آزمودن این فرضیه است. اگر بستگی نیرو به شتاب، به شکل توانی جز ۱ باشد، داده‌های نمودار روی خط راست نمی‌افتد. از این آزمایش بسیار دقیق نتیجه می‌شود که، تا حد شتابهایی در حدود $10^{-10} m/s^2$ ، نیرو متناسب با شتاب است و قانون دوم نیوتون برقرار است.

در قرن بیستم، سه تحول انقلابی دیگر هم داشته‌ایم: نظریه نسبیت خاص اینشتین (۱۹۰۵)، نظریه نسبیت عام اینشتین (۱۹۱۵) و مکانیک کوانتومی (در حدود ۱۹۲۵). از نسبیت خاص معلوم می‌شود که نمی‌توان قوانین نیوتون را برای اجرامی هم که با سرعتهای قابل

توانسته‌اند دو ویزگی کمربند سیارکها را (که بین مدارهای مریخ و مشتری قرار دارد) توضیح بدهند. این ویزگیها را صرفاً در چارچوب مکانیک نیوتونی متعارف نمی‌شد توجیه کرد: (۱) بسیاری از سیارکها از مدارهایی که علی‌القاعدۀ باید پایدار باشند خارج می‌شوند؛ برخی از این سیارکها همان شهابهایی می‌شوند که مدام بر زمین می‌بارند. (۲) در کمربند سیارکها چندین ناحیۀ تھی وجود دارد که تعداد سیارکهای مدارگرد در آنجا کم یا صفر است. تازه در دهۀ گذشته (سالهای ۸۰)، به لطف کامپیوترهای بسیار سریع، امکان محاسبات مفصل چنین سیستمهایی تا زمانهای لازم برای مشاهده این رفتارهای غیرعادی، فراهم شده است. با انجام محاسبات بیشتر، به تدریج کاربردهای دیگری هم از این مقوله هیجان‌انگیز کشف می‌شود.

پرسشها

۱. حدی وجود دارد که اگر سطحی را از آن بیشتر صیقل بدهند، مقاومت اصطکاکی به جای کم شدن زیاد می‌شود. چرا؟
۲. صندوقی سنگین‌تر از شما روی زمین افقی ناهمواری قرار دارد (شکل ۲۱). ضریب اصطکاک میان صندوق و زمین همان ضریب اصطکاک میان گفشن شما و زمین است. آیا می‌توانید صندوق را روی این زمین هل بدیده؟^۱



شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. در بازی بیسبال، دونده معمولاً با دویدن سریعتر حرکت می‌کند تا با سر خوردن. چرا؟ در این صورت دونده اصلاً چرا سر می‌خورد؟

۴. چگونه شخصی که روی آبگیر یخ بسته کاملاً بدون اصطکاکی ایستاده است، می‌تواند خودش را به ساحل برساند؟ آیا این شخص می‌تواند با راه رفتن، غلتیدن، تاب دادن دستها، یا لگد پراندن موفق شود؟ اصولاً چگونه می‌توان شخصی را در چنین وضعیتی قرار داد؟
۵. چرا لاستیکهای اتومبیل موقع حرکت بر سطح افقی بهتر به زمین می‌چسبند تا موقع بالا رفتن یا پایین آمدن از شیب؟

^۱. رجوع کنید به

Chaos-Making a New Science, James Gleick, (Penguin Books, 1987).

حد سرعتهای کم، به همان قوانین نیوتون می‌انجامد. نظریه نسبیت عام را، هم برای نیروهای گرانشی قوى و هم برای نیروهای گرانشی ضعیف می‌توان به کار گرفت، اما معادلات آن در حد میدانهای ضعیف به همان قوانین نیوتون تحويل می‌شوند. از مکانیک کوانتومی می‌توانیم هم برای تک‌تک اتمها و هم برای اجسام معمولی که تعداد بسیار زیادی اتم دارند استفاده کنیم؛ در مورد اول کترگی معینی در رفتار سیستم پیش‌بینی می‌شود، و در مورد دوم، میانگین این رفتار کترهای برای تعداد فوق العاده‌ای از ذرات، باز هم به همان قوانین نیوتون منجر می‌شود.

طی دهۀ گذشته، تحول ظاهرًا انقلابی دیگری هم رخ داده است. این پیشرفت مربوط به سیستمهای مکانیکی‌ای است که رفتارشان را با واژه آشوبناک توصیف می‌کنند. یکی از مهمترین ویزگیهای قوانین نیوتون قابلیت آنها در پیش‌بینی رفتار آینده سیستم است، البته اگر شرایط اولیه و نیروهای عامل حرکت معلوم باشند. مثلاً اگر مکان و سرعت اولیه فضایی‌ای را که تحت اثر نیروی گرانشی معین خورشید و سیارات دیگر است بدانیم، می‌توانیم مسیر دقیق آن را محاسبه کنیم. اما حالا ترکه‌ای را در نظر بگیرید که در یک نهر متلاطم شناور است. این ترکه همواره تحت تأثیر نیروهایی است که از قوانین نیوتون تعیین می‌کنند، اما مسیر آن به طرف پایین نهر کاملاً غیرقابل پیش‌بینی است. اگر دو ترکه را کنار هم در این نهر بیندازیم، در پایین نهر ممکن است خیلی از هم جدا شده باشند. مشخصه مهم دینامیک آشوبناک آن است که تغییرات بسیار کوچکی در شرایط اولیه می‌توانند به شدت تقویت شوند و به تفاوت‌های بسیار بزرگی در نتایج پیش‌بینی شده بینجامند. دینامیک آشوبناک خیلی وقتها در پیش‌بینی هوا به کار می‌آید، و گفته شده است که بال زدن پروانه‌ای در زاپن می‌تواند با تشکیل گردبادی در خلیج مکزیک مرتبط باشد.

چنین رفتارهای آشوبناکی مختص سیستمهای پیچیده‌ای مثلاً نهر متلاطم نیست، بلکه در سیستمهای ساده‌ای مثل آونگ، شیر آبی که به آرامی چکه می‌کند، یا در مدارهای الکتریکی نوساتی هم مشاهده می‌شود. در دهۀ ۱۹۶۰ معلوم شد که رفتار به ظاهر آشوبناک این سیستمهای نوعی نظم و قاعده‌مندی پنهان در بر دارد، و مطالعه این نظم هسته‌یک شاخة جدید علم، آشوب، را تشکیل داده است.^۱ قوانین آشوب، نه تنها در سیستمهای فیزیکی بلکه در سیستمهای زیست‌شناسی هم به کار برده شده‌اند. رفتار آشوبناک حتی در بعضی شاخه‌های حیطه علوم اجتماعی مثل اقتصاد و دینامیک جمعیت هم مشاهده می‌شود.

از محاسباتی که بر مبنای تلفیقی از قوانین نیوتون و نظریه آشوب صورت گرفته معلوم شده است که مدار سیاره پلوتون، در مقیاس زمانی چند ده میلیون سال، آشوبناک است (این زمان در مقایسه با سن منظمه شمسی، در حدود ۴۵ میلیارد سال، کوتاه است اما در مقایسه با زمان تناوب مدار پلوتون به دور خورشید، در حدود ۲۵ سال، طولانی است). به کمک نظریه آشوب همچنین

شناور مانده و با سقف در تماس است. در هر یک از حالت‌های زیر چه بر سر این دو جسم می‌آید؟ (الف) اگر با سرعت ثابت پیچید و (ب) اگر ترمز کنید.

۱۸. اثر مقاومت هوا را بر زاویه برد پیشینه پرتابه بررسی کنید.
۱۹. قطره‌های درشت‌تر باران سریعتر سقوط می‌کنند یا قطره‌های ریزتر؟

۲۰. سرعت حد توب پیسبال 95 mi/h است. اما سرعتی که برای توپهای پرتاب شده اندازه‌گیری می‌شود اغلب بیش از این است و به حدود 100 mi/h هم می‌رسد. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۲۱. حرکت جسمی را توصیف کنید که با سرعتی بیش از سرعت حد خودش، در راستای قائم به طرف پایین پرتاب می‌شود.

۲۲. کنده‌ای روی نهری شناور است و به طرف پایین رود حرکت می‌کند. چگونه می‌تواند نیروی مقاومت اصطکاکی وارد بر آن را به دست بیاورید؟
۲۳. دو جسم به جرم‌های متفاوت را هم‌زمان از بالای برجی رها می‌کنیم. نشان بدید که اگر مقاومت هوا برای هر دو جسم ثابت و یکسان فرض شود، جسمی که جرم بیشتری دارد زودتر به زمین می‌رسد. این فرض تا چه حدی موجه است؟

۲۴. چرا در جدول ۲ "مسافت 95% " را آورده‌ایم نه "مسافت 100% " را؟

۲۵. چرخش زمین چه اثری بر وزن ظاهری اجسام در استوا دارد؟

۲۶. توضیح بدید که چرا شاقول در بیشتر عرضهای جغرافیایی دقیقاً در راستای جاذبه‌گرانشی زمین قرار نمی‌گیرد؟

۲۷. فضانوردان در فضایمایی که در مدار است می‌خواهند وزن خود را روزانه ثبت کنند. با توجه به "بی‌وزنی" این فضانوردان، می‌توانند تصور کنید که این کار چگونه ممکن است؟

۲۸. چرا پرسش "سرعت خطی نقطه‌ای بر استوا چقدر است؟" به فرضی درباره چارچوب مرجع بدکار رفته نیاز دارد؟ نشان بدید که چگونه با تغییر چارچوب مرجع، جواب هم تغییر می‌کند؟

۲۹. چه تمايزی بین چارچوبهای مرجع لخت و چارچوبهای دیگری که فقط محورهایشان نسبت به چارچوبهای اولیه منتقل شده یا چرخیده است وجود دارد؟

۳۰. مسافری در صندلی جلوی اتومبیلی نشسته است. راننده ناگهان به چپ می‌بیچد و مسافر به طرف در می‌لغزد. نیروهای وارد برسافر و اتومبیل در این لحظه را از دید چارچوب مرجع (الف) متصل به زمین و (ب) متصل به اتومبیل بررسی کنید.

۳۱. آیا در بازی تنیس یا گلف باید تیروی کوریولیس را هم در نظر گرفت؟ اگر نه، چرا؟

۳۲. در بالکن یک برج مرتفع، به طرف شرق ایستاده‌اید و جسمی را رها می‌کنید تا در پای برج به زمین بخورد (شکل ۲۲). (فرض کنید که می‌توانید محل برخورد را با دقت زیاد بستجید.) آیا جسم به نقطه a ، درست در زیر نقطه رها شدنش می‌خورد،

۶. پشت اتومبیلهای مسابقه سطوح خمیده‌ای (به نام "اسپویلر") نصب می‌کنند. طراحی این سطوح چنان است که هوایی که از آنها می‌گذرد نیرویی رو به پایین تولید می‌کند. این کار چه فایده‌ای دارد؟

۷. دو سطح با هم تماس دارند، اما نسبت به هم ساکن‌اند. با وجود این به هم نیروی اصطکاک وارد می‌کنند. چرا؟

۸. اتومبیل شما در جاده یخزده‌ای سر می‌خورد و کمی وارد باند مخالف می‌شود. در هر یک از موارد زیر آیا بهتر است چرخهای جلو را در همان جهت لغزن بچرخانید یا در خلاف جهت آن؟ (الف) اگر بخواهید از تصادف با اتومبیل که از رویه رو می‌آید اجتناب کنید و (ب) اگر اتومبیل دیگری در آن نزدیکی نباشد و بخواهید که دوباره کنترل اتومبیل را به دست بیاورید. اتومبیل را "با چرخهای محرک در عقب" و بعد "با چرخهای محرک در جلو" در نظر بگیرید.

۹. چرا اتومبیلهای مسابقه هنگام گذشتن از پیچ سرعتشان را زیاد می‌کنند؟

۱۰. در هوایپیمایی در ارتفاع ثابت در پروازید و می‌خواهید یک دور 90° بزنید. چرا باید هوایپیما را کج کنید تا بتوانید دور بزنید؟

۱۱. وقتی یک سگ خیس خودش را می‌تکاند، کسانی که نزدیک به او ایستاده‌اند ممکن است خیس بشوند. چرا آب از سگ این‌طور به اطراف می‌جهد؟

۱۲. شاید توجه کرده باشید (اینستین توجه کرده بود) که وقتی چای را در فنجان بهم می‌زنید، تقاهه‌های چای در وسط فنجان جمع می‌شوند نه در لبه آن. آیا می‌توانید این پدیده را توضیح بدهید؟ (اینستین توانسته بود).

۱۳. می‌خواهید تعیین کنید که سطح میزی که در قطاری قرار دارد واقعاً افقی هست یا نه. آیا با استفاده از یک تراز (محتوی حباب در مایع) می‌توانید در حالتی که قطار از شبیه بالا یا پایین می‌رود این کار را انجام بدید؟ اگر قطار در حال پیچیدن باشد چطور؟ (راهنمایی: دو مؤلفه افقی وجود دارد).

۱۴. در آونگ مخروطی، زمان تناوب و سرعت گلوله آونگ به ازای $\theta = 90^{\circ}$ چه می‌شود؟ چرا این زاویه از نظر فیزیکی غیرممکن است؟ در مورد حالت $\theta = 0^{\circ}$ هم توضیح بدید.

۱۵. سکه‌ای روی صفحه گردان گرامافونی قرار دارد. موتور گرامافون را روشن می‌کنیم. پیش از آنکه گرامافون به سرعت نهایی خود برسد، سکه به خارج پرتاب می‌شود. چرا؟

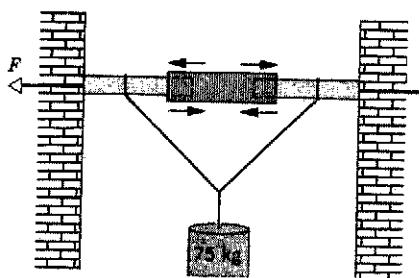
۱۶. اتومبیلی در جاده‌ای که پستی و بلندی دارد حرکت می‌کند. فرض کنید سرعت اتومبیل ثابت باشد. نیرویی را که اتومبیل در بخش افقی به جاده وارد می‌کند، با نیروی وارد از اتومبیل به جاده در بخش‌های "بلندی" و "پستی" مقایسه کنید و در این باره توضیح بدید.

۱۷. اتومبیلی را با سرعت ثابت در بزرگراهی می‌رانید. توبی روی کف اتومبیل در حالت سکون است و بادکنکی پر از هلیم در بالای توب



شکل ۲۳. مسئله ۴

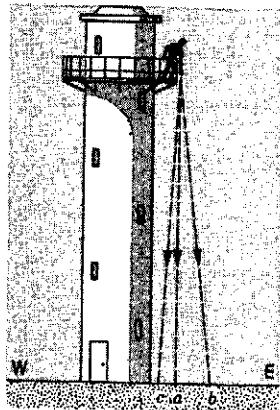
۵. یک میله افقی برای نگه داشتن جسمی به جرم 75 kg بین دو دیوار کار گذاشته شده است. شکل ۲۴. نیروهای یکسان F را، که میله بر دیوارها وارد می‌کند، می‌توان با کم و زیاد کردن طول میله تغییر داد. فقط اصطکاک بین دو سرمهله با دیوارهایست که سیستم را نگه می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی میان میله و دیوار 41° است. کمترین مقدار نیروی F برای برقراری تعادل چقدر است؟



شکل ۲۴. مسئله ۵

۶. کنده‌ای به وزن 53 lb (معنی 240 N) روی زمین ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان کنده و زمین 41° ، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو 32° است. (الف) کمترین نیروی افقی ای که می‌تواند کنده را به حرکت در بیاورد قدر است؟ (ب) پس از شروع حرکت، چه نیروی افقی ای باید اعمال کرد تا کنده با سرعت ثابت به حرکتش ادامه بدهد. (ج) اگر، به جای این نیرو، همان نیروی اولیه (ازم برای شروع حرکت) همچنان به کنده اثر کند چه شتابی به آن می‌دهد؟ ۷. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیکهای یک اتومبیل و زمین چگاه خشک 62° است. جرم اتومبیل 150 kg است. (الف) روی جاده

یا به نقطه θ متمایل به شرق، یا به نقطه θ متمایل به غرب؟ جسم را از حالت سکون رها کرده‌اید، و زمین از غرب به شرق می‌چرخد.



شکل ۲۲. برسن ۳۲

۳۳. با استدلال کیفی نشان بدهید که، به علت چرخش زمین، بادی که در نیمکره شمالی از شمال به جنوب بوزد به طرف راست منحرف می‌شود. بادی که از جنوب به شمال بوزد چطور؛ اوضاع در نیمکره جنوبی چگونه خواهد بود؟

مسئله‌ها

بخش ۲-۶ نیروی اصطکاک

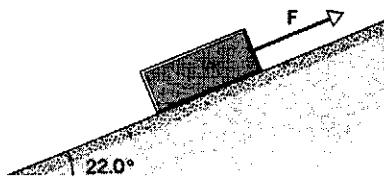
۱. ضریب اصطکاک ایستایی بین تلقون و خاگینه در حدود 40° است. کف (افقی) یک ماهیتابه تلقون را حداقل باید چند درجه کج کرد تا خاگینه روی آن بلغزد؟

۲. فرض کنید فقط چرخهای عقب اتومبیل می‌توانند به آن شتاب بدهند، و این چرخها نیمی از وزن اتومبیل را تحمل می‌کنند. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده μ_m باشد، بیشترین شتابی که اتومبیل می‌تواند بگیرد چقدر است؟ (ب) μ_m را برابر با 56° بگیرد و یک مقدار برای این شتاب محاسبه کنید.

۳. ضریب اصطکاک ایستایی بین پیست و کفشهای دونده‌ای 95° است. بیشترین شتابی که این دونده می‌تواند بگیرد چقدر است؟

۴. یک بازیکن بیسیبال (شکل ۲۳) به جرم 79 kg در پایان یک حرکت روی زمین سر می‌خورد و حرکتش با نیروی اصطکاک N کند می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین این بازیکن و زمین چقدر است؟

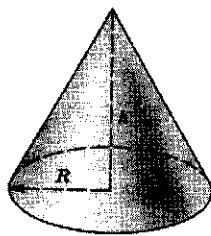
F برای به حرکت درآوردن جسم به طرف بالای سطح شیبدار چقدر است؟ (ج) حداقل نیروی F برای اینکه جسم با سرعت ثابت به طرف بالای سطح شیبدار حرکت کند چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئله ۱۱

۱۲. دانشجویی می‌خواهد ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین یک جعبه و یک تخته را به دست بیاورد. جعبه را روی تخته می‌گذارد و یک سر تخته را کم کم بلند می‌کند. هنگامی که زاویه شیب تخته با سطح افقی 28.0° می‌شود، جعبه شروع به لغزیدن می‌کند و طی 3.92m مسافت 2.53m را روی سطح شیبدار طی می‌کند. ضرایب اصطکاک را پیدا کنید.

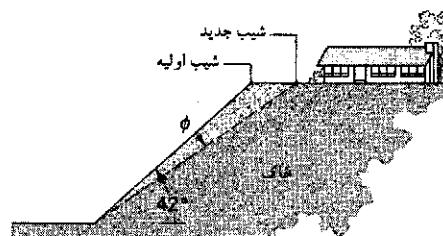
۱۳. کارگری می‌خواهد مقداری ماسه را در ناحیه‌ای دایره‌ای شکل روی هم انباشته کند؛ شعاع دایره R است و هیچ ماسه‌ای نباید به ناحیه خارج از دایره برسد (شکل ۲۸). نشان بدید که بیشترین حجم ماسه‌ای که به این ترتیب می‌توان انباشته کرد $\frac{3}{2}\pi R^3 \mu_m$ است، که در آن μ_m ضریب اصطکاک ایستایی ماسه با ماسه است. (حجم مخروطی به مساحت قاعدة A و ارتفاع h ، $Ah/3$ است).



شکل ۲۸. مسئله ۱۳

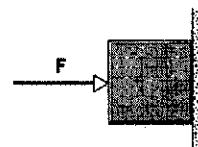
۱۴. گرمای ناشی از اصطکاک، که در اثر حرکت اسکی ایجاد می‌شود، عامل اصلی لغزیدن اسکی روی برف است. اسکی در شروع کار به برف می‌چسبد، اما در اثر حرکت، برف زیر آن ذوب می‌شود. با موم زدن به اسکی، اصطکاک میان اسکی و لایه آب کم می‌شود. مجله‌ای گزارش کرده است که نوع جدیدی اسکی پلاستیکی، از موم هم کم اصطکاک‌تر است و یک اسکی باز با این اسکی روی شیب ملایمی به طول 23.0m در آلب، توانسته است رکورد خودش را از 6.18s به 4.28s کاهش بدهد. با فرض اینکه زاویه شیب 30° باشد، ضریب اصطکاک جنبشی را برای دونوع اسکی حساب کنید.

افقی و (ب) روی جاده‌ای با شیب 8° به طرف پایین، حداقل چه نیروی ترمی می‌توان اعمال کرد؟ (ج) خانه‌ای بر فراز تپه‌ای ساخته شده است. شیب دامنه تپه 42° است. ریزش دامنه نشان می‌دهد که شیب را باید کم کرد. اگر ضریب اصطکاک خاک بر خاک 0.55 باشد، شیب را به اندازه چه زاویه‌ای (د) باید کمتر کرد (شکل ۲۵)؟



شکل ۲۵. مسئله ۱۴

۹. نیروی افقی F به مقدار 12lb ، جسمی به وزن 5lb را به یک دیوار قائم می‌فشارد (شکل ۲۶). ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم 60° ، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو 40° است. فرض کنید جسم در ابتدا ساکن است. (الف) آیا جسم شروع به حرکت می‌کند؟ (ب) دیوار چه نیرویی به جسم وارد می‌کند؟



شکل ۲۶. مسئله ۹

۱۰. صندوقی به جرم 136kg روی زمین ساکن است. مردی می‌خواهد با نیروی افقی 412N آن را به حرکت در بیاورد. (الف) فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و زمین 37° است. نشان بدید که صندوق حرکت نمی‌کند. (ب) مرد دیگری، برای کمک به اوی، صندوق را به طرف بالا وارد کند تا صندوق روی زمین به راه بیفتد؟ (ج) اگر دومی، به جای نیروی قائم، یک نیروی افقی به صندوق وارد کند، حداقل چه نیرویی، علاوه بر نیروی شخص اول، باید وارد کند تا صندوق شروع به حرکت کند؟

۱۱. جسمی به جرم 7.96kg روی سطحی با شیب 22° نسبت به افق قرار دارد (شکل ۲۷). ضریب اصطکاک ایستایی 25° ، و ضریب اصطکاک جنبشی 15° است. (الف) حداقل نیروی F ، موازی با سطح شیبدار، برای جلوگیری از لغزیدن جسم روی سطح چقدر است؟ (ب) حداقل نیروی

نیروی افقی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند چقدر است؟
 (ب) اندازه نیرویی با زاویه 62° بالاتر از سطح افقی، که بتواند جسم را به حرکت دریابورد چقدر است؟ (ج) اگر جهت نیرو 62° پایین تر از سطح افقی باشد، اندازه آن حداقلتر چقدر می‌تواند باشد بی‌آنکه جسم شروع به حرکت کند؟

۲۰. زاویه دسته زمین‌شویی با راستای قائم θ است (شکل ۳۱). μ_m ضریب اصطکاک جنبشی و μ_s ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین‌شوی و کف اتاق است. (الف) به زمین‌شوی نیروی F را در راستای دسته آن وارد می‌کنیم. اندازه این نیرو چقدر باشد تا زمین‌شوی با سرعت ثابت روی زمین حرکت کند؟ (ب) نشان بدھید که اگر θ از زاویه‌ای معین، θ_0 ، کمتر باشد، نیروی F هر چقدر بزرگ هم که باشد زمین‌شوی را به حرکت در نمی‌آورد. زاویه θ_0 چقدر است؟



شکل ۳۱. مستله ۲۰

۲۱. کارگری صندوقی به وزن 150 lb را به کمک طناب روی زمین می‌کشد. طناب با سطح افقی زاویه 17° می‌سازد. ضریب اصطکاک ایستایی 0.52 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.35 است. (الف) چه کششی در طناب لازم است تا صندوق شروع به حرکت کند. (ب) شتاب اولیه صندوق چقدر است؟

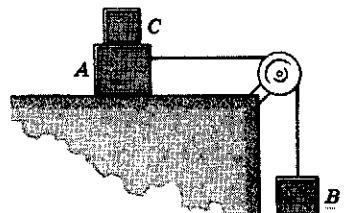
۲۲. از سیمی که فقط تحمل 22kN را کشش را دارد برای کشیدن جعبه‌ای روی زمین استفاده می‌کنیم. حداقل وزن جعبه‌ای که با این سیم می‌توانیم بکشیم چقدر می‌تواند باشد؟ ضریب اصطکاک ایستایی 0.35 است، و سیم را الزاماً افقی به کار نمی‌بریم.

۲۳. شکل ۳۲ مقطع جاده‌ای را نشان می‌دهد که روی دامنه کوهی ساخته شده است. خط AA' نماینده صفحه بستر سستی است که روی آن امکان لغش وجود دارد (صفحة شکست). قطعه B بلا فاصله بالای جاده، توسط یک شکاف بزرگ (مفصل) از صخره‌های بالایی تپه جدا شده است، بنابراین فقط نیروی اصطکاک بین این قطعه و صفحه احتمالی "شکست" است که مانع لغش می‌شود. جرم قطعه

۱۵. جسمی با سرعت ثابت روی سطح شیبداری به زاویه θ به پایین می‌لغزد. همین جسم را با سرعت اولیه v_0 به طرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌کنیم. (الف) جسم تا چه مسافتی بالا می‌رود؟ (ب) آیا باز به پایین برمی‌گردد؟

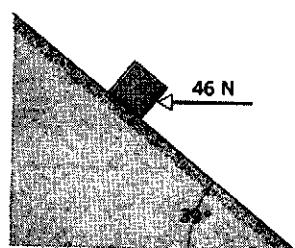
۱۶. قطعه‌ای یخ در حالت سکون روی سطح شیبداری به زاویه 33° دارد، شروع به لغش می‌کند و مسافت معینی را می‌پیماید. زمان پیمودن این مسافت دو برابر زمانی است که برای پیمودن همان مسافت روی سطح شیبداری با همان شب، اما بدون اصطکاک، لازم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین یخ و سطح شیبدار ناهموار چقدر است؟

۱۷. در شکل ۲۹ جرم A برابر با 4 kg و جرم B برابر با 2 kg است. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی میان A و B میز، به ترتیب، 0.15 و 0.18 است. (الف) جسم C را روی A می‌گذاریم تا مانع لغش آن شود. (الف) حداقل جرم C چقدر باشد تا A نلغزد؟ (ب) را به ناگهان از روی A برミ‌داریم. شتاب A چقدر می‌شود؟



شکل ۲۹. مستله ۱۷

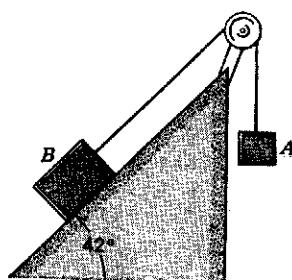
۱۸. جسمی به جرم 4.8 kg روی سطح شیبداری به زاویه 39° است و نیروی افقی 46 N بر آن وارد می‌شود (شکل ۳۰). ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح شیبدار باشد، شتاب آن چقدر است؟ (الف) اگر جسم در حال حرکت به طرف بالای سطح شیبدار باشد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت اولیه جسم 3 m/s باشد، و نیروی افقی هم دائمی بر آن اثر کند، جسم تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (ج) پس از اینکه جسم به بالاترین نقطه مسیر خود رسید، چه بر سرش می‌آید؟



شکل ۳۰. مستله ۱۸

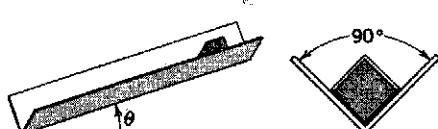
۱۹. جسمی فولادی به جرم 12 kg روی میزی افقی ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز 0.52 است. (الف) اندازه

اصطکاک جنبشی میان آنها 25° است. (الف) شتاب B , در حال حرکت به طرف بالا، چقدر است؟ (ب) شتاب B , در حال حرکت به طرف پایین، چقدر است؟ زاویه سطح شیبدار 42° است.



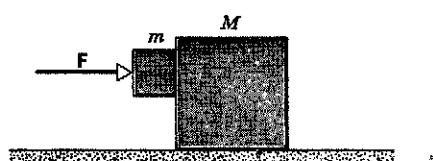
شکل ۲۵. مسئله ۲۵

۲۷. جعبه‌ای در ناودان شیبداری با مقطع قائم الزاویه، به طرف پایین می‌لغزد (شکل ۳۶). ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح داخلی ناودان μ_s است. شتاب جعبه چقدر است؟



شکل ۳۶. مسئله ۲۷

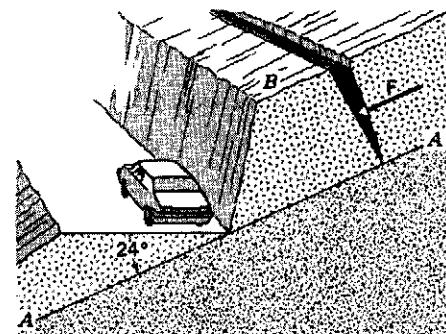
۲۸. در شکل ۳۷، $M = 88\text{kg}$ و $m = 16\text{kg}$ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم 38° را μ_s بگیرید. نیروی افقی F حداقل باید چقدر باشد تا m نسبت به M ساکن بماند؟



شکل ۳۷. مسئله ۲۸

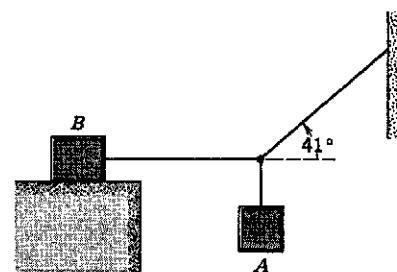
۲۹. روی یک سطح شیبدار، دو جسم به جرم‌های $1\text{kg} = m_1$ و $2\text{kg} = m_2$ با میله‌ای بین جرم به هم متصل‌اند. میله با سطح موازی است (شکل ۳۸). این مجموعه به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، چنان‌که m_1 به دنبال m_2 حرکت می‌کند. زاویه سطح شیبدار 5° است. ضریب اصطکاک جنبشی بین m_1 و سطح شیبدار 26° است. (الف) شتاب مشترک دو جسم و (ب) کشنش میله را بدست بیاورید. (ج) اگر جای m_1 و m_2 را عوض کنیم چه تغییری در

$10^{\circ}\text{kg} \times 10^{\circ}$ را، زاویه صفحه شکست 24° پایین‌تر از سطح جاده، و ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صفحه 63° است. (الف) نشان بدید که قطعه نمی‌لغزد. (ب) اگر آب در مفصل جمع شود و نیروی هیدرولاستاتیکی F را در راستای موازی با شیب قطعه برآن وارد کند، حداقل نیروی F لازم برای لغزش قطعه چقدر است؟



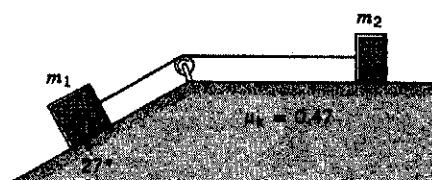
شکل ۳۲. مسئله ۲۹

۲۴. در شکل ۳۳، وزن B برابر با 712N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم B و میز 25° است. حداقل وزن A چقدر باید تا سیستم از حالت تعادل خارج نشود؟



شکل ۳۳. مسئله ۲۴

۲۵. در شکل ۳۴، جرم m_1 برابر با 20kg و جرم m_2 برابر با 23kg است. ضریب اصطکاک جنبشی بین m_2 و سطح افقی 47° است. سطح شیبدار اصطکاک ندارد. (الف) شتاب اجسام و (ب) کشنش ریسمان را بیندازید.



شکل ۳۴. مسئله ۲۵

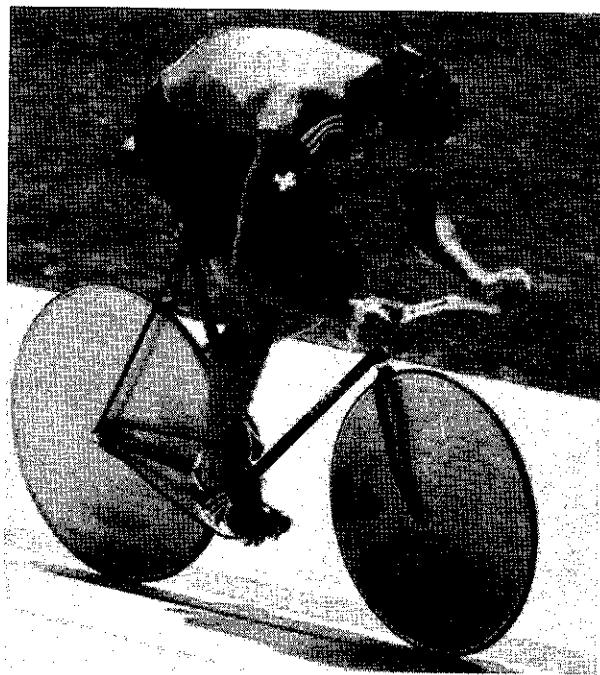
۲۶. در شکل ۳۵، وزن B برابر با 1lb و وزن A برابر با 94lb است. ضریب اصطکاک ایستایی میان B و سطح 56° ، و ضریب

به شعاع 20° ft (یعنی 6° m) که شیب عرضی ندارد بگذرد.
 (الف) نیروی اصطکاک لازم برای اینکه اتومبیل بر دایره بماند چقدر است؟ (ب) حداقل ضریب اصطکاک لازم بین لاستیکها و جاده، برای تأمین این نیرو، چقدر است؟

۳۴. پیچ دایره‌ای شکل بزرگراهی برای سرعت 60 km/h (یعنی 37 mi/h) طراحی شده است. (الف) اگر شعاع پیچ 15° m (یعنی 49° ft) باشد، زاویه صحیح شیب عرضی چقدر است؟ و (ب) اگر پیچ شیب عرضی نداشته باشد، حداقل ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده چقدر باشد تا اتومبیلهایی که با این سرعت از پیچ می‌گذرند نلغزند؟

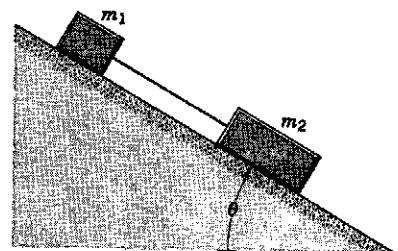
۳۵. دارید اتومبیلتان را با سرعت 85 km/h می‌رانید که متوجه مانعی در جاده می‌شوید که 62 m جلوتر از شماست. (الف) برای اینکه بتوانید پیش از مانع متوقف بشوید، ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) فرض کنید که دارید در پارکینگ خالی و وسیعی با سرعت 85 km/h می‌رانید. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا بتوانید با اتومبیل روی دایره‌ای به شعاع 62 m حرکت کنید (تابه دیواری که 62 m جلوی شماست برخورد نکنید)؟ ۳۶. یک آونگ مخروطی وزنه‌ای به جرم 53 g دارد که به ریسمانی به طول 4 m متصل است. وزنه آونگ روی دایره‌ای به شعاع 25 cm حرکت می‌کند. (الف) سرعت وزنه چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر است؟ (ج) کشش ریسمان چقدر است؟

۳۷. دوچرخه‌سواری (شکل ۴۱) دایره‌ای به شعاع 25 m را با سرعت ثابت 8.7 m/s می‌پساید. جرم مجموعه دوچرخه و دوچرخه‌سوار 85 kg است. نیرویی را که جاده بر دوچرخه وارد می‌کند (مقدار و زاویه با راستای قائم را) محاسبه کنید.



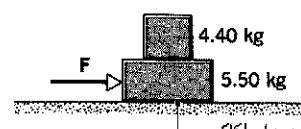
شکل ۴۱. مسئله ۳۷

جوابهای (الف) و (ب) به وجود می‌آید؟



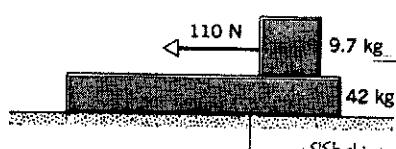
شکل ۳۸. مسئله ۳۸

۳۰. جسمی به جرم 4 kg روی جسم دیگری به جرم 5 kg قرار دارد. برای اینکه جسم رویی روی جسم زیری بلغزد (در حالی که جسم زیری ثابت نگه داشته شده است)، باید نیروی افقی به اندازه 12.0 N بر جسم رویی وارد شود. مجموعه دو جسم را روی میزی افقی و بدون اصطکاک می‌گذاریم (شکل ۳۹). (الف) حداقل نیروی افقی F که می‌توان بر جسم زیرین وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند چقدر است؟ (ب) شتاب دو جسم، بهارای این نیرو، چقدر است؟ (ج) ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم را پیدا کنید.



شکل ۳۹. مسئله ۳۹

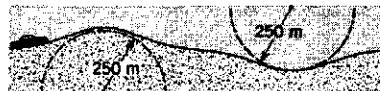
۳۱. تیغه‌ای به جرم 42 kg روی یک سطح بدون اصطکاک واقع شده است. جسمی به جرم 9.7 kg روی ورقه قرار دارد (شکل ۴۰). ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تیغه 0.53 است. و ضریب اصطکاک جنسی میان آنها 0.28 است. به جسم 9.7 kg کیلوگرمی نیرویی افقی به اندازه 110 N وارد می‌شود. (الف) شتاب جسم و (ب) شتاب تیغه چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئله ۴۰

بخش ۳-۶ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت
 ۳۲. در یک مسابقه لوزسواری در المپیک، یک تیم اروپایی بیچی به شعاع 25 ft را با سرعت 6.0 mi/h می‌پساید. شتاب مسابقه دهندگاهها (الف) بر حسب ft/s^2 و (ب) بر حسب یکای g چقدر است؟
 ۳۳. اتومبیلی به وزن 2400 lb (یعنی 10.7 kN) حرکت می‌کند، می‌خواهد از پیچی 30° (یعنی $s/4\text{ m}$) حرکت می‌کند، می‌خواهد از پیچی

راست نمی‌بینید اما پستی و بلندی دارد، حرکت می‌کند. بخشی از این جاده یک ناحیه برآمدگی و یک ناحیه فرورفتگی دارد که شعاع هر دو ناحیه 250 m است (شکل ۴۳). (الف) هنگامی که اتومبیل از برآمدگی می‌گذرد، نیروی عمودی وارد بر آن از جاده نصف وزن اتومبیل است. وزن اتومبیل 16kN است. نیروی عمودی وارد بر اتومبیل هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟ (ب) حداقل سرعت اتومبیل، برای اینکه هنگام گذشتن از برآمدگی از جاده جدا نشود، چقدر می‌تواند باشد؟ (ج) اگر اتومبیل با سرعت قسمت (ب) حرکت کند، نیروی عمودی وارد بر آن، هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟

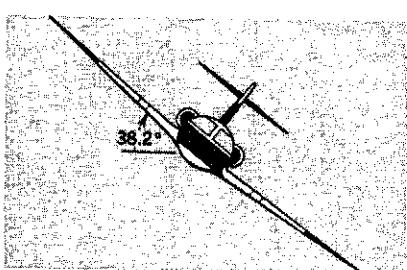


شکل ۴۳. مسئله ۴۴

۴۵. سکه‌ای کوچک روی صفحه تخت و افقی گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که گرامافون هر $38\text{ rev}/3\text{s}$ دور می‌زند. (الف) سکه به فاصله 2 cm از مرکز صفحه است و بدون لغزش همراه با آن می‌گردد. سرعت سکه چقدر است؟ (ب) (اندازه و جهت) شتاب سکه را به دست بیاورید. (ج) اگر جرم سکه 7 g را باشد، نیروی اصطکاک وارد بر آن چقدر است؟ (د) مشاهده می‌شود که اگر سکه در فاصله‌ای بیش از 12 cm از مرکز صفحه قرار بگیرد می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه چقدر است؟

۴۶. جسم کوچکی به فاصله 13 cm از مرکز صفحه گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که صفحه اگر با سرعت 33 rev/min بچرخد جسم نمی‌لغزد، اما اگر با سرعت 45 rev/min بچرخد جسم می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و صفحه درجه گستره‌ای می‌تواند باشد؟

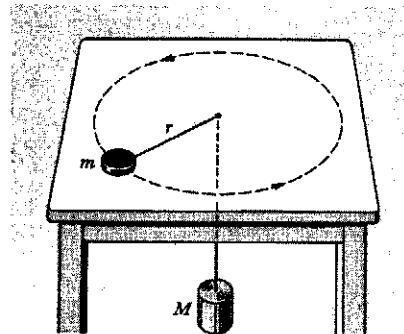
۴۷. هوایپیمایی با سرعت 482 km/h روی دایره‌ای افقی پرواز می‌کند. بالهای هوایپیما با سطح افقی زاویه 20° می‌سازند (شکل ۴۴). شعاع دایره‌ای که هوایپیما روی آن پرواز می‌کند چقدر است؟ فرض کنید نیروی مرکزگرا تماماً از نیروی بالابرندۀای تأمین می‌شود که برابرها عمود است.



شکل ۴۴. مسئله ۴۷

۴۸. یک مرغ دریایی در یک مسیر دایره‌ای افقی، بدون بال زدن،

۴۸. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون در مداری دایره‌ای شکل به دور هسته می‌گردد. اگر شعاع مدار $10^{-11}\text{ m} \times 10^{15}\text{ rev/s}$ و سامد جرخش الکترون، (الف) سرعت الکترون، (ب) شتاب الکترون، (ج) نیروی وارد بر الکترون را حساب کنید. (این نیرو ناشی از جاذبه بین هسته با بار مثبت والکترون با بار منفی است.) ۴۹. یک زنبیل پیکنیک را روی لبه بیرونی صفحه چرخانی به شعاع 4 m می‌گذارد. صفحه هر 24s یک دور می‌چرخد. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا زنبیل روی صفحه باقی بماند؟ ۵۰. قرصی به جرم m روی میز می‌گذرد، به استوانه‌ای به جرم M متصل است که از سوراخی در میز می‌گذرد، به استوانه‌ای به جرم m متصل است (شکل ۴۲). قرص با چه سرعتی باید در دایره‌ای به شعاع r حرکت کند تا استوانه ساکن بماند؟



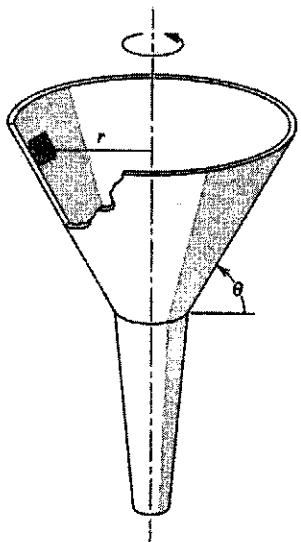
شکل ۴۲. مسئله ۵۰

۴۱. در دفترچه راهنمای اتومبیل آمده است که اگر با سرعت 48 km/h در حرکت باشید و بخواهید در کوتاهترین مسافت ممکن متوقف بشوید، از لحظه‌ای که تصمیم می‌گیرید تا لحظه‌ای که پای شما به پدال ترمز برسد، اتومبیل 10 m جلو رفته است و بعد از ترمز هم 21 m دیگر می‌پیماید تا متوقف شود. (الف) در این محاسبات، ضریب اصطکاک چقدر فرض شده است؟ (ب) حداقل شعاع مسیری که با سرعت 48 km/h می‌توان در آن پیچید، بی‌آنکه اتومبیل بلغزد، چقدر است؟ ۴۲. پیچ دایره‌ای بزرگراهی با شیب عرضی مناسب برای سرعت طراحی شده است. شعاع پیچ 21 m است. در یک روز بارانی، ترافیک با سرعت 52 km/h در این بزرگراه حرکت می‌کند. (الف) ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باشد تا اتومبیلها (با وجود این اختلاف سرعت) سر پیچ نلغزند؟ (ب) به ازای این ضریب اصطکاک، اتومبیلها حداقل با چه سرعتی می‌توانند پیچ را بدون لغزش طی کنند؟

۴۳. دانشجویی 150 lb وزن دارد. وزن ظاهری این دانشجو، در بالاترین نقطه چرخ و فلکی که با سرعت ثابت می‌چرخد، 125 lb است. (الف) وزن ظاهری او در پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) اگر سرعت چرخ و فلک دو برابر شود، وزن ظاهری دانشجو در بالاترین نقطه آن چقدر می‌شود؟

۴۴. اتومبیلی با سرعت ثابت روی جاده‌ای مستقیم که به جنبه $Ramin.samad@yahoo.com$

ثابت τ دور بر ثانیه حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۴۶). زاویه دیواره قیف با سطح افقی θ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین مکعب و قیف μ ، و فاصله مرکز مکعب از محور دوران r است. (الف) بیشترین و (ب) کمترین مقدار τ برای اینکه مکعب نسبت به قیف حرکت نکند چقدر است؟



شکل ۴۶. مسئله ۵۳

۵۴. چون زمین می‌چرخد، نخ شاقول دقیقاً در راستای نیروی گرانش زمین قرار نمی‌گیرد و ممکن است کمی از این راستا منحرف شود. (الف) نشان بدید که زاویه انحراف θ بر حسب رادیان، در عرض جغرافیایی L برابر است با

$$\theta = \left(\frac{2\pi^2 R}{gT^2} \right) \sin 2L$$

که در آن R شعاع زمین و T دوره تناوب چرخش زمین است. (ب) زاویه انحراف در کدام عرض جغرافیایی بیشینه است؟ (ج) زاویه انحراف در قطبها چقدر است؟ در استوا چقدر است؟

بخش ۵-۵ نیروهای وابسته به زمان: روش تحلیلی

۵۵. مکان ذره‌ای به جرم 1.7 kg ، که بر خط راست حرکت می‌کند، از رابطه

$$x = 17t^3 + 179t^2 - 2^{\circ} 179t^{\circ} - 2^{\circ} 179$$

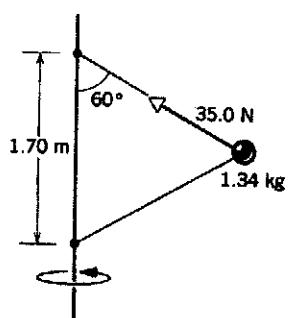
به دست می‌آید که در آن x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) سرعت، (ب) شتاب، و (ج) نیروی وارد بر ذره در زمان $t = 1.8\text{ s}$ را پیدا کنید.

۱. نگاه کنید به

“The Amateur Scientist,” Jearl Walker, *Scientific American*, March 1985, p. 122.

پرواز می‌کند. زاویه بالهای او با سطح افقی حدود 25° است. طول می‌کشد تا این پرنده یک دور کامل بزند. (الف) سرعت این پرواز چقدر است؟ (ب) شعاع دایرة مسیر چقدر است؟^۱

۴۹. ریسمانی می‌تواند کششی تا حد 9 lb را تحمل کند و پاره نشود. کودکی سنگی به وزن 8.2 lb را به یک سر آن می‌بندد، سر دیگر آن را در دست می‌گیرد، و سنگ را در صفحه قائم در دایره‌ای به شعاع 2.9 ft می‌گرداند. کودک سرعت سنگ را به ترتیب زیاد می‌کند تا اینکه ریسمان پاره شود. (الف) هنگام پاره شدن ریسمان، سنگ در کجا می‌رسد. است؟ (ب) سرعت سنگ هنگام پاره شدن ریسمان، چقدر بوده است؟ (ج) یک هواپیمای مدل به جرم 75 kg به یک سر ریسمان به طول 33 m بسته شده است و در دایره‌ای افقی در ارتفاع 18 m پرواز می‌کند. سر دیگر ریسمان به زمین متصل است. هواپیما در دقیقه 4 s دور می‌زند. نیروی بالابرندۀای بر بالهای هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟ (الف) شتاب هواپیما چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) نیروی بالابرندۀای که بر بالهای هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟ (الف) فرض کنید در صورتی که زمین نمی‌چرخید، کیلوگرم استاندارد در سطح دریا در خط استوا دقیقاً $N = 9.80$ وزن می‌داشت. حالا اگر چرخش زمین را در نظر بگیرید، این جسم طی یک شباهه روز محیط دایره‌ای به شعاع 6370 km (شعاع زمین) را طی می‌کند. (الف) نیروی مرکزگرای لازم برای اینکه کیلوگرم استاندارد در این مسیر دایره‌ای حرکت کند چقدر است؟ (ب) نیروی که کیلوگرم استاندارد، در استوا، بر نیروی سنج فنری وارد می‌کند (وزن ظاهری جسم) چقدر است؟ (الف) تویی به جرم 34 kg را با دو ریسمان “بی جرم”， هر یک به طول 70 m را، به میله‌ای صلب و قائم بسته شده است. ریسمانها به دو نقطه میله، به فاصله 70 m را از یکدیگر بسته شده‌اند و سیستم حول میله می‌چرخد؛ هر دو ریسمان کاملاً کشیده‌اند و با میله مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌سازند (شکل ۴۵). کشش ریسمان بالایی $N = 35.0$ است. (الف) کشش ریسمان پایینی را پیدا کنید. (ب) نیروی خالص وارد بر توب را، در وضعیتی که در شکل ۴۵ نشان داده شده است، پیدا کنید. (ج) سرعت گوله چقدر است؟



شکل ۴۵. مسئله ۵۲

۵۳. مکعب بسیار کوچکی به جرم m در قیفی قرار دارد که با آهنگ

مقاومت اصطکاکی به شکل $D = bv^2$ هم بر بالون وارد می‌کند؛
 سرعت بالون و b یک کمیت ثابت است. سرنشینان باللون 26.5 kg بار اضافی از بالون بیرون می‌ریزند. پس از این کار، باللون نهایتاً با چه سرعت ثابتی پایین می‌آید؟

۶۴. مسئله ۶۳ را تکرار کنید، اما نیروی اصطکاک هوا را $D = bv$ بگیرید. توجه کنید که b را باید دوباره برای این مورد محاسبه کرد.

۶۵. لنجی به جرم m با سرعت v در حرکت است که موتورهایش خاموش می‌شوند. نیروی اصطکاک آب به شکل $D = bv$ است. (الف) عبارتی برای زمانی که طول می‌کشد تا سرعت لنج به v_0 کاهش پیدا کند به دست بیاورید. (ب) مقدار عددی این زمان را برای لنجی به جرم 970 kg که از سرعت اولیه 32 km/h به سرعت 83 km/h می‌رسد حساب کنید. مقدار b برابر با 68 N.s/m است.

۶۶. جسم افتادن مثلث Δ را در نظر بگیرید. (الف) شتاب جسم را به صورت تابعی از زمان به دست بیاورید. این شتاب در t های کوچک، و در t های بزرگ چگونه است؟ (ب) مسافت سقوط جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۶۷. با فرض اینکه نیروی اصطکاک هوا به شکل $D = bv$ است، (الف) نشان بدید که مسافت x_0 ، یعنی مسافتی که جسم از حالت سکون تا رسیدن به 95% سرعت حدش می‌پیماید،

$$x_0 = v_0 \left(\ln 20 - \frac{19}{20} \right)$$

است، که در آن v_T سرعت حد است. (راهنمایی: نتیجه‌ای را که در مسئله ۶۶ برای $y(t)$ به دست آوردید به کار ببرید). (ب) با استفاده از سرعت حد 42 m/s برای توب بیسبال، از جدول ۲، مسافت 95% را به دست بیاورید. چرا نتیجه شما با مقداری که در جدول ۲ آمده است نمی‌خواند؟

پروژه‌های کامپیوتری

۶۸. در بخش ۶۶ روشنی عددی برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتن و به دست آوردن جدولی از مکان و سرعت جسم در زمانهای متواتی ارائه شد. بازه شامل زمان اولیه t_0 تا زمان پایانی t_f را به N بازه کوچک Δt تقسیم کنید. اگر x_0, v_0 و F_b به ترتیب، مختصه، سرعت، و نیرو در ابتدای بازه باشند، F_b, v_b, x_b به ترتیب، مختصه، سرعت، و نیرو در t به ترتیب، براوردی از مختصه و سرعت در انتهای بازه‌اند. این مقادیر، به عنوان مختصه و سرعت در ابتدای بازه بعدی به کار نمی‌روند. هرچه Δt کوچکتر باشد، براورد بهتر است، اما Δt را خیلی هم نمی‌شود کوچک گرفت زیرا اگر Δt خیلی کوچک باشد، طی محاسبه رقمهای با معنی از دست می‌روند. نیرو می‌تواند تابع مکان، سرعت و زمان باشد. شکل صریح این تابع را شرایط فیزیکی تعیین می‌کند؛ با داشتن این شکل می‌توان F_b را، با استفاده از مقادیر x_0, v_0 و F_b به دست آورد. یک برنامه کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که این انتگرال‌گیری را انجام بدهد. ورودی برنامه $x_0, v_0, F_b, \Delta t$ و N است. به عنوان مثال، حالت زیر را در نظر بگیرید.

۶۹. ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی خالصی به شکل

$$\mathbf{F}(t) = F_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) \hat{\mathbf{i}}$$

است؛ یعنی، $\mathbf{F}(t)$ در $t = 0$ برابر با F_0 است و به طور خطی با زمان کم می‌شود تا در زمان T به صفر می‌رسد. ذره در زمان $t = 0$ با سرعت v_0 از مبدأ $x = 0$ می‌گذرد. نشان بدید که در زمان $t = T$ ، که در آن $\mathbf{F}(t)$ صفر می‌شود، سرعت و مسافت پیموده شده عبارت‌اند از

$$v(T) = v_0 + \frac{1}{2} a_0 T$$

$$x(T) = v_0 T + \frac{1}{3} a_0 T^2$$

که در آن، $a_0 = F_0/m$ شتاب اولیه است. این نتایج را با معادلات ۱۵ و ۱۹ فصل ۲ مقایسه کنید.

۷۰. ذره‌ای به جرم m در $t = 0$ ساکن است. از زمان $t = 0$ ، نیرویی به شکل $F = F_0 e^{-t/T}$ در جهت مثبت x بر آن وارد می‌شود؛ و T ثابت‌اند. در $t = T$ نیرو حذف می‌شود. در لحظه‌ای که نیرو حذف می‌شود (الف) سرعت ذره چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

بخش ۶-۷ نیروی مقاومت شاره‌ها و حرکت پرتابی

۷۱. وزنه کوچکی به جرم $g = 15.0 \text{ g}$ در عمق 34 km در اقیانوس است و با سرعت حد ثابت 25 m/s سقوط می‌کند. نیرویی که آب بر این وزنه وارد می‌کند چقدر است؟

۷۲. جسمی را از حالت سکون رها می‌کنیم. با فرض اینکه اصطکاک شاره به صورت $D = bv^2$ باشد، سرعت حد جسم را به دست بیاورید.

۷۳. چه مدت طول می‌کشد تا جسم مثال ۵ به نصف سرعت حد خودش برسد؟

۷۴. با استفاده از جدول ۲، مقدار b را برای قطره باران حساب کنید؛ فرض کنید که اصطکاک هوا $D = bv$ است. چگالی آب 10 g/cm^3 را است.

۷۵. لوکوموتیوی به قطاری (روی ریلهای افقی) که 23 واگن دارد شتاب می‌دهد. جرم هر واگن 48 t تن متريک، و نیروی مقاومت هوا وارد بر هر واگن $f = 243 \text{ N}$ است که در آن v (سرعت) بر حسب m/s و f بر حسب N است. در لحظه‌ای که قطار 34 km/h سرعت دارد، شتاب آن 1.82 m/s^2 است. (الف) کشش در اتصال بین واگن اول و لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) فرض کنید که این کشش بیشترین نیرویی است که لوکوموتیو می‌تواند به قطار وارد کند. در این صورت، تندترین شبیه که در آن لوکوموتیو می‌تواند قطار را با سرعت 34.5 km/h بکشد کدام است؟ (۱ تن متريک $= 1000 \text{ kg}$)

۷۶. بالونی با سرعت ثابت 1.88 m/s در هوای آرام پایین می‌آید. وزن کل بالون با محتویاتش 10 kg است. نیروی ارشمیدس ثابت به اندازه 33 kN بر بالون وارد می‌شود. علاوه بر این، هوا یک نیرو

کنید که مسیر نسبت به محور قائمی که از نقطه اوج می‌گذرد متقارن نیست. اگر مقاومت هوا نبود، مسیر متقارن می‌شود. با استفاده از نمودار یا جدول مقادیر، این کمیتها را تخمین بزنید: (ب) زمانی که پرتابه به نقطه اوج مسیر خود می‌رسد و مختصات نقطه اوج؛ (ج) زمانی که پرتابه به زمین می‌خورد، بر پرتابه، و سرعت آن درست پیش از برخورد. (د) این کمیتها را با مقادیری که در غیاب مقاومت هوا بدست می‌آمد مقایسه کنید. مقاومت هوا چه تغییری در ارتفاع اوج می‌دهد؟ در بردا

چطربه در سرعت پیش از برخورد ظروری؟

۷۱. مقاومت هوا می‌تواند تأثیر چشمگیری در زاویه پرتابی که به بردا بیشینه می‌انجامد داشته باشد. برای دیدن این تأثیر، پرتابه‌ای به جرم 0.5 kg را در نظر بگیرید که با سرعت 15 m/s بر فراز سطحی افقی پرتاب می‌شود، وفرض کنید که نیروی اصطکاک $F_D = -3^{\circ}\text{ rad}$ است، که در آن F_D بر حسب نیوتون و v بر حسب m/s است. برای هر یک از زوایای پرتاب $25^{\circ}, 30^{\circ}, 35^{\circ}$ ، و 40° ، به طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید: اندازه بازه‌های انتگرال‌گیری را $t = 18^{\circ}\text{ rad}$ بگیرید و نتایج را هر 0.5 s ، از $t = 0$ (زمان پرتاب) تا $t = 25\text{ s}$ نمایش بدهید. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. با استفاده از این نتایج بردا را تخمین بزنید. بردا کدام‌یک از این زوایا بیشینه است؟

۷۲. پرتابه‌ای که تحت اثر مقاومت هوا قرار دارد به سرعت حدی اش می‌رسد. فرض کنید که نیروی خالص وارد بر پرتابه $-mgj - bv$ باشد، که در آن b ثابت مقاومت شاره است و جهت مثبت محور y به طرف بالاست. در سرعت حد v_T ، نیروی خالص صفر می‌شود. بنابراین، $j = -(mg/b)$. توجه کنید که این سرعت مؤلفه افقی ندارد. پرتابه در نهایت مستقیماً به طرف پایین سقوط می‌کند.

می‌توانید با استفاده از یک برنامه کامپیوتری یا الگوریتم، "بینید" که یک پرتابه چگونه به سرعت حد می‌گراید. پرتابه‌ای به جرم 0.5 kg را در نظر بگیرید که، با سرعت اولیه 15 m/s با زاویه 40° بالای سطح افقی، پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک شاره را 0.5° rad بگیرید. به طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید و نتایج را هر 0.5 s ، از $t = 0$ (زمان پرتاب) تا زمانی که مؤلفه y سرعت به 90° در صد v_T می‌رسد، نمایش بدهید. (ج) $x(t)$ و $y(t)$ را در یک نمودار نمایش بدهید. توجه کنید که با نزدیک شدن y به v_T به x می‌گراید.

۷۳. اگر اثر مقاومت هوا را بر پرتابه در نظر بگیریم، مختصات آن با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$x(t) = (v_{x_0}/b)(1 - e^{-bt})$$

$$y(t) = (1/b^2)(g + bv_{y_0})t - (g/b)t$$

جهت مثبت y را به طرف بالا و مبدأ مختصات را در نقطه پرتاب گرفته‌ایم. ضریب مقاومت b گرامی شدت برهم‌کنش هوا و پرتابه است. از

شخصی صندوقی به جرم 95 kg را روی سطح ناهمواری هل می‌دهد. صندوق از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیرویی که شخص بر آن وارد می‌کند $F = 200\text{ N}$ است، که در آن $F = 200\text{ N}$ است، که در آن $F = 200\text{ N}$ است. نیرو به شکل نمایی کم می‌شود زیرا شخص خسته می‌شود. طی حرکت، یک نیروی اصطکاک ثابت N با حرکت صندوقی مخالفت می‌کند. (الف) صندوق چه مدت پس از شروع حرکت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید؟ جوابها را با دقت در رقم بامعنی بدست بیاورید.

برای انتگرال‌گیری، زمان بین $t = 0$ و $t = 15\text{ s}$ را به 150° rad بازه، هر یک به اندازه 18° rad تقسیم کنید. هدف این نیست که مکان و سرعت را در پایان هر بازه نمایش بدهید. در اجرای اول، نتایج را در پایان هر 10° بازه نمایش بدهید. در اجرای بعدی، قاعده‌تاً می‌خواهید که نتایج را در گستره‌ای کوچکتر، در پایان بازه‌های کوچکتر نمایش بدهید. پس از بدست آوردن جدول نتایج، به دنبال دو نقطه مجاور بگردید که $t = 7$ بین آنهاست. اگر مقدار x این دو نقطه تا دو رقم با معنی یکسان باشد، محاسبه تمام است. در غیر این صورت باید بازه‌هایی را که نتایج را در انتهای آنها نشان می‌دهید کوچکتر کنید، یا احتملاً بازه‌های انتگرال‌گیری را کوچکتر بگیرید، و محاسبه را تکرار کنید.

۶۹. توبی به جرم 150 g با سرعت اولیه 25 m/s از لبه صخره‌ای مستقیماً به بالا پرتاب می‌شود. در بازگشت، توب از کنار صخره می‌گذرد و 30° m پایین‌تر به زمین برخورد. علاوه بر نیروی گرانش، نیروی مقاومت هوا $F_D = -150^{\circ}\text{ rad}$ هم بر توب وارد می‌شود؛ بر حسب نیوتون v و m/s است. (الف) مدت حرکت این توب چقدر است؟ (ب) سرعت توب درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟ (ج) نسبت این سرعت به سرعت حد چقدر است؟

یک برترامه کامپیوتری یا الگوریتم برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون به کار ببرید. (راهنمایی‌های لازم را از بخش ۶-۶ و مسئله قبل بگیرید). طول بازه انتگرال‌گیری را 18° rad بگیرید. مختصه و سرعت را، در فاصله $t = 0$ تا $t = 12\text{ s}$ ، هر 1° rad نمایش بدهید. با این مقادیر باید جوابهایی با دقت در رقم با معنی بدست بیاورید.

۷۰. پرتابه‌ای به جرم 2 kg از روی زمینی افقی پرتاب می‌شود. سرعت اولیه پرتابه 150 m/s و زاویه پرتاب 40° بالای سطح افقی است. علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوا $F_D = -3^{\circ}\text{ rad}$ نیز بر پرتابه وارد می‌شود؛ F_D بر حسب نیوتون v و m/s است. به طور عددی، بین $t = 0$ (زمان پرتاب) و $t = 20\text{ s}$ از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید. اندازه بازه‌های انتگرال‌گیری را 18° rad انتخاب کنید، اما نتایج را هر 0.5 s نمایش بدهید. هم مختصات x و y و هم دو مؤلفه سرعت را باید در نظر بگیرید. معادلات $a_x = -(b/m)v_x$ و $a_y = -(b/m)v_y$ را به کار ببرید؛ b ثابت نیروی اصطکاک y هواست. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. (الف) مسیر y بر حسب x را از نقطه پرتاب تا نقطه برخورد به زمین رسم کنید. توجه

مشابه در حالت بدون مقاومت هواست، نقطه اوج کوتاهتر و به نقطه پرتاب، نزدیکتر است، و سرعت پرتابه هم (از حالتی که اصطکاک هوا نباشد) کمتر است. (ب) برای تعیین اینکه آیا این روند ادامه می‌یابد یا نه، محاسبه را با 20 s^{-1} ر $^{\circ}$ = b تکرار کنید. (ج) مقاومت هوا چگونه بربرد پرتابه اثر می‌گذارد؟ فرض کنید که 10 s^{-1} ر $^{\circ}$ = b و، با استفاده از برنامه، برد را پیدا کنید (مقدار x را به ازای y = 0 به دست بیاورید). این کار را برای 20 s^{-1} ر $^{\circ}$ = b هم تکرار کنید. (د) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد به زمین، در اثر مقاومت هوا چه تغییری می‌کند؟ برنامه را با 10 s^{-1} ر $^{\circ}$ = b، و سپس با 20 s^{-1} ر $^{\circ}$ = b اجرا کنید و سرعت در لحظه پیش از برخورد را به دست بیاورید. به یاد داشته باشید که در غیاب اصطکاک هوا، اندازه هر یک از مؤلفه‌های سرعت، در لحظه درست پیش از برخورد پرتابه به زمین و لحظه پرتاب، یکسان است. توجه کنید که از معادلات بالا چنین نتیجه می‌شود که $-bv_x = a_x$ و $-bv_y = a_y$ است. با استفاده از این روابط، توضیح بدهید که چرا در نقطه اوج $-g = a_y$ است، چرا a_x هیچگاه صفر نمی‌شود، و چرا اندازه a_y ، درست پیش از برخورد به زمین با افزایش b کم می‌شود؟

عبارت‌های بالا مشتق بگیرید و نشان بدهید که مؤلفه‌های سرعت به شکل $v_x = v_0 e^{-bt}$ و $v_y = (1/b)(g + bv_0)e^{-bt} - g/b$ واند، و مؤلفه‌های شتاب به شکل $a_x = -bv_0 e^{-bt}$ و $a_y = -(g + bv_0)e^{-bt}$. یک برنامه کامپیوتی بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب را در پایان هر بازه زمانی به اندازه Δt ، از زمان t_1 تا t_2 ، محاسبه کند.

اکنون این برنامه را برای برسی اثرهای بروتایه‌ای که با سرعت اولیه 50 m/s با زاویه پرتاب 25° بالای سطح افقی، بر فراز زمین افقی پرتاب می‌شود به کار ببرید. (الف) فرض کنید 10 s^{-1} ر $^{\circ}$ = b است و با استفاده از برنامه، مختصات نقطه اوج، و سرعت و شتاب پرتابه در آن نقطه را پیدا کنید. برای شروع، با استفاده از برنامه، مختصات، سرعت، و شتاب را هر 1 s ، از 0 تا 4 s به دست بیاورید. برای محاسبه جوابهایی با دقیقیت دو رقم بامعنی ممکن است لازم باشد بازه‌ها را کوچکتر کنید و برنامه را دوباره اجرا کنید. جواب را که به دست آوردید توجه کنید که زمان رسیدن پرتابه به نقطه اوج، کمتر از زمان



کار و انرژی

یکی از مسائل اساسی دینامیک، پیدا کردن چگونگی حرکت ذره‌ای است که نیروهای وارد بر آن را می‌شناسیم. منظور از "ذره چگونه حرکت می‌کند" این است که مکان آن طی زمان چگونه تغییر می‌کند. در دو فصل گذشته، مسئله را در مورد خاص نیروی ثابت حل کردیم؛ در مورد نیروی ثابت می‌توان از فرمولهای حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد و $r(t)$ را به دست آورد، و به این ترتیب مسئله به طور کامل حل می‌شود.

اما اگر نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره ثابت نباشد، مسئله دشوارتر است. برای نیروهای وابسته به زمان و سرعت، می‌شود این مسئله را با روش‌های انتگرال‌گیری بخشهای ۵-۶ حل کرد. در این فصل، نیروهای وابسته به مکان ذره را متناسب نیروی جاذبه‌ای که زمین بر اجسام تزدیک به خود وارد می‌کند، یا نیرویی که فنر کشیده شده به جسم متصل به خود وارد می‌کند – تحلیل می‌کنیم. از این تحلیل می‌رسیم به مفهوم کار و مفهوم انرژی جنبشی، و به طرح قضیه کار-انرژی، که موضوع اصلی این فصل است. در فصل ۸ انرژی را از دیدگاه وسیعتری بررسی می‌کنیم، و به قانون پایستگی انرژی می‌رسیم که نقش عده‌ای در پیشرفت فیزیک داشته است.

جهت جایه‌جایی s زاویه ϕ می‌سازد، بر ذره وارد می‌شود. کار W که نیروی F در این جایه‌جایی انجام می‌دهد، طبق تعریف ما، برایراست با

$$W = (F \cos \phi)s \quad (2)$$

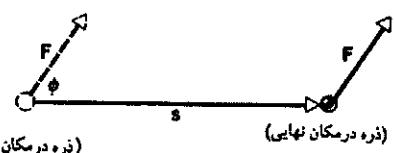
البته ممکن است نیروهای دیگری هم بر ذره اثر کنند. معادله ۲ فقط کاری را تعیین می‌کند که نیروی مشخص F انجام می‌دهد. کاری را که نیروهای دیگر بر ذره انجام می‌دهند باید جداگانه حساب کرد. کل کاری که انجام می‌شود برابر است با مجموع کارهایی که همه نیروها انجام می‌دهند. (به طریق دیگر، چنان که در بخش ۴-۷ خواهیم دید، می‌شود اول نیروی خالص وارد بر ذره را پیدا کرد و سپس کاری را که این تک نیروی خالص انجام می‌دهد حساب کرد. این روش با روش جمع کردن کارهای تک‌تک نیروها هم‌ارز است و هر دو روش به یک نتیجه منجر می‌شوند.)

اگر ϕ صفر باشد، کاری که F انجام می‌دهد همان Fs است، که در معادله ۱ هم آمده است. بنابراین، اگر نیرویی افقی جسمی را در راستای افقی (در جهت نیرو) جایه‌جا کند، یا اگر نیرویی قائم جسمی را در راستای قائم (در جهت نیرو) جایه‌جا کند، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با اندازه نیرو ضربدر مسافت پیموده شده. اگر ϕ برابر با 90° باشد، نیرو مؤلفه‌ای در جهت حرکت ندارد، و کاری هم

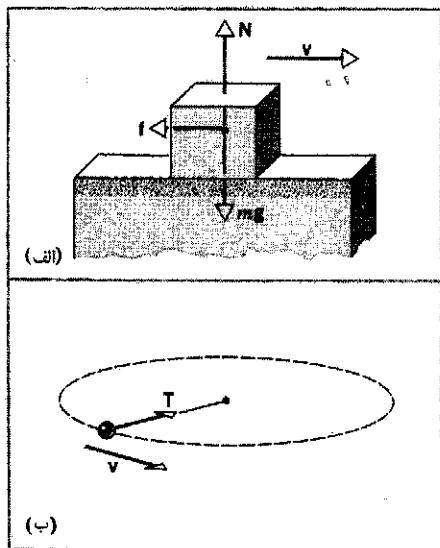
۱- کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد
ذره‌ای را در نظر بگیرید که نیروی ثابت F بر آن وارد می‌شود، و در ساده‌ترین حالت، فرض کنید که حرکت در خط راستی در جهت نیرو انجام می‌شود. در چنین حالتی، کار W که نیرو روی ذره انجام می‌دهد طبق تعریف عبارت است از حاصل ضرب اندازه نیرو و مسافت s که نیرو در طی آن اثر می‌کند. این تعریف را به صورت زیر می‌نویسیم

$$W = Fs \quad (1)$$

یک مورد کلی‌تر، نیروی ثابت وارد بر ذره ممکن است در جهت حرکت ذره نباشد. در این صورت، کاری را که نیرو روی ذره انجام می‌دهد به شکل حاصل ضرب مؤلفه نیرو در جهت حرکت، و اندازه جایه‌جایی ذره تعریف می‌کنیم (در شکل ۱). نیروی ثابت F که با

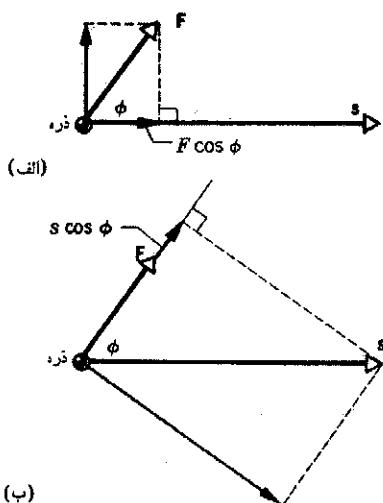


شکل ۱. نیروی F بر ذره‌ای وارد می‌شود که جایه‌جایی آن s است. مؤلفه‌ای از F که کار انجام می‌دهد، $F \cos \phi$ است. کاری که F انجام می‌دهد W است، که می‌توان آن را به صورت $F \cdot s$ نوشت. $F \cos \phi$



شکل ۲. هر نیرویی که بر جسمی اثر کند الزاماً روی آن کار انجام نمی‌دهد، حتی اگر جسم در حال حرکت باشد. در (الف)، وزن و نیروی عمودی کاری انجام نمی‌دهند، زیرا بر جایه‌جایی عمودند، ولی نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد. در (ب) جسمی داریم که به ریسمانی بسته شده است و پر دایره‌ای افقی می‌گردد. کشنش T ریسمان کاری روی جسم انجام نمی‌دهد، زیرا مؤلفه‌ای در جهت جایه‌جایی ندارد.

که در آن نقطه علامت حاصل ضرب اسکالار (یا نقطه‌ای) است. کار می‌تواند مثبت یا منفی باشد. نیرو اگر مؤلفه‌ای در خلاف جهت حرکت داشته باشد، کاری که انجام می‌دهد منفی است. این حالت متناظر است با زاویه منفرجه بین بردار نیرو و بردار جایه‌جایی. مثلاً اگر جسمی را در دست بگیرید و تا زمین پایین بیاورید، کاری که نیروی رو به بالای دست شما روی جسم انجام می‌دهد منفی است. در این مورد ϕ برابر با 180° است، زیرا F به طرف بالا و s به طرف



شکل ۴. (الف) کار W به شکل $(s)(F \cos \phi)$. (ب) کار W به شکل $(F)(s \cos \phi)$.



شکل ۲. وزنه بردار نیروی بزرگی بروزنه وارد می‌کند. اما در لحظه‌هایی که وزنه را بالای سرش نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد، زیرا وزنه ساکن است؛ نیرو هست اما جایه‌جایی نیست. البته این وزنه بردار قبل از رساندن وزنه‌ها از زمین به این ارتفاع، کار انجام داده است.

روی ذره انجام نمی‌دهد. مثلاً وزنه بردار (شکل ۲) وقتی که وزنه را از زمین بلند می‌کند کار انجام می‌دهد، ولی در حالتی که وزنه را نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد (چون جایه‌جایی صفر است). اگر در حالتی که وزنه بالای سرش است راه هم برود باز (بنایه تعریفی که برای کار کردیم) کاری روی وزنه انجام نمی‌دهد زیرا (با فرض آنکه جایه‌جایی در راستای قائم وجود نداشته باشد) نیروی قائمی که او وارد می‌کند بر جایه‌جایی افقی عمود است. شکل ۳ نمونه‌های دیگری از نیروهایی را نشان می‌دهد که کاری انجام نمی‌دهند.

توجه کنید که معادله ۲ را، هم به شکل $(F \cos \phi)$ و هم به شکل $(s \cos \phi)$ می‌شود نوشت. به عبارت دیگر کار را به دو طریق می‌توان حساب کرد، که هردو طریق به یک نتیجه می‌رسند: با اندازه جایه‌جایی را در مؤلفه نیرو در جهت جایه‌جایی ضرب می‌کنیم، یا اندازه نیرو را در مؤلفه جایه‌جایی در جهت نیرو ضرب می‌کنیم. هر دو روش یادآور یکی از اجزای مهم در تعریف کارند: باید s مؤلفه‌ای در جهت F داشته باشد، و باید F مؤلفه‌ای در جهت s داشته باشد (تا کار مخالف صفر شود) (شکل ۴).

کار یک کمیت اسکالار است، اگرچه دو کمیتی که در تعریف آن وارد می‌شوند، نیرو و جایه‌جایی، بردارند. در بخش ۵-۳ گفتیم که حاصل ضرب اسکالار دو بردار، بنایه تعریف، کمیتی است اسکالار که برابر است با حاصل ضرب اندازه یکی از بردارها در مؤلفه بردار دیگر روی اولی. معادله ۲ نشان می‌دهد که کار هم دقیقاً به همین ترتیب محاسبه می‌شود، پس باید آن را به شکل حاصل ضرب اسکالار تعریف کرد. از مقایسه معادله ۲ با معادله ۱۳ فصل ۳، می‌بینیم که کار را می‌شود چنین بیان کرد

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (3)$$

پایین است. (همزمان، نیروی گرانشی روی جسم، که به طرف پایین حرکت می‌کند، کار مثبت انجام می‌دهد).

نیروی F "ناوردا" است، یعنی هم جهت و هم اندازه آن مستقل از چارچوب لختی است که انتخاب می‌شود، اما s ناوردا نیست. ناظرهای گوناگون، بسته به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنند، می‌توانند عملآ هر اندازه و جهتی برای s بدست بیاورند. بنابراین، ناظرهای چارچوبهای لخت متناوت، که همگی نیروی وارد بر جسم را یکسان می‌سنجند، مقادیر متفاوتی برای کاری که آن نیرو بر جسم انجام می‌دهد تعیین می‌کنند. کار یک نیروی معین ممکن است برای ناظری مثبت، برای ناظری منفی، و برای ناظری دیگر حتی صفر باشد. به این نکته در بخش ۷-۶ خواهیم پرداخت.

علوم شده است که کار ما به شکلی که ما آن را تعریف کردیم (معادله ۳)، مفهوم بسیار مفیدی در فیزیک است. تعریف خاص ما از "کار" ربطی به کاربرد رایج این واژه ندارد. کار فیزیکی را نباید با کار در مفهوم روزمره‌اش اشتباہ کرد. شخصی که وزنه سنگینی را در هوا به حالت سکون نگه داشته است شاید از لحاظ فیزیولوژیکی مشغول انجام کار سختی باشد، اما از لحاظ فیزیکی هیچ کاری انجام نمی‌دهد. دلیلش این است که وزنه، که نیرو به آن وارد می‌شود، جایه‌جایی ندارد.

از طرف دیگر، اگر وزنه بردار را به شکل سیستمی از ذرات در نظر بگیریم (که در فصل ۹ به آن خواهیم پرداخت)، خواهیم دید که از دیدگاه میکروسکوپیک واقعاً کار انجام می‌شود. ماهیجه یک تکیه‌گاه صلب نیست و نمی‌تواند بار را به شکل ایستا تحمل کند. تک‌تک تارهای ماهیجه مرتباً منقبض و بعد آسوده می‌شوند، و اگر وضعیت را به این شکل بررسی کنیم، می‌بینیم که در هر اتفاقی کار انجام می‌شود. به همین علت است که وزنه بردار در اثر نگهداشتن وزنه، خسته می‌شود. در این فصل، این "کار داخلی" را در نظر نمی‌گیریم. واژه کار را تنها به معنی دقیق معادله ۳ به کار می‌بریم؛ در این معنی، اگر ذره‌ای که نیرو بر آن وارد می‌شود جایه‌جا نشود، کار واقعاً صفر است.

یکای کار از کاری که نیروی واحد بر جسمی انجام می‌دهد و آن را به اندازه فاصله واحد (در جهت نیرو) جایه‌جا می‌کند، بدست می‌آید. یکای SI کار، نیوتون-متر است، که آن را زول (با علامت اختصاری J) می‌نامند. در سیستم بریتانیایی، یکای کار فوت-پاوند است. در

سیستمهای cgs، یکای کار دین-سانتیمتر است، که آن را ارگ (erg) می‌نامند. با استفاده از روابط بین نیوتون، دین، پاوند، و بین متر، سانتیمتر، و فوت، نتیجه می‌شود که $1\text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 7376 \text{ ft-lb}$.

یکای دیگری برای کار، که در مورد ذرات اتمی و زیراتومی مناسب است، الکترون-ولت (با علامت اختصاری eV) است:

$$1\text{ eV} = 10^{-19} \text{ J}$$

کار لازم برای کندن یکی از الکترون‌های خارجی اتم از آن، نوعاً در حدود 1 eV است. کار لازم برای کندن یک پروتون یا نوترون از هسته، نوعاً در حدود 10^6 MeV است.

مثال ۱. می‌خواهیم جسمی به جرم $m = 11.7\text{ kg}$ را به مسافت $s = 4.65\text{ m}$ روی سطح شیدار به اندازه $h = 2.86\text{ m}$ زیاد شود (شکل ۱-الف). فرض کنید سطح بدون اصطکاک است. فرض اگر نیرویی موازی با سطح شیدار بر جسم اعمال کنید و آن را با سرعت ثابت بالا ببرید چقدر کار انجام می‌دهید؟

حل: شکل ۱-ب نمودار جسم-آزاد جسم را نشان می‌دهد. ابتدا باید P را به دست بیاوریم، یعنی اندازه نیرویی که جسم را به طرف بالای سطح شیدار هل می‌دهد. چون حرکت شتابدار نیست (فرض بر این بود که سرعت ثابت است)، نیروی خالص موازی با سطح شیدار باید صفر باشد. محورهای را موازی با سطح شیدار و جهت مثبت آن را به طرف بالای سطح می‌گیریم. از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$P - mg \sin \theta = 0 \quad \text{مولفه } x:$$

یا

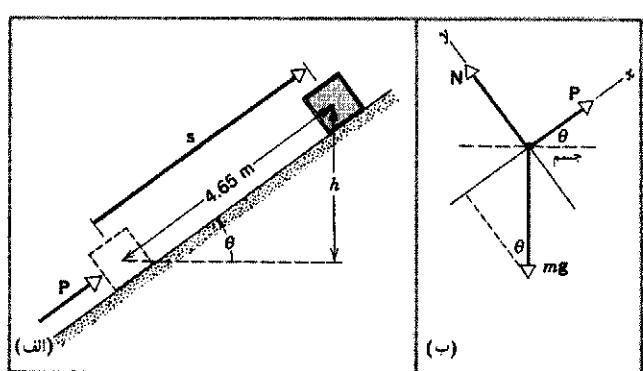
$$P = mg \sin \theta = (11.7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) \left(\frac{2.86\text{ m}}{4.65\text{ m}} \right) = 70.5\text{ N}$$

به این ترتیب، کاری که P انجام می‌دهد، از معادله ۳ به ازای $\phi = 0^\circ$ ، برابر است با

$$W = P \cdot s = Ps \cos 0^\circ = Ps = (70.5\text{ N})(4.65\text{ m}) = 328\text{ J}$$

توجه کنید که زاویه $\phi = 0^\circ$ که در این عبارت به کار رفته، زاویه بین نیروی اعمال شده و جایه‌جایی جسم است، که هر دو با سطح شیدار موازی‌اند. زاویه ϕ را نباید با زاویه θ سطح شیدار اشتباہ کرد.

اگر می‌خواستیم همین جسم را بدون استفاده از سطح شیدار، با سرعت ثابت، تا همین ارتفاع بالا ببریم، کاری که انجام می‌دادیم برابر



شکل ۱. (الف) نیروی P جسم را به اندازه s روی سطح شیدار جایه‌جا می‌کند. (ب) نمودار جسم-آزاد جسم.

این سه معادله سه کمیت مجهول دارند: P , f , و N . برای تعیین P , f و N را از این معادلات حذف می‌کنیم و از معادله باقی مانده P را به دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود (باید خودتان تحقیق کنید)

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos \phi + \mu_k \sin \phi}$$

به ازای 20° رُو $\mu_k = 0.55N$, $mg = (56kg)(9.8m/s^2) = 550N$, و $\phi = 45^\circ$, خواهیم داشت

$$P = \frac{(550N)}{\cos 45^\circ + (\sin 20^\circ)} = 13N$$

پس کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد عبارت است از

$$W = Ps \cos \phi = (13N)(12m)(\cos 45^\circ) = 110J$$

مؤلفه عمودی P کاری روی سورتمه انجام نمی‌دهد. اما توجه کنید که این مؤلفه نیروی عمودی بین سورتمه و زمین را کم می‌کند ($N = mg - P \sin \phi$) و به این ترتیب، اندازه نیروی اصطکاک ($f = \mu_k N$) را کاهش می‌دهد.

اگر کودک نیروی P را به طور افقی اعمال کند (نه با زاویه 45°), کاری که روی سورتمه انجام می‌شود بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا تغییری نمی‌کند؟ آیا نیروهای دیگر وارد بر سورتمه، روی آن کاری انجام می‌دهند؟

۲-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک بعدی
اکنون کار نیرویی را که ثابت نیست بررسی می‌کنیم. فرض کنید نیرو فقط در یک جهت است که آن را جهت x می‌گیریم، و اندازه آن برحسب x با تابع $F(x)$ بیان می‌شود. فرض کنید این نیرو بر جسمی وارد شود که در جهت x حرکت می‌کند. کاری که این نیروی متغیر انجام می‌دهد تا جسم از مکان اولیه x_1 به مکان نهایی x_2 برسد چقدر است؟

در شکل ۷، نمودار F برحسب x رسم شده است. جایه جایی کل را به N بازه کوچک، هر یک به اندازه δx ، تقسیم می‌کنیم؛ شکل ۷ الف. بازه اول را در نظر بگیرید؛ این بازه جایه جایی δx ، از x_1 تا $x_1 + \delta x$ است. طی این جایه جایی کوچک، $F(x)$ تقریباً ثابت، و برابر با F_1 است؛ کار کوچکی که نیرو در این بازه انجام می‌دهد، δW_1 ، تقریباً برابر است با

$$\delta W_1 = F_1 \delta x \quad (4)$$

به همین ترتیب، بازه بعدی مربوط به جایه جایی کوچک از $x_1 + \delta x$ تا $x_1 + 2\delta x$ است، و در این بازه نیرو تقریباً برابر است با مقدار ثابت F_2 . کاری که نیرو در این بازه انجام می‌دهد تقریباً $\delta W_2 = F_2 \delta x$ است. کل کار W که نیروی $F(x)$ در جایه جایی ذره از x_1 تا x_2 انجام

برده با نیروی قائم mg , ضربدر فاصله قائم h , یعنی

$$W = mgh = (117kg)(9.8m/s^2)(2.86m) = 328J$$

که همان مقدار قبلی است. تفاوت فقط در این است که با استفاده از سطح شیبدار می‌توان با نیروی کمتری ($P = 70N$) نسبت به حالت بدون سطح شیبدار ($mg = 115N$) جسم را بالا برد. در عوض، اگر از سطح شیبدار استفاده شود، جسم را باید به مسافت بیشتری (۴.۶۵m) نسبت به حالت مستقیم (۲.۸۶m) حرکت داد.

مثال ۲. کودکی سورتمه‌ای به جرم $56kg$ را تا مسافت $s = 12m$ روی سطح افقی، با سرعت ثابت جلو می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_k برابر با 20° , و زاویه طناب با سطح افقی $\phi = 45^\circ$ باشد، کودک چقدر کار انجام می‌دهد؟

حل: شکل ۶alf وضعیت مسئله، و شکل ۶b نمودار جسم-آزاد سورتمه را نشان می‌دهد. **P** کششی که کودک اعمال می‌کند، **mg** وزن سورتمه، **f** نیروی اصطکاک، و **N** نیروی عمودی ای است که زمین بر سورتمه وارد می‌کند. کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد برابر است با

$$W = P \cdot s = Ps \cos \phi.$$

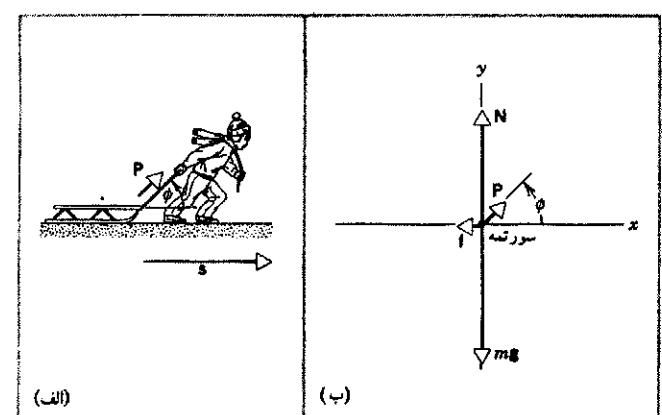
برای محاسبه این کار، اول باید P را که مجهول است، معلوم کرد. برای بدست آوردن P به نمودار جسم-آزاد شکل ۶b رجوع می‌کنیم. سورتمه شتاب ندارد؛ پس، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\text{مؤلفه } x: P \cos \phi - f = 0$$

$$\text{مؤلفه } y: P \sin \phi + N - mg = 0$$

می‌دانیم که رابطه f و N به صورت زیر است

$$f = \mu_k N$$



شکل ۷. مثال ۲. (الف) کودکی با وارد کردن نیروی P به ریسمانی که با سطح افقی زاویه ϕ می‌سازد، سورتمه‌ای را به اندازه مسافت s می‌کشد. (ب) نمودار جسم-آزاد سورتمه.

است با

$$W = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N F_n \delta x \quad (6)$$

رابطه

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum F_n \delta x = \int_{x_1}^{x_f} F(x) dx$$

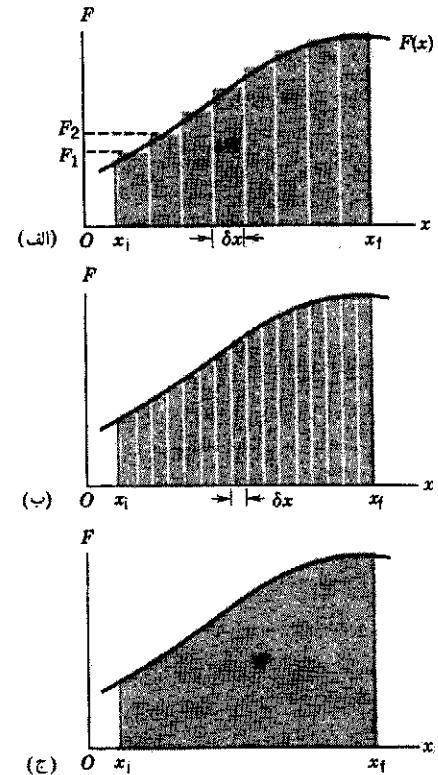
که شاید آن را در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده باشید، انتگرال F نسبت به x از x_1 تا x_f را تعریف می‌کند. مقدار عددی این کمیت دقیقاً برابر است با مساحت ناحیه بین منحنی نیرو و محور x ، از x_1 تا x_f (شکل ۷ج). بنابراین، انتگرال را به صورت نموداری می‌توان به مساحت تعبیر کرد. نماد \int در واقع یک S تغییر شکل یافته است و فرایند انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد [حرف اول واژه "جمع" در زبان انگلیسی است]. کل کاری را که نیروی F روی جسم، در جایه‌جایی از x_1 به x_f ، انجام می‌دهد می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W = \int_{x_1}^{x_f} F(x) dx \quad (7)$$

چون نمایش برداری را از این معادله یک‌بعدی حذف کرده‌ایم، باید مراقب علامت F باشیم؛ علامت F مثبت است اگر F در جهت افزایش x باشد، و منفی است اگر F در جهت کاهش x باشد.

به عنوان مثالی برای نیروی متغیر، فنر را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم m نیرو وارد می‌کند (شکل ۸). ذره به طور افقی حرکت می‌کند، و جهت حرکت آن را جهت x می‌گیریم؛ مبدأ ($x = 0$) نقطه‌ای است که وقتی ذره در آن باشد فنر در حالت "آسوده" است (شکل ۸الف). نیروی خارجی، F_{ext} ، در خلاف جهت نیروی فنر بر جسم اثر می‌کند. فرض می‌کنیم که این نیروی خارجی همواره تقریباً با نیروی فنر برابر است؛ به این ترتیب، ذره همیشه تقریباً در حالت تعادل است ($a = 0$).

ذره را تا مسافت x از مکان اولیه‌اش در $x = 0$ جابه‌جا می‌کنیم (شکل ۸ب). همراه با عامل خارجی که نیروی F_{ext} را بر ذره وارد



شکل ۷. (الف) مساحت زیرمنحنی نیروی متغیر یک‌بعدی $F(x)$ ، با ناحیه میان دو حد x_1 و x_f ، که به بازه‌هایی به اندازه δx تقسیم شده است تقریب زده می‌شود. مجموع مساحت نوارهای مستطیلی تقریباً با مساحت زیرمنحنی برابر است. (ب) با استفاده از تعداد بیشتری نوار بازیگر، تقریب بهتری حاصل می‌شود. (ج) در حد $\delta x \rightarrow 0$ ، مساحت واقعی بدست می‌آید.

می‌دهد، تقریباً برابر است با مجموع جملات زیادی به شکل معادله ۴، که مقدار F در هر یک از آنها فرق می‌کند. پس

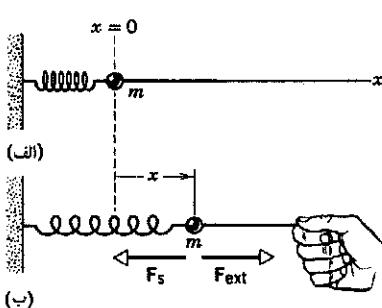
$$W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \dots \\ = F_1 \delta x + F_2 \delta x + F_3 \delta x + \dots$$

یا

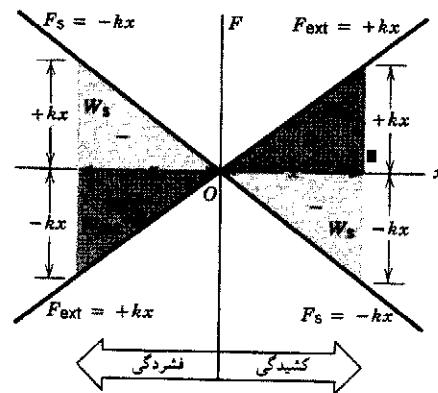
$$W = \sum_{n=1}^N F_n \delta x \quad (5)$$

که در آن، حرف یونانی سیگما (Σ) نماد جمع روی N بازه از x_1 تا x_f است.

برای اینکه تقریب بهتر شود می‌توانیم جایه‌جایی کل از x_f به x_1 را به تعداد بیشتری بازه تقسیم کنیم؛ شکل ۷ب. در این حالت کوچکتر می‌شود و مقدار F_n در هر بازه نماینده بهتری برای نیرو در آن بازه خواهد بود. روشن است که با کوچکتر کردن δx ، و در نتیجه زیادتر کردن تعداد بازه‌ها، تقریب بهتری بدست می‌آید. کار انجام شده توسط F را می‌توان با میل دادن δx به صفر یا میل دادن تعداد بازه‌ها (N) به بیناییت، به طور دقیق بدست آورد. بنابراین، Raminasmat@yahoo.com



شکل ۸. (الف) ذره‌ای به جرم m به فری متصل است، و فنر در حالت آسوده است (یعنی طول طبیعی‌اش را دارد). (ب) ذره به اندازه x جایه‌جا می‌شود، و در این حالت دو نیرو بر آن وارد می‌شود: نیروی بازنگردانده فنر و **Raminasmat@yahoo.com** به طور دقیق بدست آورد. بنابراین، Raminasmat@yahoo.com



شکل ۹. کار W_s نیروی فنر با تواحی منفی (سایه خاکستری در شکل) و کار W_{ext} نیروی خارجی در حالت تعادل با نیروی فنر با تواحی منفی است (سایه رنگی در شکل) مشخص شده است. فنر چه کشیده شود ($x > 0$) و چه فشرده شود ($x < 0$), W_s منفی و W_{ext} مثبت است.

توجه کنید که این مقدار، دقیقاً منفی مقداری است که در معادله ۱۰ داشتیم.

با محاسبه مساحت بین منحنی نیرو-جا به جایی W_{ext} و W_s را، مورد نظر و محور x ($x = 0$ تا مقدار دلخواه x) هم نیز می‌توان بددست آورد. در شکل ۹، دو خط راست شبیداری که از مبدأ می‌گذرند، نمودار نیروی خارجی بر حسب جا به جایی ($F_{ext} = +kx$) و نیروی فنر بر حسب جا به جایی ($F_s = -kx$) اند. نیمة راست نمودار ($x > 0$) متناظر با کشیدگی فنر و نیمة چپ آن ($x < 0$) متناظر با فشردگی فنر است.

در کشیدن فنر، کاری که نیروی خارجی انجام می‌دهد مثبت است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست بالا، با علامت $+$ ، مشخص شده است. قاعده این مثلث $+x$ ، و ارتفاع آن $+kx$ است؛ پس مساحت آن می‌شود

$$\frac{1}{2}(+x)(+kx) = +\frac{1}{2}kx^2$$

که با معادله ۱۱ سازگار است. هنگامی که فنر کشیده می‌شود، کاری که نیروی فنر انجام می‌دهد منفی است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست پایین، با علامت $-W_s$ ، مشخص شده است. با استدلال هندسی مشابه می‌شود نشان داد که مساحت این مثلث $-\frac{1}{2}kx^2$ است، که با معادله ۱۰ سازگار است.

در فشردن فنر، چنان که از نیمة چپ شکل ۹ پیداست، کار W_{ext} عامل خارجی همچنان مثبت، و کار W_s فنر همچنان منفی است؛ این همان چیزی است که از علامت نیروها و جا به جایی بدست می‌آید.

مثال ۳. فنری به طور قائم آویزان، و در حالت تعادل است. جسمی به جرم 40 kg به فنر می‌بندیم، اما ابتدا آن را همانجا نگه می‌داریم تا فنر کشیده نشود. سپس دستی را که جسم روی آن است به آرامی پایین می‌آوریم تا جسم با سرعت ثابت پایین بیاید و به نقطه تعادل برسد؛

می‌کند، فنر هم نیروی مقاوم F_s را برابر ذره وارد می‌کند. این نیرو، با تقریب خوبی، برابر است با

$$F_s = -kx \quad (8)$$

یک ثابت مثبت است، که آنرا ثابت نیروی فنر می‌نامند. ثابت k معیاری از مقدار نیروی لازم برای کشیدن فنر به اندازه معین است: هر چه فنر سخت‌تر باشد، مقدار k آن بزرگ‌تر است. معادله ۸ قانون نیروی فنر است، و آن را قانون هوك می‌نامند. علامت منفی در معادله ۸ یادآوری می‌کند که نیرویی که فنر اعمال می‌کند، همواره در خلاف جهت جا به جایی ذره است. اگر فنر کشیده شود، $x > 0$ و F_s منفی است، اگر فنر فشرده شود، $x < 0$ و F_s مثبت است. نیروی فنر یک نیروی بازگردانده است: این نیرو همواره می‌خواهد که ذره را به محل $x = 0$ ببرگرداند. بیشتر فنرهای واقعی به خوبی از پیروی از معادله ۸ پیروی می‌کنند، البته به شرط اینکه بیش از حد معینی کشیده نشوند.

ابتدا می‌خواهیم کاری را که فنر روی ذره انجام می‌دهد، در جا به جایی ذره از مکان اولیه x_i به مکان نهایی x_f محاسبه کنیم. معادله ۷ را با F_s بدکار می‌بریم

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx \\ = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (9)$$

کاری که فنر روی ذره انجام می‌دهد مثبت است اگر $x_f > x_i$ باشد (یعنی اگر اندازه جا به جایی اولیه از اندازه جا به جایی نهایی بیشتر باشد). توجه کنید که فنر در برگرداندن ذره به $x = 0$ ، کار مثبت انجام می‌دهد. اگر اندازه جا به جایی اولیه از اندازه جا به جایی نهایی کوچک‌تر باشد، فنر روی ذره کار منفی انجام می‌دهد. برای محاسبه کاری که فنر در حرکت ذره از x_i به نقطه x_f را آن انجام می‌دهد، می‌گذاریم $x_i = x_0$ و $x_f = x$: نتیجه می‌شود

$$W_s = \int_0^x (-kx) dx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (10)$$

توجه کنید که کاری که فنر هنگام فشرده شدن به اندازه x انجام می‌دهد، با کاری که هنگام کشیده شدن به اندازه x انجام می‌دهد یکسان است، زیرا در معادله ۱۰ مجدور جا به جایی ظاهر می‌شود: x هر علامتی که داشته باشد، علامت x^2 مثبت، و علامت W_s منفی است.

حالا بینیم عامل خارجی، در حرکت ذره از $x_i = x_0$ به $x_f = x$ چقدر کار انجام می‌دهد؟ برای اینکه ذره در حالت تعادل بماند، نیروی خارجی باید با نیروی فنر هم اندازه، اما در خلاف جهت آن باشد؛ پس، $F_{ext} = +kx$. با تکرار محاسبه، مانند معادله ۱۰، کار عامل خارجی به صورت زیر بدست می‌آید

$$W_{ext} = +\frac{1}{2}kx^2 \quad (11)$$

راه ساده‌تر برای به دست آوردن همین نتیجه این است که توجه کنیم که اگر جسم (که آن را ذره در نظر می‌گیریم) به آهستگی و با سرعت ثابت پایین بیاید، نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، کل کاری که همه نیروهای وارد بر ذره انجام می‌دهند باید صفر باشد.

$$W_{\text{net}} = W_s + W_g + W_h = 0$$

$$W_h = -W_s - W_g = -(-3,89 \text{ J}) - 7,78 \text{ J} = -3,89 \text{ J}$$

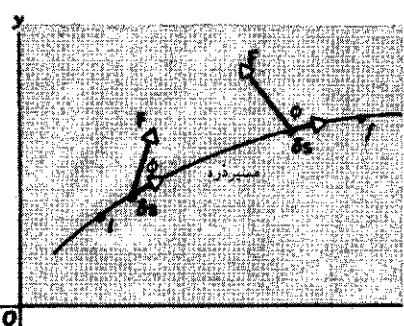
توجه کنید که کار دست برابر است با کار فنر.

۳-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دو بعدی (اختیاری)

هم‌جهت، و هم اندازه نیروی F که بر یک ذره اثر می‌کند می‌تواند تغییر کند، و مسیر ذره هم می‌تواند منحنی باشد. برای محاسبه کار در این حالت کلی، مسیر را به تعداد زیادی جابه‌جایی کوچک δs تقسیم می‌کنیم، که هر یک در راستای مماس بر مسیر و در جهت حرکت است. شکل ۱۰ دو تا از این جابه‌جاییها را برای مسیری خاص نشان می‌دهد؛ این شکل، همچنین نیروی F و زاویه ϕ بین F و δs را در هر نقطه نشان می‌دهد. کار δW را که طی جابه‌جایی δs روی ذره انجام می‌شود می‌توانیم از رابطه زیر پیدا کنیم

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} = F \cos \phi \delta s \quad (12)$$

در این معادله، F نیروی وارد بر ذره در نقطه‌ای است که جابه‌جایی δs را از آنجا گرفته‌ایم. کار نیروی متغیر F روی ذره، طی حرکت ذره از نقطه x به نقطه f در شکل ۱۰، به طور تقریبی با جمع کردن عنصرهای کار در اجزاء طولی کوچکی که مسیر x تا f را می‌سازند به دست می‌آید. اگر جزء طول δs بینهایت کوچک شود، می‌شود به جای آن دیفرانسیل ds گذاشت؛ در این صورت، جمع روی اجزاء مسیر به انتگرال تبدیل



شکل ۱۰. ذره‌ای، روی مسیر شکل، از نقطه x به نقطه f می‌رود. طی حرکت، نیروی F بر آن وارد می‌شود، که اندازه و جهت آن هر دو متغیر است. در حد $\delta s \rightarrow 0$ ، به جای جزء طول δs می‌گذاریم، که در جهت سرعت لحظه‌ای آسیع، $Ramin.samad@yahoo.com$ مماس بر مسیر است.

اندازه‌گیری نشان می‌دهد که فنر به اندازه 124 m نسبت به طول طبیعی اش، کشیده شده است. کاری را که (الف) گرانش، (ب) فنر و (ج) دست ما روی جسم انجام داده است حساب کنید.

حل: ثابت نیروی فنر را نداریم، اما می‌توانیم آن را به دست بیاوریم؛ می‌دانیم که در حالت کشیده شده، بین نیروی رو به بالای فنر و نیروی رو به پایین گرانش تعادل برقرار است:

$$\Sigma F = mg - ks = 0$$

در اینجا جهت رو به پایین را مثبت گرفته‌ایم. از این معادله k را به دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود که

$$k = mg/s = (6,40 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2)/(124 \text{ m}) \\ = 50,6 \text{ N/m}$$

برای پیدا کردن کار تیروی گرانش، W_g ، توجه کنید که این نیرو ثابت است، و با جابه‌جایی موازی است. پس می‌توانیم معادله ۱ را به کار ببریم:

$$W_g = Fs = mgs = (6,40 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2)(124 \text{ m}) \\ = +7,78 \text{ J}$$

این کار مثبت است، زیرا نیرو و جابه‌جایی هم جهت‌اند. برای محاسبه کار فنر، معادله ۱۰ را با $s = x$ به کار می‌بریم

$$W_s = -\frac{1}{2}ks^2 = -\frac{1}{2}(50,6 \text{ N/m})(124 \text{ m})^2 = -3,89 \text{ J}$$

این کار منفی است، زیرا نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است. یک راه پیدا کردن کاری که دست انجام می‌دهد، W_h ، آن است که نیروی دست بر جسم (هنگام پایین آوردن جسم) را حساب کنیم. اگر جسم در این مدت در حالت تعادل باشد نیروی رو به بالای F_h را که دست وارد می‌کند می‌توانیم از قانون دوم نیوتون، به ازای $a = 0$ حساب کنیم:

$$\Sigma F = -kx - F_h + mg = 0$$

با

$$F_h = mg - kx$$

حالا کار را می‌توان با انتگرالی به شکل معادله ۷، با یک علامت منفی، به خاطر اینکه نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است، محاسبه کر..

$$W_h = - \int_0^s F_h dx = - \int_0^s (mg - kx) dx \\ = -mgs + \frac{1}{2}ks^2 \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{s} \right) s^2 - \frac{1}{2}mgs = -3,89 \text{ J}$$

شکل ۱۱ ب است، و از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود

$$P - T \sin \phi = 0 \quad \text{مُؤلفة } x:$$

$$T \cos \phi - mg = 0 \quad \text{مُؤلفة } y:$$

T را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. خواهیم داشت

$$P = mg \tan \phi$$

جون P همیشه در جهت x است، می‌شود معادله ۱۴ را، با $F_x = P$ و $F_y = 0$ ، به کار برد و کار انجام شده توسط P را بدست آورد. به این ترتیب

$$W_P = \int P dx = \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi dx$$

برای محاسبه انتگرال، باید متغیرها را به یکی تبدیل کنیم؛ و ما اینجا x را بر حسب ϕ تعریف می‌کنیم. در یک نقطه میانی حرکت، که مختصات افقی $.dx = L \cos \phi d\phi$ و از آنجا $x = L \sin \phi$ است، داریم $d\phi = dx / L \cos \phi$ و این را به جای dx می‌گذاریم و انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} W_P &= \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi (L \cos \phi d\phi) \\ &= mgL \int_0^{\phi_m} \sin \phi d\phi = mgL(-\cos \phi)|_0^{\phi_m} \\ &= mgL(1 - \cos \phi_m) \end{aligned}$$

از شکل ۱۱ الف دیده می‌شود که $\phi_m = L(1 - \cos \phi)$ است، پس

$$W_P = mgh$$

کار نیروی (ثابت) گرانشی mg را هم می‌شود به روش مشابهی، براساس معادله ۱۴ (با $\phi = 0$) $F_y = -mg$ و $F_x = 0$ پیدا کرد. نتیجه می‌شود که $W_g = -mgh$ (مسئله ۱۶). علامت منفی از اینجا می‌آید که جابه‌جایی قائم در خلاف جهت T گرانشی است. کار کشش ریسمان، W_T ، صفر است. چون T در سراسر حرکت بر جابه‌جایی ds عمود است. حالا می‌توانیم بینیم که کل کار صفر است: $W_{net} = W_P + W_g + W_T = mgh - mgh + 0 = 0$! که با صفر بودن نیروی خالص وارد بر ذره، در تمام لحظات حرکت هم جور در می‌آید.

توجه کنید که در این مسئله، کار (ثبت) نیروی افقی P ، کار (منفی) نیروی قائم mg را ختنی می‌کند. علت این است که کار اسکالار است؛ یعنی جهت یا مؤلفه ندارد. حرکت ذره بستگی به کل کاری دارد که روی آن انجام می‌شود، که برابر است با حاصل جمع اسکالار کارتگن نیروها.

می‌شود، درست مثل معادله ۷. پس کار انجام شده عبارت است از

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_i^f F \cos \phi ds \quad (13)$$

برای محاسبه این انتگرال، باید شکل F و ϕ در معادله ۱۳ را در همه نقاط مسیر بدانیم؛ هر دو اینها تابعی از مختصات x و y ذره در شکل ۱۰ اند.

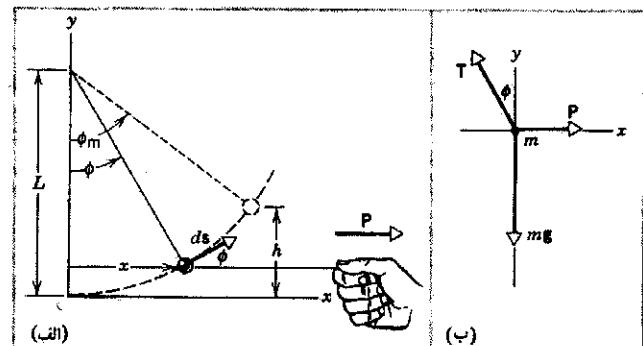
بانوشن \mathbf{F} بر حسب مؤلفه‌ها، می‌توانیم عبارت دیگری، هم از با معادله ۱۳، بدست بیاوریم. $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ و $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ است. (بهاید دارید که $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ و $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ (معادله ۱۴ فصل ۳)). با قرار دادن این نتیجه در معادله ۱۳، خواهیم داشت

$$W = \int_i^f (F_x dx + F_y dy) \quad (14)$$

انتگرال‌هایی به شکل انتگرال‌های معادلات ۱۳ و ۱۴ را انتگرال خط می‌نامند؛ برای محاسبه این انتگرال‌ها باید $F \cos \phi$ یا F_x و F_y را در همه نقاط مسیر ذره، که می‌تواند خط راست یا منحنی باشد، بدانیم. تعمیم معادله ۱۴ به مورد سه بعدی هم کاملاً سرراست است.

مثال ۴. جسم کوچکی به جرم m از ریسمانی به طول L آویزان است. جسم را با نیروی افقی P به یک طرف می‌کشیم تا زاویه ریسمان، با راستای قائم ϕ_m شود (شکل ۱۱ الف). جابه‌جایی چنان آهسته انجام می‌شود که می‌توانیم سیستم را در هر لحظه در حالت تعادل فرض کنیم. کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم را پیدا کنید.

حل: حرکت در راستای کمانی به شعاع L است، و جابه‌جایی ds همواره بر کمان مماس است. در یک نقطه میانی حرکت، که ریسمان با راستای قائم زاویه ϕ می‌سازد. نمودار جسم-آزاد ذره به صورت



شکل ۱۱. ۴. (الف) ذره‌ای از ریسمانی به طول L آویزان است و با نیروی افقی P کشیده می‌شود. بیشترین زاویه ریسمان با راستای قائم ϕ_m است. (ب) نمودار جسم-آزاد ذره.

یعنی، نتیجه کار خالص انجام شده روی ذره آن است که مقدار کمیت $\frac{1}{2}mv^2$ ، از نقطه نتاً تغییر کند. این کمیت را انرژی جنبشی (K) ذره می‌نامند و چنین تعریف می‌کنند

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (18)$$

بر حسب انرژی جنبشی K ، معادله ۱۷ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$W_{\text{net}} = K_f - K_i = \Delta K \quad (19)$$

معادله ۱۹ نمایش ریاضی نتیجه مهمی است به نام قضیه کار-انرژی، که می‌شود آن را چنین بیان کرد:

کار خالص نیروهای وارد بر هر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره.

ما این نتیجه را برای حالت به دست آورده‌ایم که نیرو ثابت باشد، اما قضیه کار-انرژی در حالت کلی برای نیروهای متغیر هم درست است. کمی بعد، در همین بخش، اثبات کلی قضیه در مورد نیروی متغیر را هم ارائه خواهیم کرد.

انرژی جنبشی هم، مانند کار، کمیتی اسکالار است؛ برخلاف کار، انرژی جنبشی هیچگاه منفی نمی‌شود، قبل‌دیده بودیم که کار به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد. پس تعجبی ندارد که انرژی جنبشی هم چنین باشد. می‌دانیم که ناظرهای چارچوبیای لخت مقاومت، سرعت یک ذره را متفاوت می‌سنجند؛ بنابراین، مقادیری که به انرژی جنبشی ذره نسبت می‌دهند هم متفاوت است. اگرچه مقدارهایی که ناظرهای مختلف برای کار و انرژی جنبشی به دست می‌آورند متفاوت است، اما رابطه میان این کمیتها، یعنی رابطه $W_{\text{net}} = \Delta K$ در تمام چارچوبیای لخت برقراست.

برای اینکه معادله ۱۹ از نظر ابعادی درست باشد، یکای انرژی جنبشی هم باید همان یکای کار باشد؛ یعنی انرژی جنبشی هم بر حسب یکاهایی مثل زول، ارگ، فوت، پاوند، والکترون ولت بیان می‌شود.

اگر اندازه سرعت ذره‌ای ثابت باشد از انرژی جنبشی آن هم ثابت است؛ پس کار نیروی برایند باید صفر باشد. مثلاً در حرکت دایره‌ای یکواخت، نیروی برایند به طرف مرکز دایره است، و همواره بر راستای حرکت عمود است. چنین نیرویی روی ذره کار انجام نمی‌دهد؛ این نیرو جهت سرعت را تغییر می‌دهد اما اندازه آن را تغییر نمی‌دهد. نیروی برایند، تنها اگر در جهت حرکت مؤلفه داشته باشد کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی ذره را عوض می‌کند.

قضیه کار-انرژی یک قانون جدید و مستقل در مکانیک کلاسیک نیست. ما کار را (مثلاً با معادله ۷) و انرژی جنبشی را (با معادله ۱۸) صرفاً تعریف کرده‌ایم و رابطه بین این دو را از قانون دوم نیوتون به دست آورده‌ایم. بدین حال، قضیه کار-انرژی در حل مسائلی که در آنها کار خالص از نیروهای خارجی روی ذره به سادگی قابل محاسبه باشد، و

۴-۷ انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی

در این بخش، اثر کار را بر حرکت ذره بررسی می‌کنیم. اگر نیرویی بر ذره‌ای وارد شود، و با نیروهای دیگر خنثی شود، البته وضعیت حرکت جسم تغییر می‌کند. قانون دوم نیوتون، یک روش برای تحلیل این تغییر حرکت است. اکنون روش دیگری را بررسی می‌کنیم که درنهایت به همان نتایج حاصل از قانون دوم نیوتون می‌انجامد، اما به کاربردن آن خیلی وقتها آساتر است. این روش به یکی از قوانین پایستگی هم منجر می‌شود؛ قوانین پایستگی نقش مهمی در تغییر فرایندهای فیزیکی دارند.

در اینجا فقط کار یک نیرو بر ذره را در نظر نمی‌گیریم، بلکه کل کار W_{net} حاصل از همه نیروهای وارد بر ذره را در نظر می‌گیریم. برای یافتن این کار خالص دو راه وجود دارد. اول اینکه نیروی خالص، یعنی حاصل جمع برداری نیروهای وارد بر ذره را پیدا کنیم

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \quad (15)$$

و بعد این نیرو را به عنوان یک تک نیرو در نظر بگیریم و کار را، طبق معادله ۷ در حالت یکبعدی یا طبق معادله ۱۳ در حالت چندبعدی، محاسبه کنیم. در روش دوم، کار حاصل از هر یک از نیروهای وارد بر ذره را پیدا می‌کنیم

$$W_1 = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}, \quad W_2 = \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

$$W_3 = \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}, \dots$$

و چون کار اسکالار است، کارهای حاصل از تک‌تک نیروها را با هم جمع می‌کنیم و کل کار را به دست می‌آوریم

$$W_{\text{net}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad (16)$$

نتیجه حاصل از این دو روش یکسان است، و انتخاب یکی از آنها فقط بستگی به این دارد که کدامیک ساده‌تر یا راحت‌تر است. می‌دانیم که اگر نیروی خالص غیرصفری به ذره‌ای وارد شود، ذره شتاب می‌گیرد و به این ترتیب وضعیت حرکتش عوض می‌شود؛ مثلاً از سرعت اولیه v_i به سرعت نهایی v_f می‌رسد. اثر کار حاصل از این نیروی خالص غیرصفر که بر ذره وارد می‌شود چیست؟ ابتدا در مورد نیروی ثابت یکبعدی به این پرسش جواب می‌دهیم. ذره از x_i به x_f می‌رود، در اثر چنین نیرویی، به طور یکواخت از v_i تا v_f شتاب می‌گیرد. کار این نیرو برابر است با

$$W_{\text{net}} = F_{\text{net}}(x_f - x_i) = ma(x_f - x_i)$$

چون شتاب a ثابت است، می‌توانیم معادله ۲۰ فصل ۲ را، به شکل $(x_i - x_f) = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ بکار ببریم، نتیجه می‌شود که

$$Ramin.samad@yahoo.com \quad W_{\text{net}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (17)$$

در راکتورهای هسته‌ای، نوترون در اثر شکافت هسته‌ای تولید می‌شود و انرژی جنبشی چنین نوترونهایی، نوعاً در حدود چند MeV است. روی نوترونهای این مثال، توسط یک عامل خارجی (به نام گندکننده) کار منفی انجام شده و در نتیجه انرژی جنبشی این نوترونها با ضربی قابل توجهی، از چند MeV به چند eV کاهش یافته است.

مثال ۶. جسمی به جرم $4,5\text{g} = m$ از ارتفاع $10\text{cm} = h$ بالاتر از سطح زمین، از حالت سکون، سقوط می‌کند، سرعت این جسم درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم بتوانیم جسم را مثل ذره در نظر بگیریم. این مسئله را البته مستقیماً با قوانین نیوتون هم می‌شود حل کرد (فصل ۵)، اما این بار می‌خواهیم از قضیه کار-انرژی استفاده کنیم. نیرو ثابت، و در جهت حرکت است. پس کار نیروی گرانش برابر است با

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = mgh$$

سرعت جسم، در ابتداء $v_i = 0$ ، و در پایان v است. تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv^2 - 0.$$

طبق قضیه کار-انرژی، $W = \Delta K$ است، پس

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

بنابراین، سرعت جسم، درست پیش از برخورد، برابر است با

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8\text{m/s}^2)(10,5\text{m})} = 14,3\text{m/s}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم جسم است، همان‌طور که قبل با استفاده از قوانین نیوتون هم دیده بودیم.

مثال ۷. جسمی به جرم $3,63\text{kg} = m$ ، با سرعت $22\text{m/s} = v_i$ روی میز افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد. این جسم به فنری برخورد می‌کند و آنرا می‌فشارد تا به حالت سکون برسد. فنر، در این حالت چقدر فشرده شده است؟ ثابت نیروی فنر $k = 13\text{N/m} = 13\text{N/m} = k$ است.

حل: تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

کار فنری جسم، طی فشرده شدن فنر از حالت تعادل به اندازه d ، طبق معادله ۱۰، برابر است با

$$W = -\frac{1}{2}kd^2$$

بخواهیم سرعت ذره را در نقطه‌ای معین پیدا کیم، قضیه مفیدی است. هم اینکه قضیه کار-انرژی نقطه آغازی برای تعیین کلی، مفهوم انرژی و بررسی چگونگی ذخیره شدن و تقسیم آن در اجزای سیستمهای پیچیده است. اصل پایستگی انرژی، موضوع فصل بعدی است.

اثبات کلی قضیه کار-انرژی

آنچه می‌آید اثبات معادله ۱۹ در مورد نیروهای متغیر در یک بعد است، محاسبات مربوط به موارد دو بعدی و سه بعدی را به عنوان تمرین به عهده خواهند گذاشت‌ایم (مسئله ۳۴). فرض کنید F_{net} نیروی خالص وارد بر ذره باشد. کار خالص نیروهای خارجی وارد بر ذره $W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} dx$ است. با کمی عملیات ریاضی می‌توانیم این انتگرال را تغییر متغیر بدهیم و آن را به شکل مفیدتری در بیاوریم

$$F_{\text{net}} = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v = mv \frac{dv}{dx}$$

به این ترتیب

$$W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} dx = \int mv \frac{dv}{dx} dx = \int mv dv$$

حالا متغیر انتگرال‌گیری سرعت است. از سرعت اولیه v_i تا سرعت نهایی v_f انتگرال می‌گیریم

$$W_{\text{net}} = \int_{v_i}^{v_f} mv dv = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \\ = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$

این نتیجه همان معادله ۱۹ است و نشان می‌دهد که قضیه کار-انرژی در مورد نیروهای متغیر هم صدق می‌کند.

مثال ۵. یکی از روش‌های سنجش انرژی جنبشی نوترونهای یک باریکه، که مثلاً از یک راکتور هسته‌ای می‌آید، اندازه‌گیری مدتی است که طول می‌کشد تا یکی از ذرات باریکه مسافت بین دو نقطه ثابت به فاصله معین از هم را بسیاری. این روش را روش زمان پرواز می‌نامند. فرض کنید که نوترونی مسافت $d = 6,2\text{m}$ را در زمان $t = 16,0\mu\text{s}$ می‌پیماید. انرژی جنبشی این نوترون چقدر است؟ جرم نوترون را $1,67 \times 10^{-27}\text{kg}$ بگیرید.

حل: سرعت نوترون برابر است با

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6,2\text{m}}{16,0 \times 10^{-6}\text{s}} = 3,88 \times 10^7\text{m/s}$$

و انرژی جنبشی آن از معادله ۱۸، برابر است با

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1,67 \times 10^{-27}\text{kg})(3,88 \times 10^7\text{m/s})^2 \\ = 1,26 \times 10^{-18}\text{J} = 7,9\text{eV}$$

دیگر انرژی دشوار است و چون این اجسام مثل ذره رفتار نمی‌کنند، در حالت کلی درست نیست که قضیه کار انرژی را برای اجسامی که نیروی اصطکاک به آنها وارد می‌شود به کار ببریم.

در این گونه موارد، نباید اتومبیل برخوردکننده یا جسم لغزان را ذره تلقی کنیم، بلکه باید آنها را مثل سیستمهای بزرگی که تعداد زیادی ذره دارند در نظر بگیریم. به کار بردن قضیه کار انرژی برای تکنک ذرات این سیستم البته کار درستی است، اما فوق العاده دشوار است. در فصل ۹، روش ساده‌تری برای بررسی این سیستمهای پیچیده ذرات ارائه می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان قضیه کار انرژی را تعمیم داد تا در این موارد هم قابل استفاده باشد.

۵-۷ توان

در طراحی سیستمهای مکانیکی، اغلب نه تنها باید مقدار کاری را که انجام می‌شود در نظر بگیریم، بلکه لازم است به آهنگ انجام این کار هم توجه کنیم. برای اینکه جسمی را تا ارتفاع معینی بالا ببریم مقدار معینی کار لازم است و این کار، چه انجام آن ۱ ثانیه طول بکشد چه ۱ سال، یکسان است. اما آهنگ انجام کار در این دو مورد متفاوت است.

توان را آهنگ انجام کار تعریف می‌کنیم. (در اینجا فقط توان مکانیکی را بررسی می‌کنیم. که مربوط به کار مکانیکی است. با تعریف کلی تر به عنوان انرژی منتقل شده در واحد زمان، می‌شود مفهوم توان را به توان الکتریکی، توان خورشیدی، و مانند آن تعمیم داد.) توان متوسط \bar{P} حاصل از عاملی که نیروی معینی بر جسم وارد می‌کند، عبارت است از کار آن نیرو تقسیم بر کل مدتی که انجام کار طول می‌کشد، یعنی

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \quad (20)$$

توان لحظه‌ای یک عامل در انجام کار، عبارت است از

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (21)$$

که در آن dW جزء کارکوچکی است که در بازه زمانی بینهایت کوچک dt انجام شده است. اگر توان در طی زمان ثابت باشد، P با \bar{P} برابر است و خواهیم داشت

$$W = Pt \quad (22)$$

یکای SI توان زول بر ثانیه است، که آن را وات می‌نامند (با علامت اختصاری W). این نامگذاری به افتخار جیمز وات (۱۷۳۶ تا ۱۸۱۹) است، که نقش مهمی در توسعه ماشینهای بخار زمان خود داشت، و راه پیشرفت به سوی ماشینهای کارآتر امروزی را هموار کرد. در سیستم بریتانیایی، یکای توان $lb \cdot ft$ است، اما اغلب از یکای رایجتری برای توان استفاده می‌شود که اسب بخار (hp) نام دارد. این یکا را

از قضیه کار انرژی نتیجه می‌شود که

$$-\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

با

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (122 \text{ m/s})\sqrt{\frac{263 \text{ kg}}{135 \text{ N/m}}} = 200 \text{ m}$$

محدودیتهای قضیه کار انرژی

قضیه کار انرژی (معادله ۱۹) را مستقیماً از قانون دوم نیوتن به دست آوریدیم، و این قانون، در شکلی که ما بیانش کردیم، تنها در مورد ذرات صادق است. پس قضیه کار انرژی هم، به صورتی که ما گفتیم، فقط برای ذرات معتبر است. این قضیه مهم را در مورد اجسام واقعی فقط وقتی می‌شود به کار برد که این اجسام مثل ذره رفتار کنند، یعنی همان طور که قبل دیدیم همه نقاشهای دقیقاً مثل هم حرکت کنند. در استفاده از قضیه کار انرژی هم، فقط زمانی می‌توان اجسام گسترده را ذره در نظر گرفت که انرژی آنها صرفاً از نوع جنبشی انتقالی باشد.

مثلاً یک اتومبیل آزمایشی را در نظر بگیرید که مستقیماً از جلو به یک مانع سخت بتوانی برخورد می‌کند و متلاشی می‌شود. روشن است که انرژی جنبشی انتقالی اتومبیل، در اثر برخورد به مانع، مچاله شدن و توقف آن، کم می‌شود. اما در این مسئله انواع دیگری از انرژی، جز از جنبشی انتقالی هم دخیل‌اند، مثلاً انرژی داخلی مربوط به خم شدن و مچاله شدن اتومبیل؛ بخشی از این انرژی داخلی ممکن است به شکل افزایش دمای اتومبیل بروز کند، و بخشی از آن می‌تواند، به شکل گرمایه محیط اطراف منتقل شود. توجه کنید که اگرچه ممکن است مانع طی برخورد، نیروی بزرگی بر اتومبیل وارد کند، اما این نیرو کاری انجام نمی‌دهد زیرا نقطه اثر نیرو بر اتومبیل حرکت نمی‌کند. (تعریف اولیه کار – معادله ۱ – را به خاطر بیاورید. نقطه اثر نیرو باید حرکت کند تا کار انجام شود). بنابراین، در این مورد $\Delta K \neq 0$ ، اما $W = 0$ است؛ روشن است که معادله ۱۹ برقرار نیست. اتومبیل مثل ذره رفتار نمی‌کند؛ همه نقاط آن دقیقاً یک نوع حرکت دارند.

به دلایل مشابه، نمی‌شود جسمی را که روی سطحی می‌لغزد و تحت تأثیر نیروی اصطکاک قرار می‌گیرد، از لحاظ کار انرژی، ذره فرض کرد (اگرچه در تحلیل حرکت جسم با استفاده از قوانین نیوتن باز هم می‌توانیم، مثل فصل ۶، آن را ذره در نظر بگیریم). نیروی اصطکاک، که آن را یک نیروی ثابت معرفی کردیم، در واقع بسیار پیچیده است؛ در فرایند اصطکاک دائمًا جوشهای میکروسکوپیک تشکیل می‌شوند و می‌شکند (بخشن ۲-۶). این امر موجب تغییر شکل سطح می‌شود و انرژی داخلی آن را تغییر می‌دهد که بخشی از این انرژی می‌تواند به شکل افزایش دمای سطح ظاهر شود. چون در نظر گرفتن این انواع

که معادل 126hp است، در حدود توان موتور بعضی اتومبیلهای سواری، البته به علت اختلاف ناشی از اصطکاک و اتلافهای دیگر، حداقل توانی که موتور برای بالا بردن آسانسور تأمین می‌کند باید از این بیشتر باشد. در عمل آسانسور معمولاً یک وزنه مقابله هم دارد که با بالا رفتن اختلاف آسانسور پایین می‌آید. موتور باید به اختلاف توان مثبت و به وزنه پایین رونده توان منفی تحويل بدهد. به این ترتیب، توان خالصی که موتور باید تأمین کند، به مقدار زیادی کمتر از آن است که محاسبه شد.

۷.۶ چارچوبهای مرجع (اختیاری)

قوانين نیوتون فقط در چارچوبهای مرجع لخت برقرارند (بخش ۶-۸)، و اگر در چارچوب خاصی برقرار باشند، در هر چارچوب دیگری که با سرعت ثابت نسبت به آن حرکت کند هم برقرارند، کمیتهای فیزیکی خاصی هستند که نتیجه اندازه‌گیری آنها در چارچوبهای لخت متفاوت همواره یکسان است. در مکانیک نیوتونی، این کمیتهای ناوردا عبارت اند از نیرو، جرم، شتاب، و زمان. کمیتهای دیگر، مثلاً جابه‌جایی یا سرعت، ناوردا نیستند و از سنجش آنها در چارچوبهای لخت متفاوت، نتایج متفاوتی به دست می‌آید. مثلاً در بخش ۶-۴ دیدیم که مقادیری که ناظرهای دو چارچوب لخت مختلف برای یک سرعت اندازه‌گیرند، چه ارتباطی با هم دارند.

ناظرهای دو چارچوب لخت متفاوت، از سنجش شتاب یک ذره نتیجه یکسانی به دست می‌آورند، بنابراین، باید تغییر سرعت v ذره هم برای آنها یکسان باشد. اما این دو ناظر، در حالت کلی برای انرژی جنبشی ذره مقدار یکسانی به دست نمی‌آورند. ناظرهای در حال حرکت نسبت به هم، مقادیر متفاوتی برای جابه‌جایی یک ذره می‌سنجند؛ بنابراین (اگرچه نیروی وارد بر ذره را یکسان می‌سنجند، چون نیرو ناوردادست) مقادیر متفاوتی برای کار انجام شده روی ذره به دست می‌آورند. در این بخش، به کمک یک مثال عددی خاص، این مسائل را روشن می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قضیه کار-انرژی برای ناظرهای همه چارچوبهای لخت معتبر است.

مثال زیر را در نظر بگیرید. کارگری صندوقی را در قسمت بار قطاری که روی ریلهای افقی است هل می‌دهد. قطار با سرعت ثابت 15m/s در حرکت است صندوق 12kg جرم دارد و کارگر آن را به اندازه 2m (نسبت به قطار) به جلو می‌برد، و در این مدت سرعت صندوق با شتاب ثابت زیاد می‌شود و (نسبت به قطار) از صفر به 15m/s می‌رسد. شکل ۱۲ الف وضعیت شروع و پایان را از دید ناظری که سوار قطار است نشان می‌دهد. از دید این ناظر، تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} (12\text{kg}) (15\text{m/s})^2 = 135\text{J}$$

شتتاب صندوق را (که ثابت فرض شده است) می‌توانیم از معادله 20

عموماً برای بیان توان موتورهای الکتریکی، موتور اتومبیلها، و مانند آن به کار می‌برند. یک اسپ بخار بنابر تعریف، $550\text{ ft} \cdot \text{lb/s}$ است که $550\text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746\text{W}$ تقریباً معادل است با

کار را بر حسب یکای توان \times زمان هم می‌توان بیان کرد. نمونه اشاری یکای کیلووات-ساعت است، که شرکت برق برای سنجش مقدار کاری که (به شکل انرژی الکتریکی) به خانه شما تحويل داده است به کار می‌برد. یک کیلووات ساعت، کاری است که عاملی با توان ثابت 1kW در طی ۱ ساعت تحويل می‌دهد.

توانی را که به جسم داده می‌شود، بر حسب سرعت جسم و نیروی وارد بر آن هم می‌توانیم بیان کنیم. به طور کلی، معادله 21 را می‌شود

چنین نوشت

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

با گذاشتن v به جای $d\mathbf{s}/dt$ ، نتیجه می‌شود که

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (23)$$

اگر \mathbf{F} و \mathbf{v} با هم موازی باشند، رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید

$$P = Fv \quad (24)$$

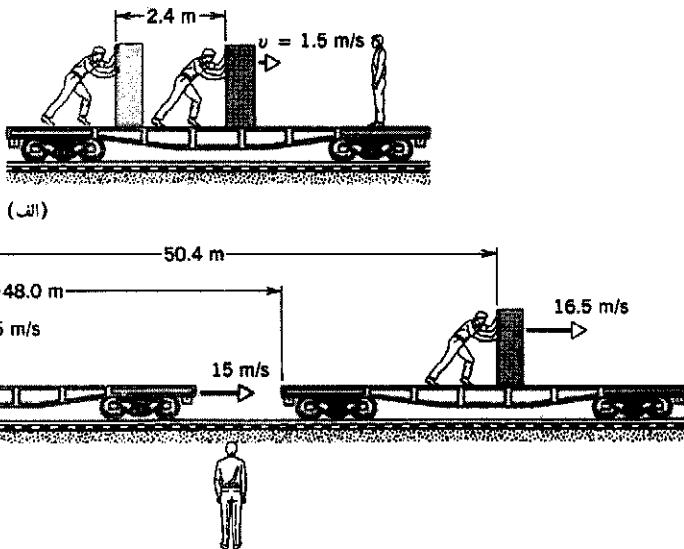
توجه کنید که اگر \mathbf{F} و \mathbf{v} موازی و در خلاف جهت هم باشند، توان منفی می‌شود. تحويل توان منفی به جسم، به معنی انجام کار منفی روی آن است، در این حالت، نیرویی که عامل خارجی به جسم وارد می‌کند در خلاف جهت جابه‌جایی $d\mathbf{s}$ ، و در نتیجه در خلاف جهت \mathbf{v} است.

مثال ۸. وزن یک آسانسور خالی 516N (116lb) است. این آسانسور چنان طراحی شده است که می‌تواند حداکثر 20 مسافر را طی 18 ثانیه از طبقه هم‌کف به طبقه بیست و پنجم ساختمان ببرد. اگر فرض کنیم وزن هر مسافر به طور متوسط 710N (160lb)، و فاصله بین دو طبقه مجاور 3.5m (11ft) است، توان ثابت موتور آسانسور حداقل چقدر باید باشد؟ (فرض بر آن است که همه کاری که آسانسور را حرکت می‌دهد از موتور می‌آید، و آسانسور وزنه مقابله ندارد). حل: حداقل نیروی لازم برابر با مجموع وزن آسانسور خالی و وزن مسافران است، $N = 1940 + 20(710) = 5160\text{N}$. کاری که باید انجام شود برابر است با

$$W = Fs = (1940\text{N})(25 \times 3.5\text{m}) = 17 \times 10^6\text{J}$$

بنابراین، حداقل توان لازم برابر خواهد بود با

$$P = \frac{W}{t} = \frac{17 \times 10^6\text{J}}{18\text{s}} = 94\text{kW}$$



شکل ۱۲. کارگری صندوقی را در قطاری به جلو هل می‌دهد، (الف) وضعیت از دید ناظر قطار و (ب) وضعیت از دید ناظر ساکن بر زمین.

فصل ۲ پیدا کنیم

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} = \frac{(1.5\text{m/s})^2 - 0}{2(2.4\text{m})} = 0.469\text{m/s}^2$$

این شتاب ناشی از نیروی خالصی است که آن هم ثابت و برابر است با $F = ma = (12\text{kg})(0.469\text{m/s}^2) = 5.63\text{N}$. کاری که این نیرو در هین جایه‌جایی $2.4\text{m} = \Delta x$ روی صندوق انجام می‌دهد برابر است با

$$W = F\Delta x = (5.63\text{N})(2.4\text{m}) = 13.5\text{J}$$

بنابراین، ناظر قطار نتیجه می‌گیرد که $\Delta K = W$ است، یعنی قضیه کار-انرژی صدق می‌کند.

حالا بینیم ناظری که نسبت به زمین ساکن است از همین نوع اندازه‌گیریها، چه نتیجه‌ای به دست می‌آورد؟ (مقادیری را که این ناظر می‌سنجد با پریم نشان می‌دهیم). وقتی صندوق نسبت به قطار ساکن است، از دید ناظر زمینی دارد با سرعت $15\text{m/s} = v_f'$ به جلو حرکت می‌کند. پس از هل دادن صندوق، ناظر زمینی مشاهده می‌کند که سرعت آن به $16.5\text{m/s} + 15\text{m/s} = 16.5\text{m/s} = v_f$ می‌رسد، و نتیجه می‌گیرد که تغییر انرژی جنبشی آن برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K' &= K_f' - K_i' = \frac{1}{2}mv_f'^2 - \frac{1}{2}mv_i'^2 \\ &= \frac{1}{2}(12\text{kg})(16.5\text{m/s})^2 - \frac{1}{2}(12\text{kg})(15\text{m/s})^2 \\ &= 284\text{J} \end{aligned}$$

این مقدار با آنچه ناظر سوار بر قطار سنجیده بود ($\Delta K = 13.5\text{J}$) مقاوت زیادی دارد.

اما پیش از آنکه به صحت قضیه کار-انرژی شک کنیم، کار انجام شده بر صندوق را از دید ناظر زمینی حساب می‌کنیم. چنانکه

شکل ۱۲ ب نشان می‌دهد، مقدار جایه‌جایی صندوق هم به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد. از دید ناظر زمینی، نیرو تنها در طی مسافت 4m وارد نشده بلکه در طی مسافت بزرگتر 5m عمل کرده است؛ قطار با سرعت 15m/s در مدت 2s $\Delta v/a = 15\text{m/s}/2\text{s} = 7.5\text{m/s}^2$ شتاب و زمان هر دو در مکانیک نیوتونی ناوردا هستند) که صندوق در حرکت است، بنابراین، جایه‌جایی $\Delta x' = 2\text{m}$ صندوق در این مدت برابر است با $15\text{m/s} \times 2\text{s} = 30\text{m}$. اما نیرو ناورداست؛ از دید ناظر زمینی، $F' = F = 5.63\text{N}$. بنابراین، ناظر زمینی نتیجه می‌گیرد که

$$W' = F'\Delta x' = (5.63\text{N})(30\text{m}) = 169\text{J}$$

پس قضیه کار-انرژی برای ناظر زمینی هم درست است! اگرچه این دو ناظر، مقادیر جایه‌جایی و سرعت را متفاوت مشاهده می‌کنند، و مقادیر کار و انرژی جنبشی را هم متفاوت به دست می‌آورند، اما هر دو نتیجه می‌گیرند که مقدار کار با تغییر انرژی جنبشی مساوی است. قانون ناوردا در فیزیک قانونی است که شکل آن در همه چارچوبهای مرجع لخت یکسان باشد. یک مثال خوب، همین قضیه کار-انرژی است، که ناوردا بودنش را دیدیم. در چارچوب لخت ناظر S ، که در فرایند خاصی کار را W و تغییر انرژی جنبشی را ΔK می‌سنجد، قضیه کار و انرژی به شکل $W = \Delta K$ است. ناظر S' که با سرعت ثابت نسبت به S حرکت می‌کند، در همان فرایند کار را W' و تغییر انرژی جنبشی را $\Delta K'$ می‌سنجد. در حالت کلی $W \neq W'$ و $\Delta K \neq \Delta K'$ است، اما ناظر S' هم نتیجه می‌گیرد که $W' = \Delta K'$ است. یک ناظر لخت دیگر، S'' ، هم می‌تواند نتیجه بگیرد که $W'' = \Delta K''$ است. شکل قضیه کار-انرژی از دید ناظرهای همه چارچوبهای لخت یکسان است. اصول ناورداشی، خیلی وقها سرنخی از کارکرد جهان طبیعی به دست می‌دهند؛ این اصول حاکی از آن هستند که فلان رابطه خاص، تصادفی و ناشی از موقعیت

در چارچوب هواییمای ۲، کابل کار مثبت انجام می‌دهد. از دید خلبان این هواییما، نیروی فنوار در خلاف جهت هواییمای خودش است، و جابه‌جایی هواییمای ۱ هم در همان جهت نیروست. پس در چارچوب مرجع هواییمای ۲ هم قضیه کارانرژی درست است، و این بار W و ΔK هر دو مثبت‌اند.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که هم علامت کاری که نیرو انجام می‌دهد و هم علامت تغییر انرژی جنبشی یک ذره معین، می‌تواند به چارچوب مرجع ناظر بستگی داشته باشد. اما با وجود این اختلاف در تعبیر، هر دو ناظر در اعتبار قضیه کارانرژی توافق دارند (پرسش ۲۲ را هم ببینید، که در آن این فرایند از دیدگاه خلبان هواییمای ۱ هم بررسی می‌شود).

مرجع فلان ناظر خاص نیست، بلکه اثر یک تقارن بنیادی طبیعت است.

مثال ۹. دو هواییمای یکسان، هر یک به جرم m ، با سرعت ثابت v نسبت به آب، بر فراز آب ساکن پرواز می‌کنند. هواییمای ۱ بر یک ناو هواییمای، که نسبت به آب ساکن است، فرود می‌آید. قلابی که در بدنه این هواییمای است به کابلی در عرشه وصل می‌شود، و کابل نیرویی از نوع نیروی فنر به هواییما وارد می‌کند تا هواییما متوقف شود. ناظری که در ناو ایستاده است، مسافت بین نقطه آغاز اتصال هواییما به کابل تا سکون کامل هواییما را برابر با d می‌سنجد. با چشمیوشی از نیروهای دیگر وارد بر هواییما (مثلًا اصطکاک)، درستی قضیه کارانرژی را از دید (الف) ناظر همراه با ناو و (ب) خلبان هواییمای ۲، که همچنان با همان سرعت اولیه در همان جهت اولیه پرواز می‌کند بررسی کنید.

