به نام خدا

ریاضی (۲)

کتاب: آدامز (بخش ۲)

دامنه $\quad$ برد

$f: R \to R$ تابع یک متغیره

$f: R^n \to R$ تابع n متغیره حقیقی مقدار

$f: R \to R^n$ تابع یک متغیره برداری $\to f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)) \to f_i: R \to R$: که هر یک از f_i ها به صورت ... هستند

$f: R^n \to R^n$ تابع n متغیره برداری $\to f(x_1, \dots, x_n) = (\dots, \dots, \dots) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \to$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq m$ داریم: $f_i: R^n \to R$

* یادآوری مفاهیم R^n: $R^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in R\}$

* جمع در R^n: $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

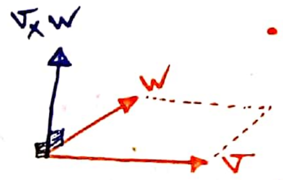
* اندازه بردار در R^n: $v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \to |v| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

* ضرب نقطه‌ای: $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

در R^2 و R^3 به یاد داریم که اگر v و w دو بردار دلخواه باشند آنگاه: $v \cdot w = |v||w| \cos\theta$ بر حسب فرمول فوق

زاویه بین دو بردار در R^n را به صورت $\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$ تعریف می‌کنیم و دو بردار (زاویه بین دو بردار) غیر صفر v و w را برهم عمود گوییم هرگاه $v \cdot w = 0$.

* در R^3 ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: حاصلضرب خارجی دو بردار v و w در فضای R^3 را برداری تعریف می‌کنیم که اندازه آن برابر است با اندازه مساحت متوازی‌الاضلاعی که از دو بردار v و w ساخته می‌شود. به علاوه راستای آن بر صفحه شامل v و w عمود است و نهایتاً از قاعده دست راست مشخص می‌شود.



- اصطلاحاً گوییم بردارهای v و w و $v \times w$ یک دستگاه راستگرد است.
- چهار انگشت دست راست بردار اول، کف دست بردار دوم، انگشت شست جهت ضرب خارجی را نشان می‌دهد.

$$\left.\begin{array}{l} v = (v_1, v_2, v_3) \\ w = (w_1, w_2, w_3) \end{array}\right\} \to v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$* \quad v \times w = |v||w| \sin\theta$$

- در R^3 اگر سه بردار v و w و t را در نظر بگیریم در این صورت حاصلضرب مختلط این سه بردار را به صورت $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{t})$ نمایش می‌دهیم که برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که توسط سه بردار v و w و t ساخته می‌شود و از فرمول زیر می‌توان مقدار آن را بدست آورد:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}$$

کاربرد: اگر سه بردار v و w و t در یک صفحه قرار داشته باشند، در این صورت $v.(w\times t)=0$ خواهد بود و بالعکس.
پس برای بررسی اینکه سه بردار در یک صفحه قرار دارند کافی است دترمینان فوق را بررسی کنیم که حاصل صفر باشد.

* در فضای R^2 هر دو بردار مانند v_1 و v_2 که هیچ یک مضربی از دیگری نباشد $(v_1\neq\lambda v_2)$ تشکیل یک پایه می‌دهند.
یعنی هر بردار در R^2 را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از v_1 و v_2 نوشت. به بیان دیگر:

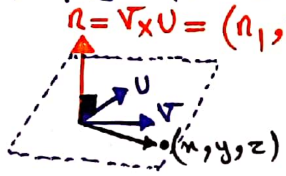
$R^2=\{av_1+bv_2 \mid a,b\in R\}$ ⟵ مثلاً در R^2 مجموعه $\{i, j\}$ یک پایه برای R^2 است. $i(1,0)$ و $j(0,1)$

به صورت مشابه در R^3 نیز هر سه برداری که در یک صفحه قرار نداشته باشند یک پایه برای R^3 می‌سازند. به عنوان مثال:
مجموعه $\{i, j, k\}$ یک پایه برای R^3 است. $i(1,0,0)$، $j(0,1,0)$، $k(0,0,1)$

* خط و صفحه در R^3:

اگر u و v دو بردار غیر هم راستا در R^3 باشند در این صورت صفحه شامل بردارهای u و v به صورت زیر به دست می‌آید:

$\{au+bv \mid a,b\in R\}$



$(x,y,z)\perp(n_1,n_2,n_3)$

معادله صفحه‌ای که شامل u و v است و از مبدأ می‌گذرد به صورت ⟵ $n_1x+n_2y+n_3z=0$

معادله صفحه‌ای که از یک نقطه $A\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ می‌گذرد و موازی بردارهای u و v باشد ⟵ $n_1(x-a)+n_2(y-b)+n_3(z-c)=0$

لذا معادله صفحه در R^3 که از $A(a,b,c)$ بگذرد و بر بردار $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$ عمود باشد، به صورت زیر است:

$$n_1x+n_2y+n_3z=\underbrace{n_1a+n_2b+n_3c}_{d\ \text{عدد ثابت}}$$

* منحنی‌ها:

فرض کنید که تابع f به صورت زیر است: $f:\overset{\text{نقطه}}{R}\to\overset{\text{یک بردار}}{R^n}$

$f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))$ که در آن $f_i:R\to R$ ، $1\le i\le n$.

به توابع f_i توابع مؤلفه‌ای f گفته می‌شود در این صورت تابع f را یک تابع برداری یک متغیره یا به اختصار یک منحنی یا خم می‌نامیم.

به عنوان مثال اگر t را زمان در نظر بگیریم و برای یک ذره در حال حرکت در فضا در لحظه t موقعیت ذره را با تابع $r(t)$ نمایش می‌دهیم در این صورت واضح است که $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ که به تابع $r(t)$ تابع مکان یا تابع ذره گفته می‌شود.

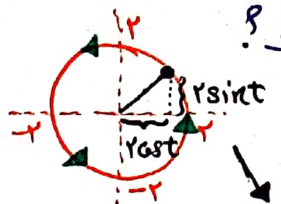
تابع برداری: تابعی که متغیر به ما یک بردار می‌دهد یعنی دامنه‌اش اسکالر و برد آن یک بردار می‌باشد.

Ex) $f(t)=(t^2, \sin t, 2t-\cos t)$ تابع برداری تک متغیره ⟵ Ex) $y=x^2$ تابع اسکالر ⟵ عدد اسکالر Ex) $x=a$

Ex) ذره‌ای در صفحه در حرکت است و موقعیت این ذره با تابع $r(t)=(2\cos t\ ,\ 2\sin t)$ ، $0\leq t\leq 2\pi$ مشخص می‌شود. مسیر حرکت این ذره چیست؟

$2\cos t = x(t)$
$2\sin t = y(t)$
$\longrightarrow x^2(t)+y^2(t) = 4\cos^2 t+4\sin^2 t = 4(1) = 4 \longrightarrow$

دایره‌ای به شعاع ۲ حول مبدأ مختصات می‌باشد



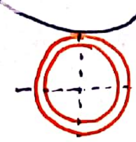
منحنی مسیر حرکت یک دایره به شعاع ۲ حول مبدأ که یکبار و در جهت مثلثاتی پیموده شده است.

$t=0 \to r=(2,0)$ ، $t=\pi \to r=(-2,0)$ ، $t=2\pi \to r=(2,0)$

$t=\frac{\pi}{2} \to r=(0,2)$ ، $t=\frac{3\pi}{2} \to r=(0,-2)$

* قرارداد: در جهت افزایش t حرکت می‌کنیم که جهت حرکت روی منحنی را بیابیم.

Ex) $0\leq t\leq 4\pi$ ← دوبار دایره به شعاع ۲ را می‌پیماید



و $0\leq t\leq \pi$ ← نیم دایره

---

* حد و مشتق توابع برداری یک متغیره (منحنی‌ها):

$$f: R \to R^n\ ,\ f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))$$

$$\lim_{t\to a} f(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t),\dots,\lim_{t\to a} f_n(t)\right) \quad ،\quad f'(t)=\left(f_1'(t),\dots,f_n'(t)\right)$$

Ex) اگر $f(t)=\left(t^2+4+\cos t\ ,\ \frac{\sin t}{t}+1\right)$. مطلوبست محاسبه موارد ذیل:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \left(\lim_{t\to 0}(t^2+4+\cos t),\ \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}+1\right)\right) = (5,2)$$

$$f'(t) = \left(2t-\sin t\ ,\ \frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\right)$$

Ex) اگر $f(t)=(t^2+1\ ,\ 4t^3-2)$ مطلوبست محاسبه $f''(t)$ در نقطه $\frac{1}{8}$:

$$f'(t)=(2t\ ,\ 12t^2) \longrightarrow f''(t)=(2,\ 24t) \longrightarrow f''\left(\tfrac{1}{8}\right)=\left(2,\ \tfrac{24}{8}\right)=(2,3)$$

* برخی خواص مشتق توابع برداری یک متغیره: اگر فرض کنیم که $u(t)$ و $v(t)$ دو تابع برداری یک متغیره باشند یعنی

$v(t)=(v_1(t),\dots,v_n(t))$ و $u(t)=(u_1(t),\dots,u_n(t))$

در این صورت داریم:

(1) $\frac{d}{dt}\left(u(t)+v(t)\right) = u'(t)+v'(t)$ (2) $\frac{d}{dt}\left(u(t)\cdot v(t)\right) = u'(t)\,v(t)+u(t)\,v'(t)$

به علاوه اگر $\lambda: R\to R$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

تابع اسکالر

(3) $\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\cdot u(t)\right) = \lambda'(t)\cdot u(t)+\lambda(t)\cdot u'(t)$

ضرب اسکالر ، بردار

(4) $\frac{d}{dt}\left(u(t)\times v(t)\right) = u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

ضرب خارجی

✓ در ضرب خارجی ترتیب مهم است

* (5) $\frac{d}{dt}|u(t)| = \frac{u(t)\cdot u'(t)}{|u(t)|}$ *

اگر $\lambda : R \to R$ یک تابع باشد، داریم:

(۴) $\frac{d}{dt}\left(U(\lambda(t))\right)' = \lambda'(t) . U'(\lambda(t))$

تمرین) رابطه (۴) را اثبات کنید.

اثبات شکل (۵)

$U(t) = (U_1(t), U_2(t), U_3(t)) \to |U(t)|' = ? \to$ می دانیم: $(\sqrt{f(t)})' = \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}$

$$|U(t)| = \sqrt{U(t).U(t)} \longrightarrow |U(t)|' = \frac{(U(t).U(t))'}{2\sqrt{U(t).U(t)}} \longrightarrow |U(t)|' = \frac{\cancel{2}U(t).U'(t)}{\cancel{2}|U(t)|} = \frac{U(t).U'(t)}{|U(t)|}$$

(قضیه) اگر یک ذره در فضا طوری حرکت کند که اندازه بردار مکان آن یعنی $r(t)$ همواره عددی ثابت باشد یعنی برای هر t داشته باشیم $|r(t)| = k$ در این صورت:

$$\forall t \,;\ r(t) \perp r'(t) \xrightarrow{\text{اثبات}} (۵ج): \frac{d}{dt}\left(|r(t)|\right) = 0 = \frac{r(t).r'(t)}{|r(t)|}$$

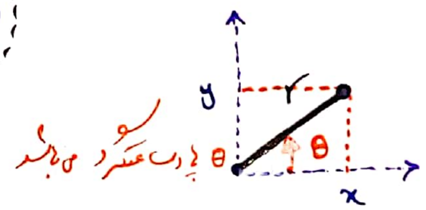
Ex) $r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \longrightarrow |r(t)| = 2 \longrightarrow r(t) \perp r'(t)$:

$$\begin{cases} r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \\ r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \end{cases} \longrightarrow r(t) \perp r'(t)$$

یادآوری از مختصات قطبی:

دکارتی: (x,y)

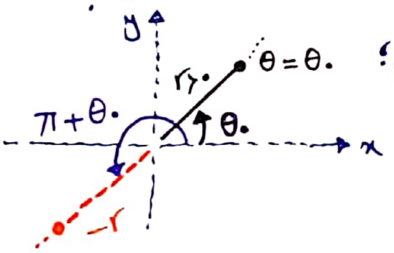
قطبی (r,θ)



$x = r\cos\theta$ ، $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\theta$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$

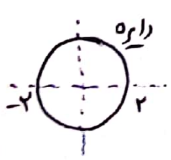
در دستگاه مختصات قطبی به وضوح همواره $r \geq 0$ و در نقطه مبدأ مختصات یعنی $r=0$ مقدار θ تعریف نمی شود. البته در برخی از منحنی ها که به صورت قطبی $r = f(\theta)$ ارائه می شوند گاهی اوقات r منفی بدست می آید. تعبیر آن این است که از روی پرتو $\theta = \theta_0$ در واقع $\theta_0 + \pi$ به اندازه r پیش رفته ایم:

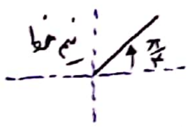


چون در روابط داریم: $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

Ex) منحنی $r=2$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ را جداگانه مشخص کنید.

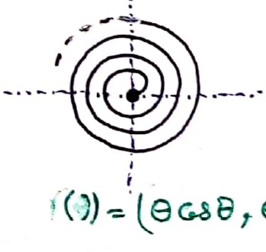




Ex) مختصات نقطه $r=-3$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ را مشخص کنید.

Ex) منحنی $r = \theta$ را توصیف کنید.

شکل حلزونی



هم: $r(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$

تعریف: منظور از یک پارامتری سازی برای منحنی C یافتن متغیری مانند t است که بتوان معادله منحنی C را که به بیان دیگر تابع موقعیت (تابع مکان) ذره‌ای که روی منحنی C در حرکت است را به شکل تابعی برحسب t بیان کرد. یعنی:

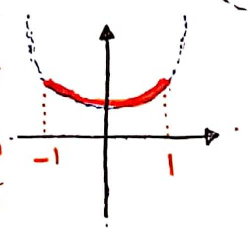
$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ex) منحنی حاصل از معادله $\begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = t^2+3 \end{cases}$ در صفحه را توصیف کنید.

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (t+1, t^2+3) \to t = x-1 \to y = (x-1)^2+3$$

یک سهمی

Ex) منحنی حاصل از معادله $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin^2(3t)+4 \end{cases}$ را توصیف کنید.



$y = x^2+4$

بخشی از سهمی فوق که در بازه $[-1,1]$ قرار دارد

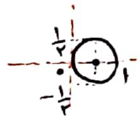
Ex) منحنی $r = \cos\theta$ را توصیف کنید و همچنین آن را پارامتری کنید.

$$r = \cos\theta \xrightarrow{\times r} r^2 = r\cos\theta \to x^2+y^2 = x \to \underbrace{\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2}_{\text{مربع کامل}} = \tfrac{1}{4} \to$$

$r^2 = x^2+y^2$

$r(t) = (x(t), y(t))$

دایره‌ای به مرکز $\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$ شعاع $\tfrac{1}{2}$



$$r = \cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta \to$$ دوران یافته مثال قبل به اندازه $\tfrac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی

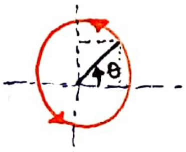
● در تمام معادلات قطبی به شکل $r = f(\theta)$ می‌توان پارامتری زیر را برای منحنی C در نظر گرفت:

$$r(t) = (x(t), y(t)) \to \begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \to r(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$$

$r: R \to R^2$

$r = f(\theta - \theta_0) \to$ دوران یافته منحنی $r = f(\theta)$ به اندازه θ_0 در جهت مثلثاتی

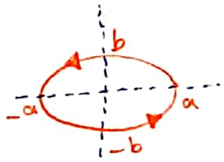
Ex) دایره‌ای به شعاع a حول مبدأ مختصات با جهت مثلثاتی را در نظر بگیرید و این منحنی را پارامتری کنید.



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \to r(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ex) منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را پارامتری کنید.

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \to r(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



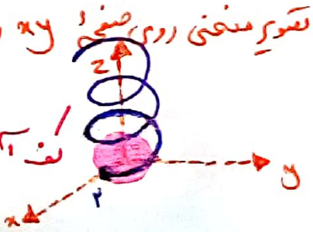
Ex) منحنی زیر را توصیف کنید و آن را پارامتری کنید.

$$r(3\cos\theta - 2\sin\theta) = 1 \to 3\underbrace{r\cos\theta}_{x} - 2\underbrace{r\sin\theta}_{y} = 1 \to 3x - 2y = 1$$

$$r(\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{3\cos\theta - 2\sin\theta}, \frac{\sin\theta}{3\cos\theta - 2\sin\theta}\right)$$ پارامتری نامناسب $\to h(t) = \left(t, \frac{3t-1}{2}\right)$ پارامتری مناسب

Ex) منحنی زیر را توصیف کنید: $r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t) \to$ تصویر منحنی روی صفحه xy را در نظر می‌گیریم:

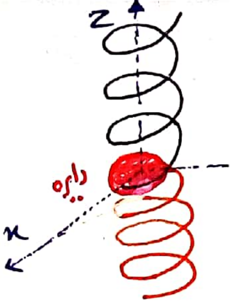
$(2\cos t, 2\sin t)$ که یک دایره به شعاع ۲ حول مبدأ و در جهت مثلثاتی است حال با توجه به مولفه z حاصل شکل یک مارپیچ می‌باشد.



کف آن یک دایره

● به صورت کلی منحنی $r(t)=(\underbrace{a\cos t}_{x},\ \underbrace{a\sin t}_{y},\ \underbrace{bt}_{z})$ یک مارپیچ است که

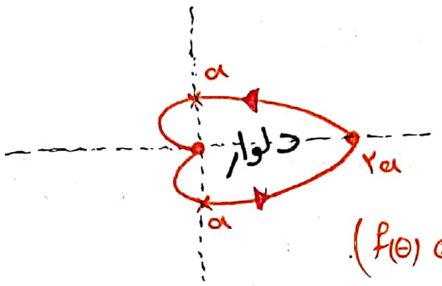
اگر $\begin{cases} b>0 \leftarrow \text{جهت حرکت به سمت بالا} \\ b<0 \leftarrow \text{جهت حرکت به سمت پایین} \end{cases}$



استوانه $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=bt \end{cases}$

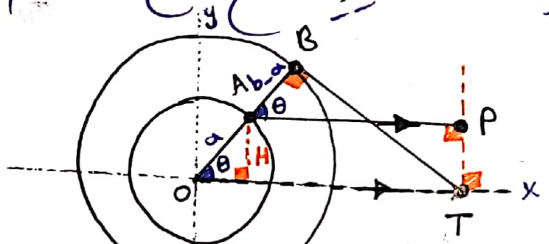
Ex) منحنی $r=a(1+\cos\theta)$ را توصیف کرده و آن را پارامتری کنید.
$a>0$ ، $0\le\theta\le 2\pi$

در جلسات آینده در بحث بررسی دستگاه TNB جهت های متغیر در این منحنی به کمک بردار N قابل توصیف است.



$(f(\theta)\cos\theta\ ,\ f(\theta)\sin\theta)$

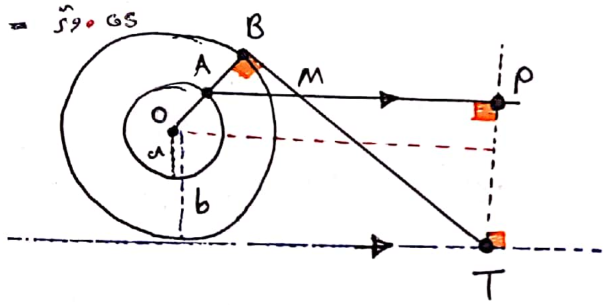
Ex) فرض کنید که مطابق شکل زیر دو دایره به شعاع های a و b داریم که ($0<a<b$). در این صورت شعاع OB را رسم می‌کنیم که دایره کوچک را در نقطه A قطع کند حال از نقطه A خطی موازی محور x ها رسم کرده و از نقطه B نیز مماس بر دایره بزرگ رسم می‌کنیم و با این فرآیند نقاط T و سپس نقطه P بدست می‌آید. طبیعی است که با تغییر دادن شعاع OB نقطه P نیز جابجا می‌شود. منحنی مسیر حرکت نقطه P را بدست آورید.



$P\begin{cases} x_P = OT = \dfrac{b}{\cos\theta} \\ y_P = |AH| = a\sin\theta \end{cases}$ $\qquad \overset{\triangle}{BOT}:\ \cos\theta=\dfrac{b}{|OT|}$

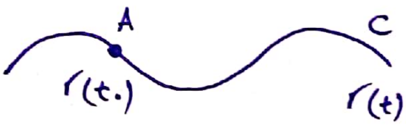
وتر.sin = ضلع مقابل
وتر.cos = مجاور

پارامتری حاصل از جابجایی P $\Longrightarrow r(\theta)=\left(\dfrac{b}{\cos\theta}\ ,\ a\sin\theta\right)$



تمرین) منحنی حاصل از جابجایی P را پارامتری کنید.

تذکر) اگر برای یک منحنی پارامتری $r(t)=(x(t),y(t))$ را داشته باشیم در این صورت اگر در نقطه A مانند روی این منحنی مقدار $\frac{dy}{dx}$ را بخواهیم می‌توانیم به صورت زیر عمل کرد:



شیب خط مماس بر منحنی C در نقطه A : $\dfrac{dy}{dx}\Big|_A = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Bigg|_{t=t_0}$

* کافی است از قاعده زنجیره‌ای کمک بگیریم.

Ex) شیب خط مماس بر منحنی $r(t)=(t^3+2t\,,\,t^6-1)$ را در $A=(0,-1)$ بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}A=r(0)\\ t_0=0\end{array}\right\}\to \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\left.\frac{6t^5}{3t^2+2}\right|_{t=0}=0$$

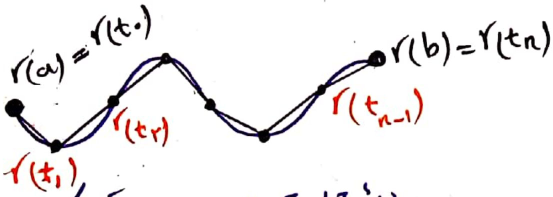
طول قوس منحنی: قبلاً دیدیم که اگر منحنی $y=f(x)$ را در بازهٔ $[a,b]$ درنظر بگیریم، طول قوس منحنی برابر بود با:

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

تذکر: منحنی $y=f(x)$ را به روش زیر می‌توان پارامتری کرد:

$$r(t)=(t,f(t))$$

دقیقاً به روش اثبات فرمول طول قوس در ریاضی (۱) می‌توان برای منحنی های پارامتری به شکل $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ نیز تابع طول قوس را بدست آورد: $(a\le t\le b)$



بازهٔ $[a,b]$ را به n زیربازه تقسیم کرده $t_0=a<t_1<\dots<t_n=b$ $\to$ طول پاره خط بین $r(t_{i+1})$ و $r(t_i)$ $=\sqrt{(x(t_{i+1})-x(t_i))^2+\dots}$

لذا فرمول طول قوس منحنی $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ که $a\le t\le b$ برابر است با:

$$\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\boxed{\int_a^b|r'(t)|\,dt}$$

Ex) طول قوس منحنی $r(t)=(t^3+1\,,\,2t-1\,,\,t^2+2)$ را بین ۰ و ۵ بدست آورید.

$r'(t)=(3t^2,2,2t)$ ، طول قوس $=\int_0^5\sqrt{9t^4+4+4t^2}\,dt$

تذکر: اگر منحنی $y=f(t)$ را درنظر بگیریم، پارامتری آن به صورت زیر است:

$$r(t)=(t,f(t))\to r'(t)=(1,f'(t))$$

$$\text{طول قوس}=\int_a^b|r'(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

Ex) مطلوبست محاسبهٔ طول قوس مارپیچ

$$r(t)=(a\cos t\,,\,a\sin t\,,\,bt)$$

$$0\le t\le 2\pi$$

$r'(t)=(-a\sin t\,,\,a\cos t\,,\,b)$

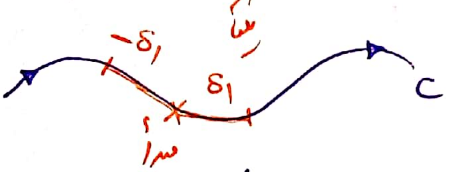
$|r'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\to$ طول قوس منحنی $=\int_a^b|r'(t)|\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

پارامتری برحسب طول قوس:

فرض کنید یک ذره‌ای به یک مسیر حرکت ثابت یعنی منحنی c در حرکت است. برای تعیین موقعیت این ذره در دستگاه مختصات x, y, z که تابع معانی؟ به شکل $r(t)=(x(t), y(t), z(t))$ را داریم که با انتخاب $(t=t_0)$ موقعیت متحرک یعنی $r(t_0)$ مشخص می‌شود. حال اگر بتوانیم یک پارامتری برای منحنی (c) بدست آوریم که متغیر آن به جای t طول قوس منحنی نسبت به یک مبدأ دلخواه ولی از آن پس ثابت باشد اصطلاحاً به آن پارامتری **پارامتری برحسب طول قوس** گفته می‌شود.

به این نکته دقت کنید که با انتخاب مبدأ روی منحنی هر نقطه به صورت یکتا برحسب فاصله تا مبدأ مشخص می‌شود و لذا یک تناظر ۱-۱ بین نقاط روی منحنی و فاصله تا مبدأ بدست می‌آید.



← خم‌های هموار هستند که:
✓ پیوسته بر آن بازه
✓ مشتق‌پذیر با مخالف صفر باشند

EX) مارپیچ $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ را برحسب طول قوس با مبدأ $t=0$ پارامتری کنید.

$|r'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$ ⟵ لذا اگر تابع طول قوس را با نمایش $s(t)$ هم داریم: $s(t)=(\sqrt{a^2+b^2})\,t$ ⟵ $t=\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ⟵ لذا پارامتری مارپیچ برحسب طول قوس به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\text{تابع طول قوس}=\int_{\text{مبدأ}\ 0}^{\text{انتها}\ t}|r'(h)|\,dh=(\sqrt{a^2+b^2})\,t$$

$$R(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

EX) مارپیچ مقابل $r(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, 2)$ را در نظر بگیرید با مبدأ $t=0$ تابع طول قوس را برای این منحنی را بدست آورید سپس منحنی را برحسب طول قوس پارامتری یا پیمایش کنید.

$$s(t)=\int_0^t |r'(h)|\,dh$$

$$r'(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t\sin t+e^t\cos t,\ 0)$$

$$|r'(t)|=\sqrt{2}\,e^t$$

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{2}\,e^h\,dh=\sqrt{2}\,e^h\Big|_0^t=\sqrt{2}(e^t-1)$$

$$e^t=\frac{s\sqrt{2}}{2}+1$$

$$t=\ln\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}+1\right)$$

$$R(s)=\left(e^{\ln(\frac{s\sqrt{2}}{2}+1)}\cos\left(\ln\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}+1\right)\right),\ e^{\ln(\frac{s\sqrt{2}}{2}+1)}\sin\left(\ln\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}+1\right)\right),\ 2\right)$$

تذکر) در صفحه R^2 منحنی قطبی $r=f(\theta)$ را در نظر بگیرید. در ادامه تابع طول قوس این منحنی را بدست می‌آوریم:

$$r(t) = \left(f(t)\cos t\,,\ f(t)\sin t\right)$$

$$r'(t) = \left(f'(t)\cos t - f(t)\sin t\,,\ f'(t)\sin t + f(t)\cos t\right) \to |r'(t)| = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{f^2(t)+f'^2(t)}$$

به طول قوس و مشتق

طول قوس منحنی برای $a\le t\le b$ $= \int_a^b \sqrt{f(t)^2+f'(t)^2}\,dt \to$ تابع طول قوس با مبدأ $t=a$ $= s(t)=\int_a^t \sqrt{f^2(h)+f'^2(h)}\,dh$

Ex) طول قوس دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ را برای $0\le\theta\le 2\pi$ بدست آورید.

$$\left.\begin{aligned} f(\theta)&=a(1+\cos\theta)\\ f'(\theta)&=a(-\sin\theta)\end{aligned}\right\} \to \sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)+a^2\sin^2\theta} = a\sqrt{2\underbrace{(1+\cos\theta)}_{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

با توجه به نمودار

طول قوس دلوار $= 2\times$ طول قوس بخش بالایی $= 2\int_0^\pi 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a$

عکسش ۲

تذکر) فرض کنید یک پارامتری برای منحنی C را به شکل $r(t)$ در نظر گرفته‌ایم که $|r'(t)|=1$ ؛ $\forall t$ در این صورت این پارامتری مطلوب شده برحسب طول قوس است.

تابع طول قوس با مبدأ $t=0$ $= s(t) = \int_0^t |r'(h)|\,dh = t \to s=t$

Ex)

$r(t)=(\cos t\,,\ \sin t\,,\ b) \to |r'(t)|=1 \to$ به طور خودکار پارامتری برحسب طول قوس می‌باشد

تذکر) اگر برای یک منحنی دلخواه C یک پارامتری $r(s)$ داده شده باشد در این صورت چنانچه این پارامتری برحسب طول قوس باشد داریم $|r'(s)|=1$ ؛ $\forall s$ زیرا:

$$\left.\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}\right\} \to \left|\frac{dr}{ds}\right|=1$$

اندازه‌اش برابر یک است

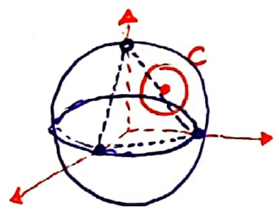
$$s(t)=\int_0^t |r'(h)|\,dh$$

Ex) بررسی کنید آیا پارامتری زیر برای منحنی C برحسب طول قوس است؟

$$r(t)=\left(\tfrac{3}{5}\sin t\,,\ \tfrac{4}{5}t\,,\ \tfrac{3}{5}\cos t\right)$$

$r'(t)=\left(\frac{3}{5}\cos t\,,\ \frac{4}{5}\,,\ -\frac{3}{5}\sin t\right) \to |r'(t)| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1 \to$ پارامتری برحسب طول قوس است

Ex) فرض کنید که صفحه‌ی $x+y+z=1$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ را در نظر گرفته‌ایم. حاصل برخورد این دو شکل یک دایره است. مرکز و شعاع این دایره را بدست آورید و سپس این منحنی (دایره) را پارامتری کنید.



$A\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \longrightarrow a+b+c=1$

اگر مرکز دایره باشد

$\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix} \longrightarrow$ متعلق به دایره‌اند

$\longrightarrow$ لذا فاصله‌ی A با ۳ نقطه فوق برابر باشد

$\longrightarrow (a-1)^2+b^2+c^2 = a^2+(b-1)^2+c^2 = a^2+b^2+(c-1)^2 \longrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

مرحله (۱)

مرکز دایره $A\begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ ، شعاع دایره = فاصله‌ی نقطه A تا یکی از نقاط

$\frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{(\frac{1}{3}-1)^2+\frac{1}{3}^2+\frac{1}{3}^2}$

بردار نرمال $x+y+z=1$ برابر است با $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ فرض کنید $\vec{v_1}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$ در این صورت مرحله (۲)

$\vec{v_1}\cdot\vec{n}=0 \longrightarrow \vec{v_1}\perp\vec{n} \longrightarrow$ فرض می‌کنیم $\vec{v_2}=\vec{v_1}\times\vec{n} \longrightarrow$ پس به این شکل به دو بردار v_1 و v_2 می‌رسیم

$v_2 \perp n , v_1$

که عمود بر هم هستند و موازی صفحه‌ی $x+y+z=1$ می‌باشند در نتیجه معادله‌ی صفحه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$\langle v_1,v_2\rangle = \{\alpha v_1+\beta v_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} =$ صفحه‌ی گذرنده از مبدأ و موازی بردارهای v_1, v_2

$\{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})+\alpha v_1+\beta v_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} = A+\langle v_1,v_2\rangle =$ صفحه‌ی گذرنده از نقطه A و موازی v_1, v_2

$\parallel$

$(x+y+z=1)$

حال به نقاطی از این صفحه نیاز داریم که فاصله‌ی آنها که مرکز دایره یعنی $A\begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ برابر با $\frac{\sqrt{6}}{3}$ باشد و لذا به دنبال نقاطی هستیم مرحله (۳)

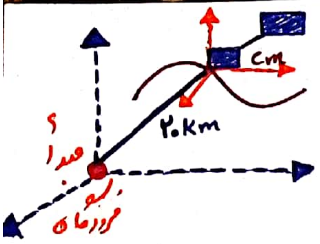
$|A+\alpha v_1+\beta v_2-A| = |\alpha v_1+\beta v_2| = \frac{\sqrt{6}}{3} \longrightarrow (\alpha v_1+\beta v_2)^2=\frac{6}{9} \longrightarrow (\alpha v_1+\beta v_2)\cdot(\alpha v_1+\beta v_2)=\frac{6}{9}$

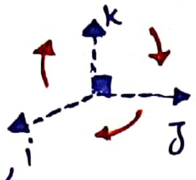
$\alpha^2 \underbrace{v_1\cdot v_1}_{|v_1|^2=1} + \alpha\beta \underbrace{v_1\cdot v_2}_{0} + \alpha\beta \underbrace{v_2\cdot v_1}_{0} + \beta^2 \underbrace{v_2\cdot v_2}_{|v_2|^2=1} = \frac{6}{9} \longrightarrow \alpha^2+\beta^2=\frac{6}{9} \longrightarrow \alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\cos t$

$\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t$

$r(t) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) + \frac{\sqrt{6}}{3}\cos t(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0) + \frac{\sqrt{6}}{3}\sin t\, v_2$

* دستگاه TNB یا کنج فرنه :

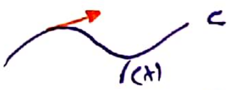




۲ به ۲ عمود و راستگرد

$i\times j=k$

- برای ساختن یک دستگاه مختصاتی که با مسیر حرکت ذره هم‌بسته بوده و بتوان از آن برای بررسی رفتار نقاط نزدیک به ذره متحرک استفاده کرد (مثال شوخ‌طبعی که هواپیما دارد) به سراغ الگوی ijk در مختصات دکارتی می‌رویم و ۳ بردار یکه ۲ به ۲ عمود بهم ارائه می‌دهیم که یک دستگاه راستگرد بشوند.



اگر فرض کنیم منحنی مسیر حرکت ذره یعنی c دارای پارامتری بر حسب طول قوس $r(s)$ باشد اولین بردار را بردار سرعت ذره یعنی $\frac{dr}{ds}$ در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $T=\frac{dr}{ds}$ دقت کنید که این بردار یک اندازه‌ی واحد است. T را بردار مماس واحد (اصلی) می‌نامیم.

واضح است که اگر یک پارامتری دلخواه مانند (t) نیز استفاده شود (که لزوماً طول قوس نیست) یافتن T به شکل زیر امکان‌پذیر است:

$$T=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

بردار   مشتق خودش

$$|T|=1 \rightarrow T \perp \frac{dT}{ds}$$

- حال دومین بردار یعنی N (موسوم به بردار قائم اصلی) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|} \rightarrow$$ در این صورت: $|T|=|N|=1$, $T\perp N$

- برای سومین بردار B (موسوم به قائم دوم) تعریف می‌کنیم:

$$B=T\times N \rightarrow |B|=1 : B\perp T,\ B\perp N$$

به این شکل ۳ تایی T و N و B بدست می‌آیند.

(تعریف) فرض کنید منحنی c دارای پارامتری $r(s)$ باشد و بردار مماس واحد T بدست آمده باشد، تعریف می‌کنیم:

(کاپا) $k(s)=\left|\frac{dT}{ds}\right|$ آن را انحنای منحنی c گویند

یا خمیدگی

به علاوه تعریف می‌کنیم $\rho(s)=\frac{1}{k(s)}$ و آن را شعاع انحنای منحنی c یا شعاع خمیدگی منحنی c می‌نامند.

در ادامه خواهیم دید که $k(s)$ یا همان انحنای منحنی میزان دور شدن یک منحنی از یک خط مستقیم را نشان می‌دهد. به علاوه توجه کنید که:

$$N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}=\frac{\frac{dT}{ds}}{k} \rightarrow \frac{dT}{ds}=kN$$

بردار شتاب $= r''(s) = a(s)$ ، تندی $= |v(s)| = v(s)$ (تابع) ، بردار سرعت $= r'(s) = v(s)$ ، بردار مکان $= r(s)$

به صورت مشابه اگر پارامتری یک منحنی برحسب هر متغیر t نیز باشد از همین عبارات برای بردار مکان، بردار سرعت، تندی (اندازه) و بردار شتاب استفاده می‌کنیم:

$$V = \frac{dr}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right| \frac{\frac{dr}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} = vT$$

(تذکر) اگر $r(t)$ یک پارامتری دلخواه منحنی C باشد آنگاه:

$$V = vT \xrightarrow[\text{سوطرف}]{\text{مشتق}} a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(vT) = \frac{dv}{dt}T + v\frac{dT}{dt}$$

ضرب العامل

قاعده زنجیره‌ای برای مشتق $\left(\frac{dT}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)$

$kN \cdot v$

یادآوری:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |r'(h)|\,dh \rightarrow \frac{ds}{dt} = |r'(t)| = |v(t)| = v$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}T + kv^2N = a_T T + a_N N$$

شتاب مماسی (مؤلفه مماسی) — شتاب مرکزگرا (یا شتاب قائم)

با توجه به بحث فوق دیدیم که بردار شتاب همواره در راستای T و N تجزیه می‌شود.

(توضیح) در هر منحنی C بردار N همواره به سمت جهت تقعر منحنی C خواهد بود

$$B_{(s)} = T_{(s)} \times N_{(s)}$$

$$\frac{dB}{ds} = \underbrace{\frac{dT}{ds}}_{kN} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$$

صفر

$\rightarrow \frac{dB}{ds} \perp T$

$|B| = 1 \rightarrow \frac{dB}{ds} \perp B$ (مشتق خودش ⊥ خودش)

$\rightarrow \frac{dB}{ds} \parallel N$

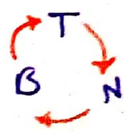
— در نتیجه ضریب ثابتی مانند Z (تاو) وجود دارد به نحوی که $\frac{dB}{ds} = -ZN$ که به Z تاب منحنی C گفته می‌شود

و در ادامه خواهیم دید که تاب یک منحنی فضایی دور شدن از یک منحنی مسطح را نشان می‌دهد یعنی که تاب منحنی مسطح برابر با صفر است.

جهت چرخش منحنی از صفحه به سمت بالا یا ...

