عبارات زیر با استفاده از استقرای ریاضی به راحتی قابل اثبات هستند :

I) $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

II) $$\sum_{i=1}^{n} i^{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

III) $$\sum_{i=1}^{n} i^{3} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2}$$

تدریس‌یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود بپردازید.

۱. (آدامز) برای تابع مفروض $f(x)=x^{3}$ بر بازه مفروض $[0,1]$ مقادیر $L(f,P_n), U(f,P_n)$ که در آن P_n افرازی است که بازه را به n زیر بازه، هر یک به طول $\Delta x=\frac{1}{n}$ تقسیم می کند محاسبه کنید. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)$$

بنابراین f بر بازه $[0,1]$ انتگرال پذیر است. مقدار $\int_0^1 x^3dx$ چقدر است؟

حل: می‌دانیم

$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}f(l_i)\triangle x_i$$

که در آن $f(l_i)$ مینیمم مقدار f در بازه $[x_{i-1},x_i]$ است و

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}f(u_i)\triangle x_i$$

که در آن $f(u_i)$ ماکزیمم مقدار f در بازه $[x_{i-1},x_i]$ است. با توجه به اینکه $f(x)=x^3$ تابعی صعودی است لذا f مینیمم و ماکزیمم خود در بازه $[x_{i-1},x_i]$ را به ترتیب در ابتدا و انتهای بازه می‌گیرد. در این صورت، با در نظر گرفتن افراز

$$\{x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n}...,\ x_n=\frac{n}{n}=1\}\quad\&\quad\triangle x_i=\frac{1}{n}$$

نتیجه می‌شود

$$L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\triangle x_i=\frac{1}{n}\{0^3+(\frac{1}{n})^3+(\frac{2}{n})^3...+(\frac{n-1}{n})^3\}$$
$$=\frac{1^3+2^3+...+(n-1)^3}{n^4}=\frac{n^2(n-1)^2}{4n^4}$$

و همچنین

$$U(f,P_n)=\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\triangle x_i=\frac{۱}{n}\{(\frac{۱}{n})^۳+(\frac{۲}{n})^۳...+(\frac{n}{n})^۳\}$$
$$=\frac{۱^۳+۲^۳+...+n^۳}{n^۴}=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴n^۴}.$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه f بر بازه $[۰,۱]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_۰^۱ x^۳dx=\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\frac{۱}{۴}$$

۲. (آدامز) می دانیم برای تابع انتگرال پذیر $f(x)$ بر بازه $[a,b]$، عددی مانند $c \in [a,b]$ وجود دارد بطوریکه $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. $f(c)$ را مقدار متوسط تابع بر بازه $[a,b]$ می نامیم. مقدار متوسط توابع زیر را بر بازه داده شده محاسبه کنید.

الف) $f(t) = 1 + sint$ بر بازه $[-\pi, \pi]$.

ب) $f(x) = |x+1|sgnx$ بر بازه $[-2,2]$ که در آن $sgnx$ تابع علامت است و بصورت زیر تعریف می شود.

$$\text{sgn}x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

حل:

الف).

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\sin t)dt = \frac{1}{2\pi}(t-\cos t)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

ب). داریم

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \;\; or \;\; x < -1 \\ 0 & x = 0 \\ -(x+1) & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-2)}\left\{\int_{-2}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{0} -(x+1)dx + \int_0^2 (x+1)dx\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{(\frac{x^2}{2}+x)|_{-2}^{-1} - (\frac{x^2}{2}+x)|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2}+x)|_0^2\right\} = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x)\,\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} -(x+1) & -1 \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & 0 < x \end{cases} \qquad x < -1$$

۳. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۳}\left(\frac{x}{x-۳}\int_{۳}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right).$$

حل:

$$L=\lim_{x\to ۳}\left(\frac{x}{x-۳}\int_{۳}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\lim_{x\to ۳}\left(\frac{x\int_{۳}^{x}\frac{\sin t}{t}dt}{x-۳}\right)=\frac{۰}{۰}$$

در حد فوق شرایط قضیه هوپیتال، یعنی رخ دادن حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ و مشتق پذیر بودن صورت و مخرج در همسایگی $x=۳$، برقرار است، لذا می‌توان برای محاسبه حد از قضیه هوپیتال استفاده نمود. در این صورت،

$$L=\lim_{x\to ۳}\left\{\int_{۳}^{x}\frac{\sin t}{t}dt+x\frac{\sin x}{x}\right\}=\sin ۳$$

۴. اگر تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر x داشته باشیم

$$\int_{۰}^{x}f(t)dt=x\sin x+\int_{۰}^{x}\frac{f(t)}{۱+t^{۲}}dt$$

ضابطه f را بیابید.

حل: با توجه به پیوستگی توابع f و $f(x)/(x^{۲}+۱)$، شرایط قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برقرار است. لذا می‌توان از رابطه داده شده مشتق گرفت

$$f(x)=\sin x+x\cos x+\frac{f(x)}{۱+x^{۲}}$$

بنابراین

$$(۱-\frac{۱}{۱+x^{۲}})f(x)=\sin x+x\cos x$$

آنگاه

$$f(x)=(\frac{۱+x^{۲}}{x^{۲}})(\sin x+x\cos x).$$

۷. فرض کنید $0 < a < b$ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. نشان دهید $c \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $\int_a^c f(x)\, dx = c\, f(c)$.