حل: (الف) تغییر انرژی جنبشی برای ناظر سوار بر ناو برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

این ناظر مشاهده می‌کند که هواییما متوقف می‌شود، پس طبیعی است که تغییر انرژی جنبشی آن را منفی بسنجد. کابل یک نیروی فنوار برهواییما وارد می‌کند؛ اگر ثابت نیروی مؤثر را K بگیریم، این نیرو روی هواییما کاری به مقدار

$$W_s = -\frac{1}{2}kd^2$$

انجام می‌دهد. طبیعی است که این کار، از دید این ناظر، منفی است، زیرا هنگام فرود هواییما، نیروی فنوار و جابه‌جایی هواییما روی عرشه در خلاف جهت یکدیگرند. اگر از نیروهای دیگر (از جمله اصطکاک) صرفنظر کنیم، مطمئناً می‌توانیم هواییما را مثل ذره در نظر بگیریم، و برای این ناظر قضیه کارانرژی درست است. و دیگر اینکه در این چارچوب مرجع W و ΔK هر دو منفی‌اند.

(ب) از دید خلبان هواییمای ۲، انرژی جنبشی اولیه هواییمای ۱ صفر است: دو هواییما کنار هم پرواز می‌کنند و نسبت به هم حرکتی ندارند. هنگامی که هواییمای ۱ روی ناو هواییمای متوقف می‌شود، سرعت آن نسبت به هواییمای ۲ برابر با v است؛ پس تغییر انرژی جنبشی آن به صورت زیر است

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = +\frac{1}{2}mv^2$$

ممکن است عجیب به نظر برسد که از دیدگاه خلبان هواییمای ۲، انرژی جنبشی هواییمای ۱ زیاد می‌شود، اما در چارچوب مرجع هواییمای ۲، هواییمای ۱ در ابتدا ساکن بود و نهایتاً با سرعت v حرکت می‌کرده است.

۷-۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد^۱ (اختیاری)

در بخش قبل، برای تبدیل سرعت از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر، فرمول گالیله‌ای نیوتونی را به کار بردیم: $u' = u - v$. این فرمول را در بخش ۶-۶ به دست آوردیم و گفتیم که در سرعتهای زیاد معتبر نیست؛ در چنین سرعتهایی، باید رابطه صحیح را، که از نسبیت خاص حاصل می‌شود (معادله ۴۶ فصل ۴) بدکاربرد. اگر به این فکر افتاده باشید که فرمول $u' = u - v$ هم در سرعتهای زیاد نادرست از آب در می‌آید، درست فکر کرده‌اید.

فرمول کلی انرژی جنبشی، که می‌شود آن را در هر سرعتی به کار برد، چنین است

$$K = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \quad (25)$$

(این نتیجه را در فصل ۲۱ به دست خواهیم آورد). فرمول ۲۵ آیا معنی‌اش این است که mv^2 غلط است؟ در سرعتهای زیاد حتی چنین است، اما می‌توان نشان داد که معادله ۲۵، در سرعتهای کم واقعاً به mv^2 تبدیل می‌شود. برای این کار، به عبارت بسط دو جمله‌ای $(1+x)^p$ نیاز داریم

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots$$

در این رابطه n (بخوانید "فاکتوریل") به معنی حاصل ضرب همه اعداد صحیح از ۱ تا n است. پس، $2 \times 3 = 2! = 1 \times 2 \times 3! = 3!$ است. بسط دو جمله‌ای رابطه مفیدی است، به خصوص وقتی که x در مقایسه با ۱ کوچک باشد. مثلاً فرض کنید x در حدود 10^{-6} باشد.

۱. این بخش را می‌شود حذف کرد، یا تا بحث نسبیت در فصل ۲۱ به تعویق انتخیلت.

در این صورت، جمله دوم بسط، p_{xx} (اگر p خیلی بزرگ نباشد) خیلی کوچکتر از جمله اول است. جمله سوم از جمله دوم هم کوچکتر است، و به همین ترتیب. اگر جملات به همین ترتیب کوچک و کوچکتر شوند، ممکن است برای محاسبه‌ای خاص کافی باشد که فقط چند جمله را نگه داریم و از بقیه صرف نظر کنیم.

در معادله ۲۵ برای انرژی جنبشی، عبارت داخل کروشه شامل جمله $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{v^2}{c^2} - 1$ است. این عامل را می‌شود طبق فرمول دو جمله‌ای: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{v^2}{c^2} = x$ و $p = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ بسط داد. فرض می‌کنیم کافی است که مثلاً سه جمله بسط را نگه داریم

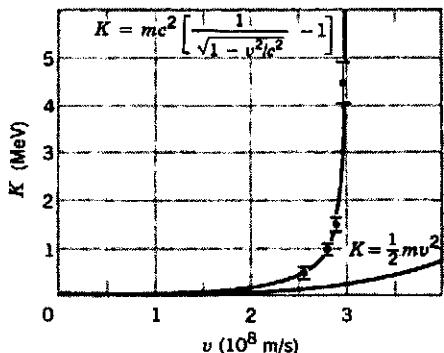
$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} &\approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} \end{aligned} \quad (26)$$

حالا معادله ۲۶ را در معادله ۲۵ می‌گذاریم

$$\begin{aligned} K &\approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

می‌توانید بینید که خطای نسبی انرژی جنبشی، اگر از $\frac{1}{2}mv^2$ استفاده کنیم، در حدود $(\frac{v^2}{c^2})^2$ است. حتی اگر سرعت ذره به 1% سرعت نور هم برسد، این خطای کمتر از ۱ قسمت در 10^2 است. سرعت‌های معمولی آزمایشگاهی، به ندرت از 10^{-6} برابر سرعت نور بیشترند؛ بنابراین، خطای استفاده از $\frac{1}{2}mv^2$ به مرتب کمتر از دقت ما در اندازه‌گیری انرژی است، و $\frac{1}{2}mv^2$ تقریب بسیار خوبی است.

معادله ۲۵ همیشه درست است، چه در سرعت‌های زیاد و چه در سرعت‌های کم. پس چرا همیشه آن را به کار نبریم و $\frac{1}{2}mv^2$ را بدکلی کنار نگذاریم؟ اگر این کار را بکنیم در عمل با مشکل رویرو می‌شویم. معادله ۲۵ را به ازای $s = 300\text{ m/s}$ با سرعت $v = 10^{-6}c$ حل کنید؛ این سرعت، با بیشتر معیارها سرعت معقولی است (تقریباً برابر با سرعت صوت در هوا)، اما در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک است ($v/c = 10^{-12}$ و $\frac{1}{2}mv^2 = 10^{-12}c^2$). اگر عبارت داخل کروشه معادله ۲۵ را با ماشین حساباتن محاسبه کنید، احتمالاً صفر بدست خواهد آورد. علتی این است که ماشین حساب شما فقط ۸ یا ۹ رقم بدکار می‌برد. عبارت $10^{-12} - 1$ را "دقیقاً" برابر با ۱ براورد خواهد کرد. در عمل، اگر v کمتر از 1% سرعت نور باشد، عبارت $\frac{1}{2}mv^2$ را بدکار می‌بریم که دقت کافی دارد و محاسبه آن هم ساده‌تر است؛ و معادله ۲۵ را برای سرعت‌های زیادتر نگه می‌داریم.



شکل ۱۳. مقایسه فرمولهای کلاسیک و نسبیتی انرژی جنبشی الکترون. در سرعت‌های کم، دو فرمول یک نتیجه می‌دهد، اما داده‌ها به روشنی نشان می‌دهند که در سرعت‌های نزدیک به سرعت نور، فرمول نسبیتی درست است.

شکل ۱۳ نتایج آزمون تجربی معادله ۲۵ را نشان می‌دهد. در این آزمایش، الکترونها را تا انرژی جنبشی معینی شتاب می‌دهند و سپس سرعت‌شان را، از طریق سنجش زمان لازم برای طی یک مسافت معین، به دست می‌آورند. روشن است که در سرعت‌های زیاد، داده‌ها به نفع نتایج حاصل از نظریه نسبیت‌اند. به این هم توجه کنید که در سرعت‌های کم، دو منحنی از هم قابل تشخیص نیستند.

مثال ۱۰. شتابدهنده توatron آزمایشگاه شتابدهنده فرمی، پروتون را تا انرژی جنبشی ای در حدود 1 TeV (یعنی 10^{12} eV ، که هر پروتون برابر با $J = 10^{-11} \times 10^{12} \times 10^{-16} \text{ A}$ است) شتاب می‌دهد. سرعت یک پروتون 1 TeV چقدر است؟ جرم پروتون 10^{-27} kg است. حل: انرژی جنبشی پروتون $V = 1\text{ TeV}$ ، بر حسب یکای SI برابر است با

$$K = 1\text{ TeV} = 10^{-7}\text{ J}$$

بنابراین، با استفاده از معادله ۲۵

$$10^{-7}\text{ J} = (10^{-7}\text{ J}) \times (10^8\text{ m/s})^2 \times (3 \times 10^{-27}\text{ kg})$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

از حل این معادله معلوم می‌شود که

$$v/c = 0.99999956$$

یعنی v البته از c کوچکتر است؛ تنها 132 m/s با c اختلاف دارد.

پرسشها

۱۳. آیا در مورد جسمی که تحت اثر نیروی اصطکاک باشد هم قضیه کارانژویی درست است؟ توضیح بدهید.

۱۴. کار نیروی خالص وارد بریک ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن. آیا ممکن است که کار بکی از مؤلفه‌های نیرو بزرگتر از تغییر انرژی جنبشی باشد؟ اگر چنین است، مثال بیاورید.

۱۵. چرا یک اتومبیل سواری در سر بالایی به راحتی می‌تواند از یک کامیون پر از بار جلو بزند؟ البته کامیون سنگین‌تر هست اما موتورش هم به همان نسبت قویتر است. (آیا واقعاً چنین است؟) چه ملاحظاتی در طراحی توان موتور کامیون و موتور اتومبیل سواری دخالت دارد؟

۱۶. آیا توان لازم برای بالا بردن یک جعبه و گذاشتن آن روی سکو، به سرعت انجام این کار بستگی دارد؟

۱۷. چند تا از کتابهای کتابخانه را، طی زمان Δt ، از یک فکسه به قفسه بالاتر می‌برید. آیا کاری که انجام می‌دهید (الف) به جرم کتابها، (ب) به وزن کتابها، (ج) به ارتفاع قفسه بالایی نسبت به زمین، (د) به زمان Δt و (ه) به این که کتابها را زیگزاگ بالا برید یا مستقیم، بستگی دارد؟

۱۸. رکورد جهانی پرش با نیزه در حدود ۵m است. آیا می‌شود با استفاده از نیزه‌ای بلندتر این رکورد را، مثلاً به ۸m رساند؟ اگر نه چرا؟ یک قهرمان پرش اصولاً تا حدود چه ارتفاعی امکان دارد بالا برد؟

۱۹. امروزه از "بحران انرژی" زیاد صحبت می‌شود. به نظر شما صحبت از "بحران توان" درست‌تر نیست؟

۲۰. آیا کار حاصل از نیروی خالص وارد بریک ذره به چارچوب مرجع (الخت) ناظر بستگی دارد؟ تغییر انرژی جنبشی چطور؛ اگر چنین است، چند مثال بزنید.

۲۱. مردی سوار بر قایق، برخلاف جهت جريان آب پارو می‌زندو نسبت به ساحل ساکن است. (الف) آیا این مرد کاری انجام می‌دهد؟ (ب) اگر پارو زدن را متوقف کند و همراه با جريان آب جلو برود، آیا کاری روی او انجام می‌شود؟

۲۲. قضیه کارانژویی را از دیدگاه چارچوب مرجع خلبان هواییای در مثال ۹ بررسی کنید. آیا قضیه در این حالت نقض می‌شود؟ توضیح بدهید.

۲۳. می‌گوییم که الکترون 1keV ذره‌ای "کلاسیک" است، الکترون 1MeV ذره‌ای "نسیتی" است، والکترون 1GeV ذره‌ای "فوق‌نسیتی" است. منظور از این اصطلاحات چیست؟

مسئله‌ها

بخش ۱-۷ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد

۱. کارگری برای هل دادن صندوقی به جرم $5,2\text{kg}$ ، نیرویی برابر با $N_{19^{\circ}}$ در جهت 22° زیر سطح افقی بر آن وارد می‌کند. صندوق

۱. نگاه کنید

۱. آیا می‌توانید کلمات دیگری، مثل کار، نام ببرید که معنی آنها در زبان روزمره عموماً با معنی علمی‌شان متفاوت باشد؟

۲. توضیح بدهید که چرا هنگامی که دیواری را فشار می‌دهید، والبته نمی‌توانید آن را حرکت بدهید، بدین شما خسته می‌شود، مگر نه اینکه کاری روی دیوار انجام نمی‌شود؟

۳. سه نیروی ثابت بر ذره‌ای وارد می‌شوند و ذره از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر می‌رود ثابت کنید که کار حاصل از برایند این سه نیرو برابر است با مجموع کارهای حاصل از تک‌تک نیروها که جداگانه حساب شده باشد.

۴. سطح شیبدار (مثال ۱) یک "ماشین" ساده است که به کمک آن می‌توانیم با نیروی کوچکتر (از آنچه بدون استفاده از ماشین لازم است) کار انجام بدهیم. در مورد گوه، اهرم، پیچ، چرخ‌دنده، و ترکیباتی از قرقه‌ها (مسئله ۹) هم همین طور است. اما این ماشینها نه تنها کار را کم نمی‌کنند بلکه عملأً قدری هم زیاد می‌کنند. چرا؟ چرا این ماشینها را به کار می‌بریم؟

۵. در یک مسابقه طناب‌کشی، یک تیم به آهستگی وامی دهد و به طرف

تیم حرفی کشیده می‌شود. چه کاری انجام می‌شود و توسط چه تیمی؟

۶. چرا یک کیلومتر دوچرخه سواری در یک مسیر افقی، خیلی آسانتر از دویدن در همین مسافت است؟ در هر مورد باید وزن خودتان را

یک کیلومتر منتقل کنید، و در مورد اول باید دوچرخه را هم با خودتان را

بربرید و تازه طی زمان کوتاه‌تر هم این مسافت را طی کنید؟

۷. فرض کنید مدار گردش زمین به دور خورشید دقیقاً دایره باشد. در

این صورت آیا خورشید روی زمین کاری انجام می‌دهد؟

۸. توپ بولینگی را به آرامی از زمین بلند می‌کنید و روی میز می‌گذارد.

دو نیرو به توپ وارد می‌شود: وزن توپ، mg ، و نیروی رو به بالای شما، $-mg$. این دو نیرو یکدیگر را خشتمی کنند، چنانکه کلاً کاری انجام نمی‌شود. از طرف دیگر، می‌دانید که دست شما کار انجام می‌دهد. اشکال در کجاست؟

۹. فنri را نصف می‌کنیم. ثابت نیروی فنri اولیه، k ، با ثابت نیروی هر یک از دونیمه حاصل چه رابطه‌ای دارد؟

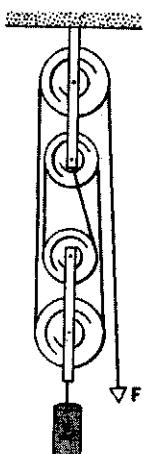
۱۰. فن‌های A و B یکسان‌اند جز آنکه A سخت‌تر از B است؛ یعنی، $k_A > k_B$. اگر دو فن را (الف) به یک اندازه و (ب) با یک

نیرو بکشیم، روی کدام یک کار بیشتری انجام می‌شود؟

۱۱. آیا انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم مورد نظر بستگی دارد؟ آیا می‌تواند منفی باشد؟ آیا مقدار آن به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد؟

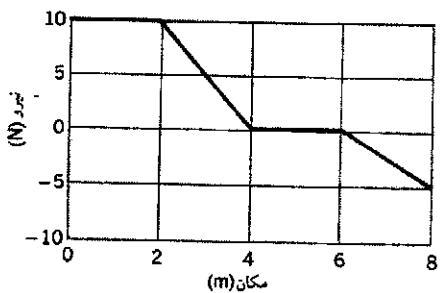
۱۲. کتابی را از زمین بر می‌دارید و روی میز می‌گذارید؛ در این حالت کار انجام می‌دهید، اما انرژی جنبشی کتاب تغییر نمی‌کند. آیا قضیه کارانژویی در این مورد نقض شده است؟ اگر جوابتان مثبت است چرا، و اگر نه باز هم چرا؟

اصطکاک در همه جای سیستم ناجائز است، وزن کل دو قرقه‌ای را که بار به آنها وصل است $1b = 20\text{ lb}$ بگیرید. می‌خواهیم باری F به وزن 840 lb را 12° ft بالا ببریم. (الف) حداقل نیروی F لازم برای این کار چقدر است؟ (ب) چقدر کار باید در برابر گرانش انجام داد تا بارتا این ارتفاع بالا برود؟ (ج) نقطه اثر نیروی اعمال شده را به چه مسافتی باید حرکت داد تا بار 12° ft بالا برود؟ (د) نیروی F چقدر کار باید انجام بدهد تا بار به اندازه مورد نظر بالا برود؟



شکل ۱۴. مسئله ۹

بخش ۲.۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک بعدی ۱۰. جسمی به جرم 5 kg روی خط راستی بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. طی حرکت نیرویی وابسته به مکان بر آن وارد می‌شود، که به صورت شکل ۱۵ است. این نیرو، طی تغییر مکان ذره از مبدأ تا $x = 8\text{ m}$ چقدر کار انجام می‌دهد؟



شکل ۱۵. مسئله ۱۰

۱۱. جسمی به جرم 10 kg در راستای محور x حرکت می‌کند.تابع شتاب جسم بر حسب مکان، به صورت شکل ۱۶ است. کار خالص انجام شده روی ذره، طی حرکت آن از $x = 0$ تا $x = 8\text{ m}$ چقدر

به اندازه 3 m^3 جایه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمودی وارد بر صندوق از سطح زمین، هر یک چقدر کار روی صندوق انجام می‌دهند؟

۲. جسمی به جرم 106 kg با سرعت 51 m/s روی خطی راست حرکت می‌کند. (الف) این جسم را با شتاب کندکننده 97 m/s^2 را متوقف می‌کنیم. چه نیرویی لازم است، جسم طی چه مسافتی متوقف می‌شود، و این نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) اگر شتاب کندکننده 82 m/s^2 باشد، جواب این پرسشها چه می‌شود؟

۳. کارگری صندوقی به جرم 25 kg را روی سطح شیبداری با زاویه شیب 27° به بالا هل می‌دهد؛ این کارگر نیرویی برابر با $N = 120$ ، موازی با سطح شیبدار، به صندوق وارد می‌کند. صندوق 36 m جایه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمود بر سطح شیبدار، هر یک چقدر کار انجام می‌دهند؟

۴. با استفاده از میدان الکتریکی می‌شود از فلزات الکترون خارج کرد. برای اینکه یک الکترون از تنگستان جدا کنیم، میدان الکتریکی باید $V = 45\text{ eV}$ کار انجام بدهد. فرض کنید که میدان الکتریکی در طی مسافت $nm = 4\text{ nm}$ اثر می‌کند. حداقل نیرویی که میدان باید بر الکترون وارد کند تا الکترون از فلز کننده شود، چقدر است؟

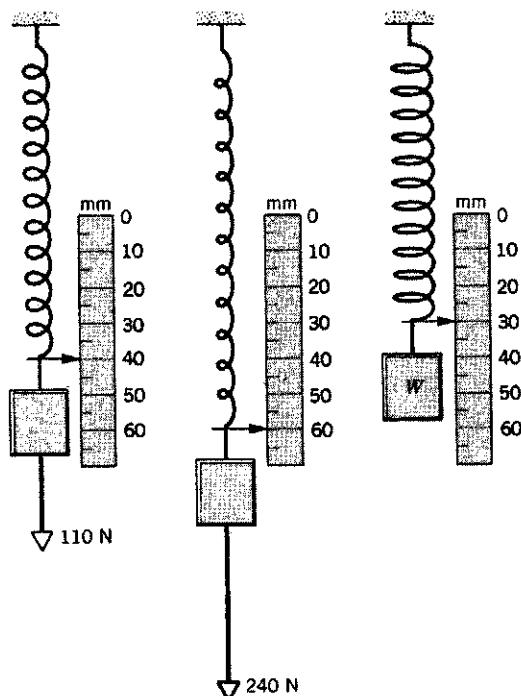
۵. با استفاده از یک طناب، جسمی به جرم M را با شتاب ثابت رو به پایین $\frac{g}{4}$ ، به اندازه مسافت d در امتداد قائم پایین می‌آوریم. (الف) طناب چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟ (ب) نیروی گرانش چقدر کار انجام می‌دهد؟

۶. کارگری جسمی به وزن $77lb = 58.6\text{ kg}$ را روی سطح افقی تا مسافت 31.3 ft (یعنی 9.54 m) منتقل می‌کند. جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند و نیروی کارگر در جهت 32° Zir سطح افقی به جسم وارد می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی 21° Re است. کارگر چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟

۷. الواری به جرم 52 kg را به اندازه 95 m ، با سرعت ثابت، روی سطح شیبداری با زاویه 28° به طرف بالا هل می‌دهیم. برای این کار، یک نیروی ثابت افقی به الوار وارد می‌کنیم. ضریب اصطکاک جنبشی بین الوار و سطح شیبدار 19° است. (الف) کار نیروی اعمال شده و (ب) کار نیروی گرانشی را حساب کنید.

۸. قطعه یخی به جرم $2kg = 47.2\text{ N}$ روی سطح شیبداری به طول 1.62 m و ارتفاع 2 m به طرف پایین می‌لغزد. کارگری به این قطعه یخ در راستای موازی سطح شیبدار طوری به طرف بالا نیرو وارد می‌کند که یخ با سرعت ثابت پایین بیاید. ضریب اصطکاک جنبشی میان یخ و سطح شیبدار 110° است. (الف) نیرویی را که کارگر وارد می‌کند و (ب) کاری را که کارگر روی قطعه یخ انجام می‌دهد، و (ج) کاری را که گرانش روی قطعه یخ انجام می‌دهد بپیدا کنید.

۹. شکل ۱۴ آرایه‌ای از قرقه‌ها را نشان می‌دهد که به کمک آن کشیدن بار سنگین L به طرف بالا آسانتر می‌شود. فرض کنید



شکل ۱۸. مسئله ۱۵

بخش ۳-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دو بعدی ۱۶. با انتگرال‌گیری در امتداد قوس، نشان بدهید که کارگرانش، در مثال ۴ برابر با mgh است.

۱۷. جسمی به جرم 75 kg روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و به ریسمانی متصل است که از سوراخی در میز می‌گذرد؛ جسم با سرعت ثابت روی دایره‌ای افقی به مرکز این سوراخ حرکت می‌کند. (الف) اگر شعاع دایره 50 cm و سرعت جسم 10 m/s باشد، کشنش ریسمان چقدر است؟ (ب) مشاهده می‌شود که اگر 20 cm دیگر از ریسمان را به درون سوراخ بکشیم، و در نتیجه شعاع دایره را به 30 cm برسانیم، کشنش ریسمان 36 N برابر می‌شود. کل کاری که ریسمان، طی این کاهش شعاع، روی جسم گردان انجام می‌دهد چقدر است؟

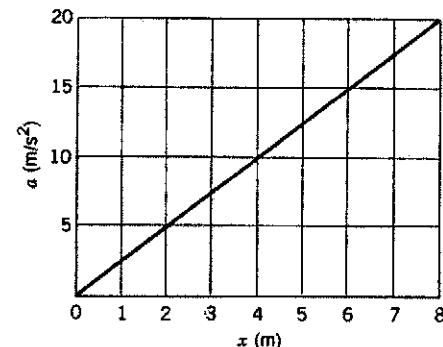
بخش ۴-۷ انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی

۱۸. انرژی جنبشی هر یک از این اجسام را در سرعتهای مشخص شده حساب کنید. (الف) یک بازیکن فوتبال به جرم 70 kg و با سرعت 10 m/s ؛ (ب) گلوله‌ای به جرم 42 g و با سرعت 950 m/s ؛

ناو هوایپیما بر نیمیتس به جرم 140 t و با سرعت 32 m/s .

۱۹. یک الکترون رسانش در مس، در دمای نزدیک به صفر مطلق، 42 eV انرژی جنبشی دارد. سرعت آن چقدر است؟

۲۰. پروتونی در یک شتابدهنده خطی شتاب می‌گیرد، در هر مرحله دستگاه، پروتون در جهت حرکتش شتاب 10^{15} m/s^2 دارد. مسئله ۱۸

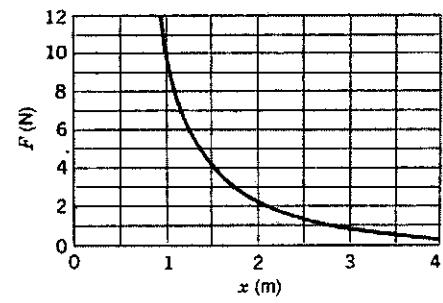


شکل ۱۶. مسئله ۱۱

۱۲. ثابت نیروی فنر 15 N/cm است. (الف) چقدر کار لازم است تا فنر از حالت آزاد، به اندازه 60 mm کشیده شود؟ (ب) چقدر کار لازم است تا فنر را، از این حالت، 60 mm دیگر بکشیم؟

۱۳. نیروی وارد بر جسمی، $F = F_0(x/x_0 - 1)$ است. کار انجام شده طی حرکت جسم از $x = 0$ تا $x = 3x_0$ را با رسم منحنی $F(x)$ و حساب کردن مساحت زیرمنحنی و (ب) با محاسبه تحلیلی انتگرال به دست بیاورید.

۱۴. (الف) کار انجام شده توسط نیروی شکل ۱۷ را، طی تغییر مکان ذره از $x = 1\text{ m}$ تا $x = 3\text{ m}$ ، تخمین بزنید. بازه‌ها را کوچکتر کنید و بینید که تا چه حد می‌توانید به جواب دقیق 6 J نزدیک شوید. (ب) معادله تحلیلی این منحنی، $F = A/x^2$ است که در آن $A = 9\text{ Nm}^2$. کار را با انتگرال‌گیری به دست بیاورید.



شکل ۱۷. مسئله ۱۴

۱۵. شکل ۱۸ فنری را نشان می‌دهد که یک شاخص به انتهای آن متصل است، مجاور فنر، خطکشی که بر حسب میلی‌متر مدرج شده، آویزان است. مطابق شکل. سه وزنه متفاوت را به نوبت از فنر می‌آویزیم. (الف) اگر هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نباشد، شاخص چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) وزن W چقدر است؟

۲۷. پدر و پسری در حال دویدن‌اند. جرم پسر نصف جرم پدر اما انرژی جنبشی اش دو برابر انرژی جنبشی پدر است. پدر به اندازه 10^0 m/s را به سرعت خودش اضافه می‌کند و انرژی جنبشی اش با انرژی جنبشی پسر برابر می‌شود. سرعت پسر و سرعت اولیه پدر چقدر بوده است؟

۲۸. پرتابهای به جرم $kg 550$ با انرژی جنبشی اولیه $J 155$ از لبه صخره‌ای پرتاب می‌شود؛ نقطه اوج پرتابه 140 m بالاتر از نقطه پرتاب است. (الف) مؤلفه افقی سرعت پرتابه چقدر است؟ (ب) مؤلفه عمودی سرعت پرتابه، درست پس از پرتاب، چقدر بوده است؟ (ج) در لحظه‌ای در حین پرواز، مؤلفه عمودی سرعت پرتابه $m/s 65$ می‌شود. در این لحظه، پرتابه چقدر بالاتر یا پایین‌تر از نقطه پرتاب است؟

۲۹. دنباله‌داری به جرم $kg 10^{11} \times 38$ ، با سرعت نسبی $km/s 30$ به زمین برخورد می‌کند. (الف) انرژی جنبشی دنباله‌دار را بر حسب "مگان TNT" حساب کنید؛ انفجار ۱ میلیون تن TNT انرژی ای برابر با $J 10^{15} \times 42$ آزاد می‌کند. (ب) قطر حفره‌ای که در اثر یک انفجار بزرگ ایجاد می‌شود، با توان یک سوم انرژی آزاد شده متناسب است، و قطر حفره حاصل از انفجار ۱ مگان TNT برابر با 1 km است. قطر حفره حاصل از برخورد این دنباله‌دار چقدر است؟ (ممکن است که در گذشته، آثار جوی حاصل از برخورد دنباله‌دارها به زمین، موجب انفراض بسیاری از گونه‌های جانوران و گیاهان شده باشد؛ گمان می‌رود که دایناسورها هم در اثر پیامدهای چنین برخوردی منقرض شده باشند).

۳۰. یک " بشقاب " پلاستیکی چرخان [فریزبی] به جرم 125 g با سرعت $m/s 12.3$ ، از ارتفاع $m 6$ را بالای سطح زمین پرتاب می‌شود. هنگامی که بشقاب به ارتفاع $m 3.2$ رسید، سرعت آن $m/s 9.57$ می‌شود. (الف) گرانش چقدر کار روی بشقاب انجام داده است؟ (ب) چقدر انرژی جنبشی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ چرخش بشقاب را در نظر نگیرید.

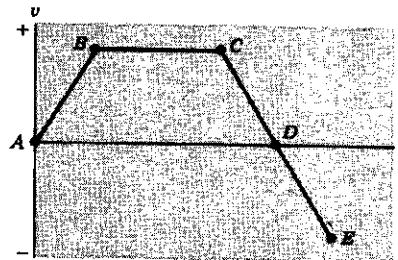
۳۱. توپ موقع واجهیدن از یک پیاده‌روی بتوانی، 15° از انرژی جنبشی اش را از دست می‌دهد. این توپ را باید با چه سرعت اولیه‌ای در امتداد قائم از ارتفاع $m 12.4$ به طرف پایین پرتاب کرد تا، پس از واجهیدن، دوباره به همان ارتفاع برگردد؟ فرض کنید مقاومت هوا ناچیز است.

۳۲. یک توپ لاستیکی که از ارتفاع $ft 6$ رها شده است چندین بار به زمین می‌خورد و از آن وامی جهد؛ در هر برخورد، 10% انرژی توپ از دست می‌رود. چند برخورد باید انجام شود تا توپ دیگر نتواند به ارتفاع بالاتر از $ft 3$ برسد؟

۳۳. جسمی به جرم $g 263$ روی فنر قائم که ثابت آن $N/cm 252 = k$ است می‌افتد (شکل ۲۰). جسم به فنر می‌چسبد و آن را $cm 11.8$ فشرده می‌کند تا خودش به حالت سکون لحظه‌ای برسد. در طی فشرده شدن فنر (الف) نیروی گرانش و (ب) فنر چقدر کار انجام می‌دهند؟ (ج) سرعت جسم درست پیش از برخورد به فنر، چقدر بوده است؟ (د) اگر سرعت اولیه جسم دو برابر شود، بیشترین مقدار فشرده‌گی فنر چقدر می‌شود؟

می‌گیرد. اگر پروتون با سرعت اولیه $m/s 10^7 \times 40$ به یکی از این مراحل، که طول آن $cm 350$ است وارد شود (الف) سرعت پروتون در پایان این مرحله و (ب) مقدار انرژی جنبشی‌ای که در اثر این شتاب به انرژی قبلی اش افزوده می‌شود. چقدر است؟ جرم پروتون $kg 10^{-27} \times 67$ است. انرژی را بر حسب الکترون ولت بیان کنید.

۲۱. نیرویی بر ذره‌ای، که روی خط راست حرکت می‌کند، وارد می‌شود. نمودار سرعت-زمان ذره در شکل ۱۹ نشان داده شده است. علامت (منبیت یا منفی) کاری را که نیرو در هر یک از بازه‌های AB ، BC ، CD ، و DE ، روی ذره انجام می‌دهد پیدا کنید.



شکل ۱۹. میلۀ ۱۹

۲۲. برای سفر به ماه، یک موشک ساترن V به جرم $kg 2.9 \times 10^5$ که حامل یک فضاییمای آبولو است، باید به سرعت گریز $km/s 11.2$ (یعنی $mi/h 25000$) در نزدیکی سطح زمین برسد. سوخت موشک باید حاوی چقدر انرژی باشد؟ آیا عملاً سیستم به همین مقدار انرژی نیاز دارد یا کمتر یا بیشتر؟ چرا؟

۲۳. اتومبیلی به وزن $lb 2800$ را در نظر بگیرید. این اتومبیل از چه ارتفاعی باید سقوط کند تا انرژی جنبشی آن برابر با همین انرژی در زمانی باشد که با سرعت $mi/h 55$ حرکت می‌کند؟ آیا جواب به وزن اتومبیل بستگی دارد؟

۲۴. اتومبیلی به جرم $kg 1100$ ، با سرعت $km/h 46$ در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. راننده طوری ترمز می‌کند که اتومبیل $J 51$ انرژی جنبشی از دست می‌دهد. (الف) سرعت اتومبیل در این حالت چقدر است؟ (ب) ترمز باید چقدر دیگر از انرژی جنبشی اتومبیل را بگیرد تا اتومبیل کاملاً متوقف شود؟

۲۵. باریکنی توپ بیسبال را با سرعت $m/s 36.6$ (یعنی $ft/s 120$) پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه باریکن دیگری توپ را در همان ارتفاع بگیرد، سرعت توپ به $ft/s 110$ (یعنی $m/s 33.5$) کاهش یافته است. چقدر انرژی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ وزن توپ بیسبال $oz 9.02$ است ($m = 255 \text{ g}$).

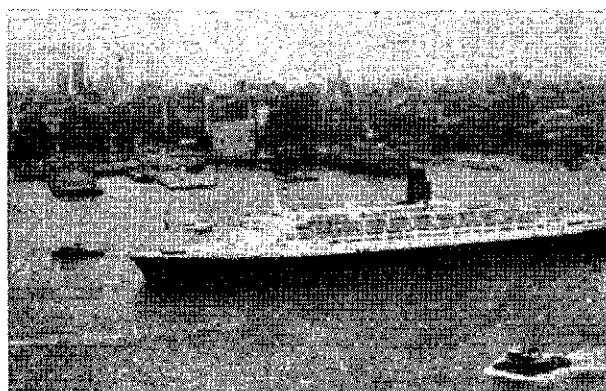
۲۶. زمین سالی یک بار به دور خورشید می‌گردد. چقدر کار باید بر زمین انجام داد تا نسبت به خورشید ساکن شود؟ برای به دست آوردن داده‌های عددی به پیوست ج رجوع کنید، و چرخش زمین به دور محور خودش را در نظر نگیرید.

در این سرعت چقدر است؟



شکل ۲۱. مسئله ۴۱

۴۲. توان کشتی مجلل "ملکه البریتانی دوم" (شکل ۲۲) از یک نیروگاه الکتریکی دیزلی جدید تأمین می‌شود، که جایگزین ماشینهای بخار اولیه آن شده است. بیشینه توان خروجی 92MW است که در این توان، کشتی با سرعت 25 km/h حرکت می‌کند. در این بیشترین سرعت کشتی، پروانه‌های کشتی چه نیرویی برآب وارد می‌کنند؟

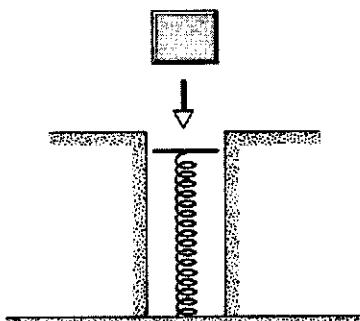


شکل ۲۲. مسئله ۴۲

۴۳. اتومبیلی به جرم 1600 kg ، با سرعت 26 m/s (یعنی 94 km/h) در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. اگر کل نیروهای مقاوم $N = 720$ باشد، توان خروجی موتور چند اسب بخار است؟

۴۴. در هر دقیقه، 23800 m^3 آب از آبشاری به ارتفاع 3 m به پایین می‌ریزد. فرض کنید 58% انرژی جنبشی ای که آب در طی سقوط کسب می‌کند، به کمک یک مولد هیدرالکتریکی، به انرژی الکتریکی تبدیل شود. توان خروجی مولد را حساب کنید. (چگالی آب 1000 kg/m^3 است).

۴۵. فرض کنید میزان مصرف بنزین اتومبیل شما 30 mi/gal است. (الف) با 1kWh انرژی، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) اگر سرعت اتومبیل 55 mi/h باشد، آهنگ مصرف انرژی چقدر است؟ (گرمای سوخت بنزین $Ramin.samad@yahoo.com$ MJ/gal 140 است.



شکل ۲۰. مسئله ۴۲

۴۴. با تعمیم اثبات حالت یک بعدی معادله ۱۹، نشان بدید که این معادله در حالتهای دو و سه بعدی هم درست است.

بخش ۷.۵ توان

۴۵. زنی به جرم 57 kg از بلکانی به ارتفاع 4.5 m در مدت 3.5s بالا می‌رود. توان متوسطی که باید مصرف کند چقدر است؟

۴۶. یک دستگاه بالابر، 100° نفر اسکی باز به وزن متوسط 667 N را طی 5.5s ، با سرعت ثابت تا ارتفاع 152 m بالا می‌برد. توان خروجی موتور بالابر، به فرض اینکه هیچ اثلاف ناشی از اصطکاکی در کار نباشد، چقدر است؟

۴۷. شناگری با سرعت 22 m/s در آب شنا می‌کند. نیروی مقاومت آب، که با حرکت او مخالفت می‌کند، $N = 110$ است. شناگر با چه توانی شنا می‌کند؟

۴۸. دونده‌ای به جرم 8 kg 68 m مسافت 4 m را ابتدا مسابقه را در مدت 6.5s می‌دود. دونده از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتاب او در این مدت ثابت است. سرعت او در پایان 8.5s چقدر است؟ (ب) از روی جنبشی اش چقدر است؟ (ج) توان متوسط او، طی این 8.5s ، چقدر است؟

۴۹. اسپی گاری‌ای را با نیروی 42 lb که با زاویه 27° بالای سطح افقی اعمال می‌شود می‌کشد و با سرعت 6.2 mi/h 6.6 m حرکت می‌کند. (الف) اسپ در مدت 12 min چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان خروجی اسپ را، بر حسب hp حساب کنید.

۵۰. یک شرکت سازنده اتومبیل می‌گوید که حداقل توانی که موتور اتومبیلی به جرم 1230 kg می‌تواند تحويل بدهد، 92.4 kW است. حداقل زمان لازم برای اینکه این اتومبیل از حالت سکون به سرعت 1 m/s (2.9 mi/h (یعنی 85 cm/s) برسد چقدر است؟ در یک آزمون، این زمان برابر با 12.38 s (۱۲.۳۸ اندازه‌گیری شده) است. علت اختلاف بین این دو زمان چه می‌تواند باشد؟

۵۱. کشتی هواپیمایی هیدنورگ، شکل ۲۱ بالونی بود محتملی گاز هیدروژن که می‌توانست با استفاده از 4800 hp توان موتورهایش، با سرعت 77 km/h حرکت کند. نیروی مقاومت هوا (بر حسب نیوتون) برای این بالون

نیاز به دید که v از رابطه زیر بدست می‌آید

$$v = \left(\frac{2xP}{m} \right)^{1/2}$$

۵۳. (الف) نیاز به دید که توان خروجی هواپیمایی که با سرعت ثابت v به طورافقی پرواز می‌کند متناسب با v^2 است. نیروی اصطکاک آزادینامیکی را $D = bv^2$ بگیرید. (ب) توان موتورها را به چه نسبتی زیاد کنیم تا سرعت هواپیما نسبت به هوای 25% زیاد شود؟

۵۴. یک ماشین تیزکن، چرخی به شعاع 7 cm 20 rev/min دارد و در هر ثانیه 2 دور می‌زند. ابزاری را که باید تیز شود با نیروی 180 N بر لبه چرخ می‌فشاریم. این ماشین چه توانی دارد؟ ضریب اصطکاک بین ابزار و چرخ 32° است.

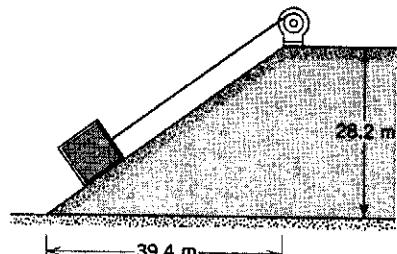
۵۵. یک پله برقی، دو طبقه را که فاصله شان از هم 20 m است به هم مرتبط می‌کند. طول پله برقی 3 m و سرعت حرکت آن در راستای خودش 62 cm/s است. (الف) فرض کنید پله باید هر دقیقه 100 N فری، به جرم متوسط 75 kg ، را جابه‌جا کند. در این صورت، موتور آن چقدر توان باید تحويل بدهد؟ (ب) مردی به جرم 83 kg از پله برقی متوجه بالا می‌رود و طی 5.0 s به طبقه بالا می‌رسد. موتور پله برقی چقدر کار روی او انجام می‌دهد؟ (ج) اگر همین مرد، وسط راه برگردد و به طرف پایین حرکت کند، چنان‌که در ارتفاع ثابتی باقی بماند، آیا موتور روی او کار انجام می‌دهد؟ اگر می‌دهد، چقدر توان برای این کار مصرف می‌شود؟ (د) آیا راهی (دیگر) به نظرتان می‌رسد که مرد بتواند روی پله برقی راه ببرد، بی‌آنکه توانی از موتور را مصرف کند؟

۵۶. یک لوکوموتیو 55 MW را، هنگامی که با توان کامل کارمی‌کند، قطار را طی $min 4\text{ s}$ از سرعت 10 m/s به سرعت 25 m/s می‌رساند. (الف) با چشمیوشی از اصطکاک، جرم قطار را محاسبه کنید. (ب) سرعت قطار را در این بازه به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به دست بیاورید. (ج) تیروی شتاب‌دهنده به قطار را به صورت تابعی از زمان، در این بازه، به دست بیاورید (د) مسافتی را که قطار در این مدت می‌پیماید حساب کنید.

۵۷. نیروی مقاوم در برابر حرکت اتومبیل ناشی از دو عامل است: اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل از سرعت v است، و مقاومت آزادینامیک، که متناسب با v^2 است. برای اتومبیل خاصی به وزن $N = 12000\text{ N}$ ، کل نیروی مقاوم F برابر است با $F = 300 + 1.8v^2$. که در آن F بر حسب نیوتون و v بر حسب متر بر ثانیه است. موتور چه توانی باید داشته باشد تا بتواند، در سرعت 80 km/h ، به اتومبیل 8 m/s^2 شتاب بدهد؟

۵۸. یک تنظیم‌کننده سرعت شامل دو گلوله، هر یک به جرم g ، 200 g ، است که با میله‌های صلب و سبک به طول 10 cm به محور قائم چرخانی متصل اند (شکل ۲۴). میله‌ها به محور لولا شده‌اند، چنان‌که با چرخش محور، گلوله‌ها هم با آن می‌چرخدند و از محور فاصله می‌گیرند. این آسانسور باید طی 43 s ، به اندازه 54.5 m به طرف پایین برود. جرم وزنه مقابله 1380 kg است. توان خروجی موتور آسانسور، بر حسب hp ، چقدر است؟ از کار لازم برای راه انداختن و متوقف کردن آسانسور صرف نظر کنید، یعنی فرض کنید سرعت آسانسور ثابت است.

۵۹. اتومبیلی به وزن 1700 lb ($m = 1680\text{ kg}$) از حالت سکون شروع به حرکت در جاده‌ای افقی می‌کند و، طی 33 s ، به سرعت 45 mi/h (یعنی 72 km/h) می‌رسد. (الف) ارزی جنبشی اتومبیل در پایان این 33 s چقدر است؟ (ب) توان خالص متوسطی که اتومبیل، طی این 33 s ، دریافت کرده است چقدر است؟ (ج) با فرض اینکه شتاب اتومبیل ثابت بوده باشد، توان لحظه‌ای آن در پایان این 33 s چقدر است؟



۴۷. شکل ۲۳. مسافتة

۴۸. اتومبیلی به وزن 1700 lb ($m = 1680\text{ kg}$) از حالت سکون شروع به حرکت در جاده‌ای افقی می‌کند و، طی 33 s ، به سرعت 45 mi/h (یعنی 72 km/h) می‌رسد. (الف) ارزی جنبشی اتومبیل در پایان این 33 s چقدر است؟ (ب) توان خالص متوسطی که اتومبیل، طی این 33 s ، دریافت کرده است چقدر است؟ (ج) با فرض اینکه شتاب اتومبیل ثابت بوده باشد، توان لحظه‌ای آن در پایان این 33 s چقدر است؟

۴۹. جسمی به جرم m از حالت سکون به طور یکنواخت شتاب می‌گیرد و طی زمان t_f به سرعت v_f می‌رسد. (الف) نیاز به دید که کار انجام شده روی جسم، به صورت تابعی از زمان، بر حسب v_f و t_f برابر است با

$$W = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t_f^2$$

(ب) توان مصرفی جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۵۰. نیرویی بر ذره‌ای به جرم 2.80 kg اثر می‌کند؛ مکان ذره، بر حسب زمان، $x = 3t^2 + 4t^3 - 3t = 3t$ است، که در آن x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) کار این نیرو طی 4 s اول چقدر است؟ (ب) این نیرو در لحظه $s = 3 = t$ با چه آهنگی روی ذره کار انجام می‌دهد؟

۵۱. جرم یک آسانسور باری، وقتی کاملاً بر شده باشد، 1220 kg است. این آسانسور باید طی 43 s ، به اندازه 54.5 m به طرف پایین برود. جرم وزنه مقابله 1380 kg است. توان خروجی موتور آسانسور، بر حسب hp ، چقدر است؟ از کار لازم برای راه انداختن و متوقف کردن آسانسور صرف نظر کنید، یعنی فرض کنید سرعت آسانسور ثابت است. اتومبیلی به جرم m ، که توان موتور آن مقدار ثابت P است، می‌تواند پس از پیمودن مسافت x از حالت سکون، به سرعت v برسد.

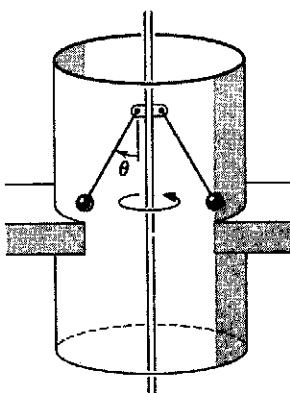
از دید هر دو ناظر، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره، اما یکی از ناظرها این کمیت را $\frac{1}{2}ma^2t^2$ می‌سنجد و دیگری $ma^2t^2 + maut$ در اینجا m جرم، و a شتاب ذره است، که از دید هر دو ناظر یکی است. (ب) اختلاف کار انجام شده توسط نیروی یکسان از دید دو ناظر را برحسب اختلاف مسافت اثر این نیرو از دید این دو ناظر توضیح بدهید. اختلاف انرژی جنبشی بایانی ذره از دید دو ناظر را برحسب کاری که ذره می‌تواند انجام بدهد تا، نسبت به چارچوب هر ناظر، به حالت سکون برسد توضیح بدهید.

بخش ۷-۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد
۶۰. انرژی جنبشی پرتوئنی را حساب کنید که سرعت آن 10^8 m/s $2.94 \times 10^4 \text{ rev/s}$ است. جواب خود را هم برحسب نول و هم برحسب MeV بیان کنید.

۶۱. الکترونی با چنان سرعتی حرکت می‌کند که با آن می‌شود کمریند استوای زمین را طی 8° دور زد. (الف) سرعت این الکترون را برحسب سرعت نور بیان کنید. (ب) انرژی جنبشی آن را برحسب الکترونولت حساب کنید. (ج) اگر از فرمول کلاسیک برای محاسبه انرژی جنبشی استفاده کنیم، چند درصد خطأ خواهیم داشت؟

۶۲. سرعت الکترونی 99% است. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت آن 5% زیاد شود، انرژی جنبشی آن چند درصد زیاد می‌شود؟
۶۳. قضیه کار انرژی در هر سرعتی درست است. چقدر کار باید انجام داد تا سرعت الکترونی از صفر به $(الف) 50^\circ c$ ، $(ب) 50^\circ$ ، و $(ج) 99\%$ برسد؟

درون آن می‌چرخد می‌رسند (الف) حداقل آهنگ دوران، برحسب دور بر دقیقه، برای اینکه گلوله‌ها به دیواره برستند چقدر است؟ (ب) اگر ضربی اصطکاک جنبشی بین کره‌ها و دیواره 35° باشد، هنگامی که سیستم با سرعت 300 rev/min می‌چرخد، چقدر توان در اثر مالش گلوله‌ها بر دیواره اتفاق می‌شود؟



شکل ۲۴. مسئله ۵۸

بخش ۷-۸ چارچوبهای مرجع
۵۹. دو ناظر را در نظر بگیرید که چارچوب یکی به زمین متصل است و چارچوب دیگری، مثلاً به قطاری که با سرعت ثابت u نسبت به زمین حرکت می‌کند. هر دو ناظر مشاهده می‌کنند که ذره‌ای، که در ابتدا نسبت به قطار ساکن است، با نیروی ثابتی که در مدت زمان t برآن وارد می‌شود، به طرف جلو شتاب می‌گیرد. (الف) نشان بدهید که



پایستگی انرژی

در فصل ۷ قضیه کار انرژی را بررسی کردیم؛ طبق این قضیه، کار نیروهای وارد بره را برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره. در این فصل خواهیم دید که کار رده خاصی از نیروها بر یک سیستم (که می‌تواند پیچیده‌تر از یک ذره ساده باشد) تنها به حالت اولیه و نهایی سیستم بستگی دارد، نه به مسیر میان حالت اولیه و نهایی. چنین نیروهایی، که نیروهای پایستار نامیده می‌شوند، این خاصیت را دارند که می‌توانند در پیکربندی سیستم انرژی ذخیره کنند. انرژی ذخیره شده را انرژی پتانسیل می‌نامند. نیروهای دیگر، یعنی نیروهای نایاب پایستار، نمی‌توانند به این طریق انرژی ذخیره کنند.

موضوع اصلی این فصل پایستگی انرژی است، که یکی از اصول مهم راهنمای فیزیک است. نشان می‌دهیم که در ذخیره‌سازی، تبدیل، یا انتقال انرژی سیستمهای مکانیکی، کل انرژی ثابت می‌ماند. مطالعه را از سیستمهای مکانیکی بی‌اصطکاک ساده، که در آنها فقط انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نقش دارند، شروع می‌کنیم. بعد سیستمهای شامل اصطکاک و دیگر نیروهای اتلافی را هم وارد می‌کنیم. با تعمیم بیشتر، می‌شود شکلهای دیگر انرژی مثل گرمای و انرژی الکترومغناطیسی را هم وارد همین چارچوب کرد و به اصل پایستگی انرژی رسید، که یکی از فراگیرترین و کلی‌ترین قوانین فیزیک است.

تا $x = 0$ نیروی فنر $= \frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد، و از $x = 0$ تا $x = +d$ به اندازه $\frac{1}{2}kd^2$. در این لحظه جسم در وضعیت اولیه است (شکلهای ۱الف و ۱اه را با هم مقایسه کنید)، و اگر کارهای انجام شده در چهار بخش جداگانه را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که کل کاری که فنر، در یک چرخه کامل روی جسم انجام می‌دهد صفر است.

۲. نیروی گرانش. شکل ۲ سیستمی مشکل از یک توپ را نشان می‌دهد که تحت اثر گرانش زمین قرار دارد. جسم توسط عاملی خارجی به بالا پرتاب می‌شود. این عامل به آن سرعت v_0 و در نتیجه انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌دهد. با بالا رفتن توپ، زمین روی آن کار انجام می‌دهد و سرانجام توپ را در $y = h$ ، به حالت سکون لحظه‌ای در می‌آورد. کار زمین بر این توپ، هنگام صعود از $y = 0$ تا $y = h$ برابر $-mgh$ است (نیروی ثابت mg ضربدر مسافت h علامت منفی به خاطر آن است که هنگام صعود توپ، نیرو و جایه‌جایی در خلاف جهت یکدیگرند). قضیه کار انرژی، تغییر انرژی جنبشی، $\frac{1}{2}mv^2$ ، را به کار خالص تنها نیروی موجود (گرانش)، $-mgh$ ، مربوط می‌کند. با سقوط توپ از $y = h$ به $y = 0$ ، نیروی گرانش به اندازه $+mgh$ انجام داده برابر با $\frac{1}{2}kd^2$ است. به همین ترتیب می‌بینیم که شکل ۱ج، مقدار کار منفی ای که نیروی فنر بین $x = -d$ و $x = 0$ بنا براین، مشابه با بخش بالارونده مسیر، انرژی باید

۱-۸ نیروهای پایستار

برای نشان دادن رفتار سیستمهای پایستار، حرکت جسمی را، تحت تأثیر سه نیروی مجزا، بررسی می‌کنیم: نیروی فنر $F = -kx$ ؛ نیروی گرانشی $F = mg$ ؛ و نیروی اصطکاک، $F = \mu N$.

۱. نیروی فنر. شکل ۱ جسمی به جرم m را نشان می‌دهد که به فنری با ثابت نیروی k متصل است؛ جسم، بدون اصطکاک، روی سطحی افقی می‌لغزد. در ابتدا، شکل ۱الف، عاملی خارجی فنر را فشرده است، چنان‌که جسم از نقطه $x = 0$ در حالت فنر آزاد، به نقطه $x = +d$ جابه‌جا شده است. عامل خارجی در $x = 0$ یکباره برداشته می‌شود و از آن پس فنر بر جسم کار انجام می‌دهد. با حرکت جسم از $x = +d$ به $x = 0$ ، فنر، طبق معادله ۹ فصل ۷، به اندازه $\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد. طبق قضیه کار انرژی، این کار به شکل انرژی جنبشی جسم ظاهر می‌شود.

با گذشتن جسم از نقطه $x = 0$ ، شکل ۱ب، علامت نیروی فنر عوض می‌شود؛ از این پس فنر سرعت جسم را کم می‌کند و بر آن کار منفی انجام می‌دهد. هنگامی که جسم به سکون لحظه‌ای می‌رسد، شکل ۱ج، مقدار کار منفی ای که نیروی فنر بین $x = -d$ و $x = 0$ انجام داده برابر با $\frac{1}{2}kd^2$ است. به همین ترتیب می‌بینیم که شکل ۱ج، مقدار کار منفی ای که نیروی فنر بین $x = -d$ و $x = 0$ بنا براین، مشابه با بخش بالارونده مسیر، انرژی باید

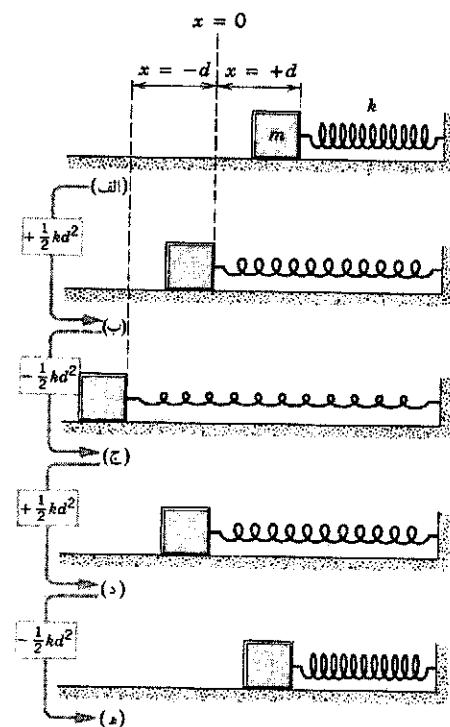
۳. نیروی اصطکاک. به عنوان سومین مثال، قرصی به جرم m را در نظر بگیرید که به سر ریسمانی به طول R متصل است. به قرص سرعت اولیه v_0 داده می‌شود، و ریسمان قرص را مقید می‌کند که بر دایره‌ای به شعاع R روی سطحی افقی حرکت کند (شکل ۳). این سطح بر قرص نیروی اصطکاک وارد می‌کند. تنها نیرویی که روی قرص کار انجام می‌دهد همین نیروی اصطکاک است، که از سطح وارد می‌شود. این نیرو همواره در خلاف جهت سرعت قرص است؛ بنابراین، کار نیروی اصطکاک روی قرص همواره منفی است. هنگامی که قرص به نقطه شروع حرکتش برمی‌گردد، کار نیروی اصطکاک در این مسیر بسته مطمئناً غیر صفر است؛ کل کار در این مسیر بسته، یک مقدار منفی است. در پایان مسیر بسته، قرص با انرژی جنبشی کمتری به نقطه شروع برمی‌گردد.

به تفاوت میان این سه مثال توجه کنید. در دو مثال اول (نیروی فنر و نیروی گرانش) هنگامی که جسم، پس از یک رفت و برگشت به نقطه شروع بازمی‌گردد، کل کار انجام شده بر آن صفر است (و بنابراین انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند). در مثال سوم، کل کار نیروی اصطکاک در مسیر بسته مخالف صفر است، و انرژی جنبشی کم می‌شود. این تفاوت اساسی در رفتار این دونوع نیرو، اولین راه برای تشخیص نیروهای پایستار را به ما نشان می‌دهد:

اگر نیرویی که جسمی را حرکت می‌دهد در یک مسیر بسته (رفت و برگشت) هیچ کار خالصی روی جسم انجام ندهد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این صورت ناپایستار است.

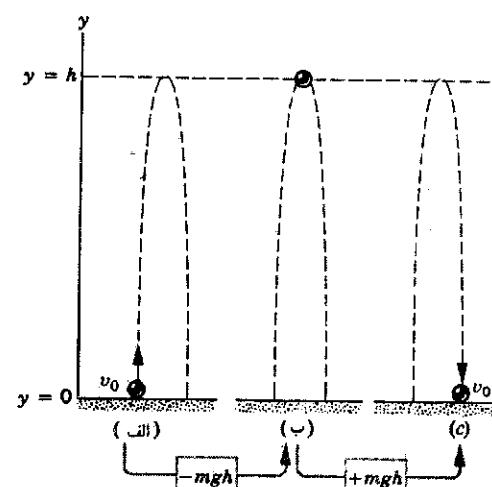
نیروی بازنگردانده کشسان (نیروی فنر) و نیروی گرانش، دو نمونه از نیروهای پایستارند، و اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستار است.^۱

راه دیگر تشخیص نیروهای پایستار از نیروهای ناپایستار، بررسی کاری است که نیرو در مسیرهای مختلف، با نقاط شروع و پایان یکسان، روی ذره انجام می‌دهد. مثلاً کار نیروی فنر بر جسم شکل ۱ را، هنگامی که جسم از $x = +d$ به $x = -d/2$ می‌رود، در راستای دو مسیر (شکل ۴)، بدست می‌آوریم: مسیر ۱ به طور مستقیم، مسیر ۲ از $x = -d$ تا $x = +d$ ، و سپس از $x = -d$ تا $x = -d/2$ را، به ترتیب، W_1 و W_2 می‌نامیم. کار فنر در راستای مسیرهای ۱ و ۲ را، به ترتیب، $\frac{1}{2}mv_0^2$ و $\frac{1}{2}mv_0^2$ برسد. کل کار نیروی گرانش، در این رفت و برگشت، صفر است.

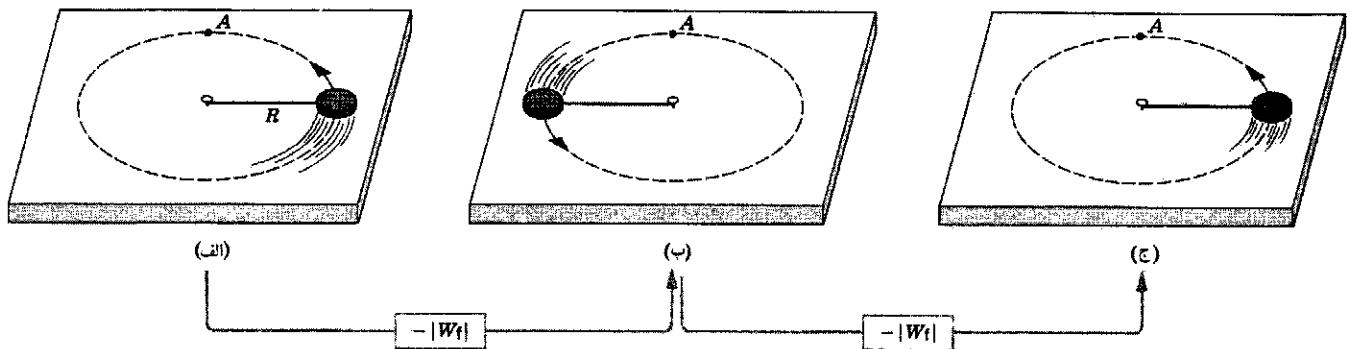


شکل ۱. جسمی در اثر نیروی فنر به طرف چپ حرکت می‌کند و از (الف) به (ب) و سپس (ج) به (د) می‌رود. بعد به طرف راست حرکت می‌کند و به (د) به (ب) و سپس (ه) می‌رود. کار نیروی فنر بین هر دو موقعیت متوالی، در طرف چپ نشان داده شده است. توجه کنید که کل کار نیروی فنر، در یک رفت و برگشت صفر است.

از افزایش پیدا کند و به $\frac{1}{2}mv_0^2$ برسد. کل کار نیروی گرانش، در این رفت و برگشت، صفر است.



شکل ۲. توبی در خلاف جهت گرانش زمین، به بالا پرتاب می‌شود. در (الف) توب در لحظه پرتاب است؛ در (ب) به نقطه اوج مسیرش رسیده است؛ و در (ج) به ارتفاع اولیه بازگشته است. کار نیروی گرانشی زمین، بین هر دو موقعیت متوالی، در پایین شکل مشخص شده است. توجه کنید که کل کار نیروی گرانش روی توب، در یک رفت و برگشت صفر است.



شکل ۳. فرصت روی دایره‌ای در سطح افقی حرکت می‌کند، و سطح اصطکاک دارد. موقعیت‌های نشان داده شده در شکل: (الف) یک نقطه شروع دلخواه، (ب) تیم دور بعد، و (ج) نیم دور دیگر. کار نیروی اصطکاک بین هر دو موقعیت متوالی در بین شکل مشخص است. توجه کنید که کل کار نیروی اصطکاک روی فرصت در یک دور کامل صفر نیست، بلکه برابر با مقدار منفی $-2|W_f|$ است.

اگر کار نیروی بر جسمی، از نقطه شروع حرکت تا نقطه پایان، مستقل از مسیر طی شده بین دو نقطه باشد، آن نیرو پایستار است! در غیر این صورت، نیرو ناپایستار است.

به کمک شکل ۵ می‌شود نشان داد که دو شرط پایستار بودن نیرو با یکدیگر همازنند. در شکل ۵الف، ذره یک مسیر بسته را می‌پیماید؛ از a به b می‌رود و بر می‌گردد. اگر فقط نیروی پایستار \mathbf{F} بر ذره اثر کند، کل کار انجام شده بر ذره طی این چرخه باید صفر باشد. یعنی

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

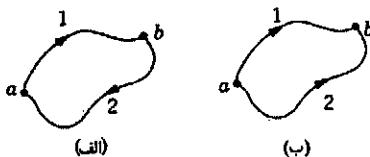
با

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1)$$

مسیر

که در آن، $W_{ab,1}$ "کار نیرو طی حرکت ذره از a به b در امتداد مسیر ۱" و $W_{ba,2}$ "کار نیرو طی حرکت ذره از b به a در امتداد مسیر ۲" است. معادله ۱ بیان راضی اولین شرط پایستاری نیروست. با تغییر جهت حرکت ذره در هر مسیر، جای حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری (برای تعیین کارا عوض می‌شود، و جایه‌جایی تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین، کار انجام شده بر ذره از a تا b ، با کاری که از b تا a انجام می‌شود رابطه‌ای دارد به صورت

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{برای هر مسیر})$$



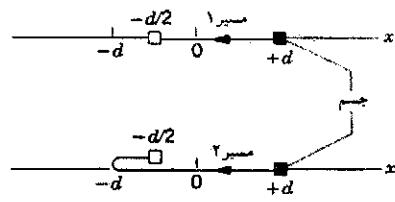
شکل ۵. (الف) ذره‌ای، تحت اثر یک نیروی پایستار، مسیر بسته‌ای را می‌پیماید؛ از نقطه a شروع می‌کند، به نقطه b می‌رود، و دوباره به نقطه a بر می‌گردد. (ب) مسیر مختلط، از نقطه a به نقطه b می‌رود.

$$W_1 = \int_{+d}^{-d/2} (-kx) dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{+d}^{-d/2} \\ = -\frac{1}{2} k [(-d/2)^2 - d^2] = \frac{3}{8} kd^2$$

$$W_2 = \int_{+d}^{-d} (-kx) dx + \int_{-d}^{-d/2} (-kx) dx \\ = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{+d}^{-d} - \frac{1}{2} kx^2 \Big|_{-d}^{-d/2} \\ = 0 - \frac{1}{2} k [(-d/2)^2 - (-d)^2] = \frac{3}{8} kd^2$$

بنابراین، $W_1 = W_2$ ، و کار انجام شده در دو مسیر یکسان است. اما حالا رفتار نیروی اصطکاک ناپایستار سیستم شکل ۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید که سیستم از نقطه A شروع به حرکت کند، یکبار یک‌چهارم دور بزند، و یکبار $\frac{1}{4}$ دور (و هر دو بار دقیقاً به یک نقطه برسد). اندازه کار (منفی) نیروی اصطکاک، در مسیر دوم پنج برابر مسیر اول است. بنابراین، در مورد نیروی اصطکاک، کار به مسیر بین نقطه شروع و نقطه پایان بستگی دارد.

به این ترتیب، به دومین روش تشخیص نیروهای پایستار می‌رسیم:



شکل ۴. جسمی که در سیستم شکل ۱ داشته‌یم (و اینجا با مربع مشخص شده است) از طریق دو مسیر متفاوت، از $x = +d$ به $x = -d/2$ می‌رود. Rahimizadeh.Salamad@yahoo.com

معادله ۵ را برای سیستم جسم-فner به دست آورديم؛ اما اين معادله، در واقع، نتيجه‌اي کلي است که مستقيماً از معادله ۴ و قضيه کارازري، $W = \Delta K$ ، به دست مي‌آيد. اين نتيجه مي‌گويد که در سیستمی که همه نیروهای آن پايسنار باشند، هر تغيير در انرژي پتانسيل باید با تغيير مخالفی در انرژي جنبشي خوش شود.

مثلاً، فرض کنيد جسم را از $d_r = +d$ ، که فner فشرده شده است، رها مي‌کنیم (شکل ۱ (الف)) فner جسم را مي‌راند و به آن شتاب مي‌دهد. جابه‌جايی از حالت تعادل کم مي‌شود. فner روی جسم کار ثابت انجام مي‌دهد و بنابراین، طبق معادله ۴، تغيير انرژي پتانسيل منفي مي‌شود با کاهش انرژي پتانسيل، انرژي جنبشي زياد مي‌شود.

معادله ۵ را اين طور هم می‌توان نوشت

$$\Delta(U + K) = 0 \quad (6)$$

تغيير $K + U$ ، در مجموع، طی اين فرایندها صفر است. اگر تغيير حاصل جمع $K + U$ صفر باشد، مقدار اين حاصل جمع باید طی حرکت ثابت بماند. اين ثابت را انرژي مکانيکي سیستم پايسنار می‌ناميم و آن را با E نشان مي‌دهيم

$$U + K = E \quad (7)$$

معادله ۷ نمايش رياضي قانون پايسنگي انرژي مکانيکي است. در هر سیستم بسته‌اي که اجزاي آن تنها از طريق نیروهای پايسنار برهم‌كشنش داشته باشند (مثل سیستم جسم-فner)، انرژي می‌تواند از شکل جنبشي به پتانسيل و برعکس تبدیل شود، اما تغيير کل انرژي صفر است: حاصل جمع انرژي جنبشي و انرژي پتانسيل ثابت می‌ماند. شکل ۶ نمايشی از تقسيم انرژي بين انرژيهای جنبشي و پتانسيل را برای سیستم جسم و فner، طی نوسان آزاد آن، نشان مي‌دهد.

فرض کنيد که ييش از يك نیروي پايسنار برجسمی اثر کند. مثلاً در شکل ۷، جسم تحت تأثير دو نیروي F و گرانش ، قرار دارد، که هر يك از آنها روی جسم کار انجام مي‌دهد. قضيه کار-انرژي، که در استنتاج معادله ۵ به کار رفت، هميشه مربوط به کل کاري است که همه نیروهای وارد بر جسم، در اين مورد گرانش $+ W_{\text{نر}}$ ، انجام مي‌دهند. با استفاده از معادله ۴ ($\Delta U = -W$)، به کار هر نیرو می‌توانيم يك انرژي پتانسيل وابسته کنیم. بنابراین، معادله ۵ به اين شکل در مي‌آید

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

و معادله ۷ به اين شکل

$$K + U + \text{گرانش} = E \quad (8)$$

انرژي پتانسيل، خاصيتی مربوط به کل سیستم است نه مربوط به بخش خاصی از سیستم. مثلاً، اين توب شکل ۲ نیست که انرژي پتانسيل دارد، بلکه سیستم مشکل از زمين+توب است که چنین

يابد، در مورد مسیر ۲، به صورت

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \quad (2)$$

از مقایسه معادلات ۱ و ۲ نتيجه می‌شود که

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

با

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3)$$

و اين بيان رياضي دومين تعريف نیروي پايسنار است: کار نیرو برای همه مسیرهای بین a و b بمسان است. بنابراین، تعريف اول مستقيماً به تعريف دوم منجر می‌شود و (با استدلال مشابه) تعريف دوم هم به تعريف اول می‌انجامد: يعني اين دو تعريف با يكديگر هم ارزند.

۲-۸ انرژي پتانسيل

با معرفی يك مفهوم جديد، انرژي پتانسيل، درک تازه‌اي از تحليل سیستمهای شامل نیروهای پايسنار حاصل می‌شود. چنان‌که خواهیم دید، انرژي پتانسيل را تنها برای نیروهای پايسنار، مثلاً نیروي فner با تيروي گرانش، می‌توان تعريف کرد؛ انرژي پتانسيل برای نیروهای ناپايسنار، مثل نیروي اصطکاک، وجود ندارد.

انرژي پتانسيل که آن را با U نشان مي‌دهيم، انرژي پيکربندی سیستم است. اين انرژي، انرژي ذخیره شده در سیستم به خاطر وضعیت یا جهتگيری خاص اجزاي سیستم است (مثلاً، انرژي ناشی از فشردن سیستم جسم-فner یا جدا کردن اجزاي سیستم توپ-زمین از هم).

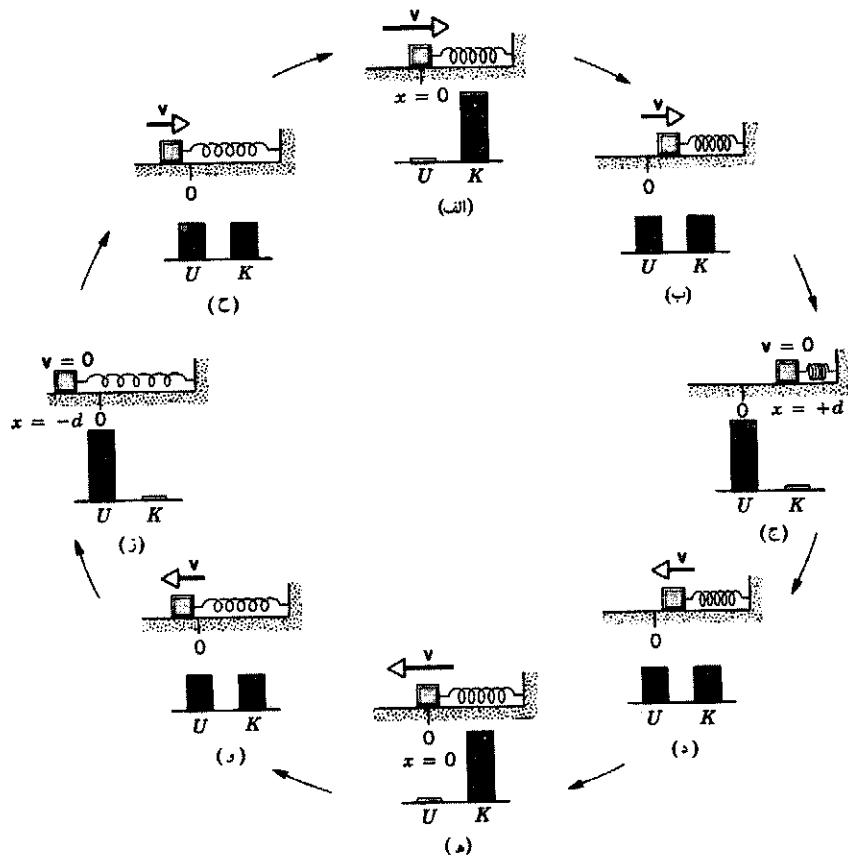
سيستمي را در نظر بگيريد که در آن فقط يك نیرو وجود دارد، و فرض کنيد آن نیرو پايسنار باشد. هنگامی که پيکربندی سیستم عوض می‌شود، مثلاً با حرکت اجزاي آن، نیروي پايسنار کار W انجام مي‌دهد. تغيير انرژي پتانسيل، U ، ΔU ، متناظر با اين تغيير پيکربندی را

$$\Delta U = -W \quad (4)$$

تعريف مي‌کنیم: تغيير انرژي پتانسيل در اين فرایند برابر است با منفي کاري که نیروي پايسنار انجام مي‌دهد.

هنگامی که پيکربندی سیستم جسم-فner در شکل ۱، از شکل ۱D (که در آن فner در حالت آزاد است) به شکل ۱H (که در آن جسم در حالت سکون لحظه‌اي است) تبدیل می‌شود، نیروي فner به اندازه $W = -\frac{1}{4}kd^2$ روی جسم کار انجام مي‌دهد. بنابراین، تغيير انرژي پتانسيل سیستم $\Delta U = -W = +\frac{1}{4}kd^2$ است. اما از قضيه کار-انرژي می‌دانيم که تغيير انرژي جنبشي جسم $\Delta K = W = -\frac{1}{4}kd^2$ است. پس برای سیستم جسم-فner نتيجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K = 0 \quad (5)$$



شکل ۶. جسمی که به فنری متصل است. روی سطح افقی بدون اصطکاکی نوسان می‌کند. انرژی مکانیکی E سیستم ثابت می‌ماند. اما، طی حرکت سیستم، نحوه تقسیم آن بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل تغییر می‌کند. در زمانهای معینی (الف، گ) تمام انرژی به شکل جنبشی است؛ در زمانهای دیگری (ج، زا، د، و، ح) انرژی به تساوی میان و در زمانهای دیگر (ب، د، و، ح) انرژی به تساوی میان این دو تقسیم شده است.

با هم برابر باشد، هر دو ذره می‌توانند، در اثر تغییر انرژی پتانسیل، مقدار قابل ملاحظه‌ای انرژی جنبشی به دست بیاورند. روش محاسبه چگونگی تقسیم انرژی جنبشی بین دو جسم را در فصل ۹ بررسی خواهیم کرد.

۸-۳. سیستمهای پایستار یک بعدی

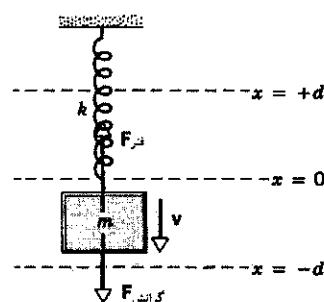
با استفاده از معادله ۴، می‌توانیم تغییر انرژی پتانسیل ذره‌ای را که حرکت آن یک بعدی است و فقط یک نیروی پایستار $F(x)$ بر آن وارد می‌شود به دست بیاوریم

$$\Delta U = -W = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (9)$$

ذره از مختصه اولیه x_0 به مختصه نهایی x می‌رود. چون انرژی پتانسیل فقط به مکان بستگی دارد، تغییر انرژی پتانسیل بین x_0 و x برابر با $\Delta U = U(x) - U(x_0)$ است. نتیجه می‌شود که

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (10)$$

اگر x را یک نقطه مرجع دلخواه بگیریم، می‌توانیمتابع انرژی پتانسیل را پیدا کنیم. انرژی پتانسیل نقطه مرجع را هر مقداری می‌شود گرفت، چون فقط تغییرات انرژی پتانسیل است که معنی دارد. با انتخاب مقدار x_0 (زمین) $U(x_0)$ نامی U به دست می‌آید که می‌توانیم با استفاده



شکل ۷. جسمی به جرم m ، که از فنری آویزان است، در راستای قائم بین $x = -d$ و $x = +d$ نوسان می‌کند. جسم تحت تأثیر دو نیروی پایستار حرکت می‌کند، نیروی فنر F و نیروی گرانش زمین F_g .

خاصیتی دارد. هنگامی که توب تا ارتفاع h بالا می‌رود، انرژی پتانسیل سیستم به اندازه mgh زیاد می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه کم می‌شود. هنگامی که توب سقوط آزاد می‌کند و به اندازه همین h پائین می‌آید، انرژی پتانسیل سیستم به اندازه mgh کم می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه زیاد می‌شود.

چون جرم توب خیلی کمتر از زمین است، تقریباً همه افزایش انرژی جنبشی سیستم توب+زمین به توب می‌رسد. به همین علت است که گاهی می‌گوییم انرژی پتانسیل توب، در حالی که "انرژی پتانسیل سیستم توب+زمین" دقیقتراست. در سیستمهای دیگری که Ramin.samat@yahoo.com

انرژی پتانسیل تابعی است از مکان که نیرو منفی مشتق آن است. در اینجا نیروی F توسط سیستمی اعمال می شود که انرژی پتانسیل آن U است.

حالا طرز محاسبه انرژی پتانسیل را با دو مثال از نیروهای پایستار که در بخش ۱-۸ بررسی کردیم، یعنی سیستم جسم-فتر و سیستم توپ-زمین، نشان می دهیم.

نیروی فتر

نقطه مرجع x_0 جسم در سیستم جسم-فتر شکل ۱ را جایی می گیریم که در آن فتر به حالت آزاد است ($x = x_0$)؛ انرژی پتانسیل سیستم را هم در این وضعیت برابر با صفر انتخاب می کنیم ($U(x_0) = 0$). انرژی پتانسیل سیستم جسم-فتر را می توانیم با جایگذاری این مقادیر در معادله ۱۰، و محاسبه انتگرال به ازای نیروی فتر $F(x) = -kx$ بدست بیاوریم

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x (-kx) dx$$

یا

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (14)$$

اگر جسم به اندازه x از مکان مرجع جایه جا شده باشد، انرژی پتانسیل سیستم $\frac{1}{2} kx^2$ می شود. x چه مثبت باشد چه منفی، یعنی فتر چه به اندازه x کشیده شود و چه به همین اندازه فشرده، انرژی ذخیره شده یکسان است.

اگر از معادله ۱۴ مشتق بگیریم، می بینیم که معادله ۱۳ صادق است

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = -kx = F$$

فرض کنید سیستم جسم-فتر را تا فاصله x_m از نقطه مرجع می کشیم؛ در این حالت، انرژی پتانسیل $\frac{1}{2} kx_m^2$ است. اگر فتر را از این وضعیت، و از حالت سکون، رها کنیم، انرژی مکانیکی سیستم هم $\frac{1}{2} kx_m^2$ می شود، زیرا در لحظه رها شدن فتر انرژی جنبشی صفر است. در این مورد، معادله ۱۲ به شکل زیر نوشته می شود

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx_m^2 = E$$

$$= \frac{1}{2} kx_m^2 \quad (15)$$

با این رابطه می شود سرعت را به ازای هر مقدار جایی محاسبه کرد

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)} \quad (16)$$

چنان که انتظار می رود، از معادله ۱۶ نتیجه می شود که سرعت، به ازای $\pm x_m$ صفر است. در لحظه ای که جسم از نقطه مرجع

از آن، مقدار انرژی پتانسیل را در هر نقطه، مثل x_1 یا x_2 ، حساب کنیم. با تعییر $(x_0, U(x_0))$ ، مقادیر $(x_1, U(x_1))$ و $(x_2, U(x_2))$ هم به یک اندازه تعییر می کنند، اما اختلاف انرژی پتانسیل، $(U(x_2) - U(x_1))$ ثابت است که برای $(x_0, U(x_0))$ انتخاب می کنیم.

انتخاب نقطه مرجع برای انرژی جنبشی است. چنان که در بخش ۶-۶ دیدیم، ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می کنند ممکن است مقادیر متفاوتی برای انرژی جنبشی یک جسم بدست بیاورند. مقادیری هم که ناظرهای مختلف برای U و K ، و انرژی مکانیکی E اندازه می گیرند ممکن است متفاوت باشند، اما از دیدگاه همه آنها E ثابت، یعنی انرژی مکانیکی پایسته است.

سرعت ذره، طی حرکت آن از x_0 به x ، از v_0 به v تعییر می کند و طبق قضیه کار انرژی، کار نیروی F برابر است با

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (11)$$

از ترکیب معادلات ۹، ۱۰، و ۱۱ نتیجه می شود

$$\frac{1}{2} mv^2 + U(x) = \frac{1}{2} mv_0^2 + U(x_0) \quad (12)$$

$$= E$$

کمیت طرف راست معادله ۱۲ تنها به مکان اولیه x_0 و سرعت اولیه v_0 بستگی دارد، که مقادیری معین اند؛ پس این مقدار طی حرکت ثابت است. این ثابت، همان انرژی مکانیکی E است. توجه کنید که در این معادله نیرو و شتاب ظاهر نمی شوند، و معادله فقط شامل مکان و سرعت است. معادله ۱۲ شکل دیگری از قانون پایستگی انرژی برای نیروهای پایستار است.

در حل مسائلی که در آنها تنها با نیروهای پایستار سروکار داریم می توانیم با استفاده از معادله ۱۲ به جای قوانین نیوتون، کار را ساده تر کنیم. البته این معادله هم از قوانین نیوتون به دست آمده است، اما یک قدم به جواب نزدیکتر است (به اصطلاح، یک انتگرال اول حرکت است). در خیلی از موارد در حل مسائل، بی آنکه نیروها را تحلیل کنیم یا قوانین نیوتون را بنویسیم، به دنبال کمیتی می گردیم که طی حرکت ثابت بماند؛ در این مورد، آنچه ثابت می ماند انرژی مکانیکی است و می توانیم از معادله ۱۲ استفاده کنیم.

در مورد حرکت یک بعدی، رابطه بین نیرو و انرژی پتانسیل، معادله ۹، را می شود چنین نوشت

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (13)$$

برای نشان دادن صحت این رابطه، کافی است $F(x)$ را به همین شکل بالا در معادله ۹ بگذارید تا بینید که به یک اتحاد می رسید. رابطه ۱۳ دیدگاه دیگری برای توصیف انرژی پتانسیل بدست می دهد:

فراهم می‌کند. همچنین، مواردی وجود دارد که کار کردن با انرژی، که اسکالر است، از کار کردن با نیرو، که بردار است، ساده‌تر است.

مثال ۱. اتاق آسانسوری به جرم $m = ۹۲۰\text{ kg}$ از سطح خیابان به بالاترین طبقه مرکز تجارت جهانی در نیویورک، به ارتفاع $h = ۴۱۲\text{ m}$ بالاتر از سطح زمین، حرکت می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل اتاق چقدر است؟

حل: دقیقتراسته باشیم، البته منظورمان تغییر انرژی پتانسیل سیستم اتاق-زمین است. از معادله ۱۸ داریم

$$\Delta U = mg \Delta y = mgh = (۹۲۰\text{ kg})(۹,۸\text{ m/s}^2)(۴۱۲\text{ m}) = ۳,۷ \times ۱۰^۶ \text{ J} = ۳,۷\text{ MJ}$$

این مقدار تقریباً ۱ kWh است؛ شرکت برق بهای انرژی الکتریکی را بر حسب همین "واحد" با مشتریانش حساب می‌کند.

مثال ۲. فریک تفنگ فری به اندازه $d = ۳,۲\text{ cm}$ از حالت آزاد خود فشرده شده است؛ گویی به جرم ($m = ۱۲\text{ g}$) در لوله قرار دارد. اگر تفنگ شلیک شود، گویی با چه سرعتی از لوله خارج می‌شود؟ ثابت نیروی فنر، k ، برابر با $۷,۵\text{ N/cm}$ است. اصطکاک ناچیز است و لوله تفنگ افقی است.

حل: می‌توانیم مستقیماً معادله ۱۲ را به کار ببریم؛ مکان اولیه فنر $x = ۰$ ، و سرعت اولیه گوی $v = ۰$ است. در حالت نهایی فنر در حالت آزاد است ($x = ۰$) و گویی با سرعت v حرکت می‌کند.

پس

$$\frac{1}{2}mv^2 + ۰ = ۰ + \frac{1}{2}kd^2$$

از این معادله v را به دست می‌آوریم

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (۰,۳۲\text{ m})\sqrt{\frac{۷,۵\text{ N/m}}{۱۲ \times ۱۰^{-۳}\text{ kg}}} = ۸,۰\text{ m/s}$$

مثال ۳. یک واگن تفریحی (شکل ۸) پر از مسافر، به آرامی به ارتفاع $۲۵\text{ m} = y$ می‌رود، و از آنجا به طرف پایین شتاب می‌گیرد. با چشمپوشی از اصطکاک سیستم، حساب کنید که این واگن با چه سرعتی به پایین مسیر می‌رسد؟

حل: در نگاه اول، به نظر می‌رسد حل مسئله غیرممکن باشد، زیرا هیچ چیزی درباره شکل مسیر واگن نمی‌دانیم. اما در غیاب اصطکاک، ریل کاری روی واگن انجام نمی‌دهد؛ تنها نیرویی که روی واگن کار انجام می‌دهد گرانش است. انرژی مکانیکی در بالاترین نقطه مسیر، که آن را با E_i نشان می‌دهیم

$$E_t = U_t + K_t = mgy + ۰$$

$(x = x_0 = ۰)$ می‌گذرد، سرعت v برابر است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m \quad (۱۷)$$

انرژی مکانیکی را، هم بر حسب سرعت v در نقطه مرجع $(y = ۰)$ و هم بر حسب حداقل جایی از نقطه مرجع $(E = ۱/2mv^2)$ می‌توان بیان کرد. $(E = ۱/2kx_m^2)$

نیروی گرانش

برای سیستم توپ-زمین، مختصه قائم را به جای x با y نشان می‌دهیم. نقطه مرجع $y = ۰$ را سطح زمین می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم $U(y) = ۰$. حالا می‌توانیم انرژی پتانسیل (y) سیستم را از معادله ۱۰ ، با $F(y) = -mg$ محاسبه کنیم

$$U(y) - ۰ = - \int_0^y -mg dy \\ U(y) = mgy \quad (۱۸)$$

توجه کنید که این انرژی پتانسیل، در معادله ۱۳ صدق می‌کند: $-dU/dy = -mg = F$

سرعت اولیه توپ در نقطه مرجع $y = ۰$ است، و از معادله ۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (۱۹)$$

به کمک این معادله، که با معادله ۲۵ هم ارز است، می‌توانیم سرعت را به ازای هر ارتفاع y به دست بیاوریم.

این مثال نشان می‌دهد که تحلیل سیستمهای دینامیکی با رهیافت انرژی و رهیافت نیرو، یعنی به دو زبان کمی متفاوت، چگونه است. رهیافت نیرو برای تحلیل سیستم چنین است: "توپ با سرعت اولیه v_0 شروع به حرکت می‌کند. زمین نیروی $-mg$ بر آن وارد می‌کند و به آن شتاب g می‌دهد. شتاب رو به پایین موجب می‌شود که سرعت کم شود، و سرانجام در ارتفاع h به صفر برسد. از اینجا به بعد، توپ در گرانش رو به پایین زمین شروع به حرکت به طرف پایین می‌کند و با سرعت $v = v_0 - gh$ به زمین می‌رسد."

رهیافت انرژی چنین است: "توپ با انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ شروع به حرکت می‌کند. با بالا رفتن توپ، انرژی جنبشی باید کم شود تا انرژی مکانیکی E ثابت بماند. در نقطه اوج حرکت، همه انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل شده است. در سقوط توپ، این فرایند معکوس می‌شود، یعنی انرژی پتانسیل دوباره به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، و هنگامی که توپ به زمین می‌خورد همه انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل شده است." البته نتیجه هر دو رهیافت یکی است، در اغلب موارد، رهیافت انرژی مفیدتر است و بصیرت پیشتری

۴.۸ سیستمهای پایستار یک بعدی: حل کامل
 هدف از تحلیل سیستمهای مکانیکی، معمولاً این است که حرکت ذرات را بر حسب زمان توصیف کنیم. در فصلهای ۵ و ۶ نحوه حل این مسئله، با استفاده از قوانین نیوتون، راشان دادیم؛ این روش را روش دینامیکی می‌نامیم. روش دیگری وجود دارد، که گاه مفیدتر هم هست. این روش، روش انرژی است که در آن بخش درباره اش صحبت می‌کنیم.

معادله ۱۲ رابطه میان مختصه و سرعت یک حرکت یک بعدی است در حالی که نیرو فقط به مکان بستگی داشته باشد. (در یک بعد هر نیرویی که فقط به مکان بستگی داشته باشد حتماً پایستار است؛ در دو یا سه بعد، چنانکه در بخش ۵-۸ خواهیم دید، الزاماً چنین نیست.) در طی وصول به معادله ۱۲، نیرو و شتاب حذف شده‌اند. برای اینکه این تحلیل کامل شود، باید سرعت را هم حذف کنیم تا مکان به صورت تابعی از زمان بدست بیاید.

برای انجام این کار، از معادله ۱۲ شروع می‌کنیم

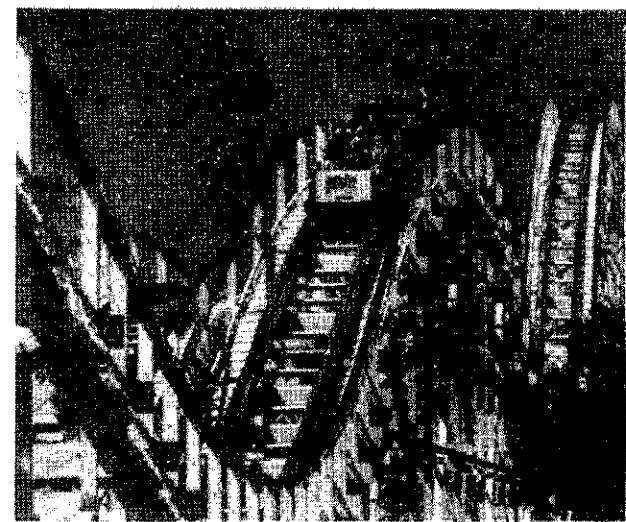
$$U(x) + \frac{1}{2}mv^2 = E$$

از این رابطه v را به دست می‌آوریم

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (20)$$

در این رابطه، $U(x)$ انرژی پتانسیل متغیر با نیرویی است که در سیستم عمل می‌کند، و E انرژی مکانیکی (ثابت)‌ای است که به سیستم داده می‌شود. از معادله ۲۰ معلوم می‌شود که، به ازای یک مقدار معین E ، حرکت به ناحیه‌هایی از محور x محدود می‌شود که در آنها $E \geq U(x)$ باشد. یعنی، سرعت نمی‌تواند موهومی باشد و انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد، پس $(E - U(x))$ باید بزرگتر از 0 باشد. به علاوه، بر سرعت v بحسب x بر حسب $U(x)$ می‌توانیم توصیف کنیم که خوبی از انواع ممکن حرکت به دست بیاریم. این توصیف مبتنی است بر اینکه سرعت متناسب با چذر تقاضل E و U است.

به عنوان مثال، تابع انرژی پتانسیل شکل ۹ را در نظر بگیرید. (اگرچه این تابع شبیه به مقطع مسیر واگن تقریبی است، اما بهاید داشته باشید که نماینده انرژی پتانسیل سیستم پایستاری است که حرکت در آن منحصر به یک بعد است. واگن تقریبی‌ای که روی ریل حرکت می‌کند، حرکتی دو بعدی یا سه بعدی دارد.) لازمه واقعی بودن حرکت این است که $E \geq U(x)$ باشد؛ پس کمترین انرژی مکانیکی ممکن است E_0 باشد. به ازای این مقدار انرژی $E = E_0$ است، و انرژی E_0 است. به ازای این مقدار انرژی $E = E_0$ است، و انرژی E_0 است. اگر جنبشی باید صفر باشد. یعنی ذره باید در نقطه x_0 ساکن باشد. اگر انرژی سیستم را کمی بیشتر کنیم، و به E_1 برسانیم، ذره فقط می‌تواند بین x_1 و x_2 حرکت کند. با حرکت ذره از x_0 به سوی x_1 یا x_2 سرعت آن کم می‌شود. در x_1 یا x_2 ذره می‌ایستد و جهت حرکت آن



شکل ۸. وسیله‌ای برای تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی.

که در آن $y = 0$ را پایین‌ترین نقطه مسیر گرفته‌ایم. هنگامی که واگن به پایین‌ترین نقطه مسیر می‌رسد، انرژی مکانیکی، E_b ، برابر است با

$$E_b = U_b + K_b = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

مرجع U را چنان گرفته‌ایم که در $y = 0$ داشته باشیم $U = E_t$ باشد. پس پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که $E_b = E_t$ باشد. پس

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

از این معادله v را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{(2)(9.8m/s^2)(25m)} = 22m/s$$

اگر جسمی از ارتفاع ۲۵m رها شود و در راستای قائم سقوط کند هم با همین سرعت به زمین می‌رسد. ریل اندازه سرعت واگن "افتدان" را تغییر نمی‌دهد؛ فقط جهت حرکت را تغییر می‌دهد. توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم واگن و محتویات آن است.

باگذشتن واگن از نقاط پست و بلند مسیر، سرعت آن زیاد و کم می‌شود. تا آنجا که هیچ نقطه‌ای از مسیر از نقطه اولیه بلندتر نباشد، سیستم انرژی مکانیکی کافی دارد که از تپه‌های بین راه بگذرد و به نقطه پایان برسد.

مزیت روش انرژی بر روش نیرو در این مسئله، کاملاً روش است. برای استفاده از قوانین نیوتون باید شکل دقیق مسیر را بدانیم و تازه باید مؤلفه‌های نیرو و شتاب را در هر نقطه‌ای حساب کنیم. این کار می‌تواند کار بسیار مشکلی باشد. در عوض، با استفاده از قوانین نیوتون، اطلاعات بیشتری نسبت به روش انرژی به دست می‌آید، از جمله مدتی که طول می‌کشد تا واگن به پایین مسیر برسد.

نقطه ساکن باشد، ساکن می‌ماند. اما اگر ذره، حتی خیلی کم، از این نقطه جایه‌جا شود، نیروی $F(x)$ آن را از نقطه تعادل دورتر می‌کند به همین دلیل، چنین نقطه تعادلی را نقطه تعادل ناپایدار می‌نامند. اگر ذره، در شکل ۹ ب، از نقطه متناظر با x_5 به طرف راست برود (به طرف x ‌های بزرگتر) نیروی مثبتی ایجاد می‌شود که آن را به طرف x ‌های باز هم بزرگتر می‌راند.

در بازه‌ای که $(x) U$ در آن ثابت باشد، مثلاً در اطراف $x = x_6$ ، شیب منحنی صفر است، پس نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی، $F(x_{x_6}) = -(dU/dx)_{x=x_6} = 0$. چنین بازه‌ای را بازه تعادل خنثی می‌نامند، زیرا اگر ذره را کمی جابه‌جا کنیم، هیچ نیروی دافعه یا بازگرداننده‌ای برآن وارد نمی‌شود.

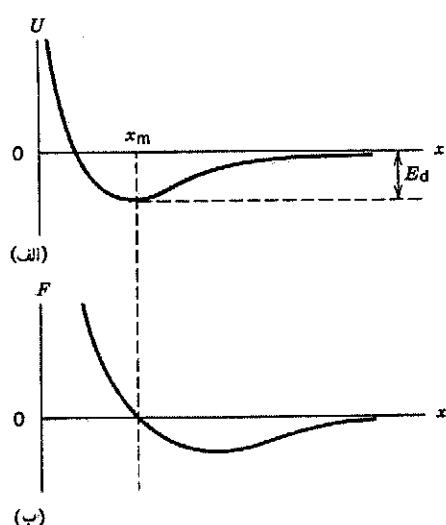
از این بحث روش می‌شود که با دانستن تابع انرژی پتانسیل در ناحیه‌ای از محور x که ذره در آن حرکت می‌کند، می‌توانیم اطلاعات زیادی درباره حرکت جسم به دست بیاوریم.

مثال ۴. تابع انرژی پتانسیل نیروی بین انتهای یک مولکول دو اتمی را (تفصیلی) می‌توان چنین نوشت

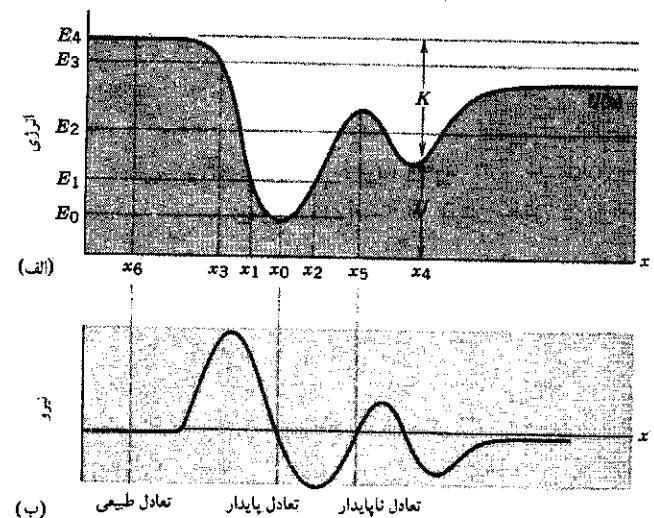
$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

در این رابطه، a و b دو ثابت مثبت‌اند و x فاصله بین دو اتم است. (الف) فاصله دو اتم در حالت تعادل، (ب) نیروی بین دو اتم، و (ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول (یعنی برای اینکه انتهای از حالت تعادل به موقعیت $\infty = x$ بروند) چقدر است؟

حل: (الف) شکل ۱۰ الف $(x) U$ را به صورت تابعی از x نشان



شکل ۱۰. مثال ۴. (الف) انرژی پتانسیل و (ب) نیروی بین انتهای یک مولکول دو اتمی به صورت تابعی از فاصله x بین دو اتم. توجه کنید که انرژی پتانسیل را به ازای فاصله x نهایت انتهای از هم صفر گرفته‌ایم.



شکل ۹. (الف) یک تابع انرژی پتانسیل $(x) U$. (ب) نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل.

معکوس می‌شود. به همین دلیل، دو نقطه x_1 و x_2 را نقاط بازگشت حرکت می‌نامند. در انرژی E_2 ، چهار نقطه بازگشت وجود دارد و ذره در یکی از دو ذره پتانسیل نوسان می‌کند. در انرژی E_2 ، فقط یک نقطه بازگشت وجود دارد، که x_2 است. اگر ذره در ابتدا در حال حرکت در جهت منفی x باشد، در نقطه x_2 می‌ایستد و از آن پس در جهت مثبت x حرکت خواهد کرد. به ازای انرژیهای بیش از E_4 ، نقطه بازگشتی وجود ندارد، جهت حرکت ذره همواره ثابت می‌ماند. اندازه سرعت ذره، با توجه به مقدار انرژی پتانسیل در هر نقطه، تعیین می‌کند؛ چنانکه در شکل برای نقطه x_4 نشان داده شده است، انرژی جنبشی در هر نقطه عبارت است از اختلاف انرژی مکانیکی (مثلث E_4) در شکل ۹ الف) با انرژی پتانسیل $(x) U$ در آن نقطه.

در نقطه‌ای که $(x) U$ کمینه باشد، مثلاً در $x = x_0$ ، شیب منحنی صفر است، بنابراین نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. ذره‌ای که در ابتدا در این نقطه ساکن باشد، ساکن باقی خواهد ماند. علاوه بر این، اگر ذره را کمی، به هر طرف، جابه‌جا کنیم، نیرو $F(x) = -dU/dx$ ، می‌خواهد که آن را برگرداند؛ بنابراین، ذره حول نقطه تعادل نوسان خواهد کرد. به همین دلیل، این نقطه تعادل را نقطه تعادل پایدار می‌نامند. شکل ۹ ب نیروی $F(x)$ متناظر با انرژی پتانسیل $(x) U$ را نشان می‌دهد. اگر ذره کمی به طرف چپ x برود (یعنی به x ‌های کوچکتر)، نیرو مثبت می‌شود و ذره را به سوی x ‌های بزرگتر می‌راند (یعنی دوباره به طرف x برمی‌گردد). اگر ذره به طرف راست x برود، نیروی وارد بر ذره منفی می‌شود و باز هم آن را به طرف x می‌راند.

در نقطه‌ای که $(x) U$ بیشینه باشد هم، مثلاً در $x = x_5$ ، شیب منحنی صفر است و نیرو صفر می‌شود؛ بنابراین

جواب تحلیلی برای $x(t)$ (اختیاری)

تابع $x(t)$ می‌تواند توصیف کاملی از حرکت یک بعدی ذره به دست بدهد. این تابع، مکان x ذره را در همه زمانهای t تعیین می‌کند. برای پیدا کردن $x(t)$ ، کار را از معادله ۲۰ شروع می‌کنیم. این معادله را چنین می‌نویسیم

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

یا

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt \quad (21)$$

از دو طرف این معادله، بین مکان اولیه ($x = x_0$ در $t = t_0$) تا مکان دلخواه x در زمان t ، انتگرال می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$\int_{t_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (22)$$

با محاسبه انتگرال طرف چپ معادله ۲۲، علی‌الاصول می‌توانیم معادله حاصل را حل کنیم و $x(t)$ را به دست بیاوریم.

در معادله ۲۲، علامت جلوی رادیکال بستگی به این دارد که v در جهت مثبت x است یا در جهت منفی x . با تغییر v در طی حرکت، ممکن است لازم شود که انتگرال‌گیری را برای بخش‌های مختلف حرکت جداگانه انجام بدھیم.

در بعضی موارد، می‌شود انتگرال معادله ۲۲ را محاسبه کرد و یک جواب تحلیلی برای $x(t)$ به دست آورد. در موارد دیگر، ممکن است راحت‌تر باشد که با استفاده از کامپیوتر مسئله را به صورت عددی حل کنیم؛ این را در بخش بعد نشان می‌دهیم. در اینجا جواب تحلیلی را برای ذره‌ای به جرم m که در یک بعد حرکت می‌کند، و فزی با ثابت نیروی k برآن نیرو وارد می‌کند، به دست می‌آوریم. در چنین مواردی، نیروی k برآن نیرو وارد می‌کند، به دست می‌آوریم. در چنین مواردی، $x = x_0$ است. فرض کنید که در $t = 0$ ، ذره در $x = x_0$ است، و سرعت آن $v = v_0$ است. پس انرژی مکانیکی E ، طبق معادله ۱۲ برابر با $\frac{1}{2}kx_0^2$ است. در این مورد، معادله ۲۲ به صورت زیر در می‌آید

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{x_0^2 - x^2}} = t$$

این انتگرال، به شکل استانداردی است که جواب آن در جدولهای انتگرال یافت می‌شود

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

می‌دهد. تعادل در نقطه x_m حاصل می‌شود، که در آن $(x)U$ کمینه می‌شود. این نقطه از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_m} = 0$$

يعنى

$$-\frac{12a}{x_m^{12}} + \frac{6b}{x_m^8} = 0$$

يا

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

(ب) با استفاده از معادله ۱۳، نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل به دست می‌آید

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^8} \right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{8b}{x^9}$$

شکل ۱۰ ب نمودار نیرو را بر حسب فاصله بین اتمها نشان می‌دهد. در جایی که نیرو مثبت باشد (از $x = x_m$ تا $x = 0$)، اتمها یکدیگر را دفع می‌کنند (نیرو درجهت افزایش x است). در جایی که نیرو منفی باشد (از $x = x_m$ تا $x = \infty$ تا $x = 0$ در $x = x_m$ کاهش x است). در $x = x_m$ ، نیرو صفر است؛ این یک نقطه تعادل است، این تعادل پایدار است.

(ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول به انتهاش را انرژی تفکیک، E_d ، می‌نامند. از منحنی انرژی پتانسیل در شکل ۱۰ (الف)، نتیجه می‌شود که اگر $E \geq E_d$ باشد، اتمها را می‌توان تا $x = \infty$ متناظر با $E = U$ ، از هم جدا کرد. حداقل انرژی لازم در این حالت نهایی شان بینهایت از هم دور ($U = 0$) و ساکن هستند ($K = 0$). در حالت تعادل مولکول، همه انرژی به شکل پتانسیل است، پس (شکل ۱۰ (الف)) خواهیم داشت $E = U(x_m)$ که کمیتی منفی است. مقدار انرژی ای که باید به مولکول، در حالت تعادلش، بدھیم تا انرژی آن از این مقدار منفی به صفر برسد، همان است که آن را انرژی تفکیک E_d نامیدیم. پس،

$$U(x_m) + E_d = 0$$

يا

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^8}$$

و با جایگذاری مقدار x_m خواهیم داشت

$$E_d = \frac{b^4}{4a}$$

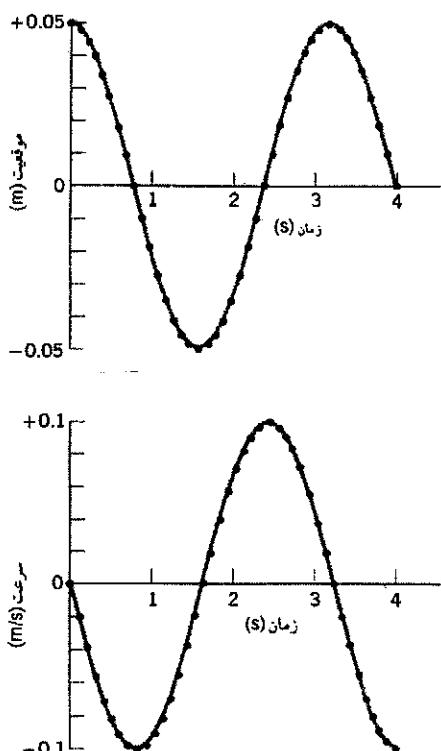
E_d کمیتی مشتث است، و باید هم باشد. این انرژی را می‌توانیم با انجام کار خارجی به مولکول بدھیم، مثلاً با استفاده از نیروهای الکتریکی، یا با زیاد کردن انرژی جنبشی یکی از اتمهای مولکول نسبت به دیگری.

با استفاده از این مکان جدید (x_1), شتاب (تقریباً ثابت) ذره در بازه دوم، $a_2 = F(x_1)/m$, را بدست می‌آوریم؛ و بعد معادلات شتاب ثابت را برای بازه دوم می‌نویسیم

$$v_2 = v_1 + a_2 \delta t$$

$$x_2 = x_1 + v_1 \delta t + \frac{1}{2} a_2 (\delta t)^2$$

این عملیات را می‌توانیم، برای هر چند بازه که بخواهیم، دنبال کنیم. هر چه بازه δt را کوچکتر بگیریم، نتیجه محاسبات دقیق‌تر می‌شود. مثلاً نیروی فنر $F(x) = -kx$ با $k = 96\text{N/m}$ را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم $m = 2.5\text{kg}$ وارد می‌شود. فرض کنید که ذره در $t = 0$ از نقطه $x_0 = 0$ با سرعت $v_0 = 0$ شروع به حرکت کند. شکل ۱۱ نتایج محاسبه عددی ($x(t)$ و $v(t)$) را با استفاده از ۴۰ بازه، هر یک به اندازه 15° زمان می‌دهد. یک برنامه کامپیوتری برای انجام این محاسبه عددی در پیوست ط آمده است. با استفاده از این برنامه می‌توانیم هر حرکت یک‌بعدی حاصل از نیروی وابسته به مکان را تحلیل کنیم، حتی اگر از انتگرال



شکل ۱۱. حل عددی برای حرکت ذره‌ای که تحت اثر نیروی فنر $F = -kx$ است. نقاط شکل مقادیری را نشان می‌دهد که مستقیماً از کامپیوت گرفته شده‌اند. برای اینکه شکل واضح باشد، از هر 10° نقطه کامپیوتی فقط یکی نشان داده است. منحنیها از این نقاط گذرانده شده‌اند، و کاملاً شبیه همان منحنی‌های سینوس و کسینوس‌اند که از جواب تحلیلی حاصل می‌شوند.

در مورد مسئله ما معلوم می‌شود که

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \left(\frac{x}{x_0} \right) \Big|_{x_0}^x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

این نتیجه را، پس از کمی عملیات، می‌شود چنین نوشت

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

حرکت یک‌بعدی ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی فنر حرکت می‌کند، سینوسی است. به تجربه می‌دانیم که این حرکت نوسانی است (یعنی، ذره روی یک مسیر می‌رود و برمی‌گردد)! این نتیجه نشان می‌دهد که نوسان سینوسی است. حرکت نوسانی را، به صورت کلی‌تر، در فصل ۱۵ بررسی خواهیم کرد؛ در آنجا همین نتیجه را برای $x(t)$ با استفاده از قوانین نیوتون هم به دست خواهیم آورد.

حل عددی

قبلاً در مورد نیروی وابسته به زمان (بخش ۶-۶) یا وابسته به سرعت (بخش ۷-۶) روشی عددی برای حل معادله حرکت ارائه کردیم. در مورد نیروهای وابسته به زمان هم می‌توانیم چنین روشی را به کار بگیریم. عملیاتی که در اینجا به آن می‌پردازیم مبتنی بر قوانین نیوتون است نه روشاهای انرژی.

فرض کنید نیروی $F(x)$ بر ذره‌ای به جرم m وارد شود. در $t = 0$ ذره در x_0 واقع شده و سرعت آن v_0 است. می‌خواهیم $v(t)$ و $x(t)$ را در همه زمانها داشته باشیم.

حرکت را به رشته‌ای از بازه‌های زمانی کوچک δt تقسیم می‌کنیم. هر بازه آنقدر کوچک است که شتاب را در سراسر آن می‌شود ثابت گرفت. (در بازه‌ای که به قدر کافی کوچک باشد، x چندان تغییری نمی‌کند؛

پس $F(x)$ تقریباً ثابت می‌ماند، و $a_1 = F/m$. در بازه اول، که از $t = 0$ تا $t = \delta t$ است، شتاب برابر با مقدار اولیه $a_1 = F(x_0)/m$ است. (در اینجا شاخصهای زیر حروف شاندۀندۀ شمارۀ بازۀ زمانی اند و کمیت مربوط را در پایان آن بازه مشخص می‌کنند. بنابراین، v_2 یعنی سرعت در پایان بازۀ دوم). حالا به راحتی می‌توانیم معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت را برای هر بازه بدکار ببریم. معادله ۱۵ فصل ۲ سرعت در پایان بازۀ اول را می‌دهد

$$v_1 = v_0 + a_1 \delta t$$

معادله ۱۹ فصل ۲ هم مکان در پایان بازۀ اول را می‌دهد

$$x_1 = x_0 + v_0 \delta t + \frac{1}{2} a_1 (\delta t)^2$$

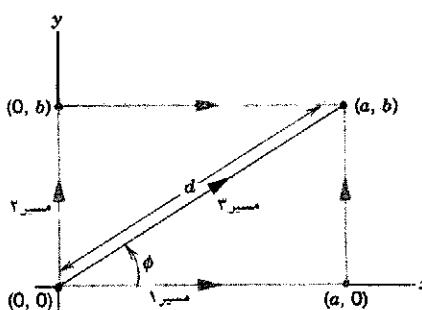
سرانجام، تعیین سه بعدی معادله ۱۳ چنین است^۱

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -i \frac{\partial U}{\partial x} - j \frac{\partial U}{\partial y} - k \frac{\partial U}{\partial z} \quad (27)$$

اگر این عبارت \mathbf{F} را در معادله ۲۴ بگذاریم، یک اتحاد به دست می آید که نشان می دهد دو معادله ۲۴ و ۲۷ هم ارزند. به زبان برداری، می گوییم که نیروی پایستار \mathbf{F} ، منفی گرادیان انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ است. می توانید نشان بدید که برای حرکت در راستای محور x ، همه این عبارات تبدیل می شوند به معادلات یک بعدی متناظر شان، که قبلاً به دست آورده بودیم، در معادله ۲۴ و ۲۷ نشاندهند نیروی است که توسط سیستمی با انرژی پتانسیل U اعمال می شود.

مثال ۵. در سیستمی از ذرات، که حرکتشان محدود به صفحه xy است، نیرو به شکل $\mathbf{j} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = -ky \mathbf{i} - kx \mathbf{j}$ است که در آن k یک مقدار ثابت مثبت است. (این نیرو ذره ای را که در نقطه دلخواه (x, y) واقع شده است به طرف خط قطري $y = -x$ را بکشید و می راند. برای تحقیق این موضوع می توانید خط $y = -x$ را در نقاط مختلف صفحه xy رسم کنید). (الف) نشان بدید که کار این نیرو، طی حرکت ذره از مبدأ (0°) به نقطه (a, b) ، در راستای هر سه مسیر شکل ۱۲ یکسان است. (ب) با فرض اینکه این نیرو پایستار است، انرژی پتانسیل متناظر با آن، یعنی $U(x, y)$ را به دست بیاورید. نقطه مرجع را $x = 0^\circ$ و $y = 0^\circ$ بگیرید و فرض کنید $U(0^\circ, 0^\circ) = 0$.

حل: (الف) کار در مسیر ۱ را می شود با تقسیم مسیر به دو بخش به دست آورد: مسیر ۱ از $x = a$ تا $x = 0^\circ$ در راستای محور x ، و مسیر ۲ از نقطه (a, b) به نقطه $(a, 0)$ در راستای قائم، کار در مسیر



شکل ۱۲. مثال ۵. سه مسیر مختلف برای محاسبه کار ذره، در حرکت از مبدأ ($0^\circ, 0^\circ$) به نقطه (a, b) .

۱. مشتق پاره ای، $\partial/\partial x$ ، یعنی مشتق (z) $U(x, y, z)$ نسبت به x ، در حالی که y و z ثابت اند. به همین ترتیب، y و $\partial/\partial y$ هم به معنی مشتق گیری نسبت به متغیرهای مربوطاند و قبیل که متغیرهای دیگر ثابت باشند.

معادله ۱۰ شکل تحلیلی ای برای انرژی پتانسیل به دست نیاید یا نتوانیم انتگرال معادله ۲۲ را به شکل تحلیلی محاسبه کنیم. نتایج شکل ۱۱ خیلی آشنا به نظر می رسد: این منحنیها شبیه منحنیهای سینوس و کسینوس اند. در واقع، معادله ۲۲ را قبلاً حل کرده و جواب تحلیلی این سیستم را به دست آورده ایم، و دیده ایم که معادله حرکت یک تابع کسینوس است. رهیافت عددی هم مؤید همین نتیجه است.

۵-۸ سیستمهای پایستار دو و سه بعدی (اختیاری)
تا اینجا مقاهم انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی را برای سیستمهای یک بعدی، که در آنها نیرو در راستای حرکت است، بررسی کردیم. نتایج این بررسی را می توانیم به راحتی به حرکت سه بعدی تعیین بدھیم و در این مورد هم عبارتی برای پایستگی انرژی به دست بیاوریم.

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن ذره ای روی مسیری حرکت می کند و نیروی وارد بر ذره ناشی از اجزای دیگر سیستم است. اگر کار نیروی \mathbf{F} فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای حرکت و مستقل از سیستم باشد، این نیرو پایستار است. انرژی پتانسیل U را مشابه با سیستمهای یک بعدی تعریف می کنیم، و می بینیم که تابعی از سه مختصه فضایی است: یعنی، $(U = U(x, y, z))$ به حرکت سه بعدی تعیین معادله ۹ به $U = U(x, y, z)$. تعیین معادله ۹ به حرکت سه بعدی چنین است

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz \quad (23)$$

یا، به شکل جمع و جورتر و با نماد برداری

$$\Delta U = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

در این رابطه، ΔU تغییر انرژی پتانسیل سیستم در طی مسیر است؛ مسیر حرکت ذره از نقطه (x_0, y_0, z_0) ، که بردار مکان \mathbf{r}_0 تعریف \mathbf{r} می شود، شروع می شود و به نقطه (x, y, z) ، که با بردار مکان \mathbf{r} تعریف می شود، ختم می شود. F_x, F_y و F_z مؤلفه های نیروی پایستار $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ اند.

تعیین معادله ۱۲ به حرکت سه بعدی چنین است

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0) \quad (25)$$

یا، با نماد برداری

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0) \quad (26)$$

که در آن $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ و $v_0^2 + v_0^2 + v_0^2 = v_0^2$ است. معادله ۲۵ را، بر حسب انرژی مکانیکی E ، می شود به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E$$

(ب) انرژی پتانسیل را می‌شود از معادله ۲۴ بدست آورد، و در واقع قبلاً آنرا، با محاسبه کار در مسیر ۳، عملأً بدست آورده‌ایم. تنها تفاوت در این است که، به جای (a, b) ، باید تا نقطه دلخواه (x, y) انتگرال بگیریم. کافی است اسم نقطه (a, b) را (x, y) بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\Delta U = U(x, y) - U(0, 0) = -W = kxy$$

که در آن فرض کرده‌ایم $U(0, 0) = 0$. باید بتوانید نشان بدهید که می‌توانیم معادله ۲۷ را برای اینتابع انرژی پتانسیل بدکار ببریم و نیروی $\mathbf{F}(x, y)$ را پیدا کنیم.

اگر این نیرو را کمی تغییر بدهیم، چنان‌که $k_1 \neq k_2$ شود، از روش قسمت (الف) معلوم می‌شود که این نیرو در مورد هم، این نیرو همچنان ناپایستار است. چنین نیرویی کاربرد مهمی در کانونی کردن مغناطیسی ذرات باردار دارد، اما نمی‌شود آنرا با یک تابع انرژی پتانسیل نشان داد، چون پایستار نیست.

۱۰ برابر است با

$$\begin{aligned} W_{1a} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int F_x dx + \int F_y dy \\ &= \int (-ky) dx + \int (-kx) dy \end{aligned}$$

در مسیر ۱a، $y = 0$ است. پس هر دو انتگرال بالا صفرند و $W_{1a} = 0$ می‌شود. در مسیر ۱b، $x = a$ و $d\mathbf{s} = dy \mathbf{j}$ است، پس

$$\begin{aligned} W_{1b} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=a}^{y=b} (-kx) dy \\ &= (-ka) \int_a^b dy = -kab \end{aligned}$$

بنابراین، کل کار در مسیر ۱ برابر است با

$$W_1 = W_{1a} + W_{1b} = -kab$$

در مسیر ۲ هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} W_{2a} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=b}^{y=a} (-kx) dy = 0 \\ W_{2b} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x=a}^{x=0} (-ky) dx \\ &= (-kb) \int_a^0 dx = -kab \end{aligned}$$

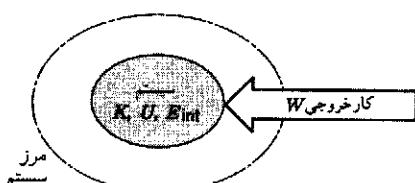
در مسیر ۳، $ds = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ است، و خواهیم داشت

$$W_2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int (-ky dx - kx dy)$$

اگر متغیر r را روی پاره خطی بگیریم که از $(0, 0)$ شروع می‌شود و به (a, b) ختم می‌شود، $y = r \sin \phi$ و $x = r \cos \phi$ (در راستای این خط ثابت است). همچنین $dx = dr \cos \phi$ است. r را متغیر انتگرال‌گیری انتخاب می‌کنیم. مقدار r از 0 در مبدأ، تا $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$ در نقطه (a, b) ، تغییر می‌کند. به این ترتیب، انتگرال مربوط به W_2 به صورت زیر در می‌آید

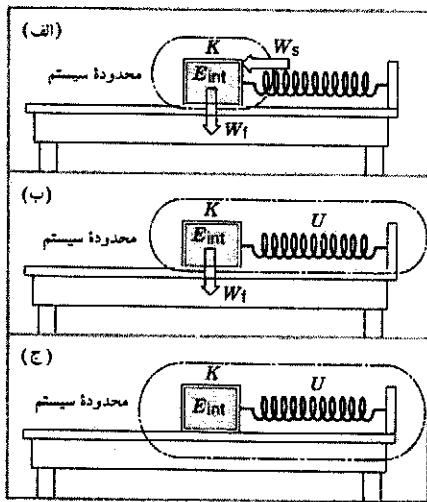
$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^d [-k(r \sin \phi)(dr \cos \phi) \\ &\quad - k(r \cos \phi)(dr \sin \phi)] \\ &= -2k \sin \phi \cos \phi \int_0^d r dr = -kd^2 \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\cos \phi = a/d$ و $\sin \phi = b/d$ می‌شود. بنابراین، $W_2 = W_1$ است. این نتیجه ثابت نمی‌کند که \mathbf{F} حتماً پایستار است (برای اثبات این موضوع باید کار را برای همه مسیرهای بین این دو نقطه حساب کرد)، اما تا حدود زیادی اطمینان می‌دهد که \mathbf{F} ممکن است



شکل ۱۳. یک سیستم محصور در مرز، با انرژی جنبشی K ، انرژی پتانسیل U (نهایاً مربوط به برهم‌کشن اجزای سیستم با یکدیگر)، و انرژی داخلی E_{int} . محیط می‌تواند با انجام کار خارجی W ، با سیستم انرژی مبادله کند.

Ramin.Samad@yahoomail.com



شکل ۱۴. جسمی، تحت تأثیر فنر، روی میزی حرکت می‌کند؛ میز به آن نیروی اصطکاک وارد می‌کند. (الف) سیستم فقط شامل جسم است؛ نیروی فنر و نیروی اصطکاک روی سیستم کار انجام می‌دهند، و انرژی آن را تغییر می‌دهند. (ب) در این مورد، سیستم شامل جسم و فنر است، و هم انرژی جنبشی دارد هم انرژی پتانسیل. (ج) در این مورد، سیستم شامل میز هم است. نیروی اصطکاک، در اینجا، یک نیروی داخلی است و در انرژی داخلی سیستم مؤثر است.

نوشته می شود

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W_f \quad (۳۰)$$

انرژی سیستم، در این حالت $U + K + E_{int}$ است؛ در این مورد، انتقال انرژی بین فنر و جسم، تغییری در انرژی سیستم ایجاد نمی‌کند. نیروی فنر یک نیروی داخلی است که می‌تواند انرژی را، در داخل سیستم، از یک شکل به شکلی دیگر تبدیل کند ($K \leftrightarrow U$)، اما نمی‌تواند کل انرژی سیستم را تغییر بدهد. کار منفی اصطکاک سطح افقی می‌تواند انرژی سیستم را تغییر بدهد.

سرانجام، این بار سیستم را چنان تعریف می‌کنیم که میز را هم در بر بگیرد (شکل ۱۴ ج). در این مورد هیچ نیروی خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، وجود ندارد که بتواند به داخل مرزهای سیستم انرژی منتقل کند. با این تعریف برای سیستم، کار خارجی صفر است؛ پس

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0 \quad (۳۱)$$

در این مورد، نیروی اصطکاک هم، مثل نیروی فنر، یک نیروی داخلی است. انرژی، در داخل سیستم؛ می‌تواند از شکل انرژی مکانیکی $U + K$ متعلق به مجموعه فنر-جسم، به انرژی داخلی مجموعه میز-جسم تبدیل شود، اما انرژی کل (مکانیکی+درونی) ثابت می‌ماند. مثلاً فرض کنید جسم را، در حالت که فنر فشرده شده است، از حالت سکون رها کنیم.

پتانسیل، بلکه بمحاسبه کار (خارجی) W نشان داده شده‌اند. بعداً، در همین بخش، تعریف دقیقی از انرژی داخلی، بمحاسبه انرژیهای جنبشی و پتانسیل میکروسکوپیک مولکولهای سازنده اجزای سیستم، ارائه می‌کنیم. مثالهایی از تغییرات انرژی داخلی عبارت‌اند از تغییر آرایش مولکولهای سیستم (مثلًا جوشاهای میکروسکوپیک ناشی از اصطکاک لغزشی) و تغییر سرعت مولکولهای سیستم که به صورت تغییر دما ظاهر می‌شود. (دما را در فصل ۲۲ بررسی می‌کنیم و در فصل ۲۳ آنرا به انرژی درونی مربوط می‌کنیم).

انرژی سیستم، با کاری که محیط روی آن انجام می‌دهد، می‌تواند تغییر کند؛ شکل ۱۳ نمایش این موضوع است. (کار داخلی‌ای که بخشی از سیستم بر بخشی دیگر، درون مرزهای سیستم، انجام می‌دهد انرژی کل را تغییر نمی‌دهد، فقط می‌تواند انرژی را از شکلی به شکلی دیگر تبدیل کند؛ مثلاً از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی)، بنابراین، رابطه پایستگی انرژی سیستم را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W \quad (۲۸)$$

که در آن، W کار خارجی همه نیروهایی است که محیط از طریق آنها روی سیستم عمل می‌کند.

شکل ۱۳، همچنین قرارداد مهم علامت کار خارجی را نشان می‌دهد. کار مثبت محیط روی سیستم، انرژی سیستم را زیاد می‌کند. کار منفی محیط روی سیستم (اکه با کار مثبت سیستم بر محیط هم‌ارز است) انرژی سیستم را کم می‌کند.

این اصول را با بررسی سیستم جسم-فنر شکل ۱ نشان می‌دهیم؛ در اینجا فرض می‌کنیم که بین جسم و میزی که جسم بر آن می‌لغزد اصطکاک وجود دارد. ابتدا سیستم را خود جسم تعریف می‌کنیم (شکل ۱۴ الف). شکل دو انتقال انرژی به داخل مرزهای سیستم را نشان می‌دهد: کار پایستار مثبت W که فنر روی جسم انجام می‌دهد و کار ناپایستار منفی W_f که نیروی اصطکاک روی جسم انجام می‌دهد. برای این سیستم، پایستگی انرژی را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W_s + W_f \quad (۲۹)$$

در این مورد U صفر است، زیرا انرژی پتانسیل سیستم داخل مرز تغییر نمی‌کند. فنر جزء سیستم نیست، پس انرژی پتانسیل فنر به حساب نمی‌آید؛ در مقابل، فنر بخشی از محیط است و روی سیستم کار پایستار W را انجام می‌دهد. به جهت پیکانهای شکل ۱۴ الف، که انتقال انرژی را نشان می‌دهند توجه کنید؛ معادله ۲۹ نشان می‌دهد که کار مثبت فنر (که فرض کردہ‌ایم نسبت به طول طبیعی اش فشرده شده است) انرژی جسم را زیاد می‌کند، و کار منفی سطح افقی، انرژی جسم را کم می‌کند. حالا سیستم را مشتمل از جسم و فنر در نظر بگیرید (شکل ۱۴ ب). این سیستم جدید انرژی پتانسیل دارد، که مربوط به نیروی فنر است. نیروی اصطکاک تنها نیروی خارجی‌ای است که روی سیستم کار انجام می‌دهد. با این تعریف جدید سیستم، پایستگی انرژی به صورت زیر

باشد. تجربه نشان می‌دهد که انرژی الکترون کمتر از این مقدار است. پیشنهادهای زیادی برای توجیه این انرژی "گمشده" مطرح شد. یکی از پیشنهادها این بود که الکترون، پس از خروج از هسته به الکترونهای عادی اتم برمی‌خورد و بخشی از انرژی اش را، در این برخوردها از دست می‌دهد. اگر چنین چیزی درست می‌بود، می‌بایست طی این فرایند انرژی داخلی سیستم شامل الکترونهای گسیلیده و اتمهای واباشیده زیاد می‌شد، و این افزایش انرژی داخلی می‌بایست به شکل افزایش دمای نمونه پرتوزا ظاهر می‌شد. اما آزمایش‌های دقیقی که در این مورد انجام شد، چنین افزایشی را نشان نداد، و این فرضیه رد شد. در سال ۱۹۳۰ ولفگانگ پاؤلی، فیزیکدان سوئیسی، فرضیه درست را ارائه کرد. پاؤلی اظهار کرد که در واباشی بتایی، علاوه بر الکترون، ذره دیگری هم گسیل می‌شود که حامل انرژی "گمشده" است. معلوم شد که این ذره، که آن را نوتربینو نامیده‌اند، بسیار غریب است. فرضیه پاؤلی به سرعت، با روش‌های غیرمستقیم، تأیید شد. اما ۲۵ سال طول کشید تا نوتربینو مستقیماً مشاهده شود. این پیش‌بینی وجود نوتربینو، که براساس اطیمان به پایستگی انرژی بود، نقش مهمی در پیشرفت فیزیک ذرات بنیادی در دهه‌های بعدی داشت. نوتربینو بکی از اساسی‌ترین ذرات بنیادی است که با بررسی خواص و برهمکنشهای آن با ذرات دیگر، درک بیشتر و بهتری از ساختار درونی ماده فراهم آمده است.

مثال ۶. توب بیسبالی به جرم $m = ۱۴۳\text{kg}$ را $m = ۱۴۳\text{kg}$ از بالای برج سیرز به ارتفاع h برای با 443m (یعنی ۱۴۵ft) رها می‌شود، و به سرعت حدی $v = ۷\text{ m/s}$ (یعنی ۲۶ ft/s) تغییر انرژی داخلی توب و هوای اطراف آن، هنگامی که توب به زمین رسیده است، چقدر است؟ حل: سیستم را شامل توب بیسبال، هوای اطراف آن، و زمین می‌گیریم. هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود؛ جاذبه گرانش زمین بر توب و نیروی اصطکاک هوا بر توب، هر دو نیروهای داخلی این سیستم‌اند. تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر است با

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - mgh$$

$$= -621\text{J} = -(9.80\text{m/s}^2)(443\text{m})(143\text{kg})$$

تغییر انرژی جنبشی، طی سقوط توب، برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2}(143\text{kg})(26\text{m/s})^2 = 126\text{J}$$

(از حرکت زمین در اثر جاذبه گرانشی توب چشم پوشیده‌ایم). طبق معادله ۲۸، پایستگی انرژی را می‌توان چنین نوشت، $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$. زیرا کار خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود. از این رابطه معلوم می‌شود که

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta U - \Delta K = -(-621\text{J}) - 126\text{J} = 495\text{J}$$

جسم روی میز می‌لغزد و سرانجام متوقف می‌شود. در این حالت، $\Delta E_{\text{int}} = \Delta K = 0$ است (زیرا $K_f = K_i = 0$): پس، U می‌شود. اتفاق انرژی پتانسیل اولیه سیستم، موجب افزایش انرژی داخلی آن با طور جداگانه بدست بیاوریم؛ فقط می‌توانیم کل تغییر انرژی داخلی سیستم را محاسبه کنیم.

نیروی اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستار اتفاقی است. در یک سیستم مکانیکی بسته، از نوعی که در اینجا توصیف شد، نیروی اصطکاک باعث می‌شود که انرژی مکانیکی به انرژی داخلی تبدیل شود. در اینجا انرژی مکانیکی پایسته نیست، و اتفاق انرژی مکانیکی با همان مقدار افزایش انرژی داخلی جبران می‌شود. (همه نیروهای ناپایستار هم تلفکننده نیستند، بعضی از نیروهای ناپایستار مثلاً نیروی مغناطیسی، می‌توانند انرژی مکانیکی سیستم را افزایش بدهند. حتی نیروی اصطکاک هم، تحت شرایطی، می‌تواند باعث افزایش انرژی مکانیکی سیستم شود. آیا می‌توانید برای این مورد آخر مثالی بزنید؟) توجه کنید که در مثالهای بالا انرژی پتانسیل ماکروسکوپیک فنر را به شکل یک جملة مجرأ نوشته‌ایم. می‌توانستیم انرژی ذخیره شده در فنر را هم جزء انرژی داخلی سیستم به حساب بیاوریم، اما برای سادگی ترجیح داده‌ایم که جملات ماکروسکوپیک را که به راحتی می‌شود منشأ آنها را پیدا کرد، جدا کنیم؛ به این ترتیب، E_{int} شامل بقیه جملات میکروسکوپیک است، که در آن گنجانده نشده‌اند؛ یعنی بازارایی مولکولهای فنر در U گنجانده شده است، ولی بازارایی مولکولهای جسم و میز در E_{int} گنجانده شده است. این تقسیم‌بندی کم و بیش دلبخواه، تنها برای ساده کردن توصیف این سیستم خاص است.

معادله ۲۸، نخستین گام در گذار از قانون پایستگی انرژی مکانیکی به قانون کالی پایستگی انرژی است. این قانون، به زبان غیر ریاضی می‌گوید که

در یک سیستم بسته، انرژی می‌تواند از شکلی به شکلی دیگر تبدیل شود، اما نمی‌تواند خلق شود یا از بین برود؛ کل انرژی سیستم ثابت می‌ماند.

منظور از "بسته بودن" سیستم آن است که هیچ کار خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، روی سیستم انجام نمی‌شود. این بیان پایستگی انرژی، تعیینی از تجربه است، و تاکنون هیچ آزمایش یا مشاهده‌ای آن را نقض نکرده است.

در تاریخ فیزیک، گاهگاهی به نظر آمده است که این قانون نقض می‌شود، اما این نقض ظاهری موجب شده است به دنبال شکل جدیدی از انرژی پیگردیم تا با گنجاندن آن در قانون کلی تری از پایستگی انرژی بتوانیم مشاهده را توضیح بدهیم. مثلاً در دهه ۱۹۲۰ برسیهای تجربی زیادی در برابر واباشی بتایی هسته‌ها انجام شد؛ درین نوع واباشی پرتوزا، هسته اتم الکترون می‌گسیلد، براساس انرژی هسته، پیش از واباشی و پس از آن، انتظار می‌رود که الکترون گسیل شده $Rami\#7Samad@yahoo.com$

(ب) $\Delta K'$ را تغییر انرژی جنبشی، از شروع حرکت جسم از پایین سطح شیدار تا بازگشت جسم به همان نقطه، می‌گیریم، تغییر انرژی پتانسیل در این مسیر یعنی U' ، صفر است. از معادله ۲۸ نتیجه می‌شود

$$\Delta K' = -\Delta U' + (-\Delta E'_{\text{int}} + W'_f)$$

مقدار کمیت درون برانتر برابر با $= -46 \text{ J}$ است، زیرا فرض بر این است که اتفاف انرژی مکانیکی در برگشت، برابر با اتفاف انرژی مکانیکی در رفت است. پس، $-46 \text{ J} = K_f - K_i = \Delta K'$ و انرژی جنبشی در پایین سطح شیدار برابر است با

$$K_i = 56 \text{ J} - 46 \text{ J} = 10 \text{ J}$$

سرعت جسم به صورت زیر به دست می‌آید

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(10 \text{ J})}{4.5 \text{ kg}}} = 2.1 \text{ m/s}$$

اساس میکروسکوپیک انرژی داخلی (اختیاری)
جسمی را، که می‌تواند جسم مثال قبل در حرکت بر سطح شیدار یا توپ مثال ۶ باشد، در نظر بگیرید. قضیه کار-انرژی را برای یک ذره خاص (مثلای اتم) در این سیستم مرکب می‌توانیم به شکل $\Delta K_i = W_i$ بنویسیم؛ که شاخص i یکی از N ذره تشکیل‌دهنده جسم را مشخص می‌کند. W_i به معنی کل کار حاصل از همه نیروهای وارد بر این ذره است. می‌شود قضیه کار-انرژی را جداگانه برای هر ذره نوشت و N معادله حاصل را با هم جمع کرد. نتیجه خواهد شد

$$\Sigma \Delta K_i = \Sigma W_i \quad (32)$$

که در آن، شاخص i از ۱ تا N تغییر می‌کند. در طرف راست معادله ۳۲، کل کار انجام شده بر جسم را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: $\Sigma W_i = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$. جمله W_{int} شامل کار نیروهایی است که انتها یا مولکولهای جسم بر یکدیگر وارد می‌کنند، و جمله W_{ext} شامل کار همه نیروهای خارجی است. در طرف چپ معادله ۳۲ هم، کل انرژی جنبشی را به دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ یکی K_i ، که شاندنهنده حرکت انتقالی کل جسم است، دیگری K_{int} که نتاینده مجموع حرکتهای کترهای داخلی انتها و مولکولهای جسم است. (چگونگی این تقسیم را در فصل ۹، در بررسی حرکت مرکز جرم، توضیح می‌دهیم؛ فعلًاً فقط فرض می‌کنیم که چنین تقسیمی ممکن است). پس می‌توانیم معادله ۳۲ را چنین بنویسیم

$$\Delta K + \Delta K_{\text{int}} = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$$

این افزایش انرژی داخلی، می‌تواند به صورت افزایش دمای توپ و هوای اطراف آن، یا شاید به صورت انرژی جنبشی هوای واقع شده در مسیر توپ افتاب، ظاهر شود. تنها با معادله ۲۸ نمی‌شود گفت که انرژی به کدامیک از این شکلها در می‌آید. برای این کار باید توپ یا هوا را جدا کنیم و به عنوان سیستم انجام می‌دهد حساب کنیم. به علاوه باید نیروی اصطکاک بین توپ و هوا، و همچنین جزئیات حرکت توپ را بدانیم؛ خلاصه، اوضاع پیچیده‌تر از آن می‌شود که اینجا به آن پردازیم. در این مسئله فرض کردیم که افزایش انرژی داخلی، در سیستمی که تعریف کردیم باقی می‌ماند. در عمل، اختلاف دمای توپ یا هوا با محیط اطرافشان منجر به نوع دیگری از انتقال انرژی می‌شود که آن را گرما می‌نامند (گرما را در فصل ۲۵ مطالعه خواهیم کرد).

مثال ۷. جسمی به جرم 4.5 kg ، با سرعت اولیه $v = 5 \text{ m/s}$ روی سطح شیداری با زاویه 30° به طرف بالای سطح برتاب می‌شود. مشاهده می‌شود که جسم سرعتش به تدریج کم می‌شود و پس از پیمودن مسافت $d = 1.5 \text{ m}$ روی سطح شیدار به حالت سکون (لحظه‌ای) می‌رسد. (الف) این جسم، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست می‌دهد؟ (ب) این جسم، از حالت سکون، دوباره شروع به حرکت می‌کند و به پایین سطح شیدار بر می‌گردد. با فرض اینکه اتفاف انرژی مکانیکی در اثر اصطکاک در این مرحله هم به اندازه مرحله قبلی باشد، جسم با چه سرعتی به نقطه آغاز حرکت بر می‌گردد؟ حل: (الف) اینجا هم، مثل مثال ۶، از تغییرات انرژی زمین چشم می‌پوشیم و فقط تغییر انرژی جنبشی جسم را در نظر می‌گیریم. تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_f - U_i = mgh = \\ &= (4.5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ m})(\sin 30^\circ) = 33 \text{ J} \end{aligned}$$

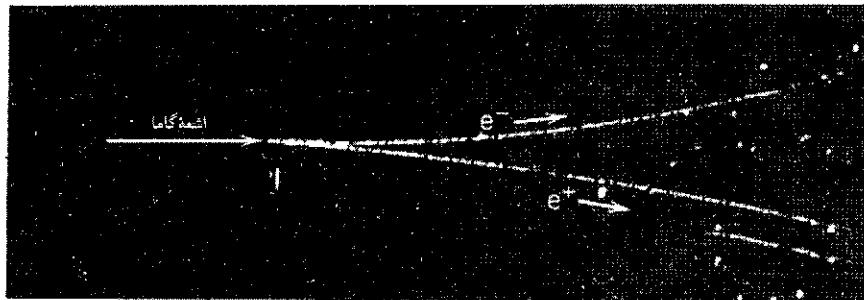
تغییر انرژی جنبشی، از پایین سطح شیدار تا بالای آن، برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= -\frac{1}{2}(4.5 \text{ kg})(5 \text{ m/s})^2 = -56 \text{ J} \end{aligned}$$

تغییر انرژی مکانیکی برابر است با

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = 33 \text{ J} - 56 \text{ J} = -23 \text{ J}$$

توجه کنید که، طبق معادله ۲۸، این اتفاف انرژی مکانیکی را می‌شود به صورت $W_f + \Delta E_{\text{int}} - \Delta E$ نوشت. در اینجا ΔE_{int} کمیتی مثبت است که افزایش انرژی داخلی جسم را (نه جسم + سطح شیدار) را نشان می‌دهد؛ W_f کار خارجی (منفی) است که نیروی اصطکاک سطح شیدار روی جسم انجام می‌دهد. بدون داشتن اطلاعات اضافی نمی‌شود این دو کمیت را جداگانه حساب کرد.

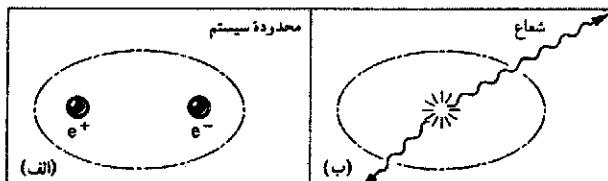


می‌رسند و نابود می‌شوند و تابش حاصل، از مرزهای سیستم خارج می‌شود (شکل ۱۶ ب). با اندازه‌گیری‌های مناسب در محیط، می‌توانیم انرژی تابش خارج شده از سیستم را تعیین کنیم؛ نتیجه می‌شود که در هر رویداد نابودی، تابش به اندازه 22 MeV را انرژی از سیستم خارج می‌کند. هنگامی که اتمهای محیط این تابش را جذب می‌کنند، نیروهای الکترومغناطیسی وابسته به تابش 22 MeV را کار روی محیط انجام می‌دهند. معادله ۲۸ نشانده‌نده کاری است که محیط روی سیستم انجام می‌دهد، پس در این مورد محیط کار منفی، به مقدار 22 MeV را روی سیستم انجام داده است.

اگر معادله ۲۸ را برای این سیستم به کار ببریم، می‌بینیم که پایستگی انرژی ظاهراً نقض می‌شود؛ طرف راست معادله برابر است با مقداری منفی، W ، اما تغییر انرژی در طرف چپ، که برای برقرار بودن تساوی لازم است، مشهود نیست. می‌شود مثلاً فرض کرد که انرژی داخلی سیستم به اندازه W کاهش پیدا کرده است، اما به هیچ‌وجه معلوم نیست که چه نوع انرژی داخلی‌ای در سیستم اولیه بوده که حالا در سیستم نهایی نیست.