— از آنجایی که می‌دانیم: $N = B \times T \Longrightarrow$

$$\frac{dN}{ds} = \underbrace{\frac{dB}{ds}}_{-ZN} \times T + B \times \underbrace{\frac{dT}{ds}}_{kN} = -Z\underbrace{N \times T}_{-B} + k\underbrace{B \times N}_{-T}$$



$$\boxed{\frac{dN}{ds} = ZB - kT}$$

* فرمول‌های فرنه: $\frac{dT}{ds}=KN$ ، $\frac{dN}{ds}=ZB-KT$ ، $\frac{dB}{ds}=-\underset{\text{تاب}}{Z}N$

حال به دنبال فرمول‌های مستقل از پارامتری طول قوس هستیم $\left\{\begin{matrix} K ، T ، N ، B \\ Z \end{matrix}\right\}$

برای پارامتری دلخواه:

$T=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{v(t)}{v(t)}$ ،

$r(t)$

$r'(t)=v(t)=vT$

شتاب مماسی — شتاب قائم (مرکزگرا)

$r''(t)=a(t)=\frac{dv}{dt}T+kv^2N$

اسکالر می‌باشد و نامنفی

* $r'(t)\times r''(t)=(vT)\times\left(\frac{dv}{dt}T+kv^2N\right)=vT\times kv^2N=kv^3B$

صفر

$$B=\frac{r'(t)\times r''(t)}{|r'(t)\times r''(t)|}$$

خودش — اندازه‌اش

فرمول حساب B برای هر پارامتری دلخواه با $N=B\times T$ بردار N را نیز بدون نیاز به پارامتری طول قوس برای هر پارامتری دلخواه حساب می‌شود.

با توجه به * $\rightarrow |r'\times r''|=kv^3|B|=kv^3 \rightarrow k=\frac{|r'\times r''|}{v^3}\rightarrow k=\frac{|r'\times r''|}{|r'|^3}$ $\rightarrow$ فرمول حساب انحنای منحنی مستقل از پارامتری طول قوس

$r'''(t)=?\rightarrow a=r''(t)=\frac{dv}{dt}T+kv^2N \rightarrow r''(t)=\left(\frac{dv}{dt}T+kv^2N\right)$

تابع اسکالر — تابع اسکالر

$$r'''(t)=\frac{d^2v}{dt^2}T+\frac{dv}{dt}\frac{dT}{dt}+\frac{dk}{dt}v^2N+k2v\frac{dv}{dt}N+kv^2\frac{dN}{dt}$$

قاعده زنجیره‌ای: $\frac{dN}{dt}=\frac{dN}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{ds}{dt}\rightarrow v$ ، $\frac{dN}{ds}\rightarrow ZB-KT$

$$\rightarrow (*)T+(*)N+(kv^3Z)B=r'''(t)$$

با توجه به روابط بالا: $(r'\times r'')\cdot r'''=(kv^3)^2Z \rightarrow Z=\frac{(r'\times r'')\cdot r'''}{|r'\times r''|^2}$ $\rightarrow$ فرمول حساب تاب منحنی مستقل از پارامتری طول قوس

Ex) برای منحنی مارپیچ $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ دستگاه TNB و همچنین تاب و انحنای منحنی را در نقطه نظیر $t=0$ به دست آورید. (روش اول)

تابع طول قوس $s(t)=t\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$t=0$ با مبدأ

پارامتری برحسب طول قوس $r(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$$T=\frac{dr}{ds}=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\frac{dT}{ds}=\left(\frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

$$\underset{\text{انحنای منحنی}}{K}=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{a}{a^2+b^2}\rightarrow \underset{\text{شعاع انحنا}}{\rho(s)}=\frac{a^2+b^2}{a}\rightarrow N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

$B=T\times N=✓$

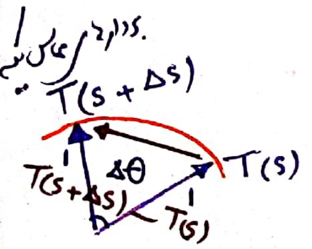
حال در عبارت فوق کافی است که $t=0$ را قرار دهیم که دستگاه TNB در آن نقطه و انحنای منحنی مشخص می‌شود. به علاوه $\frac{dB}{ds}\overset{\text{ضریب}}{=}-ZN$ و از این طریق $Z(0)$ نیز مشخص می‌شود.

if $c=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\rightarrow B=(bc\sin cs,\ -bc\cos cs,\ ac)$ ، $\frac{dB}{ds}=(bc^2\cos cs,\ bc^2\sin cs,\ 0)=-bc^2N$

(تذکر) در برخی از مسایل مانند مثال قبل بدون توجه به نقطه $t=0$ تمام محاسبات را معمولاً در حالت کلی انجام دادیم اما گاهی اوقات برای کاهش حجم محاسبات می‌توان بعد از محاسبه T ، N و $\frac{dT}{ds}$ به جای عامل S مختصات نقطه را قرار داده و به مقادیر عددی رسید.

حال کافی است که ضرب خارجی این دو بردار عددی را حساب کنیم تا مقدار B و K به دست آید. اما برای محاسبه تاب منحنی Z لازم بود که B را نیز برحسب S به دست آوریم که بتوان $\frac{dB}{ds}$ را حساب کرد و سپس Z را مشخص کنیم. واضح است با استفاده از فرمول‌های مستقیم چون برای هر نقطه دلخواهی کاربرد دارد و با محاسبات بسیار راحت‌تر می‌توان نتایج را مشخص کرد.

تمرین) مثال فوق را با روش مستقیم به دست آورید.



$1=$ شعاع دایره $\rightarrow$ طول قوس $=|\Delta\theta|\approx|\Delta T|$

$$\left|\frac{dT}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{T(s+\Delta s)-T(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=K(s)=\frac{d\theta}{ds}$$

لذا K میزان چرخش بردار مماس یعنی T را مشخص می‌کند. با استدلال کاملاً مشابه Z میزان چرخش بردار B را مشخص می‌کند.

Ex) آ ـ ب منحنی زیر را بدست آورید.

$r(t)=(4t^2,\ 7t-4,\ 3t^3+5t-1)$

$0\le t\le 10$

چون $r'''(t)=0 \to \tau=\frac{(r'\times r'')\cdot r'''}{|r'\times r''|^2}=0$

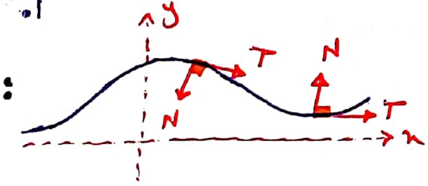
تذکر) اگر حالت خاص منحنی ای در صفحه R^2 به شکل $y=f(x)$ را در نظر بگیریم در این صورت به وضوح تاب این منحنی برابر با صفر است (زیرا مسطح است). به علاوه در مورد انحنای منحنی می توان نوشت

$k=\frac{|r'\times r''|}{|r'|^3}$ ، $r(x)=(x,f(x),0)$ در ۳ بعد

$(0,0,f''(x))$

$r'(x)=(1,f'(x),0) \to r''(x)=(0,f''(x),0) \to r'\times r''=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & f'(x) & 0\\ 0 & f''(x) & 0\end{vmatrix}=f''(x)k \to |r'|=\sqrt{1+f'(x)^2}$

$k=\frac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{(f'(x))^2+1}\right)^3} \to B=\frac{r'\times r''}{|r'\times r''|}=\begin{cases} B=k & f''(x)>0\\ B=-k & f''(x)<0\end{cases}$:



با توجه به جهت تقعر منحنی و علامت $f''(x)$ توصیف $B=k$ و $B=-k$ واضح است.

تذکر) در مسائلی که k، τ و TNB را برای یک منحنی $r(t)$ صرفاً در نقطه ای مانند $r(t_0)$ می خواهد، راحت تر این است که ابتدا بردارهای $r(t_0)$، $r'(t_0)$، $r''(t_0)$ و $r'''(t_0)$ را حساب کنیم (در نقطه ی نظیر $t=t_0$) که این بردارها به صورت عددی بدست آمده و سپس τ, k و TNB را بدست آورد.

تمرین) دستگاه TNB، k و τ را در $t=\frac{\pi}{2}$ برای منحنی زیر محاسبه کنید:

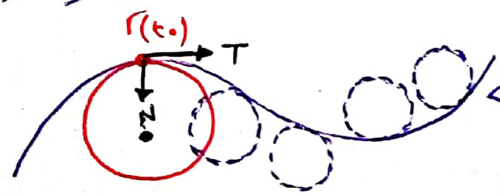
$r(t)=(\cos^3 t,\ \sin 3t,\ 3\cos^2 t)$

$r(\frac{\pi}{2})=(0,-1,0)$

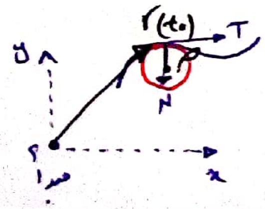
تعریف) منحنی c را یک منحنی هموار می نامیم هرگاه $v(t)=r'(t)$ ناصفر باشد و مشتق دوم آن تابعی پیوسته باشد. صفحه ای که شامل ۲ بردار T و N است در نقطه $r(t_0)$ رسم می شود به صفحه بوسان شناخته می شود.

دایره ای را در نظر بگیرید که از نقطه $r(t_0)$ می گذرد و مرکز آن در امتداد بردار N و با شعاع $\frac{1}{k}=\rho$ است.

این دایره را اصطلاحاً دایره بوسان می نامند و در بررسی رفتار منحنی در نقاط نزدیک $r(t_0)$ اهمیت ویژه ای دارد.



* مکان هندسی حاصل از به هم متصل کردن تمام مراکز حاصل از دایره های بوسان را گستره خم که مرکز انحنای منحنی c گفته می شود.



معادله مرکز دایره بوسان r_c را می توان به صورت زیر ارائه داد:

$r(c)=r(t)+\rho(t)N(t)$

$r_c(t_0)=r(t_0)+\rho(t_0)N(t_0)$

EX) دایره بوسان را برای منحنی $y=-\frac{1}{4}x^2+x$ در نقطه‌ی $(2,1)$ بدست آورید.

k ، $\rho=\frac{1}{k}$ ، N : $A(2,1)$

$r(x)=(x,f(x))=(x,-\frac{1}{4}x^2+x) \longmapsto A=r(2) \rightarrow \begin{cases} k(2)\rightarrow \rho(2) \\ N(2) \quad ? \end{cases}$

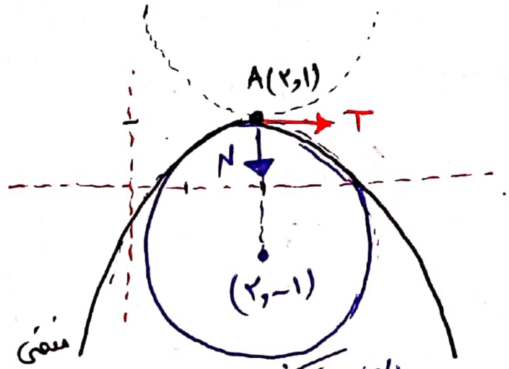
$$k(x)=\frac{|f''(x)|}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3} \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x+1,\quad f''(x)=-\frac{1}{2} \rightarrow k(2)=\frac{\frac{1}{2}}{(\sqrt{1+(f'(2))^2})^3}=\frac{1}{2}\rightarrow \rho(2)=2$$

شعاع دایره بوسان

$(f''(2)<0)$ تقعر رو به پایین

$$T=\frac{r'(x)}{|r'(x)|}=\frac{(1,f'(x))}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\rightarrow T(2)=(1,0)\rightarrow$$

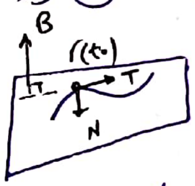
$T\perp N$: دایره قابل رسم



$y=-\frac{1}{4}x^2+x$ سمتی رو به پایین

تمرین) ثابت کنید که منحنی $r(t)=(t,1+t,\sqrt{1-2t^2})$ در $\mathbb{R}^3$ نقاط دارای انحنای ثابت است و علاوه بر آن یک منحنی مسطح می‌باشد سپس معادله‌ی صفحه‌ای که این منحنی در آن قرار دارد را بدست آورید.

صفحه‌ای که از $(1,1,0)$ بگذرد و بردار نرمال آن $B(t)$ باشد



EX) فرض کنید که منحنی C همواره دارای τ ثابت باشد مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{d^2B}{ds^2}$:

$$\frac{dB}{ds}=-\tau N\rightarrow\frac{d^2B}{ds^2}=\frac{d}{ds}(-\tau N)=-\tau\left(\frac{dN}{ds}\right)=-\tau(\tau B-kT)=-\tau^2B+\tau kT$$

تعریف) منحنی هموار C را یک منحنی نرم می‌گوییم هرگاه انحنای منحنی ناصفر باشد.

EX) اگر منحنی نرم C یک منحنی با تاب مثبت و همواره ثابت باشد ثابت کنید که: $\left|\frac{d^2B}{ds^2}\times B\right|=\tau k$

$$\underbrace{\frac{d^2B}{ds^2}}_{\text{با توجه به مثال قبل}}\times B=(\underbrace{-\tau^2B}_{\text{صفر می‌شود}}+\tau kT)\times B=\tau k(\underbrace{T\times B}_{-N})=|-\tau kN|\underset{|N|=1}{=}\tau k$$

(Ex عبارت روبرو را برحسب T، N، B، k، Z بنویسید: $\frac{dN}{ds}\times\frac{d^2T}{ds^2}$

$$\frac{dN}{ds}\times\frac{d}{ds}\left(\frac{dT}{ds}\right)=\frac{dN}{ds}\times\frac{d}{ds}(kN)=\frac{dN}{ds}\times\left(\frac{dk}{ds}N+k\frac{dN}{ds}\right)=\frac{dN}{ds}\left(\frac{dk}{ds}N\right)=(ZB-kT)\times\left(\frac{dk}{ds}N\right)$$

$$=Z\frac{dk}{ds}\underbrace{\cancel{B\times N}}_{-T}-k\frac{dk}{ds}\underbrace{\cancel{T\times N}}_{B}=-Z\frac{dk}{ds}T-k\frac{dk}{ds}B$$

(Ex فرض کنید $r(t)$ یک خم هموار در فضای R^3 باشد که انحنای آن در تمام نقاط ناصفر است (خم منظم) به علاوه $Z(t)$ نیز تاب این منحنی است. خم جدید $\alpha(t)$ را به صورت $\alpha(t)=T(t)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید انحنای خم α برابر است با: $k_1=\sqrt{1+\frac{Z^2}{k^2}}$

$\alpha(t)=T(t)$

$$\alpha'(t)=\frac{d}{dt}(T)=\underbrace{\frac{dT}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}}_{\text{قاعده زنجیره‌ای}}=v(kN)=vkN$$

$$\alpha''(t)=\frac{d}{dt}(vkN)=\frac{dv}{dt}kN+v\frac{dk}{dt}N+vk\frac{dN}{dt}=\frac{dv}{dt}kN+v\frac{dk}{dt}N+v^2kZB-v^2k^2T$$

$\frac{dN}{dt}=\frac{dN}{ds}\frac{ds}{dt}$، $\frac{dN}{ds}=ZB-kT$، $\frac{ds}{dt}=v$ همان

انحنا $k_1=\frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}$

$$\alpha'\times\alpha''=vkN\times(v^2kZB-v^2k^2T)=v^3k^2Z\underbrace{N\times B}_{T}-v^3k^3\underbrace{N\times T}_{-B}\longrightarrow$$

$$|\alpha'\times\alpha''|=\sqrt{v^6k^4Z^2+v^6k^6}$$

$|\alpha'|=vk$

(Ex نشان دهید اگر یک شیء با بردار سرعت ثابت حرکت کند آن‌گاه تکانه زاویه‌ای نسبت به مبدأ مختصات آن، عمودی ثابت است (منظور از تکانه زاویه‌ای حول مبدأ یعنی حاصلضرب خارجی بردار مکان در اندازه حرکت خطی) یعنی $P(t)=m\,v(t)$ که m جرم جسم و $v(t)$ بردار سرعت است.

هدف: $\frac{d}{dt}\left(r(t)\times P(t)\right)=0$

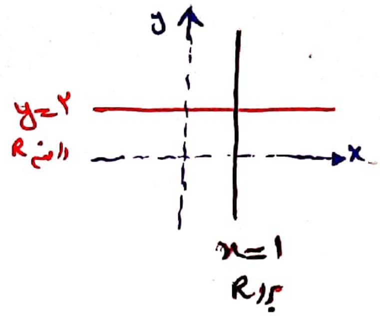
$$\frac{d}{dt}(r(t)\times m\,v(t))=\underbrace{\cancel{r'(t)\times m\,v(t)}}_{\text{صفر می‌باشد}}+\underbrace{\cancel{r(t)\times m\frac{d}{dt}(v(t))}}_{\text{صفر}}=0$$

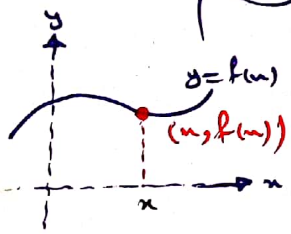
می‌دانیم $r'(t)=v(t)$

* پایان فصل ۱۳

فصل جدید : رویه‌های درجه دوم :

یادآوری از رسم منحنی‌ها





تعریف) مکان هندسی تمام نقاط (x,y,z) که در معادله‌ای به شکل $z=f(x,y)$ یا $g(x,y,z)=0$ صدق می‌کنند را یک رویه (surface) می‌نامند.

Ex) $ax+by+cz=d \longrightarrow$ صفحه

$x^2+y^2+z^2=a^2 \longrightarrow$ کره (به مرکز مبدأ شعاع a)

Ex) $x^2+y^2=4$ رویه

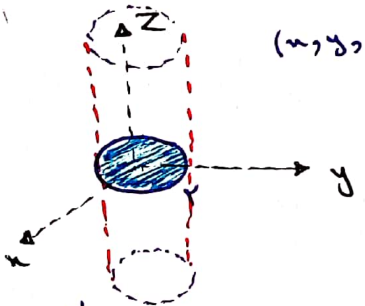
$g(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$

$x^2+y^2=4$

z متغیر

استوانه مستدیر

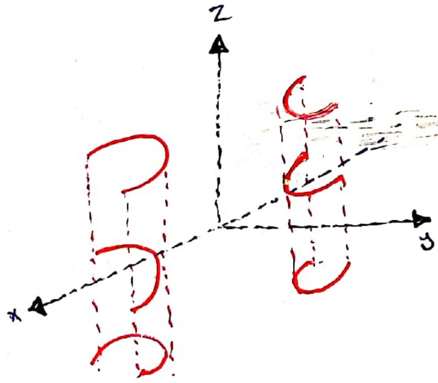
$(x,y,*)$



Ex) استوانه هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

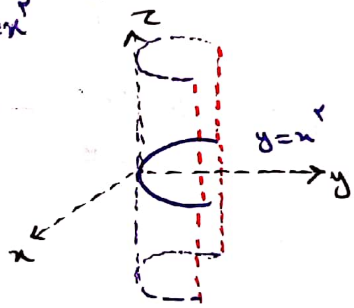
که روی محور zها موازی است



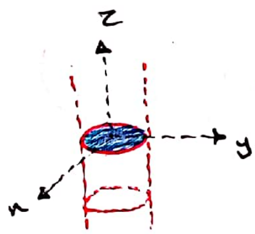
Ex) $y=x^2$ در فضای R^3

$(x,y,*)$

$\downarrow$
x^2



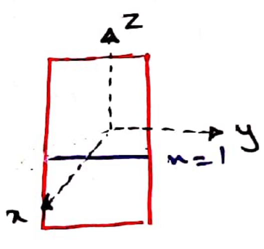
Ex) استوانه بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Ex) $x=1$

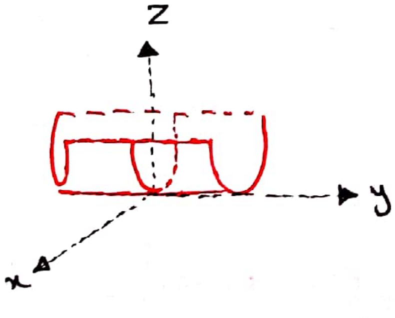
$(1,*,*)$

یک صفحه



Ex) $x^2=z$

استوانه سهموی



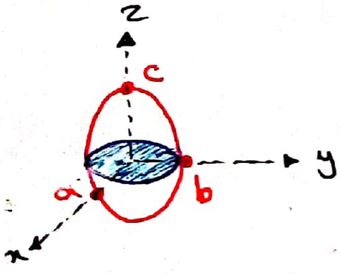
* رویه‌های درجه دوم :

نوع اول) بیضی‌وار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$a,b,c>0$

* ترتیب کشیدن شکل‌ها
آبی
قرمز
مشکی

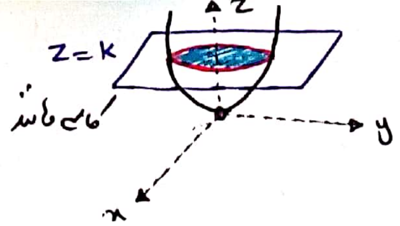


$X=\frac{x}{a}$

$Y=\frac{y}{b}$

$Z=\frac{z}{c}$

کره واحد



نوع دوم) سهمی وار بیضوی : $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$a, b, c > 0$

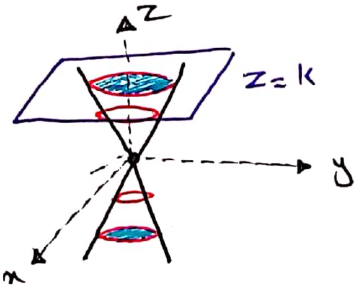
فرم استاندارد : $c=1$

برخورد با صفحه $z=k$ → بیضی

برخورد با صفحه yz $(x=0)$ → $\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2}$ → سهمی رو به بالا

(کناره‌های شکل سهمی می‌باشند)

نوع سوم) مخروط بیضی وار : $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



(برخورد با صفحه yz) $x=0$ → $\frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}$ → $\frac{z}{c} = \pm \frac{y}{b}$

۲ خط متقاطع

فرم استاندارد : $c=1$

(حل مثال از فصل قبل) خم حاصل از اشتراک رویه ی $x^2+y^2=1$ (رویه استوانه) و $z=x^2-y^2$ (بیضوی از زین اسب) را پارامتری کنید. انحنا و تاب، کنج فرنه، صفحه بوسان و مرکز انحنا خم را در نقطه $(1,0,1)$ بدست بیاورید.

$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$ → پارامتری سازی برای معادله اول

$z(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ → $r(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t)$ → $v(t) = r'(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin 2t)$ →

$t=0 : (1,0,1)$ $\qquad v(0) = (0,1,0)$

$a(t) = v'(t) = r''(t) = (-\cos t, -\sin t, -4\cos 2t)$

$v'(0) = (-1, 0, -4)$ → مطابق فرمول‌های قبلی روابط خواسته شده را بدست آوردیم → علاوه بر روابط پیش می‌رویم نه پارامتری

$a'(t) = r'''(t) = (\sin t, -\cos t, 8\sin 2t)$

$a'(0) = (0, -1, 0)$

$T = \frac{r'}{|r'|}$

$T(0) = (0,1,0)$ → $r'(0) \times r''(0) = (-4, 0, 1)$

$|r' \times r''| = \sqrt{17}$ → $N(0) = B(0) \times T(0) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1, 0, 4)$

$k = \sqrt{17}$ ، $\rho = \frac{1}{\sqrt{17}}$ ، $\tau = 0$ →

$r_c(0) = r(0) + \rho(0) N(0) = (1,0,1) + \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,0,4)$

صفحه بوسان از $r(0) = (1,0,1)$ → $B(0) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4,0,1)$ نرمال → $(x-1, y, z-1) \cdot B(0) = 0$ → $-4x + z = -3$

(حل مثال از فصل قبل) نشان دهید اگر به ازای هر s داشته باشیم $\tau(s)=0$ آنگاه خم $r=r(s)$ خمی مسطح است (به عبارتی خم در یک صفحه قرار می‌گیرد)

$\left|\frac{dB}{ds}\right|=0 \longrightarrow B(s)$ ثابت

کافی است نشان دهیم که $r=r(s)$ در صفحهٔ گذرنده از $r(0)$ با نرمال $B(0)$ (صفحهٔ بوسان) قرار می‌گیرد آنگاه حکم ما به صورت

$$(r(s)-r(0))\cdot B_{(0)}=0 \longrightarrow S \text{ دلخواه}$$

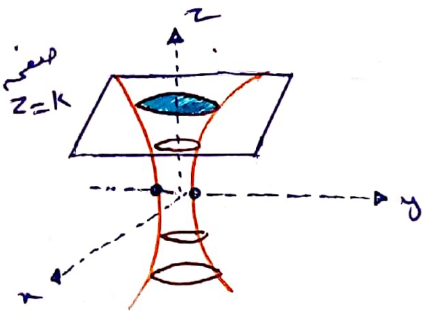
مشتق گرفتن

$$\underbrace{f(s)=(r(s)-r(0))\cdot B(0)}_{\text{فرض}} \longrightarrow f'(s)=r'(s)\cdot B(0)=T(s)\cdot B(0)=0 \longrightarrow f(s)=\text{ثابت} \longrightarrow f(s)=f(0)=0$$

$T\perp B$

نوع چهارم) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a,b,c>0$

: هذلولی وار یک پارچه



برخورد با صفحهٔ $yz \longrightarrow x=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: هذلولی ، $z=0 \longrightarrow$ بیضی

که روی y سوار می‌کنیم

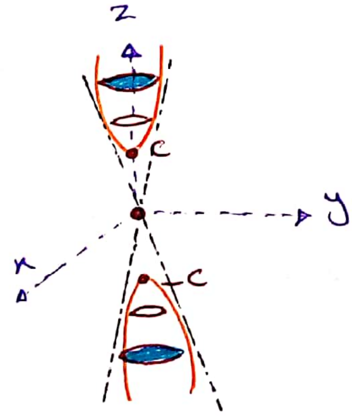
$y=0 \longrightarrow$ هذلولی

نوع پنجم) هذلولی وار ۲ پارچه : $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$a,b,c>0$

$$\text{if } z=k : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$$

باید ≥ 0



$\frac{k^2}{c^2}\geq 1 \to k^2\geq c^2 \longrightarrow k\geq c$ ، $k\leq -c$ ، برخورد با صفحهٔ yz ، $x=0 \longrightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هذلولی

که روی z سوار می‌کنیم

$z\neq 0$ ، $y=0 \longrightarrow$ هذلولی

نوع ششم) رویهٔ زین اسبی $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

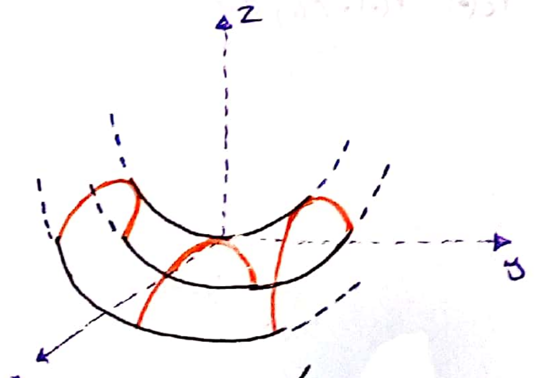
$a,b,c>0$

برخورد با صفحهٔ xz $(y=0) \to -\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$: سهمی رو به پایین

برخورد با صفحهٔ yz $(x=0) \to \frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$: سهمی رو به بالا

برخورد با صفحهٔ $x=k$ (صفحهٔ موازی yz) $\longrightarrow \frac{-k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ سهمی رو به بالا منتهی انتقال یافته

$y=t \longrightarrow -\frac{x^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=\frac{z}{c}$



سطح زین هذلولوی

$c=1$: فرم استاندارد

فصل جدید

حد و پیوستگی توابع چند متغیره : در ریاضی (۱) دیدیم که $\lim_{x\to a} g(x) = l$ به صورت زیر تعریف شد :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad (s.t) \quad 0<|x-a|<\delta \to |g(x)-l|<\varepsilon$$

به ازای — وجود دارد — به طوری که — فاصله

در ادامه قصد داریم تعریف حد را برای توابعی مانند $f:R^n \to R$ تعمیم دهیم .

در حالت خاص $f:R^2 \to R$ می‌توان تعریف حد را به صورت زیر نوشت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l \longrightarrow \forall\varepsilon>0 : \exists\delta>0 \quad 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \longrightarrow |f(x,y)-l|<\varepsilon$$

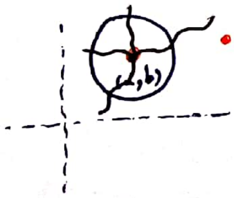
تذکر) همانند تعریف ریاضی I تابع $f(x,y)$ را در (a,b) پیوسته می‌گوییم هرگاه :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

قضیه) هر چند جمله‌ای دو متغیره یک تابع پیوسته است .

EX) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+xy^3+3y^4x=5$

تذکر) در حد توابع مثلاً دو متغیره نیازی نیست که تمام همسایگی محذوف (a,b) در دامنهٔ تابع f باشد و اگر صرفاً بتوان مسیرهایی مستقیم به (a,b) را یافت که در دامنهٔ تابع f باشد حد دو متغیره f تعریف می‌شود .



قضیه) اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = m$ در این صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = l \pm m \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l}{m}$$

شرط $m \neq 0$

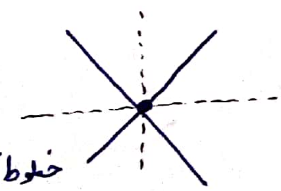
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y) = l.m$$

تذکر) دامنهٔ توابع چند متغیره (۱) مخرج کسر برابر صفر نباشد
(۲) زیر رادیکال منفی نباشد

EX) دامنهٔ تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

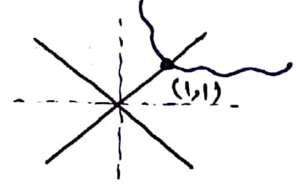
نیمساز مادری — قرینه‌اش

دامنهٔ تابع f $= R^2-\left(\{(x,x)\ \forall x\in R\} \cup \{(x,-x)\ \forall x\in R\}\right)$



خطوط آبی رنگ در دامنه نیستند

Ex) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)} = \frac{3}{2}$



Ex) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad 0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||y| \le |y|$ $\to 0$

کم‌تر مساوی یک

حاصل حد $= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

طبق ق فشردگی

برای توابع چند متغیره

قضیه) فرض کنید که دامنه تابع f زیرمجموعه‌ای از اشتراک دامنه‌های توابع g و h باشد یعنی در همسایگی نقطه (a,b) داشته باشیم: $D_f \subseteq D_g \cap D_h$ و به علاوه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$$

در این صورت اگر برای هر (x,y) در همسایگی (a,b) داشته باشیم $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$ آنگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

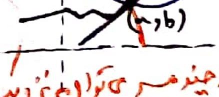
Ex) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right) \to$ $\quad 0 \le \left|x\sin\frac{1}{y}\right| \le |x| \to 0$ ، $\quad 0 \le \left|y\sin\frac{1}{x}\right| \le |y| \to 0$ $\quad \to$ لذا حاصل حد فوق نیز برابر با صفر است

$\lim_{x\to a} g(x) = l \iff \lim_{x\to a^+} g(x) = l = \lim_{x\to a^-} g(x)$

* فقط از یک مسیر نزدیک می‌شدیم

یک راه دوری ریاضی (۱)

قضیه) اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ اگر و تنها اگر حد روی هر مسیر دلخواهی منتهی به (a,b) برابر با l باشد.



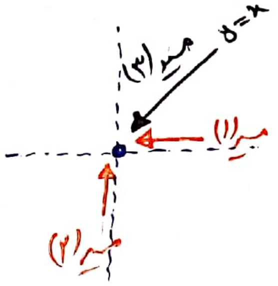
* از چند مسیر می‌توان نزدیک شد

(تذکر) طبیعی است که در فضای ۲ متغیره بی‌نهایت مسیر منتهی به نقطه (a,b) وجود دارد و در نتیجه طبیعی است که نمی‌توان از عکس این قضیه برای یافتن حد استفاده کرد اما اگر بتوانیم دو مسیر منتهی به (a,b) در دامنه f بیابیم که مقدار حد روی این دو مسیر مساوی نباشند آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که حد f وجود ندارد.

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

مسیر (۱) بخش مثبت محور x: $y=0$, $x\geq 0$ → $0 = \dfrac{0}{x^2+y^2} = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ روی این مسیر → لذا حد $(x,y)\to(0,0)$ روی این مسیر مقدار صفر را نتیجه می‌دهد

مسیر (۲) بخش منفی محور x: $x=0$, $y\to 0^-$ → حاصل حد $=0$



مسیر (۳) خط $y=x$

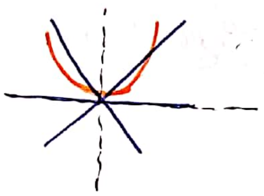
$f(x,y)=f(x,x)=\dfrac{x\,x}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

پس بنا به تذکر قبل این تابع در $(0,0)$ حد ندارد

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

مسیر (۱) $y=0$, $x\to 0^+$ → روی مسیر (۱) $f(x,y)=0 \to 0$

مسیر (۲) روی مسیر $y=x$ → $f(x,y)=f(x,x)=\dfrac{x^3}{x^4+x^2}$ → $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x)=0$



مسیر (۳) مسیر خطی دلخواه و گذرنده از مبدأ مختصات $y=kx$ → $f(x,y)=f(x,kx)=\dfrac{x^2kx}{x^4+k^2x^2}$ → $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0$

مسیر (۴) $y=x^2$ سهمی → $f(x,y)=f(x,x^2)=\dfrac{x^2x^2}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$ → حد وجود ندارد

تذکر) توجه کنید که $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ و $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ را اصطلاحاً حدهای مکرر تابع f می‌نامند و هیچ ارتباطی با $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ندارند و ممکن است هر یک از آنها موجود باشند درحالیکه دیگری وجود نداشته باشد.

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$ درحالیکه → $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$

اصطلاحاً وجود ندارد

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-\sin y}{x+y}$

مسیر (۱) $y=0$, $x\to 0^+$ → $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

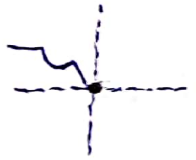
مسیر (۲) $y=x$ → $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{2x}=0$

مسیر (۳) $x=0$, $y\to 0^+$ → حد $=-1$

وجود ندارد ∄

مسیر (۴) $x=\sin y$ → حاصل حد $=0$

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^m y^n}{x^2+y^2}$ درمورد چه مقادیر m و n حد موجود است؟



حل سؤال: به دلیل وجود x^2+y^2 در مخرج ← $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$(x,y)\to(0,0)$ → در مختصات قطبی $r\to 0^+$ (ناصفر θ نیست)

$\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{r^m\cos^m\theta\, r^n\sin^n\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0^+} r^{(m+n-2)}\cos^m\theta\sin^n\theta$

θ در مخرج حذف شد

کراندار

آنگاه درمورد حالات $m+n-2$ بحث می‌کنیم

حالت اول : $m+n-2>0$ ← حاصل حد $=0$ ← طبق ق ($0\times$ تابع کراندار) $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ قبلاً بررسی کردیم

حالت دوم : $m+n-2=0$ ← حاصل حد $=\cos^m\theta\,\sin^n\theta$ ← $\theta=\frac{\pi}{4}:\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{m+n}$ ، $\theta=\frac{\pi}{3}:\left(\frac12\right)^m\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n$

که در این حد (ربطی به $r\to0^+$ ندارد) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ قبلاً داشتیم

حالت سوم : $m+n-2<0$ ← $\lim_{r\to0^+}\frac{\cos^m\theta\,\sin^n\theta}{r^{2-m-n}}$ → $+\infty$ ، $-\infty$ ← وجود ندارد ← یعنی می‌توان θ ای را در نظر گرفت که مقدار صورت کسر $+$ یا $-$ شود لذا حد وجود ندارد. $\theta=\frac{\pi}{4}:\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{m+n}$

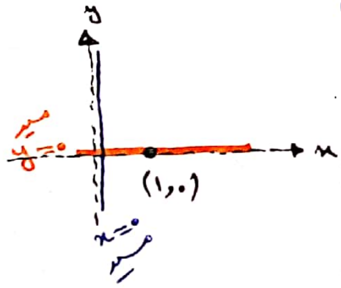
تذکر) همواره توجه کنید که در انتخاب مسیرهای مختلف به (a,b) حتماً مسیر انتخاب شده باید:
(۱) در دامنه تابع f قرار داشته باشد (۲) حتماً از نقطه (a,b) بگذرد

Ex) $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)^2y}{(x-1)^4+y^2}$

مسیر (۱) → $y=0$ → حد $=0$

~~مسیر (۲)~~ → ~~$x=0$~~ → مسیر غلطی که از نقطه نمی‌گذرد

مسیر (۲) → $y=(x-1)^2$ → $\frac{(x-1)^4}{(x-1)^4+(x-1)^4}=\frac12$



Ex) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$t=x^2+y^2:\ \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

Ex) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2-y^2}$

$x=0$ → حاصل حد $=0$

~~$y=x$~~ → داخل دامنه f نیست : حد وجود ندارد

$y=2x$ → حد $=-\frac23$

Ex) $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{y-e^x}{y^2-1}$

$x=0$ → حد $=\frac12$ حد وجود ندارد

$y=e^x$ → حد $=0$

تمرین) $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ قطبی؟

* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{r\to0^+}\frac{\cancel{r^3}\,r\cos^2\theta.\sin\theta}{\cancel{r^2}\underbrace{(r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)}_{?}}\neq0$

در حالت کلی حد موجود نیست چون مسیرهایی وجود دارد که مخرج کسر صفر می‌شود اما در این مسیر تعریف نشده

یا به دلیل وجود حاصل θ در مخرج کسر تابع $\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$ کراندار نمی‌باشد؟ زیرا می‌توان θ را چنان کوچک در نظر گرفت که تابع فوق کراندار نباشد ← از روش قطبی نمی‌توان به جواب رسید.

