مسائل مشتق

۱- فرض کنید تابع $f\,:\,\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر x در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $f'(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$. نشان دهید به ازای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $|f(b)-f(a)|\leq\frac{۱}{۲}|b-a|$.

۲- فرض کنید تابع $f\,:\,[۰,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ بر $[۰,۱]$ پیوسته باشد و $f(۰)=۰$. اگر f' بر بازهٔ باز $(۰,۱)$ موجود و صعودی باشد، نشان دهید تابع $g\,:\,(۰,۱)\longrightarrow\mathbb{R}$ با دستور $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازهٔ $(۰,۱)$ صعودی است.

۳- کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۵)$ تا سهمیِ $y=\frac{۱}{۱۶}x^۲$ را بیابید.

حل. فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۵)$ تا نقطهٔ (x,y) از سهمی برابر $\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۵)^۲}$ است. کافی است مقدار مینیمم مجذور آن یعنی $۱۶y+(y-۵)^۲$ را پیدا کنیم. قرار می‌دهیم $f(y)=۱۶y+(y-۵)^۲$. با مشتقگیری به دست می‌آوریم $f'(y)=۲y+۶$. از $f'(y)=۰$ نتیجه می‌شود $y=-۳$، امّا نقطه‌ای با عرض -۳ روی سهمی یافت نمی‌شود. بنابراین کوتاهترین فاصله از سهمی وجود ندارد.

آیا راه حل بالا درست است؟ اگر درست نیست اشکال آن و راه حل درست را بنویسید.