حل این معملا را می‌شود در معادله معروف آلت اینشتین، که جرم و انرژی را به هم مربوط می‌کند، پیدا کرد. اینشتین این معادله را در سال ۱۹۰۵، یعنی مدت‌ها پیش از انجام آزمایش‌هایی از نوع نابودی الکترون-پوزیترون، پیشنهاد کرد

$$E_0 = mc^2 \quad (35)$$



شکل ۱۶. (الف) سیستمی شامل یک پوزیترون e^+ و یک الکترون e^- . (ب) پس از نابودی پوزیترون و الکترون، تابش حاصل، از مرز سیستم خارج می‌شود.

شکل ۱۵. انرژی تابش گاما به یک پوزیترون و یک الکترون تبدیل شده است. این ذره در اتفاق حبابی که در آن تولید شده‌اند ردهای مرئی از خودشان بجا می‌گذارند. ردهای خمیده‌اند زیرا یک میدان مغناطیسی قوی در اتفاق نیترونی تولید می‌کند که همواره بر سرعت ذرات عمود است، اما جهت آن درمورد الکترون و پوزیترون (که بار مخالف دارند) در دو جهت مخالف یکدیگر است.

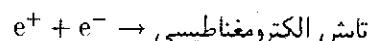
فرض برآن است که در سطح میکروسکوپیک همه نیروها پایستارند؛ بنابراین، به جای کل کار داخلی می‌توانیم انرژی پتانسیل کل بین اتمی یا بین مولکولی را بگذاریم: $W_{int} = -\Delta U - \Delta U_{int}$. این را می‌شد $-\Delta U_{int}$ نوشت، اما راحت‌تر است که بعضی از انرژی‌های پتانسیل میکروسکوپیک را که محاسبه‌شان ساده است، مثل انرژی پتانسیل فنر را، در جمله U بگنجانیم. با این جایگذاری، و با جابه‌جا کردن جملات، نتیجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K + (\Delta U_{int} + \Delta K_{int}) = W_{ext} \quad (34)$$

با جایگذاری $\Delta E_{int} = \Delta U_{int} + \Delta K_{int}$ ، معادله ۲۸ به دست می‌آید. بنابراین، جمله انرژی مستقیماً از اعمال قضیه کار-انرژی، در شکل میکروسکوپیک، بر اجسام، به دست می‌آید.

۷-۸ جرم و انرژی^۱ (اختیاری)

یکی از انواع معمولی پرتوزایی، که در آزمایشگاه به آسانی مشاهده می‌شود، گسیل پوزیترون است؛ در این فرایند، هسته اتم یک پوزیترون گسیل می‌کند؛ پوزیترون ذره‌ای با همان جرم الکترون است ولی بار الکتریکی مخالف (مثبت) دارد. هنگامی که پوزیترون به الکترون‌ها ماده معمولی برخورد می‌کند، فرایندی به نام نابودی الکترون-پوزیترون مشاهده می‌شود. در این فرایند، الکترون و پوزیترون هر دو ناپدید می‌شوند و به جایشان فقط تابش الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود. این فرایند را می‌توانیم چنین نمایش بدheim



که در آن e^+ و e^- ، به ترتیب، نشانه پوزیترون و الکترون‌اند. شکل ۱۵ فرایند معکوس این فرایند را نشان می‌دهد، که در آن تابش گاما به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ این فرایند را تولید زوج می‌نامند.

سیستمی (مانند شکل ۱۶ الف)، را که شامل یک پوزیترون و یک الکترون است در نظر بگیرید؛ فرض کنید انرژی‌های جنبشی این دو ذره بسیار کوچک و فاصله دو ذره آنقدر زیاد است که انرژی پتانسیل سیستم هم (که ناشی از نیروی الکترواستاتیکی میان ذرات است) قابل چشمپوشی است. سرانجام، پوزیترون و الکترون به هم

$\Delta m = \Delta E_0 / c^2$ نسبت داد. پس معادله ۳۵ می‌گوید که انرژی جرم دارد.

پس نتیجه می‌شود که پایستگی انرژی با پایستگی جرم هم ارز است. چنانکه ایشتین نوشت: "در فیزیک پیش نسبیتی دو قانون پایستگی داریم که اهمیت بنیادی دارند؛ یکی قانون پایستگی انرژی و دیگری قانون پایستگی جرم، که در آنجا کاملاً مستقل از هم ظاهر شوند." نظریه نسبیت این دو را در هم می‌برد و به یک اصل تبدیل می‌کند.^۱ معادله ۳۶ را می‌توانیم برای سیستمهای بسته دیگری هم که شامل ذرات و تابش باشند به کار ببریم. مثلاً خورشید را، به عنوان سیستم در نظر بگیرید. خورشید هر ثانیه $10^{26} \text{ J} \times 4$ انرژی تابش می‌کند. در اینجا هم، مثل مورد نابودی الکترون-پوزیtron، این انرژی تابشی را به کاهش انرژی سکون سیستم نسبت می‌دهیم؛ تغییر جرم متاظر با این تغییر انرژی سکون در هر ثانیه برابر است با^۲

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \times 10^{26} \text{ J}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = -4 \times 10^1 \text{ kg}$$

این کاهش جرم، با استانداردهای معمولی، کاملاً قابل ملاحظه است اما در مقایسه با کل جرم خورشید ($2 \times 10^{30} \text{ kg}$) زیاد نیست. در هر سال، جرم خورشید فقط به اندازه $10^{-14} \times 6$ برابر جرم کل آن کم می‌شود.

سیستم را ابرناختر ۱۹۸۷ (شکل ۱۷) می‌گیریم و مرز را دور آن می‌کشیم. در ۴۰۰ سال گذشته، این اولین ابرناختری است که با چشم غیر مسلح مشاهده شده است.^۳ ابرناختر ستاره‌ای است که ذخیره سوخت گرماهسته‌ای اش را تمام کرده است و دارد به طرز چشمگیری منفجر می‌شود. گفته می‌شود که ابرناختر ۱۹۸۷، طی زمانی در حدود ۱۰ ثانیه، در حدود ۱۰٪ انرژی سکون خودش را، که تقریباً معادل دو برابر جرم خورشید است، به تابش و دیگرانواع انرژی تبدیل کرده است. تغییر انرژی سکون متاظر با دو برابر جرم خورشید، می‌شود

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2 = -2(2 \times 10^3 \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = -4 \times 10^{47} \text{ J}$$

انرژی تابش شده در این ۱۰ ثانیه، متاظر با توان $W = 4 \times 10^{46} \text{ W}$ می‌باشد که با انرژی تابشی حاصل از کل ستاره‌های دیگر و کهکشانهایی که در جهان مرئی می‌بینیم!

۱. اگرچه فیزیکدانها نتایج محاسبات نسبیتی را می‌پذیرند، اما تعبیری از معادله ۳۵ که مورد قبول همه باشد وجود ندارد. رجوع کنید به

"The Concept of Mass," Lev B. Okun, *Physics Today*, June 1989, p. 31.

۲. نگاه کنید به

"The Great Supernova of 1987", Stan Woosley and Tom Weaver, *Scientific American*, August 1989, p. 32.

که در آن^۴ سرعت نور است. این معادله می‌گوید که جرم شکلی از انرژی است، و ذره‌ای به جرم m ، انرژی سکون E_0 دارد که مقدار آن mc^2 است. این انرژی سکون را می‌توانیم انرژی داخلی اجسام ساکن تلقی کنیم. پس الکترون و پوزیtron، صرفاً به خاطر جرمشان، انرژی داخلی دارند. انرژی داخلی هر یک از این دو ذره را می‌توانیم به صورت زیر حساب کنیم:

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{10^{-12} \text{ J/MeV}} = 511 \text{ MeV}$$

بنابراین، کل انرژی داخلی (انرژی سکون) این دو ذره $= 22 \text{ MeV}$ (۵۱۱ MeV) است. تغییر انرژی سکون این سیستم برابر با $22 \text{ MeV} - 1 = 21 \text{ MeV}$ است. کار منفی انجام شده روی سیستم شکل ۱۶، معادل است با مقدار کاهشی که در انرژی سکون سیستم پدید می‌آید. اگر انرژی سکون ذرات را هم به درستی در نظر بگیریم، در می‌یابیم که انرژی پایسته است.

از معادله ۳۵، ضمناً نتیجه می‌شود که هرگاه به جسم مادی ساکنی، به اندازه ΔE انرژی بیفرایم، جرم آن را به اندازه $\Delta m = \Delta E / c^2$ زیاد کرده‌ایم. اگر فنری را فشرده کنیم و انرژی پتانسیل آن را به اندازه ΔU زیاد کنیم، جرم آن به اندازه $\Delta U / c^2$ زیاد می‌شود. اگر دمای جسمی را زیاد کنیم، تا انرژی داخلی آن به اندازه ΔE_{int} زیاد شود، جرم جسم را به اندازه $\Delta E_{int} / c^2$ زیاد کرده‌ایم. این تغییر جرمها، بسیار کوچک‌اند، و در مورد اجسام عادی، معمولاً خارج از توانایی ما برای سنجش جرم‌اند (ازیرا c^2 عددی بسیار بزرگ است)؛ اما در واپاشیها و واکنشهای ذرات هسته‌ای و زیرهسته‌ای، تغییر تسبی جرم ممکن است به قدر کافی بزرگ و قابل سنجش باشد.

به این ترتیب، تغییر انرژی پتانسیل U و انرژی داخلی E_{int} سیستم در داخل مرزهای شکل ۱۳ را می‌شود به تغییر انرژی سکون E_0 . سیستم مربوط کرد. در این صورت، معادله ۲۸ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta E_0 + \Delta K = W \quad (36)$$

در اینجا W انرژی‌ای است (که به شکل کار) بین سیستم و محیط مبادله می‌شود. توجه کنید که طرف چپ معادله ۳۶ فقط دو جمله دارد: انرژی سکون (شامل همه انواع انرژی سیستمهای ساکن) و انرژی حرکتی (جنبیتی). در مورد نابودی الکترون-پوزیtron (با $\Delta K = 0$)، معادله ۳۶ مستقیماً نشان می‌دهد که کار خارجی (منفی) مربوط به تابش، ناشی از کاهش انرژی سکون سیستم اولیه است.

حالا سیستم را در زمانی در نظر بگیرید که تابش گسیل شده است، اما هنوز محیط آن را جذب نکرده است؛ در این حالت، از معادله ۳۵ نتیجه دیگری هم بدست می‌آید. برای اینکه انرژی در این زمان میانی هم پایسته بماند، باید به تابش جرمی برابر با

چنین افزایش ناچیزی در جرم، کاملاً خارج از محدوده توانایی ما در اندازهگیری است.

مثال ۹. در آزمایشی که در سال ۱۹۸۹ در شتابدهنده خطی استانفورد انجام شد، ذرات Z° از برخورد سربهسر (باریکهای از) الکترون (و باریکهای از) پوزیترون که انرژی جنبشی یکسان داشتند، تولید شد. انرژی جنبشی این دوپرتو حداقل باید چقدر باشد تا ذره Z° که انرژی سکون آن 91.2GeV است، تولید شود ($10^9\text{eV} = 91.2\text{GeV}$)؟

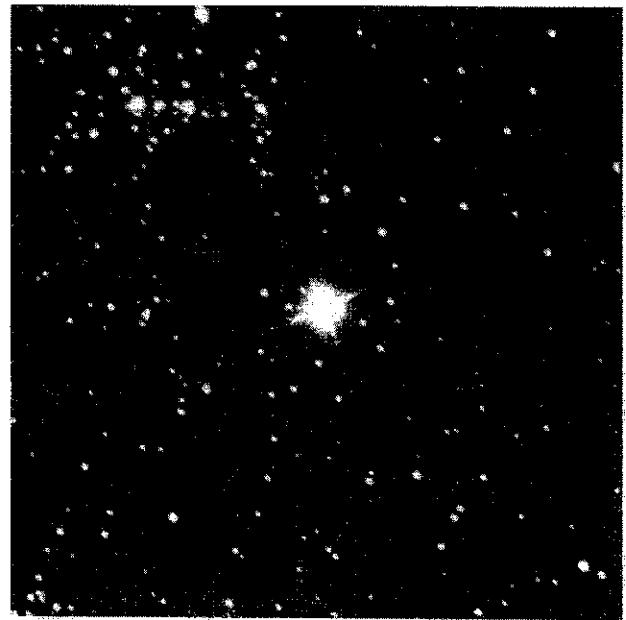
حل: در اینجا هم، مثل مورد مثال ۸، فرض کنید که هیچ کار خارجی (یعنی تابشی) در فرایند قبل از برخورد یا پس از برخورد در میان نیست. تغییر انرژی سکون از حالت اولیه (یک الکترون و یک پوزیترون، هر یک با انرژی سکون 51.1MeV) تا حالت نهایی (Z°) برابر است با

$$\Delta E_\circ = 91.2\text{GeV} - 2(51.1\text{MeV}) = 91.2\text{GeV}$$

می‌بینیم که در اینجا کل انرژی سکون الکترون و پوزیترون، (10.22GeV) کاملاً قابل چشمبوشی است. از معادله ۳۶ نتیجه می‌شود که

$$\Delta K = -\Delta E_\circ = -91.2\text{GeV} = K_f - K_i$$

اگر فرض کنیم Z° در حالت سکون تولید می‌شود، $K_f = 0$ است و بنابراین انرژی الکترون و پوزیترون باید هر یک $45.6\text{GeV} = 91.2\text{GeV}$ باشد. در این مثال، برخلاف مثال قبل، تغییر نسبی انرژی سکون (با جرم) سیستم کاملاً چشمگیر است: جرم نهایی در حدود 100000 برابر جرم اولیه است.^۱



شکل ۱۷. ابرنواختر ۱۹۸۷. نور این ستاره (در مرکز عکس) کاملاً نور ستاره‌های دیگر را تحت الشعاع قرار داده است.

مثال ۸. دو گالوله گلی، هر یک به جرم 35g را به طرف هم پرتاب می‌کنیم. سرعت هر گالوله 7m/s است. گالوله‌ها رودررو با هم برخورد می‌کنند و به هم می‌چسبند. جرم گالوله حاصل چقدر با مجموع جرم دو گالوله اولیه فرق دارد؟

حل: دو گالوله را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم و معادله ۳۶ را به کار می‌بریم. انرژی جنبشی این سیستم تغییر کرده است (و مقدار این تغییر منفی است): انرژی جنبشی پس از برخورد صفر است و پیش از برخورد، K_i ، که برابر با مجموع انرژی جنبشی گالوله‌های است. کار خارجی هم وجود ندارد، پس

$$\Delta K + \Delta E_\circ = (0 - K_i) + \Delta E_\circ = 0$$

یا

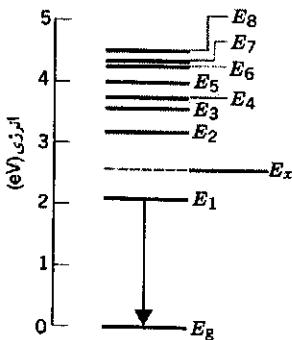
$$\Delta E_\circ = K_i = 2 \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = (10^9\text{J})(10^7\text{m/s})^2 = 10^{11}\text{J}$$

این افزایش انرژی سکون می‌تواند به شکل انرژی داخلی باشد، و مثلاً موجب افزایش دمای سیستم مرکب شود. افزایش جرم متناظر با این افزایش انرژی برابر است با

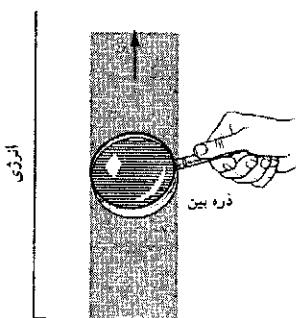
$$\Delta m = \frac{\Delta E_\circ}{c^2} = \frac{10^{11}\text{J}}{(3 \times 10^8\text{m/s})^2} = 10^{-18}\text{kg}$$

۱. نگاه کنید به

"The Stanford Linear Collider," John R. Rees, *Scientific American*, October 1989, p. 58.



شکل ۱۹. چند تراز ارزی اتم سدیم، متاتاظر با حالت‌های کوانتومی مختلفی که اتم می‌تواند در آنها باشد. پایین‌ترین حالت، E_g ، را حالت پایه می‌نامند. هنگامی که اتم از حالت ارزی E_1 به حالت پایه می‌رود (پیکان در شکل) نور زرد مشخصه سدیم را گسیل می‌کند. اتم فقط می‌تواند در حالت‌های که مشخص شده است باشد؛ یعنی ارزی آن متأثر می‌تواند E_x ، بین E_1 و E_2 باشد.



شکل ۲۰. ترازهای ارزی یک آونگ هم کوانتیده‌اند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که با هیچ دقیقی نمی‌شود از هم متمایزشان کرد. هیچ "ذره‌بینی" نمی‌تواند ساختار کوانتیده یک آونگ را آشکارکند.

مشخصه سدیم است (همان نوری که در لامپهای بخار سدیم دیده می‌شود).

شکل ۲۰ ساختار "کوانتیده" یک نوسانگر کلاسیک، مثلًایک آونگ، را نشان می‌دهد، حالتها ممکن است گسسته باشند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که پرش بین آنها را می‌توان فرایندی پیوسته در نظر گرفت. فرض کنید فرکانس آونگ یک دور بر ثانیه باشد ($1/s = \nu$). طبق معادله ۳۸، مقدار "کوانتوم ارزی" برابر است با

$$\hbar\nu = 10^{-32} \text{ J} \cdot \text{s} = (1s^{-1}) (10^{-32} \text{ J} \cdot \text{s}) = 6.63 \times 10^{-32} \text{ J}$$

این کمیت ناچیز فوق العاده کوچکتر از قدرت تفکیک ما در سنجش ارزی اجسام ماکروسکوپیک، مثل آونگ، است؛ بنابراین، ساختار گسسته مشاهده‌پذیر نیست. مثلًاً در آونگ، این تغییر ارزی متاتاظر است با تغییر دامنه نوسان به مقداری از مرتبه $m^{-32} \text{ m}$ ، یا در حدود $1/10^{32}$ برابر قطر اتم! پس می‌توانیم از رفتار کوانتومی اجسام عادی چشم بپوشیم، بی‌آنکه خطابی کرده باشیم.

پایستگی ارزی در مقیاس میکروسکوپیک را می‌توانیم با

سیستم ارزی بدھیم و بگذاریم که نوسان کند، خواهیم دید که تابش گسیل خواهد کرد و سرانجام، تا آنجا که بتواند، ارزی تلف خواهد کرد. اما این نوسانگر اتنی فرق مهمی با سیستم جسم‌فرازدارد؛ در مقیاس اتنی، تغییرات حرکت پیوسته نیست، بلکه به شکل پرشهای گسسته است. پایستگی ارزی، در این مقیاس میکروسکوپیک هم وجود دارد. اختلاف ارزی حالت اولیه و حالت نهایی برابر است با ارزی ΔE که تابش با خود می‌برد، یعنی

$$|\Delta E| = E_i - E_f \quad (37)$$

توجه کنید که اگر سیستم ارزی از دست بدده، $E_i > E_f$ است. گسیل تابش در مقیاس اتنی گسسته است؛ فقط تغییر ارزیهای معنی‌هستند که مجازند، برخلاف موارد کلاسیک که در آنها می‌توانیم تغییر ارزی را متغیری پیوسته در نظر بگیریم. چنانکه در فصل ۴۹ خواهیم دید، تغییر ارزیهای مجاز یک نوسانگر، با فرکانس ν آن چنین رابطه‌ای دارند

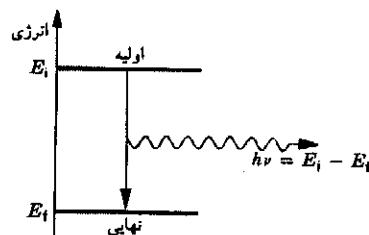
$$E_i - E_f = h\nu \quad (38)$$

که در آن، h ثابتی به نام ثابت پلانک است، به مقدار

$$h = 6.63 \times 10^{-32} \text{ J} \cdot \text{s} = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

شکل ۱۸ نمایشی است از فرایندی که در آن سیستمی (مثلًایک اتم یا هسته) از ارزی اولیه E_i به ارزی نهایی E_f می‌برد، و تابشی با ارزی $h\nu$ می‌گسیلد. این بسته گسسته ارزی را کوانتوم ارزی می‌نامند. و می‌گویند که حالت‌های ارزی کوانتیده‌اند، یعنی مقادیر گسسته معنی‌دارند.

شکل ۱۹ مثالی از چند حالت کوانتیده ارزی اتم سدیم را نشان می‌دهد. اتم می‌تواند در هر یک از این حالت‌های ارزی باشد، اما نمی‌تواند در حالتی میان این مقادیر باشد. چنین ساختاری موجب می‌شود که گسیل تابش از اتمها گسسته باشد؛ مثلًاً هنگامی که اتم سدیم از حالت ارزی E_1 (نخستین حالت بوانگیخته) به حالت E_g (حالت پایه) می‌جهد، نور زردی گسیل می‌کند که



شکل ۱۸. سیستمی از حالت اولیه‌اش تابشی با ارزی $h\nu$ می‌گسیلد و به حالت نهایی می‌رود.

۹. در مثال ۳ (شکل ۸) دیدیم که سرعت و اگن تقریبی در پایین مسیر، به شکل مسیر بستگی ندارد. آیا اگر اصطکاک هم وجود داشت، این حرف می‌توانست درست باشد؟

۱۰. با در نظر گرفتن اینکه انرژی پتانسیل دو مولکول یکسان به فاصله بین مراکز آنها بستگی دارد، توضیح بدھید که چرا مایعی که به شکل لایه‌ای نازک است، انرژی پتانسیل بیشتری دارد تا مایعی با همان جرم که به شکل کره باشد.

۱۱. اینکه یک آونگ نوسان‌کننده سرانجام می‌ایستد، آیا قانون پایستگی انرژی مکانیکی را نقض می‌کند؟

۱۲. در یک مقاله علمی^۱ آمده است که حرکت در شکل راه رفتن و دویدن بازده خیلی کمی دارد، و بازده حرکت پرنگان، ماهیها، و دوچرخه‌سواران خیلی بیشتر است. آیا توضیحی برای این ادعا دارید؟ ۱۳. اتومبیلی در بزرگراهی حرکت می‌کند. راننده ترمز می‌کند و اتومبیل روی جاده می‌لغزد تا بایستد. انرژی جنبشی اتلاف شده اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۴. در پرسشن بالا، فرض کنید راننده چنان ترمز کند که اتومبیل لغزد، در این مورد، انرژی جنبشی از دست رفته اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۵. اتومبیلی از حالت سکون شتاب می‌گیرد و به سرعت ۷ می‌رسد، و طی این مدت چرخهای محرك آن نمی‌لغزند. انرژی مکانیکی اتومبیل از کجا می‌آید؟ متلاً آیا می‌شود گفت که این انرژی از نیروی اصطکاک (ایستایی) جاده بر اتومبیل تأمین می‌شود؟

۱۶. در مورد کاری که در مقابل نیروی اصطکاک انجام می‌شود، تغییر انرژی داخلی مستقل از سرعت (یا چارچوب مرجع لخت) ناظر است. یعنی، مقدار انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی داخلی در اثر اصطکاک، از دید ناظرهای مختلف یکسان است. این امر، با توجه به اینکه دو ناظرهای مختلف، در حالت کلی مقادیر مختلفی برای کار خالص و تغییر انرژی جنبشی به دست می‌آورند، چه توضیحی دارد؟

۱۷. چند مثال فیزیکی برای تعادل نایابدار، تعادل خنثی، و تعادل پایدار بزنید.

۱۸. در مقاله‌ای^۲ آمده است: "جالب است بدانیم که همه انرژی ورودی سوخت، سرانجام به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود و در اطراف مسیر اتومبیل پخش می‌شود." سازوکارهای متحمل این تبدیل را بررسی کنید؛ از جمله اصطکاک جاده، مقاومت هوا، ترمز، رادیوی اتومبیل، چراغهای اتومبیل، باتری، اتلاف درون موتور و اتلاف در سیستم حرکت دهنده، بوق، و غیره. فرض کنید که جاده مستقیم و افقی است.

مشاهده تابشی که از اتمها یا هسته‌ها، هنگام پرش از ترازی به تراز دیگر، گسیل می‌شود بیازماییم؛ چه در فرایند گسیل تابش (مثل شکل ۱۸) و چه در فرایند معکوس، که در آن اتمی که در حالت پایه (پایین‌ترین تراز انرژی) است یک کوانتم تابش جذب می‌کند و به تراز بالاتری می‌جهد. آزمایش‌هایی از این نوع را، که شامل گسیل و جذب‌باند، می‌شود با دقیقی فوق العاده انجام داد، دقیقی از مرتبه ۱۰^{۱۵} از اختلاف انرژی بین حالتها، هر آزمایشی از این نوع با پایستگی انرژی در این مقیاس میکروسکوپیک سازگار بوده است.

پرسشها

۱. آسانسوری از طبقه بالای ساختمانی پایین می‌آید و متوقف می‌شود.

انرژی پتانسیل آن چه می‌شود؟

۲. جاده‌های کوهستانی به مردم مستقیماً بالا می‌روند، بلکه می‌پیچند و به ترتیب بالا می‌روند. چرا؟

۳. بالشتکهای هوا احتمال صدمات ناشی از تصادف اتومبیل را به مقادیر زیادی کم می‌کنند. بر حسب انتقال انرژی توضیح بدھید که چرا.

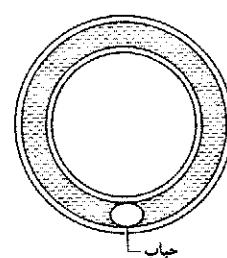
۴. زمانی که در پرش با نیزه، نیزه فایرگلاس جای نیزه چوبی را گرفت، تحولی در این رشته ایجاد شد. چرا؟

۵. جسمی را از دست رها می‌کنید و می‌بینید که به اندازه یک و نیم برابر ارتفاع اولیه‌اش از کف زمین وامی جهد. از این مشاهده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. تویی که به زمین می‌افتد نمی‌تواند به بالاتر از ارتفاع اولیه‌اش برگدد. اما قطرهای آبی که از پایین آبشار به بالا می‌جهند، گاهی از بالاترین نقطه آبشار هم بالاتر می‌روند. چرا؟

۷. زمین لردهای شدید می‌توانند چنان انرژی‌ای آزاد کنند که برای تخریب یک شهر کافی است. درست پیش از زمین لرده، این انرژی کجا بوده است؟

۸. شکل ۲۱ یک لوله شیشه‌ای حلقوی را نشان می‌دهد که به دیواری نصب شده است. لوله بر از آب است و تنها یک حباب هوا دارد که در ته لوله در حالت سکون لحظه‌ای است. حرکت بعدی این حباب را بر حسب انتقال انرژی توضیح بدھید. یک بار از نیروهای گرانوی و اصطکاک چشم بپوشید و یا بار آنها را کاملاً در نظر بگیرید.



شکل ۲۱. پرسشن ۸

۱. نگاه کنید به

"The Energetic Cost of Moving About," V. A. Tucker, *American Scientist*, July-August 1975, p. 413.

2. "Energy and the Automobile," Gene Waring, *The Physics Teacher*, p. 494.

کافی حساس می‌بود، تغییر جرمی نشان می‌داد؟ ۲۹ آیا در فیزیک کلاسیک (یعنی غیرکوانتمو) هم کمیتهای کوانتیا موجود دارد؛ اگر دارد، مثالهایی بیاورید.

مسئله‌ها

بخش ۳-۸ سیستمهای پایستار یک بعدی

۱. برای از کار انداختن موشکهای بالیستیک در مراحل اولیه پرواز، یک "تفنگ الکترومغناطیسی" طراحی شده است که در ماهواره‌های زمینی مدار پایین سوار می‌شود. این تفنگ باید بتواند پرتابه‌ای به جرم 3 kg را با سرعت 10 km/s پرتاب کند. انرژی جنبشی این پرتابه، حتی اگر ماده منفجره هم نداشته باشد. برای اینکه موشک را در اثر برخورد از کار بیندازد کافی است. (چنین سلاحی را سلاح "انرژی جنبشی" می‌نامند). پرتابه به وسیله نیروهای الکترومغناطیسی شتاب می‌گیرد و به سرعت پرتاب می‌رسد. حالا فرض کنید می‌خواستیم این پرتابه را با استفاده از یک فنر پرتاب کنیم (سلاح "فنری"). در این صورت، ثابت نیروی فنری که 147 N فشرده شده است چقدر باید باشد تا بتواند پرتابه را به سرعت مورد نظر برساند.

۲. گفته می‌شود که از درختان خیلی بزرگ در هر روز ممکن است تا حدود 900 kg آب تبخیر شود. این تبخیر در برگها صورت می‌گیرد. آب باید از ریشه درخت به برگها برسد. (الف) با فرض اینکه آب به طور متوسط 20 m از سطح زمین صعود کند. هر روز چقدر انرژی صرف این کار می‌شود؟ (ب) اگر فرض کنیم که تبخیر طی 12 h روز انجام می‌شود، توان متوسط چقدر است؟

۳. ارتفاع قله اورست از سطح دریا 8850 m است. (الف) کوهنوردی به جرم 90 kg ، چقدر انرژی در مقابل گرانش مصرف می‌کند تا از سطح دریا به قله برسد؟ (ب) چند شکلات، هر یک با انرژی 350 kcal برای تأمین این انرژی لازم است؟ نتیجه شما باید نشان بدهد که کار لازم برای غلبه بر گرانش بخش بسیار کوچکی از انرژی‌ای است که در بالا رفتن از کوه مصرف می‌شود.

۴. مردی به وزن 200 lb از پنجره‌ای روی یک توری نجات می‌برد که 36 ft پایین‌تر از او است. تور 4 ft کشیده می‌شود و به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد و بعد مرد را دوباره به هوا پرتاب می‌کند. با فرض اینکه هیچ انرژی‌ای در اثر نیروهای ناپایستار اتفاق نشود، انرژی پتانسیل تور کشیده شده چقدر است؟

۵. قطعه بین سیارکوچکی ازله داخلی یک ظرف بدون اصطکاک به شکل نیمکره‌ای به شعاع 23.6 cm رها می‌شود (شکل ۲۳). سرعت

۱۹. منشأ هر چند تا از منابع انرژی فعلی را که می‌تواند به خورشید مربوط کنید. فکر می‌کنید منبعی وجود دارد که نشود آن را به خورشید مربوط کرد؟

۲۰. با استفاده از مفاهیم کارو انرژی، توضیح بدهد که چگونه کودکان می‌توانند تاب را از حالت سکون به حالت حرکت با دامنه‌ای بزرگ برسانند.^۱

۲۱. دو قرص با فنری سخت به هم متصل‌اند. آیا می‌توان قرص بالایی را آقدر به پایین فشرد که پس از رها شدن، به بالا بجهد و قرص پائین را هم با خودش از روی میز بلند کند (شکل ۲۲)؟ آیا در این مورد انرژی مکانیکی می‌تواند پایسته بماند؟



شکل ۲۲. پریش

۲۲. درباره "پایستگی انرژی" که (الف) در این فصل بدکار رفته است و (ب) در ارتباط با "بحran انرژی" (متلا خاموش کردن چراغها) بحث کنید. این دو مورد چه تفاوتی دارند.

۲۳. توان الکتریکی یک شهر کوچک از یک نیروگاه هیدرالکتریکی تأمین می‌شود، که بر رودخانه‌ای نزدیک شهر قرار دارد. اگر یک چراغ روشنایی را در این سیستم انرژی —بسته خاموش کنید، از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود که همین مقدار انرژی، البته شاید به شکلی دیگر، باید در نقطه‌ای دیگر از سیستم ظاهر شود. این انرژی کجا و به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۲۴. فنری را تا آنجا که می‌شود فشرده می‌کنیم و در همین حال آن را محکم می‌بنديم بعد آن را در اسید می‌گذاریم تا حل شود. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر چه می‌شود؟

۲۵. عبارت $E = mc^2$ نشان می‌دهد که اجسام کاملاً معمولی، مثل سکه یا سنگریزه مقادیر عظیمی انرژی دارند. چرا تا به حال به این منابع عظیم انرژی توجه نشده است؟

۲۶. "در انفجارهای هسته‌ای — به ازای جرم یکسان — در حدود یک میلیون بار بیش از انفجار شیمیایی انرژی آزاد می‌شود، زیرا انفجارهای هسته‌ای براساس رابطه $E = mc^2$ عمل می‌کنند." درباره این گفته چه فکر می‌کنید؟

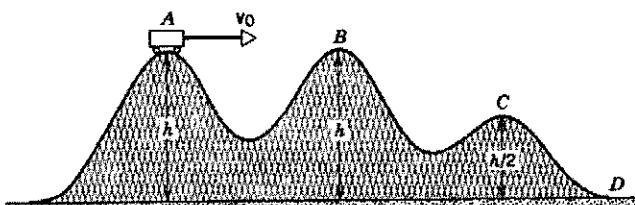
۲۷. چگونه جرم و انرژی می‌توانند "هم‌ارز" باشند، با وجودی که دو کمیت فیزیکی کاملاً متفاوت‌اند که به دو شکل متفاوت تعریف می‌شوند، و با دو یکای متفاوت سنجیده می‌شوند؟

۲۸. یک کره فلزی داغ را روی صفحه یک ترازو می‌گذاریم، کره سرد می‌شود. آیا اگر ترازو به اندازه

۱. نگاه کنید به

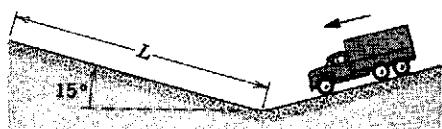
"How to Make a Swing Go," R. V. Hesheth, *Physics Education*, July 1975, p. 367.

مثل ذره در نظر بگیرید.



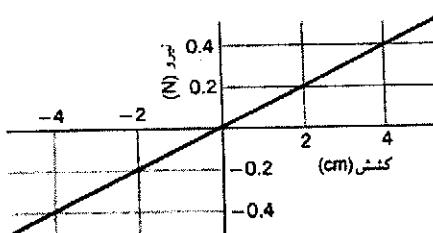
شکل ۲۵. مسئله ۱۰

۱۱. کامیونی که ترمزش بریده است، با سرعت 80 mi/h از تپه‌ای پایین می‌آید. خوشبختانه در پایین تپه یک شیب فرار اضطراری وجود دارد. زاویه این شیب 15° است (شکل ۲۶). حداقل طول شیب، L ، برای اینکه کامیون (لاقل به طور آنی) متوقف شود چقدر است؟



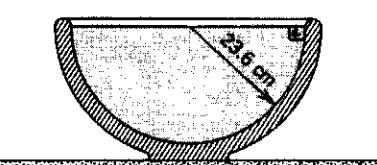
شکل ۲۶. مسئله ۱۱

۱۲. شکل ۲۷ نیرو (برحسب نیوتون) را به صورت تابعی از مقدار کشیدگی یا فشردنگی (برحسب سانتی‌متر) فنر یک تنگ چوب پنهانی نشان می‌دهد. فنر به اندازه 50 cm فشرده می‌شود و چوب پنهانی به جرم 3 kg را از تنگ پرتاب می‌کند. (الف) با فرض اینکه چوب پنهانی در لحظه‌ای که فنر از حالت آزاد خودش می‌گذرد رها شود، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ (ب) حالا فرض کنید که چوب پنهانی به فنر گیر می‌کند و پس از آنکه فنر 50 cm را از حالت آزاد خودش گذشت از آن جدا می‌شود. در این حالت سرعت چوب پنهانی، هنگام رها شدن چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئله ۱۲

۱۳. میله نازکی به طول 13 m و جرم قابل اغماض، از یک سرولا شده است؛ چنانکه می‌تواند در صفحه قائم دوران کند. میله را به اندازه زاویه $35^\circ = \theta$ از حالت قائم منحرف، و سپس رها می‌کنیم (شکل ۲۸). سرعت گلوله سربی سرآزاد میله، هنگام عبور از نقطه A (شکل ۲۸) چقدر است؟

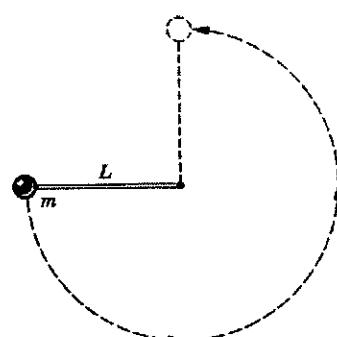


شکل ۲۳. مسئله ۵

۶. جریانی از گدازه آتشفسانی روی یک سطح افقی در حال حرکت است که به یک سر بالایی با شیب 10° می‌رسد. مشاهده می‌شود که گدازه 920 m روی شیب به طرف بالا حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود. گدازه شامل گاز بهدام افتاده است؛ بنابراین، اصطکاک آن با زمین آندرکم است که می‌شود از آن چشم پوشید. سرعت گدازه درست پیش از رسیدن به شیب، چقدر بوده است؟

۷. پرتابهای به جرم 40 kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع 125 m پرتاب می‌شود. سرعت اولیه آن 150 m/s درجهت 41° بالاتر از سطح افق است. (الف) انرژی جنبشی پرتابه در اولین لحظه پس از پرتاب و (ب) انرژی پتانسیل آن در این لحظه چقدر است؟ (ج) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد آن به زمین، چقدر است؟ کدام یک از جوابها به جرم پرتابه بستگی دارد؛ اصطکاک هوا را ناچیز بگیرید.

۸. گلوله‌ای به جرم m به یک سرمهله بسیار سبکی به طول L متصل است. سر دیگر میله لولا شده است، چنانکه گلوله می‌تواند در صفحه‌ای قائم حرکت کند. میله را به حالت افقی درمی‌آوریم و به گلوله ضربه‌ای به طرف پایین می‌زنیم. میله تاب می‌خورد و درست تا حالت قائم خودش را بالا می‌کشد (شکل ۲۴). سرعت اولیه گلوله چقدر بوده است؟

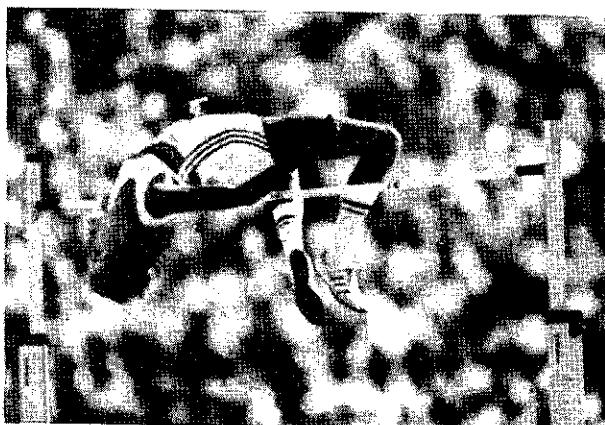


شکل ۲۴. مسئله‌های ۸ و ۹

۹. توپی به جرم 112 g ، با سرعت اولیه 16 m/s با زاویه 34° بالاتر از سطح افقی، از پنجه‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده از پایستگی انرژی، (الف) انرژی جنبشی توپ در نقطه اوج مسیر و (ب) سرعت آن در ارتفاع 2.87 m پایین تراز پنجه را پیدا کنید. مقاومت هوا ناچیز است.
۱۰. یک ارایه تقریبی که روی ریلهای بدون اصطکاک است، با سرعت v از نقطه A در شکل ۲۵ به راه می‌افتد، سرعت ارایه (الف) در نقطه B ، (ب) در نقطه C ، و (ج) در نقطه D چقدر است؟

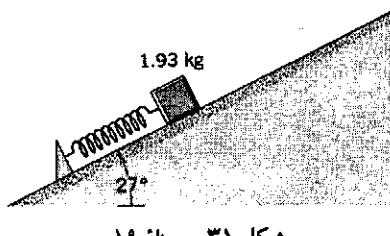
وانزوی پتانسیل را به صورت توابعی از (الف) زمان و (ب) ارتفاع تعیین کنید. این توابع را رسم کنید و نشان بدید که مجموع آنها انرژی کل در هر دو مورد ثابت است.

۱۸. در بازیهای المپیک ۱۹۸۴، پرندۀ آلمانی، اولریکه مایفارت، با پرش 2.0m ، یک رکورد المپیک برای پرش ارتفاع زنان بر جای گذاشت (شکل ۳۰). با فرض یکسان بودن شرایط دیگر، این پرنده در کره ماه چقدر می‌توانست بپرورد؟ شتاب گرانش در سطح ماه فقط 1.67m/s^2 است. (راهنمایی: ارتفاعی که "به حساب می‌آید"، مسافت قائمی است که مرکز نقل پرنده، پس از جدا شدن پاهاش از زمین، بالا می‌رود. فرض کنید که در لحظه جدا شدن پرنده از زمین، مرکز نقل او بالاتر از سطح زمین باشد. همچنین فرض کنید که هنگام گذشتن پرنده از میله، مرکز نقلش در همان ارتفاع میله باشد.)



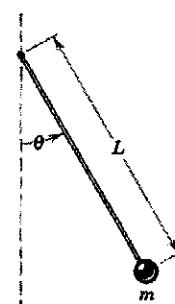
شکل ۳۰. مسئله ۱۸

۱۹. جسمی به جرم 9.3kg را روی سطح شبیدار بی‌اصطکاکی به زاویه شیب 27° ، به فنری تکیه دارد (شکل ۳۱). فنر را که ثابت نیروی آن 20.8N/cm است، به اندازه 18.7cm می‌شاریم و جسم را رها می‌کنیم. جسم حداقلتر به اندازه چه مسافتی روی سطح شبیدار بالا می‌رود؟ مکان نهایی را نسبت به مکان جسم درست پیش از رها شدن، حساب کنید.



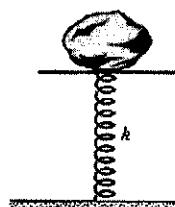
شکل ۳۱. مسئله ۱۹

۲۰. فنر ایده‌آل بدون جرمی در اثر نیروی 268N به اندازه 2.33cm فشرده می‌شود. جسمی به جرم 1.18kg از بالای سطح شبیدار، از حالت سکون، رها می‌شود (شکل ۳۲). زاویه شیب سطح



شکل ۲۸. مسئله ۱۳

۱۴. شکل ۲۹ سنگی به جرم 7.94kg را نشان می‌دهد که روی فنر قرار دارد. فنر در اثر وزن سنگ به اندازه 1.2cm فشرده می‌شود. (الف) ثابت نیروی فنر را پیدا کنید. (ب) سنگ را 28.6cm دیگر هم به پایین فشار می‌دهیم و بعد رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر، درست پیش از برداشتن دست از روی سنگ، چقدر است؟ (ج) سنگ تا چه ارتفاعی، نسبت به این مکان جدید، بالا می‌رود؟



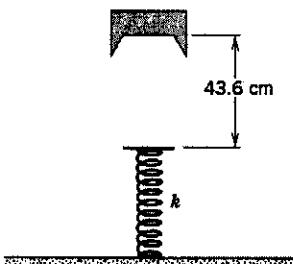
شکل ۲۹. مسئله ۱۴

۱۵. در آبشار نیاگارا، هر دقیقه تقریباً $10^5\text{m}^3 \times 3\text{m}$ آب از ارتفاع 50m سقوط می‌کند. (الف) توان خروجی یک نیروگاه مولد برق، که بتواند 48% انرژی پتانسیل این آب را به انرژی الکتریکی تبدیل کند، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی تولید شده، به قیمت صنعتی 0.2cent/kWh را فروخته شود، درآمد سالانه حاصل چقدر است؟ جرم یک مترمکعب (1m^3) آب 1000kg است.

۱۶. ساحت ایالات متحده امریکا در حدود 10^6km^2 ، و ارتفاع متوسط آن از سطح دریا در حدود 500m است. میزان بارش متوسط سالانه، 75cm است. دو سوم این آب بازن، در اثر تبخیر، به جو بازمی‌گردد، اما باقی مانده آن سرانجام به اقیانوسها می‌ریزد. اگر همه این آب را می‌شد برای تولید برق در نیروگاههای هیدرولکتریکی به کار برد، چه توان متوسطی به دست می‌آمد؟

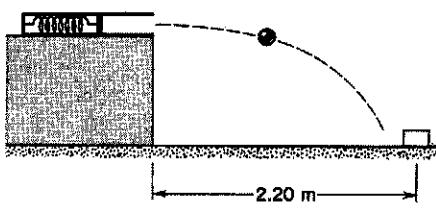
۱۷. جسمی از حالت سکون، از ارتفاع h ، سقوط می‌کند. انرژی جنبشی

پتانسیل فتر است. (چرا این دو کمیت با هم برابر نیستند؟) ۲۵. جسمی به جرم 14kg از ارتفاع 43.6cm روی فتری، با ثابت نیروی $k = 18\text{N/cm}$ سقوط می‌کند (شکل ۳۴). این فتر حداقل چقدر فشرده می‌شود؟



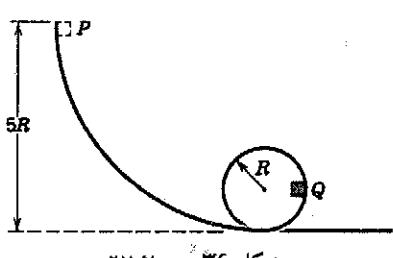
شکل ۳۴. مسئله ۲۵

۲۶. دو کودک با هم بازی می‌کنند و می‌خواهند جعبه کوچکی را که روی زمین است با تیله‌ای که از یک تنگ فتری شلیک می‌شود بزنند؛ تنگ روی میز قرار دارد. فاصله افقی جعبه هدف باله میز 20m است (شکل ۳۵). اولی فتر را 10cm می‌شارد، اما جسم به هدف نمی‌رسد و 27cm جلوتر از آن به زمین می‌افتد. دومی چقدر فتر را بفشارد تا جسم به هدف بخورد؟



شکل ۳۵. مسئله ۲۶

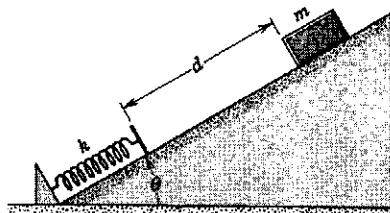
۲۷. جسمی به جرم m روی مسیر حلقوی بدون اصطکاکی می‌لغزد (شکل ۳۶). (الف) جسم از نقطه P ، از حالت سکون، رها می‌شود. نیروی خالص وارد بر آن، در نقطه Q چقدر است؟ (ب) جسم باید از چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه رها شود تا در بالای دایره در آستانه جدا شدن از مسیر باشد؟



شکل ۳۶. مسئله ۲۷

۲۸. تارزان، به وزن 180lb ، به کمک پیچکی به طول 50ft ، از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد و پایین می‌آید (شکل ۳۷). مقدار سقوط او، از بالای صخره تا پایین مسیر تاب، 8.5ft است. یکچک تحمل کشنش

32° است. جسم، در لحظه‌ای که فتر را به اندازه 48cm فشرده است، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. (الف) در این لحظه جسم چه مسافتی روی سطح شبیدار حرکت کرده است؟ (ب) سرعت جسم، در لحظه‌ای که به فتر می‌رسد، چقدر است؟

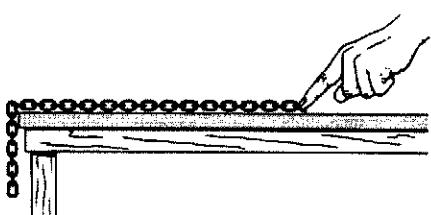


شکل ۳۷. مسئله ۲۸ و ۲۹

۲۱. ثابت نیروی فتر یک تنگ فتری 4lb/in است. تنگ با زاویه 36° بالاتر از سطح افقی واقع شده است. گلوله‌ای به وزن 0.8oz از آن شلیک می‌شود و به ارتفاع 33ft بالاتر از دهانه لوله می‌رسد. (الف) سرعت گلوله موقع خروج از لوله چقدر است؟ (ب) فتر در ابتدا چقدر فشرده شده بوده است؟

۲۲. آونگی مشتشکل است از سنگی به جرم 1.32kg که به ریسمانی به طول 3.82m متصل است. در حالتی که زاویه ریسمان با راستای قائم 58° است، به سنگ ضربه‌ای در جهت عمود بر ریسمان به طرف بالا می‌زنیم. مشاهده می‌شود که سرعت سنگ، هنگام عبور از پایین ترین نقطه سیریش، 8m/s است. (الف) سرعت سنگ درست پس از ضربه خوردن، چقدر بوده است؟ (ب) طی حرکت آونگ، بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان با راستای قائم می‌سازد چقدر است؟ (ج) پایین ترین نقطه مسیر سنگ را صفر افزایی پتانسیل گرانشی بگیرید و انرژی مکانیکی کل سیستم را حساب کنید.

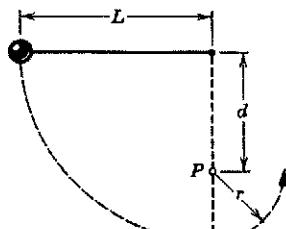
۲۳. زنجیری روی میز بدون اصطکاکی نگه داشته شده است، چنانکه یک چهارم طول آن از لبه میز آویزان است (شکل ۳۳). اگر طول زنجیر L و جرم آن m باشد، چقدر کار لازم است تا بخش آویزان زنجیر روی میز کشیده شود؟



شکل ۳۳. مسئله ۲۳

۲۴. یک سر فتر قائمی به سقف متصل است. وزنه‌ای به سر دیگر آن می‌بنديم و آن را آرام پایین می‌آوریم تا به وضعیت تعادل برسد. نشان بدهید که مقدار کاهش انرژی پتانسیل وزنه، دو برابر مقدار افزایش انرژی

سکون، از وضعیتی که در شکل مشخص است، رها می‌کنیم. گلوله روی مسیر خط‌چین حرکت می‌کند. سرعت گلوله (الف) در پایین ترین نقطه مسیر و (ب) در بالاترین نقطه مسیر، پس از اینکه ریسمان دور میخ می‌پیچد، چقدر است؟



شکل ۳۸. مسئله‌های ۳۲ و ۳۳

۳۳. در شکل ۳۸، نشان بدهید که شرط اینکه وزنه آونگ یک دور کامل حول میخ بزند، و ریسمان شل نشود، آن است که $d > 3L/5$ باشد. (راهنمایی: وزنه در نقطه اوج مسیر باید در حال حرکت باشد، در غیر این صورت ریسمان شل می‌شود).

۳۴. جسمی به جرم m ، که به یک سر ریسمانی بسته شده است، روی دایره‌ای به شعاع R در صفحه قائم حرکت می‌کند. حداقل سرعت جسم در بالاترین نقطه مسیر چقدر باشد تا ریسمان همچنان کشیده بماند؟ ۳۵. جسمی به جرم 22 kg ، از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، به اندازه مسافت d روی سطح شیدار بدون اصطکاکی پایین می‌آید، و در آنجا به فنری با جرم ناچیز می‌رسد (شکل ۳۲). زاویه شب سطح 28° است. جسم 21 cm دیگر هم پایین می‌آید و در آنجا، در اثر فشرده شدن فنر، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. ثابت نیروی فنر افزایش بدهیم؟

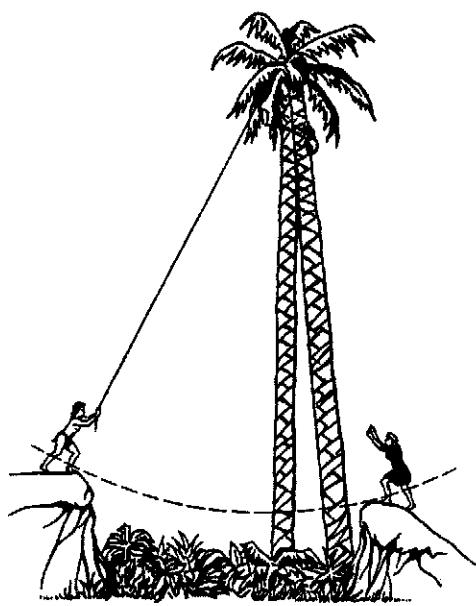
۳۶. جسمی به جرم 18 kg از ارتفاع 18 m بر حسب نیوتن $F = -3x - 5x^2$ به دست می‌آید؛ (الف) سرعت جسم در $x = 2\text{ m}$ و (ب) سرعت m است. (الف) از $x = 0$ درجهت x افزایش بدهیم؛ (ب) سرعت m در $x = 2\text{ m}$ برابر با 13 m/s است. (راهنمایی: هنگام جدا شدن کودک از یخ، نیروی عمودی سطح صفر می‌شود).



شکل ۳۹. مسئله ۳۶

۳۷. ذره m در شکل ۴۰ روی ریلی در داخل دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. اصطکاکی در کار نیست. سرعت جسم، در پایین ترین

پیشتر از 250 lb را ندارد. آیا پیچک پاره می‌شود؟



شکل ۳۷. مسئله ۳۷

۳۸. اندازه نیروی جاذبه گرانشی میان ذره‌ای به جرم m_1 و ذره‌ای به جرم m_2

$$F(x) = G \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

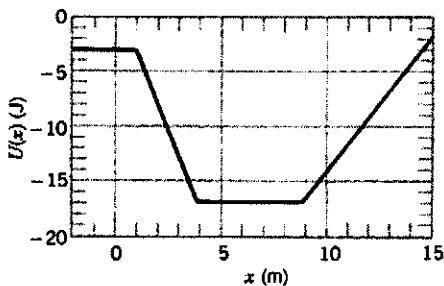
است؛ که در آن G ثابت و x فاصله بین دو ذره است. (الف) تابع از زی پتانسیل، $U(x)$ را بپیدا کنید؛ فرض کنید در $x \rightarrow \infty$ $U(x) \rightarrow 0$. (ب) چقدر کار لازم است تا فاصله دو ذره را از x_1 به $x = x_1 + d$ افزایش بدهیم؟

۳۹. جسمی به جرم 1 kg از ارتفاع 1 m بر حسب $F = -52x - 4x^2$ به دست می‌آید؛ (الف) از $x = 0$ درجهت x سرعت جسم در $x = 2\text{ m}$ چقدر است؟ فرض کنید $x = 0$ است. (ب) سرعت جسم در $x = 2\text{ m}$ برابر با 4 m/s است. (الف) کار لازم از $x = 0$ تا $x = 1\text{ m}$ انجام گردید. هنگام کشیده شدن فنر از $x = 0$ به $x = 1\text{ m}$ سرعت جسم v است. (الف) کار لازم از $x = 1\text{ m}$ تا $x = 2\text{ m}$ انجام گردید. هنگام کشیده شدن فنر از $x = 1\text{ m}$ به $x = 2\text{ m}$ سرعت جسم v' است. (الف) کار لازم از $x = 2\text{ m}$ تا $x = 3\text{ m}$ انجام گردید. هنگام کشیده شدن فنر از $x = 2\text{ m}$ به $x = 3\text{ m}$ سرعت جسم v'' است.

۴۰. فنری داریم که از قانون هوک پیروی نمی‌کند. نیرویی که این فنر وارد می‌کند (بر حسب نیوتن) $F = 34x^2 + 52x$ درجهت مخالف کشش است؛ x مقدار کشیدگی فنر بر حسب متر است. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x = 0$ به $x = 2\text{ m}$ چقدر است؟ (ب) یک سر فنر را به جایی می‌بنديم و ذره‌ای به جرم 2 kg به سر دیگر آن وصل می‌کیم. فنر را از 3 m را می‌کشیم و بعد ذره را از حالت سکون رها می‌کنیم. این ذره، هنگامی که مقدار کشیدگی فنر $x = 2\text{ m}$ است، چه سرعتی دارد؟ (ج) آیا نیروی این فنر پایستار است یا نایایستار؟ توضیح بدهید.

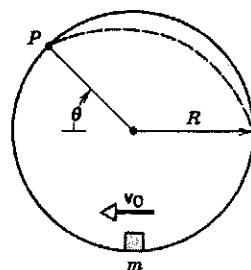
۴۱. در شکل ۴۱ طول ریسمان برابر با $L = 120\text{ cm}$ و فاصله نقطه آویز ریسمان تا میخ برابر با 75 cm است. گلوله را از حالت

ذره، E ، برابر با $J^{\circ} ۴$ است. نمودار انرژی جنبشی ذره، $K(x)$ را مستقیماً روی همان شکل ۴۱ رسم کنید.
 ۴۰. ذره‌ای به جرم $kg ۲$ در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $(U(x))$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۲ است. در $x = ۲^{\circ} m/s$ سرعت ذره $= ۲^{\circ} m/s$ است.



شکل ۴۰. مسئله ۴۰

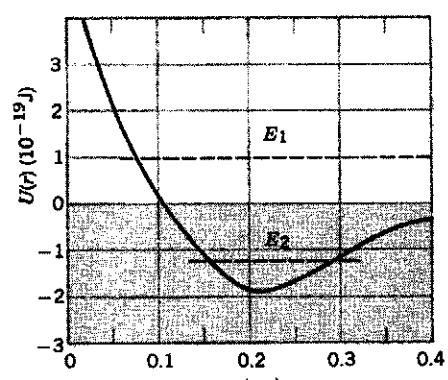
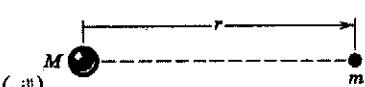
نقطه مسیر v است. (الف) حداقل مقدار v ، یعنی v_m ، برای اینکه m بتواند یک دور کامل بزند و از ریل جدا نشود چقدر است؟ (ب) فرض کنید $v_m = ۷۷۵^{\circ} m/s$ است. ذره تا نقطه P بر ریل حرکت می‌کند و در آنجا از ریل جدا می‌شود و روی مسیری که با خط‌چین مشخص شده است حرکت می‌کند. مکان زاویه‌ای (θ) نقطه P را پیدا کنید.



شکل ۴۰. مسئله ۴۰

(الف) نیروی وارد بر ذره در این نقطه چقدر است؟ (ب) ذره در چه محدوده‌ای از x حرکت می‌کند. (ج) سرعت ذره در $7^{\circ} m/s$ چقدر است؟

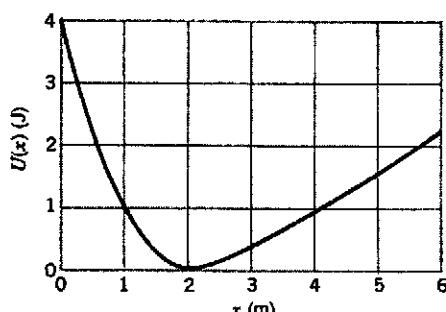
۴۱. شکل ۴۳ (الف) اتمی به جرم m را در فاصله r از اتم ساکنی به جرم M نشان می‌دهد؛ $M \ll m$ است. شکل ۴۳ بتابع انرژی پتانسیل $(U(r))$ بر حسب مکان اتم سبکتر را نشان می‌دهد. حرکت این اتم را (الف) اگر انرژی مکانیکی کل از صفر بزرگتر، مثلاً E_1 ، باشد، و (ب) اگر این انرژی از صفر کوچکتر، مثلاً E_2 باشد، توصیف کنید. به ازای $J^{\circ} ۱۰^{-۱۰} \times ۱۰^{\circ} r = ۱$ ، و در $3^{\circ} nm$ (ج) انرژی پتانسیل، (د) انرژی جنبشی، و (ه) (اندازه و جهت) نیروی وارد بر ذره متحرک را به دست بیاورید.



شکل ۴۳. مسئله ۴۱

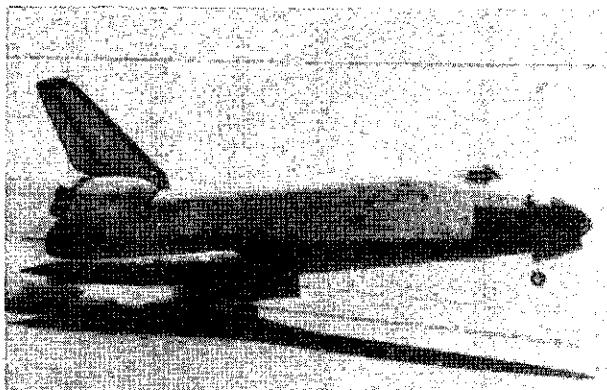
۴۲. فرض کنید که به جای میله شکل ۴۲، ریسمانی بسیار کشسان، مثلاً از جنس لاستیک بگذاریم. هنگامی که گلوله رها می‌شود، ریسمان هنوز کشیده نشده و طول آن L است. (الف) توضیح بدهید که چرا انتظار دارید گلوله به نقطه‌ای پایین‌تر از مسافت L زیر نقطه ثابت ریسمان برسد. (ب) با استفاده از مفاهیم دینامیکی و انرژی، نشان بدهید که اگر $\Delta L = ۳mg/k$ نسبت به L کوچک باشد، ریسمان به اندازه k کشیده می‌شود؛ k : ثابت نیروی ریسمان است. توجه کنید که هر چه k بزرگ‌تر باشد ΔL کوچک‌تر است و تقریباً $\Delta L \ll L$ بهتر می‌شود. (ج) نشان بدهید که در این شرایط سرعت گلوله در پایین مسیر $\sqrt{2g(L - ۳mg/2k)}$ است، یعنی کمتر از مقداری که در حالت ناکشسان ($k = \infty$) بود. با استفاده از پایستگی انرژی، یک توضیح فیزیکی برای این نتیجه ارائه کنید.

بخش ۴۸ سیستم‌های پایستار یک بعدی: حل کامل ۴۹. ذره‌ای در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $(U(x))$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۱ است. (الف) نمودار نیروی $F(x)$ وارد بر ذره را به طور کمی رسم کنید؛ مقیاس x را همان مقیاس شکل ۴۱ بگیرید. (ب) انرژی مکانیکی (ثابت)



شکل ۴۱. مسئله ۴۱

(ب) انرژی جنبشی اش در پایین درخت چقدر است؟ (ج) تغییر انرژی مکانیکی توله خرس، در اثر نیروهای اصطکاک، چقدر است؟ ۴۸. فضایمی شاتل (به جرم 79000 kg)، هنگام بازگشت از مدار



شکل ۴۵. مستله ۴۸

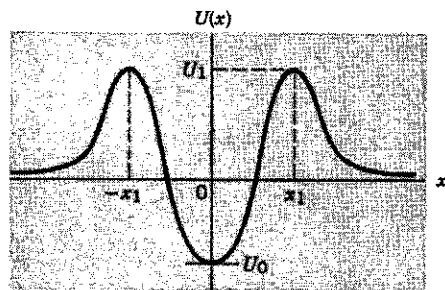
به زمین، با سرعت 18000 mi/h وارد جو می‌شود؟ این سرعت به تدریج کم می‌شود تا شاتل به سرعت فرود 190 km/h (یعنی 220 mi/h) برسد. انرژی جنبشی فضایمی (الف) هنگام ورود به جو (ب) هنگام فرود چقدر است (شکل ۴۵)؟ (ج) چه بر سر انرژی "از دست رفته" می‌آید؟ ۴۹. شخصی به جرم 68 kg در حال سقوط آزاد با سرعت حد ثابت 59 m/s است. آهنگ افزایش انرژی داخلی این شخص و هوای اطراف او چقدر است؟ ۵۰. رودخانه‌ای طی عبور از تنداب در مسیرش 15 m ارتفاع از دست می‌دهد. سرعت آب، هنگام ورود به تنداب 2 m/s ، و هنگام خروج 13 m/s است. چند درصد از انرژی پتانسیل که آب، در گذشتن از تنداب، از دست می‌دهد به شکل انرژی جنبشی آب در پایین رود ظاهر می‌شود؟ چه بر سر بقیة انرژی می‌آید؟

۵۱. سنگی به جرم 524 kg از حالت سکون روی شیب تپه‌ای شروع به لغزش می‌کند. طول شیب 488 m و ارتفاع آن 292 m است. سرعت سنگ در پایین تپه 62 m/s است. این سنگ طی لغزش، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست داده است؟ ۵۲. پرتاوهای به جرم 4 kg در راستای قائم به بالا پرتاپ می‌شود. طی مدتی که پرتاوه به بالا می‌رود، 68 kJ از انرژی مکانیکی آن در اثر اصطکاک با هوا تلف می‌شود. اگر مقاومت هوا تا جیز بود، پرتاوه چقدر بالاتر می‌رفت؟

۵۳. جسمی به جرم 4 kg ، با سرعت 7 m/s روی شیبی به زاویه 33° شروع به بالا رفتن می‌کند. این جسم، با فرض اینکه $J = 34 \text{ J}$ از انرژی مکانیکی اش صرف مقابله با اصطکاک شود، تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟

۵۴. سنگی به وزن w در امتداد قائم با سرعت اولیه v_0 به بالا پرتاپ می‌شود. فرض کنید که نیروی مقاومت هوا، F ، در مسافت y که سنگ طی می‌کند، به اندازه wf از انرژی مکانیکی آن می‌کاهد. (الف) نشان

۴۲. یک ذره آلفا (هسته هلیم)، با انرژی پتانسیل به صورت شکل ۴۴، داخل هسته بزرگی مقید است. (الف) تابعی از x بسازید که به این شکل کلی باشد: یک کمینه به مقدار U_1 در $x = 0$ و یک بیشینه به مقدار U_0 در x_1 و $-x_1$ داشته باشد. (ب) نیروی بین ذره آلفا و هسته را به صورت تابعی از x رسم کنید. (ج) انواع حرکتها ممکن را توصیف کنید.



شکل ۴۲. مستله ۴۲

بخش ۵.۸ سیستم‌های پایستار دو و سه بعدی
۴۳. نشان بدهید که، به ازای سرعتهای اولیه یکسان v_0 ، سرعت v همه پرتاوهای، در ارتفاع یکسان، یکسان است و به زاویه پرتاپ بستگی ندارد. مقاومت هوا را به حساب نیاورید.

۴۴. انرژی پتانسیل متناظر با نیروی دو بعدی معینی $(\frac{1}{r}k(x^1 + y^2))$ است. (الف) F_x و F_y را به دست بیاورید. بردار نیرو را در هر نقطه، بر حسب مختصات x و y آن نقطه، بیان کنید. (ب) F_r را به دست بیاورید و بردار نیرو را در هر نقطه، بر حسب مختصات قطبی r و θ آن نقطه، بیان کنید. (ج) آیا مدل فیزیکی ای برای چنین نیرویی به نظرتان می‌رسد؟

۴۵. انرژی پتانسیل یوکاوا

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

توصیف نسبتاً دقیقی از برهمنکش بین هستکها (یعنی نوترونها و پروتونها که اجزای سازنده هسته‌اند) به دست می‌دهد. ثابت r_0 در حدود 10^{-15} m است، و ثابت U_0 در حدود 50 MeV است. (الف) عبارت نیروی جاذبه متناظر با این پتانسیل را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که این نیرو کوتاه‌برد است؛ به این منظور، نسبت مقادیر نیرو در هر یک از فواصل $r = 2r_0$ ، $r = 4r_0$ و $r = 10r_0$ را به مقدار آن در $r = r_0$ حساب کنید.

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $F = -k_1 x \hat{i} - k_2 y \hat{j}$ باشد نایستار است.

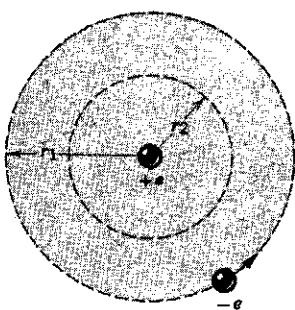
بخش ۵.۸ پایستگی انرژی در سیستم‌های ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم 25 kg از حالت سکون روی تنه درخت کاجی می‌لغزد و 12 m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر 56 m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیه توله خرس Q برابر است با $Ramin.samad@yahoo.com$

از بارش برف، اسکی بازی به جرم 4kg با همین شرایط، بدون استفاده از میله‌هایش، شروع به حرکت می‌کند؛ این اسکی باز فقط می‌تواند (با سرعت نهایی صفر) خودش را به قله کوتاهتر برساند. انرژی داخلی چوبهای اسکی و برف مسیر چقدر افزایش یافته است؟
۵۸. اندازه نیروی جاذبه بین پروتون با بار مثبت و الکترون با بار منفی در آتم هیدروژن

$$F = k \frac{e^2}{r^2}$$

است، که در آن e بار الکترون، k : ثابت، و r فاصله میان الکترون و پروتون است. فرض کنید که پروتون ساکن است. تصور کنید که الکترون در ابتدا در حال حرکت بر دایره‌ای به شعاع 21 حول پروتون است و ناگهان به مداری دایره‌ای با شعاع 32 ، کوچکتر از 31 ، می‌جهد (شکل ۴۸). (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون، تغییر انرژی جنبشی الکترون را حساب کنید. (ب) با استفاده از رابطه نیرو با انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل اتم را حساب کنید. (ج) در این فرایند، انرژی کل اتم چقدر تغییر کرده است؟ (این انرژی معمولاً به شکل تابش از اتم خارج می‌شود).



شکل ۴۸. مسئله ۵۸

۵۹. آسانسوری به وزن 4000lb در طبقه اول ساختمان ساکن است، چنانکه کف آن به فاصله $d = 12.0\text{ft}$ بالاتر از فنر بازدارنده زیر آسانسور (هم سطح با طبقه هم‌کف) واقع شده است؛ ثابت نیروی این فنر ft/lb 10000 است. در این حالت کابل نگهدارنده آسانسور باره می‌شود (شکل ۴۹). در این لحظه یک ترمز ایمنی به کار می‌افتد و باعث می‌شود که آسانسور با ریلهای مسیر درگیر شود؛ در توجه، به ازای هر 0.5° که آسانسور حرکت می‌کند، 1000ft/lb مکانیکی از سیستم گرفته می‌شود. (الف) سرعت آسانسور درست پیش از برخورد به فنر، چقدر است؟ (ب) حداقل فشردگی فنر را حساب کنید. (ج) حداقل مسافتی را که آسانسور، نسبت به فنر، به بالا بتواند ببرد پیش‌گیرید. (د) به طور تقریبی، کل مسافتی که آسانسور قبل

بدهدید که بیشترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد

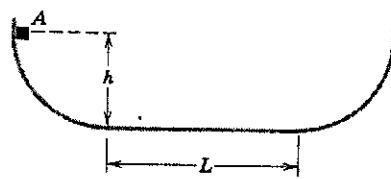
$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

است. (ب) نشان بدهدید که سرعت سنگ، هنگام برخورد با زمین برابر است با

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

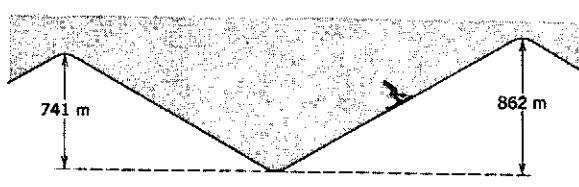
۵۵. جسمی به جرم 34kg را، که روی سطحی افقی در حال لغزش است، به فنری با ثابت نیروی 93N/cm برخورد. جسم فنر را به اندازه 16cm را، نسبت به حالت آزاد آن، فشرده می‌کند. از زمانی که جسم به فنر می‌خورد تا زمانی که ساکن می‌شود، در اثر اصطکاک میان جسم و سطح 117mJ انرژی مکانیکی اتلاف می‌شود. سرعت جسم در لحظه برخورد با فنر چقدر بوده است؟

۵۶. جسم کوچکی به جرم 234g $m = 234\text{g}$ در مسیری که در شکل ۴۶ نشان داده شده است می‌لغزد؛ دو انتهای مسیر به طرف بالا شب دارند و بخش میانی آن تخت است. طول بخش میانی $L = 2\text{m}$ است. بخش‌های خمیده مسیر بدون اصطکاک اند. جسم، هنگام گذشتن از بخش تخت مسیر، در اثر اصطکاک 688mJ انرژی مکانیکی از دست می‌دهد. اگر این جسم از نقطه A به ارتفاع $h = 0.5\text{m}$ نسبت به قسمت تخت مسیر، رها شود، سرانجام، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟



شکل ۴۶. مسئله ۵۶

۵۷. ارتفاع دو قله پوشیده از برف، 862m و 741m است. از قله بلندتر تا قله کوتاهتر یک پیست اسکی هست (شکل ۴۷). (الف) اسکی بازی اسکی بازی از قله بلندتر، از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. اگر این اسکی باز از میله‌های اسکی خود استفاده نکند و فقط سر برخورد، با چه سرعتی به قله کوتاهتر می‌رسد؟ فرض کنید که مسیر یخبندان است و عملأً اصطکاکی در کارنیست. (ب) پس



شکل ۴۷. مسئله ۵۷

۶۲. رابطه "شدت" زلزله در مقیاس ریشر، M ، با انرژی آزاد شده، E ، بر حسب زول، چنین است

$$\log E = 1.44M + 5.24$$

(الف) شدت زلزله سال ۱۹۸۹ در منطقه سان فرانسیسکو (شکل ۵۰) ۱ را بود. در این زلزله چقدر انرژی آزاد شده بود؟ (ب) مقدار کاهش

جرم متناظر با این انرژی آزاد شده چقدر است؟

۶۳. یک نیروگاه هسته‌ای در اورگون، طی یک سال به طور پیوسته 2100 MW توان مفید تحویل می‌دهد. علاوه بر این، 1030 MW توان هم به شکل انرژی گرمایی به رود کلمبیا منتقل می‌کند. تغییر جرم سوخت هسته‌ای، پس از یک سال کار نیروگاه، چقدر است؟

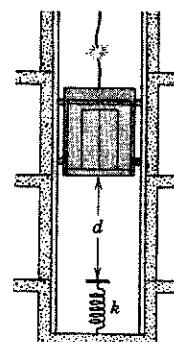
۶۴. در سال ۱۹۸۳، ایالات متحده در حدود $231 \times 10^{11} \text{ kWh}$ انرژی الکتریکی تولید کرد. فرض کنید که این انرژی در نیروگاه‌های هسته‌ای تولید شده باشد. مقدار کاهش جرم سوخت هسته‌ای این نیروگاهها، برای تولید این انرژی چقدر بوده است؟

۶۵. جرم یک قرص آسپرین 320 mg است. انرژی متناظر با این جرم (به شکل بنزین) تا چند مایل توان یک اتومبیل را تأمین می‌کند؟ فرض کنید اتومبیل با هر گالن بنزین 3° مایل حرکت می‌کند و گرمای احتراق بنزین 130 MJ/gal است. جواب خودتان را بر حسب محیط استوایی زمین بیان کنید.

۶۶. توان فضاییمایی از تابودی مادم پادماده تأمین می‌شود. چقدر ماده و پادماده باید تابود شود تا فضاییمایی به جرم 1820 ton را از سکون به یک دهم سرعت نور برساند؟ رابطه غیرنسبیتی انرژی جنبشی را به کار ببرید.

۶۷. خورشید با آهنگ $W = 10^{26} \times 4$ انرژی تابش می‌کند. هر روز "چند تن آفتاب" به زمین می‌رسد؟

از توقف کامل طی می‌کند چقدر است؟ چرا این جواب دقیق نیست؟



شکل ۴۹. مسئله ۵۹

۶۰. اتومبیلی به جرم 1700 kg با سرعت ثابت 15 m/s حرکت می‌کند. در این حالت، موتور آن 16 kW توان تولید می‌کند که صرف غلبه بر اصطکاک، مقاومت باد، و غیره می‌شود. (الف) نیروی بازدارنده مؤثر ناشی از مجموعه همه نیروهای اصطکاک چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل بخواهد با سرعت 15 m/s از یک شبب 8% بالا برود، باید چقدر توان از موتور بگیرد؟ (ثیب) $m = 8 \text{ m}$ ارتفاع بهاری 100 m مسافت افقی. (ج) اتومبیل در چه شببی (بداردصد بیان کنید) با موتور خاموش می‌تواند با سرعت 15 m/s پایین بیاید؟

بخش ۷-۸ جرم و انرژی

۶۱. (الف) چند زول انرژی معادل با 120 g جرم است؟ (ب) این انرژی چند سال نیاز انرژی یک خانه، با مصرف متوسط 130 kW را تأمین می‌کند؟



شکل ۵۰. مسئله ۶۲

توصیف خوبی برای این نیروست؛ در این رابطه، x : برحسب مترو F بر حسب نیوتن است. کاری را که روبرو بین $x = 0$ و $x = 5m$ انجام می‌دهد حساب کنید.

کار انجام شده از رابطه $\int_0^5 F dx = W$ بدست می‌آید. این انتگرال را نمی‌شود به طور تحلیلی محاسبه کرد، اما می‌شود مقدار آن را با روش‌های عددی، به کمک کامپیوتر تخمین زد. ناحیه انتگرال‌گیری را N بازه، هر یک به اندازه Δx ، تقسیم کنید، و R را مقدار نیرو در مرکز بازه i انتگرال داشت. این صورت خواهیم داشت $\Delta x \sum_{i=1}^N R_i \Delta x \approx \int_0^5 F dx$. هر چه Δx کوچکتر شود، برآورد دقیق‌تر می‌شود. اما Δx را خیلی هم نمی‌شود کوچک کرد چون در این صورت در محاسبه مجموع، ارقام با معنی از دست می‌روند. (شايد بخواهید از روش سیمسون استفاده کنید، که برآورده بتری می‌دهد. برای آشنایی با جزئیات این روش به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنید).

برنامه‌ای برای کامپیوتر بنویسید، یا الگوریتم طرح کنید، که کار این نیرو را محاسبه کند. در این برنامه باید بوانید مقادیر x ، F_x ، F_y و N را وارد کنید. جمع را می‌توانید با یک حلقة تکرار انجام بدهید. در هر بار تکرار حلقه، نیرو در مرکز بازه حساب می‌شود و به مجموعی که قبل از حساب شده است افزوده می‌شود. در اجرای اول بگیرید $N = 20$ ؛ سپس برنامه را چند بار دیگر هم اجرا کنید و هر بار N را دو برابر کنید. هنگامی که نتیجه دو اجرای متولی، تا سه رقم با معنی، یکسان شد کار را متوقف کنید.

۷۳. نیروی پایستار \mathbf{F} با مؤلفه‌های $F_x = y(1-x)e^{-x}$ ، $F_y = xe^{-x}$ و $F_z = 0$ ، بر ذره‌ای وارد می‌شود. (الف) فرض کنید ذره از مبدأ، در راستای محور x ، حرکت می‌کند و به $x = 20m$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور y حرکت می‌کند و به $y = 20m$ می‌رسد. کار انجام شده توسط این نیرو را، به راحتی می‌توان به طور تحلیلی محاسبه کرد. این محاسبه را انجام بدهید. حالا فرض کنید که ذره از مبدأ در راستای محور y حرکت می‌کند. به $y = 20m$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور x حرکت می‌کند و به $x = 20m$ می‌رسد. کار نیرو را در این مسیر هم حساب کنید، اما این بار با استفاده از انتگرال‌گیری عددی. برای جزئیات روش کار به مسئله قبلی رجوع کنید. سرانجام، یک برنامه انتگرال‌گیری عددی به کار ببرید که کار این نیرو را در حرکت جسم از مبدأ به نقطه $(20m, 20m)$ نیرو پایستار است، جواب حاصل از هر سه مسیر (در محدوده دقت محاسبه) باید یکسان باشد. (ب) نیروی \mathbf{F} ، با مؤلفه‌های $F_x = y^2(1-x)e^{-x}$ ، $F_y = xe^{-x}$ و $F_z = 0$ ، تا پایستار است. کار این نیرو را طی حرکت ذره از مبدأ به نقطه $(20m, 20m)$ در هر یک از سه مسیر قسمت (الف) حساب کنید. توجه کنید که نتایج حاصل برای مسیرهای مختلف یکسان نخواهد بود.

Ramin.samad@yahoo.com

۶۴. انرژی بستگی هسته یک اتم برابر است با تفاصل مجموع انرژیهای سکون پروتونها و نوترون‌های سازنده آن هسته، و انرژی سکون خود هسته. هسته اتم طلا ^{79}Au پروتون و 18 نوترون دارد و جرم آن 196.92321 است. انرژی بستگی این هسته را حساب کنید. (جرم پروتون $1.6728811 \times 10^{-27}\text{kg}$ ، و جرم نوترون $1.67511 \times 10^{-27}\text{kg}$ است؛ انرژی سکون یک اتمی برابر با 931.5MeV است.)

بخش ۸-۸ کوانتش انرژی

۶۹. انرژی یک اتم چقدر باید تغییر کند تا نوری با بسامد $5.34 \times 10^{18}\text{s}^{-1}$ از آن گسیل شود؟

۷۰. (الف) انرژی اتم هیدروژن $1.4eV$ است. اگر این انرژی به $13.6eV$ تغییر کند، فرکانس نور چقدر خواهد بود؟ (ب) آیا این نور گسیل می‌شود یا جذب؟

پروژه‌های کامپیوتری

۷۱. فرض کنید تیروی وارد بر ذره‌ای $j^z - 4x^2y^2 = U$ است. با استفاده از این توانید بعضی ازویزگیهای مهم نیروهای پایستار را نشان بدهید. اولاً، انرژی پتانسیل ذره فقط به مختصات آن بستگی دارد. روی یک کاغذ دستگاه مختصاتی رسم کنید که در آن، x و y هر دو بین $-5m$ و $+5m$ باشند. اکنون با استفاده از یک برنامه کامپیوتری یا الگوریتم، مقادیر انرژی پتانسیل را به ازای همه مقادیر صحیح x و y (بر حسب متر)، بین دو حد بالا، بدست بیاورید. و این مقادیر را، در نقاط متناظر، به نمودار منتقل کنید. با استفاده از این نمودار، به پرسشهای زیر جواب بدهید. (الف) طی حرکت ذره از $y = -5m$ به $y = +5m$ ، $x = +5m$ به $x = +3m$ (ب) طی حرکت ذره از مبدأ به $y = +3m$ ، $x = +5m$ به $x = +2m$ (ج) طی حرکت ذره از $x = -5m$ به $x = -5m$ ، $y = +5m$ به $y = +3m$ (الف) و (ب) باشد. (د) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $J = 900$ شروع می‌کند و به نقطه $x = +5m$ ، $y = +2m$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطه اخیر چقدر است؟ (ه) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $J = 900$ شروع می‌کند و به $x = +5m$ ، $y = -2m$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطه اخیر چقدر است؟ (و) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی $J = 600$ شروع می‌کند و در راستای خط $x = -y$ به طرف $x = +5m$ ، $y = -5m$ می‌رسد. اگر این نیرو دیگری هم لازم است تا ذره در این مسیر بماند اما فرض کنید که این نیرو همواره بر مسیر عمود است. ذره در کجا می‌ایستد؟

۷۲. روبوتی صندوقی به جرم 2.0kg را با سرعت ثابت، از $x = 0$ تا $x = 5m$ در هر یک از سه مسیر زمین هل می‌دهد. شرایط سطح زمین تغییر می‌کند، و روبرو هم صندوق را با نیروی افقی متغیر هل می‌دهد تا سرعت آن ثابت بماند. معلوم می‌شود که رابطه $F(x) = 3.0mg\sqrt{x}e^{-0.2x}$ است.

۹

سیستمهای ذرات

تا اینجا اجسام را ذره—یعنی "با جرم" ولی "بی اندازه"—در نظر گرفتایم. این البته فرض خیلی بدی هم نیست، چون در حرکت انتقالی ساده، در واقع تمام نقاط جسم دقیقاً مثل هم حرکت می‌کنند و فرقی نمی‌کند که جسم را ذره بگیریم یا یک جسم استرده واقعی. اما در مورد بسیاری از اجسام متحرک نمی‌توانیم چنین کنیم. مثلاً وقتی جسمی ضمی انتقال دوران هم داشته باشد، یا وقتی اجزاء جسمی نسبت به یکدیگر نوسان کنند دیگر درست نیست که کل جسم را مثل یک ذره در نظر بگیریم. حتی در این موارد پیچیده‌تر هم، یک نقطه مربوط به جسم هست که، تحت تأثیر نیروهای خارجی، درست مثل یک ذره رفتاری می‌کند. اسم این نقطه مرکز جرم است. در این فصل خواهیم گفت که چه طور می‌توانیم مرکز جرم اجسام را پیدا کنیم، و نشان خواهیم داد که قوانین ساده (یعنی همان قوانین نیوتون) برای توصیف حرکت مرکز جرم سیستمهای پیچیده، به فرمولیندی دومین قانون بزرگ پایستگی، یعنی پایستگی تکانه خطی، منجر می‌شود.

جایه‌جایی آن نسبتاً کوچک است و جایه‌جایی جسم کم جرمتر تقریباً برابر با تغییر طول فنر است. از طرف دیگر، اگر دو جسم دارای جرم‌های مساوی باشند، اندازه جایه‌جایی هر کدام از آنها برابر با نصف افزایش طول فنر است.

در شکل ۱ نمونه‌ای از حرکتی که می‌خواهیم بررسی اش کنیم نشان داده شده است. در این مورد ابتدا فنر (با ثابت نیروی k) مقداری کشیده شده است و دو جسم از حالت سکون رها شده‌اند. فرض کنید کشیدگی اولیه فنر d_1 باشد، در این صورت از این نیروی اولیه برابر است با طول فنر برابر با d باشد، از این سیستم برابر است با

$$(1) \quad E = U + K = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

که شامل انرژی پتانسیل فنر و انرژی جنبشی دو جسم است. پایستگی انرژی ایجاد می‌کند که انرژی E در هر زمانی مساوی با انرژی اولیه (E_0) باشد، یعنی

$$(2) \quad \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kd_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

از شکل ۱ پیداست که مکانهای دو جسم با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$x_2 = x_1 + L + d$$

$$(3) \quad Ramin.samad@yahoo.com$$

۱-۹ سیستمهای دوذره‌ای

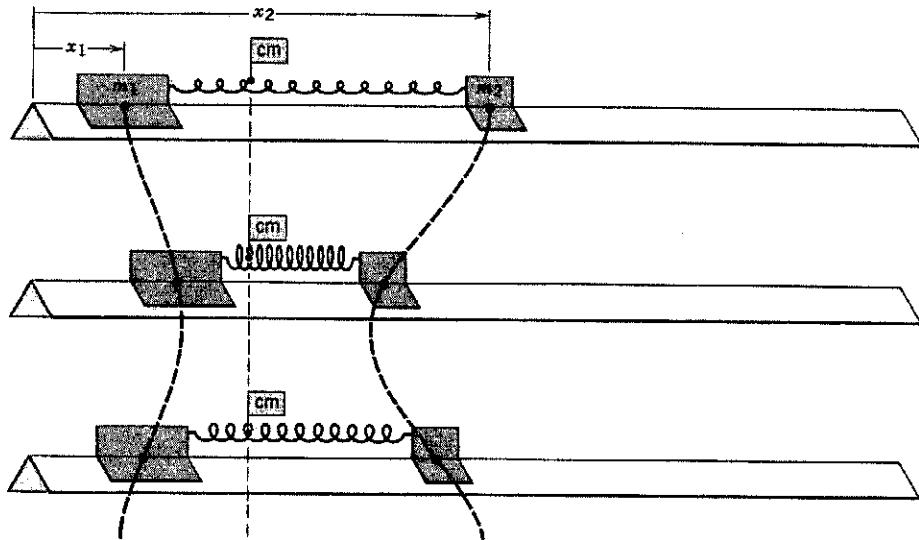
در فصلهای ۷ و ۸ برای مطالعه حرکت جسمی که تحت تأثیر نیروی فنر بود از مفاهیم مربوط به از از استفاده کردیم. حالا می‌خواهیم به مسئله‌ای بپردازیم که کمی پیچیده‌تر است: حرکت یک بعدی دو جسم که به وسیله فنری به هم متصل‌اند. برای سادگی، فعلًا فرض می‌کنیم که

جز نیروی فنر، هیچ نیروی خارجی خالص دیگری به این اجسام اثر نمی‌کند. یعنی، فرض می‌کنیم که دو جسم می‌توانند بدون اصطکاک، روی یک سطح افقی هموار بلغزند. یک نمونه عملی از چنین وضعیتی می‌توانند حرکت دو لغزende متصل با فنر روی یک ریل هوا باشد.

وقتی فنر کشیده یا فشرده می‌شود، به هر دو جسم، که می‌توانیم

هر یک را به تنهایی مثل ذره در نظر بگیریم، نیرو وارد می‌کند. نیروهای وارد بر دو جسم مقدارهای مساوی دارند. (فنر را می‌شود صرفاً نمایش مادی نیروهایی دانست که دو جسم—مثلاً دو اتم در یک مولکول—می‌توانند بی‌واسطه بر یکدیگر وارد کنند. در این صورت، قانون سوم نیوتون، ایجاد می‌کند که نیروهای وارد بر دو ذره مساوی و در جهت‌های مخالف باشند. وجود فنر، که بی‌جرم فرض شده است، این الزام را تغییر نمی‌دهد.)

حرکتهای این دو جسم را نمی‌توانیم مستقل از یکدیگر با استفاده از قوانین نیوتون تحلیل کنیم، زیرا حرکت هر کدام وابسته به حرکت دیگری است. مثلاً اگر یکی از اجسام خیلی پر جرمتر از دیگری باشد،



شکل ۱. دو لغزندۀ که با یک فنر کشیده شده به هم متصل‌اند، روی یک ریل‌ها از حالت سکون رها می‌شوند. حرکت حاصل، جز برای نقطه مشخص شده با پرچم، که ساکن می‌ماند، ساده نیست. بازه‌های زمانی بین وضعیت‌های متوالی، با هم مساوی‌اند. در مورد این سیستم $m_1 = 2m_2$ است.

که همان سرعت پرچم در شکل ۱ است. برای پیدا کردن شتاب مرکز جرم، یکبار دیگر (این بار از معادله ۵) مشق می‌گیریم؛ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a_{cm} &= \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1 a_1 + m_2 a_2) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن a_1 شتاب m_1 و a_2 شتاب m_2 است. در ادامه مطلب، قوانین نیوتون را جداگانه به هریک از جرم‌های m_1 و m_2 اعمال می‌کنیم. نیروی وارد بر m_1 از m_2 را F_{12} و نیروی وارد بر m_2 از m_1 را با F_{21} نمایش می‌دهیم. از قانون دوم نیوتون در مورد $F_{21} = m_2 a_2$ و $F_{12} = m_1 a_1$ به ترتیب نتیجه می‌شود. ولی، درمثال‌ما، این فنر است که نیروها را به m_1 و m_2 وارد می‌کند. این فرض که اجسام بی‌واسطه به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، تا وقتی فنر بدون جرم در نظر گرفته شود، چیزی از کلیت مسئله کم نمی‌کند. قانون سوم نیوتون ایجاب می‌کند که $-F_{21} = F_{12}$. از نشاندن این کمیتها در معادله ۶ نتیجه می‌شود که

$$a_{cm} = \frac{1}{M} (F_{12} + F_{21}) = 0$$

در این مورد خاص، که هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود، مرکز جرم هیچ شتابی ندارد و بنابراین با سرعت ثابت حرکت می‌کند (این سرعت ثابت در مورد سیستم شکل ۱ اتفاقاً صفر است). با استفاده از معادله‌های ۴ و ۵ در ترکیبی از معادلات ۲ و ۳ می‌توانیم v_1 و v_2 را حذف کنیم یا x_2 و v_2 را، و به این ترتیب حل مسئله کامل می‌شود (نگاه کنید به مسئله ۱).

شکل ۲ حالت کلی‌تری را نشان می‌دهد که در آن به فنر یک شکل ۲

که در آن L طول عادی فنر است. معادله‌های ۲ و ۳ حاوی اطلاعات کافی برای تعیین x_1 و x_2 به صورت توابعی از زمان نیستند، و بنابراین نمی‌توانیم بدون دستیابی به اطلاعات بیشتر، این مسئله را به طور کامل حل کنیم.

اطلاعات اضافی مورد نیاز از بررسی و تحلیل یک نقطه خاص در سیستم شکل ۱ حاصل می‌شود. این نقطه، که مرکز جرم (cm) سیستم نامیده می‌شود، در شکل ۱ با پرچم کوچکی مشخص شده است. در مورد این سیستم، مرکز جرم اصلاً حرکت نمی‌کند.

ببینیم که استفاده از مرکز جرم چگونه ما را در تکمیل حل این مسئله یاری می‌کند. مکان مرکز جرم، برای مورد خاص دو ذره در یک بعد، به صورت

$$x_{cm} = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2) \quad (4)$$

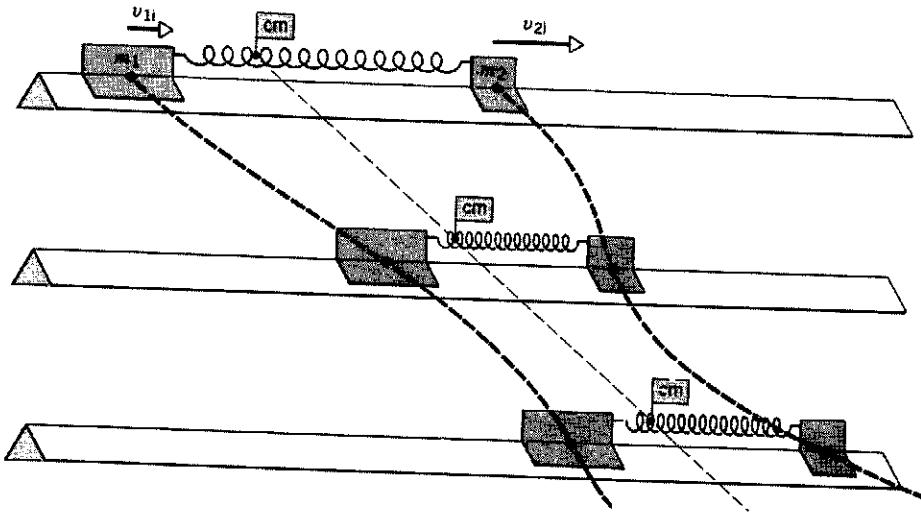
تعریف می‌شود، که در آن x_1 و x_2 مختصات دو ذره و M جرم کل سیستم است

$$M = m_1 + m_2$$

مرکز جرم یک سیستم دو جسمی نقطه‌ای است در فضای که با معادله ۴، در یک بعد، تعریف می‌شود. الزامی نیست که این نقطه، جزئی از این یا آن جسم باشد.

سرعت مرکز جرم، v_{cm} ، از مشتق معادله ۴ نسبت به زمان به دست می‌آید

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt}(m_1 x_1 + m_2 x_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{M} (m_1 v_1 + m_2 v_2) \end{aligned} \quad (5)$$



شکل ۲. به دو جسم لغزنده که توسط فنر کشیده شده‌ای به هم متصل شده‌اند سرعتهای اولیه دلخواهی داده شده است. این دو جسم حرکات پیچیده‌ای دارند، در حالی که مرکز جرم که با برچم مشخص شده است با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بازه‌های زمانی بین وضعیتها متوالی، با هم مساوی‌اند.

با خلاصه کردن نتایج بررسی این سیستم دو ذره‌ای یک بعدی، می‌بینیم که برای بعضی مقاصد معین می‌توانیم فرض کنیم که جرم کل سیستم در x_{cm} متمرکز شده است و با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند. به علاوه، در غیاب نیروی خارجی خالص، $a_{cm} = 0$ است و مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در بخش‌های بعدی عبارتهای کلی تری برای این مفاهیم بدست می‌آوریم.

۲-۹ سیستمهای بس-ذره‌ای
در این بخش نتایج بخش قبلی را به سیستمهایی در سه بعد که شامل بیش از دو ذره‌اند تعمیم می‌دهیم.
سیستمی شامل N ذره با جرم‌های m_1, m_2, \dots, m_N را در نظر می‌گیریم. جرم کل این سیستم برابر است با

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum m_n$$

هر ذره این سیستم را می‌توان با جرمش، $(n=1, 2, \dots, N) m_n$ ، موقعیتش در دستگاه مختصات r_n (با مؤلفه‌های x_n, y_n و z_n)، سرعتش v_n (با مؤلفه‌های v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}) و شتابش a_n نمایش داد. هر ذره تحت تأثیر نیروی F_n قرار می‌گیرد که در حالت کلی برای ذرات مختلف متفاوت است. بخشی از این نیرو از $N - 1$ ذره دیگر ناشی می‌شود و بخش دیگری ممکن است ناشی از عوامل خارجی باشد.

مرکز جرم سیستم را می‌توان با تعمیم منطقی معادله ۴ تعریف کرد

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n x_n \end{aligned} \quad (11\text{الف})$$

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n y_n \end{aligned} \quad (11\text{ب})$$

است. در اینجا می‌توانید بینید که مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند کل سیستم اگرچه کاملاً پیچیده است. معادله‌های ۴ و ۵ و ۶ خیلی کلی تراز آن‌اند که این مستعله خاص مطرح می‌کند. حالا برای اینکه مستعله را به کلی ترین صورت مطرح کرده باشیم، فرض می‌کنیم که به جسم m_1 ، علاوه بر نیروی داخلی F_{12} که از طرف جسم m_2 وارد می‌شود، یک نیروی خارجی $F_{ext,1}$ نیز اثر می‌کند. (متلاً ممکن است ریل هوا شیدار باشد و نیروی وزن اثر کند، یا ممکن است آزمایش روی سطحی که اصطکاک دارد انجام شود). قانون دوم نیوتن در مورد m_1 نتیجه می‌دهد

$$F_{ext,1} + F_{12} = m_1 a_1 \quad (7)$$

همچنین فرض می‌کنیم که بر جسم m_2 نیز یک نیروی خارجی $F_{ext,2}$ اثر کند، در این صورت داریم

$$F_{ext,2} + F_{21} = m_2 a_2 \quad (8)$$

از جمع معادله‌های ۷ و ۸ نتیجه می‌شود

$$F_{ext,1} + F_{ext,2} + F_{12} + F_{21} = m_1 a_1 + m_2 a_2 \quad (9)$$

مجموع دو جمله اول، ΣF_{ext} ، نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم است (که قبلاً فرض کرده بودیم صفر باشد). مجموع دو جمله بعدی، $F_{12} + F_{21}$ ، بنا به قانون سوم نیوتن که ایجاد می‌کند $-F_{21} = F_{12}$ باشد، صفر است. سنت راست معادله ۹، بنا به معادله ۶، برابر است با $M a_{cm}$. به این ترتیب نتیجه کلی زیر به دست می‌آید:

$$\Sigma F_{ext} = M a_{cm} \quad (10)$$

این رابطه بسیار شبیه به قانون دوم نیوتن است – قانون دوم است در مورد ذره‌ای به جرم M که در مکان x_{cm} با سرعت v_{cm} در حرکت باشد.

برهمکنش با ذرات دیگر همان سیستم ناشی می‌شوند و دسته دیگر نیروهای خارجی‌اند که از بیرون سیستم روی آن عمل می‌کنند. هر ذره m_n ممکن است تحت تأثیرنیروی از ذره m_k واقع شود، که آن را با \mathbf{F}_{nk} نمایش می‌دهیم. این نیروی خاص یکی از نیروهایی است که نیروی \mathbf{F}_n نیروی کل وارد بر m_n ، را می‌سازد. به همین ترتیب، نیروی کل وارد بر m_k شامل جملة \mathbf{F}_{kn} است که از برهمکنش با ذره m_n ناشی می‌شود. بنابر قانون سوم نیوتن $-\mathbf{F}_{kn} = \mathbf{F}_{nk}$ است و در نتیجه، این دو نیروی خاص به هنگام جمع کردن همه نیروها در معادله ۱۵ همیگر را حذف می‌کنند. درواقع، همه چنین نیروهای داخلی‌ای، عضوی از یک زوج عمل-عکس‌العمل‌اند و نهایتاً حذف می‌شوند. (در فصل ۵ هشدار دادیم که نیروهای عمل-عکس‌العمل به ذرات متفاوت وارد می‌شوند و بنابراین نمی‌توانند با هم مخالفت کنند. اینجا هم این هشدار را فرموش نکردیم؛ باز هم عمل به یک ذره وارد می‌شود و عکس‌العمل به ذره دیگر، اینجا فرقش در این است که ما نیروها را جمع می‌کنیم تا نیروی خالص وارد بر دو ذره را به دست بیاوریم، و در این صورت، اعضای زوج عمل-عکس‌العمل، که همچنان به ذرات متفاوت وارد می‌شوند، واقعاً یکدیگر را حذف می‌کنند).

پس آنچه باقی می‌ماند کل نیروهای خارجی است و معادله ۱۵ به صورت زیر در می‌آید

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (16)$$

که می‌توان آن را بر حسب مؤلفه‌هاییش هم نوشت

$$\sum F_{\text{ext},x} = M a_{\text{cm},x}, \quad \sum F_{\text{ext},y} = M a_{\text{cm},y}$$

و

$$\sum F_{\text{ext},z} = M a_{\text{cm},z}$$

می‌توانیم این نتیجه مهم را به صورت زیر بیان کنیم:

حرکت انتقالی کلی یک سیستم از ذرات را می‌توان با استفاده از قوانین نیوتون تجزیه و تحلیل کرد؛ با این فرض که کل جرم سیستم در مرکز جرم متمرکز شده است و کل نیروی خارجی به آن نقطه وارد می‌شود.

یک نتیجه ضمنی هم برای حالت $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ حاصل می‌شود: اگر نیروی خالص خارجی وارد بر یک سیستم ذرات صفر باشد، مرکز جرم این سیستم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

این مطلب، مشاهدات ما در بخش ۱-۹ را، در مورد مسئله حرکت دو جرم که با فرته به هم متصل‌اند، توضیح می‌دهد. اینها نتایجی هستند کلی، که هم در مورد مجموعه‌ای از ذرات منفرد و هم در مورد ذراتی که مانند ذرات یک جسم جامد توسط نیروهای داخلی به هم متصل‌اند به کار می‌روند. خود جسم ممکن

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n z_n \end{aligned} \quad (11)$$

با نمادهای برداری، این سه معادله را می‌توان به صورت جمع و جوهر، یعنی به شکل یک تک عبارت نوشت که موقعیت مرکز جرم را می‌دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{r}_n \end{aligned} \quad (12)$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، سرعت مرکز جرم به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{cm}} &= \frac{d \mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d \mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d \mathbf{r}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d \mathbf{r}_N}{dt} \right) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{v}_n \end{aligned} \quad (13)$$

با یک مشتق‌گیری دیگر، شتاب مرکز جرم را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{cm}} &= \frac{d \mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_N \mathbf{a}_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (14)$$

معادله ۱۴ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

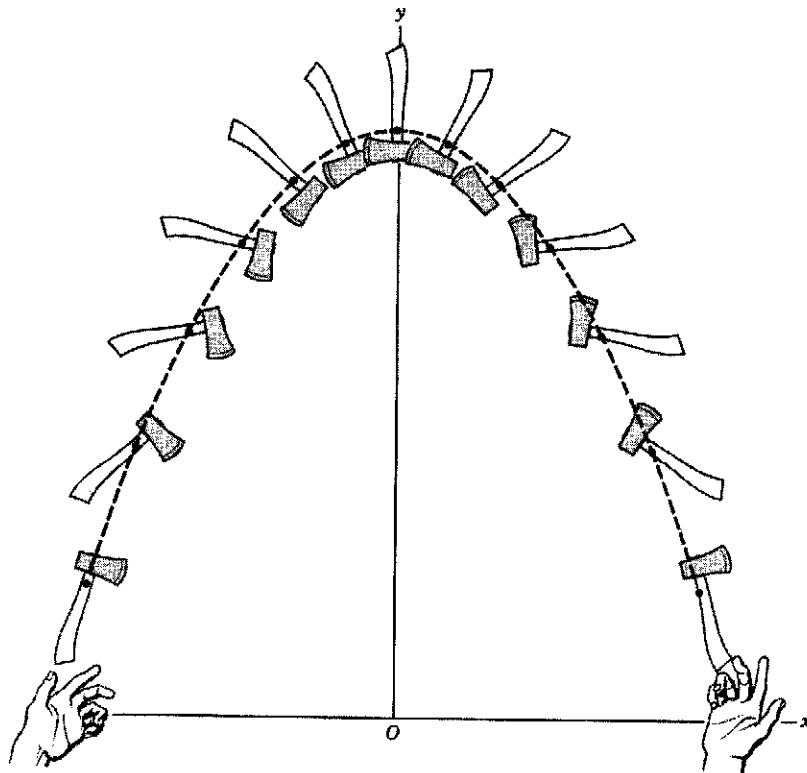
$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_N \mathbf{a}_N$$

یا

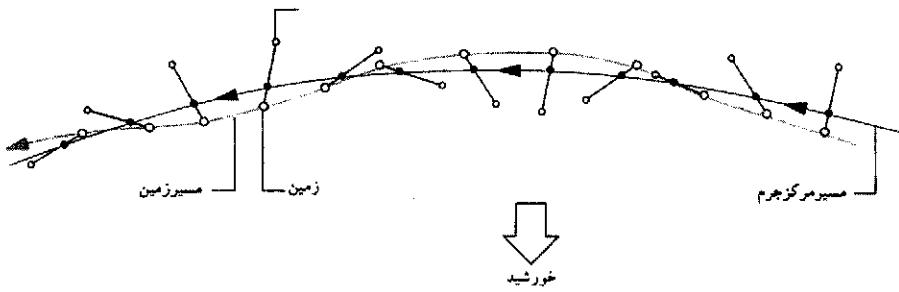
$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N \quad (15)$$

طرف راست معادله ۱۵ مثل این است که قانون دوم نیوتون، یعنی $\mathbf{F}_n = m_n \mathbf{a}_n$ ، را به تک‌تک ذرات سیستم اعمال کرده باشیم. به این ترتیب نیروی کل وارد بر یک سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم. معادله ۱۵ همان قانون دوم نیوتون برای یک سیستم N ذره‌ای است که به صورت یک تک ذره به جرم M واقع در مرکز جرم در نظر گرفته شده است. این تک ذره با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند و شتابش a_{cm} است.

معادله ۱۵ را می‌توانیم از این هم که هست کمی ساده‌تر کنیم. در میان نیروهای وارد بر ذرات، یک دسته نیروهای داخلی‌اند که از Ramin.samad@yahoo.com



شکل ۳. تبری که بین دو بازیگر پرتاب شده است. این تبر در حین انتقال می‌چرخد. مسیر سهمی شکل مرکز جرم را (که با نقطه روی تبر مشخص شده است) با خط چین نشان داده‌ایم. تک ذره‌ای که به همین صورت پرتاب شده باشد، همین مسیر را طی می‌کند. حرکت نقطه دیگری از تبر به این سادگی نیست.



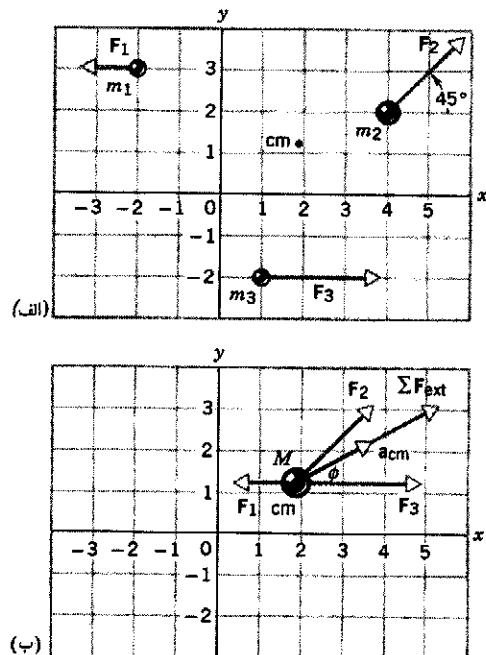
شکل ۴. مرکز جرم سیستم زمین-ماه یک مقدار تقریباً دایره‌ای را طی می‌کند، در حالی که زمین و ماه هر کدام حول مرکز جرم مشترکشان می‌گردند (همان طور که تبر شکل ۳ می‌چرخید). این اثر که موجب یک "انحراف" جزئی در مدار زمین می‌شود، در شکل به صورت بسیار اغراق‌آمیزی نشان داده شده است. مرکز جرم سیستم زمین-ماه عملأ در داخل زمین است، به طوری که زمین همواره روی مسیر مداری مرکز جرم واقع می‌شود.

می‌کند (این همان مسیری است که اگر ذره‌ای با جرم $m_a + m_b$ زمین m_b داشتیم طی می‌کردا). زمین و ماه حول مرکز جرم مشترکشان دوران هم می‌کنند، و این موجب می‌شود که زمین در اطراف مسیر مدار پایدار نوسان کوچکی داشته باشد. با استفاده از داده‌های پیوست ج، می‌توانیم نشان بدیم که مرکز جرم سیستم زمین-ماه تقریباً در فاصله ۴۶۰۰ کیلومتر از مرکز زمین قرار دارد و بنابراین در داخل زمین (که ساعع متوسطش ۶۳۷۰ کیلومتر است) واقع می‌شود.

در شکل ۵ حرکت یک موشک بالستیک که به سه پاره شکافته می‌شود نشان داده شده است. انفجاری سه کلاهک را از هم جدا و به اطراف پرتاب می‌کند، اما این انفجار چون فقط نیروهای داخلی تولید می‌کند تأثیری بر حرکت مرکز جرم ندارد. مرکز جرم در همان مسیر نشان می‌دهد که مرکز جرم سیستم مسیر پایداری را حول خورشید طی

است هر حرکت پیچیده‌ای داشته باشد، ولی مرکز جرم آن مطابق معادله ۱۶ حرکت می‌کند. شکل ۳ حرکت یک جسم ناهمگن را تحت تأثیرگرانش نشان می‌دهد. این جسم در حین انتقال، چرخش هم دارد، اما، مرکز جرم آن مسیر سهمی ساده‌ای را طی می‌کند. تا آنجا که به نیروی خارجی (گرانش) مربوط می‌شود سیستم چنان رفتار می‌کند که گویی ذره‌ای است به جرم M که در مرکز جرم قرار گرفته است. به این ترتیب یک مسئله پیچیده به دو مسئله ساده کاهش یافته است

حرکت مرکز جرم روی مسیر سهمی، و چرخش حول مرکز جرم. به عنوان مثالی دیگر، سیستم زمین-ماه را، که تحت تأثیرگرانش خورشید (نیروی خارجی) حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. شکل ۴ نشان می‌دهد که مرکز جرم سیستم مسیر پایداری را حول خورشید طی



شکل ۶. مثال ۱. (الف) سه ذره در حالت سکون در موقعیت‌های نشان داده شده قرار گرفته‌اند. به این ذرها تأثیرهای معینی وارد می‌شوند. مرکز جرم سیستم مشخص شده است. (ب) حرکت انتقالی کل سیستم را می‌توان با حرکت ذرها به جرم کل M که در مکان مرکز جرم واقع شده و تحت تأثیر سه تأثیر خارجی است، نشان داد. برایند نیروها و شتاب مرکز جرم را در شکل مشخص کردایم.

شکل ۶ ب

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},x} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ &= -6N + (12N)(\cos 45^\circ) + 14N = 16.5N \end{aligned}$$

و مؤلفه y این نیرو برابر است با

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},y} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ &= 0 + (12N)(\sin 45^\circ) + 0 = 8.5N \end{aligned}$$

بداین ترتیب مقدار نیروی خارجی خالص برابر است با

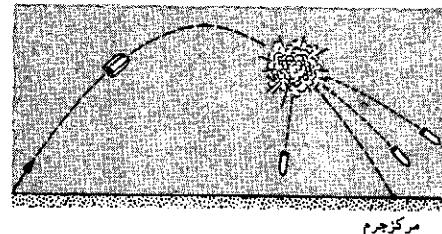
$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} &= \sqrt{(F_{\text{ext},x})^2 + (F_{\text{ext},y})^2} = \sqrt{(16.5N)^2 + (8.5N)^2} \\ &= 18.6N \end{aligned}$$

و زاویه‌ای که با محور x می‌سازد از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_{\text{ext},y}}{F_{\text{ext},x}} = \tan^{-1} \frac{8.5N}{16.5N} = 27^\circ$$

بردار شتاب هم در همین جهت است. بنابر معادله ۱۶ مقدار شتاب مرکز جرم برابر است با

$$a_{\text{cm}} = \frac{F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18.6N}{16.4kg} = 1.1m/s^2$$



شکل ۵. موشکی شامل سه کلاهک، در یک مسیر سه‌می در حرکت است. این کلاهکها در اثر یک انفجار رها می‌شوند و چنان حرکت می‌کنند که مرکز جرم آنها همان مسیر سه‌می اولیه را می‌پیماید.

اولیه موشک به حرکتش ادامه می‌دهد، چنانکه گویی انفجاری صورت نگرفته است؛ این البته تا وقتی است که هیچ یک از کلاهکها تحت تأثیر نیروی، مثلاً مقاومت هوا یا ضربه ناشی از برخورد با هدف وغیره، قرار نگرفته باشد.

مثال ۱. شکل ۶‌الف سیستمی شامل سه ذره است که در ابتدا ساکن‌اند. جرم این ذرات به ترتیب $m_1 = 4.1kg$, $m_2 = 8.2kg$, $m_3 = 4.1kg$ و $m_r = 4.1kg$ است. این ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی $F_1 = 12N$, $F_2 = 12N$, $F_3 = 6N$ قرار می‌گیرند که عبارت‌اند از $F_1 = 12N$, $F_2 = 12N$, $F_3 = 6N$. جهت این نیروها در شکل مشخص شده است. مرکز جرم این سیستم در کجا واقع شده و شتاب آن چقدر است؟

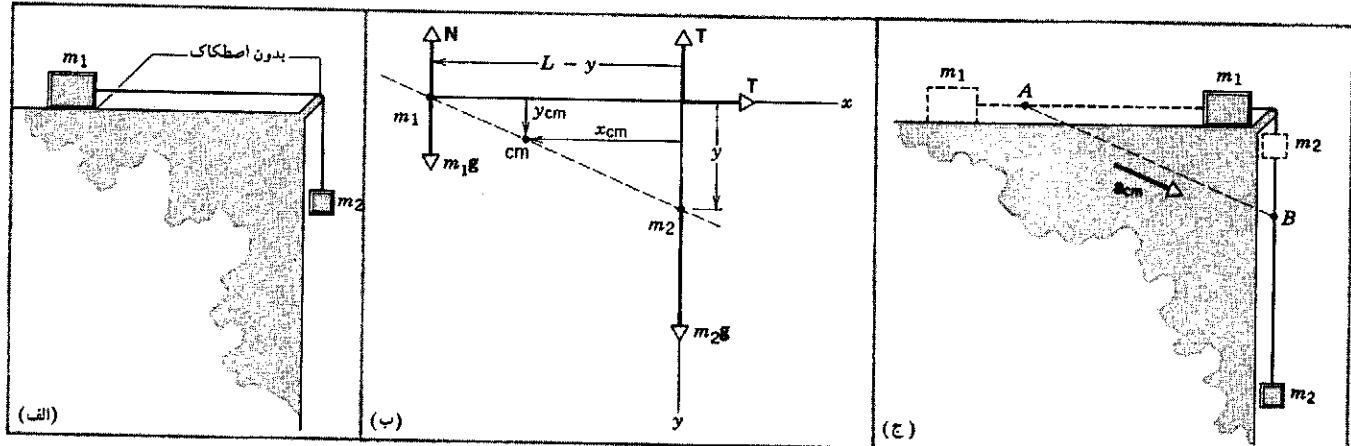
حل: موقعیت مرکز جرم با نقطه در شکل نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۶ ب بر می‌آید می‌شود فرض کرد که در این نقطه ذرای واقعی با جرمی برابر مجموع جرم هر سه ذره، یعنی $M = m_1 + m_2 + m_3 = 16.4kg$ قرار گرفته است و همه نیروهای خارجی بر آن وارد می‌شود. مختصات مرکز جرم را از معادله‌های ۱۱ ب پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) \\ &= \frac{1}{16.4kg}[(4.1kg)(-2cm) + (8.2kg)(4cm) \\ &\quad + (4.1kg)(1cm)] = 1.8cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{cm}} &= \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3) \\ &= \frac{1}{16.4kg}[(4.1kg)(3cm) + (8.2kg)(2cm) \\ &\quad + (4.1kg)(-2cm)] = 1.3cm \end{aligned}$$

توجه کنید که در این محاسبات، مخلوط کاملاً قابل قبولی از یکاهای بدکار برده‌ایم.

مؤلفه x نیروی خارجی خالص وارد بر مرکز جرم عبارت است از



شکل ۷.۲. (الف) دو جسم توسط ریسمانی به طول L به همیگر متصل شده‌اند. این ریسمان از روی تکیه‌گاه بدون اصطکاکی می‌گذرد. (ب) نیروهای خارجی وارد بر سیستم نشان داده شده است. تکیه‌گاه بدون اصطکاک یک نیروی خارجی بر ریسمان اعمال می‌کند که هر کدام از مؤلفه‌های آن برای رکشش در ریسمان است (که نیروی داخلی است و بنا بر این نشان داده نشده است). (ج) مرکز جرم از نقطه A به نقطه B می‌رود. در نقطه A جسم m_2 در بالاترین موقعیت قرار دارد و در نقطه B جسم m_1 به سمت راست حرکت می‌کند، و در نتیجه مرکز جرم سیستم هم باید به سمت راست حرکت کند. نیروی افقی T تنها نیروی خارجی ممکن است که می‌تواند موجب حرکت افقی مرکز جرم شود. البته نیروی خارجی ناشی از گرانش هم موجب حرکت مرکز جرم به طرف پایین می‌شود.

حالا قوانین نیوتون را به کار می‌بریم. در شکل ۷.۲، نیروی خارجی اعمال شده توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر ریسمانی که دو جسم را به هم متصل کرده به مؤلفه‌های x و y تجزیه شده است. مقدار هر کدام از این مؤلفه‌ها برابر با T (کشش ریسمان) است. با استفاده از معادله ۱۶ داریم

$$\begin{aligned} T &= Ma_{cm,x} \\ m_1g - N + m_2g - T &= Ma_{cm,y} \end{aligned}$$

با جاشانی مقادیر $a_{cm,x}$ و $a_{cm,y}$ می‌توانیم T را بین این دو معادله حذف کنیم و با در نظر گرفتن اینکه $N = m_1g$ است، شتاب را بدست بیاوریم

$$a = g \frac{m_1}{M}$$

که با نتیجه‌های که قبلًا در فصل ۵ بدست آورده‌ایم سازگار است. توجه کنید که در این مثال، باید نیروی خارجی اعمال شده از تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر سیستم را در نظر بگیریم. این نیرو وقتی نیروهای وارد بر جسم ۱ و جسم ۲ را جداگانه بررسی می‌کنیم در معادلات وارد نمی‌شود.

اگر سیستم از حالت سکون از وضعیتی که در آن جسم m_2 در بالاترین موقعیت قرار دارد رها شود؛ حرکت مرکز جرم، در امتداد خط راستی است که در شکل ۷.۲ج می‌بینید. جهت a_{cm} را می‌توان از جمع برداری پنج نیروی وارد بر سیستم، که در شکل ۷.۲ ب نشان داده شده است، تعیین کرد.

هر سه ذره شکل ۷.الف و نیز مرکز جرم آنها با شتابهای ثابت (ولی مقاومت می‌کنند. اگر ذرات از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشند، هر یک با سرعت فرازende درامداد یک خط راست در جهت نیروی وارد بر آن حرکت خواهد کرد.

مثال ۲. در سیستم شکل ۷.الف، اندازه شتاب مشترک دو قالب را پیدا کنید. قبل این مسئله را در مثال ۸ فصل ۵ با اعمال کردن قانون نیوتون به هر یک از دو قالب، حل کرده‌ایم. این بار مسئله را با در نظر گرفتن حرکت مرکز جرم سیستم دو ذره‌ای حل کنید.
حل: شکل ۷.۲ ب نمودار جسم آزاد مربوط به سیستم دو ذره‌ای را نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از معادله‌های ۱۱الف ۱۱ب، مرکز جرم سیستم (شکل ۷.۲ب) را تعیین می‌کنیم

$$x_{cm} = -\frac{m_1}{M}(L - y) \quad y_{cm} = \frac{m_2}{M}y$$

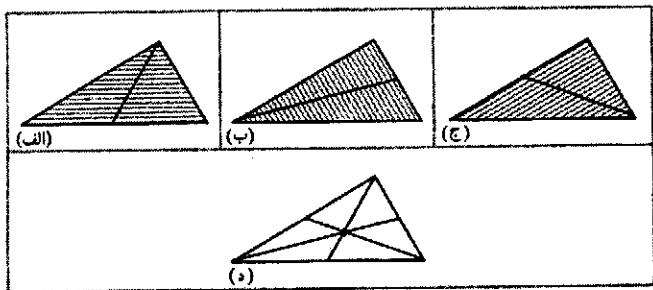
در رابطه بالا L طول ریسمان و y مختصه قائم جرم m_2 است. با مشتقگیری نسبت به زمان، می‌توانیم مؤلفه‌های سرعت مرکز جرم را تعیین کنیم

$$v_{cm,x} = \frac{m_1}{M}v \quad v_{cm,y} = \frac{m_2}{M}v$$

که $(v = dy/dt)$ مقدار سرعت مشترک دو قالب است. با مشتقگیری مجدد، می‌توانیم مؤلفه‌های شتاب را پیدا کنیم

$$a_{cm,x} = \frac{m_1}{M}a \quad a_{cm,y} = \frac{m_2}{M}a$$

که $(a = dv/dt)$ مقدار شتاب مشترک دو قالب است



شکل ۸. در (الف)، (ب)، و (ج)، مثلث به نوارهای باریکی موازی با هر یک از سه ضلع تقسیم شده است، مرکز جرم در هر مورد باید روی خط میانه که از وسط نوارهای موازی گذشته است قرار بگیرد. (د) تنها نقطه مشترک این سه خط، محل تقاطع آنهاست که همان مرکز جرم مثلث است.

سه خط (شکل ۸ د) می‌بینیم که تنها نقطه مشترک آنها الزاماً باید مرکز جرم مثلث باشد.

مثال ۳. شکل ۹ الف یک ورق فلزی دایره‌ای به شعاع $2R$ را نشان می‌دهد که از آن قرصی به شعاع R درآورده شده است. این جسم را که مرکز جرم آن با نقطه‌ای روی محور x نشان داده شده است، X می‌نامیم. محل دقیق این نقطه را پیدا کنید.

حل: شکل ۹ ب جسم X را نشان می‌دهد، که سوراخ آن با قرصی به شعاع R پر شده است. این قرص را جسم D ، و قرص مرکب یکنواختی را که به این ترتیب ایجاد می‌شود جسم C می‌نامیم. با استفاده از تقارن می‌دانیم که مرکز جرم جسم C در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد.

برای پیدا کردن مرکز جرم یک جسم مرکب، می‌توانیم فرض کنیم که جرم هر یک از اجزای آن در مرکز جرم آن جزء متراکز شده است. پس می‌توانیم جسم C را معادل دو جرم نقطه‌ای که نماینده اجسام X و D هستند در نظر بگیریم. شکل ۹ ج محل مراکز جرم‌های این سه جسم را نشان می‌دهد.

مکان مرکز جرم جسم C از معادله ۱ الف بدست می‌آید

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X}$$

و x_D و x_X به ترتیب عبارت‌اند از مکان مراکز جرم‌های اجسام D و X . با توجه به اینکه $x_C = 0$ است، معادله را برای x_X حل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}$$

نسبت m_D/m_X باید مثل نسبت مساحت اجسام D و X باشد

۴-۳ مرکز جرم اجسام صلب

تعیین مرکز جرم جسم جامد با استفاده از معادله ۱۲ و جمع بستن روی تک‌تک اتمهای سیستم عملاً مشکل‌تر از آن است که ممکن باشد. در عوض جسم را به اجزای بسیار کوچکی به جرم δm_n تقسیم می‌کنیم، وقتی این اجزاء بسیار بسیار کوچک شوند، جمعهای مربوط به معادله‌های ۱۱ و ۱۲ به انتگرال تبدیل می‌شوند

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum \delta m_n x_n = \frac{1}{M} \int x dm \quad (17\text{الف})$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum \delta m_n y_n = \frac{1}{M} \int y dm \quad (17\text{ب})$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum \delta m_n z_n = \frac{1}{M} \int z dm \quad (17\text{ج})$$

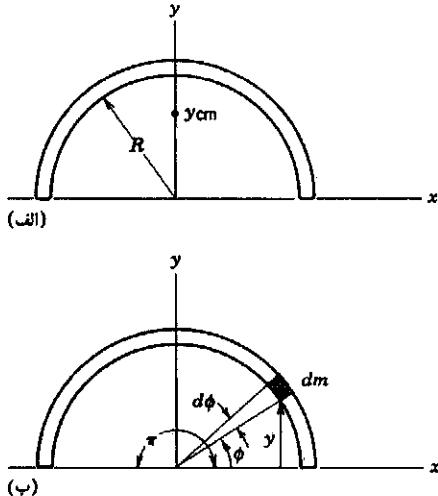
این معادله‌ها را می‌توان به صورت برداری هم نوشت

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm \quad (18)$$

در بسیاری از موارد، با استفاده از ملاحظات بر هندسی یا تقارن، امکان ساده‌سازی محاسبات مربوط به مرکز جرم اجسام جامد وجود دارد. جسمی که تقارن کروی دارد، مرکز جرمش باید در مرکز هندسی کره قرار بگیرد. (لازم نیست که در این مورد چگالی ثابت باشد؛ مثلاً، توب بیسیال با آنکه از لایه‌هایی از مواد مختلف تشکیل شده است تقارن کروی دارد. مرکز جرم آن بر مرکز هندسی اش واقع است. وقتی از تقارن کروی صحبت می‌کنیم، منظورمان این است که چگالی ممکن است با ۲ تغییر کند ولی این تغییر باید در همه جهت‌ها یکسان باشد.) اگر جامدی دارای تقارن استوانه‌ای باشد (یعنی، اگر جرم آن به طور متقارن حول محوری توزیع شده باشد)، در این صورت مرکز جرم آن باید روی آن محور واقع شود. اگر جرم به طور متقارن حول یک صفحه توزیع شده باشد، مرکز جرم باید در آن صفحه باشد.

اغلب با اجسام جامد نامنظمی مواجه می‌شویم که می‌توانیم آنها را به چند قسم تقسیم کنیم. می‌توانیم مرکز جرم هر قسم را پیدا کنیم و سپس هر قسم را مثل ذراتی مستقر در مرکز جرم خودش در نظر بگیریم و مرکز جرم جسم مرکب را پیدا کنیم.

به عنوان مثال، یک ورق مثلث را در نظر بگیرید. این ورق را به تعداد زیادی نوارهای باریک موازی با قاعدة مثلث تقسیم می‌کنیم (شکل ۸). مرکز جرم هر نوار باید در مرکز هندسی آن واقع شود و بنابراین مرکز جرم ورق باید در جایی روی خطی که مرکزهای نوارها را به هم متصل می‌کند باشد. (هر نوار را با یک جرم نقطه‌ای مستقر در مرکز جرم نوار جایگزین می‌کنیم. از رشته این جرم‌های نقطه‌ای عملاً یک جسم یک بعدی ایجاد می‌شود که مرکز جرم آن باید مطابقاً روی خود این خط قرار بگیرد.) با تکرار همین روش برای نوارهای موازی با دو ضلع دیگر (شکل‌های ۸ و ۹)، دو خط دیگر بدست می‌آوریم که هر یک از آنها هم باید شامل مرکز جرم ورق باشد. از تفکیک



شکل ۱۰. مثال ۴. (الف) نوار نازک فلزی را به شکل نیمایه در آورده‌ایم.
(ب) عنصری از نوار به جرم dm در مختصه ϕ قرار گرفته است.

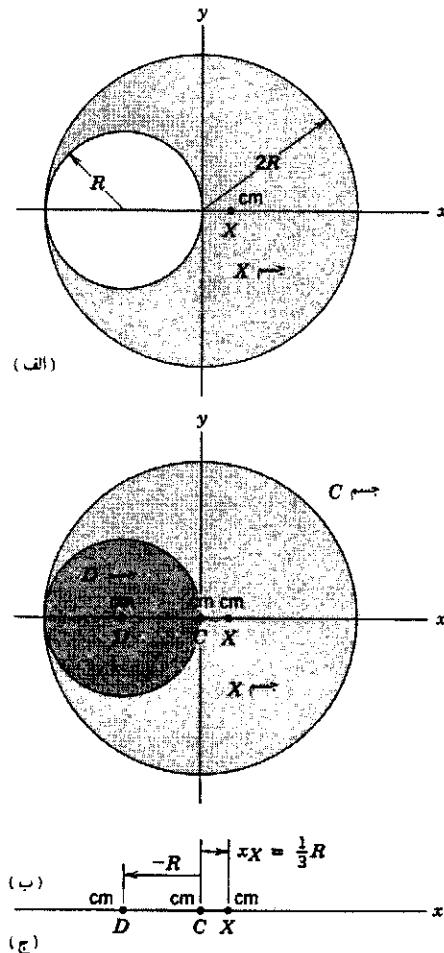
تعیین y_{cm} از معادله ۱۷ ب استفاده می‌کنیم. عنصر کوچک با جرم را که در شکل ۱۰ ب نشان داده شده است در نظر بگیرید. این عنصر رو به روی زاویه $d\phi$ است، و چون جرم M کل نوار رو به روی زاویه π است (یک دایره کامل زاویه 2π را دربر می‌گیرد)، جرم $dm/M = d\phi/\pi$ باید $dm = (M/\pi)d\phi$ باشد که $d\phi$ از π است. یعنی، $y = R \sin \phi$ یا $y = R \sin \phi dm = (M/\pi)d\phi$. dm در موقعیت $y = R \sin \phi$ قرار گرفته است. در این مورد معادله ۱۷ ب را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_0^\pi (R \sin \phi) \frac{M}{\pi} d\phi \\ = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{2R}{\pi} = ۶۳۷R$$

مرکز جرم تقریباً در فاصله دو سوم ساعع در امتداد محور y است. توجه داشته باشید که، همان‌طور که در این مثال نشان داده شد، لازم نیست مرکز جرم حتی در داخل حجم یا ماده جسم باشد.

مثال ۵. گویی به جرم m و ساعع R در داخل یک پوسته کروی با همان جرم m و ساعع داخلی $2R$ قرار داده شده است. این جسم مركب روی میزی در حال سکون است (شکل ۱۱ الف). گویی از محل اولیه‌اش رها می‌شود و در داخل پوسته به پس و پیش می‌غلند و سرانجام در پایین متوقف می‌شود (شکل ۱۱ ج). در طی این فرایند جابه‌جایی d پوسته چقدر است؟

حل: تنها نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم گویی پوسته عبارت اند از نیروی گرانی به طرف پایین و نیروی عمودی به طرف بالا که از میز وارد می‌شود. هیچ یک از نیروها مؤلفه افقی ندارند. بنابراین $\sum F_{ext,x} = ۰$ است. از معادله ۱۶، مؤلفه افقی شتاب مرکز جرم هم باید صفر باشد. یعنی مکان افقی مرکز جرم سیستم باید ثابت بماند، و پوسته باید جنان حرکت کند که جای مرکز جرم تغییر نکند.



شکل ۹. مثال ۳. (الف) جسم X یک قرص فلزی به ساعع $2R$ است که در آن یک سوراخ به ساعع R ایجاد شده است. (ب) جسم D یک قرص فلزی است که سوراخ جسم X را پر می‌کند؛ مرکز جرم آن در $x_D = -R$ دارد. جسم C یک قرص مركب است که از اجسام X و D به وجود آمده است؛ مرکز جرم آن در مبدأ مختصات است. (ج) مرکزهای جرم سه جسم.

است)، یعنی

$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{D \text{ مساحت}}{X \text{ مساحت}} = \frac{D \text{ مساحت}}{(D - C) \text{ مساحت}} = \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم $x_D = -R$ است، پس خواهیم داشت

$$x_X = \frac{1}{3}R$$

مثال ۴. نوار نازکی را به صورت نیمایه‌ای به ساعع R درآورده‌ایم (شکل ۱۰). مرکز جرم این جسم را پیدا کنید.

حل: در این مورد با استفاده از یک مختصه زاویه‌ای می‌شود کار انگرال‌گیری را ساده‌تر کرد. به علاوه، از تقارن جسم نتیجه می‌گیریم که مرکز جرم باید روی محور y باشد (یعنی، $x_{cm} = ۰$). بنابراین برای

در می آید. چرا این نیروی اصطکاک در مکان هایی مرکز جرم مؤثر نیست؟

۴-۹ تکانه خطی ذره

تکانه هر ذره برداری است مانند p که به صورت حاصل ضرب جرم آن ذره در سرعتش v تعریف می شود

$$p = mv \quad (۱۹)$$

تکانه، که حاصل ضرب یک کمیت اسکالر در یک بردار است، خودش یک بردار است. چون p متناسب با v است؛ بستگی به چارچوب مرجع ناظر دارد؛ بنابراین همواره باید این چارچوب را مشخص کنیم. نیوتون، در پرینکپیسیای معروفش، قانون دوم حرکت را برسی کرد و تکانه (که خودش آن را "مقدار حرکت" می نامید) بیان کرده است. قانون دوم نیوتون با اصطلاحات امروزی چنین بیان می شود:

آهنگ تغییر تکانه هر جسم برابر با نیروی برایند وارد بر آن جسم د در جهت همان نیروست.

به صورت نمادی یعنی اینکه

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \quad (۲۰)$$

که در آن ΣF نیروی برایند وارد بر ذره است.

برای یک تک ذره با جرم ثابت، این صورت از قانون دوم هم ارز صورت $F = ma$ است که تاکنون از آن استفاده کرده ایم. یعنی، اگر m ثابت باشد،

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma$$

در مکانیک کلاسیک دو رابطه $F = ma$ و $F = dp/dt$ برای تک ذره کاملاً هم ارزند.

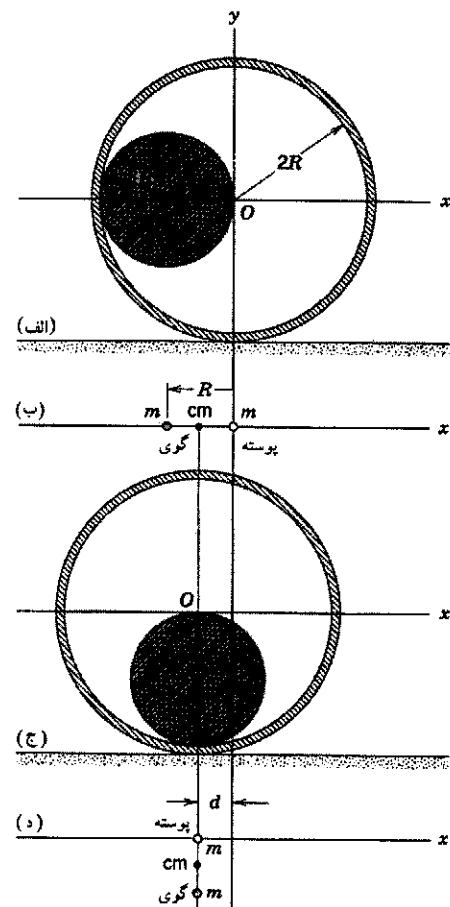
از ترکیب رابطه های $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $p = mv$ رابطه مفیدی بین تکانه و انرژی جنبشی به دست می آید

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad (۲۱)$$

تکانه در سرعتهای زیاد (اختیاری)

وقتی سرعت ذره نزدیک به سرعت نور باشد (ناحیه ای که در آن باید از نظریه نسبیت به جای مکانیک نیوتونی استفاده کرد)، دیگر قانون دوم نیوتون به صورت $F = ma$ معتبر نیست. اما معلوم می شود که این قانون به صورت $F = dp/dt$ هنوز هم معتبر است مشروط بر اینکه تکانه p را تک ذره را نه به صورت mv بلکه به صورت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۲۲)$$



شکل ۱۱.۵. (الف) گویی با شعاع R از این مکان اولیه رها شده است و می تواند آزادانه در داخل پوسته کروی به شعاع $2R$ بغلند. (ب) مرکز جرم گویی، پوسته کروی و ترکیب آنها. (ج) وضعیت نهایی پس از آنکه گویی به حال سکون درآمد. پوسته کروی چنان جایه جا می شود که مرکز جرم سیستم در جای خودش باقی می ماند. (د) مرکز جرم های گویی، پوسته کروی، و ترکیب آنها.

می توانیم هم گویی و هم پوسته را با تک ذراتی با جرم m نمایش بدهیم که هر کدام در مرکز جرم مربوط به خودش قرار گرفته است. شکل ۱۱ ب سیستم را قبل از راه کردن گویی نشان می دهد و شکل ۱۱ د نمایش حالتی است که گویی در پایین پوسته متوقف شده است. مبدأ مختصات را منطبق مکان اولیه مرکز پوسته می گیریم. شکل ۱۱ ب نشان می دهد که، نسبت به این مبدأ مختصات، مرکز جرم سیستم گویی پوسته در فاصله $\frac{1}{2}R$ در سمت چپ مبدأ قرار دارد. این نقطه در وسط دو ذره است. شکل ۱۱ د نشان می دهد که جایه جایی پوسته عبارت است از

$$d = \frac{1}{4}R$$

پوسته باید در طی مدتی که گویی به حال سکون در می آید این مقدار به سمت چپ حرکت کند.

گویی در اثر اصطکاکی که با پوسته کروی دارد Ramin.samad@yahoo.com

pc ، و مانند آنها. این انتخاب به ما امکان می‌دهد که کمیت pc را بر حسب یکاهای انرژی مانند MeV بیان کنیم و کار کردن با روابطی مانند معادله ۲۳ را بسیار ساده‌تر می‌کند. مثلاً برای الکترونی با تکانه انرژی $55 MeV/c$ ، جمله pc در معادله ۲۳ برابر با $55 MeV$ است. انرژی جنبشی الکترون را می‌توانیم به راحتی از این معادله محاسبه کنیم و برای آن مقدار $1 MeV$ را به دست بیاوریم.

در ناحیه سرعتهای بسیار زیاد، تکانه ذره ممکن است آنقدر بزرگ باشد که جمله pc در معادله ۲۳ خیلی بزرگ‌تر از جمله mc^2 شود، و در این صورت معادله با تقریب خوبی به $c = pc$ کاهش می‌باید. بیان تکانه بر حسب یکای انرژی تقسیم بر c در این ناحیه بسیار مفید است. مثلاً الکترونی که تکانه آن برابر $c/50$ است انرژی جنبشی ای خیلی نزدیک به $50 MeV$ دارد. (توجه کنید که این تقریب برای الکترون $55 MeV$ را که قبلاً در نظر گرفته شد هیچ خوب نیست).

۵-۹ تکانه خطی سیستمی از ذرات

تصویر کنید که به جای یک تک ذره، سیستمی شامل N ذره با جرم‌های m_1, m_2, \dots, m_N داشته باشیم. فرض می‌کنیم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود، یعنی جرم کل M (یعنی $\sum m_n$) سیستم در طی زمان ثابت می‌ماند. ذرات می‌توانند با هم برهم‌کنش داشته باشند و ممکن است نیروهای خارجی به آنها وارد شود. هر ذره در چارچوب مرجعی که مورد استفاده است، سرعت و تکانه معینی دارد. سیستم دارای تکانه کل P است، که طبق تعریف برابر با جمع برداری تکانه‌های تک‌تک ذرات آن در همان چارچوب مرجع است:

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 + \dots + p_N \\ &= m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N \end{aligned} \quad (24)$$

اگرین رابطه را با معادله ۱۳ مقایسه کنیم، فوراً در می‌یابیم که

$$P = M v_{cm} \quad (25)$$

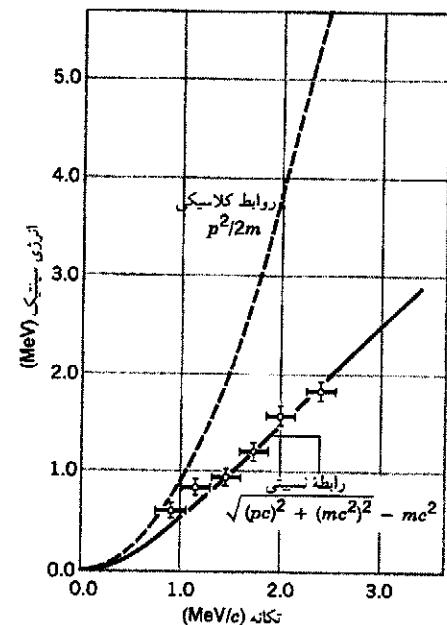
که تعریفی هم ارز برای تکانه سیستمی مشکل از ذرات است. تکانه خطی کل سیستمی از ذرات برابر است با حاصل ضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم آن.

اگر از معادله ۲۵، با فرض ثابت بودن جرم، نسبت به زمان مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv_{cm}}{dt} = Ma_{cm} \quad (26)$$

با توجه به معادله ۲۶ و معادله ۱۶ ($\Sigma F_{ext} = Ma_{cm}$) می‌توانیم قانون دوم نیوتون برای سیستمی از ذرات به صورت زیر بنویسیم

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dP}{dt} \quad (27)$$



شکل ۱۲. مقایسه روابط کلاسیکی (معادله ۲۱) و نسبیتی (معادله ۲۳) بین تکانه و انرژی جنبشی الکترونی‌های گسیل شده در بعضی فرایندهای واپاشی پرتوza. دایره‌ها اندازه‌گیری‌های تجربی را نمایش می‌دهند؛ خطوط افقی و عمودی که از میان دایره‌ها می‌گذرند محدوده عدم قطعیت در اندازه‌گیری‌ها را نشان می‌دهند. روشن است که داده‌ها با رابطه نسبیتی سازگارترند. توجه کنید که در سرعتهای کم (انرژی و تکانه کم) دو رابطه از هم متمایز نیستند.

تعريف کنیم. در این رابطه c سرعت نور است. در سرعتهای معمولی ($c \ll v$)، معادله ۲۲ به همان معادله ۱۹ تبدیل می‌شود. در مورد ذرات نسبیتی، می‌شود نشان داد که رابطه اساسی میان تکانه و انرژی جنبشی به صورت زیر است

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \quad (23)$$

این نتیجه را در فصل ۲۱ به دست خواهیم آورد. شکل ۱۲ مقایسه‌ای بین نتایج کلاسیکی (معادله ۲۱) و نسبیتی (معادله ۲۳) را برای ذرات در محدوده‌ای از سرعتها نشان می‌دهد. روشن است که نتایج کلاسیکی در سرعتهای زیاد نادرست است. همان‌طور که انتظار می‌رود (مسئله ۲۷) معادله ۲۳ در سرعتهای معمولی به معادله ۲۱ کاهش می‌یابد.