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 y}{x^4+y^2}$ $\quad x=0 \to l=0$

روش اول) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 x^3 y}{x^4+y^2} \xrightarrow[\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}]{\text{نامساوی}} \left|\frac{x^3 y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{\frac{x^4+y^2}{2}}{x^4+y^2}=\frac{1}{2} \to$ $\quad (b=y^2,\ a=x^4)$

$0 \le \left|\frac{x^3 y}{x^4+y^2}\right| x^2 \le \frac{x^2}{2} \to$ حد $=0$

روش دوم) تغییر متغیر مجاز باشد: $\underset{+\text{همواره}}{x^4} = \underset{+\text{همواره}}{w^2}$ ، $w=x^3$ ، $x\to 0 \leftrightarrow w\to 0$

$\to \frac{x^5 y}{x^4+y^2} = \frac{w^{5/4}y}{w^2+y^2} \to$ $w=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ $\to \lim = \frac{r^{5/4}\cos^{5/4}\theta\, r\sin\theta}{r^2}$

$= \underbrace{r^{\frac{5}{4}+1-2}}_{+\text{همواره}} \cos^{5/4}\theta \sin\theta \to 0 \times \text{کراندار} = 0$

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{|x|^3+|y|^3}$: $X^2=|x|^3$ ، $Y^2=|y|^3$ $\to \lim\limits_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X^{4/3}Y^{4/3}}{X^2+Y^2}=0$

تغییر متغیر مجاز باشد

$m+n-2>0$

$\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-2>0$

$\frac{x^m y^n}{x^2+y^2}$ قطعی

(تذکر) نکات گفته شده در جلسه قبل در مورد حد توابع دو متغیره مطرح شد به صورت مشابه در توابع چند متغیره نیز قابل طرح است و فضاهای فشرده و ... تماماً قابل تعمیم هستند.

Ex) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3x^4+y^4+5z^4}{x^2+y^2+z^2} =$ صفر

حل) $0 \le 3x^2 \times \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + y^2\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + 5z^2\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \le 3x^2 + y^2 + 5z^2 \to 0$

مسیر ← کره‌ای به شعاع ε

Ex) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$ $\quad x=0:\ l=0$

$x=y:\ \frac{x^2}{x-x^3}=\frac{x}{1-x^2}\to 0$

$y=x^3+x^4:\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^3+x^4)}{x^3+x^4-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x^5}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$

حد وجود ندارد

اصلاح کنید 😊 : $xy=y-x^3$: $xy-y=-x^3 \xrightarrow{x\ne 1} y=\frac{-x^3}{x-1}$ $\to$ مسیر فرمولی پیدا کنید که منفی نباشد

روی مسیر مقدار حد برابر ۱ می‌باشد

تذکر) در استفاده از آخرین تکنیک لازم است دقت کنید که عبارت حاصل واقعاً یک منفی باشد مثلاً می‌دانیم که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

مسیر (۱) $x=0 \to l=0$

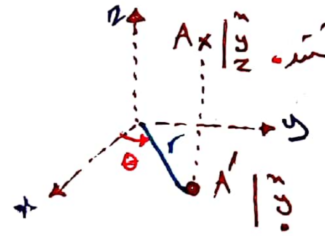
مسیر (۲) $x^2 y = x^2+y^2 \to y^2 - x^2 y + x^2 = 0 \to \cancel{y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4-4x^2}}{2}}$ چرا؟

$x \to 0 : x^4 - 4x^2 < 0$

$l = 1$ ✗

* دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی: در ریاضی (۱) دیدیم که می‌توان به جای (x,y) از (r,θ) استفاده کرد در R^3 نیز دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت (r,θ,z) به جای (x,y,z) مطرح می‌شود که در آن (r,θ) همان مقادیر قطبی (x,y) در مختصات قطبی هستند.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $r^2 = x^2+y^2$



Ex) $r=2$ رویه

* مختصات کروی: به جای (x,y,z) از (ρ,ϕ,θ) استفاده می‌کنیم که در آن ρ فاصله نقطه A تا مبدأ مختصات، θ همان زاویه‌ای که در مختصات استوانه‌ای مطرح شد و زاویه ϕ زاویه محصور بین جهت مثبت محور zها و بردار OA است.

$x = \rho\sin\phi\cos\theta$

$y = \rho\sin\phi\sin\theta$

$z = \rho\cos\phi$

$\rho^2 = r^2+z^2 = x^2+y^2+z^2$

$r = \rho\sin\phi$

$z = \rho\cos\phi$

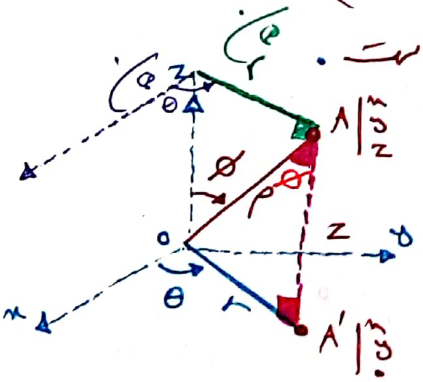
$\rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \phi \leq \pi$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

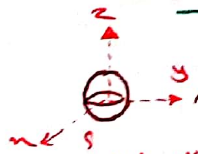


$\tan\theta = \frac{y}{x}$ ، $\tan\phi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

θ: زاویه بین r و جهت مثبت محور xها

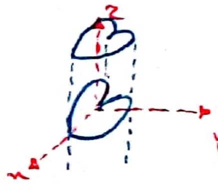
r: تصویر ρ در صفحه xy

Ex) رویه $\rho=3$

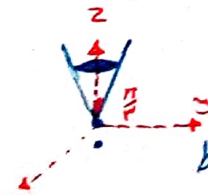


کره‌ای به شعاع ۳ حول مبدأ

Ex) رویه $r = 1+\cos\theta$

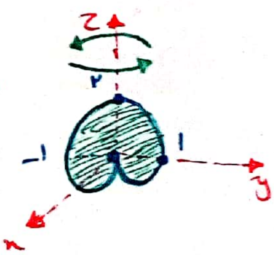


Ex) رویه $\phi = \frac{\pi}{4}$



مخروط (ρ, ϕ, θ) ، $\phi = \frac{\pi}{4}$

Ex) رویه $\rho = 1+\cos\phi$



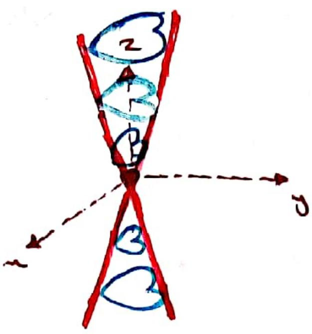
(ρ,ϕ,θ) دلخواه

• حاصل دوران شکل فوق حول محور zها؛ چون θ ندارد ← سیب

Ex) منحنی حاصل از برخورد رویه‌ی $\rho=2\theta$ و $\phi=\frac{\theta}{2}$ را در نظر بگیرید و انحنای آن θ را در نقاط b مختلف مشخص کنید.

$$r(\theta)=(\underbrace{\rho\sin\phi\cos\theta}_{x},\ \underbrace{\rho\sin\phi\sin\theta}_{y},\ \underbrace{\rho\cos\phi}_{z})=\left(2\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta,\ 2\theta\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ 2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Ex) رویه‌ی $r=z(1+\cos\theta)$ را توصیف کنید.



$z=0 \to r=0 \to (0,0,0)$ مبدأ

$z=k \to r=k(1+\cos\theta)$ دلوار

صفحه‌ی موازی xoy

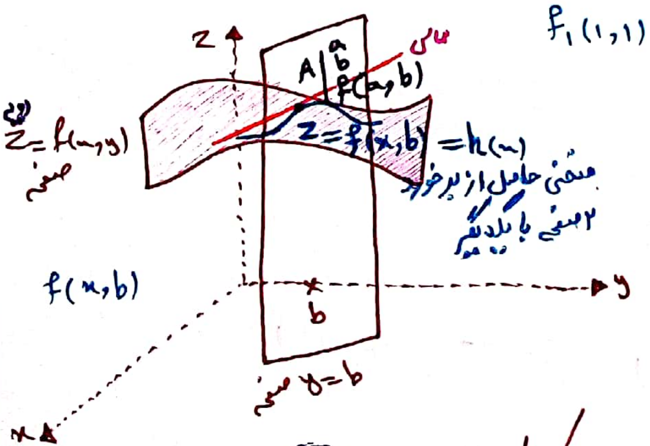
مشتقات جزئی: فرض کنید که $f(x,y)$ یک تابع ۲ متغیره باشد در این صورت اگر تابع $f(x,y)$ را طوری در نظر بگیریم که y را از آن همواره ثابت باشد در این صورت تابع یک متغیره به صورت $h(x)=f(x,y)$ بدست می‌آید. اگر فرض کنیم همواره $y=b$ را در این صورت $h(x)=f(x,b)$. حال اگر $h'(a)$ را در نظر بگیریم منظور مشتق تابع $h(x)$ در نقطه‌ی a می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{h(a+h)-h(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

عبارت فوق را با $f_1(a,b)$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ یا $f_x(a,b)$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}$ نمایش می‌دهند و آن را مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x در نقطه‌ی (a,b) می‌نامیم. به صورت مشابه با ثابت فرض کردن x مشتق جزئی f نسبت به y تعریف می‌شود. و $f_2(a,b)$ یا $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ یا $f_y(a,b)$ نمایش می‌دهند.

Ex) $f(x,y)=7x^2y+4xy^5 \to f_1(x,y)=14xy+4y^5$ ، $f_2(x,y)=7x^2+20xy^4$

$f_1(1,1)=18$ ، $f_2(1,1)=27$



تعبیر هندسی مشتقات جزئی تابع f به راحتی قابل توصیف است:

$f_1(a,b)=h'(a) \to$ شیب خط مماس بر منحنی $f(x,b)=h(x)=z$ در نقطه‌ی $A\,|\,a,\ b,\ f(a,b)$

$f_2(a,b)=$ شیب خط مماس بر منحنی $z=f(a,y)$ در نقطه‌ی $A\,|\,a,\ b,\ f(a,b)$ ← توجه کنید که صفحات $y=b$ و $x=a$ بر هم عمودند لذا خطوط مماس مطرح شده در بحث فوق در دو صفحه‌ی عمود بر هم قرار دارند.

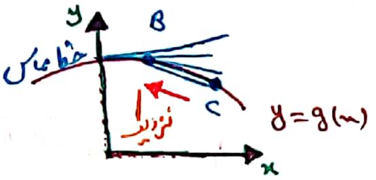
$y = mx$ (خط) → بردار موازی آن $(1, m)$ → بردار یکی موازی دو خط مماس مطرح شده

$z = f(x, b)$ $\xrightarrow{\text{در صفحه } xz \text{ قرار دارد}}$ بردار موازی خط مماس $(1, 0, f_1(a,b))$ ($y=0$)

$z = f(a, y)$ $\xrightarrow{\text{در صفحه } yz \text{ قرار دارد}}$ بردار موازی خط مماس $(0, 1, f_2(a,b))$ ($x=0$)

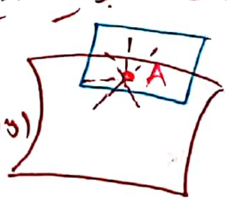
صفحه مماس بر یک رویه در نقطه A :

فرض کنید رویه $z = f(x,y)$ را در نظر گرفته ایم و نقطه $A \begin{vmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{vmatrix}$ روی آن انتخاب شده است. خط مماس بر یک رویه در نقطه A، مشابه خط مماس بر منحنی به صورت حد خطوط قاطع تعریف می‌شود:



رویه $z = f(x,y)$

در واقع خاصی مجموعه خطوط مماس بر یک رویه در نقطه A تشکیل یک صفحه می دهد که این صفحه را صفحه مماس بر رویه در نقطه A می نامیم.



$z = f(x,y)$

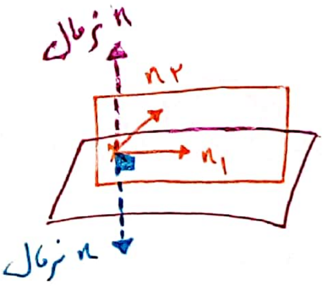
* در جلسه قبل دیدیم که دو خط مماس بر منحنی های حاصل از برخورد رویه $z=f(x,y)$ با صفحات $x=a$ و $y=b$ با بردارهای زیر موازی اند:

$\vec{n_1}\ (1, 0, f_1(a,b))$

$\vec{n_2}\ (0, 1, f_2(a,b))$

فرض کنیم که رویه $z=f(x,y)$ در نقطه A دارای صفحه مماس باشد (بعداً خواهیم دید که برای این منظور کافی است که تابع f در A مشتق پذیر باشد؟؟)

حال قصد داریم معادله صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطه A را بدست آوریم:



بردار نرمال صفحه مماس $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_1(a,b) \\ 0 & 1 & f_2(a,b) \end{vmatrix} = (-f_1(a,b), -f_2(a,b), 1)$

در ادامه بردار نرمال صفحه مماس را برای ساده تر شدن در یک (-1) ضرب کرده که فقط جهت آن عوض می شود.

n نرمال $= (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)$

معادله صفحه مماس (اگر وجود داشته باشد): $f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) + (-1)(z - f(a,b)) = 0$

معادله خط قائم بر رویه در نقطه A؟ : (خطی موازی $\vec{n}$ و گذرنده از نقطه A) : $\frac{x-a}{f_1(a,b)} = \frac{y-b}{f_2(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$

EX) بردار نرمال و معادله صفحه مماس و قائم بر رویه $z=-x^2y+3x$ را در نقطه نظیر $x=1$ و $y=-1$ به دست آورید.

$z=f(x,y)=-x^2y+3x \to f_1(x,y)=-2xy+3 \to A(1,-1,4)$

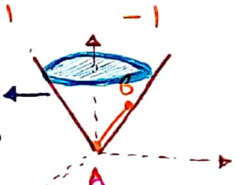
$f_2(x,y)=-x^2$

$\vec{n}\,(f_1(1,-1),\ f_2(1,-1),\ -1)$ ← 5 ، -1

صفحه مماس : $5(x-1)+(-1)(y+1)+(-1)(z-4)=0 \to 5x-y-z=2$

معادله خط قائم : $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{-1}$

چون تابع $z^2=x^2+y^2$ در مبدأ اصلاً مشتق پذیر نمی باشد و خط های مماس روی جداره های مخروط اند که تشکیل صفحه نمی دهند



(تذکر) دقت کنید که نقطه رأس یک مخروط صفحه مماس ندارد

EX) رویه $z=x^2-2xy+y^2x$ را در نظر بگیرید معادله صفحه های مماس بر این رویه را بنویسید که موازی صفحه xy باشد.

$\vec{n}\,(f_1(a,b),\ f_2(a,b),\ -1) \to \vec{n} \parallel \vec{k}$: $f_1(a,b)=0$ ، $f_2(a,b)=0$ $\to$ $2x-2y+y^2=0$ ، $-2x+2xy=2x(y-1)=0$

۲ مؤلفه اول صفر شوند و مؤلفه سوم نا صفر یعنی $\vec{n}$ نرمال موازی محور zها باشد

$x=0$ یا $y=1$

$x=0 \to y^2-2y=0 \to (0,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{4})$

$y=1$: $2x-2+1=0 \to x=\frac{1}{2}$

۳ صفحه قابل رسم می باشد

(یادآوری) $y=g(x)$ ، $g'(a)$ مشتق پذیر باشد ← پیوستگی را نتیجه می دهد.

(سؤال) آیا وجود مشتقات جزئی f_1 و f_2 پیوستگی f را نتیجه می دهد؟

EX) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ قبلاً دیدیم که f در $(0,0)$ پیوسته نیست (حتی حد ندارد) ← برای نقاط مرزی دامنه تعریف حدی رویم

$f_1(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$ (مطلق ، حدی)

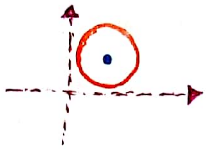
$f_2(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$

پس مشتقات جزئی $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ موجود و برابر صفرند اما تابع f در $(0,0)$ پیوسته نیست

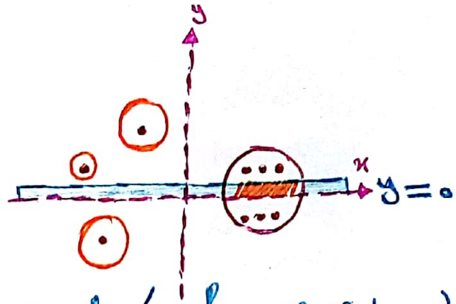
تذکر) دقت کنید که در توابع چندضابطه‌ای صرفاً برای نقاطی می‌توان فرمول های مشتق را به کار برد که یک همسایگی از نقطه کاملاً داخل یک ضابطه قرار گیرد و در غیر این صورت صرفاً باید از تعریف مشتق های جزئی استفاده کنیم. در مثال قبل اگر $(x,y)\neq(0,0)$ آنگاه داریم:

$$f_1(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

فرمول عادی مشتق



Ex) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$



نقاط روی محور xها باید از طریق تعریف مشتق گرفته شوند چون از ۲ ضابطه پیروی می‌کنند

نقاط بالا و پایین از ضابطه اول ✓
نقاط روی محور x ها از ضابطه دوم ✓

داریم:

$$f_{11}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_1(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad f_{21}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{12}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_1(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad f_{22}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

به همین صورت مشتقات جزئی مرتبه های بالاتر تعریف می‌شود. $f_{2122}(x,y)=\dots$

Ex) $f(x,y) = x^5y^3 + xy^4$

$f_1(x,y) = 5x^4y^3 + y^4$ ، $f_2(x,y) = 3x^5y^2 + 4xy^3$ ، $f_{121}(x,y) = 60x^3y^2$

$f_{11}(x,y) = 20x^3y^3$ ، $f_{22}(x,y) = 6x^5y + 12xy^2$ ، $f_{211}(x,y) = 60x^3y^2$

$f_{12}(x,y) = 15x^4y^2 + 4y^3 = f_{21}(x,y) = 15x^4y^2 + 4y^3$

مساوی

تذکر) در مثال فوق می‌توان دید که $f_{12}=f_{21}$ به صورت مشابه $f_{211}=f_{121}$. در حالت کلی چنین حکمی صحیح نیست و مشتق گرفتن های جزئی نسبت به متغیرها اما با ترتیب های مختلف لزوماً به یک مقدار یکسان نمی‌رسیم.

تمرین) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

مطلوب است محاسبه موارد ذیل:

الف) $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ را حساب کنید (از تعریف حد) ب) $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ زمانیکه $(x,y)\neq(0,0)$ را بدست آورید (فرمول مشتق عادی)

ج) $f_{12}(0,0)$, $f_{21}(0,0)$ را بدست آورید و می‌بینیم که $f_{12}(0,0)\neq f_{21}(0,0)$

(قضیه) اگر تابع $f(x,y)$ در همسایگی نقطه (a,b) خود و مشتقات جزئی آن پیوسته باشند دراین صورت مشتقات جزئی f نسبت به متغیرهای یکسان ولی با ترتیب مختلف مقادیر یکسانی را نتیجه می‌دهد.

Ex) $f_{21121} = f_{11212}$

f_{21} ، f_2 ، f_{11212} ، f_{1121} ، f_{112} ، f_{11} ، f_1 ، f ، f_{21121} ، f_{2112} ، f_{211}

A پیوستگی در همسایگی

* قاعده زنجیره‌ای برای مشتقات جزئی:

در سراسر این بخش همواره فرض می‌کنیم که مشتقات جزئی تابع f از هر مرتبه موجود و پیوسته باشند

$y=x^5+1$, $x=t^2-1$: $\frac{dy}{dt}=5x^4\cdot 2t$ $\longleftarrow$ $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ | if $y=f(x)$, $x=x(t)$ $\Big\}\rightarrow y=f(x(t))$

در ادامه این فصل قصد داریم قاعده مشابهی برای توابع چند متغیره را ارائه دهیم. به عنوان مثال ساده فرض کنید که $z=f(x,y)$ و $x=u(t)$, $y=v(t)$ که در آن u و v توابعی مشتق‌پذیرند. به علاوه طبق فرض $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ توابعی پیوسته هستند.

$$z\Big\langle\begin{matrix}x - t\\ y - t\end{matrix}$$

$\cancel{\frac{dz}{dx}}$

$\frac{dz}{dt}=?$

Ex) $z=f(x,y)=x^2+xy$
$x=t^3+1$
$y=t^5$

$\longrightarrow z=(t^3+1)^2+t^5(t^3+1) \longrightarrow \frac{dz}{dt}=\checkmark$

تک متغیره شد

نماد d ← تابع تک متغیره
نماد δ ← تابع چند متغیره

$z=g(t)=f(u(t),v(t)) \longrightarrow g'(t)=\frac{dz}{dt}=\lim_{h\to0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$

تک متغیره

یک عبارت را اضافه و کم کردم و کسر را تفکیک کردم

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(u(t+h),v(t+h))-f(u(t),v(t))}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(u(t+h),v(t+h))-f(u(t),v(t+h))}{h}+$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(u(t),v(t+h))-f(u(t),v(t))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{u(t+h) - u(t)} \times \underbrace{\frac{u(t+h) - u(t)}{h}}_{u'(t)} +$$

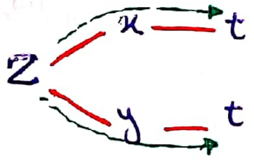
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{v(t+h) - v(t)} \times \underbrace{\frac{v(t+h) - v(t)}{h}}_{v'(t)}$$

$$= f_1(u(t), v(t))\, u'(t) + f_2(u(t), v(t))\, v'(t) = f_1(x,y)\, u'(t) + f_2(x,y)\, v'(t) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\frac{dx}{dt}} + \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{\frac{dy}{dt}} \longrightarrow \text{و لذا} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

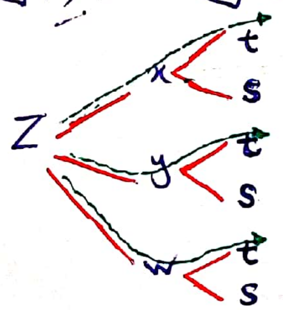
Ex) $\frac{dz}{dt} = ?$ $\quad z = f(x,y) = x^2 + xy$, $x = t^3 + 1$, $y = t^5$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (2x + y)(3t^2) + x(5t^4)$$



* مثال فوق را می توان با نمودار درختی متغیرها به راحتی به ذهن سپرد :

* دقیقاً با استدلال مشابه می توان تمام توابع چند متغیره را به صورت زیر نوشت و فرمول های مشتق زنجیره ای را برای آن ها بدست آورد :



: $Z = Z(x, y, w)$

هر یک از x و y و w تابعی از t و s می باشند.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial s}$$

Ex) فرض کنید $z = f(x,y)$ و $x = 5s + 2t$ ، $y = 5s - 2t$ مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial s}$ ، $\frac{\partial z}{\partial t}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial s \, \partial t}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_1(x,y) \cdot 5 + f_2(x,y) \cdot 5 \quad \Bigg| \quad \frac{\partial z}{\partial t} = f_1 \cdot (2) + f_2 \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(5 f_1(x,y) + 5 f_2(x,y)\right) = 5 \frac{\partial f_1}{\partial s} + 5 \frac{\partial f_2}{\partial s}$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta s} = \frac{\delta f_1}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\delta f_1}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta s} = f_{11}(۵) + f_{12}(۵) \to \dots$$

Ex) فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی سه متغیره باشد و به علاوه $z=z(x,y)$ مطلوبست محاسبه $\frac{\delta f}{\delta x}$:

مهم

$f < x,\ y,\ z$ ، $z < x,\ y$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}$$

$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)$ $\frac{\delta}{\delta x} f(x,y,z)$

Ex) فرض کنید $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+yz \\ z=z(x,y)=x^2+y^3 \end{cases}$ مطلوبست محاسبه رابطه بالا:

$f(x,y)=x^2+y(x^2+y^3)$ سمت چپ رابطه

$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)=2x+2xy$

$\frac{\delta f(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta f(x,y,z)}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x} = 2x + y\cdot 2x$ سمت راست رابطه

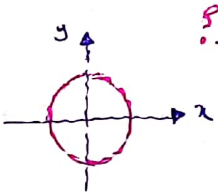
تمرین) فرض کنید $z=z(x,y)$ ، $x=e^s\cos t$, $y=e^s\sin t$ ثابت کنید که: $\frac{\delta^2 z}{\delta s^2}+\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}=(x^2+y^2)\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)$

$z < x < s,\ t$ ، $z < y < s,\ t$

تراز: برای تابع $z=f(x,y)$ منحنی تراز نظیر f برای $z=c$ در واقع تمام (x,y)هایی است که $f(x,y)=c$.

Ex) منحنی تراز $z=f(x,y)=x^2+y^2$ نظیر $z=4$ کدام است؟

منحنی تراز $=\{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$



مشتق پذیری یک تابع چند متغیره:

تابع $f(x,y)$ را در همسایگی (a,b) در نظر بگیرید گوییم که تابع f در این نقطه مشتق پذیر است هرگاه $f_1(a,b)$ و $f_2(a,b)$ موجود باشند و به علاوه داشته باشیم:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf_1(a,b)-kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad \text{باید}$$

Ex) مهم

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ابتدا ثابت کنید که f در $(0,0)$ مشتق پذیر است؟ سپس با یافتن $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ بررسی کنید که آیا این دو تابع در مبدا پیوسته هستند؟

الف) $f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \to f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = 0$ مرانداز ×

و به صورت مشابه $f_2(0,0) = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \longrightarrow$$ در نتیجه f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است

$t=\sqrt{h^2+k^2}$: $\lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} \to 0$

ب) $f_1(0,0)=0$

$(x,y)\neq(0,0)$ برای نقاط: $f_1(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\frac{(-\frac{1}{2})\,2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ فرمول های مشتق

شرط پیوستگی

نتیجتاً سوال این است که آیا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) \overset{?}{=} f_1(0,0) = 0$

$$g(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \longrightarrow$$ آیا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = ?$

مسیر (۱): $x=0 \to l=0$

مسیر (۲): $y=0 \to \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2}} \dashrightarrow$ حد وجود ندارد

مزاحم: تعریف نشده

قضیه) اگر تابع $f(x,y)$ در نقطهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f(x,y)$ در (a,b) پیوسته است.

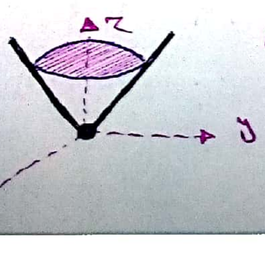
مشتق‌پذیر ← پیوسته

قضیه) اگر تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی با شعاع مثبت (a,b) دارای مشتقات جزئی $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ باشد و در این همسایگی پیوسته هستند آنگاه $f(x,y)$ در (a,b) مشتق‌پذیر است.

تذکر) مثال نقض نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ فوق در حالت کلی صحیح نیست.

مشتق‌پذیر ← پیوستگی مشتقات جزئی

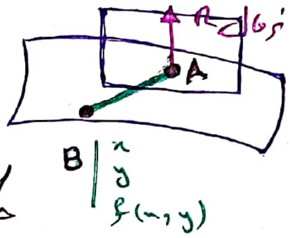
Ex) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ در $(0,0)$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست

قضیه) اگر تابع $f(x,y)$ در (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطه $A\begin{vmatrix} a \\ b \\ f(a,b)\end{vmatrix}$ موجود است.

نرمال: $\vec{n} = (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)$



مفهوم * اثبات

$$\vec{AB} = (x-a, y-b, f(x,y)-f(a,b)) \longrightarrow \lim_{B\to A} \vec{AB}\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{حکم}$$

$$= \lim_{B\to A} (x-a)\,f_1(a,b) + (y-b)\,f_2(a,b) + (-1)\big(f(x,y) - f(a,b)\big) \xrightarrow[k=y-b]{h=x-a}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h f_1(a,b) + k f_2(a,b) - f(a+h,b+k) + f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \times \sqrt{h^2+k^2} = 0$$

* هدف ما این بود خط قاطع AB وقتی که B به A میل می‌کند و تبدیل به خط مماس می‌شود داخل یک صفحه خاصی قرار می‌گیرد صفحه‌ای که بردار نرمال $\vec{n}$ است.

تعریف) تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را همگن از درجه k به طور مثبت می‌نامیم هرگاه $\forall t>0$ داشته باشیم:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

Ex) $f(x,y) = x^3 + y^3 \rightarrow f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$ همگن از درجه ۳

Ex) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3xy^3}{x^2 + 7xy} \rightarrow$ همگن از درجه ۲

Ex) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ همگن از درجه ۱

Ex) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2y^2}{7xy} \rightarrow$ همگن درجه صفر

قضیه اویلر) فرض کنید تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ یک تابع به طور مثبت همگن از درجه k باشد در این صورت:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, \dots, x_n) = k\, f(x_1, \dots, x_n)$$

∇f می

اثبات) $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow$ مشتق گرفتن از طرفین نسبت به t

$f \begin{vmatrix} u_1 - t \\ u_2 - t \\ \vdots \\ u_n - t \end{vmatrix}$, $u_i = t x_i$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial t} = x_1 f_1(tx_1, \dots, tx_n) + \dots + x_n f_n(tx_1, \dots, tx_n)$$

$$= k\,t^{k-1} f(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[t=1]{\text{حال در فرمول فوق}} x_1 f_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_n f_n(x_1, \dots, x_n) = k f(x_1, \dots, x_n)$$

Ex) فرض کنید $f(x,y,z) = \dfrac{x^4 + 7x^2yz + 5z^3x}{xy + yz + xz + 4x^2}$ مطلوبست محاسبه؟

$$x f_1 + y f_2 + z f_3 = ?$$

$f(x,y,z)$ همگن درجه ۲ و می‌باشد لذا $= 2f$

تمرین) فرض کنید که f همگن از درجه k باشد ثابت کنید که مشتقات جزئی مرتبه اول f یعنی $f_1, f_2, \ldots, f_n$ همگن از درجه $k-1$ هستند.

تمرین) فرض کنید که $f: R^3 \to R$ ، $g: R \to R$ ، $U: R^3 \to R$ همگی دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و f همگن از درجه k باشد به علاوه $f(x,y,z) = g\left(U(x,y,z)\right)$ ثابت کنید که

$$xU_x + yU_y + zU_z = \frac{k\, g(0)}{g'(0)}$$

و ۳. علاوه اگر $U = \tan^{-1}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ ثابت کنید که $xU_x + yU_y = 0$.

تعریف) فرض کنید که $f(x_1, \ldots, x_n)$ تابعی n متغیره باشد که $f: R^n \to R$ در این صورت گرادیان تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$$

مشتق جزئی نسبت به متغیر اول یا (x)

مشتق جزئی نسبت به متغیر دوم یا (y)

EX) $f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow \nabla f = (2x, 2y)$

EX) $f(x,y,z) = x^2y + yz^3 \longrightarrow \nabla f = (2xy, x^2+z^3, 3yz^2)$

EX) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \longrightarrow \nabla f = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$

تعریف) فرض کنید که $f(x,y)$ در نقطه (a,b) تابعی مشتق‌پذیر باشد در این صورت **بردار گرادیان** f در نقطه (a,b) برداری است که بر خط مماس بر منحنی تراز $f(x,y)$ نظیر نقطه c ($=f(a,b)$) عمودی باشد که از نقطه (a,b) می‌گذرد.

EX) $f(x,y) = x^2 + y^2$ توضیح بیشتر با مثال

$z = x^2 + y^2$

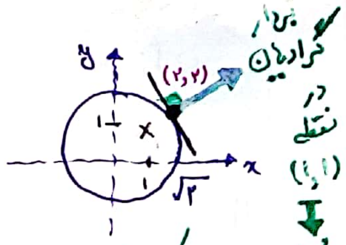
$\nabla f = (2x, 2y) \longrightarrow \nabla f\big|_{(1,1)} = (2,2) \Longrightarrow$

$(a,b) = (1,1)$

حال منحنی تراز نظیر f برای $z = 2 = c$ می‌نویسیم:

منحنی تراز: $x^2 + y^2 = 2$

$f(1,1) = 2 = c$



برداری است که بر خط مماس بر منحنی تراز $f(x,y)$ عمودی باشد

تذکر) در حالت یک متغیره و دو متغیره در قاعده زنجیره‌ای برای مشتقات جزئی توابع چند متغیره این است که توابع مطرح شده مشتق‌پذیر باشند اما چون در جلسات قبل با این مفهوم آشنا نبودیم از پیوستگی مشتقات جزئی استفاده شد که حال می‌دانیم مشتق‌پذیری را نتیجه می‌دهد.

اثبات قضیه مربوط به گرادیان: کافی است برای منحنی تراز مطرح شده یک پارامتری به صورت $(x(t), y(t))$ را در نظر بگیریم در این صورت $f(a,b) = f(x(t), y(t)) = c$ ⟵ حال از طرفین این عبارت نسبت به t مشتق می‌گیریم

$$f\begin{cases} x - t \\ y - t \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta t} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{\delta x}{\delta t}}_{x'(t)}, \underbrace{\frac{\delta y}{\delta t}}_{y'(t)}\right) = 0 \Longrightarrow (x,y) = (a,b)$$

$\nabla f\big|_{(a,b)} \cdot$ بردار مماس $=0 \longrightarrow$ بردار مماس در نقطه (a,b) $\perp$ $\nabla f\big|_{(a,b)}$

EX) اگر $f(x,y,z)=\sqrt[4]{\dfrac{x^8+y^8}{yz}}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\sin\left(\dfrac{x}{z}\right)$ باشد، آنگاه مقدار $A=\frac{\pi}{4}f_1\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)+f_2\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)+f_3\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)=?$ را حساب کنید.

همگن از درجه $\frac{3}{2}$ $\longleftarrow$ طبق قضیه اویلر $\quad A=\frac{3}{2}f\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)$

نکته) اگر f همگن از درجه k باشد، مشتقات جزئی آن نیز همگن هستند از درجه $k-1$.

EX) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x^2-y^2, xy)$ را برحسب مشتقات جزئی f حساب کنید.

$Z=f(u,v)$

$Z<^{u<^{x}_{y}}_{v<^{x}_{y}} \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f(x^2-y^2,xy)\right)=?$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(-2y)\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)}_{f_1}+x\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)}_{f_2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(-2y\frac{\partial z_u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}+x\frac{\partial z_v}{\partial x}\right)=(-2y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial v}+x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=-4xy\,f_{11}(u,v)-2y^2f_{12}(u,v)+f_2(u,v)+2x^2f_{21}(u,v)$$

$$+xy\,f_{22}(u,v)$$

EX) فرض کنید که $f(x,y)=x^2+xy+1$ در این صورت در نقطه $(x,y)=(1,2)$ بردار عمود بر منحنی تراز گذرنده از این نقطه را به دست آورید.

$f(1,2)=4 \dashrightarrow f(x,y)=4$ منحنی ترازی که از $(1,2)$ می‌گذرد $\dashrightarrow \nabla f=(2x+y\ \ x)$

$\nabla f\big|_{(1,2)}=(4,1)$

EX) منحنی مقابل $r^2+2r\cos\theta+\sin\theta$ را در دستگاه قطبی بگیرید. بردار عمود بر منحنی فوق را در نقطه $(r,\theta)=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ به دست آورید.

$\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial r}}_{2r+2\cos\theta}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial \theta}}_{-2r\sin\theta+\cos\theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

$f(r,\theta)=0$

$f<^{r<^{x}_{y}}_{\theta<^{x}_{y}}$

می‌دانیم: $r=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x} \rightarrow$ مشتق نسبت به x $\rightarrow \dfrac{d}{dx}(\tan\theta(x))=(1+\tan^2\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2}$

$\rightarrow \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ به صورت مشابه حساب کنید.

Ex) در مختصات کروی اگر $f(\rho, \phi, \theta)=0$ در این صورت ∇f را بدست آورید.

حل بعداً

$$f \leftarrow \begin{cases} \rho \leftarrow x, y, z \\ \phi \leftarrow x, y, z \\ \theta \leftarrow x, y, z \end{cases}$$

فرمول ها:

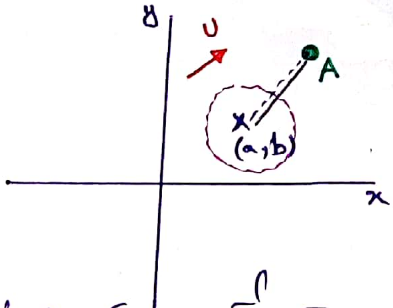
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

تعریف) مشتق جهتی یا مشتق سویی: فرض کنید که $U=(U_1, U_2)$ بردار یکه باشد در این صورت مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ در امتداد بردار U در نقطه‌ی (a,b) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_u f(a,b) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tU_1, b+tU_2) - f(a,b)}{t}$$



مختصات نقطه A $= t(U_1,U_2)+(a,b) = (a+tU_1, b+tU_2)$

در واقع مشتق جهتی تابع f نسبت به تغییرات تابع f در امتداد و موازی بردار U را به تغییرات t محاسبه می‌کند و در نتیجه اگر $U=(1,0)$ یا $U=(0,1)$ به همان مفهوم مشتقات f_1 و f_2 می‌رسیم.

در واقع می‌توان بحث جهتی سویی را با کمک مفاهیم ریاضی I نیز بیان کرد. فرض کنید:

$$g(t) = f(a+tU_1, b+tU_2) : \quad D_u f(a,b) = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0) \rightarrow$$ (اگر g مشتق‌پذیر باشد)

$$D_{(1,0)} f(a,b) = f_1(a,b)$$

$$D_{(0,1)} f(a,b) = f_2(a,b)$$

Ex) فرض کنید $f(x,y) = x + y^2x^3$ مطلوبست محاسبه $D_{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})} f(1,2)$:

حل) $g(t) = f(1+\frac{1}{2}t, 2+\frac{\sqrt{3}}{2}t) = (1+\frac{1}{2}t)+(2+\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2(1+\frac{t}{2})^3$

$g'(0) = \checkmark$

قضیه) اگر تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $U=(U_1,U_2)$ بردار یکه باشد در این صورت

(مهم) $$D_u f(a,b) = \nabla f\Big|_{(a,b)} \cdot U$$

اثبات: صفحه بعد

اثبات: می‌دانیم که $D_u f(a,b) = g'(0)$ که در آن $g(t) = f(a+tu_1\,,\,b+tu_2)$ و $f\left\langle \begin{array}{l} a+tu_1 - t \\ b+tu_2 - t \end{array}\right.$

چون تابع f مشتق‌پذیر است می‌توان از قاعده زنجیره‌ای استفاده کرد

$$g(t) = f_1(a+tu_1\,,\,b+tu_2)\times u_1 + f_2(a+tu_1\,,\,b+tu_2)\times u_2$$

$$D_u f(a,b) = g'(0) = f_1(a,b)\,u_1 + f_2(a,b)\,u_2 = \big(f_1(a,b), f_2(a,b)\big)\cdot(u_1,u_2) = \nabla f\Big|_{(a,b)}\cdot u$$

برابر صفر خواهد $\to t=0$

Ex) در مثال قبل

$$D_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} f(1,2) = \nabla f\Big|_{(a,b)}\cdot\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = (13,4)\cdot\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\nabla f = (1+3y^2x^2\,,\,2yx^3) \to \nabla f\Big|_{(a,b)} = (13,4)$$

تذکر) آنچه در اثبات فوق مطرح شد خود یکی از روش‌های بررسی مشتق‌پذیری تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) است یعنی اگر در مسئله‌ای مقدار $D_u f(a,b)$ را از روش مستقیم حساب کردیم و این مقدار مساوی $\nabla f\big|_{(a,b)}\cdot u$ نباشد یعنی تابع f در نقطه (a,b) مشتق‌پذیر نیست

f مشتق‌پذیر باشد $\xRightarrow{\text{یک‌طرفه}}$ $D_u f(a,b) = \nabla f\Big|_{(a,b)}\cdot u$

f مشتق‌پذیر نیست $\Longleftarrow$ $\neq$

Ex) فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\ln(y^2+1)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

الف) ثابت کنید که f همه جا پیوسته است ب) مقدار $D_u f(0,0)$ را در امتداد هر بردار یکه $u=(u_1,u_2)$ به دست آورید.

