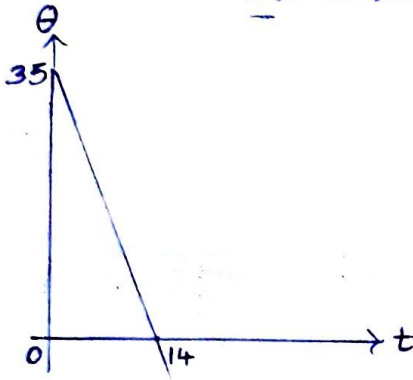


حرکت دوبعدی و سه بعدی

- ① بردار مکان ذره‌ای بر حسب تابع از t به صورت $\vec{r} = 5t\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$ تعریف می‌شود که \vec{r} بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است و e و f اعداد ثابت هستند. ضایحه شکل زیر نمودار θ (زاویه راستی حرکت با جهت مثبت محور x) بر حسب t باشد مطلوب است مقادیر e و f را به دست آورید.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{v} = 5\hat{i} + (e + 2ft)\hat{j}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

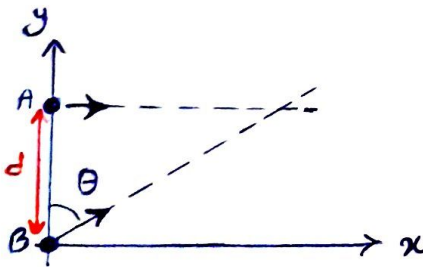
$$\theta(t=0) = 35 = \tan^{-1} \left(\frac{e + 2ft}{5} \right)$$

$$\boxed{e = 3.5 \text{ m/s}}$$

$$\theta(t=14) = 0 = \tan^{-1} \left(\frac{3.5 + 28f}{5} \right)$$

$$\boxed{f = -0.125 \text{ m/s}^2}$$

- ② ذره‌ی A در راستای خط $y = 30 \text{ m} = d$ با سرعت ثابت $v = 3 \text{ m/s}$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. ذره‌ی B هنگامی که A از محور y می‌گذرد با سرعت صفر و شتاب ثابت $a = 0.4 \text{ m/s}^2$ از جدار شروع به حرکت می‌کند. زاویه θ بین جهت مثبت محور y و جهت حرکت ذره B به هم برخورد کنند؟



$$\textcircled{A}: x_A = v_A t + x_{0A} \rightarrow x_A = 3t$$

$$y = 30$$

$$\textcircled{B}: y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$$

$$= \frac{1}{2} (0.4 \cos \theta) t^2 + 0 + 0$$

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$= \frac{1}{2} a \sin \theta t^2$$

پایان به این دلیل که رسیدن دو ذره مختصات آن‌ها را هم برابر خواهد بود داریم:

$$\frac{x_A = x_B}{3t = \frac{1}{2} (0.4) \sin \theta t^2} \rightarrow t = \frac{3}{0.2 \sin \theta}$$

$$\frac{y_A = y_B}{30 = \frac{1}{2} (0.4) \cos \theta \left[\frac{9}{0.04 \sin^2 \theta} \right]} \xrightarrow{\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta} 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0$$

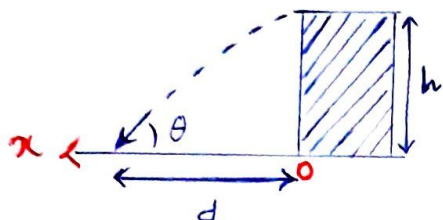
$$\cos \theta = \frac{1}{2} ; \boxed{\theta = 60^\circ}$$

- (3) مطابق شکل توپ از لبه پشت بام ساختمان به ارتفاع h به پایین پرتاب می شود. توپ بعد از 1.5 s در فاصله $d = 25$ m از ساختمان و کت زاویه $\theta = 60^\circ$ نسبت به افق به زمین برخورد می کند.

الف) ارتفاع h را بیابید.

ب) بزرگی بردار سرعت و همچنین زاویه α آن نسبت به افق هنگامی که توپ پرتاب می شود.