انرژی جنبشی، به هر صورتی که نوشته شود، دارای ابعاد جرم ضریب مرتب سرعت است، که همان حاصل ضرب سرعت در تکانه است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش ۱-۷ برای بیان ابعاد می‌توانیم بنویسیم

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}$$

اغلب مفید است که تکانه را بر حسب یکای انرژی تقسیم بر سرعت بیان کنیم و انتخابهای مناسب در مورد ذرات عبارت‌اند از eV/c .

تکانه کل یک سیستم را فقط نیروهای خارجی می‌توانند تغییر بدهند. نیروهای داخلی که دو به دو مساوی و مختلف‌الجهت هستند موجب تغییر تکانه‌های مساوی و مختلف‌الجهتی می‌شوند که هم‌دیگر را حذف می‌کنند. برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی خالصی نباشد داریم

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = a \text{ const.} \quad (28)$$

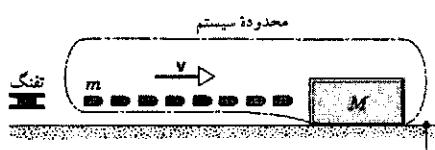
تکانه هر یک از ذرات ممکن است تغییر کند، ولی اگر هیچ نیروی خارجی خالصی در کار نباشد مجموع تکانه‌ها باید ثابت باقی بماند. تکانه کمیتی برداری است. بنابراین معادله ۲۸ هم از رسه معادله اسکالار، برای رسه راستای مختصات، است. بنابراین، پایستگی تکانه خطی رسه شرط در مورد حرکت سیستم مربوط فراهم می‌کند. اما پایستگی انرژی تنها یک شرط در مورد حرکت سیستم در اختیار ما می‌گذارد، چون انرژی کمیتی اسکالار است.

اگر سیستم فقط از یک ذره تشکیل شده باشد، معادله ۲۸ معنی‌اش این می‌شود که وقتی هیچ نیروی خارجی خالصی روی ذره اثر نکند تکانه آن ثابت می‌ماند، که (برای یک ذره تنها) معادل آن است که بگوییم سرعتش ثابت می‌ماند. این صرفاً بیان دیگری از قانون اول نیوتون است.

مثال ۶. رگباری از گلوله‌هایی به جرم $m = 3\text{ kg}$ به طور افقی با سرعت $s = 110\text{ m/s}$ به قطعه چوب بزرگی به جرم $M = 12\text{ kg}$ که در ابتداء روی سطح میزی افقی ساکن است، شلیک می‌شود (شکل ۱۳). اگر قطعه چوب بتواند بدون اصطکاک روی سطح میز بالغزد، سرعت آن پس از دریافت ۸ گلوله چقدر می‌شود؟

حل: معادله ۲۸ ($\mathbf{P} = \text{const.}$) فقط برای سیستمهای بسته معتبر است، یعنی سیستمهایی که هیچ ذره‌ای به آنها وارد یا از آنها خارج نمی‌شود. پس سیستم ما باید مجموعه‌ای شامل قطعه چوب و ۸ گلوله باشد. در شکل ۱۳، این سیستم را، با کشیدن یک منحنی بسته به دور آن، مشخص کرده‌ایم.

ابتداء فقط راستای افقی را بررسی می‌کنیم. هیچ نیروی خارجی افقی روی سیستم مشکل از چوب + گلوله‌ها اثر نمی‌کند. نیروهایی که هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب ایجاد می‌شوند نیروهای داخلی‌اند و در \mathbf{F}_{ext} که هیچ مؤلفه افقی ندارد سهیم نیستند.



شکل ۱۳. مثال ۶. تئوری رگباری از گلوله به سوی یک قطعه چوب شلیک می‌کند. سیستم را مركب از قطعه چوب به علاوه گلوله‌های در حال پرواز

گفته‌اند.

Ramin.samad@yahoo.com

معادله ۲۷ می‌گوید که برابرین نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر با آهنگ تغییر تکانه خطی آن سیستم است. این معادله، تعیین معادله مربوط به تکذله، یعنی $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادله ۲۰)، به سیستمی است که شامل تعداد زیادی ذره باشد. فرض کردہ‌ایم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود. معادله ۲۷ در مورد خاص تکذله به معادله ۲۰ تبدیل می‌شود، زیرا هر نیروی وارد بر سیستم یک ذره‌ای حتماً خارجی است. در بخش ۸-۹ شکل اصلاح شده معادله ۲۷ را برای سیستمهایی که جرمنشان متغیر است به دست خواهیم آورد.

۶-۹ پایستگی تکانه خطی

فرض کنید حاصل جمع نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر صفر باشد. در این صورت، از معادله ۲۷ داریم

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{P} = \text{const.}$$

اگر نیروی خارجی خالص وارد بر یک سیستم صفر باشد، بردار تکانه کل سیستم ثابت می‌ماند.

این نتیجه ساده ولی کاملاً عام، قانون پایستگی تکانه خطی نامیده می‌شود. قانون پایستگی تکانه خطی هم (مانند قانون پایستگی انرژی) در گستره بسیار وسیعی از پدیده‌های فیزیکی معتبر است و هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

قوانين پایستگی (مانند قوانین پایستگی انرژی و تکانه خطی، که با آنها آشنا شده‌ایم، و قوانین پایستگی تکانه زاویه‌ای و بار الکتریکی که بعداً در این کتاب به آنها خواهیم رسید) در فیزیک به لحاظ نظری و عملی بسیار با اهمیت‌اند زیرا هم ساده‌اند و هم عمومیت دارند. قوانین پایستگی انرژی و تکانه خطی از محدوده مکانیک کلاسیک فراتر می‌روند و در حوزه‌های نسبیتی و کوانتومی هم صدق می‌کنند.

قوانين پایستگی همگی به این شکل‌اند: در سیستمی که دارد تغییر می‌کند، نمودی هست که تغییر نمی‌کند. اگر ناظران متفاوتی که هر کدام در چارچوب مرجع متفاوتی قرار دارند به یک سیستم در حال تغییر نگاه کنند، همگی توافق خواهند داشت که قوانین پایستگی در سیستم چارچوبهای لخت متفاوت، مثلاً در مورد پایستگی تکانه خطی، هر یک از ناظران چارچوبهای لخت متفاوت، مقدار متفاوتی به تکانه خطی سیستم نسبت می‌دهند، ولی جملگی توافق دارند (با فرض $\mathbf{P} = \text{const.}$) $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ که ذرات تشکیل‌دهنده سیستم هر طور هم که حرکت کنند، \mathbf{P} تغییر نمی‌کند. نیروی \mathbf{F} نسبت به تبدیلهای گالیله‌ای ناوردادست (همه ناظرهای لخت در مورد آن با هم توافق دارند). اگر در یک چارچوب لخت $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ باشد، همه ناظرهای لخت مشاهده خواهند کرد که $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است و تیجه خواهند گرفت که تکانه

قبل و بعد از شلیک، تغییر می‌کند؟ آیا نیروی افقی خارجی ای به این سیستم وارد می‌شود؟

مثال ۷. شکل ۱۴ توبی به جرم $M = ۱۳۰\text{ kg}$ را نشان می‌دهد که گلوله‌ای ۷۲ kg کیلوگرمی را در راستای افقی با سرعت دهانه‌ای v برابر ۵۵ m/s شلیک می‌کند. توب چنان مستقر شده است که می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت پس زنی توب (V) را نسبت به زمین پیدا کنید. (ب) سرعت اولیه گلوله توب (v_E) را نسبت به زمین پیدا کنید.

حل: (الف) توب و گلوله را به عنوان سیستم اختیار می‌کنیم. با این کار، نیروهای مربوط به عمل شلیک توب، نیروهای داخلی سیستم اند و نیازی به بررسی آنها نیست. نیروهای خارجی وارد بر سیستم هیچ مؤلفه افقی ندارند. بنابراین مؤلفه افقی تکانه خطی کل سیستم باید در حین شلیک توب ثابت بماند.

چارچوب مرجعی، ساکن نسبت به زمین، اختیار می‌کنیم و سرعتهای به سمت راست در شکل ۱۴ را مثبت می‌گیریم. P_i ، برابر با قبل از اینکه گلوله شلیک شود، تکانه اولیه سیستم یعنی P_i ، صفر است. پس از شلیک، گلوله دارای سرعت افقی v نسبت به توب پس رونده است. v سرعت دهانه‌ای گلوله است. ولی، در چارچوب مرجع زمین، سرعت افقی گلوله برابر $V + v$ است. به این ترتیب تکانه خطی سیستم پس از شلیک برابر است با

$$P_f = MV + m(v + V)$$

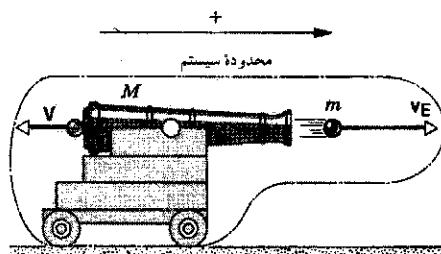
جمله اول سمت راست عبارت است از تکانه توب پس رونده و جمله دوم تکانه گلوله در حال پرواز است.

پایستگی تکانه خطی در راستای افقی ایجاب می‌کند که $P_i = P_f$ باشد، یعنی

$$\circ = MV + m(v + V)$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود

$$V = -\frac{mv}{M+m} = -\frac{(72\text{ kg})(55\text{ m/s})}{130\text{ kg}+72\text{ kg}} = -2.9\text{ m/s}$$



شکل ۱۴. مثال ۷. توبی به جرم M گلوله‌ای به جرم m شلیک می‌کند. سرعتهای گلوله و توب پس رونده در چارچوب مرجع ساکن نسبت به زمین شده‌اند. سرعتهای به سمت راست مثبت گرفته شده‌اند.

چون هیچ نیروی خارجی (افقی) اثر نمی‌کند، می‌توانیم قانون پایستگی تکانه (معادله ۲۸) را بدل کار بگیریم. تکانه اولیه (افقی)، مربوط به وقتی که هنوز گلوله‌ها در پروازند و چوب ساکن است، برابر است با

$$\overset{\wedge}{P_i} = \hat{N}(mv)$$

که mv تکانه هر کدام از گلوله‌های منفرد و \hat{N} است. تکانه نهایی وقتی اندازه‌گیری می‌شود که همه گلوله‌ها در چوب جاگرفته‌اند و چوب با سرعت V روی سطح میز می‌لغزد. این تکانه برابر است با

$$\overset{\wedge}{P_f} = (\hat{M} + \overset{\wedge}{Nm})V$$

پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$P_i = P_f$$

یا

$$N(mv) = (M + Nm)V$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} V &= \frac{Nm}{M + Nm}v \\ &= \frac{(\lambda)(3.8 \times 10^{-3}\text{ kg})}{12\text{ kg} + (\lambda)(3.8 \times 10^{-3}\text{ kg})} \times (110\text{ m/s}) \\ &= 2.8\text{ m/s} \end{aligned}$$

به دلیل نوع انتخاب سیستم، مجبور نبودیم که نیروهای اعمال شده در هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب را در نظر بگیریم. همه آنها نیروهای داخلی بودند.

در راستای قائم، نیروهای خارجی عبارت اند از وزن گلوله‌ها، وزن قطعه چوب، و نیروی عمود بر سطح که به قطعه چوب وارد می‌شود. گلوله‌ها در طی پرواز تحت تأثیر نیروی گرانی، تکانه کوچکی در راستای قائم به دست می‌آورند. وقتی گلوله‌ها به چوب برخورد می‌کنند، چوب باید به هر گلوله نیرویی وارد کنند. این نیرو هم مؤلفه افقی و هم مؤلفه قائم دارد. همراه با نیروی قائم وارد بر گلوله که برای صفر کردن مؤلفه قائم تکانه آن لازم است باید (بنابر قانون سوم نیوتون) نیروی عمودی وارد بر چوب از طرف سطح هم افزایش پیدا کند. این افزایش نه فقط به خاطر وزن گلوله فرورفته در چوب نیست، بلکه آنگ تغییر مؤلفه قائم تکانه گلوله هم در آن سهیم است. وقتی همه گلوله‌ها در داخل قطعه چوب متوقف شدند، نیروی عمودی برابر با مجموع وزن چوب و گلوله‌های جاگرفته در آن خواهد شد. به منظور ساده کردن حل این مسئله فرض کردیم که گلوله‌ها چنان سریع شلیک شوند که هر گلوله قبل از اینکه گلوله اول به چوب برخورد کند در پرواز باشند. آیا می‌توانید این مسئله را بدون این فرض حل کنید؟ فرض کنید مرز سیستم را چنان وسیع بگیریم که شامل تنگ هم بشود. تنگ به زمین محکم شده است. آیا تکانه \hat{N} می‌تواند برابر باشد $Ramamad@yahoo.com$ ؟

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_1}{m_2} \quad (29)$$

علامت منفی حاکی از آن است که سرعتها همواره در جهت‌های مخالف‌اند. رابطه بالا مربوط به سرعتهای خاصی نیست و در هر لحظه پس از رها کردن قالبها صادق است.

انرژی جنبشی قالبها عبارت‌اند از $K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ و $K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$. کسر مورد نظر ما برای قالب m_1 برابر است با

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}$$

با جانشانی $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ در رابطه بالا و با کمی عملیات جبری نتیجه می‌شود

$$f_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

به طریق مشابه، برای قالب m_2 خواهیم داشت

$$f_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

به این ترتیب، اگرچه انرژی جنبشی سیستم نوسان‌کننده با زمان تغیر می‌کند، اما سهم هریک از دو قالب از این انرژی، کسری ثابت و مستقل از زمان است. قالبی که جرمش کمتر است سهم بیشتری از انرژی جنبشی قابل حصول را دریافت می‌کند. مثلاً اگر $m_1 = 10m_2$ باشد، خواهیم داشت

$$f_1 = \frac{1}{m_1 + 10m_2} = \frac{1}{11m_1} = 0.091 \quad f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_2} = \frac{10m_1}{11m_1} = 0.909$$

در این مورد، قالب سبکتر (m_2) حامل ۹۱٪ انرژی جنبشی سیستم و قالب سنگین‌تر (m_1) حامل ۹٪ باقی مانده است. در حد $m_2 \gg m_1$ قالب سبکتر اساساً تمام انرژی جنبشی را می‌گیرد.

ubarتهای مربوط به f_1 و f_2 به همین صورت در مورد سنگی که در میدان گرانشی زمین سقوط می‌کند صادق است. فرض کنید که m_2 جرم زمین باشد و m_1 جرم سنگ. در چارچوب مرجع مرکز جرم آنها، سنگ تقریباً همه انرژی جنبشی را به خود اختصاص می‌دهد ($f_1 \approx 1$) و زمین سهم بسیار کوچکی دارد ($f_2 \approx 0$). مقادیر تکانه‌های خطی زمین و سنگ با هم برابرند، ولی سرعت بسیار کم زمین با جرم بسیار بزرگ آن جبران می‌شود. با همین استدلال بود که (در فصل ۸) وقتی پایستگی انرژی را در مورد اجسام سقوط‌کننده در میدان گرانش زمین به کار می‌بردیم، انرژی جنبشی زمین را به حساب نمی‌آوردیم.

مثال کاربردی دیگری از این اثر در شکافت هسته‌ای رخ می‌دهد، در نظر گرفته‌ایم.

علامت منفی حاکی از آن است که، همان‌طور که انتظار می‌رود، توب شکل ۱۴ به سمت چپ پس می‌زند.

(ب) سرعت گلوله نسبت به توب (پس‌روند) همان سرعت دهانه‌ای است. سرعت گلوله، نسبت به زمین برابر است با

$$v_E = v + V$$

$$= 55\text{m/s} + (-29\text{m/s}) = 26\text{m/s}$$

به علت پس‌زدن توب، سرعت گلوله نسبت به زمین کمی کمتر از سرعت دهانه‌ای است. در این مسئله، توجه کنید که انتخاب معقول سیستم (توب + گلوله) اهمیت دارد و چارچوب مرجعی (زمین یا توب پس‌روند) که اندازه‌گیری نسبت به آن انجام می‌شود باید کاملاً مشخص باشد.

مثال ۸. شکل ۱۵ دو قالب را که توسط فنری به هم متصل شده‌اند، نشان می‌دهد. این دو قالب می‌توانند آزادانه روی سطح افقی بدون اصطکاکی بلغزند. قالبها را که جرم آنها برابر m_1 و m_2 است از هم‌دیگر دور می‌کشیم و سپس از حال سکون رها می‌کنیم. در زمانهای بعدی هر کدام از دو قالب حامل چه کسری از انرژی جنبشی کل سیستم خواهد بود؟

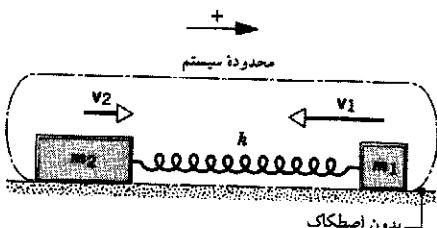
حل: دو قالب و فنر را (که بدون جرم فرض شده است) به عنوان سیستم می‌گیریم و سطح افقی ای را که این دو قالب روی آن می‌لغزند به عنوان چارچوب مرجع انتخاب می‌کنیم. جهت مثبت سرعتها را در شکل ۱۵، به طرف راست اختیار می‌کنیم.

تکانه اولیه سیستم، P_i ، در لحظه رها شدن قالبها، صفر است. تکانه نهایی سیستم در هر زمان بعدی، برابر است با

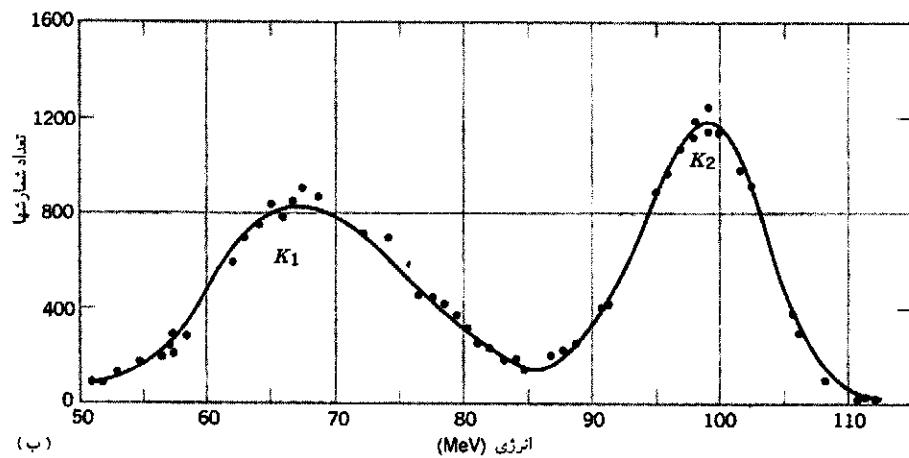
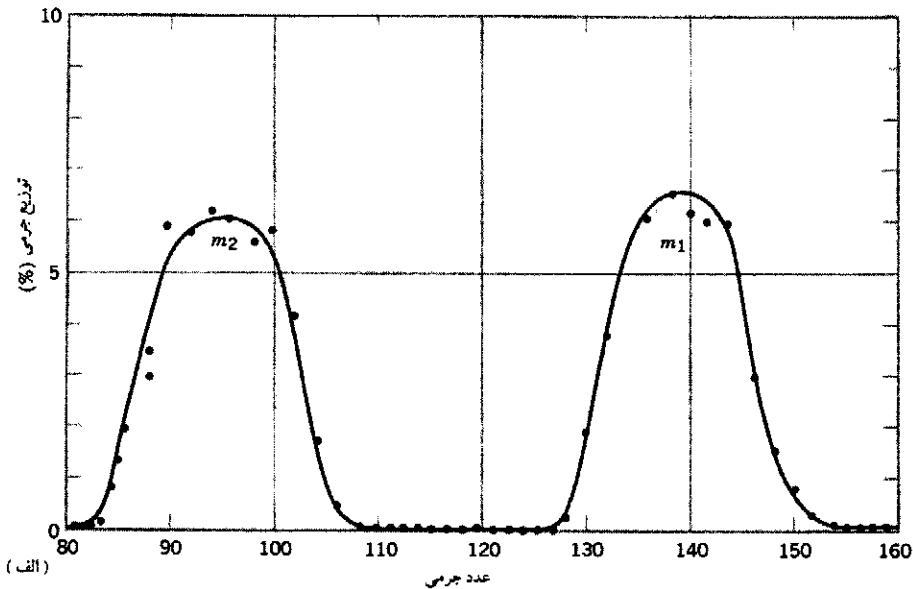
$$P_f = m_1v_1 + m_2v_2$$

که v_1 و v_2 سرعتهای دو قالب‌اند. پایستگی تکانه ایجاد می‌کند که $P_i = P_f$ باشد، یا

$$= m_1v_1 + m_2v_2$$



شکل ۱۵. مثال ۸. دو قالب را که روی سطح بدون اصطکاک توسط فنری به هم متصل‌اند از هم‌دیگر دور کرده و از حالت سکون رها کرده‌ایم. تکانه کل در حالت اول (در لحظه رها شدن سیستم) صفر است و بنابراین باید در همه زمانهای بعدی هم صفر باشد. سرعتهای به سمت راست را مشتبه در نظر گرفته‌ایم.

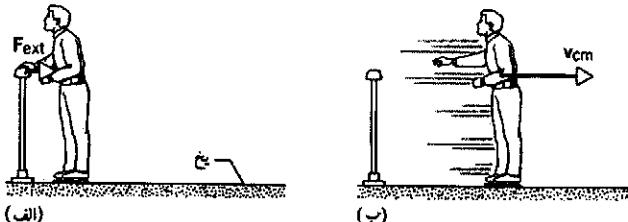


شکل ۱۶. (الف) توزیع جرمی پاره‌های گسیل شده در یک شکافت هسته‌ای. مقیاس قائم، آن کسری از شکافتها را نشان می‌دهد که به پاره‌ای با عدد جرمی نشان داده شده روی مقیاس افقی بینجامد. (ب) توزیع انرژی پاره‌های گسیل شده در شکافت.

می‌رود) برابر با همان نسبت جرمی نوعی است. پس سهم انرژی جنبشی هر یک از پاره‌های شکافت هم بنابر قید پایستگی تکانه تعیین می‌شود.

۷-۹ کار و انرژی در سیستمی از ذرات (اختیاری)

شکل ۱۷ اسکیت‌بازی را نشان می‌دهد که به نزده‌ای فشار می‌آورد و



شکل ۱۷. (الف) اسکیت‌بازی نزده‌ای را هل می‌دهد. نزده نیروی F_{ext} بر اسکیت‌باز اعمال می‌کند. (ب) اسکیت‌باز پس از آنکه به عقب رانده شد با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند.

باره‌ها که در اثر رانش الکتریکی از هم‌دیگر دور می‌شوند، در ابتدا خیلی به هم نزدیک و تقریباً ساکن‌اند. از معادله ۲۹ انتظار داریم که نسبت انرژیهای جنبشی پاره‌ها پس از شکافت به صورت زیر باشد

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}$$

بعنی، پاره سنگین‌تر انرژی جنبشی کمتری کسب می‌کند. شکافت یک فرایند آماری است، یعنی برای پاره‌های شکافت یک توزیع جرم و متناظر با آن یک توزیع انرژی جنبشی داریم. در شکل ۱۶ الف توزیع جرم و در شکل ۱۶ ب توزیع انرژی جنبشی نشان داده شده است. توجه داشته باشید که شکافت به پاره‌هایی با جرم‌های مساوی پدیده‌ای بسیار نادر است. معمولاً عدد جرم یکی از پاره‌ها در حدود ۱۳۸ و عدد جرم دیگری در حدود ۹۴ است. به این ترتیب، نسبت جرمی نوعی m_2/m_1 حدوداً برابر است با $94/138 = 0.68$ ، و نسبت انرژی جنبشی نوعی K_1/K_2 حدوداً $0.67/0.68 = 0.97$ یعنی (همان‌طور که انتظار

در این فرایند انرژی جنبشی کسب می‌کند. اگر از اسکیت باز پرسیم که این انرژی جنبشی از کجا می‌آید، او با توجه به فعالیت عضلانی اش، احتمالاً پاسخ خواهد داد که انرژی مود نیاز باید از ذخیره انرژی داخلی خودش آمده باشد. می‌خواهیم صحبت ادعای اسکیت باز را با بهکار بردن پایستگی انرژی در مورد سیستمی که فقط شامل اسکیت باز است، تحقیق کنیم.

از معادله ۲۸ فصل ۸ داریم

$$F_{\text{ext}} = Ma_{\text{cm}} \quad (۳۳)$$

برای تکذیب دریافتیم که قضیه کار انرژی ($W = \Delta K$) نتیجه مفیدی است. روش است که نمی‌توانیم این قضیه را در مورد اسکیت باز بهکار ببریم، زیرا اسکیت باز مانند تکذیب حرکت نمی‌کند. چنانکه قبل از توجه گرفته‌ایم $W = 0$ است ولی $\Delta K \neq 0$ است. بنابراین، صورت تکذیبی قضیه کار انرژی درین مورد معتبر نیست. حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ای به دست بیاوریم که برای سیستمی از ذرات قابل استفاده باشد.

فرض کنید نیروی خارجی خالص F_{ext} بر سیستمی از ذرات وارد شود. در حالت کلی، در چارچوب مرجع لخت انتخابی ما، ممکن است نقطه اثر نیرو حرکت بکند یا (مانند مورد اسکیت باز شکل ۱۷) حرکت نکند. فرض می‌کنیم که همه نیروها و حرکتها در جهت x باشند. از آنجا که با سیستمی از ذرات سروکار داریم، به حرکت نقطه اثر نیروی خارجی توجه نمی‌کنیم بلکه حرکت مرکز جرم سیستم را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید مرکز جرم سیستم به اندازه dx_{cm} در امتداد محور x حرکت کند. اگر طرفین معادله ۳۳ را در dx_{cm} ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = Ma_{\text{cm}} dx_{\text{cm}} = M \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} v_{\text{cm}} dt$$

که در آن dv_{cm}/dt را به جای a_{cm} و $v_{\text{cm}} dt$ را به جای dx_{cm} گذاشته‌ایم. معادله ۳۳ را می‌توانیم به این صورت هم بنویسیم

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}} \quad (۳۴)$$

فرض کنید در حینی که این نیرو اثر می‌کند مرکز جرم از x_i تا x_f حرکت می‌کند. از معادله ۳۴، بین این حدود، انتگرال می‌گیریم

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} + dx_{\text{cm}} = \int_{v_{\text{cm},i}}^{v_{\text{cm},f}} M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}} \\ = \frac{1}{2} M v_{\text{cm},f}^2 - \frac{1}{2} M v_{\text{cm},i}^2 \quad (۳۵)$$

طرف راست معادله ۳۵ را با استفاده از معادله ۳۱ می‌شود به صورت ذره‌ای به جرم M را، در اثر تغییر سرعت آن از $v_{\text{cm},i}$ به $v_{\text{cm},f}$ نشان می‌دهد.

Ramin.samad@yahoo.com

$$\Delta U + \Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W \quad (۳۰)$$

در استنتاج معادله ۳۳ فصل ۸، انرژی جنبشی سیستم را به دو بخش تقسیم کردیم؛ ΔK_{int} ، که نماینده حرکتهای داخلی ذرات در سیستم است و ΔK ، که نماینده حرکت "کلی" سیستم است. در اینجا به صراحت می‌گوییم که این حرکت "کلی" در واقع همان حرکت مرکز جرم است، و انرژی جنبشی متناظر با آن عبارت است از

$$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \quad (۳۱)$$

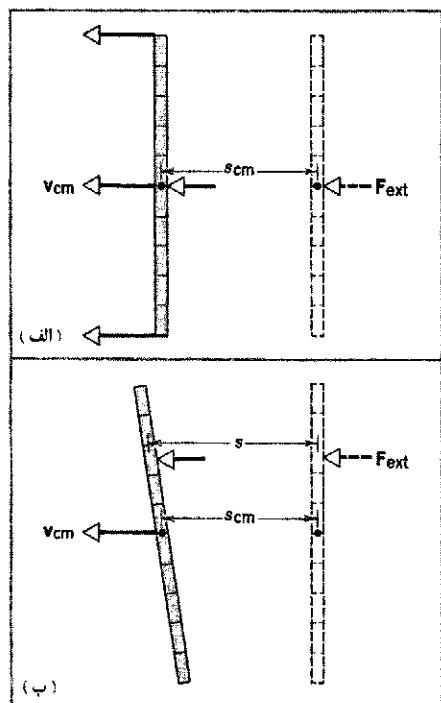
این انرژی سیستمی است به جرم کل M . اگر به صورت ذره‌ای با سرعت v_{cm} حرکت کند، انرژی جنبشی داخلی در معادله ۳۰ به صورت بخشی از ΔE_{int} منظور شده است. (مسئله ۴۹ به استخراج این قسمت از انرژی جنبشی مربوط است).

چون سطح پیش افqui است تعییری در انرژی پتانسیل اسکیت به وجود نمی‌آید، بنابراین $W = \Delta U$ است. به علاوه، چون نقطه اعمال نیرو حرکت نمی‌کند نزدیک کاری روی اسکیت باز انجام نمی‌دهد. در بحث مربوط به شکل ۱۳ در فصل ۸ گفتیم که هرگاه کار خارجی روی سیستمی انجام شود، انرژی از طریق مزهای سیستم به آن منتقل می‌شود. هیچ انرژی‌ای از طریق نزدیک به اسکیت باز منتقل نشده است، بنابراین نزدیک هیچ کار خارجی‌ای روی اسکیت باز انجام نداده است. به این ترتیب $W = 0$ است و معادله ۳۰ به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta K_{\text{cm}} = -\Delta E_{\text{int}} \quad (۳۲)$$

از آنجا که ΔK_{cm} کمیتی مثبت است (اسکیت باز در اثر هل دادن نزدیکی جنبشی کسب می‌کند)، ΔE_{int} باید کمیتی منفی باشد. این مطلب ادعای اسکیت باز را تأیید می‌کند که: انرژی جنبشی کسب شده بر اثر هل دادن نزدیک ذخیره انرژی داخلی خود او حاصل می‌شود، به از منع خارجی.

تحلیل مبتنی بر انرژی مفید است، ولی گاهی ممکن است مایل باشیم سیستم را بر حسب نیروها و شتابها هم تحلیل کنیم. می‌خواهیم ببینیم که از کاربرد قانون دوم نیوتون در مورد اسکیت باز چه چیزی عاید مان می‌شود. نزدیک نیروی F_{ext} را به اسکیت باز (که همچنان آن را سیستم در نظر می‌گیریم) اعمال می‌کند. برای اینکه اسکیت باز از نزدیک رانده شود باید بازوهای خود را به صورت کشیده



شکل ۱۸. (الف) چوب متری را نیروی F_{ext} روی سطح افقی بدون اصطکاکی هل می دهیم. نیرو در نقطه نشانه 50 cm وارد می شود. (ب) نیرو در نقطه نشانه 25 cm وارد می شود. در این حالت، چوب متر علاوه بر حرکت انتقالی به چرخش هم در می آید و دیگر مانند ذره عمل نمی کند. در این مورد نیرو در فاصله s که بزرگتر از جایه جایی مرکز جرم (s_{cm}) است اثر می کند.

چرخش آن حول مرکز جرم، نقطه ای که به آن نیرو وارد می شود مسافتی بیشتر از s_{cm} می بیماید (شکل ۱۸ ب). بنابراین کاری که روی چوب متر انجام می دهیم بیشتر از $F_{ext}s_{cm}$ است. برای تحلیل این حرکت باید از هر دو معادله ۳۰ و ۳۶ استفاده کنیم. حاصل ضرب $F_{ext}s_{cm}$ بناه معادله ۳۶، تغییر در انرژی جنبشی انتقالی چوب متر را به دست می دهد. حاصل ضرب $F_{ext}s$ ، که در آن s مسافتی است که نقطه اثر نیرو (نشانه 25 cm طی می کند، کار W را به دست می دهد که در معادله ۳۰ آمده است، و معادله ۳۰ بیانی است از پایستگی انرژی. در فصل ۱۲ خواهیم دید که می توانیم بخشی از انرژی جنبشی کل را به حرکت انتقالی و بخشی را به حرکت چرخشی نسبت بدهیم.^۱

مثال ۹. یک اسکیت باز ۷۲ کیلوگرمی نیروی ثابت $F = 55\text{ N}$ را به زردهای وارد می کند (شکل ۱۷). مرکز جرم او تا زمانی که تماسش با زرده

۱. بعضی مؤلفان برای توصیف طرف چوب معادله ۳۵ از اصطلاح شبکار، یا کار مرکز جرم استفاده می کنند. این معادله گاهی معادله مرکز جرم نامیده می شود. ما ترجیح می دهیم برای توصیف کمیتی که ارتباطی با کار در مفهوم پذیرفته شده آن ندارد، از هیچ اصطلاحی که شامل واژه کار باشد استفاده نکنیم. مرور جامعی بر مفاهیم کار و انرژی در مورد سیستمهای ذرات در مرجع زیر یافته می شود:

"Developing the Energy Concepts in Introductory Physics,"
A. B. Arons, *The Physics Teacher*, October 1989, p. 506.

طرف چوب معادله ۳۵ قدری شبیه به تعریف کار است، و در واقع این انتگرال دارای بعد کار هم هست. ولی این عبارت، به آن مفهومی که قبل اکار را تعریف کرده ایم، کار نیست زیرا dx_{cm} جایه جایی نقطه اثر نیروی خارجی نیست. (در تعریف کار به صورت $W = \int F dx$ که در فصل ۷ داشتم، عبارت بود از جایه جایی نقطه اثر نیروی F). توجه داشته باشید که جایه جایی نقطه اثر نیروی خارجی در شکل ۱۷ صفر است! پس در این مورد $W = ۰$ است ولی طرف چوب معادله ۳۵ صفر نیست.^۱

در بسیاری از مواردی که با آنها سروکار داریم، نیروی خارجی ثابت است و در معادله ۳۵ می شود آنرا از زیر علامت انتگرال بیرون آورد. انتگرال به جا مانده جایه جایی خالص s_{cm} مرکز جرم سیستم را به دست می دهد. در این گونه موارد، معادله ۳۵ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm} \quad (36)$$

معادله ۳۵ شبیه قضیه کار انرژی برای تک ذره است، و اگر سیستم ما فقط شامل یک ذره باشد (یا از جسمی تشکیل شده باشد که بتوان آن را مثل ذره در نظر گرفت)، در واقع به همان نتیجه هم می رسد. با این همه، بین معادله ۳۵ و قضیه کار انرژی برای تک ذره، اختلاف مهمی وجود دارد. قضیه کار انرژی برای تک ذره، بیانی درباره پایستگی انرژی در حرکت یک ذره هم هست، زیرا انرژی انتقالی تنها نوع انرژی ای است که یک ذره می تواند داشته باشد. اما معادله ۳۵ به هیچ وجه بیان مناسبی برای پایستگی انرژی نیست، زیرا یک سیستم مشکل از ذرات می تواند شامل شکلهای دیگری از انرژی — از جمله انرژیهای داخلی، پتانسیل، و چرخشی — هم باشد. در مورد یک سیستم مشکل از ذرات، معادله ۳۵ و پایستگی انرژی (معادله ۳۰) را می شود به عنوان دو رابطه جدا و مستقل از هم به کار برد.

به عنوان مثالی از کاربرد این اصول، می خواهیم حاصل اعمال نیرو به یک چوب متر را که در ابتدا ساکن است و می تواند آزادانه روی یک سطح افقی بدون اصطکاک بلغزد، بررسی کنیم. نیروی ثابتی به مقدار F_{ext} به این جسم اعمال می کنیم. اگر این نیرو را در محل علامت 50 cm وارد کنیم (شکل ۱۸ الف)، چوب متر مانند یک ذره با شتاب $a_{cm} = F_{ext}/m$ به حرکت در می آید، و تمام نقاط آن با همین شتاب حرکت می کنند. جایه جایی s نقطه ای که نیرو به آن وارد می شود برابر است با جایه جایی s_{cm} مرکز جرم. در این حالت، وقتی همه چوب متر (که به صورت یک ذره حرکت می کند) به اندازه s_{cm} جایه جایا شد، کاری به اندازه s انجام داده ایم. می توانیم صورت ذره ای قضیه کار انرژی را به کار ببریم و سرعت v همه نقاط چوب متر را به دست بیاوریم. اکنون حالتی را در نظر می گیریم که نیرو در محل علامت 25 cm اثر می کند (شکل ۱۸ ب). اگر خودتان این آزمایش را انجام بدید می بینید که چوب متر دیگر مانند یک ذره حرکت نمی کند. همان طور که در فصل ۱۲ خواهیم دید، این حرکت پیچیده را می توانیم به دو بخش تقسیم کنیم — یکی انتقال جسم به عنوان ذره و دیگری

ر، که در واقع مقدار کشیده شدگی دستان دو نفر است، طی کرده است.
 (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت باز پس از قطع تنسی چقدر است؟
 (ب) تغییر انرژی داخلی اسکیت باز در طی این فرایند چقدر است؟

حل: (الف) اسکیت باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در این مورد کار خارجی روی سیستم انجام شده است، بنابراین از طریق مرز سیستم باید انتقال انرژی صورت گرفته باشد. از معادله ۳۶ داریم

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 - 0$$

یا

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2 F_{\text{ext}} s_{\text{cm}}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{N})(0.58\text{m})}{72\text{kg}}} = 0.94\text{m/s}$$

(ب) از معادله پایستگی انرژی داریم

$$\Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W$$

که در آن W (عنی $F_{\text{ext}} s$) کار خارجی انجام شده روی اسکیت باز توسط همباری اش است. این معادله را برای تغییر انرژی داخلی حل می‌کنیم و با استفاده از قسمت الف، به جای ΔK_{cm} مقدار معادلش را فراهم می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= W - \Delta K_{\text{cm}} = F_{\text{ext}} s - F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} \\ &= (55\text{N})(0.32\text{m}) - (55\text{N})(0.58\text{m}) \\ &= +17.6\text{J} - 31.9\text{J} = -14.3\text{J} \end{aligned}$$

به این ترتیب اسکیت باز برای کسب انرژی جنبشی نهایی اش باید 14.3J از انرژی داخلی اش را مصرف کند. همباری با انجام کار روی اسکیت باز 17.6J انرژی به او می‌دهد، که البته این انرژی از ذخیره انرژی داخلی همباری تأمین می‌شود. اگر همباری حضور نداشت و اسکیت باز می‌خواست همین انرژی جنبشی را با هل دادن دیوار کسب کند می‌بایست تمام 31.9J انرژی جنبشی را از انرژی داخلی خودش فراهم می‌کرد.

مثال ۱۱. قطعه‌ای به جرم $2\text{ ر}5\text{ کیلوگرم}$ با سرعت اولیه $۵\text{ ع}ر۰\text{ متر بر ثانیه}$ روی سطح افقی پرتاب می‌شود. ضربی اصطکاک جنبشی میان سطح و قطعه $۱۲\text{ ر}۰\text{ است}$. (الف) چه بر سر انرژی جنبشی اولیه قطعه می‌آید؟ (ب) قطعه قبل از اینکه متوقف شود چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) برای حل این مسئله با پایستگی انرژی، مناسب‌ترین سیستمی که می‌توانیم در نظر بگیریم عبارت است از قطعه به اضافه آن قسمتی از سطح افقی که قطعه روی آن می‌لغزد. چون در سطح آن قسمتی از سطح افقی در انرژی پتانسیل حاصل نمی‌شود، در معادله

قطع می‌شود به اندازه $s_{\text{cm}} = ۳۲\text{cm}$ 8 جابه‌جا می‌شود . (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت باز در هنگام جدا شدن او از نزد چقدر است؟ (ب) در این فرایند انرژی داخلی اسکیت باز چقدر تغییر می‌کند؟
 حل: (الف) این بار هم اسکیت باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. بنابر قانون سوم نیوتون، نزد هم نیروی 55N به سمت راست (در شکل ۱۷) به اسکیت باز وارد می‌کند. این نیرو تنها نیروی خارجی است که باید آن را در نظر بگیریم. از معادله ۳۶ داریم

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 - 0$$

یا

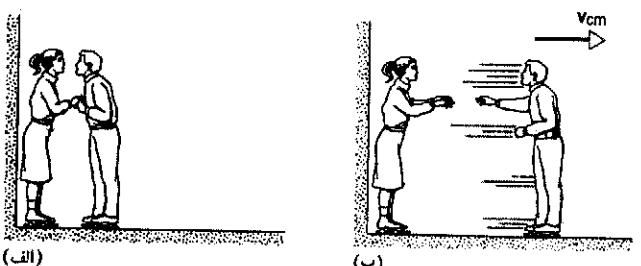
$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2 F_{\text{ext}} s_{\text{cm}}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{N})(0.32\text{m})}{72\text{kg}}} = 0.70\text{m/s}$$

(ب) حالا قانون پایستگی انرژی را، که در شرایط این مسئله به صورت معادله ۳۲ در می‌آید، به کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= -\Delta K_{\text{cm}} = -\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \\ &= -\frac{1}{2}(72\text{kg})(0.70\text{m/s})^2 = -17.6\text{J} \end{aligned}$$

این مقدار انرژی داخلی را می‌شود با خوردن تقریباً یک چهارم فاصله چایخوری سودای رژیمی جبران کرد.

مثال ۱۰. در این مورد، اسکیت باز با هل دادن همباریش که پشت به دیوار ایستاده است به حرکت در می‌آید (شکل ۱۹ الف). در آغاز دستهای هر تماس شان با هم قطع شود یکدیگر را هل می‌دهند (شکل ۱۹ ب). همباری اسکیت باز نیروی ثابت $F_{\text{ext}} = 55\text{N}$ را در طی مسافت $s = ۳۲\text{cm}$ بر او وارد می‌کند؛ این همان مسافتی است که دستهای همباری تا زمانی که به حالت کامل کشیده در می‌آید طی می‌کند. تا زمانی که تماس قطع می‌شود، مرکز جرم اسکیت باز مسافت کل $s_{\text{cm}} = ۵8\text{cm}$ را می‌کشد.



شکل ۱۹. مثال ۱۰. (الف) اسکیت باز و همباریش، تا کشیده شدن کامل دستهایشان، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. همباری پشت به دیوار ایستاده است و در نتیجه حرکت نمی‌کند. (ب) پس از آنکه دستهای به حالت کشیده در آمدند، اسکیت باز با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند.

استفاده از زبان آشنای فیزیک نیوتونی، این تغییر تکانه را به نیروی مناسبی نسبت بدهیم. در این مورد، نیرویی که توب را شتاب می‌دهد یک نیروی واکنشی است: توب توسط خروج افخارش به گلوله‌ها نیرو وارد می‌کند و آنها را از دهانه لوله به بیرون پرتاب می‌کند و نیروی واکنش (گلوله‌ها هم به توب نیرو وارد می‌کنند) توب را به سمت چپ می‌راند.

با شلیک پیاپی توب، جرم کل اربابه به اندازه مجموع جرم گلوله‌هایی که پرتاب شده‌اند کاهش می‌یابد. روش ارائه شده در مثال ۷ را نمی‌توان به همین سادگی‌ها برای حل این مسئله هم به کاربرد، زیرا جرم جسم پس‌روند، با شلیک هر گلوله، تغییر می‌کند.

در اینجا سیستم S را که شامل توب به‌اضافه اربابه است، به عنوان سیستمی "با جرم متغیر" در نظر می‌گیریم. البته سیستم بزرگتر S' مشتمل بر اربابه، توب، و گلوله‌های شلیک شده، سیستمی است با جرم ثابت، که (در نبود نیروی خارجی) تکانه آن هم ثابت است. ولی سیستم کوچکتر S جرم ثابتی ندارد. به علاوه، گلوله‌های شلیک شده حامل تکانه‌اند، و تکانه خالصی که از S بیرون می‌رود موجب می‌شود که این سیستم شتاب بگیرد.

مثال بالا تصویر نسبتاً روشنی از چگونگی عملکرد موشک به‌دست می‌دهد. سوخت می‌سوزد و با سرعت خیلی زیادی به بیرون رانده می‌شود؛ محصولات سوخت نقش گلوله‌های توب را دارند. شتاب موشک (منهای سوخت مصرف شده) به آهنگ مصرف سوخت و به سرعت خروج محصولات سوخت وابسته است.

هدف از تحلیل سیستمهای نظری موشک این نیست که سینماتیک کل سیستم S' را مطالعه کنیم، بلکه می‌خواهیم توجه‌مان را به سیستم مشخص S معطوف کنیم و بینیم که وقتی توزیع جرم در داخل سیستم کلی S' ، و در نتیجه جرم زیر سیستم S تغییر می‌کند، حرکت S چگونه است. جرم کل در داخل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S که مورد نظر ماست ممکن است با افزایش یا کاهش جرم (و تکانه) وضعیت حرکتی‌اش را تغییر بدهد.

شکل ۲۰ طرحی از یک سیستم تعیین‌یافته را نشان می‌دهد. در زمان t ، از چارچوب مرجع خاصی که در آن قرار داریم، مشاهده می‌کنیم که زیرسیستم S دارای جرم M است و با سرعت v حرکت می‌کند. در زمان $t + \Delta t$ ، جرم S به‌اندازه ΔM (که در صورت بیرون رفتن جرم، مقداری منفی است) تغییر کرده و به $M + \Delta M$ رسیده است، در حالی که جرم باقی‌مانده سیستم S' به‌اندازه ΔM – تغییر کرده است. اکنون سیستم S با سرعت $v + \Delta v$ و ماده بیرون رانده شده با سرعت u حرکت می‌کند. این اندازه‌گیریها در چارچوب مرجع خودمان انجام می‌شود.

برای اینکه مسئله حتی‌امکان کلی‌تر باشد، فرض می‌کنیم که یک نیروی خارجی F_{ext} هم می‌تواند روی کل سیستم اثر کند. این نیرو نیرویی نیست که موشک را به پیش می‌راند (نیروی پیشان را برای S' یک نیروی داخلی است) بلکه نیروی ناشی از یک عامل

داریم $\Delta U = U - U_0$. به علاوه، چون هیچ نیروی خارجی به این سیستم اثر نمی‌کند، داریم $W = 0$. (سیستم را چنان تعریف کرده‌ایم که برای آن اصطکاک یک نیروی داخلی است). به این ترتیب معادله 30 به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm}$$

که خود ΔK_{cm} منفی است، چون ارزی جنبشی کم می‌شود. با جانشانی مقادیر معلوم داریم

$$\Delta E_{int} = -(0 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2) = +\frac{1}{2} (8.65 \text{ kg})(8.65 \text{ m/s})^2 = +11.1 \text{ J}$$

این افزایش انرژی داخلی سیستم به صورت افزایش کوچکی در دمای قطعه و سطح ظاهر می‌شود. محاسبه چگونگی تقسیم این انرژی بین قطعه و سطح دشوار است؛ و بیشتر به خاطر اجتناب از این دشواری بود که سیستم را، به جای قطعه‌تها، شامل قطعه و سطح در نظر گرفتیم. (ب) در این مورد قطعه‌تها را به عنوان سیستم انتخاب می‌کنیم. در اینجا نمی‌توانیم قطعه را مانند ذره در نظر بگیریم، زیرا شکلهای دیگر تبادل انرژی، غیر از انرژی جنبشی انتقالی (در این مورد انرژی داخلی) هم در کارند. با استفاده از معادله 36 داریم

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm}$$

در این مورد F_{ext} نیروی اصطکاکی است (برابر با μMg – اگر جهت حرکت قطعه را مشتبه بگیریم) که از خارج بر قطعه اثر می‌کند و s_{cm} جابه‌جایی مرکز جرم قطعه است. به این ترتیب داریم

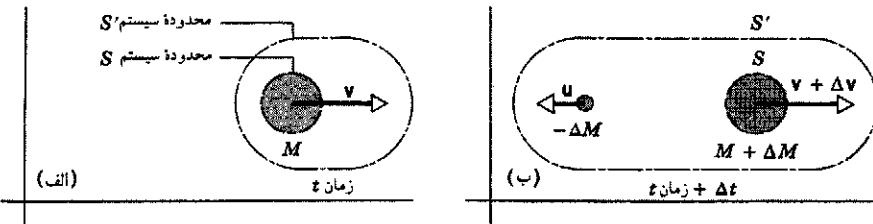
$$(-\mu Mg)(s_{cm}) = 0 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

یا

$$s_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(8.65 \text{ m/s})^2}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 1.8 \text{ m}$$

۸-۹ سیستمهای با جرم متغیر (اختیاری)

تصور کنید اربابه حامل توب شکل ۱۴، حامل تعداد زیادی گلوله توب هم باشد. وقتی که توب به طور پیاپی شلیک می‌کند، اربابه (که فرض می‌کنیم بدون اصطکاک حرکت می‌کند) به سمت چپ پس می‌زند و در هر پس زنی سرعتش زیادتر می‌شود. با مرز رسم شده در شکل ۱۴، می‌دانیم که تکانه افقی کل باید صفر باشد و می‌دانیم که هیچ نیروی خالص افقی بر سیستم اثر نمی‌کند. ولی اگر سیستم را چنان در نظر بگیریم که فقط شامل اربابه و توب باشد، گفته بالا دیگر درست نیست. هر بار که توب شلیک می‌کند تکانه‌اش افزایش می‌یابد، و بهتر است با



شکل ۲۰. (الف) سیستم S' در زمان t از جرم M تشکیل شده است که با سرعت v حرکت می‌کند. (ب) اندک زمانی بعد، جرمی به اندازه $-ΔM$ از سیستم بیرون رانده شده است. در این هنگام، جرم باقی‌مانده، $M + ΔM$ ، که ما آن را زیرسیستم S می‌نامیم، با سرعت $v + Δv$ حرکت می‌کند.

می‌کند. در معادله ۴۱، جرم زیرسیستم S در زمان t و dv/dt شتاب S در وقتی است که جرمی را با سرعت u (در چارچوب مرجع خودمان) و با آهنگ $|dM/dt|$ به بیرون می‌راند.

معادله ۴۱ را می‌توانیم به صورت کمی کلی‌تر هم بنویسیم

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) - \mathbf{u} \frac{dM}{dt} \quad (42)$$

معادله ۴۲ اصلًاً شباهتی به $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ یا $\mathbf{F}_{\text{ext}} = Ma$ یا $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ است که قبل‌ای بررسی حرکت ذرات یا سیستمهای با جرم ثابت به کار بردهیم، ندارد. این معادله را فقط در دو مورد خیلی خاص می‌توانیم به صورت $dM/dt = 0$ قانون دوم نیوتون برای ذره در بیاوریم: ۱. وقتی 0 ، یعنی M ثابت باشد، که در این صورت به همان مورد سیستمهای با جرم ثابت بازگشته‌ایم، یا ۲. وقتی $0 = u$ باشد، که در این صورت در واقع داریم سیستم با جرم متغیر را از چارچوب مرجع خیلی خاصی، که در آن جرم بیرون رانده شده ساکن است، مشاهده می‌کنیم.

به طور کلی، وقتی قانون $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ را در مورد سیستم مانند S که جرم آن افزایش یا کاهش می‌یابد به کار می‌بریم، باید تغییر در تکانه جرم افزوده یا کاسته شده را هم در نظر بگیریم.^۱ یعنی همان طور که در معادله ۴۲ و شکل ۲۰ می‌بینیم، باید سیستم بزرگتر S' را که شامل سیستم S و جرم اضافی است، بررسی کنیم. این رهیافت در مورد دینامیک سیستمهای با جرم متغیر، اهمیت قانون پایستگی انرژی را به خوبی نشان می‌دهد و دستورالعمل نسبتاً ساده‌ای برای بررسی سیستمهای پیچیده در اختیار ما می‌گذارد.

معادله ۴۱ را به صورت خاصی به دست آورده‌ایم که می‌توانیم از آن در بررسی حرکت موشک به راحتی استفاده کنیم. کمیت $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ برابر با \mathbf{v}_{rel} ، یعنی سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک است. وارد کردن این کمیت کار معقولی است زیرا سرعت گازهای خروجی یک مشخصه اساسی در طراحی موتور موشک است و نباید به صورتی

۱. یک مرجع عمومی خلی خوب درباره سیستمهای با جرم ثابت و سیستمهای با جرم متغیر عبارت است از

خارجی، مانند گرانش یا مقاومت جو است. تکانه کل مربوط به سیستم S' برابر است با \mathbf{P} ، و قانون دوم نیوتون را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (37)$$

در بازه زمانی Δt ، تغییر تکانه برابر است با

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \quad (38)$$

که در آن \mathbf{P}_f تکانه نهایی سیستم S' در لحظه $t + \Delta t$ و \mathbf{P}_i تکانه اولیه سیستم S' در لحظه t است. این تکانه‌ها از روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{v} \quad (39\text{الف})$$

$$\mathbf{P}_f = (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} \quad (39\text{ب})$$

پس تغییر تکانه سیستم S' برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{P} &= \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \\ &= (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v} \end{aligned} \quad (40)$$

در معادله ۳۷ مشتق را به صورت حد می‌نویسیم و $\Delta\mathbf{P}$ را از معادله بالا در آن قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[M \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta\mathbf{v} \frac{\Delta M}{\Delta t} \right] \\ &= M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dM}{dt} \end{aligned} \quad (41)$$

توجه داشته باشید که در انجام عمل حدگیری، آخرین جمله داخل کروشه صفر می‌شود، زیرا وقتی $0 \rightarrow \Delta t$ بود، $\Delta\mathbf{v} \rightarrow 0$. می‌بینیم

زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \int_{v_i}^{v_f} dv &= -v_{\text{rel}} \int_{M_0}^{M_0 - m_b} \frac{dM}{M} \\ v_f - v_i &= -v_{\text{rel}} \ln M \Big|_{M_0}^{M_0 - m_b} \\ &= -v_{\text{rel}} [\ln(M_0 - m_b) - \ln M_0] \\ &= -v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

معادله ۴۶ تغییر سرعت موشک را، پس از مصرف شدن مقدار m_b از سوخت، به دست می‌دهد.

فرض کنید موشک از حال سکون ($v_i = 0$) با جرم اولیه M_0 شروع به حرکت کند و پس از مصرف تمامی سوخت با جرمی که اکنون برابر با $M_f = M_0 - m_b$ است به سرعت پایانی v_f برسد. در این صورت معادله ۴۶ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f/v_{\text{rel}}} \quad (47)$$

تشابه میان موشک و توب پسروند از شکل ۲۱ آشکار است. در هر دو مورد تکانه کل سیستم، مشکل از جرم بیرون رانده شده (گولوه‌ها یا سوخت) به اضافه جسمی که جرم را به بیرون رانده است، پایسته می‌ماند. وقتی که توب یا موشک را در داخل سیستم بزرگتر بررسی می‌کنیم می‌بینیم که جرم آنها تغییر می‌کند و نیرویی بر آنها وارد می‌آید؛ نیروی "پس‌ران" در مورد توب و نیروی "پیشان" در مورد موشک. اگر سیستم را از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده کنیم، در آن صورت باگذشت زمان جرم بیشتری از آن به بیرون رانده شده و این جرم (در شکل ۲۱) بیشتر به سمت چپ حرکت کرده است؛ یعنی که جسم باید بیشتر به سمت راست حرکت کرده باشد تا مرکز جرم ثابت بماند.

مثال ۱۲. جرم موشکی، که به طور کامل سوختگیری شده، 13600 kg است. این موشک در امتداد قائم به سوی بالا پرتاب می‌شود و تا هنگام اتمام سوخت، مقدار 9100 kg محصولات سوخت را به خارج می‌ریزد. گازها با آهنگ 146 kg/s و با سرعت 1520 m/s نسبت به موشک، از آن خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم که این دو کمیت در طی عمل احتراق ثابت بمانند. (الف) نیروی پیشان چقدر است؟ (ب) اگر می‌شد از همه نیروهای خارجی منجمله گرانش و مقاومت هوا چشمپوشی کرد، سرعت موشک در هنگام اتمام سوخت چقدر می‌بود؟

حل: (الف) نیروی پیشان F برابر است با آخرین جمله معادله ۴۳،

یا بحسب v_{rel} ، معادله ۴۱ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$M \frac{dv}{dt} = F_{\text{ext}} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} \quad (43)$$

آخرین جمله معادله ۴۳ آهنگ انتقال تکانه به داخل (با خارج از زیرسیستم S را به دست می‌دهد. این جمله را می‌توان به عنوان نیروی اعمال شده بر S توسط جرمی که به آن وارد یا از آن خارج می‌شود تعبیر کرد. در مورد موشک، این نیرو را نیروی پیشان می‌نامیم؛ برای اینکه نیروی پیشان هر چه بیشتر باشد، طراحان موشک می‌کوشند که هم v_{rel} ، (سرعت خروج گاز) و هم $|dM/dt|$ (آهنگ بیرون راندن جرم) را حتی الامکان زیاد کنند.

معادله موشک مoshکی را در فاصله دوری در فضا، جایی که هیچ نیروی خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند، در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم حرکت به یک بعد محدود باشد، و فرض می‌کنیم dv/dt جهت مثبت v_{rel} ، که موشک در آن شتاب می‌گیرد، معین می‌کند و بنا بر این v_{rel} درجهت متفاوت است. معادله ۴۳ را در این مورد می‌شود به صورت زیر نوشت

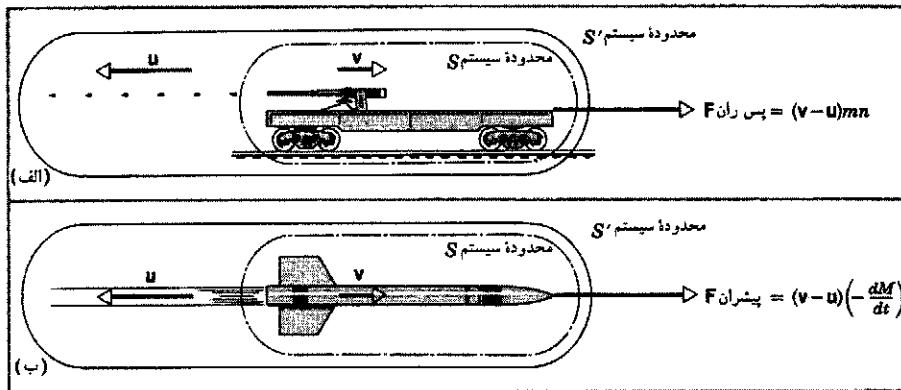
$$M \frac{dv}{dt} = -v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} \quad (44)$$

که در آن v_{rel} سرعت گازهای خروجی است، توجه کنید که dM/dt منفی است و در نتیجه، طرف راست معادله ۴۴ هم مانند طرف چپ آن مثبت است.

معادله ۴۴ معملاً اساسی حاکم بر رفتار موشک است. در حین عملکرد پیوسته موتور، نیروی پیشان (طرف راست معادله ۴۴) ثابت است (ولی شتاب حاصل برای موشک، dv/dt ، ثابت نیست چون جرم M با مصرف شدن سوخت تغییر می‌کند). می‌خواهیم تغییر در سرعت موشک را به ازای مصرف مقدار معینی از سوخت، m_b ، است بررسی کنیم. سرعت اولیه v_i و سرعت نهایی پس از مصرف سوخت v_f است. معادله ۴۴ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$dv = -v_{\text{rel}} \frac{dM}{M} \quad (45)$$

در معادله بالا M ، جرم کل موشک، متغیر است. اگر جرم اولیه موشک به اضافه سوخت در شروع حرکت برابر با M_0 باشد، در هر زمان دیگر مانند t ، باید جرم باقی‌مانده M به اضافه جرم سوخت مصرف شده تا آن زمان، m_b ، برابر با $M_0 - m_b$ باشد؛ پس $M = M_0 - m_b$ است. از معادله ۴۵ بین دو حد v_i و v_f وقتی جرم موشک برابر M_0 است، و v_f وقتی جرم کل برابر $M_0 - m_b$ است، انتگرال می‌گیریم و به ترتیب $Ramin.samad@yahoo.com$



شکل ۲.۲۱. (الف) مسلسلی رگباری از گولله با آهنگ n گولله در واحد زمان شلیک می‌کند. تکانه کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر نیروی پس زنی قرار می‌گیرد و تکانه اش تغییر می‌کند. تغییر تکانه S در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه‌ای که گولله‌ها (در خلاف جهت پس زنی) حمل می‌کنند، یعنی $mn \cdot u \cdot dt$. (ب) موشک جویانی از محصولات احتراق را به بیرون می‌راند. تکانه کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر یک نیروی پیشران است که تکانه اش را تغییر می‌دهد. تغییر تکانه موشک در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه dM در معادله $F = (v-u)dM/dt$.

است که روی تسمه ریخته می‌شود. سیستم S' شامل تسمه نقاله و همه مasse موجود در قیف در آغاز حرکت است. سیستم S (تسمه نقاله و مasse روی آن) با جرم متغیر M را به عنوان جسم در نظر می‌گیریم. در این مورد، در معادله $\frac{dM}{dt} = -u$ است، زیرا سرعت تسمه نقاله ثابت است، و $u = v$ است، زیرا مasse در چارچوب مرجع آزمایشگاه سرعت افقی ندارد. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = v \frac{dM}{dt}$$

در این مثال، dM/dt مثبت است چون جرم سیستم با گذشت زمان زیاد می‌شود. پس، همان طور که انتظار می‌رود، نیروی خارجی مورد نیاز هم باید در جهت حرکت تسمه باشد. توجه داشته باشید که جرم تسمه در مسئله دخالتی ندارد، چون فرض کردہ ایم که تسمه با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

توانی که نیروی خارجی تولید می‌کند عبارت است از

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} = v \left(v \frac{dM}{dt} \right) = v^2 \left(\frac{dM}{dt} \right)$$

و چون v ثابت است می‌توانیم رابطه بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$P_{\text{ext}} = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}$$

یعنی که توان خارجی مورد نیاز برای در حرکت نگه داشتن تسمه، دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی سیستم است؛ توجه داشته باشید که لازم نیست انرژی جنبشی خود تسمه نقاله را هم در نظر بگیریم زیرا سرعت آن ثابت است و در نتیجه انرژی جنبشی اش تغییر نمی‌کند.

Ramin.samad@yahoo.com

يعني

$$F = v_{\text{rel}} \left| \frac{dM}{dt} \right| = (1520 \text{ m/s})(146 \text{ kg/s}) = 222 \times 10^5 \text{ N}$$

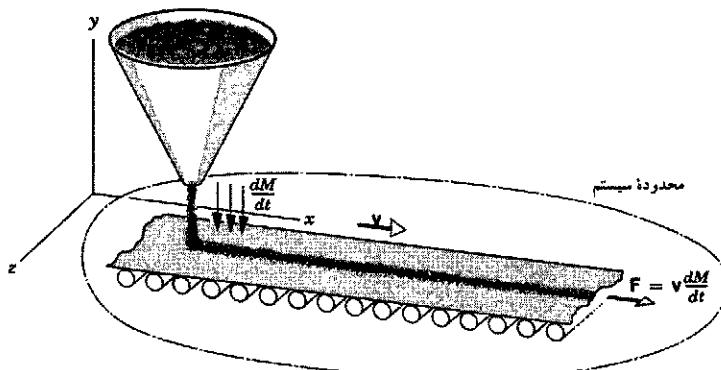
توجه داشته باشید که در ابتدا وقتی مخزن‌های سوخت پر هستند، نیروی خالص بالاسویی که به موشک وارد می‌شود (با جشمیوشی از مقاومت هوا) برابر است با نیروی پیشران منهای وزن اولیه Mg ، یعنی برابر است با $N = 88600$. در لحظه قبل از اتمام سوخت نیروی خالص بالاسو عبارت است از نیروی پیشران منهای وزن نهایی موشک، یعنی $N = 105 \times 10^5 = 107800$. (ب) از معادله ۴۶ می‌توانیم سرعت موشک در لحظه اتمام سوخت را محاسبه کنیم

$$v_f = -v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right) = -(1520 \text{ m/s}) \ln \left(\frac{13600 \text{ kg} - 9100 \text{ kg}}{13600 \text{ kg}} \right) = 1680 \text{ m/s}$$

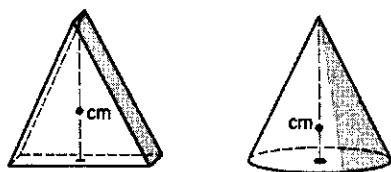
اگر نیروهای خارجی گرانش و مقاومت هوا را در نظر بگیریم، سرعت نهایی کمتر از این مقدار می‌شود.

مثال ۱۳. از قیف ساکنی مasse با آهنگ dM/dt روی تسمه نقاله‌ای که با سرعت v در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند، ریخته می‌شود (شکل ۲.۲۲). توان لازم برای اینکه تسمه با سرعت v به حرکتش ادامه بدهد چقدر است؟

حل: شکل ۲.۲۲ وضعیت را نشان می‌دهد. سیستم S شامل تسمه نقاله و مasse اینباشته شده است و ΔM نشانده‌نده مasse اضافی ای



می‌دهد. مرکز جرم مثلث در فاصله $1/3$ ارتفاع از قاعده قرار دارد در حالی که مرکز جرم مخروط در فاصله $1/4$ ارتفاع از قاعده واقع است. آیا می‌توانید علت این اختلاف را توضیح بدهید؟

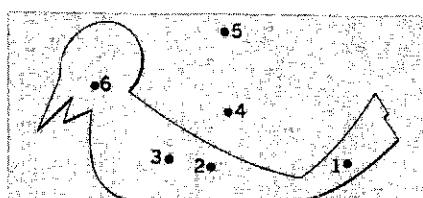


شکل ۲۳. پرسش ۲

۳. مفهوم مرکز جرم با مفهوم مرکز جغرافیایی کشور چه ارتباطی دارد؟ با مفهوم مرکز جمعیتی چطور؟ از اینکه مرکز جغرافیایی غیر از مرکز جمعیتی است چه نتیجه‌ای می‌شود گرفت؟

۴. مرکز جرم جو زمین کجاست؟

۵. مجسمه‌ساز آماتوری می‌خواهد ماکت پرنده‌ای را بسازد. خوبختانه، مدل نهایی او (شکل ۲۴) می‌تواند سرپا باشد. مدل با استفاده از یک ورق فلزی ضخیم با ضخامت یکنواخت ساخته شده است. کدام یک از نقطه‌های نشان داده شده روی شکل با احتمال بیشتری می‌تواند مرکز جرم باشد؟



شکل ۲۴. پرسش ۵

۱. یک مقاله مفید در این مورد عبارت است از
“The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton,”
K. S. Krane, *American Journal of Physics*, February 1981,
p. 113.

شکل ۲۲. ۱۳. از قیفی با آهنگ dM/dt مasse روی سمت نقاله‌ای که با سرعت ثابت v در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند می‌ریزد. نیروی لازم برای اینگه سمت نقاله با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه بدهد برابر است با $v \cdot dM/dt$. قیف در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است.

روشن است که در این مورد انرژی مکانیکی پایسته نیست. تنها نصف کار انجام شده توسط موتور محرك تسمه به صورت انرژی مکانیکی سیستم ظاهر می‌شود. چه بر سر نصف دیگر کار انجام شده آمده است؟ برای پاسخگویی به این پرسش، معادله پایستگی انرژی (معادله ۳۰) را در مورد یک عنصر جرم کوچک که روی سمت نقاله می‌افتد به کار میریم. فرض می‌کنیم این عنصر از ارتفاع خیلی کمی سقوط می‌کند و بنابراین می‌شود از تغییر انرژی پتانسیل آن چشمپوشی کرد. در بازه زمانی dt که طول می‌کشد تا dM با سرعت تسمه به حرکت در بیاید، کار انجام شده توسط منبع خارجی برابر است با $dW = P_{ext} dt = v^2 dM$. انرژی جنبشی این عنصر هم برابر با $+1/2(dM)v^2$ است. از معادله ۳۰ نتیجه می‌شود

$$\Delta E_{int} = v^2 dM - \frac{1}{2}(dM)v^2 = \frac{1}{2}(dM)v^2$$

يعني انرژي داخلی سیستم به اندازه انرژي جنبشی آن افزایش می‌یابد. به این ترتیب نصف توان داده شده به سیستم صرف انرژی جنبشی مasse متحرک می‌شود، در حالی که نصف دیگر آن به انرژی داخلی masse و سمته تبدیل می‌شود (که می‌تواند ناشی از اصطکاک میان masse و سمته، بعد از افتادن masse روی سمته ولی قبل از حرکت آن با سرعت سمته، باشد).

در این مثال جرم تغییر می‌کرد ولی سرعت ثابت بود. در مواردی ممکن است سرعت سیستمی با جرم متغیر، در نتیجه افزودن جرم به سیستم کاهش یابد. چنین چیزی در واقع معکوس عمل موشک است.^۱

پرسشها

۱. آیا مرکز جرم اجسام جامد الزاماً در داخل آنها واقع می‌شود؟ اگر نمی‌شود، مثالی بزنید.
۲. شکل ۲۳ یک منشور مثلث متساوی الساقین و یک مخروط دوار قائم را که قطر آن برابر قاعده مثلث متساوی الساقین است نشان

ولی حتی الامکان دقیق، توصیف کنید. مناسبترین کار این است که هر حرکت را در حین هر یک از بازه‌های زمانی زیر توصیف کنید: (الف) پس از پرتاب فشنجه، ولی قبل از انفجار آن؛ (ب) از زمان انفجار تا وقتی که اولین قطعه فشنجه به بین برخورد می‌کند؛ (ج) از لحظه برخورد اولین پاره به بین تا لحظه‌ای که آخرین پاره به زمین می‌خورد؛ و (د) در زمانی که همه پاره‌های فشنجه بر بین فرود آمده‌اند ولی هیچ‌کدام به لبه بین ترسیده‌اند.

۱۵. درستی عبارت زیر را تحقیق کنید. «قانون پایستگی تکانه خطی وقتی در مورد یک تک‌ذره به کار گرفته شود، هم‌ارز قانون اول حرکت نیوتون است.»

۱۶. قطعه بینی را با سرعت ۷ به فضای تخلیه شده و آزاد از گراشی که داغ هم هست پرتاب می‌کنیم. بین کم کم ذوب و به آب تبدیل می‌شود و بعد می‌جوشد و بخار می‌شود. (الف) آیا این مجموعه در تمام مدت فرایند سیستمی از ذرات است؟ (ب) اگر چنین است، آیا همواره همان سیستم از ذرات است؟ (ج) آیا حرکت مرکز جرم دچار تغییر ناگهانی می‌شود؟ (د) آیا تکانه خطی کل تغییر می‌کند؟

۱۷. ذره‌ای به جرم $m = m^{\circ}$ (مثالاً یک نوت‌پیو) حامل تکانه است. از دیدگاه معادله ۲۲ که در آن می‌بینیم تکانه مستقیماً متناسب با جرم است، چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۱۸. اگر فقط نیروی خارجی است که می‌تواند وضعیت حرکتی مرکز جرم یک جسم را تغییر بدهد، پس چگونه نیروی داخلی ترمزها می‌تواند اتمبیل را متوقف کند؟

۱۹. می‌گوییم که اتمبیل از نیروهای داخلی شتاب نمی‌گیرد بلکه به نیروهای خارجی وارد از جاده است که به آن شتاب می‌دهد. پس چرا اتمبیلها نیاز به موتور دارند؟

۲۰. آیا کاری که نیروهای داخلی انجام می‌دهند می‌تواند انرژی جنبشی جسمی را کاهش بدهد؟ ... افزایش بدهد؟

۲۱. (الف) اگر روی سیستمی کار انجام شود، آیا آن سیستم الزاماً انرژی جنبشی کسب می‌کند؟ (ب) اگر سیستمی انرژی جنبشی کسب کند، آیا الزاماً معنی اش این است که یک عامل خارجی روی آن کار انجام داده است؟ مثال بیاورید. (اینجا منظور ما از «انرژی جنبشی»، انرژی جنبشی وابسته به حرکت مرکز جرم است).

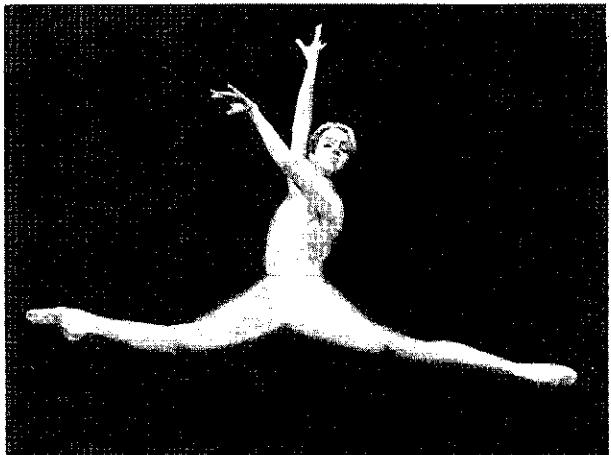
۲۲. در مثال ۹، شاهد موردی بودیم (اسکیت‌باز) که در آن انرژی جنبشی بدبود آمد ولی هیچ کار خارجی انجام نشده بود. حالا بر عکس این مورد را در نظر بگیرید. یک آچار بیچ‌گوشتی را محکم در برایر یک سنگ سنباده چرخان نگه می‌داریم. در اینجا کار خارجی انجام می‌شود ولی انرژی جنبشی آچار بیچ‌گوشتی تغییر نمی‌کند. این تناقض ظاهری را توضیح بدهید.

۲۳. آیا می‌توانید نمونه‌های دیگری غیر از آنچه در متن این کتاب ارائه

۶. کسی می‌گوید که وقتی یک قهرمان پرش ارتفاع از روی میله نشان می‌گذرد، مرکز جرم او در واقع از زیر میله عبور می‌کند. آیا چنین چیزی امکان دارد؟

۷. بالرینی در حال یک «پرش بزرگ» (شکل ۲۵) است. در قسمت میانی این پرش به نظر می‌رسد که او به طور افقی حرکت می‌کند. نشان بدھید که بالرین می‌تواند پاهاش را در حین پرواز حرکت طوری حرکت بدھد که مرکز جرم او واقعاً مسیر سهمی را طی کند، ولی قسمت بالای سرش که بیش در حرکت افقی باشد.

۸. یک جسم سبک و یک جسم سنگین انرژی جنبشی انتقالی یکسان دارند. تکانه کدام‌یک از این دو جسم بیشتر است؟



شکل ۲۵. پرش ۷

۹. پرنده‌ای در یک قفس سیمی است که از یک ترازوی فنری آویخته شده است. وقتی این پرنده در حال پرواز است آیا عددی که ترازو نشان می‌دهد بیشتر، کمتر، یا برابر با وقتی است که پرنده در قفس نشسته است؟

۱۰. آیا می‌شود یک قایق بادبانی را با دمیدن هوا به بادبانهای آن توسط بادبزنی که به قایق متصل است، به حرکت در آورد؟ پاسخ خودتان را توضیح بدهید.

۱۱. آیا جسمی که تکانه ندارد می‌تواند انرژی داشته باشد؟ آیا جسمی که انرژی ندارد می‌تواند تکانه داشته باشد؟ در هر مورد توضیح بدهید.

۱۲. قایقران می‌تواند، در آب آرام، با کشیدن‌های تن و کوتاه (ضربهای) طنابی که به دماغه قایق بسته شده است، خودش را به ساحل برساند (واقعاً می‌تواند؟ چگونه چنین کاری ممکن است؟

۱۳. شخصی که ساکن روی سطح افقی بدون اصطکاکی نشسته است چگونه می‌تواند از جا برخیزد؟

۱۴. شخصی روی قطعه بین بزرگ لغزندگانی ایستاده است و فشنجه ترقه‌ای روشی در دست دارد. او فشنجه را در زاویه‌ای (که قائم نیست) به هوا پرتاب می‌کند. حرکت مرکز جرم فشنجه و حرکت مرکز جرم سیستم مشتمل بر شخص و فشنجه را به طور خلاصه،

۱. نگاه کنید به

«The Physics of Dance», Kenneth Laws, *Physics Today*, February 1985, p. 24.

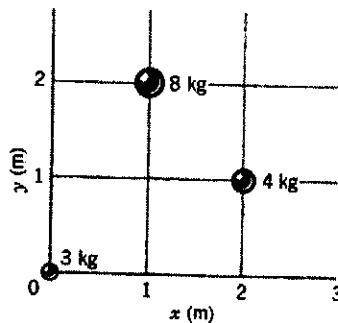
می‌توان معادله بالا را برای $u(t)$ حل کرد و به دست آورد

$$u(t) = m_1 d_i \cos \omega t$$

که در آن $\sqrt{k/\mu} = \omega$ است. (ج) از جواب فوق (x_1, u) , $x_1(t)$, $v_1(t)$, و $v_2(t)$ را به دست بیاورید. این مسئله نشان می‌دهد که با معادله مرکز جرم می‌توانیم حرکت‌های مربوط به m_1 و m_2 در وضعیت شکل ۱ را تحلیل کنیم.

بخش ۲-۹ سیستمهای بس-ذره‌ای

۲. مرکز جرم سه ذره نشان داده شده در شکل ۲۶ در کجا واقع است؟



شکل ۲۶. مسئله ۲

۳. مرکز جرم سیستم زمین-ماه در چه فاصله‌ای از مرکز زمین واقع است؟ (برای تعیین جرم‌های زمین و ماه و فاصله مرکز به مرکز زمین-ماه به پیوست ج رجوع کنید. مقایسه جواب این مسئله با شاعع زمین جالب است).

۴. نشان بدھید نسبت فاصله‌های x_1 و x_2 دو ذره از مرکز جرم آنها برابر با عکس نسبت جرم‌های آنهاست: یعنی $x_1/x_2 = m_2/m_1$.
 ۵. اتومبیلی به جرم 2210 kg در جاده 2210 km/h با سرعت 105 km/h در حرکت است. اتومبیل دیگری به جرم 2080 kg با سرعت 43.5 km/h در پی آن در حرکت است. مرکز جرم سیستم مشکل از دو اتومبیل با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶. دو اسکیت‌باز، یکی به جرم 65 kg و دیگری به جرم 42 kg , روی سطح یخزده ایستاده‌اند و دو انتهای تیری به طول 9.7 m را، که جرم آن قابل چشمپوشی است، در دست دارند. آنها "با کشیدن" تیر به طرف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند تا به هم برسند. اسکیت‌باز 42 kg کیلوگرمی چه مسافتی را طی می‌کند؟

۷. مردی به جرم m در بین نرdban طابی آویخته از بالونی به جرم M ایستاده است (شکل ۲۷)، بالون نسبت به زمین ساکن است. (الف) اگر این مرد با سرعت v (نسبت به نرdban) از نرdban بالا برود، بالون در چه جهتی و با چه سرعتی (نسبت به زمین) حرکت خواهد کرد؟ (ب) وقتی که مرد از صعود باز می‌ایستد وضعیت حرکت چگونه خواهد بود؟

شده است برای سیستمهای با جرم متغیر معرفی کنید؟

۲۴. همان‌طور که در متن کتاب مطرح شد، نمی‌توانیم از معادله $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ برای سیستمی با جرم متغیر استفاده کنیم. برای نشان دادن این مطلب (الف) معادله بالا را به صورت $(\mathbf{F}_{\text{ext}} - M\mathbf{d}\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ می‌دهیم که یک طرف این معادله در همه چارچوبهای لخت مقدار یکسانی دارد در صورتی که طرف دیگر چنین نیست. پس این معادله در حالت کلی برقرار نیست. (ج) نشان بدھید که معادله ۴۲ به چنین تناقضی منجر نمی‌شود.

۲۵. در سال ۱۹۲۰ یک روزنامه مشهور درباره اولین آزمایش‌های موشک که توسط رایت اچ گودارد انجام می‌شد مقاله‌ای جاپ کرد که در آن تصور اینکه موشک می‌تواند در خلاکار کند مردود دانسته شده بود: "پروفسور گودارد، با آن "کرسی" اش در کالج کلارک و با آن حمایتی که مؤسسه اسمیتسونی از او می‌کند، هنوز رایطه بین کشن و واکنش را نمی‌داند، و نمی‌داند که به چیزی بهتر از خلا نیار دارد تا در بربر کنش آن واکنشی در کار باشد - واکنش به خلا مهمل است. البته، ندانسته‌های او ظاهراً فقط همین چیزهایی است که در دیبرستان درس داده می‌شود." کجا این استدلال غلط است؟

۲۶. سرعت نهایی مرحله آخر یک موشک چند مرحله‌ای خیلی بیشتر از سرعت نهایی یک موشک تک مرحله‌ای با همان جرم کل و همان مقدار سوخت است. در این مورد توضیح بدھید.

۲۷. آیا یک موشک می‌تواند به سرعتی بیشتر از سرعت گازهای خروجی که آن را به حرکت در می‌آورد، برسد؟ در هر صورت توضیح بدھید که چرا.

۲۸. آیا، غیر از موشک، روش دیگری برای پیشروی در فضای بیرونی وجود دارد. اگر چنین روش‌هایی وجود دارند، کدام‌اند و چرا از آنها استفاده نمی‌شود؟

۲۹. معادله ۴۹ حاکی از آن است که اگر به قدر کافی سوخت مصرف شود سرعت موشک می‌تواند بدون محدودیت افزایش یابد. آیا این گفته منطقی است؟ محدودیت کاربرد معادله ۴۶ کدام است؟ موقع به دست آوردن معادله ۴۶ در کجا این محدودیت را اعمال کردیم؟

مسئله‌ها

بخش ۱-۹ سیستمهای دودره‌ای

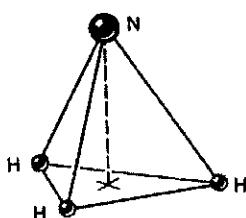
۱. (الف) x_1 را از معادله ۴ و v_1 را از معادله ۵ به دست بیاورید و این نتایج را همراه با معادله ۳ در معادله ۲ قرار بدھید، تا بینید که

$$m_1 k d_1^2 = k u^2 + \mu \left(\frac{du}{dt} \right)^2$$

که در آن $L = m_1 L - m_1 x_{\text{cm}}$ و $u = M x_1 - M x_{\text{cm}}$ است.

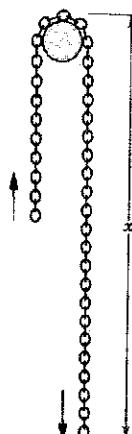
(ب) نشان بدھید که با استفاده از روش‌های ارائه شده در بخش ۴-۸

مرکز جرم این مولکول را نسبت به اتم نیتروژن معین کنید.

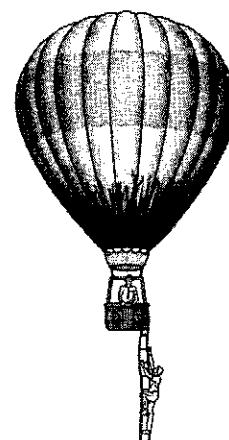


شکل ۲۹. مسئله ۱۰

۱۱. دو جسم، که هر کدام از مجموعه‌ای از وزنه‌ها تشکیل شده‌اند، به وسیله نخ سبک وزنی به هم متصل شده‌اند. این نخ از روی یک قرقه سبک وزن بدون اصطکاک به قطر 56 mm می‌گذرد. هر دو جسم در یک ترازو قرار دارند. جرم هر یک از دو جسم در آغاز 85° است. (الف) موقعیت مرکز جرم آنها را معین کنید. (ب) سی و چهار گرم از یک جسم را به دیگری منتقل می‌کنیم، ولی نصی‌گذاریم اجسام حرکت کنند. مرکز جرم سیستم کجاست؟ (ج) اگرnu دو جسم را رها می‌کنیم، حرکت مرکز جرم سیستم را توصیف کنید و شتاب آن را بدست بیاورید.
۱۲. خمپاره‌ای توسط خمپاره‌اندازی با سرعت دهانه‌ای 466 m/s در امتداد 57° بالای افق شلیک می‌شود. در بالاترین نقطه مسیر، خمپاره منفجر و به دو پاره با جرم‌های مساوی تقسیم می‌شود. یکی از دو پاره که سرعتش بلافاصله پس از انفجار صفر است، در امتداد قائم سقوط می‌کند. با فرض مسطح بودن زمین، پاره دوم در چه فاصله‌ای از خمپاره‌انداز با زمین برخورد می‌کند؟
۱۳. زنجیر یکنواخت قابل انعطافی که طول آن L و وزن واحد طولش λ است از روی میخ بدون اصطکاک کوچکی می‌گذرد (شکل ۳۰). این زنجیر وقتی که طول x از یک طرف و طول $L - x$ از طرف دیگر میخ آویخته است، از حالت سکون رها می‌شود. شتاب a را به صورت تابعی از x پیدا کنید.

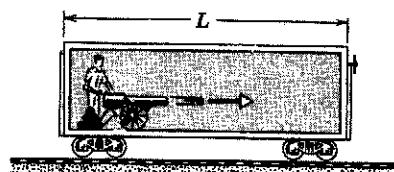


شکل ۳۰. مسئله ۱۳



شکل ۲۷. مسئله ۷

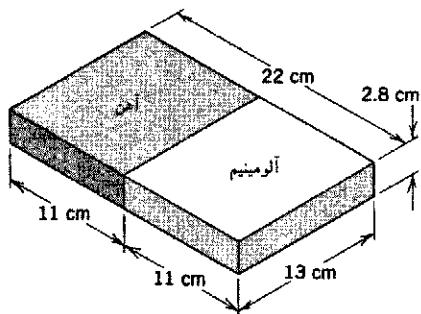
۸. دو ذره P و Q در ابتدا ساکن‌اند و 164 m از هم فاصله دارند. جرم ذره P برابر 43 kg و جرم ذره Q برابر 29 kg است. این دو ذره هم‌دیگر را با نیروی ثابت 10^{-1} N جذب می‌کنند. هیچ نیروی خارجی روی این سیستم عمل نمی‌کند. (الف) حرکت مرکز جرم را توصیف کنید. (ب) در چه فاصله‌ای از مکان اولیه ذره P ، دو ذره با هم برخورد می‌کنند؟
۹. یک توپ و انبوی گلوله توپ در یک واگن قطار در بسته به طول L قرار گرفته‌اند (شکل ۲۸). توپ به سمت راست شلیک می‌کند و واگن به سمت چپ پس می‌رود. گلوله‌ها پس از برخورد با دیوار مقابل در داخل واگن باقی می‌مانند. (الف) پس از آنکه همه گلوله‌ها شلیک شد، بیشترین فاصله‌ای که واگن از موقعیت اولیه‌اش جایه‌جا می‌شود، چقدر است؟ (ب) سرعت واگن پس از آنکه همه گلوله‌ها شلیک شد چقدر است؟



شکل ۲۸. مسئله ۹

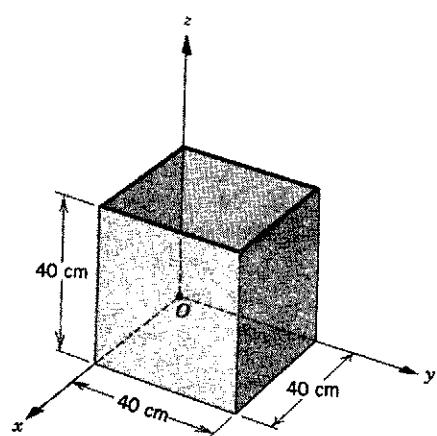
۱۰. در مولکول آمونیاک (NH_3)، سه اتم هیدروژن (H) تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند، فاصله بین مرکزهای اتمها برابر با $10^{-11} \times 16\text{ m}$ است، به طوری که مرکز مثلث در فاصله $10^{-11} \times 40\text{ m}$ از هر یک از هیدروژناها قرار می‌گیرد. اتم نیتروژن (N) در رأس هرمی قرار دارد که سه هیدروژن قاعده آن را تشکیل می‌دهند (شکل ۲۹). فاصله بین نیتروژن–هیدروژن برابر با $10^{-11} \times 14\text{ m}$ است و نسبت جرم اتنی نیتروژن به هیدروژن 13.9 است. موقعیت

۱۸. شکل ۳۳ تیغه مرکبی به ابعاد $22\text{ cm} \times 13\text{ cm} \times 2.8\text{ cm}$ را نشان می‌دهد. نصف تیغه از آلومینیم با چگالی (2.70 g/cm^3) ساخته شده است و نصف دیگر از آهن (با چگالی 7.85 g/cm^3) (شکل ۳۳). مرکز جرم تیغه در کجاست؟



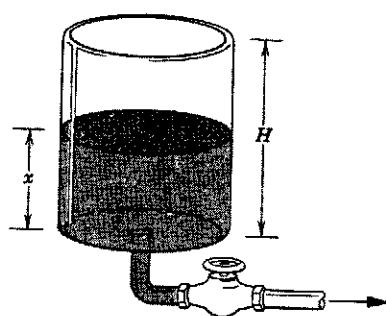
شکل ۳۳. مستلة ۱۸

۱۹. یک جعبه مکعبی شکل به ضلع 40 cm از ورق فلزی نازک ساخته‌ایم. این جعبه سر ندارد. مختصات مرکز جرم جعبه را در دستگاه مختصات شکل ۳۴ معین کنید.



شکل ۳۴. مستلة ۱۹

۲۰. بشکه استوانه‌ای شکلی پر از بنزین هواپیماست. این بشکه را از طریق شیری که در ته آن تعییه شده است تخلیه می‌کنیم (شکل ۳۵).



شکل ۳۵. مستلة ۲۰

از ساحل فاصله دارد. این سگ 8.5 ft به طرف ساحل حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. وزن قایق 46 lb است و می‌توان فرض کرد که بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. در این موقع فاصله سگ از ساحل چقدر است؟ (راهنمایی: مرکز جرم قایق و سگ حرکت نمی‌کند. چرا؟) در طرف چپ شکل ۳۱ هم ساحل هست.



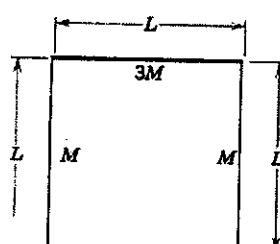
شکل ۳۱. مستلة ۱۴

۱۵. دو محیط‌بان یکی به جرم 44 kg و دیگری که سبکتر است در یک قایق به جرم 31.6 kg مشغول گشت‌زنی روی دریاچه‌اند. وقتی قایق در آب آرام دریاچه ساکن است، آنها جاهایشان را که 2.93 m از هم فاصله دارند نسبت به مرکز قایق متقاضاند، با هم عوض می‌کنند. محیط‌بان اول متوجه می‌شود قایق نسبت به یک کنده شناور در آب 41.2 cm جابه‌جا شده است و از آنجا جرم محیط‌بان دوم را حساب می‌کند. جرم دومی چقدر است؟

۱۶. شخصی به جرم 84 kg در قسمت عقب یک قایق سورتمهای 425 kg کیلوگرمی که با سرعت 4.16 m/s روی یخ بدون اصطکاک حرکت می‌کند، ایستاده است. این شخص تصمیم می‌گیرد که به جلوی این قایق که 18.2 m طول دارد برود، و این کار را با سرعت 2.0 km/h نسبت به قایق انجام می‌دهد. در حینی که این شخص به سمت جلو می‌رود، قایق چقدر روی یخ جابه‌جا می‌شود؟

بخش ۳-۹ مرکز جرم اجسام جامد

۱۷. با سه میله نازک، هر یک به طول L ، یک "مربع" سه ضلعی ساخته‌ایم (شکل ۳۲). جرم هر یک از دو میله متقابل M و جرم میله سوم برابر با $3M$ است. مرکز جرم این مجموعه در کجا واقع شده است؟



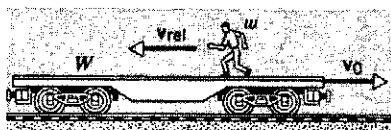
شکل ۳۲. مستلة ۱۷

۲۸. سرعت الکترونی برابر با $990c$ است. (الف) تکانه خطی آن را بر حسب $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ به دست بیاورید. (ب) این تکانه را بر حسب یکای MeV/c بیان کنید.

بخش ۶-۹ پایستگی تکانه خطی
۲۹. یک مرد 195 پوندی روی سطحی با اصطکاک ناچیز ایستاده است. این مرد به یک سنگ 158 ر. پوندی که پیش پایش قرار گرفته ضربه می‌زند و به آن سرعت 12ft/s می‌دهد. در نتیجه این کار، مرد با چه سرعتی به حرکت در می‌آید؟

۳۰. یک مرد 75 کیلوگرمی سوار بر گاری ای است به جرم 386 کیلوگرم که با سرعت 33m/s در حرکت است. این مرد چنان از گاری به بیرون می‌پرد که با سرعت افقی صفر بر زمین فرود می‌آید. سرعت گاری در اثر این کار چقدر تغییر می‌کند؟

۳۱. یک واگن روباز قطار به وزن W می‌تواند روی خط آهن افقی و مستقیم بدون اصطکاک به حرکت در بیاید. در آغاز شخصی به وزن w روی این واگن که با سرعت v_0 به سمت راست می‌رود ایستاده است. اگر این شخص به سمت چپ بددو و قبل از اینکه از انتهای واگن به خارج بپرد، سرعت او نسبت به واگن برابر v_{rel} باشد (شکل ۳۷)، تغییر در سرعت واگن چقدر است؟



شکل ۳۷. مسئله ۳۱

۳۲. یک سورتمه موشکی به جرم 287 کیلوگرم با سرعت 252m/s روی یک ریل حرکت می‌کند. در یک نقطه معین، چمچه‌ای که به سورتمه وصل است در گودال پر از آبی که بین ریالها واقع شده است فرو می‌رود و آب به داخل یک مخزن خالی سوار بر سورتمه می‌ریزد. سرعت سورتمه را پس از آنکه 917 کیلوگرم آب به مخزن ریخته شد پیدا کنید.

۳۳. یک مسلسل مخصوص در هر دقیقه 22 گلوله لاستیکی 12g گرمی را با سرعت دهانه‌ای 975m/s شلیک می‌کند. با این مسلسل چند گلوله باید به یک جانور 47 کیلوگرمی که با سرعت 387m/s به طرف ما هجوم می‌آورد شلیک کنیم تا جانور در مسیر خودش متوقف شود؟ (فرض کنید گلوله‌ها افقی حرکت می‌کنند و پس از برخورد با هدف به زمین می‌افتد).

۳۴. فضایپایابی با سرعت 386km/h نسبت به زمین در حرکت است. موتور موشکی آن که سوختش تمام شده است از سفینه فرمان جدا می‌شود و با سرعت 125km/h نسبت به سفینه به عقب رانده می‌شود. جرم موتور چهار برابر جرم سفینه است. سرعت سفینه فرمان سی از جدا شدن موتور چقدر است؟

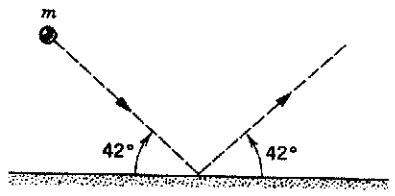
(الف) حرکت مرکز جرم بشکه و باقی مانده محتوای آن را، در حین تخلیه بنزین، به طور کیفی توصیف کنید. (ب) وقتی مرکز جرم بشکه و باقی مانده محتوای آن به پایین ترین جای ممکن می‌رسد، عمق x بنزین بشکه (M)، و جرم بنزینی که بشکه را پر می‌کند (m) بیان کنید. ۲۱. مرکز جرم یک ورق نیمداire‌ای همگن را تعیین کنید. شعاع دایره R بگیرید.

بخش ۶-۹ تکانه خطی یک ذره

۲۲. یک اتومبیل فولکس واگن 116 کیلوگرمی با چه سرعتی حرکت کند تا (الف) تکانه آن برابر تکانه اتومبیل کادیلاک 2650 کیلوگرمی که با سرعت 16km/h حرکت می‌کند باشد، و (ب) انرژی جنبشی آن با انرژی جنبشی همین کادیلاک برابر باشد؟ (ج) همین محاسبات را به جای کادیلاک برای یک کامیون 80 کیلوگرمی انجام بدهید.

۲۳. یک وانت 2000 کیلوگرمی که با سرعت 40km/h به سمت شمال در حرکت است به طرف شرق می‌پیچد و سرعتش به 50km/h می‌رسد. (الف) تغییر انرژی جنبشی وانت چقدر است؟ (ب) مقدار و جهت تغییر تکانه وانت را پیدا کنید.

۲۴. جسمی به جرم 88kg با سرعت 4m/s را با زاویه 31° و با زاویه 42° به یک صفحه فولادی می‌خورد و با همان سرعت و تحت همان زاویه باز می‌جهد (شکل ۳۶). تغییر تکانه خطی جسم (مقدار و جهت) را پیدا کنید.



شکل ۳۶. مسئله ۲۴

۲۵. یک گوی 452 گرمی با سرعت اولیه 16m/s و با زاویه 40° بالا افق از زمین پرتاب می‌شود. (الف) مقدار انرژی جنبشی گوی در آغاز پرتاب، و درست قبل از اینکه به زمین برخورد کند چقدر است؟ (ب) تکانه‌های (مقدار و جهت) متناظر با حالت‌های بالا و تغییر تکانه را تعیین کنید. (ج) نشان بدید که تغییر تکانه برابر است با وزن گوی ضربدر زمان پرواز آن، و از آنجا زمان پرواز را تعیین کنید.

۲۶. تکانه خطی، p ، ذره‌ای به جرم m برابر است با mc . سرعت آن بر حسب c ، سرعت نور چقدر است؟

۲۷. نشان بدید که معادله 23 در سرعتهای $c \ll v$ به معادله 21 تبدیل می‌شود. راهنمایی: نشان بدید که معادله 23 را می‌توان به صورت زیر نوشت

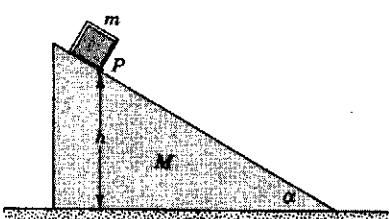
$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

۴۰. جسمی به جرم $kg = 8$ که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی نیست، با سرعت $m/s = 20$ حرکت می‌کند. در یک زمان معین یک انفجار داخلی روی می‌دهد و جسم به دو پاره تقسیم می‌شود. جرم هر یک از دو پاره $kg = 4$ است، و بر اثر انفجار به این سیستم دوپاره‌ای 16 تول ارزی جنبشی انتقالی داده می‌شود. هیچ یک از دوپاره از خط اولیه حرکت خارج نمی‌شود. سرعت و جهت حرکت هر پاره را تعیین کنید.

۴۱. فرض کنید واگن مستله 31 در ابتدا ساکن باشد. این واگن حامل n نفر، هر کدام به وزن w است. افراد یک به یک و به دنبال هم با سرعت نسبی v_{rel} می‌دوند و از واگن پایین می‌برند. آیا سرعت واگن در این صورت بیشتر است یا وقتی که همه n نفر با هم با سرعت v_{rel} واگن را ترک کنند؟

۴۲. یک توب 1400 کیلوگرمی، که گلوله‌های 70 کیلوگرمی را با سرعت دهانه‌ای $m/s = 556$ شلیک می‌کند، در امتداد 390° بالای افق نشانه روی شده است. توب روی ریلهای بدون اصطکاکی قرار گرفته است و در نتیجه می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت گلوله توب نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) گلوله با چه زاویه‌ای نسبت به زمین پرتاب شده است؟ (راهنمایی: مؤلفه افقی تکانه سیستم به هنگام شلیک توب ثابت می‌ماند).

۴۳. قالبی به جرم m روی گوهای به جرم M واقع شده و گوه هم روی یک میز افقی قرار گرفته است (شکل ۳۹). سطحهای تماس بدون اصطکاک‌اند. اگر این سیستم از حال سکون از وضعیتی که نقطه P در ارتفاع h از سطح میز قرار دارد شروع به حرکت کند، سرعت گوه در لحظه‌ای که نقطه P به سطح میز می‌رسد چقدر است؟



شکل ۳۹. مستله ۴۳

بخش ۷-۹ کار و ارزی در سیستم ذرات

۴۴. اتومبیلی که با مسافتانش $lb = 3680$ (یعنی $N = 16400$) وزن دارد، با سرعت $mi/h = 70$ (یعنی $km = 112$) در حرکت است که راننده ترمز می‌کند. جاده نیروی $lb = 1850$ (یعنی $N = 18230$) را بر چرخها وارد می‌کند و لغزشی هم در کار نیست. این اتومبیل قبل از توقف چه مسافتی را طی می‌کند؟

۴۵. از وضعیت ایستاده به حالت نیم خیز در می‌آید و در این فرایند مرکز جرم خودتان را $cm = 18$ پایین می‌آورید. بعد در راستای قائم به بالا می‌پرید. نیرویی که از طرف زمین در حین پرش بر شما وارد می‌شود سه برابر وزن شماست. سرعت شما به طرف بالا، وقتی از وضعیت "تمام قد" می‌گذرید و زمین را ترک می‌کنید، چقدر است؟

۴۶. مرحله نهایی موشکی با سرعت $m/s = 7600$ در حرکت است. این مرحله نهایی متشكل از دو قسم است که به هم چفت شده‌اند، یک قسمت بدنه موشک با جرم $kg = 290$ و قسمت دیگر کلاهک با جرم $kg = 150$. وقتی چفت آزاد می‌شود، فنر فشرده‌ای موجب می‌شود که دو قسمت با سرعت نسبی $m/s = 110$ از هم دیگر جدا شوند. (الف) سرعت هر قسمت پس از جدا شدن چقدر است؟ فرض کنید تمام سرعتها موازی باشند. (ب) ارزی جنبشی کل دو قسمت را پیش و پس از جدا شدن تعیین کنید که اختلاف در صورتی که وجود دارد علت آن را بگویید.

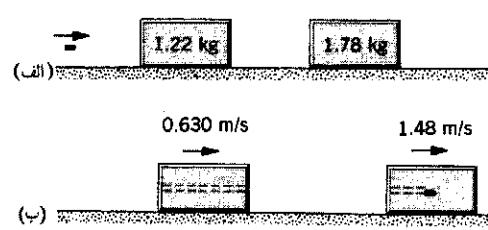
۴۷. مخزنی در حال سکون منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود. دو پاره آن که جرم یکی دو برابر دیگری است عمود بر هم و با سرعت یکسان $m/s = 314$ به پرواز در می‌آیند. جرم پاره سوم سه برابر پاره سبکتر است. بزرگی و جهت سرعت پاره سوم را با تعیین زاویه امتداد حرکت آن با امتداد حرکت سبکترین پاره مشخص کنید.

۴۸. یک هسته پرتوزای ساکن با گسیل یک الکترون و یک نوترون در جهت‌های عمود بر هم، و ای پاشد. تکانه الکترون برابر با $kg \cdot m/s = 10^{-22} \times 10^{-22}$ و تکانه نوترون برابر با $kg \cdot m/s = 10^{-12} \times 10^{-12}$ است. (الف) بزرگی و جهت تکانه هسته پس زده را پیدا کنید.

(ب) جرم هسته به جا مانده $kg = 10^{-16} \times 10^{-16} = 5 \times 10^{-32}$ است. ارزی جنبشی پس زدن آن چقدر است؟ نوترون یکی از ذرات بنیادی طبیعت است.

۴۹. یک واگن روبرو به جرم $kg = 1930$ ، که می‌تواند روی خط آهن عملأ بدون اصطکاکی حرکت کند، در کنار سکوی ایستگاه متوقف است. یک فوتیالیست $kg = 108$ کیلوگرمی که با سرعت $m/s = 9.74$ در امتداد سکو و موازی با ریلها می‌دود، روی واگن می‌پردازد. (الف) سرعت واگن پس از آنکه این شخص بر آن سوار و در آن ساکن شد چقدر است؟ (ب) این مسافر حالا شروع به راه رفتن به سمت جلو با سرعت $m/s = 5.20$ است. (الف) گلوله $kg = 3.54$ به طور افقی به طرف دو قالب که روی میز بذون اصطکاکی در حال سکون قرار دارند شلیک می‌شود (شکل ۳۸). گلوله از قالب اول که جرم آن $kg = 1.22$ است می‌گذرد و در داخل قالب دوم که جرم آن $kg = 1.78$ است متوقف می‌شود. بر اثر این برخوردها قالبها به ترتیب سرعتهای $m/s = 6.30$ و $m/s = 4.8$ را کسب می‌کنند

(شکل ۳۸). با چشمیوشی از مقدار جرمی که گلوله از قالب اول برداشته است، کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله بالاصله پس از خروج از قالب اول و (ب) سرعت اولیه گلوله.



شکل ۳۸. مستله ۴۹

۵۱. موشک ساکنی را در فضای تهی در نظر بگیرید. برای آنکه سرعت موشک پس از اتمام سوخت (الف) برابر سرعت گازهای خروجی و (ب) دو برابر سرعت گازهای خروجی شود، نسبت جرم (نسبت جرم اولیه به نهایی) آن باید چقدر باشد؟

۵۲. در میانه مأموریتی به ماه، یک تغییر سرعت به اندازه 8m/s برای سفینه‌ای که با سرعت 388m/s در حرکت است لازم می‌شود. سرعت گازهای خروجی موتور موشک برابر 1230m/s است. چه کسری از جرم اولیه سفینه فضایی را باید، به عنوان جرم زاید، از آن بیرون ریخت؟

۵۳. قرار است موشکی به جرم کل $11 \times 10^5\text{kg}$ را که 10^3kg از آن مواد سوختنی است به طور قائم پرتاب شود. سوخت با آهنگ ثابت 820kg/s مصرف می‌شود. حداقل سرعت گازهای خروجی

نسبت به موشک چقدر باشد تا موشک بتواند شروع به پرواز کند؟

۵۴. یک سورتیمه 45 کیلوگرمی که حامل 35kg مasse است از حال سکون روی یک سطح شیبدار یخزده به طول 93 m متکه را ویژه شیب آن 26° است به پایین می‌لغزد. مasse با آهنگ 3kg/s از عقب سورتمه بیرون می‌ریزد. چه مدت طول می‌کشد تا سورتمه به پایین شیب برسد؟

۵۵. برای در حرکت نگه داشتن یک تسمهٔ نقاله، وقتی بار حمل می‌کند نیروی محرك بیشتری لازم است تا وقتی که خالی است. اگر تسمه با سرعت ثابت 5m/s در حرکت باشد و بار را با آهنگ 20kg/s از یک سر تسمه روی آن قرار دهیم و از سر دیگر برداریم، چه نیروی محرك اضافی برای نگه داشتن سرعت حرکت تسمه لازم داریم؟ فرض کنید بار به طور قائم روی تسمه انداده می‌شود و کارگرها قبل از بلند کردن بار از روی تسمه، آن را با دست می‌گیرند و نسبت به خودشان به حال سکون در می‌آورند.

۵۶. یک بارکش روبار به وزن 75 kg تن متریک، با دندۀ خلاص در یک مسیر افقی با اصطکاک ناچیز با سرعت 36 m/s متر بر ثانیه در حرکت است که باران تندی شروع می‌شود. قطره‌های باران در امتداد قائم نسبت به زمین فرو می‌ریزند. سرعت این بارکش وقتی به اندازه 5 m/s تن متریک آب در آن جمع شده است چقدر است؟ برای بدست آوردن این جواب چه فرضی (اگر لازم باشد) کرده‌اید؟

۵۷. موشکی به جرم 586kg آماده پرواز قائم است. سرعت خروج گازها 17km/s را است. برای اینکه در هر یک از موارد زیر نیروی پیشران کافی باشد، چه مقدار جرم باید در هر ثانیه از موشک خارج شود؟ (الف) برای خشی کردن نیروی وزن، (ب) برای اینکه موشک با شتاب اولیه 18m/s^2 شروع به حرکت کند. توجه داشته باشید که، برخلاف مثال ۱۲، در این مورد گرانش به عنوان یک نیروی خارجی روی موشک عمل می‌کند.

۵۸. دو یدک‌کش دراز در آب ساکن در یک جهت در حرکت‌اند. سرعت یکی 9.65km/h و سرعت دیگری 21km/h است. وقتی از کنار هم می‌گذرند زغال سنگ با آهنگ 925 کیلوگرم در دقیقه از یک کش کنند. وقتی از این مدت چقدر است؟ (ج) سرعت نهایی موشک چقدر است؟

۴۶. شخصی به جرم 55 کیلوگرم از وضعیت نیم خیزی که در آن مرکز جرم او 40 cm بالای سطح زمین است به طور قائم به بالا می‌پرد. مرکز جرم او که در لحظه جدا شدن از زمین 90 cm بالای سطح زمین است، در این پرش تا ارتفاع 120 cm بالا می‌رود. (الف) زمین چه نیروی بالاسویی (فرض می‌کنیم ثابت باشد) بر شخص وارد می‌کند؟

(ب) حد اکثر سرعتی که شخص به دست می‌آورد چقدر است؟

۴۷. یک بازیکن هاکی روی یخ به جرم 116kg با سرعت 3m/s به طرف نرده‌ای در مرز یخ حرکت می‌کند و با دستهای کشیده شده نرده را می‌گیرد و متوقف می‌شود. در حین این توقف، مرکز جرم او 340 cm به سمت نرده حرکت می‌کند. (الف) متوسط نیرویی که شخص به نرده وارد می‌کند چقدر است؟ (ب) این شخص چقدر انرژی داخلی مصرف می‌کند؟

۴۸. در یک آزمایش اینمی، یک اتومبیل 2340 کیلوگرمی را با سرعت 126 km/h به یک دیوار برخورد می‌دهند. در طی مدت برخورد، مرکز جرم اتومبیل به اندازه 64 cm به طرف جلو جابه‌جا می‌شود، و دیوار به اندازه 30 cm فشرده می‌شود. از اصطکاک اتومبیل و جاده چشم بپوشید. (الف) نیروی وارد بر اتومبیل از دیوار را (که فرض می‌کنیم ثابت است) حساب کنید. (ب) انرژی داخلی اتومبیل چقدر افزایش پیدا می‌کند؟

۴۹. فرض کنید انرژی کل یک سیستم N ذره‌ای در جارچوب مرجع دلخواهی به صورت $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ اندازه‌گیری می‌شود. در چارچوب مرجع مرکز جرم، سرعتها عبارت‌اند از $v_{cm} = v_i - v_i'$ ، که در آن v_{cm} سرعت مرکز جرم نسبت به جارچوب مرجع اصلی است. با در نظر گرفتن اینکه $v_i - v_i' = v_i$ است، نشان بدھید که انرژی جنبشی را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$K = K_{int} + K_{cm}$$

که در آن $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ و $K_{int} = \sum_i \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ است. این رابطه نشان می‌دهد که، همان‌طور که در بخش ۷-۹ بیان شد، انرژی جنبشی سیستم ذرات را می‌شود به دو قسمت تقسیم کرد؛ یک بخش انرژی داخلی و یک بخش انرژی مرکز جرم. انرژی جنبشی داخلی در چارچوبی اندازه‌گیری می‌شود که در آن مرکز جرم ساکن است؛ مثلاً حرکتها کتره‌ای مولکولهای گاز در یک مخزن ساکن، عامل بوجود آورنده انرژی جنبشی انتقالی داخلی است.

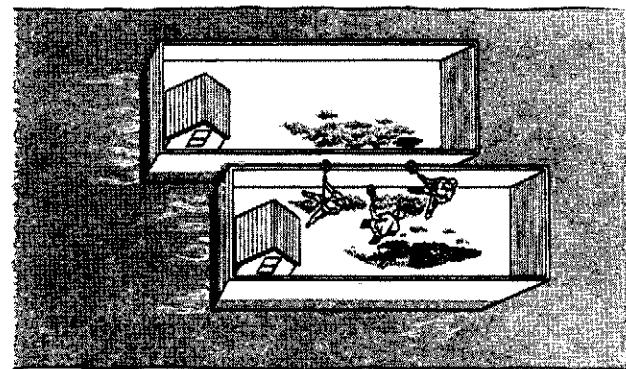
بخش ۸-۹ سیستم‌های با جرم متغیر

۵۰. موشکی در فضا، در جایی که عملاً گرانشی وجود ندارد، ساکن است. جرم این موشک $10^5\text{kg} \times 10^5\text{kg} = 10^{10}\text{kg}$ است که مقدار 10^5kg آن را مادر سوختنی تشکیل می‌دهد. موتور با آهنگ 480kg/s سوخت را مصرف می‌کند و سرعت خروج گازها 27km/s است. موتور به مدت 250s کار می‌کند. (الف) نیروی پیشران موتور را محاسبه کنید (ب) جرم موشک پس از این مدت چقدر است؟ (ج) سرعت نهایی

صرف می‌شود. با استفاده از انرژی حاصل از احتراق سوخت، مواد حاصل از احتراق فشرده می‌شوند و از قسمت عقب موتور با سرعت 497 m/s (یعنی 1630 ft/s)، نسبت به هواپیما، به بیرون رانده می‌شوند. (الف) نیروی پیشران موتور چقدر است؟ (ب) توانی که به هواپیما داده می‌شود چقدر است؟

۶۰. ریسمان قابل انعطاف ناکشسانی به طول L را از داخل لوله صافی می‌گذاریم و ریسمان می‌تواند به راحتی در لوله حرکت کند. لوله یک خم راستگوش دارد که در صفحه قائم چنان قرار گرفته است که یک شاخه‌اش قائم و شاخه دیگرش افقی است. ابتدا، در $t = 0$ از ریسمان در داخل لوله آویخته است. ریسمان را رها می‌کنیم تا شروع به لغزیدن در داخل لوله کند. t ثانیه پس از رها شدن، ریسمان با سرعت dy/dt حرکت می‌کند؛ (ج) طول قسمت آویخته ریسمان است. (الف) نشان بدهید که بنابر فرمولیندی مسئله جرم متغیر، $v_{\text{rel}} = 0$ است و بنابراین، معادله حرکت به صورت $mdv/dt = \mathbf{F}_{\text{ext}}$ در می‌آید. (ب) نشان بدهید که معادله حرکت، در این مورد، عبارت است از $gy = dy/dt^2$. (ج) نشان بدهید که پایستگی انرژی مکانیکی به معادله $(dy/dt)^2 - gy^2 = \text{const.}$ می‌انجامد، و این جواب با قسمت (ب) سازگار است. (د) نشان بدهید که $y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t})$ حرکت است (با جانشانی در قسمت ب)، و درباره این معادله بحث کنید.

اگر قرار باشد سرعت هیچ‌کدام از یک‌کشها تغییر نکند، چه مقدار نیروی اضافی باید توسط موتورهای آنها تأمین شود؟ فرض کنید که جابه‌جایی سنگ کاملاً به طور جانبی صورت می‌گیرد و نیروهای اصطکاکی بین یک‌کشها و آب به وزن آنها بستگی ندارد.



شکل ۴۰. مسئله ۵۸

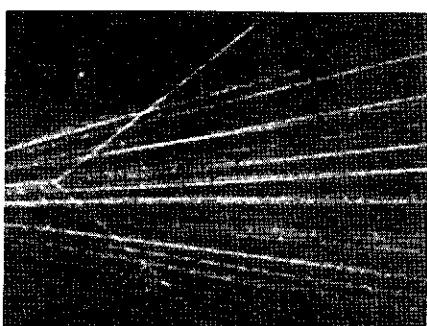
۵۹. هواپیمای جتی با سرعت 184 m/s (یعنی 604 ft/s) در حرکت است. موتور این هواپیما در هر ثانیه 2 kg (یعنی 2410 lb) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن 2 slug (یعنی 70 kg) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن 2 slug (یعنی 92 kg) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن 2 slug (یعنی 20 kg) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن 2 slug (یعنی 20 kg) را به داخل می‌کشد.

برخورد

یکی از کاربردهای مهم پایستگی تکانه خطی، بررسی برخورد میان اجسام است. این اجسام به هر اندازه‌ای هم باشد (از ذرات بنیادی گرفته تا کهکشانها) و هر نیروی هم که دخیل باشد (از نیروی هسته‌ای، قوی‌ترین، نیروی گرانش، ضعیفترین) قانون پایستگی تکانه خطی صادق است و امکان مطالعه این فرایندها را فراهم می‌کند. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرایندهای برخورد را با استفاده از قوانین پایستگی انرژی و تکانه تحلیل کرد، و مثالهایی از قلمرو فیزیک زیر انتی می‌آوریم که نشان می‌دهد چگونه می‌توان از بررسی نتایج انواع مختلف برخوردها، اطلاعات اساسی درباره جهان فیزیکی به دست آورد.

مشکل می‌توانیم اندازه‌گیری اش کنیم. هم توب و هم چوب دست در حین برخورد تغییر شکل می‌دهند. به نیروهایی که مدت اثر آنها در مقایسه با مدت زمان مشاهده سیستم کوتاه باشد نیروهای ضربه‌ای می‌گوییم. وقتی یک ذره آلفا (He^4) با هسته دیگری برخورد می‌کند (شکل ۲)، نیروی مؤثر میان آنها می‌تواند همان نیروی رانشی الکتروستاتیکی وابسته به بارهای این ذره‌ها باشد. ذره‌ها ممکن است عملأ در تماس با یکدیگر قرار نگیرند، اما باز هم این رویداد را برخورد می‌نماییم چون نیرویی نسبتاً قوی، در مدتی که در مقایسه با مدت مشاهده ذره آلفا کوتاه است، بر این ذره اثر می‌کند و تأثیری جدی بر حرکت آن می‌گذارد.

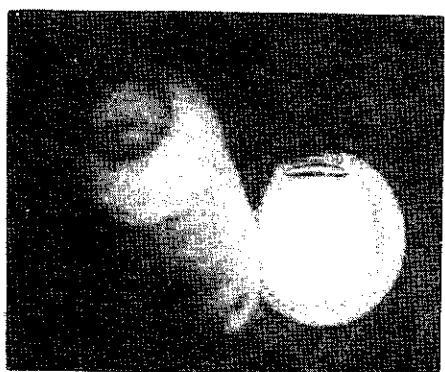
اگر این آمادگی را داشته باشیم که مدت مشاهده را به مقیاس زمانی



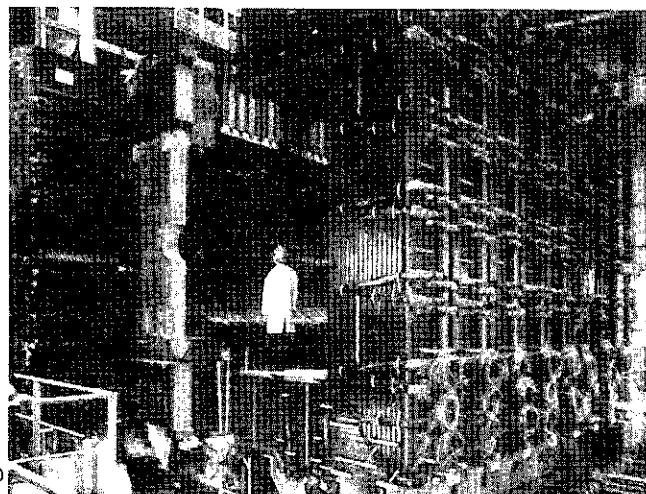
شکل ۲. یک ذره آلفا در اتاقک ابر با یک هسته هلیم برخورد می‌کند. اغلب ذرات فرودی (که از سمت چپ می‌آید) بدون برخورد از اتاقک

در برخورد، در زمانی نسبتاً کوتاه نیروی نسبتاً بزرگی به هر کدام از ذرات برخورده کننده اثر می‌کند. نظر اصلی درباره برخورد این است که حرکت ذره‌های برخورده کننده (یا دستکم یکی از آنها) به طور تقریباً ناگهانی تغییر می‌کند و در نتیجه می‌توانیم، کم و بیش به وضوح، زمانهای "قبل از برخورد" و "بعد از برخورد" را از تفکیک کنیم.

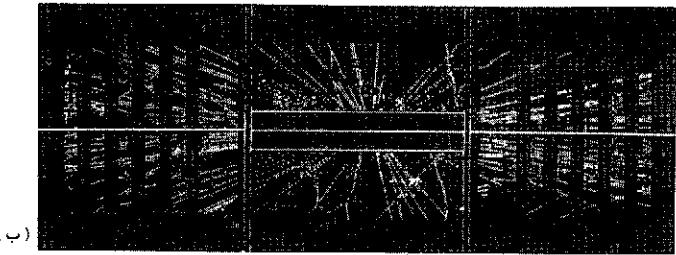
مثالاً وقتی چوب دست به توب بیسیال برخورد می‌کند، آغاز و پایان برخورد را می‌توان به طور نسبتاً دقیق تعیین کرد. زمان تماس چوب دست و توب در مقایسه با مدتی که ما توب را زیر نظر داریم بسیار کوتاه است. در حین برخورد، چوب دست نیروی بزرگی به توب وارد می‌کند (شکل ۱). این نیرو چنان پیچیده با زمان تغییر می‌کند که



شکل ۱. عکسی که با سرعت زیاد از برخورد چوب دست به توب بیسیال گرفته شده است. به تغییر شکل توب توجه کنید؛ این تغییر شکل حاکی از نیروی ضربه‌ای بزرگی است که بر توب وارد می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۴. (الف) آشکارساز عظیم UA1 که در برخورددهنده بروتون-بروتوون در سرن (CERN) از آن استفاده می‌شود. سرن یک مؤسسه تحقیقاتی در کار فیزیک ذرات است که در نزدیکی شهر زنو در کشور سوئیس قرار دارد. (ب) یک بازسازی کامپیوتری از مسیرهای ذرات تولیدشده در یک برخورد بروتون-بروتوون، چنین بازسازی‌ای در سال ۱۹۸۳ برای اثبات وجود ذراتی که $Z = W$ نامیده می‌شوند به کار گرفته شد. وجود این ذرات مؤید نظریه‌ای است که نیروی الکترومغناطیسی و نیروی هستمای ضعیف را دو نمود متفاوت از یک نیروی واحد بنیادی تر می‌داند.

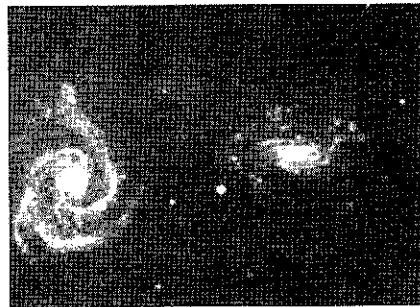
در لحظه t_f پایان می‌یابد. نیروهای مؤثر قبل و بعد از برخورد برابر با صفرند. از قانون دوم نیوتون به صورت $F = dp/dt$ ، می‌توانیم تغییر تکانه dp یک ذره را که به مدت dt تحت تأثیر نیروی F قرار گرفته است به شکل زیر بنویسیم

$$dp = F dt$$

تغییر تکانه یک جسم در خلال یک برخورد را می‌توانیم با انتگرال‌گیری روی مدت برخورد، یعنی، بین شرایط اولیه (تکانه p_i در زمان t_i) و شرایط نهایی (تکانه p_f در زمان t_f) تعیین کنیم

$$\int_{p_i}^{p_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} F dt \quad (1)$$

سمت چپ معادله ۱ همان تغییر تکانه، $p_i - p_f$ ، است. سمت راست معادله ۱ را که هم به شدت نیرو و هم به مدت زمان اثر آن بستگی



شکل ۳. برخورد دو کهکشان.

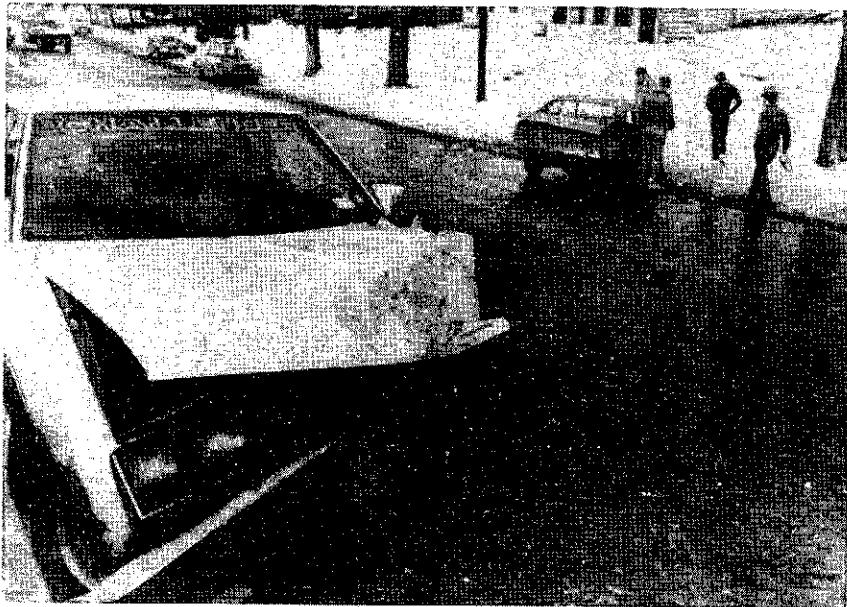
میلیونها یا میلیاردها سال افزایش بدھیم، می‌توانیم حتی راجع به برخورد بین کهکشانها صحبت کنیم (شکل ۳). (البته یک راه عملی تربای کوتاه کردن زمانهایی به این عظمت، استفاده از مدل‌سازی کامپیوتری است!) برخوردهای میان ذرات بنیادی، منبع اصلی اطلاعات درباره ساختار داخلی آنهاست. وقتی دو ذره با انرژی زیاد با هم برخورد می‌کنند، محصولات برخورد اغلب با ذره‌های اصلی کاملاً فرق دارند (شکل ۴). گاهی در این برخوردها صدها ذره محصول تولید می‌شود، که جرم کل آنها ممکن است خیلی بیشتر از جرم ذره‌های برخوردهای باشد (در این مورد انرژی جنبشی ذره‌های برخوردهای در فرایند برخورد به انرژی سکون تبدیل می‌شود). با مطالعه مسیر ذره‌های خروجی و به کار بردن قوانین بنیادی پایستگی، می‌توانیم رویداد اصلی را بازسازی کنیم.

در زمینه‌ای دیگر، در بررسی تصادفات رانندگی هم سعی می‌کنند برخوردها را بازسازی کنند. از مسیرها و نقشهای برخورد اتمیلهای درگیر در برخورد (شکل ۵)، اغلب می‌توان جزئیات مهمی مانند سرعت و جهت حرکت دو اتومبیل در لحظات قبل از برخورد را استنتاج کرد. نوع دیگری از برخورد عبارت است از برخورد میان یک کاوه فضایی و یک سیاره، که به آن "اثر تیرکمان" گفته می‌شود. در این برخورد می‌توان سرعت و جهت کاوه فضایی را در "مواجهه نزدیک" با یک سیاره (محترک) تغییر داد. کاوه فضایی واقعاً با سیاره تماس پیدا نمی‌کند، ولی در یک بازه زمانی کوتاه در مقایسه با کل مدت سفر، این کاوه به شدت تحت تأثیر گرانش سیاره قرار می‌گیرد. پس موجه است که چنین مواجهه‌ای را هم "برخورد" بنامیم (مسئله ۴).

۲-۱۰ ضربه و تکانه

منظور ما از مطالعه برخورد در این فصل آن است که بینیم با استفاده از اصول پایستگی تکانه و انرژی و با دانستن حرکت اولیه ذرات برخوردهای و با این فرض که چیزی از نیروهای مؤثر در حین برخورد نمی‌دانیم، چه اطلاعاتی درباره حرکت نهایی ذرات درگیر در برخورد می‌توانیم به دست بیاوریم.

فرض کنید شکل ۶ نمودار مقدار نیروی خالص وارد بر یک جسم در حین یک برخورد باشد. این برخورد در لحظه t شروع می‌شود و در حین یک برخورد باشد. این برخورد در لحظه t شروع می‌شود Ramin.Samad@yahoomail.com



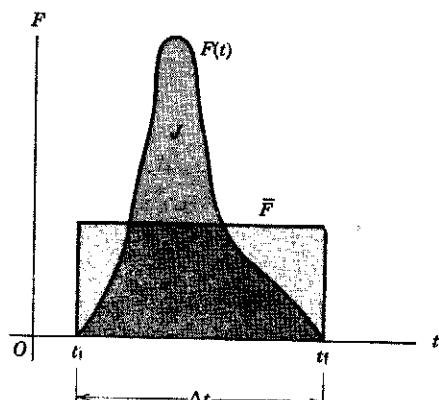
شکل ۵. برخورد بین دو اتومبیل. قسمت اعظم انرژی جنبشی اولیه به انرژی تغییر شکل دو اتومبیل تبدیل شده است. متخصصان بازسازی تصادفها از پایستگی تکانه برای محاسبه سرعتهای قبل از برخورد استفاده می‌کنند.

ضریب و تکانه هر دو بردارند و یکاها و ابعاد یکسان دارند.
گرچه در این فصل از معادله ۳ فقط در مواردی استفاده می‌کنیم که نیروهای ضربه‌ای (یعنی نیروهایی که زمان تأثیر آنها در مقایسه با زمان مشاهده کوتاه است) در کارند، ولی چنین محدودیتی برای این معادله ذاتی نیست. معادله ۳ همان‌کلیت قانون دوم نیوتون را دارد، کما اینکه خودش هم از همین قانون به دست آمده است. مثلاً از معادله ۳ می‌توانیم برای پیدا کردن تکانه‌ای که جسمی بر اثر سقوط در میدان گرانشی زمین کسب می‌کند استفاده کنیم.
قضیه ضربه‌تکانه خیلی شبیه قضیه کارانزی است که در فصل ۷ به دست آورдیم. هر دو قضیه در مورد تکذره به کار می‌روند و هر دو مستقیماً از قانون دوم نیوتون ناشی شده‌اند. کار شامل انتگرال نیروی خالص روی مکان است، در حالی که ضربه شامل انتگرال نیروی خالص روی زمان است. قضیه کارانزی یک معادله اسکالار است که با تغییرات انرژی جنبشی ذره سروکار دارد، در حالی که قضیه ضربه‌تکانه یک معادله برداری است که به تغییرات تکانه ذره مربوط می‌شود.

فرض کردہ‌ایم نیروی ضربه‌ای که مقدار آن در شکل ۶ نشان داده شده است جهت ثابتی دارد. مقدار ضربه این نیرو با سطح زیرمنحنی $F(t)$ نشان داده می‌شود. این ساختار را می‌توانیم با مستطیل شکل ۶ به عرض Δt و ارتفاع \bar{F} نشان بدیم، که مقدار نیروی متوسطی است که در طی بازه زمانی Δt اثر می‌کند. به این ترتیب

$$J = \bar{F} \Delta t \quad (4)$$

در برخوردهایی نظر برخورد توب و چویدست (شکل ۱)، اندازه‌گیری مستقیم $F(t)$ دشوار است، ولی می‌توانیم Δt را تخمین بزنیم (شاید J بینیم) و مقدار معقولی از \bar{F} به دست بیاوریم. این محاسبه است با تغییر تکانه آن ذره در آن بازه زمانی.



شکل ۶. نیروی ضربه‌ای $F(t)$ در حین برخوردی که از t_1 تا t_2 طول می‌کشد به شکل دلخواهی تغییر می‌کند. سطح زیرمنحنی $F(t)$ برای ضربه J است و مستطیلی که به نیروی میانگین \bar{F} محدود شده است همان مساحت را دارد.

دارد، ضربه نیرو، J ، می‌نامند

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (2)$$

واز معادله ۱ نتیجه می‌شود

$$J = p_f - p_i \quad (3)$$

معادله ۳ بیان ریاضی قضیه ضربه‌تکانه است:

ضریب نیروی خالص وارد بر یک ذره در یک بازه زمانی معین برای $Ramtin.samad@yahoo.com$ بینیم. مقدار معقولی از \bar{F} است با تغییر تکانه آن ذره در آن بازه زمانی.

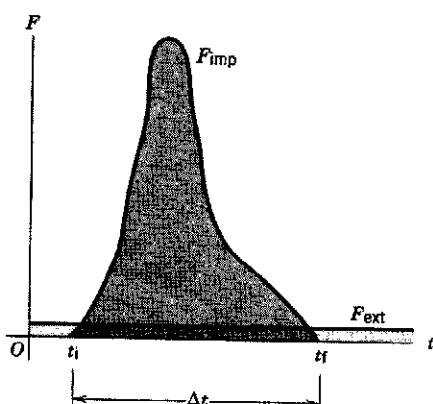
به کار گرفته شده است. نیروهای ضربه‌ای مؤثر در طی برخورد، نیروهای داخلی آند و اثری بر تکانه کل سیستم ندارند.

برخورد را به صورت برهمنشی تعریف کردیم که در مدت زمان Δt ، که در مقایسه با زمانی که سیستم را مشاهده می‌کنیم قابل چشمیویشی است، انجام می‌شود. می‌توانیم آن را به صورت روندادری هم که در آن نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد قابل چشمیویشی آند (مثال ۱) در نظر بگیریم. وقتی "چوبدست" به توب بیسبال یا به توب گلف برخورد می‌کند، یا دو گوی بیلیارد به یکدیگر اصابت می‌کند، نیروهای خارجی هم روی این سیستمهای اثر می‌کند. مثلاً گرانش یا اصطکاک می‌توانند به سیستم نیرو وارد کنند؛ این نیروها ممکن است بر روی اجسام برخوردهایشان نباشند و الزاماً توسط نیروهای خارجی دیگری خشی شوند. با این همه، صرفنظر کردن از نیروهای خارجی در حین برخورد کاملاً موجه است و می‌توان فرض کرد تکانه پایسته است مشروط بر اینکه این نیروهای خارجی در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد خیلی کوچک باشند، که معمولاً هم هستند. در نتیجه، تغییر ناشی از نیروی خارجی در تکانه ذره در حین برخورد در مقایسه با تغییر ناشی از نیروی ضربه‌ای قابل چشمیویشی است (شکل ۸).

مثلاً در برخورد چوبدست به توب بیسبال، که فقط چند میلی ثانیه طول می‌کشد، چون تغییر تکانه توب بزرگ است و زمان برخورد کوچک، از رابطه

$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

نتیجه می‌شود که نیروی ضربه‌ای متوسط، \bar{F} ، نسبتاً بزرگ است. نیروی خارجی گرانش در مقایسه با این نیرو، قابل اغماض است. برای تعیین تغییر حرکت توب می‌توانیم از این نیروی خارجی بی‌هیچ نگرانی چشمیویشی کنیم؛ هر چه زمان برخورد کوتاه‌تر باشد این کار موجه‌تر است.



شکل ۸. نیروی ضربه‌ای F_{imp} در حین برخورد معمولاً خیلی شدیدتر از هر نیروی خارجی دیگری (F_{ext}) که در اینجا آن را ثابت گرفته‌ایم) است که ممکن است بر سیستم اثر کند.

مبتنی بر ضربه‌ای است که بنابر معادله ۳ از تغییر تکانه توب محاسبه می‌شود (مثال ۱).

۱۰-۳ پایستگی تکانه در حین برخورد

اکنون برخورد بین دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 را در نظر بگیرید (شکل ۷). در طی مدت کوتاه برخورد، این دو ذره نیروهای بزرگی بر یکدیگر وارد می‌کنند. در هر لحظه \bar{F}_{12} نیرویی است که از ذره ۲ بر ذره ۱ وارد می‌شود و \bar{F}_{21} نیرویی است که ذره ۱ بر ذره ۲ وارد می‌کند. بنابر قانون سوم نیوتون این نیروها مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

تغییر ناشی از برخورد در تکانه ذره ۱ برابر است با

$$\Delta p_1 = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{12} dt = \bar{F}_{12} \Delta t \quad (5)$$

که در آن \bar{F}_{12} عبارت است از مقدار متوسط نیروی \bar{F}_{12} در مدت برخورد، یعنی در $t_i - t_f$. $\Delta t = t_f - t_i$

تغییر ناشی از برخورد در تکانه ذره ۲ برابر است با

$$\Delta p_2 = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{21} dt = \bar{F}_{21} \Delta t \quad (6)$$

که در آن \bar{F}_{21} عبارت است از مقدار متوسط نیروی \bar{F}_{21} در بازه زمانی $\Delta t = t_f - t_i$.

اگر هیچ نیروی دیگری بر این ذرات وارد نشود Δp_1 و Δp_2 تغییر تکانه کل هر یک از ذرات را به دست می‌دهد. دیدیم که در هر لحظه $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ و در نتیجه $\Delta p_1 = -\Delta p_2$ است، پس

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (7)$$

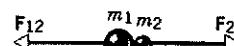
اگر دو ذره را به عنوان یک سیستم متریک در نظر بگیریم، در آن صورت تکانه کل سیستم عبارت است از

$$P = p_1 + p_2 \quad (8)$$

و کل تغییر ناشی از برخورد در تکانه سیستم صفر است، یعنی

$$\Delta P = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \quad (9)$$

پس، اگر هیچ نیروی خارجی در کار نباشد، تکانه کل یک سیستم دو-ذره‌ای در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. این عبارت بیانی است از قانون پایستگی تکانه خطی (بخش ۶-۹) که در مورد یک سیستم دو-ذره‌ای



شکل ۷. دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 در برخورد با یکدیگر نیروهای مساوی و مخالف مبادله می‌کنند.

بنابراین، در عمل می‌توانیم ضربه را به دست بیاوریم به کار ببریم به این شرط که زمان برخورد به اندازه کافی کوتاه باشد. در این صورت می‌توانیم بگوییم که تکانه سیستم درست در لحظات قبل و بعد از برخورد ذرات، یکی است.

اکنون می‌توانیم ضربه را به دست بیاوریم

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = 57 \text{kgm/s} - (-59 \text{kgm/s}) \\ = 116 \text{kgm/s}$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = 40 \text{kgm/s} - 0 = 40 \text{kgm/s}$$

به شکل دیگر، مقدار ضربه برابر است با

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(116 \text{kgm/s})^2 + (40 \text{kgm/s})^2} \\ = 123 \text{kgm/s}$$

و راستای آن متاظر است با

$$\theta = \tan^{-1}(J_y/J_x) \\ = \tan^{-1}[(40 \text{kgm/s})/(116 \text{kgm/s})] = 19^\circ$$

این زاویه بالای افق است. شکل ۹ ب بردار ضربه را نمایش می‌دهد و طبق تعریف معادله ۳، به صورت نموداری ثابت کنید که

$$J = p_f - p_i = p_f + (-p_i)$$

(ب) می‌دانیم که $J = \bar{F}\Delta t$ و از آنجا $\bar{F} = J/\Delta t$ است. پس مقدار \bar{F} برابر است با

$$\bar{F} = (123 \text{kgm/s})/0.15 \text{s} = 820 \text{N}$$

که تقریباً برابر با یک تن است. این نیرو در همان جهت J ، یعنی، 19° بالای افق وارد می‌شود. توجه کنید که این نیرو متوسط است؛ همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد نیروی ماکزیمم به مقدار قابل ملاحظه‌ای از این نیرو بیشتر است. همچنین، توجه داشته باشید که $\bar{F} = 820 \text{N} \gg mg (= 14 \text{N})$ است. به این ترتیب با خیال آسوده می‌توانیم فرض کنیم که نیروی ضربه‌ای خیلی بزرگتر از نیروی خارجی (در این مورد گرانش) است و بنابراین با تقریب خوبی برابر است با همان نیروی خالصی که در حین برخورد وارد می‌شود. (ج) تغییر تکانه چوبیدست بنابر معادله ۷ برابر است با تغییر تکانه توب ولی در جهت خلاف آن. به این ترتیب برای چوبیدست داریم

$$\Delta p_x = -116 \text{kgm/s}$$

$$\Delta p_y = -40 \text{kgm/s}$$

آیا این تغییر تکانه، تغییر کوچکی است یا تغییر بزرگی است؟ برای پاسخگویی به این پرسش سعی کنید تکانه چوبیدست در حال حرکت را تخمین بزنید.

مثال ۱. توب بیسبالی (که وزن آن حدوداً ۵ اوونس است) با سرعت افقی 93mi/h (حدود 150km/h) در حرکت است که با چوبیدستی به آن ضربه وارد می‌شود. این توب چوبیدست را در امتداد زاویه 35° با لایر از مسیر فرودش با سرعت 180km/h ترک می‌کند. (الف) ضربه نیروی وارد بر توب را تعیین کنید. (ب) فرض کنید برخورد 0.15s میلی ثانیه (0.15s) طول بکشد نیروی متوسط چقدر است؟ (ج) تغییر تکانه چوبیدست را پیدا کنید.

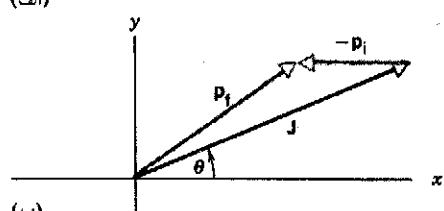
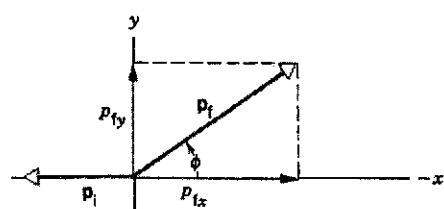
حل: (الف) شکل ۹ تکانه اولیه p_i و تکانه نهایی p_f مربوط به توب بیسبال را نشان می‌دهد. جرم متاظر با 0.14kg برابر 0.14kg است و سرعت نهایی توب (برحسب یکای مناسب) 50m/s است. مؤلفه‌های تکانه نهایی عبارت‌اند از

$$p_{fx} = mv_f \cos \phi = (0.14 \text{kg})(50 \text{m/s})(\cos 35^\circ) \\ = 57 \text{kgm/s}$$

$$p_{fy} = mv_f \sin \phi = (0.14 \text{kg})(50 \text{m/s})(\sin 35^\circ) \\ = 40 \text{kgm/s}$$

در این دستگاه مختصات، تکانه اولیه فقط دارای مؤلفه x است، که مقدار آن (منفی) برابر است با

$$p_{ix} = mv_i = (0.14 \text{kg})(-42 \text{m/s}) = -59 \text{kgm/s}$$



شکل ۹. مثال ۱. (الف) تکانه‌های اولیه و نهایی بیسبال. (ب) اختلاف $p_f - p_i$ برابر است با ضربه J .

در مورد اجسام خیلی صلب، مانند گویهای بیلیارد، اغلب می‌توانیم به طور تقریبی برخورد را کشسان در نظر بگیریم. در این مورد انرژی ای که از جنبشی به سایر اشکال تبدیل می‌شود (مثلًاً به امواج صوتی که در برخورد گویها شنیده می‌شود) در مقایسه با انرژی جنبشی قابل اغراض است. توجه داشته باشید که طبقه‌بندی برخوردها به کشسان و ناکشسان مستقل از چارچوب مرجعی است که برخورد از آن مشاهده می‌شود.