ج) ثابت کنید که f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست

حل الف) اگر $(x,y)\neq(0,0)$ در این صورت $y\ln(y^2+1)$ و x^2+y^2 هر دو پیوسته‌اند و مخرج هم صفر نمی‌شود پس نتیجه می‌گیریم f در این نقاط پیوسته است برای $(x,y)=(0,0)$ باید ثابت کنیم که:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\ln(y^2+1)}{x^2+y^2} = 0$$

طبق قضیه فشردگی اثبات می‌کنیم:

$$\underset{0}{\downarrow}0 \le \left|\frac{y\ln(y^2+1)}{x^2+y^2}\right| \le \overset{\text{کمتر از یک}}{\frac{y^2}{x^2+y^2}}|y| \le \underset{0}{|y|}$$

می‌دانیم: $\ln(x+1)\le x$

ب)

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(0+tu_1\,,\,0+tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{tu_2 \ \ln(t^2u_2^2+1)}{t^2u_1^2+t^2u_2^2} - 0}{t} =$$

$$\frac{u_2}{u_1^2+u_2^2} \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t^2u_2^2+1)}{t^2} \overset{\text{هوپیتال}}{=} \frac{u_2}{u_1^2+u_2^2} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{2t}\,u_2^2}{t^2u_2^2+1}}{\cancel{2t}} = \frac{u_2^3}{u_1^2+u_2^2}$$

ج)

$$\nabla f(0,0) = \left(f_1(0,0)\,,\, f_2(0,0) \right).$$

$u=(1,0)$: $f_1(0,0) = D_{\underset{u_1\ u_2}{(1,0)}} f(0,0) = 0$ (از نظر مولفه‌ها است)

$u=(0,1)$ $f_2(0,0) = D_{\underset{u_1\ u_2}{(0,1)}} f(0,0) = \dfrac{1}{0^2+1^2} = 1$

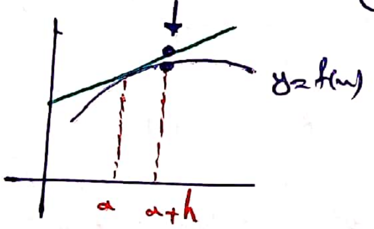
$\nabla f = (0,1)$

$$\nabla f\cdot u = (0,1)\cdot(u_1,u_2) = u_2 \neq \frac{u_2^3}{u_1^2+u_2^2} = D_u f(0,0)$$

f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست

* تقریب به وسیله‌ی صفحه‌ی مماس :

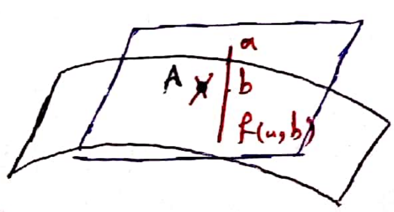
در ریاضی I به یاد داریم که اگر نمودار تابع f در $x=a$ دارای خط مماس باشد می‌توان از تقریب خط مماس برای تابع f استفاده کرد و داشتیم:



$$f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$$

به صورت مشابه اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد که صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $f(x,y)$ در نقطه‌ی نظیر (a,b) وجود داشته باشد در این صورت برای نقاط نزدیک به (a,b) می‌توان از تقریب صفحه‌ی مماس استفاده کرد:

$$\boxed{f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + h\,f_1(a,b) + k\,f_2(a,b)}$$



مقعر ها توجه با شکل

Ex) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ ، مطلوبست محاسبه $f(2.01\,,\,3.97)$

$(a,b)=(2,4)$

$h=0.01$

$k=-0.03$

$f(a,b)=f(2,4)=2$

$\longrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}} \\ f_1(x,y)=\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{x^2}} \dashrightarrow f_1(2,4) \checkmark \\ f_2(x,y)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{y^2}} \longrightarrow f_2(2,4) \checkmark \end{array} \right.$

$\longrightarrow$ جواب $\approx \underbrace{f(2,4)}_{2}+f_1(2,4)\times 0.01+f_2(2,4)\times(-0.03)$

مشتق‌گیری ضمنی: در دوره ابتدایی دیدیم که اگر عبارتی مانند $x^2+xy^3+yx^2+1=0$ بدانیم که y تابعی از x است در این صورت می‌توان از طرفین این عبارت نسبت به x مشتق گرفت و داریم:

$$2x+y^3+3xy^2y'+y'x^2+2xy=0 \longrightarrow y'=\frac{-2x-2xy-y^3}{3xy^2+x^2}$$

در حالت کلی اگر $f(x,y)=0$ در این صورت چنانچه بدانیم که y تابعی برحسب x است در این صورت از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم (در سراسر این بخش فرض کنید توابع مشتق‌پذیرند)

$f \left\langle \begin{array}{l} x \\ y - x \end{array} \right.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0 \longrightarrow y'=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{f_x}{f_y}$$

حال فرض کنید که رابطه‌ای به صورت $f(x,y,z)=0$ را داریم و می‌دانیم که z تابعی برحسب x و y است در این صورت می‌توان نوشت

$f \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \\ z \left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \end{array} \right.$

$$\cancel{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-f_x}{f_z}$$

Ex) به عنوان مثال فرض کنید که $x^2+yz+z^3=0$ و می‌دانیم که z تابعی از x و y است. در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بیابید. با توجه به بحث فوق

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-f_x}{f_z}=\frac{2x}{y+3z^2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f_y}{f_z}=\frac{-z}{y+3z^2}$$

این بار فرض کنید که یک دستگاه معادلات به صورت $\begin{cases} f(x,y,z,w)=0 \\ g(x,y,z,w)=0 \end{cases}$ را داریم و می‌دانیم که در همسایگی نقطه (a,b,c,d) متغیرهای z و w توابعی برحسب x و y هستند. هدف این است که الگوریتمی برای یافتن $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ در نقطه مورد نظر را به دست آوریم.

برای این منظور از هر یک از معادلات فوق نسبت به x مشتق (ضمنی) جزئی می‌گیریم:

$$g, f \begin{cases} x \\ y \\ z \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ w \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$$

$$f(x,y,z,w)=0 \xrightarrow{\frac{\delta}{\delta x}} \begin{cases} f_1 + f_3 \dfrac{\delta z}{\delta x} + f_4 \dfrac{\delta w}{\delta x} = 0 \\ g_1 + g_3 \dfrac{\delta z}{\delta x} + g_4 \dfrac{\delta w}{\delta x} = 0 \end{cases}$$

و لذا با یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌رسیم که با کمک قاعده‌ی کرامر می‌توان جواب را به دست آورد:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\begin{vmatrix} -f_1 & f_4 \\ -g_1 & g_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix} \neq 0} = -\frac{\begin{vmatrix} f_1 & f_4 \\ g_1 & g_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\delta w}{\delta x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_3 & f_1 \\ g_3 & g_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}}$$

تمرین) $\dfrac{\delta z}{\delta y}$ ، $\dfrac{\delta w}{\delta y}$ را به دست آورید.

پایان جلسه‌ی دهم

روش یادگیری فرمول فرنه

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = kN \\ \dfrac{dN}{ds} = -kT + \tau B \\ \dfrac{dB}{ds} = -\tau N \end{cases}$$

Ex) $\displaystyle \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = ?$ → استفاده از قضیه‌ی فشار / استفاده از روش قطبی

$$0 \leq \left| \frac{h^2 \sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

صفر = جواب

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = ? \xrightarrow[k = r\sin\theta]{h = r\cos\theta} \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta}{|r|} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

Ex) با توجه به
$$\begin{cases} x^3+y^2+z^2w+w^2z = 4 \\ x^2y+1 = 2z^2w \end{cases}$$
اگر بدانیم که در همسایگی نقطه‌ی $A(1,1,1,1)$ متغیرهای z و w توابعی از x و y باشند در این صورت $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ ، $\dfrac{\delta w}{\delta x}$ ، $\dfrac{\delta z}{\delta y}$ ، $\dfrac{\delta w}{\delta y}$ (تمرین) را در نقطه‌ی A به دست آورید.

$$\begin{aligned} F&: x^3+y^2+z^2w+w^2z-4=0 \\ G&: x^2y+1-2z^2w=0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta x}(F=0) \\ &\frac{\delta}{\delta x}(G=0) \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (2zw+w^2)\dfrac{\delta z}{\delta x} + (z^2+2wz)\dfrac{\delta w}{\delta x} = 0 \\ 2xy + (-4zw)\dfrac{\delta z}{\delta x} + (-2z^2)\dfrac{\delta w}{\delta x} = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

حال فرمول‌های فوق را در نقطه‌ی A جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} 3 + 3\dfrac{\delta z}{\delta x}\Big|_A + 3\dfrac{\delta w}{\delta x}\Big|_A = 0 \\ 2 - 4\dfrac{\delta z}{\delta x}\Big|_A - 2\dfrac{\delta w}{\delta x}\Big|_A = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\delta z}{\delta x}\Big|_A = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\delta w}{\delta x}\Big|_A = \frac{-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$F(x,y,z,w)=0$$

$$G(x,y,z,w)=0$$

$$z=z(x,y)$$

$$w=w(x,y)$$

w, z متغیرهای وابسته هستند

دترمینان ژاکوبین F, G نسبت به w, z

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\delta F}{\delta x} & \frac{\delta F}{\delta w}\\ \frac{\delta G}{\delta x} & \frac{\delta G}{\delta w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\delta F}{\delta z} & \frac{\delta F}{\delta w}\\ \frac{\delta G}{\delta z} & \frac{\delta G}{\delta w}\end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(x,w)}}{\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(z,w)}}$$

متغیر مستقل

متغیرهای وابسته

$$\frac{\delta w}{\delta x}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\delta F}{\delta z} & \frac{\delta F}{\delta x}\\ \frac{\delta G}{\delta z} & \frac{\delta G}{\delta x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\delta F}{\delta z} & \frac{\delta F}{\delta w}\\ \frac{\delta G}{\delta z} & \frac{\delta G}{\delta w}\end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(z,x)}}{\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(z,w)}}\ ,\quad \frac{\delta w}{\delta y}=\frac{-\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(z,y)}}{\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(z,w)}}\ ,\quad \frac{\delta z}{\delta y}=\frac{-\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(y,w)}}{\dfrac{\delta(F,G)}{\delta(z,w)}}$$

تعریف) اگر $y_1,\ldots,y_n$ توابعی برحسب متغیرهای $x_1,\ldots,x_n$ باشند در این صورت دترمینان ژاکوبین $y_1,\ldots,y_n$ نسبت به $x_1,\ldots,x_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\delta(y_1,\ldots,y_n)}{\delta(x_1,\ldots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\delta y_1}{\delta x_1} & \frac{\delta y_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta y_1}{\delta x_n}\\ \frac{\delta y_2}{\delta x_1} & \frac{\delta y_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta y_2}{\delta x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\delta y_n}{\delta x_1} & \frac{\delta y_n}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta y_n}{\delta x_n}\end{vmatrix}$$

قضیه تابع ضمنی) فرض کنید $2n$ متغیر $x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}}$ و $y_1,\ldots,y_n$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

* حالت کلی قضیه ← $n+m$

$$\begin{cases}F^{(1)}(x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}},y_1,\ldots,y_n)=0\\ \vdots\\ F^{(n)}(x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}},y_1,\ldots,y_n)=0\end{cases}$$

در این صورت اگر $\left.\dfrac{\delta(F^{(1)},\ldots,F^{(n)})}{\delta(y_1,\ldots,y_n)}\right|_A\neq 0$ آنگاه در همسایگی A می‌توان $y_1,\ldots,y_n$ را به عنوان توابعی برحسب $x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}}$ حل کرد یا به بیان دیگر می‌توان $y_1,\ldots,y_n$ را به عنوان تابع‌هایی برحسب $x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}}$ در نظر گرفت یعنی

$$y_1=y_1(x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}})$$

$$\vdots$$

$$y_n=y_n(x_1,\ldots,x_{\underset{m}{n}})$$

و به علاوه در این صورت داریم:

$$\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_t}\right|_A^{\text{در نقطه}} = \frac{-\left.\dfrac{\partial(F^{(1)},\dots,F^{(n)})}{\partial(y_1,\dots,y_{k-1},x_t,y_{k+1},\dots,y_n)}\right|_A}{\left.\dfrac{\partial(F^{(1)},\dots,F^{(n)})}{\partial(y_1,\dots,y_k,\dots,y_n)}\right|_A} \qquad 1\leq t,k\leq n$$

Ex) نشان دهید که از معادلات زیر می‌توان x و y و z را به عنوان توابعی برحسب u,v در همسایگی $A(x,y,z,u,v)=(1,1,1,1,1)$ حل کرد و سپس مقدار $\frac{\partial y}{\partial u}$ را در $(u,v)=(1,1)$ بدست آورید.

$$\begin{cases} F^{(1)}: xy^2+zu+v^2-3=0 \\ F^{(2)}: x^3y+2y-uv-2=0 \\ F^{(3)}: xu+yv-xyz-1=0 \end{cases}$$

$\underbrace{x,y,z}_{\text{وابسته}}$, $\underbrace{u,v}_{\text{مستقل}}$ $\longrightarrow$ تعداد متغیرهای وابسته $= n=3$ ، تعداد متغیرهای مستقل $= m=2$

x_1,x_2 ، y_1,y_2,y_3

$$\left.\frac{\partial(F^{(1)},F^{(2)},F^{(3)})}{\partial(x,y,z)}\right|_A = \left.\begin{vmatrix} y^2 & 2xy & u \\ 3x^2y & x^3+2 & 0 \\ u-yz & v-xz & -xy \end{vmatrix}\right|_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\times(-1)=3\neq 0$$

لذا می‌توان در همسایگی A متغیرهای x و y و z را به عنوان توابعی از u و v در نظر گرفت.

$$\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_A = \left.\frac{-\dfrac{\partial(F^{(1)},F^{(2)},F^{(3)})}{\partial(x,u,z)}}{3}\right|_A = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \cancel{z}\ 1 & 1 \\ 3 & \cancel{-v}\ -1 & 0 \\ 0 & \cancel{x}\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3}$$

تمرین) $\frac{\partial z}{\partial v}$ و $\frac{\partial x}{\partial u}$ را در نقطه A بیابید.

Ex) فرض کنید
$$\begin{cases} x=u+v \\ y=uv \\ z=u^2+v^2 \end{cases}$$
و می‌دانیم در همسایگی نقطه A می‌توان z، u، v را به عنوان توابعی برحسب x و y حل کرد. در این صورت مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\underbrace{x,y}_{\substack{\text{مستقل}\\ m=2}}, \underbrace{z,u,v}_{\substack{\text{وابسته}\\ n=3}}$

روش اول) استفاده مستقیم از قضیه تابع ضمنی

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial(F^{(1)},F^{(2)},F^{(3)})}{\partial(u,v,x)}}{\dfrac{\partial(F^{(1)},F^{(2)},F^{(3)})}{\partial(u,v,z)}}$$

روش دوم) اگر فرض کنیم سطر سوم این معادلات z را به عنوان تابعی از u و v ارائه داده است در حالیکه $\frac{\delta v}{\delta x}$ و $\frac{\delta u}{\delta x}$ را بدانیم و

$\left(z=u^2+v^2 : \frac{\delta z}{\delta x}=2u\frac{\delta u}{\delta x}+2v\frac{\delta v}{\delta x}\right) \leftarrow$ پس از دو سطر اول $\frac{\delta u}{\delta x}$ و $\frac{\delta v}{\delta x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{array}\left|\begin{array}{l} x-u-v=0 \\ y-uv=0 \end{array}\right.$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{-\dfrac{\delta(F^{(1)},F^{(2)})}{\delta(x,v)}}{\dfrac{\delta(F^{(1)},F^{(2)})}{\delta(u,v)}}=\frac{-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -v & -u\end{vmatrix}}$$

مشترک هستن

بقیه موارد را کامل کنید.

(نکته) زمانی که یک رابطه را به صورت مثلاً $f(x,y,z)=0$ در نظر می‌گیریم تعدادی متغیر مستقل و تعدادی متغیر وابسته مطرح می‌شوند. در چنین مواردی مثلاً وقتی می‌نویسیم $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_y$ منظور این است که z تابعی از ۲ متغیر x و y است $z=Z(x,y)$ و ما قصد داریم $\frac{\delta z}{\delta x}$ را برای آن حساب کنیم. به صورت مشابه مثلاً $\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)_{x,u}$ در عبارت $F(x,y,z,w,u,v)=0$ یعنی w در مسئله نقطه A تابعی از y، x، u است و $\frac{\delta w}{\delta y}$ را می‌خواهیم.

Ex) فرض کنید که $f(x,y,z)=0$ در این صورت مقدار عبارت زیر را بدست آورید:

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_y\cdot\left(\frac{\delta y}{\delta z}\right)_x\cdot\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)_z=?$$

$\underbrace{f(x,y,z)=0}_{}$ $=F^{(1)}$

$Z=Z(x,y)$

x,y : مستقل ، z : وابسته

$m=2$ $n=1$

روش (۱) $\Rightarrow$ $$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{-\dfrac{\delta(F^{(1)})}{\delta(x)}}{\dfrac{\delta(F^{(1)})}{\delta(z)}}=\frac{-\dfrac{\delta f}{\delta x}}{\dfrac{\delta f}{\delta z}}$$

روش (۲) $f \to x,\ y,\ z$ ، $z \to x,\ y$

$f(x,y,z)=0$: $\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}=0$ ؟

$f(x,y,z)=0$ ، $y=y(x,z)$ (y: وابسته ، x,z: مستقل) : $$\frac{\delta y}{\delta z}=\frac{-\dfrac{\delta f}{\delta z}}{\dfrac{\delta f}{\delta y}}$$

$f(x,y,z)=0$ ، $x=x(y,z)$ (x: مستقل... y,z: وابسته) : $$\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{-\dfrac{\delta f}{\delta y}}{\dfrac{\delta f}{\delta x}} \Rightarrow$$ جواب سؤال ‼ $(-1)^3=-1$

Ex) فرض کنید $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ و در هر نقطه‌ای که در این معادلات صدق می‌کند فرض کنید که هر دو متغیری را می‌توان به عنوان تابعی از سومین متغیر در نظر گرفت. مطلوبست محاسبه

$$\frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=?$$

x, y, z

تعداد معادلات = ۲ = تعداد متغیرهای وابسته

تعداد متغیرهای مستقل = ۱

$\frac{dx}{dy}$ → x, z متغیرهای وابسته، y متغیر مستقل → $\frac{dx}{dy}=\frac{\delta x}{\delta y}=\dfrac{-\frac{\delta(F,G)}{\delta(y,z)}}{\frac{\delta(F,G)}{\delta(x,z)}}$

$\frac{dy}{dz}$ → x, y وابسته، z مستقل → $\frac{dy}{dz}=\dfrac{-\frac{\delta(F,G)}{\delta(x,z)}}{\frac{\delta(F,G)}{\delta(x,y)}}$

$\frac{dz}{dx}$ → y, z وابسته، x مستقل → $\frac{dz}{dx}=\dfrac{-\frac{\delta(F,G)}{\delta(y,x)}}{\frac{\delta(F,G)}{\delta(y,z)}}$

نکته غیر مهم

$f=u^2+v^2+2u$

جواب سوال $=(-1)^3\cdot\dfrac{\frac{\delta(F,G)}{\delta(y,x)}}{\frac{\delta(F,G)}{\delta(x,y)}}=1$ ← -1

EX) اگر $z:R^2\to R$ ، $f:R^2\to R$ با مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته و ناصفر باشند و $z(x,y)\neq 0$ ، چنانچه $f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ نشان دهید

$$xZ_x+yZ_y=Z$$

حل: فرض کنید $g(x,y,z)=f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ در این صورت

$$Z_x=\frac{\delta z}{\delta x}=\dfrac{-\frac{\delta g}{\delta x}}{\frac{\delta g}{\delta z}}\ ,\ Z_y=\frac{\delta z}{\delta y}=\dfrac{-\frac{\delta g}{\delta y}}{\frac{\delta g}{\delta z}}$$

$$g(x,y,z)=0=f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\ \to\ f\begin{cases}u=\frac{x}{z}<\begin{matrix}x\\z\end{matrix}\\ v=\frac{y}{z}<\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\end{cases}\to\ \frac{\delta g}{\delta x}=f_1(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\times\frac{1}{z}\ ,\ \frac{\delta g}{\delta y}=f_2(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\times\frac{1}{z}$$

$$\frac{\delta g}{\delta z}=f_1(\frac{x}{z},\frac{y}{z})(\frac{-x}{z^2})+f_2(\frac{x}{z},\frac{y}{z})(\frac{-y}{z^2})$$

$$xZ_x+yZ_y=x.\dfrac{-\frac{\delta g}{\delta x}}{\frac{\delta g}{\delta z}}+y.\dfrac{-\frac{\delta g}{\delta y}}{\frac{\delta g}{\delta z}}=\dfrac{-\frac{1}{z}f_1.x}{-\frac{x}{z^2}f_1-\frac{y}{z^2}f_2}+y.\dfrac{-\frac{1}{z}f_2}{-\frac{x}{z^2}f_1-\frac{y}{z^2}f_2}=\frac{1}{\frac{1}{z}}=Z$$

تذکر: در قضیه‌ی تابع ضمنی همواره باید به ۲ نکته توجه داشت:

① تعداد متغیرهای وابسته = تعداد روابط (معادلات)

② در محاسبات مربوط به قضیه‌ی تابع ضمنی جایی که در دترمینان ژاکوبین که به ظاهر شده محاسبات را انجام می‌دهیم مثلاً زمانی که

$$\left.\begin{matrix}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{matrix}\right\}\to\ \begin{matrix}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{matrix}$$

نکته: آنچه که در محاسبات مربوط به دترمینان ژاکوبین متغیرهای ظاهر شده (در این مثال) ← (x,y,v,u) که مستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند

$$\frac{\delta(F,G)}{\delta(x,u)}$$

واسطه توابع F و G را با چهار متغیر مستقل در نظر می‌گیریم

Ex) فرض کنید که
$$\begin{cases} F: & u^2 + e^u z - xy - v + 2 = 0 \\ G: & vu + x^2 y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$
و $A(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 0, 2)$ و در این صورت

ثابت کنید که در همسایگی نقطه A می‌توان u و v را به عنوان توابعی از (x, y, z) در نظر گرفت سپس $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A$ و $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_A$ را به دست آورید و در گام بعد $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_A$ و $\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_A$ را محاسبه کنید.

تعداد معادلات = تعداد متغیرهای وابسته = ۲

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_A = \begin{vmatrix} 2u + e^u z & -1 \\ v & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

پس بنا بر قضیه‌ی تابع ضمنی می‌توان u و v را به عنوان تابعی از x و y و z در همسایگی A در نظر گرفت.

روش اول) قضیه‌ی تابع ضمنی

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \frac{-\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}\right|_A}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_A} = \frac{-\begin{vmatrix} -y = -1 & -1 \\ 2xy = 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

به صورت مشابه: $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_A =$ حل با شما

روش دوم) روش مستقیم ← ایده‌ی اثبات قضیه‌ی تابع ضمنی همین است

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \end{cases}$$
حال از F و G نسبت به x مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2u\, u_x + e^u z\, u_x - y - v_x = 0 \\ v_x u + v\, u_x + 2xy = 0 \end{cases}$$

حال در عبارت فوق مختصات A را جایگذاری می‌کنیم دقیقاً دو مجهول u_x و v_x باقی می‌ماند که با ۲ معادله و ۲ مجهول جواب آن‌ها به دست می‌آید.

اما برای یافتن پارامترهای u_{xx} و v_{xx} صرفاً باید از روش مستقیم پیش برویم یعنی کافی است که از معادلات فوق یکبار دیگر نسبت به x مشتق بگیریم پس داریم:

$$\begin{cases} 2(u_x)^2 + 2u\, u_{xx} + e^u z (u_x)^2 + e^u z\, u_{xx} - v_{xx} = 0 \\ v_{xx} u + v_x u_x + v_x u_x + v\, u_{xx} + 2y = 0 \end{cases}$$

در دستگاه فوق ← نقطه $(1, 1, 1, 0, 2) = A(x, y, z, u, v)$ را جایگذاری می‌کنیم ضمناً دقت کنید که $\left.u_x\right|_A$ و $\left.v_x\right|_A$ را در بخش اول حساب کرده‌ایم پس تنها مجهول‌ها عبارتند از $\left.u_{xx}\right|_A$ و $\left.v_{xx}\right|_A$ ← ۲ معادله و ۲ مجهول

تمرین) u_{yy} و v_{yy} و u_{xy} و v_{xy} را برای آورید در نقطه A.

حالت خاصی از قضیه‌ی تابع ضمنی تحت عنوان قضیه‌ی تابع وارون مطرح می‌شود.

* قضیه‌ی تابع وارون: فرض کنید که $2n$ متغیر $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_n$ را داریم به نحوی که

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$$

متغیر وابسته (y_1)، متغیر مستقل (x_1)

در این صورت ....

اگر $\left.\dfrac{\delta(y_1 \dots y_n)}{\delta(x_1 \dots x_n)}\right|_A \neq 0$ آنگاه در همسایگی A می‌توان x_iها را به عنوان توابعی بر حسب y_iها نوشت یعنی در همسایگی A داریم: چون ماهیت متغیرهای مستقل و وابسته را تغییر می‌دهد (نقش آن‌ها برعکس می‌شود)

$$x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{x_n}_{\text{وابسته شدن}} = x_n(\underbrace{y_1}_{\text{مستقل}}, \dots, y_n)$$

Ex) در مختصات قطبی می‌دانیم که $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ در چه نقاطی می‌توان r و θ را به عنوان توابعی از x و y در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) \\ y = y(r,\theta) \end{cases} \rightarrow$$

بنابر قضیه‌ی تابع وارون مقدار دترمینان زیر باید مخالف صفر باشد که بتوان r و θ را به عنوان توابعی از x و y در نظر گرفت:

$$\frac{\delta(x,y)}{\delta(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$$

می‌دانیم که $r=0$ در مختصات قطبی نقطه مبدأ مختصات است و البته می‌دانیم که در مبدأ مختصات θ تعریف نمی‌شود.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$

قضیه) اگر $y_1, \dots, y_n$ توابعی بر حسب $x_1, \dots, x_n$ باشند و بتوان $x_1, \dots, x_n$ را نیز به عنوان توابعی بر حسب $y_1, \dots, y_n$ نوشت در این صورت داریم:

$$\frac{\delta(y_1, \dots, y_n)}{\delta(x_1, \dots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\delta(x_1, \dots, x_n)}{\delta(y_1, \dots, y_n)}}$$

کاربرد) اگر در نقطه‌ای غیر از مبدأ قرار داشته باشیم مطلوبست $\dfrac{\delta(r,\theta)}{\delta(x,y)} = ?$

$$\text{جواب} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ex) در بخش‌های مربوط به مختصات کروی دیدیم که x، y، z بر حسب ρ، ϕ، θ به دست می‌آیند در چه نقاطی می‌توان ρ، ϕ، θ را به عنوان توابعی از x، y، z در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

بنابر قضیه‌ی تابع وارون شرط لازم این کار این است که دترمینان زیر مخالف صفر باشد

$$\frac{\delta(x,y,z)}{\delta(\rho,\phi,\theta)} \neq 0 \longrightarrow \text{if } \rho^2\sin\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \rightarrow \text{مبدأ مختصات} \\ \sin\phi = 0 \rightarrow \phi = 0 \text{ یا } \pi \end{cases}$$

بخش مثبت محور z ها — بخش منفی محور z ها

$$\rho^2\sin\phi \neq 0$$

پس برای کلیه نقاط R^3 به جز روی محور z ها مقدار ρ، ϕ، θ را می‌توان به عنوان توابعی از x و y و z در نظر گرفت.

Ex) فرض کنید که $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$ در این صورت در چه نقاطی می‌توان x و y را به عنوان توابعی از u و v بدست آورد و سپس در چنین نقاطی مقدار $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ را بیابید.

$$0 \neq \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2\underbrace{(x^2-y^2)}_{y=\pm x}$$: $R^2 - \{$نیمسازهای ربع اول و سوم و دوم و چهارم$\}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2(x^2-y^2)}$$

قضیه) مشابه قاعده زنجیره‌ای می‌توان نشان داد که اگر $y_1,\dots,y_n$ توابعی برحسب $x_1,\dots,x_n$ باشند و همچنین $z_1,\dots,z_n$ نیز توابعی برحسب $y_1,\dots,y_n$ باشند آنگاه داریم:

$$\frac{\partial(z_1,\dots,z_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\partial(z_1,\dots,z_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}$$

یادآوری: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Ex) فرض کنید که f تابعی ۲ متغیره و u یک بردار یکه در R^2 باشد. اگر بدانیم که تابع f تابعی مشتق‌پذیر است، بیشترین و کمترین مقدار مشتق جهتی تابع f در جهت امتدادهای از u، در نقطه A بدست می‌آید؟

$$D_u f\Big|_A = \nabla f\Big|_A \cdot u = |\nabla f|_A \underbrace{|u|}_{1} \cos\theta$$

$\theta = 0 : \cos\theta = 1$ ---> در امتداد و در جهت ∇f بیشترین مقدار را می‌گیرد ---> $\nabla f|_A$, u

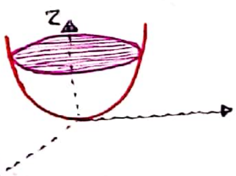
$\theta = \pi : \cos\theta = -1$ ---> یعنی در جهت $-\nabla f$ کمترین مقدار مشتق جهتی بدست می‌آید

تعریف) رویه $z = f(x,y)$ را در نظر بگیرید. در این صورت نقطه (x_0,y_0) یک نقطه min ~~مطلق~~ نسبی برای f نامیده می‌شود هرگاه بتوان یک همسایگی با شعاع مثبت از (x_0,y_0) را یافت به طوری که مقدار تابع f در (x_0,y_0) کمترین مقدار در این همسایگی باشد و به صورت مشابه max موضعی نیز تعریف می‌شود.

به صورت مشابه min سراسری و max سراسری (مطلق) نیز تعریف می‌شود.

$\forall (x,y) \; ; \; f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$

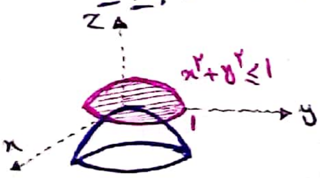
min مطلق یا سراسری



Ex) در رویه $z = x^2 + y^2$ مبدأ مختصات یک min نسبی و یک min سراسری است.

$0 = f(0,0) \leq f(x,y) = x^2 + y^2$

Ex) در رویه $z = -x^2 - y^2$ زمانی که (x,y) از نقاط درون یا روی دایره $x^2 + y^2 \leq 1$ انتخاب می‌شوند را در نظر بگیرید.



$f(x,y) = -1 \leq -x^2 - y^2 = f(x,y) \leq f(0,0) = 0$

$(x,y) : x^2 + y^2 = 1$

max مطلق در $(0,0)$

یک نقطه max مطلق و نقاط بی‌شماری min مطلق داریم

* بررسی اکسترمم های نسبی توابع چند متغیره:

$y = f(x)$ بازه $[a,b]$

اکسترمم های تابع f ⟸
- نقاط بحرانی: $f'(x) = 0$
- نقاط تکین: $f'(x)$ وجود ندارد
- نقاط مرزی: $\{a, b\}$

ریاضی ۱

برای بررسی نقاط اکسترمم یک تابع چند متغیره می توان از ∇f کمک گرفت (می دانیم که نقش مشتق در توابع یک متغیره را ∇f در توابع چند متغیره ایفا می کند) پس برای این منظور ۳ گروه از نقاط مشخص می کنیم:

۱) نقاط تکین: نقاطی از دامنه که ∇f در آنها وجود ندارد.

۲) نقاط بحرانی: نقاطی از دامنه f که ∇f در آنها برابر بردار صفر است.

۳) نقاط مرزی: نقاطی که هر همسایگی از آنها شامل نقاطی از دامنه تابع و نقاطی خارج از آن باشد.

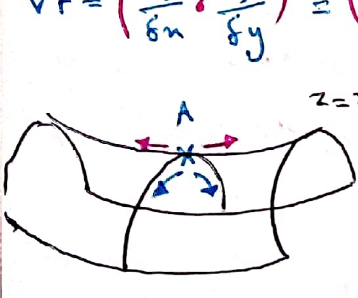
در جلسات قبل نقاط min نسبی (موضعی) معرفی کردیم. رده دیگری از نقاط موسوم به نقاط زینی به صورت زیر تعریف می شوند:

max

* نقطه $A(a_1, \dots, a_n)$ را یک نقطه زینی برای تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ می نامیم هرگاه $\nabla f|_A = \vec{0}$ (بردار صفر) اما نقطه A نه max نه min برای تابع f باشد.

Ex) $f(x,y) = x^2 - y^2$ را در نظر بگیرید نقطه $A(0,0)$ را نیز انتخاب می کنیم:

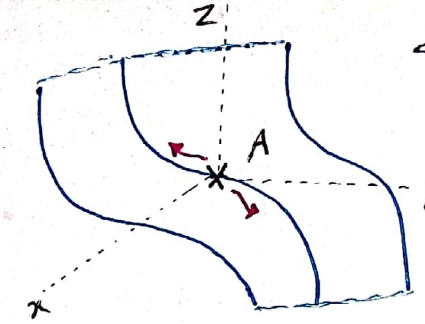
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y) \qquad \nabla f|_A = (0,0)$$



حال به رویه $z = x^2 - y^2$ توجه کنید. قبلاً دیدیم که این رویه شکل زین اسبی دارد با توجه به شکل رویه می بینیم که نقطه $A(0,0)$ نه max نسبی نه min نسبی بلکه یک نقطه زینی است.

(تذکر) و مشابه نقاط عطف در توابع یک متغیره را به یاد آورید که مثلاً برای $f(x) = x^3$ نقطه $x = 0$ یک نقطه بحرانی است چون $f'(0) = 0$ اما $x = 0$ max و min نسبی نمی باشد (نقطه عطف).

Scanned by CamScanner



(تذکر) دقت کنید که نقطه زینی لزوماً برای رویه‌ای که زینی است مطرح نمی‌شود به عنوان مثال رویه $z = x^3$ را در نظر بگیرید؛ y آن متغیر و امتداد می‌دهد

$\nabla f = (3x^2, 0)$

$\nabla f|_A = (0,0)$

$A \rightarrow$ با توجه به رفتار تابع یک نقطه زینی است

یادآوری روش دبیرستان: اگر $f'(x_0) = 0$ باشد در این صورت

(1) $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ min موضعی

(2) $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ max موضعی

(3) $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ نتیجه قطعی نمی‌توان گرفت:

$y = x^4$ min موضعی ، $y = -x^4$ max موضعی ، $y = x^3$ زینی

∇f وجود ندارد

$\nabla f = 0$ → min موضعی ، max موضعی ، زینی

مرزی

?

در ادامه قصد داریم شرایطی را ایجاد کنیم که به کمک آن بتوان آزمونی برای مشخص شدن نوع نقاط بحرانی را ابداع کرد برای این منظور فرض می‌کنیم که مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ در نقطه A موجود و پیوسته باشند. ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان f در نقطه A تعریف می‌کنیم:

$$H(A) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_A & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|_A & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\Big|_A & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_A & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\Big|_A \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \rightarrow$$

با توجه به فرضیات ماتریس متقارن می‌باشد

$1 \leq i, j \leq n$

<u>مقدماتی از جبر خطی</u>: فرض کنید ماتریس A ماتریس $n \times n$ باشد در این صورت λ را یک مقدار ویژه ماتریس A می‌نامند هرگاه

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Ex) فرض کنید که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت برای یافتن مقادیر ویژه A به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1$ ، $\lambda = 4$ مقادیر ویژه ماتریس A

Ex) فرض $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ در این صورت $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&2\\2&3-\lambda\end{bmatrix}=0\to(1-\lambda)(3-\lambda)-4=0$

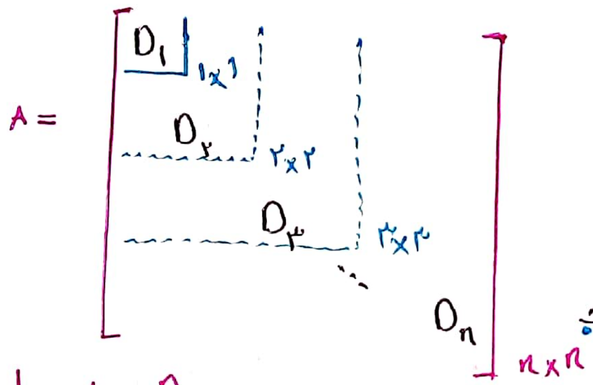
$\lambda_1,\lambda_2: ?$

تعریف) ماتریس A را مثبت معین می‌نامیم هرگاه تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشند.

ماتریس A را منفی معین می‌نامیم هرگاه تمام مقادیر ویژه آن منفی باشند.

ماتریس A را نامعین گوییم هرگاه حداقل یک مقدار ویژه مثبت و حداقل یک مقدار ویژه منفی داشته باشد.

قضیه) فرض کنید که $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن با مقادیر حقیقی باشد در این صورت D_i ها را دترمینان ماتریس مربعی $i\times i$ در گوشه‌ی بالا و سمت چپ ماتریس A تعریف می‌کنیم: $1\leqslant i\leqslant n$



$\det A = D_n$

در این صورت:

1) اگر به ازای هر i داشته باشیم $D_i>0$ آنگاه A یک ماتریس مثبت معین است.