یا توپ به شکل داده شده واسه حل برخورد توپ در سمت چپ تصویر واقع شده است. مستر را در یک دستگاه چپ خود حل می کنیم. این معتر که جهت مثبت محور x را به سمت چپ می گیریم و ندار داریم:



الف) $x = (v_0 \cos \theta)t$; $x_0 = 0$, $x = 25$
 $25 = (v_0 \cos 60) 1.5 \rightarrow v_0 = 33.3 \frac{m}{s}$

$y = 0$, $y = h > 0$; $y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$
 $h = -\frac{1}{2}(9.8)(1.5)^2 + (v_0 \sin 60) 1.5$
 $\boxed{h = 32.3 \text{ m}}$

$v_x = v_0 \cos 60 = 16.7 \frac{m}{s}$

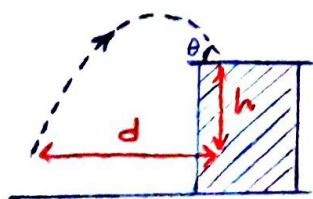
$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin 60 - 9.8(1.5) = 14.2 \frac{m}{s}$

$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \boxed{21.9 \frac{m}{s}}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \boxed{-40.4^\circ}$

علامت منفی ظاهر از این است که پرتاب کت
 زاویه α زیر افق بوده است.

- (4) یک توپ به سمت پشت بام ساختمان پرتاب می شود 4 s بعد در ارتفاع $h = 20$ m بالای نقطه پرتاب فرود می آید. مسیر توپ دقیقاً قبل از فرود زاویه $\theta = 60^\circ$ با پشت بام می سازد.



الف) فاصله افقی d که توپ طی می کند را بیابید.

ب) اندازه بردار سرعت و زاویه α سرعت اولیه توپ نسبت به افق را بیابید.

$$y_0 = 20 \text{ m}, \quad y = 0, \quad t = 4 \text{ s}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

(الف)

$$v_{0y} = 14.6 = v_0 \sin 60 \rightarrow v_0 = 16.85 \text{ m/s}$$

$$x_0 = 0, \quad x = d; \quad x - x_0 = v_{0x}t$$

$$d = 16.85 (\cos 60)(4) = \boxed{33.7 \text{ m}}$$

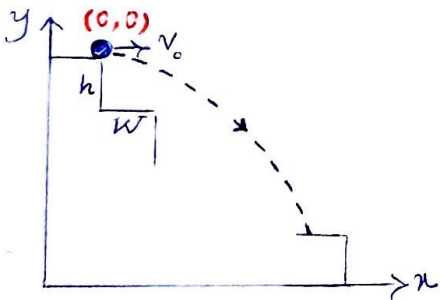
$$v_x = v_0 \cos 60 = 8.43 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 14.6 - 9.8(4) = -24.6 \text{ m/s}$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \boxed{26 \text{ m/s}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \boxed{-71.1^\circ}$$

5. توپ از بالای بلکان با سرعت افقی 1.52 m/s به پایین می‌غلتد. با فرض اینکه ارتفاع بلک 20.3 cm و عرض آن نیز 20.3 cm است. توپ روی پهنای چندم فرود می‌آید؟



اگر ارتفاع هر بلک h و عرض آن w در نظر گرفته شود در این صورت می‌توان گفت: چنانچه توپ در پهنای n ام فرود بیاید فاصله عمودی nh و فاصله افقی $(n-1)w$ رابطه می‌شد.