اگر دو جسم برخوردهای پس از برخورد به هم بچسبند، می‌گوییم برخورد کاملاً ناکشسان است. مثلاً برخورد بین یک گلوله و قطعه چوبی که گلوله به آن شلیک شده است کاملاً ناکشسان است مشروط بر اینکه گلوله در داخل قطعه چوب باقی بماند. عبارت "کاملاً ناکشسان" الزاماً به این معنی نیست که تمام انرژی جنبشی اولیه از دست می‌رود، بلکه، همان طور که خواهیم دید، به این معنی است که انرژی جنبشی تا بیشترین مقداری که پایستگی تکانه مجاز می‌دارد از دست می‌رود.

با آنکه نیروهای برخورد ناشناخته‌اند، از حرکت ذرات قبل از برخورد می‌توانیم حرکت بعد از برخورد آنها را تعیین کنیم، مشروط بر اینکه برخورد کاملاً ناکشسان باشد، یا، اگر برخورد کشسان است، مشروط بر اینکه برخورد فقط در یک بعد صورت بگیرد. در برخورد یک‌بعدی، حرکت نسبی بعد از برخورد در امتداد همان خطی است که حرکت نسبی قبل از برخورد. فعلًاً بحث را به حرکت یک‌بعدی محدود می‌کنیم.

برخوردهای کشسان

ابتدا به برخورد کشسان یک‌بعدی می‌پردازیم. دو جسم را در نظر بگیرید که روی خط واصل بین مرکزهایشان در حرکت‌اند (مثلاً دو لغزنده روی یک ریل هوا)، و پس از برخورد روبرو در امتداد همان خط مستقیم به حرکت درمی‌آیند (شکل ۱۰). نیروهایی که این اجسام در حین برخورد به یکدیگر وارد می‌کنند در راستای خط اولیه حرکت است و بنابراین، حرکت نهایی هم در امتداد همین خط خواهد بود.

جرم ذرات برخوردهای m_1 و m_2 است و سرعت آنها عبارت است از v_{1i} و v_{2i} قبل از برخورد و v_{1f} و v_{2f} بعد از برخورد. [در نمادگذاری این بخش، شاخصهای ۱ و ۲ ذرات را مشخص می‌کنند، و شاخصهای f و i به ترتیب مقادیر اولیه (قبل از برخورد) و نهایی (بعد از برخورد) را نشان می‌دهند]. جهت ثابت تکانه و سرعت را به طرف راست شکل ۱۰ می‌گیریم. فرض می‌کنیم سرعت ذرات برخوردهای (در مقایسه با سرعت نور) آنقدر کم است که نیازی به استفاده از عبارتهای نسبیتی برای تکانه و انرژی جنبشی نداریم (مگر آنکه صریحاً غیر از این گفته باشیم). از پایستگی تکانه داریم

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (۱۰)$$

جون برخورد را کشسان در نظر گرفته‌ایم، انرژی جنبشی بنایه تعریف

۴-۱۰ برخورد در یک بعد

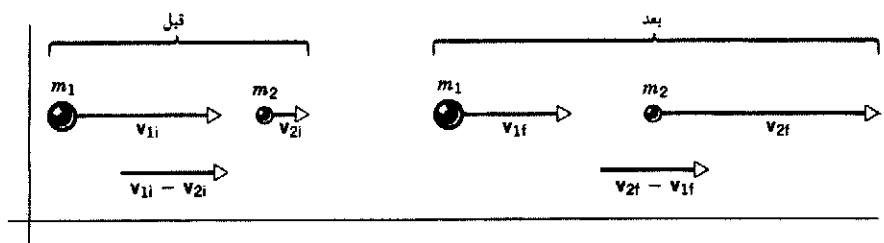
در این بخش اثر برخورد میان دو جسم را بررسی می‌کنیم. معمولاً سرعتهای اولیه دو جسم قبل از برخورد را می‌دانیم و منظور مان این است که با استفاده از قوانین پایستگی یا قوانین حرکت، سرعتهای بعد از برخورد را تعیین کنیم.

اگر نیروهایی را که در حین برخورد اثر می‌کنند بشناسیم و اگر بتوانیم معادلات حرکت را حل کنیم، همینه می‌توانیم حرکت پس از برخورد اجسام را از حرکت، قبل از برخوردشان محاسبه کنیم. اما در بیشتر برخوردهای این نیروها را نمی‌شناسیم. قانون پایستگی تکانه باید در هر برخوردی که در آن فقط نیروهای داخلی شرکت دارند برقرار باشد، و حتی اگر این نیروها را نشناشیم هم می‌توانیم آن را به کار ببریم. اگرچه ممکن است جزئیات برهمنکش را ندانیم، ولی با استفاده از پایستگی تکانه و پایستگی انرژی در بسیاری موارد می‌توانیم نتایج برخورد را پیش‌بینی کنیم.

تکانه خطی همواره در برخوردهای پایسته است. انرژی کل هم پایسته است: انرژی کل اولیه ذرات برخوردهای پایسته برابر است با انرژی کل نهایی محصولات برخورد. این انرژی ممکن است علاوه بر انرژی جنبشی شامل شکلهای دیگر انرژی از جمله انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل، انرژی چرخشی، و انرژی تابشی باشد.

در رده خاصی از برخوردهای، که برخورد کشسان نامیده می‌شوند، از همه اشکال دیگر انرژی چشمیوشی می‌کنیم و فقط انرژی مکانیکی، $K + U$ ، را در نظر می‌گیریم. بعلاوه، فرض می‌کنیم در برخوردهای ضربه‌ای نیروهای داخلی به مدت کوتاهی عمل می‌کنند و بنابراین در مسافت کوتاهی مؤثرند؛ ما ذرات را فقط در فواصل نسبی بسیار بزرگتری مشاهده می‌کنیم و در نتیجه می‌توانیم از آثار مربوط به انرژی پتانسیل داخلی آنها را ندیده بگیریم. در برخورد کشسان، انرژی جنبشی انتقالی تها شکلی از انرژی است که باید در محاسبات منظور شود، و بنابراین پایستگی انرژی مکانیکی در این مورد هم ارز پایستگی انرژی جنبشی است: در برخوردهای کشسان انرژی جنبشی اولیه K_i برابر است با انرژی جنبشی نهایی K_f .

در رده دیگری از برخوردهای، که برخورد ناکشسان نامیده می‌شوند، اشکال دیگر انرژی هم پدید می‌آیند، و انرژیهای جنبشی اولیه و نهایی با هم برابر نیستند. در بعضی موارد $K_f > K_i$ است، مثلاً وقتی که انرژی جنبشی اولیه به انرژی داخلی محصولات برخورد تبدیل می‌شود؛ در موارد دیگر $K_f < K_i$ است، مانند وقتی که انرژی داخلی ذخیره شده در ذرات برخوردهای آزاد می‌شود. در برخوردهای ناکشسان انرژی مکانیکی $K + U$ پایسته نیست، ولی انرژی کل پایسته است. (بخشن ۶-۸) وقتی اجسام برخوردهای ساده‌اند، مانند اتمها یا مولکولها، اغلب می‌توانیم اختلاف بین K_i و K_f را برحسب حالتهای گسته از انرژی داخلی سیستم توجیه کنیم. در سیستمهای پیچیده‌تر، مانند اتومبیلهای برخوردهای، اختلاف انرژی را به صورت انرژی جنبشی "از دست رفته" یا "به دست آمده" در نظر می‌گیریم. همه برخوردهای میان اجسام واقعی تا حدودی ناکشسان‌اند.
Ramin.samad@yahoo.com



شکل ۱۰. دو ذره قبیل و بعد از یک برخورد کشسان. توجه کنید که سرعتهای نسبی قبیل و بعد از برخورد با هم برابرند.

کشسان فراهم می‌آورند. اغلب با انتخاب چارچوب مرجعی که در آن ذره هدف (مثلاً m_2) در آغاز ساکن است معادله‌های بالا را ساده می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم v_{2i} را در معادلات ۱۵ و ۱۶ برابر با صفر بگیریم. در اینجا چند مورد خاص را که بیشتر مورد توجه‌اند بررسی می‌کنیم.

۱. جرم‌های مساوی. وقتی ذرات برخوردکننده دارای جرم‌های برابر باشند ($m_1 = m_2$), روابط ۱۵ و ۱۶ به صورت ساده زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} = v_{1i} \quad v_{2f} = v_{2i} \quad \text{و} \quad (17)$$

یعنی، ذرات سرعتهایشان را مبادله می‌کنند: سرعت نهایی یک ذره برابر است با سرعت اولیه ذره دیگر.

۲. ذره هدف ساکن. حالت جالب توجه دیگر آن حالتی است که در آن ذره m_2 در ابتدا ساکن است. پس $v_{2i} = 0$ است و داریم

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (18)$$

از ترکیب این مورد خاص با مورد قبلی معلوم می‌شود که در برخورد بین دو ذره با جرم‌های مساوی که یکی از آنها در آغاز ساکن باشد، ذره اول "یکباره متوقف" می‌شود و ذره دوم با سرعت اولیه ذره اول "یکباره به راه می‌افتد". این اثر را اغلب در برخورد گویهای بیلیارد، اگر چرخان نباشند، می‌توانیم مشاهده کنیم.

۳. ذره هدف پر جرم. اگر $m_2 \gg m_1$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به صورتهای ساده زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} \approx v_{2i} \quad v_{2f} \approx v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{و} \quad (19)$$

وقتی ذره پر جرم به آرامی حرکت می‌کند یا ساکن است، داریم

$$v_{1f} = 0 \quad v_{2f} \approx -v_{1i} \quad \text{و} \quad (20)$$

این وقتی است که یک پرتابه سبک با یک جسم ساکن خیلی پر جرم برخورد می‌کند، در این مورد سرعت جسم سبک "تقریباً معکوس" می‌شود و جسم پر جرم تقریباً ساکن می‌ماند. مثلاً توبی که از ارتفاع h سقوط می‌کند پس از برخورد با زمین سرعتش معکوس می‌شود و از زمین باز می‌جهد و اگر برخورد کاملاً کشسان باشد و مقاومت هوا هم در کار نباشد، به همان ارتفاع h بر می‌گردد. حرکت الکترون روابط ۱۵ و ۱۶، که در تمام چارچوبهای لخت برقرارند، نتایجی کلی هستند که امکان محاسبه سرعتهای نهایی را در هر چارچوبی دارند. مثلاً $v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$

پایسته است و از $K_i = K_f = K_i$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (11)$$

اگر جرمها و سرعتهای اولیه را بدانیم، می‌توانیم از دو معادله بالا سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} را محاسبه کنیم.

می‌توانیم معادله مربوط به تکانه را به صورت

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (12)$$

و معادله مربوط به انرژی را به صورت

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (13)$$

بنویسیم. از تقسیم معادله ۱۳ بر معادله ۱۲ و با این فرض که $v_{2i} \neq v_{2f}$ و $v_{1i} \neq v_{1f}$ است (بررسش ۱۵)، به دست می‌آوریم

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

که می‌شود آن را به این صورت مرتب کرد

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (14)$$

این معادله حاکی از آن است که در برخورد کشسان یک بعدی، سرعت نسبی (نژدیک شدن) دو جسم قبیل از برخورد برابر و در جهت مخالف سرعت نسبی (دور شدن) آنها بعد از برخورد است، فرقی هم نمی‌کند که ذرات برخوردکننده چه جرمی داشته باشند.

برای اینکه سرعتهای بعد از برخورد، یعنی v_{1f} و v_{2f} را از سرعتهای قبل از برخورد، یعنی v_{1i} و v_{2i} تعیین کنیم معادله‌های ۱۴ و ۱۲ را ترکیب می‌کنیم تا v_{2f} را حذف و v_{1f} را به دست بیاوریم

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (25)$$

به همین ترتیب، می‌توانیم v_{1f} را حذف و v_{2f} را تعیین کنیم

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (16)$$

روابط ۱۵ و ۱۶، که در تمام چارچوبهای لخت برقرارند، نتایجی کلی هستند که امکان محاسبه سرعتهای نهایی را در هر چارچوبی دارند. مثلاً $v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$

سرعت v_{1i} حرکت می‌کند و پاره دیگر به جرم $(M - m_1)$ با سرعت v_{2i} در خلاف جهت به حرکت درمی‌آید. این نتیجه، حتی اگر انفجار مقدار معنایه‌ای انرژی جنبشی به پاره‌ها بدهد، به همین صورت معتبر است. در حالت خاصی که $v_{1i} = v_{2i}$ (جسم اولیه در حال سکون) باشد، داریم $-m_2/v_{2i} = m_1/v_{1i}$. یعنی، همان‌طور که انتظار می‌رود و لازمهٔ صفر شدن تکانه کل است، ذره سنگیتر سرعت کمتری دارد و دو ذره در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند. در بخش ۷-۱۰ کاربرد این اصل را در مورد فرایندهای واپاشی خودبه‌خود بررسی خواهیم کرد.

مثال ۲. (الف) انرژی جنبشی یک نوترون (جرم m_1) در برخورد رو در روی کشسان با یک هسته اتم (به جرم m_2) که در ابتدا ساکن است، با چه کسری کاهش می‌یابد؟ (ب) این کاهش نسبی انرژی نوترون را برابر با برخوردهای کشسان با هسته سرب، هسته کربن، و هسته هیدروژن پیدا کنید. نسبت جرم هسته به جرم نوترون (m_2/m_1) برای سرب ۲۰۶، برای کربن ۱۲ و برای هیدروژن برابر با ۱ است.

حل: (الف) انرژی جنبشی اولیه نوترون، K_i (که ناسیبیتی فرض می‌شود) برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$. انرژی جنبشی نهایی نوترون برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2$. کاهش نسبی در انرژی جنبشی عبارت است از

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

اما برای چنین برخوردی می‌دانیم (معادله ۱۸) که

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

(ب) در مورد سرب داریم $m_2 = ۲۰۶m_1$

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(206m_1)}{(207m_1)^2} = 0.2 = 20\%$$

در مورد کربن $m_2 = 12m_1$ است، پس

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0.28 = 28\%$$

و برای اتم هیدروژن داریم $m_2 = m_1$ ، یعنی

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1 = 100\%$$

این نتایج نشان می‌دهند که چرا موادی مانند پارافین، که هیدروژن زیادی دارد، در کنده کردن نوترونها بسیار مؤثرتر از مواد سنگینی نظیر

باشند. باز می‌جهد) در حالی که اتم هدف اساساً از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد و بر جا می‌ماند.

۴. پرتتابهٔ پرجرم. وقتی $m_2 \gg m_1$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به صورت زیر درمی‌آیند

$$(21) \quad v_{1i} - v_{2i} \approx 2v_{1f} \quad \text{و} \quad v_{1f} \approx v_{1i}$$

ذره هدف کم‌جرم اگر در آغاز ساکن باشد (یا خیلی کندر از m_1 حرکت کند)، پس از برخورد با سرعتی معادل دو برابر سرعت m_1 به حرکت درمی‌آید. ذره m_1 پس از برخورد به هدف (که خیلی سبکتر است) تقریباً بدون تغییر سرعت به حرکتش ادامه می‌دهد.

در پراکنگی ذره آلفا (شکل ۲)، ذره آلفا فرودی (که جرم آن تقریباً 8000 برابر جرم الکترون است) اساساً حرکتش در برخورد با الکترونهای انتهای هدف، تغییر نمی‌کند (شاهدش تعداد زیاد ردهای مستقیم الخط در شکل ۲ است). ذره آلفا فقط در برخوردهای نادر با هسته سنگین اتم هدف منحرف می‌شود.

برخوردهای ناکشسان

اگون برخوردهای ناکشسان را، که در آنها بنایه تعریف انرژی جنبشی پایسته نیست و البته تکانه کل همچنان پایسته است، بررسی می‌کنیم. اگرچه پایستگی انرژی کل هم معتبر است. ولی منظور کردن صورت‌های دیگر انرژی، جز انرژی جنبشی، جملات دیگری به معادله ۱۱ می‌افزاید و تا توانیم تبدیلات انرژی (مثلًاً اینکه قدر انرژی داخلی به انرژی جنبشی تبدیل شده است) را دقیقاً مشخص کنیم، دستگاه معادلات قابل حل نخواهیم داشت.

در یک مورد خاص، یعنی در برخورد کاملاً ناکشسان، نتیجه نهایی را می‌توانیم از مقادیر اولیه پیدا کنیم. در این مورد، ذرات پس از برخورد به هم می‌چسبند و با سرعت نهایی v_f به حرکت درمی‌آیند. به این ترتیب تنها یک مجھول داریم که معادله تکانه (معادله ۱۰) برای پیدا کردن آن کفایت می‌کند. اگر در این معادله به جای v_{1f} و v_{2f} سرعت مشترک v_f را قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$(22) \quad v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

وقتی جرم m_2 در ابتدا ساکن باشد، معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$(23) \quad v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

سرعت جسم m_1 به نسبت $(m_1/(m_1 + m_2))$ کم می‌شود. هر چه m_1 بزرگتر باشد، مجموعه تندتر حرکت می‌کند؛ و هر چه m_1 کوچکتر باشد کندر.

معادله ۲۲ را می‌توانیم به همین خوبی به صورت وارونه هم به کار ببریم؛ یعنی به این صورت که جسمی به جرم M که با سرعت v_f در حرکت است به دو پاره تقسیم می‌شود، یک پاره به جرم m_1 با $Ramin.samad@yahoo.com$

در راستای افقی داریم

$$mv = (M + m)V$$

که در آن v سرعت گلوله قبل از برخورد و V سرعت مجموعه گلوله و قطعه چوب پس از برخورد است. انرژی مکانیکی در حین برخورد گلوله و قطعه چوب مطمعناً پایسته نیست، اما بعد از برخورد برای آونگی که تاب می‌خورد پایسته است. به این ترتیب انرژی جنبشی مجموعه، وقتی در پایین‌ترین نقطه مسیر قوسی اش واقع می‌شود، باید برابر با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطه این مسیر باشد، یعنی

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh$$

اگر V را از دو معادله بالا حذف کنیم نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{M + m}{m} \right) \sqrt{2gh} \\ &= \left(\frac{544\text{kg} + 900\text{kg}}{900\text{kg}} \right) \sqrt{(2)(9,8\text{m/s}^2)(0,63\text{m})} \\ &= 630\text{m/s} \end{aligned}$$

می‌توانیم آونگ بالیستیک را نوعی مبدل یدانیم که سرعت زیاد یک جسم سبک (گلوله) را به سرعت کم یک جسم سنگین (قطعه چوب) تبدیل می‌کند تا اندازه‌گیری آسانتر باشد.

(ب) انرژی جنبشی گلوله برابر است با

$$K_b = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(630\text{m/s})(630\text{m/s}) = 1900\text{J}$$

انرژی مکانیکی آونگ در حال تاب خوردن برابر است با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطه مسیر، یعنی

$$\begin{aligned} E &= (M + m)gh \\ &= (544\text{kg} + 900\text{kg})(9,8\text{m/s}^2)(0,63\text{m}) \\ &= 373\text{J} \end{aligned}$$

به این ترتیب فقط $373/1900$ یا 20% از انرژی جنبشی اولیه گلوله به انرژی مکانیکی آونگ تبدیل شده است. بقیه انرژی در داخل قطعه چوب به صورت انرژی داخلی ذخیره می‌شود، یا به صورت گرمای و امواج صوتی به محیط منتقل می‌شود.

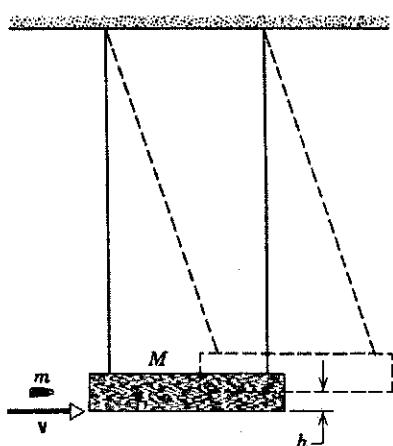
۵-۱۰ برخورد در دو بعد

اگر دو ذره به صورتی غیر از رو در رو با هم برخورد کنند، ممکن است در راستاهایی غیر از راستاهای اولیه‌شان به حرکت در بیاند. شکل ۱۲ چنین برخوردی را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات را چنان اختیار کنید که x داشته باشد، و محاسبات تا حدودی ساده‌تر

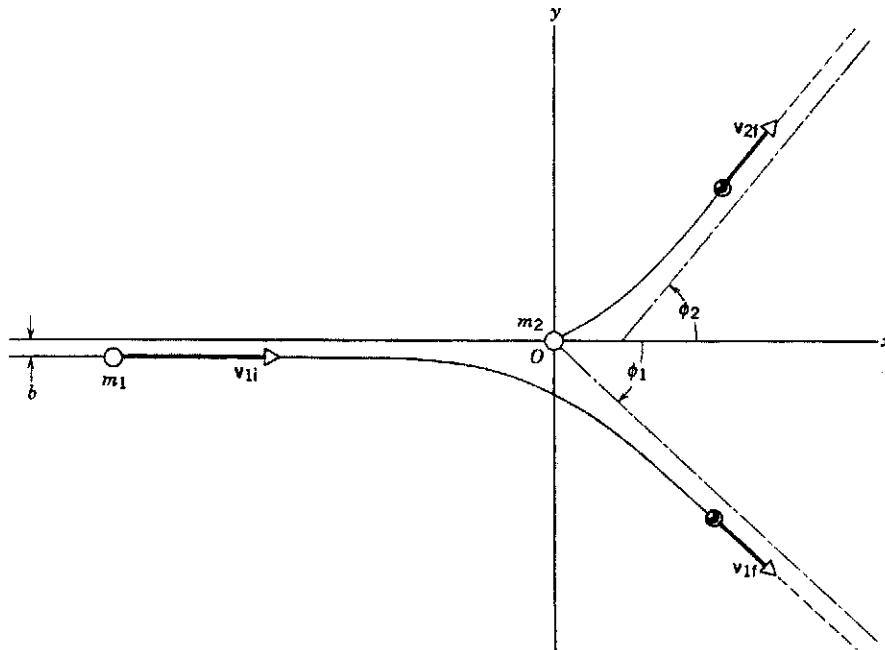
سرب هستند. توجه داشته باشید که برخوردها، آن‌طور که ما در این بخش فرض کردیم، همیشه هم "رو در رو" نیستند. در برخوردهای "یکبری" که معمول تر است، اگرچه نوترنون همه‌انرژی اش را به هیدروژن ساکن نمی‌دهد، اما به هر حال در مواد هیدروژن‌دار انرژی بیشتری از دست می‌دهد تا در موادی نظیر کربن یا سرب.

از شکافت اورانیم در راکتور هسته‌ای نوترنها باین‌جا با انرژی جنبشی نسبتاً زیاد، در محدوده MeV، تولید می‌شود و برای ایجاد واکنش زنجیره‌ای، باید از این نوترنها برای شکافتهای دیگر استفاده کرد، ولی با افزایش انرژی جنبشی نوترن، احتمال وقوع شکافت سریعاً کاهش پیدا می‌کند. بنابراین لازم است که نوترنها را کند یا آرام کنیم تا انرژی آنها به محدوده eV برسد، که در این محدوده احتمال وقوع شکافت تقریباً سه مرتبه بزرگی بیشتر است. محاسبه‌بالا، با آنکه مبنی بر فرضهای ساده‌کننده است، نشان می‌دهد که مواد غنی از هیدروژن، مانند آب پارافین، "آرامساز"‌های مناسبتری هستند.

مثال ۳. آونگ بالیستیک (شکل ۱۱) ابزاری است که از آن، قبل از به میدان آمدن زمان سنجهای الکترونیکی، برای تعیین سرعت گلوله‌ها استفاده می‌شود. این وسیله تشکیل شده است از یک قطعه چوب بزرگ به جرم M ، که با در رشتہ رسیمان آویزان شده است. گلوله‌ای به جرم m به قطعه چوب شلیک می‌شود و سریعاً نسبت به آن به حال سکون درمی‌آید. مجموعه قطعه چوب و گلوله به طرف بالا تاب می‌خورد، و مرکز جرم مجموعه، قبل از سکون لحظه‌ای، به اندازه مسافت h در راستای قائم جایه‌جا می‌شود. فرض کنید جرم قطعه چوب $544\text{kg} = M$ و جرم گلوله $90\text{g} = 0,09\text{kg}$ باشد. (الف) اگر قطعه چوب تا ارتفاع $6\text{m} = h$ سانتی‌متر بالا برود، سرعت اولیه گلوله چقدر بوده است؟ (ب) انرژی جنبشی اولیه گلوله چقدر است؟ چه مقدار از این انرژی به صورت انرژی مکانیکی در آونگ باقی می‌ماند؟ حل: (الف) وقتی گلوله با آونگ برخورد می‌کند، از پایستگی تکانه



شکل ۱۱. مثال ۳. آونگ بالیستیک، که برای اندازه‌گیری سرعت گلوله از آن استفاده می‌شود.



شکل ۱۲. دو ذره با هم برخورد می‌کنند. مکان آنها قبیل از برخورد با دایره‌های توخالی و بعد از برخورد با دایره‌های تویر نشان داده‌ایم، پارامتر برخورد، b ، در واقع فاصله "بری بودن" از برخورد رود روست.

طرف محور x است، بنابراین جمع مؤلفه‌های y تبدیل به تقاضل جبری می‌شود:

$$\begin{aligned} p_{iy} &= p_{fy} \\ \circ &= m_1 v_{1i} \sin \phi_1 - m_2 v_{2f} \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (25)$$

اگر برخورد کشسان باشد، پایستگی انرژی برقرار است. از برابر قرار دادن انرژی جنبشی اولیه با انرژی جنبشی نهایی داریم

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (26)$$

اگر شرایط اولیه معلوم باشد ($v_{1i}, m_1, m_2, \phi_1, \phi_2$)، در معادله‌های ۲۴ تا ۲۶ چهار مجهول وجود دارد (v_{1f}, v_{2f}) ولی فقط سه معادله داریم که آنها را به هم مربوط می‌کند. برای چنین دستگاهی از معادلات چند مجهولی نامعین هیچ جواب منحصر به فردی وجود ندارد؛ یا در واقع بینهایت جواب وجود دارد. برای رسیدن به یک جواب واحد باید یک قید یا یک محدودیت دیگر به شرایط اولیه اضافه کنیم. مثلاً می‌توانیم انتخاب کنیم که ذره ۱ را تحت زاویه مشخص ϕ_1 مشاهده کنیم (مثال ۴). چنین شرطی را که اعمال کردیم، می‌توانیم سه معادله را برای بدست آوردن سه مجهول باقی‌مانده حل کنیم.

مثال ۴. یک مولکول گاز که با سرعت 322 m/s در حرکت است به طور کشسان با مولکول دیگری با همان جرم که ساکن است برخورد می‌کند. بعد از برخورد، مولکول اول در راستایی که با امتداد سرعت اولیه‌اش زاویه 30° می‌سازد، به حرکت درمی‌آید. سرعت هر یک از مولکولها را پس از برخورد و همچنین زاویه راستایی حرکت مولکول هدف با راستای حرکت مولکول فروضی را تعیین کنید.

شود. فرض کردیم که ذره هدف، m_2 ، در ابتدا ساکن است. فاصله b بین خط حرکت ذره فروضی و خطی که به موازات آن از مرکز m_2 می‌گذرد، پارامتر برخورد نامیده می‌شود. برخورد رود رو متاظر است با $= b$ و مقادیر بزرگتر b معرف برخوردهای یکبری تر (سیکلت) است. شکل ۱۲ می‌تواند مثلاً نشان‌دهنده برخورد دو هسته تحت تأثیر نیروی رانشی الکتروستاتیکی می‌باشد: نیرو به عکس مجدور فاصله بین دو هسته بستگی دارد، و برای برخورد لازم نیست که هسته‌ها واقعاً با هم تماس پیدا کنند. در فواصلی که به قدر کافی دور باشند، نیرو کوچک می‌شود و ذرات بی‌آنکه اساساً متأثر از نیرو باشند در امتداد خطهای راست حرکت می‌کنند.

صرفنظر از اینکه چه نیرویی بین ذرات اثر می‌کند، تکانه باید پایسته باشد. نیروی بین ذرات یک نیروی داخلی است، و نمی‌تواند تکانه کل سیستم دو ذره‌ای را تغییر بدهد. به علاوه، چون تکانه بردار است، می‌دانیم که مؤلفه‌های x و y دو معادله مستقل اسکالار به دست می‌دهند. در راستای x ، تکانه اولیه برابر است با $m_1 v_{1i}$ ، و تکانه نهایی کل برابر است با مجموع مؤلفه‌های x تکانه‌های نهایی دو ذره

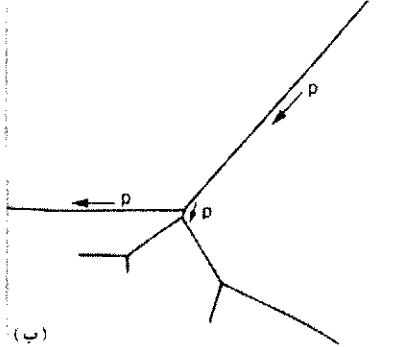
$$\begin{aligned} p_{ix} &= p_{fx} \\ m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f} \cos \phi_1 + m_2 v_{2f} \cos \phi_2 \end{aligned} \quad (24)$$

در اینجا جهتهای بردارهای v_{1f} و v_{2f} را به ترتیب با زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 مشخص کردیم؛ پس در معادله ۲۴ کمیتهای v_{1f} و v_{2f} مقدار سرعتها را نشان می‌دهند و همواره مثبت‌اند. این با معادله‌های ۱۵ و ۱۶ یا معادله ۲۲، که در آنها با مؤلفه بردار سرعت سروکار داشتیم که ممکن بود مثبت یا منفی باشند، فرق می‌کند.

مؤلفه y تکانه اولیه صفر است (البته به خاطر انتخاب مناسب محورهای مختصات) و مؤلفه y تکانه نهایی عبارت است از اختلاف بین مؤلفه‌های y تکانه‌های دو ذره (زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2) را در دو



(الف)



(ب)

شکل ۱۳. (الف) چهاربرخورد پروتون-پروتون دریک اتاقک حباب. (ب) نمایش نموداری مسیرهای پروتونهای برخوردهای پروتون برخوردهای پروتون اصلی از قسمت بالا سمت راست وارد اتاقک می‌شود. همه ردها در صفحه تصویر قرار ندارند، و مشاهده استریوسکوپیکی شناس می‌دهد که، طبق انتظار، زاویه بین ذره فرودی و ذره هدف پس از هر برخورد 90° است. سایر ردهای موجود در تصویر ناشی از مزونها (انحنای جزئی) و الکترونها (حلزونیهای درهم فشرده) هستند.

این برخوردها وقتی روی می‌دهند که یک پروتون پرانزی وارد اتاقک حبابی می‌شود که پر از هیدروژن مایع است. مولکولهای هیدروژن مایع نقش پروتونهای هدف را دارند. مسیر ذرات به وسیله رددبایهای بهجا مانده از آنها قابل مشاهده می‌شود. چون جرم ذرات برهمنش کننده یکسان است و برخوردها هم یکساناند، ذرات خروجی با هم زاویه قائمه می‌سازند؛ مسیرهای شکل ۱۳ با روش استریوسکوپیک [برجسته نمایی] به خوبی آشکار می‌شوند. نمونه دیگری از این دست در شکل ۲ آمده است.

برخوردهای ناکشسان در دو بعد

در برخورد ناکشسان، دیگر معادله ۲۶ معتبر نیست. معمولاً می‌توانیم این معادله را با عبارت معادلی جایگزین کنیم که انرژی تبدیل شده به انرژی جنبشی یا انرژی جنبشی تبدیل شده به صورتهای دیگر را منظور کند و در نتیجه رابطه‌ای بین انرژی جنبشی اولیه و انرژی جنبشی نهایی به دست بدهد.

در برخورد کاملاً ناکشسان در دو بعد باید با دو جسم در حال حرکت آغاز شود. (چرا؟) باز هم دستگاه مختصات را چنان انتخاب رشته‌ای از چهار برخورد کشسان پیابی بین پروتونها را θ می‌دانیم که $\theta = \arctan \frac{v_{1f} - v_{1i}}{v_{2f} - v_{2i}}$.

حل: این مثال دقیقاً مربوط می‌شود به معادله‌های ۲۴ تا ۲۶، وقتی که $m_1 = m_2 = 322 \text{ m/s}$, $v_{1i} = 30^\circ$ و $\phi_1 = 30^\circ$ باشد. اگر m_1 را برابر m_2 بگیریم معادلات به صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \phi_1 + v_{2f} \cos \phi_2 \quad (27)$$

$$v_{1f} \sin \phi_1 = v_{2f} \sin \phi_2 \quad (28)$$

و

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (29)$$

حالا باید این معادله‌ها را برای به دست آوردن v_{1f} , v_{2f} و ϕ_2 حل کنیم. برای انجام این کار ابتدا ϕ_2 را با مربع کردن معادله ۲۷ (که قیلاً آن را به صورت $v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f} \cos \phi_2$ داریم) و افزودن آن به مربع معادله ۲۸، حذف می‌کنیم. با توجه به اینکه $\sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_2 = 1$

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f}^2$$

از ترکیب این رابطه با معادله ۲۹ (مشروط بر اینکه $v_{1f} \neq 0$ باشد) به دست می‌آوریم

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \phi_1 = (322 \text{ m/s}) (\cos 30^\circ) = 279 \text{ m/s}$$

از معادله ۲۹ نتیجه می‌شود که

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (322 \text{ m/s})^2 - (279 \text{ m/s})^2$$

یا

$$v_{2f} = 161 \text{ m/s}$$

سرانجام، از معادله ۲۸ داریم

$$\begin{aligned} \sin \phi_1 &= \frac{v_{1f}}{v_{2f}} \sin \phi_2 \\ &= \frac{279 \text{ m/s}}{161 \text{ m/s}} \sin 30^\circ = 0.866 \end{aligned}$$

با

$$\phi_2 = 60^\circ$$

دو مولکول در راستاهای متعامد از همدیگر دور می‌شوند (در شکل ۱۲ داریم $\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$).

باید بتوانید نشان بدید که در برخورد کشسان بین دو ذره با جرم‌های مساوی، که یکی از آنها در ابتدا ساکن است، امتدادهای حرکت ذرات خروجی همیشه با هم زاویه قائمه می‌سازند. شکل ۱۳ رشته‌ای از چهار برخورد کشسان پیابی بین پروتونها را θ می‌دانیم که $\theta = \arctan \frac{v_{1f} - v_{1i}}{v_{2f} - v_{2i}}$.

به سمت شرق، و دیگری که جرمش $m_B = 55\text{kg}$ است با سرعت $v_B = 8,8\text{km/h}$ به سمت شمال حرکت می‌کند. (الف) سرعت مشترک آنها پس از برخورد، \mathbf{V} ، چقدر است؟ (ب) تغییر نسبی در انرژی جنبشی اسکیت بازان در اثر برخورد چقدر است؟

حل: (الف) تکانه در طی برخورد پایسته است. برای دو مؤلفه تکانه می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$m_A v_A = M V \cos \phi \quad :x \quad (32)$$

$$m_B v_B = M V \sin \phi \quad :y \quad (33)$$

که در آن $M = m_A + m_B$ است. از تقسیم معادله ۳۳ بر معادله ۳۲ نتیجه می‌شود

$$\tan \phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\text{kg})(8,8\text{km/h})}{(83\text{kg})(6,4\text{km/h})} = 0,911$$

یا

$$\phi = \tan^{-1} 0,911 = 42,3^\circ$$

از معادله ۳۳ نتیجه می‌گیریم که

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin \phi} = \frac{(55\text{kg})(8,8\text{km/h})}{(83\text{kg} + 55\text{kg})(\sin 42,3^\circ)} = 5,21\text{km/h}$$

(ب) انرژی جنبشی اولیه عبارت است از

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \\ &= \frac{1}{2} (83\text{kg})(6,4\text{km/h})^2 + \frac{1}{2} (55\text{kg})(8,8\text{km/h})^2 \\ &= 3830\text{kg km}^2/\text{h}^2 \end{aligned}$$

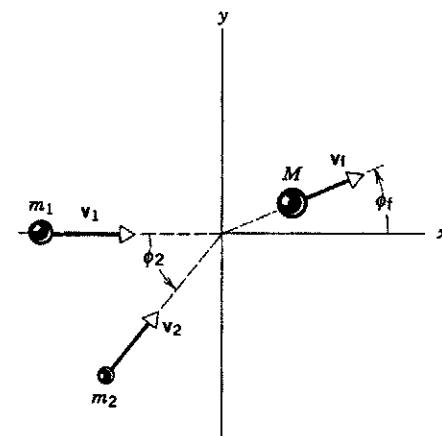
انرژی جنبشی نهایی برایر است با

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} M V^2 \\ &= \frac{1}{2} (83\text{kg} + 55\text{kg})(5,21\text{km/h})^2 \\ &= 1870\text{kg km}^2/\text{h}^2 \end{aligned}$$

آن کسری از انرژی که در جستجویش هستیم این است

$$f = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{1870\text{kg km}^2/\text{h}^2 - 3830\text{kg km}^2/\text{h}^2}{3830\text{kg km}^2/\text{h}^2} = -0,51$$

يعني ۵۱٪ از انرژی جنبشی اولیه در برخورد به هدر رفته است. این انرژی باید به هر حال به صورت انرژی داخلی دواستیت باز هدر شده باشد.



شکل ۱۴. یک برخورد کاملاً ناکشسان در دو بعد. ذراتی با جرم‌های m_1 و m_2 با هم برخورد می‌کنند و تبدیل به جسم مركبی به جرم M می‌شوند.

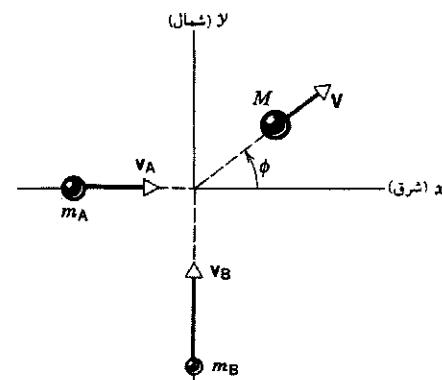
برخورد را چنان تنظیم می‌کنیم که دو ذره در مبدأ به هم برسند و با هم یکی شوند. در این صورت جسم مركب با سرعت v_f در راستای ϕ_f حرکت می‌کند (شکل ۱۴). پایستگی تکانه برای مؤلفه‌های x و y نتایج زیر را بدست می‌دهد

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2y} \cos \phi_f = M v_f \cos \phi_f \quad :x \quad (30)$$

$$m_2 v_{2y} \sin \phi_f = M v_f \sin \phi_f \quad :y \quad (31)$$

که در آن $M = m_1 + m_2$ جرم کل مجموعه پس از برخورد است. چون پس از برخورد، فقط یک سرعت (مقدار و جهت) برای جسم مركب داریم، چهار مجھول مورد مربوط به برخورد کشسان به دو مجھول، v_f و ϕ_f ، کاهش می‌یابد و فقط دو معادله (معادله‌های ۳۰ و ۳۱) برای بدست آوردن یک جواب یکتا کافی است.

مثال ۵. دواستیت باز یک برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند. یعنی پس از برخورد، دست در دست هم حرکت می‌کنند (شکل ۱۵). در $v_A = 6,4\text{km/h}$ با سرعت $m_A = 83\text{kg}$ ابتدا یکی از آنها به جرم $M = 55\text{kg}$ با سرعت



شکل ۱۵. دواستیت باز (A) و (B) برخوردی کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند و پس از برخورد در راستای مشخص شده با ϕ به حرکت در می‌آیند.

حالا می‌توانیم سرعتهای اولیه جسمهای m_1 و m_2 را در چارچوب متحرک تعیین کنیم

$$\begin{aligned} v'_{1i} &= v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} v'_{2i} &= v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (37)$$

سرعتهای نهایی اجسام در چارچوب آزمایشگاه را هم (که در معادله ۱۸ آمده است) می‌توانیم به سرعتهای نظیر در چارچوب مرکز جرم تبدیل کنیم

$$\begin{aligned} v'_{1f} &= v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} v'_{2f} &= v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (39)$$

به تقارن این نتایج توجه کنید. در چارچوب مرکز جرم، در برخورد فقط جهت سرعت جسمهای m_1 و m_2 وارونه می‌شود، به این ترتیب که سرعت جسم m_1 از m_2 با $v_{1i} / (m_1 + m_2) + m_2 v_{1i} / (m_1 + m_2)$ تغییر می‌کند و سرعت جسم m_2 از $-m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2) - m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2) + m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2)$ تبدیل می‌شود. یک رشته تصویرهای لحظه‌ای برخورد در چارچوب مرکز جرم در شکل ۱۶ ب نشان داده شده است. در این چارچوب مرجع خاص، حرکت هر ذره شیوه به حرکت توپی است که از یک سطح سخت بازمی‌جهد، ذره دیگر در آنجا حضور دارد تا ضربه لازم برای وارونی حرکت را تأمین کند. این هم روشن است که در این چارچوب مرجع، انرژی جنبشی کل در حین برخورد ثابت می‌ماند. (در واقع، جداگانه برای هر یک از ذره‌ها ثابت می‌ماند). با مشاهده برخورد از این دیدگاه، درک تازه‌ای از مفهوم برخورد "کشسان" پیدا می‌کنیم.

اکنون یک برخورد کاملاً ناکشسان یک بعدی را از دیدگاه چارچوب مرکز جرم بررسی می‌کنیم. باز هم فرض می‌کنیم جسم m_1 بر جسم m_2 (عنی $m_1 = 3m_2$) که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است فرود می‌آید. پس از برخورد جسم مرکبی به جرم $M = m_1 + m_2$ داریم. سرعت مرکز جرم باز هم از معادله ۳۴ بدست می‌آید. تصویرهای لحظه‌ای در شکل ۱۷ االف برخورد را در چارچوب آزمایشگاه نشان می‌دهد؛ اینجا هم مرکز جرم قبل و بعد از برخورد با سرعت یکسانی حرکت می‌کند. تبدیل سرعتهای اولیه جسمهای m_1 و m_2 دقیقاً مانند مورد عالیه های ۳۶ و ۳۷ انجام می‌شود. سرعت نهایی

۱۵-۶ چارچوب مرجع مرکز جرم
در عمل، وقتی آزمایشهای برخورد انجام می‌شوند، اندازه‌گیریها به طور عادی در چارچوب مرجعی که در آزمایشگاه ساکن است (چارچوب آزمایشگاه) صورت می‌گیرند. این نوع آزمایشها در اغلب موارد شامل پرتابهای است که بهسوی هدفی ساکن در آزمایشگاه پرتاب می‌شود. از طرف دیگر، در اکثر آزمایشهای مربوط به فیزیک ذرات، دو ذره با جرم و سرعت یکسان (دو پروتون یا شاید دو الکترون) مستقیماً بهسوی یکدیگر شلیک می‌شوند. صرفنظر از چگونگی انجام آزمایش، بررسی و تحلیل برخورد در چارچوب مرجعی که به مرکز جرم ذرات برخورده کننده متصل باشد (چارچوب مرکز جرم) عموماً ساده‌تر است، و درک فیزیکی روشنتری فراهم می‌کند.

مثلاً مورد ساده برخورد کشسان یک بعدی (رودررو) بین دو ذره یکسان را در نظر بگیرید. اگر یکی از ذرات (هدف) در چارچوب آزمایشگاه ثابت باشد، ذره دیگر (ذره فرودی که در ابتدا با سرعت v در حرکت است) پس از برخورد متوقف می‌شود و ذره هدف با سرعت v به سمت جلو به حرکت درمی‌آید. اما در چارچوب مرجع مرکز جرم، دو ذره قبل از برخورد هر یک با سرعت $v/2$ به طرف هم‌دیگر حرکت می‌کنند و پس از برخورد هم با همان سرعت از هم دور می‌شوند. دیگر بین پرتابه و هدف وجه تمایزی وجود ندارد و توصیف رویداد در این چارچوب کاملاً متقاض است.

در شکل ۱۶ االف یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" از یک برخورد کشسان بین یک ذره متحرک به جرم m_1 و یک ذره ساکن به جرم $m_2 = 3m_1$ را نشان داده‌ایم. چون در حین برخورد فقط نیروهای داخلی مؤثرند، همان‌طور که در شکل ۱۶ االف می‌بینیم، حرکت مرکز جرم در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. مرکز جرم دو جسم m_1 و m_2 ، که با معادله ۴ فصل ۹ تعریف می‌شود، قبل و بعد از برخورد با همان سرعت ثابت v_{cm} حرکت می‌کند.

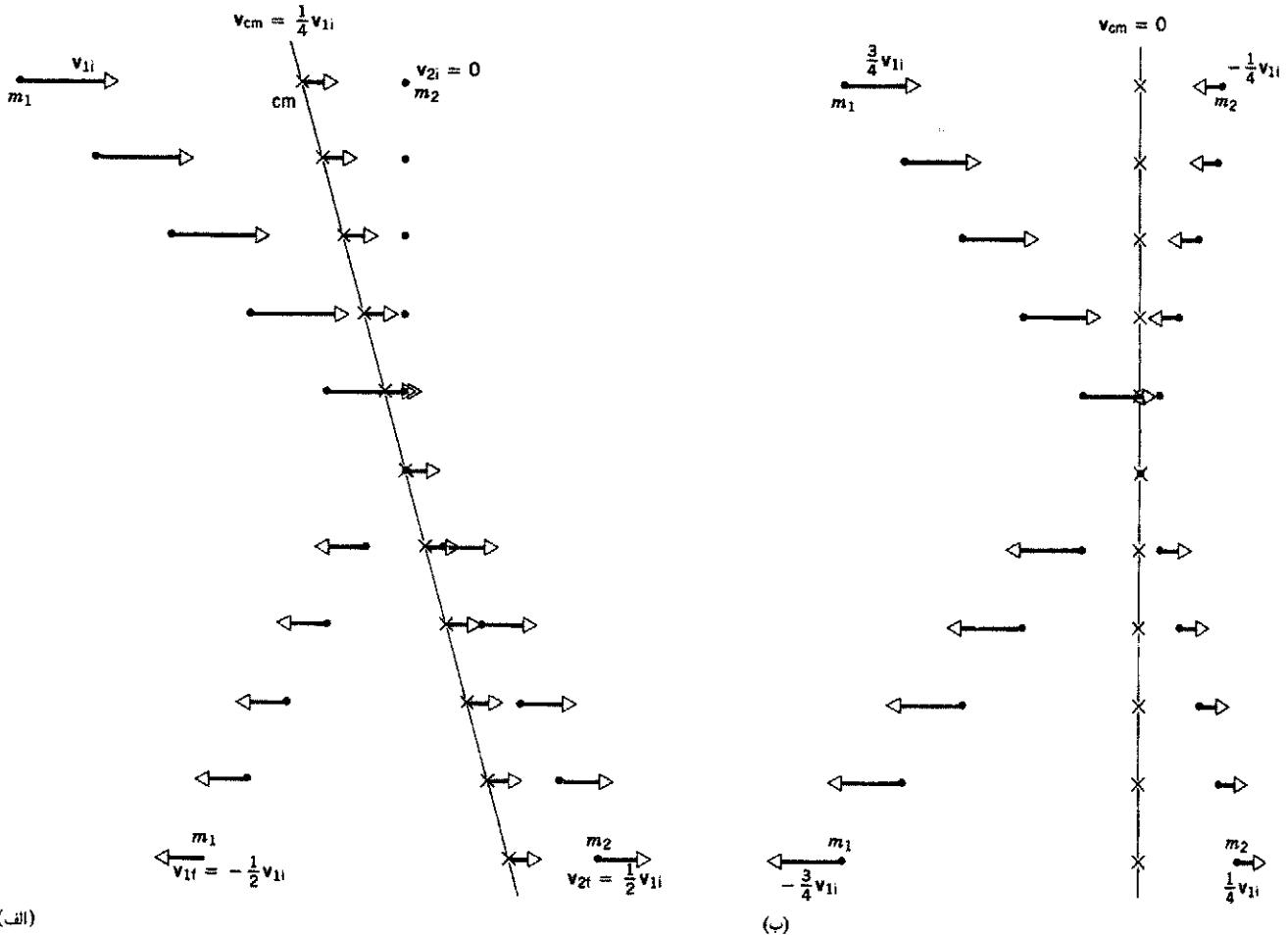
سرعت مرکز جرم از معادله ۵ فصل ۹ بدست می‌آید

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (34)$$

که در این مورد $v_{2i} = 0$ بوده است. اکنون می‌خواهیم نمودار همین برخورد را از دیدگاه چارچوب مرجع متحرکی که نسبت به آزمایشگاه با سرعت v_{cm} در حرکت است رسم کنیم. این چارچوب همان چارچوب مرجع مرکز جرم است. سرعتهای اجسام m_1 و m_2 در این چارچوب را می‌توانیم از معادله ۴۳ بخش ۶-۴ (مربوط به تبدیلات سرعت بین چارچوبهای مرجع) بدست بیاریم

$$v = v' + u \quad (35)$$

که در آن v سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب آزمایشگاه، v' سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب متحرک نسبت به آزمایشگاه، و u سرعت نسبی دو چارچوب مرجع است. در مورد مسئله‌ای که در دست بررسی داریم، چارچوب متحرک همان چارچوب مرکز جرم v_{cm}



(الف)

(ب)

شکل ۱۶. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" مربوط به دو ذره با جرم‌های m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به طور ناکشسان در یک بعد با هم برخورد می‌کنند. مرکز جرم دو ذره با علامت \times مشخص شده است. (الف) چارچوب مرتع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرتع مرکز جرم.

هم ترکیب شدند، تکانه جسم مرکب باید صفر شود.
برخورد کاملاً ناکشسان در چارچوب مرتع مرکز جرم خاصیت جالب دیگری هم دارد. در چارچوب آزمایشگاه، انرژی جنبشی از دست رفته (یعنی تبدیل شده به انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل و مانند اینها) همواره کمتر از ۱۰۰٪ است! مثلاً در برخورد بین دو ذره هم‌جرم، که در ابتدا یکی از آنها ساکن است، اتفاق انرژی جنبشی ۵۰٪ است. در چارچوب مرکز جرم اتفاق همیشه ۱۰۰٪ است، و فرقی هم نمی‌کند که m_1 و m_2 چه مقادیری داشته باشند. وقتی منظور از برخورد دادن ذرات تبدیل انرژی جنبشی به صورتهای دیگر انرژی باشد، صرفه در آن است که نه تنها نتایج را در چارچوب مرکز جرم تحلیل کنیم بلکه آزمایش را هم واقعاً در آن چارچوب انجام بدھیم.

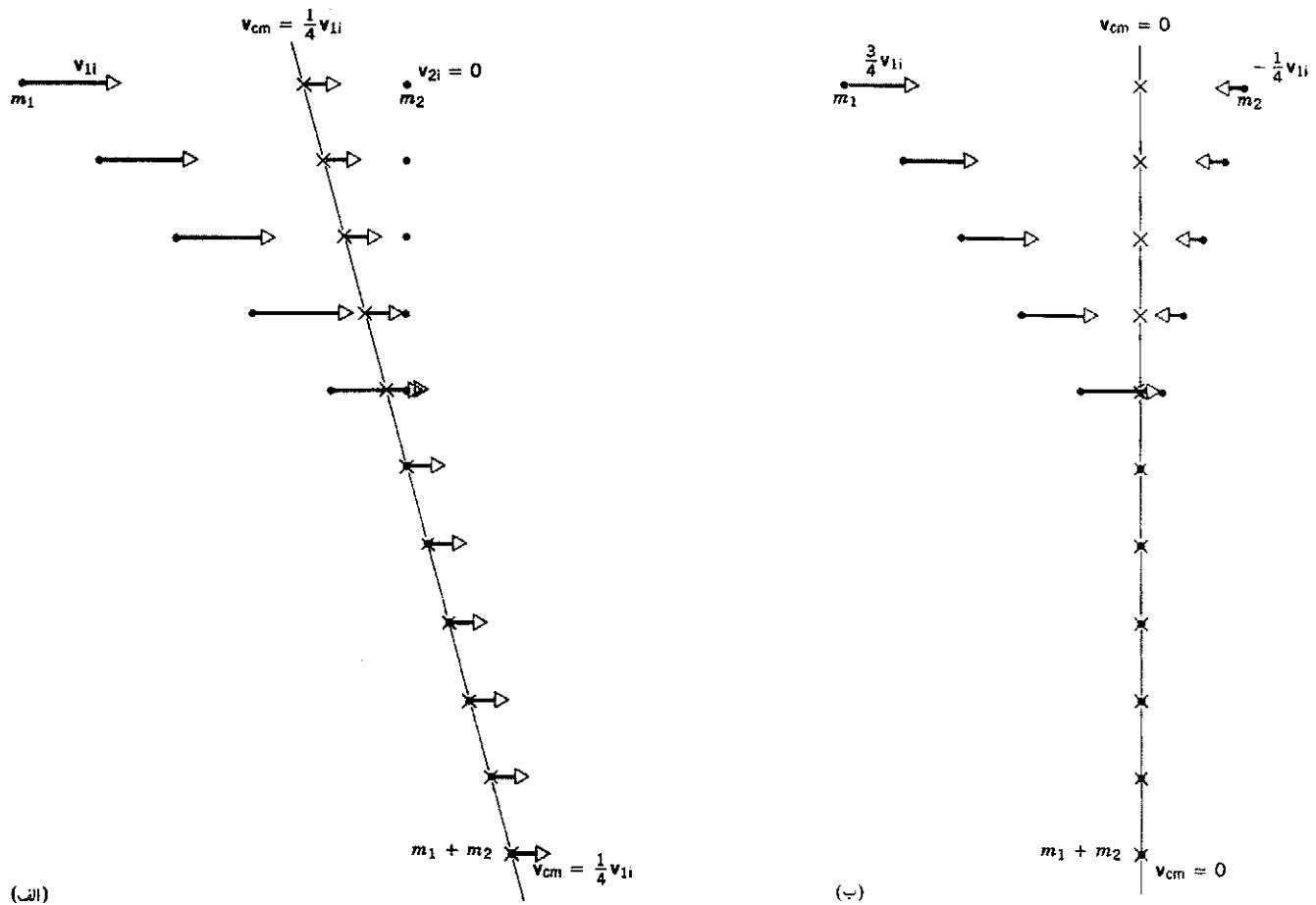
در مطالعه خواص ذرات بنیادی طبیعت، اغلب منظورمان این است که ذرات پر انرژی را به هم بکوییم تا ذرات جدید و غریبی با جرم‌های بیشتر تولید کنیم؛ در این مورد، انرژی جنبشی در طی برخورد به انرژی سکون، $m c^2$ ، ذرات دیگر تبدیل می‌شود. انرژی قابل حصول

جسم M در چارچوب مرکز جرم را می‌توان از تبدیل نتیجه کلی v_f در چارچوب آزمایشگاه، معادله ۲۳، بدست آورد

$$v'_f = v_f - v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} = 0$$

البته این نتیجه همان است که انتظار می‌رود و نباید عجیب باشد. جسم مرکب M همواره در مرکز جرم واقع می‌شود، زیرا شامل تمام جرم موجود در سیستم بعد از برخورد است. در چارچوب آزمایشگاه، M باید با سرعت مرکز جرم حرکت کند، و چنانچه معادله‌های ۲۳ و ۳۴ را مقایسه کنید می‌بینید که واقعاً با همین سرعت حرکت می‌کند. در چارچوب مرتعی که در آن مرکز جرم ساکن است، M هم باید در حال سکون باشد.

در چارچوب مرکز جرم (شکل ۱۷ ب) باز هم تقارن وجود دارد: قبل از برخورد، اجسام m_1 و m_2 با تکانه‌های مساوی ولی در خلاف جهت به هم‌دیگر تردیدک می‌شوند. پس از آنکه به هم برخورده با



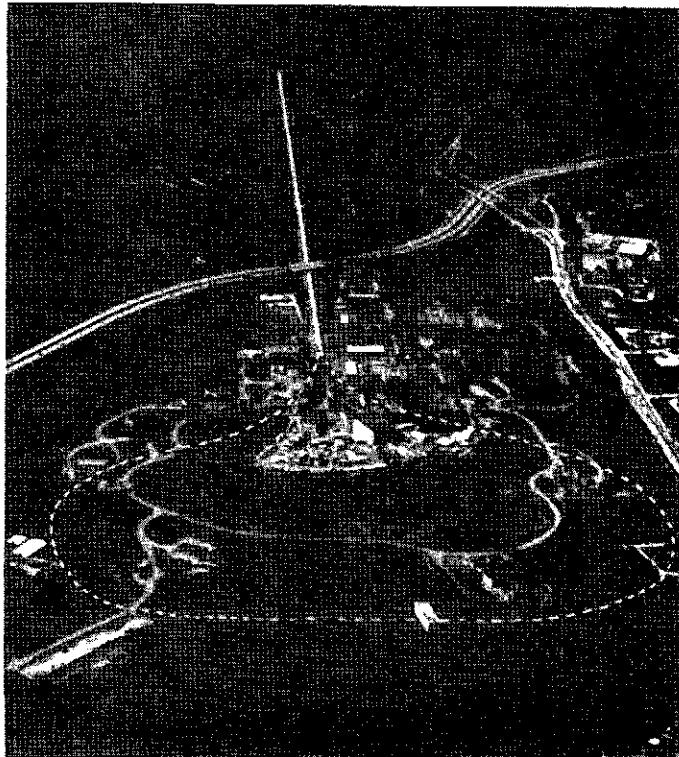
(الف)

(ب)

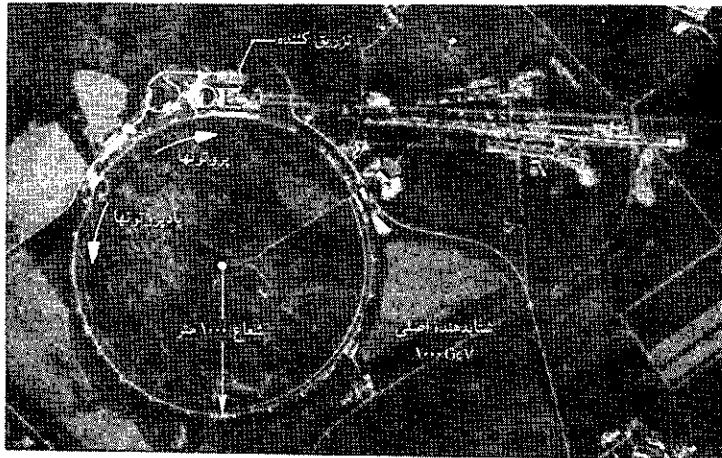
شکل ۱۷. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" دو ذره با جرم‌های m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به طور کاملاً ناکشسان در یک بعد با هم برخورد می‌کنند. (الف) چارچوب آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

پادبروتون با انرژی 1000 GeV (1TeV) در حلقه واحدی درجهتی مخالف می‌چرخد و در هر دور یکباره به هم می‌خورند (شکل ۱۹). البته، واکنشی که انجام می‌شود در هر دو چارچوب‌های مرجع یکسان است؛ فقط تعبیر نتایج است که فرق می‌کند. تا اینجا در چارچوب مرکز جرم فقط برخوردهای یک‌بعدی را مطالعه کرده‌ایم. برخورد کشسان دو بعدی هم از دیدگاه چارچوب مرجع مرکز جرم ساختار مقارن‌تری دارد. باز هم فرض می‌کنیم که جسم m_2 در ابتدا نسبت به چارچوب آزمایشگاه ساکن باشد. در اینجا به محاسبات ریاضی مربوط به برخورد دو بعدی در چارچوب مرکز جرم (که کمی پیچیده‌تر از حالت یک‌بعدی است) نمی‌پردازیم؛ فقط یک توصیف نموداری از آن را در شکل ۲۰ ارائه می‌کنیم. مانند مورد یک‌بعدی، در این برخورد هم صرفاً سرعت هر ذره معکوس می‌شود. تها نقاوت در این است که در اینجا دو ذره پس از برخورد در امتداد خطی حرکت می‌کنند که در حالت کلی با راستای اولیه حرکت فرق می‌کند. نقارن ایجاد می‌کند که زاویه‌های بین سرعتهای نهایی و

برای ایجاد ذرات جدید درست برابر با انرژی جنبشی "اتفاقی" در برخورد ناکشسان است؛ در حوزه این برخوردهای پرانرژی، جایی که باید از معادلات سینماتیک نسبیتی استفاده کرد، در می‌باییم که در چارچوب آزمایشگاه برای تولید ذرات جدید، انرژی جنبشی اولیه مورد نیاز به صورت مربع انرژی سکون ذره‌ای که می‌خواهیم تولید کنیم افزایش می‌یابد. یعنی، برای تولید ذره‌ای که انرژی سکون آن 1° برابر باشد نیاز به انرژی جنبشی 10° برابر داریم و بنابراین به شتابگری نیاز داریم که 10° برابر بزرگتر و پرهزینه‌تر است. ولی، اگر می‌توانستیم برخورد را در چارچوب مرکز جرم انجام بدیم، در آن صورت می‌شد ذراتی با 1° برابر انرژی سکون فقط با 1° برابر (ونه 10° برابر) انرژی جنبشی تولید کرد، زیرا کارایی این برخوردها در تبدیل انرژی جنبشی 100° است. نسل فعلی شتابدهنده‌های ذرات شامل نمونه‌های بسیاری از این‌گونه وسائل برخورددهنده‌باریکه است. در مرکز شتابدهنده خطی استانفورد (SLAC) در کالیفرنیا، باریکه‌های الکترون و پوزیtron (پادالکترون) هر یک با انرژی 50 GeV برخورد داده می‌شوند (شکل ۱۸). در آزمایشگاه شتابدهنده فرمی (FNAL) در ایلینوی، باریکه‌های



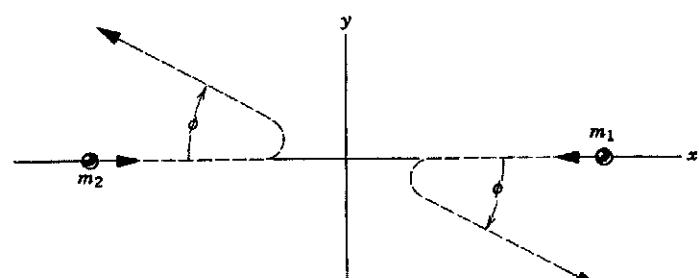
شکل ۱۸. شتابدهنده الکترون، مرکز شتابدهنده خطی استانفورد، به طول ۲ ر۳ کیلومتر الکترونها و بوزیرونها در قسمت مستقیم شتابدهنده شتاب می‌گیرند، و پس از طی مسیرهای زیزمینی، که با خطچین نشان داده شده است، در آزمایشگاهی که در بین عکس است به هم برخورد می‌کنند.



شکل ۱۹. آزمایشگاه شتابدهنده ملی فرمی. بروتونها و پادبروتونها از حلقه کوجکی در بالای عکس به داخل حلقه بزرگ (به شعاع یک کیلومتر) تزریق می‌شوند. این ذرات در جهت‌های مخالف به چرخش در می‌آیند و در هر دور یکبار با هم برخورد می‌کنند.

به چارچوب آزمایشگاه بازگردانیم، در حالت کلی زاویه‌های نامساوی ϕ_1 و ϕ_2 شکل ۱۲ بدست می‌آیند.

۷-۱۰ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی (اختیاری)
از بیش از ۲۰۰۰ گونه از هسته‌های اتمی‌ای که تاکنون شناسایی شده‌اند، بیشترشان ناپایدارند و — دیر یا زود — همه یا بخشی از انرژی اضافی‌شان را با شکافتند به دو یا چند پاره از دست می‌دهند. میانگین عمر چنین فرایندهای واپاشی پرتوزالی از چندین میلیارد سال (متانه برای U^{238}) تا کسرهای بسیار کوچکی از ثانیه تغییر می‌کند. تمام این واپashیها خودبه‌خود روی می‌دهند. در یک نمونه معین از یک ماده



شکل ۲۰. یک برخورد کشسان دو بعدی در چارچوب مرکز جرم. در این چارچوب ذرات باید در جهت‌های مخالف هم‌دیگر حرکت کنند، بنابراین هر دو، پس از برخورد، تحت زاویه یکسانی منحرف می‌شوند.

معادله ۴۰ را می‌توانیم با گردآوردن جملات انرژی سکون در یک طرف و جملات انرژی جنبشی در طرف دیگر، به صورت زیر بنویسیم

$$m_A c^2 - m_B c^2 - m_C c^2 = K_B + K_C - K_A \quad (41)$$

انرژی آزاد شده در واپاشی، Q ، را به صورت تفاوت میان انرژی سکون اولیه $m_i c^2$ و انرژی سکون نهایی $m_f c^2$ تعریف می‌کنیم:

$$Q = m_i c^2 - m_f c^2 \quad (42)$$

که برای واپاشی مورد مطالعه چنین می‌شود

$$Q = (m_A - m_B - m_C) c^2 \quad (43)$$

یا، با استفاده از معادله ۴۱

$$Q = K_B + K_C - K_A \quad (44)$$

یعنی، Q برابر است با انرژی جنبشی خالصی که محصولات واپاشی، کسب می‌کنند. در صورتی که A از حال سکون واپاشد، Q برابر است با انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی.

در فرایند واپاشی تکانه خطی باید پایسته باشد. اگر A در حال سکون باشد، باشد، تکانه اولیه کل صفر است، و در نتیجه تکانه نهایی هم باید صفر باشد

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ {}^\circ &= p_B - p_C \end{aligned} \quad (45)$$

معادله‌های ۴۴ (با $K_A = ۰$) و ۴۵ دو معادله با دو مجهول اند که می‌توان آنها را برای انرژیها یا تکانه‌های محصولات واپاشی B و C حل کرد. حاصل حل این معادلات، وقتی انرژی سکون هیچ‌یک از ذرات B و C صفر نباشد، عبارت است از

$$K_B = Q \frac{m_C}{m_B + m_C} \quad (46)$$

$$K_C = Q \frac{m_B}{m_B + m_C} \quad (47)$$

در بسیاری از فرایندهای واپاشی که در آزمایشگاه بررسی می‌شوند، یکی از محصولات، مثلاً B ، انرژی سکون بسیار کمتر از دیگری دارد، یعنی $m_B \ll m_C$ است. مثلاً B ممکن است یک الکترون (با انرژی سکون 5511 MeV) یا یک ذره آلفا (با انرژی سکون 37727 MeV) باشد، در حالی که C ممکن است یک اتم یا هسته سنگین (نوعاً، با انرژی سکون 10^5 MeV) باشد. اغلب این ذره سبکتر است که باید در آزمایش مشاهده شود. در چنین صورتی، همان‌طور که معادلات ۴۶ و ۴۷ نشان می‌دهند، $K_B \approx Q$ و $K_B \ll K_C$ است. توجه داشته باشید که اگر چه انرژیهای جنبشی دو ذره کاملاً متفاوت است، مقدار Q در جهت‌های مخالف یکدیگرند، همان‌طور که معادله ۴۵

برقزوای که شامل تعداد زیادی (شاید 10^{20}) هسته است می‌توانیم دقیقاً تخمین بزنیم که در یک بازه زمانی معلوم چند تا از هسته‌ها وامی باشند، اما هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم پیش‌بینی کنیم کدام هسته واخواهد باشید.

انها، مثلاً اتمهایی که گاز داخل لامپهای مهتابی را تشکیل می‌دهند، ممکن است در حالتی با انرژی اضافی واقع شده باشند و با گسیل (باره خودبه‌خودی، برای یک اتم منزوی) یک کوانتم تابش به ساختار پایدار بازگردند. ذرات بینایدی‌ای که از برخوردهای پروتون-پروتون در شتابدهنده‌های پرانزی تولید می‌شوند نیز ممکن است خودبه‌خود در حدود 10^{-20} ثانیه) که تنها شاهدی که برای وجود آنها داریم عبارت از مشاهده محصولات واپاشی تحت شرایط مساعد برای ایجاد آن ذرات است.

در این بخش درباره واپashیهای خودبه‌خودی از نوع



که در آن A ذره واپاشنده و B و C محصولات واپاشی هستند، گفتگو می‌کنیم. معمولاً این رویداد را در آزمایشگاه از چارچوبی مشاهده می‌کنیم که در آن A در حال سکون است. بنا بر این واپاشی B و C از درست وارونه برخورد کاملاً ناکشسان $A \rightarrow B + C \rightarrow A$ است که از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده شده باشد (شکل ۱۷ ب). در واقع، اگر در شکل ۱۷ ب زمان را به عقب برگردانیم، یعنی اطلاعات روی شکل را از پایین به بالا بخوانیم و جهت بردارهای سرعت را بر عکس کنیم، تصویر ذهنی خوبی از فرایند واپاشی به دست می‌آوریم. در برخورد کاملاً ناکشسان، انرژی جنبشی ذرات برخورده شده در طی برخورد "گم" می‌شود. البته، انرژی کل باید پایسته باشد و بنا بر این، انرژی جنبشی "گم" شده باید در سیستم مرکب به صورت دیگری ظاهر شود، که آن را به صورت افزایش انرژی سکون جسم مرکب مشاهده می‌کنیم (رجوع کنید به بخش ۷-۸). در فرایند واپاشی، معکوس این رویداد صورت می‌گیرد: انرژی سکون A به انرژی جنبشی B و C تبدیل می‌شود. پس در فرایند واپاشی، پایستگی انرژی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$E_A = E_B + E_C$$

$$m_A c^2 + K_A = (m_B c^2 + K_B) + (m_C c^2 + K_C) \quad (40)$$

در اینجا انرژی کل هر ذره به صورت مجموع انرژی سکون $m c^2$ و انرژی جنبشی K آمده است. معادله ۴۰ را به کلی ترین صورت نوشته‌ایم و این را هم در نظر گرفته‌ایم که ذره A به هنگام واپاشی ممکن است دارای انرژی جنبشی K_A باشد، ولی معمولاً مواردی را بررسی می‌کنیم که در آنها $K_A = ۰$ است.

۲. آیا ضربه یک نیروی غیر صفر می‌تواند صفر باشد؟ در هر صورت توضیح بدهید.

۳. شکل ۲۱ یک وسیله زورآزمایی تقویتی را نشان می‌دهد. زورآزما سعی می‌کند با پنک هر چه شدیدتر روی هدف بکوبد و یک شاخص متحرک سنگین وزن را حتی الامکان بالاتر بفرستد. این ابزار کدام کمیت فیزیکی را اندازه‌گیری می‌کند؟ نیروی متوسط، نیروی بیشینه، کارانجام شده، ضربه، انرژی انتقال یافته، تکانه انتقال یافته، یا چیز دیگری را؟ جواب خودتان را توضیح بدهید.



شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. اگرچه شتاب توب بیسبال پس از ضربه خوردن ارتباطی بهزندۀ ضربه ندارد، ولی باید کمیتی مربوط به پرواز توب به زندۀ ضربه بستگی داشته باشد. آن کمیت کدام است؟

۵. توضیح بدهید که چگونه ممکن است یک کیسه هوا در اتومبیل، مسافر را از صدمات شدید در تصادف تا حدودی حفظ کند.

۶. گفته می‌شود که در یک تصادف با سرعت 30 mi/h ، کودک 10 lb می‌تواند نیروی 300 lb به مسافری که او را در بغل نشانده است وارد کند. نیرویی به این بزرگی از کجا ناشی می‌شود؟

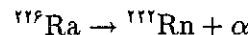
۷. نظرتان را درباره گفته زیر بیان کنید: در تصادف اتومبیل نیرویی را که اتومبیل در ضمن متوقف شدن وارد می‌کند می‌توان از تکانه یا انرژی جنبشی آن تعیین کرد. در مورد اول باید زمان توقف و در مورد دوم باید مسافت توقف را بدانیم.

۸. فولاد از لاستیک کشسان‌تر است. توضیح بدهید که منظور از این گفته حسابت؟

Ramin:samad@yahoo.com

ایجاب می‌کند، دقیقاً یکسان باقی می‌ماند. در چنین حالتی اغلب از تکانه پس زنی یا انرژی (جنبشی) پس زنی C صحبت می‌کنیم، گویی که C تفنج سنگینی است که پس از شلیک گلوله سبک B پس می‌زند (مثال ۷ از فصل ۹).

مثال ۶. گسیل ذره‌های آلفا (هسته‌های اتم هلیم) را در واپاشی طبیعی عنصر پوتوزای رادیم (^{226}Ra) به عنصر گازی رادون (^{222}Rn) در نظر بگیرید



اگر ^{226}Ra از حال سکون واپاشد، انرژی جنبشی محصولات چقدر است؟

حل: جرم‌های اتمی عبارت‌اند از

$$^{226}\text{Ra} : 226_{\text{u}}^{\text{R}} 254_{\text{u}}^{\text{R}} 3_{\text{u}}; \quad ^{222}\text{Rn} : 222_{\text{R}}^{\text{u}} 1757_{\text{u}}^{\text{R}} \\ \alpha : 4_{\text{R}}^{\text{u}} 0 260_{\text{u}}^{\text{R}}$$

می‌توانیم از معادله ۴۳ مقدار Q را محاسبه کنیم، در این محاسبه مقدار $c^2 = 932 \text{ MeV/u}$ را به کار می‌بریم

$$Q = [m(^{226}\text{Ra}) - m(^{222}\text{Rn}) - m(\alpha)]c^2 \\ = (226_{\text{u}}^{\text{R}} 254_{\text{u}}^{\text{R}} 3_{\text{u}} - 222_{\text{R}}^{\text{u}} 1757_{\text{u}}^{\text{R}} \\ - 4_{\text{R}}^{\text{u}} 0 260_{\text{u}}^{\text{R}})(932 \text{ MeV/u}) \\ = 487 \text{ MeV}$$

حالا می‌توانیم انرژی جنبشی ذرات را از معادله‌های ۴۶ و ۴۷ پیدا کنیم

$$K_{\text{Rn}} = (487 \text{ MeV}) \frac{4_{\text{R}}^{\text{u}} 0 260_{\text{u}}^{\text{R}}}{222_{\text{R}}^{\text{u}} 1757_{\text{u}}^{\text{R}} + 4_{\text{R}}^{\text{u}} 0 260_{\text{u}}^{\text{R}}} \\ = 4_{\text{R}}^{\text{u}} 0 260_{\text{u}}^{\text{R}} \text{ MeV}$$

$$K_{\alpha} = (487 \text{ MeV}) \frac{222_{\text{R}}^{\text{u}} 1757_{\text{u}}^{\text{R}}}{(222_{\text{R}}^{\text{u}} 1757_{\text{u}}^{\text{R}} + 4_{\text{R}}^{\text{u}} 0 260_{\text{u}}^{\text{R}})} \\ = 4_{\text{R}}^{\text{u}} 87 \text{ MeV}$$

توجه کنید که، بنابراین معادله ۴۴ ($K_A = 0$)، دو انرژی جنبشی روی هم Q را به دست می‌دهند؛ همچنین توجه کنید که ذره سبکتر آلفا قسمت اعظم انرژی (ولی نه همه آن) را به خودش اختصاص می‌دهد —در مورد این مسئله در حدود ۹۸٪.

پرسشها

۱. چگونگی پایستگی تکانه را در مورد بازجهمش توب از دیوار توضیح بدهید.

باید در آن پایسته بماند. در چارچوب مرجع زمین فوتیال، قبل از برخورد تکانه وجود داشته است ولی به نظر می‌رسد که بعد از برخورد تکانه‌ای در کار نیست. آیا تکانه خطی واقعاً پایسته است؟ اگر چنین است توضیح بدھید چگونه؟ و اگر چنین نیست توضیح بدھید که چرا؟

۱۸. برخورد یک بعدی کشسان بین جسم متحرک A و جسم ساکن B را در نظر بگیرید. برای اینکه جسم B پس از برخورد با (الف) بیشترین سرعت، (ب) بیشترین تکانه، و (ج) بیشترین انرژی جنبشی به حرکت در باید جرم آن را در مقایسه با جرم جسم A چگونه انتخاب می‌کنید؟ ۱۹. دو جسم مکعب شکل یکسان، که هر دو در یک راستا با سرعت یکسان v در حرکت‌اند، با جسم سومی که مشابه آنهاست و در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال سکون قرار دارد، برخورد می‌کنند. حرکت این سه جسم پس از برخورد چگونه است؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با هم در تماس باشند یا نباشند؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با جسم به همیگر چسبانده شده باشند؛ فرض کنید برخوردها (الف) کاملاً ناکشسان و (ب) کشسان باشند.

۲۰. چگونه می‌توانید تفنجی طراحی کنید که پس زنی نداشته باشد؟

۲۱. در برخورد دو جسم در چارچوب مرجع مرکز جرم تکانه‌های آنها، هم قبل از برخورد و هم بعداز برخورد، مساوی و مختلف‌جهت‌اند. آیا خط مشخص‌کننده حرکت نسبی بعد از برخورد الزاماً همان خط پیش از برخورد است؟ تحت چه شرایطی مقدار سرعتهای اجسام بر اثر برخورد زیاد می‌شود؟ کم می‌شود؟ تغییر نمی‌کند؟

۲۲. یک ساعت ماسه‌ای را با یک ترازوی حساس وزن می‌کنیم؛ یک بار وقتی ماسه با جریان ثابتی از قسمت بالایی به قسمت پایینی می‌ریزد و یک بار هم وقتی قسمت بالایی خالی است. آیا وزن این جسم در دو مورد یکسان است؟ درباره جواب خودتان توضیح بدھید.

۲۳. توضیح معقولی برای شکسته شدن تخته‌های چوبی و یا آجرها در اثر ضربه‌های کارته ارائه کنید.^۱

۲۴. یک جعبه تخلیه شده از هوا روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد. سوراخ کوچکی در یک وجه آن ایجاد می‌کنیم به طوری که هوا بتواند به آن وارد شود (شکل ۲۲). جعبه چگونه حرکت خواهد کرد؟ استدلال شما برای رسیدن به این جواب چیست؟

۱. نگاه کنید به "Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum," Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, May 1976, p. 483.

۲. نگاه کنید به "Karate Strikes," Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, October 1975, p. 845.

۹. اگر می‌توانستیم همه حرکتها داخلى اتمهای اجسام را به حساب بیاوریم، می‌شد همه برخوردها را کشسان تلقی کرد. در این باره بحث کنید.

۱۰. اگر (فقط) دو ذره با هم برخورد کنند، آیا هیچ وقت مجبور خواهیم شد که برای وصف کردن این رویداد از توصیف سه‌بعدی استفاده کنیم؟ توضیح بدھید.

۱۱. دیده‌ایم که تکانه می‌تواند پایسته باشد صرفنظر از اینکه انرژی جنبشی پایسته باشد یا نباشد. آیا بر عکس این موضوع هم درست است؛ یعنی، آیا در فیزیک کلاسیک پایستگی انرژی جنبشی پایستگی تکانه را ایجاب می‌کند؟

۱۲. آنچه می‌آید از یک ورقه امتحان انتخاب شده است: "برخورد بین دو اتم هلیم کاملاً کشسان است، و در نتیجه تکانه پایسته می‌ماند." نظر شما درباره این گفته چیست؟

۱۳. در بزرگراهی با سرعت 50 mi/h در حرکتیم، و یک اتومبیل دیگر پشت سر ما با همین سرعت حرکت می‌کند. سرعتمان را به 40 mi/h کاهش می‌دهیم ولی اتومبیل پشت سری چنین نمی‌کند و برخورد روی می‌دهد. سرعتهای اولیه اتومبیلهای برخوردهای از دیدگاه هر یک از چارچوبهای مرجع زیر چقدر است؟ (الف) خودمان، (ب) راننده اتومبیل عقبی، و (ج) پلیسی که در اتومبیل گشته خود در کنار بزرگراه متوقف است. (د) قاضی تصادفات می‌پرسد که آیا شما به او "زدید" یا ماشین عقبی به شما زد. شما، به عنوان فیزیک‌پیشه، چه جوابی به این سوال می‌دهید؟

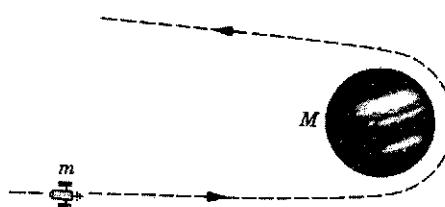
۱۴. سی آر دایش نوشته است که، برای گلف‌بازان حرفه‌ای، سرعت اولیه توپ موقع جدا شدن از چوبدست در حدود 140 mi/h است. و دیگر اینکه: (الف) "اگر می‌شد ساختمان "امپایر استیت" را به عنوان چوبدست با همان سرعت اولیه توپ فقط در حدود داد و به توپ ضربه وارد کرد، سرعت اولیه توپ در حدود ۲٪ افزایش می‌یافتد" و (ب) همین که گلف‌باز حرکت تاب رو به پایین چوبدست را آغاز کرد، دیگر صدای شاتر دوربین، عطسه، و مانند اینها تأثیری در حرکت توپ نخواهد داشت. آیا می‌توانید با ارائه یک بحث کیفی این دو گزاره را تأیید کنید؟

۱۵. از معادله‌های ۱۲ و ۱۳ روشن است که یک جواب قابل قبول برای مسئله برخورد یک بعدی کشسان عبارت است از $v_{14} = v_{14} = v_{24}$ و $v_{24} = v_{24}$ تعییر فیزیکی این جوابها چیست؟

۱۶. دو گلوله گلی با سرعت و جرم مساوی با یکدیگر رودررو برخورد می‌کنند، به هم می‌چسبند، و به حال سکون در می‌آیند. در این برخورد، انرژی جنبشی قطعاً پایسته نیست. چه بر سر انرژی جنبشی می‌آید؟ تکانه چگونه پایسته می‌ماند؟

۱۷. یک فوتیالیست، در لحظه‌ای که ساکن است، تویی را دریافت می‌کند و در همان موقع مورد اصابت بازیکن دوان تیم مقابل قرار می‌گیرد. مسلماً این رویداد یک برخورد (ناکشسان) است تکانه

۴. فضایمای ویجر ۲ (با جرم m و سرعت v نسبت به خورشید) به سیاره مشتری (با جرم M و سرعت V نسبت به خورشید) نزدیک می‌شود (شکل ۲۴). فضایمای سیاره را دور می‌زند و در جهت مخالف از آن دور می‌شود. سرعت فضایمای (نسبت به خورشید) پس از این "برخورد پرتایی" چقدر است؟ فرض کنید $v = 12 \text{ km/s}$ و $V = 13 \text{ km/s}$ (سرعت مداری مشتری) است. جرم مشتری خیلی بیشتر از جرم فضایمای است ($M \gg m$).^۱



شکل ۲۴. مسئله ۴

۵. گلف بازی ضربه‌ای به توب وارد می‌کند و به آن سرعت اولیه 52 m/s در راستای 30° بالای افق می‌دهد. با فرض اینکه جرم توب 46 g باشد و چوبدست و توب 20 ms در تماس باشند، کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) ضربه وارد بر توب، (ب) ضربه وارد بر چوبدست، (ج) نیروی متوسط وارد بر توب از چوبدست و (د) کار انجام شده روی توب.

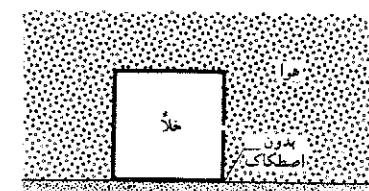
۶. یک اتومبیل 1420 کیلوگرمی با سرعت 28 m/s به طرف شمال در حرکت است. این اتومبیل یک گردش به راست 90° را در 46 s در مدت 54 ر° ثانیه متوقف می‌شود. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در هر یک از حالت‌های زیر چقدر است؟ (الف) در طی گردش به راست و (ب) در طی برخورد. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در دو حالت زیر چقدر است؟ (ج) در طی گردش به راست و (د) در طی برخورد.

۷. یک توب بیسیال 150 گرمی (وزن $= 5 \text{ oz}$) که با سرعت 46 m/s در حرکت است با چوبدست ضربه می‌خورد و با سرعت 15 m/s مستقیماً به عقب بر می‌گردد. مدت تماس توب و چوبدست 20 ms است. نیروی متوسط وارد بر توب از چوبدست چقدر است؟
۸. در برخوردی که در طول 27 cm می‌کشد، نیروی متوسط 984 N به یک گوی فولادی 420 گرمی که با سرعت 13 m/s در حرکت است وارد می‌شود. اگر نیرو در جهت مخالف سرعت اولیه گوی باشد، سرعت نهایی گوی را پیدا کنید.

۹. یک توب 325 گرمی با سرعت 22 m/s تحت زاویه $\theta = 33^\circ$ به دیواری برخورد می‌کند و تحت همان زاویه و با همان

^۱ نگاه کنید به

"The Slingshot Effect: Explanation and Analogies," Albert A. Bartlett and Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, November 1985, p. 466.



شکل ۲۲. پرسش ۲۴

۲۵. در اظهار نظر درباره پایسته نبودن انرژی جنبشی در برخورد کامل ناکشسان، دانشجوی می‌گوید که در انفجار انرژی جنبشی پایسته نیست و برخورد کاملاً ناکشسان هم صرفاً معکوس فرایند انفجار است. آیا چنین استدلالی مفید یا معقول هست؟

۲۶. تحت چه شرایطی، اگر اصلاً شرطی لازم باشد، مجازیم بگوییم که واپاشی $A \rightarrow B + C$ صرفاً معکوس برخورد کاملاً ناکشسان است؟ $B + C \rightarrow A$

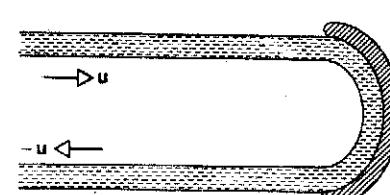
مسئله‌ها

بخش ۱۰-۳ پایستگی تکانه در حین برخورد

۱. در یک آزمایش استحکام سپر، اتومبیل 2300 کیلوگرمی که با سرعت 15 m/s در حرکت است با پایه کناری پلی برخورد می‌کند و در مدت 54 ر° ثانیه متوقف می‌شود. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در طی این برخورد چقدر بوده است؟

۲. توپی به جرم m با سرعت v به طور عمود با دیواری برخورد می‌کند و بی‌آنکه سرعتش کم شود از دیوار باز می‌جهد. (الف) اگر زمان برخورد برابر Δt باشد، نیروی متوسط وارد بر دیوار از توب چقدر است؟ (ب) این نیروی متوسط را برابر یک توپ لاستیکی 140 گرمی که با سرعت 8 m/s در حرکت است و برخورد آن با دیوار 3 ms طول می‌کشد، محاسبه کنید.

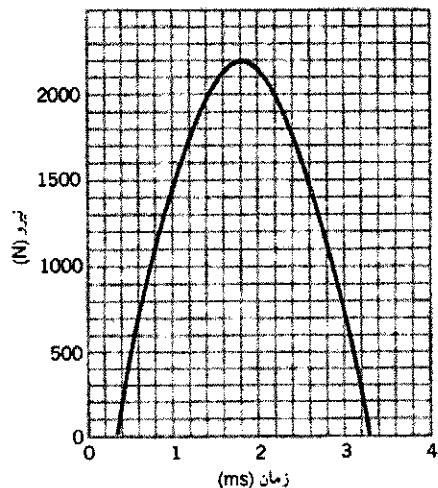
۳. جریان آبی به پره " بشقابی " توربین که ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۲۳). سرعت آب قبل و بعد از برخورد با سطح خمیده پره برابر با v است و جرم آبی که در واحد زمان با پره برخورد می‌کند مقدار ثابت m است. چه نیرویی از آب به پره وارد می‌شود؟



شکل ۲۳. مسئله ۳

۱۳. دو قسمت یک فضایپما با انفجار مهراهای منفجرهای که آنها را متصل به هم نگه می‌دارد، از هم جدا می‌شوند. جرم دو تکه جدا شده 1200 kg و 1800 kg است؛ ضربهای که به هر تکه وارد می‌شود برابر با 30 Ns است. سرعت نسبی دور شدن تکه‌ها چقدر است؟

۱۴. توپی به جرم 50 kg ضربهای می‌خورد که نمودار آن در شکل ۲۷ نشان داده شده است. سرعت توپ درست پس از لحظه‌ای که نیرو صفر می‌شود، چقدر است؟



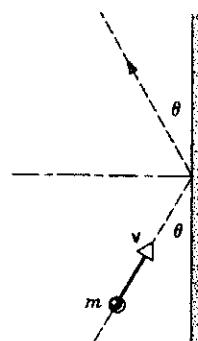
شکل ۲۷. مسئله ۱۴

۱۵. گلوله‌ها و سایر پرتابه‌هایی که به سویرمن شلیک می‌شوند، معمولاً از سینه او باز می‌جهند (شکل ۲۸). فرض کنید یک "آدم بد" رگباری از گلوله‌های 30 g را با آهنگ 100 m/s گلوله بر دقيقه به سینه سویرمن شلیک می‌کند، و سرعت هر گلوله 50 m/s است. باز هم فرض کنید



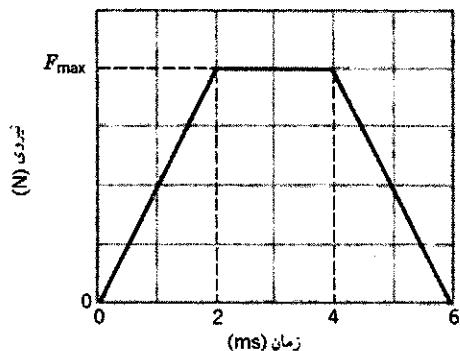
شکل ۲۸. مسئله ۱۵

سرعت از دیوار باز می‌جهد (شکل ۲۵). توپ به مدت 4 ms با دیوار در تماس بوده است. (الف) چه ضربهای به توپ وارد می‌شود؟ (ب) نیروی متوسطی که توپ به دیوار وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۲۵. مسئله ۹

۱۰. شکل ۲۶ نمودار تقریبی نیرو بر حسب زمان را برای یک توپ تیس 58 g در طی برخورد با یک دیوار نشان می‌دهد. سرعت اولیه توپ 32 m/s عمود بر دیوار است؛ این توپ با همان سرعت و عمود بر دیوار از آن باز می‌جهد. مقدار نیروی مکزیوم در طی برخورد چقدر است؟



شکل ۲۶. مسئله ۱۰

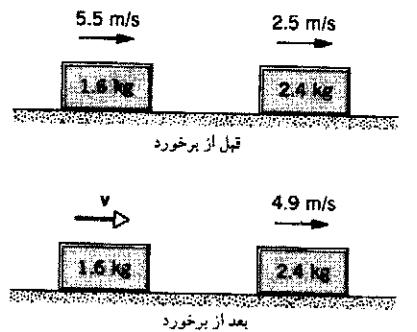
۱۱. یک کاوشگر فضایی بدون سرنشین به جرم 2500 kg با سرعت ثابت 300 m/s در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. موتور موشکی کاوشگر در یک مرحله نیروی پیشران 3000 N برای مدت 65 s تولید می‌کند. (الف) اگر نیروی پیشران به سوی عقب، یا به سوی جلو، یا در جهت جانبی باشد، تغییر تکانه کاوشگر (فقط مقدار) چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی جنبشی کاوشگر در همان سه حالت بالا چقدر است؟ فرض کنید جرم سوختی که به بیرون رانده شد در مقایسه با جرم کل کاوشگر قابل چشمپوشی است.

۱۲. نیرویی به جسمی به جرم m ضربه J وارد می‌کند و سرعت آن را از v به u تغییر می‌دهد. حرکت جسم در همان راستای نیروست. نشان بدهید که کاری که این نیرو انجام می‌دهد برابر است با $\frac{1}{2}(u + v)J$.

ناگهان آزاد می‌شود و زنجیر روی میز می‌افتد و به صورت کپه کوچکی در می‌آید (شکل ۲۹). هر حلقه زنجیر در لحظه برخورد با میز به حال سکون در می‌آید. نیروی وارد بر زنجیر از طرف میز را در هر لحظه بر حسب وزن آن طولی از زنجیر که در آن لحظه روی میز قرار دارد، معین کنید.

بخش ۱۰-۴ برخورد در یک بعد

۲۱. قالیهای نشان داده شده در شکل ۳۰ بدون اصطکاک می‌لغزند.
 (الف) سرعت قالب ۶۰ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد کشسان است؟



شکل ۳۰. مسئله ۲۱ و ۲۲

۲۲. در شکل ۳۰ فرض کنید جهت سرعت اولیه قالب ۶۰ کیلوگرمی بر عکس شود و این قالب مستقیماً به سوی قالب ۶۰ کیلوگرمی حرکت کند. (الف) سرعت قالب ۶۰ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد یک برخورد کشسان است؟

۲۳. فیل خشمگینی با سرعت 1m/s به 1m/s به پشه سمجحی حمله می‌کند. با فرض کشسان بودن برخورد، پشه با چه سرعتی از فیل دور می‌شود؟ توجه داشته باشید که در این مورد پرتاhe (فیل) بسیار سنگین‌تر از هدف (پشه) است.

۲۴. دو کره از جنس تیتانیم با سرعت یکسانی به همدیگر نزدیک می‌شوند و رو در رو برخورد کشسان می‌کنند. پس از برخورد، یکی از کره‌ها که جرم آن 300 g است ساکن می‌شود. جرم کره دیگر چقدر است؟

۲۵. گوله‌ای به جرم 54 g در راستای افقی به سوی یک قالب چوبی به جرم 41 kg که روی سطحی افقی به حال سکون قرار دارد شلیک می‌شود. ضرب اصطکاک جنبشی میان قالب و سطح برابر با 210° است. گوله در داخل قالب چوبی، که مسافت 83 cm را روی سطح طی می‌کند، متوقف می‌شود. (الف) سرعت قالب چوبی درست در لحظه‌ای که گوله در داخل آن متوقف می‌شود چقدر است؟ (ب) سرعت اولیه گوله چقدر است؟

۲۶. لغزنده‌ای به جرم 342 g که با سرعت اولیه 24 m/s روی یک ریل هواخ طی بدون اصطکاک در حرکت است یا لغزنده دیگری با جرم مجهول که روی ریل ساکن است برخورد می‌کند. برخورد بین این اجسام کشسان است. پس از برخورد، جسم اول در همان جهت

که گوله‌ها بدون از دست دادن سرعت مستقیماً به عقب باز می‌جهند. نشان بدید که متوسط نیرویی که از این ریل به سینه سوپرمن وارد می‌شود فقط $5\text{ Newton} (= 180\text{ N})$ است.

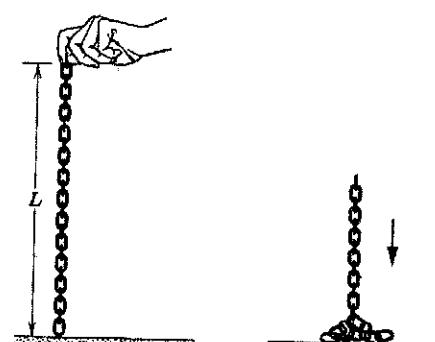
۱۶. یک فهرمان کاراته تخته‌ای به ضخامت 2 cm را با یک ضربه دست می‌شکند. فیلمبرداری آهسته نشان می‌دهد که دست، که جرم آن را می‌توان 54 g در نظر گرفت، با سرعت 9.5 m/s به بالای تخته برخورد می‌کند و در فاصله 8 cm پایین‌تر این نقطه متوقف می‌شود. (الف) مدت زمان این ضربه (با فرض نیروی ثابت) چقدر است؟ (ب) چه نیروی متوسطی اعمال شده است؟

۱۷. یک تنگ ساقمه‌ای در هر ثانیه 14 g ساقمه 2 g کرمی را با سرعت 483 m/s شلیک می‌کند. ساقمه‌ها در برخورد به یک دیوار صلب متوقف می‌شوند. (الف) تکانه هر ساقمه را معین کنید. (ب) از زیر جنبشی هر ساقمه را به دست بیاورید. (ج) میانگین نیروی وارد بر دیوار از ریل ساقمه‌ها را محاسبه کنید. (د) اگر هر ساقمه به مدت 25 ms با دیوار در تماس باشد، میانگین نیروی وارد بر دیوار از هر ساقمه در طی مدت تماس چقدر است؟ چرا این جواب تا این حد با جواب قسمت (ج) تفاوت دارد؟

۱۸. در یک توفان تندی، دانه‌های تگرگ به قطر یک سانتی‌متر با سرعت 25 m/s فرمی‌ریزند. تخمین زده می‌شود که در هر متر مکعب هوا 120 تگرگ موجود باشد. از بازجehش تگرگها به هنگام برخورد چشمپوشی کنید. (الف) جرم هر دانه تگرگ چقدر است؟ (ب) در طی این توفان از طرف تگرگ چه نیرویی بر یک بام مسلط به ابعاد $20\text{ m} \times 10\text{ m} \times 20\text{ m}$ وارد می‌شود؟ فرض کنید که هر سانتی‌متر مکعب تگرگ، مانند یخ 92 g به جرم داشته باشد.

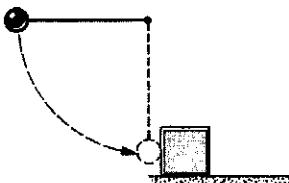
۱۹. فرض کنید پره‌های چرخان یک هلیکوپتر، ستون استوانه‌ای شکل هوازی زیرشان را به سمت پایین می‌رانند. جرم کل هلیکوپتر 1820 kg و طول پره‌ها 88 m است. حداقل توان موردنیاز برای اینکه هلیکوپتر در هوا بماند چقدر است؟ چگالی هوا را 22 kg/m^3 بگیرید.

۲۰. زنجیر یکتاخت بسیار قابل انعطافی به جرم M و طول L از یک انتهای آویزان شده است. این زنجیر به طور قائم قرار گرفته است و انتهای آزاد آن درست مماس با سطح یک میز است. انتهای بالایی



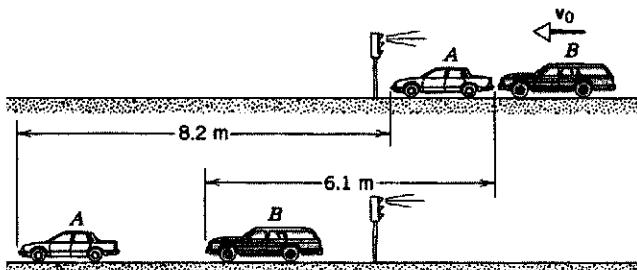
شکل ۲۹. مسئله ۲۶

۳۲. گلوله‌ای فولادی به جرم 14 kg از یک سر ریسمانی به طول 7.68 m سانتی‌متر آویزان شده است. ریسمان را از حالت کشیده افقی رها می‌کنیم. در پایین‌ترین قسمت مسیر، این گلوله با یک قالب فولادی به جرم 2.63 kg کیلوگرم که روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۳۲). برخورد کشسان است. کمیتهای زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله درست پس از برخورد، (ب) سرعت قالب فولادی، درست پس از برخورد، (ج) اکنون فرض کنید که در ضمن برخورد، نیمی از انرژی جنبشی مکانیکی به انروی داخلی و انرژی صوتی تبدیل شود. در این صورت سرعتهای نهایی را به دست بیاورید.



شکل ۳۲. مسئله ۳۲

۳۳. دو اتومبیل A و B که می‌خواهند قبل از چراغ راهنمای متوقف شوند روی جاده پیغامده می‌لغزنند. جرم اتومبیل A برابر با 1100 kg و جرم اتومبیل B برابر با 1400 kg است. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخهای قفل شده هر دو اتومبیل و جاده برابر با 0.13 است. اتومبیل A موفق می‌شود که قبل از چراغ راهنمای متوقف شود، ولی اتومبیل B نمی‌تواند متوقف شود و از پشت به اتومبیل A می‌زند. پس از برخورد، اتومبیل A در فاصله 20 m از محل برخورد، و اتومبیل B در فاصله 10 m از همان محل متوقف می‌شود (شکل ۳۳). در طی این رویداد ترمزهای هر دو اتومبیل قفل بوده است. (الف) با استفاده از مسافت‌هایی که اتومبیلها پس از برخورد پیموده‌اند، سرعت آنها را درست پس از برخورد تعیین کنید. (ب) با استفاده از پایستگی تکانه، سرعت اولیه اتومبیل B را در لحظه برخورد با اتومبیل A به دست بیاورید. بر چه اساسی می‌توان به کاربرد پایستگی تکانه در این مورد ایراد گرفت؟

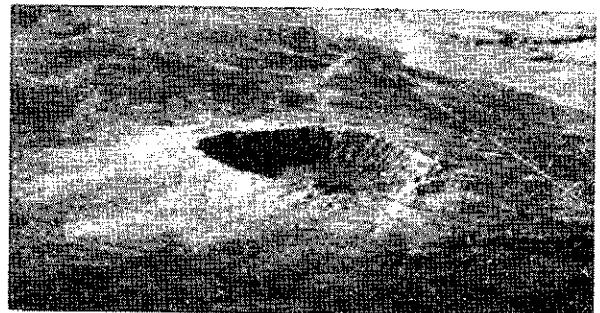


شکل ۳۳. مسئله ۳۳

۳۴. یک وزنه 9.2 kg از ارتفاع 5.6 m فوت سقوط می‌کند و یک ستون

اوایله‌اش با سرعت $s = 63.6\text{ m/s}$ به حرکتش ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دوم چقدر است؟ (ب) سرعت جسم دوم پس از برخورد چقدر است؟

۳۵. چنین تصور می‌شود که "حفره آریزونا" (شکل ۳۱) بر اثر برخورد یک شهاب‌سنگ با زمین در حدود 20000 s سال قبل ایجاد شده باشد. تخمین زده می‌شود که جرم این شهاب‌سنگ 10^{10} kg و سرعت آن 22 km/s بوده است. چنین شهاب‌سنگی در یک برخورد رو در رو چه سرعتی می‌تواند به زمین بدهد؟

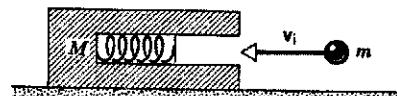


شکل ۳۱. مسئله ۳۱

۳۶. یک گلوله 18 kg که با سرعت 672 m/s در حرکت است با یک قالب چوبی به جرم 715 g که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد برخورد می‌کند. این گلوله با سرعت کاهش یافته 428 m/s از طرف دیگر قالب خارج می‌شود. سرعت نهایی قالب را پیدا کنید. ۳۷. جسمی به جرم 2 kg با جسم دیگری که ساکن است برخورد می‌کند و با سرعتی برابر یا یک چهارم سرعت اوایله‌اش در همان راستای اویله به حرکت ادامه می‌دهد. جرم جسم دیگر چقدر است؟

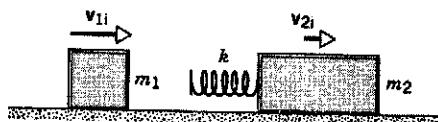
۳۸. در یک تقنق خودکار قدیمی، سازوکار "بارکردن" در قسمت عقب لوله وقتی وارد عمل می‌شود که گلنگدن، که پس از شلیک گلوله عقب‌نشینی می‌کند، یک فنرا به اندازه معین d می‌نشارد. (الف) نشان بدید که برای خودکار بودن تقنق، باید سرعت گلوله در لحظه شلیک حداقل برابر باشد با $d\sqrt{kM/m}$ که در آن k نیروی ثابت فن و M جرم گلنگدن، و m جرم گلوله است. (ب) در چه صورتی می‌توانیم (اگر اصولاً بتوانیم) این فرایند را "برخورد" تلقی کنیم؟

۳۹. سر چوبیدست گلف که با سرعت 45 m/s حرکت می‌کند با توب گلفی به جرم 46 g که روی "پایه" اش قرار دارد برخورد می‌کند. جرم مؤثر قسمت سر چوبیدست 220 g است. (الف) توب با چه سرعتی پایه را ترک می‌کند؟ (ب) اگر جرم قسمت سر چوبیدست را دو برابر کنیم سرعت پرتاب توب از پایه چقدر خواهد شد؟ اگر سه برابر کنیم چطور؟ در مورد استفاده از چوبیدستهای سنگین چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟ فرض کنید برخورد ها کاملاً کشسان‌اند و دیگر اینکه گف芭ز می‌تواند چوبیدستهای سنگین را تا لحظه برخورد به همان سرعت چوبیدست سبک برساند (پرسشن ۱۴).



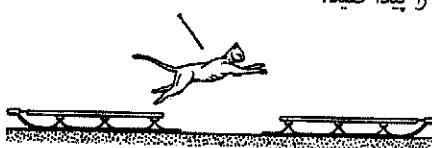
شکل ۳۴. مسئله ۴۰

۴۱. قالبی به جرم $m_1 = 1\text{ kg}$ روی میز بدون اصطکاکی با سرعت 10 m/s حرکت می‌کند. دقیقاً در جلو این قالب، قالب دیگری به جرم $m_2 = 4.92\text{ kg}$ در همان جهت با سرعت 3.27 m/s در حرکت است. فنربدون جرمی با ثابت نیروی $k = 11\text{ N/cm}$ به قسمت عقب قالب m_2 وصل شده است (شکل ۳۵). وقتی دو قالب با هم برخورد می‌کنند، حداکثر فشردگی فنر چقدر است؟ (راهنمایی: در لحظه حداکثر فشردگی فنر دو قالب به صورت جسم واحدی حرکت می‌کنند؛ با توجه به اینکه در این نقطه برخورد کاملاً ناکشسان است، سرعت را محاسبه کنید).



شکل ۳۵. مسئله ۴۱

۴۲. دو سورتمه، که جرم هر کدام 2.2 kg کیلوگرم است، در فاصله کمی پشت سرهم روی سطح یخزده بدون اصطکاکی قرار دارند (شکل ۳۶). گربه‌ای به جرم 3.63 kg کیلوگرم که روی یکی از دو سورتمه ایستاده است روی سورتمه دیگر می‌پرد و بلافصله با پرش دیگری به سورتمه اول بازمی‌گردد. هر دو پرش با سرعت 5 m/s نسبت به سورتمه‌ای که پرش از آن صورت می‌گیرد انجام می‌شود. سرعت نهایی هر یک از دو سورتمه را پیدا کنید.



شکل ۳۶. مسئله ۴۲

۴۳. الکترونی به جرم m ، رودررو با اتم ساکنی به جرم M برخورد می‌کند. در نتیجه این برخورد مقدار معینی انرژی، E ، به صورت انرژی داخلی در اتم ذخیره می‌شود. حداقل سرعت اولیه‌ای که الکtron باید داشته باشد، v ، چقدر است؟ (راهنمایی: اصول پایستگی منجر به یک معادله درجه دوم برای سرعت نهایی الکtron و یک معادله درجه دوم برای سرعت نهایی اتم می‌شود. حداقل مقدار v از این شرط حاصل می‌شود که رادیکال موجود در جوابهای v و V حقیقی باشد.)

۴۴. دو کره سمت راست شکل ۳۷ کمی با هم فاصله دارند و در ابتدا

۴۵. تنی را به اندازه 5 cm اینچ در زمین فرو می‌برد. فرض کنید برخورد وزنه‌ستون کاملاً ناکشسان است، و میانگین نیروی مقاومت زمین را تعیین کنید.

۴۵. یک واگن با ری 35° تی با یک واگن خدماتی ساکن برخورد می‌کند و به آن "وصل" می‌شود. در این برخورد 27% از انرژی جنبشی اولیه به صورت گرمایش، صوت، ارتعاش و مانند آن هدر می‌رود. وزن واگن خدماتی را پیدا کنید.

۴۶. سپر یک اتومبیل 1220 kg کیلوگرمی چنان طراحی شده است که بتواند تمام انرژی را وقتی اتومبیل با سرعت 5 km/h با یک دیوار سنگی برخورد می‌کند، جذب کند. این اتومبیل هنگامی که با سرعت 75.5 km/h در حرکت است با اتومبیل جلویی به جرم 934 kg کیلوگرم که با سرعت 62 km/h در همان جهت در حرکت است تصادف می‌کند. در نتیجه این برخورد سرعت اتومبیل 1220 kg کیلوگرمی تا 13 km/h افزایش می‌یابد. (الف) سرعت اتومبیل 1220 kg کیلوگرمی بلافصله پس از برخورد چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جذب شده در برخورد بر آنچه سپر اتومبیل 1220 kg کیلوگرمی می‌تواند جذب کند چقدر است؟

۴۷. یک واگن با ری 1.8° تی که با سرعت 5 ft/s در حرکت است با یک واگن با ری 2.4° تی که با سرعت 9 ft/s در همان جهت در حرکت است برخورد می‌کند. (الف) اگر واگنها پس از برخورد به همیگر ملحق شوند، سرعت مجموعه پس از برخورد چقدر است و چه مقدار انرژی جنبشی در این برخورد به هدر می‌رود؟ (ب) اگر برخورد واگنها کشسان می‌بود (اگرچه بسیار نامتحمل است)، سرعت هر واگن پس از برخورد چقدر می‌شود؟

۴۸. یک ترازوی کفه‌ای چنان مدرج شده است که جرم اجسامی را که روی کفه‌اش قرار می‌گیرند برحسب کیلوگرم نشان بدهد. ذراتی از ارتفاع 5 cm متري پایین می‌افتد و با کفه ترازو برخورد می‌کنند. برخوردها کشسان‌اند و ذرات با همان سرعتی که به کفه می‌خورند از آن باز می‌جهند. جرم هر ذره 110 g و آهنگ برخوردها 428 cm^{-1} است. این ترازو در حین ریزش ذرات چه جرمی را نشان می‌دهد.

۴۹. جعبه‌ای روی ترازویی قرار دارد، و ترازو چنان تنظیم شده است که وقتی جعبه خالی است رقم صفر را نشان می‌دهد. جزئیاتی از تیله‌ها از ارتفاع h نسبت به ته جعبه، با آهنگ R (تیله در ثانیه) به داخل آن می‌ریزد. جرم هر تیله m است. برخورد میان تیله‌ها و جعبه کاملاً ناکشسان است. ترازو t ثانیه پس از شروع ریزش تیله‌ها چه رقمه را نشان می‌دهد؟ بای وقتي که $R = 115\text{ s}^{-1}$, $R = 115\text{ s}^{-1}$, $R = 9.62\text{ m}$, $R = 4\text{ m}$ و $R = 50\text{ s}$ است جواب عددی پیدا کنید.

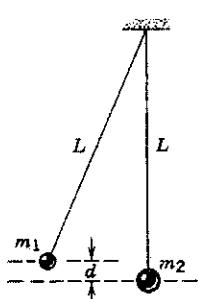
۵۰. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v به داخل لوله یک تفنگ فنری به جرم M که در آغاز روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است شلیک می‌شود (شکل ۳۴). گلوله در نقطه حداکثر فشردگی فربه داخل لوله گیر می‌کند. هیچ انرژی ای صرف مقابله با اصطکاک نمی‌شود. (الف) سرعت تفنگ فنری پس از آنکه گلوله در داخل لوله متوقف شد، چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه گلوله در فنر ذخیره شده است؟

می‌دهد. (جرم نوترون $1u$ را و جرم دوترون $1u$ را 2 است).
۵۰. دو جسم با جرم‌های یکسان که سرعتهای اولیه‌شان هم یکی است در یک برخورد کاملاً ناکشسان به هم می‌چسبند و با سرعت مشترکی که برابر با نصف سرعت اولیه هر یک از آنهاست حرکت می‌کنند. زاویه‌میان سرعتهای اولیه دو جسم چقدر بوده است؟

۵۱. پروتونی (با جرم اتمی $1u$ را) با سرعت 518 m/s با پروتون ساکنی برخورد کشسان انجام می‌دهد. پروتون متحرک با زاویه 40° نسبت به راستای اولیه حرکتش پراکنده می‌شود. (الف) جهت حرکت پروتون هدف پس از برخورد کدام است؟ (ب) سرعت هریک از پروتونها پس از برخورد چقدر است؟

۵۲. دو گوی A و B با جرم‌های متفاوت و مجھول با هم برخورد می‌کنند. گوی A در آغاز ساکن است و گوی B با سرعت v حرکت می‌کند. پس از برخورد، گوی B دارای سرعت $v/2$ است و در راستای عمود بر سرعت اولیه‌اش حرکت می‌کند. (الف) تعیین کنید که گوی A پس از برخورد در چه جهتی حرکت می‌کند. (ب) آیا می‌توانید سرعت گوی A را از اطلاعات داده شده در این مسئله تعیین کنید؟ درباره پاسخ خودتان توضیح بدید.

۵۳. در یک بازی بیلیارد، به توب "چوبخور" سرعت اولیه V داده می‌شود و این توب با مجموعه 15 توب که مماس به یکدیگر در وسط میز قرار دارند برخورد می‌کند. همه 16 توب (یکسان) در برخورد های متعدد توب به توب و توب به دیواره میز درگیر می‌شوند. برحسب نصادر، پس از اندک زمانی معلوم می‌شود که همه توبها دارای سرعت یکسان v ند. فرض کنید همه برخودها کشسان باشند و از جنبه چرخشی حرکت توبها هم چشمپوشی کنید. سرعت v را برحسب V به دست بیاورید.
۵۴. دو آونگ هریک به طول L در آغاز مطابق شکل 38 قرار گرفته‌اند. آونگ اول از ارتفاع d رها می‌شود و با آونگ دوم برخورد می‌کند. فرض کنید برخورد کاملاً ناکشسان است و از جرم ریسمانها و هر نوع آثار اصطکاکی چشمپوشی کنید. مرکز جرم این مجموعه پس از برخورد تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



شکل ۳۸. مسئله ۳۸

۱. نگاه کنید به

"Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects," John B Hart and Robert B. Herrmann, *American Journal of Physics*, January 1968, p. 46.

Ramin.samad@yahoo.com

هر دو ساکن‌اند؛ کره سمت چپ با سرعت v به طرف آنها در حرکت است. فرض کنید برخورد را رودردو و کشسان باشند. (الف) نشان بدهید که اگر $m \leq M$ باشد دو برخورد روی می‌دهد و سرعتهای نهایی را معین کنید. (ب) نشان بدهید که اگر $M > m$ باشد سه برخورد انجام می‌شود و سرعتهای نهایی سه کره را معین کنید.



شکل ۳۷. مسئله ۳۷ و ۴۴

۴۵. وضعیتی مانند مسئله قبل را در نظر بگیرید (شکل ۳۷) ولی فرض کنید که در این مورد برخوردها ممکن است همگی کشسان، همگی غیرکشسان، یا بعضی کشسان و بعضی ناکشسان باشند؛ به علاوه در این مسئله جرمها را m , m' و M انتخاب می‌کنیم. نشان بدهید برای اینکه بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود باید جرم جسم واسطه برابر با $m' = \sqrt{mM}$ – یعنی میانگین هندسی دو جرم مجاور – باشد. (در آکوستیک هم همین رابطه بین جرم‌های لایدهای متوالی هوا در "شیپور نمایی" برقرار است.)

بخش ۵-۱۰ برخورد در دو بعد

۴۶. دو خودرو A به وزن 2720 پوند و B به وزن 3640 پوند که به ترتیب به سمت غرب و جنوب در حرکت‌اند در یک تقاطع با هم تصادف می‌کنند و در هم قفل می‌شوند. قبل از برخورد، سرعت خودرو A 38.5 mi/h و سرعت خودرو B 58.0 mi/h است. بلافاصله پس از برخورد، خودروهای در هم قفل شده با چه سرعتی و در کدام جهت حرکت می‌کنند؟

۴۷. اجسام A و B با هم برخورد می‌کنند. جرم جسم A برابر با 2 kg و جرم جسم B برابر با 3 kg است. سرعتهای این اجسام قبل از برخورد عبارت است از $v_A = 15i + 30j$ و $v_B = -10i + 50j$. بعد از برخورد سرعت جسم A به صورت $v_A = -6i + 30j$ است. تمام سرعتها برحسب متر بر ثانیه بیان شده‌اند. (الف) سرعت نهایی جسم B را بیدا کنید. (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی به سیستم افزوده یا از سیستم کاسته می‌شود؟
۴۸. ذره آلفایی با یک هسته اکسیزن که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. ذره آلفا تحت زاویه 45° بالاتر از راستای اولیه حرکتش پراکنده می‌شود و هسته اکسیزن تحت زاویه 51° پایین‌تر از همان راستا پس می‌زند. سرعت نهایی هسته برای 10^5 m/s است. سرعت نهایی ذره آلفا چقدر است؟ (جرم ذره آلفا $4 \times 10^{-16} \text{ g}$ و جرم هسته اکسیزن $16 \times 10^{-22} \text{ g}$ است.)

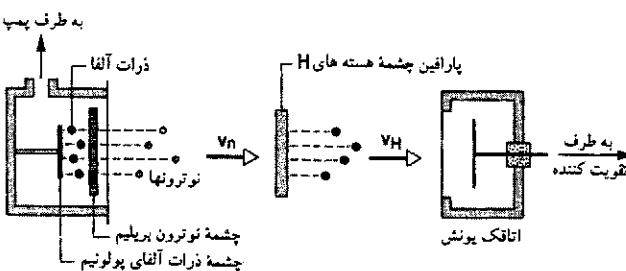
۴۹. یک نوترون کند (که نوترون گرمایی هم نامیده می‌شود) در برخورد کشسان با یک دوترون ساکن تحت زاویه 90° پراکنده می‌شود. نشان بدهید که این نوترون دو سوم انرژی جنبشی اولیه‌اش را به دوترون

دستگاهی که طرح آن در شکل ۴۱ آمده است، نشان داد. در یک اتاق تخلیه، نمونه‌ای از پلولیم برتوزا وامی پاشد و ذرات آلفا (هسته‌های هلیم) تولید می‌شوند. این ذرات به قابلی از بریلیم برخورد می‌کنند و فرآیندی صورت می‌گیرد که حاصل آن گسیل نوترون است. (آنچه از واکنش $\text{He} + \text{Be}$ به دست می‌آید کربن پایدار + نوترون است) از برخورد این نوترونها به لایه‌ای از پارافین (CH_4)، به آزاد شدن هسته‌های هیدروژن می‌انجامد، که در اتاق یونش آشکارسازی می‌شوند. به عبارت دیگر، برخورد کشسانی صورت می‌گیرد که در آن بخشی از تکانه نوترون به هسته هیدروژن منتقل می‌شود. (الف) عبارتی برای بیشترین سرعتی که هسته هیدروژن (m_{H}) می‌تواند کسب کند، v_{H} ، به دست بیاورید. فرض کنید که نوترون فرودی دارای جرم m_n و سرعت v_n باشد. (راهنمایی: فکر کنید که آیا در برخورد رودررو انرژی بیشتری منتقل می‌شود یا در برخورد سایشی؟) (ب) یکی از هدفهای چادویک پیدا کردن جرم این ذره جدیدی بود که خودش کشف کرده بود. بررسی عبارت به دست آمده در قسمت (الف)، که شامل این پارامتر است، نشان می‌دهد که در آن دو مجھول وجود دارد، v_n و v_{H} معلوم است؛ آن را می‌شود در اتاق یونش اندازه‌گیری کرد. برای حذف پارامتر مجھول v_n ، چادویک به جای لایه پارافین از پاراسیانوزن (CN) استفاده کرد. در این صورت، نوترونها به جای هسته هیدروژن با هسته نیتروژن برخوردهای کشسان انجام می‌دهند. البته، عبارت به دست آمده در قسمت (الف) باز هم معتبر است، کافی است به جای v_{H} و m_{H} به ترتیب v_N و m_N بگذاریم. بنابراین اگر v_N در آزمایش‌های جداگانه‌ای اندازه‌گیری شوند، می‌توانیم v_n را بین دو رابطه مربوط به هیدروژن و نیتروژن حذف کنیم تا مقداری برای m_n حاصل شود. مقادیری که چادویک بدست آورد اینها بود:

$$v_{\text{H}} = 3 \times 10^9 \text{ cm/s}$$

$$v_N = 47 \times 10^9 \text{ cm/s}$$

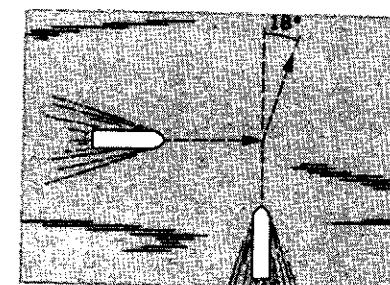
مقدار m_n (که چادویک محاسبه کرد) قدر است؟ این مقدار را با مقدار ثابت شده $1.867 \times 10^{-27} \text{ kg}$ مقایسه کنید. (در این مسئله فرض کنید $v_n = 14 \text{ u}$ و $m_{\text{H}} = 1 \text{ u}$ است).



شکل ۴۱. مسئله ۵۹

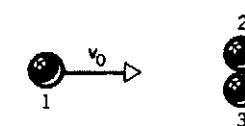
۵۹. در برخورد کشسان بین ذره m_1 و ذره m_2 که در ابتدا ساکن است، نشان بدھید که: (الف) زاویه‌ای که تحت آن ذره m_1

۵۵. یدککشی به جرم 10^5 kg با سرعت 20 m/s در مه غلیظی به طرف پایین رودخانه‌ای در حرکت است که از پهلو با یدککش دیگری که مستقیماً عرض رودخانه را می‌پساید برخورد می‌کند (شکل ۳۹). جرم یدککش دوم 10^5 kg و سرعت آن 30 m/s است. بلافضله پس از برخورد، ناخدای یدککش دوم در می‌پاید که مسیرش به این حادثه عملاً صفر است. (الف) سرعت و راستای حرکت یدککش اول بلافضله پس از برخورد چقدر و کدام است؟ (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی "تلف" می‌شود؟



شکل ۳۹. مسئله ۵۵

۵۶. توپی که با سرعت اولیه 10 m/s در حرکت است با دو توپ مشابه مماس به یکدیگر که خط واصل مراکز آنها عمود بر سرعت اولیه خودش است برخورد کشسان می‌کند (شکل ۴۰). توپ اول مستقیماً به طرف نقطه تماس دو توپ دیگر شناه روی شده است. همه توپها بدون اصطکاک اند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد معین کنید. (راهنمایی: در صورت نبود اصطکاک، هر ضربه در امتداد خط واصل مراکز توپها و عمود بر سطح تماس است).



شکل ۴۰. مسئله ۵۶

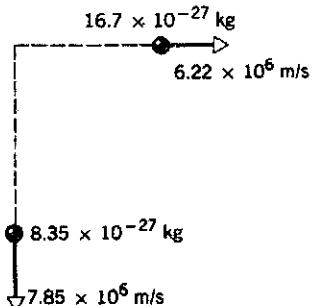
۵۷. در یک بازی بیلیارد، گوی "چوبخور" به گوی دیگری که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. پس از برخورد، گوی چوبخور با سرعت 5 m/s در امتداد خطی که با راستای سرعت اولیه‌اش زاویه 60° می‌سازد حرکت می‌کند. گوی دوم سرعتی معادل با 75 m/s کسب می‌کند. با استفاده از پایستگی تکانه (الف) زاویه راستای حرکت گوی دوم را با امتداد سرعت اولیه گوی چوبخور و (ب) سرعت اولیه گوی چوبخور را پیدا کنید.

۵۸. در سال ۱۹۳۲ جیمز چادویک، فیزیکدان انگلیسی، وجود و خواص نوترون (یکی از ذرات اساسی در ساختار اتم) را به وسیله

که در آنها m_1 جرم الکترون است. (الف) انرژی جنبشی کل محصولات و اپاشی را به دست بیاورید. (ب) هر یک از محصولات و اپاشی چقدر انرژی جنبشی کسب می‌کند؟

۶۴. ذره ساکنی به جرم m خودبه‌خود، به دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 وامی پاشد که سرعتهای آنها به ترتیب v_1 و v_2 است. نشان بدهید که $v = m_1 + m_2$ است.

۶۵. هسته ساکنی خودبه‌خود به سه ذره وامی پاشد. دو ذره از این سه ذره آشکارسازی می‌شوند؛ جرم‌ها و سرعتهای آنها در شکل ۴۲ مشخص شده است. (الف) تکانه ذره سوم که می‌دانیم جرمی برابر با 10^{-27} kg دارد چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی (برحسب MeV) در این فرایند و اپاشی ظاهر می‌شود؟



شکل ۴۲. مسئله ۶۵

۶۶. یک پیون ساکن به صورت زیر وامی پاشد

$$\pi \rightarrow \mu + \nu$$

μ نماینده میون (با انرژی سکون (10^0 MeV)) و ν نماینده نوتريینو (با انرژی سکون صفر) است. انرژی جنبشی اندازه‌گیری شده برای میون 10^0 MeV است. (الف) تکانه نوتريینو را برحسب یکای c محاسبه کنید. (ب) انرژی سکون پیون را محاسبه کنید.

پروزه کامپیوتری

۶۷. یک برنامه کامپیوتری بنویسید که برخورد کشسان بین دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 و سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} را توصیف کند. این برنامه باید مقادیر عددی این چهارکمیت را به عنوان داده‌های ورودی بگیرد و مقادیر عددی سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} و همچنین سرعت مرکز جرم، v_{cm} را به عنوان خروجی بدهد. از برنامه‌ای که می‌نویسید برای بررسی هر تعداد از حالت‌های خاصی که به فکرتان می‌رسد – مثل $v_{1i} = v_{2i}$ ، $v_{1i} \gg v_{2i}$ ، $m_1 \ll m_2$ ، $m_1 \gg m_2$ ، $m_1 = m_2$ و $v_{1i} = -v_{2i}$ – استفاده کنید.

ممکن است بر اثر برخورد بیشترین انحراف را پیدا کند، θ_m ، با رابطه $\cos^2 \theta_m = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$ بیان می‌شود، به طوری که اگر $m_1 = m_2$ باشد، $\theta_m \leq \pi/2$ است؛ (ب) اگر $m_1 > m_2$ باشد، $\theta_m < \pi/2$ است؛ (ج) اگر $m_1 < m_2$ باشد، $\theta_m > \pi/2$ است؛ (د) اگر $m_1 \neq m_2$ باشد، θ_m می‌تواند تمام مقادیر بین 0° و 180° را اختیار کند.

بخش ۶-۴. چارچوب مرجع مرکز جرم

۶۰. (الف) نشان بدهید که، در برخورد کشسان یک‌بعدی بین دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 که به ترتیب با سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} در حرکت‌اند، سرعت حرکت مرکز جرم برابر است با

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

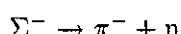
(ب) با استفاده از معادلات ۱۵ و ۱۶ نشان بدهید که بعد از برخورد هم همان است که قبل از برخورد بود.

۶۱. در چارچوب آزمایشگاه، جسمی به جرم 16 g با سرعت 15.6 m/s به سمت چپ در حرکت است که با جسمی به جرم 2.84 g کیلوگرم که با سرعت 12.2 m/s به سمت راست در حرکت است رودرو برخورد می‌کند. مرکز جرم این سیستم دو جسمی بعد از برخورد با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶۲. ذره‌ای به جرم m_1 که با سرعت v_{1i} در حرکت است با ذره دیگری به جرم m_2 که ساکن است، برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهد. (الف) انرژی جنبشی سیستم قبل از برخورد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی سیستم بعد از برخورد چقدر است؟ (ج) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه هدررفته است؟ (د) فرض کنید v_{cm} سرعت حرکت مرکز جرم این سیستم باشد. برخورد را از چارچوب مرجعی که همراه مرکز جرم حرکت می‌کند (چارچوب پریم دار) نظره کنید، که در آن $v_{cm} = v_{1i} - v_{2i}$ است. محاسبات قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) را از دید ناظر این چارچوب تکرار کنید. آیا انرژی جنبشی هدر رفته در هر دو مورد یکسان است؟ در این باره توضیح بدهید.

بخش ۶-۵. فرایندهای و اپاشی خودبه‌خودی

۶۳. ذره‌ای که Σ^- (سیگما منفی) نامیده می‌شود و در چارچوب مرجع معینی در حال سکون است، به طور خودبه‌خودی به صورت زیر به دو ذره دیگر وامی پاشد



جرم این ذره‌ها عبارت است از

$$m_\Sigma = 2340 \text{ GeV}$$

$$m_\pi = 273.2 \text{ GeV}$$

$$m_n = 1838.6 \text{ GeV}$$

۱۳

تکانهٔ زاویه‌ای

در فصل ۱۲ دینامیک حرکت دورانی جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت را بررسی کردیم. دیدیم که رابطهٔ اسکالار $I\alpha = \tau$ برای حل مسائل دوران حول محور ثابت کافی است. در این فصل، بررسی مان را به وضعیتهایی که در آنها ممکن است محور دوران در یک چارچوب مرجع لخت ثابت نباشد تعمیم می‌دهیم. برای حل این نوع مسائل دینامیکی، یک رابطهٔ برداری برای حرکت دورانی پیدا می‌کنیم که مشابه با شکل برداری قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ ، برای حرکت ذره است. تکانهٔ زاویه‌ای را هم معرفی می‌کنیم و اهمیت آن را، به عنوان یک خاصیت دینامیکی دوران، نشان می‌دهیم. سرانجام نشان می‌دهیم که در سیستمهایی که هیچ گشتاور خارجی خالصی به آنها وارد نمی‌شود، قانون مهم پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای برقرار است.

تکانهٔ زاویه‌ای بردار است. اندازهٔ این بردار برابر است با

$$l = rp \sin \theta \quad (2)$$

که θ زاویه کوچکتر بین \mathbf{r} و \mathbf{p} است؛ راستای این بردار عمود است بر صفحه‌ای که \mathbf{r} و \mathbf{p} تشکیل می‌دهند، و جهت آن طبق قاعده دست راست معین می‌شود: بردار \mathbf{r} را، از طریق زاویه کوچکتر، در جهت چهارانگشت خمیده دست راست به طرف \mathbf{p} پُچرخانید؛ حالا شست کشیده دست راست شما در جهت ۱ است (مواری با محور \mathbf{z} در شکل ۱).

اندازه بردار ۱ را می‌توانیم به صورت

$$l = (r \sin \theta)p = pr_{\perp} \quad (3\text{الف})$$

یا به صورت

$$l = r(p \sin \theta) = rp_{\perp} \quad (3\text{ب})$$

بنویسیم، که $r_{\perp} = r \sin \theta$ مولفه بردار \mathbf{r} در راستای عمود بر خط اثر \mathbf{p} است و $p_{\perp} = p \sin \theta$ مولفه \mathbf{p} در راستای عمود بر \mathbf{r} است. معادله ۳ ب نشان می‌دهد که فقط مولفه عمود بر \mathbf{r} بردار \mathbf{p} در تکانهٔ زاویه‌ای سهیم است. وقتی زاویه بین \mathbf{r} و \mathbf{p} برابر 0° یا 180° باشد، مولفه عمودی وجود ندارد ($p_{\perp} = p \sin \theta = 0$)؛ در این صورت خط اثر \mathbf{r} اندکاً می‌گزند و p_{\perp} نیز برابر صفر است. در این مورد هر

۱۴-۱ تکانهٔ زاویه‌ای ذره

دیدیم که تکانهٔ خطی برای مطالعهٔ حرکت انتقالی تک ذره‌ها سیستمهای از ذره‌ها، منجمله اجسام صلب، کمیت مفیدی است. مثلاً در برخوردها تکانهٔ خطی پایسته است. تکانهٔ خطی یک تک ذره عبارت است از $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (معادله ۱۹، فصل ۹)، و تکانهٔ خطی سیستمی از ذره‌ها برابر است با $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$ (معادله ۲۵، فصل ۹) که در آن M جرم کل سیستم و \mathbf{v}_{cm} سرعت مرکز جرم آن است. مشابه تکانهٔ خطی در حرکت دورانی را تکانهٔ زاویه‌ای می‌نامند، که آن را برای مورد خاص یک تک ذره در زیر تعریف می‌کنیم. بعداً این تعریف را گسترش می‌دهیم تا شامل مجموعه‌های ذرات شود و نشان می‌دهیم که تکانهٔ زاویه‌ای در مطالعهٔ حرکت دورانی همانقدر مفهوم مفیدی است که تکانهٔ خطی در حرکت انتقالی.

ذره‌ای به جرم m و تکانهٔ خطی \mathbf{p} را در مکان \mathbf{r} نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت در نظر بگیرید؛ برای سادگی، دستگاه مختصات را در شکل ۱ چنان اختیار کرده‌ایم که صفحهٔ متشکل از \mathbf{r} و \mathbf{p} همان صفحه xy باشد. تکانهٔ زاویه‌ای I ذره نسبت به مبدأ O چنین تعریف می‌کنیم

$$I = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1)$$

توجه کنید که برای تعریف تکانهٔ زاویه‌ای باید مبدأ O مشخص باشد تا بتوانیم بردار مکان \mathbf{r} را تعریف کنیم.

این رابطه می‌گوید که گشتاور خالص وارد بر یک ذره برابر با آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای آن با زمان است. گشتاور τ و تکانه زاویه‌ای I باید نسبت به مبدأ مشترکی تعریف شده باشند. معادله ۶ مشابه دورانی نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با آهنگ زمانی تغییر تکانه خطی آن ذره.

معادله ۶ مانند هر معادله برداری دیگر، هم ارز سه معادله اسکالار است که عبارت‌اند از

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt} \quad (7)$$

بهاین ترتیب، مؤلفه x گشتاور خارجی برایند برابر است با آهنگ زمانی تغییر در مؤلفه x تکانه زاویه‌ای. در راستاهای y و z هم روابط مشابهی برقرار است.

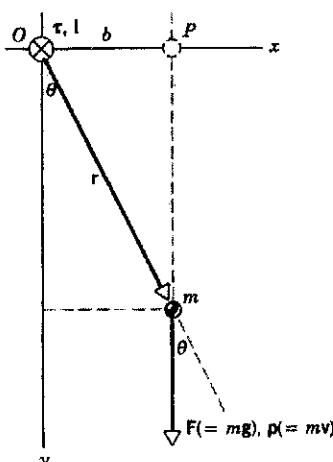
مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از حالت سکون از نقطه P در شکل ۲ رها شده است، این ذره موازی محور y (در امتداد قائم) سقوط می‌کند. (الف) گشتاور نیروی وارد بر ذره m نسبت به مبدأ O را در هر زمان t به دست می‌یابوید. (ب) تکانه زاویه‌ای m را نسبت به همان مبدأ در زمان t پیدا کنید. (ج) نشان بدهید که جوابهای شما در معادله ۶، $\sum \tau = dl/dt$ صدق می‌کنند.

حل: (الف) گشتاور نیرو عبارت است از $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ و اندازه آن برابر است با

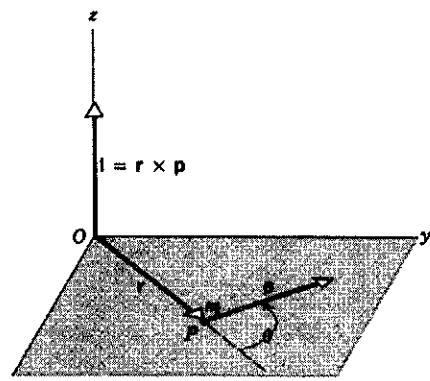
$$\tau = rF \sin \theta$$

در این مثال، داریم $F = mg$ و $r \sin \theta = b$ ، بنابراین

$$\tau = mgb = mb$$



شکل ۲. مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از نقطه P سقوط می‌کند. گشتاور نیروی τ و تکانه زاویه‌ای I نسبت به مبدأ O هر دو عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل اند؛ نشانه \oplus در نقطه O به همین معنی بهکار رفته است.



شکل ۱. ذره‌ای به جرم m در نقطه P قرار دارد که با بردار مکان \mathbf{r} مشخص شده است. تکانه خطی این ذره $v = mv$ است. (برای سادگی، هم $p = mv$ و هم \mathbf{p} را در صفحه xy گرفته‌ایم). نسبت به مبدأ O ، تکانه زاویه‌ای ذره $I = r \times p = 1$ است که در این مورد با محور z موازی است.

یک از معادلات ۳ آلف و ۳ ب نشان می‌دهند که تکانه زاویه‌ای I برابر با صفر است.

حالا برای یک ذره رابطه مهمی بین گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای به دست می‌آوریم. ابتدا از معادله ۱ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (4)$$

مشتق‌گیری از یک حاصل ضرب برداری به همان صورتی انجام می‌شود که مشتق‌گیری از یک حاصل ضرب معمولی، جز آنکه در این مورد مجاز به عوض کردن تردن ترتیب جمله‌ها نیستیم. پس از انجام مشتق‌گیری داریم

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

dr/dt همان سرعت لحظه‌ای v ذره است و p هم برابر با mv است. با نشاندن این مقادیر در جمله اول سمت راست معادله بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dl}{dt} = (\mathbf{v} \times mv) + \mathbf{r} \times \frac{dp}{dt} \quad (5)$$

ولی $\mathbf{v} \times mv = 0$ ، چون حاصل ضرب برداری دو بردار موازی صفر است. حالا اگر به جای dp/dt در جمله دوم، نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ وارد بر ذره را قرار بدهیم داریم

$$\frac{dl}{dt} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$$

طرف راست معادله بالا همان گشتاور خالص وارد بر ذره است، و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \tau = \frac{dl}{dt} \quad (6)$$

تکانه زاویه‌ای تک‌تک ذره‌ها حول این نقطه را به صورت برداری با هم جمع کنیم. برای یک سیستم N ذره‌ای داریم

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \cdots + \mathbf{l}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{l}_n$$

که در آن جمع (برداری) روی همه ذرات تشکیل‌دهنده سیستم انجام می‌شود.

ممکن است تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{L} یک سیستم حول یک نقطه مرجع ثابت (که بنابر تعريف ۱ در معادله ۱، آنرا مبدأ یک چارچوب مرجع لخت در نظر می‌گیریم) بر حسب زمان تغییر کند. یعنی

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^N \frac{d\mathbf{l}_n}{dt}$$

می‌دانیم که برای هر ذره n $d\mathbf{l}_n/dt = \boldsymbol{\tau}_n$ است، و با قراردادن در معادله بالا، داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_n$$

یعنی، آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات برابر است با برآیند گشتاورهای وارد بر آن سیستم.

گشتاورهای ناشی از نیروهای داخلی بین ذرات و (۲) گشتاورهای مربوط به نیروهای خارجی. اگر قانون سوم نیوتون به صورت (به اصطلاح)

قوی آن برقرار باشد، یعنی، اگر نیروهای بین هر دو ذره به تها برابر و در خلاف جهت هم دیگر باشند بلکه در امتداد خط وصل بین دو ذره نیز عمل کنند، گشتاور داخلی کل صفر است زیرا گشتاور حاصل از هر زوج نیروی عمل-عکس العمل صفر است.

به این ترتیب چشیده اول، یعنی گشتاور حاصل از نیروهای داخلی، هیچ سهمی در تغییر \mathbf{L} ندارد. تنها چشیده دوم (گشتاور نیروی حاصل از نیروهای خارجی) باقی می‌ماند، و می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (۸)$$

که در آن $\sum \boldsymbol{\tau}_{ext}$ عبارت از برآیند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم است. معادله ۸ را می‌توان چنین بیان کرد: گشتاور خارجی خالص وارد بر یک سیستم از ذرات برابر با آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای کل آن سیستم است. گشتاور و تکانه زاویه‌ای، هر دو باید نسبت به مبدأ مشترکی در یک چارچوب مرجع لخت محاسبه شوند. در مواردی که امکان بروز هیچ ابهامی در کار نباشد، شاخص پایین $\boldsymbol{\tau}_{ext}$ را حذف می‌کنیم.

معادله ۸ تعمیم معادله ۶ به مجموعه‌ای از ذرات است. این معادله، چه ذرات تشکیل‌دهنده سیستم نسبت به هم در حرکت باشند و چه نسبت به هم وضعیت ثابتی در فضای داشته باشند (مانند جسم صلب) دارد که انتخاب می‌کنیم یعنی به b وابسته است. در حالت خاص، اگر $b = 0$ باشد، $\boldsymbol{\tau} = r \times \mathbf{p}$ و در نتیجه $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l}$ است.

توجه کنید که گشتاور نیرو حاصل ضرب نیروی mg در بازوی گشتاور b است. قاعده دست راست نشان می‌دهد که τ عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل است.

(ب) تکانه زاویه‌ای از معادله ۱، $\mathbf{l} = r \times \mathbf{p}$ ، به دست می‌آید و اندازه آن (از معادله ۲) برابر است با

$$l = rp \sin \theta$$

در این مثال، $b = l$ و $p = mv = m(gt)$ است، بنابراین داریم

$$l = mgbt$$

قاعده دست راست نشان می‌دهد که بردار l عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل صفحه است، یعنی در واقع l و τ با هم موازی‌اند. بردار l بر حسب زمان فقط از لحظه اندازه تغییر می‌کند و جهت آن در این مورد همواره ثابت می‌ماند.

(ج) اگر معادله ۶ را بر حسب اندازه بردارها بنویسیم، داریم

$$\tau = \frac{dl}{dt}$$

با قراردادن عبارتها مربوط به τ و l از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb$$

که حاصل این عمل یک اتحاد است. به این ترتیب رابطه $\tau = dl/dt$ در این مورد ساده نتیجه صحیح را به دست می‌دهد. در واقع، اگر ثابت b را از طرفین دو جمله اول در رابطه بالا حذف کنیم و اگر به جای gt کیت هم‌ارز آن یعنی v را قرار بدیم، داریم

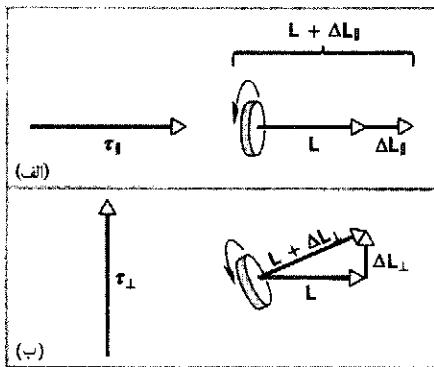
$$mg = \frac{d}{dt}(mv)$$

از آنجاکه $mv = p$ و $mg = F$ است، رابطه بالا همان رابطه آشنای $F = dp/dt$ است. به این ترتیب، همان‌طور که قبله گفته‌ایم، روابطی مانند $\tau = d\mathbf{l}/dt$ ، که خیلی هم مفیدند، روابط اساساً جدیدی در مکانیک کلاسیک نیستند، بلکه فرمولبندی مناسبی از همان قوانین نیوتون برای حرکت دورانی‌اند.