2) اگر به ازای هر i داشته باشیم $D_{2i}>0$ و $D_{2i-1}<0$ آنگاه A یک ماتریس منفی معین است.

3) اگر (1) و (2) برقرار نباشد در این صورت ماتریس A یا مقادیر ویژه برابر صفر دارد و یا نامعین است.

Ex) $A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}_{3\times3} \leftarrow \begin{matrix}D_1=3\\D_2=-1\\D_3=-5\end{matrix}$

قضیه) در قضیه‌ی قبل اگر $D_n\neq0$ آنگاه تمام مقادیر ویژه A ناصفرند.

تذکر) فرمول بسط دترمینان نسبت به یک سطر یا یک ستون

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{21}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\det B=(-1)^{1+1}b_{11}\cdot\det\left(B\,\Big|\,\text{حذف سطر اول و ستون اول}\right)+(-1)^{1+2}b_{12}\cdot\det\left(B\,\Big|\,\text{حذف سطر اول و ستون دوم}\right)+\cdots$$

تعمیم: $\det B=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\,b_{ij}\cdot\det(B_{ij})$ ← ماتریسی که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس B بدست می‌آید

(توضیح) تعیین نوع نقاط بحرانی با کمک ماتریس هسین :

فرض کنید که $f(x_1,\dots,x_n)$ تابعی n متغیره باشد و نقطه‌ی $A(a_1,\dots,a_n)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع f است ضمناً می‌دانیم که مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم تابع f در همسایگی A موجود و پیوسته است. در این صورت چنانچه $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی $H(A)$ باشند آنگاه :

① اگر به ازای هر i داشته باشیم $\lambda_i > 0$ آنگاه A یک نقطه‌ی min موضعی (نسبی) است. ② اگر A min موضعی $\leftarrow \lambda_i \geq 0$

③ اگر به ازای هر i داشته باشیم $\lambda_i < 0$ آنگاه A یک نقطه‌ی max موضعی است. ④ اگر A max موضعی $\leftarrow \lambda_i \leq 0$

⑤ اگر حداقل یک مقدار ویژه مثبت و یک مقدار ویژه منفی داشته باشیم A نقطه‌ی زینی است.

⑥ اگر A نقطه‌ی زینی باشد آنگاه مقدار ویژه $\lambda_i \geq 0$ و مقدار ویژه $\lambda_j \leq 0$ موجود است.

با کمک مطلب فوق می‌توان قضیه‌ی مثبتی را به کار گرفت و نوع نقاط بحرانی را برای تابع f مشخص کرد: $D_n = \det H(A)$

- $D_n = 0 \rightarrow$ از این آزمون هیچ نتیجه‌ای بدست نمی‌آید $\rightarrow$ یعنی مقدار ویژه صفر داریم
- $D_n \neq 0$
  - $\forall i : D_i > 0 \rightarrow$ min موضعی
  - D_iهای فرد منفی، D_iهای زوج مثبت $\rightarrow$ max موضعی
  - در غیر این صورت $\rightarrow$ نقطه‌ی زینی

(تذکر) حالت خاص مطلب فوق را برای توابع دو متغیره بررسی می‌کنیم: فرض کنید $f(x,y)$ تابعی دو متغیره است و A یک نقطه‌ی بحرانی برای f می‌باشد در این صورت :

$$H(A) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_A & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_A \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_A & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ \underbrace{f_{12}}_{=f_{21}} & f_{22} \end{bmatrix}$$

$D_1 = f_{11}(A)$ و $D_2 = f_{11}(A)\, f_{22}(A) - f_{12}^2(A)$ با توجه به جدول قبل اگر $D_2 = 0$ در این صورت از این آزمون هیچ نتیجه‌ای بدست نمی‌آید.

اگر $D_1 > 0$ و $D_2 > 0$ آنگاه A min موضعی است * اگر $D_1 < 0$ و $D_2 > 0$ آنگاه A max موضعی است

(تذکر) واضح است که اگر $D_2 > 0$ اصلاً نمی‌توان حالت $f_{11}(A) = 0$ را داشت و لذا در غیر این صورت برای جدول فوق صرفاً $D_2 < 0$ خواهد شد. پس می‌توان برای توابع دو متغیره جدول زیر را به کار برد:

- $D_2 = 0 \longrightarrow$ فاقد تشخیص
- $D_2 > 0 \longrightarrow$
  - $D_1 > 0 \rightarrow$ min موضعی
  - $D_1 < 0 \rightarrow$ max موضعی
- $D_2 < 0 \longrightarrow$ زینی

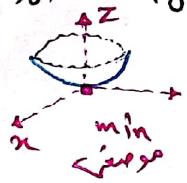
Ex) نقطه (۰،۰) برای $f(x,y)=x^2-y^2$ زینی

$$H(A)=H(0,0)=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

1×1

$D_1=2\ ,\ D_2=-4 \longrightarrow$ زینی

Ex) نقطه (۰،۰) برای $f(x,y)=x^2+y^2$



$$H(0,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\rightarrow \begin{matrix} D_1>0\\ D_2>0\end{matrix} \rightarrow \text{min}$$ موضعی

Ex) نقطه (۰،۰) برای $f(x,y)=-x^2-y^2$

$$H(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\rightarrow \begin{matrix} D_1<0\\ D_2>0\end{matrix} \rightarrow \text{max}$$ موضعی

Ex) تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ مفروض است. نقاط بحرانی و نوع هر کدام را مشخص کنید.

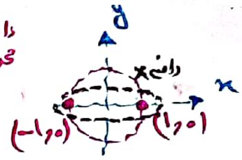
$\nabla f=(2x\ \ 2y\ \ -2z)\rightarrow$ تنها نقطه بحرانی $=(0,0,0)=A$

$$H(A)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\rightarrow D_n=\det H(A)=-8$$

$\left.\begin{matrix} D_1=2\\ D_2=4\\ D_3=-8\end{matrix}\right\} \rightarrow$ نقطه زینی

Ex) $\begin{cases} f(x,y)=1-x\\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ داخل محدوده

$\nabla f=(-1,0)$



$f(1,0)=0 \rightarrow$ min مطلق

$f(-1,0)=2 \rightarrow$ max مطلق

Ex) تابع $f(x,y,z,t)=x^4+y^6-z^4+t^8$ مفروض می‌باشد، نقاط بحرانی و نوع هر کدام را بیابید.

$\nabla f=(4x^3, 6y^5, -4z^3, 8t^7)=(0,0,0,0)$ تنها نقطه بحرانی (A)

$$H(A)=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34}\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12x^2 & & & 0\\ & 30y^4 & & \\ & & -12z^2 & \\ 0 & & & 56t^6\end{bmatrix}\overset{\text{ماتریس}}{=} 0$$

$D_n=0=\det H(A)$

در ضمن ۵) شرایطی تحلیل رفتار تابع در نقطه A می‌تواند نوع نقطه بحرانی را مشخص کند.

↓

$$\underset{z\neq 0}{f(0,0,z,0)} < f(0,0,0,0) < \underset{x\neq 0}{f(x,0,0,0)}$$

نقطه زینی

تمرین) $f(x,y,z)=x^4+y^6+z^8$

(۰،۰،۰) min موضعی

$f(x,y,z)=-x^4-y^4-z^6$

(۰،۰،۰) max موضعی

Ex) تابع $f(x,y)=x^4+y^4-4xy-1$ مفروض است، نقاط بحرانی و نوع هر یک را مشخص کنید؟

$\nabla f=(4x^3-4y\ ,\ 4y^3-4x)=(0,0) \to \begin{cases} x^3=y \\ y^3=x \end{cases} \to y^9=y \to y(y^8-1)=0 \to \begin{cases} y=0 & x=0 & : (0,0) \\ y=1 & x=1 & : (1,1) \\ y=-1 & x=-1 & : (-1,-1) \end{cases}$

نقاط بحرانی

$H(A)=H(x,y)=\begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$

$H(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$: $D_2=-16 \to D_2<0$ زینی ، $D_1=0$

$H(1,1)=\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ $D_2>0$ ، $D_1=12>0$ min موضعی

$H(-1,-1)=\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ min موضعی

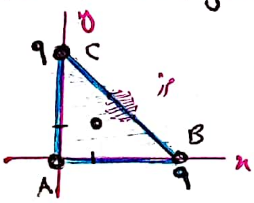
(تذکر) نحوه ی روش برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع n متغیره انجام می‌شود (۱) در مورد نقاط اکسترمم مطلق یک تابع n متغیره دقیقاً مانند حالت یک متغیره (۱) سه گروه نقاط تکین، بحرانی و مرزی را مشخص می‌کنیم و پس مقدار تابع f را در تمام این نقاط بدست می‌آوریم و با مقایسه مقادیر بدست آمده min مطلق و max مطلق مشخص می‌شود.

Ex) فرض کنید $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ که بر ناحیه زیر تعریف شده است مقدار min مطلق و max مطلق این تابع را در این ناحیه مشخص کنید.

$\nabla f=(2-2x\ ,\ 2-2y) \to$ نقاط تکین: $\varnothing$

نقاط بحرانی: $(x,y)=(1,1)=4$ قبول چون داخل ناحیه است

نقاط مرزی: کناره‌ی مثلث



نقاط مرزی این شکل که تمام خطوط کناره مثلث می‌باشد و لذا به سه قسمت مرزی داریم ابتدا در مورد هر یک از این مرزها بحث را به صورت جداگانه پیگیری می‌کنیم:

مرز AB : $y=0$ ، $0\le x\le 9 \to f(x,y)=f(x,0)=2+2x-x^2=g(x)$ ، $0\le x\le 9$

برای یافتن اکسترمم $g(x)$:

$g'(x)=2-2x$

- g تکین $\varnothing$
- g بحرانی: $x=1 \to (1,0)$ $f(1,0)=3$
- g مرزی: $x=0 \to (0,0)$ $f(0,0)=2$ ، $x=9 \to (9,0)$ $f(9,0)=-61$

مرز AC $x=0$ ، $0\le y\le 9$

$f(x,y)=2+2y-y^2=h(y)$ ، $0\le y\le 9$

اکسترمم h شبیه قبل:
- تکین $\varnothing$
- بحرانی $f(0,1)=3$
- مرزی $f(0,0)=2$ ، $f(0,9)=-61$

مرز BC $x+y=9 \to y=9-x$ ، $0\le x\le 9$

$k(x)=f(x,y)=f(x,9-x)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2$ ، $0\le x\le 9$

اکسترمم k :
- K تکین $\varnothing$
- K بحرانی : $x=\frac{9}{2} \to y=\frac{9}{2}$ $f(\frac{9}{2},\frac{9}{2})=-\frac{41}{2}$
- K مرزی

مقایسه و مقادیر

$f(1,1)=4 \to$ max

$f(0,9)=f(9,0)=-61 \to$ min

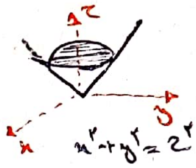
Ex) نقاط تکین و بحرانی $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید.

نقطه تکین: $(0,0)$

بحرانی: $\emptyset$

$$\nabla f=\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}},\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$(x,y)\neq(0,0)$



تمرین) ثابت کنید برای هر $x\geq 0$ و $y\geq 0$ داریم $\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$

راهنمایی حل مسئله) تابع کمکی $f(x,y)=e^{x+y-2}-\frac{x^2+y^2}{4}$ را در نظر گرفته و ثابت کنید برای $x\geq 0$ و $y\geq 0$ مینیمم تابع عددی بزرگتر یا مساوی صفر است.

یافتن اکسترمم‌های توابع چند متغیره با شرایط اولیه:

روش ضرایب ثابت لاگرانژ: در بخش قبل اکسترمم‌های یک تابع n متغیره $f(x_1,\dots,x_n)$ را در یک دامنه بررسی کردیم (بررسی سه گروه نقاط تکین، بحرانی و مرزی) اما گاهی اوقات مقدار اکسترمم یک تابع n متغیره را زمانی می‌خواهیم که صرفاً در بین نقاطی باشد که مثلاً در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} g^{(1)}(x_1,\dots,x_n)=0\\ \vdots\\ g^{(k)}(x_1,\dots,x_n)=0\end{cases}$$

برای پاسخ به این سؤال روش معروف به روش ضرایب ثابت لاگرانژ مطرح می‌شود که به صورت زیر است:

لاگرانژ ثابت کرد که این اکسترمم‌ها اگر در نقطه‌ای اتفاق بیافتند در آن نقاط می‌توان اعداد ثابت $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ را یافت به طوری که:

$$\nabla f+\lambda_1\nabla g^{(1)}+\dots+\lambda_k g^{(k)}=0$$

پس برای این منظور k متغیر $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ را در نظر گرفته و معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\nabla f+\lambda_1\Delta g^{(1)}+\dots+\lambda_k g^{(k)}=0$$

$$\begin{cases} g^{(1)}(x_1,\dots,x_n)=0\\ \vdots\\ g^{(k)}(x_1,\dots,x_n)=0\end{cases}$$

و داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial g^{(1)}}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial g^{(k)}}{\partial x_k} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial g^{(1)}}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial g^{(k)}}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} g^{(1)}(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ g^{(k)}(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}$$

که دستگاهی $n+k$ معادله و $n+k$ مجهولی $x_1,\dots,x_n$ و $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ می‌باشد. که از حل این دستگاه اکسترمم‌های تابع f مشخص می‌شوند.

Ex) $\min, \max$ تابع $f(x,y,z) = xy + 2z$ را روی دایره‌ای که از تقاطع صفحه $x+y+z=0$ با کره $x^2+y^2+z^2=24$ بدست آورید.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xy + 2z \\ g^{(1)}(x,y,z) = x+y+z = 0 \\ g^{(2)}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-24 = 0 \end{cases} \xrightarrow[k=2]{n=3} \begin{cases} y + \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 2x = 0 & ① \\ x + \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 2y = 0 & ② \\ 2 + \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 2z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-24 = 0 \end{cases}$$

۵ معادله و ۵ مجهولی

مرتبه می‌آید را مشخص شده

$①,②: x - y + \lambda_2 \cdot 2y - \lambda_2 \cdot 2x = 0 \rightarrow (x-y)(1-2\lambda_2) = 0 \rightarrow$ ۲ حالت پیش می‌آید: حالت اول، حالت دوم

حالت اول: $x = y \xrightarrow{④} z = -2x$

$\xrightarrow{⑤} x^2 + x^2 + (-2x)^2 - 24 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 & (2,2,-4) \text{ نقطه} \\ x = -2 & (-2,-2,4) \text{ نقطه} \end{cases}$

حالت دوم: $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ $\xrightarrow{①} y + \lambda_1 + x = 0 \xrightarrow{④} \lambda_1 - z = 0$

$\xrightarrow{③} 2 + \lambda_1 + z = 0$

$\rightarrow 2 + 2z = 0 \rightarrow z = -1 \rightarrow \begin{cases} x+y = 1 & ④ \\ x^2+y^2 = 23 & ⑤ \end{cases}$

$x^2 + (1-x)^2 - 23 = 0 \rightarrow x^2 + x^2 - 2x - 22 = 0 \rightarrow x^2 - x - 11 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3\sqrt{5}}{2} & (x_1, 1-x_1, -1) \\ x_2 = \frac{1-3\sqrt{5}}{2} & (x_2, 1-x_2, -1) \end{cases}$

حال کافی است مقدار f را در این ۴ نقطه حساب کرده و با هم مقایسه کنیم.

Ex) $\min, \max$ تابع $f(x,y,z) = 4 - z$ روی مجموعه نقاط واقع بر اشتراک استوانه $x^2+y^2=8$ و صفحه $x+y+z=1$ بدست آورید.

$g^{(1)}(x,y,z) = x^2+y^2-8 = 0$

$g^{(2)}(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$

$$\begin{cases} 0 + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \\ 0 + \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \\ -1 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \\ x^2+y^2 = 8 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \quad \rightarrow 2\lambda_1(x-y) = 0$$

حالت اول: $\lambda_1=0 \leftarrow \lambda_2=0 \leftarrow$ از ③ ✗

حالت دوم: $x=y \rightarrow 2x^2=8 \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow y=2 \rightarrow z=-3 \rightarrow (2,2,-3) \rightarrow f(2,2,-3)=7 & \max \\ x=-2 \rightarrow y=-2 \rightarrow z=5 \rightarrow (-2,-2,5) \rightarrow f(-2,-2,5)=-1 & \min \end{cases}$

Ex) فرض کنید که تابع $f(x,y,z)=x^2+yz-x$ مفروض است. کمترین و بیشترین مقدار تابع f را در ناحیه زیر را بیابید $(x^2+y^2+z^2\le 1)$. برای پاسخ به سؤال فوق ۳ گروه نقاط تکین، بحرانی و مرزی را بررسی می‌کنیم:

$\nabla f=(2x-1, z, y)$ ، تکین $=\emptyset$ ، $(2x-1, z, y)=0 \rightarrow (\frac{1}{2},0,0)$ بحرانی : $f(\frac{1}{2},0,0)=-\frac{1}{4}$

نقاط مرزی را فقط $(x^2+y^2+z^2=1)$ کره‌ای به شعاع واحد

برای بررسی اکسترمم‌های تابع f روی نقاط مرزی از روش ضرایب ثابت لاگرانژ استفاده می‌کنیم و لذا:

$$\begin{cases}\nabla f+\lambda\nabla g=0\\ g=0\end{cases} \xrightarrow[\text{۴ مجهول}]{\text{۴ معادله}} \left|\begin{array}{l}(2x-1)+\lambda 2x=0\\ z+\lambda 2y=0 \rightarrow z=-\lambda 2y\\ y+\lambda 2z=0 \rightarrow y=-\lambda 2z\\ x^2+y^2+z^2=1\end{array}\right. \rightarrow$$

$2\times 2y\lambda\lambda=y \rightarrow y(4\lambda^2-1)=0 \rightarrow$
- $y=0 \rightarrow z=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow (1,0,0),\ (-1,0,0)$
- $\lambda=\frac{1}{2} \rightarrow 2x-1+x=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow 1=\frac{1}{9}+2y^2 \rightarrow y=$ ✓ ؛ $z+y=0 \rightarrow y=-z$ ؛ $z=-y$ ✓
- $\lambda=-\frac{1}{2}$ ...

با تعیین مقدار f در این نقاط max و min مطلق تابع f مشخص می‌شود.

Ex) مخروط $x^2+y^2=1+z^2$ را با صفحه‌ی $x+2y=1$ قطع می‌دهیم. در بین نقاط برخورد، نزدیک‌ترین و دورترین نقطه که مبدأ مختصات کدام است.

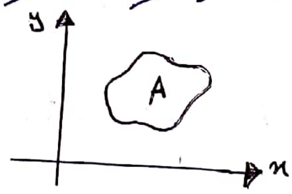
$\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.$ تابع فاصله از مبدأ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

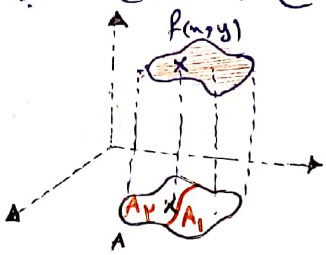
برای سؤال فوق باید در مورد اکسترمم‌های تابع سؤال بحث کنیم که با استفاده از روش ضرایب ثابت لاگرانژ با دو قید جواب بدست می‌آید.

اما در این سؤال اگر تابع $f(x,y,z)$ را توان دوم تابع فاصله بگیریم $(f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2)$ در این صورت حجم محاسبات کم می‌شود و جواب‌های حاصل همان جواب‌های قبلی است.

$$\begin{cases} g^{(1)}(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1=0\\ g^{(2)}(x,y,z)=x+2y-1=0\end{cases} \rightarrow$$ ادامه حل با شما ☺

انتگرال های دوگانه: فرض کنید که $A \subseteq R^2$ و تابع $f(x,y)$ بر روی این ناحیه تعریف کرده ایم در این صورت می توان دقیقاً مانند بحث های مربوط به انتگرال در ریاضی (۱) مفهوم انتگرال دوگانه را ارائه داد به عنوان مثال فرض کنید که یک صفحه فلزی داریم که سطح آن همان ناحیه A باشد و برای این صفحه فلزی سقفی مانند ارتفاع در آن نقطه در نظر گرفته که با هر حرکت دیگری را تعریف کنیم.





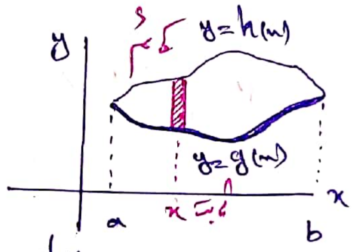
حال اگر ظرفی را در نظر بگیریم که سطح قاعده آن مسطح باشد و در واقع همان صفحه فلزی A در نظر گرفته می شود.

در این صورت یک تقریب از حجم این ظرف را می توان به صورت مقابل ارائه داد: $f(x_1,y_1) \times$ مساحت A

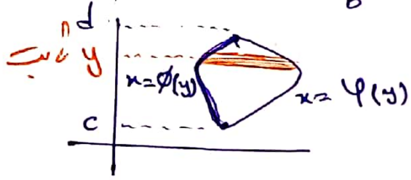
که $f(x_1,y_1)$ ارتفاع ظرف در نقطه (x_1,y_1) است. برای بهتر شدن این تقریب می توان A را به n قسمت افراز کرد و از هر یک از افرازها یک نقطه را انتخاب کنیم و در این صورت یک تقریب حجم برابر است با: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i) \times (A_i \text{ مساحت})$

حال اگر حد عبارت فوق را محاسبه کنیم زمانی که مساحت تمام A_i ها به سمت صفر میل کند حجم ظرف مشخص خواهد شد که این عدد را با $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ نمایش می دهیم و آن را انتگرال دوگانه f بر ناحیه A می نامیم.

برای محاسبه انتگرال های دوگانه از قضیه فوبینی کمک می گیریم. برای این منظور ابتدا ناحیه A را به وسیله المان های قائم یا افقی به صورت x ـ منظم و یا y ـ منظم بیان کنیم: مطابق شکل



$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ \phi(y) \leq x \leq \psi(y) \end{cases}$$

فی
سای

قضیه فوبینی: برای محاسبه انتگرال دوگانه $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ می توان به صورت زیر عمل کرد:

وضعیت اول) ناحیه را به صورت المان های قائم توصیف کرد:

$$A: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases} \longrightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

که x یک مقدار ثابت

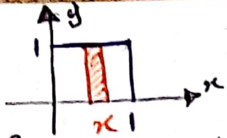
وضعیت دوم) ناحیه را به صورت المان های افقی توصیف کرد:

$$A: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \phi(y) \leq x \leq \psi(y) \end{cases} \longrightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

که y یک مقدار ثابت

در انتگرال دوگانه ترتیب $dx\,dy$ مهم نیست اما در انتگرال های مکرر ترتیب مهم می باشد (سمت راست: صورت سؤال ، سمت چپ: نوع c۶۲)

Ex) ظرفی را در نظر بگیرید که قاعده آن مربع به طول یک در ربع اول مطابق شکل زیر باشد



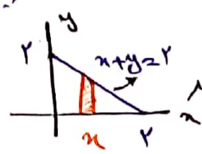
به علاوه ارتفاع ظرف در هر نقطه (x,y) متعلق به این مربع که $f(x,y)=x+y$ بدست می آید. حجم این ظرف را مشخص کنید.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \text{حجم} \ ?$$

مربع واحد $A : \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1\end{cases} \longrightarrow$ حجم ظرف $= \int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)dx = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$

حجم ظرف $= 1$

Ex) ظرفی را در نظر بگیرید که سطح قاعده آن مثلث زیر باشد



و ارتفاع ظرف در هر نقطه (x,y) درون مثلث به کمک تابع $f(x,y)=x^2+xy$ بدست آورید.

$$\text{حجم} = \iint_A (x^2+xy)\,dx\,dy$$

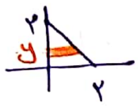
$A: \begin{cases} 0\leq x\leq 2 \\ 0\leq y\leq 2-x\end{cases}$

روش (۱)

$$\text{حجم} = \int_0^2\int_0^{2-x} (x^2+xy)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\Big|_0^{2-x}\right)dx$$

$$\text{حجم} = \int_0^2 \left(x^2(2-x)+\frac{x}{2}(2-x)^2\right)dx = \checkmark$$

روش (۲)



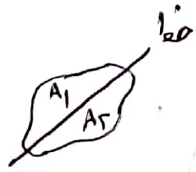
$\begin{cases} 0\leq y\leq 2 \\ 0\leq x\leq 2-y\end{cases}$

$$\text{حجم} = \int_0^2\int_0^{2-y} (x^2+xy)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}\Big|_0^{2-y}\right)dy = \checkmark$$

خواص انتگرال دوگانه :

1) $\iint_A (\alpha f \pm g)\,dx\,dy = \alpha \iint_A f\,dx\,dy \pm \iint g\,dx\,dy$ — عددی ثابت

2) $\iint_{A_1\cup A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f\,dx\,dy + \iint_{A_2} f\,dx\,dy$: به شرط اینکه $A_1\cap A_2=\emptyset$ یا صفر



3) $\iint_A 1\,dx\,dy =$ مساحت A

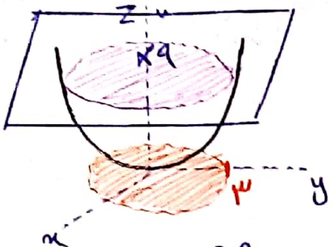
$\int_a^b dx = b-a$ طول بازه انتگرال گیری

4) $\forall (x,y)\in A \ ; \ f(x,y)\leq g(x,y) \longrightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_A g(x,y)\,dx\,dy$

5) $\iint_A (f-g)\,dx\,dy =$ حجم محصور بین دو رویه $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ که تصویر این حجم بر صفحه xy برابر ناحیه A است

رویه بالایی — رویه پایینی

6) $\forall (x,y)\in A \ , \ f(x,y)\geq 0 \longrightarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

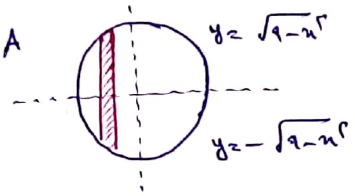


Ex) حجم محصور بین دو رویه $Z=x^2+y^2$ و $Z=9$ را بیابید.

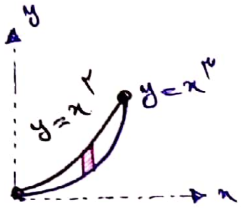
$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=9 \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2=9$$

ناحیه تصویر $A: x^2+y^2\le 9$

$$\text{حجم بین دو رویه} = \iint_A \left(9-(x^2+y^2)\right)dx\,dy = \iint_A (9-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (9-x^2-y^2)\,dx\,dy = \checkmark$$



$$A:\begin{cases} -3\le x\le 3 \\ -\sqrt{9-x^2}\le y\le \sqrt{9-x^2} \end{cases}$$



Ex) مساحت محصور بین دو منحنی $y=x^2$ و $y=x^3$ در ربع اول را بیابید.

$$\begin{matrix} y=x^3 \\ y=x^2 \end{matrix} \to \text{نقاط تقاطع} \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} \to \text{مساحت}_A = \iint_A 1\,dx\,dy = \int_0^1\int_{x^3}^{x^2} 1\,dy\,dx = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \checkmark$$

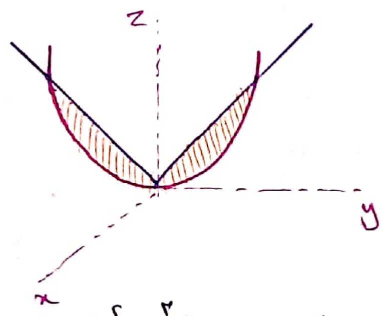
$$A:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^3\le y\le x^2 \end{cases}$$

توجه کنید که اگر از ناحیه افقی استفاده کنیم داریم $\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ \sqrt{y}\le x\le \sqrt[3]{y} \end{cases}$ و

$$\text{مساحت}_A = \iint_A 1\,dx\,dy = \int_0^1\int_{y}^{\sqrt[3]{y}} 1\,dx\,dy$$

محاسبات آن سخت‌تر

(تذکر) در رابطه I به یاد داریم که $\int_3^x (x^2+1)\,dx$ بی‌معنی است و در واقع حدهای انتگرال نمی‌تواند شامل متغیر انتگرال باشد. در صورتی که در انتگرال‌های دوگانه در انتگرال‌گیری مکرر به ترتیب حضور متغیرها توجه نکنیم ممکن است عبارتی مانند انتگرال فوق را بنویسیم که نشان دهنده اشتباه در ترتیب انتگرال‌ها است.



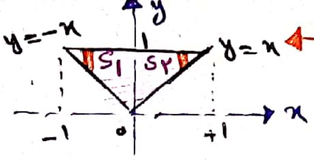
Ex) حجم محصور بین دو رویه $z=x^2+y^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید.

$$\begin{matrix} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{matrix} \to z=z^2 \to \begin{matrix} z=0 \\ z=1 \end{matrix} \quad : \quad x^2+y^2=1 \xrightarrow{\text{ناحیه تصویر}} A: x^2+y^2\le 1$$

$$\text{حجم} = \iint_A (\text{مخروط} - \text{سهمی‌وار})\,dx\,dy = \iint_A \left(\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right)dx\,dy = \checkmark$$

EX) انتگرال دوگانه زیر را حساب کنید که در آن $S=S_1\cup S_2$:

$$I=\iint_S e^{y^2}dxdy=?$$

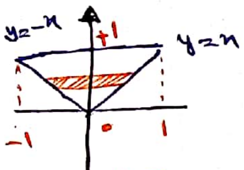


این ۲ منطقه‌اند

اگر از آن کمک استفاده کنیم :

$$S_1:\begin{cases}-1\le x\le 0\\ -x\le y\le 1\end{cases}\quad ,\quad S_2:\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le y\le 1\end{cases}\longrightarrow I=\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1}e^{y^2}dx+\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}dy\,dx=?$$

چون با اطلاعات ریاضی ۱ می‌دانیم نمی‌توان که تابع اولیه‌ای برای e^{y^2} یافت پس این انتگرال‌ها قابل حل نیستند.



این در راستای x ساده است

ولی اگر از آن‌ها افقی استفاده کنیم در این صورت

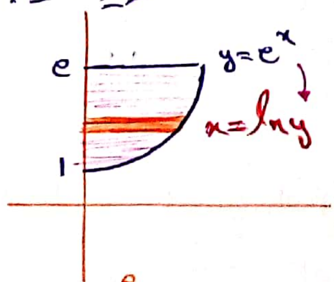
$$S:\begin{cases}0\le y\le 1\\ -y\le x\le y\end{cases}\quad ,\quad I=\int_0^1\int_{-y}^{y}e^{y^2}dx\,dy$$

$$I=\int_0^1 e^{y^2}(x)\Big|_{-y}^{y}dy=\int_0^1 2y\,e^{y^2}dy=\int_0^1 e^u du=e^u\Big|_0^1=e-1\qquad u=y^2$$

تذکر) گاهی اوقات اتفاق می‌افتد که یک انتگرال دوگانه داده می‌شود که نمی‌توان آن را به صورت معمولی حل کرد. یکی از روش‌ها این است که از روی تغییرات عناصر آن شکل ناحیه را رسم کرده و سپس از آن‌ها نوع دیگر انتگرال را حساب کنیم $\longleftrightarrow$ به این فرآیند اصطلاحاً تغییر ترتیب انتگرال‌گیری یا تعویض گفته می‌شود.

EX) $\displaystyle\int_0^1\int_{e^x}^{e}\frac{1}{\ln y}dy\,dx=?\qquad \begin{cases}0\le x\le 1\\ e^x\le y\le e\end{cases}$

گام



$$I=\iint_S\frac{1}{\ln y}\underset{dy\,dx}{\overset{\updownarrow}{dx\,dy}}\qquad S:\begin{cases}1\le y\le e\\ 0\le x\le \ln y\end{cases}\qquad I=\int_1^e\left(\int_0^{\ln y}\frac{1}{\ln y}dx\right)dy=\int_1^e dy=e-1$$

تمرین) $\displaystyle I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1}e^{y^3}dy\,dx=?$

یادآوری) به یاد داریم که اگر تابع $f(x)$ بر $[-a,a]$ تابعی فرد ($f(-x)=-f(x)$) باشد در این صورت $\int_{-a}^{a}f(x)dx$ برابر صفر است. به صورت مشابه تابع $f(x,y)$ را بر ناحیه A فرد می‌نامیم هرگاه A نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد و داریم:

$f(-x,-y)=-f(x,y)$
$\forall(x,y)\in A$

قضیه) اگر $f(x,y)$ بر A تابعی فرد باشد در این صورت $\iint_A f(x,y)dxdy=0$

Ex) $\iint_{x^2+y^2\le 4} (y^2\sin x + x^2\sin y)\,dx\,dy = 0$

ناحیه متقارن — تابع فرد

Ex) $\iint_{x^2+y^2\le 9} \sin(x^3+y^3)\,dx\,dy = 0$

ناحیه متقارن — تابع فرد

(تذکر) اگر تابع $f(x,y)$ را بتوان به صورت حاصلضرب $g(x)$ در $h(y)$ نوشت و ناحیه S مستطیل $\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{cases}$ باشد آنگاه:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

حالت (تابع زوج + فرد)

Ex) $\iint_{x^2+y^2\le 4} (y^2\sin x + y^3 + 5)\,dx\,dy = ?$ $= \iint_{x^2+y^2\le 4} \cancel{y^2\sin x + y^3}^{\,0}\,dx\,dy + 5\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy = 0 + 5\times 4\pi = 20\pi$

ناحیه متقارن

Ex) $\int_0^2\int_1^4 (x^2)(y^3+4)\,dx\,dy = \int_0^2 y^3+4\,dy \cdot \int_1^4 x^2\,dx = ✓$

(یادآوری) انتگرال ناسره * (تابع ① متناهی ② کراندار بودن باشد که انتگرال داشته باشیم) حال اگر هر یک از این شرط‌ها برقرار نباشد انتگرال ناسره گوئیم.

سؤالات امتحانی بیشتر از این مبحث با استفاده از قضیه فوبینی ⟵ تبدیل به مسئله ریاضی I می‌شود ⟵ مباحث ریاضی I و آزمون‌های سری را مطالعه کنید.

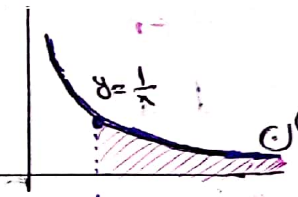
انتگرال‌های دوگانه ناسره: دقیقاً مانند ریاضی I: اگر شرط کراندار بودن تابع f یا کراندار بودن ناحیه انتگرال‌گیری برقرار نباشد باز هم می‌توان مفهوم انتگرال را ارائه داد و فقط باید توجه کرد که در چنین مواردی انتگرال‌های حاصل انتگرال‌های ناسره هستند و باید همگرایی و واگرایی آنها تعیین شود. برو بشین ریاضی I این مبحث کول

(یادآوری) آزمون p:

1) $\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p>1$

2) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ یا $\int_{-\infty}^{-a} \frac{dx}{x^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p>1$ $(a>0)$

Ex) $\iint_S \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = ?$ ،



$= ?$

$S:\begin{cases} x\ge 1 \\ 0\le y\le \frac{1}{x} \end{cases}$

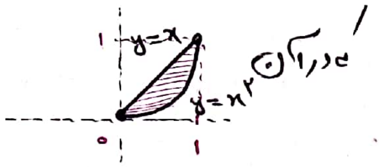
$I = \int_1^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x+y}\,dy\,dx = \dots$

$= \int_1^{+\infty} \left(\ln(x+y) \Big|_0^{\frac{1}{x}}\right) dx = \int_1^{+\infty} \left(\ln(x+\frac{1}{x}) - \ln x\right) dx = \int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\, dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

همگرا طبق آزمون P

(با آزمون مقایسه همگراست $0<\ln(1+u)\le u$)

Ex) $\iint_S \frac{1}{xy}\, dx\, dy = ?$



$I = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\ln y \Big|_{x^2}^{x}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left[\ln x - \ln x^2\right] dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{x} \ln\frac{1}{x}\, dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx = -\int_{-\infty}^0 u\, du = -\frac{u^2}{2}\Big|_{-\infty}^0$

$u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$

($-\infty$) می‌شود و واگرا

تمرین) مطلوبست محاسبه

$I = \int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\, dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\, dx = ?$

(یادآوری)

$\int_a^b g(x)\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} u\, du$ ، $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$

تغییر متغیر

یادت باشه کرانها را آپدیت کنی

قضیه‌ی تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه: فرض کنید که در یک انتگرال دوگانه که ناحیه انتگرال S باشد و $I = \iint f(x,y)\, dx\, dy$ داده شده است. برای محاسبه این عبارت از تغییر متغیرهای $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ را درنظر میگیریم و میدانیم که ناحیه S در دستگاه مختصات uv به صورت مجموعه A توصیف میشود که

$$I = \iint_A f\left(x(u,v),\, y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$$

که در آن مقدار مطلق دترمینان ژاکوبین x و y نسبت به u و v به عنوان ضریب در انتگرال ظاهر میشود:

$\left|\frac{\partial(\text{متغیرهای قدیم})}{\partial(\text{متغیرهای جدید})}\right|$ البته زمانیکه مشتقات جزئی $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ در ناحیه A موجود و پیوسته باشند.

حالت خاص که بیشتر در انتگرال‌های دوگانه ظاهر میشود: اگر ناحیه A توصیف ناحیه S در مختصات قطبی باشد در این صورت

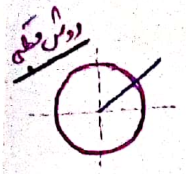
$$\iint_S f(x,y)\, dx\, dy = \iint_A f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

زیرا: $r = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

Ex) مطلوبست محاسبه ی مساحت دایره ی به شعاع a :

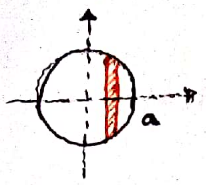
مساحت دایره $= \iint_{x^2+y^2\le a^2} (1)\, dx\,dy = ?$

روش قطبی



ناحیه A در قطبی $\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le a\end{cases}$ $\to$ مساحت $= \int_0^{2\pi}\int_0^a (1)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^a\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi = a^2\pi$

اگر قرار بود با مختصات xy همین سوال را جواب دهیم :



مساحت $= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (1)\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dots = \pi a^2$

Ex) مطلوبست محاسبه ی انتگرال زیر :

$e^{-(x^2+y^2)}$

$I=\iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = ?$

روش قطبی

$= \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac12 e^{-a^2}+\frac12 e^{0}\right)d\theta \quad = \int \frac{e^{-u}}{2}du = -\frac12 e^{-u} = -\frac12\left(e^{-a^2}-1\right)\times 2\pi$

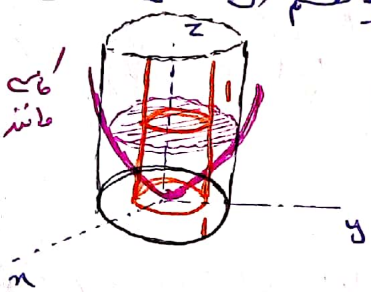
$u=r^2$

$du=2r\,dr$

$= \pi\left(e^{-a^2}-1\right)$

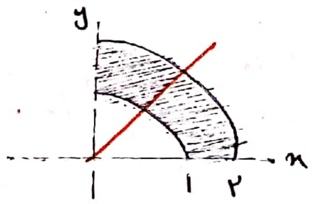
Ex) حجم زیر رویه $z=4x^2+4y^2$ که بین استوانه های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد و در یک هشتم اول فضای R^3 واقع است را بدست آورید.