معادلات توپ در زمان t توسط روابط زیر مشخص می‌شود:

$$x = v_{0x}t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

$$\text{if } y = -nh \quad \text{so} \quad t = \sqrt{\frac{2nh}{g}}$$

$$x = v_{0x}t = (1.52) \sqrt{\frac{2nh}{g}} = 0.309 \sqrt{n} \quad \text{I}$$

$$\underline{w(n-1) < x < nw} \quad \text{II} \quad \text{if } n=1 \quad \text{so } x = 0.309$$

بنابراین روابط I, II

$$\frac{x}{w} = 1.52 > n \quad \times$$

$$\text{if } n=2 \quad \text{so } x = 0.437$$

$$\frac{x}{w} = 2.15 > n \quad \times$$

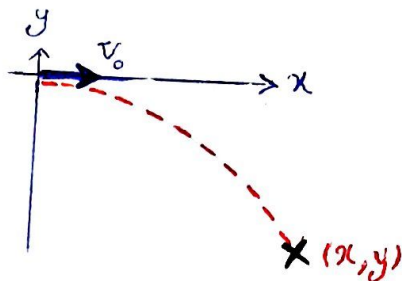
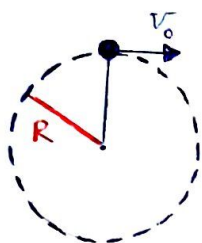
$$\text{if } n=3 \quad \text{so } x = 0.535$$

$$n-1 < \frac{x}{w} = 2.64 < n \quad \checkmark$$

پس توپ در پهنای سوم فرود می‌آید.

⑥ سنگ به نخ بسته شده‌ای روی دایره‌ای افقی به شعاع 1.5 m و در ارتفاع 2 m از سطح زمین می‌گردد. بایاره شدن نخ، سنگ به طور افقی پرتاب شده و 10 m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکز گرای سنگ در حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

بایاره شدن نخ، حرکت سنگ یک حرکت پرتابی خواهد بود. لذا لازم است سرعت سنگ در مسیر حرکت دایره‌ای را - دست‌آوردیم که بتوانیم به پرتابی بودن حرکت داریم:



$$x = v_0 t \quad ; \quad x = 10\text{ m}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \quad ; \quad y = -2\text{ m}$$

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}}$$

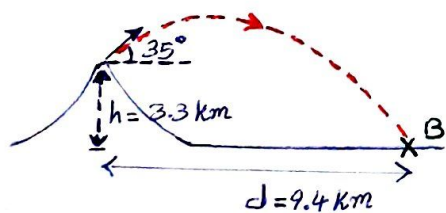
$$x = v_0 \sqrt{\frac{-2y}{g}} \rightarrow v_0 = 15.7 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \boxed{160 \text{ m/s}^2}$$

بنابراین شتاب مرکز گرای سنگ برابر خواهد بود با:

⑦ در پرتاب سنگ از دهانه‌ای یک جوه آتشفشان به هنگام فوران آن:

الف) بایاره سنگ که با زاویه 35° نسبت به سطح از دهانه‌ی A خارج می‌شود، سرعتش چقدر باشد تا در نقطه‌ی B دریا به جوه به زمین برسد؟



ب) زمان حرکت این سنگ در هوا چقدر است؟

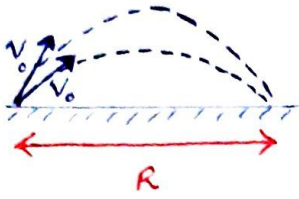
الف) بنابر معادله‌ی مسیر پرتابی داریم:

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta$$

$$v_0 = \frac{x}{\cos \theta} \sqrt{\frac{g}{2(x \tan \theta - y)}} = \boxed{2.6 \times 10^2 \text{ m/s}}$$

$$x = (v_0 \cos \theta) t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} = \boxed{45 \text{ s}}$$

⑧ یک پرتابه با سرعت اولیه $v_0 = 30 \text{ m/s}$ از سطح زمین به سوی هدفی که در فاصله R از آن $(R = 20 \text{ m})$ قرار دارد شلیک می‌شود. مطلوب است حداقل و حداکثر زاویه‌ی شلیک که پرتابه اجازه می‌دهد به هدف برخورد کند را محاسبه کنید.



$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \rightarrow \sin 2\theta = \frac{Rg}{v_0^2} = 0.218$$

$$\sin \phi = \sin(\pi - \phi) ; 2\theta = \sin^{-1}(0.218) = 12.5^\circ \text{ \& } 167.4^\circ$$

$$\theta_{\min} = 6.25^\circ$$

$$\theta_{\max} = 83.7^\circ$$