توجه داشته باشید که مقادیر τ و l بستگی به مبدأ مختصاتی دارند که انتخاب می‌کنیم یعنی به b وابسته است. در حالت خاص، اگر $b = 0$ باشد، $\tau = r \times \mathbf{p}$ و در نتیجه $\tau = l$ است.

۲- سیستمهای ذرات

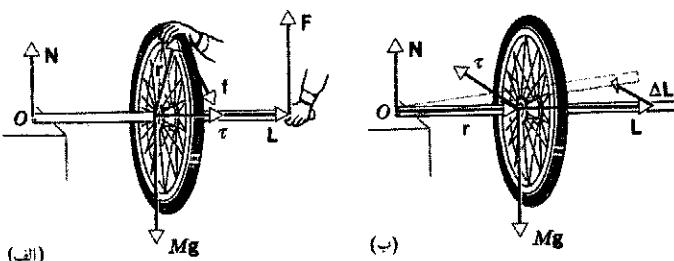
تا اینجا فقط تک‌تک ذره‌ها را بررسی کردی‌ایم. برای اینکه تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{L} یک سیستم از ذرات را حول یک نقطه معلوم محاسبه کنیم باید



شکل ۴. (الف) مؤلفه $\parallel \tau$ (موازی با تکانه زاویه‌ای) گشتاور نیرو، تکانه زاویه‌ای را به اندازه $\parallel \Delta L$ تغییر می‌دهد که با L موازی است. (ب) (الف) مؤلفه $\perp \tau$ گشتاور نیرو (عمود بر تکانه زاویه‌ای)، تکانه زاویه‌ای را به اندازه $\perp \Delta L$ تغییر می‌دهد که بر L عمود است. در این صورت محور دوران در راستای برایند برداری $\perp L + \Delta L$ قرار می‌گیرد.

یک شباهت دیگر میان پدیده‌های خطی و دورانی این است که اگر (الف) نیرو عمود بر تکانه خطی اثر کند (شکل ۳ ب) یا (ب) اگر گشتاور نیرو عمود بر تکانه زاویه‌ای اثر کند (شکل ۴ ب)، کاری انجام نمی‌شود. در هیچ‌یک از این دو مورد، عامل خارجی موجب تغییر از زی جنبشی نمی‌شود، و حرکت با همان سرعت خطی یا دورانی ادامه می‌یابد.

نمونه‌ای از کاربرد معادله ۸ برای دینامیک دورانی در شکل ۵ نشان داده شده است. در شکل ۵(الف) یک سرمحور یک چرخ چرخان روی سطونی قرار گرفته است و سر دیگر محور را دانشجویی در دست دارد. دانشجو برای اینکه چرخ تندتر بچرخد نیرویی مماس بر لبه چرخ به آن وارد می‌کند. گشتاوری که این نیرو ایجاد می‌کند موازی با تکانه زاویه‌ای چرخ است، و هر دو بردار τ و ΔL به طرف دانشجو هستند. این گشتاور، موجب افزایش تکانه زاویه‌ای چرخ می‌شود. در شکل ۵ ب، دانشجو یک سرمحور را رها کرده است. حالا گشتاورها را حول تنها تکیه‌گاه دیگر بررسی می‌کنیم. دونیرو به سیستم اثر می‌کند؛ یکی نیروی



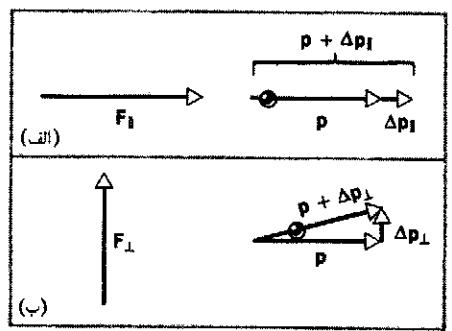
شکل ۵. (الف) نیروی مماسی F وارد بر طبق چرخ سبب ایجاد گشتاور τ (حول مرکز چرخ) در امتداد محور دوران می‌شود، و مقدار سرعت زاویه‌ای چرخ را افزایش می‌دهد ولی جهت آن را عوض نمی‌کند. (ب) اگر انتهای محور را رها کنیم، گشتاور نیروی گرانشی حول نقطه O به طرف داخل صفحه کتاب، یعنی عمود بر محور دوران است (شکل ۴ ب). این گشتاور جهت محور دوران را تغییر می‌دهد و محور چرخ در صفحه افقی به طرف وضعیتی که با خط حین نشان داده شده است حرکت می‌کند.

معادله ۸ مشابه دورانی معادله ۲۷ فصل ۹ است، و می‌گوید که برای یک سیستم از ذرات (اعم از اینکه صلب باشد یا نباشد) نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم برابر است با آهنگ زمانی تغییر در تکانه خطی کل آن سیستم.

می‌خواهیم بینیم که بین تغییر تکانه خطی در اثر نیرو و تغییر تکانه زاویه‌ای در اثر گشتاور، چه شباهتی هست. فرض کنید نیروی \mathbf{F} به ذره‌ای با تکانه خطی \mathbf{P} در حرکت است وارد شود. نیروی \mathbf{F} را می‌توانیم، مانند شکل ۳، به دو مؤلفه تجزیه کنیم: یک مؤلفه آن (\mathbf{F}_{\parallel}) موازی با جهت (لحظه‌ای) \mathbf{p} و مؤلفه دیگر (\mathbf{F}_{\perp}) عمود بر \mathbf{p} .

در بازه زمانی کوتاه Δt ، نیروی \mathbf{F} سبب تغییر تکانه‌ای برابر با $\Delta \mathbf{p}$ می‌شود، که مطابق با رابطه $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{p}/\Delta t$ است. پس $\Delta \mathbf{p}$ موازی با \mathbf{F} است. مؤلفه \mathbf{F}_{\parallel} موجب تغییر تکانه $\Delta \mathbf{p}_{\parallel}$ موازی با \mathbf{p} می‌شود، که این مؤلفه به \mathbf{p} افزوده می‌شود و اندازه آن را تغییر می‌دهد ولی جهت \mathbf{F}_{\perp} آن را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳ الف). از طرف دیگر، مؤلفه عمودی \mathbf{F}_{\perp} موجب تغییر تکانه $\Delta \mathbf{p}_{\perp}$ می‌شود که جهت \mathbf{p} را تغییر می‌دهد، ولی تا وقتی که $\Delta \mathbf{p}_{\perp}$ در مقایسه با \mathbf{p} کوچک باشد مقدار آن را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳ ب). نمونه‌ای از این حرکت، حرکت ذره‌ای است که با سرعتی به اندازه ثابت روی یک دایره می‌گردد. این حرکت فقط تحت تأثیر نیروی مرکزگردایی که همواره عمود بر سرعت مماسی است انجام می‌شود.

همنین تحلیل در مورد اثر گشتاور هم صادق است (شکل ۴). در این مورد $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{L}/\Delta t = \tau$ است و $\Delta \mathbf{L}$ باید موازی با τ باشد. τ را هم بهدو مؤلفه تجزیه می‌کنیم: τ موازی با \mathbf{L} و $\perp \tau$ عمود بر \mathbf{L} . مؤلفه موازی با \mathbf{L} فقط اندازه تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و نه جهت آن را (شکل ۴ الف). مؤلفه عمود بر \mathbf{L} سبب تغییر $\perp \Delta \mathbf{L}$ عمود بر بردار \mathbf{L} می‌شود، که جهت \mathbf{L} را تغییر می‌دهد ولی مقدار آن را تغییر نمی‌دهد (شکل ۴ ب). این وضعیت اخیر همان است که در حرکت فرفره و زیروسکوپ بروز می‌کند (اینها را در بخش ۱۳-۵-۴ بررسی خواهیم کرد). از مقایسه شکلهای ۳ و ۴ می‌توانید شباهت‌های میان دینامیک انتقالی و دینامیک دورانی را مشاهده کنید.



شکل ۳. (الف) وقتی نیرو یک مؤلفه موازی \mathbf{F}_{\parallel} با تکانه خطی \mathbf{p} ذره داشته باشد، تکانه خطی ذره به اندازه $\parallel \Delta \mathbf{p}_1$ تغییر می‌کند که موازی با \mathbf{p} است. (ب) وقتی نیرو یک مؤلفه عمود \mathbf{F}_{\perp} بر تکانه خطی \mathbf{p} ذره داشته باشد، تکانه خطی ذره به اندازه $\perp \Delta \mathbf{p}_1$ تغییر می‌دهد که عمود بر \mathbf{p} است. در این صورت ذره در راستای بردار $\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}_{\perp}$ حرکت می‌کند.

سرعت زاویه‌ای ω جسم به طرف بالا در امتداد (یا به طور معادل، موازی با) محور z است (شکل ۶). این جهت با رابطه برداری $r \times v = \omega r$ (معادله ۱۶ فصل ۱۱) سازگار است. بردار سرعت زاویه‌ای موازی با محور z است، و فرقی نمی‌کند که مبدأ را در کجای این محور گرفته باشیم. همچنین مقدار این بردار هم بستگی به جای مبدأ ندارد، چون این مقدار (از تعریف حاصل ضرب خارجی) با رابطه $v = r \sin \theta / r$ (یعنی $v = \omega r$) بیان می‌شود.

تکانه زاویه‌ای I ذره نسبت به مبدأ O چارچوب مرجع از رابطه ۱ به دست می‌آید، یعنی

$$I = r \times p$$

بردارهای r و p (یعنی mv) را در شکل ۶ نشان داده‌ایم. بردار 1 بر صفحه مستشکل از بردارهای r و p عمود است و به همین دلیل I موازی با w نسبت. توجه کنید (شکل ۶) که 1 دارای یک مؤلفه (برداری)، I ، موازی با w دارد، ولی مؤلفه (برداری) دیگری هم دارد، I ، که عمودند بر w است. این حرکت یکی از مواردی است که در آن شباهت میان حرکت خطی و دایره‌ای برقرار نیست: p همواره موازی با w است، ولی I همیشه موازی با w نیست. اگر مبدأ مختصات را چنان اختیار کنیم که در صفحه ذره چرخنده واقع شود، در آن صورت I موازی با w هست؛ در غیر این صورت دو بردار موازی نیستند.^۱

حالا می‌خواهیم رابطه میان I و w ذره چرخنده را بررسی کنیم. از شکل ۶، که در آن بردار 1 را به مرکز دایره منتقل کرده‌ایم، داریم

$$l_z = l \sin \theta = r(mv) \sin \theta = r(mr' \omega) \sin \theta$$

که در آن از رابطه $r' \omega = v$ استفاده کرده‌ایم. در رابطه بالا به جای $r \sin \theta$ کمیت r' (شعاع دایره‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند) را می‌نشانیم و نتیجه می‌گیریم

$$l_z = mr' \omega \quad (9)$$

که l_z^2 لختی دورانی ذره، I ، نسبت به محور z است. بنابراین

$$l_z = I\omega \quad (10)$$

توجه داشته باشید که رابطه برداری $I\omega = mv$ (که مشابه رابطه خطی $p = mv$ است) در این مورد صحیح نیست، چون I و w هم جهت نیستند.

در چه شرایطی تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای در یک جهت قرار می‌گیرند؟ برای نشان دادن مطلب، فرض کنید ذره دیگری با همان جرم به این سیستم اضافه کنیم. این کار را، آن طور که در شکل ۷ نشان داده شده است، با اتصال یک بازوی دیگر به محور مرکزی شکل ۶ افزایش داده شده است. در همان موقعیت بازوی اول ولی در جهت مخالف انجام می‌دهیم. مؤلفه I ناشی از این ذره دوم مساوی و از نظر جهت مخالف مؤلفه

^۱ این فقط در صورتی درست است که محور دوران یک محور تقارن جسم باشد.

عمود بر سطح در نقطه تکیه‌گاه، که حول این نقطه گشتاوری ندارد و دیگری نیروی وزن چرخ که به طرف پایین در مرکز جرم وارد می‌شود. گشتاور ناشی از وزن چرخ حول O بر بردار I عمود است و اثر آن تعییر جهت I است (شکل ۴). ولی، چون جهت I همان جهت محور چرخ است.^۱ اثر نیروی (رو به پایین) گرانی آن است که محور را به طور جانبی بچرخاند. محور چرخ (در صفحه افقی) حول نقطه تکیه‌گاه می‌چرخد. خودتان امتحان کنید! (اگر چرخ در اختیار ندارید، می‌توانید از یک ویروسکوب بازیچه‌ای استفاده کنید).

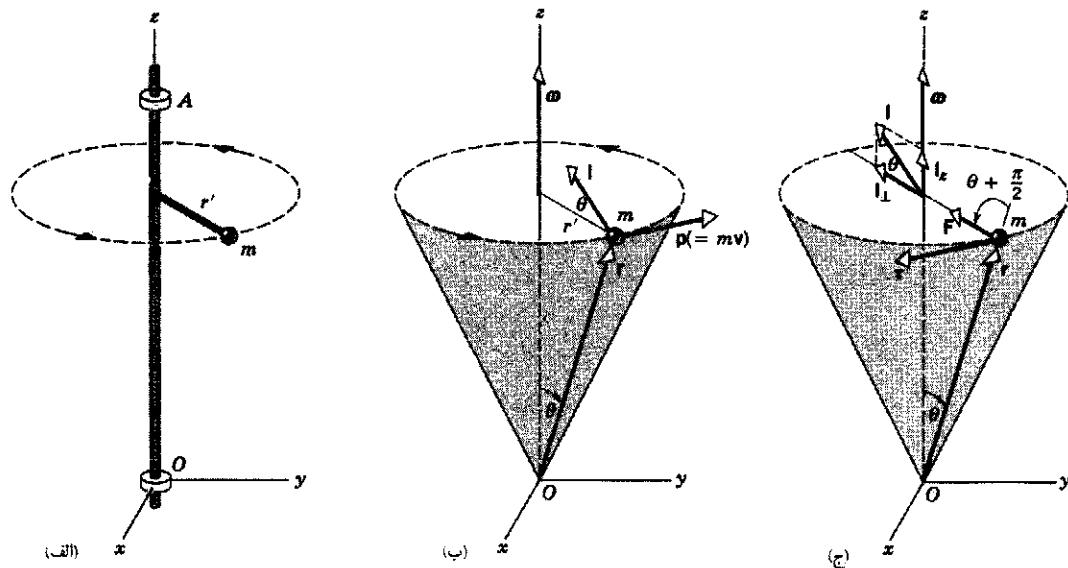
معادله ۸ در صورتی درست است که I و L نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری شوند. ممکن است این سوال پیش باید که اگر این دو بردار را نسبت به یک نقطه اختیاری (مثل یک ذره مشخص) از سیستم متحرک اندازه‌گیری کنیم، آیا باز هم این معادله برقرار است یا نه. در حالت کلی، چنین نقطه‌ای وقتی جسم یا سیستم ذرات حرکت انتقالی انجام می‌دهد، پایین و بالا می‌شود، و وضعیت نسبی ذراش تعییر می‌کند حرکت بسیار پیچیده‌ای دارد و معادله ۸ در مورد چنین نقطه مرجعی قابل استفاده نیست. ولی اگر نقطه مرجع را مرکز جرم سیستم اختیار کنیم، با آنکه ممکن است این نقطه در چارچوب مرجع لخت مورد نظر ما شتاب داشته باشد، باز هم معادله ۸ برقرار است. (نگاه کنید به مسئله ۸) این خاصیت قابل توجه دیگری از مرکز جرم است. به این ترتیب می‌توانیم حرکت کلی سیستمی از ذرات را به حرکت انتقالی مرکز جرم (معادله ۲۷ فصل ۹) و حرکت دورانی حول مرکز جرم (معادله ۸) تجزیه کنیم.

۱۳-۳ تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

برای معرفی وضعیتها که در آنها توجه به ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای، گشتاور نیرو، و تکانه زاویه‌ای کاملًا ضروری است، ابتدا مثال ساده‌ای از حرکت دورانی یک ذره را در نظر می‌گیریم، که نمونه‌ای از مواردی است که در آنها سرعت زاویه‌ای و تکانه زاویه‌ای با هم موازی نیستند.

شکل ۶ اalf ذره‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که توسط یک بازوی صلب بی جرم به طول r ، به محور صلب بی جرمی متصل شده است. بازو بر محور عمود است. ذره در دایره‌ای به شعاع r با سرعتی به مقدار ثابت v حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم آزمایش در ناحیه‌ای انجام می‌شود که در آن گرانش ناجیز است، یعنی منظور کردن نیروی گرانی وارد بر ذره ضروری نیست. تنها نیرویی که به این ذره وارد می‌شود یک نیروی مرکزگرای است. این نیرو توسط بازویی که ذره به محور متصل می‌کند اعمال می‌شود.

محور دوران توسط دو یاتاقان ایده‌آل (بدون اصطکاک) مقید به محور z است. یاتاقان پایینی را مبدأ دستگاه مختصات می‌گیریم. خواهیم دید که یاتاقان بالایی برای جلوگیری از لنگی محور دوران حول محور z ضروری است. لنگش در صورتی اتفاق می‌افتد که سرعت زاویه‌ای موازی با تکانه زاویه‌ای نباشد.



شکل ۶. (الف) ذره‌ای به جرم m توسط بازویی به طول r' به محوری که توسط دو یاتاقان (در نقاط O و A) نگه داشته است و می‌تواند حول محور z دوران کند (ب) ذره با سرعت مماسی v در دایره‌ای به شعاع r' حول محور z می‌چرخد (به منظور ساده کردن میله‌ها و یاتاقانها را حذف کردند). تکانه زاویه‌ای $I = r \times p$ ($= mv$) را حول مبدأ O نشان داده‌ایم. (ج) برای اینکه ذره در یک دایره حرکت کند، باید نیروی مرکزگرایی F به جسم وارد شود. این نیرو در شکل نشان داده شده است. این نیرو گشتاوری نیروی τ حول O ایجاد می‌کند. برای روشن شدن وضعیت حرکت، بردار تکانه زاویه‌ای I و مؤلفه‌های موازی با و عمود بر محور z آن را در مرکز دایره نشان داده‌ایم.

حالا می‌توانیم سیستم دو ذره‌ای را به یک جسم صلب، که از تعداد بی‌شماری ذره تشکیل شده است، تعمیم بدهیم. اگر جسم حول محور دوران متقارن باشد، یعنی بهارازی هر ذره‌ای از جسم، یک ذره با همان جرم کاملاً در نقطه مقابل ذره اول و در همان فاصله از محور دوران قرار داشته باشد، در آن صورت جسم را می‌توان مانند مجموعه‌ای از زوج ذره‌هایی که بررسی کردیم، در نظر گرفت. دو بردار L و ω چون برای همه چنین زوجهایی موازی هستند، در واقع برای تمام اجسام صلبی که چنین تقارنی داشته باشند نیز موازی‌اند. این نوع تقارن را تقارن محوری می‌گویند.

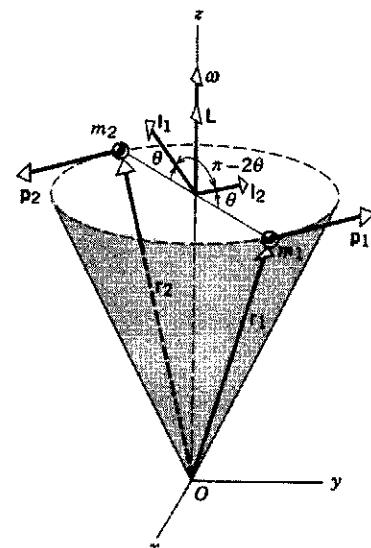
برای چنین اجسام صلب متقارنی L و ω موازی‌اند و می‌توانیم رابطه برداری زیر را بنویسیم

$$L = I\omega \quad (11)$$

ولی، فراموش نکنید که اگر L تکانه زاویه‌ای کل باشد، معادله ۱۱ فقط در مورد اجسامی صادق است که نسبت به محور دوران متقارن باشد. اگر L نشاندهنده مؤلفه بردار تکانه زاویه‌ای حول محور دوران باشد (یعنی $\perp L$)، در آن صورت معادله ۱۱ در مورد هر جسم صلبی، اعم از متقارن یا نامتقارن، که حول محور ثابتی دوران می‌کند صادق است.

در مورد اجسام متقارن (مانند سیستم دو ذره‌ای شکل ۷) می‌توان

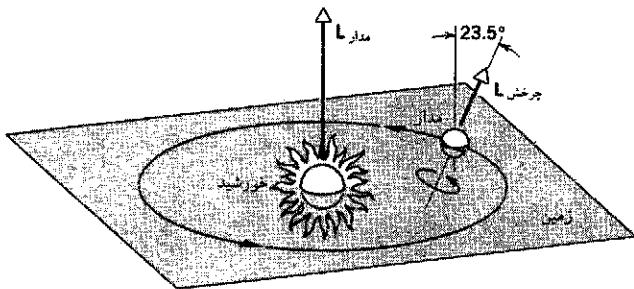
شکل ۶(الف) را حذف کرد، و محور دوران همچنان



شکل ۷. دو ذره، هر یک به جرم m ، که در دو انتهای یک قطر واقع شده‌اند حول محور z دوران می‌کنند. تکانه زاویه‌ای کل دو ذره، L ، در این مورد با سرعت زاویه‌ای ω موازی است.

۱ مربوط به ذره اول است، و جمع دو بردار ۱ برابر با صفر می‌شود.

ولی، دو بردار $\perp L$ هم‌سو هستند و با هم جمع می‌شوند. پس برای این سیستم دو ذره‌ای، تکانه زاویه‌ای کل L موازی با ω است.



شکل ۲. زمین روی مداری (که دایره فرض می‌شود) به دور خورشید، و همچنین حول محور خودش دوران می‌کند. دو بردار تکانه زاویه‌ای با هم موازی نیستند، زیرا محور چرخش زمین یک زاویه‌ای، برای با 23.5° ، با خط قطب بر صفحه مدار زمین می‌سازد. طول بردارها در مقیاس مشترکی رسم نشده است: مدار L باید با ضریبی در حدود $10^6 \times 4$ از چرشن L بزرگتر باشد.

تکانه زاویه‌ای مداری برابر است با

$$L_{\text{مدار}} = R_{\text{مدار}} M v = R_{\text{مدار}} M (\omega R_{\text{مدار}}) p = \frac{2\pi}{T} R_{\text{مدار}}^2 = \frac{2\pi}{3.14 \times 10^{78}} (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) (1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 = 2.67 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

می‌بینیم که تکانه زاویه‌ای مداری بسیار بیشتر از تکانه زاویه‌ای چرخشی است.

بردار تکانه زاویه‌ای مداری عمود است بر صفحه مدار زمین (شکل ۲)، در حالی که بردار تکانه زاویه‌ای چرخشی با خط قائم بر صفحه مدار زاویه 23.5° می‌سازد. اگر از حرکت تقدیمی خیلی کندی که محور زمین دارد چشم بپوشیم، در طی حرکت مداری زمین هر دو بردار هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت می‌مانند.

مثال ۳. با استفاده مستقیم از معادله ۸ ($L = I\omega$) شتاب قالب در حال سقوط در مثال ۵ فصل ۵ را پیدا کنید.

حل: سیستم شکل ۹، مشتمل از یک قرص به جرم M و یک قالب به جرم m ، تحت تأثیر نیروی پایین سوی گرانشی وارد بر جرمها و نیروی بالا سویی است که از پاتاقانهای محور قرص به سیستم وارد می‌شود. مرکز قرص را به عنوان مبدأ اختیار می‌کنیم. (کشش نخ یک نیروی داخلی است و از خارج روی سیستم قرص + قالب اثر نمی‌کند). تنها نیروی mg از میان نیروهای خارجی گشتاوری حول مبدأ به سیستم وارد می‌کند، که مقدار آن برابر است با $(mg)R$.

تکانه زاویه‌ای سیستم حول نقطه O در هر لحظه برابر است با

$$L = I\omega + (mv)R$$

در این رابطه ω تکانه زاویه‌ای قرص (متقارن) است و R (تکانه زاویه‌ای (عن) تکانه خطی \times بازوی گشتاور) قالب افたن حول مبدأ.
Ramin.samad@yahoo.com

موازی محور z خواهد ماند. برای تحقیق این موضوع، توجه کنید که چرخاندن یک جسم متقارن مانند یک فرفرا کوچک یا یک چرخ سپاهه حول محوری که بین شست و انگشت نشان یک دست نگه داشته شده، چقدر آسان است. هر بی‌تقارنی کوچکی در جسم وجود یافتن آسان دوم را برای حفظ محور دوران در یک راستای ثابت الزامی می‌کند؛ چنان‌که در پایان این بخش خواهیم دید، این یافتن آسان باشد. این لنگ‌زدن برای اجسامی که با سرعتهای زیاد دوران می‌کنند (مانند چرخانه بین توربینها) مسئله‌ای کاملاً جدی است. این چرخانه‌ها، با آنکه کاملاً متقارن طراحی می‌شوند، ممکن است به خاطر خطاهای کوچکی که، مثلاً در نصب پره‌ها پیش می‌آید، اندکی نامتقارن از کار در بیاید. این چرخانه‌ها را می‌شود با افزودن یا حذف قطعات فلزی در مکانهای مناسب مجدداً متقارن کرد. برای این کار چرخ را در دستگاه مخصوصی می‌چرخانند؛ این دستگاه مقدار لنگی را اندازه می‌گیرد، تصحیح‌های لازم را محاسبه می‌کند و نتایج را نشان می‌دهد. در مورد چرخ اتومبیل هم با استفاده از همین نوع دستگاهها، وزنه‌های سربی در مکانهای مناسب روی لبه رینگ لاستیک نصب می‌شود تا لنگی در سرعتهای زیاد را کاهش بدهد. در "بالانس کردن" چرخ اتومبیل، "سکانیک" در واقع سعی می‌کند بردارهای تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای چرخ را با هم موازی کند، تا از کرنش بلبرینگ‌های چرخ کاسته شود.

مثال ۲. کدام‌یک از کمیتهای زیر بزرگتر است: تکانه زاویه‌ای زمین در اثر چرخش زمین حول محور خودش یا تکانه زاویه‌ای زمین که از حرکت زمین به دور خورشید ناشی می‌شود؟ حل: برای مورد اول، زمین را به صورت کره یکنواختی در نظر می‌گیریم ($I = \frac{2}{5} MR_E^2$). سرعت زاویه‌ای این حرکت برابر است با $\omega = 2\pi/T$ ، که T دوره تناوب دوران است ($4 \times 10^4 \text{ s} = 8.64 \times 10^3 \text{ h} = 24 \text{ h}$). به این ترتیب تکانه زاویه‌ای چرخشی برابر است با

$$L = I\omega = \frac{2}{5} MR_E^2 \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{5} \frac{2\pi}{8.64 \times 10^3} (6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 (5.98 \times 10^{24} \text{ kg}) = 7.05 \times 10^{43} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

برای اینکه تکانه زاویه‌ای مداری را محاسبه کنیم، لازم است لحتی دورانی زمین را حول محوری که از خورشید می‌گذرد بدانیم. به این منظور می‌توانیم زمین را به صورت "ذره" ای با تکانه زاویه‌ای p (تکانه $L = R_{\text{مدار}} p$) در نظر بگیریم، که مدار R شاعع مدار و p تکانه خطی زمین است. اینجا هم سرعت زاویه‌ای از $\omega = 2\pi/T$ به دست می‌آید، ولی در این مورد T دوره تناوب مداری است ($1.6 \times 10^7 \text{ s} = 3.6 \text{ y}$).

این تغییر در ۱ باید از اعمال یک گشتاور حاصل شده باشد. منشأ این گشتاور کدام است؟

برای اینکه ذره‌ای در یک دایره حرکت کند، باید تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا باشد. مثلاً در شکل ۶، این نیرو توسط بازویی که ذره را به محور وصل می‌کند تأمین می‌شود. (در اینجا از سایر نیروهای خارجی، مانند گرانش، جسم بوشیده‌ایم). تنها گشتاوری که حول O ایجاد می‌شود گشتاور نیروی F است که از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\tau = r \times F$$

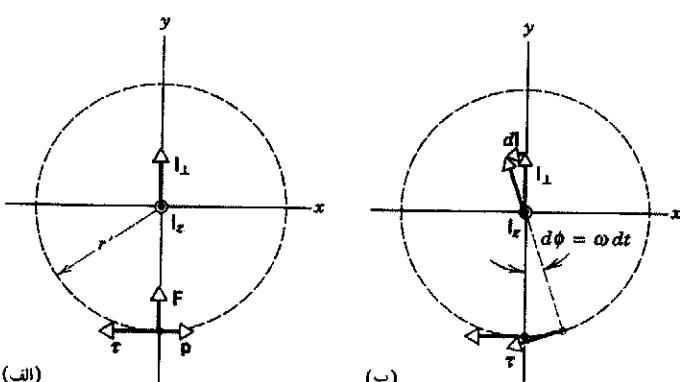
گشتاور τ مماس بر دایره (عمود بر صفحه‌ای که از r و F تشکیل می‌شود) و درجهٔ است که در شکل ۶ مشخص شده است. صحبت این مطلب را می‌توانید با استفاده از قاعده دست راست تحقیق کنید.

می‌خواهیم نشان بدهیم که این گشتاور در شکل دورانی قانون دوم نیوتن، $\tau = dI/dt$ ، صدق می‌کند. شکل ۱۰ الف نمایی دو بعدی از ذره دوران کننده را نشان می‌دهد؛ داریم از راستای محور z به طرف پایین به صفحه xy نگاه می‌کنیم. وقتی ذره به اندازهٔ زاویه کوچک $d\phi = \omega dt$ دوران می‌کند (شکل ۱۰ ب)، بردار dI به اندازهٔ بردار کوچک dI تغییر می‌کند. از شکل ۱۰ ب می‌توانیم بینیم که dI همواره موازی با τ است و بنابراین جهت بردارهای dI و τ با رابطه $dI/dt = \tau$ سازگار است. همچنین می‌توانیم نشان بدهیم که مقدار این بردارها هم در این رابطه صدق می‌کند. با مراجعه به شکل ۶-ج می‌بینیم که گشتاور نیرو حول O برابر است با

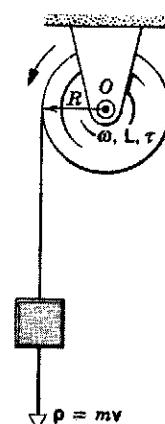
$$\tau = rF \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) = rF \cos \theta$$

در این مورد، F نیروی مرکزگرا و مقدار آن برابر r' است. (۱۰ ب) می‌بینیم که در آن r' شعاع مسیر دایره‌ای است ($r' = r \sin \theta$)

$$\tau = m\omega^r r' \sin \theta \cos \theta \quad (10)$$



شکل ۱۰. (الف) نمایی دو بعدی از صفحه ذره در حال دوران شکل ۶. مؤلفه z تکانه زاویه‌ای به طرف خارج از صفحه شکل ۶ است. (ب) بهاری دوران ذره به اندازهٔ زاویه $d\phi$ ، مؤلفه بردار dI در صفحه به اندازه dI تغییر می‌کند. هم مقدار I و هم جهت آن ثابت می‌ماند، ولی dI تغییر جهت می‌دهد.



شکل ۹. مثال ۳. بردارهای سرعت زاویه‌ای، تکانه زاویه‌ای و گشتاور برایند همگی به سوی خارج صفحه شکل اند؛ این جهت با نشانه \oplus در نقطه O مشخص شده است.

این دو جزء I هر دو در یک جهت عمود بر صفحه شکل ۹ و به طرف خارج واقع می‌شوند. حالا رابطه $\tau = dI/dt$ را (در شکل اسکالارش) به کار می‌گیریم

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt}(I\omega + mvR) \\ &= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right) \\ &= I\alpha + mRa \end{aligned}$$

و چون $a = \alpha R$ و $I = \frac{1}{4}MR^2$ است، این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$mgR = \left(\frac{1}{4}MR^2\right)(a/R) + mRa$$

یا

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}$$

این همان نتیجه‌ای است که در مثال ۵ فصل ۱۲ هم بدست آمد.

گشتاور وارد بر ذره‌ای که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند (اختیاری)

نتیجه شاید غیرمنتظره‌ای که در مورد حرکت ساده شکل ۶ بدست آمد، یعنی موازی نبودن I و τ ممکن است قدری غریب بنماید، ولی این نتیجه با رابطه کالی $\tau = dI/dt$ برای گشتاور وارد بر یک تک ذره سازگار است. بردار I با گذشت زمان همراه با حرکت ذره تغییر می‌کند. این تغییر فقط در جهت است، نه در اندازه. وقتی ذره دوران می‌کند، هم

Ramins samad@yahoo.com

بر صفحه از آن خارج می‌شود. بنابراین بردارهای تکانه خطی دو ذره با هم برابر ولی در جهت‌های مخالف‌اند و بردارهای مکان این ذرات نسبت به O نیز همین طور، بنابراین، با استفاده از قاعده دست راست در مورد $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ ، درمی‌یابیم که ۱ برای هر دو ذره یکسان است و مجموع اها، یعنی بردار تکانه زاویه‌ای کل سیستم، \mathbf{L} ، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، عمود بر میله واصل دو ذره است و در صفحه شکل قرار دارد. پس \mathbf{L} و ω در این لحظه موازی نیستند. وقتی سیستم دوران می‌کند، بردار تکانه زاویه‌ای در حالی که مقدارش ثابت می‌ماند، حول محور ثابت دوران می‌چرخد.

چرخش \mathbf{L} حول محور ثابت شکل ۱۱ کاملاً با رایطه بنیادی $\tau = d\mathbf{L}/dt = \omega \times \mathbf{L}$ همخوانی دارد. گشتاور نیروی خارجی وارد بر کل سیستم ناشی از نیروهای جانبی موازن نشده‌ای است که از یاتاقانها به میل‌گردان وارد و از آن به میله اتصال منتقل می‌شود. در لحظه نشان داده شده در شکل، ذره بالا متایل به حرکت به خارج یعنی به سمت راست راست است. میل‌گردان به سمت راست کشیده می‌شود و به یاتاقان بالایی فشرده می‌شود و در مقابل، یاتاقان بالایی هم نیروی \mathbf{F} را به میل‌گردان وارد می‌کند. این نیرو به سمت چپ است. به همین نحو ذره پایینی متایل به حرکت به سمت خارج، یعنی به طرف چپ است. میل‌گردان در محل یاتاقان پایینی به سمت چپ فشرده می‌شود، یاتاقان پایینی هم به میل‌گردان نیروی $\mathbf{-F}$ را که به سمت راست است وارد می‌کند. گشتاور τ حول نقطه O که از این نیروها ناشی می‌شود عمود بر صفحه شکل به طرف جلوی صفحه، یعنی در واقع عمود بر صفحه مشکل از \mathbf{L} و ω است و در همان جهت است که حرکت چرخشی \mathbf{L} را توجیه می‌کند. (این قسمت را با شکل ۱۰ ب، که در آن τ موازی با ω ولی عمود بر \mathbf{L} بود مقایسه کنید). توجه داشته باشد که چون τ بر ω عمود است، کاری انجام نمی‌شود و بنابراین انرژی جنبشی سیستم چرخان تغییر نمی‌کند. اگر اصطکاک نباشد سیستم تا ابد می‌چرخد. اصطکاک در یاتاقانها سبب ایجاد گشتاوری می‌شود که در راستای میل‌گردان (موازی با ω) است؛ این گشتاور روی سیستم کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی آن را کم می‌کند.

نیروهای \mathbf{F} و $\mathbf{-F}$ در لحظه نشان داده شده در شکل ۱۱ در صفحه شکل قرار دارند. وقتی که سیستم می‌چرخد، این نیروها و بنابراین گشتاور τ نیز همراه با آن‌طوری می‌چرخدند که τ همواره بر صفحه مشکل از ω و \mathbf{L} عمود می‌ماند. نیروهای چرخنده \mathbf{F} و $\mathbf{-F}$ موجب لنگی در یاتاقانهای بالایی و پایینی می‌شوند. یاتاقانها و تکیدگاههای آنها باید استحکام کافی داشته باشند تا بتوانند این نیروها را فراهم کنند. در اجسام چرخان متقاضی هیچگونه لنگی یاتاقان وجود ندارد و میل‌گردان به طور یکتاخت و هموار می‌چرخد.

۱۳-۴ پایستگی تکانه زاویه‌ای

در معادله ۸، دیدیم که آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول یک نقطه ثابت در یک چارچوب مرجع لخت (یا حول مرکز جرم) برای یک گشتاور خارجی خالص وارد بر آن سیستم است،

از شکل ۱۰ ب داریم $l_{\perp} dt = l_{\perp} \omega dt = l_{\perp} \omega r dt$ ، که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp}$$

چون $l = mvr \cos \theta$ است، پس $l_{\perp} = mvr \sin \theta$ است. سرعت مماسی v عبارت است از $v = wr \sin \theta$ ، بنابراین داریم

$$l_{\perp} = mwr^2 \sin \theta \cos \theta$$

و

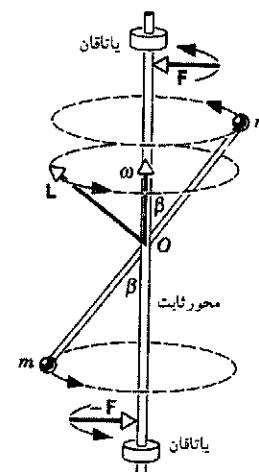
$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp} = m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

از مقایسه معادلات ۱۲ و ۱۳، همان‌طور که انتظار می‌رود، می‌بینیم که $dl/dt = \tau$ است.

اجسام متقاضی در برایر اجسام نامتقاضی

وضعیت دوران برای اجسام متقاضی و نامتقاضی چه فرقی می‌کند؟ فرض کنید میله اتصال دو ذره سیستم متقاضی شکل ۷ به اندازه دلخواه β نسبت به محور مرکزی مایل شده باشد. شکل ۱۱ میله اتصال، محور میل‌گردان، و دو یاتاقان را (که بدون اصطکاک فرض شده‌اند) نشان می‌دهد؛ یاتاقانها میل‌گردان را در راستای محور \mathbf{z} نگه می‌دارند. میل‌گردان با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور \mathbf{z} می‌چرخد، بنابراین بردار ω هم جهت با این محور است. تجربه نشان می‌دهد که این قبیل سیستمها "نامتوازن" یا "یکبری" اند و میله واسطه دو ذره اگر در نقطه O محکم به میل‌گردان متصل شده باشد، تمایل دارد چنان حرکت کند که زاویه β برابر 90° شود، یعنی به وضعیتی برسد که در آن سیستم حول محور تقارن می‌شود.

در لحظه‌ای که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، ذره بالایی عمود بر صفحه به طرف داخل آن حرکت می‌کند و ذره پایینی عمود



شکل ۱۱. یک سیستم دو ذره‌ای چرخان، متناسب شدل ۲، با این تفاوت که در اینجا محور دوران با میله اتصال زاویه β می‌سازد. بردار تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} همراه با سیستم می‌چرخد، و همچنین نیروهای \mathbf{F} و $\mathbf{-F}$ که از یاتاقانها وارد می‌شوند نیز می‌چرخد.

یعنی داریم

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (8)$$

اگر هیچ گشتاور خارجی بر سیستم اثر نکند، تکانه زاویه‌ای سیستم نسبت به زمان تغیر نمی‌کند

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} = \text{const.} \quad (9)$$

معادله ۱۴ بیان ریاضی اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای است.

وقتی برایند گشتاور نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، بردار

تکانه زاویه‌ای کل سیستم ثابت می‌ماند.

این سومین قانون از قوانین مهم پایستگی است که تا به حال بررسی کردہ‌ایم. پایستگی تکانه زاویه‌ای هم مانند پایستگی انرژی و پایستگی تکانه خطی، نتیجه‌ای کلی است که برای طیف بسیار گسترده‌ای از سیستمها معتبر است. این قانون هم در حد نسبیتی صادق است و هم در حد کوانتومی، و تاکنون هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

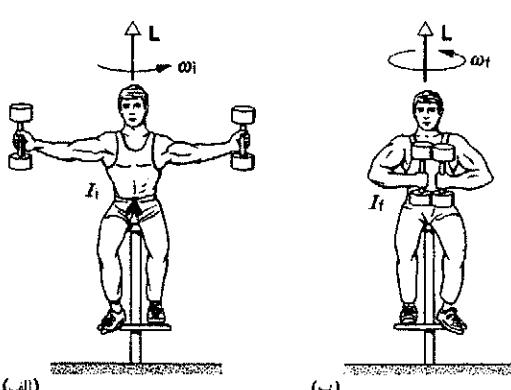
مانند پایستگی تکانه خطی در سیستمی که هیچ نیروی خارجی خالصی بر آن اثر نمی‌کند، پایستگی تکانه زاویه‌ای هم در مورد تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات اعمال می‌شود که بر آن هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نمی‌کند. ممکن است تکانه زاویه‌ای هر یک از ذرات همان‌طور که در برخورد ممکن است تکانه سیستم تغییر کند (درست همان‌طور که در آن مشاهده شده است).

خطی هر یک از ذرات تکانه خطی) یک کمیت برداری است به طوری که معادله ۱۴ هم ارز سه معادله اسکالار (به ازای سه محور مختصات) است. بنابراین پایستگی تکانه زاویه‌ای سه شرط بر حركت سیستمی که در مورد آن به کار می‌رود، اعمال می‌کند. اگر مؤلفه‌ای از گشتاور صفر باشد مؤلفه تکانه زاویه‌ای متضطر بآن ثابت خواهد بود؛ ممکن است مواردی پیش بباید که در آنها فقط یکی از سه مؤلفه گشتاور صفر باشد، در این صورت فقط یکی از مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای ثابت خواهد بود، و مؤلفه‌های دیگر به تبعیت از گشتاورهای متضطرشان تغییر می‌کنند.

برای سیستمی مشتمل از یک جسم صلب که حول محوری (متلاً محور z) که در چارچوب مرجع لختی ثابت است دوران کند داریم

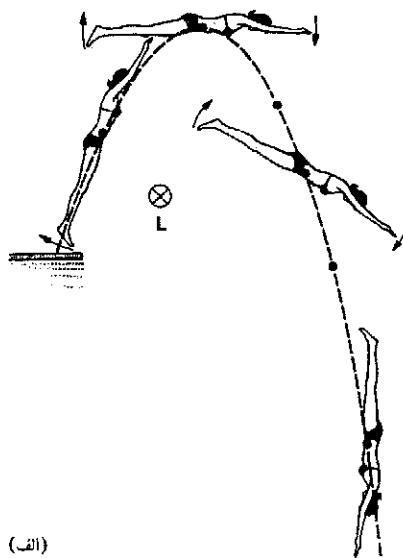
$$L_z = I\omega \quad (15)$$

که I مؤلفه تکانه زاویه‌ای در امتداد محور دوران و ω لختی دورانی سیستم حول همین محور است. ممکن است لختی دورانی جسم چرخان با تغییر وضعیت اجزای آن (از I_i به I_f) تغییر کند. اگر هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نکند، I باید ثابت بماند؛ پس اگر I تغییر کند، برای جبران این تغییر باید سرعت زاویه‌ای (ω) جسم هم از ω_i به ω_f تغییر کند. در این صورت اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود

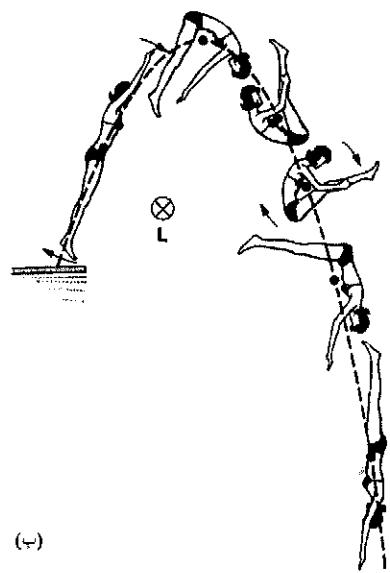


شکل ۱۲. (الف) دراین وضعیت، لختی دورانی سیستم (داشجو + وزنه‌ها) بیشتر و سرعت زاویه‌ای آن کمتر است. (ب) داشجو وزنه‌ها را به طرف سینه می‌آورد و لختی دورانی را کمتر می‌کند و بنابراین سرعت زاویه‌ای اش بیشتر می‌شود. این تغییرات مبنای $I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{const.}$ برای هر دو وضعیت یکی است.

آیا انرژی جنبشی سیستم تغییر می‌کند؟ اگر پاسخ به این پرسش مثبت است، کاری که انرژی جنبشی را تغییر می‌دهد از کجا تأمین می‌شود؟



(الف)



(ب)

شکل ۱۳. (الف) شیرجه‌زن طوری از تخته جدا می‌شود که تخته به او تکانه زاویه‌ای L می‌دهد. او حول مرکز جرمش (که با نقطه‌ای مشخص شده است) به اندازه نیم دور دوران می‌کند در حالی که مرکز جرمش مسیر سه‌می را می‌پیماید. (ب) با بغل کردن باهایش، لختی دورانی خود را کاهش می‌دهد و به همین علت سرعت زاویه‌ای اش افزایش پیدا می‌کند و به او این امکان را می‌دهد که $1/2(1/2)$ دور بچرخد. نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر این شخص در (الف) و (ب) یکسان است.

نیوتن، همین نیرو را در جهت مخالف از چرخ دریافت می‌کند. این نیروی خارجی وارد بر سیستم دانشجو + چارپایه سبب می‌شود که

۱. نگاه کنید به

"The Mechanics of Swimming and Diving" R. L. Page, *The Physics Teacher*, February 1976, p. 72.

ونگاه کنید به

"The Physics of Somersaulting and Twisting," Cliff Frohlich, *Scientific American*, March 1980, p. 155.

شیرجه از روی تخته فنری^۱

در شکل ۱۳-الف شیرجه‌زنی را در حال شیرجه می‌بینیم. او موقع پریدن از تخته خودش را طوری به جلو هل می‌دهد که سرعت دورانی کمی کسب می‌کند. این سرعت درست به اندازه‌ای است که شیرجه‌زن در طی مسیر به اندازه نیم دور بچرخد و با سر در آب فرود بباید.

زمانی که "جسم" در هواست، هیچ گشتاور خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند تا تکانه زاویه‌ای را حول مرکز جرم تغییر بدهد. (اتها نیروی خارجی، گرانی، به مرکز جرم وارد می‌شود و بنابراین گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی‌کند. از مقاومت هوا که ممکن است گشتاور مؤثری تولید کند و تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهد چشم می‌پوشیم). وقتی شیرجه‌زن خودش را جمع می‌کند و زانوهایش را در بغل می‌گیرد، لختی دورانی اش کم می‌شود و بنابر معادله ۱۶ سرعت زاویه‌ای اش باید زیاد شود. این سرعت زاویه‌ای افزایش یافته به شیرجه‌زن امکان می‌دهد که در مدتی که در هواست $\frac{1}{7}$ دور بزند در صورتی که قبلاً فقط نیم دور می‌چرخد (شکل ۱۳ ب)، در پایان شیرجه پاها و دستها را به موقع به حالت کشیده درمی‌آورد تا سرعت زاویه‌ای اش کم شود و با سر به سطح آب برسد.

چرخ چرخان دورچرخه

در شکل ۱۴-الف دانشجویی را می‌بینید که روی چارپایه‌ای نشسته است، و چارپایه می‌تواند به راحتی حول محور فائمه دوران کند. این شخص چرخ چرخانی را در دست دارد، و وقتی چرخ را وارونه می‌کند، چارپایه به دوران در می‌آید (شکل ۱۴ ب).

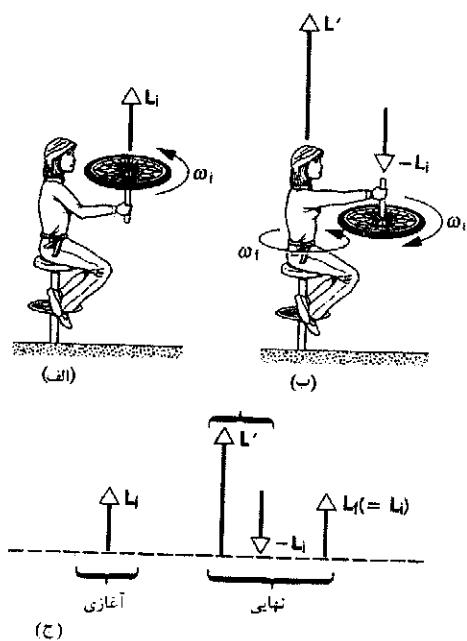
هیچ گشتاور قائم مؤثری به سیستم متصل نیست از دانشجو + چارپایه + چرخ وارد نمی‌شود و بنابراین مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای کل سیستم باید ثابت بماند. در آغاز، چرخ با تکانه زاویه‌ای L می‌چرخد، که به سوی بالاست و تکانه زاویه‌ای کل سیستم است. وقتی دانشجو چرخ را وارونه می‌کند، مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای چرخ برابر $-L$ می‌شود، ولی مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای کل باید همان $+L$ باشد، یعنی ثابت بماند. در نتیجه دانشجو + چارپایه باید تکانه زاویه‌ای $+2L_i = L'$ را کسب کند، تا تکانه زاویه‌ای نهایی سیستم یعنی $-L_i - 2L_i = -3L_i$ برابر تکانه زاویه‌ای آغازی باشد. اگر لختی دورانی دانشجو + چارپایه برابر با I_i باشد، سرعت زاویه‌ای دانشجو + چارپایه برابر با $\omega = \frac{\omega_i}{I_i}$ است.

این مسئله را می‌توانیم به صورت دو سیستم مجزا هم بررسی کنیم؛ یک سیستم شامل چرخ و سیستم دیگر شامل دانشجو + چارپایه است. حالا دیگر هیچ یک از دو سیستم متزوی نیست: دست دانشجو دو سیستم را به هم مرتبط می‌کند. دانشجو وقتی می‌خواهد چرخ را وارونه کند باید گشتاوری اعمال کند تا تکانه زاویه‌ای چرخ را تغییر بدهد. او برای تولید این گشتاور نیرویی به چرخ وارد می‌کند و بنابراین $\omega = \frac{\omega_i}{I_i}$.

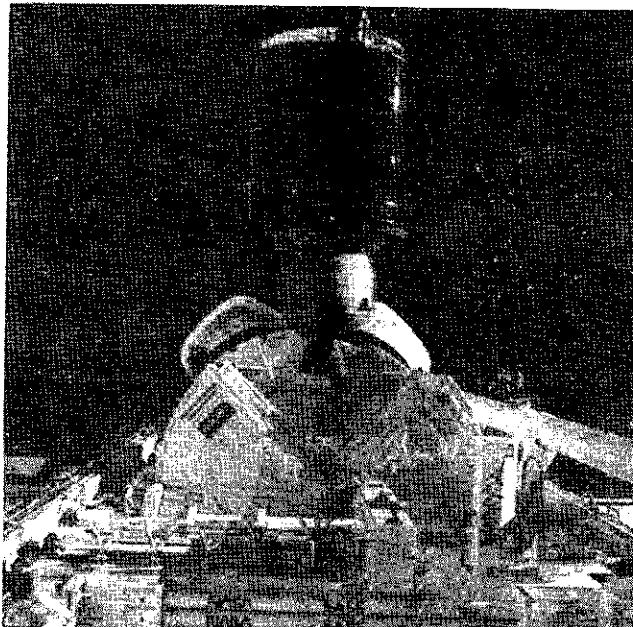
می‌دهیم، در واقع سمتگیری آن را پایدار و تغییر سمتگیری را برابی نیروهای خارجی دشوار می‌کنیم. در مورد این اثر مثالهای متعددی وجود دارد. اگر یک دوچرخه بدون دوچرخه‌سوار را کمی هل بدھیم می‌تواند مسافتی خیلی بیشتر از آنچه انتظار داریم، سرتبا، به حرکتش ادامه بدهد. در این مورد، این تکانه زاویه‌ای چرخهای چرخان دوچرخه است که به آن پایداری می‌دهد. دست اندازها و خمها کوچک جاده، که می‌توانند جسم غیرچرخانی را که روی مقطوعی به باریکی لاستیک دوچرخه متوازن شده است به آسانی منحرف یا واگون کنند، بر چرخ چرخان تأثیر کمتری دارند، زیرا تکانه زاویه‌ای تمایل به حفظ سمتگیری اش دارد.^۱

توب راگبی (فوتبال امریکایی) با توپی به شکل بیضوی را در پاسهای بلند طوری پرتاب می‌کنند که حول محوری تقریباً موازی با سرعت انتقالی اش می‌چرخد. با این کار سمتگیری توب پایدار می‌شود و توب بی‌آنکه در هوا "معلق" بزند پیش می‌رود. به این ترتیب می‌شود توب را دقیقتراپت کرد و راحت‌تر هم گرفت. در این نوع پرتاب همچنین سطح مواجهه توب در جهت پیش روی به حداقل می‌رسد؛ در نتیجه مقاومت هوا کم می‌شود و برد توب افزایش پیدا می‌کند.

پایدار کردن سمتگیری ماهواره‌ها اهمیت دارد، به خصوص وقتی ماهواره برای رسیدن به موقعیت مداری مشخصی از پیشانهایش استفاده می‌کند (شکل ۱۵). سمتگیری ممکن است، مثلاً به علت



شکل ۱۴. (الف) دانشجویی چرخ چرخانی را در دست نگه داشته است. تکانه زاویه‌ای کل سیستم برابر است با ΔL_1 . (ب) وقتی چرخ وارونه می‌شود دانشجو شروع به چرخیدن می‌کند. (ج) تکانه زاویه‌ای کل باید در حالهای آغازی و نهایی یکی باشد.



شکل ۱۵. ماهواره مولوس-۲دی، یک ماهواره مخابراتی برای مکزیک، که در ۱۷ نوامبر ۱۹۸۵ به مدار پرتاب شد. ماهواره برای پایداری سمتگیری در فضا حول محور مرکزی اش (محور قائم در عکس) پهپادش درآورده شد. این پایداری در طی سفر به مدار همزمان شده با زمین ضروری است.

۱. نگاه کنید به

"The Stability of the Bicycle," David E. H. Jones, *Physics Today*, April, 1970, p. 34.

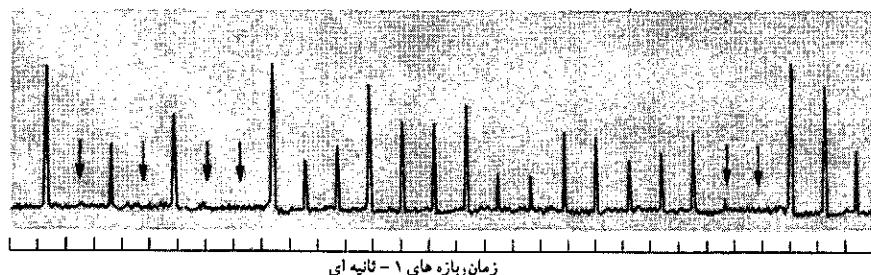
سیستم پهپاد. از این دیدگاه، دانشجو یک گشتاور خارجی به چرخ وارد می‌کند تا تکانه زاویه‌ای آن را تغییر بدهد، در حالی که چرخ، یک گشتاور به دانشجو وارد می‌کند تا تکانه زاویه‌ای او را تغییر بدهد. اگر، همان طور که در ابتداء گفتیم، سیستم کامل را مشتمل از دانشجو + چرخ پایه + چرخ در نظر بگیریم، این گشتاور یک گشتاور داخلی است که در محاسبات ما وارد نمی‌شود. اینکه گشتاور نیرو را داخلی بگیریم یا خارجی بستگی دارد به اینکه سیستم مورد نظر را چگونه تعریف می‌کنیم.

پایداری اجسام چرخان

باز هم شکل ۳ ب را در نظر بگیرید. جسمی که با تکانه خطی $p = Mv$ حرکت می‌کند یک پایداری سیستمی است؛ ضربه منحرف‌کننده‌ای موجب تغییر تکانه کوچکی به اندازه Δp_{\perp} در راستای جانبی می‌شود و در نتیجه جهت حرکت به اندازه زاویه $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_{\perp}/p)$ تغییر می‌کند. هر چه تکانه p بیشتر باشد، زاویه θ کوچکتر است. بر اثر یک نیروی منحرف‌کننده معین، جسم

هر چه تکانه‌اش بزرگتر باشد کمتر منحرف می‌شود.

تکانه زاویه‌ای هم به صورتی که ویس مشابه برای جسم یک پایداری سیستمی فراهم می‌آورد. هر جسم چرخان دارای تکانه زاویه‌ای معین است. هر گشتاور L عمود بر L ، جهت بردار L را تغییر می‌دهد و سبب تغییر جهت محور دوران به اندازه زاویه $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_{\perp}/L)$ می‌شود. در اینجا هم به ازای یک گشتاور معین، هر چه تکانه زاویه‌ای L بزرگ‌تر باشد، تغییر جهت محور دوران جسم چرخان کوچکتر خواهد بود. وقتی به جسمی تکانه زاویه‌ای معینی حوتی L



ستاره‌های نورونی از زمین قابل مشاهده‌اند، چون آنها هم (مانند خورشید) میدانهای مغناطیسی‌ای دارند که الکترونها را به دام می‌اندازند و الکترونها با دوران ستاره تا سرعتهای مماسی خیلی زیاد شتاب می‌گیرند. چنین الکترونهاست که شتاب یافته‌ای تابش گسیل می‌کنند، که از زمین مانند چراغ چشمکزن مشاهده می‌شود. به خاطر این تپهای تابشی تیز است که ستاره‌های نورونی چرخان را "تپاختر" می‌نامند. نمونه‌ای از نمودارهای تابش مشاهده شده از یک تپاختر در شکل ۱۶ آورده‌ایم.

پایستگی تکانه زاویه در مورد پدیده‌های اختر فیزیکی بسیار گوناگونی به کار می‌رود. مثلاً دوران کهکشان ما نتیجه دوران بسیار کوتاه‌تر توده گازی است که کهکشان از آن چگالیده شده است؛ چرخش خورشید و مدار سیاره‌ها را دوران اولیه ماده‌ای که منظمه شمسی از آن پدید آمده، تعیین کرده است.

مثال ۴. یک فضانورد 120 کیلوگرمی، که مشغول "راهپیمایی فضایی" است توسط بندی به طول 180 m که کاملاً باز شده است به فضایما متصل است. عملیات ناخواسته‌ای در قسمت پیشینه شده می‌شود که فضانورد سرعت مماسی کوچکی برابر با 2.5 m/s کسب کند. برای بازگشت به فضایما، فضانورد با آهنگ تابتی بند اتصال را آرام به طرف خودش می‌کشد. این فضانورد در فواصل زیر با چه نیرویی باید بند اتصال را بکشد؟ (الف) 50 متر و (ب) 5 متر از فضایما. سرعت مماسی فضانورد در این نقاط چقدر است؟

حل: هیچ گشتاور خارجی بر فضانورد وارد نمی‌شود، بنابراین پایستگی تکانه زاویه‌ای برقرار است. یعنی، تکانه زاویه‌ای اولیه فضانورد نسبت به فضایما به عنوان مبدأ ($Mv_i r_i$) در لحظه‌ای که شروع به کشیدن بند اتصال می‌کند، باید با تکانه زاویه‌ای او در هر زمان دیگری از حرکت (Mvr) برابر باشد. به این ترتیب

$$Mvr = Mv_i r_i$$

یا

$$v = \frac{v_i r_i}{r}$$

در این مرحله نیروی مرکزگرا از رابطه زیر تعیین می‌شود

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2 r_i^2}{r^3}$$

Ramin.samad@yahoo.com

شکل ۱۶. تپهای الکترومغناطیسی که در ایستگاه در زمین از یک ستاره نورونی چرخان سریع دریافت شده است. پیکانهای قائم نماینده تپهایی است که ضعیفتر از آن بوده‌اند که آشکارسازی شوند. فاصله تپها به طور شگفت‌انگیزی ثابت و برابر با 187911164 s است.

اصطکاک ناشی از وجود جو رقیق در ارتفاع مدار بادهای خورشیدی (باریکه‌ای از ذرات باردار که از خورشید می‌آیند)، یا به علت برخورد با شهاب‌سنگ‌های بسیار ریز، تغییر کند. به منظور کاهش آثار چنین برخوردهایی، ماهواره را حول محوری به چرخش در می‌آورند و به این ترتیب سمتگیری آن را پایدار می‌کنند.

ستاره‌های رمینده

اغلب ستاره‌ها، مثل خورشید خودمان، می‌چرخد. خورشید تقریباً هر ماه یکبار به دور خودش می‌چرخد. (خورشید یک گوی گازی است و مانند جسم صلب دوران نمی‌کند؛ دوره چرخش مناطق نزدیک به قطب آن حدوداً 37 روز است، در حالی که استوایش هر 26 روز یکبار می‌چرخد). فشار تابشی از رمیش خورشید جلوگیری می‌کند، در واقع فشار تابشی حاصل برخوردهای ضربه‌ای تابش گسیلی با اتهای خورشید است. وقتی که سوخت هسته‌ای خورشید تمام شود، فشار تابشی هم از بین می‌رود و خورشید شروع به رمیندن می‌کند، و در نتیجه رمیش چگالی آن افزایش می‌یابد. در یک مرحله چگالی خورشید خاموش آنقدر زیاد می‌شود که دیگر اتمها نمی‌توانند بیش از آن به هم تردیک شوند و در نتیجه رمیش متوقف می‌شود.

ولی، در ستاره‌هایی که جرم آنها در حدود 4 R_\odot برابر جرم خورشید است، نیروی گرانشی آنقدر قوی است که اتمها نمی‌توانند از ادامه رمیش جلوگیری کنند. اتمها عملاً در اثر گرانش در هم کوبیده می‌شوند، و رمیش آنقدر ادامه می‌یابد که هسته‌ها در تماس با یکدیگر قرار بگیرند. در واقع ستاره به صورت هسته اتمی غول‌پیکری در می‌آید که به آن ستاره نورونی می‌گویند. شعاع یک ستاره نورونی به جرم 5 R_\odot برابر جرم خورشید، برابر با 11 کیلومتر است.

فرض کنید ستاره‌ای که مانند خورشید هر ماه یکبار می‌چرخد رمیش خود را آغاز کند. نیروهای دخیل در رمیش نیروهای داخلی اند و نمی‌توانند تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهند. بنابراین سرعت زاویه‌ای نهایی طبق معادله 16 به سرعت زاویه‌ای اولیه مربوط می‌شود؛ $r_i^3/r_f^3 = I_i/I_f$. اگر شعاع اولیه در حدود شعاع خورشید باشد (در حدود $10^5\text{ km} \times 10^5\text{ km} = 10^{10}\text{ km}^2$)، خواهیم داشت

$$I_i/I_f = r_i^3/r_f^3 = (7 \times 10^5\text{ km})^3 / (11\text{ km})^3 = 4 \times 10^1$$

یعنی، سرعت دورانی ستاره از یک دور در ماه به 4×10^1 دور در ماه، یا به بیش از 10^{10} دور در ثانیه می‌رسد!

یکسانی بچرخدن. در مرحله بعدی یک صفحه مشابه دیگر روی دو صفحه قبلی می‌اندازیم، و سرانجام سه صفحه با هم می‌چرخدند (شکل ۱۷ ب). (الف) سرعت زاویه‌ای کل مجموعه چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی دورانی به علت اصطکاک از دست می‌رود؟ (ج) موتوری که اولین صفحه را می‌چرخاند باید در طی یک دور چرخش، سرعت زاویه‌ای کل مجموعه را به سرعت اولیه صفحه اول برساند. موتور باید چه گشتاور ثابتی اعمال کند؟

حل: (الف) این مسئله مشابه دورانی برخورد کاملاً ناکشسان است. هیچ گشتاور خارجی قائمی در کار نیست، بنابراین مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای ثابت است. نیروی اصطکاک بین صفحه‌ها نیروی داخلی است، که نمی‌تواند تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهد. پس می‌توانیم از معادله ۱۶ استفاده کنیم و بنویسیم

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\omega_f = \omega_i (I_i / I_f)$$

بی‌آنکه نیاز به محاسبه جزئیات داشته باشیم، می‌دانیم که لختی دورانی سه‌صفحة‌گرامافون یکسان حول محور مشترکشان سه برابر لختی دورانی یکی از آنهاست. پس $I_i / I_f = 1/3$ است و

$$\omega_f = (1/3)(84 \text{ rev/s}) = 28 \text{ rev/s}$$

(ب) لختی دورانی صفحه‌گرامافون حول محورش برابر است با $\frac{1}{3} M R^2$ ، بنابراین برای هر یک از صفحه‌ها داریم

$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2} (125 \text{ kg})(72 \text{ m})^2 = 3,24 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

انرژی جنبشی دورانی اولیه برابر است با

$$K_i = \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \frac{1}{2} (451 \times 10^{-4} \text{ J}) (84 \text{ rev/s})^2 = 4,51 \times 10^{-2} \text{ J}$$

برای محاسبه انرژی جنبشی نهایی می‌توانیم از یک راه میان بر استفاده کنیم: می‌دانیم که بین حالت‌های اولیه و نهایی، لختی دورانی با ضریب ۳ افزایش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای با ضریب $1/3$ کاهش می‌یابد، و چون انرژی جنبشی به مرتب سرعت زاویه‌ای بستگی دارد توجه می‌گیریم

$$K_f = K_i \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} (451 \times 10^{-2} \text{ J}) = 1,50 \times 10^{-2} \text{ J}$$

تغییر در انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = (1,50 \times 10^{-2} \text{ J}) - (4,51 \times 10^{-2} \text{ J}) = -3 \times 10^{-3} \text{ J}$$

نیروی مرکزگرای اولیه مورد نیاز برابر است با

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(25 \text{ m/s})^2}{180 \text{ m}} = 42 \text{ N}$$

(الف) وقتی که فضانورد در فاصله ۵۰ متری از فضایما قرار دارد، سرعت مماسی او برابر است با

$$v = \frac{(25 \text{ m/s})(180 \text{ m})}{50 \text{ m}} = 90 \text{ m/s}$$

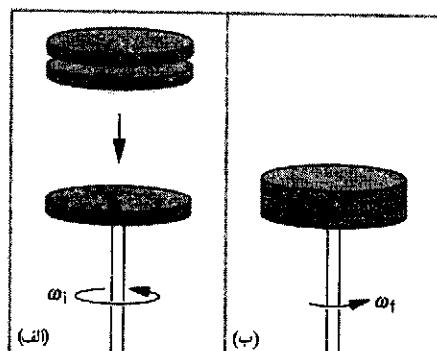
و در این فاصله نیروی مرکزگرا برابر است با

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(25 \text{ m/s})^2}{(50 \text{ m})^2} = 194 \text{ N}$$

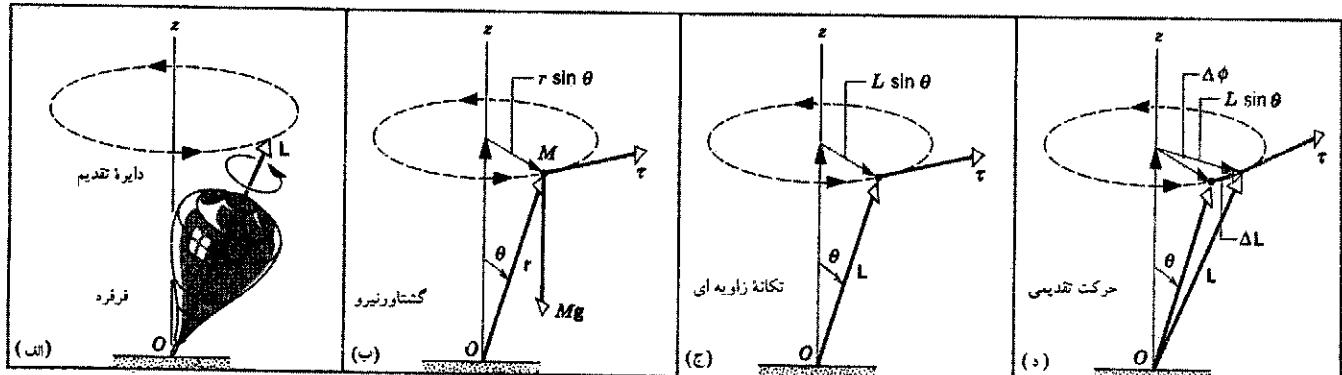
$$(در حدود 44 lb)$$

(ب) در فاصله ۵ متری از سفینه، سرعت فضانورد با ضریب ۱۰ افزایش پیدا می‌کند و به 90 m/s می‌رسد، در صورتی که نیرو با ضریب 10^3 افزایش پیدا می‌کند و به 10^5 N می‌رسد! واضح است که فضانورد نمی‌تواند نیرویی به این بزرگی را برای بازگشت به فضایما اعمال کند. حتی اگر به وسیله یک سیستم نقاله از داخل سفینه کشیده شود هم بند اتصال نمی‌تواند چنین کشتنی را تحمل کند؛ این بند در جایی پاره خواهد شد و فضانورد با سرعتی برابر سرعت مماسی اش در هنگام پاره شدن بند اتصال، به فضا پرتاپ خواهد شد. نتیجه اخلاقی این داستان این است که فضانوردان راهپیما باید از کسب سرعت مماسی به شدت خورداری کنند! حالا فکر کنید فضانورد برای بازگشتی بی دردسر به سفینه چه می‌تواند بکند؟

مثال ۵. صفحه‌گرامافونی به جرم 125 g و به شعاع 72 cm با سرعت زاویه‌ای 84 rev/s حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۷ الف). صفحه دقیقاً مشابه و غیرجرخانی ناگهان روی آن انداخته می‌شود. اصطکاک بین صفحه‌ها سبب می‌شود که سرانجام دو صفحه با سرعت



شکل ۱۷. مثال ۵. (الف) صفحه‌گرامافونی با سرعت زاویه‌ای اولیه ω_i می‌چرخد. (ب) دو صفحه کاملاً مشابه با صفحه اول را، که هیچکدام چرخ اولیه ندارند، روی صفحه اول می‌اندازیم. نهایتاً کل سیستم با سرعت زاویه‌ای ω_f می‌چرخد.



شکل ۱۸. (الف) قرقه چرخانی حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. (ب) وزن فرفه گشتاوری حول نقطه تماس فرفه با زمین تولید می‌کند. (ج) این گشتاور بر بردار تکانه زاویه‌ای عمود است. (د) گشتاور نیرو جهت بردار تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و موجب حرکت تقدیمی می‌شود.

شکل ۱۸ ب نمودار ساده‌شده‌ای است که در آن به جای فرفه ذره‌ای به جرم M گذاشته‌ایم. این ذره در مکان مرکز جرم فرفه واقع شده است. نیروی گرانشی Mg گشتاوری به مقدار

$$\tau = Mgr \sin \theta \quad (17)$$

حول نقطه O اعمال می‌کند. این گشتاور، که عمود بر محور فرفه و در نتیجه عمود بر L است (شکل ۱۸ ج)، می‌تواند جهت L را تغییر بدهد ولی نمی‌تواند مقدار آن را تغییر بدهد. تغییر تکانه زاویه‌ای L در مدت زمان Δt از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta L = \tau \Delta t \quad (18)$$

و در همان جهت τ ، یعنی عمود بر L است. بنابراین اثر τ این است که L را به $L + \Delta L$ ، که برداری است با همان طول L ولی در جهتی متفاوت، تغییر می‌دهد. (فرض می‌کنیم فرفه چنان تند می‌چرخد که L بزرگ و بنابراین $\Delta L \gg L$ است).

اگر فرفه تقارن محوری داشته باشد، تکانه زاویه‌ای در امتداد محور دوران فرفه خواهد بود. همراه با تغییر جهت L محور دوران هم تغییر جهت می‌دهد. نوک بردار L و محور فرفه بر دایره‌ای حول محور z حرکت می‌کنند (شکل ۱۸ الف). این حرکت همان حرکت تقدیمی فرفه است.^۱

در یک باره زمانی Δt ، محور به اندازه زاویه ϕ می‌چرخد (شکل ۱۸ د)، و بنابراین سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، ω_p ، برابر است با

$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (19)$$

از شکل ۱۸ د، می‌بینیم که

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta} \quad (20)$$

۱. نگاه کنید به

"The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1981, p. 185.

علامت منفی حاکی از اتفاق انرژی جنبشی است.

(ج) برای ثابت نگه داشتن سرعت زاویه‌ای اولیه، موتور باید سرعت ω را از s به $s - 2\pi \times 10^{-3}$ rev/s برساند، یعنی آن را با ضریب ۳ افزایش بدهد. این افزایش سرعت به این معنی است که انرژی جنبشی باید با ضریب $= 3^2$ افزایش پیدا کند، یعنی باید از $J = 10^{-3} \times 10^{50} \times 10^{-3} \times 10^{35}$ rev برسد. تغییر انرژی جنبشی، که همان کار انجام شده توسط موتور است، برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K &= 10^{50} \times 10^{-3} J - 10^{35} \times 10^{-3} J \\ &= 12.0 \times 10^{-3} J \end{aligned}$$

در حرکت دورانی، کار از رابطه $\tau \phi = W$ به دست می‌آید، که در آن ϕ (در این مورد 2π رادیان) جایه‌جایی زاویه‌ای جسم چرخنده است که در طی آن گشتاور باید اثر کند. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{12.0 \times 10^{-3} J}{2\pi \text{ rad}} \\ &= 1.91 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

۱۳-۵ فرفه چرخان^۱

فرفه، شاید آشناترین نمونه از پدیده نشان داده شده در شکل ۴ ب باشد، که در آن گشتاور جانبی، جهت تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد ولی اندازه آن را تغییر نمی‌دهد. شکل ۱۸ الف فرفه‌ای را نشان می‌دهد که حول محورش می‌چرخد. فرض می‌کنیم که نوک فرفه در نقطه O ، مبدأ چارچوب مختصات لخت، ثابت باشد. از تجربه می‌دانیم که محور این فرفه چرخان به آرامی حول محور قائم دوران می‌کند. این حرکت، که حرکت تقدیمی نامیده می‌شود، ناشی از همان ساختاری است که در شکل ۴ ب نشان داده شده است، در این مورد، نیروی گرانی است که گشتاور خارجی را فراهم می‌کند.

تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهد. نیروهای خارجی، مانند نیروهای ناشی از میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی، می‌توانند سبب جهش الکترون به مدار دیگری بشوند، که در آنها ممکن است تکانه زاویه‌ای شان مقدار دیگری داشته باشد، ولی تغییر در I ، همان‌طور که معادله ۲۳ ایجاب می‌کند، در هر حال باید مضرب صحیحی از $h/2\pi$ باشد. بهین ترتیب تکانه زاویه‌ای مداری می‌تواند "برچسب" مناسب و مفیدی برای مدارهای الکترونی در اتمها باشد.

آزمایش‌های انجام شده در دهه ۱۹۲۰ حاکی از آن بودند که الکترونها نوع دیگری از تکانه زاویه‌ای هم دارند که نمی‌توان آن را به حرکت مداری نسبت داد. این نوع تکانه زاویه‌ای، که تکانه زاویه‌ای ذاتی نامیده می‌شود، یک خاصیت مشخصه خود جسم است و ربطی به حالت حرکتی خاصی ندارد. یک راه مفید (ولی مطلقاً نادرست) برای تجسم تکانه زاویه‌ای ذاتی آن است که فرض کنیم جسم حول محورش می‌چرخد؛ به همین دلیل است که اغلب تکانه زاویه‌ای ذاتی را "اسپین" [چرخش] می‌نامند و آن را با نماد s نشان می‌دهند.

تکانه زاویه‌ای ذاتی الکترون $(h/2\pi)^{\frac{1}{2}}$ است. این عبارت به این معنی است که، نسبت به هر محور z ای که اختیار کنیم، مؤلفه z تکانه زاویه‌ای باید $(h/2\pi)^{\frac{1}{2}} + s_z = s$ یا $(h/2\pi)^{\frac{1}{2}} = s - s_z$ باشد. توجه کنید که اختلاف بین این دو حالت، که می‌توان آن را در حکم تغییر در جهت تکانه زاویه‌ای ذاتی الکترون دانست، برابر با $h/2\pi$ است که با معادله ۲۳ هم سازگار است.

معمولًا تکانه زاویه‌ای ذاتی را با عدد کوانتمی اسپین بیان می‌کنند، که عبارت است از تکانه زاویه‌ای ذاتی برحسب یکای $h/2\pi$ ؛ بهین ترتیب عدد کوانتمی اسپین الکترون برابر با $1/2$ است. عدد کوانتمی اسپین پروتون و نوترون هم $1/2$ است. عدد کوانتمی اسپین فوتون (بسته کوانتیده تابش الکترو-مغناطیسی) برابر با 1 است. عدد کوانتمی اسپین جزو ویژگیهای تمام ذرات بنیادی است، و آن هم مثل جرم و بار الکتریکی، از خواص بنیادی ذره محسوب می‌شود.

یکی از کاربردهای مهم اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای کوانتیده، در انرژی به نام تشید مغناطیسی هسته‌ای مشاهده می‌شود. پروتون (هسته اتم هیدروژن) را که اسپین آن $1/2$ است در نظر بگیرید. در شکل ۱۹ الف تکانه زاویه‌ای ذاتی پروتون در سمتگیری مشخصی شان داده شده است. مؤلفه z تکانه زاویه‌ای برابر است با $s_z = +\frac{1}{2}$. اگر پروتون را در معرض تابشی با انرژی مناسب قرار بدهیم، جذب یک فوتون الکترو-مغناطیسی (با اسپین 1 و تکانه زاویه‌ای $h/2\pi$) می‌تواند مؤلفه z تکانه زاویه‌ای پروتون را به اندازه 1 واحد تغییر بدهد و از $(h/2\pi)^{\frac{1}{2}} + s_z = s$ به $(h/2\pi)^{\frac{1}{2}} - s$ برساند. این وضعیت در شکل ۱۹ ب نشان داده است. در شکل ۱۹ نشان داده‌ایم که چگونه اسپین اولیه s پروتون و تکانه زاویه‌ای L فوتون (مؤلفه‌های z بردارهای s و L) با هم جمع می‌شوند و اسپین نهایی s' پروتون (وارونه) را به دست می‌دهند. شکل ۱۹ ج همچنین مثال دیگری از اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای است، یعنی نشان می‌دهد که تکانه زاویه‌ای اولیه $(s + L)$ ،

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin \theta} = \frac{M_{gr} \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{M_{gr}}{L} \quad (21)$$

سرعت حرکت تقدیمی با تکانه زاویه‌ای نسبت عکس دارد، هر قدر فرفه تندتر بچرخد، حرکت تقدیمی کنتر است.

حرکت تقدیمی حول محور z انجام می‌شود و بنابراین بردار M_P باید در راستای محور z باشد. می‌توانیم نشان بدهیم که معادله برداری زیر رابطه میان مقادیر و جهتیهای متغیرهای دینامیکی دخیل در این محاسبات را به درستی به دست می‌دهد

$$\tau = \omega_P \times L \quad (22)$$

ایا می‌توانید معادله برداری مشابهی برای مورد متناظر ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا با اندازه سرعت ثابت روی یک دایره حرکت می‌کند بنویسید؟

۱۳-۶ کوانتش تکانه زاویه‌ای (اختیاری)

در بخش ۸-۸ درباره کوانتیدگی انرژی صحبت کردیم. کوانتیدگی انرژی، گسیل و جذب انرژی را به بسته‌های گسسته یا کوانتومها محدود می‌کند. در دنیای میکروسکوپیک به سیستمهای اتمی و زیراتومی، نمی‌توانیم انرژی را به هر مقدار دلخواهی تغییر بدهیم، فقط می‌توانیم آن را به اندازه مقادیر مشخص و از پیش تعیین شده‌ای تغییر بدهیم.

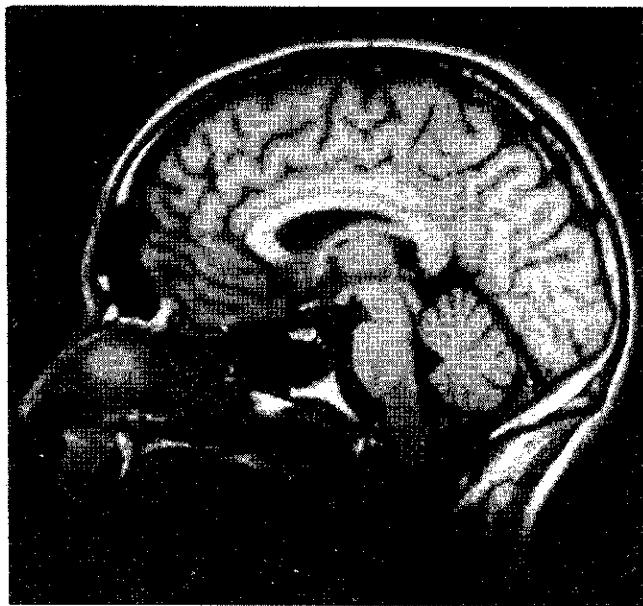
تکانه زاویه‌ای هم، مثل انرژی، کوانتیده است. این مفهوم را به طور مسروق تر در فصل ۵۱ نسخه مبسوط این کتاب که به ساختار اتم اختصاص دارد، همراه با ذکر شواهد تجربی و نظری بررسی خواهیم کرد. در اینجا فقط بعضی نظرهای کلی را مطرح می‌کنیم و ارتباط آنها را با خواص وایسته به تکانه زاویه‌ای که در این فصل مطالعه شد، نشان می‌دهیم.

تغییرات کوانتیده در حرکت دورانی یک سیستم به صورت مضربهای صحیحی از یک ثابت عمومی صورت می‌گیرند

$$\Delta L = n(h/2\pi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

در اینجا h ثابت بلانک است که مقدار آن برابر است با $8.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. این یکای پایه معرف مقدار بسیار کوچکی تکانه زاویه‌ای است. تکانه زاویه‌ای صفحه گرامافون، که نسبتاً کند می‌چرخد، از مرتبه 10^{22} h برابر یکای $h/2\pi$ است. وقتی دکمه تنظیم دقیق سرعت چرخش گرامافون را دستکاری می‌کنیم، مسلماً نمی‌توانیم موازنگار این جهش‌های گسسته در مقیاس یک قسمت در 10^{22} باشیم!

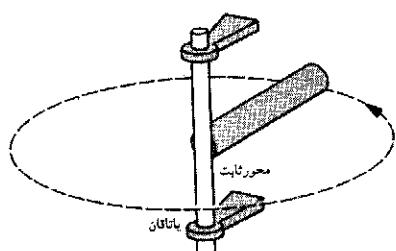
معادله ۲۳ برای کوانتش تکانه زاویه‌ای، در مورد حرکت الکترونها اتم در مدارهایشان به دور هسته به کار می‌رود. این سیستم دارای تکانه زاویه‌ای مداری است، که باید در هین گردش ثابت بماند، زیرا نیروی بین الکترون و هسته نیروی داخلی سیستم است و www.yahmeh.com



شکل ۲۰. تصویری از جمجمه، با روش تصویرگیری تشید مغناطیسی (MRI).

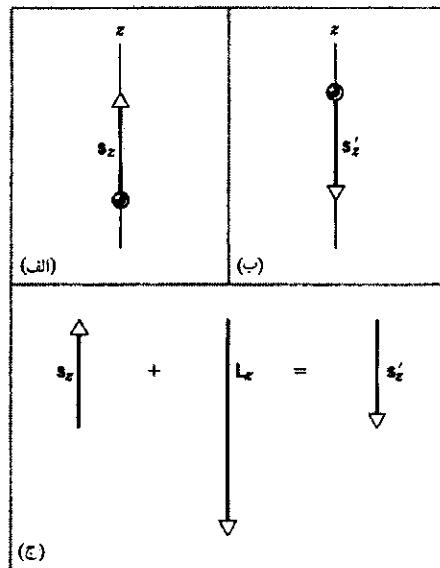
پرسشها

۱. تاکنون با کمیتهای برداری متعددی از جمله مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه و تکانه زاویه‌ای آشنا شده‌ایم. کدام‌یک از این کمیتها مستقل از مبدأ چارچوب مرتع عريف می‌شوند؟
۲. فیزیکدان مشهوری (آر. دبلیو. وود) که به شوخیهای عملی بسیار علاقه‌مند بود، یکبار چیز لذگری را که خیلی تند می‌چرخید در یک چمدان کار گذاشت، و از باربری خواست که آن را به دنبال او حمل کند. وقتی باربری، به دنبال صاحب چمدان، سریعاً به یک کوچه می‌پیچد چه اتفاقی می‌افتد؟ این رفتار را بر حسب $d\mathbf{L}/dt = \tau$ توضیح بدھید.
۳. استوانه‌ای حول محوری که از یک انتهایش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (شکل ۲۱). برای نشان دادن بردارهای \mathbf{L} و ω مبدأ مناسبی اختیار کنید. آیا این بردارها موازی‌اند؟ آیا ملاحظات مربوط به تقارن در اینجا دخیل‌اند؟



شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. فرض کنید میله یکنواختی به طور قائم روی سطحی با اصطکاک ناچیز قرار گرفته است. به انتهای پایینی میله یک ضربه افقی وارد آید. مرکز جرم و نقطه بالای میله را توصیف کنید.



شکل ۱۹. (الف) پرتوونی با تکانه زاویه‌ای ذاتی (اسپین) s که دارای مؤلفه s_z در امتداد محور z است. (ب) پس از جذب یک فوتون، مؤلفه s_z اسپین وارونه می‌شود. (ج) مؤلفه s_z تکانه زاویه‌ای اولیه که برابر با $1/2$ واحد است، با مؤلفه s_z تکانه زاویه‌ای فوتون، که برابر با $-1/2$ واحد است جمع می‌شود و براندی برابر با $1/2 - 1/2 = 0$ واحد بدست می‌دهد.

در نبود گشتاور نیروی خارجی، با تکانه زاویه‌ای نهایی (s') برابر است. در تشید مغناطیسی هسته‌ای (NMR)، یک میدان مغناطیسی ایستا که در جهت محور z اعمال می‌شود، اسپین پرتوونها را (مانند شکل ۱۹الف) با این محور هم جهت می‌کند. یک میدان الکترومغناطیسی متغیر در بسامدهای رادیویی هم فوتونهای با انرژی دقیقاً مناسب را فراهم می‌آورد تا جذب پرتوونها شوند و اسپین آنها را وارونه کنند.

از آنجا که بخش اعظم بدن انسان از آب تشکیل شده و آب هم شامل هیدروژن است، جذب این تابش الکترومغناطیسی روشی برای تصویرگیری از اعضای داخلی بدن فراهم می‌آورد (شکل ۲۰). تصور می‌شود که تابش‌های الکترومغناطیسی به صورت امواج رادیویی آسیب چندانی به بدن نمی‌رساند؛ پرتوهای x ، که از آنها هم برای تصویر برداری استفاده می‌شود، بالقوه بسیار مضربرند. این گونه تصویر برداری تشید مغناطیسی ممکن است، به عنوان یک روش تشخیص، به طور وسیعی جانشین عکس‌های پرتو x ای شود.

۷-۱۳ مروری بر دینامیک دورانی

در فصلهای ۱۱ تا ۱۳، مروری بر مباحث کلی دینامیک و سینماتیک دورانی داشتیم. مطالعه کامل این مباحث در مجال این کتاب نمی‌گنجد، ولی همین نتایج کلی را می‌شود برای تحلیل بسیاری از وضعیهای فیزیکی بهکار برد. توجه به این نکته که بعضی از نتایج بدست آمده را فقط در موارد خاص و معینی می‌توان بهکار گرفت بسیار اهمیت دارد. برای کمک به شما در این زمینه، تعدادی از معادلات بنیادی دینامیک دورانی را در جدول ۱ گرد آورده‌ایم.

جدول ۱. خلاصه معادلات مربوط به دینامیک دورانی.

معادلات	ملاحظات
$\tau = r \times F$	۱. روابط تعريف کننده
$\tau_{ext} = \sum \tau_n$	گشتاور ناشی از نیروی F ، وارد بر یک ذره حول نقطه O .
$I = r \times p$	برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستمی از ذرات که تحت تأثیر چندین گشتاور متفاوت τ_n حول نقطه O قرار گرفته است.
$L = \sum I_n$	تکانه زاویه‌ای یک ذره حول نقطه O .
$\sum \tau_{ext} = dL/dt$	تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول نقطه O .
$\tau = dI/dt$	۲. روابط کلی
معادله حرکت تک ذره‌ای که تحت تأثیر گشتاور τ قرار گرفته است. هم τ و هم I نسبت به یک نقطه واحد O از یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری می‌شوند. این عبارت مشابه دورانی عبارت $F = dp/dt$ در حرکت انتقالی است.	معادله حرکت تک ذره‌ای که تحت تأثیر گشتاور τ قرار گرفته است. هم τ و هم I نسبت به یک نقطه واحد O از یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری می‌شوند. این عبارت مشابه دورانی عبارت $F = dp/dt$ در حرکت انتقالی است.
قانون حرکت برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر یک گشتاور خارجی خالص است. این معادله در صورتی صادق است که τ_{ext} و L هر دو (۱) نسبت به یک چارچوب مرجع لخت، یا (۲) نسبت به مرکز جرم سیستم، اندازه‌گیری شوند. این عبارت مشابه دورانی معادله $\sum F_{ext} = dP/dt$ است.	قانون حرکت برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر یک گشتاور خارجی خالص است. این معادله در صورتی صادق است که τ_{ext} و L هر دو (۱) نسبت به یک چارچوب مرجع لخت، یا (۲) نسبت به مرکز جرم سیستم، اندازه‌گیری شوند. این عبارت مشابه دورانی معادله $\sum F_{ext} = dP/dt$ است.
$\tau = I\alpha$	۳. موارد خاص
نکات زیر در مورد دوران جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت صادق است.	نکات زیر در مورد دوران جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت صادق است.
ω باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و τ مؤلفه اسکالار τ_{ext} در امتداد همان محور است. این رابطه مشابه دورانی رابطه $F = Ma$ است.	α باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و τ مؤلفه اسکالار τ_{ext} در امتداد همان محور است. این رابطه مشابه دورانی رابطه $F = Ma$ است.
$L = I\omega$	ω باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و L باید مؤلفه تکانه زاویه‌ای کل حول همین محور باشد. این رابطه مشابه دورانی رابطه $P = Mv$ است.

۱۱. وقتی روی یک مسیر باریک راه می‌روید، اگر یک دفعه احساس کنید که دارید تعادل خودتان را از دست می‌دهید و مثلاً به طرف راست می‌افتد، برای بازگشت به تعادل، بدنتان را به کدام طرف می‌چرخانید؟ توضیح بدھید که چرا.

۱۲. پیجهایی که موتور هواییماهای جت را به بدن متصصل می‌کنند چنان طراحی شده‌اند که اگر به دلایل پیش‌بینی نشده‌ای موتور (که سریعاً می‌چرخد) ناگهان از کار بیفتد، می‌برند. فایده این "فیوز" چیست؟ ۱۳. یک بازیکن دلخور چوب هاکی اش را روی یخ پرتاب می‌کند.

چوب ضمن لغزیدن روی یخ حول مرکز جرمش می‌چرخد و سرانجام تحت تأثیر اصطکاک از حرکت می‌ایستد. حرکت دورانی چوب دقیقاً در همان لحظه‌ای به آخر می‌رسد که مرکز جرم آن به حال سکون درآمده است. توضیح بدھید که چرا.

۱۴. وقتی سرعت زاویه‌ای یک جسم زیاد می‌شود، تکانه زاویه‌ای آن ممکن است افزایش پیدا کند یا نکند. برای هریک از این موارد مثالی بزنید.

۱۵. دانشجویی که روی صفحه چرخانی ایستاده است دو دمبلی یکسان در دو دست گرفته و بازوهاش را به طرفین بازکرده است. حالا بی‌آنکه هیچ جزئی از سیستم جایه‌جا شود، دمبلها را زده می‌کند. آیا سرعت زاویه‌ای دانشجو تغییر می‌کند؟ آیا تکانه زاویه‌ای پایسته است؟ در هر دو مورد توضیح بدھید.

۱۶. چرا بدن هلیکوپتری که در پرواز است در جهت مخالف چرخش پرهای پیش‌نده‌اش به چرخش در نمی‌آید؟

۵. اگر وسیله نشان داده شده در شکل ۵ روی عرشه یک سفینه فضایی بزرگ که در ناحیه‌ای تهی از گرانش در فضا حرکت می‌کند قرار داده شود، آیا اصولاً تغییری در اجرای آزمایش حاصل می‌شود؟ اگر می‌شود، چه تغییری؟

۶. وقتی اتومبیلی که چرخهای عقب آن محرک‌اند، سریعاً از حالت سکون شتاب می‌گیرد، راننده مشاهده می‌کند که جلوی اتومبیل کمی بالا می‌آید. چرا چنین می‌شود؟ آیا اتومبیلی که چرخهای جلویش محرک باشند طور دیگری رفتار می‌کند؟

۷. یک پیکان در طی پرواز چنان جهت‌گیری می‌کند که همواره مماس بر مسیرش باقی بماند. ولی توب راگبی (که با چرخش قابل توجهی حول محور بزرگترش برتاب می‌شود) چنین نمی‌کند. چرا این دو جسم رفتار متفاوتی دارند؟

۸. یک بازیکن توب (بیضوی شکل) راگبی را طوری برتاب می‌کند که توب ضمن حرکت حول محور مایلی (نامتقارن) می‌چرخد. آیا تکانه زاویه‌ای این توب ثابت است، یا تقریباً چنین است؟ بین حالتی که توب حرکت لنگری دارد و حالتی که حرکت آن هموار است چه وجه تمایزی هست؟

۹. آیا توانید نظریه ساده‌ای برای توضیح پایداری دوچرخه متحرک ارائه کنید؟ باید توضیح بدھید که چرا متعادل کردن دوچرخه ساکن بسیار دشوارتر از متعادل کردن دوچرخه متحرک است.

۱۰. چرا یک چوب بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند؟

می تواند با حرکت دادن اندام خود، ترتیبی بدهد که به پشت روی ترامپولین فرود باید (شکل ۲۳ ب)? جالب توجه اینکه ۳۸٪ مردمان شیرجه و ۳۴٪ فیزیک پیشگانی که این سؤال از آنها پرسیده شد، به آن پاسخ نادرست دادند. نظر شما در این باره چیست؟^۱

۲۳. با استفاده از مفاهیم تکانه زاویه‌ای و لختی دورانی، توضیح بدهید که در تاب‌بازی چگونه می‌توان در موقعیت نشسته ارتفاع تاب خودن را افزایش داد.^۲

۲۴. آیا می‌شود یک تاب را آنقدر بالا برد که یک دایره کامل را طی کند و به طور کامل دور تکیه‌گاهش بچرخد؟ می‌توانید (چنانچه مایل باشید) فرض کنید که سکوی تاب، به جای طناب یا زنجیر، با میله صلب به محور متصل شده است.

۲۵. یک گردونه دایره‌ای کوچک حول یک محور قائم به طور آزاد در حال چرخش است. در محور اصطکاک وجود ندارد. (الف) اگر کسی که در ابتدا در مرکز گردونه قرار دارد به طرف لبه حرکت می‌کند و روی لبه می‌ایستد. تکانه زاویه‌ای سیستم (گردونه به اضافه کک) چگونه تغییر می‌کند؟ سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟ (ب) اگر کسی از لبه گردونه (بدون پرش) سقوط کند سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟

۲۶. از یک چرخ سنگین می‌توان برای پایدار کردن حرکت کشته استفاده کرد. اگر این چرخ چنان نصب شود که محور دورانش عمود بر عرضه کشته باشد، وقتی که کشته می‌خواهد از پهلو به پهلو بغلند، اثر این چرخ چگونه ظاهر می‌شود؟

۲۷. اگر فرفه شکل ۱۸ در حال چرخش نباشد، می‌افتد. اگر تکانه زاویه‌ای اسپینی آن در مقایسه با تکانه زاویه‌ای ناشی از گشتاور اعمال شده زیاد باشد، فرفه حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. در حالت میانی، یعنی وقتی فرفه به کندی در حال چرخش باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ ۲۸. فرفه "واغلتان" تشکیل شده است از یک قسمت تقریباً کروی با شعاع زیاد در یک طرف و یک قسمت میله‌ای برای چرخاندن آن در طرف دیگر. اگر این فرفه نچرخد روی سطح کروی قرار می‌گیرد و اگر چرخانده شود طوری وامی غلند که روی میله قرار بگیرد. در این باره توضیح بدهید.^۳ اگر توانستید فرفه واغلتان پیدا کنید، از یک تخم مرغ

۱. نگاه کنید به

"Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?" Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, July 1979, p. 583.

۲. نگاه کنید به

"How To Get the Playground Swing Going: A First Lesson in the Mechanics of Rotation", Jearl Walker, *Scientific American*, March 1989, p. 106.

۳. نگاه کنید به

"The Tippy-Top," George D. Freier, *The Physics Teacher*, January 1967, p. 36.

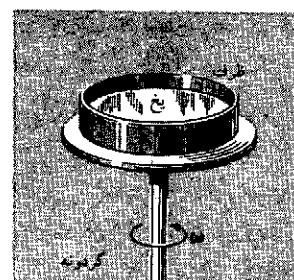
۱۷. برای اینکه هوایسمای تکموتوره بتواند تراز پرواز کند باید باله‌های کنترل یک سمت را بالا ببرد و باله‌های سمت دیگر را پایین بیاورد. چرا چنین کاری ضروری است؟ آیا در شرایط عادی این کار در مورد هوایسماهای دوموتوره هم لازم است؟

۱۸. اگر از عقب به ملح یک هوایما نگاه کنیم، می‌بینیم که ساعتگرد می‌چرخد. وقتی خلبان می‌خواهد پس از یک شیرجه تند اوج بگیرد، در می‌باید که برای ثابت نگهداشتن صفحه پیشوی باید در قسمت انتهایی شیرجه از سکان چپ استفاده کند. در این باره توضیح بدهید.

۱۹. تعداد زیادی از رودهای بزرگ به سوی استوا جریان دارند. رسویهایی که این رودها با خودشان به دریا می‌برند چه تأثیری بر چرخش زمین دارد؟

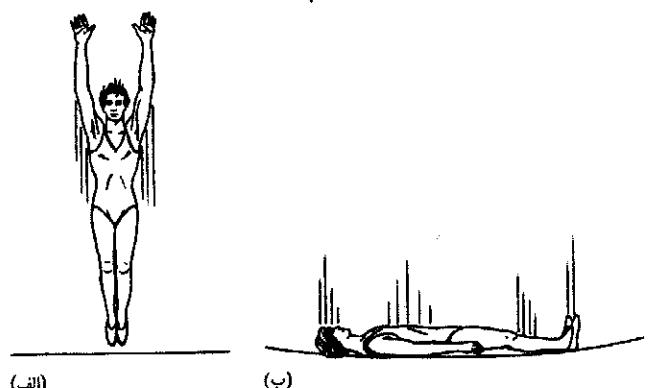
۲۰. اگر تمام جمعیت جهان به قطب جنوب مهاجرت کنند، آیا این اقدام تأثیری در طول مدت روز می‌گذارد؟ اگر چنین است، به چه صورت تأثیر می‌گذارد.

۲۱. یک گردونه دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم می‌چرخد. نه اصطکاک و نه گشتاور محرك در کار نیستند. یک طرف گرد روی این گردونه قرار گرفته است و با آن می‌چرخد (شکل ۲۲). در ته طرف یک لایه پیچ با ضخامت یکنواخت قرار دارد، که البته آن هم با طرف می‌چرخد. پیچ ذوب می‌شود ولی هیچ آبی از طرف خارج نمی‌شود. آیا حالا سرعت زاویه‌ای مجموعه بیشتر از برابر با، یا کمتر از مقدار اولیه است؟ برای پاسخ خودتان دلیل ارائه بدهید.



شکل ۲۲. پرسشن ۲۱

۲۲. در شکل ۲۳ الگ اکروبات‌بازی را می‌بینید که توسط یک ترامپولین با تکانه زاویه‌ای صفر به طرف بالا به حرکت درآمده است. آیا این شخص



شکل ۲۳. پرسشن ۲۲

آب پز سفت شده استفاده کنید؛ رفتار "ایستادن روی پا" ای تخم مرغ چرخان را می‌توانید با گذاشتن یک علامت جوهری روی سر "تیز" تخم مرغ بررسی کنید.

مسئله‌ها

بخش ۱۳-۱. تکانه زاویه‌ای ذره

۱. اگر r , p , و θ معلوم باشند، می‌توانیم با استفاده از معادله ۲ تکانه زاویه‌ای ذره را محاسبه کنیم. ولی، گاهی اوقات مؤلفه‌های (x, y, z) بردار r و (v_x, v_y, v_z) سرعت v را می‌دانیم. (الف) نشان بدهید که مؤلفه‌های بردار ۱ در امتداد محورهای x , y , و z عبارت‌اند از

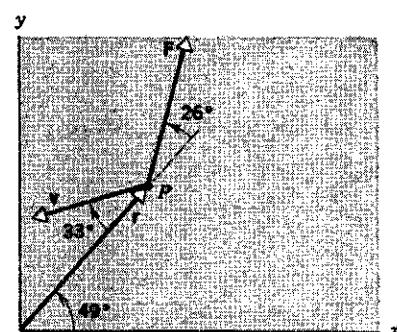
$$l_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$l_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$l_z = m(xv_y - yv_x)$$

(ب) نشان بدهید که اگر ذره در صفحه xy حرکت کند، بردار تکانه زاویه‌ای برایند تهاداری مؤلفه z است. (راهنمایی: نگاه کنید به معادله ۱۷ در فصل ۳).

۲. ذره P به جرم 13kg که بردار مکان آن r و سرعت آن v است تحت تأثیر نیروی F قرار می‌گیرد (شکل ۲۴). این سه بردار در یک صفحه قرار دارند. فرض کنید که $r = ۲,۹۱\text{m}$, $r = ۴\text{m/s}$, $v = ۱,۸\text{m/s}$, $F = ۱,۸\text{N}$ باشد. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) تکانه زاویه‌ای ذره و (ب) گشتاور وارد بر ذره حول مبدأ. جهت این دو بردار را مشخص کنید.



شکل ۲۴. مسئله ۲

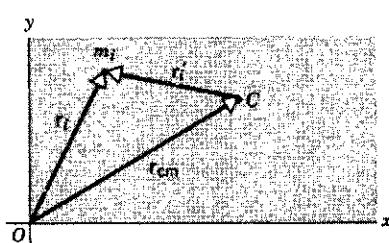
۳. نشان بدهید تکانه زاویه‌ای ذره‌ای که با سرعت ثابت در حرکت است، حول هر نقطه دلبخواه در طی حرکت ثابت می‌ماند.

۴. (الف) با استفاده از داده‌های ارائه شده در پیوستها، تکانه زاویه‌ای کل ناشی از دوران همه سیاره‌ها به دور خورشید را محاسبه کنید. (ب) چه کسری از این تکانه زاویه‌ای مربوط به سیاره مشتری است؟

۵. دو ذره، هر کدام با جرم m و سرعت v ، در امتداد دو خط موازی که به فاصله d از هم قرار دارند در جهت‌های مختلف در حرکت‌اند. عبارت $Ramin.samad@yahoo.com$

بخش ۱۳-۲. سیستمهای ذرات

- برای تکانه زاویه‌ای کل این سیستم حول هر مبدأ دلبخواه به دست بیاورید.
۶. تکانه زاویه‌ای شخصی به جرم 84kg واقع بر اسٹوای زمین را حول مرکز زمین محاسبه کنید.

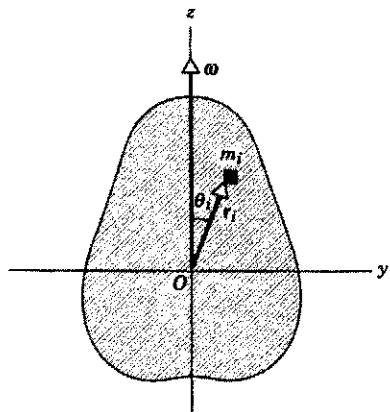


شکل ۲۵. مسئله‌های ۷ و ۸

بخش ۱۳-۳. تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

۹. انتگرال زمانی گشتاور نیرو را ضربه زاویه‌ای می‌گوییم. (الف) با شدیدع از معادله $\tau'_{ext} = dL/dt$ نشان بدهید که ضربه زاویه‌ای کل برابر

که در آن L تکانه زاویه‌ای کل است.



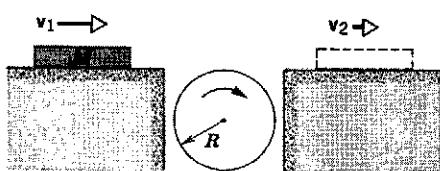
شکل ۲۷. مسئله ۱۶

۱۷. طول چوبدستی به جرم 442kg برابر با 123m است. این چوبدست روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال سکون قرار گرفته است. یک نیروی ضربه‌ای افقی عمود بر چوبدست در فاصله 46cm از مرکز جرم به آن وارد می‌شود و ضربه‌ای برابر با $12,8\text{N}$ تولید می‌کند. حرکت بعدی چوبدست چگونه است؟

۱۸. استوانه‌ای روی سطح شیبداری با زاویه θ به پایین می‌غلند. با کاربرد مستقیم معادله $\tau_{\text{ext}} = dL/dt$ نشان بدید که شتاب مرکز جرم آن برابر $g \sin \theta$ است. این روش را با روش مثال ۱۲ مقایسه کنید.

۱۹. برای اینکه توپ بیلیارد از حالت سکون، بدون لغزش به غلتش در بیاید، چوب بیلیارد نباید در راستای مرکز (یعنی در افقاعی به اندازه شاعع توپ بالاتر از سطح میز) به آن برخورد کند بلکه باید در ارتفاع $2R/5$ بالاتر از مرکز به توپ برخورد کند. این را اثبات کنید.^۱

۲۰. محور استوانه شکل ۲۸ ثابت است. استوانه در آغاز در حالت سکون است. جسمی به جرم M که بدون اصطکاک با سرعت v_1 به سمت راست در حرکت است از روی استوانه می‌گذرد و به موقعیت خط‌چین می‌رسد. وقتی این جسم با استوانه تماس پیدا می‌کند، ابتدا روی آن می‌لغزد، ولی اصطکاک آنقدر هست که قبل از آنکه تماس



شکل ۲۸. مسئله ۲۰

۱. نگاه کنید به

Arnold Sommerfeld, Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics, Academic Press Orlando (1964 paperback edition), pp. 158-161, for a supplement on the mechanics of billiards.

با تغییر تکانه زاویه‌ای است. این رابطه مشابه زاویه‌ای رابطه ضربه‌تکانه در حرکت خطی است. (ب) برای دوران حول یک محور ثابت، نشان بدید که

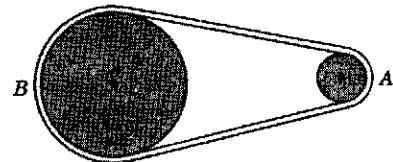
$$\int \tau dt = \bar{F}r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i)$$

که در آن r بازوی گشتاور است، \bar{F} میانگین نیرو در مدتی است که بر جسم اثر می‌کند و ω_i به ترتیب عبارتند از سرعت زاویه‌ای جسم درست قبل و بعد از اعمال نیرو.

۱۰. قرصی با لختی دورانی $10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^2$ را روی یک متنه برقی نصب می‌شود. موتور این متنه گشتاور $15,8\text{N} \cdot \text{m}$ را بر جسم وارد می‌کند. 33° ms پس از روشن شدن موتور، (الف) تکانه زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای قرص چقدر است؟

۱۱. چرخی با شاعع $24,7\text{cm}$ ، که در ابتدا با سرعت $43,3\text{m/s}$ در حرکت است، 225m می‌غلند تا متوقف شود. کمیتهای زیر را محاسبه کنید. (الف) شتاب خطی و (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ. (ج) اگر لختی دورانی چرخ برابر با $155\text{kg} \cdot \text{m}^2$ باشد، گشتاور وارد بر چرخ در از اصطکاک غلتشی را محاسبه کنید.

۱۲. چرخهای A و B توسط تسمه‌ای مطابق شکل ۲۶ بهم متصل شده‌اند. شاعع چرخ B سه برابر شاعع چرخ A است. در دو حالت زیر نسبت لختهای دورانی I_A/I_B چقدر است؟ (الف) هر دو چرخ تکانه زاویه‌ای یکسانی دارند و (ب) هر دو چرخ ارزی جنبشی دورانی یکسانی دارند. فرض می‌کنیم که تسمه روی چرخها نمی‌لغزد.



شکل ۲۶. مسئله ۱۲

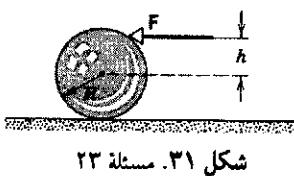
۱۳. نشان بدید که برای سیستم دوذره‌ای شکل ۷، $L = I\omega$ است.

۱۴. با استفاده از داده‌های مندرج در پیوستها، تکانه زاویه‌ای اسپینی زمین را حول محور دورانش تعیین کنید. فرض کنید کره‌ای یکنواخت است.

۱۵. تکانه زاویه‌ای چرخ لنگری با لختی دورانی $142\text{kg} \cdot \text{m}^2$ در مدت $0,53\text{s}$ از 7° به 30° کاهش پیدا می‌کند. (الف) گشتاور متوسط وارد بر چرخ لنگر را در این مدت تعیین کنید. (ب) با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، چرخ لنگر در این مدت چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟ (ج) روی این چرخ لنگر چقدر کار انجام شده است؟ (د) این چرخ لنگر چه توان متوسطی فراهم می‌کند؟

۱۶. در شکل ۲۷ جسم صلب متقارنی را می‌بینیم که حول محور ثابتی دوران می‌کند. به منظور ساده کردن محاسبات، مبدأ مختصات را در مرکز جرم قرار می‌دهیم. با جمع تکانه‌های زاویه‌ای مربوط به همه جرمها، m که جسم به آنها تقسیم شده است، ثابت کنید $\int \tau dt = I(\omega_f - \omega_i)$

داشته‌ایم. توپ با سرعت v از چوب جدا می‌شود و به خاطر "حرکت اسپینی به طرف جلو"، سرعت آن سرانجام به $v/7$ می‌رسد. نشان بدهید که $R/5 = h = 4R/5$ است (توپ بیلیارد است).



شکل ۲۱. مسئله ۲۳

۲۴. در مسئله ۲۳، فرض کنید نیروی F بدقشهای پایین‌تر از خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که با این "حرکت اسپینی به سوی عقب" غیرممکن است بتوان سرعت پیش روی را، بدون ایجاد غلتش به صفر کاهش داد، مگر اینکه $R = h$ باشد. (ب) نشان بدهید که ایجاد غلتش به صفر عقب در توپ غیرممکن است مگر اینکه F یک مؤلفه قائم به طرف پایین داشته باشد.

۲۵. یک بازیکن بولینگ توپ بولینگی به شعاع $R = 11\text{ cm}$ را با سرعت اولیه $v = 8.5\text{ m/s}$ در امتداد دالان پرتاب می‌کند. این توپ قبل از اینکه شروع به غلتیدن کند مسافت معینی را می‌لغزد. قبل از برخورد توپ با کف دالان، حرکت آن انتقالی محض است و هیچ چرخشی ندارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین توپ و کف دالان $\mu = 0.21$ است. (الف) این توپ چه مدتی روی کف دالان می‌لغزد؟ (راهنمایی: در حین لغزش، سرعت v توپ کاهش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن افزایش می‌یابد؛ لغزش وقتی تمام می‌شود که $v = \mu R\omega$ شود). (ب) چه مسافتی را با لغزش طی می‌کند؟ (ج) قبل از آغاز غلتش چند دور می‌زند؟ (د) وقتی شروع به غلتیدن می‌کند سرعت آن چقدر است؟

بخش ۴-۱۳ پایستگی تکانه زاویه‌ای

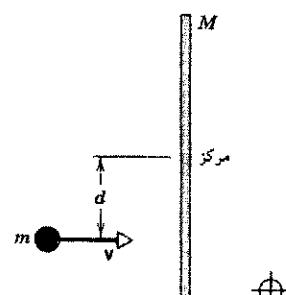
۲۶. مشاهدات اخترشناسی نشان می‌دهد که از سال ۱۸۷۰ تا سال ۱۹۰۰، طول مدت شباه روز به مقدار تقریبی $10^{-3} \times 10^{\circ} = 6^{\circ}$ افزایش پیدا کرده است. (الف) تغییر نسبی متاظر در سرعت زاویه‌ای زمین چقدر بوده است؟ (ب) فرض کنید این تغییر ناشی از جابه‌جایی مواد گذخته در هسته زمین بوده باشد. چه تغییر نسبی‌ای در لختی دورانی زمین می‌تواند پاسخ قسمت (الف) را توجیه کند؟

۲۷. فرض کنید خورشید با تمام شدن سوتخت هسته‌ای اش ناگهان می‌رمد و به یک کوتوله سفید تبدیل می‌شود، و در این فرایند قطر آن برابر با قطر زمین می‌شود. اگر هیچ اتفاق جرمی در کار نباشد، دوره تناوب چرخش خورشید که اکنون در حدود ۲۵ روز است چقدر خواهد شد؟ فرض کنید خورشید و کوتوله سفید کره‌های یکنواختی باشند.

۲۸. شخصی روی سکوی بدون اصطکاکی که با سرعت $v = 22\text{ rev/s}$ دوران می‌کند ایستاده است؛ دستهایش رابه طرفین باز کرده و با هر کدام وزنه‌ای را نگه داشته است. وقتی دستهای او در چنین وضعیتی قرار دارند لختی دورانی کل شخص، وزنه‌ها، و سکو برابر

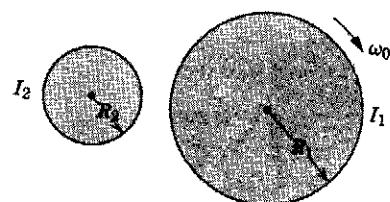
جسم با استوانه قطع شود لغزش تمام می‌شود. شعاع استوانه R و لختی دورانی آن I است. سرعت نهایی v را بر حسب v, I, M و R بیان کنید. ساده‌ترین راه برای رسیدن به این نتیجه آن است که از رابطه میان ضربه و تغییر تکانه استفاده کنید.

۲۱. چوبیدستی به طول L و با جرم M روی سطح یک میز افقی بدون اصطکاک قرار گرفته است. این چوبیدست را می‌توانیم آزادانه به هر سو که مایل باشیم به چرخش وابداریم جسمی به جرم m که با سرعت v مطابق شکل ۲۹، در حرکت است با چوبیدست برخورد کشسان انجام می‌دهد. (الف) در این برخورد چه چیزی پایسنه است؟ (ب) برای اینکه جسم بلاfaciale پس از برخورد به حالت سکون در باید جرم آن، m ، باید چقدر باشد؟



شکل ۲۹. مسئله ۲۱

۲۲. دو استوانه به شعاعهای R_1 و R_2 به ترتیب دارای لختی دورانی I_1 و I_2 هستند. این استوانه‌ها توسط محورهایی که برصفحة شکل ۳۰ عمودند نگهداری می‌شوند. استوانه بزرگتر در آغاز با سرعت زاویه‌ای ω در حرکت است. استوانه کوچکتر به سمت راست حرکت داده می‌شود تا با استوانه بزرگتر تماس پیدا کند و به واسطه اصطکاک با استوانه دیگر به دوران در بیاید. سرانجام لغزش به پایان می‌رسد و دو استوانه با آهنگهای ثابتی در جهت‌های مخالف دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ای نهایی، ω ، استوانه کوچکتر را بر حسب R_2, R_1, I_1, I_2 و ω پیدا کنید. (راهنمایی: تکانه زاویه‌ای و انرژی جنبشی هیچ کدام پایسته نیستند. معادله ضربه زاویه‌ای را در مورد هر یک از استوانه‌ها به کار بگیرید. نگاه کنید به مسئله ۹).



شکل ۳۰. مسئله ۲۲

۲۳. به توپ بیلیاردی که در ابتدا ساکن است با چوب بیلیارد ضربه سریعی وارد می‌کنیم. چوب بیلیارد را، قبل از ضربه، به طور افقی در ارتفاع h بالای خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، مانند شکل ۳۰ نگ

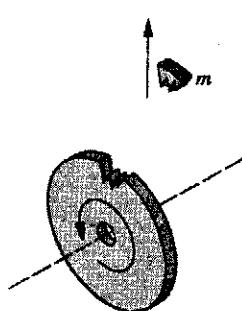
و مقدار) سیستم را پیدا کنید. (ب) آزمایش را تکرار کنید، ولی این بار فرض می‌کنیم که اصطکاک محور چرخ قابل ملاحظه می‌باشد. چرخ با همان سرعت زاویه‌ای اولیه (57 rad/s) حرکت را آغاز می‌کند و به تدریج (نسبت به گردونه) متوقف می‌شود. این بار هم شخص چرخ را به همان صورت که در بالا توصیف شده نگه داشته است. (باز هم گردونه می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک بچرخد). چگونگی حرکت این سیستم را متناسب با اطلاعات داده شده به طور کمی توصیف کنید.

۳۳. جوانی به جرم 50 kg روی لبه یک چرخ‌وفلک افتی بدون اصطکاک به جرم 827 kg و به شاعر 22 m ایستاده است. چرخ‌وفلک حرکتی ندارد، این شخص سنگی به جرم 13 kg را در امتداد افق و مماس بالله بیرونی چرخ‌وفلک پرتاب می‌کند. سرعت سنگ نسبت به زمین برابر با 82 m/s است. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ‌وفلک و (ب) سرعت خطی شخص پس از پرتاب سنگ چقدر است؟

چرخ‌وفلک را به صورت یک قرص یکنواخت در نظر بگیرید.

۳۴. در مکان بازی یچه‌ها چرخ‌وفلک کوچکی به شاعر 22 m و جرم 176 kg نصب شده است. شاعر چرخش (نگاه کنید به مسئله ۱۱ در فصل ۱۲) این چرخ‌وفلک 91 cm است. نوجوانی به جرم 44 kg با سرعت 292 m/s می‌ماس بر لبه چرخ‌وفلک ساکن می‌دود و روی آن می‌پردازد. فرض کنید اصطکاک بین یاثاقانها و محور چرخ‌وفلک ناجیز است. سرعت زاویه‌ای مجموعه چرخ‌وفلک و نوجوان را تعیین کنید.

۳۵. یک قرص تخت یکنواخت به جرم M و شاعر R حول محوری افقی که از مرکز آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ تکانه زاویه‌ای آن چقدر است؟ (ب) یک تکه به جرم m از لبه قرص می‌شکند و در لحظه‌ای که از آن جدا می‌شود در راستای قائم به سمت بالا صعود می‌کند (شکل ۳۳). این تکه تا جه ارتقای از محل جداشدن بالاتر می‌رود؛ (ج) سرعت زاویه‌ای نهایی قرص شکسته شده چقدر است؟

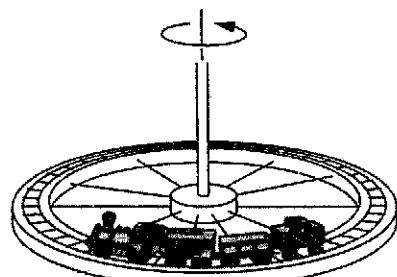


شکل ۳۳. مسئله ۳۵

۳۶. سوسکی به جرم m روی لبه صفحه گردنده دایره‌ای شکلی به شاعر R و لختی دورانی I که می‌تواند بدون اصطکاک حول محور قائم بچرخد، درجهت پاد ساعتگرد حرکت می‌کند. سرعت سوسک (نسبت به زمین) ω است، در حالی که صفحه با سرعت زاویه‌ای ω در جهت ساعتگرد می‌چرخد. سوسک روی لبه صفحه به ریزه‌نانی می‌رسد، و سرعت زاویه‌ای صفحه پس از توقف سوسک

با $\text{m}^2 \cdot \text{kg}^2 / \text{rad}$ است. اگر این شخص با جایه‌جا کردن دستهایش لختی دورانی را به $97\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ کاهش بدهد (الف) سرعت زاویه‌ای سکو چقدر خواهد شد و (ب) نسبت انرژی جنبشی فعلی به انرژی جنبشی اولیه چقدر است؟

۲۹. در یک نمایش کلاسی، ریلهای یک قطار اسباب بازی روی یک چرخ بزرگ نصب می‌شود. این چرخ می‌تواند (با اصطکاکی ناجیز) حول یک محور قائم به دوران بیاید (شکل ۳۲). قطار اسباب بازی به جرم m را روی ریلها قرار می‌دهیم. مجموعه در آغاز در حال سکون است. قطار را روشن می‌کنیم. سرعت قطار پس از مدتی به مقدار ω پایای ω نسبت به مسیر می‌رسد. اگر جرم چرخ M و شاعر آن باشد، سرعت زاویه‌ای اش، ω ، چقدر است؟ (جرم پره‌های چرخ ناجیز است).

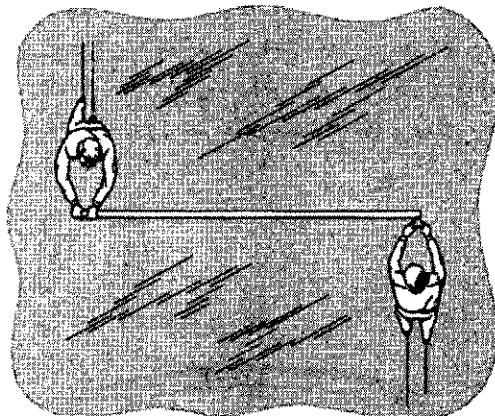


شکل ۳۲. مسئله ۲۹

۳۰. لختی دورانی چرخانه یک موتور الکتریکی حول محور مرکزی اش برابر است با $\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 247 \times 10^{-2}$. این موتور موازی با محور یک کاوه فضایی نصب شده است. لختی دورانی کاوه فضایی حول محورش برابر با $\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 126$ است. تعداد دورهایی که باید موتور چرخد تا کاوه را به اندازه 25° حول محورش بچرخاند چقدر است؟ ۳۱. چرخی که لختی دورانی آن $\text{m} \cdot \text{kg} = 27$ است با سرعت زاویه‌ای 824 rev/min روی محوری بالختی دورانی ناجیز می‌چرخد. چرخ دیگری بالختی دورانی $\text{m} \cdot \text{kg} = 85$ که در ابتدا ساکن است، به طور ناگهانی به همان محور جفت می‌شود. (الف) سرعت زاویه‌ای نهایی مجموعه محور و دو چرخ چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه به علت این جفت شدگی نلف می‌شود؟

۳۲. شاعر چرخ دوچرخه‌ای با طوق نازک برابر با 36 cm است. جرم توپی و پره‌های این چرخ قابل انعام و جرم طوق آن 366 kg است؛ این چرخ را می‌توان با اصطکاکی ناجیز حول محورش به چرخش درآورد. شخصی چرخ را طوری بالای سرش نگه داشته است که محور چرخ قائم است. این شخص روی یک گردونه ایستاده است که می‌تواند (بدون اصطکاک) دوران کند. اگر از بالا نگاه کنیم چرخ ساعتگرد می‌چرخد. گردونه در ابتدا ساکن است. سرعت زاویه‌ای اولیه چرخ 57 rad/s است. لختی دورانی چرخ + شخص + گردونه حول محور مشترکشان برابر با $\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 288$ است. دست این شخص ناگهان چرخ را از جرخش (نسبت به گردونه) بازمی‌دارد. سرعت زاویه‌ای نهایی چرخ را از

می‌گذرد انتهای دیگر چوب را به دست می‌گیرد (شکل ۳۶). فرض کنید اصطکاک وجود ندارد. (الف) حرکت اسکیت بازها را پس از آنکه توسط چوب پرچم به هم مرتبط شدنده بطور کمی توصیف کنید. (ب) دو اسکیت باز در امتداد چوب پرچم به هم نزدیک می‌شوند و فاصله شان را به 94 m کاهش می‌دهند. در این حالت سرعت زاویه‌ای آنها را تعیین کنید. (ج) انرژی جنبشی سیستم را در قسمتهای (الف) و (ب) محاسبه کنید. اختلاف انرژی از کجا پدید می‌آید؟



شکل ۳۶. مسئله ۳۶

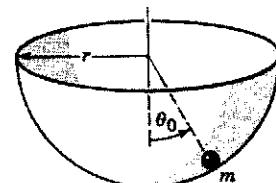
۴۰. اگر یخهای قطبی‌ای زمین آب می‌شد و به اقیانوسها می‌ریخت، عمق اقیانوسها حدوداً 3° m بیشتر می‌شد. این حادثه چه تأثیری در چرخش زمین می‌داشت؟ در صورت وقوع چنین حادثه‌ای طول شباهه روز به تخمین، چقدر می‌شد؟ (در واقع نگرانی‌ای ابراز شده است که گرم شدن جو زمین به علت آلودگی‌های صنعتی ممکن است نهایتاً موجب ذوب شدن یخهای قطبی شود).

۴۱. زمین در حدود $4.5 \times 10^{12} \text{ kg}$ میلیارد سال پیش، احتمالاً به صورت کره‌ای با چگالی کم‌بیش یکنواخت به وجود آمده است. کمی بعد، گرمای ناشی از واپاشی عناصر پرتوزا سبب شده است که بخش اعظم زمین ذوب شود. به این ترتیب مواد سنگینتر به سمت مرکز زمین رفت و هسته زمین را تشکیل داده‌اند. امروزه می‌توانیم زمین را چنین ترسیم کنیم که تشکیل شده است از یک هسته مرکزی به شعاع 3570 km و چگالی $5.5 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$ که توسط "گوشته"‌ای با چگالی 5.5 g/cm^3 که تا سطح زمین (تا شعاع 6370 km) ادامه دارد احاطه شده است. از پوسته زمین چشمی‌بودن می‌کنیم. تغییر نسبی در مدت شباهه روز، ناشی از شکل‌گیری هسته، چقدر بوده است؟

بخش ۵۵ فرفره چرخان

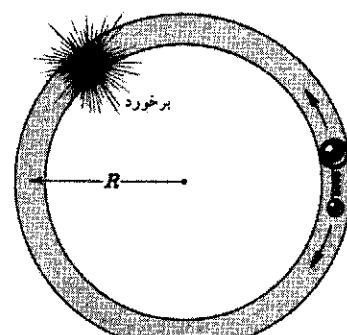
۴۲. فرفره‌ای با سرعت زاویه‌ای 28 rev/s حول محوری که با امتداد قائم محل زاویه 34° می‌سازد، می‌چرخد. جرم این فرفره 492 g و لختی دورانی آن $1.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ است. مرکز جرم آن در فاصله 388 cm از تکیه‌گاه قرار دارد. اگر از بالا به فرفره نگاه کنیم چرخش آن ساعتگرد است. مقدار (برحسب rev/s) و جهت سرعت

چقدر است؟ (ب) در این فرایند چقدر انرژی جنبشی تلف می‌شود. 3° . ذره‌ای به طور افقی روی سطح داخل یک جام نیمکره به شعاع 2 m برتاب می‌شود. جام را بی‌حرکت نگه داشته‌ایم (شکل ۳۴). می‌خواهیم سرعت اولیه U را جنان تعیین کنیم که ذره درست تا لبه جام بالا برود. U را به صورت تابعی از θ ، مکان زاویه‌ای اولیه ذره، تعیین کنید. (راهنمایی: از اصول پایستگی استفاده کنید).



شکل ۳۴. مسئله ۳۴

۴۸. روی یک مسیر دایره‌ای افقی بدون اصطکاک به شعاع R ، دو گوی کوچک به جرم‌های m و M قرار گرفته‌اند که می‌توانند آزادانه روی مسیر بلغزند. بین دو گوی فری فشرده شده است، ولی این فری به گویها متصل نیست. دو گوی توسط ریسمانی به هم متصل شده‌اند. (الف) اگر ریسمان پاره شود، فری فشرده (که بدون جرم فرض می‌شود) دو گوی را در دو جهت مخالف شلیک می‌کند؛ و خودش همانجا باقی می‌ماند. گویها وقتی بار دیگر روی مسیر به هم رسند برخورد می‌کنند (شکل ۳۵). این برخورد در کجا صورت می‌گیرد؟ جواب را به صورت زاویه‌ای که گوی M طی می‌کند، برحسب رادیان، بیان کنید. (ب) انرژی پتانسیلی که در آغاز در فری ذخیره می‌شود U است. زمان لازم برای وقوع برخورد پس از پاره شدن ریسمان چقدر است؟ (ج) فرض کنید برخورد کاملاً کشسان و رودررو است. گویها پس از اولین برخورد، مجدداً در کجا با هم برخورد می‌کنند؟



شکل ۳۵. مسئله ۳۵

۴۹. دو اسکیت باز که جرم هر کدام از آنها 51 kg است، در امتداد دو مسیر موازی به سوی یکدیگر در حرکت‌اند. فاصله بین دو مسیر 2.92 m است. سرعت این دو اسکیت باز مساوی و در جهت‌های مخالف، و مقدار آن 3.8 m/s است. اسکیت باز اولی چوب پرجم بلند و سبکی به طول 2.92 m در دست دارد؛ دومی وقتی از کتار او

که در آن m جرم الکترون و v سرعت آن است. (ب) حالا فرض کنید که تکانه زاویه‌ای الکترون حول پروتون فقط می‌تواند مضارب صحیح (n) $\frac{nh}{2\pi}$ را اختیار کند، که در آن h ثابت پلانک است. نشان بدیند که در این صورت تنها مدارهای ممکن برای الکترون عبارت اند از مدارهایی با شعاع

$$r = \frac{nh}{2\pi mv}$$

(ج) بین جوابهای قسمت (الف) و (ب) v را حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم شعاعهای تنها مدارهایی که با هر دو شرط سازگارند برابرند با

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

به این ترتیب شعاعهای مجاز با مریع اعداد صحیح $1, 2, 3, \dots$ ، والی آخر متناسب‌اند. به ازای $n = 1$ باشد، r کمترین مقدار را دارد که برابر است با $m \times 10^{-10} \times 529$.

پروژه کامپیوتري

۴۶. فرض کنید دو چرخ لنگر که روی محور مشترکی سوار شده‌اند می‌توانند مستقل از یکدیگر بچرخدند. لختی دورانی چرخ ۱، که در آغاز با سرعت زاویه‌ای 100 rad/s می‌چرخد برابر با $2\pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ و لختی دورانی چرخ ۲، که در آغاز ساکن است برابر با $1\pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ است. با لغزاندن یک چرخ روی محور چرخها در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند، به هم گشتاور وارد می‌کنند و سرانجام به سرعت زاویه‌ای یکسانی می‌رسند. (الف) فرض کنید جز گشتاورهایی که چرخها به هم اعمال می‌کنند هیچ گشتاور دیگری وجود ندارد و با استفاده از اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای نهایی چرخها را معین کنید.

اگر بتوانیم گشتاور یک چرخ لنگر را روی چرخ دیگر حساب کنیم، می‌توانیم برای پیگیری حرکت چرخها که به یک سرعت مشترک می‌رسند از کامپیوت استفاده کنیم. فرض کنید گشتاوری که چرخ ۲ به چرخ ۱ اعمال می‌کند با رابطه $(\omega_2 - \omega_1) \times 20^\circ = \tau_1$ بیان می‌شود، که در آن ω_1 سرعت زاویه‌ای چرخ ۱ و ω_2 سرعت زاویه‌ای چرخ ۲ است. τ_1 بر حسب $N \cdot m$ و سرعتهای زاویه‌ای چرخها به rad/s بیان شده‌اند. گشتاور چرخ ۱ روی چرخ ۲ برابر است با $(\omega_2 - \omega_1) \times 20^\circ = \tau_2$. گشتاورها تا وقتی که سرعتهای زاویه‌ای چرخها یکسان شوند بر آنها وارد می‌شوند. در ضمن برهم‌کنش چرخها، چرخ ۱ از $I_1 \alpha_1 = I_1 \omega_1$ و چرخ ۲ از $I_2 \alpha_2 = I_2 \omega_2$ پیروی می‌کند. این معادلات از نظر ریاضی مشابه معادلات مربوط به قانون دوم نیوتون هستند و می‌توان به روش عددی به ترتیبی که در بخش ۶ و پروژه‌های کامپیوتري در پایان بخش ۶ توصیف شد انتگرال گرفت.

بازه‌های زمانی به مدت Δt را در نظر بگیرید و فرض کنید که چرخ ۱، در آغاز یک بازه زمانی، زاویه‌ای θ_{1e} و سرعت زاویه‌ای آن ω_{1e} باشد. در این صورت مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای این چرخ در پایان

زاویه‌ای حرکت تقدیمی را تعیین کنید.

۴۳. زیروسکوپی شامل یک قرص چرخان با شعاع 48.7 cm است که به دقت در وسط یک محور به طول 12.2 cm سوار شده است. این زیروسکوپ می‌تواند آزادانه بچرخد و حرکت تقدیمی داشته باشد. سرعت چرخش آن 975 rev/min است. جرم قرص 14 kg و جرم محور 130 g است. اگر محور افقی و یک انتهای آن روی تکیه‌گاه باشد، زمان لازم برای انجام یک دور حرکت تقدیمی چقدر است؟

بعض ۶-۱۳ کوانتش تکانه زاویه‌ای

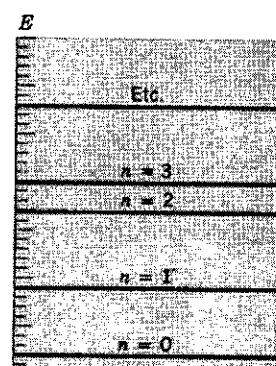
۴۴. در سال ۱۹۱۳ نیلس بور فرض کرد که تکانه زاویه‌ای هر سیستم چرخنده مکانیکی بالختی دورانی I ، کوانتیده است. یعنی،

$$L = Iw = n(h/2\pi)$$

که در آن L تکانه زاویه‌ای و n هر عدد درست مثبت یا صفر است.

(الف) نشان بدیند که این فرض ایجاب می‌کند که انرژی جنبشی هر سیستم چرخنده‌ای منحصر به مجموعه‌ای از اعداد گسسته باشد، یعنی انرژی کوانتیده است؛ عبارتی برای کوانتش انرژی به دست بیاورید.

(ب) یک چرخنده صلب، شامل ذره‌ای به جرم m را که مقید به دوران روی دایره‌ای به شعاع R است، در نظر بگیرید. اگر این فرض درست باشد، ذره چه سرعت زاویه‌ای می‌تواند داشته باشد؟ انرژی جنبشی ذره چقدر است؟ (ج) یک نمودار تراز انرژی، مانند شکل ۳۷، رسم کنید و روی این نمودار نشان بدیند که فاصله بین ترازهای انرژی با افزایش n چگونه تغییر می‌کند. رفتار بعضی از مولکولهای دواتسی کم انرژی مانند یک چرخنده صلب است.



شکل ۳۷. مسئله ۴۴.

۴۵. (الف) فرض کنید در اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به دور پروتون می‌چرخد. نیروی مرکزگرای وارد بر الکترون را نیروی الکتریکی $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ تأمین می‌کند، که در آن e مقدار بار یک الکترون یا یک پروتون است، r شعاع مدار است و ϵ_0 مقدار ثابتی است. نشان بدیند که شعاع مدار از رابطه زیر تعیین می‌شود

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}$$

است، که در آن گشتاورها بر حسب $N \cdot m$ و سرعتهای زاویه‌ای برحسب rad/s اند. این روابط حاکی از یک گشتاور خارجی برابر با $N \cdot m$ است. با بهره‌گیری از برنامه کامپیوتری تان، سرعتهای زاویه‌ای چرخها و تکانه زاویه‌ای کل را در پایان بازه‌های زمانی ۱ ثانیه‌ای از $t = 0$ تا $t = 2\Delta s$ تعیین کنید. اینجا هم بازه‌های انتگرال‌گیری را $1s$ و $0.1s$ اختیار کنید. سرعتهای زاویه‌ای را به صورت توابع زمانی رسم کنید. چون $\tau_{ext} = dL_{total}/dt$ است، گشتاور خارجی باید در مدت ۰.۲۵ ثانیه اول سبب ایجاد تغییر تکانه زاویه‌ای کل به اندازه $\Delta L = \tau_{ext}\Delta t = 0.25\Delta s$ شود. آیا جواب شما با این مقدار همخوانی دارد؟ کدام چرخ متholm این تغییر تکانه می‌شود (این مورد را با وقتی که گشتاور نیروی خارجی در کار نیست مقایسه کنید)؟ یا شاید هر دو چرخ در آن سهیم‌اند؟

(د) سرعت زاویه‌ای نهایی به چگونگی اعمال گشتاور از یک چرخ به چرخ دیگر بستگی ندارد. چه کمیتی به گشتاور نیروها بستگی دارد؟

$\omega_{16} + \alpha_{16}\Delta t = \omega_{16} + (\tau_1 b/I_1)\Delta t$ نوشته، که در این روابط گشتاور وارد بر چرخ ۱ در آغاز این بازه زمانی است. روابط مشابهی هم برای چرخ ۲ برقرار است. هر چه بازه Δt کوچکتر باشد، تقریب انجام شده تقریب بهتری است.

(ب) سرعت زاویه‌ای چرخها را در پایان هر ثانیه در مدت زمان $t = 2\Delta s$ با نوشتن یک برنامه کامپیوتری یا با استفاده از یک فهرست برای این منظور محاسبه کنید. بازه انتگرال‌گیری را ۰.۱۸ را بگیرید. سرعتهای زاویه‌ای را به صورت تابعهای از زمان روی یک نمودار رسم کنید، سپس با استفاده از نمودار یا فهرست، مقادیر سرعتهای زاویه‌ای نهایی را تعیین کنید و جوابهای حاصل را با مقادیر به دست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید.

(ج) برای اینکه تأثیر یک گشتاور خارجی را بینند، فرض کنید گشتاور وارد بر چرخ ۱ به صورت $(\omega_1 - \omega_2) 0.2\Delta s$ و گشتاور وارد بر چرخ ۲ به صورت $(\omega_1 - \omega_2) 0.2\Delta s$

۱۴

شرایط تعادل

برجهای نگهدارنده یک پل معلق باید به قدر کافی مستحکم باشند تا زیر سنگینی پل و بار رفت‌وآمد روی آن فرو نزیند؛ سیستم فرود هواپیمایی که کمی ناجور به زمین می‌نشیند نباید به راحتی صدمه شدید بیند؛ صندلی نباید با نشستن کسی بشکند یا واژگون شود. طراحان همه این چیزها سعی شان بر این است که این ساختارهای صلب، زیر بار نیروها و گشتاورهایی که به آنها وارد می‌شوند هم واقعاً صلب بمانند.

در چنین مسائلی دو سؤال مطرح است که باید به آنها جواب داد: ۱. چه نیروها و گشتاورهایی به جسم صلب اثر می‌کنند؟ ۲. با در نظر گرفتن طرح و مواد ساختمانی، آیا این اجسام، زیربار این نیروها و گشتاورها، همچنان صلب خواهند ماند؟ در این فصل به طور مشروح به سؤال اول خواهیم پرداخت. پاسخ به سؤال دوم مستلزم آشنازی کافی با خواص مواد است، و بررسی کامل آن در حیطه مباحثت این کتاب نیست؛ در این باره به بحث کوتاهی در بخش آخر همین فصل اکتفا کرده‌ایم.

داریم $\sum \mathbf{F}/dt = 0$. به این ترتیب اولین شرط تعادل این است: جمع برداری تمام نیروهای وارد بر جسم باید برابر صفر باشد، یا

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (1)$$

این معادله برداری هم از سه معادله اسکالار است:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad (2)$$

که در این روابط برای سهولت شاخص "ext" را از F_{ext} حذف کرده‌ایم. معادلات ۱ و ۲ طاکی از آن اند که برایند مؤلفه‌های نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به دو متعامدی، برابر صفر است. حرکت دورانی یک جسم صلب از معادله ۸ فصل ۱۳، یعنی از

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \tau_{\text{ext}}$ بایند تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم است. اگر \mathbf{L} هر مقدار ثابتی، منجمله صفر، را اختیارکند، در آن صورت داریم $\sum \tau_{\text{ext}} = 0$. به این ترتیب دو میں شرط تعادل چنین است: جمع برداری تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم باید برابر صفر شود، یا

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0$$

(۳)

Ramin.samad@yahoo.com

۱-۱۴ شرایط تعادل

یک جسم صلب، مانند یک صندلی، یک پل، یا یک ساختمان، در صورتی در تعادل مکانیکی است که، اگر آن را زیر چارچوب مرجع لخت مشاهده کنیم، هم تکانه خطی \mathbf{P} و هم تکانه زاویه‌ای α ثابت باشند. به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که هم شتاب خطی مرکز جرم a_{cm} و هم شتاب زاویه‌ای α حول هر محور ثابتی در چارچوب مرجع صفر است. این تعریف از تعادل مکانیکی ایجاب نمی‌کند که جسم حتی در حال سکون باشد؛ یعنی، بردارهای \mathbf{P} و α الزاماً صفر نیستند. اگر این بردارها صفر باشند (به عبارت دیگر اگر سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای α حول هر محور واقع در چارچوب مرجع صفر باشند)، جسم در تعادل استاتیکی است.

در این فصل محدودیتهاي را جستجو می‌کنیم که باید بر نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم اعمال کرد تا شرط تعادل برقرار شود. بیشتر به تعادل استاتیکی خواهیم پرداخت، ولی خواهیم دید اعم از اینکه تعادل استاتیکی باشد یا نه، همین محدودیتها برقرارند. حرکت انتقالی مرکز جرم یک جسم صلب از معادله ۲۷ فصل ۹، یعنی از

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ بایند تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم است. اگر \mathbf{P} هر مقدار ثابتی، منجمله صفر، باشد در آن صورت

$$\begin{aligned}\tau_P &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_2 \\ &\quad + \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_N \\ &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N] \\ &\quad - [\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_N]\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه اول، بنابر معادله ۵، τ را به دست می‌دهد.
عبارت داخل کروشه دوم را می‌توانیم با فاکتورگیری از عامل ثابت r_P بازنویسی کنیم و در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\tau_P &= \tau_0 - [\mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N)] \\ &= \tau_0 - [\mathbf{r}_P \times (\sum \mathbf{F}_{\text{ext}})] \\ &= \tau_0.\end{aligned}$$

تساوی آخر را به این دلیل نوشتیم که برای هر جسمی که در تعادل انتقالی باشد $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است. به این ترتیب برای هر جسم در حال تعادل انتقالی گشتاور نیرو حول هر دو نقطه‌ای که اختیار کنیم مقدار یکسانی دارد.