کاسه مانند



حجم $= \iint_{\text{تصویر}=?} 4(x^2+y^2)\,dx\,dy$

$\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 1\le r\le 2\end{cases}$



حجم $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 4r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\, r^4\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(16-1) = \frac{15\pi}{2}$

Ex) مطلوبست محاسبه ی

$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = ?$

قبل از هر چیز، واگرایی یا همگرایی این انتگرال را بررسی می کنیم

$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}dx}_{} + \underbrace{\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx}_{?}$

انتگرال معمولی (از نوع ثابت)
ولذا همگرا می باشد

$x\ge 1 \to x^2\ge x \to -x^2\le -x \to$ اکیداً صعودی e^x $\to e^{-x^2}\le e^{-x}$

در مورد $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ می توان گفت $\left(\int_1^{+\infty}e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac1e\right)$ $\leftarrow$ طبق آزمون مقایسه انتگرال ناسره همگراست $0<e^{-x^2}\le e^{-x}$ همگرا

تذکر) یکی از تکنیک‌های بسیار رایج در این فرآیند این است که انتگرال را به یک انتگرال دوگانه تبدیل می‌کنیم:

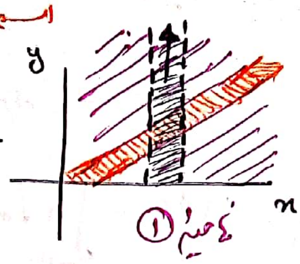
$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy \to I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy \to$$

اسم متغیر مهم نیست هر چیزی باشد

مقدار ثابت

$$I^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dy\,dx \to$$

الان افقی



$$\to = \text{قطبی}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}d\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}=I^2 \to I=\pm\frac{\pi}{2}\to I=+\frac{\pi}{2}$$

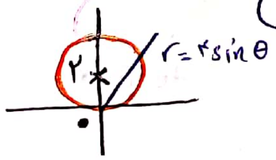
مردود

غیرقابل قبول چون $e^{-x^2}>0$ می‌باشد

Ex) فرض کنید S ناحیه درون منحنی $r=4\sin\theta$ باشد. مطلوبست محاسبه

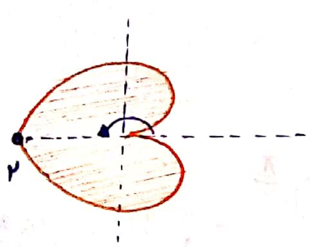
$$I=\iint_S x^2\,dx\,dy=?$$

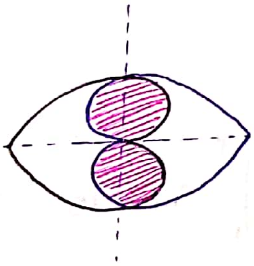
$$r^2=4r\sin\theta \to x^2+y^2=4y \to x^2+(y-2)^2=4$$



توصیف ناحیه
$$\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\ 0\le r\le 4\sin\theta\end{cases}$$

$$\text{جواب}=\int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta}r^2\cos^2\theta\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{4\sin\theta}\cos^2\theta\,d\theta=\checkmark$$

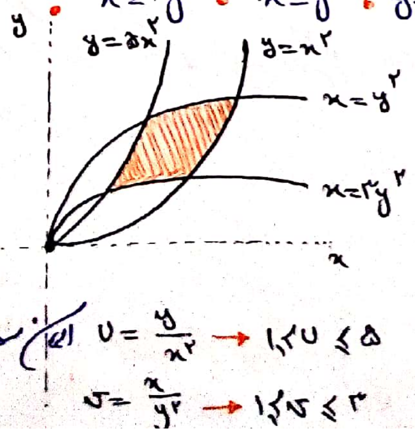




تمرین) مساحت درون الوار $r=1-\cos\theta$ را بدست آورید.

مساحت محصور بین دو منحنی
$$\begin{cases}r=1+\cos\theta\\ r=1-\cos\theta\end{cases}$$

Ex) مطلوبست محاسبه مساحت محصور بین منحنی‌های $x=3y^2$ ، $x=y^2$ ، $y=5x^2$ ، $y=x^2$



$$\iint_S 1\,dx\,dy=\iint_A 1\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=?$$

مقدار ثابت $y=u\,x^2$

الان سمت شکل ۱۵

$$u=\frac{y}{x^2}\to 1\le u\le 5$$

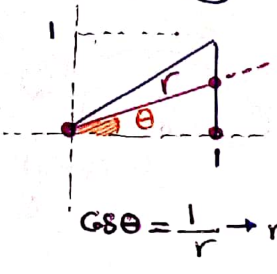
$$v=\frac{x}{y^2}\to 1\le v\le 3$$

$$= \frac{1}{\left|\begin{matrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{matrix}\right|} = \frac{1}{\frac{4xy}{x^3y^3} - \frac{1}{x^2y^2}} = \frac{x^2y^2}{3} = \frac{1}{3u^2v^2} \rightarrow \text{جواب} = \int_1^5 \int_1^3 1 \times \frac{1}{3u^2v^2}\, dv\, du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^5 \frac{1}{u^2}\, du \int_1^3 \frac{1}{v^2}\, dv$$

$\left(xy = \frac{1}{uv}\right)$

تذکر) در بحث های مربوط به مختصات قطبی دیدیم که می توان از المان های مرتبه شعاعی برای مشخص کردن یک شکل استفاده کرد. به عنوان مثال به شکل زیر نگاه کنید:



المان مرتبه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta}$

$\cos\theta = \frac{1}{r} \rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}$

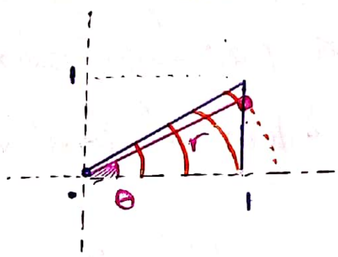
$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$

$f(\theta) \leq r \leq g(\theta)$

نوع دیگری از المان قطبی، المان زاویه ای است که به صورت مقابل قابل توصیف است:

$a \leq r \leq b$

$\underbrace{\phi(r) \leq \theta \leq \varphi(r)}_{\text{ساده}}$



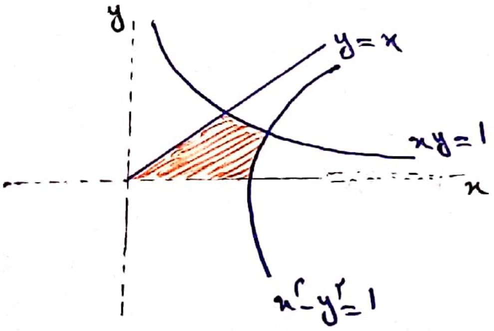
$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$\cos\theta = \frac{1}{r}$

$\rightarrow U \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos\theta_0 = \frac{1}{r} \end{cases}$

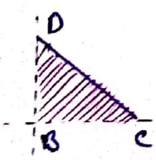
تمرین) مطلوب است $\iint_R (x^2+y^2)\, dy\, dx$ که در آن R ناحیه محصور بین منحنی های $y=0$ و $y=x$ و $x^2-y^2=1$ و $y=1$ در ربع اول است. (نه المان قائم - نه المان افقی - نه قطبی)



$u = x^2 - y^2 \qquad 0 \leq u \leq 1$

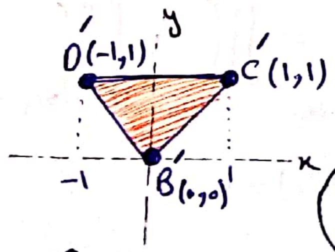
$v = xy \qquad 0 \leq v \leq 1$

Ex) مطلوب است $\iint_A e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$ روی



u فرض

v فرض



$u = x - y$

$v = x + y$

$(x,y) \rightarrow (u,v)$ نقاط

$(0,0) \rightarrow (0,0)$

$(1,0) \rightarrow (1,1)$

$(0,1) \rightarrow (-1,1)$

$$\iint_{\text{مثلث زرد رنگ}} e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du\, dv =$$

$$\frac{1}{\left|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right|} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[v e^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[ve - \frac{v}{e}\right] dv = \frac{e-\frac{1}{e}}{2}\int_0^1 v\, dv \quad \frac{1}{2}$$

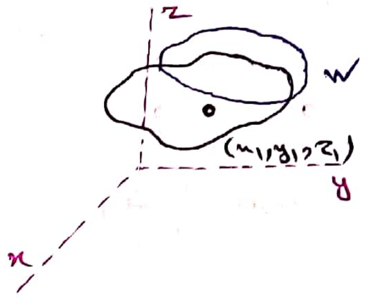
جواب $= \dfrac{e-\frac{1}{e}}{4}$

انتگرال سه گانه: فرض کنید $W \subseteq R^3$ و تابع $f(x,y,z)$ روی W تعریف شده است. به عنوان مثال فرض کنید که تابع f که تابع چگالی (یا تابع جرم حجمی) ظرفی باشد که این ظرف را با W نشان داده‌ایم.

$A \subseteq R^2$ ← $f(x,y)$ $\qquad$ $W \subseteq R^3$ ← $f(x,y,z)$

جرم جسم $\approx f(x,y,z) \times$ (حجم W)

$\rho = \frac{m}{v}$: $m = \rho v$



که مطابق آن داریم که (۱) جرم جسم $\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i) \times$ (حجم W_i) $\quad W = \bigcup W_i$, $(x_i,y_i,z_i) \in W_i$

در حالت حدی که حجم تمام W_i ها به سمت صفر میل کند اگر حاصل عبارت فوق به عددی مانند α همگرا شود، α جرم جسم W خواهد شد که آن را با $\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ یا $\iiint_W f\,dv$ نمایش می‌دهیم.

خواص انتگرال سه گانه:

① $\iiint_W (kf \pm g)\,dx\,dy\,dz = k\iiint_W f\,dx\,dy\,dz \pm \iiint_W g\,dx\,dy\,dz$

خطی بودن

بیانگر حجم (dv)

② $\forall (x,y,z) \in W$, $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \longrightarrow \iiint_W f\,dv \leq \iiint_W g\,dv$

③ $\iiint_W 1\,dv = W$ حجم

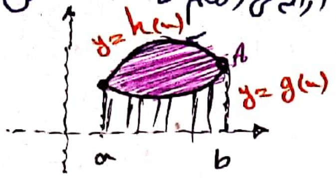
④ $\iiint_{W_1 \cup W_2} = \iiint_{W_1} + \iiint_{W_2}$

حجم$(W_1 \cap W_2) = 0$

همانطور که در بحث انتگرال دوگانه داریم برای محاسبه انتگرال‌های دوگانه از تفکیک فوبینی و انتگرال‌های مکرر استفاده شد. مشابه با آن تفکیک فوبینی را برای حالت انتگرال‌های سه گانه داریم که به صورت زیر قابل توصیف است.

- برای شناسایی $W \subseteq R^3$ می‌توان ابتدا W را بر روی یکی از صفحات مثلاً xy تصویر کرد که ناحیه تصویر آن یعنی A مشخص شود.

حال وقتی که مانند انتگرال‌های دوگانه ناحیه تغییرات برحسب ۳ متغیر (الان به کار می‌بریم افقی) را ارائه می‌دهیم که A مشخص شود. مثلاً



الان داریم:

$$a \leq x \leq b$$
$$g(x) \leq y \leq h(x)$$

یا

نهایتاً معادلات رویه‌های پایینی و بالایی بخش W را مشخص می‌کنیم (مثلاً $z=\phi(x,y)$ رویه پایینی و $z=\psi(x,y)$ رویه بالایی) و با این مرزها نیز بازه تغییرات z مشخص می‌شود:

$$W:\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \\ \phi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \end{cases}$$

ناحیه قائم صفحه تصویر

با الگوی فوق به ۶ روش مختلف می‌توان W را توصیف کرد که بسته به نوع مسئله و شکلی که ناحیه تصویر در یکی از صفحات مختصاتی پیدا می‌کند، بهترین روش را انتخاب می‌کنیم.

قضیه فوبینی در حالت ۳ متغیره: چنانچه W توصیفی به شکل فوق داشته باشد روش زیر را برای محاسبه انتگرال سه‌گانه ارائه می‌دهد:

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

یا به عنوان مثال دیگر

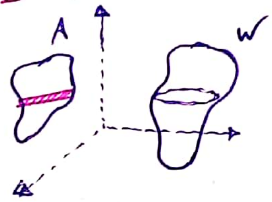
ناحیه تصویر xz و الان افقی بوده

$$c \leq z \leq d$$

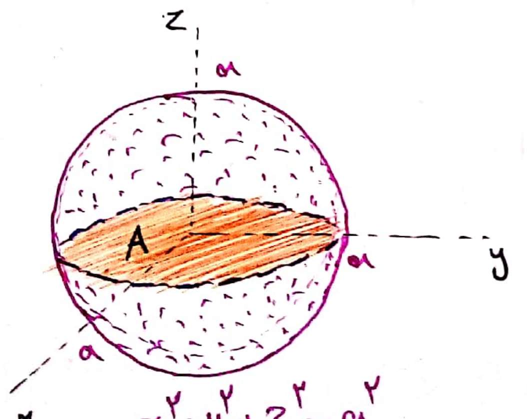
منحنی سمت چپ $\quad h_1(z) \leq x \leq h_2(z) \quad$ منحنی سمت راست

$$t_1(x,z) \leq y \leq t_2(x,z)$$

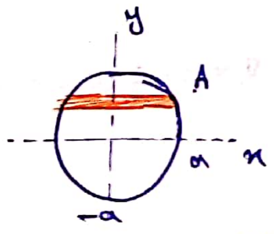
رویه سمت چپ — رویه سمت راست



Ex) حجم کره به شعاع a را به دست آورید.



$x^2+y^2+z^2=a^2$



$$-a \leq y \leq a$$
$$-\sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2}$$
$$-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$\text{حجم کره} = \iiint_W 1\,dV = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dx\,dy = \dots \rightarrow$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy \overset{\text{فرم قطبی}}{\underset{\text{مختصات}}{=}} \int_0^{2\pi}\int_0^{a} 2\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^{a} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

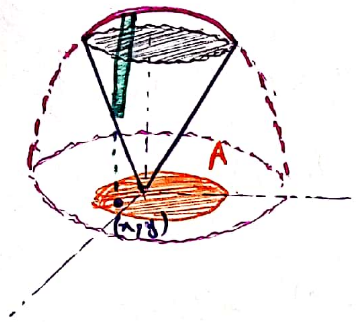
$u=\sqrt{a^2-r^2}$

$u^2=a^2-r^2$

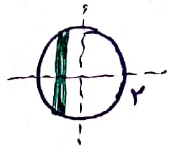
$u\,du=-r\,dr$

$$= 4\pi\int_0^{a} u^2\,du = 4\pi\,\frac{u^3}{3}\Big|_0^{a} = \frac{4\pi}{3}a^3$$

EX) مطلوبست محاسبه $\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz$ ؟ که در آن ناحیه W محصور درون کره $x^2+y^2+z^2=8$ و بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است.



$2(x^2+y^2)=8 \to x^2+y^2=4 \to$ دایره‌ای به شعاع ۲ به مرکز مبدأ ناحیه تصویر :



W: $-2\le x\le 2$

$-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$

مخروط $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{8-x^2-y^2}$

$$\to \iiint_W xy\,dv = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$$

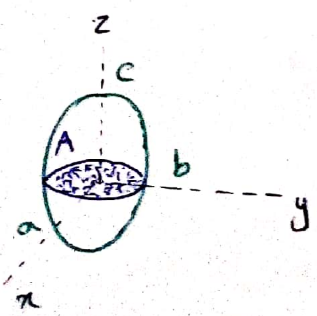
$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy\left(\sqrt{8-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy\,dx \overset{\text{فرم قطبی}}{\underset{\text{مختصات}}{=}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\cos\theta\, r\sin\theta\left(\sqrt{8-r^2}-r\right)r\,dr\,d\theta = \dots$$

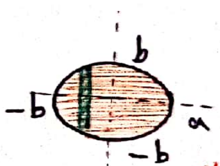
فصل: تغییر متغیر انتگرال ۳ گانه :

فرض کنید $W\subseteq R^3$ و توابع $u=u(x,y,z)$ و $v=v(x,y,z)$ و $t=t(x,y,z)$ توابعی با مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول موجود و پیوسته باشند. به علاوه در منطقه W تبدیل u,v,t توصیفی به صورت W' داشته باشد آنگاه

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} f\big(x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t)\big) \times \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}\right| du\,dv\,dt$$

EX) مطلوبست محاسبه حجم درون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.





$A: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

روش اول)

$$\text{حجم} = \iiint 1\, dx\,dy\,dz = \iiint \cdots\cdots$$

$$W: \begin{cases} -a \le x \le a \\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \end{cases}$$

روش دوم) تغییر متغیر

$$x = aX$$

$$X = \frac{x}{a},\quad Y = \frac{y}{b},\quad Z = \frac{z}{c} \longrightarrow X^2+Y^2+Z^2=1 \;،\; \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}\right| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$\iiint_W 1\, dx\,dy\,dz = \iiint_{X^2+Y^2+Z^2\le 1} 1\; abc\; dX\,dY\,dZ = abc \cdot \text{حجم کره واحد} = abc \cdot \frac{4\pi}{3}$$

Ex) مطلوبست محاسبه حجم درون رویه:

$$(\underbrace{x-y+2z}_{u})^2 + (\underbrace{2x-y+z}_{v})^2 + (\underbrace{x-4z}_{t})^2 = 1$$

$$u^2+v^2+t^2=1$$ کره واحد

$$\iiint_W 1\, dx\,dy\,dz = \iiint_{u^2+v^2+t^2\le 1} 1 \cdot \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}\right| du\,dv\,dt = \overset{\text{مثبت}}{\frac{1}{3}}\cdot\frac{4\pi}{3}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}\right| = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z)$$

تغییر مختصات به استوانه‌ای : اگر توصیف W در استوانه‌ای به صورت W' باشد آنگاه داریم:

$$\iiint_W f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

Ex) مثال مربوط به فضای بین مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و کره شعاع $\sqrt{8}$ حول مبدأ

تغییر مختصات به کروی :

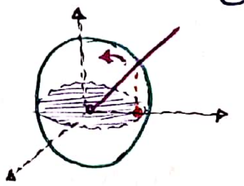
$$(x,y,z) \longrightarrow (\rho,\theta,\phi) \;،\; \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \rho^2\sin\phi$$

اگر توصیف W در مختصات کروی به صورت W' باشد آنگاه داریم:

$$\iiint_W f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

EX) حجم کره به شعاع a حول مبدأ را قبلاً با دیدگاه xyz بررسی کردیم همچنین در روند حل این مثال انتگرال دوگانه بر حسب x و y را به قطبی تبدیل کردیم در واقع مسئله با مختصات استوانه‌ای قبلاً حل شده است. حال اگر با مختصات کروی مسئله را حل کنیم داریم:

$$W: x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \quad , \quad \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq a \end{cases}$$



$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} 1 \, \underbrace{\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi}_{\text{ترتیب مهم است}} = \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a \times 2\pi \times \left[-\cos\phi\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}a^3$$

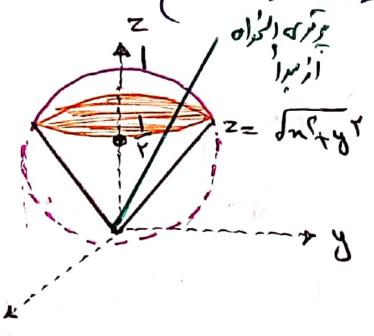
EX) فرض کنید W ناحیه درون کره $x^2+y^2+z^2=z$ و بالای $z=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد. مطلوبست محاسبه:

$$\iiint_W z \, dx\,dy\,dz = ?$$

$$x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

مرکز کره: $(0,0,\frac{1}{2})$



چنانچه بخواهیم برای این بخش از R^3 از مختصات xyz استفاده کنیم ابتدا باید معادلات مرزها و حدود را بدست آورد و پس با بردن حدها به دست آمده مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

اما اگر همین سؤال را با مختصات کروی بررسی کنیم می‌توان نوشت:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

معادله کره: $x^2+y^2+z^2=z \rightarrow \rho^2=\rho\cos\phi \rightarrow \rho=\cos\phi$

$0 \leq \rho \leq$ تا سطح کره $= \cos\phi$ که بر حسب متغیرها

$$\text{انتگرال} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\phi} \rho\cos\phi \, \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \cos^5\phi \, d\phi = \dots$$

(تذکر) شکل کلی توصیف یک بخش W در مختصات کروی به صورت زیر است:

$a \leq \phi \leq b$

$g_1(\phi) \leq \theta \leq g_2(\phi)$

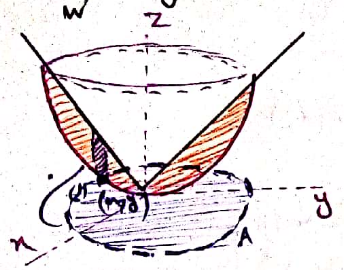
$h_1(\phi,\theta) \leq \rho \leq h_2(\phi,\theta)$

و تقریباً به عبارت دیگر به ترتیب xyz، ۴ روش مختلف W در مختصات کروی وجود دارد.

Ex) فرض کنید W ناحیه محصور بین $z=x^2+y^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد مطلوب است:

سهمی — مخروط بستنی دار

$$I=\iiint_W \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz=?$$



$$\left.\begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right\} \to z^2=z \to \begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \to x^2+y^2=1 \to \text{ناحیه تصویر} : x^2+y^2\le 1\end{array}$$

معادله ی برخورد

مختصات استوانه ای

$$\left.\begin{array}{l} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \end{array}\right\} \to \text{ناحیه تصویر}: x^2+y^2=1$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}\le z\le \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}$$

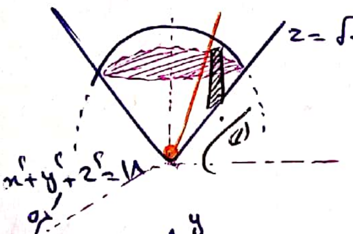
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{r}\frac{z}{r}\,r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^{r}\right)dr\,d\theta$$

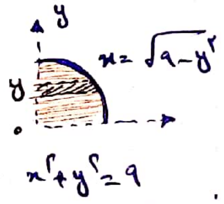
$$I=2\pi\int_0^1\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr=\dots$$

Ex) مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل

$$I=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy=?$$

* حدود را برعکس طی می‌کنیم با کمک انتگرال داده شده به ما





$$W:\begin{cases} 0\le y\le 3 \quad \text{المان افقی} \\ 0\le x\le\sqrt{9-y^2} \end{cases} \text{ناحیه تصویر} \qquad \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{رویه پایینی}}\le z\le\underbrace{\sqrt{18-x^2-y^2}}_{\text{رویه بالایی}}$$

$$\to \begin{array}{l} 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le\rho\le 3\sqrt{2}\end{array}$$

مختصات کروی

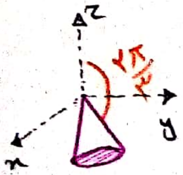
* ناحیه $\frac{1}{8}$ فضا مورد بحث می باشد

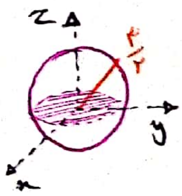
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{3\sqrt2}\rho^2\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{3\sqrt2}\rho^4\,d\rho\right)$$

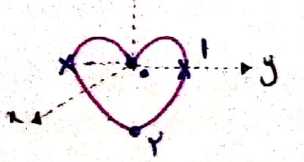
Ex) فرض کنید W بخشی از فضای R^3 باشد که درون مخروط $\phi=\frac{2\pi}{3}$ و درون رویه $\rho=1-\cos\phi$ و خارج کره $\rho=\frac{3}{2}$ قرار دارد. مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل

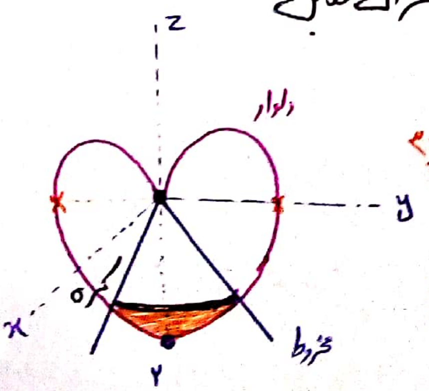
$$I=\iiint_W\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=?$$

شناسایی رویه ها : کره ای به شعاع $\frac{3}{2}$ ، مخروط بستنی دار $\phi=\frac{2\pi}{3}$







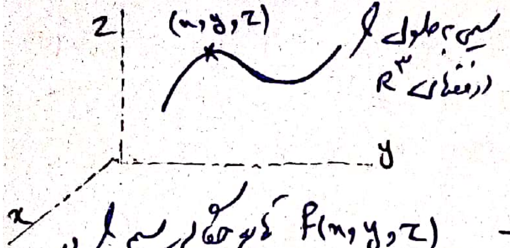


$$\frac{2\pi}{3}\le\phi\le\pi$$
$$0\le\theta\le 2\pi$$
$$\frac{3}{2}\le\rho\le 1-\cos\phi$$

$$I=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{1-\cos\phi}\rho\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

فصل جدید: انتگرال‌های خط (انتگرال روی منحنی):

ص ۲۸



$f(x,y,z)$ تابع چگالی سیم l در نقطه (x,y,z) $\longrightarrow$ جرم سیم $\approx f(x_1,y_1,z_1)\times$ (طول سیم l)

تعمیم

جرم سیم $\approx \sum f(x_i,y_i,z_i)\times$ (طول بخش l_i از سیم)

$l = l_1 \cup l_2 \dots \cup l_n$

$(x_i,y_i,z_i)\in l_i$

نهایتاً اگر طول تکه l_iها به صفر میل کند نتیجه می‌شود که جرم سیم l مشخص می‌شود که این حد را با $\int_C f(x,y,z)\,ds$ یا نماد $\int_C f(x,y,z)\,d\alpha$ (dr) نمایش می‌دهند و به آن انتگرال تابع f روی منحنی C گفته می‌شود که در آن منحنی C همان مسیری است که سیم l مشخص می‌کند.

(تعریف) اگر منحنی C یک منحنی هموار باشد و برای آن پارامتری $r(t)$ که $a\leq t\leq b$ داده شده باشیم و تابع f روی منحنی C تعریف شده باشد در این صورت:

$$\int_C f\,d\alpha=\int_a^b f(r(t))\,|r'(t)|\,dt$$

و اگر $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$، $a\leq t\leq b$ باشد:

$$\int_C f\,d\alpha=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

به علاوه انتخاب پارامتری برای منحنی C هیچ تأثیری در مقدار $\int_C f\,d\alpha$ ندارد.

Ex) فرض کنید منحنی C دارای پارامتری مقابل باشد

$r(t)=(t^2+1,\ 4t,\ 7-t)\ :\ 2\leq t\leq 5$

آنگاه مطلوبست محاسبه $\int_C xy^2z\,d\alpha$

$$\int_C f\,d\alpha=\int_2^5 (t^2+1)(16t^2)(7-t)\sqrt{4t^2+16+1}\,dt=\dots$$

Ex) منحنی C از برخورد رویه‌های $y=x^2$ و $z=x^3$ بدست آمده است از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ می‌باشد. مطلوبست محاسبه $\int_C f\,d\alpha=?$

$f(x,y,z)=y+xz$

$x=t\rightarrow r(t)=(t,t^2,t^3),\ 0\leq t\leq 1 \rightarrow \int_C f\,d\alpha=\int_0^1 (t^2+t\,t^3)\sqrt{1+4t^2+9t^4}\,dt=\dots$

$r'(t)=(1,2t,3t)$

* خواص انتگرال روی منحنی

(۱) $\int_c (kf \pm g)\,d\alpha = k\int_c f\,d\alpha \pm \int_c g\,d\alpha$

(۲) $\int_{c_1\cup c_2} f\,d\alpha = \int_{c_1} f\,d\alpha + \int_{c_2} f\,d\alpha$

(۳) $\int_c f\,d\alpha = \int_{-c} f\,d\alpha$ که $-c$ منحنی c است که در جهت عکس پیموده شده است $\longrightarrow$

نماد) اگر منحنی c یک منحنی بسته باشد از نماد $\oint_c f\,d\alpha$ نیز استفاده می‌شود.

توابعی که تا این لحظه انتگرال روی منحنی آنها را تعریف کردیم به صورت $f:R^2\to R$ و $f:R^3\to R$ هستند که چون برد آنها در اعداد حقیقی قرار دارد اصطلاحاً آنها را توابع اسکالر می‌نامیم.

تعریف) فرض کنید که $f:R^2\to R^2$ یا $f:R^2\to R^3$ یا $f:R^3\to R^3$ در این صورت به این توابع اصطلاحاً توابع برداری گفته می‌شود و در جلسات اولیه درس دیدیم که به هر یک از توابع نظیر f که در یک مؤلفه ظاهر می‌شود اصطلاحاً یک تابع مؤلفه‌ای می‌گویند. $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$ که هر یک از توابع مؤلفه‌ای یک تابع اسکالر است.

EX) $f(x,y)=(x+y,\ x-y)$ ، $f(x,y,z)=(x-y,\ 2z+y,\ 7x+2y)$

به توابع برداری گاهی اوقات میدان‌های برداری نیز گفته می‌شود اگر دامنه آنها S یک زیرمجموعه R^2 یا R^3 باشد.

تعریف) فرض کنید F یک میدان برداری بر R^2 یا R^3 باشد در این صورت میدان برداری F را یک میدان برداری پایستار (یا کنسرواتیو) می‌نامند هرگاه یک تابع اسکالر مانند $\phi:R^2\to R$ یا $\phi:R^3\to R$ یافت شود به طوریکه $F=\nabla\phi$ (به تابع ϕ تابع پتانسیل F نیز گفته می‌شود)

EX) $\phi(x,y,z)=x^2+yz \to \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (2x, z, y) \to$ میدان برداری: $f(x,y,z)=(2x,z,y)$ یک میدان برداری پایستار است.

EX) آیا میدان برداری $f(x,y)=(2y,2x)$ یک میدان برداری پایستار است؟ اگر میدان برداری پایستار باشد پس تابع اسکالر $\phi(x,y)$ وجود دارد که $(2y,2x)=F=\nabla\phi=\left(\underset{2y}{\underset{\parallel}{\frac{\partial\phi}{\partial x}}}, \underset{2x}{\underset{\parallel}{\frac{\partial\phi}{\partial y}}}\right)$ آنگاه

$\phi(x,y)=2xy+g(y)$

$\phi(x,y)=2xy+h(x)$

با توجه به روابط فوق نتیجه می‌شود که اگر $\phi(x,y)=2xy$ آنگاه ϕ تابع پتانسیل F است.

Ex) آیا میدان برداری $f(x,y)=(2y,-2x)$ پایستار است؟

$$F(x,y)=\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\to\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=2y \to \phi(x,y)=2xy+g(y) \to \frac{\partial\phi}{\partial y}=2x+g'(y)\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=-2x \to \quad =-2x\end{cases}$$

$g'(y)=-4x$ تناقض

در ادامه فصل خواهیم دید که همواره فرض می‌کنیم که تابع ϕ تمام مشتقات جزئی آن موجود و پیوسته باشند. با داشتن این فرض پاسخ به سوال فوق ساده‌تر خواهد بود. زیرا:

$$\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=2y\to\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}=2\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=-2x\to\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}=-2\end{cases}\qquad 2\neq-2$$

ولذا رابطه فوق نشان می‌دهد میدان برداری مطرح شده پایستار نیست

یادآوری

$F \leftarrow F=\nabla\phi$ تابع پتانسیل

میدان برداری پایستار F تابع

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$f(x)=F'(x)$

تابع تحت انتگرال

میدان برداری F را یک میدان برداری هموار گویند هرگاه مشتقات جزئی تمام مرتبه‌های آن موجود و پیوسته باشند.

تذکر) اگر $f:R^2\to R^2$ یک میدان برداری هموار باشد یعنی مثلاً $f(x,y)=(g(x,y),h(x,y))$ که در آن تمام توابع مولفه‌ای آن دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند آنگاه می‌توان شرط پایستاری را به صورت زیر مورد بررسی قرار داد:

میدان برداری پایستار $F\to\exists\phi\;;\;F=\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\to$

$$\begin{cases}g=\frac{\partial\phi}{\partial x}\to\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}\\ h=\frac{\partial\phi}{\partial y}\to\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\end{cases}$$

اما با توجه به فرضیات نتیجه می‌شود که $\left(\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial x}\right)$ $\Longleftarrow$

پایستار $F:R^2\to R^2\to\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial x}$

$F=(g,h)$

توجه کنید که شرط فوق یک شرط لازم برای پایستاری است.

با استدلال مشابه اگر $F: R^3 \to R^3$ یک میدان برداری هموار باشد یعنی $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

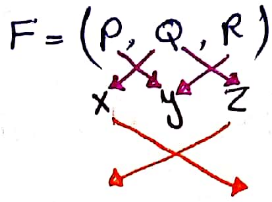
و بدانیم که F یک میدان برداری پایستار است یعنی $F = \nabla \phi$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$P = \frac{\delta \phi}{\delta x} \longrightarrow \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$$

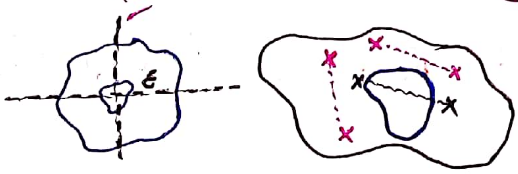
$$Q = \frac{\delta \phi}{\delta y} \longrightarrow \frac{\delta P}{\delta z} = \frac{\delta R}{\delta x}$$

$$R = \frac{\delta \phi}{\delta z} \longrightarrow \frac{\delta Q}{\delta z} = \frac{\delta R}{\delta y}$$

* شرایط لازم پایستار بودن F



تذکر) ثابت می‌شود که اگر F یک میدان برداری هموار باشد به طوری که دامنه F حفره نداشته باشد در این صورت شرایط لازم فوق شرایط لازم و کافی خواهند بود.

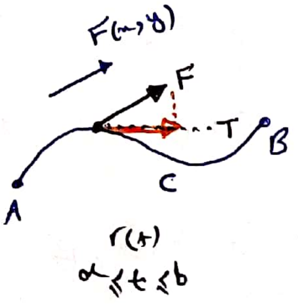


انتگرال یک میدان برداری بر یک منحنی

فرض کنید که F یک میدان برداری باشد و C یک منحنی است در این صورت مقدار کار انجام شده توسط F در جابجایی یک ذره از نقطه A تا نقطه B روی منحنی C انجام می‌شود را انتگرال F بر منحنی C می‌نامند و به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt$$

که در آن $r(t)$ که $a \leq t \leq b$ یک پارامتری منحنی C از نقطه A به B می‌باشد



اثبات و تحلیل رابطه فوق:

$$\int_C F \cdot T \, d\alpha = \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\cancel{|r'(t)|}} \cancel{|r'(t)|} \, dt$$

تذکر) پارامتری منحنی هیچ تأثیری بر مقدار انتگرال فوق ندارد. اما در وضعیت جدید اگر به جای منحنی C از منحنی $-C$ استفاده کنیم حاصل در یک منفی ضرب می‌شود:

$$\int_{-C} F \cdot T \, d\alpha = -\int_C F \cdot T \, d\alpha$$

Ex) میزان کار انجام شده توسط $F(x,y,z) = (x^2, yz, x+y)$ در جابجایی ذره‌ای بر منحنی C با پارامتری $r(t) = (2t+1, 3, 3t^2)$ ، $0 \leq t \leq 1$ را بدست آورید.

$$\int_C F.T\,d\alpha = \int_a^b F(r(t)).r'(t)\,dt = \int_0^1 \left((2t+1)^2, 12t^2, 4t+5\right).(2, 0, 6t)\,dt =$$

$$\int_0^1 \left(2(2t+1)^2 + 6t(4t+5)\right)dt = ✓$$

تذکر) مقدار تابع اسکالری که برای انتگرال یک میدان برداری $F(x,y,z)=\left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right)$ بر منحنی C ارائه می‌شود به صورت زیر است:

$$\int_C F.d\alpha = \int_a^b F(r(t)).r'(t)\,dt = \int_a^b \left(P(r(t)), Q(r(t)), R(r(t))\right).\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)dt =$$

که در آن $r(t)=\left(x(t), y(t), z(t)\right)$

$$\int_a^b \left(P(r(t))\,x'(t) + Q(r(t))\,y'(t) + R(r(t)).z'(t)\right)dt$$

لذا رابطه فوق را به صورت مختصر نیز نشان می‌دهند:

$$* \quad \boxed{\int_C F.d\alpha = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$$

Ex) مطلوبست محاسبه $\int_C 2xz\,dx + x^2y\,dy + xz\,dz$ بر منحنی C که $r(t)=(t^2, 3t+1, 4t)$ ، $0\le t\le 2$

$$F(x,y,z)=(2xz, x^2y, xz) \longrightarrow \text{حاصل انتگرال} = \int_0^2 2t^2\,4t\,\underbrace{d(t^2)}_{2t\,dt} + t^4\,(3t+1)\,\underbrace{d(3t+1)}_{3\,dt} + 4t^3\,\underbrace{d(4t)}_{4\,dt}$$

هر جا x y z بود به جایش t بگذارید

$$= \int_0^2 \left(16t^4 + 3t^4(3t+1) + 16t^3\right)dt = ✓$$

تعریف) فرض کنید که F یک میدان برداری هموار بر منحنی C باشد در این صورت موارد زیر معادل اند:

۱) F یک میدان برداری پایستار است.