حل: تابع $g(x)$ را با ضابطه زیر را در نظربگیرید.

$$g(x) = \frac{\int\limits_a^x f(t)dt}{x}$$

از آنجایی که $f(x)$ پیوسته است، لذا تابع $g(x)$ پیوسته و مشتق پذیر است. بنابراین

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int\limits_a^x f(t)dt}{x^2}$$

اما مقدار تابع $g(x)$ را در نقاط a و b برابر است با

$$g(a) = 0, g(b) = 0.$$

لذا از استفاده از قضیه رول نتیجه می‌شود

$$\to \exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$$

به عبارت دیگر

$$\to \exists c \in (a,b) : \frac{cf(c) - \int\limits_a^c f(t)dt}{c^2} = 0$$

در نتیجه

$$cf(c) - \int\limits_a^c f(t)dt = 0 \to \int\limits_a^c f(t)dt = cf(c).$$

۸. ثابت کنید اگر $f(x), g(x)$ دو تابع روی بازه $[a,b]$ باشند به نحوی که $g(x)$ تابعی پیوسته و $f \geq 0$ تابعی پیوسته و انتگرال پذیر باشد، در اینصورت نقطه ای مانند $x_0 \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx = g(x_0) \int_a^b f(x)\, dx.$$

حل: تابع g روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است، لذا در این بازه ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند. به عبارت دیگر

$$\exists u \quad s.t \quad g(u) = \min_{[a,b]} g(x)\ , \qquad \exists v \quad s.t \quad g(v) = \max_{[a,b]} g(x)$$

لذا برای هر $x \in [a,b]$

$$g(u) \leq g(x) \leq g(v) \qquad \xrightarrow{f \geq 0} \qquad g(u)f(x) \leq f(x)g(x) \leq g(v)f(x)$$

اگر $f(x) = 0$ به وضوح تساوی برقرار است. فرض کنید $f(x) > 0$. در این صورت

$$g(u) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx} \leq g(v)$$

اما چون $g(x)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است، لذا از قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود

$$\exists x_0 \in (a,b) \quad s.t. \quad g(x_0) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

در نتیجه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(x_0)\int_a^b f(x)dx$$

۹. (آدامز) با استفاده از انتگرال معین، تابعی مانند $F(x)$ تعریف کنید که به ازای هر x ، $F'(x) = \frac{sinx}{۱+x^۲}$ و در رابطه $F(۱۷) = ۰$ صدق کند.

حل: تابع $\frac{\sin x}{۱+x^۲}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و انتگرال پذیر است، لذا قرار دهید

$$F(x) = \int_{۱۷}^{x} \frac{\sin t}{۱+t^۲} dt$$

داریم:

$$F'(x) = \frac{\sin x}{۱+x^۲}.$$

و

$$F(۱۷) = ۰ .$$

۱۰. (آدامز) الف) مینیمم و ماکسیمم تابع $F(x)=\int_{0}^{2x-x^2}\cos(\frac{1}{1+t^2})dt$ را بیابید.

ب) اگر $f(x)=\int\limits_{0}^{x}\left(1-t^2\right)\cos^2 t\,dt$ ، روی کدام بازه $f(x)$ صعودی است.

حل:

الف). برای محاسبه ماکزیمم و منیمم تابع $F(x)$ از مشتق گرفته و برابر با صفر قرار می‌دهیم. در این صورت

$$F^{'}(x)=(2-2x)\cos\big(\frac{1}{1+(2x-x^2)^2}\big)=0.$$

بنابراین نقطه $x=1$ یک نقطه بحرانی تابع $F(x)$ است، که به راحتی می‌توان بررسی کرد، به ازای $x<1$ مقدار تابع $F'(x)$ مثبت و به ازای $x>1$ مقدار آن منفی است، لذا $F(x)$ در $x=1$ ماکسیمم خود را اختیار می‌کند.

برای هر t داریم:

$$0<\frac{1}{1+t^2}\leq 1$$

پس:

$$0<\cos(1)\leq\cos(\frac{1}{1+t^2})\leq 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt}$$

$$=$$

یا

$$-\lim_{x\to\pm\infty} \int_{2x-x^2}^{0} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$\leq -\lim_{x\to\pm\infty} \int_{2x-x^2}^{0} \cos 1 \, dt$$

$$= -\left(\lim_{x\to\pm\infty} \cos(1)\left(x^2-2x\right)\right)$$

$$= -\cos(1)\,\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = -\infty$$

پس نقطه ماکسیمم تابع در $x=۱$ است و این تابع مینیمم ندارد.

ب). از تابع $F(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\int_{۰}^{x}(۱-t^{۲})\cos^{۲}t \quad \rightarrow \quad f'(x)=(۱-x^{۲})\cos^{۲}x$$

لذا:

$$f'(x)\geq ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad -۱\leq x\leq ۱$$