اغلب با مسائلی سروکار داریم که در آنها همه نیروها در یک صفحه واقع می‌شوند. در چنین مواردی شش شرط مربوط به معادله‌های ۲ و ۴ به سه شرط کاهش می‌یابد. اینجا نیروها را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad (6)$$

و اگر گشتاورها را حول نقطه‌ای که آن هم در صفحه xy باشد محاسبه کنیم، همه گشتاورها در راستای عمود بر صفحه xy قرار می‌گیرند. در این مورد داریم

$$\sum \tau_z = 0 \quad (7)$$

بررسی را به مسائل مربوط به نیروهای واقع در یک صفحه محدود می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر باشد؛ این شرط هیچ‌گونه محدودیت بنیادی در کاربرد اصول کلی تعادل ایجاد نمی‌کند.

۱۴- گرانیگاه

یکی از نیروهایی که در دینامیک جسم صلب با آن مواجه می‌شویم نیروی گرانشی است، که وزن جسم را تعیین می‌کند. قبلاً برای جسمی به جرم M این نیرو را (بدون هیچ توجیهی) به صورت تک بردار Mg که در مرکز جرم وارد می‌شود، نمایش داده‌ایم. در اینجا این اقدام را توجیه می‌کنیم و شرایطی را که در آن چنین کاری مجاز است توضیح می‌دهیم. وزن یک جسم گسترده در واقع برایند تعداد بسیار زیادی نیروست، که از گرانش به هر یک از ذرات آن وارد می‌شود. یعنی، می‌توانیم بهای جمع برداری تمام نیروهای گرانشی وارد برآنم ذرات یک جسم،

این معادله برداری را می‌توانیم به صورت سه معادله اسکالار بنویسیم
(باز هم شاخص "ext" را حذف می‌کنیم)

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0 \quad (4)$$

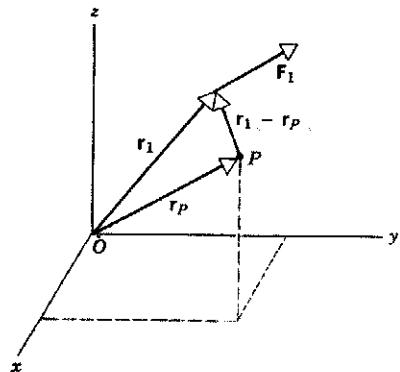
روابط فوق حاکی از آنند که، در حالت تعادل، برایند مؤلفه‌های گشتاور نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو بهدو متقارنی، برابر صفر است.

شرط دوم تعادل به انتخاب مبدأ و محورهای مختصاتی که برای محاسبه مؤلفه‌های گشتاورها بذکار می‌روند بستگی ندارد. اگر گشتاور کل برای با صفر باشد، مؤلفه‌های آن برای هر مجموعه‌ای از محورهای x, y, z صفر است. بعلاوه، برای یک جسم در حال تعادل، انتخاب مبدأ مختصات برای محاسبه گشتاورها اهمیتی ندارد و بحسب مورد می‌توان هر نقطه راحت یا مناسی را انتخاب کرد؛ اگر حول یک مبدأ مشخص O داشته باشیم $\tau = 0$ ، در آن صورت گشتاور وارد بر جسم در حال تعادل حول هر نقطه دیگری از چارچوب مرجع هم صفر است.

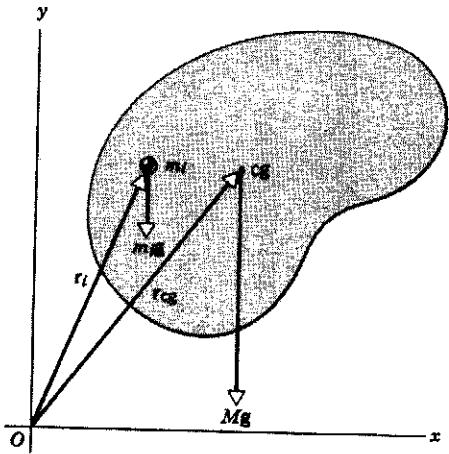
حالا این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید N نیروی خارجی به جسمی وارد شود. نسبت به مبدأ مختصات O ، نیروی F_1 به نقطه‌ای در مکان r_1 وارد می‌شود، F_2 به r_2 و الی آخر. بنابراین گشتاور خالص حول نقطه O برابر است با

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N \quad (5)\end{aligned}$$

نقطه‌ای مانند P را در نظر بگیرید که نسبت به O در مکان r_P قرار گرفته است (شکل ۱). نقطه اثر نیروی F_1 ، نسبت به نقطه P, P ، عبارت از $(r_1 - r_P)$ است. گشتاور کل حول نقطه P برابر است با



شکل ۱. نیروی F_1 یکی از N نیروی خارجی است که بر یک جسم صلب (که در شکل نشان داده نشده است) اثر می‌کند. بردار r_1 مکان نقطه اثر نیروی F_1 را نسبت به O مشخص می‌کند. از این بردار برای محاسبه گشتاور نیروی F_1 حول O استفاده می‌کنیم. از بردار $r_1 - r_P$ برای محاسبه گشتاور نیروی F_1 حول P استفاده می‌کنیم.



شکل ۲. هر ذره‌ای از جسم، مانند m_i ، تحت تأثیر یک نیروی گرانشی مانند $m_i g$ قرار می‌گیرد. با آنکه وزن کل جسم در سرتاسر حجم آن به صورت مجموع نیروهای گرانشی وارد بر تمام چنین ذراتی توزیع شده است، می‌توان بهجای آن یک تکنیرو به مقدار Mg که در گرانیگاه وارد می‌شود در نظر گرفت. اگر میدان گرانشی پکنواخت باشد (یعنی، برای همه ذرات جسم یکسان باشد) گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق می‌شوند، و بنابراین r_{cm} و r_{cg} یکی هستند.

بهاین ترتیب برایند گشتاورهای وارد بر جسم برابر است با گشتاوری که از تکنیروی Mg وارد بر مرکز جرم جسم ایجاد می‌شود. به این ترتیب گرانیگاه و مرکز جرم جسم بر هم منطبق می‌شوند و بنابراین دومن عبارتی که در بالا اظهار کردیم اثبات می‌شود. یک نتیجه مفید معادله ۱۱ آن است که گشتاور ناشی از گرانی حول مرکز جرم جسم صفر است. در چه شرایطی یک جسم در میدان گرانشی زمین در حال تعادل است؟ معادلات ۹ و ۱۱ نشان می‌دهند که، اگر یک نیروی F' به مقدار Mg در جهت بالا به مرکز جرم وارد شود، هم نیروی خالص و هم گشتاور خالص وارد بر جسم صفر خواهد شد و بهاین ترتیب شرایط تعادل برقرار است. در واقع نیروی F' در هر نقطه‌ای از خط قائم گذرنده از مرکز جرم هم به جسم وارد شود، باز جسم در حال تعادل خواهد بود. در این مورد گشتاور خالص برابر با صفر است، زیرا Mg و $F' = -Mg$ (خط اثرشان یکی است). بنابراین می‌توانیم هر جسم را با اعمال یک نیروی قائم F' نه فقط به مرکز جرم، بلکه به هر نقطه‌ای مستقیماً در پایین یا در بالای مرکز جرم، به تعادل در بیاوریم.

از این خاصیت می‌توانیم برای تعیین مرکز جرم اجسام گسترشده استفاده کنیم. جسمی به شکل دلخواه را در نظر بگیرید که از نقطه S اویخته شده است (شکل ۳) نقطه‌آویز، که در آن نیروی $F' = -Mg$ به طرف بالا به جسم اعمال می‌شود، باید روی خط قائمی باشد که از مرکز جرم جسم می‌گذرد. اگر خط قائمی را که از S می‌گذرد رسم کنیم، می‌دانیم که مرکز جرم باید جایی روی این خط باشد. این کار را می‌توانیم با انتخاب یک نقطه‌آویز دیگر تکرار کنیم (شکل ۳ ب) و بهاین ترتیب خط دیگری به دست می‌آوریم که آن هم شامل مرکز جرم است. روشن است که مرکز جرم جسم باید در محل تلاقی این دو خط باشد.

وزن آن جسم را قرار بدھیم. به علاوه، بهجای برایند خالص گشتاورهای گرانشی وارد بر همه ذرات می‌توانیم گشتاور ناشی از این تکنیرو (وزن) را بگذاریم، مشروط بر اینکه فرض کنیم این نیرو به نقطه‌ای از جسم به نام گرانیگاه وارد می‌شود.

اگر شتاب گرانشی g در تمام نقاط جسم مقدار ثابتی داشته باشد، که در تمام مواردی که عملاً با آنها سروکار داریم واقعیت دارد، می‌توانیم این ساده‌سازیها را اعمال کنیم: (۱) وزن جسم برابر با Mg است و گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق است. حالا می‌خواهیم نتایج بالا را اثبات کنیم.

فرض کنید جسمی با جرم M را به تعداد بسیار زیادی ذره تقسیم کرده‌ایم. نیروی گرانشی وارد از طرف زمین به ذره i ، با جرم m_i ، برابر است با $m_i g$. این نیرو بهسوی پایین و به سمت مرکز زمین است. نیروی خالص ناشی از گرانی وارد بر کل جسم برابر است با مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک ذرات، با

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i \mathbf{g} \quad (8)$$

چون فرض کرده‌ایم که g برای تمام ذرات جسم مقدار واحدی دارد، می‌توانیم از g در علامت مجموع در معادله ۸ به عنوان عامل مشترک فاکتور بگیریم، و در این صورت داریم

$$\sum \mathbf{F} = g \sum m_i = Mg \quad (9)$$

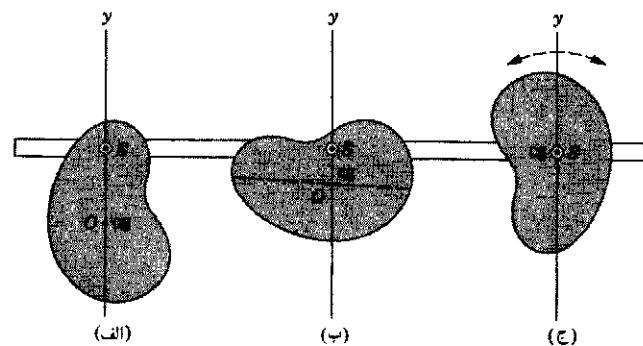
این نتیجه اثبات اولین عبارتی است که در بالا اظهار شد، یعنی بهجای برایند نیروهای گرانشی وارد بر کل جسم می‌توان تکنیروی Mg را گذاشت.

حالا می‌خواهیم شرط گشتاور نیرو، یعنی معادله ۳، را به کار ببریم و گشتاورها را حول نقطه دلخواه O ، آن طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، تعیین کنیم. بردار \mathbf{r}_i موقعیت ذره‌ای به جرم m_i را نسبت به این مبدأ مشخص می‌کند. گشتاور برایند ناشی از نیروی گرانش وارد بر تمام ذرات حول این نقطه برابر است با

$$\sum \tau = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = \sum (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}) \quad (10)$$

که تساوی آخر را با جایه‌جاکردن کمیت اسکالر m در داخل مجموع به دست آوریم. اینجا هم از ثابت بودن g استفاده می‌کنیم و آن را از زیر علامت جمع در می‌آوریم، و توجه می‌کنیم که ترتیب بردارهای \mathbf{r}_i و \mathbf{g} عوض نشود، یعنی علامت حاصل ضرب خارجی تغییر نکند. بنابر معادله ۱۲ از فصل ۹، باقی مانده مجموع، یعنی $\sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}$ ، درست همان $M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{g}$ است. بردار \mathbf{r}_{cm} برداری است که مکان مرکز جرم جسم را نسبت به مبدأ O مشخص می‌کند. با انجام این عملیات معادله ۱۰ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

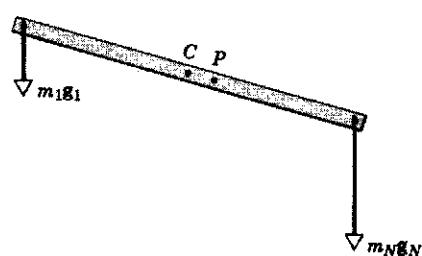
$$\sum \tau = (\sum m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g} = M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{cm} \times Mg \quad (11)$$



شکل ۳. جسمی از نقطه دلخواه S آویخته شده است، اگر مانند قسمت‌های (الف) و (ب) گرانیگاه (cg) جسم مستقیماً در زیر نقطه آویز S قرار داشته باشد، در آن صورت جسم در حال تعادل پایدار است. خط چین در شکل (ب) همان خط قائم شکل (الف) است و نشان می‌دهد که گرانیگاه جسم را می‌توان با اویختن آن از دو نقطه متفاوت مشخص کرد. (ج) اگر جسم از گرانیگاه آویخته شود، همواره در تعادل است و فرقی هم نمی‌کند که به کدام سمت قرار گرفته باشد.

اگر جسم را مانند شکل ۳ج، از مرکز جرمش بیاویزیم، به هرسمتی هم که قرارش بدھیم، همواره در حال تعادل است. یعنی آن را هر طوری هم که بچرخانیم، باز در حال تعادل می‌ماند. این مشاهده گویای همان نتیجه‌ای است که از معادله ۱۱ حاصل می‌شود: گشتاور نیروی گرانی حول مرکز جرم صفر است.

در این بخش "مرکز جرم" و "گرانیگاه" را به جای یکدیگر هم بدلکار بردیم. مرکز جرم برای همه اجسام تعریف می‌شود و می‌توان، با روشهای توصیف شده در فصل ۹، آن را از روی ابعاد و شکل جسم محاسبه کرد. اما گرانیگاه فقط برای اجسامی که در میدان گرانشی قرار دارند تعریف می‌شود. برای محاسبه گرانیگاه نه تنها باید شکل هندسی جسم را با تمام جزئیات بشناسیم، بلکه باید چگونگی تغییرات ψ را هم در سراسر جسم بدانیم. اگر ψ در تمام جسم ثابت نباشد، مرکز جرم و گرانیگاه بر هم منطبق نیستند و نمی‌توان ψ را از زیر علامت مجموع در معادلات ۸ و ۱۰ بیرون آورد. میله یکنواخت شکل ۴ را در نظر بگیرید که محورش با افق زاویه غیرصفر می‌سازد. مرکز جرم C میله در مرکز هندسی آن قرار دارد. اگر میله افقی قرار می‌گرفت، گرانیگاه آن بر مرکز جرمش منطبق می‌بود؛ یعنی تکنیروی F (به بزرگی Mg) که



شکل ۴. میله یکنواخت در میدان گرانشی غیریکنواخت. گرانیگاه در نقطه P است، که بر مرکز جرم (C) منطبق نیست.

در نقطه C به طرف بالا به جسم اعمال می‌شود می‌توانست جسم را در تعادل نگه دارد. اگر میله افقی قرار نگیرد دیگر با تکنیروی اعمال شده در C نمی‌توان آن را متعادل کرد. از آنجاکه g با دور شدن از زمین انگشتی کاهش پیدا می‌کند، به ذره‌ای که در انتهای پایینی میله قرار دارد جاذبیت گرانشی بیشتری وارد می‌شود تا به ذره کاملاً مشابهی که در انتهای بالایی واقع است برای جبران این تفاوت به چرخش ساعتگرد حول C ، گرانیگاه P (محل اعمال نیروی رو به بالایی متعادل‌کننده) باید P هم انگشتی پایین‌تر از C قرار بگیرد. اگر زاویه میل تغییر کند، محل P هم تغییر می‌کند. اگر میله را به جایی ببریم که مقدار g دیگری داشته باشد، رابطه بین P و C برای یک زاویه میل معین تغییر خواهد کرد. به این ترتیب گرانیگاه نه تنها به سمتگیری جسم بستگی دارد بلکه به میدان گرانشی در محل نیز وابسته است. برای میله‌ای که در نزدیکی سطح زمین باشد و با افق زاویه 45° بسازد، فاصله بین مرکز جرم و گرانیگاه در حدود 18nm است، که این مقدار بسیار کوچک‌تر از دقی است که ما در مسائل مربوط به تعادل با آن سروکار داریم و بنابراین کاملاً قابل اغماض است. در مسائل مربوط به تعادل، بی‌هیچ دغدغه خاطری می‌توانیم فرض کنیم که گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند.

۱۴-۳ مثالهایی از تعادل

در استفاده از شرایط تعادل (برایند نیروها صفر و برایند گشتاورها حول هر نقطه‌ای صفر) می‌توانیم مراحل کار را به صورت زیر روشن و ساده کنیم.

اول، یک مرز فرضی در اطراف سیستم مورد نظر رسم می‌کنیم. این کار به ما کمک می‌کند که بدانیم قوانین تعادل را در مورد کدام جسم یا سیستمی از اجسام اعمال می‌کنیم. به این فرایند متزوی کردن سیستم می‌گوییم.

دوم، بردارهایی را که نشانده‌نده مقدار، جهت، و نقطه اثر تمام نیروهای خارجی هستند رسم می‌کنیم. نیروی خارجی نیرویی است که از خارج مرزی که قبل از مشخص کرده‌ایم اثر می‌کند. نیروهای خارجی ای که معمولاً با آنها مواجه می‌شویم عبارت اند از نیروهای گرانشی و نیروهایی که توسط رسمنها، سیمها، یا میله‌هایی که مرز را قطع می‌کنند اعمال می‌شوند. توجه داشته باشید که فقط باید به نیروهای خارجی وارد بر سیستم توجه کنیم؛ تمام نیروهای داخلی دو به دو هم‌دیگر را خشی می‌کنند.

مواردی بیش می‌آید که در آنها جهت یک نیرو ممکن است خوب مشخص نیاشد. برای اینکه جهت نیرویی را تعیین کنیم، ارتباط عامل اعمال نیرو را در نقطه‌ای که از مرز سیستم می‌گذرد به طور فرضی قطع می‌کنیم. اگر دو سر این برش از هم دور شوند، در آن صورت نیرو به طرف بیرون است. اگر در این مورد شک دارید، یک جهت دلخواه اختیار کنید. به دست آوردن جواب منفی برای یک نیرو به این معنی است که آن نیرو در خلاف جهت مفروض است.

سوم، قبل از اینکه شرط اول تعادل (معادلات ۱ و ۲) را به کار ببریم

مرکز قالب در فاصله یک چهارم طول تیرک از انتهای چپ تیرک واقع شده است. ترازوها چه ارقامی را نشان می دهند؟

حل: سیستم را مشتمل بر از تیرک و قالب در نظر می گیریم. شکل ۵ ب نمودار جسم آزاد این سیستم است که تمام نیروهای خارجی وارد بر آن را نشان می دهد. وزن تیرک، mg ، به طرف پایین در مرکز جرم اثر می کند. چون تیرک یکنواخت است مرکز جرم آن در مرکز هندسی اش واقع می شود. وزن قالب، Mg ، هم به طرف پایین است و به مرکز جرم قالب وارد می شود. ترازوها دو سر تیرک را با نیروهای F_l و F_r به طرف بالا می فشارند. مقادیر این دو نیرو همان ارقامی است که ترازوها نشان می دهند و ما باید پیدایشان کنیم.

این سیستم در تعادل استاتیکی است و بنابراین می توانیم معادله موازنۀ نیروها (معادله ۶) و معادله موازنۀ گشتاورها (معادله ۷) را به کار بگیریم. این مسئله را از دو راه هم ارز حل می کنیم.

۱. راه حل اول. هیچ یک از نیروها مؤلفه x ندارند و بنابراین شرط $\sum F_x = 0$ هیچ اطلاعاتی به دست نمی دهد. برای مؤلفه های y داریم

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0 \quad (12)$$

در اینجا دو نیروی مجھول داریم که نمی توانیم هر دو را از همین یک معادله تعیین کنیم. خوشبختانه یک معادله دیگر، یعنی معادله موازنۀ گشتاورها (معادله ۷) را هم در اختیار داریم.

می توانیم معادله ۷ را در مورد هر محوری که بر صفحه شکل ۵ عمود باشد به کار بگیریم. اگر محوری را که از انتهای چپ تیرک می گذرد اختیار کنیم، نیروی مجھول F_l از معادله گشتاورها حذف می شود. در این صورت از معادله ۷ داریم

$$\sum \tau_z = (F_l)(0) + (F_r)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) = 0 \quad (13)$$

با

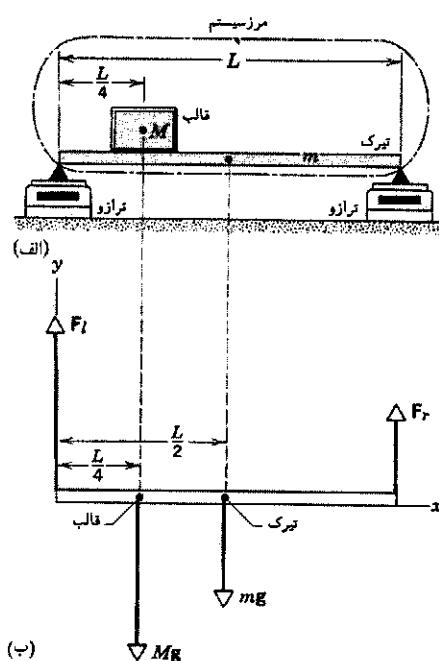
$$F_r = (g/4)(M + 2m) = \left(\frac{1}{4}\right)(9.8m/s^2)[2(1.8kg) + 2(1.8kg)] = 15N$$

توجه کنید که چگونه با این محوری که انتخاب کردیم نیروی F_l از معادله گشتاور حذف شد و این امکان فراهم آمد که معادله را مستقیماً برای نیروی دیگر حل کنیم. اگر گشتاورها را حول هر نقطه دلخواهی محاسبه می کردیم معادله ای به دست می آمد که شامل F_l و F_r بود و می شد آن را همزمان با معادله ۱۲ حل کرد. انتخاب محور مناسب کمک می کند که جبر مسئله را تا حدودی ساده کنیم، ولی به هیچ وجه جواب نهایی را تغییر نمی دهد.

یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می کنیم و نیروهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه هایشان تجزیه می کنیم. هدف این است که محاسبات را ساده کنیم. بهتر است چنان دستگاه مختصاتی انتخاب کنیم که در آن تعداد نیروهایی که باید به مؤلفه های تجزیه شوند به حداقل برسد. چهارم، قبل از اینکه شرط دوم تعادل (معادلات ۳ و ۴) را به کار ببریم یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می کنیم و گشتاورهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه هایشان تجزیه می کنیم. باز هم هدف ساده کردن محاسبات است و در اعمال کردن دو شرط تعادل استاتیکی، در صورتی که بینیم کار ساده تر می شود، می توانیم از دو دستگاه مختصات متفاوت استفاده کنیم. مثلاً اگر گشتاورها را حول نقطه ای که از آن چند نیرو می گذرد در نظر بگیریم، تمام آن نیروها از معادله گشتاور حذف می شوند.

در وضعیت تعادل، گشتاورهای حاصل از تمام نیروهای خارجی باید حول هر محوری صفر باشد. گشتاورهای داخلی دو بهدو هم دیگر را خشند و نیازی به در نظر گرفتن آنها نداریم. در اینجا هم از همان قرارداد فصلهای قبل در مورد علامت جبری گشتاور حول هر محور مشخص پیروی می کنیم: گشتاور را وقتی سبب ایجاد چرخش پادساعتگرد حول محور شود مثبت می گیریم.

مثال ۱. تیرک یکنواختی به طول L و جرم 1.8 kg را در اختیار داریم. دو سر آن را روی دو ترازوی رقمی قوار می دهیم (شکل ۱۵). قالبی به جرم 2.7 kg را روی این تیرک گذاشته ایم، به طوری که



شکل ۱. (الف) قالبی به جرم M روی تیرکی به جرم m قرار گرفته است. ترازوهای رقمی نیروهای قائمی را که به دو سر تیرک وارد می شود نشان می دهند. (ب) نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر سیستم مشتمل از تیرک و قالب.

اگر مقدار F_r را در معادله ۱۲ بگذاریم و آنرا برای F_i حل کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_i &= (M + m)g - F_r \\ &= (2,7\text{kg} + 1,8\text{kg})(9,8\text{m/s}^2) - 15\text{N} = 29\text{N} \end{aligned}$$

توجه کنید که ارتفاع مرکز جرم قالب در محاسبات این مسئله دخالتی ندارد. آیا این از نظر فیزیکی منطقی است؟

۲. راه حل دوم. حالا مسئله را از راه دیگری حل می‌کنیم تا صحت جوابها را امتحان کرده باشیم. در این روش از معادله موازنگشتوارها حول دو محور متفاوت استفاده می‌کنیم. با انتخاب محوری که از انتهای چپ تیرک می‌گذرد، همان‌طور که در بالا دیدیم، نتیجه می‌شود

$$F_r = 15\text{N}$$

محور دوم را چنان اختیار می‌کنیم که از انتهای راست تیرک بگذرد، در این صورت از معادله ۷ داریم

$$\begin{aligned} \sum \tau_z &= (F_r)(0) - (F_i)(L) + (mg)(L/2) \\ &\quad + (Mg)(3L/4) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

از حل این معادله برای F_i نتیجه می‌گیریم

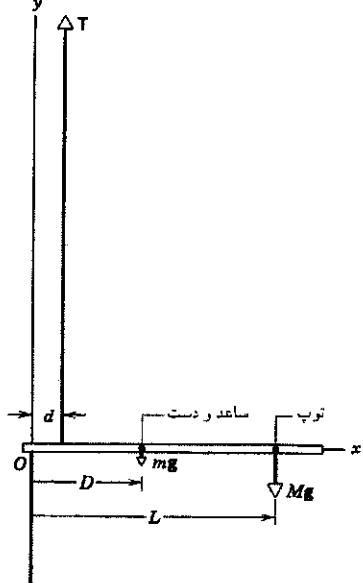
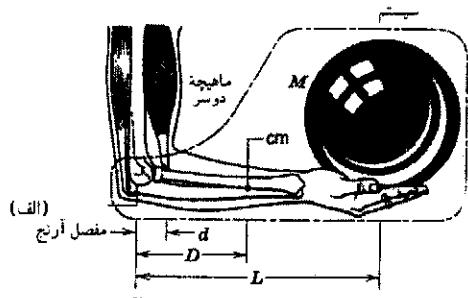
$$\begin{aligned} F_i &= (g/4)(3M + 2m) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)(9,8\text{m/s}^2)[3(2,7\text{kg}) + 2(1,8\text{kg})] = 29\text{N} \end{aligned}$$

می‌بینیم که جوابها همان جوابهای قبلی‌اند. توجه کنید که طول تیرک در این‌گونه مسائل صریحاً در محاسبات وارد نمی‌شود.

برای تعیین دو مجهول این مسئله (F_r و F_i) نیاز به دو معادله مستقل داریم. در روش دوم، دو معادله (معادلات ۱۳ و ۱۴) معادلات مربوط به گشتوارها هستند؛ معادله نیرو (معادله ۱۲) هیچ اطلاعات مستقل دیگری به دست نمی‌دهد. در واقع، می‌توانیم نشان بدیم که از تفیریق دو معادله گشتوار، معادله نیرو حاصل می‌شود.

مثال ۲. شخصی توب بولینگی به جرم $M = 72\text{kg}$ را در رک دست نگه داشته است. همان‌طور که در شکل ۶الف می‌بینیم، بازوی بازیکن قائم و ساعد او افقی است. ماهیچه دو سرو ساختار استخوانی بازو چه نیروهایی به ساعد وارد می‌کنند؟ جرم ساعد و کف دست روی هم $m = 1,8\text{kg}$ است و فواصل مورد نیاز عبارت‌اند از $d = 40\text{cm}$ ، $L = 33\text{cm}$ ، $D = 15\text{cm}$

حل: سیستم مورد نظر ما تشکیل شده است از ساعد و توب بولینگ. شکل عکس نمودار جسم آزاد این سیستم را نشان می‌دهد. نیروهای مجهول عبارت‌اند از T ، نیرویی که ماهیچه به ساعد اعمال می‌کند، و F ، نیرویی که بازو به ساعد اعمال می‌کند. اینجا هم مانند مثال ۱ همه نیروها در راستای قائم‌اند.



(ب)

شکل ۶. مثال ۲. (الف) دستی که یک توب بولینگ را نگه داشته است. مرز سیستم را با خط‌چین مشخص کرده‌ایم. (ب) نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر را نشان می‌دهد. بردارها عمدهاً به مقیاس رسم شده‌اند تا نشان بدهند که چه نیروهای بزرگی توسط ماهیچه دوسر و بازو در مفصل آرنج (نقطه O) اعمال می‌شوند.

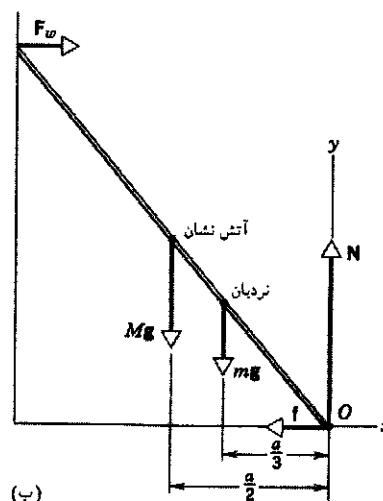
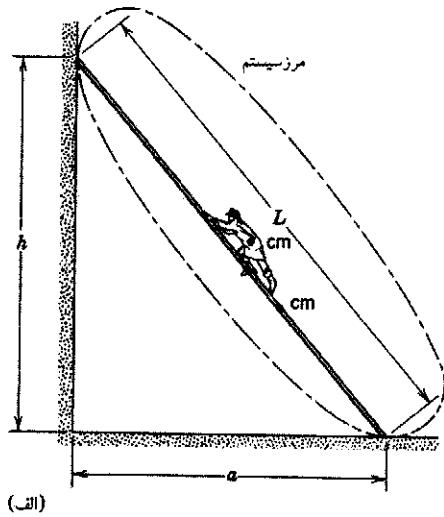
$$\text{از } 0 = \sum F_y \quad (\text{معادله ۶}) \text{ نتیجه می‌گیریم}$$

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = 0 \quad (15)$$

از کاربرد معادله ۷ حول محوری که از O می‌گذرد و با استفاده از این قرارداد که چرخشهای پادساعتگرد را مثبت می‌گیریم، داریم

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(0) - (mg)(D) - (Mg)(L) = 0 \quad (16)$$

با انتخاب محوری که از نقطه O می‌گذرد، نیروی مجهول F را از این معادله حذف کرده‌ایم. معادله ۱۶ را حل می‌کنیم و از آن T را به دست



شکل ۷. مثالهای ۳ و ۴. (الف) مأمور آتشنشانی تا نیمة طول نزدبانی که به دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد بالا می‌رود. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر سیستم را (در مقیاس متناسب) نشان می‌دهد.

عمود بر سطح تماس است. محورهای مختصات را به صورتی که در شکل می‌بینید اختیار می‌کنیم و مبدأ O را محل تلاقي نزدبان با زمین می‌گیریم. فاصله پای نزدبان از دیوار، a ، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12\text{m})^2 - (9.3\text{m})^2} = 7.6\text{m}$$

از معادله ۶، معادله موازنۀ نیروها، داریم

$$\sum F_x = F_w - f = 0 \quad (17)$$

و

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0 \quad (18)$$

از معادله ۱۸ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} N &= g(M + m) \\ &= (9.8\text{m/s}^2)(72\text{kg} + 45\text{kg}) = 1150\text{N} \end{aligned}$$

از معادله ۷، معادله موازنۀ گشتاور نیروها، با انتخاب محوری که از نقطه O (نقطه تماس نزدبان با زمین) می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0 \quad (19)$$

با این انتخاب مناسب، دو متغیر f و N از معادله موازنۀ گشتاورها حذف می‌شود. از حل معادله ۱۹ برای F_w داریم

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9.8\text{m/s}^2)(7.6\text{m})[(72\text{kg})/2 + (45\text{kg})/3]}{9.3\text{m}} \\ &= 410\text{N} \end{aligned}$$

می‌آوریم

$$\begin{aligned} T &= g \frac{mD + ML}{d} \\ &= (9.8\text{m/s}^2) \frac{(1.8\text{kg})(15\text{cm}) + (7.2\text{kg})(33\text{cm})}{4.0\text{cm}} \\ &= 648\text{N} = 146\text{lb} \end{aligned}$$

به این ترتیب ماهیچه دو سر ساعد را با نیرویی که تقریباً نه برابر وزن توب بولینگ است به بالا می‌کشد. اگر معادله ۱۵ را برای مجھول F حل کنیم و مقدار محاسبه شده برای T را در آن قرار بدهیم، داریم

$$\begin{aligned} F &= T - g(M + m) \\ &= 648\text{N} - (9.8\text{m/s}^2)(7.2\text{kg} + 1.8\text{kg}) \\ &= 560\text{N} = 126\text{lb} \end{aligned}$$

نیروی F هم بسیار بزرگ و تقریباً هشت برابر وزن توب بولینگ است.

مثال ۳. نزدبانی به طول $L = 12\text{m}$ و جرم $M = 45\text{kg}$ به دیواری تکیه داده شده است. سر بالای این نزدبان در ارتفاع $h = 9.3\text{m}$ از سطح زمین قرار دارد (شکل ۷(الف)). مرکز جرم نزدبان در فاصله یک سوم طول آن از سر متکی به زمین واقع است. آتشنشانی به جرم $M = 72\text{kg}$ تا نیمة این نزدبان بالا رفته است. فرض کنید دیوار بدون اصطکاک است، ولی زمین با نزدبان اصطکاک دارد. از طرف دیوار و زمین چه نیروهایی به نزدبان وارد می‌شود؟

حل: شکل ۷ ب نمودار جسم آزاد نزدبان را نشان می‌دهد. دیوار نیروی افقی، F_w ، به نزدبان وارد می‌کند؛ چون فرض کردہ ایم تماس بین دیوار-نزدبان بدون اصطکاک است، دیوار نمی‌تواند هیچ نیروی قائمی به نزدبان وارد کند. زمین نیرویی به نزدبان وارد می‌کند که مؤلفه افقی آن، f ، ناشی از اصطکاک است و مؤلفه قائم آن، N ، نیروی

از ترکیب معادلات ۲۱ و ۲۲ نتیجه می‌گیریم

$$F_w = \mu_s g(M + m) \quad (23)$$

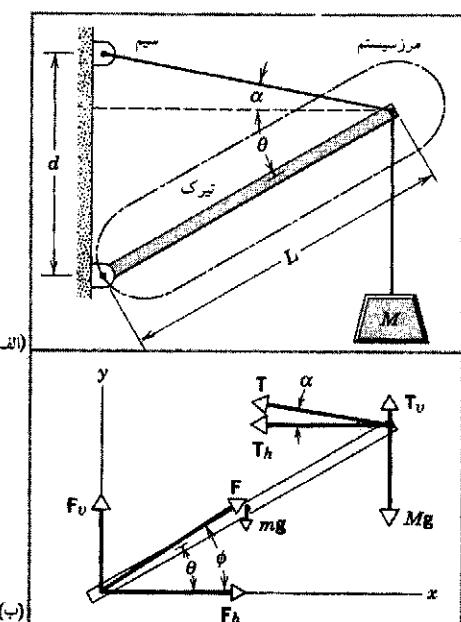
سوانحای d را از ترکیب معادلات ۲۰ و ۲۳ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d &= L \left[\frac{\mu_s h}{a} \frac{(M+m)}{M} - \frac{m}{\frac{3}{2}M} \right] \\ &= (12m) \left[\frac{(0.54)(9.3m)}{7.6m} \frac{(72kg+45kg)}{72kg} \right. \\ &\quad \left. - \frac{45kg}{(3)(72kg)} \right] \\ &= 10.4m \end{aligned}$$

به این ترتیب آتشنشان می‌تواند تا ۸۷٪ طول نزدبان را قبل از آغاز لغش بیسیماید.

حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا آتشنشان بتواند تمام طول نزدبان را بالا برود ($L = d$)؟ حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا وقتی آتشنشان پا روی نزدبان گذاشت، نزدبان نلغزد؟

مثال ۵. تیرک یکنواختی به طول $L = 3.3m$ و جرم m را از سر برای لولا شده است (شکل ۸الف). سیمی که در فاصله $d = 2.1m$ بالاتر از لولا به دیوار متصل است به سر دیگر تیرک وصل است، و طول سیم چنان است که تیرک با افق زاویه $\theta = 30^\circ$ دارد.



شکل ۸. مثال ۵. (الف) تیرکی را از سر براین توسط لولا و از سر بالای توسط یک رشته سیم به دیوار متصل کرده‌ایم. جسمی به جرم M را به سر بالایی این تیرک آویخته‌ایم. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر تیرک را نشان می‌دهد. نیروی F توسط لولا اعمال می‌شود و نیروی T کشش سیم

و از معادله ۱۷ فوراً نتیجه می‌گیریم که

$$f = F_w = 410N$$

مثال ۶. در مثال ۳، ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و نزدبان μ است. آتشنشان تا چه طولی از نزدبان می‌تواند بالا برود بی‌آنکه نزدبان شروع به لغش کند؟

حل: در مثال ۳، دیدیم که وقتی آتشنشان تا نیمة نزدبان بالا رفته باشد، نیروی عمود بر سطح N برابر با 115° است. بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با $f_{max} = \mu_s N = 620N = 620N = (0.54)(115^{\circ}) = 620N$. نیروی اصطکاکی که در آن مثال تعیین کردیم $f = 410N$ بود که کمتر از f_{max} است. وقتی آتشنشان به صعود خود روی نزدبان ادامه می‌دهد، f افزایش پیدا می‌کند تا آنکه وقتی به فاصله d از پای نزدبان رسید $f = f_{max}$ می‌شود و آن وقت لغش آغاز می‌شود.

می‌خواهیم فاصله d را تعیین کنیم. نیروهای مؤثر همان نیروهای شکل ۷ هستند. با استفاده از معادله ۷ حول محوری که از نقطه تماس نزدبان با زمین می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/3) + (Mg)(da/L) = 0$$

که در آن da/L فاصله افقی بین نقطه O و امتداد وزن آتشنشان است. از حل این معادله برای F_w نتیجه می‌شود

$$F_w = \frac{ga}{h} \left(M \frac{d}{L} + \frac{m}{3} \right) \quad (20)$$

معادله ۲۰ نشان می‌دهد که وقتی آتشنشان از نزدبان بالا می‌رود (یعنی، وقتی d زیاد می‌شود)، نیروی F_w هم برای حفظ تعادل باید زیاد شود. برای اینکه d متناظر با شروع لغش را تعیین کنیم، ابتدا باید F_w را به دست بیاوریم.

معادله ۶، معادله مربوط به موازنۀ نیروها در امتداد x ، نتیجه می‌دهد

$$\sum F_x = F_w - f = 0$$

در لحظه آغاز لغش داریم

$$F_w = f = f_{max} = \mu_s N \quad (21)$$

از معادله ۶ برای موازنۀ نیروها در امتداد محور y ، داریم

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0$$

یا

$$N = g(M + m) \quad (22)$$

از ترکیب چهار معادله بالا و پس از انجام عملیات جبری لازم، به دست می‌آوریم

$$F_v = 50\text{N}, F_h = 80\text{N}, T_v = 126\text{N}, T_h = 80\text{N}$$

و به این ترتیب کشش سیم برابر است با

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814\text{N}$$

و نیرویی که از طرف لولا به تیرک وارد می‌شود عبارت است از

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950\text{N}$$

توجه کنید که نیروهای T و F هر دو به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از مجموع وزن تیرک و جسم آویخته به آن (632N) است.
بردار \mathbf{F} با افق زاویه‌ای می‌سازد که از رابطه زیر معین می‌شود

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_v}{F_h} = 32.2^\circ$$

بنابراین بردار نیروی برایندی که از لولا به تیرک وارد می‌شود، کاملاً در راستای خود تیرک قرار نمی‌گیرد.

در مثالهای قبلی مواطბ بوده‌ایم که تعداد نیروهای مجهول را برابر با تعداد معادلات مستقل اختری کنیم که این نیروها را بهم مربوط می‌کنند. اگر همه نیروها در صفحه باشند، تنها می‌توانیم سه معادله مستقل برای تعادل داشته باشیم، یک معادله برای تعادل دورانی حول هر محور عمود بر صفحه و دو معادله دیگر برای تعادل انتقالی در صفحه نیروها. ولی، اغلب با پیش از سه نیروی مجهول مواجه هستیم. مثلاً، اگر در مثالهای ۳ و ۴ فرض بدون اصطکاک بودن دیوار را حذف کنیم، در آن صورت چهار کمیت اسکالر مجهول داریم که عبارت اند از مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از دیوار به نزدبان و مؤلفه‌های اسکالر داریم، این نیروها را نمی‌توانیم پیدا کنیم. اگر به یکی از نیروهای مجهول مقداری نسبت بدهیم، سایر نیروها را می‌توانیم معین کنیم. ولی اگر هیچ معیاری برای نسبت دادن یک مقدار به یک نیروی مجهول نداشته باشیم، از نظر ریاضی بینایت جواب امکان‌پذیر خواهد بود. بنابراین اگر بخواهیم جواب منحصر به فردی به دست بیاوریم باید بتوانیم یک رابطه مستقل دیگر بین نیروهای مجهول پیدا کنیم. (در مثال ۵، چنین رابطه‌ای را از خواص فیزیکی یکی از اجزای سیستم نتیجه گرفتیم). محاسبه گشتاور حول یک محور دیگر، معادله مستقل دیگری به دست نمی‌دهد؛ می‌توانیم نشان بدهیم که چنین معادله‌ای ترکیبی خطی از معادله مربوط به گشتاور و دو معادله مربوط به نیروست و بنابراین حاوی اطلاعات جدیدی نیست.

مثال ساده دیگری از یک ساختار نامعین، وقتی پیش می‌آید که بخواهیم نیروهای وارد از زمین به چهار چرخ اتومبیلی را که روی سطح

می‌سازد. جسمی به جرم $M = 56\text{kg}$ را به انتهای بالای تیرک آویخته‌ایم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را تعیین کنید. حل: در شکل ۸ ب نیروهای خارجی وارد بر تیرک را نشان داده‌ایم. تیرک را به عنوان سیستم در نظر گرفته‌ایم. چون دو نیرو از نیروهای وارد بر سیستم قائم و به طرف پایین هستند، محورهای مختصات را افقی و قائم اختیار می‌کنیم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را با مؤلفه‌های افقی و قائم آنها نمایش داده‌ایم.

از معادله ۶، معادله تعادل انتقالی، داریم

$$\sum F_x = F_h - T_h = 0 \quad (24)$$

و

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = 0 \quad (25)$$

برای اعمال شرط تعادل دورانی، محوری را انتخاب می‌کنیم که از انتهای بالای تیرک می‌گذرد. (چرا؟) در این صورت از معادله ۷ داریم

$$\sum \tau_z = -F_v(L \cos \theta) + F_h(L \sin \theta)$$

$$+ mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta \right) = 0$$

یا

$$F_v = F_h \tan \theta + \frac{mg}{2} \quad (26)$$

با قراردادن مقادیر عددی، معادلات ۲۴ و ۲۶ به صورت زیر در می‌آیند

$$F_h = T_h$$

$$F_v + T_v = 632\text{N}$$

و

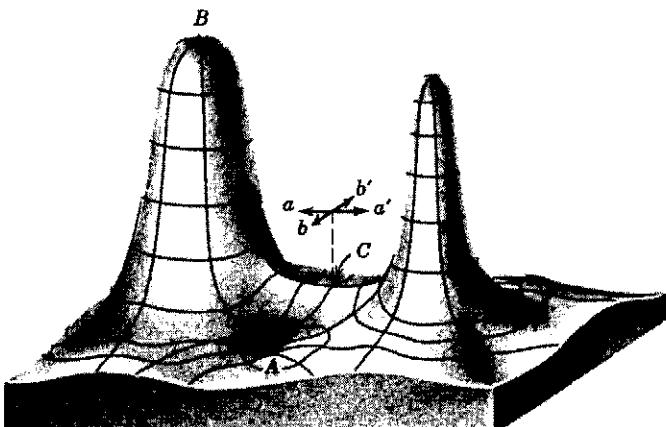
$$F_v = 417\text{N} + 4577(F_h)$$

بررسی مسئله نشان می‌دهد که در این مورد چهار مجهول، یعنی F_v , F_h , T_h , T_v داریم، ولی فقط توانسته‌ایم سه رابطه برای آنها بنویسیم. اگر قرار باشد این مسئله را حل کنیم، به رابطه دیگری بین این کمیتها نیاز داریم. این رابطه آخری از این واقعیت نتیجه می‌شود که از جمع T_v و T_h باید بردار \mathbf{T} حاصل شود که در راستای سیم است. سیم (انعطاف‌پذیر) نمی‌تواند نیروی را که عمود بر طولش باشد تحمل کند. [توجه کنید که این گفته در مورد تیرک (صلب) صدق نمی‌کند]. بنابراین چهارمین معادله ما چنین است

$$T_v = T_h \tan \alpha \quad (27)$$

که در آن داریم $157\text{N} = 157\text{N} \tan \alpha = (d - L \sin \theta) / (L \cos \theta)$ است. بنابراین معادله چهارم ما به صورت زیر در می‌آید

$$T_v = 157\text{N} = 157\text{N} \tan 89^\circ$$



شکل ۹. یک سطح انرژی پتانسیل گرانشی. ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانشی متناظر با این شکل قرار بگیرد مانند ذره‌ای رفتار می‌کند که روی یک سطح جامد واقعی و بدون اصطکاک، به همین شکل، می‌لغزد، ذره در نقاط A، B، C در حال تعادل است. در نقطه A تعادل پایدار است، زیرا اگر ذره B را اندکی از A دور کنیم تمایل دارد که به همان نقطه بازگردد. در نقطه B اندکی از A دور شود تمایل دارد که از B دور شود تمایل به افزایش فاصله دارد. در نقطه C، اگر ذره در امتداد محور' aa' جابه‌جا شود مایل به بازگشت به نقطه C است، ولی اگر در امتداد محور' bb' جابه‌جا شود مایل به افزایش فاصله است. نقطه C را نقطه Zین می‌نامند، زیرا این سطح در این ناحیه تقریباً به شکل زین است. تعادل خنثی را اینجا نشان نداده‌ایم؛ این نوع تعادل را باید روی سطح افقی نمایش داد.

دارد. به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که اگر جسمی در حال تعادل پایدار باشد، برای تغییر مکان جسم باید یک عامل خارجی روی آن کار آنجام بدهد. این کار سبب افزایش انرژی پتانسیل جسم می‌شود. وقتی U بیشینه باشد (نقطه B در شکل ۹)، ذره در حال تعادل نایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی، از این وضعیت سبب ایجاد نیروی می‌شود که تمایل به دور کردن ذره از موقعیت تعادل دارد. در این مورد برای تغییر مکان ذره اصلاً نیازی به کار عامل خارجی روی ذره نیست؛ این کار را نیروی پایستار انجام می‌دهد، و در نتیجه انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.

اگر U ثابت باشد، ذره در حال تعادل خنثی است. در این مورد ذره را می‌توان بدون اعمال هیچ نیروی دورکننده یا بازگرداننده‌ای، اندکی جابه‌جا کرد.

نکاتی که بیان کردیم در مورد ذرات صدق می‌کند، یعنی برای حرکت انتقالی معتبر است. حالا می‌خواهیم به جسم صلب بپردازیم. در این صورت علاوه بر تعادل انتقالی باید تعادل دورانی را هم در نظر بگیریم. مسئله حرکت جسم صلب در میدان گرانشی مسئله بسیار ساده‌ای است، چون می‌توانیم فرض کنیم که تمام نیروهای گرانشی وارد بر ذرات یک جسم صلب به یک نقطه واحد آثر می‌کنند — چه به منظور بررسی تعادل انتقالی باشد و چه به منظور بررسی تعادل دورانی. در مسائل مربوط به تعادل تحت تأثیر نیروهای گرانشی، می‌توانیم به جای تمامی جسم صلب، نقطه‌ای با همان جرم و مستقر در گرانیگاه را در نظر بگیریم.

افقی قرار گرفته است مشخص کنیم. اگر فرض کنیم که این نیروها جملگی بر سطح زمین عمودند، در آن صورت با چهار کمیت اسکالار مجهول مواجه‌ایم. تمام نیروهای ذره از جمله وزن اتومبیل و سرشیمان آن عمود بر سطح زمین وارد می‌شوند. بنابراین، تنها سه معادله مستقل داریم که شرایط تعادل را مشخص می‌کنند، یکی از این معادلات مربوط به تعادل انتقالی در تنها راستای مشترک همه نیروهای است و دو معادله دیگر از تعادل دورانی حول دو محور عمود بر هم در صفحه افق نتیجه می‌شود. پس جواب این مسئله هم از نظر ریاضی تامین است. میز چهار پایه‌ای که همه پایه‌هایش روی زمین قرار داشته باشد هم نمونه دیگری از این نوع مسائل است.

البته، چون برای این مسئله فیزیکی در واقع جواب یگانه‌ای وجود دارد، باید بر مبنای فیزیکی، رابطه مستقل دیگری بین نیروها پیدا کنیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. برای رفع این مشکل باید توجه کنیم که هیچ ساختاری هرگز چنان صلب نیست که ما تلویحاً در این مسائل فرض کرده‌ایم. همه ساختارها تا حدودی تغییر شکل می‌دهند. مثلاً نزدیان و دیوار تغییر شکل می‌دهند؛ لاستیکهای اتومبیل و زمین هم تغییر شکل می‌دهند. ماهیت این تغییر شکل را قوانین کشسانی و خواص کشسانی هر ساختار تعیین می‌کنند و رابطه مورد نیاز دیگر بین نیروها از همین جا فراهم می‌شود. بنابراین برای تحلیل کامل مسئله نه تنها به قوانین مکانیک جسم صلب، بلکه به قوانین کشسانی هم نیاز داریم. این مطالب را به طور خلاصه در بخش ۵-۱۴ مطالعه خواهیم کرد.

۱۴-۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

در فصل ۸، دیدیم که نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. برای نیروهای پایستار می‌توانیم یکتابع انرژی پتانسیل $(z, y, x)U$ تعریف کنیم، که به صورت زیر با F مرتبط است

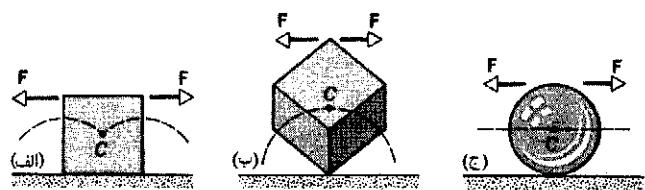
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

در نقاطی که $\partial U / \partial x$ صفر است، ذره‌ای که تحت تأثیر این نیروی پایستار باشد در راستای x در تعادل انتقالی است، چون در این صورت F_x صفر است. به همین صورت، در نقاطی که $\partial U / \partial y$ یا $\partial U / \partial z$ صفر است، ذره به ترتیب در راستاهای y و z در تعادل انتقالی است. مشتق U در یک نقطه، و مؤلفه نیروی متناظر با آن در صورتی صفر است که U در آن نقطه دارای یک مقدار فرین (بیشینه یا کمینه) باشد، یا اینکه U نسبت به مختصه متغیر ثابت باشد. پس جسم وقتی در حال تعادل است که U بیشینه، کمینه یا ثابت باشد. هر یک از این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کیم.

وقتی U کمینه باشد (نقطه A در شکل ۹)، ذره در حال تعادل پایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی ذره از این وضعیت سبب ایجاد یک نیروی بازگرداننده می‌شود که میل به بازگرداندن ذره به مکان تعادل

تعادل خنثی جسم صلب با یک کره روی یک سطح افقی نشان داده می‌شود (شکل ۱۰ ج). اگر به کره یک نیروی افقی اعمال شود، گرانیگاه آن نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید بلکه روی یک خط افقی حرکت می‌کند. مسیر گرانیگاه در شکل با خطچین افقی مشخص شده است. انرژی پتانسیل کره، همانند انرژی پتانسیل ذره‌ای با جرم معادل واقع در گرانیگاه، در طی جابه‌جایی ثابت است. این سیستم در غیاب نیرو هیچ تغییری به حرکت درجهٔت خاصی ندارد. جسم صلب در صورتی در حال تعادل خنثی است که نیروهای افقی توانند گرانیگاه آن را پایین و یا بالا ببرند.

تعادل یک جسم صلب آویخته در چه شرایطی پایدار است؟ چه موقع ناپایدار است؟ و در کدام شرایط خنثی است؟



شکل ۱۰. تعادل یک جسم گسترده (الف) مکعبی که روی یک سطح افقی دارد در تعادل پایدار است، زیرا اگر در اثر نیروی افقی F از جا بلند شود، گرانیگاه آن، C ، بالا می‌رود. (ب) مکعبی که روی یک کنج متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است، چون در اثر نیروی افقی F ، گرانیگاه سقوط می‌کند. (ج) که در مقابل یک نیروی افقی در حال تعادل خنثی است، چون در اثر اعمال نیروی F ، گرانیگاه C نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید. این معیارهای تعادل برای اجسام بعددار را با شرایط مربوط به ذرة شکل ۹ مقایسه کنید.

۱۴-۵ کشسانی

میز سه‌پایه ساختاری است که می‌توانیم تعادل آن را با روش‌هایی که در این فصل ارائه شد بررسی کنیم. هر سه پایه روی زمین قرار دارند، و زمین نیروهای قائمی به هر کدام از آنها وارد می‌کند. با استفاده از ایک معادله نیرو (وزن که در گرانیگاه وارد می‌شود باید با جمع سه نیروی قائم برابر باشد) و دو معادله گشتاور (گشتاورها را حول دو محور عمود بر هم واقع در صفحه افقی کف اتاق محاسبه می‌کنیم)، می‌توانیم سه نیروی مجهول را پیدا کنیم.

اما مسئله میز چهارپایه شامل چهار نیروی مجهول است و نمی‌توانیم بدون داشتن اطلاعات بیشتری در مورد ارتباط میان نیروهای قائم، آن را حل کنیم. مثلاً فرض کنید پایه‌ها از نظر طول اندکی با هم تفاوت دارند. با قراردادن یک وزنه بسیار سنگین روی میز می‌توانیم پایه‌های آن را به اندازه‌های متفاوت فشرده کنیم، تا هر چهارتایشان با زمین در تماس قرار بگیرند. در این صورت می‌توانیم با استفاده از فشردگی پایه‌ها رابطهٔ چهارم بین نیروها را پیدا کنیم و به حل مسئله بپردازیم (نگاه کنید به مثال ۸).

صلیبت اجسام به اصطلاح صلب در واقع یک تصور است. جامدها از اتمها شکل گرفته‌اند و این اتمها در تماس صلب با یکدیگر قرار ندارند. اتمها رویه‌های سختی ندارند که بتوان آنها را خیلی کیپ در کنار هم چید؛ ابر الکترونی آنها را می‌توان با نیروهای خارجی شکل داد و یا تغییر شکل داد. در اجسام جامد، پیوند اتمها به واسطه نیروهایی است که تا حدود زیادی مانند نیروی فنر رفتار می‌کنند. شکل ۱۱ قسمی از یک شبکهٔ جامد را نشان می‌دهد. شبکهٔ آرایش منظمی از اتمهاست که می‌توان آن را در بلورها مشاهده کرد. هر اتم تحت تأثیر شش فنری است که آن را احاطه کرده به حال تعادل درآمده است؛ ثابت مؤثر فنر بسیار بزرگ است، یعنی تغییر دادن فاصله میان اتمها مستلزم نیروی بسیار بزرگی است. به خاطر بزرگی این نیروست که فرض می‌کنیم اجسام صلب‌اند. در جامد‌های دیگر، آرایش اتمها ممکن است به صورتی غیر از شبکهٔ مکعبی، مثلاً به شکل رده‌های طویل باشد؛ این نوع اجسام خیلی صلب نیستند. لاستیک نمونه‌ای از آنهاست.

مثالاً مکعبی را در نظر بگیرید که روی یک وجه اش روی یک میز افقی قرار گرفته است. گرانیگاه مکعب در مرکز سطح مقطع مرکزی اش واقع می‌شود (شکل ۱۰ الف). فرض کنید نیرویی به این مکعب اعمال می‌کنیم که آن را حول محوری در امتداد یکی از اضلاعش و بدون لغزش می‌چرخاند. توجه کنید که گرانیگاه بالا برده شده و به این ترتیب روی مکعب کار صورت گرفته است، و این کار انرژی پتانسیل را افزایش می‌دهد. اگر نیرو را حذف کنیم، مکعب به وضعیت اولیه‌اش باز می‌گردد. بنابراین این وضعیت اولیه یک حالت تعادل پایدار است. این فرایند،

برای ذره‌ای با همان جرم در مکان گرانیگاه، در شکل نشان داده شده است. خطچین نمایندهٔ مسیری است که گرانیگاه در طی این حرکت می‌یابد. مشاهده می‌کنیم، چنان‌که باید، ذره در مکان تعادل پایدار، حداقل انرژی پتانسیل را دارد. به این ترتیب می‌شود نتیجهٔ گرفت که جسم صلب در صورتی در تعادل پایدار است که با اعمال نیرو بتوانیم گرانیگاه آن را بالا ببریم ولی نتوانیم پایین ببایریم.

اگر مکعب را بچرخانیم تا روی یک کنج به توازن برسد (شکل ۱۰ ب). در این صورت هم مکعب در حال تعادل است. مشاهده می‌کنیم که این وضعیت تعادل یک وضعیت ناپایدار است. اعمال کوچکترین نیروی افقی سبب دور شدن مکعب از این وضعیت می‌شود و انرژی پتانسیل هم در این فرایند کاهش می‌یابد. ذره‌ای با جرم معادل، که در گرانیگاه مستقر باشد مسیری را که با خطچین نشان داده‌ایم طی می‌کند. در وضعیت تعادل ناپایدار، همان طور که باید، ذره بیشترین انرژی پتانسیل را دارد. مطلب بالا را می‌توانیم چنین خلاصه کنیم که، جسم صلب در حال تعادل ناپایدار است اگر هر نیروی افقی بتواند گرانیگاه آن را پایین ببایرد. مکعبی که روی یک ضلع اش متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است اگر تحت تأثیر یک نیروی افقی عمود بر آن ضلع قرار بگیرد، ولی در مقابل نیروی افقی‌ای که موازی با آن ضلع وارد شود در تعادل پایدار است. به این ترتیب ذره ممکن است نسبت به یک مختصه در تعادل پایدار باشد و نسبت به مختصه دیگر در تعادل ناپایدار، چنین وضعیتی را نقطهٔ زین می‌نامیم. این وضعیت متناظر با نقطه C در شکل ۹ است.

متناسب‌اند. ضریب تناسب آنها را مدول کشسانی می‌نامند. بنابراین

$$\text{کرنش} \times \text{مدول کشسانی} = \text{تنش} \quad (28)$$

در شکل ۱۳ ارتباط بین تنش و کرنش را برای یک استوانه فولادی آزمونی (مانند شکل ۱۴) نشان داده‌ایم. در گستره وسیعی از تنشهای اعمال شده، منحنی تنش-کرنش یک منحنی خطی است و معادله ۲۸ با یک مدول ثابت، برقرار است (این قسمت متناظر با بخش خطی شکل ۱۳ است). با افزایش تنش، ممکن است رابطه تنش-کرنش غیرخطی شود، ولی ماده باز هم کشسان می‌ماند؛ یعنی، اگر تنش را برداریم، نمونه به ابعاد اولیه‌اش بازمی‌گردد.

اگر تنش از استقامت تسلیم یا حد کشسانی نمونه بیشتر شود، نمونه به طور دائمی تغییر شکل می‌دهد و پس از حذف تنش هم به ابعاد اولیه‌اش بازمی‌گردد، این نوع رفتار را رفتار پلاستیک می‌گوییم. فراتر از آنچه که استقامت تسلیم نامیده می‌شود، ناگزیر گسیختگی پدید می‌آید. این پدیده وقتی روی می‌دهد که تنش به استقامت حدی برسد.

کشن و تراکم

در مورد کشیدگی یا فشردگی ساده، تنش را به صورت F/A ، نیرو تقسیم بر مساحتی که نیرو بر آن اثر می‌کند، و کرنش، یا تغییر شکل را به صورت کمیت بدون بعد $\Delta L/L$ ، تغییر نسبی طول نمونه، تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر نمونه یک میله بلند باشد، نه تنها تمامی میله بلکه هر قسمت آن، تحت تأثیر یک تنش معلوم، کرنش یکسانی را متحمل می‌شود. چون کرنش یک کمیت بدون بعد است، مدول معادله ۲۸ دارای بعد تنش، یعنی نیرو بر واحد سطح است.

مدول مربوط به تنشهای کششی و تراکمی را مدول یانگ می‌نامند. این مدول در کاربردهای مهندسی با نماد E نشان داده می‌شود. معادله ۲۸ به صورت زیر در می‌آید

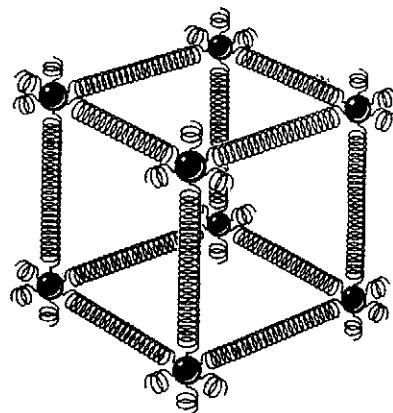
$$\frac{E}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

یا

$$\Delta L = \frac{EL}{EA} \quad (29)$$

کرنش در یک نمونه، $\Delta L/L$ ، را معمولاً می‌توان به راحتی با کرنش سنج اندازه‌گیری کرد (شکل ۱۵). این وسائل ساده و کارآمد، که می‌توان آنها را مستقیماً با چسب روی ماشین‌الات در حال کار نصب کرد، مبتنی بر این اصل ساخته شده‌اند که مقاومت الکتریکی یک سیم (از جنس بعضی مواد) تابعی از کرنش در سیم است.

با آنکه ممکن است مدول کشن و فشارش تقریباً یکی باشد، امکان دارد استقامت جدی در دو مورد کاملاً متفاوت باشد. مثلاً بتن تحت فشار بسیار مقاوم است ولی تحت کشن آن جتان سست است که هرگز باز آن در کارهای مهندسی (به این منظور) استفاده نمی‌شود.



شکل ۱۱. انتهای یک جسم جامد روی یک شبکه سه‌بعدی تکرارشونده توزیع شده‌اند. نیروهای بین اتمی را با فنر نمایش داده‌ایم.

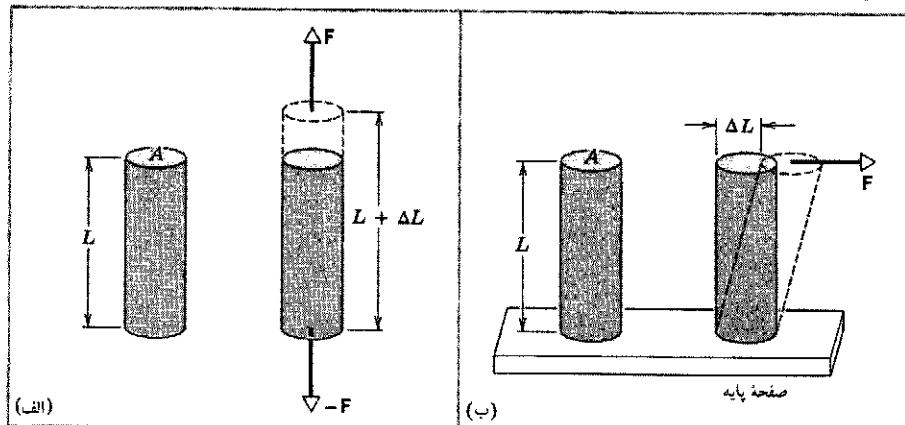
وقتی چنین موادی را می‌کشیم، در واقع نیروی کافی برای تغییر دادن فاصله بین اتمها را اعمال می‌کنیم.

همه اجسام "صلب" واقعی تا حدودی کشسان‌اند، یعنی، با کشیدن، هل دادن، چرخاندن یا فشردن آنها می‌توانیم ابعادشان را اندکی تغییر بدیم. برای اینکه شناختی از مرتبه بزرگی این نوع تغییر ابعاد داشته باشیم، استوانهای فولادی به طول ۱m و قطر ۱cm را در نظر می‌گیریم. اگر اتومبیل کوچکی را از چنین میله‌ای بیاوریم، میله فقط در حدود ۵mm درصد تغییر طول می‌دهد. به علاوه، وقتی اتومبیل را جدا کنیم، میله به طول اصلی اش بازمی‌گردد.

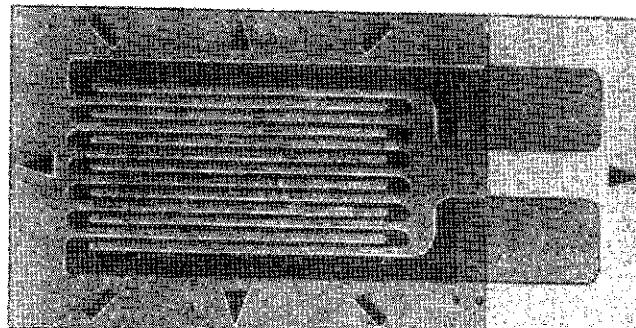
اگر به این میله دو اتومبیل آویزان کنید، میله به طور دائم کشیده خواهد ماند و با برداشتن بار به طول اولیه‌اش باز نمی‌گردد. اگر سه اتومبیل به آن آویزان کنید، میله می‌شکند. درست در لحظات قبل از گسترشی، افزایش طول آن کمتر از ۲٪ است. تغییر شکلهایی به این اندازه اگرچه کوچک به نظر می‌رسند، ولی در کارهای مهندسی بسیار اهمیت دارند.

در شکل ۱۲ دو نوع تغییر شکل (یا تغییر ابعاد) ممکن برای جسم جامد، در اثر نیروهای وارد بر آن را نشان داده‌ایم. در شکل ۱۲الف استوانه تحت تأثیر نیروهای کششی قرار گرفته است. در شکل ۱۲ب استوانه تحت تأثیر نیروهای به‌اصطلاح برشی تغییر شکل پیدا کرده است. این نوع تغییر شکل مانند تغییر شکل یک بسته کارت یا تغییر شکل یک کتاب است. (نوع سومی که ممکن است یک جسم تغییر شکل بدهد، تغییر شکل در اثر فشردگی یکنواخت است. این نوع تغییر شکل ناشی از اعمال نیروهای یکنواخت در همه جهت‌هاست. فشردگی یکنواخت را در فصل ۱۷ بررسی می‌کنیم.) آنچه در هر سه این صورتها مشترک است یکی تنش است که به نیروهای اعمال شده مربوط می‌شود و دیگری کرنش، که نوعی از تغییر شکل است.

تنش و کرنش در موارد متفاوت شکل ۱۲ به شکلهای مختلفی بروز می‌کنند، ولی در محدوده کاربردهای مفید مهندسی—با هم Ramin.samad@yahoo.com



شکل ۱۲. (الف) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش کششی به اندازه ΔL درازتر شده است. (ب) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش برشی، مانند پک دسته کارت تغییر شکل داده است.



شکل ۱۵. یک کرنش سنج با ابعاد کلی ۹۸mm در ۴۶mm. این سنجه را با جسب به حسمی که می‌خواهیم کرنش آن را اندازه‌گیری کنیم متصل می‌کنیم. مقاومت الکتریکی سنجه با کرنش تغییر می‌کند و این امکان را فراهم می‌آورد تا کرنش‌هایی تا حدود ۳٪ را اندازه‌گیری کنیم.

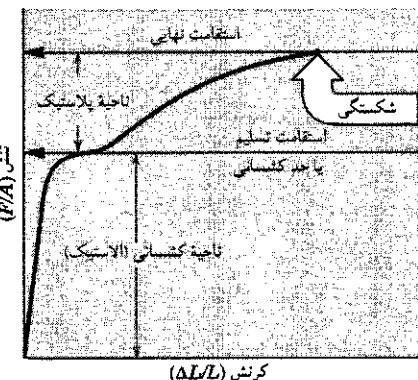
مثال ۶. میله‌ای از فولادسازه‌ای در اختیار داریم. شعاع R این میله 9.5mm و طول L آن برابر 81cm است. نیروی $62 \times 10^4\text{N}$ (حدود ۷ تن) این میله را در راستای محور می‌کشد. (الف) تنش در این میله چقدر است؟ (ب) در اثر این نیرو میله چقدر افزایش طول پیدا می‌کند؟

حل: (الف) تنش طبق تعریف عبارت است از

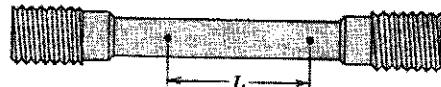
$$\frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{62 \times 10^4 \text{N}}{(\pi)(9.5 \times 10^{-3} \text{m})^2} = 2.2 \times 10^8 \text{N/m}^2$$

استقامت تسلیم برای فولادسازه‌ای برابر با $2.5 \times 10^8 \text{N/m}^2$ است. پس این تنش خیلی نزدیک به استقامت حدی میله است. (ب) با استفاده از معادله ۲۹ و نتیجه‌های که در (الف) بدست آوردهیم داریم

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2 \times 10^8 \text{N/m}^2)(81\text{m})}{2.0 \times 10^{11} \text{N/m}^2} = 8.9 \times 10^{-4} \text{m} = 8.9 \text{mm}$$



شکل ۱۳. منحنی تنش-کرنش برای یک نمونه فولادی، مانند شکل ۱۴. وقتی تنش برابر با استقامت تسلیم نمونه باشد، نمونه به طور دائمی تغییر شکل می‌دهد. وقتی تنش برابر با استقامت حدی نمونه شود، نمونه از هم می‌گسلد.



شکل ۱۴. نمونه مورد آزمون برای تعیین منحنی تنش-کرنش (مانند شکل ۱۳).

در جدول ۱ مقادیر مربوط به مدول یانگ و سایر خواص کشسانی چند نوع مصالح مورد استفاده در مهندسی را آورده‌ایم.

برش

در مورد نیروهای برشی هم تنش به صورت نیرو بر واحد سطح است، ولی در اینجا بزدای نیرو در صفحه سطح مورد نظر قرار می‌گیرد و بر آن عمود نیست. کرنش هم به صورت نسبت بدون بعد L/L است. این کمیتها در شکل ۱۲ ب نشان داده‌اند. مدول مربوط به اینگونه نیروها را که در کاربردهای مهندسی با نماد G نشان داده می‌شود، مدول برشی می‌نامیم. معادله ۲۹، با نشاندن G به جای E ، در مورد تنشهای برشی هم بدکار می‌رود.

تشهای برشی در میلگردانهایی که زیر بار دوران می‌کنند، در شکستگیهای استخوان به علت پیچش، و در فرها نقش بسیار مهمی دارند.

جدول ۱. بعضی خواص کشسانی بعضی از مصالح مورد استفاده در مهندسی.

مواد	پلی‌استرین	استخوان	چوب	بتن	شیشه	آلومینیم	فولاد
چگالی (kg/m ³)	۱۰۵۰	۱۹۰۰	۵۲۵	۲۳۲۰	۲۱۹۰	۲۷۱۰	۷۸۶۰
مدول یانگ (۱۰ ^۹ N/m ^۲)	۲	۲۰	۳۰	۶۵	۱۱۰	۲۵	۲۵۰
استقامت حدی (۱۰ ^۹ N/m ^۲)	۴۸	۴	۱۳	۲۵	۱۴۰	۲۵	۴۰۰
استقامت خم شدن (۱۰ ^۹ N/m ^۲)	۲۵۰	۲۰۰	۳۰	۶۵	۱۱۰	۲۵	۹۵

۱. فولادسازه‌ای (با استاندارد A۳۶ - ASTM)

۲. تحت تراکم

۳. استقامت بالا

۴. نوعی کاج

چوبی با سطح مقطع $A = 1 \text{ cm}^2$ است. مدول یانگ برای چوب $E = ۱۰^{۱۰} \text{ N/m}^2$ است. فرض کنید سطح میز تراز باقی بماند و پایه‌ها خم نشوند. زمین A چه نیرویی به هر یک از پایه‌ها وارد می‌کند؟

حل: صفحه میز را به عنوان سیستم مورد مطالعه انتخاب می‌کنیم. اگر صفحه میز تراز باقی بماند، هر یک از سه پایه کوتاهتر باید با نیروی یکسان F_2 به یک اندازه ΔL_2 ، متراکم شده باشد. پایه بلندتر هم باید با نیروی F_1 به اندازه ΔL_1 متراکم شده باشد، و باید شرط زیر برقرار باشد

$$\Delta L_2 + d = \Delta L_1$$

از معادله ۲۹ ($\Delta L = FL/EA$), رابطه بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$F_2 D + dAE = F_1(D + d) \simeq F_1 D \quad (۳۰)$$

که در جمله آخر تساوی، از d در مقایسه با D چشم پوشیده‌ایم. از معادله ۶ برای موازنۀ نیروها در راستای قائم، داریم

$$\sum F_y = ۲F_2 + F_1 - Mg = ۰ \quad (۳۱)$$

اگر معادلات ۳۰ و ۳۱ را برای کمیت‌های مجھول حل کنیم، به دست می‌آوریم

$$F_2 = \frac{Mg}{\frac{4}{4}} - \frac{dAE}{\frac{4}{4}D}$$

$$= \frac{(۲۹۰ \text{ kg})(۹,۸ \text{ m/s}^2)}{\frac{4}{4}}$$

$$- \frac{(۱۰^{-۴} \text{ m})(۱۰^{-۴} \text{ m})(۱۰^{۱۰} \text{ N/m}^2)}{(۴)(۱۰^۰ \text{ m})}$$

$$= ۷۱۱ \text{ N} - ۱۶۳ \text{ N} = ۵۴۸ \text{ N}$$

به‌این ترتیب کرنش $\Delta L/L$ برابر است با $(۸,۸ \times ۱۰^{-۴} \text{ m})/(۱,۱ \times ۱۰^{-۴} \text{ m})$ ، که برابر با ۱۱% است.

مثال ۷. حداقل قطر استخوان قلم ران در مردان در حدود $۲,۸ \text{ cm}$ است، که متناظر است با سطح مقطع $۶ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^2$. تحت چه بار تراکمی ای این استخوان می‌شکند؟

حل: از جدول ۱ می‌بینیم که استقامت حدی، S_u ، استخوان تحت تراکم برابر است با $۱۷۰ \times ۱۰^۹ \text{ N/m}^2$. بنابراین نیروی فشارشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$F = S_u A = (۱۷۰ \times ۱۰^۹ \text{ N/m}^2)(۶ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^2)$$

$$= ۱۰^۵ \text{ N}$$

این نیرو تقریباً معادل ۱۱ تن است. با آنکه این نیرو نیروی بزرگی است، ولی امکان مواجه شدن با آن وجود دارد. مثلاً ممکن است در یک فرود ناشیانه با چتر روی زمین سخت چنین نیرویی به پاها وارد شود. لازم نیست که نیرو مدام باشد؛ چند میلی ثانیه هم کافی است!

حالا این آمادگی را داریم که بفهمیم چگونه خواص کشسانی مواد می‌تواند در تعیین شرایط تعادل مفید باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸. طول سهتا از پایه‌های یک میز چهار پایه $m = ۱,۰ \text{ m}$ است؛ پایه چهارم اندکی، به اندازه $d = ۰,۵ \text{ mm}$ ، از سه پایه دیگر بلندتر است، بنابراین میز کمی لنگ است. یک استوانه فولادی سنگینی به جرم $M = ۲۹ \text{ kg}$ را به طور سرپا روی میز قرار می‌دهیم، بدین ترتیب همه پایه‌ها متراکم می‌شوند و میز دیگر لنگی ندارد. همین‌طور

طنابهایش سفت بسته‌ایم، و (ب) نتو را شل بسته‌ایم، طوری که مقدار قابل توجهی شکم داده است. درباره پاسخ خودتان توضیح بدهید.
۱۰. یک سر زردبافی را به زمین و سر دیگر آن را به دیوار قائمی تکیه داده‌ایم. احتمال لغزش زردبان وقتی روی پله پایین ایستاده‌ایم بیشتر است یا وقتی روی پله بالا ایستاده‌ایم؟ توضیح بدھید که چرا.

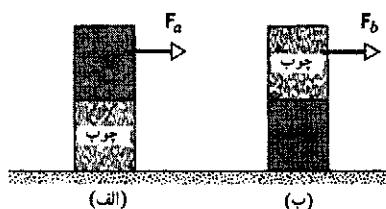
۱۱. کتابی روی میزی قرار گرفته است. میز نیرویی دقیقاً برابر با وزن کتاب به طرف بالا به آن وارد می‌کند. میز از کجا "می‌داند" که جه نیرویی به طرف بالا باید وارد کند؟ این نیرو، از طریق چه سازوکاری وارد عمل می‌شود؟

۱۲. اگر چنان در برابر یک در باز بایستیم که صورتمن در برابر لبه درو هر پایمان در یک طرف در قرار بگیرد، در می‌یابیم که نمی‌توانیم روی پنجه‌ها بایستیم. چرا؟

۱۳. روی یک صندلی که پشتی آن قائم است بنشینید و سعی کنید بدون خم شدن به سمت جلو از جا بلند شوید. چرا نمی‌توانید این کار را انجام بدھید؟

۱۴. یک تیرک موازنۀ بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند. چگونه؟

۱۵. یک قالب مرکب متتشکل از چوب و فلز روی سطح یک میز قرار گرفته است. در کدامیک از دو وضعیتی که در شکل ۱۶ نشان داده شده است می‌توانید قالب را با نیروی کمتری واژگون کنید؟



شکل ۱۶. پرسش ۱۵

۱۶. در مثال ۵، چرا منظور کردن اصطلاحکار لولا ضروری نیست؟
۱۷. تابلویی توسط دو سیم به دیواری آویزان شده است. سیمها باید در چه راستاهایی باشند تا کشش در آنها به حداقل برسد؟ توضیح بدھید که چطور با آنکه جرم تابلو معین است تعادل تابلو به ازای راستاهای وکشتهای متفاوتی امکان دارد.

۱۸. نشان بدھید که چگونه می‌توان با استفاده از یک نیروسنج اجسامی را وزن کرد که وزن آنها خیلی بیشتر از بزرگترین مقداری است که نیروسنج می‌تواند نشان بدهد.

۱۹. با استفاده از نیروها و گشتاورها توضیح بدھید که چگونه یک درخت می‌تواند در بادهای بسیار شدید تعادلش را حفظ کند.

۲۰. ویروسی که در یک لولۀ آزمایش پر از مایع در دستگاه سانتریفووز

۱. نگاه کنید به

"The Smart Table," Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, December 1981, p. 633.

$$F_1 = \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D}$$

$$= 711N + 489N = 1200N$$

می‌توانیم نشان بدهیم، برای اینکه میز بهوضعيت تعادل برسد، هر یک از سه پایه کوتاهتر به اندازه ۴۲mm و پایه بلندتر به اندازه ۹۲mm متراکم می‌شود. اختلاف این دو مقدار ۵۰mm را، یعنی همان مقداری است که انتظار می‌رود.

برای اینکه سطح میز افقی قرار بگیرد باید استوانه را تزدیکتر به پایه بلندتر قرار بدهیم تا به هر یک از پایه‌های کوتاهتر محل دقیق استوانه را می‌توانیم از معادله موازنۀ گشتاورها پیدا کنیم، به شرطی که ابعاد سطح میز و موقعیت پایه‌ها را بدانیم.

پرسشها

۱. آیا معادله‌های ۱ و ۳ هر دو با هم شرایط لازم و کافی برای تعادل مکانیکی را فراهم می‌آورند؟ برای تعادل ایستایی چطور؟

۲. آیا توپ بیسبال در لحظه‌ای که در بالاترین نقطه مسیرش یک پرواز قائم به حال سکون درمی‌آید در حال تعادل است؟

۳. آیا وزنه یک آونگ ساده در هیچ نقطه‌ای از مسیرش در حال تعادل هست؟ اگر چنین نقطه‌ای وجود دارد، آن نقطه کدام است؟

۴. چرخی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی می‌چرخد در حال تعادل مکانیکی است، چون هیچ نیرو یا گشتاور خارجی به آن وارد نمی‌شود. ولی ذراتی که چرخ را تشکیل داده‌اند شتاب مرکزگرای a بهسوی محور دارند. چون $\omega \neq 0$ است، چگونه می‌توان گفت که چرخ در حال تعادل است؟

۵. مثالهایی بیاورید از مواردی که در آنها با آنکه بایند نیروهای وارد بر یک جسم صفر است آن جسم در حال تعادل نیست.

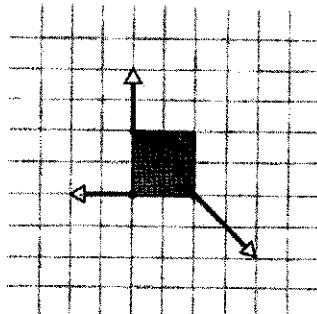
۶. آیا در یک ساختمان مسکونی مرکز جرم و گرانیگاه برهم منطبق‌اند؟ در مورد یک دریاچه چطور؟ تحت چه شرایطی تفاوت میان مرکز جرم و گرانیگاه قابل توجه می‌شود؟ مثالی ذکر کنید.

۷. اگر جسم صلبی را بدون چرخش به‌ها پرتاپ کیم، در صورتی که بتوانیم از مقاومت هوا چشم پوشیم، در طی پرواز هم چرخشی کسب نمی‌کند. از این آزمایش ساده در مورد مرکز نقل (گرانیگاه) چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۸. فهرمان المپیک زیمناستیک ماری لورتون عملیات حیرت‌انگیزی روی پارالل با میله‌های ناهمسطح انجام می‌داد. کسی به‌ها می‌گوید که تحلیل دقیق فیلمهای عملیات این زیمناست نشان می‌دهد که مرکز جرم این زیمناست در تمام حرکتها بی‌انجام می‌دهد همواره، همان‌طور که قوانین فیزیک ایجاب می‌کند، بالاتر از تکیه‌گاه‌های او قرار دارد. درباره این گفته چه نظری دارید؟

۹. نتوی را بین دو درخت بسته‌ایم و آن را تکان می‌دهیم. در کدامیک از دو مورد زیر احتمال پاره شدن آن بیشتر است: (الف) نتو را با کشیدن

که بیشترین گشتاور را حول تکیه‌گاه (الف) به سمت جلوی صفحه و (ب) به سمت پشت صفحه ایجاد می‌کند چند است؟
 ۲. یک جسم صلب مربع شکل با وزن ناجیز تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است، که مطابق شکل ۱۸ به سه گوشة آن وارد می‌شوند. این نیروها در شکل با شکل بردارهایی در مقیاس مناسب رسم شده‌اند.
 (الف) آیا شرط اول تعادل برقرار است؟ (ب) آیا شرط دوم تعادل برقرار است؟ (ج) اگر جواب هر یک از دو قسمت قبلی منفی است، آیا نیروی چهارمی می‌تواند تعادل جسم را برقرار کند؟ اگر چنین نیرویی وجود دارد، مقدار، جهت و نقطه اثر آن را مشخص کنید.

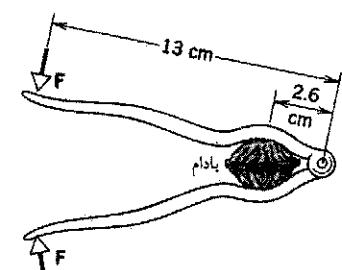


شکل ۱۸. مسئله ۲

۳. ثابت کنید که هرگاه جسمی فقط تحت تأثیر سه نیرو در تعادل باشد، این نیروها باید هم صفحه باشند و خط اثراهای آنها با باید هم‌دیگر را در یک نقطه قطع کنند یا با هم موازی باشند.

بخش ۳-۱۴-۳ مثالهایی از تعادل

۴. فرض کنید برای اینکه بادامی را بشکنیم لازم است که نیروی 46 N از دو طرف به آن وارد کنیم. با استفاده از بادام‌شکن شکل ۱۹ چه نیرویی، F ، برای شکستن این بادام لازم است؟



شکل ۱۹. مسئله ۴

۵. ارتفاع برج کج پیزا 55 متر و قطر آن 70 m است (شکل ۲۰). قسمت بالای برج به اندازه 45 m از حالت قائم جایه‌جا شده است. برج را به صورت یک استوانه دایره‌ای یکنواخت در نظر بگیرید، (الف) چه جایه‌جایی اضافی دیگری می‌تواند تا برج را به مرز واگنی برساند؟ (ب) در آن لحظه برج با امتداد قائم چه زاویه‌ای می‌سازد؟ (فعلاً آنگ

در حال چرخش باشد، از دیدگاه ناظر ساکن در آزمایشگاه، حرکت دایره‌ای یکنواخت (یعنی، حرکت شتابدار) دارد. ولی ناظری که با دستگاه سانتریفوژ می‌چرخد ویروس را بدون شتاب می‌بیند. توضیح بدھید که چگونه این ویروس می‌تواند برای ناظر دوم در حال تعادل باشد ولی برای ناظر اول خیر.

۲۱. قالبی به شکل مکعب مستطیل که نسبت اضلاع آن به صورت $1 : 2 : 3$ است، روی یک سطح افقی قرار دارد. در چه وضعیتی، یعنی وقتی کدام وجه آن در تماس با سطح افقی است، قالب در پایدارترین تعادل است؟

۲۲. آیا جسم واقعاً صلب وجود دارد؟ اگر وجود دارد، مثالی بیاورید. اگر نه، توضیح بدھید که چرا.

۲۳. در صندلی راننده یک اتومبیل ساکن نشسته‌اید. به شما گفته می‌شود که نیروهایی که زمین به طرف بالا بر هر یک از چهار جنح وارد می‌کند با هم مقاوت‌اند. تأیید صحبت و سقم این ادعا مستلزم بررسی چه عواملی است؟

۲۴. در مثال ۳، اگر دیوار بدون اصطکاک نباشد، آیا قوانین تحریبی اصطکاک شرط اضافی دیگری را که برای تعیین مؤلفه قائم نیروی وارد از دیوار به نزدیک لازم است فراهم می‌کند؟

۲۵. وقتی استوانه مورد آزمایش در شکل ۱۴ در اثر تنش اعمال شده کشیده می‌شود، افزایش طول می‌دهد. آیا قطر استوانه هم تغییر می‌کند؟ اگر می‌کند چگونه؟

۲۶. آیا مدول یانگ برای لاستیک از مدول یانگ برای فولاد بیشتر است یا کمتر؛ با این معیار آیا لاستیک کشسانتر از فولاد است؟

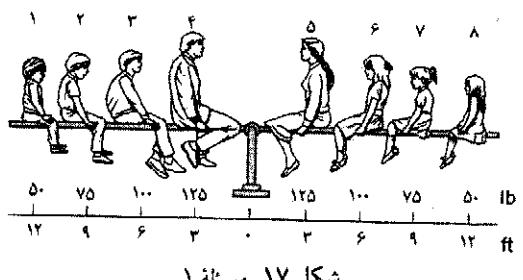
۲۷. یک تیرآهن افقی را که هر سرآن روی تکیه‌گاهی قرار دارد در نقطه وسط باز کرده‌ایم. نشان دهید که قسمت بالایی تیرک تحت تراکم است، در حالی که قسمت پایینی آن تحت کشش است.

۲۸. چرا در ساختارهای بتنی از میل‌گرد های تقویت‌کننده استفاده می‌کنند؟ (استقامت کششی بتن را با استقامت فشارشی (تراکمی) آن مقایسه کنید).

مسئله‌ها

بخش ۱-۱۴ شرایط تعادل

۱. یک خانواده هشت‌نفره که وزنهای آنها بر حسب پوند در شکل ۱۷ نشان داده شده است، یک الکلنگ را متوزن کرده‌اند. شماره عضوی



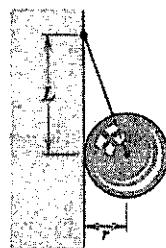
شکل ۱۷. مسئله ۱

و اتومبیل کم و بیش از جا تکان می خورد. نیروی وارد بر اتومبیل از طناب را معین کنید. (طناب در اثر کشش تا حدودی افزایش طول پیدا می کند.)



شکل ۲۲. مسئله ۹

۱۰. در شکل ۲۳ گردنی یکنواختی به وزن w و شعاع r توسط طنابی به یک دیوار بدون اصطکاک آویزان شده است. محل اتصال طناب به دیوار در فاصله L بالاتر از مرکز جرم کره است. (الف) کشش طناب و (ب) نیروی وارد بر کره از دیوار چقدر است؟

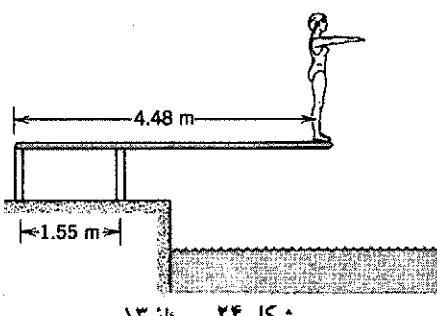


شکل ۲۳. مسئله ۱۰

۱۱. جرم اتومبیلی که روی جاده افقی پارک شده است 1360 kg و فاصله بین محورهای جلو و عقب آن 3.05 m است. گرانیگاه این اتومبیل در فاصله 178 cm سانتی متر از محور جلو قرار دارد. کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) نیرویی که زمین به طرف بالا به هر یک از چرخهای حلو وارد می کند. و (ب) نیرویی که زمین به طرف بالا به هر یک از چرخهای عقب وارد می کند. (در هر مورد فرض کنید که نیروهای وارد به دوچرخ با هم مساوی اند.)

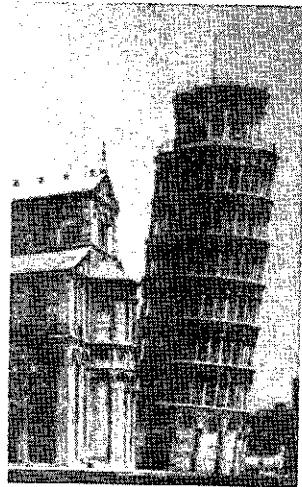
۱۲. فردی به وزن 160 lb روی یک پل افتدی راه می رود و در فاصله سه چهارم طول پل از یک انتهای می ایستد. ساختار پل یکنواخت و وزن آن 60 lb است. نیروهای قائمی که از تکیگاهها به هر یک از دو انتهای پل وارد می شود چقدر است؟

۱۳. شیرجه زنی به وزن 582 N در انتهای یک تخته شیرجه یکنواخت به طول 4.48 m و وزن 142 N ایستاده است. تخته شیرجه به دو پایه که در فاصله 5.55 m را از یکدیگر قرار گرفته اند متصل شده است (شکل ۲۴). کشش (یا تراکم) را در هر یک از دو پایه محاسبه کنید.



شکل ۲۴. مسئله ۱۳

حلکت برج در قسمت بالایی 1 m میلی متر بر سال است.)



شکل ۲۰. مسئله ۵

۶. نیروی افقی کوچکی عمود بر یکی از اضلاع بالایی مکعبی که روی یک میز افقی قرار گرفته است، بر وسط آن ضلع وارد می شود و مکعب هنوز ساکن است. حالا نیرو را به طور یکنواخت افزایش می دهیم. آیا مکعب از همان ابتدا واژگون می شود یا اینکه شروع به لغزیدن می کند؟

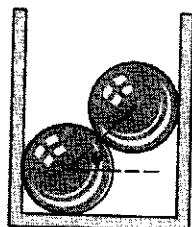
۷. صندوقی به شکل مکعب به ضلع 1.12 m را حاوی یک ماشین صنعتی است. شکل این ماشین چنان است که گرانیگاه صندوق و محتوی آن 28 m^3 بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع شده است. صندوق روی سطح شیبداری قرار دارد که با افق زاویه θ می سازد. اگر θ را از صفر به تدریج افزایش بدهیم به زاویه ای می رسیم که در آن صندوق یا شروع به لغزیدن می کند یا واژگون می شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با (الف) 64° و (ب) 70° باشد کدام واقعه اتفاق می افتد؟ در هر یک از دو مورد زاویه نهایی را معین کنید.

۸. زنجیر قابل انعطافی به وزن W بین دو نقطه ثابت هم تراز A و B اویخته شده است (شکل ۲۱). پیدا کنید (الف) نیرویی را که زنجیر به هر یک از دو انتهای وارد می کند و (ب) کشش زنجیر را در پایین ترین نقطه.



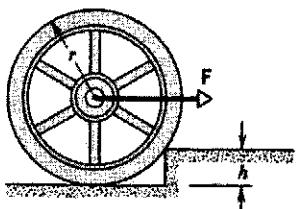
شکل ۲۱. مسئله ۸

۹. در شکل ۲۲ شخصی می خواهد اتومبیلی را که در کنار جاده در گل گیر کرده است، بیرون بکشد. سر طنابی را محکم به سیر جلو اتومبیل گره می زند و سر دیگر آن را به یک تیر تلفن که در فاصله 62 ft قرار دارد می بندد. سپس به وسط طناب یک نیروی $F = 120\text{ lb}$ را عمود بر طناب وارد می کند و مرکز طناب را به اندازه 5 ft از موقعیت پیشین جایه جا می کند:



شکل ۲۶. مسئله ۱۸

۱۹. برای اینکه جرخی از بله‌ای به ارتفاع h بالا برود، حداقل نیروی افقی، F ، که باید به آن وارد شود چقدر است (شکل ۲۷)؟ ساعت جرخ را t و وزن آن را W بگیرید.

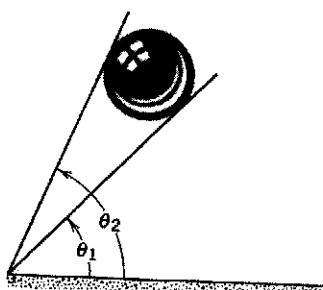


شکل ۲۷. مسئله ۱۹

۲۰. ترازوی تشکیل شده است از میله صلبی که می‌تواند حول نقطه‌ای که در مرکز میله واقع نیست دوران کند. این ترازو با قراردادن وزنهای نابرابر در کفه‌هایی که به دو انتهای میله متصل شده‌اند به حالت تعادل درمی‌آید. وقتی جسمی به جرم مجهول m را در کفة سمت چپ قرار می‌دهیم ترازو با وزنهای به جرم m_1 در کفة سمت راست راست متوازن می‌شود و اگر جرم m را در کفة سمت راست قرار بدیم ترازو با جرم m_2 در کفة سمت چپ متوازن می‌شود. نشان بدهید که

$$m = \sqrt{m_1 m_2}$$

۲۱. کره یکنواختی به وزن w بین دو سطح شیبدار با زوایای θ_1 و θ_2 (شکل ۲۸) در سکون است. (الف) فرض کنید هیچ اصطکاکی در کار نیست و اندازه و جهت نیروهایی را که سطوح شیبدار به کره وارد می‌کنند پیدا کنید. (ب) اگر اصطکاک را منظور می‌کردیم، چه تغییری حاصل می‌شد؟



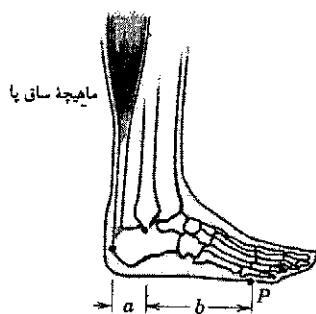
شکل ۲۸. مسئله ۲۱

۱۴. چوب‌متری روی نشانه 50°cm روی لبه کارهای متوازن شده است. اگر دو سکه روی نشانه 12°cm بچسبانیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که چوب‌متر روی نشانه 45°cm متوازن می‌شود. جرم هر سکه 50g است. جرم چوب‌متر چقدر است؟

۱۵. سه کارگر تیرآهنی را حمل می‌کنند. یکی از آنها یک سر تیر را در دست دارد و دو نفر دیگر دو سر تیرچه باریکی را که از زیر تیرآهن گذشته است گرفته‌اند. تیرچه عمود بر تیرآهن چنان قرار گرفته است که وزن تیرآهن به طور مساوی بین سه نفر تقسیم شده است. تیرچه در کجا ای تیرآهن واقع شده است؟ جرم تیرچه در مقایسه با جرم تیرآهن قابل اغماض است.

۱۶. یک نظافتچی به جرم 74kg از نردهبانی به جرم 10°kg و طول 12m استفاده می‌کند. پایه نردهبان را در فاصله 245m از دیوار می‌گذرد و سر بالایی آن را به شیشه ترک خورده‌ای تکیه می‌دهد و از نردهبان بالا می‌رود. وقتی 10°m از طول نردهبان را پیموده است شیشه می‌شکند. با چشمیویشی از اصطکاک بین نردهبان و شیشه و با این فرض که پایه نردهبان نلغزیده است، کمیهای زیر را معین کنید: (الف) نیروی وارد بر شیشه از نردهبان درست قبل از شکستن شیشه و (ب) مقدار و جهت نیرویی که درست قبل از شکستن شیشه از زمین به نردهبان وارد شده است.

۱۷. در شکل ۲۵ ساختمان ساق و کف پا را مشاهده می‌کنید. وقتی پاشنه از زمین جدا می‌شود، پا عملأ فقط در یک نقطه با زمین در تماس قرار می‌گیرد. این نقطه را در شکل با P مشخص کرده‌ایم. نیروهایی را که باید از ماهیچه و استخوانهای ساق به کف پا وارد شوند تا شخصی به جرم 65kg بتواند روی پنجه یک پا باشد محاسبه کنید. این نیروها را با وزن شخص مقایسه کنید. فرض کنید در این شکل $a = 5\text{cm}$ و $b = 15\text{cm}$.

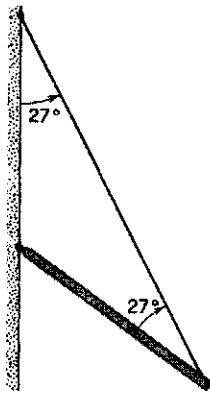


شکل ۲۵. مسئله ۲۵

۱۸. دو کره یکنواخت یکسان را که وزن هر کدام W است در نظر بگیرید. این کره‌ها در ته یک ظرف مکعب مستطیل شکل روی هم قرار گرفته‌اند (شکل ۲۶) و فرض کنید بین آنها اصطکاک وجود ندارد. خط واصل مرکز دو کره با امتداد افق زاویه θ می‌سازد. نیروهایی را که به هر یک از دو کره از (الف) کف ظرف، (ب) دیوارهای ظرف و (ج) کره دیگر وارد می‌شود، پیدا کنید.

از مرکز دریچه و به لولا نزدیکتر باشد، در این صورت (الف) چفت و (ب) لولا چه نیروهایی را باید تحمل کنند؟

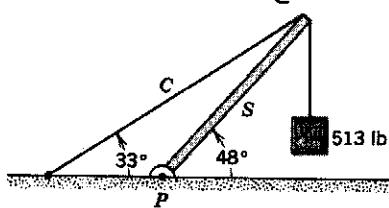
۲۵. یک سر یک تیرچه یکنواخت به وزن $lb 527$ و طول 3 ft به دیواری لولا شده است. سر دیگر این تیرچه توسط سیمی که هم با تیرچه و هم با دیوار زاویه 27° می‌سازد، نگه داشته شده است (شکل ۳۱). (الف) کشنی سیم را تعیین کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر لولا را به دست بیاورید.



شکل ۳۱. مسئله ۲۵

۲۶. جرم دری به ارتفاع 12 m و پهنای 9.07 m برابر با $kg 88$ است. این در بهوسیله دو لولا که در فاصله 29.4 m از بالا و از پایین در نصب شده‌اند نگه داشته شده است. هر یک از لولاهای نصف وزن در را تحمل می‌کند. فرض کنید که گرانیگاه در منطبق بر مرکز هندسی آن است. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهایی را که از در به هر یک از لولاهای وارد می‌شود محاسبه کنید.

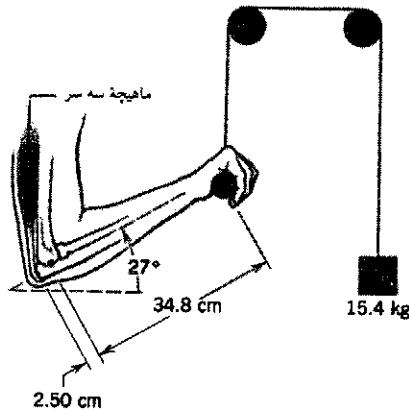
۲۷. سیستم شکل ۳۲ در حال تعادل است. وزن جسمی که از انتهای شمع S آویخته شده $lb 513$ و وزن خود شمع $lb 107$ است. (الف) کشنی کابل C را بپیدا کنید و (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی را که از تکیه‌گاه P به شمع وارد می‌شود محاسبه کنید.



شکل ۳۲. مسئله ۲۷

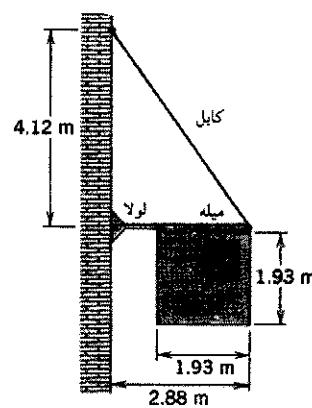
۲۸. میله غیریکنواختی به وزن W توسط دو نخ بی‌وزن آویخته شده است؛ شکل ۳۳. میله در حالت افقی و در حال سکون است. زاویه‌ای که یکی از نخها با امتداد قائم می‌سازد برابر با θ و زاویه نخ دیگر با امتداد قائم برابر با ϕ است. طول میله L است. فاصله گرانیگاه میله از انتهای سمت چوب آن، x ، چقدر است؟

۲۹. جسمی به جرم $kg 154$ بهوسیله سیستم قرقه‌های شکل ۲۹ به سمت بالا کشیده می‌شود. بازو در حالت قائم است و ساعد با افق زاویه 27° می‌سازد. چه نیروهایی از طرف (الف) ماهیچه سه سر بازو و (ب) استخوان قلم بازو به ساعد وارد می‌شود؟ فرض کنید جرم ساعد و دست روی هم برابر با $kg 2$ است و مرکز جرم آن در فاصله $cm 147$ از نقطه تماس دو استخوان در ساعد واقع شده است. ماهیچه سه سر نیروی قائمی به طرف بالا در فاصله $cm 50$ از محل تماس دو استخوان (نگاه کنید به شکل) به ساعد وارد می‌کند.



شکل ۲۹. مسئله ۲۹

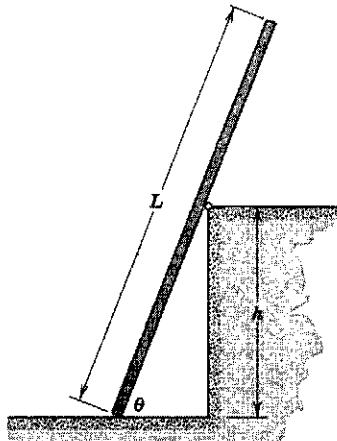
۳۰. در شکل ۳۰ یک تابلوی تبلیغاتی مربع شکل یکنواخت به جرم $kg 523$ و به ضلع $m 9.3$ ، از میله‌ای به طول $m 2.88$ و با جرم قابل چشمیویشی آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به نقطه روی دیوار در فاصله $m 12$ از نقطه اتصال میله به دیوار وصل کرده است. (الف) کشنی کابل را حساب کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از دیوار را حساب کنید.



شکل ۳۰. مسئله ۳۰

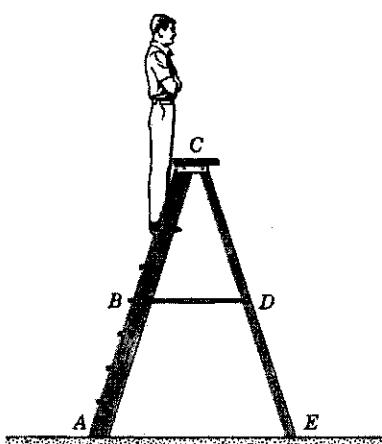
۳۱. دریچه‌ای به شکل مربع به ضلع $ft 3$ (مساوی با $m 9.1$) در سقف کار گذاشته شده است. این دریچه که $lb 251$ وزن ($kg 11$) دارد از یک طرف لولا شده است و در سمت مقابل دارای یک چفت است. اگر گرانیگاه این دریچه در فاصله $in 4$ (یعنی $cm 10$) از

۳۲. یک سر الواری به وزن 274 N و طول 23 m روی زمین قرار گرفته است. این الوار را به غلتک بدون اصطکاکی که روی یک دیوار در ارتفاع $h = 2.87\text{ m}$ نصب شده است تکیه داده ایم (شکل ۳۶). گرانیگاه الوار در مرکز هندسی آن قرار دارد. این جسم به ازای تمام زوایای $68.0^\circ \geq \theta \geq 68.0^\circ < \theta$ متعادل باقی می‌ماند، ولی اگر ایستایی بین تخته و زمین را تعیین کنید.

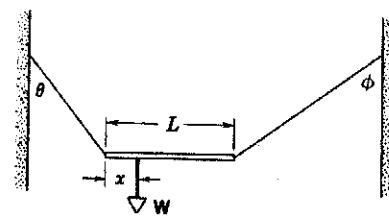


شکل ۳۶. مسئله ۲۲

۳۳. در نزدبان دوطرفه شکل ۳۷ طول هر یک از دو شاخه AC و CE برابر با 8.0 ft است. این دو قسمت در نقطه C به هم لولا شده‌اند. طول میله نگهدارنده BD که وسط دو شاخه را بهم وصل می‌کند برابر با 2.5 ft است. شخصی به وزن 192 lb روی نزدبان CE بالا می‌رود. با فرض اینکه زمین بدون اصطکاک باشد، و از وزن نزدبان هم بتوانیم چشمپوشی کنیم، کمیتهای زیر را پیدا کنید: (الف) کشش در میله نگهدارنده و (ب) نیروهای وارد بر نزدبان از طرف زمین. (راهنمایی: بهتر است هر یک از دو جزء نزدبان را منزوی کنید و بعد شرایط تعادل را روی هر کدام اعمال کنید.)

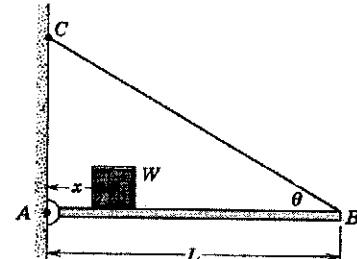


شکل ۳۷. مسئله ۳۳



شکل ۳۸. مسئله ۲۸

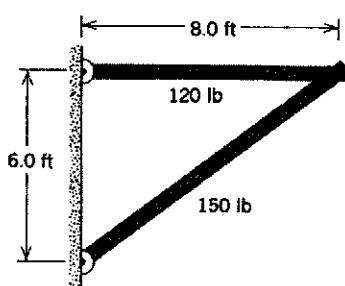
۳۹. میله نازک افقی AB به طول L از سر A به دیوار قائمی لولا شده و سر B آن توسط سیم نازک که با افق زاویه θ می‌سازد به دیوار متصل شده است. وزن میله قابل چشمپوشی است. فرض کنید وزنه W را می‌توان هر جایی روی این سمه چسباند؛ مکان وزنه، با فاصله آن از دیوار، یعنی x ، مشخص می‌شود (شکل ۳۴). (الف) کشش سیم، T ، را به صورت تابعی از x پیدا کنید. مؤلفه‌های (ب) افقی و (ج) قائم نیروی وارد بر سمه از لولا را محاسبه کنید.



شکل ۳۹ و ۴۰. مسئله ۲۹ و ۳۰

۴۰. در شکل ۳۴، طول میله (L) برابر با 2.76 m ، وزن آن w برابر با 194 N است. همچنین، $W = 315\text{ N}$ و $\theta = 32.0^\circ$ است. حداکثر کششی که سیم می‌تواند تحمل کند 520 N است. (الف) بیشترین فاصله وزنه از دیوار، x ، قبل از اینکه سیم پاره شود، چقدر است؟ (ب) وقتی W در بیشترین فاصله قرار گرفت، مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از لولا چقدر است؟

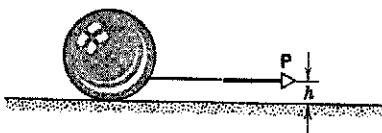
۴۱. در شکل ۳۵ دو تیرک یکنواخت هر کدام از یک سر به دیواری لولا شده‌اند. سرهای آزاد این دو تیرک با پیچ و مهره به هم وصل‌اند. مؤلفه‌های افقی و قائم (الف) نیروی وارد بر لولا. (ب) نیروی وارد بر هر تیرک از پیچ و مهره را حساب کنید.



شکل ۳۵. مسئله ۳۱

آجرهای یکنواختی را چنان روی هم قرار بدهیم که (بدون فروریختن) بیشترین پیش آمدگی را داشته باشد. این خواسته به این ترتیب عملی می شود که گرانیگاه آجر بالایی درست روی لبه آجر زیری اش قرار بگیرد، گرانیگاه مجموعه دو آجر بالایی هم درست روی لبه سومین آجر از بالا قرار بگیرد، و به همین ترتیب تا آخر. (الف) این معیار بیشترین پیش آمدگی را توجیه کنید؛ و بیشترین پیش آمدگی را برای یک مجموعه چهار آجری تعیین کنید. (ب) نشان بدهید که با ادامه این کار می توان به هر اندازه دلخواهی پیش برآمدگی داشت. (مارتنین گاردنر در مقاله‌ای درباره این موضوع می‌گوید: "با یک دسته کارت شامل ۵۲ برگ" که اولین آنها روی میزی درست مماس بر لبه میز قرار داشته باشد، می‌توانند پیش آمدگی ای بسازید که به اندازه کمی بیشتر از $\frac{1}{4}$ برابر طول یک کارت از لبه میز جلو آمده باشد). (ج) حالا، فرض کنید آجرهای یکنواخت را چنان روی هم می‌چینیم که انتهای هر یک به اندازه کسر ثابت $1/n$ طول آجر (L) از آجر زیری اش جلوتر آمده باشد. به این ترتیب، قبل از فروریختن ساختار چه تعداد آجر (N) می‌توانیم روی هم بچینیم؟ معقول بودن پاسخی را که پیدا کرده‌اید در مورد $1/n = 2$ ، $n = \infty$ ، $n = 1$ برسی کنید.

۳۸. در شکل ۴۰ کره همگنی به شعاع r و به وزن W ، تحت تأثیر نیروی افقی ثابت P که به ریسمان متصل به کره وارد می‌شود می‌لغزد. (الف) نشان بدهید که اگر ضربی اصطکاک جنبشی بین کره و زمین m باشد، ارتفاع h از رابطه $h = r(1 - \mu W/P)$ به دست می‌آید. (ب) نشان بدهید که کره در چنین شرایطی در تعادل انتقالی نیست. آیا نقطه‌ای وجود دارد که حول آن کره در تعادل دورانی باشد؟ (ج) آیا می‌توان با انتخاب مقدار متفاوتی برای h کره را هم در تعادل دورانی و هم در تعادل انتقالی نگه داشت؟ با انتخاب جهت متفاوتی برای P چطور؛ پاسخهای خودتان را توضیح بدهید.



شکل ۴۰. مسئله ۳۸

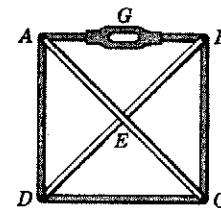
بخش ۴-۱۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

۳۹. جامی با شعاع انحنای r روی یک میز افقی قرار گرفته است. نشان بدهید که این جام فقط در صورتی در تعادل پایدار حول نقطه مرکز انحنایش خواهد بود که ارتفاع مرکز جرم ماده انباسته شده در جام نسبت به مرکز جام از r بیشتر نباشد.

۱. نگاه کنید به

Scientific American, November 1964, p. 128.

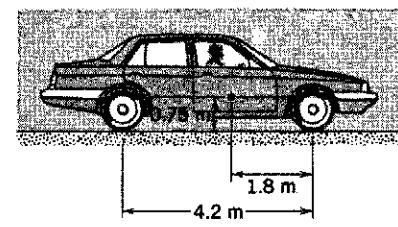
۳۴. به کمک سگک پیچشی G ، در میله AB از کلاف مربعی $ABCD$ در شکل ۳۸، کشش T را ایجاد کرده‌ایم. نیروهای ایجاد شده در سایر شاخه‌های کلاف را تعیین کنید. قطرهای AC و BD بدون درگیری با هم، در نقطه E یکدیگر را قطع می‌کنند. ملاحظات مربوط به تقارن ممکن است این مسئله و مسائل مشابه را تا حد زیادی ساده‌تر کند.



شکل ۳۸. مسئله ۳۴

۳۵. یک جعبه مکعب شکل که با مasse پر شده است 892N وزن دارد. می‌خواهیم این جعبه را با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از لبه‌های بالای آن "بلغلتانیم". (الف) کمترین نیروی لازم چقدر است؟ (ب) ضربی اصطکاک ایستایی دستکم باید چقدر باشد؟ (ج) آیا راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد؟ اگر وجود دارد، کمترین نیرویی که به این منظور باید مستقیماً به جعبه وارد شود چقدر است؟

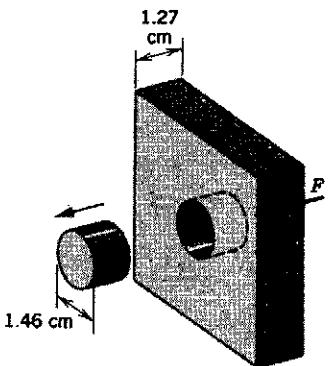
۳۶. اتومبیلی که در یک جاده افقی در حرکت است ناگزیر از یک توقف اضطراری می‌شود. راننده طوری ترمز می‌گیرد که تمام چرخها قفل می‌شوند و اتومبیل می‌لغزد. ضربی اصطکاک جنبشی بین لاستیک و جاده 40 m است. فاصله بین محور جلو و محور عقب 2.0 m است. مرکز جرم اتومبیل در فاصله 1.8 m از محور جلو و 2.5 m بالاتر از سطح جاده است (شکل ۳۹). وزن اتومبیل با راننده اش مجموعاً 11.0kN است. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) شتاب کندکننده ناشی از ترمز، (ب) نیروی قائم وارد بر هر یک از چرخهای جلو و عقب و (ج) نیروی وارد از ترمز به هر کدام از چرخهای جلو و عقب. (راهنمایی: اتومبیل با آنکه در تعادل انتقالی نیست، در تعادل دورانی هست).



شکل ۳۹. مسئله ۳۶

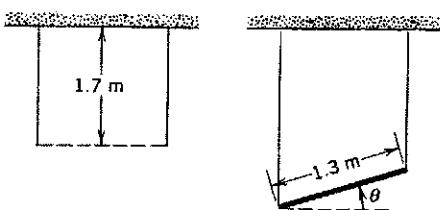
۳۷. این مسئله یکی از مسائل مشهور تعادل است^۱ می‌خواهیم

۴۵. مکعبی به ضلع a با چگالی یکنواخت روی یک سطح استوانه‌ای به شعاع r در حال تعادل است (شکل ۴۱). نشان بدهید که شرط تعادل پایدار برای مکعب، با فرض اینکه اصطکاک برای جلوگیری از لغزنی کافی باشد، این است که $\frac{a}{2} > r$ باشد.



شكل ٤٣. مسالة ٤٥

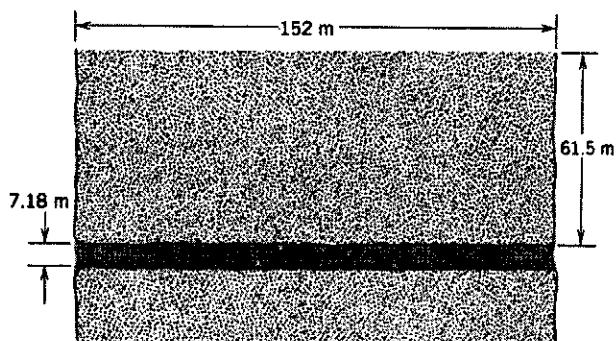
۴۶. در شکل ۴۶ میله یکنواختی به جرم ۷۷kg و طول ۳m را توسط دو سیم از دو انتهایش آویزان شده است. یکی از سیمهای فولادی و قطر آن ۲mm است؛ سیم دیگر الومینیمی و قطر آن ۴mm را است. قبل از آویختن میله، طول سیمهای با هم یکی و برابر با ۷m را تعیین کنید. (از تغییر قطر زاویه بین میله و امتداد افق، θ ، را تعیین کنید.)



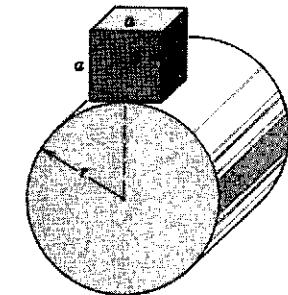
شكل ٤٤. مسئلة

۴۷. پرۀ چرخانه‌ای به طول ۲۷m از موادی به چگالی 455g/cm^3 و استقامت کششی نهایی 446MN/m^2 ساخته شده است. بیشترین سرعت دورانی ممکن برای این پره چقدر است؟ فرض کنید دوران حول محوری، عدمدیره که از یک انتهای آن می‌گذرد انعام می‌شود.

۴۸ می خواهیم تونلی به طول ۱۰۲m، ارتفاع ۱۸m، و عرض ۷m (با سقف تخت) در فاصله ۵۱m را پایین تر از سطح زمین بسازیم (شکل ۴۵). سقف این تونل قرار است که روی ستونهای

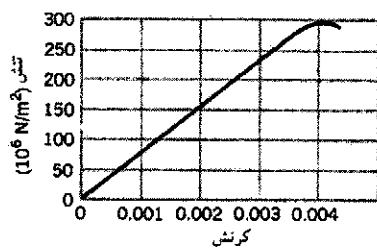


شکا، ۴۵، مسئله ۴۸



شكل ٤١. مسئلة ٤٠

۴۱. شکل ۴۲ منحنی تشن-کرنش را برای سنگ شیشه نشان می‌دهد.
۴۲. مدول یانگ را برای این ماده محاسبه کنید.



٤٢. مسئلة ٤١.

۴۲. در یک حادثه سقوط، صخره‌نوردی به جرم ۹۵kg از انتهای طنابی به طول ۱۵m و قطر ۶mm آویزان می‌ماند. اگر طناب به اندازه ۲,۸cm افزایش طول پیدا کند، مدول یانگ برای آن چقدر است؟

۴۳. یک اتاقک بالابر از یک کابل فولادی به قطر ۲,۵cm آویزان است. جرم کل اتاقک و مسافرانش ۸۷۳kg است. وقتی اتاقک ۴۲,۶m پایین‌تر از موتور بالابر واقع شده باشد، افزایش طول کابل چقدر است؟ (جرم کابل را (در مقایسه با اتاقک) ناچیز فرض کن)

۴۴. یک دیک آلومینیمی افقی به قطر $cm\ 48$ به اندازه $cm\ 5$ از دیواری بیرون آمده است. وزنهای به جرم $kg\ 120$ از انتهای این دیک آویزان است. مدول برشی آلومینیم $N/m^2\ 10^{10}$ است.
 (الف) تنش برشی وارد بر دیک را محاسبه کنید. (ب) انحراف قائم انتهای دیک را تعیین کنند.

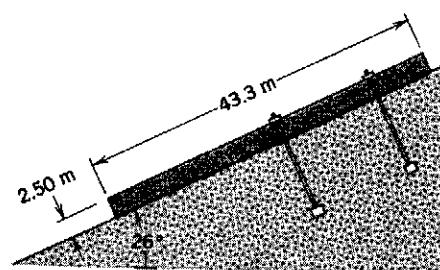
۴۵. برای ایجاد سوراخی به قطر 46 cm را در یک ورق فولادی به ضخات 27 cm را چه نیروی لازم است (شکل ۴۳)؟ استقامت برشی نهایی فولاد 345 MN/m^2 است.

است؟ (ج) جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) را مقایسه کنید تا بینید که تخته سنگ بدجوری در معرض لغزش است. تنها همچسبی بین تخته سنگ و سطح شیدار مانع لغزیدن می‌شود. می‌خواهیم تخته سنگ را با میخهای که عمود بر سطح شیدار در آن فرو می‌ورد "پابرجا" کنیم، طوری که بدون اتکا با به همچسبی نیز در تعادل پایدار باشد. اگر سطح مقطع هر کدام از پیچهای مخصوص سنگ 638cm^3 و استقامت برشی آنها 362MN/m^3 باشد، دستکم به چند پیچ نیاز داریم؟ (پیچها سفت نمی‌شوند و بنابراین تأثیری بر نیروهای قائم نمی‌گذارند).

۵۰. میله‌ای فلزی به طول L و سطح مقطع A را که فاصله اتمهایش در حالت تعادل x است و مدول یانگ برای آن E است در نظر بگیرید. وقتی نیروی کششی F به میله وارد می‌شود، طول میله به اندازه ΔL زیاد می‌شود. برای محاسبه ثابت نیروی اتمی (k)، عباراتی برای (الف) تعداد زنجیرهای اتمی در هر سطح مقطع، (ب) تعداد اتمهای موجود در زنجیرهای به طول L ، (ج) افزایش طول میکروسکوبی Δx بین اتمها و (د) نیروی کششی f بین اتمها، بدست بیاورید. (ه) نیرو را به صورت $f = k\Delta x$ بتوانیسید و نشان بدھید که $k = Ex$ است. (و) مقدار k را برای یک فلز نوعی که برای آن $E = 24\text{GN/m}^2$ و $A = 16\text{nm}^2$ است، محاسبه کنید.

فولادی مربعی با سطح مقطع 962cm^2 تکه کنید. چگالی مواد تشکیل دهنده زمین 2.83g/cm^3 است. (الف) حساب کنید که این ستونها باید چه وزنی را تحمل کنند. (ب) اگر بخواهیم ضریب ایمنی در برابر شکستگی برابر با ۲ باشد، به چه تعداد ستون نیاز داریم؟

۴۹. تخته سنگ مکعب مستطیل شکلی روی یک سطح شیدار 26m^2 قرار گرفته است (شکل ۴۶). ابعاد این تخته سنگ عبارت اند از 43.3m طول، 25.0m عرض و 12.2m ضخامت. چگالی سنگ 17g/cm^3 است. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته سنگ و سطح زیر آن 0.39 است. (الف) مؤلفه وزن تخته سنگ در راستای سطح شیدار چقدر است؟ (ب) نیروی اصطکاک ایستایی چقدر



شکل ۴۶. مسئله ۴۹

پیوست الف

سیستم بین‌المللی یکاهای^۱ (SI)

یکاهای اصلی SI

کمیت	یکا	نحو	تعریف
طول	m	متر	" ... طول مسیری که نور آن را در خلا در $\frac{1}{299792458}$ ثانیه طی می‌کند." (۱۹۸۳)
جرم	kg	کیلوگرم	" ... این نمونه [استوانه خاصی از جنس پلاتین-ایریدیم] از این پس به عنوان یکای جرم در نظر گرفته می‌شود." (۱۸۸۹)
زمان	s	ثانیه	" ... مدتی برابر با 992621770 دوره تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایه اتم سریوم ۱۳۳ ". (۱۹۶۷)
جريان الکتریکی	A	آمپر	" ... جریان ثابتی که اگر در دو سیم راست به طول نامحدود و سطح مقطع دایره‌ای ناجیز که بفاصله یک متر موازی با یکدیگر در خلا واقع شده‌اند برقرار باشد، نیرویی برابر با 2×10^{-7} نیوتون به‌ازای هر متر از طول سیمها میان آنها ایجاد کند." (۱۹۴۶)
دماهی ترمودینامیکی	K	کلوین	" ... دمای مطلق نقطه سه‌گانه آب." (۱۹۶۷)
مقدار ماده	mol	مول	" ... مقدار ماده موجود در هر سیستمی که تعداد اجزای بنیادی آن برابر با تعداد اتمهای موجود در 12°R کیلوگرم از کربن ۱۲ باشد." (۱۹۷۱)
شدت روشنایی	cd	شمع	" ... شدت روشنایی ناشی از تابش عمودی سطحی برابر با $\frac{1}{\pi}$ مترمربع از جسم سیاهی در دمای ذوب پلاتین و فشار 10^{1325} نیوتون بر مترمربع." (۱۹۶۷)

^۱) این تعریفها (در تاریخهای پاد شده) در "کنفرانس عومی اوتونومی" تأثیر شده است. برگرفته از Ramin Samad@yahoo.com

یکای معادل	نام	یکا	کمیت
	m^2	مترمربع	سطح
	m^3	مترمکعب	حجم
s^{-1}	Hz	هرتز	بسامد
	kg/m^3	کیلوگرم بر مترمکعب	چگالی (جرمی)
	m/s	متر بر ثانیه	سرعت
	rad/s	رادیان بر ثانیه	سرعت زاویه‌ای
	m/s^2	متر بر مجدور ثانیه	شتاب
	rad/s^2	رادیان بر مجدور ثانیه	شتاب زاویه‌ای
$kg \cdot m/s^2$	N	نیوتن	نیرو
N/m^2	Pa	پاسکال	فشار
$N \cdot m$	J	ژول	کار، انرژی
J/s	W	وات	توان
$A \cdot s$	C	کولن	مقدار الکتریسیته
$N \cdot m/C$	V	ولت	اختلاف پتانسیل
N/C	V/m	ولت بر متر	میدان الکتریکی
V/A	Ω	اهم	مقاومت الکتریکی
$A \cdot s/V$	F	فاراد	ظرفیت
$V \cdot s$	Wb	وب	شار مغناطیسی
$V \cdot s/A$	H	هانزی	القا
$Wb/m^2, N/A \cdot m$	T	تسلا	میدان مغناطیسی
	J/K	ژول بر کلوین	آنتروپی
	$J/(kg \cdot K)$	ژول بر کیلوگرم کلوین	ظرفیت گرمایی ویره
	$W/(m \cdot K)$	وات بر متر کلوین	رسانایی گرمایی
	W/sr	وات بر استرadian	شدت تاش

یکاهای مکمل SI

نام	یکا	کمیت
rad	رادیان	زاویه
sr	استرadian	زاویه فضایی

پیوست ب

بعضی ثابت‌های بنیادی فیزیک

بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶)		نماد	ثابت
عدم قطعیت ^۲	مقدار ^۱		
قریباً صفر ^۰	۲,۹۹۷۹۲۴۵۸	$۳,۰۰ \times 10^8 \text{ m/s}$	سرعت نور در خلا
۰,۳۰	۱,۶۰۲۱۷۷۲۳	$۱,۶۰ \times 10^{-۱۱} \text{ C}$	بار بنیادی
۰,۵۹	۹,۱۰۹۳۸۹۷	$۹,۱۱ \times 10^{-۳۱} \text{ kg}$	جرم سکون الکترون
قریباً صفر	۸,۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	$۸,۸۵ \times 10^{-۱۲} \text{ F/m}$	ثابت گذردهی
قریباً صفر ^۰	۱,۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	$۱,۲۶ \times 10^{-۸} \text{ H/m}$	ثابت تراویی
۰,۲۳	۵,۴۸۵۷۹۹۰۲	$۵,۴۹ \times 10^{-۴} \text{ u}$	جرم سکون الکترون ^۳
۰,۱۴	۱,۰۰۸۶۶۴۹۰۴	$۱,۰۰ \text{ eV u}$	جرم سکون نوترون ^۳
۰,۱۱	۱,۰۰۷۸۲۵۰۳۵	$۱,۰۰ \text{ eV u}$	جرم سکون اتم هیدروژن ^۳
۰,۱۲	۲,۰۱۴۱۰۱۷۷۹	$۲,۰۱۴۱ \text{ u}$	جرم سکون اتم دوتریم ^۳
۰,۱۲	۴,۰۰۲۶۰۳۲۴	$۴,۰۰ \text{ eV u}$	جرم سکون اتم هلیم ^۳
۰,۳۰	۱,۷۵۸۸۱۹۶۲	$۱,۷۶ \times 10^{۱۱} \text{ C/kg}$	نسبت بار به جرم الکترون
۰,۵۹	۱,۶۷۲۶۲۲۳۱	$۱,۶۷ \times 10^{-۲۷} \text{ kg}$	جرم سکون پروتون
۰,۲۰	۱۸۳۶,۱۵۲۷۰۱	۱۸۴۰	نسبت جرم پروتون به جرم الکترون
۰,۵۹	۱,۶۷۴۹۲۸۶	$۱,۶۷ \times 10^{-۲۷} \text{ kg}$	جرم سکون نوترون
۰,۶۱	۱,۸۸۳۵۲۲۷	$۱,۸۸ \times 10^{-۲۸} \text{ kg}$	جرم سکون موون
۰,۶۰	۶,۶۲۶۰۷۵۵	$۶,۶۳ \times 10^{-۳۲} \text{ J · s}$	ثابت پلانک
۰,۸۹	۲,۴۲۶۳۱۰۵۸	$۲,۴۳ \times 10^{-۱۲} \text{ m}$	طول موج کامپتوئی الکترون
۰,۴	۸,۳۱۴۵۱۰	$۸,۳۱ \text{ J/mol.K}$	ثابت عمومی گازها
۰,۵۹	۶,۰۲۲۱۳۶۷	$۶,۰ \times 10^{-۲۳} \text{ mol}^{-۱}$	ثابت آووگادرو

ثابت	ناماد	مقدار محاسباتی	مقدار	عدم تعطیت
ثابت بولترمن	k	$۱,۳۸ \times ۱۰^{-۲۳} \text{J/K}$	۱,۳۸۰۶۵۱۳	۱,۳۸
حجم مولی گاز ایده‌آل در شرایط متعارفی	V_m	$۲,۲۴ \times ۱۰^{-۲} \text{m}^۳/\text{mol}$	۲,۲۴۱۳۹۹۲	۲,۲۴
ثابت فاراده	F	$۹,۶۵ \times ۱۰^{-۴} \text{C/mol}$	۹,۶۴۸۵۳۰۹	۹,۶۵
ثابت استفان-بولترمن	σ	$۵,۶۷ \times ۱۰^{-۸} \text{W/m}^۲.\text{K}^۴$	۵,۶۷۰۳۹۹	۵,۶۷
ثابت ریدبرگ	R	$۱,۱۰ \times ۱۰^۷ \text{m}^{-۱}$	۱,۰۹۷۳۷۳۱۵۷۱	۱,۰۹۰۰۰۳۶
ثابت گرانش	G	$۶,۶۷۲۵۹ \times ۱۰^{-۱۱} \text{m}^۳/\text{s}^۲.\text{kg}$	۶,۶۷۲۵۹	۶,۶۷
شعاع بور	a_0	$۵,۲۹ \times ۱۰^{-۱۱} \text{m}$	۵,۲۹۱۷۷۲۴۹	۵,۲۹
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	$۹,۲۸ \times ۱۰^{-۲۴} \text{J/T}$	۹,۲۸۴۷۷۰	۹,۲۸
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	$۱,۴۱ \times ۱۰^{-۲۹} \text{J/T}$	۱,۴۱۰۶۰۷۶۱	۱,۴۱
مگتون بور	μ_B	$۹,۲۷ \times ۱۰^{-۲۹} \text{J/T}$	۹,۲۷۴۰۱۵۴	۹,۲۷
مگتون هسته	μ_N	$۵,۰۵ \times ۱۰^{-۲۷} \text{J/T}$	۵,۰۵۰۷۸۶۵	۵,۰۵
ثابت ساختار ریز	α	$۱/۱۳۷$	۱/۱۳۷۰۳۵۹۸۹۵	۱/۱۳۷
کوانتم شار مغناطیسی	Φ_0	$۲,۰۷ \times ۱۰^{-۱۵} \text{Wb}$	۲,۰۶۷۸۳۴۶۱	۲,۰۷
مقاومت هال کوانتیده	R_H	$۲۵۸۱۲,۸۰۵۶$	۲۵۸۰۰Ω	۲۵۸۱۲,۸۰۵۶

(۱) با همان یکا و همان توان ده مقدار محاسباتی.

(۲) قسمت در میلیون.

(۳) جرم بر حسب یکای اتنی جرم، $۱,۱۱ = ۹,۶۶۰۵۴۰۲ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$.

(۴) شرایط متعارفی (دما و فشار استاندارد)= دمای صفر درجه سلسیوس و فشار ۰۱ بار.

پیوست ج

اطلاعات نجومی

خورشید و زمین و ماه

ماه	زمین	خورشید ^۱	ویرگی
7.36×10^{22}	5.98×10^{22}	1.99×10^{20}	جرم (kg)
1.74×10^6	6.37×10^6	6.96×10^8	شعاع متوسط (m)
۳۳۴۰	۵۵۲۰	۱۴۱۰	چگالی متوسط (kg/m^3)
۱۶۷	۹,۸۱	۲۷۴	شتاب نقل در سطح (m/s^2)
۲۳۸	۱۱۲	۶۱۸	سرعت گریز (km/s)
۲۷۳	۰.۹۹۷	۲۳۷ ۶ ۲۶	دوره تناوب ^۲ چرخش (d)
6.382×10^5	5.150×10^8	4.26×10^{17}	شعاع متوسط مدار (km)
۲۷۳ روز ^۳	۵۰ را	4×10^8 سال ^۴	دوره تناوب مداری

۱) توان تابشی خورشید $W/m^2 = 1.38 \times 10^{26}$ است؛ با فرض تابش عمودی، انرژی خورشید با آهنگ $T = 1380^\circ \text{K}$ به بالای جو زمین می‌رسد.

۲) نسبت به ستاره‌های دور

۳) خورشید که کره‌ای از گاز است— مثل جسم صلب نمی‌چرخد؛ دوره چرخش آن در استوایش ۲۶ روز و در قطبهاش ۳۷ روز است.

۴) حول مرکز کهکشان.

۵) حول خورشید.

۶) حول زمین.

خصوصیات سیاره‌های منظومه شمسی

پلوتون	نپتون	ارانوس	زحل	مشتری	مریخ	زمین	زهره	طارد	
۵۹۰۰	۴۰۰۰	۲۸۷°	۱۴۳°	۷۷۸	۲۲۸	۱۵۰	۱۰۸	۵۷,۹	فاصله متوسط از خورشید (10^6 km)
۲۴۸	۱۶۵	۸۴,۰°	۲۹,۵	۱۱,۹	۱,۸۸	۱,۰۰	۰,۶۱۵	۰,۲۴۱	دوره گردش به دور خورشید (سال)
۶,۳۹	۰,۶۵۸	۰,۴۵۱°	۰,۴۲۶	۰,۴۰۹	۰,۰۳	۰,۹۹۷	۰,۲۴۳	۰,۵۸۷	دوره چرخش ^۱ (روز)
۴,۷۴	۰,۴۲۳	۶,۸۱	۹,۶۴	۱۳,۱	۲۴,۱	۲۹,۸	۳۵,۰	۴۷,۹	سرعت مداری (km/s)
۶۵°	۲۸,۸°	۸۲,۱°	۲۶,۷°	۳,۰۸°	۲۴,۰°	۲۳,۵°	۲,۶۰	۰,۰۰	تمایل محور به مدار
۱۷,۲۰	۱,۷۷°	۰,۷۷°	۲,۴۹°	۱,۳۰°	۱,۸۵°	—	۳,۳۹°	۷,۰۰°	تمایل مدار به مدار زمین
۰,۲۵۰	۰,۰۰۰۸۶	۰,۰۴۷۲	۰,۰۵۵۶	۰,۰۴۸۵	۰,۰۹۳۴	۰,۰۱۶۷	۰,۰۰۰۶۸	۰,۲۰۶	خروج از مرکز مدار
۳۴۰۰	۴۹۵۰۰	۵۱۸۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۲۳۰۰۰	۶۷۹۰	۱۲۸۰۰	۱۲۱۰۰	۴۸۸۰	قطر استوایی (km)
۰,۰۰۰۲	۱۷,۲	۱۴,۵	۹۰,۱	۳۱۸	۰,۱۰۷	۱,۰۰۰	۰,۸۱۵	۰,۰۵۵۸	جرم (نسبت به زمین = ۱)
۰,۵(?)	۱,۶۷	۱,۲۱	۰,۷۰۴	۱,۳۱	۳,۹۵	۰,۵۲	۰,۲۰	۰,۵۶	چگالی متوسط (g/cm^3)
۰,۳	۱۱,۰	۷,۷۷	۹,۰۵	۲۲,۹	۳,۷۲	۹,۷۸	۸,۶۰	۳,۷۸	شتاب نقل در سطح ^۲ (m/s^2)
۱,۳	۲۳,۶	۲۱,۲	۳۵,۶	۰,۹۵	۰,۰	۱۱,۲	۱۰,۳	۴,۳	سرعت گردی (km/s)
۱			۱۵+حلقه‌ها	۱۶+حلقه‌ها	۲	۱	۰	۰	تعداد قمرهای شناخته شده

^۱ نسبت به ستاره‌های دور.^۲ جهت چرخش در خلاف جهت گردش مداری است.^۳ در استوای سیاره.