۲) $\int_C F.T\,d\alpha$ مستقل از مسیر منحنی C بوده و صرفاً به نقطه شروع و پایان منحنی C وابسته است.

۳) $\oint_C F.T\,d\alpha = 0$ یعنی انتگرال بر هر منحنی بسته برابر با صفر است.

میدان برداری پایستار : $F=\nabla\phi \iff \forall$ منحنی بسته c ; $\oint_c F.T\,d\alpha=0 \iff \int_c F.T\,d\alpha=\phi(B)-\phi(A)$

که در آن منحنی c از نقطه A به نقطه B رسم شده است

یادآوری ← قضیه اساسی حسابان : $F'(x)=f(x) \to \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

حالا $F=\nabla\phi \longrightarrow \int_c F.T\,d\alpha=\phi(B)-\phi(A)$

مستقل از مسیر

Ex) میدان برداری $f(x,y,z)=(e^x\cos y+yz \,,\, xz-e^x\sin y \,,\, xy+z)$ را در نظر بگیرید مطلوبست محاسبه $\int_c F.T\,d\alpha$ که در آن منحنی c دارای پارامتری زیر است

$r(t)=(t^3+2t \,,\, 3t^5 \,,\, t^2-t)$

$0\leq t\leq 1$

و از نقطه $(0,0,0)$ تا $(3,3,0)$ رسم شده است.

روش اول

$$\int_0^1 \left(e^{t^3+2t}\cos(3t^5)+3t^5(t^2-t) \,,\, \ldots\ldots\right)\cdot\left(3t^2+2 \,,\, 15t^4 \,,\, \ldots\right)dt$$

با توجه به عبارت فوق می‌بینیم که روش مستقیم محاسبه این انتگرال محاسبات بسیار سختی دارد و بعید است که بتوان جواب آن را به راحتی بدست آورد (مثلاً e^{t^3+2t} وجود دارد در انتگرال)

روش دوم

پس از قضیه قبل کمک می‌گیریم یعنی پایستار بودن F را بررسی می‌کنیم و در این صورت اگر F پایستار باشد مسیر منحنی c هیچ تاثیری در مقدار انتگرال ندارد :

بررسی پایستار بودن

$(e^x\cos y+yz \,,\, xz-e^x\sin y \,,\, xy+z)$

$(x \,,\, y \,,\, z)$

$\longrightarrow -e^x\sin y+z=z-e^x\sin y$

$x=x$

$y=y$

پس شرایط لازم پایستار بودن برقرار است و چون دامنه F حفره‌ای ندارد پس میدان برداری پایستار خواهد شد حال می‌بایست تابع پتانسیل F را بدست آوریم :

$F=\nabla\phi$

$\frac{\delta\phi}{\delta x}=e^x\cos y+yz \longrightarrow \phi(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+g(y,z)$ رابطه (1)

$\frac{\delta\phi}{\delta y}=xz-e^x\sin y$

$\frac{\delta\phi}{\delta z}=xy+z$

① با توجه به رابطه $\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y \to \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

$\to g(y,z) = h(z)$

① $\phi(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + h(z) \to \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 + xy + h'(z) = xy + z \to h'(z) = z$

$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$

$\phi(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$ ✓

(بهترین آزمون برای صحت جواب این است که $F = \nabla\phi$ را کنترل کنیم)

F پایستار

$\int_C F\cdot T\, d\alpha = \phi(\text{انتها}) - \phi(\text{ابتدا}) = \phi(3,4,0) - \phi(0,0,0) = \dots$ ✓

Ex) در مثال فوق مطلوبست $\int_C F\cdot T\, d\alpha$ زمانیکه منحنی C، $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 2)$، $0 \le t \le \pi$

چون منحنی C بسته است و F پایستار $\to$ جواب = صفر

Ex) فرض کنید منحنی C منحنی $4x^2 + y^2 = 4$ در صفحه xy باشد که در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) در نظر گرفته شده است مطلوبست محاسبه:

$$\int_C \underbrace{(e^x \sin y + 3y)}_{M} dx + \underbrace{(e^x \cos y + 2x - 2y)}_{N} dy$$

$f(x,y) = (e^x \sin y + 3y,\ e^x \cos y + 2x - 2y)$ ،

(M, N)

(x, y)

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y + \cancel{3} \to 2+1$

$\frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y + 2$

دریک واحد اضافه دارد که آن را جدا می‌کنیم

حل بازنویسی

$$I = \int (e^x \sin y + 2y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy + \int_C y\, dx = \int_0^{2\pi} 2\sin\theta\, d(\cos\theta) = \checkmark$$

$-\sin\theta\, d\theta$

صفر می‌شود زیرا میدان برداری پایستار + منحنی بسته است

گرین؟

پارامتریک: $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1 \to r(\theta) = (\cos\theta, 2\sin\theta)$

$0 \le \theta \le 2\pi$

تمرین) مقادیر A و B را چنان بیابید که میدان برداری زیر پایستار باشد و سپس $\oint_C F\cdot d\alpha$ را محاسبه کنید در هر کدام:

الف) $r(t)=(\cos t, \sin t, \sin^2 t)$; $0\leq t\leq 2\pi$

ب) منحنی C منحنی حاصل از برخورد $z=x^2+4y^2$ و صفحه $z=3x-2y$ که از نقطه $(0,0,0)$ تا $(2,\frac{1}{2},1)$ رسم شده است:

$$F(x,y,z)=\left(Ax\sin(\pi y)\right)i+\left(x^2\cos(\pi y)+Bye^{-z}\right)j+y^2e^{-z}k$$

تعریف) میدان برداری $F(x,y,z)=\left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right)$ را در نظر بگیرید در این صورت دیورژانس F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div} F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

اسکالر می‌باشد

و کرل F به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl} F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

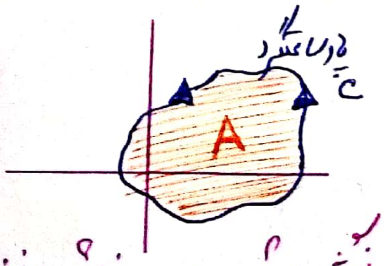
if : میدان F $\longrightarrow$ $\operatorname{curl} F=0$

شرط برگشت‌پذیری: بردار پایستار باشد $\longleftarrow$ $\operatorname{curl} F=0$ + (دامنه F حفره نداشته باشد)

تعریف) منحنی C را یک منحنی هموار می‌نامیم هرگاه بردار سرعت آن به صورت پیوسته تغییر کند و به علاوه همواره مخالف صفر باشد.

قضیه گرین: فرض کنید که C یک منحنی ساده (منحنی C خودش را قطع نکند مگر در نقاط انتهایی)، هموار و بسته باشد.

به علاوه فرض کنید که $F(x,y)=\left(M(x,y), N(x,y)\right)$ یک میدان برداری هموار باشد یعنی مشتقات جزئی M و N موجود و پیوسته باشند. در این صورت اگر A ناحیه محصور درون منحنی C باشد و به علاوه منحنی C را در جهت مثلثاتی در نظر بگیریم داریم:

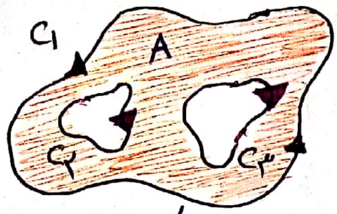


$$\oint_C F\cdot T\,dr=\oint M\,dx+N\,dy=\iint_A\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$\left(M_x \; N_y\right)$

تعیین جهت: انگشت شست در جهت خلاف منفی
چرخش چهار انگشت جهت سطح A

(تذکر) اینجا توجه کنید که ممکن است منحنی C از چند منحنی بسته تشکیل شده باشد



و در این صورت با توجه به قرارداد جهت مثبت می‌بینیم که: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

داخلی‌ها ساعتگرد
بیرونی‌ها پادساعتگرد

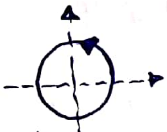
$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3} = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(EX) مطلوب است محاسبه عبارت مقابل

$$\oint_C (\overbrace{3y + e^{\sin x^3}}^{M})\,dx + (\overbrace{5x - e^{\cos(y^2)}}^{N})\,dy$$

زمانیکه منحنی C دایره $x^2+y^2=4$ در جهت مثبت است.

(روش اول)



دایره‌ای به شعاع ۲ جهت مثلثاتی است → پارامتری منحنی C:

$r(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ → جواب $= \int_0^{2\pi} \left(6\sin t + e^{\sin(2\cos t)^3}\right) d\,2\cos t + \dots$

وقت‌گیر و غیر قابل حل

(روش دوم) قضیه گرین → جواب $= \iint_{x^2+y^2\le 4} 5-3\,dx\,dy = 2\times 4\pi = 8\pi$

(EX) صحت قضیه گرین را برای $F(x,y) = (x^2+y^2, 2x)$ بررسی کنید زمانیکه منحنی C دایره به شعاع ۲ حول مبدأ و در جهت مثلثاتی باشد.

$r(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

برای پاسخ به این سؤال باید هر دو طرف قضیه گرین را به طور مستقل حساب کنیم و برابری طرفین را مشاهده می‌کنیم:

(1)

$$\oint_C (x^2+y^2)\,dx + 2x\,dy = \int_0^{2\pi} 4\,\underbrace{d(2\cos t)}_{-2\sin t\,dt} + 4\cos t\,\underbrace{d(2\sin t)}_{2\cos t\,dt} = \int_0^{2\pi} \left(-8\sin t + 8\cos^2 t\right) dt$$

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

x و y هر دو متغیرند و وابسته به t

$$= 8\cos t\Big|_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\,dt = 0 + 4\times 2\pi + 4\times \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

(2)

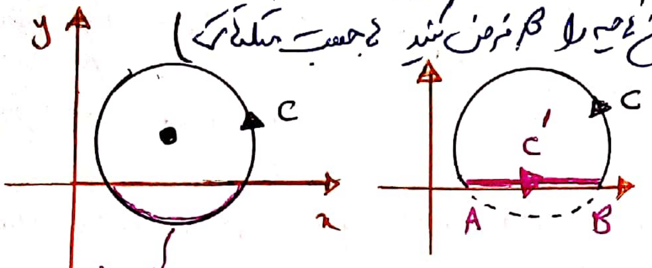
$$\iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 4} (2-2y)\,dx\,dy = 2\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy = 8\pi$$

تابع فرد و ناحیه متقارن ← صفر می‌شود

تمرین) صحت قضیه گرین را برای $F(x,y) = (x-y, x+y)$ بررسی کنید هرگاه C دایره واحد در جهت مثلثاتی باشد.

تذکر) گاهی اوقات ممکن است در یک مسئله یک منحنی بسته نداشته باشیم ولی بتوان با اضافه کردن یک منحنی جدید به منحنی قبلی به یک منحنی بسته با شرایط قضیه گرین رسید و در چنین مواردی می‌توان از محاسبات قضیه گرین برای محاسبه انتگرال استفاده کرد.

Ex) مطلوبست محاسبه عبارت مقابل $\int_C \overset{M}{(2y+x^3)}\,dx + \overset{N}{(5x+e^{\sin(y^4)})}\,dy$ که در آن C بخشی از منحنی ← $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ است که بالای محور xها قرار دارد (مساحت این ناحیه را β فرض کنید) (جهت مثلثاتی)



$C_0 = C \cup C'$

یک منحنی بسته است

که مستقیما حل نمی‌شود

$$\oint_{C_0} M\,dx + N\,dy = \int_C + \int_{C'} = \iint_A \left(\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}\right) dx\,dy = 3\iint_A dx\,dy = 3\beta$$

نهایتاً $\int_{C'} M\,dx + N\,dy$ را محاسبه می‌کنیم:

$C' : r(x) = (x, 0)$

نقطه برخورد دایره با محور xها در سمت چپ $\leqslant x \leqslant$ نقطه برخورد در سمت راست $\longrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3$

$(x-2)^2 + 1 = 2$

$x - 2 = \pm 1 \rightarrow x = 1$ یا 3

$$\int_{C'} M\,dx + N\,dy = \int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \alpha \longrightarrow$$ باشد

جواب سؤال: $3\beta - \alpha$

Ex) فرض کنید که C یک منحنی ساده و بسته و هموار در صفحه xy با جهت مثلثاتی باشد. به طوری که C از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند. مطلوبست محاسبه عبارت مقابل:

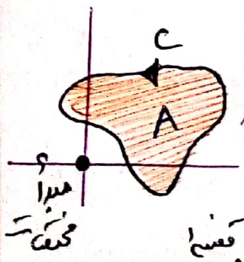
$$\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \oint_{C} \overset{M}{\frac{-y}{x^2+y^2}}\,dx + \overset{N}{\frac{x}{x^2+y^2}}\,dy$$

$F(x,y) = (M, N)$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$(0,0) \notin A$

حالت اول) مبدأ مختصات درون منحنی C قرار نداشته باشد (چون در این ناحیه F تعریف نشده باشد) ← قضیه گرین را می‌توان به کار برد / قابل استفاده می‌باشد



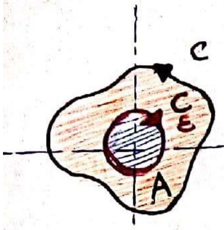
قضیه گرین

برابرند

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_A \left(\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}\right) dx\,dy =$$ صفر می‌شود

$$\frac{\delta N}{\delta x} = \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = \frac{x^2+y^2 - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ✓ \quad \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{-(x^2+y^2) - (-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$



حالت دوم) اگر مبدأ درون ناحیه A واقع شود $((0,0)\in A)$

با توجه به اینکه میدان برداری در ناحیه A پیوسته نیست پس شرایط قضیه گرین برقرار نمی‌باشد و در شکل فعلی نمی‌توان از قضیه گرین استفاده کرد:

با توجه به اینکه مبدأ درون منحنی C است پس می‌توان دایره‌ای مانند C_ε به شعاع ε حول مبدأ رسم کنیم که با C برخورد نداشته باشد و جهت آن را ساعتگرد می‌گیریم. حال ناحیه B را بین دو منحنی C و C_ε در نظر بگیرید برای این ناحیه به وضوح F هموار است.

$$\oint_{C\cup C_\varepsilon} M\,dx + N\,dy = \iint_B \left(\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}\right) dx\,dy = 0$$

$$\oint_C + \oint_{C_\varepsilon} = 0 \qquad \oint_C = -\oint_{C_\varepsilon} F\cdot T\,dr = \oint_{-C_\varepsilon} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = ?$$

، $r(t) = (\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t)$ ، $0 \le t \le 2\pi$

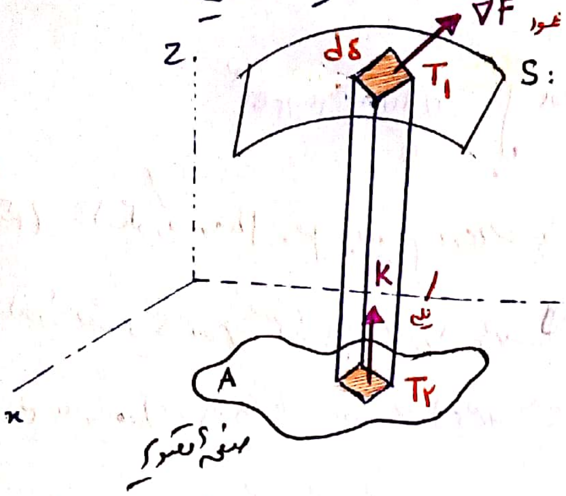
که دایره‌ای به شعاع ε حول مبدأ با جهت مثلثاتی

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon\sin t}{\varepsilon^2}\, \underbrace{d(\varepsilon\cos t)}_{-\varepsilon\sin t\,dt} + \frac{\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\, \underbrace{d(\varepsilon\sin t)}_{\varepsilon\cos t\,dt} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}\,dt = 2\pi$$

تذکر) قبلاً دیدیم که F پایستار $\longrightarrow$ $\operatorname{curl} F = 0$ در شکل فوق در حالت دوم می‌بینیم که $\operatorname{curl} F = 0$ اما F پایستار باشد بنابر قضیه $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$ در حالیکه دیدیم جواب برابر با 2π است و این نشان می‌دهد که صفر شدن $\operatorname{curl} F$ لزوماً به معنای پایستار بودن F نیست.

انتگرال رویه‌ای و مساحت رویه‌ای: فرض کنید که S یک رویه باشد که در فضای R^3 قرار دارد و که تابع $g(x,y,z)$ تابعی است که روی S تعریف شده است. به عنوان یک مثال می‌توان S را یک سقف گنبد با ضخامت ناچیز در نظر گرفت و فرض کنید که تابع $g(x,y,z)$ تابع چگالی سقف در نقطه $(x,y,z)\in S$ باشد. قصد داریم جرم سقف را به دست آوریم:

حتی در وضعیت ساده‌تر اگر فرض کنیم که $g(x,y,z)=1$ در این صورت مسئله به محاسبه رویه S تبدیل می‌شود.



برای محاسبه مساحت رویه S معادله آن یعنی $F(x,y,z)=0$ را در نظر می‌گیریم و پس یک المان سطح رویه‌ای موسوم به ds را انتخاب می‌کنیم (T_1) حال واضح است که تصویر المان سطح بر روی یک صفحه مختصات (مثلاً xy) یک المان سطح مانند dA خواهد شد و می‌دانیم که

$$\underset{\text{مساحت}}{T_1} \cdot \cos\theta = \underset{\text{مساحت}}{T_2}$$

$$ds = \frac{1}{|\cos\theta|} dA$$

قدر مطلق $|\nabla f \cdot k| = |\nabla f|\,\underbrace{|k|}_{1}\,|\cos\theta|$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|}$$

دیفرانسیل سطح رویه‌ای

در نتیجه داریم:

$$ds = \frac{|\nabla f|}{\underbrace{|\nabla f \cdot k|}_{\neq 0}} dx\,dy$$

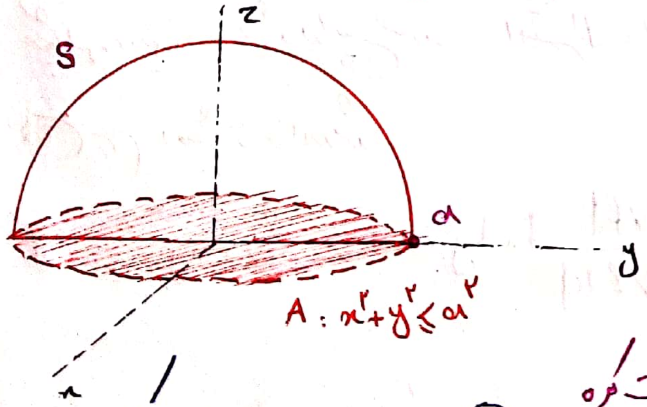
اگر تصویر روی صفحه xy باشد توجه کنید که از فرآیند بالا هنگامی می‌توان ... زمانی می‌توان از تصویر روی صفحه xy استفاده کرد که $\nabla f \cdot k \neq 0$.

اگر تصویر روی صفحه xz باشد

$$ds = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot j|} dx\,dz$$

$$\text{مساحت رویه } S = \iint_S ds = \iint_A \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dx\,dy$$

Ex) مطلوب است محاسبه مساحت جانبی یک کره به شعاع a



$$S: F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

$$\nabla f = (2x\ \ 2y\ \ 2z)$$

$$\text{مساحت کره} = 2\iint_S 1\, ds = 2\iint_A \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dx\,dy$$

$$\text{مساحت کره} = 2\iint_{x^2+y^2\leq a^2} \frac{\overbrace{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}^{=2a}}{\underbrace{|2z|}_{\neq 0}} dx\,dy$$

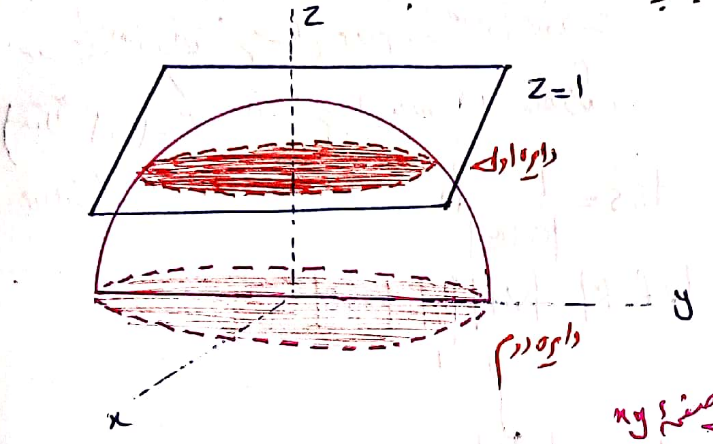
$$2z = 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

x و y در معادله صدق می‌کنند پس هر جا z داشتیم می‌توان مقدارش را از معادله رویه به دست آورد.

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{2ar\,dr\,d\theta}{2\sqrt{a^2-r^2}} = 4\pi a\int_0^{a}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \longrightarrow u=\sqrt{a^2-r^2} \to u^2=a^2-r^2 \longrightarrow 2u\,du=-2r\,dr$$

$$\text{جواب} = 4\pi a\int_0^{a} -\frac{u\,du}{u} = 4\pi a^2$$

تذکر) همانطور که در مثال قبل دیدیم در محاسبات انتگرال رویه‌ای اگر تصویر روی صفحه xy باشد انتگرال دوگانه حاصل بر ناحیه تصویر S روی صفحه xy یعنی A برحسب x,y می‌باشد و چنانچه z ای در معادله وجود داشت می‌توان با کمک معادله رویه یعنی $F(x,y,z)=0$ مقدار z را برحسب x و y جایگزین کرد.



$S: f(x,y,z)=0 \to S: x^2+y^2+z^2-4=0 \quad 0\leq z\leq 1$

$\nabla f=(2x,2y,2z)$

$\nabla f\cdot k\neq 0 \longrightarrow$ تصویر روی صفحه xy مجاز می‌باشد

ناحیه تصویر روی صفحه xy : $3\leq x^2+y^2\leq 4$

$\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2=3$ معادله دایره اول

$$\text{مساحت جانبی} = \iint_S ds = \iint_{3\leq x^2+y^2\leq 4}\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot k|}\,dx\,dy = \iint_{3\leq x^2+y^2\leq 4}\frac{\overbrace{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}^{=4}}{\underbrace{|2z|}_{=2z=2\sqrt{4-x^2-y^2}}}\,dx\,dy$$

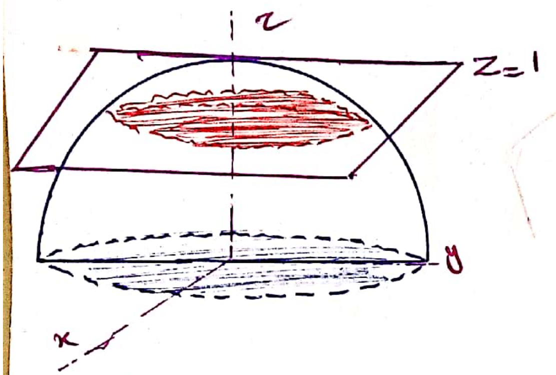
$$\text{مساحت جانبی} = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\frac{4}{2\sqrt{4-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = \dots$$

تعریف) اگر روی رویه S یک تابع $g(x,y,z)$ را به عنوان تابعی روی رویه S داشته باشیم مثلاً تابع $g(x,y,z)$ تابع چگالی رویه S باشد در این صورت انتگرال رویه‌ای g بر رویه S به صورت زیر قابل محاسبه است که در این مثال همان جرم رویه S خواهد شد.

$$\text{انتگرال رویه‌ای } g \text{ بر رویه } S = \iint_S g(x,y,z)\,ds = \iint_A g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot k|}\,dx\,dy$$: اگر تصویر بر xy باشد

EX) مطلوبست محاسبه جرم سطحی که از برخورد $z=1$ با کره $x^2+y^2+z^2=4$ مطابق شکل زیر :

بدست می‌آید اگر تابع چگالی این سقف $g(x,y,z)=x^2+y^2+5z^2$ باشد

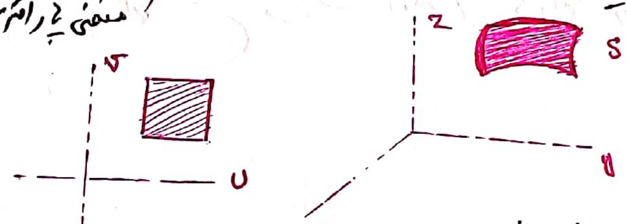


$$\text{جرم سقف} = \iint_S g\,dS = \iint_{3\le x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2+5\underbrace{z^2}_{4-x^2-y^2}) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot k|}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{3\le x^2+y^2\le 4} \left(20-4(x^2+y^2)\right) \frac{4}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2} (20-4r^2)\frac{4}{2\underbrace{\sqrt{4-r^2}}_{u}}\,r\,dr\,d\theta = \cdots$$

$u=\sqrt{4-r^2} \rightarrow u^2=4-r^2 \rightarrow 2u\,du=-2r\,dr$

رویه‌ی پارامتری: یک تابع پیوسته‌ای مانند $r(u,v)$ را به شکل $r(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k}$ ارائه شده است اصطلاحاً یک رویه‌ی پارامتری می‌گوییم که در آن تغییرات مجاز برای u و v در نظر می‌گیریم (مقایسه کنید با تعریف منحنی پارامتری)



$s: r(u,v) : (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

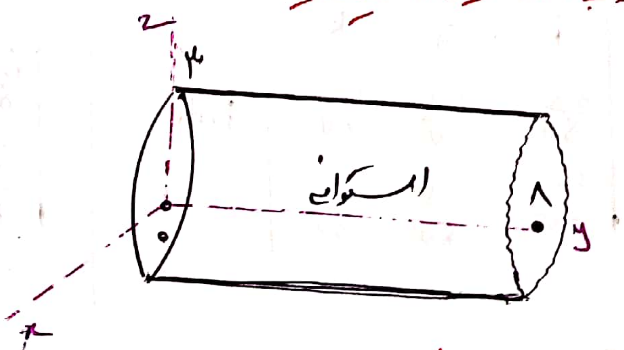
رویه‌ی $z=f(x,y)$ را می‌توان به صورت زیر یک رویه‌ی پارامتری در نظر گرفت: $r(u,v)=u\,i+v\,j+f(u,v)\,k$

Ex) رویه‌ی پارامتری زیر را توصیف کنید.

$r(u,v)=3\cos u\, i+2v\, j+3\sin u\, k$

$0\le v\le 4$ ، $0\le u\le 2\pi$ که در آن

$x(u,v)=3\cos u$
$y(u,v)=2v$
$z(u,v)=3\sin u$
$\longrightarrow x^2+z^2=9,\ 0\le y\le 8 \longrightarrow$



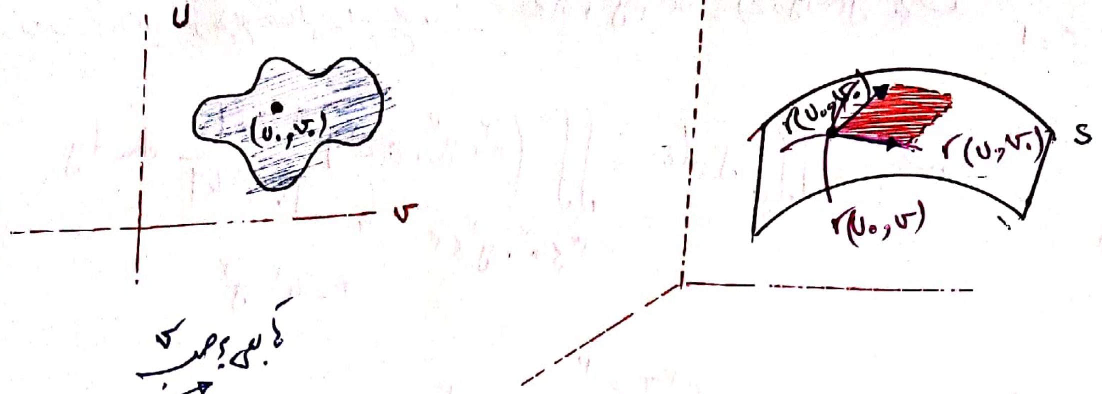
Ex) رویه‌ی زیر را توصیف کنید.

$r(u,v)=a\sin v\cos u\, i+a\sin v\sin u\, j+a\cos v\, k$

$a>0$ ، $0\le v\le \frac{\pi}{2}$ ، $0\le u\le 2\pi$ که در آن

$x^2+y^2+z^2=a^2 \longrightarrow$ بخشی از کره به شعاع a است

$z=a\cos v\ge 0 \longrightarrow$ نیم‌کره‌ی بالایی



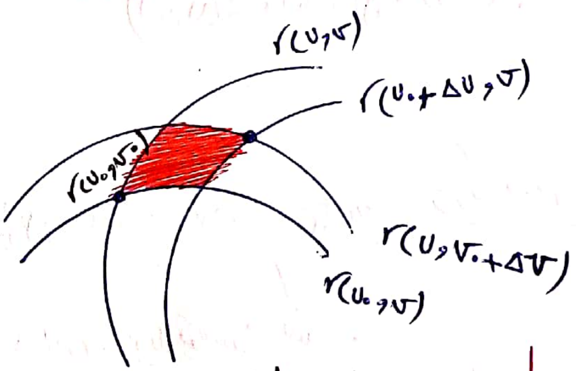
تابعی برحسب v

$$g(v)=r(u_0,v)=\big(x(u_0,v),\ y(u_0,v),\ z(u_0,v)\big) \rightarrow$$ یک منحنی پارامتری است

$$g'(v_0)=\frac{\partial r}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}$$

$$h(u)=r(u,v_0) \rightarrow$$ یک منحنی پارامتری دیگر است : $$h'(u_0)=\frac{\partial r}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}$$

در این صورت المان مساحت رویه‌ای S را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم : $$dS=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$$



$$dS=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} du\,dv=\left|\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}k\right|\times du\,dv$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\ du\,dv$$

توجه داشته باشید که $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}$ در واقع همان بردار نرمال صفحه مماس $r(u,v)$ است و نقش بردار عمود بر سطح رویه S را بازی می‌کند.

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\hat{i}+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\hat{j}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\hat{k}$$

برای محاسبه‌ی مساحت رویه‌ای در رویه‌ی پارامتری $r(u,v)$ که $(u,v)\in A$ مطابق بخش‌های فوق داریم:

$$S_{\text{مساحت رویه‌ی}} = \iint_S dS = \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv$$

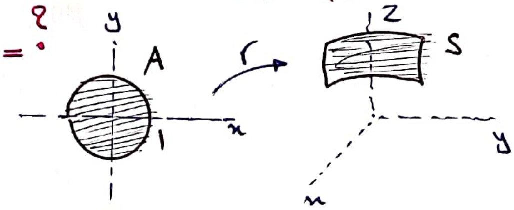
و اگر انتگرال رویه‌ای g بر S را بخواهیم:

$$\iint_S g\, dS = \iint_A g(x,y,z) \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

Ex) رویه‌ی پارامتری S به صورت مقابل باشد. مطلوب است:

$$\left| \begin{array}{l} r(u,v) = (2uv\,,\ u^2-v^2\,,\ u^2+v^2) \\ u^2+v^2 \le 1 \end{array}\right.$$

$$\iint_A (x^2+y^2)\, dS = ?$$



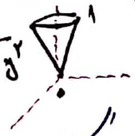
$8uv = 4uv+4uv$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -4v^2-4u^2 \quad,\quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 4v^2-4u^2 \quad,\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{vmatrix}$$

$$dS = \sqrt{16(u^2+v^2)^2 + 16(v^2-u^2)^2 + 64u^2v^2}\, du\,dv = 4\sqrt{2(u^4+v^4+2u^2v^2)}\, du\,dv = 4\sqrt{2}\,(u^2+v^2)\, du\,dv$$

$$\iint_S (x^2+y^2)\, dS = \iint_{u^2+v^2\le 1} \left(4u^2v^2 + (u^2-v^2)^2\right) 4\sqrt{2}\,(u^2+v^2)\, du\,dv = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 4\sqrt{2}\, r^6\, r\, dr\, d\theta = 4\sqrt{2} \times 2\pi \times \frac{r^8}{8}\Big|_0^1 = \pi\sqrt{2}$$

تمرین) در مثال قبل به راحتی می‌توان دید که رابطه‌ی مقابل $(u^2+v^2)^2 = (u^2-v^2)^2 + (2uv)^2$ مفروض است و لذا می‌بینیم این رویه‌ی پارامتری روی $z^2 = x^2+y^2$ قرار دارد و به علاوه $z = u^2+v^2 \le 1$. لذا S



$z = \sqrt{x^2+y^2}$

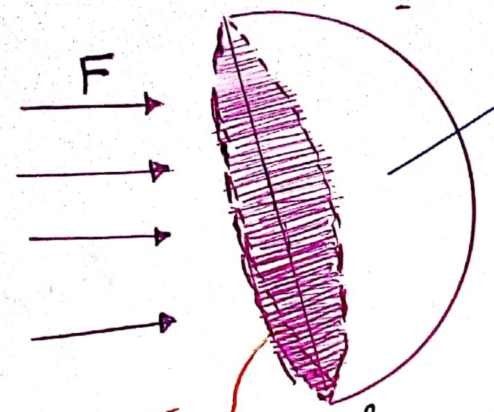
حال $\iint_S (x^2+y^2)\, dS$ مورد سؤال است. به عنوان تمرین به کمک روش ابتدای جلسه مقدار این انتگرال رویه‌ای را بیابید

$$\iint_A (x^2+y^2)\, \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|}\, dx\,dy$$

اگر درست حل کنید جواب $2\sqrt{2}\pi$ خواهد شد.

تذکر: توجه کنید که ملاک انتگرال رویه‌ای عبارت dS نسبت به رویه‌ی S می‌باشد که در بعضی کتاب‌ها انتگرال رویه‌ای به شکل $\iint_S$ ظاهر شده است و همچنین به جای dS از نماد ds نیز استفاده می‌شود.