پیوست د

خواص عناصر

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm³) در ۲۰°C	نقطه ذوب (°C)	نقطه جوش (°C)	گرمای ویره (J/g°C) در ۲۵°C
آکتینیم	Actinium	Ac	۸۹	(۲۲۷)	—	—	۱۰۵۰	۳۴۰۰
آلومینیم	Aluminium	Al	۱۳	۲۶,۹۸۱۵	۲,۶۹۹	۶۶۰	۲۴۶۷	۰,۹۰۰
آمریکیم	Americium	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳,۷	۹۹۴	۲۶۰۷	—
آنتیموان	Antimony	Sb	۵۱	۱۲۱,۷۵	۸,۶۹	۶۳۰,۵	۱۷۵۰	۰,۲۰۵
آرگون	Argon	Ar	۱۸	۳۹,۹۴۸	$۱,۶۶۲۶ \times 10^{-۳}$	-۱۸۵,۷	-۱۸۹,۲	۰,۵۲۳
آرسنیک	Arsenic	As	۳۳	۷۶,۹۲۱۶	۵,۷۲	۸۱۷(۲۸)	۶۱۳	۰,۳۳۱
استاتین	Astatine	At	۸۵	(۲۱۰)	—	۳۰۲	۲۳۷	—
باریم	Barium	Ba	۵۶	۱۳۷,۳۳	۳,۵	۷۲۵	۱۶۴۰	۰,۲۰۵
برکلیم	Berkelium	Bk	۹۷	(۲۴۷)	—	—	—	—
بریلیم	Beryllium	Be	۴	۹,۰۱۲۲	۱,۸۴۸	۱۲,۷۸	۲۹۷۰	۱,۸۳
بیسموت	Bismuth	Bi	۸۳	۲۰,۸۹۸۰	۹,۷۵	۲۷۱,۳	۱۵۶۰	۰,۱۲۲
بور	Boron	B	۵	۱۰,۸۱۱	۲,۳۴	۲۰,۷۹	۲۵۰۰	۱,۱۱
برم	Bromine	Br	۳۵	۷۹,۹۰۹	۲۱۲(مایع)	-۷,۲	۵۸	۰,۲۹۳
کادمیم	Cadmium	Cd	۴۸	۱۱۲,۴۱	۸,۶۵	۳۲۰,۹	۷۶۰	۰,۲۲۶
کلسیم	Calcium	Ca	۲۰	۴۰,۰۸	۱,۰۵	۸۳۹	۱۴۸۴	۰,۶۲۴
کالیفرنیم	Californium	Cf	۹۸	(۲۰۱)	—	—	—	—
کربن	Carbon	C	۶	۱۲,۰۱۱	۲,۲۵	۳۵۰	—	۰,۶۹۱
سریم	Cerium	Ce	۵۸	۱۴۰,۱۲	۶,۷۶۸	۷۹۸	۳۴۴۳	۰,۱۸۸
سزیم	Cesium	Cs	۵۵	۱۳۲,۹۰۵	۱,۸۷۳	۲۸,۴۰	۶,۶۹	۰,۲۴۳
کلر	Chlorine	Cl	۱۷	$۳۵,۴۵۳ \times 10^{-۳} (\text{°C})$	$۲,۲۱۴ \times 10^{-۳} (\text{°C})$	-۱۰۱	-۲۴,۶	۰,۴۸۶
کرم	Chromium	Cr	۲۴	۵۱,۹۹۶	۷,۱۹	۱۸۵۷	۲۶۷۲	۰,۴۴۸
کبات	Cobalt	Co	۲۷	۵۸,۹۳۳۲	۸,۸۵	۱۴۹۰	۲۸۷۰	۰,۴۲۳
مس	Copper	Cu	۲۹	۶۳,۵۴	۸,۹۶	۱۰۸۳,۴	۲۵۶۷	۰,۳۸۵

عنصر	نام	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm³)	نقطه ذوب (°C)	نقطه جوش (°C)	(J/g°C)
کوریم	Curium	٩٦	(٢٤٧)	—	١٣٤٠	—	٢٥(٠°C)
دیسپروزیم	Dysprosium	٦٦	١٦٢,٥٠	٨,٥٥	١٤١٢	٢٥٦٧	٠,١٧٢
اینشتینیم	Einsteinium	٩٩	(٢٥٢)	—	—	—	—
اریم	Erbium	٦٨	١٦٧,٢٦	٩,٠٧	١٥٢٩	٢٨٦٨	٠,١٦٧
ارویم	Europium	٦٣	١٥١,٩٦	٥,٢٤٥	٨٢٢	١٥٢٧	٠,١٦٣
فرمیم	Fermium	١٠٠	(٢٥٧)	—	—	—	—
فلوئور	Fluorine	٩	١٨,٩٩٨٤	$١,٦٩٦ \times 10^{-٢}$ (°C)	-٢١٩,٦	-١٨٨,٢	٠,٢٥٣
فرانسیم	Francium	٨٧	(٢٢٣)	—	(٢٧)	(٦٧٧)	—
گادولینیم	Gadolinium	٦٤	١٥٧,٢٥	٧,٩٠	١٣١٣	٢٢٧٣	٠,٢٢٤
گالیم	Gallium	٣١	٦٩,٧٢	٥,٩٠٧	٢٩,٧٨	٢٤٠٣	٠,٣٧٧
زرمانیم	Germanium	٣٢	٧٢,٦١	٥,٣٢٣	٩٣٧,٤	٢٨٣٠	٠,٣٢٢
طلاء	Gold	٧٩	١٩٦,٩٦٧	١٩,٣٢	١٠٦٤,٤٣	٢٨٠٨	٠,١٣١
هافنیم	Hafnium	٧٢	١٧٨,٤٩	١٣,٣١	٢٢٢٧	٤٦٠٢	٠,١٤٤
هلیم	Helium	٢	٤,٠٠٢٦	$٠,١٦٦٤ \times 10^{-٢}$	-٢٧٢,٢	-٢٦٨,٩	٥,٢٣
هولیم	Holmium	٦٧	١٦٤,٩٢٠	٨,٧٩	١٤٧٤	٢٧٠٠	٠,١٦٥
هیدروژن	Hydrogen	١	١,٠٠٧٩٧	$٠,٠٨٣٧٥ \times 10^{-٢}$	-٢٥٢,٨٧	-٢٥٢,٨٧	١٤,٤
ایندیم	Indium	٤٩	١١٤,٨٢	٧,٣١	١٥٦,٦	٢٠٨٠	٠,٢٣٣
ید	Iodine	٥٣	١٢٦,٩٠٤٤	٤,٩٤	١٨٤,٣٥	١٨٤,٣٥	٠,٢١٨
ایریدیم	Iridium	٧٧	١٩٢,٢	٢٢,٥	٢٤١٠	٤١٣٠	٠,١٣٠
آهن	Iron	٢٦	٥٥,٨٤٧	٧,٨٧	١٥٣٥	٢٧٥٠	٠,٤٤٧
کریستون	Krypton	٣٦	٨٣,٨٠	$٣,٤٨٨ \times 10^{-٢}$	-١٥٦,٦	-١٥٢,٣	٠,٢٤٧
لانتان	Lanthanum	٥٧	١٣٨,٩١	٦,١٤٥	٩١٨	٢٤٦٤	٠,١٩٥
لورنسیم	Lawrencium	١٠٣	(٢٦٠)	—	—	—	—
سرب	Pb	٨٢	٢٠٧,١٩	١١,٣٦	٣٢٧,٥٠	١٧٤٠	٠,١٢٩
لیتیم	Lithium	٣	٦,٩٣٩	$٠,٥٣٤$	١٨٠,٥٤	١٣٤٢	٣,٥٨
لوتیم	Lutetium	٧١	١٧٤,٩٧	٩,٨٤	١٦٦٣	٣٤٠٢	٠,١٥٥
منزیم	Magnesium	١٢	٢٤,٣٠٥	١,٧٤	٦٤٩	١٠٩٠	١,٠٣
منگنز	Manganese	٢٥	٥٤,٩٣٨٠	٧,٤٣	١٢٤٤	١٩٦٢	٠,٤٨١
مندلولیم	Mendelevium	١٠١	(٢٥٨)	—	—	—	—
جیوه	Mercury	٨٠	٢٠٠,٥٩	١٣,٥٥	-٣٨,٨٧	٣٥٧	٠,١٣٨
مولیدن	Molybdenum	٤٢	٩٥,٩٤	١٠,٢٢	٢٦١٧	٤٦١٢	٠,٢٥١
نودیمیم	Neodymium	٦٠	١٤٤,٢٤	٧,٠٠	١٠٢١	٣٠٧٤	٠,١٨٨
نهن	Neon	١٠	٢٠,١٨٠	$٠,٨٣٨٧ \times 10^{-٢}$	-٢٤٨,٦٧	-٢٤٦,٥٠	١,٠٣
نپتونیم	Neptunium	٩٣	(٢٣٧)	٢٠,٢٥	٦٤٠	٣٩٠٢	١,٢٦
نیکل	Nickel	٢٨	٥٨,٩٩	٨,٩٠٢	١٤٥٣	٢٧٣٢	٠,٤٤٤
نوبیم	Niobium	٤١	٩٢,٩٠٦	٨,٥٧	٢٤٦٨	٤٧٤٢	٠,٢٦٤
نیتروژن	Nitrogen	٧	١٤,٠٠٦٧	$١,١٦٤٩ \times 10^{-٢}$	-٢١٠	-١٩٥,٨	١,٠٣
نوبلیم	Nobelium	١٠٢	(٢٥٩)	—	—	—	—

عنصر	نام	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm³)	نقطه ذوب ۲۰°C در	نقطه جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) ۲۵°C در
اسمیم	Osmium	۷۶	۱۹۰,۲	۲۲,۵۷	۳۰,۴۵	۵۰,۲۷	-۱۳۰
اکسیژن	Oxygen	۸	۱۵,۹۹۹۴	$۱,۳۳۱۸ \times 10^{-۳}$	-۲۱۸,۴	-۱۸۳,۰	۹۱,۳
پادلادیم	Palladium	۴۶	۱۰۶,۴	۱۲,۰۲	۱۰۵,۴	۳۱۴,۰	۲۲۳
فسفر	Phosphorus	۱۵	۳۰,۹۷۳۸	۱,۸۳	۲۴۴,۲۵	۲۸۰	۷۲۱
پلاتین	Platinum	۷۸	۱۹۰,۰۹	۲۱,۴۵	۱۷۷,۲	۳۸۲۷	۱۲۴
پلوتونیم	Plutonium	۹۴	(۲۴۴)	۱۹,۸۴	۶۴۱	۲۲۲۲	۱۲۰
بولوتیم	Po	۸۴	(۲۰۹)	۹,۲۴	۲۵۴	۹۶۲	-
پتاسیم	K	۱۹	۳۹,۰۹۸	۰,۸۶	۶۳,۲۵	۷۶۰	۷۵۸
پرازودیمیم	Praseodymium	۵۹	۱۴۵,۹۰۷	۶,۷۷۳	۹۳۱	۳۵۲,۰	۱۹۷
پرومیم	Promethium	۶۱	(۱۴۵)	۷,۲۶۴	۱۰۴۲	(۳۰۰۰)	-
پروتاکتینیم	Protactinium	۹۱	(۲۳۱)	-	۱۶۰۰	-	-
رادیم	Radium	۸۸	(۲۲۶)	۵,۰	۷۰۰	۱۱۴,۰	-
رادون	Rn	۸۶	(۲۲۲)	$۱,۹۶ \times 10^{-۳} (0^{\circ}\text{C})$	-۷۱	-۶۱,۸	-۹۲,۰
زنیم	Rhenium	۷۵	۱۸۶,۲	۲۱,۰۴	۳۱۸,۰	۵۶۲۷	۱۳۴,۰
رودیم	Rhodium	۴۵	۱۰۲,۹۰۵	۱۲,۴۴	۱۹۶۰	۳۷۲۷	۲۲۳
روبیدیم	Rubidium	۳۷	۸۰,۴۷	۱,۰۳	۳۸,۸۹	۶۸۶	۳۶۴,۰
روتنیم	Ruthenium	۴۴	۱۰۱,۱۰۷	۱۲,۲	۲۳۱,۰	۳۹۰,۰	۲۳۹
ساماریم	Samarium	۶۲	۱۵۰,۳۵	۷,۲۹	۱۰۷۴	۱۷۹۴	۱۹۷,۰
اسکاندیم	Scandium	۲۱	۴۴,۹۰۶	۲,۹۹	۱۰۴۱	۲۸۳۶	۵۶۹,۰
سلنیم	Selenium	۳۴	۷۸,۹۶	۴,۷۹	۶۸۰	۲۱۷	۳۱۸,۰
سیلیسیوم	Silicon	۱۴	۲۸,۰۸۶	۲,۲۳	۱۴۱۰	۲۳۵۵	۷۱۲,۰
نقره	Silver	۴۷	۱۰۷,۶۸	۱۰,۴۹	۹۶۱,۹	۲۲۱۲	۲۲۴,۰
سدیم	Sodium	۱۱	۲۲,۹۸۹۸	۰,۹۷۱۲	۹۷,۸۱	۸۸۲,۹	۲۲۳,۰
استرونیم	Strontium	۳۸	۸۷,۶۲	۲,۰۴	۷۶۹	۱۳۸۴	۷۳۷,۰
گوگرد	Sulfur	۱۶	۳۲,۰۶۶	۲,۰۷	۱۱۲,۸	۴۴۴,۶	۷۰,۰
تاتال	Tantalum	۷۳	۱۸۰,۹۴۸	۱۶,۶	۲۹۹۶	۰۴۲۰	۱۳۸,۰
تکنسیم	Technetium	۴۳	(۹۸)	۱۱,۴۶	۲۱۷۲	۴۸۷۷	۲۰,۰
تلور	Tellurium	۵۲	۱۲۷,۶۰	۴,۲۴	۴۴۹,۵	۹۹,۰	۲۰,۰
تریم	Terbium	۶۰	۱۰۸,۹۲۴	۸,۲۵	۱۲۰۷	۳۲۳۰	۱۸,۰
تالیم	Thallium	۸۱	۲۰۴,۳۸	۱۱,۸۵	۳۰۴	۱۴۰۷	۱۳۰,۰
توریم	Thorium	۹۰	(۲۳۲)	۱۱,۷۲	۱۷۵۰	(۳۸۰,۰)	۱۱۷,۰
تلیم	Thulium	۶۹	۱۶۸,۹۳۴	۹,۳۱	۱۰۴۰	۱۰۵۹,۰	۱۰۹,۰
قلع	Tin	۵۰	۱۱۸,۷۱	۴,۳۱	۲۳۱,۹۷	۲۲۷۰	۲۲۶,۰
تیتان	Titanium	۲۲	۴۷۸۸	۴,۰۴	۱۶۹۰	۳۲۸۷	۵۲۳,۰
تندگستن	Tungsten	۷۴	۱۸۳,۸۵	۱۹,۳	۳۴۱۰	۰۶۶,۰	۱۲۴,۰
اورانیم	Uranium	۹۲	(۲۳۸)	۱۹,۰۷	۱۱۳۲	۳۸۱۸	۱۱۷,۰
وانادیم	Vanadium	۲۳	۵۰,۹۴۲	۸,۱	۱۸۹۰	۳۳۸,۰	۴۹,۰
ژنون	Xenon	۵۴	۱۳۱,۳۰	$۰,۴۹۵ \times 10^{-۳}$	-۱۱۱,۷۹	-۱۰,۸	۱۰۹,۰

عنصر	نام	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm³)	نقطه ذوب در ۲۰°C (°C)	نقطه جوش در ۲۵°C (°C)	(J/g°C)
ایتریم	Ytterbium	۷۰	۱۷۳,۰۴	۶,۹۶۶	۸۱۹	۱۱۹۶	۱۰۵۵
ایتریم	Yttrium	۳۹	۸۸,۹۰۵	۴,۴۶۹	۱۵۰۲	۵۳۳۸	۲۹۷
روی	Zinc	۳۰	۶۵,۳۷	۷,۱۳۳	۴۱۹,۵۸	۹۰۷	۳۸۹
زیرکونیم	Zirconium	۴۰	۹۱,۲۲	۶,۵۰۶	۱۸۰۲	۴۲۷۷	۲۷۶

اعداد داخل پرانتز در ستون جرم مولی عبارت‌اند از اعداد جرمی طولانی عمرترین ایزوتوپهای عنصر رادیواکتیو.

همه خواص فیزیکی مربوط به فشار یک اتمسفرند، مگر طور دیگری مشخص شده باشد.

اطلاعات مربوط به گازها فقط برای گازهایی معتبرند که در حالت مولکولی عادی خودشان —مثل O₂, H₂, Ne, He و غیره— باشند. مقادیر گرمای ویژه گازها در فشار ثابت محاسبه شده‌اند.

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 71st edition (CRC Press, 1990).

پیوست ۵

جدول تناوبی عناصر

فلزات قلبيات

گازهای پیش از

* نام این عناصر (از دروردهم و هاهنیم)، به علت ادعاهای متناقضی که در مورد کشف آنها در میان است، هنوز پذیرش عام نیافته است. گروهی در روسیه نامهای کورچاتوویم و نیلسونریم را پیشنهاد کردند.

۱۴ اختیار نشده است.

پیوست و

ذرات بنیادی

۱. ذرات بسیط

لپتون‌ها							
محصولات نوعی واپاشی	عمر متوسط (s)	جرم سکون (MeV)	اسپین ($h/2\pi$)	بار (e)	پادزره	نماد	ذره
	∞	۰۵۱۱	۱/۲	-۱	e^+	e^-	الكترون
$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	2.2×10^{-6}	< 0.00002	۱/۲	۰	$\bar{\nu}_e$	ν_e	نوتروینو الکترون
		۱۰۵۷	۱/۲	-۱	μ^+	μ^-	موئون
$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$	3.0×10^{-13}	< 0.3	۱/۲	۰	$\bar{\nu}_\mu$	ν_μ	نوتروینو موئون
		۱۷۸۴	۱/۲	-۱	τ^+	τ^-	تاو
	∞	< 40	۱/۲	۰	$\bar{\nu}_\tau$	ν_τ	نوتروینو تاو

کوارک‌ها							
خواص دیگر	جرم سکون ^۱ (MeV)	اسپین ($h/2\pi$)	بار (e)	پادزره	نماد	طعم	
$C = S = T = B = 0$	۳۰۰	۱/۲	+۲/۳	\bar{u}	u	بالا	
$C = S = T = B = 0$	۳۰۰	۱/۲	-۱/۳	\bar{d}	d	پایین	
افسون(C) = +	۱۵۰۰	۱/۲	+۲/۳	\bar{c}	c	افسون	
شگفتی(S) = -۱	۵۰۰	۱/۲	-۱/۳	\bar{s}	s	شگفتی	
سر بورن(T) = +۱	$> 40,000$	۱/۲	+۲/۳	\bar{t}	t	سر	
ته بورن(B) = -۱	۴۷۰۰	۱/۲	-۱/۳	\bar{b}	b	ته	

ذرات میدان						
جرم سکون (GeV)	اسپین ($h/2\pi$)	بار (e)	برهم‌کنش	نماد	ذره	
۰	۲	۰	گرانش			گراویتون
۸۰	۱	± 1	ضعیف	W^+, W^-		بورون ضعیف
۹۱۲	۱	۰	ضعیف	Z^0		بورون ضعیف
۰	۱	۰	الکترومغناطیسی	γ		فوتوون
۰	۱	۰	قوی (رنگ)	g		گلوئون

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادزره	بار	اسپین	جرم سکون	عمر متوسط	وایشی نوعی
				(e)	($h/2\pi$)	(MeV)	(s)	
پروتون	p	uud	\bar{p}	+1	1/2	938	$> 10^{15}$	$\pi^+ + e^+ (?)$
نوترون	n	udd	\bar{n}	0	1/2	940	889	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
لامبادا	Λ^0	uds	Λ^0	0	1/2	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
اومنگا	Ω^-	sss	Ω^-	-1	2/2	1672	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$
دلتا	Δ^{++}	uuu	Δ^{++}	+2	2/2	1232	5.7×10^{-22}	$p + \pi^+$
لامبادا	Λ_c^+	ude	Λ_c^+	+1	1/2	2285	1.9×10^{-12}	$\Lambda^0 + \pi^+$

مزون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادزره	بار	اسپین	جرم سکون	عمر متوسط	وایشی نوعی
				(e)	($h/2\pi$)	(MeV)	(s)	
پیون	π^+	u \bar{d}	π^-	+1	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
پیون	π^0	u $\bar{u} + d\bar{d}$	π^0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
کاتون	K^+	u \bar{s}	K^-	+1	0	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
کاتون	K^0	d \bar{s}	K^0	0	0	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
رو	ρ^+	u \bar{d}	ρ^-	+1	1	768	4.5×10^{-22}	$\pi^+ + \pi^-$
مزون D	D^+	c \bar{d}	D^-	+1	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
بی‌سای	ψ	c \bar{c}	ψ	-1	0	3097	1.0×10^{-20}	$e^+ + e^-$
مزون B	B^+	u \bar{b}	B^-	+1	0	5278	1.2×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
اوپسیلون	Υ	b \bar{b}	Υ	0	1	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

- ۱) چون تا به حال کوارک آزاد مشاهده نشده، اندازه‌گیری جرم سکون کوارکها در حالت آزاد هم ممکن نبوده است. جرم‌های سکونی که در این جدول آمده‌اند، جرم‌های مؤثرند و مربوط به کوارکهایی هستند که ذرات مرکب را می‌سازند و به آنها محدودند.
- ۲) انتظار می‌رود چنین ذراتی وجود داشته باشند ولی هنوز مشاهده نشده‌اند.

منبع:

"Review of Particle Properties" *Physics Letters B*, vol. 239 (April 1990).

پیوست ز

ضرایب تبدیل

زیرگرفته شده است.

G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

ضرایب تبدیل را می‌توان مستقیماً از جدولها خواند. به عنوان مثال، $3 \times 10^{-3} = 2,778$ درجه، پس دور $3 \times 10^{-3} \times 2,778 = 16,720^\circ$. کمیتهای SI با حروف سیاه نشان داده شده‌اند و بخشی از آنها از کتاب

زاویه مسطحه

rev	rad	"	'	°	
$2,778 \times 10^{-3}$	$1,7745 \times 10^{-2}$	۳۶۰۰	۶۰	۱	یک درجه =
$4,630 \times 10^{-5}$	$2,909 \times 10^{-4}$	۶۰	۱	$1,667 \times 10^{-2}$	یک دقیقه =
$7,716 \times 10^{-7}$	$4,848 \times 10^{-6}$	۱	$1,667 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-3}$	یک ثانیه =
۰۱۵۹۲ ر.	۱	$2,063 \times 10^0$	۳۴۳۸	۵۷,۳۰	یک رادیان =
۱	۶,۲۸۳	$1,296 \times 10^6$	$2,16 \times 10^3$	۳۶۰	یک دور =

زاویه فضایی

$$1 \text{ کره } 4\pi = \text{رادیان} = 12,57$$

طول

mil	ft	in	km	m	cm	
$6,214 \times 10^{-6}$	$2,281 \times 10^{-1}$	۰,۳۹۳۷	10^{-5}	10^{-2}	۱	یک سانتی‌متر =
$6,214 \times 10^{-1}$	۲,۲۸۱	۳۹,۳۷	10^{-2}	۱	۱۰۰	یک متر =
۰,۶۲۱۴	۳۲۸۱	$2,937 \times 10^1$	۱	۱۰۰۰	۱۰۵	یک کیلومتر =
$1,578 \times 10^{-5}$	$8,333 \times 10^{-2}$	۱	$2,540 \times 10^{-5}$	$2,540 \times 10^{-2}$	۲,۵۴۰	یک انچ =
$1,894 \times 10^{-4}$	۱	۱۲	$3,048 \times 10^{-4}$	۰,۳۰۴۸	۳۰,۴۸	یک فوت =
۱	۵۲۸۰	$6,326 \times 10^4$	۱,۶۰۹	۱۶۰۹	$1,609 \times 10^5$	یک مایل =

یک یارد = ۳ فوت
یک راد = ۱۶,۵ فوت
یک میل = 10^{-3} اینچ
۱ نانومتر = 10^{-9} متر

یک سال نوری = $10^{12} \times 460,9$ کیلومتر
یک پارسک = $10^{12} \times 30,84$ کیلومتر
یک فاتوم = ۶ فوت
یک ساعت بور = $10^{-11} \times 292,5$ متر

یک آنگستروم = 10^{-10} متر
یک مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر = ۱۵۱ ر. مایل = ۶۰,۷۸ فوت
یک فرمی = 10^{-15} متر

مساحت

in ^r	ft ^r	cm ^r	m ^r	
100 ^o	1076	10 ⁴	1	یک متر مربع =
100 ^o	1076 × 10 ⁻³	1	10 ⁻⁴	یک سانتی متر مربع =
144	1	929 ^o	9,290 × 10 ⁻²	یک فوت مربع =
1	6944 × 10 ⁻³	6452	6,452 × 10 ⁻⁴	یک اینچ مربع =

$$\begin{aligned} 1 \text{ ایکر} &= 43560 \text{ فوت مربع} \\ 1 \text{ هکتار} &= 10^4 \text{ متر مربع} = 2471 \text{ ایکر} \\ 1 \text{ بارن} &= 10^{-28} \text{ متر مربع} \end{aligned}$$

حجم

in ^r	ft ^r	li	cm ^r	m ^r	
6,102 × 10 ⁴	25,31	1000	10 ⁶	1	یک متر مکعب =
6,102 × 10 ⁻²	2,531 × 10 ⁻⁵	1000 × 10 ⁻³	1	10 ⁻⁶	یک سانتی متر مکعب =
61,02	2,531 × 10 ⁻²	1	1000	10 ⁰⁰⁰ × 10 ⁻³	یک لیتر =
1727	1	28,32	2,832 × 10 ⁴	2,832 × 10 ⁻²	یک فوت مکعب =
1	5,7887 × 10 ⁻³	1,639 × 10 ⁻²	1639	1639 × 10 ⁻⁵	یک اینچ مکعب =

$$\begin{aligned} 1 \text{ گالن مایع امریکایی} &= 4 \text{ کوارت مایع امریکایی} = 8 \text{ پینت امریکایی} = 128 \text{ اونس مایع امریکایی} = 231 \text{ اینچ مکعب} \\ 1 \text{ گالن امپریال انگلیسی} &= 227.4 \text{ اینچ مکعب} = 1 \text{ گالن مایع امریکایی} \end{aligned}$$

جرم

ton	lb	oz	u	slug	kg	g	
1,102 × 10 ⁻³	2,205 × 10 ⁻²	5,527 × 10 ⁻³	6,022 × 10 ²²	6,852 × 10 ⁻⁵	0.001	1	یک گرم =
1,102 × 10 ⁻²	2,205	55.27	6,022 × 10 ²⁶	6,852 × 10 ⁻²	1	1000	یک کیلوگرم =
1,102 × 10 ⁻¹	22,05	552.7	6,022 × 10 ²⁷	1	14.09	14,09 × 10 ³	یک اسلوگ =
1,102 × 10 ⁻⁰	2,205 × 10 ⁻¹	552.7 × 10 ⁻²	1	1,128 × 10 ⁻²⁸	1,128 × 10 ⁻²²	1,128 × 10 ⁻²²	یک u =
1,102 × 10 ⁻⁰	1	1	1,128 × 10 ⁻²⁸	یک اونس =			
1,102 × 10 ⁻⁰	1	1	1,128 × 10 ⁻²⁸	یک پوند =			
1,102 × 10 ⁻⁰	1	1	1,128 × 10 ⁻²⁸	یک تن =			

کمیتهایی که در نواحی سایه دار آمده اند یکای جرم نیستند، ولی غالباً به این عنوان به کار می روند. مثلاً وقتی می نویسیم 2,205 lb = 1 kg. با این معناست که در شرایط متعارف ستاب گرای (m/s^2)، یک کیلوگرم جرمی است که 2,205 پوند وزن دارد.

چگالی

lb/in ^r	lb/ft ^r	g/cm ^r	kg/m ^r	slug/ft ^r	
1,102 × 10 ⁻³	22,05	0.5104	0.0102	1	یک اسلوگ بر فوت مکعب =
2,205 × 10 ⁻³	44,10	0.001	0.001	1,128 × 10 ⁻²	یک کیلوگرم بر متر مکعب =
2,205 × 10 ⁻²	44,10	1	1000	1,128	یک گرم بر سانتی متر مکعب =
0.7717 × 10 ⁻¹	1	1.462 × 10 ⁻²	1.462 × 10 ⁻²	1.128 × 10 ⁻³	یک پوند بر فوت مکعب =
1	177.8	27.68	27.68 × 10 ⁻³	52.71	یک پوند بر اینچ مکعب =

کمیتهایی که در نواحی سایه دار آمده اند چگالی وزنی هستند و به این جهت، از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی متفاوت اند. به جدول جرم رجوع کنید.

زمان

s	min	h	d	y	
$2,156 \times 10^7$	$5,259 \times 10^5$	$8,766 \times 10^2$	260,2	1	= یک سال
$8,640 \times 10^4$	1440	24	1	$2,728 \times 10^{-3}$	= یک روز
3600	60	1	$4,167 \times 10^{-2}$	$1,141 \times 10^{-6}$	= یک ساعت
60	1	$1,667 \times 10^{-2}$	$8,944 \times 10^{-4}$	$1,901 \times 10^{-6}$	= یک دقیقه
1	$1,667 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$3,169 \times 10^{-8}$	= یک ثانیه

سرعت

cm/s	mi/h	m/s	km/h	ft/s	
30,48	0,6818	0,3048	1097	1	= یک فوت بر ثانیه
27,78	0,6214	0,2778	1	$0,9113$	= یک کیلومتر بر ثانیه
100	2,237	1	36	2,281	= یک متر بر ثانیه
44,70	1	0,4470	1609	1,467	= یک مایل بر ساعت
1	$2,237 \times 10^{-2}$	0,01	36×10^{-2}	$2,281 \times 10^{-2}$	= یک سانتی متر بر ثانیه

یک نات = یک مایل دریابی بر ساعت = 688 ft/s فوت بر ثانیه
 یک مایل بر دقیقه = 8800 ft/s = ۶۰ مایل بر ساعت

نیرو

kgf	gf	pdl	lb	N	dyn	
$1,0 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-5}$	$1,223 \times 10^{-5}$	$2,248 \times 10^{-5}$	10^{-5}	1	= یک دین
$1,0 \times 10^{-4}$	1020	1223	0,2248	1	100	= یک نیوتن
$1,0 \times 10^{-3}$	1020	1223	1	4,448	$4,448 \times 10^5$	= یک پوند
$1,0 \times 10^{-2}$	1020	1223	$3,108 \times 10^{-2}$	10^{-2}	$1,383 \times 10^4$	= یک پوندال
$1,0 \times 10^{-1}$	1020	1223	$2,205 \times 10^{-1}$	$9,807 \times 10^{-2}$	9807	= یک گرم نیرو
1	1020	1223	2,205	9807	$9,807 \times 10^5$	= یک کیلوگرم نیرو

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند، یکای نیرو نیستند ولی غالباً به‌این عنوان بهکار می‌روند. برای نمونه، اگر بتوسیم یک گرم نیرو " = ۷۷ روز ۹۸ دین، منظورمان این است که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = 9,80665 \text{ m/s}^2$)، یک گرم جرم تحت تأثیر یک نیروی ۷۷ روز ۹۸ دین قرار دارد.

فشار

lb/in ²	lb/in ²	Pa	cm - Hg	inch of Water	dyn/cm ²	atm	
2116	14,70	$1,013 \times 10^5$	76	406,8	$10^{13} \times 10^4$	1	= یک اتمسفر
$2,089 \times 10^{-2}$	$1,405 \times 10^{-5}$	0,1	$7,501 \times 10^{-5}$	$4,015 \times 10^{-2}$	1	$9,869 \times 10^{-7}$	یک دین بر سانتی متر مربع
5,202	$3,612 \times 10^{-2}$	249,1	0,1868	1	2291	$2,458 \times 10^{-3}$	یک اینچ آب ¹ در ۴ درجه سلسیوس =
27,85	0,1934	1222	1	5,353	$1,323 \times 10^4$	$1,316 \times 10^{-2}$	یک سانتی متر جیوه ¹ در صفر درجه سلسیوس =
$2,089 \times 10^{-2}$	$1,450 \times 10^{-5}$	1	$7,501 \times 10^{-5}$	$4,015 \times 10^{-2}$	10	$9,869 \times 10^{-6}$	یک پاسکال =
144	1	$9,195 \times 10^2$	0,171	27,68	$8,895 \times 10^4$	$8,805 \times 10^{-2}$	یک پوند بر اینچ مربع =
1	$9,195 \times 10^{-2}$	47,88	$3,091 \times 10^{-2}$	0,1922	478,8	$4,725 \times 10^{-3}$	یک پوند بر فوت مربع =

۱. هر حاکه شتاب گرانی دارای مقدار متعارف ۹,۸۰۶۶۵ ری ۹ متر بر مجدور ثانیه است.

یک بار = 10^6 دین بر سانتی متر مربع = ۱ ری میلی بار = 10^2 دین بر سانتی متر مربع = 10^2 پاسکال

انرژی، کار، گرمای

W	kg	MeV	eV	kW · h	cal	J	hp · h	ft · lb	erg	Btu	
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۱۷۲ $\times 10^{-11}$	۹,۵۸۵ $\times 10^{10}$	۶,۵۸۵ $\times 10^{21}$	۲,۹۳۰ $\times 10^{-4}$	۲۵۲۰ 	۱۰۵۵ 	۳,۹۲۹ $\times 10^{-4}$	۷۷۷,۹ $\times 10^{-10}$	۱۰۵۵ $\times 10^{10}$	۱ 	یکای انگلیسی = گرمای
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۱۱۲ $\times 10^{-11}$	۶,۲۴۲ $\times 10^5$	۶,۲۴۲ $\times 10^{11}$	۲,۷۷۸ $\times 10^{-11}$	۲,۳۸۹ $\times 10^{-8}$	۱۰۷ 	۳,۷۲۰ $\times 10^{-14}$	۷,۳۷۶ $\times 10^{-8}$	۱ $\times 10^{-11}$	۹,۴۸۱ $\times 10^{-11}$	یک ارج =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۰۵۹ $\times 10^{-11}$	۸,۴۶۴ $\times 10^{12}$	۸,۴۶۴ $\times 10^{18}$	۳,۷۶۶ $\times 10^{-7}$	۰,۳۲۲۸ 	۱,۳۵۶ 	۰,۰۵۱ $\times 10^{-7}$	۱ 	۱,۳۵۶ $\times 10^7$	۱,۲۸۵ $\times 10^{-3}$	یک فوت پوند =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۰۸۸ $\times 10^{-11}$	۱,۶۷۶ $\times 10^{19}$	۱,۶۷۶ $\times 10^{25}$	۰,۷۴۰۷ 	۰,۴۱۲ $\times 10^5$	۲,۶۸۵ $\times 10^6$	۱ 	۱,۹۸۰ $\times 10^6$	۲,۶۸۵ $\times 10^{12}$	۲۰۴۵ 	یک اسب بخار = ساعت
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۱۱۲ $\times 10^{-11}$	۶,۲۴۲ $\times 10^{12}$	۶,۲۴۲ $\times 10^{18}$	۲,۷۷۸ $\times 10^{-7}$	۰,۲۲۸۹ 	۱ 	۳,۷۲۰ $\times 10^{-7}$	۰,۷۳۷۶ $\times 10^{-4}$	۱۰۷ 	۹,۴۸۱ $\times 10^{-4}$	یک ژول =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۱۶۳ $\times 10^{-11}$	۲,۶۱۳ $\times 10^{12}$	۲,۶۱۳ $\times 10^{19}$	۱,۶۳ $\times 10^{-6}$	۱ 	۴,۱۸۶ $\times 10^{-6}$	۱,۰۵۰ 	۳,۰۸۸ 	۴,۱۸۶ $\times 10^2$	۳,۹۶۹ $\times 10^{-3}$	یک کالری =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۲۴۷ $\times 10^{-11}$	۲,۷۲۷ $\times 10^{11}$	۲,۷۲۷ $\times 10^{15}$	۱ 	۸,۶۰۰ $\times 10^0$	۳,۶ $\times 10^6$	۱,۳۴۱ 	۲,۶۵۵ $\times 10^{12}$	۳,۶ $\times 10^{12}$	۳۴۱۳ 	یک کیلووات ساعت =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۷۱۲ $\times 10^{-11}$	۱,۷۱۲ $\times 10^{-11}$	۱ 	۴,۴۵۰ $\times 10^{-16}$	۳,۸۲۷ $\times 10^{-20}$	۱,۶۰۲ $\times 10^{-19}$	۰,۹۶۷ $\times 10^{-26}$	۱,۱۸۲ $\times 10^{-19}$	۱,۶۰۲ $\times 10^{-12}$	۱,۵۱۹ $\times 10^{-22}$	یک الکترون ولت =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۷۸۳ $\times 10^{-11}$	۱ 	۱۰۶ 	۴,۴۵۰ $\times 10^{-20}$	۳,۸۲۷ $\times 10^{-12}$	۱,۶۰۲ $\times 10^{-13}$	۰,۹۶۷ $\times 10^{-20}$	۱,۱۸۲ $\times 10^{-13}$	۱,۶۰۲ $\times 10^{-6}$	۱,۵۱۹ $\times 10^{-16}$	یک مگا الکترون ولت =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱ $\times 10^{-11}$	۰,۶۱۰ $\times 10^{11}$	۰,۶۱۰ $\times 10^{15}$	۲,۴۹۷ $\times 10^{-20}$	۲,۱۴۸ $\times 10^{-16}$	۱,۹۸۷ $\times 10^{-12}$	۰,۳۴۸ $\times 10^{-10}$	۶,۶۲۹ $\times 10^{-17}$	۱,۹۸۷ $\times 10^{11}$	۱,۰۷۱ $\times 10^{11}$	یک کیلوگرم =
$\gamma_{\text{ج}} \cdot \gamma_{\text{ج}}$ $\times 10^{-11}$	۱,۶۸۱ $\times 10^{-11}$	۰,۲۲۰ $\times 10^{-11}$	۰,۲۲۰ $\times 10^{-11}$	۲,۱۲۸ $\times 10^{-11}$	۰,۰۵۱ $\times 10^{-11}$	۱,۷۹۲ $\times 10^{-11}$	۰,۰۰۱ $\times 10^{-17}$	۱,۰۱ $\times 10^{-17}$	۱,۷۹۲ $\times 10^{-8}$	۱,۲۱۵ $\times 10^{-12}$	یکای جرم انتزی =

کمیتهایی که در نواحی سایه دار آمداند یکاهای خاص انرژی نیستند ولی به مناسبت در اینجا ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم‌ارزی نسبی جرم-انرژی $E = mc^2$ بدست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم انتزی (۱) به انرژی، بدست می‌دهند.

توان

W	kW	cal/s	hp	ft · lb/s	Btu/h	
۰,۲۹۳۰	$۲,۹۳۰ \times 10^{-4}$	$۶,۹۹۸ \times 10^{-2}$	$۲,۹۲۹ \times 10^{-4}$	۰,۲۱۶۱	۱	یکای انگلیسی گرمای بر ساعت =
۱,۳۵۶	$۱,۳۵۶ \times 10^{-3}$	۰,۳۲۲۳۹	$۱,۸۱۸ \times 10^{-3}$	۱	۴,۶۲۸	یک فوت-پوند بر ثانیه =
۷۴۰,۷	۰,۷۴۰۷	۱۷۸,۱	۱	۵۵۰	۲۰۴۵	یک اسب بخار =
۴,۱۸۶	$۴,۱۸۶ \times 10^{-3}$	۱	$۰,۶۱۵ \times 10^{-2}$	۳,۰۸۸	۱۴,۲۹	یک کالری بر ثانیه =
۱۰۰۰	۱	۲۳۸,۹	۱,۳۴۱	۷۳۷,۶	۳۴۱۳	یک کیلووات ساعت =
۱	۰,۰۰۱	۰,۰۲۲۸۹	$۱,۳۴۱ \times 10^{-2}$	۰,۷۳۷۶	۳,۴۱۳	یک وات =

میدان مغناطیسی

شار مغناطیسی

milligauss	TESLA	gauss	
۱۰۰۰	10^{-4}	۱	= گاؤس
۱۰۷	۱	10^4	= تسلا
۱	10^{-7}	10^{-10}	۱ میلی گاؤس =

WEBER	maxwell	
10^{-8}	۱	= ماکسول
۱	10^8	= وبر

پیوست ح

فرمولهای ریاضی

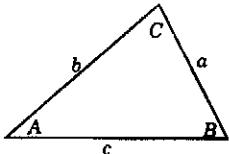
در مثلث

زاویه‌های A, B, C ، مقابله اضلاعی a, b, c هستند.

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



هندسه

دایره‌ای به شعاع r : محیط $= 2\pi r$; مساحت $= \pi r^2$

کره‌ای به شعاع r : مساحت $= 4\pi r^2$; حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

استوانه قائمی به شعاع r و ارتفاع h : $\pi r^2 h$

مساحت $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$; حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

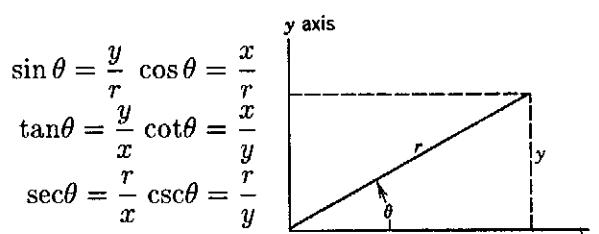
مثلثی با قاعده a و ارتفاع h : مساحت $= \frac{1}{2}ah$

معادله درجه دو

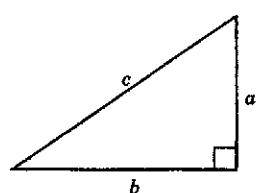
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تابع مثلثاتی زاویه θ



قضیه فیثاغورس



$$a^2 + b^2 = c^2$$

ضرب بردارها

اگر \mathbf{z} و \mathbf{z} و k بردارهای یکه در راستای x و y و z باشند:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

بسط نمایی

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots (|x| < 1)$$

بسط مثلثاتی (θ) بر حسب رادیان

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

هر بردار \mathbf{a} بر حسب مؤلفه هایش به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

اگر a و b و c بردارهایی به ترتیب به طول a و b و c باشند و s یک کمیت اسکالر باشد:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$(sa) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (sb) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

اگر θ زاویه کوچکتر (از دو زاویه) میان \mathbf{a} و \mathbf{b} باشد

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z) \mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

قضیه در جمله ای

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \dots (x^2 < 1)$$

مشتقها و انتگرالها

در آنچه می‌آید، u و v توابعی از x و a و m مقادیر ثابت‌اند. به هر یک از انتگرال‌های نامعین باید یک ثابت (اختیاری) انتگرال‌گیری اضافه کرد.

۱. $\frac{dx}{dx} = 1$

۱. $\int dx = x$

۲. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$

۲. $\int au \, dx = a \int u \, dx$

۳. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

۳. $\int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$

۴. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

۴. $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (m \neq -1)$

۵. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

۵. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

۶. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

۶. $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$

۷. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

۷. $\int e^x \, dx = e^x$

۸. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

۸. $\int \sin x \, dx = -\cos x$

۹. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

۹. $\int \cos x \, dx = \sin x$

۱۰. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

۱۰. $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x|$

۱۱. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

۱۱. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin 2x$

۱۲. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

۱۲. $\int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$

۱۳. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

۱۳. $\int xe^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$

۱۴. $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$

۱۴. $\int x^r e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^r}(a^r x^r + rax + r)e^{-ax}$

۱۵. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

۱۵. $\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

۱۶. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

۱۶. $\int_0^\infty x^r n e^{-ax} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

پیوست ط

برنامه‌های کامپیوتری

۱. نیروهای وابسته به زمان
 از این برنامه در بخش ۶-۶ برای پیدا کردن مکان و سرعت اتومبیلی که شتابش وابسته به زمان است استفاده شد. این برنامه را می‌شود برای هر شتاب وابسته به زمانی به کار برد؛ کافی است سطر ۱۸۰ را طوری تغییر بدیم که $a(t)$ مورد نظر را نشان بدهد. در این مورد از مثال بخش ۶-۶، یعنی $t = -2.67t$ استفاده می‌کنیم.

در این پیوست سه مثال از برنامه‌های کامپیوتری‌ای که در متن کتاب از آنها برای محاسبات سینماتیکی شامل نیروهای متغیر وارد بر ذره استفاده شده است ارائه می‌شود. این برنامه‌ها به زبان BASIC نوشته شده‌اند و به راحتی می‌شود آنها را با اغلب کامپیوترهای شخصی سازگار کرد. در هر مورد، سرعت اولیه و مکان اولیه ذره را باید به ترتیب در سطرهای ۴۰ و ۵۰ وارد برنامه کرد.

فهرست برنامه

```

10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- TIME DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(T), V0, X0; COMPUTES V(T), X(T)
30 ' SPECIFY INITIAL VALUES
40 V0 = 29.2
50 X0 = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '      EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU = .5
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 100
160 DT = TU/NT
170 'INSERT A(T) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
180 DEF FNA(T)=-2.67*T
190 V=V0
200 X=X0
210 PRINT "TIME"           VELOCITY   POSITION"
220 LPRINT   "TIME"           VELOCITY   POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
260 T = (TIME-1)*TU + N*dt
270 AI=FNA(T)
280 AI1=FNA(T-DT)
290 AV=.5*(AI+AI1)Ramin.samad@yahoo.com

```

```

300 DV=AV*DT
310 V = V + DV
320 DX = .5*(V + V - DV)*DT
330 X = X+DX
340 NEXT N
350 PRINT TIME*TU,V,X
360 LPRINT TIME*TU,V,X
370 NEXT TIME
400 END

```

TIME	VELOCITY	POSITION
.5	28.86625	14.54437
1	27.86499	28.75499
1.5	26.19618	42.2981
2	23.85994	54.83993
2.5	20.85615	66.04676
3	17.18486	75.5848
3.5	12.84612	83.1203
4	7.839843	88.31959
4.5	2.166084	90.84886
5	-4.175166	90.37431

که در آن $a = 9.8$ و $v_0 = 33$ هر ثانیه است. در سطر ۲۰۰ هر نیروی وابسته به سرعت دیگری هم می‌شود قرار داد. خروجی نشان می‌دهد که ذره، در مدت ۵s را و پس از طی ۶m، به سرعت حدی $5\sqrt{m/s}$ می‌رسد.

۲. نیروهای وابسته به سرعت
این برنامه را می‌شود، طبق آنچه در بخش ۷-۶ گفته شد، برای بررسی حرکت پرتاپهای که تحت تأثیر نیروی مقاومت هواست به کار برد. در این مورد نیرو را در سطر ۲۰۰ به صورت $F(x) = g - bv^2$ می‌نویسیم،

فهرست برنامه

```

10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- VELOCITY DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(V), V0, X0; COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES
40 V0 = 0
50 X0 = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '      EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU=.25
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT=100
160 DT=TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 ' INSERT A(V) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FN A(V)=9.8 - .33*V*V
210 PRINT "TIME"           "VELOCITY"        "POSITION"
220 LPRINT "TIME"           "VELOCITY"        "POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT

```

(ادامه)

نمونه خروجی

```

260 AV=FNA(V)
270 DV=AV*DT
280 V = V + DV
290 DX = .5*(V + V - DV)*DT
300 X = X+DX
310 NEXT N
320 PRINT TIME*TU,V,X
330 LPRINT TIME*TU,V,X
340 NEXT TIME
400 END

```

TIME	VELOCITY	POSITION
.25	2.299237	.2966358
.5	3.905542	1.08959
.75	4.765719	2.18636
1	5.161553	3.434
1.25	5.330923	4.748592
1.5	5.401125	6.091382
1.75	5.42984	7.445783
2	5.441519	8.804919
2.25	5.446261	10.16598
2.5	5.448183	11.52782

می کنیم. خروجی نشان می دهد که این ذره با دوره ۲s نوسان می کند، درست همان طور که برای ذره ای با چنین جرمی (سطر ۶۰) انتظار می رود.

۳. نیروهای وابسته به مکان
این برنامه در بخش ۴-۸ برای بررسی حرکت ذره ای که تحت تأثیر نیروی $F = -kx$ نوسان می کند بدکار بردہ شد. نیرو را به صورت $F(x) = -9.6x$ دارد، یعنی وقتی $x = 0$ است، در سطر ۹۰ وارد

فهرست برنامه

```

10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- POSITION DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN F(X), V0, X0, M; COMPUTES V(T), X(T)
30 'SPECIFY INITIAL VALUES AND MASS OF PARTICLE
40 V0 = 0      'METERS PER SECOND
50 X0 = .05    'METERS
60 M = 2.5 'KILOGRAMS'
70 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
80 '      FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
90 TMAX = 40
100 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
110 '      EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
120 TU=.1
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '      INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 10
160 DT = TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 'INSERT F(X) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNF(X)=-9.600001*X
210 PRINT " TIME          VELOCITY          POSITION"
220 PRINT " (S)          (M/S)           (M) "
230 LPRINT " TIME          VELOCITY          POSITION"
240 LPRINT " (S)          (M/S)           (M) "
250 LPRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+#####.##";V0,X0
260 PRINT USING "###.##";TIME;:PRINT USING "+#####.##";V0,X0

```

(ادامه)

```

270 'BEGIN ITERATION
280 FOR TIME = 1 TO TMAX
290 FOR N = 1 TO NT
300 A=FNF(X)/M 'ACCELERATION IN INTERVAL
310 X = X + V*DT + .5*A*DT*DT 'POSITION AT END OF INTERVAL
320 V = V + A*DT 'VELOCITY AT END OF INTERVAL
330 NEXT N
340 PRINT USING "###.##";TIME*TU;;PRINT USING "#####.##";V,X
350 LPRINT USING "###.##";TIME*TU;;LPRINT USING "#####.##";V,;
360 NEXT TIME
400 END

```

نموده خروجي

TIME (S)	VELOCITY (M/S)	POSITION (M)
0.00	+0.000	+0.050
0.10	-0.019	+0.049
0.20	-0.037	+0.046
0.30	-0.054	+0.042
0.40	-0.069	+0.035
0.50	-0.082	+0.028
0.60	-0.091	+0.019
0.70	-0.097	+0.010
0.80	-0.099	-0.000
0.90	-0.097	-0.010
1.00	-0.092	-0.019
1.10	-0.083	-0.028
1.20	-0.070	-0.036
1.30	-0.056	-0.042
1.40	-0.039	-0.047
1.50	-0.020	-0.050
1.60	-0.001	-0.051
1.70	+0.019	-0.050
1.80	+0.037	-0.047
1.90	+0.055	-0.042
2.00	+0.070	-0.036
2.10	+0.083	-0.028
2.20	+0.092	-0.020
2.30	+0.098	-0.010
2.40	+0.100	-0.000
2.50	+0.099	+0.010
2.60	+0.093	+0.019
2.70	+0.084	+0.028
2.80	+0.072	+0.036
2.90	+0.057	+0.043
3.00	+0.040	+0.047
3.10	+0.021	+0.050
3.20	+0.001	+0.052
3.30	-0.018	+0.051
3.40	-0.037	+0.048
3.50	-0.055	+0.043
3.60	-0.071	+0.037
3.70	-0.084	+0.029
3.80	-0.093	+0.020
3.90	-0.099	+0.011
4.00	-0.102	+0.001

پیوست ۵

برندگان جایزه نوبل

۱۹۰۱	ولهلم کنراد رونتگن Wilhelm Konrad Röntgen	به خاطر کشف پرتوهای X
۱۹۰۲	هندریک آتون لورنتز Hendrik Antoon Lorentz	به خاطر پژوهشها ایشان درباره اثر میدان مغناطیسی بر پدیده‌های تابشی.
۱۹۰۳	پیتر زیمان Pieter Zeeman	به خاطر کشف پرتوزایی طبیعی.
۱۹۰۴	پیر کوری Pierre Curie	به خاطر پژوهش‌های مشترکشان درباره پدیده‌های تابشی‌ای که توسط بکرل کشف شده بود.
۱۹۰۵	ماری اسکودوسکا-کوری Marie Skłodowska-Curie	به خاطر پژوهش‌ایش در مورد چگالی گازهای مهم و همچنین به خاطر کشف آرگون.
۱۹۰۶	لرد ریلی (جان ویلیام استرات) Lord Rayleigh (John William Strutt)	به خاطر کارهایش در مورد پرتوهای کاتودی.
۱۹۰۷	فیلیپ ادوارد آتون فون لنارد Philipp Eduard Anton von Lenard	به خاطر طراحی اسبابهای اندازه‌گیری دقیق اپتیکی و پژوهش‌هایی که به کمک آنها انجام داد.
۱۹۰۸	گابریل لیپمان Gabriel Lippmann	به خاطر ابداع روش باز تولید رنگها با نورنگاری بر پایه پدیده‌های تداخلی.
۱۹۰۹	گولیلمو مارکونی Guglielmo Marconi	به خاطر سهمی که در تکمیل تلگراف بی‌سیم داشتند.
۱۹۱۰	کارل فریدریک وان دروالس Carl Ferdinand Braun	به خاطر کارش در مورد معادله حالت گازها و مایعات.
۱۹۱۱	ولهلم وین Wilhelm Wien	به خاطر تحقیقاتش درباره قوانین حاکم بر تابش گرمایی.
۱۹۱۲	نیلس گوستاو دالن Nils Gustaf Dalen	به خاطر اختراع تنظیم‌کننده‌های خودکار، که در فانوسهای دریایی و راهنمایی شناور بکار می‌برند.

به خاطر پژوهشهاش در مورد خواص ماده در دماهای پایین، که منجر به تولید هلیم مایع هم شد.	(۱۸۵۳ – ۱۹۲۶)	هایک کامرلینگ اونس	۱۹۱۳
به خاطر کشف پراش پرتوهای α از بلورها.	(۱۸۷۹ – ۱۹۶۰)	ماکس فون لاو	۱۹۱۴
به خاطر خدمتشان در تحلیل ساختارهای بلوری به وسیله پرتوهای α .	Max von Laue		
به خاطر کشف پرتوهای α مشخصه عناصر.	(۱۸۶۲ – ۱۹۴۲)	ویلیام هنری براگ	۱۹۱۵
به خاطر کشف کوانتمهای انرژی.	William Henry Bragg		
به خاطر کشف اثر دوبلر در پرتوهای مثبت و شکافتگی خطوط طیفی در میدانهای الکتریکی.	(۱۸۹۰ – ۱۹۷۱)	ویلیام لارنس براگ	۱۹۱۶
به خاطر کشف ناپهنجاریها در آلیاژهای فولادی نیکل، که امکان اندازه‌گیریهای دقیقی را در فیزیک فراهم کرد.	Charles Glover Barkla		
به خاطر خدمتش به فیزیک نظری، و به ویژه به خاطر کشف اثر فوتوالکتریک.	(۱۸۵۸ – ۱۹۴۷)	ماکس پلانک	۱۹۱۷
به خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار اتمها و تابشهای ناشی از آنها.	(۱۸۷۴ – ۱۹۴۴)	چارلز گلوور بارکلا	
به خاطر تحقیقاتش در مورد بار الکتریکی بنیادی و اثر فوتوالکتریک.	Johannes Stark		
به خاطر کشفها و پژوهشهاش در زمینه طیف‌نمایی پرتو ایکسی.	(۱۸۶۱ – ۱۹۳۸)	شارل ادوارد گیوم	۱۹۱۹
به خاطر کشف قوانین حاکم بر برخورد الکترون با اتم.	Charles Edouard Guillaume		
به خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار ناپیوسته ماده و به خصوص کشف تعادل تنشیینی.	(۱۸۷۹ – ۱۹۵۵)	آلبرت اینشتین	۱۹۲۱
به خاطر کشف اثری که به نام خودش معروف شد.	Albert Einstein		
به خاطر ابداع روش مرئی کردن مسیر ذرات باردار با چگالیدن بخار.	(۱۸۸۵ – ۱۹۶۲)	نیلس بور	۱۹۲۲
به خاطر تحقیق درباره پدیده گرمایونی و به خصوص به خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد.	Robert Andrews Millikan		
به خاطر کشف خصلت موجی الکترون.	(۱۸۸۶ – ۱۹۵۴)	کارل مانگنورگ زیگبان	۱۹۲۳
به خاطر ابداع مهندسی که در ابداع مکانیک کوانتمی داشته است.	Karl Manne George Siegbahn		
به خاطر تحقیقات در مورد ساختار ناپیوسته ماده و به خصوص کشف	(۱۸۸۲ – ۱۹۶۴)	جیمز فرانک	۱۹۲۴
تعادل تنشیینی.	Gustav Hertz		
به خاطر ابداع روش مرئی کردن مسیر ذرات باردار با چگالیدن بخار.	(۱۸۷۰ – ۱۹۴۲)	زان باتیست پرن	۱۹۲۶
به خاطر تحقیق درباره پدیده گرمایونی و به خصوص به خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد.	Jean Baptiste Perrin		
به خاطر کشف خصلت موجی الکترون.	(۱۸۹۲ – ۱۹۶۲)	آرتور هالی کامپتون	۱۹۲۷
به خاطر کشف اثری که به نام خودش معروف شد.	Arthur Holly Compton		
به خاطر تحقیق درباره پدیده گرمایونی و به خصوص به خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد.	(۱۸۶۹ – ۱۹۵۹)	چارلز تامسون ریز ویلسون	۱۹۲۸
به خاطر کشف خصلت موجی الکترون.	Charles Thomson Rees Wilson		
به خاطر کارهایش در مورد پراکنش نور و کشف اثری که به نام خود او معروف شد.	(۱۸۷۹ – ۱۹۵۹)	اومن ویلنز ریچاردсон	۱۹۲۹
به خاطر سهم مهمی که در ابداع مکانیک کوانتمی داشته است.	Louis-Victor de Broglie		
به خاطر کارهایش در مورد پراکنش نور و کشف اثری که به نام خود او معروف شد.	(۱۸۸۸ – ۱۹۷۰)	چاندرا سکارا ونکاتا رامان	۱۹۳۰
به خاطر سهم مهمی که در ابداع مکانیک کوانتمی داشته است.	(Sir) Chandrasekhara Venkata Raman		
	(۱۹۰۱ – ۱۹۷۶)	ورنر هایزنبرگ	۱۹۳۲
	Werner Heisenberg		

<p>به خاطر کشف و ابداع شکل‌های جدید و پربار نظریه اتمی.</p> <p>به خاطر کشف نوترون.</p> <p>به خاطر کشف تابش کیهانی.</p> <p>به خاطر کشف پوزیترون.</p> <p>به خاطر کشف تجربی پراش الکترونها توسط بلورها.</p> <p>به خاطر شناس دادن پرتوزایی مصنوعی بعضی عناصر در اثر دریافت تابش نوترون، و کشف بعضی واکنشهای هسته‌ای که با تاباندن نوترون‌های کند ایجاد می‌شد.</p> <p>به خاطر اختراق و تکمیل سیکلوبترون و نتایج حاصل از آن، به خصوص در باره عناصر پرتوزایی مصنوعی.</p> <p>به خاطر سهمش در ابداع روش پرتو مولکولی و به خاطر کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.</p> <p>به خاطر ابداع روش تشیدی برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.</p> <p>به خاطر کشف اصل طرد، که به اصل پائولی هم معروف است.</p> <p>به خاطر اختراق وسیله‌ای برای تولید فشارهای فوق العاده زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینه فیزیک فشارهای بالا داشته است.</p> <p>به خاطر پژوهشهاش در مورد فیزیک جو بالایی، به خاطر کشف لایه معروف به اپلتون.</p> <p>به خاطر تکمیل روش اندازه‌گیری ویلسون، واقعیتیابی که به وسیله این روش در زمینه‌های فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی کشف کرد.</p> <p>به خاطر پیشگویی وجود مزونها بر پایه تحقیقات نظری این در باره نیروهای هسته‌ای.</p> <p>به خاطر تکمیل روش نورنگاشتی مطالعه فرایندهای هسته‌ای و کشفهایش در مورد مزونها با استفاده از این روش.</p> <p>به خاطر کار پیشگامانه‌شان در مورد استحالة هسته‌های اتمی به وسیله ذرات اتمی شتابدار.</p> <p>به خاطر طرح روش‌های تو برای آزمایش‌های دقیق مغناطیسی هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.</p>	<p>اروین شرودینگر (۱۸۸۷ – ۱۹۶۱) Erwin Schrodinger</p> <p>پاؤل آدرین موریس دیراک (۱۹۰۲ – ۱۹۸۴) Paul Adrien Maurice Dirac</p> <p>جیمز چادویک (۱۸۹۱ – ۱۹۷۴) James Chadwick</p> <p>ویکتور فرانتس هس (۱۸۸۳ – ۱۹۶۴) Victor Franz Hess</p> <p>کارل دیوید آندرسون (۱۹۰۵ – ۱۹۹۱) Carl David Anderson</p> <p>کلینتون جوزف دیویسون (۱۸۸۱ – ۱۹۵۸) Clinton Joseph Davisson</p> <p>جورج پاگت تامسون (۱۸۹۲ – ۱۹۷۵) George Paget Thomson</p> <p>انریکو فرمی (۱۹۱۱ – ۱۹۵۴) Enrico Fermi</p> <p>ارنست اورلاندو لارنس (۱۹۰۱ – ۱۹۵۸) Ernest Orlando Lawrence</p> <p>اوتو اشترن (۱۸۸۸ – ۱۹۶۹) Otto Stern</p> <p>ایزیدور ایزاک رابی (۱۸۹۸ – ۱۹۸۸) Isidor Isaac Rabi</p> <p>ولفگانگ پائولی (۱۹۰۰ – ۱۹۵۸) Wolfgang Pauli</p> <p>برسی ولیامز بریدجمان (۱۸۸۲ – ۱۹۶۱) Percy Williams Bridgman</p> <p>سر ادوارد ویکتور اپلتون (۱۸۹۲ – ۱۹۶۵) Sir Edward Victor Appleton</p> <p>باتریک مینارد استوارت بلاکت (۱۸۹۷ – ۱۹۷۴) Patrick Maynard Stuart Blackett</p> <p>هیدکی یوکاوا (۱۹۰۷ – ۱۹۸۱) Hideki Yukawa</p> <p>سیسل فرانک پاول (۱۹۰۳ – ۱۹۶۹) Cecil Frank Powell</p> <p>جان داگلاس کاکرافت (۱۸۹۷ – ۱۹۶۷) (Sir) John Douglas Cockcroft</p> <p>ارنست توماس سینتون والتون (۱۹۰۳ –) Ernest Thomas Sinton Walton</p> <p>فلیکس بلخ (۱۹۰۵ – ۱۹۸۳) Felix Bloch</p>
	۱۹۳۳
	۱۹۳۵
	۱۹۳۶
	۱۹۳۷
	۱۹۳۸
	۱۹۳۹
	۱۹۴۳
	۱۹۴۴
	۱۹۴۵
	۱۹۴۶
	۱۹۴۶
	۱۹۴۸
	۱۹۴۹
	۱۹۵۰
	۱۹۵۱
	۱۹۵۲

به خاطر ارائه روش تباین فار بهخصوص به خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.	() - ۱۹۱۲	ادوارد میلز پورسل Edward Mills Purcell	۱۹۵۳
به خاطر پژوهش‌های بنیادی اش در مکانیک کوانتمی، بهخصوص به خاطر تعبیر آماری تابع موج.	(۱۸۸۸ - ۱۹۶۶)	فریتس زرنیک Frits Zernike	۱۹۵۴
به خاطر ابداع روش تطابق و کشفهایش با استفاده از این روش.	(۱۸۸۲ - ۱۹۷۰)	ماکس بورن Max Born	۱۹۵۴
به خاطر کشفهایش در مورد ساختار ریز طیف هیدروژن.	(۱۸۹۱ - ۱۹۵۷)	والتر بوت Walther Bothe	۱۹۵۵
به خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.	() - ۱۹۱۳	ولیز اوزن لمب Willis Eugene Lamb	۱۹۵۵
به خاطر پژوهش‌هایشان در باره تیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.	(۱۹۱۱ - ۱۹۸۹)	پولی کارپ کوش Polykarp Kusch	۱۹۵۶
به خاطر پژوهش‌بنیادی‌شان در مورد قوانین پاریته که منجر به کشفهای مهمی در مورد ذرات بنیادی شد.	(۱۹۱۰ - ۱۹۸۹)	ولیام شاکلی William Shockley	۱۹۵۶
به خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.	(۱۹۰۸ - ۱۹۹۱)	جان باردین John Bardeen	۱۹۵۷
به خاطر کشف پادبروتون.	(۱۹۰۲ - ۱۹۸۷)	والتر هاوزر براتین Walter Houser Brattain	۱۹۵۷
به خاطر اثراخنث.	() - ۱۹۲۲	چن نینگ یانگ Chen Ning Yang	۱۹۵۸
به خاطر تحقیقاتش در مورد جذب تشیدی پرتوهای گاما و کشف اثری در همین زمینه که به نام خود او معروف شده است.	() - ۱۹۲۶	تسونگ داولی Tsung Dao Lee	۱۹۵۸
به خاطر مطالعات بدیع‌اش در مورد پراکنش الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایش در باره ساختار نوکلئونها.	() - ۱۹۰۴	پاول آلسیویچ چرنکوف Pavel Aleksejevic Cerenkov	۱۹۵۸
به خاطر نظریه‌های بدیع‌اش در باره ماده چکال، بهخصوص در مورد هلیوم مایع.	(۱۹۰۸ - ۱۹۹۰)	لیلیا میخائیلیوچ فرانک Il'ja Michajlovic Frank	۱۹۵۹
به خاطر سهمیش در تدوین نظریه هسته اتم و ذرات بنیادی، بهخصوص از طریق کشف و کاربرد اصول بنیادی تقارن.	(۱۸۹۵ - ۱۹۲۱)	ایگور ایوانویچ تام Igor Evgen'evic Tamm	۱۹۵۹
به خاطر اثراخنث.	(۱۹۰۵ - ۱۹۸۹)	امیلیو جینو سگری Emilio Gino Segré	۱۹۶۰
به خاطر اثراخنث اثراخنث.	() - ۱۹۲۰	اومن چمبرلین Owen chamberlain	۱۹۶۰
به خاطر اثراخنث اثراخنث.	() - ۱۹۲۶	دونالد آرتور گلزر Donald Arthur Glaser	۱۹۶۱
به خاطر تحقیقاتش در مورد جذب تشیدی پرتوهای گاما و کشف اثری در هسته‌های اتمی و ذرات بنیادی.	(۱۹۱۵ - ۱۹۹۰)	روبرت هوشتاتر Robert Hofstadter	۱۹۶۱
به خاطر کشف و کاربرد اصول بنیادی تقارن.	() - ۱۹۲۹	رودولف لودویگ موسبار Rudolf Ludwig Mössbauer	۱۹۶۲
به خاطر اثراخنث اثراخنث.	(۱۹۰۸ - ۱۹۶۸)	لف داویدویچ لانداو Lev Davidovic Landau	۱۹۶۲
به خاطر اثراخنث اثراخنث.	() - ۱۹۰۲	یوجین پال وینگر Eugene Paul Wigner	۱۹۶۳

<p>به خاطر کشفهایشان در مورد ساختار پوسته‌ای هسته.</p> <p>به خاطر کارهای اساسی اش در زمینه الکترونیک کوانتمی، که منجر به ساخت نوسانگرهای تقویت‌کننده‌ها برایه اصل میزر-لیزر شد.</p> <p>به خاطر تحقیقات بنیادی‌شان در زمینه الکترودینامیک کوانتمی که پیامدهای مهمی در فیزیک ذرات بنیادی داشت.</p> <p>به خاطر کشف و توسعه روش‌های ابتکانی برای مطالعه شدید هرتزی در آتمها.</p> <p>به خاطر مشارکتهایش در نظریه واکنشهای هسته‌ای، به خصوص کشفهایش در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.</p> <p>به خاطر سهم تعیین‌کننده‌اش در توسعه فیزیک ذرات بنیادی، به خصوص با کشف تعداد زیادی از حالت‌های تشیدی.</p> <p>به خاطر مشارکتش در طبقه‌بندی ذرات بنیادی و برهمنکشهای آنها، و کشفهایش در این مورد.</p> <p>به خاطر کار اساسی و کشفهایش در زمینه مغناطوهیدرودینامیک، با کاربردهای مفید در فیزیک پلاسمای.</p> <p>به خاطر پژوهش بنیادی و کشفهایش در باره پادفرومغناطیس و فری‌مغناطیس، با کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد.</p> <p>به خاطر کشف اصول تمام‌نگاری (هولوگرافی).</p> <p>به خاطر پرداختن نظریه‌ای برای ابررساناپی.</p> <p>به خاطر کشف پدیده توئل زنی در نیمرساناها.</p> <p>به خاطر کشف پدیده توئل زنی در ابررساناها.</p> <p>به خاطر پیشگویی نظری خصوصیات عبور ابر جریان از سد توئلی.</p>	<table border="0"> <tbody> <tr> <td style="text-align: right;">ماریا چو پرت مایر Maria Goeppert Mayer (۱۹۷۲ – ۱۹۰۶)</td><td style="text-align: left;">جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۷)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">چارلز تاؤز Charles H. Townes (۱۹۱۵ –)</td><td style="text-align: left;">جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۷)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">نیکولای باسوف Nikolai G. Basov (۱۹۲۲ –)</td><td style="text-align: left;">نیکولای باسوف Nikolai G. Basov (۱۹۲۲ –)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov (۱۹۱۶ –)</td><td style="text-align: left;">الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov (۱۹۱۶ –)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">سن-ایتر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga (۱۹۷۹ – ۱۹۰۶)</td><td style="text-align: left;">سن-ایتر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga (۱۹۷۹ – ۱۹۰۶)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۸۸ – ۱۹۱۸)</td><td style="text-align: left;">جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۸۸ – ۱۹۱۸)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">ریچارد فایمن Richard P. Feynman (۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)</td><td style="text-align: left;">ریچارد فایمن Richard P. Feynman (۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">آلفرد کاستلر Alfred Kastler (۱۹۶۷ – ۱۹۰۶)</td><td style="text-align: left;">آلفرد کاستلر Alfred Kastler (۱۹۶۷ – ۱۹۰۶)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe (۱۹۶۸ – ۱۹۱۱)</td><td style="text-align: left;">هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe (۱۹۶۸ – ۱۹۱۱)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez (۱۹۶۹ – ۱۹۲۹)</td><td style="text-align: left;">لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez (۱۹۶۹ – ۱۹۲۹)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">مورای گل-مان Murray Gell-Mann (۱۹۷۰ – ۱۹۰۸)</td><td style="text-align: left;">مورای گل-مان Murray Gell-Mann (۱۹۷۰ – ۱۹۰۸)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">هانس آلون Hannes Alven (۱۹۷۱ – ۱۹۰۴)</td><td style="text-align: left;">هانس آلون Hannes Alven (۱۹۷۱ – ۱۹۰۴)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">لویی نل Louis Neel (۱۹۷۲ – ۱۹۰۰)</td><td style="text-align: left;">لویی نل Louis Neel (۱۹۷۲ – ۱۹۰۰)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">دنیس گابور Dennis Gabor (۱۹۷۲ – ۱۹۱۱)</td><td style="text-align: left;">دنیس گابور Dennis Gabor (۱۹۷۲ – ۱۹۱۱)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">جان باردين John Bardeen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۸)</td><td style="text-align: left;">جان باردين John Bardeen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۸)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">لئون کوبر Leon N. Cooper (۱۹۷۳ – ۱۹۳۰)</td><td style="text-align: left;">لئون کوبر Leon N. Cooper (۱۹۷۳ – ۱۹۳۰)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">رایرت شریفر J. Robert Schrieffer (۱۹۷۳ – ۱۹۲۵)</td><td style="text-align: left;">رایرت شریفر J. Robert Schrieffer (۱۹۷۳ – ۱۹۲۵)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">لتو ایزاکی Leo Esaki (۱۹۷۳ – ۱۹۲۹)</td><td style="text-align: left;">لتو ایزاکی Leo Esaki (۱۹۷۳ – ۱۹۲۹)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">ایوار جیاور Ivar Giaever (۱۹۷۳ – ۱۹۴۰)</td><td style="text-align: left;">ایوار جیاور Ivar Giaever (۱۹۷۳ – ۱۹۴۰)</td></tr> <tr> <td style="text-align: right;">بریان جوزفسون Brian D. Josephson (۱۹۷۴ –)</td><td style="text-align: left;">بریان جوزفسون Brian D. Josephson (۱۹۷۴ –)</td></tr> </tbody> </table>	ماریا چو پرت مایر Maria Goeppert Mayer (۱۹۷۲ – ۱۹۰۶)	جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۷)	چارلز تاؤز Charles H. Townes (۱۹۱۵ –)	جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۷)	نیکولای باسوف Nikolai G. Basov (۱۹۲۲ –)	نیکولای باسوف Nikolai G. Basov (۱۹۲۲ –)	الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov (۱۹۱۶ –)	الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov (۱۹۱۶ –)	سن-ایتر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga (۱۹۷۹ – ۱۹۰۶)	سن-ایتر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga (۱۹۷۹ – ۱۹۰۶)	جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۸۸ – ۱۹۱۸)	جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۸۸ – ۱۹۱۸)	ریچارد فایمن Richard P. Feynman (۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)	ریچارد فایمن Richard P. Feynman (۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)	آلفرد کاستلر Alfred Kastler (۱۹۶۷ – ۱۹۰۶)	آلفرد کاستلر Alfred Kastler (۱۹۶۷ – ۱۹۰۶)	هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe (۱۹۶۸ – ۱۹۱۱)	هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe (۱۹۶۸ – ۱۹۱۱)	لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez (۱۹۶۹ – ۱۹۲۹)	لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez (۱۹۶۹ – ۱۹۲۹)	مورای گل-مان Murray Gell-Mann (۱۹۷۰ – ۱۹۰۸)	مورای گل-مان Murray Gell-Mann (۱۹۷۰ – ۱۹۰۸)	هانس آلون Hannes Alven (۱۹۷۱ – ۱۹۰۴)	هانس آلون Hannes Alven (۱۹۷۱ – ۱۹۰۴)	لویی نل Louis Neel (۱۹۷۲ – ۱۹۰۰)	لویی نل Louis Neel (۱۹۷۲ – ۱۹۰۰)	دنیس گابور Dennis Gabor (۱۹۷۲ – ۱۹۱۱)	دنیس گابور Dennis Gabor (۱۹۷۲ – ۱۹۱۱)	جان باردين John Bardeen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۸)	جان باردين John Bardeen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۸)	لئون کوبر Leon N. Cooper (۱۹۷۳ – ۱۹۳۰)	لئون کوبر Leon N. Cooper (۱۹۷۳ – ۱۹۳۰)	رایرت شریفر J. Robert Schrieffer (۱۹۷۳ – ۱۹۲۵)	رایرت شریفر J. Robert Schrieffer (۱۹۷۳ – ۱۹۲۵)	لتو ایزاکی Leo Esaki (۱۹۷۳ – ۱۹۲۹)	لتو ایزاکی Leo Esaki (۱۹۷۳ – ۱۹۲۹)	ایوار جیاور Ivar Giaever (۱۹۷۳ – ۱۹۴۰)	ایوار جیاور Ivar Giaever (۱۹۷۳ – ۱۹۴۰)	بریان جوزفسون Brian D. Josephson (۱۹۷۴ –)	بریان جوزفسون Brian D. Josephson (۱۹۷۴ –)
ماریا چو پرت مایر Maria Goeppert Mayer (۱۹۷۲ – ۱۹۰۶)	جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۷)																																								
چارلز تاؤز Charles H. Townes (۱۹۱۵ –)	جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۷)																																								
نیکولای باسوف Nikolai G. Basov (۱۹۲۲ –)	نیکولای باسوف Nikolai G. Basov (۱۹۲۲ –)																																								
الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov (۱۹۱۶ –)	الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov (۱۹۱۶ –)																																								
سن-ایتر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga (۱۹۷۹ – ۱۹۰۶)	سن-ایتر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga (۱۹۷۹ – ۱۹۰۶)																																								
جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۸۸ – ۱۹۱۸)	جولیان شوینگر Julian Schwinger (۱۹۸۸ – ۱۹۱۸)																																								
ریچارد فایمن Richard P. Feynman (۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)	ریچارد فایمن Richard P. Feynman (۱۹۸۴ – ۱۹۰۲)																																								
آلفرد کاستلر Alfred Kastler (۱۹۶۷ – ۱۹۰۶)	آلفرد کاستلر Alfred Kastler (۱۹۶۷ – ۱۹۰۶)																																								
هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe (۱۹۶۸ – ۱۹۱۱)	هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe (۱۹۶۸ – ۱۹۱۱)																																								
لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez (۱۹۶۹ – ۱۹۲۹)	لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez (۱۹۶۹ – ۱۹۲۹)																																								
مورای گل-مان Murray Gell-Mann (۱۹۷۰ – ۱۹۰۸)	مورای گل-مان Murray Gell-Mann (۱۹۷۰ – ۱۹۰۸)																																								
هانس آلون Hannes Alven (۱۹۷۱ – ۱۹۰۴)	هانس آلون Hannes Alven (۱۹۷۱ – ۱۹۰۴)																																								
لویی نل Louis Neel (۱۹۷۲ – ۱۹۰۰)	لویی نل Louis Neel (۱۹۷۲ – ۱۹۰۰)																																								
دنیس گابور Dennis Gabor (۱۹۷۲ – ۱۹۱۱)	دنیس گابور Dennis Gabor (۱۹۷۲ – ۱۹۱۱)																																								
جان باردين John Bardeen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۸)	جان باردين John Bardeen (۱۹۷۳ – ۱۹۰۸)																																								
لئون کوبر Leon N. Cooper (۱۹۷۳ – ۱۹۳۰)	لئون کوبر Leon N. Cooper (۱۹۷۳ – ۱۹۳۰)																																								
رایرت شریفر J. Robert Schrieffer (۱۹۷۳ – ۱۹۲۵)	رایرت شریفر J. Robert Schrieffer (۱۹۷۳ – ۱۹۲۵)																																								
لتو ایزاکی Leo Esaki (۱۹۷۳ – ۱۹۲۹)	لتو ایزاکی Leo Esaki (۱۹۷۳ – ۱۹۲۹)																																								
ایوار جیاور Ivar Giaever (۱۹۷۳ – ۱۹۴۰)	ایوار جیاور Ivar Giaever (۱۹۷۳ – ۱۹۴۰)																																								
بریان جوزفسون Brian D. Josephson (۱۹۷۴ –)	بریان جوزفسون Brian D. Josephson (۱۹۷۴ –)																																								

به خاطر کشف تپ اخترها.	(- ۱۹۲۴)	آنتونی هیویش	۱۹۷۴
به خاطر کار پیشگامانه اش در زمینه نجوم رادیویی.	Antony Hewish (۱۹۸۴ - ۱۹۱۸)	مارتن رایل	
به خاطر کشف ارتباط میان حرکت جمعی و حرکت ذره، و تدوین نظریه ای در مورد ساختار هسته اتم بر این اساس.	(Sir) Martin Ryle (- ۱۹۲۲)	آگه بور	۱۹۷۵
به خاطر کشف یک ذره بنیادی مهم (به طور مستقل).	Aage Bohr (- ۱۹۲۶)	بن مالتسون	
به خاطر تحقیقات نظری بنیادی شان درباره سیستمهای مغناطیسی و سیستمهای نامنظم.	Ben Mottelson (۱۹۸۶ - ۱۹۱۷)	جیمز رینواتر	
به خاطر ابداعات و کشفهای اساسی در فیزیک دماهای پایین.	James Rainwater (- ۱۹۳۱)	James Rainwater	
به خاطر کشف تابش میکروموجی زمینه کیهانی.	Burton Richter (- ۱۹۳۶)	برتون ریشر	۱۹۷۶
به خاطر تدوین مدل وحدت یافته نیروهای ضعیف والکترومغناطیسی، و به خاطر پیشگویی وجود جریانهای خنثی.	Samuel Chao Chung Ting (- ۱۹۲۳)	ساموئل چانچونگ تینگ	
به خاطر کشف موارد نقض اصول تقارن بنیادی در واپاشی مزونهای K خنثی.	Philip Warren Anderson (- ۱۹۰۵)	فیلیپ وارن اندرسون	۱۹۷۷
به خاطر سهمشان در تکمیل طیف‌نمایی لیزری.	Nevil Francis Mott (- ۱۹۲۶)	نویل فرانسیس موت	
به خاطر کارهایش در پیشبرد طیف‌نمایی الکترونی با تکنیک زیاد.	Peter L. Kapitza (- ۱۹۲۸)	جان هاسپروگ وان ولک	
به خاطر ابداع روشی برای تحلیل پدیده‌های بحرانی.	Arno N. Penzias (- ۱۹۳۶)	پیتر کاپیتسا	۱۹۷۸
	Robert Woodrow Wilson (- ۱۹۳۲)	لاربر وودرو ویلسون	
	Sheldon Lee Glashow (- ۱۹۲۶)	شلدون لی گلاشو	۱۹۷۹
	عبدالسلام		
	Abdus Salam (- ۱۹۳۳)		
	استیون واینبرگ		
	Steven Weinberg (- ۱۹۳۱)		
	جیمز کرونین		۱۹۸۰
	James W. Cronin (- ۱۹۲۳)		
	وال فیج		
	Val L. Fitch (- ۱۹۲۰)		
	نیکولاوس بلومبرگن		۱۹۸۱
	Nicolaas Bloembergen (- ۱۹۲۱)		
	آرتور لئونارد شاولو		
	Arthur Leonard Schawlow (- ۱۹۱۸)		
	کای زیگبان		
	Kai M. Siegbahn (- ۱۹۲۶)		۱۹۸۲
	کنث ویلسون		
	Kenneth Geddes Wilson		

<p>به خاطر مطالعات نظری اش درباره ساختار و تحول ستاره‌ها.</p> <p>به خاطر مطالعاتش در مورد تشکیل عناصر شیمیایی در عالم.</p> <p>به خاطر سهم تعیین‌کننده‌شان در "پروژه بزرگ" که به کشف ذرات میدانی W و Z منجر شد.</p> <p>به خاطر کشف اثر کوانتومی هال.</p> <p>به خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.</p> <p>به خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی تونی رو بشی.</p> <p>به خاطر کشف ابرسازانایی گرم.</p> <p>به خاطر آزمایشهاشان با باریکه‌های نوترینو و کشف نوترینوی موئون.</p> <p>به خاطر ابداع فنی برای دام‌اندازی اتمهای منفرد.</p> <p>به خاطر کشفهایش در زمینه طیف‌نمایی شدیدی اتمی، که به ساخت میرزه‌هیدروز و ساعت اتمی منجر شد.</p> <p>به خاطر آزمایشهاشان درباره پراکنش الکترونها از هسته‌ها، که حاکی از حضور کوارک در نوکلئونهاست.</p> <p>به خاطر کشفهایی در مورد آرایش مولکولها در موادی مثل بلورهای مایع، ابرسازانها، و پولیمرها.</p> <p>به خاطر موفقیتهاش در طراحی آشکارسازهای الکترونیکی سریع برای ذرات پرانرژی</p>	<p>سویرامانیان چاندراسکار (- ۱۹۱۰) Subrehmanyam Chandrasekhar</p> <p>ویلیام فاؤلر (- ۱۹۱۱) William A. Fowler</p> <p>کارلو روپیا (- ۱۹۳۴) Carlo Rubbia</p> <p>ساپیمون وان در میر (- ۱۹۲۵) Simon Van Der Meer</p> <p>کلاوس فون کلیتسینگ (- ۱۹۴۲) Klaus von Klizing</p> <p>ارنسٹ روسکا (- ۱۹۰۶) Ernst Ruska</p> <p>گرد بینیگ (- ۱۹۴۷) Gerd Binnig</p> <p>هایزیش روهر (- ۱۹۳۲) Heinrich Rohrer</p> <p>کارل آلكس مولر (- ۱۹۲۷) Karl Alex Müller</p> <p>گنورگ بدنبورز (- ۱۹۵۰) J. Georg Bednorz</p> <p>لیون لدرمن (- ۱۹۲۲) Leon M. Lederman</p> <p>ملوین شوارتز (- ۱۹۳۲) Melvin Schwartz</p> <p>جک استینبرگر (- ۱۹۲۱) Jack Steinberger</p> <p>هانس دهملت (- ۱۹۲۲) Hans G. Dehmelt</p> <p>ولفگانگ پاؤل (- ۱۹۱۲) Wolfgang Paul</p> <p>نورمن رمزی (- ۱۹۱۵) Norman F. Ramsey</p> <p>ریچارد تپلور (- ۱۹۲۹) Richard E. Taylor</p> <p> Jerome I. Friedman (- ۱۹۳۰) جرومی فریدمن</p> <p>هنری کندال (- ۱۹۲۶) Henry W. Kendall</p> <p>بی‌یر زیل دزن (- ۱۹۳۲) Pierre-Gilles de Gennes</p> <p>ژرژ شارپاک (- ۱۹۳۳) Georges Charpak</p>
	۱۹۸۳
	۱۹۸۴
	۱۹۸۵
	۱۹۸۶
	۱۹۸۷
	۱۹۸۸
	۱۹۸۹
	۱۹۹۰
	۱۹۹۱
	۱۹۹۲

پاسخ مسائل شماره فرد

فصل ۱

۴۳. $mi/h(70 km/h)$ (ج) .۹
 ۱۲m، -۲۰، ۰، -۲۰. (الف) .۹
- ۱۲m، -۲ (ب)
 m/s ، ۷ (ج)
 ۵. (الف) .۱۱
 ft/s (ب)
 ft/s .۱۳. (الف) .۱۳
 cm/s (ب)
 cm/s (ج)
 cm/s (د)
 cm/s (ه)
 $-2m/s^2$.۱۵
 $AB : 0, 0$ (الف) .۱۹
 $OA : +0 -$
 $CD : +, 0$ (ب)
 $BC : +, +$ (ب) خیر.
 (ه) وضعیت‌های الف، ب، و د .۲۱
 m/s (الف) .۲۳
 m/s (ب)
 m/s^2 (ج)
 m/s .۲۵ (ب) .۲۵
 m/s .۲۵ (ج)
 m/s^2 (ه)
 m/s .۲۷ (ب)
 m (ج)
 m/s^2 .۲۹ (ب)
 ms .۳۱
 m/s^2 .۳۳
 s .۳۵
 m/s^2 .۳۷ (الف) .۳۷
 ms (ب)
 m/s^2 .۳۹ (الف) .۳۹
 s (ب)
 s (ج)
 m (د)
 s .۴۱ (الف) .۴۱
 m/s (ب)
 m/s .۴۳ (الف) .۴۳
 m (ب)
۳. $min(52\text{ min})$ (ب) درصد .۴۴٪ - درصد
 ۷. (الف) بله. (ب) نه .۶۸s
 ۷۲۰. (ب) روز .۹
 ۱۱. (ب) تقریباً یک دقیقه .۵۵s
 ۲۰. (ب) روز و ۵ ساعت .۱۳
 ۱۵. (الف) $ft(100 m)$: $ft(856 m)$.۱۵
 $m : mi$ (ب)
 cm^3 .۱۷
 km .۱۹ (الف)
 km^3 (ب)
 km^3 (ج)
 km^3 .۲۱ .۱۰^{-۳} $\times 10^{22} cm^3$
 pc .۲۳ $ly \times 10^{-9}$ $\times 10^{-5}$ $\times 10^{22} km^3$
 km .۲۴ $\times 10^{12} km^3$
 km .۲۵ (الف) .۳۹
 km (ب) .۳۵ $\times 10^7$ 5.97×10^{26}
 km (ج) .۲۷
 ۲۹. نیویورک .۲۹
 km .۳۱
 kg/s .۳۳ kg/s .۳۷
 nm .۳۷ $nm \times 10^{21} \times 10^{22}$
 cm^2 .۳۹ (الف) .۳۹
 cm^2 (ب)
 m .۴۱ $m = 5 \times 10^{-24}$

فصل ۲

۱. $ft(24 m)$
 cm/y .۲
۵. $mi/h(48 mi/h)$ (الف) .۴۸
 رفته است.
۷. (الف) $km/h(72,4 km/h)$.۴۵
 $km/h(48,8 km/h)$ (ب)

- (ب) $5i - 4j - 3k$.٤٥
 (ج) $-5i + 4j + 3k$
 ٢١. (الف) $1400i + 2100j - 48k$.٤٦
 (ب) صفر
 $r_y = 15\sqrt{3}$, $r_z = 25^\circ$.٤٧
 (ب) $15, 5$ (ج) 7°
 .٤٨. (الف) $ai + aj - ak$, $ai + aj + ak$.٤٩
 $ai - aj + ak$, $ai - aj - ak$
 (ب) $a\sqrt{3}$ (ج) $54, 70^\circ$
 ٣٣. (الف) -19 . (ب) 27 , جهت $+z$
 .٣٩. (الف) -21 . (ب) -9
 (ج) $5i - 11j - 9k$
 .٤١. (الف) صفر (ب) -16 (ج) -9
 .٤٣. (الف) $2r_7$ (ب) $24ns$ (ج) $48r_5$
 .٤٩. $70, 5^\circ$

فصل ٤

١. (الف) 63° , 920 mi جنوب شرق.
 (ب) 63° , 410 mi/h جنوب شرق.
 (ج) 55° mi/h
 .٣. (الف) $3, 9 \text{ km/h}$ (ب) 13°
 .٥. (الف) 27 mm (ب) $24ns$ (ج) $10^8 \text{ cm/s} \times 10^8 \text{ cm/s} \times 10^8 \text{ cm/s}$
 .٧. (الف) سهمي (ب) $8tj + k$ (ج) سهمي
 .٩. 60°
- .١١. (الف) 514 ms (ب) $9, 94 \text{ ft/s}$
 .١٣. (الف) 18 cm (ب) $1, 9 \text{ m}$
 .١٥. (الف) $2, 0 \text{ s}$ (ب) 758 m (ج) $29, 7 \text{ m/s}$
 .١٧. خير
 .١٩. (الف) $1, 16 \text{ s}$ (ب) $1, 3 \text{ m}$
 (ج) $18, 8 \text{ m/s} : 18, 8 \text{ m/s}$ (د) خير
 .٢١. $76, 0^\circ$
- .٢٣. (الف) 99 ft (ب) 90 ft/s (ج) 180 ft
 .٢٥. (الف) 285 km/h (ب) 33°
- .٢٧. (الف) 310 ms (ب) $1, 9 \text{ m}$ و $2, 9 \text{ m}$ بالاتر از دستها.

- .٢٩. سومی
 .٣١. به
 .٤٥s (الف) 260 m/s (ب) 22 ft/s
 .٣٧. (الف) $9, 8 \text{ s}$ (ب) 270 ft
 (ج) $130 \text{ ft} : 40 \text{ m}$ تقريباً .٣٩

- .٤٥. (الف) 82 m
 (ب) 19 m/s
 .٤٧. (الف) 12 ft/s^2 ($3, 6 \text{ m/s}^2$)
 (ب) $3, 7 \text{ ft/s}$ ($1, 4 \text{ m/s}$)

- .٤٩. (الف) $9, 74 \text{ s}$
 (ب) -20 ft/s^2
 .٤١. (الف) $48, 5 \text{ m/s}$
 (ب) $4, 95 \text{ s}$

- .٤٣. (الف) $34, 3 \text{ m/s}$
 (ج) $3, 50 \text{ s}$

- .٤٥. (الف) $32, 4 \text{ m/s}$
 (ب) $6, 62 \text{ s}$

- .٤٧. عطارد
 .٤٧. $20, 22 \text{ cm}$, $4, 90 \text{ cm}$, $11, 0 \text{ cm}$, $19, 6 \text{ cm}$, 20 cm

- .٤٩. (الف) $3, 0 \text{ m}$ ($9, 8 \text{ ft}$)
 .٤١. (الف) 350 ms

- .٤٣. زیر دهانه.
 .٤٥. $13, 0 \text{ m/s}^2$, بالا
 .٤٧. (الف) $3, 41 \text{ s}$

- .٤٩. $57, 0 \text{ m}$
 .٤١. تقريباً 3 s

- .٤٧. (الف) $17, 1 \text{ s}$
 (ب) $29, 2 \text{ m}$
 .٤٧. $8, 8 \text{ cm}$

فصل ٣

١. جابه جاییها باید (الف) موادی، (ب) پادموازی، و (ج) عمود بر هم باشند.

٢. (الف) 370 m , 57° شمال شرق.
 (ب) اندازه جابه جایی = 37° متراً؛ مساحت طی شده = 720 متراً.

- .٧. (الف) 520° واحد، 52° شمال شرق.
 (ب) $8, 4$ واحد، 25° جنوب شرق

- .٩. والبول (زندان ایالتی)
 .١١. (الف) $4, 9 \text{ m}$, (ب) 12 m

- .١٣. $4, 76 \text{ km}$, 12

- .١٥. (الف) 28 Am , و (ب) 13 m

- .١٧. (الف) $10i + 12j + 14k$, (ب) 21 ft

- (ج) می تواند مساوی یا بزرگتر باشد، ولی نه کوچکتر
 (د) 26 ft

- .١٩. (الف) $3i - 2j + 5k$

۴۱. (الف) 12N (ب) صفر؛ 2kg (ج) 2kg
۴۲. 160lb (الف) 10^5N (ب) 10^5N (ج) 10^5N
۴۳. (الف) 18mN (ب) 2mN (ج) 15N
۴۴. (الف) 210m/s^2 (ب) 4000lb (ج) 710ft/s^2
۴۵. (الف) 18m/s (ب) 3.8m/s (ج) 4m/s
۴۶. (الف) 11° (ب) 40° (ج) 18.4kN
۴۷. (الف) 12ft/s^2 (ب) 22m/s (ج) 8ft/s^2
۴۸. (الف) 20m/s (ب) 120N (ج) 21m/s
۴۹. (الف) 10^5N (ب) 10^5N (ج) 10^5N
۵۰. (الف) $g \sin \theta$, به طرف پایین شبیب (ب) $g \sin \theta$, به طرف پایین شبیب (ج) $(g - a) \sin \theta$, به طرف پایین شبیب (د) $(g + a) \sin \theta$, به طرف پایین شبیب (ه) صفر (و) $m(g - a) \cos \theta$
۵۱. (الف) $T_1 = 2.5\text{N}$ (ب) $T_1 = 1.2\text{N}$ (ج) $T_1 = 2.5\text{N}$
۵۲. (الف) 125N (ب) 217m/s^2 (ج) 17.8N
۵۳. (الف) 10.5kN (ب) 12.1kN (ج) 10.5kN
۵۴. (الف) 55N (ب) 37N (ج) 55N
۵۵. (الف) 136kN (ب) 36m/s^2 (ج) 136kN
۵۶. (الف) $PM/(m+M)$ (ب) $P/(m+M)$ (ج) $P(m+2M)/2(m+M)$
۵۷. 130lb

فصل ۶

۱. 2.3°
 1.3m/s^2
 900N

۴۱. (الف) 20cm (ب) خیر؛ توب 4cm بالاتر از زمین به تور می‌خورد.
۴۲. بین زوایای 31° و 43° بالای افق.
۴۳. 115ft/s
۴۷. $D = v\sqrt{(2L/g)\sin \theta} - L \cos \theta$
- (ب) پرتا به در صورتی که D مثبت باشد از بالای سر ناظر می‌گردد و اگر D منفی باشد، به ناظر نمی‌رسد.
۴۹. 5.66s
۵۱. $8.98 \times 10^{12}\text{m/s}^3$
۵۳. 8.49km/s
۵۵. 119m/s
۵۷. 85.0km/s
۶۱. $92 = 9.6$
۶۳. 2.6cm/s^2
۶۵. 89.7m/s^2
۶۷. ثانیه؛ خیر
۶۹. باد از سمت غرب با سرعت 55mi/h می‌وزد.
۷۱. 21m/s
۷۵. (الف) 5.8m/s (ب) 17m (ج) 67° (د) 49°
۷۷. 170km/h ؛ 73° جنوب غرب
۷۹. (الف) 30° برخلاف جريان (ب) 69min
- (ج) 80min (د) 80min
- (ه) عمود بر جريان؛ 60min
۸۱. (الف) سر قافق زای باید 25° به طرف بالای رودخانه گرفته شود.
- (ب) 21h
۸۳. 8.83C
۸۵. (الف) $y = 22.8\text{m}$, $x = 17.7\text{m}$, $t = 2.16\text{s}$ (ب) $8.9 \times 10^{-3} \text{N}^{-10} \times 10^0 \text{m}$ (ج) 45.3m/s , $x = 195\text{m}$, $t = 4.31\text{s}$
- (د) $v_y = -21\text{m/s}$
- فصل ۵
۱. 4.3y
۳. (الف) $8.9 \times 10^{-3} \text{N}^{-10} \times 10^0 \text{m}$ (ب) 8.0cm/s^2
۵. 6500N
۹. (الف) 2.1cm/s^2 (ب) 10^5km
۱۱. (الف) $42\hat{i} + 34\hat{j}, \text{ms}$ (ب) $250\hat{i} + 34\hat{j}, \text{m}$
۱۳. (الف) $1.39 \times 10^4\text{N}$ (ب) 4.11y
۱۵. (الف) 1420lb (ب) 44.4slug
۱۷. (الف) 4040N (ب) 412kg

$$a_x = -3773 \text{ m/s}^2, v_y = 0, v_x = 3773 \text{ m/s}$$

$$a_y = -980 \text{ m/s}^2$$

$$y = 178 \text{ m}, x = 683 \text{ m}, t = 179 \text{ s}$$

$$a_x = -633 \text{ m/s}^2, v_y = 0, v_x = 317 \text{ m/s}$$

$$a_y = -980 \text{ m/s}^2$$

$$121 \text{ m}, 151 \text{ m}$$

$$(d) برای ۱۰ \text{ s}^{-1} : b = ۳۰ \text{ ر}^{\circ}$$

$$v_y = -185 \text{ m/s}$$

$$\text{برای } ۲۰ \text{ s}^{-1} : b = ۲۱ \text{ ر}^{\circ}$$

$$v_y = -164 \text{ m/s}, v_x = 211 \text{ m/s}$$

فصل ۷

۱. (الف) J ۵۸۰ (ب) صفر (ج) صفر
۳. (الف) J ۴۰۰ - (ب) J ۴۳۰ (ج) صفر
۵. (الف) $Mgd - \frac{3}{4}Mgd$ (ب) $\frac{3}{4}Mgd$
۷. (الف) J ۲۱۶۰ (ب) J ۱۴۳۰
۹. (الف) $215 \text{ lb} \times 10^3 \text{ ft.lb}$ (ب) 215 lb
۱۱. (الف) $\frac{800}{2} \text{ J} \cdot 13$ (ب) $\frac{3}{2}F \cdot x \cdot 13$
۱۵. (الف) $22 \text{ mm} \cdot 45 \text{ N}$ (ب) 22 mm
۱۷. (الف) $125 \text{ N} \cdot 60$ (ب) $J \cdot 60$
۱۹. (الف) 1200 km/s
- $DE : + !CD : - !Bc : + !Ab : + .21$
- .۲۳، خیر
- .۲۴. (الف) $20 \text{ ft.lb} \cdot 20 \text{ J}$ (پدر)، 482 m/s (پسر)
- .۲۷. (الف) $10^4 \times 90 \text{ مگاتن TNT}$ (ب) 45 km
- .۳۱. (الف) 455 m/s
- .۳۳. (الف) $30 \text{ fmJ} \cdot 175 \text{ J}$ (ب) -175 J
- .۳۵. (الف) $97 \text{ hp} \cdot 72^\circ \text{ W}$ (ب) 97 hp
- .۳۷. (الف) $24 \text{ W} \cdot 245 \times 10^4 \text{ ft.lb}$ (ب) $245 \times 10^4 \text{ ft.lb}$
- .۴۱. (الف) $903 \text{ kN} \cdot 41$
- .۴۳. (الف) $25 \text{ hp} \cdot 43$
- .۴۵. (الف) $71 \text{ kW} \cdot 77 \text{ mi}$ (ب) 77 mi
- .۴۷. (الف) $16.6 \text{ kW} \cdot 47$
- .۴۹. (الف) mtv_f/t_f (ب) t_f
- .۵۱. (الف) $2.66 \text{ hp} \cdot 51$
- .۵۳. (الف) $1.95 \text{ (ب) kW} \cdot 53$
- .۵۵. (الف) $10 \text{ kW} \cdot 55$
- .۵۷. (الف) $6432 F \cdot T/m \cdot 57$
- .۵۹. (الف) $\sqrt{mg/b} \cdot 59$
- .۶۱. (الف) $2.0 \times 10^{-5} \text{ N.s/m} \cdot 61$
- .۶۳. (الف) $1.3 \text{ m/s} \cdot 63$
- .۶۵. (الف) $\left(\frac{m}{b}\right) \ln(v_i/v_f) \cdot 65$
- .۶۷. (الف) $370 \text{ m} \cdot 67$
- .۶۹. (الف) $11.7 \text{ s} \cdot 69$
- .۷۱. (الف) $59.8 \text{ m/s} \cdot 71$
- .۷۳. (الف) $y = 20 \text{ m}, x = 80 \text{ m}, t = 1.95 \text{ s} \cdot 73$

۷. (الف) ۹۱ kN (ب) ۹۰ kN
۹. (الف) خیر (ب) نیروی ۱۲ پوندی به طرف چپ و نیروی ۵ پوندی به طرف بالا
۱۱. (الف) N ۱۱ (ب) N ۱۱ (ج) N ۱۱
۱۵. (الف) $v / 4g \sin \theta$ (ب) خیر
۱۷. (الف) $10 \text{ kg} \cdot 27 \text{ m/s}$
۱۹. (الف) $59 \text{ kN} \cdot 61 \text{ N} \cdot 66 \text{ N}$ (ب) 61 N (ج) 59 kN
۲۱. (الف) $70 \text{ lb} \cdot 70 \text{ lb}$
۲۳. (الف) $30 \text{ MN} \cdot 30 \text{ MN}$
۲۵. (الف) $124 \text{ m/s} \cdot 124 \text{ m/s}$ (ب) 124 m/s
۲۷. $g(\sin \theta - \sqrt{2} \mu_k \cos \theta) \cdot 27$
۲۹. (الف) $346 \text{ m/s}^2 \cdot 346 \text{ m/s}^2$ (ب) 346 m/s^2
۳۱. (الف) $86 \text{ m/s}^2 \cdot 86 \text{ m/s}^2$ (ب) 86 m/s^2
۳۳. (الف) $3200 \text{ N} \cdot 730 \text{ lb}$ (ب) 730 lb
۳۵. (الف) $92^\circ \cdot 92^\circ$ (ب) 92°
۳۷. $170^\circ \cdot 170^\circ$ (ب) 170°
۳۹. $32.39^\circ \cdot 32.39^\circ$
۴۱. (الف) $42^\circ \cdot 42^\circ$ (ب) 42°
۴۳. (الف) $125 \text{ lb} \cdot 125 \text{ lb}$ (ب) 125 lb
۴۵. (الف) $30 \text{ cm/s} \cdot 30 \text{ cm/s}$ (ب) 30 cm/s
۴۷. $170 \text{ cm/s} \cdot 170 \text{ cm/s}$ (ب) در امتداد شعاع به طرف مرکز
۴۹. (الف) در پایین دایره (ب) $337 \text{ N} \cdot 337 \text{ N}$
۵۱. (الف) $977 \text{ N} \cdot 977 \text{ N}$ (ب) 977 N
۵۳. (الف) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(\tan \theta + \mu_s)}{r(1 - \mu_s \tan \theta)}} \cdot 53$
۵۵. (الف) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(\tan \theta - \mu_s)}{r(1 + \mu_s \tan \theta)}} \cdot 55$
۵۷. (الف) $232 \text{ N} \cdot 232 \text{ N}$ (ب) 232 N
۵۹. (الف) $107 \text{ m/s} \cdot 107 \text{ m/s}$ (ب) 107 m/s
۶۱. $2.0 \times 10^{-5} \text{ N.s/m} \cdot 61$
۶۳. $1.3 \text{ m/s} \cdot 63$
۶۵. (الف) $\left(\frac{m}{b}\right) \ln(v_i/v_f) \cdot 65$
۶۷. (الف) $19 \text{ s} \cdot 67$
۶۹. (الف) $11.7 \text{ s} \cdot 69$
۷۱. $59.8 \text{ m/s} \cdot 71$
۷۳. $30^\circ, 762 \text{ m}, 805 \text{ m}, 823 \text{ m}, 828 \text{ m}, 819 \text{ m}$
۷۳. $y = 20 \text{ m}, x = 80 \text{ m}, t = 1.95 \text{ s} \cdot 73$

$$\begin{aligned} & ۱۰۰J \quad (d) \quad ۷۰kJ \quad (c) \quad ۸۰kJ \quad (b) \\ & y = -2.95m, x = 2.95m \quad (a) \\ & ۷۳. (الف) J_{۵۴۱}, J_{۵۴۲}, J_{۵۴۳} \quad (ب) J_{۳۸۳}, J_{۴۱۲}, J_{۴۱۵} \end{aligned}$$

فصل ۹

(ج)

$$x_1 = x_{cm} - (m_1/M)(L + a_i \cos \omega t)$$

$$x_2 = x_{cm} + (m_1/M)(L + d_i \cos \omega t)$$

$$v_1 = (m_1/M)d_i \omega \sin \omega t$$

$$v_2 = -(m_1/M)d_i \omega \sin \omega t$$

۳. زیر سطح زمین ۴۶۴۰ km (۱۷۳۰ km)

$$75.2 \text{ km/h. ۵}$$

$$mv/(m + M) \quad (\text{الف}) \text{ پایین:}$$

(ب) بالون دوباره ساکن می شود

$$L \quad (\text{الف}) \quad ۰ \quad (\text{ب}) \text{ صفر}$$

۱۱. (الف) در وسط فاصله دو جسم

(ب) را به طرف جسم سنگین تر حرکت می کند.

$$16.0 \text{ g} \quad (\text{الف}) \text{ پایین}$$

$$g(1 - 2x/L). ۱۳$$

$$55.2 \text{ kg. ۱۵}$$

۱۷. از میله سنگینی، در راستای محور تقارن

$$z_{cm} = 16 \text{ cm} \quad x_{cm} = y_{cm} = 20 \text{ cm. ۱۹}$$

۲۱. در فاصله $4R/3\pi$ از قاعدة تخت، روی محور تقارن

$$6. (الف) J \times 10^3 \times 10^4 \times 10^6 \text{ ر. ۲۲}$$

$$(b) \text{ kg.m/s} = 10^7 \times 10^6 \times 10^3 = 3.56 \times 10^17 \text{ جنوب شرق}$$

۲۵. (الف) $J_{۹۶}$ (ب) $P_i = 854 \text{ kJ/m/s}$ (د) $P_f = 854 \text{ kJ/m/s}$ (پ) $P_i = 854 \text{ kJ/m/s}$ (پ) $P_f = 854 \text{ kJ/m/s}$

$$78.6 \text{ kJ/m/s}$$

$$1.05 \text{ s} \quad (\text{ج})$$

۲۹. 10^3 ft/s ، به طرف عقب

$$wv_{rel}/(W + w). ۳۱$$

$$27.33$$

۳۵. (الف) محفظه موشک: 2290 m/s : مواد منفجره: 8200 m/s

(ب) قبل: 12.71 GJ ؛ بعد: 12.75 GJ

۳۷. (الف) 10^{22} kg.m/s (ب) 10^{22} eV از مسیر الکترون و

از مسیر نوترون (ب) 10^0 eV

$$163 \text{ m/s} \quad (\text{الف}) 746 \text{ m/s} \quad (\text{ب}) 746 \text{ m/s} \quad (\text{ج}) 1.0 \text{ eV. ۴۱}$$

$$u = \frac{m}{m + M} \quad (\text{الف}) \quad \left(\frac{u \cos \alpha}{\sqrt{1 - u \cos^2 \alpha}} \right) \sqrt{2gh}. ۴۲$$

$$u = \frac{m}{m + M}$$

۶۱. (الف) $c = 13 \text{ m/s}$ (ب) $E_k = 46 \text{ keV}$ (ج) کمتر از 3 MeV درصد

۶۳. (الف) $E_k = 11 \text{ MeV}$ (ب) $E_k = 11 \text{ MeV}$ (ج) $E_k = 10 \text{ MeV}$

فصل ۸

$$110 \text{ MN.m. ۱}$$

$$2.4 \text{ kJ} \quad (\text{ب}) 2.4 \text{ kJ} \quad (\text{ج}) 2.4 \text{ kJ. ۲}$$

$$2.15 \text{ m/s. ۵}$$

$$2.94 \text{ kJ} \quad (\text{ب}) 2.94 \text{ kJ} \quad (\text{ج}) 2.94 \text{ kJ. ۷}$$

$$a = 158 \text{ m/s} \quad (\text{ب}) 158 \text{ m/s} \quad (\text{ج}) 158 \text{ m/s. ۸}$$

$$1.1 \text{ m/s} \quad (\text{ب}) 1.1 \text{ m/s} \quad (\text{ج}) 1.1 \text{ m/s. ۹}$$

$$83 \text{ ft. ۱۱}$$

$$2.75 \text{ m/s. ۱۳}$$

$$137 \text{ MW} \quad (\text{ب}) 1300 \text{ MW} \quad (\text{ج}) 1300 \text{ MW. ۱۵}$$

$$4.24 \text{ m. ۱۹}$$

$$4.22 \text{ m} \quad (\text{ب}) 4.22 \text{ m} \quad (\text{ج}) 4.22 \text{ m. ۲۱}$$

$$mgL/32. ۲۳$$

$$11.1 \text{ cm. ۲۵}$$

۲۷. (الف) 8.06 mg به طرف چپ خط قائم

$$5R/2 \quad (\text{ب}) 5R/2 \quad (\text{ج}) 5R/2. ۲۷$$

$$U(x) = -Gm_1 m_2 / x. ۲۹$$

$$Gm_1 m_2 d / x_1 (x_1 + d) \quad (\text{ب})$$

$$6.92 \text{ J} \quad (\text{ب}) 6.92 \text{ J} \quad (\text{ج}) 6.92 \text{ J. ۳۱}$$

$$4.48 \text{ cm} \quad (\text{ب}) 4.48 \text{ cm} \quad (\text{ج}) 4.48 \text{ cm. ۳۵}$$

$$\theta = \sin^{-1}(1/3) \quad (\text{ب}) \sqrt{5gR} \quad (\text{ج}) 10^{-11} \text{ J} \times 10^{-12} \times 10^{-13} \text{ J. ۳۷}$$

$$M \approx 1 \times 10^{-14} \text{ N} \quad (\text{د}) 1 \times 10^{-14} \text{ N} \times 10^{-14} \text{ N. ۴۱}$$

$$-U_r(r_0 r^{-2} + r^{-1})e^{-r/r_0} \quad (\text{الف}) -U_r(r_0 r^{-2} + r^{-1})e^{-r/r_0} \quad (\text{ب})$$

$$8.8 \times 10^{-6} \text{ m. ۴۵}$$

$$391 \text{ J} \quad (\text{ب}) 391 \text{ J} \quad (\text{ج}) 391 \text{ J. ۴۷}$$

$$-2.63 \text{ kJ} \quad (\text{ج})$$

$$39 \text{ kW. ۴۹}$$

$$472 \text{ kJ. ۵۱}$$

$$4.19 \text{ m. ۵۳}$$

$$6.5 \text{ cm/s. ۵۵}$$

$$48.7 \text{ m/s} \quad (\text{ب}) 48.5 \text{ kJ} \quad (\text{ب}) 48.5 \text{ kJ. ۵۷}$$

$$240 \text{ ft/s} \quad (\text{ب}) 240 \text{ ft/s} \quad (\text{ب}) 240 \text{ ft/s. ۵۹}$$

$$48.8 \text{ ft} \quad (\text{د}) 48.8 \text{ ft} \quad (\text{د}) 48.8 \text{ ft. ۶۱}$$

$$263000 \text{ y} \quad (\text{ب}) 263000 \text{ y} \quad (\text{ب}) 263000 \text{ y. ۶۱}$$

$$1.0 \text{ kg می شود} \quad (\text{ب}) 1.0 \text{ kg می شود}$$

$$266 \text{ برای محیط استوای زمین} \quad (\text{ب}) 266 \text{ برای محیط استوای زمین. ۶۵}$$

$$191 \text{ eV. ۶۷}$$

$$2.21 \text{ eV. ۶۹}$$

$$-12.5 \text{ kJ} \quad (\text{ب}) -12.5 \text{ kJ} \quad (\text{ب}) -12.5 \text{ kJ. ۷۱}$$

- (ج) -262N.m
۱۵. (الف) 49N.m (ب) 8rad
- (ج) $J = 30 - 23\text{W}$ (د) 17
۱۷. مرکز جرم درجهت نیروی ضربه‌ای با سرعت 90m/s حرکت می‌کند؛ چوب با سرعت زاویه‌ای 7rad/s حول مرکز جرم دوران می‌کند.
۲۱. (ب) $ML^2/(L^2 + 12d^2)$
۲۵. (الف) 18s (ب) 60m
- (ج) 7m/s (د) 5rev/min
- $mv/(m + M)R$
۳۱. (الف) 71 دور بر دقیقه (ب) 792rad/s
۳۳. (الف) 12mrad/s (ب) 90cm/s
- $MR^2\omega_0^2/2 : MR^2\omega_0^2/4$
- (ب) $\omega_0 = R\omega_0^2/2g$ (ج) $\omega_0 = \sqrt{2gr\sec\theta}$
۳۹. (الف) هر یک در دایره‌ای به شعاع 46m را با سرعت زاویه‌ای 90rad/s دوران می‌کند.
- $K_b = 41\text{J}$; $K_a = 7.5\text{J}$ (ج) 12rad/s (ب) 127rev/min
۴۱. (الف) 1 دقیقه

فصل ۱۴.

۱. (الف) دو (ب) هفت

۵. (الف) 2.5m (ب) 30°

۷. (الف) می‌لغزد؛ 31° (ب) واژگون می‌شود؛ 34°

120lb

۱۱. (الف) 2.78kN (ب) 3.89kN

۱۳. پایه چپ: 17kN (الف) (کشنش)

پایه راست: 89kN (تراکم)

۱۵. سه چهارم طول تیر از کارگری که انتهای آن را گرفته است.

۱۷. 91kN را = نیروی عضله، به طرف بالا، 3W

255kN = نیروی استخوان، به طرف باین، 4W

$$W\sqrt{h(2r-h)}/(r-h)$$

$$F_1 = w \sin\theta_1 / \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

(ب) $F_1 = w \sin\theta_1 / \sin(\theta_2 - \theta_1)$ (الف) نیروی استخوان، به طرف باین، 4W

$$172\text{N} \quad (ب) \quad 228\text{N}$$

$$25. (الف) 47.0\text{lb} \quad (ب) 21.3\text{lb}$$

$$27. (الف) 146.0\text{lb} \quad (ب) 122.0\text{lb}$$

$$29. (الف) Wx/L\tan\theta \quad (ب) Wx/L\sin\theta$$

$$(ج) W(1 - x/L)$$

$$31. (الف) لولای پایین: $F_v = 210\text{lb}$, $F_h = 180\text{lb}$$$

$$F_v = 60\text{lb}$$
, $F_h = 180\text{lb}$ لولای بالا:

فصل ۱۲

۱. (الف) 130.5g.cm^2 (ب) 545g.cm^2 (ج) 185.0cm^2

$$3. 675 \times 10^{-12}\text{rad/s}$$

$$5. 6490\text{kg.m}^2$$

$$4. 36\text{MJ}$$

$$7. 97\text{kg.m}^2$$

$$9. MR^2/4$$

$$13. dm/M = 2rdr/R^2$$

$$dI = 2Mr^2dr/R^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$15. 366\text{N.m}$$

۱۶. عمود بر صفحه به طرف داخل

۱۷. عمود بر صفحه به طرف خارج

$$19. 63\text{rad/s}^2$$

$$21. 28.2\text{rad/s}^2$$

$$23. 136\text{kW}$$

$$25. (الف) 1.49\text{Gy} \quad (ب) 2.57 \times 10^{21}\text{J}$$

$$27. 690\text{rad/s}$$

$$29. 2\theta/t^2$$

$$T_1 = M(g - 2R\theta/t^2)$$

$$T_1 = Mg - (2\theta/t^2)(MR + 1/R)$$

$$31. 1.73 \times 10^5\text{g.cm}^2$$

$$33. 11\text{m/s}$$

$$35. (الف) 7.67\text{rad/s}^2$$

$$35. (الف) 25.8\text{kJ}$$

(ج) انرژی اتنا لف شده در اثر اصطکاک برابر با 45.8kJ است.

$$37. (الف) 4.82 \times 10^5\text{N} \quad (ب) 1.2 \times 10^4\text{N.m}$$

$$39. (الف) 1.88 \times 10^{12}\text{J/s}$$

$$39. (الف) 2.67 \times 10^{-22}\text{rad/s}^2$$

$$41. 4.06 \times 10^4\text{N}$$

$$41. (الف) 47.9\text{km/h}$$

$$43. 868\text{kW}$$

$$45. (الف) 56.5\text{rad/s}$$

$$45. (الف) 69.2\text{m}$$

$$47. (الف) 12.5\text{cm/s}^2$$

$$47. (الف) 28.8\text{rev/s}$$

$$49. 48\text{m}$$

$$51. (الف) W/6$$

$$55. a = F/M \quad \alpha = 2F/MR$$

$$57. (الف) 57.9\text{rad/s}$$

فصل ۱۳

$$5. mvd$$

$$11. (الف) 4.17\text{m/s}^2$$

$$11. (الف) -16.9\text{rad/s}^2$$

- (ب) $F_v = 60\text{lb}$, $F_h = 180\text{lb}$ وارد بر هر تیر، در جهت‌های مخالف
۴۱. 75GN/m^2
۴۲. $3,65\text{mm}$
۴۳. 201kN
۴۴. دور بر دقتیقه $80\text{~}2$.
۴۵. (الف) 144MN (ب) $180\text{~}1$ (ج) 16
۴۶. $F_E = 72\text{lb}$; $F_A = 120\text{lb}$ (ب) 47lb (الف) 446N (ب) $450\text{~}0$ (ب) 45° به طرف بالا
۴۷. (الف) بله، 315N (ب) $L/2$, $L/4$, $L/6$ (ج) $n = n$

نمایه

- ~ سکون ۱۸۷
 ضرایب تبدیل ~ ۳۷۰
 کوانتش ~ ۱۸۸-۱۸۹
 ~ مکانیکی دستگاه ذرات ۱۸۴
 انرژی پتانسیل ۱۷۳-۱۷۴
 تعریف ~ ۱۷۳
 تغییر ~ ۱۷۳
 ~ در سیستم پایستار یک بعدی ۱۷۴-۱۷۵
 ~ در نیروی فنر ۱۷۵-۱۷۶
 ~ گرانش ۱۷۶-۱۷۷
 ~ یوکاوا ۱۹۷
 انرژی جنبشی ۱۵۶-۱۵۸
 ~ برخورد ۲۳۷
 تعریف ~ ۱۵۶
 ~ در سرعتهای زیاد ۱۶۱
 ~ دورانی ۲۷۵-۲۷۸
 ~ غلتش بدون لغش ۲۹۰
 فرمول کلی ~ ۱۶۱
 ~ نوتوفنا ۱۵۷
- باريون ها ۳۶۶
 برخورد(های) ۲۲۲-۲۲۳
 پارامتر ~ ۲۴۱
 پایستگی تکانه در ~ ۲۲۴-۲۳۵
 تعریف ~ ۲۲۲-۲۲۳
 چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۴-۲۴۷
 ~ خطی ۲۳۷
 ~ در پک بعد ۲۳۷-۲۴۰
- مقاومت ~ ۱۱۹
 اطلاعات نجومی ۳۵۸
 ~ زمین ۳۵۸
 ~ ماه ۳۵۸
 (انتقال) ~
 ترکیب حرکتهای دورانی و ~ ۲۸۸-۲۹۴
 ~ جسم صلب ۲۶۰
 ~ دستگاه مختصات ۴۵
 قانون دوم نیوتون برای حرکت ~ ۲۹۲
 انگریل ۳۷۳
 ~ خط ۱۰۵
 اندازهگیری ۱۲
 استانداردها در ~ ۲-۴
 تحلیل ابعادی در ~ ۱۱-۱۲
 ~ جرم ۹-۱۰
 دقت و رقمهای یابنی در ~ ۱۰-۱۱
 ~ زمان ۵-۶
 سیستم بین المللی یکایها در ~ ۴-۵
 ~ طول ۶-۸
 انرژی
 ~ بستگی ۲۰۰
 پایستگی ~ در سیستمهای پایستار یک بعدی ۱۷۴-۱۸۱
 ~ تقسیک ۱۷۹-۱۸۰
 جرم و ~ ۱۸۶-۱۸۸
 ~ داخلی ۱۸۳
 اساس میکروسکوپیک ~ ۱۸۵
 ~ در سیستمی از ذرات ۲۱۵-۲۱۸
- آزمایشگاه شتابدهنده ملی فرمی ۲۴۷
 آونگ
 بالیستیک ۲۴۰
 مخروطی ۱۲۴-۱۲۶
- اثر تبرکمان ۲۲۲
 اجسام چرخان
 پایداری ~ ۳۱۴-۳۱۵
 تکانه زاویه ای ~ ۳۱۷-۳۱۸
- اجسام صلب
 انرژی جنبشی دورانی ~ ۲۷۵
 تعادل ~ در میدان گرانشی ۲۲۸-۳۳۹
 حرکت انتقالی ~ ۲۶۲
 دوران محض ~ ۲۵۹-۲۶۰
 دینامیک دورانی ~ ۲۸۳-۲۸۸
 کشسانی ~ ۳۳۹-۳۴۳
 گرانیگاه ~ ۳۳۰-۳۳۲
 لختی دورانی ~ ۲۷۸-۲۸۰
- استقامت
 ~ سلسیم ۲۴۱-۳۴۲
 ~ حدی ۲۴۱-۳۴۲
 اسکالارها ۴۲
 اصطکاک(ی) ~
 اساس میکروسکوپی ~ ۱۱۹-۱۲۰
 ~ ایستایی ۱۱۷-۱۱۸
 ~ جنبشی ۱۱۸
 ~ شاره ها ۱۲۹-۱۳۱
 ~ غلتشی ۱۱۹

تصویرگیری تشدید مغناطیسی ۳۱۹	~ فضانوردان ۹۷	~ دو بعدی ۲۴۰-۲۴۴
تعادل		ضریبه و نکانه در ~ ۲۲۳
~ استاتیکی ۲۲۹	پارامتر برخورد ۲۴۱	~ کاملاً ناکشسان ۲۲۷
~ پایدار ۱۷۸	پایداری اجسام چرخان ۳۱۴-۳۱۵	برخوردهای کشسان ۲۳۷-۲۳۹
~ خشی ۱۷۸	پایداری سیستمی ۳۱۴	~ پرتتابه پر جرم ۲۳۹
~ مکانیکی ۳۲۹	پایستگی انرژی ۱۷۰-۱۹۰	پایستگی نکانه در ~ ۲۲۷
تعریف ~ ۳۲۹	جواب تحلیلی ~ در سیستم پایستار یک بعدی ۱۷۹	~ جرم‌های مساوی ۲۲۸
~ نایپایدار ۱۷۸	حل ~ در سیستم پایستار یک بعدی ۱۸۰-۱۸۱	~ دو بعدی ۲۴۰-۲۴۱
تعادل اجسام صلب ۳۲۹	~ در حد کوتاه‌ومی ۱۸۸	چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۶
برخورددها در ~ ۲۲۹-۳۳۰	~ در دستگاه ذرات ۱۸۲-۱۸۵	~ هدف پر جرم ۲۳۸
~ در میدان گرانشی ۲۳۸-۳۳۹	~ سیستمهای پایستار دو و سه بعدی ۱۸۱-۱۸۲	~ یک بعدی ۲۳۷
کشسانی در ~ ۳۳۹-۳۴۳	~ در گرانش ۱۷۰-۱۷۱	چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۴
گرانشگاه در ~ ۲۳۱-۲۳۲	~ در مقیاس میکروسکوپی ۱۸۸-۱۸۹	برخوردهای ناکشسان ۲۳۹
متالهایی از ~ ۳۳۲-۳۳۸	~ در نیروی اصطکاک ۱۷۱	~ دو بعدی ۲۳۹
تعریف کار مکانیکی ۵۱	~ در قانون تعیینی ۱۸۴	ذرات بهم چسبیده در ~ ۲۳۹
تغییر شکل ۳۴۰	قانون ~ ۱۸۴	~ یک بعدی ۲۳۹
تقارن محوری ۳۰۸	~ مکانیکی ۱۷۲-۱۷۵	چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۴-۲۴۵
تقریب زاویه کوچک ۶۶	~ نیروی فنر ۱۸۳-۱۸۴، ۱۷۰-۱۷۱	بردارها ۴۱-۵۲
نکانه	پایستگی پاریته ۵۲	تصویر ~ ۴۳
پایستگی ~ ۲۳۵-۲۳۷	پایستگی نکانه ۲۲۵-۲۳۷	تعریف ~ ۵۰، ۴۲
~ در برخورد ۲۳۳	~ خطی ۲۱۱-۲۱۵	تقارن انعکاسی ~ ۵۱
~ در سرعت زیاد ۲۱۱-۲۱۲	~ راویه‌ای ۳۱۱-۳۱۲	حاصل ضرب اسکالار ~ ۱۴۹
~ ذرات ۲۱۱-۲۱۲	~ اسکیت باز چرخنده ۳۱۲-۳۱۳	حاصل ضربهای تعیین‌بافته ~ ۴۹
~ سیستمی از ذرات ۲۱۱	~ در ستاره‌های رمینde ۳۱۵	~ در دو بعد و سه بعد ۵۹-۶۲
قانون دوم نیوتون در ~ ۲۱۹	~ در شیرجه از روی تخته فنری ۳۱۳	دستگاه مختصات ~ ۴۵
نکانه خطی	پایستگی جرم ۱۸۷	ضرب ~ ۲۷۱، ۴۷-۴۹
پایستگی ~ ۲۱۱-۲۱۵	برتوژی ۱۸۶-۱۸۸	قطبی ۵۱
~ ذرات ۲۱۱-۲۱۲	پلاستیک ۴۰	کمیتهای دورانی به صورت کمیتهای ~ ۲۶۳-۲۶۵
~ سیستمی از ذرات ۲۱۱	پیچ با شب عرضی ۱۲۴	~ محوری ۵۲
نکانه زاویه‌ای ۳۱۹-۳۰۳	ناش گاما ۱۸۶-۱۸۷	معادلات تبدیل ~ ۵۰
~ اجسام مقابله ۳۱۱-۳۱۲	تابع انرژی پتانسیل برای نیروهای پایستار ۳۳۸	مؤلفه‌های ~ ۴۳-۴۵
~ در پرایر اجسام نامتقابله ۳۱۱	ناسور ۴۹	~ در دو بعد و سه بعد ۶۲
~ اجسام نامتقابله ۳۱۱-۳۱۲	تبی آخر ۲۷۱	~ ناوردا ۵۰
پایستگی ~ ۳۱۱-۳۱۲	تحلیل ابعادی ۱۱-۱۲	نیرو به صورت ~ ۸۹
~ اسکیت باز چرخنده ۳۱۲-۳۱۳	ترازوی دوکنه‌ای ۹۸	برد افقی پرتا به ۶۳
~ چرخ چرخان دوچرخه ۳۱۲-۳۱۴	ترازوی فنر ۹۸	برش (ی) ۳۴۱
~ در پایداری اجسام چرخان ۳۱۴-۳۱۵	تراکم ۳۴۰	نیروهای ~ ۳۴۱
~ در شیرجه از روی تخته فنری ۳۱۳	تبديل سرعهای اینشتین ۷۳	برنامه‌های کامپیوتری ۳۷۴-۳۷۷
~ ستاره‌های رمینde ۳۱۵	تشدید مغناطیسی هسته‌ای ۳۱۸-۳۱۹	برندگان جایزه نوبل ۳۷۸-۳۸۴
تعریف ~ ۳۰۳	تصویر ۴۳	بسط لگاریتمی ۳۷۲
~ ذاتی ۳۱۸		بسط مایلی ۳۷۲
~ ذره ۳۰۴-۳۰۶		بی وزنی ۹۷

شباب زاویه‌ای در ~ ۲۶۱، ۲۶۶	حد کشسانی ۳۴۰	رباطه ~ با گشتاور نیرو ۳۰۵
قاعدۀ دست راست در ~ ۲۶۴	حرکت ۱۷_۳۱	~ سیستم ذرات ۳۰۵_۳۰۷
کمیته‌ای ~ به صورت کمیته‌ای برداری ۲۶۳	~ با سرعت ثابت ۱۸	~ فرفره چرخان ۳۱۷_۳۱۸
متغیرهای ~ ۲۶۰_۲۶۲	~ با سرعت متوسط ۱۹_۲۰	قاعدۀ دست راست در ~ ۳۰۵
~ محض در اجسام صلب ۲۵۹_۲۶۰	~ با شباب ثابت ۲۵_۲۷	کوانتش ~ ۳۱۸_۳۱۹
مؤلفه‌های مماسی و شعاعی شباب زاویه‌ای در ~ ۲۶۶	~ در دو بعد و سه بعد ۶۰_۶۲	~ گشتاور نیرو ۳۰۵_۳۰۶
	~ پتانسی ۱۲۹_۱۳۱، ۶۲_۶۶	~ مدلاری ۳۱۸
	~ با مقاومت هوا ۱۳۰_۱۳۱	~ و سرعت زاویه‌ای ۳۰۸_۳۱۱
خصوصیات سیاره‌ها ۳۵۹	تصویف ~ ۱۷_۱۹	تشن ۳۴۰
خطای اندازه‌گیری ۱۰_۱۱	جابه‌جایی ~ ۵۸_۵۹	تعريف ~ ۳۴۱
خوشید ۳۵۸	~ جسمی که به مانع برخورد و باز می‌گردد ۱۹، ۲۲	تنظیم‌کننده سرعت ۱۶۸
اطلاعات نجومی ~ ۱۸۷	~ دو بعدی و سه بعدی ۵۸_۷۴	توان ۱۵۸_۱۵۹
تغییر جرم ~ ۱۸۷	~ ذرات ۱۷	تعريف ~ ۱۵۸
دستگاه مختصات ۴۵	~ زدن هدف در حال سقوط ۶۴_۶۶	ضرایب تبدیل ~ ۳۷۰
دوران ~ ۴۵	سرعت ~ ۵۸_۵۹	تولید زوج ۱۸۶
دینامیک آشوبناک ۱۳۶	سرعت لحظه‌ای ~ ۲۰_۲۳	ثابت(های)
دینامیک چیز غلتان ۲۸۸_۲۸۹	~ سقوط آزاد اجسام ۲۷_۳۱	~ اووگادرو ۱۰
دینامیک دورانی ۲۷۴_۲۹۴	شباب ~ ۱۸، ۵۸_۵۹، ۲۳_۲۴، ۲۰	~ بنیادی ۳۵۶
~ اجسام صلب ۲۸۳_۲۸۸	~ شبتابدار و ترمز ماشین ۲۲_۲۳، ۱۸_۱۹	~ پلانک ۱۸۹، ۱۲
ازری جنبشی در ~ ۲۷۵_۲۷۷	قانون دوم ~ ۲۱۱_۲۱۲	~ گرانش ۱۲
ترکیب حرکتهای دورانی و انتقالی در ~ ۲۸۸_۲۹۴	~ گلوله خمیر چسبنده ۲۲_۲۳، ۱۹	~ نیرو ۱۵۳
خلاصۀ معادلات مریبوط به ~ ۳۲۰	~ مرکز جرم ۲۱۷	
~ غلتش بدون لغزش ۲۸۹	~ نسبی ۷۰_۷۴	جابه‌جایی ۴۱
قضیة کاراازری در ~ ۲۷۵	~ در سرعت زیاد ۷۳_۷۴	~ حرکت دو بعدی و سه بعدی ۵۸_۵۹
قضیة محورهای موازی در ~ ۲۷۷_۲۷۸	نقطای بازگشت ~ ۱۷۸	جدول تاثیب عناصر ۳۶۴
~ گشتاور نیروی وارد بر ذره ۲۸۱_۲۸۳	حرکت دایره‌ای	جرم ۸۹_۹۰
~ لختی ۲۷۵	سرعت ~ و بردارهای شباب ۶۸_۷۰	پایستگی ~ ۱۸۷
مقایسه ~ با معادله دینامیک خطی ۲۸۴_۲۸۵	شباب مماسی در ~ ۶۹_۷۰	~ در استاندارد SI ۹_۱۰
	~ بکوتاخت ۶۶_۶۸	~ در سیستم SI ۹_۱۰
ذرات بنیادی ۳۶۵	~ آونگ مخروطی ۱۲۳_۱۲۴	رباطه ~ وزن ۹۶_۹۷
برخورد میان ~ ۲۳۳	~ پیچ با شبیب عرضی ۱۲۴	ضرایب تبدیل ~ ۳۶۸
پایستگی ازری ~ ۱۸۳_۱۸۶	دینامیک ~ ۱۲۲_۱۲۵	~ کل ۲۰۲
نکانه خطی ~ ۲۱۰_۲۱۱	~ گردونه ۱۲۴_۱۲۵	~ و انرژی ۱۸۶_۱۸۸
سینتاتیک ~ ۱۷	حرکت دورانی ۲۵۹_۲۶۸	
گشتاور نیروی وارد بر ~ ۲۸۱_۲۸۳	~ با شباب زاویه‌ای ثابت ۲۶۲_۲۶۳	چارچوبهای مرجع ۱۵۹_۱۶۱
گشتاور وارد بر ~ که در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند ۳۱۰_۳۱۱	جابه‌جایی زاویه‌ای در ~ ۲۶۱	تبدیل سرعت بین ~ ۲۴۴
~ مرکب ۳۶۶	روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای به صورت اسکالار در ~ ۲۶۵_۲۶۷	~ لخت ۱۳۲_۱۳۴، ۸۱_۷۲
میدان ~ ۳۶۵	روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای به صورت اسکالار و بردار در ~ ۲۶۷_۲۶۸	~ مرکز جرم ۲۴۴_۲۴۷
رقمهای با معنی ۱۰	سرعت زاویه‌ای در ~ ۲۶۱	~ نالخت ۱۳۲_۱۳۴

روشنگ در اندازه‌گیری شتاب سقوط آزاد	۳۰-۳۱	سیستم ذرات
زمان برواز	۱۵۷	انرژی در ~
مؤلفه‌های مماسی و شعاعی ~	۲۱۹-۲۲۳	با جرم متغیر
شکل گالیله‌ای قانون تبدیل سرعتها	۲۰۳-۲۰۷	بس ذره‌ای
ضرایب تبدیل	۲۱۱	تکانه خطی ~
ضرایب مقناتیسی	۲۰۵-۲۰۷	تکانه زاویه‌ای ~
ضریب نقطه‌ای	۲۰۱-۲۰۳	دوذره‌ای ~
ضریب زاویه‌ای	۲۱۱	چرخان ~
ضریب اصطکاک	۲۱۵-۲۱۸	کار در ~
ایستایی	۱۵۰	گشتاور نیروی خارجی ~
جنبی	۱۴-۹۵	سیستم cgs
متغیر	۲۰۳-۲۰۸	کار در ~
میدان مغناطیسی	۲۰۱-۲۰۳	سیستمهای بس ذره‌ای
ضرب نقطه‌ای	۱۷	سینماتیک ذرات
شبکه	۳۲۹	
شبیدار	۵۲	
شبکار	۲۱۷	
شیدنیرو	۱۳۲-۱۳۴	
شتاب	۲۲-۲۴، ۲۱، ۱۸	
بردارهای ~ در حرکت دایره‌ای	۶۷-۶۹	
ثابت	۲۵-۲۷	
در دور بعد و سه بعد	۶۰-۶۲	
تعريف	۲۳	
حرکت دو بعدی و سه بعدی	۵۸-۵۹	
روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای ~	۲۶۷	
سقوط آزاد	۲۷-۳۱	
اندازه‌گیری ~	۳۰-۳۱	
گالیله	۳۰-۳۹	
شعاعی	۶۷-۶۸	
کاهنده	۲۳	
لحظه‌ای	۵۱، ۲۳	
مرکز جرم	۲۰۴	
مرکزگرا	۷۰، ۶۷-۶۹	
مؤلفه‌های مماسی و شعاعی ~	۲۶۶	
مماسی	۶۹-۷۰	
در حرکت دایره‌ای	۶۹-۷۰	
وجم	۸۹-۹۰	
شتابدهنده ذرات	۲۴۶-۲۴۷	
شتاب زاویه‌ای		
سیستم زاویه‌ای	۵۲	
در حرکت دایره‌ای	۲۶۱	
سقوط آزاد اجسام	۲۷-۳۱	
سیستم برینتیابی		
کار در ~	۱۵۰	
یکاهای نیرو در ~	۹۵	
سیستم بین‌المللی SI	۲۵۶، ۳۵۴، ۵-۴	
کار در ~	۱۵۰	
متر در ~	۶-۸	
یکاهای در ~	۳۵۴	
یکاهای نیرو در ~	۹۵	

راپطة تکانه زاویه‌ای با ~	۳۰۵	س~ برداری ۵۰-۵۱	قاعده دست راست
~ خارجی	۳۰۵	س~ پایستگی ۱۵۶	~ برای حاصل ضرب برداری ۴۸
~ ناشی از گرانی	۳۳۱	س~ نیرو ۱۱۷، ۸۷	~ در تکانه زاویه‌ای ۳۰۵
~ وارد بر بک ذره	۲۸۱-۲۸۳	س~ در فنر ۱۵۲	~ در حرکت دورانی ۲۶۴
~ که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند	۳۱۰-۳۱۱		قانون
یکاهای ~	۲۸۲		~ پایستگی انرژی ۱۸۴
لپتون‌ها	۲۶۵	تعريف ~ ۱۴۸-۱۵۰	~ تبدیل سرعت ۷۱
لختی	۸۸	س~ در سیستمی از ذرات ۲۱۵-۲۱۸	~ جایه‌جایی در جمع بردارها ۴۲
~ دورانی	۲۷۴-۲۷۷	ضاییب تبدیل ~ ۳۷۰	~ دارسی ۱۶
اجسام صلب	۲۷۸-۲۷۹	س~ نیروی ثابت ۱۴۸-۱۵۱	~ دوم حرکت ۲۱۱-۲۱۲
گشتاور ~	۲۷۴	یکاهای ~ ۱۵۰	~ شرکت‌پذیری در جمع بردارها ۴۲
ماده تاریک	۱۳۵	سی که نیروی متغیر یک بعدی انجام می‌دهد	~ لختی ۱۸
ماشین آزوود	۱۰۳	۱۵۴-۱۵۵	~ هوک ۱۵۳
ماهواره‌ای در مدار زمین	۹۳	سی که نیروی متغیر یک بعدی انجام می‌دهد	قانون اول نیوتون ۸۷-۸۸
مثلثاتی		۱۵۱-۱۵۴	قانون دوم نیوتون ۹۱-۹۳، ۵۱
اتحادهای ~	۳۷۲	کاربردهای قوانین نیوتون ۹۸-۹۹	ازشیابی ~ ۱۳۵
بسط ~	۳۷۲	کرنش ۳۴۰	در آونگ محرومی ۱۲۳-۱۲۴
توابع ~	۳۷۱	سنج ۳۴۰	در اصطکاک ۱۱۹-۱۳۰
محدودیتهای قوانین نیوتون	۱۳۴-۱۳۶	کشسانی	~ شاره‌ها ۱۲۹
مدل بوریای اتم هیدروژن	۱۴۲	اجسام صلب ۳۳۸-۳۴۲	~ در پیچ با شبیب عرضی ۱۲۴
مدول		برش ~ ۳۴۱	~ در حرکت انتقالی ۲۹۲
~ برشی	۳۴۱	تراکم ~ ۳۴۰	~ در حرکت دایره‌ای یکنواخت ۱۲۲
~ کشسانی	۳۴۰	خواص ~ مواد ۳۴۲	~ در گردونه ۱۲۴
~ یانگ	۳۴۰	کشن ~ ۳۴۰	مشابه دورانی ~ ۲۷۴
مرز سیستم	۱۸۲-۱۸۳	کشن ۳۴۱، ۹۹	یکاهای در ~ ۹۵-۹۶
مرکز چرم	۲۰۴-۲۱۲	کوارکها ۲۶۵	قانون سوم نیوتون ۹۲-۹۴
~ اجسام صلب	۲۰۸-۲۱۱	کوانتم ۱۸۹	صورت قوی ~ ۳۰۵
چارچوب مرجع ~	۲۴۴-۲۴۷	گرانش	قرارداد عالمت ۱۸۳
سرعت ~	۲۴۴	انرژی پتانسیل ~ ۱۷۶-۱۷۷	قطراهای باران ۱۲۹
شتاب ~	۲۰۴	پایستگی انرژی در ~ ۱۷۰-۱۷۱	قضیه
~ سیستم زمین-ماه	۲۰۵	ثابت بینایی ~ ۱۲	دوچمله‌ای ۳۷۲
کار ~	۲۱۷	س~ در گرانیگاه اجسام صلب ۳۳۱-۳۳۲	ضربه-تکانه ۲۳۴
~ گرانیگاه	۳۳۱	شتاب مربوط به ~ ۲۷-۲۸	فیثاغورس ۳۷۱
معادله ~	۲۱۷	گشتاور ناشی از ~ ۳۳۱	محورهای موازی ۲۷۷-۲۷۸
مرکز شتابدهنده خطی استانفورد	۲۴۷	گرانیگاه اجسام صلب ۳۳۱-۳۳۳	قضیه کارانرژی ۱۵۶-۱۵۸
مزون‌ها	۳۶۶	گردونه ۱۲۴-۱۲۵	ایثار کلی ~ ۱۵۶-۱۵۸
مشتقتها	۳۷۳	گسبیل پوزیترون ۱۸۶	در دینامیک دورانی ۲۷۵
معادله(های)		گشتاور لختی ۲۷۴	~ جسم صلب ۲۸۴
~ بردار با شتاب ثابت در دو بعد و سه بعد		گشتاور نیرو(ای) ۲۷۴	~ محدودیتهای ۱۵۸
~ تبدیل	۵۰	تعريف ~ ۲۷۴	قانون
		تکانه زاویه‌ای ~ ۳۰۵-۳۰۶	اصطکاک چارلز آگوستین کولن ۱۱۸
			اصطکاک لوناردو داوینچی ۱۱۸

- کاری که سی یک بعدی انجام می دهد ۱۵۱-۱۵۴
 ~ کوریولیس ۱۳۲-۱۳۴
 ~ گرانی ۱۱۶
 گشتاور ~ ۲۸۱
 ~ لختی ۱۳۲-۱۳۴
 ~ متغیر در معادلات حرکت ۱۲۶-۱۲۷
 ~ مرکرگرا ۱۲۳، ۱۱-۱۲
 ~ مرکرگریز ۱۳۳
 ~ مسامی ۳۰۶
 ~ وابسته به زمان ۱۲۶-۱۲۹
 برنامه های کامپیوتر برای ~ ۳۷۴
 روش های تحلیلی در ~ ۱۲۷-۱۲۸
 روش های عددی ~ ۱۲۸-۱۲۹
 ~ وابسته به سرعت ۳۷۵-۳۷۶
 ~ وابسته به مکان ۱۲۷
 ~ هسته ای ضعیف ۱۱۶
 یکاهای ~ ۹۵-۹۶
 نوتربینو ۱۸۴
- واباشی بنا ۵۲
 وزن ۹۶
 رابطه ~ با جرم ۹۵-۹۶
 وسائل برخورددهنده باریکه ۲۴۶-۲۴۷
- یکای نجومی ۱۵
- نمودار جسم آزاد ۹۲
 نیرو(های) ۸۸-۸۹
 ~ اصطکاک ۱۱۸-۱۲۲
 ~ ایستایی ۱۱۸-۱۱۹
 پایستگی انرژی در ~ ۱۷۱
 ~ جنبشی ۱۱۸
 ~ الکتروضعیف ۱۱۶
 ~ الکترومagnetیسی ۱۱۶
 اندازه گیری ~ به روش استاتیکی ۹۷-۹۸
 اندازه گیری ~ به روش دینامیکی ۸۸-۸۹
 ~ بار ۱۱۸، ۱۰۰
 ~ برگرداننده ۱۵۲
 ~ پتاندی ۱۱۶
 ~ پایستار تسبیت به نیروی تابایستار ۱۷۱
 تعریف ~ ۸۸، ۸۷
 ~ تمامی ۱۰۰
 ثابت ~ در معادلات حرکت ۱۲۴-۱۲۵
 ~ خارجی در سیستم پوسته گوی ۲۰۹
 ~ داخلی ۱۸۳
 ~ در قانون دوم نیوتون ۵۱
 ضرایب تبدیل ~ ۲۶۹
 ~ ضربه ای ۲۳۲
 ~ در برخورد ۲۳۴
 ~ عمود ۱۱۸، ۱۰۰
 ~ قوی ۱۱۶
 کار ~ ثابت ۱۰۱، ۱۴۸
 کاری که سی دو بعدی انجام می دهد ۱۵۴
- ~ حرکت ۱۲۴-۱۲۶
 ~ درجه دو ۳۷۱
 ~ موشک ۲۲۱-۲۲۲
 مقاومت اصطکاکی ۱۱۹
 مقاومت هوا در حرکت پرتابی ۱۳۰-۱۳۱
 مکانیک ۸۹-۹۰
 جرم در ~ ۸۹-۹۰
 چارچوبهای نالخت در ~ کلاسیک ۱۳۲-۱۳۴
 قانون اول نیوتون در ~ ۸۷-۸۹
 قانون دوم نیوتون در ~ ۹۱-۹۳
 قانون سوم نیوتون در ~ ۹۲-۹۴
 کاربرد قوانین نیرو در ~ ۹۸-۹۹
 ~ کلاسیک ۸۶-۸۷
 نیرو در ~ ۸۸-۸۹
 متحنی تشن کشش ۳۴۱
 متزوی کردن سیستم ۳۳۲
- تابودی الکترون-پوزیtron ۱۸۶-۱۸۷
- تبیین ۱۳۵
 ~ خاص ۱۳۵
 شانه ها و علامتهای ریاضی ۳۷۱
 نظریه (های) ۳۷۱
 ~ آشوب ۱۳۶
 ~ نسبیت خاص اینشتین ۱۳۵
 وحدت بزرگ ۱۱۶
 نقاط بازگشت حرکت ۱۷۸
 نقطه زین ۳۳۸