محاسبه شار عبوری از رویه S زمانیکه در میدان برداری F قرار گیرد:



$$\text{شار عبوری} = \iint_S F\cdot\vec n\, ds$$

و به یاد داریم که اگر رویه S دارای معادله $f(x,y,z)=0$ باشد در این صورت

$n=\pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ به علاوه به خاطر داریم که $ds=\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot k|}dxdy$ (اگر ناحیه تصویر روی xy باشد)

و A ناحیه تصویر S بر روی صفحه xy باشد داریم:

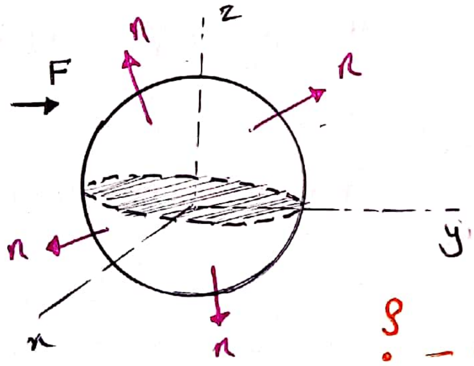
$$\text{شار عبوری از جداره S} = \iint_S F\cdot\vec n\, ds = \iint_{A} F\cdot\frac{\pm\nabla f}{\cancel{|\nabla f|}}\,\frac{\cancel{|\nabla f|}}{|\nabla f\cdot k|}\,dxdy = \iint_A \frac{F\cdot(\pm\nabla f)}{|\nabla f\cdot k|}\,dxdy$$

$$\text{شار عبوری از جداره S} = \iint_A F\cdot\vec n\, ds$$

$f:$ معادله رویه مسئله $=0$

در صورت قرینه 2 شار عبوری از جمع بستن صفر است چون ورودی (+) خروجی (−) اما در ناحیه 2 تقارن مطلق گرفته ۲ برابر می‌شود. ((x, y, z) ابعاد)

EX) میزان شار عبوری از سطح کره به شعاع a حول مبدأ مختصات را بدست آورید هرگاه $f(x,y,z)=(3x,3y,3z)$
(شار عبوری به سمت خارج از رویه S مورد نظر)
شار رو به بیرون



ابتدا S_1 را نیمکره بالای شکل S را در نظر گرفته و میزان شار عبوری رو به بیرون از S_1 را محاسبه می‌کنیم:

? − یا +

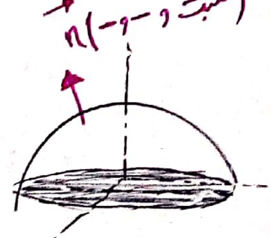
$$\text{شار عبوری} = \iint_{A=S_1}(3x,3y,3z)\cdot\frac{\pm\nabla f}{|\nabla f\cdot k|}\,dxdy = \,?$$

$\longrightarrow \nabla f=(2x,2y,2z)$

مرز نیم کره بالایی $z\geq 0$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$

جهت ∇f به سمت z ها مثبت است



(علامت + قرار است)

$$\rightarrow \iint_{S_1} F\cdot n\, ds = \iint_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{(3x,3y,3z)\cdot(2x,2y,2z)}{\cancel{|2z|}_{\,2z}}\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{6(\cancel{x^2+y^2+z^2})^{\,a^2}}{\cancel{2z}_{\,2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}}\,dxdy =$$

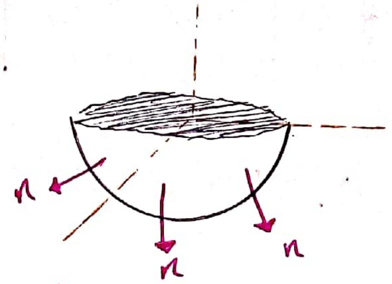
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3a^2 r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} = \checkmark$$

برای بخش بعد که S_2 را بشکل نیم‌کره پایینی درنظر گرفتیم در این صورت میزان شار عبوری بیرون سو از S_2 را حساب می‌کنیم:

$S_2: f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$

$z\le 0$

شار عبوری $=\iint_{S_2} F.n\,ds$ →



مولفه سوم بردار n منفی است

؟ — یا +

→ شار عبوری $=\iint (3x\ \ 3y\ \ 3z)\cdot\frac{\pm\nabla f}{|\nabla f.k|}\,dxdy$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$

$\nabla f=(2x,2y,2z)$ → علامت مثبت ف ک است →

در S_2 $z\le 0$ منفی

→ شار عبوری $=\iint (3x\ \ 3y\ \ 3z)\cdot\frac{+(2x,2y,2z)}{|2z|}\,dxdy$

$|2z| = -2z$

$$= -\iint \frac{6(x^2+y^2+z^2)\,dxdy}{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = +\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{3a^2 r\,dr\,d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} = \checkmark$$

هر یک از جوابها $\times 2$ = جواب کل

• فرض کنید که رویه S یک رویه پارامتری به صورت $r(u,v)$ با شد که $(u,v)\in A$. در این صورت:

شار عبوری توسط F از رویه S $=\iint_S F.\vec{n}\,ds$

اما در جلسه قبل به یاد داریم که بردار عمود بر سطح رویه پارامتری S به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\vec{n}=\frac{\delta(y,z)}{\delta(u,v)}\hat{i}+\frac{\delta(z,x)}{\delta(u,v)}\hat{j}+\frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)}\hat{k}=\frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}$$

x y z

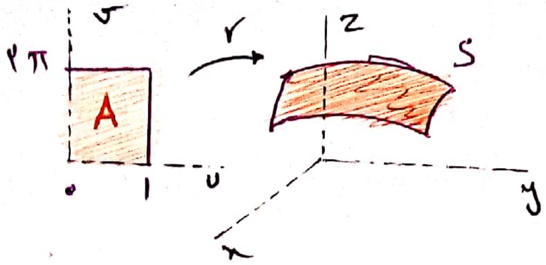
لذا شار عبوری:

$$\text{شار عبوری}=\iint F.\frac{\frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}}{\cancel{\left|\frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}\right|}}\underbrace{\cancel{\left|\frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}\right|}\,dudv}_{ds}=\iint_A F.\left(\frac{\delta r}{\delta u}\times\frac{\delta r}{\delta v}\right)dudv$$

Ex: میزان شار عبوری از رویه S به سمت با پارامتری مکان

$r(u,v)=\underbrace{u\cos v}_{x(u,v)}\,\hat{i}+\underbrace{u\sin v}_{y(u,v)}\,\hat{j}+\underbrace{u^2}_{z(u,v)}\,\hat{k}$

که در آن (A) $0\le u\le 1$ ، $0\le v\le 2\pi$ را بدست آورید اگر میدان $f(x,y,z)=\frac{2x\,i+2y\,j}{x^2+y^2}+k$ را بدست آوریم؟



$$n=\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\hat{i}+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\hat{j}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\hat{k}$$

$u>0$

$$n=\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ 2u & 0\end{vmatrix} i+\begin{vmatrix}2u & 0\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix} k=-2u^2\cos v\, i-2u^2\sin v\, j+u\,k$$

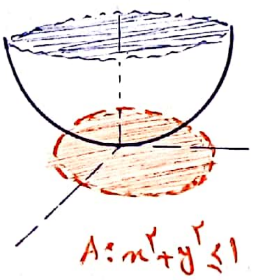
$$\text{شار عبوری}=\iint_S F\cdot n\,dS=\iint_A\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2},1\right)\cdot\ominus(-2u^2\cos v,-2u^2\sin v,u)\,du\,dv$$

$$\text{شار عبوری}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{2u\cos v}{u^2},\frac{2u\sin v}{u^2},1\right)\cdot\ominus(-2u^2\cos v,-2u^2\sin v,u)\,du\,dv$$

$$\text{شار عبوری}=\int_0^1\int_0^{2\pi}\ominus(-4u\cos^2 v-4u\sin^2 v+u)\,dv\,du=-\left(\int_0^1-3u\,du\right)2\pi=+3\pi$$

تمرین) توصیف رویه مثال قبل را با راحتی می‌توان ارائه داد $z=x^2+y^2$ زیرا $0\le x^2+y^2=u^2\le 1$

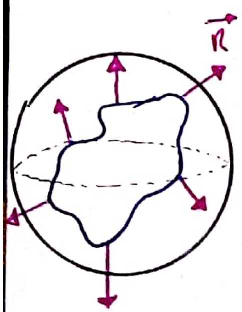
به بیان دیگر رویه S در مثال فوق به صورت زیر است:



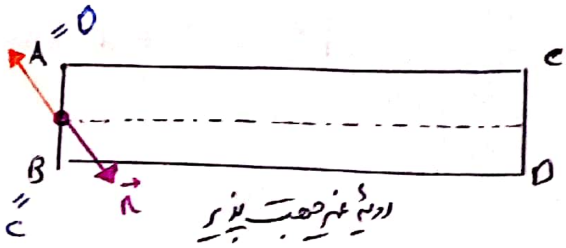
با روش ابتدایی جلسه به طور مستقیم شار عبوری به سمت پایین این رویه را توسط F بدست آورید

جواب $=3\pi$

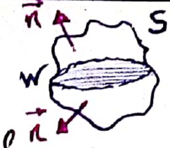
تعریف) رویه S را یک رویه جهت‌پذیر می‌نامند هرگاه بردار عمود بر سطح $\vec{n}$ بر رویه S به طور پیوسته تغییر کند.



نوار موبیوس:



قضیه دیورژانس:



فرض کنید که S یک رویه بسته و جهت پذیر باشد و به علاوه فضای محصور درون رویه S را W می‌نامیم چنانچه F یک میدان برداری هموار بر W باشد در این صورت شار برون سوی عبوری از S برابر است با:

$$\underbrace{\iint_S F\cdot n\, ds}_{\text{انتگرال رویه}} = \underbrace{\iiint_W \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz}_{\text{انتگرال سه‌گانه}}$$

برون سو

Ex) میزان شار عبوری برون سو از دیواره کره به شعاع a حول مبدأ را بدست آورید هرگاه $f(x,y,z) = (3x, 3y, 3z)$
(مثال ابتدای جلسه)

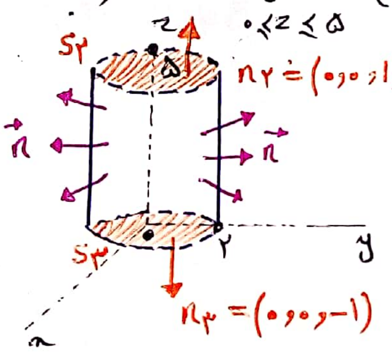
چون میدان برداری F بر $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ یعنی W همان فضای محصور درون رویه S یک تابع هموار است پس بنابر قضیه دیورژانس داریم:

$$\text{شار عبوری برون سو} = \iint_S F\cdot n\, ds = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} \overbrace{\operatorname{div} F}^{3+3+3}\, dx\,dy\,dz = 9 \times \frac{4}{3}\pi a^3$$

☺ که باید حتماً ≤ باشد *

* z را نمی‌توان از رویه جایگزین کرد چون z درون رویه متغیر می‌باشد

Ex) فرض کنید که S رویه $x^2+y^2=4$ باشد که $0 \le z \le 5$ فرض کنید $f(x,y,z) = (2x, 3y, 4z)$ مطلوب است $\iint_S F\cdot n\, ds$ که $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح S به سمت خارج استوانه است.



با اضافه کردن دو درب در این استوانه (S_2 و S_3) به یک رویه بسته می‌رسیم:

$$\text{شار عبوری } S\cup S_2\cup S_3 = \iint_{S\cup S_2\cup S_3} F\cdot n\, ds \overset{\text{قضیه دیورژانس}}{=} \iiint_{\text{درون استوانه}} \overbrace{\operatorname{div} F}^{2+3+4}\, dx\,dy\,dz = 9\times \text{حجم استوانه} = 9\times 5\times 4\pi = 180\pi$$

$$\begin{cases} f(x,y,z) = z-5 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\text{شار عبوری رو به سمت بالا از } S_2 = \iint_{S_2} F\cdot n_2\, ds = \iint_{S_2} F\cdot n_2 \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot k|}\, dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 4} (2x, 3y, 4z)\cdot(0,0,1)\, dx\,dy$$

$$\text{شار عبوری از } S_3 = \iint_{S_3} F\cdot n_3\, ds = \iint_{x^2+y^2\le 4} \overbrace{(2x, 3y, 4z)\cdot(0,0,-1)}^{-4z=0}\, dx\,dy = 0$$

جواب = 100π

روش دوم حل مثال قبل (به عهده شما) می‌توان رویه S را به صورت زیر پارامتری کرد:

$r(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$

$0 \le u \le 2\pi$
$0 \le v \le 5$

جواب $= 10\pi$

ما نمی‌توانستیم به طور مستقیم روی صفحه xy تصویر کنیم

$\nabla f \cdot n = 0$

Ex) شار عبوری رو به بالا از طرف میدان برداری $F = 2x\,i + y\,j + z\,\hat{k}$ از رویه $r(u,v) = \underbrace{u^2 v}_{x(u,v)}\,i + \underbrace{u v^2}_{y(u,v)}\,j + \underbrace{v^3}_{z(u,v)}\,k$ که در آن $A: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ است را بدست آورید.

$$\text{شار عبوری} = \iint_S F \cdot n \, ds = \iint_A F \cdot \pm\left(\frac{\delta r}{\delta u} \times \frac{\delta r}{\delta v}\right) du\,dv = ?$$

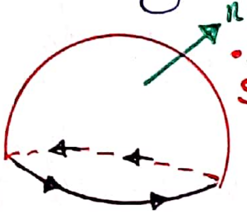
$$\frac{\delta r}{\delta u} \times \frac{\delta r}{\delta v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2uv & v^2 & 0 \\ u^2 & 2uv & 3v^2 \end{vmatrix} = (3v^4, -6uv^3, \cancel{4u^2v^2 - u^2v^2})$$

$3u^2v^2 \ge 0$

+ k است

$$\text{شار عبوری} = \int_0^1 \int_0^1 (\underbrace{2x}_{2u^2v}, \underbrace{y}_{uv^2}, \underbrace{z}_{v^3}) \cdot +(3v^4, -6uv^3, 3u^2v^2)\, du\,dv = \dots \checkmark$$

تعریف) فرض کنید که رویه S رویه‌ای جهت‌پذیر باشد و به این رویه یک منحنی مانند c مشخص کنند در این صورت اصطلاحاً گوئیم جهت منحنی c و جهت رویه S با یکدیگر سازگارند هرگاه از قاعده دست راست پیروی کنند.



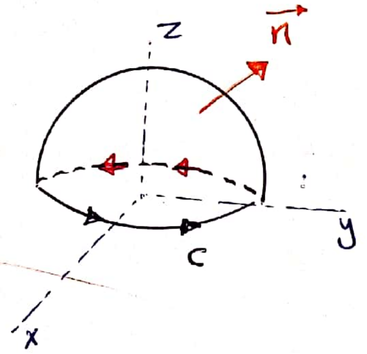
لبه: منحنی c

قضیه‌ی استوکس: فرض کنید که S یک رویه هموار و جهت‌پذیر باشد با لبه منحنی c به طوری که جهت رویه S و جهت منحنی c با یکدیگر سازگار باشند در این صورت اگر F یک میدان برداری هموار بر منحنی c باشد داریم:

$$\underbrace{\oint_c F \cdot dr}_{\text{انتگرال روی منحنی بسته}} = \underbrace{\iint_S}_{\text{انتگرال رویه‌ای}} (\mathrm{curl}\, F) \cdot \vec{n}\, ds$$

Scanned by CamScanner

Ex) فرض کنید که S نیمکرهٔ بالایی $x^2+y^2+z^2=9$ و $z\geq 0$ باشد که مرز آن دایرهٔ $x^2+y^2=9$ است. فرض کنید که $F(x,y,z)=(2y,-3x,0)$ صحت قضیهٔ استوکس را بررسی کنید.



$$\oint F.dr=\underbrace{\oint_C Pdx+Qdy+Rdz}_{\text{سمت چپ}}=\underbrace{\iint_S (\mathrm{curl}\,F).\vec{n}\,dS}_{\text{سمت راست}}$$

گرین: $\iint (N_x-M_y)\,dx\,dy$ ، $Mdx+Ndy$

سمت چپ: $=\oint 2ydx-3xdy+0dz=\oint 2ydx-3xdy=\iint_{x^2+y^2\leq 9}(-3-2)\,dx\,dy=-5\times 9\pi=-45\pi$

$C: x^2+y^2=9$ در جهت مثلثاتی

سمت راست: $\mathrm{curl}\,F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & -3x & 0\end{vmatrix}=0i-0j+(-3-2)k=-5k$

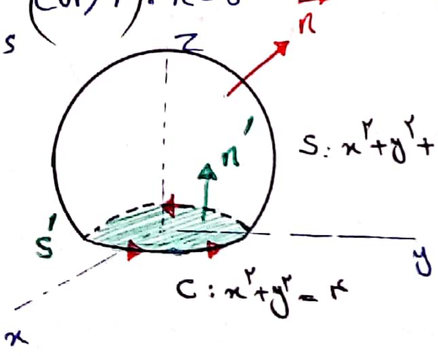
$$I=\iint_S (0,0,-5).\vec{n}\,dS=\iint_{x^2+y^2\leq 9}(0,0,-5).\frac{\pm\nabla f}{|\nabla f.k|}\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\leq 9}(0,0,-5).\frac{+(2x,2y,2z)}{\underset{2z}{|2z|}}\,dx\,dy$$

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$

$\nabla f=(2x,2y,2z)$

$$=\iint_{x^2+y^2\leq 9}\frac{-10z}{2z}\,dx\,dy=-5\times 9\pi=-45\pi$$

Ex) فرض کنید که S بخشی از کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ است که بالای صفحهٔ xy قرار دارد. به علاوه فرض کنید که $F(x,y,z)=y^2\cos xz\,\hat{i}+x^3e^{yz}\,\hat{j}-e^{-xyz}\,\hat{k}$ مطلوب است $\iint_S (\mathrm{curl}\,F).n\,dS$



$S: x^2+y^2+4=8$

$C: x^2+y^2=4$

* قضیهٔ استوکس را به کار می‌بریم: ☺

ابتدا تعیین جهت باید کرد

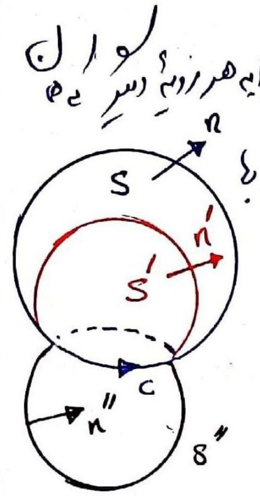
$(*,*,?)$ ، $(0,0,1)$ ، در صفحهٔ xy مقدار $z=0$ است

$$\iint_S(\mathrm{curl}\,F).n\,dS=\oint_C F.dr=\iint_{S':x^2+y^2\leq 4}(\mathrm{curl}\,F).n'\,\underbrace{dS}_{dx\,dy}=\iint_{x^2+y^2\leq 4}(3x^2\cancel{e^{yz}}-2y\cancel{\cos xz})\,dx\,dy=\dots$$

$$\mathrm{curl}\,F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2\cos xz & x^3e^{yz} & -e^{-xyz}\end{vmatrix}=\bigcirc i+\bigcirc j+(3x^2e^{yz}-2y\cos xz)\,k$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (3x^2-2y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 (3r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta = \cdots$$

(تذکر) در مثال قبل دیدیم که با دو بار استفاده از قضیه ی استوکس می توان انتگرال $\iint_S (\text{curl}\,F)\cdot n\,ds$ وابسته به هر رویه دلخواه S که لبه C را داشته باشد با رویه ای که جهت آن با جهت C و رویه جدید سازگار باشد تبدیل کرد و حاصل برابر است با



$$\iint_{S'} (\text{curl}\,F)\cdot n'\,ds$$

(Ex فرض کنید C منحنی با پارامتری زیر باشد

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2+2\cos t \\ z=2+2\sin t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

$\frac{y-2}{2}=\cos t$, $\frac{z-2}{2}=\sin t$

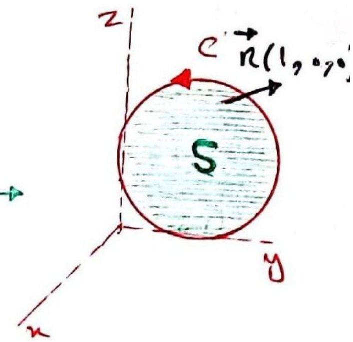
$$F(x,y,z)=\left(e^{5z^2},\ \cos(y^3),\ 3y\right)$$

مطلوبست محاسبه ی مقدار $\int_C F\cdot dr$ هرگاه

$$\oint_C F\cdot dr = \oint_C e^{5z^2}dx + \cos(y^3)\,dy + 3y\,dz$$

$$C:\ \cos^2 t+\sin^2 t=1 : \left(\frac{y-2}{2}\right)^2+\left(\frac{z-2}{2}\right)^2=1 \longrightarrow (y-2)^2+(z-2)^2=4 \longrightarrow$$

$x=0$ ، $x=0$ با جهت مثلثاتی



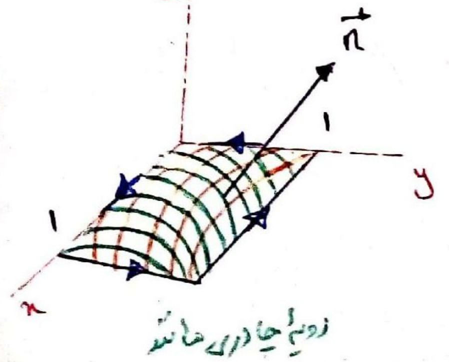
$$\underbrace{\oint F\cdot dr}_{\text{ق استوکس}} = \iint_S (\text{curl}\,F)\cdot n\,ds = \iint_{(y-2)^2+(z-2)^2\le 4} \begin{vmatrix} i & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdots & \cos y^3 & 3y \end{vmatrix}\cdot(1,0,0)\,dy\,dz = \iint_{(y-2)^2+(z-2)^2\le 4} 3\,dy\,dz = 3\times 4\pi = 12\pi$$

(Ex فرض کنید S رویه $z=x(1-x)(1-y)y$ باشد که $0\le x\le 1$ ، $0\le y\le 1$. مطلوبست محاسبه $\iint_S (z\hat{i}+x\hat{k})\cdot n\,ds$ که در آن $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح S به سمت بالا است.

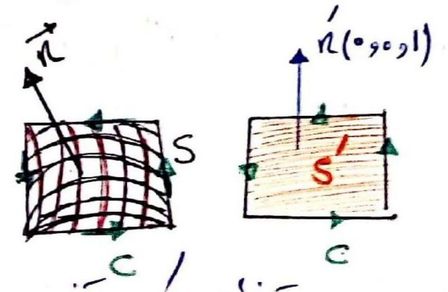
برای بررسی رویه S می توان به تغییرات x و y توجه کرد:

$$\begin{cases} x=0 \text{ یا } x=1 \to z=0 \\ y=0 \text{ یا } y=1 \to z=0 \end{cases}$$

و در غیر این صورت همواره $z\ge 0$



رویه چادری مانند



قضیه استوکس (تغییر رویه)

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S (\text{curl}\,F)\cdot n\,ds$$

$$\text{curl}\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = z\hat{i} + x\hat{k}$$

$F=(P,Q,R)$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=z \qquad R=yz$$

$$-\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z}=0 \qquad P=0 \longrightarrow F(x,y,z)=(0,\tfrac{1}{2}x^2,yz)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x \qquad Q=\tfrac{1}{2}x^2$$

پس با انتخاب

می‌توان دید که $\text{curl}\,F=z\hat{i}+x\hat{k}$

حال که $\text{curl}\,F$ با مقدار $z\hat{i}+x\hat{k}$ برابر شد پس می‌توان از قضیه استوکس استفاده نمود. ادامه حل را می‌توان با دو روش انجام داد:

(روش اول) $$\iint_S (\text{curl}\,F)\cdot n\,ds=\oint_C F\cdot dr=\iint_{S'} \text{curl}\,F\cdot n'\,ds=\iint (z\hat{i}+x\hat{k})\cdot(0,0,1)\,dx\,dy$$

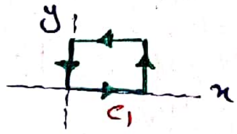
$\text{curl}\,F = z\hat{i}+x\hat{k}$

$0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

S': بخشی از صفحه xy به محدوده مربع مورد بحث است

$$=\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy=1\times \frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

در صفحه xy، $z=0$



(روش دوم) $$\iint_S (\text{curl}\,F)\cdot n\,ds=\oint_C F\cdot dr=\oint_C 0\,dx+\tfrac{1}{2}x^2dy+yz\,\cancel{dz}^{\,0}=\oint_C \tfrac{1}{2}x^2\,dy =$$ طبق قضیه گرین

$$=\int_0^1\int_0^1 (x-0)\,dx\,dy=\frac{1}{2}$$

(تذکر) در فرآیند حل سؤال قبل دیدیم که برای روش اول واقعاً نیازی به یافتن F نبود هرچند در روش دوم به F نیاز داشتیم. در مواردی که بخواهیم از روش اول استفاده کنیم می‌توان به این نکته توجه کرد: اگر دیورژانس تابع داده شده برابر با صفر نشود و ناحیه دارای حفره نباشد، آنگاه تابع مورد بحث curl تابعی مانند F نخواهد بود و نیازی به یافتن F نیست

$$\text{div}(z\hat{i}+x\hat{k})=0+0+0=0 \longrightarrow \text{div}(\text{curl}\,F)=0$$

Ex) مطلوبست محاسبه شار عبوری از مکعب به صورت $-1\le x\le 1$، $-1\le y\le 1$، $0\le z\le 2$

$F(x,y,z)=(y^2z,\,y^3,\,xz)$ در نظر گرفته شده است و

شار عبوری از درون S توسط F $$=\iint_S F\cdot n\,ds=\iiint_{\text{درون مکعب}} \underbrace{\text{div}F}_{(3y^2+x)}\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{شار}=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_0^2 (3y^2+x)\,dz\,dy\,dx=\checkmark$$

تکمیل زیر

$$\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right)$$ اپراتور

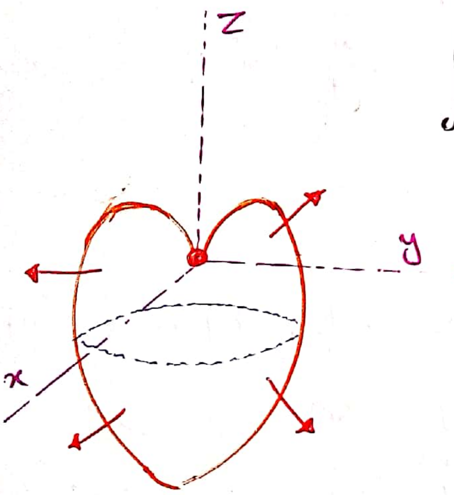
$$F = (P, Q, R)$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}$$: کمیت

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$$

EX) اگر درون کاردیوئید $\rho = 1-\cos\phi$ باشد و $\vec{N}$ بردار قائم یکه به طرف خارج بر رویه در نظر گرفته می‌شود و میدان برداری F به صورت زیر باشد $F(x,y,z) = (e^z + 3x,\ 1+\tan^3 x + y^3,\ 4x^2 - 3y^2 z)$ آنگاه $\iint_S F.n\,ds$ را بیابید.



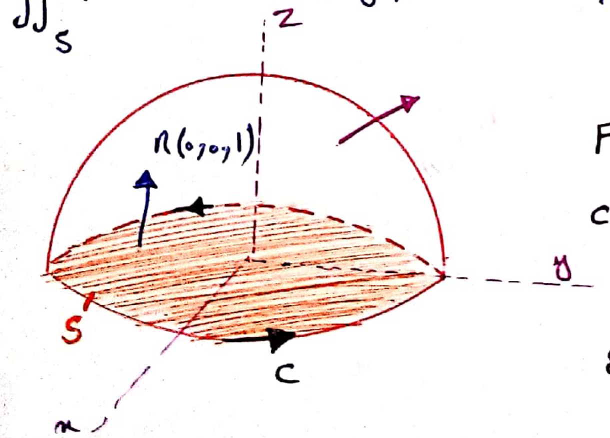
$$\iint_S F.n\,ds = \iiint_{S\ \text{درون}} \overbrace{\operatorname{div} F}^{3+3y^2-3y^2}\, dx\,dy\,dz = 3 \times (\text{حجم}) = 3\iiint_{S\ \text{درون}} dx\,dy\,dz$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 6\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin\phi\,(1-\cos\phi)^3}{3}\, d\phi$$

$$= \dots \checkmark$$

EX) فرض کنید که S نیم کره بالایی $x^2+y^2+z^2=1$ باشد مطلوبست محاسبه

$$\iint_S (x^3 e^y\, i - 3x^2 e^y\, j) \cdot n\, ds$$



ابتدا باید ثابت کنیم که F ای هست؟ طوری‌که $F = (P, Q, R)$

$$\operatorname{curl} F = (x^3 e^y, -3x^2 e^y, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z} = x^3 e^y \longrightarrow R = x^3 e^y,\ Q = 0,\ P = 0$$

$$-\frac{\delta R}{\delta x} + \frac{\delta P}{\delta z} = -3x^2 e^y$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} = 0$$

$$\downarrow$$

$$F = (0, 0, x^3 e^y)$$

$$\downarrow$$

$$\text{سوال} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot n\, ds$$

طبق قضیه استوکس

$$= \oint_C F.dr = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_C x^3 e^y\, \overbrace{dz}^{z=0\ ;\ dz=0} = 0$$

روش دوم دوبار از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم :

$$\operatorname{div}(x^3e^y i - 3x^2e^y j) = 3x^2e^y - 3x^2e^y = 0$$: چون صفر است وجود دارد میدان برداری که تابع داده شده $\operatorname{curl} F$ آن برابر است و لذا می‌توان از قضیه استوکس استفاده کرد.

$$\iint_S (x^3e^y i - 3x^2e^y j)\cdot n\, dS = \oint_C F\cdot dr = \iint_{S'} x^3e^y i - 3x^2e^y j \cdot \underbrace{n'}_{(0,0,1)}\, dS = 0$$

فصل جدید * جبر خطی :

فرض کنید که V یک مجموعه ناتهی باشد و به علاوه فرض کنید که عمل $+$ (جمع) بر V تعریف شده است که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad A\times B \longrightarrow C$$

$$(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2 \qquad\qquad (a,b) \longrightarrow a+b$$

$$\forall v_1, v_2, v_3 \in V$$

1) خ شرکت‌پذیری : $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$ 2) خ جابجایی : $v_1+v_2 = v_2+v_1$

3) وجود عنصر صفر : یعنی عنصری در V وجود دارد که اگر با هر عنصری جمع شود حاصل آن برابر با خود آن عنصر می‌شود.

$$\exists 0 \in V \;;\; \forall v \in V \rightarrow v + 0 = v$$

4) وجود عنصر قرینه: برای هر عنصر $v \in V$ عنصری مانند $v' \in V$ وجود دارد به طوریکه $v + v' = 0$

* به علاوه که یعنی موسوم به ضرب اسکالر وجود دارد که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$R \times V \longrightarrow V$$

$$(\underbrace{\lambda}_{\text{عدد}}, \underbrace{v}_{\text{بردار}}) \longrightarrow \underbrace{\lambda v}_{\text{یک بردار}}$$

$$(\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R \;,\; \forall v, v_1, v_2 \in V)$$

5) $\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$ 6) $(\lambda_1+\lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$.

7) $(\lambda_1\lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$ 8) $1\,v = v$, $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

در این صورت V را یک فضای برداری بر میدان اعداد حقیقی می‌نامند و به عناصر V بردار نیز گفته می‌شود.

۲ خاصیتی که اشاره نکرده‌ایم ← بسته بودن نسبت به عمل جمع و ضرب

Ex) مجموعه تمام بردارهای صفحه R^2 را در نظر بگیرید : $V=R^2$

با عمل جمع را همان جمع معمولی بردارها همراه با ضرب اسکالر را نیز همان ضرب اسکالر یک فضای حقیقی در یک بردار تعریف می‌کنیم.

$(0,0)$ عنصر صفر یا بردار صفر ، $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$

Ex) $V=R^3=\{(a,b,c) \mid a,b,c\in R\}$ با جمع معمولی بردارها و با ضرب اسکالر معمولی یک فضای حقیقی در یک بردار مجدداً یک فضای برداری بر R است.

Ex) $V=\{(a+b,b) \mid a,b\in R\}$ با جمع معمولی در R^2 و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری؟

* بسته بودن عمل جمع برقرار است *

$(a_1+b_1,b_1)+(a_2+b_2,b_2)=(\underbrace{a_1+a_2}_{a''}+\underbrace{b_1+b_2}_{b''},\underbrace{b_1+b_2}_{b''})$

شرکت‌پذیری ✓

جابجایی ✓

$(a+b,b)\in V,\ \lambda\in R \to (\lambda a+\lambda b,\lambda b)\in V$

* ضرب اسکالر بسته است *

* وجود بردار (عنصر) صفر * $(0,0)=(0+0,0)\in V$

* وجود بردار قرینه * $(a+b,b)\in V \to (-a-b,-b)\in V$

خاصیت‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ صادق می‌باشند ⟸ لذا فقط خواص ستاره‌دار (*) را بررسی می‌کنیم در سوال

Ex) آیا $V=\{(2a,1)\mid a\in R\}$ با جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری است؟

* $(2a,1)+(2a',1)=(2(a+a'),2)\notin V$ نسبت به عمل جمع بسته نیست ($2\neq 1$)

* $\lambda(2a,1)=(2a\lambda,\lambda)\notin V$ نسبت به عمل ضرب بسته نیست

Ex) $V=\{(2a,3b,a-b)\mid a,b\in R\}$ با جمع و ضرب اسکالر معمولی در R^3؟

* $(2a,3b,a-b)+(2a',3b',a'-b')=(\underbrace{2(a+a')}_{2a''},\underbrace{3(b+b')}_{3b''},\underbrace{(a+a')-(b+b')}_{a''-b''})\in V$ نسبت به عمل جمع بسته است

* $(0,0)\in V$ وجود بردار صفر

* $(2a,3b,a-b)\in V \to (\underbrace{2(-a)}_{2a'},\underbrace{3(-b)}_{3b'},\underbrace{(-a)}_{a'}-\underbrace{(-b)}_{b'})\in V$ وجود بردار قرینه

* $(2a,3b,a-b)\in V \to (2\lambda a,3\lambda b,\lambda a-\lambda b)\in V$ بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر

تعریف) فرض کنید V یک فضای برداری بر R باشد و $W \subseteq V$ یک زیرمجموعه ناتهی از V است در این صورت اگر W خود با همان جمع و ضرب اسکالر V تشکیل یک فضای برداری بر R را بدهد اصطلاحاً به W یک زیرفضای برداری V گفته می‌شود.

Ex) در مثال قبل V یک زیرفضای R^3 است.

قضیه) اگر V یک فضای برداری بر R باشد و W یک زیرمجموعه ناتهی از V، آنگاه W یک زیرفضای برداری V است اگر و تنها اگر W تحت عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

Ex) $W=\{(a+1, a+b, 2b) \mid a,b \in R\}$ ، آیا W یک فضای برداری است با جمع و ضرب اسکالر معمولی:

$$(\cdot \ \cdot \ \cdot) + (\cdot \ \cdot \ \cdot) = (\underbrace{a+a'}_{a''}+2,\ \underbrace{(a+a')+(b+b')}_{a''+b''},\ \underbrace{2(b+b')}_{2b''})$$

* تحت عمل جمع بسته نیست لذا فضای برداری نیست

Ex) $W=\{(a, b, a+b) \mid a,b \in R\}$

$$(a,b,a+b)+(a',b',a'+b') = (\underbrace{a+a'}_{a''}, \underbrace{b+b'}_{b''}, \underbrace{a+a'}_{a''}+\underbrace{b+b'}_{b''})$$

* نسبت به عمل جمع بسته است

$(\lambda a, \lambda b, \lambda a+\lambda b) \in V \rightarrow$ * نسبت به عمل ضرب بسته است

Ex) $V=\{(a^2, b, 2b) \mid a,b \in R\}$

$$(a^2,b,2b)+(a'^2,b',2b') = (\underbrace{a^2+a'^2}_{a''^2}, \underbrace{b+b'}_{b''}, \underbrace{2(b+b')}_{2b''})$$

* تحت عمل جمع بسته است
* اما تحت عمل ضرب بسته نیست

$\lambda a^2 = a'^2$

$\lambda < 0$

Ex) $V=\{(a^2, b, a+b) \mid a,b \in R\}$ ← تحت عمل جمع و ضرب بسته نیست

$(\ldots , \ldots + b$ عدد ثابت $+ a$ عدد ثابت $)$

Ex) $W=\{(2a-b, a+b, 3c+a, 5a-2c) \mid a,b,c \in R\}$

$(2a-b,\ a+b,\ 3c+a,\ 5a-2c)$

بسته بودن به جمع: $(2a'-b', a'+b', 3c'+a', 5a'-2c') = (2\underbrace{(a+a')}_{a''}-\underbrace{(b+b')}_{b''}, (a+a')+(b+b'), 3\underbrace{(c+c')}_{c''}+(a+a'),$
$5(a+a')-2(c+c'))$

$= (2a''-b'', a''+b'', 3c''+a'', 5a''-2c'') \in W$

بسته بودن به ضرب اسکالر: $\lambda \in R$

$(2\lambda a - \lambda b, \ldots) \in W$

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری بر R باشد در این صورت $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\} \subseteq V$ را یک مجموعه مستقل خطی گوییم هرگاه چنانچه یک ترکیب خطی دلخواه از آنها برابر با صفر شود نتیجه

$$r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_kv_k = 0 \xrightarrow{\text{آنگاه ضرورتاً داشته باشیم}} r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$$

در غیر این صورت این مجموعه را وابسته خطی گوییم.

Ex) در R^2 $\{\overset{v_1}{(1,0)}, \overset{v_2}{(0,1)}\}$

$$r_1v_1 + r_2v_2 = 0 \to r_1(1,0) + r_2(0,1) = 0 \to (r_1, r_2) = (0,0) \to r_1 = r_2 = 0$$

v_1 و v_2 مستقل خطی اند

Ex) در R^2 $v_2 = (3,15)$, $v_1 = (1,5)$

$$r_1v_1 + r_2v_2 = 0 \to (r_1, 5r_1) + (3r_2, 15r_2) = (0,0) \to r_1 + 3r_2 = 0 \to r_1 = -3r_2$$

$$\cancel{5r_1 + 15r_2 = 0}$$

وابسته خطی اند

if $r_2 = 7 \to r_1 = -21$

Ex) در R^3 $v_1 = (1,0,2)$
$v_2 = (3,1,2)$

$$r_1v_1 + r_2v_2 = 0 \to (r_1 \ \ 0 \ \ 2r_1) + (3r_2 \ \ r_2 \ \ 2r_2) = (0,0,0) \to \begin{cases} r_1 + 3r_2 = 0 \\ r_2 = 0 \\ 2r_1 + 2r_2 = 0 \end{cases} \to r_1 = r_2 = 0$$

مستقل خطی

نکته: در فضای برداری V اگر داشته باشیم $v_1 = (0, \dots, 0)$ و $v_2, v_3, \dots, v_k$ آنگاه این مجموعه وابسته خطی است زیرا:

$$\underset{\neq 0}{14}v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k = 0$$ مثلاً

پس اگر یکی از بردارها بردار صفر باشد وابسته خطی اند.

نکته: در فضای برداری V دو بردار v_1 و v_2 وابسته خطی اند در این صورت $\leftarrow$ $\exists r_1, r_2 : r_1v_1 + r_2v_2 = 0$

که حداقل یکی ناصفر است

بدون از دست دادن کلیت فرض (مثلاً فرض کنید) $r_1 \neq 0$

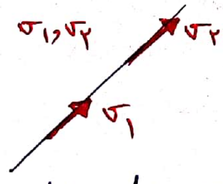
$$\frac{1}{r_1}(r_1v_1 + r_2v_2 = 0) \to v_1 + \frac{r_2}{r_1}v_2 = 0 \to v_1 = \underbrace{-\frac{r_2}{r_1}}_{\text{ضریب}}v_2 \to$$

پس دو بردار v_1 و v_2 وابسته خطی اند

Ex) در R^2 $(1,2)$ ، $(1,4)$ → وابسته خطی نیست ، در R^4 $(2,4,6,8)$ ، $(1,2,5,9)$ → مستقل خطی اند

در R^3 $(2,0,8)$ ، $(1,0,4)$ → وابسته خطی اند

مفهوم هندسی: لذا اگر v_1 و v_2 هم راستا نباشند مستقل خطی اند.



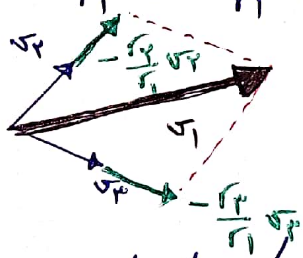
Ex) $v_1: (1,2,0)$ ، $v_2: (4,5,6)$ ، $v_3: (3,3,6)$ → $v_1+v_3=v_2$

$v_1-v_2+v_3=0$

وابسته خطی اند

اگر ۳ بردار v_1 و v_2 و v_3 وابسته خطی باشند پس $r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3=0$ بطوریکه حداقل یکی از r_1 تا r_3 ناصفر است

مثلاً فرض کنید $r_1\neq 0$ پس می‌توان نوشت ← $v_1+\frac{r_2}{r_1}v_2+\frac{r_3}{r_1}v_3=0$ ← $v_1=-\frac{r_2}{r_1}v_2-\frac{r_3}{r_1}v_3$



پس بردار v_1 هم صفحه با v_2 و v_3 تعلق دارد ← بطوریکه حجم متوازی السطوح تشکیل شده از v_1 و v_2 و v_3 برابر با صفر است

پس در R^3 محک بسیار ساده‌ای بدست می‌آید که می‌توان مستقل خطی بودن ۳ بردار را اثبات کرد کافی است که ضرب مختلط این ۳ بردار ناصفر باشد تا مستقل خطی شوند.

Ex) $v_1: (1,2,5)$ ، $v_2: (1,0,2)$ ، $v_3: (2,0,4)$ در R^3 → $v_1\cdot(v_2\times v_3)=\begin{vmatrix}1&2&5\\1&0&2\\2&0&4\end{vmatrix}=0$ وابسته خطی اند

Ex) $v_1: (1,0,2,1)$ a ، $v_2: (2,0,1,1)$ b ، $v_3: (0,1,2,3)$ c → $av_1+bv_2+cv_3=0$ حل ۴ معادله و ۳ مجهول →

$a+2b=0$
$c=0$
$2a+b+2c=0$
$a+b+3c=0$

→ $a=b=0$ ، $c=0$ مستقل خطی اند

تذکر) دقت کنید که در IR^k حداکثر می‌توان k بردار مستقل خطی یافت و هر مجموعه از بردارها با بیش از k بردار حتماً وابسته خطی هستند.

در پناه حق باشید

التماس دعا