جلسه سوم

روش جدایی پذیری

معادلات همگن درجه nام

مقدمه. در درس قبلی با معادله خطی $y' + f(x)y = r(x)$ و حل آن آشنا شده‌اید.

ملاحظه نمودید که با روش لاگرانژ ابتدا معادله همگن $y' + f(x)y = 0$ متناظر را با روش جدایی پذیر در حالت خاص حل نمودیم.

در ادامه می‌خواهیم روش جدایی پذیری را به دسته وسیع تر از معادلات غیرخطی البته در صورت امکان توسعه دهیم.

مراحل حل یک معادلات جدایی پذیر

برای حل یک معادله دیفرانسیل به خصوص معادلات غیرخطی همواره باید سه مرحله را در نظر داشت :

مرحله اول. شناخت معادله جدایی پذیر

مرحله دوم. روش حل معادله جدایی پذیر

مرحله سوم معادلاتی که به معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شوند

توجه : روش جدایی پذیری فقط برای معادلات مرتبه اول می باشد.

تعریف معادله جدایی پذیر (تفکیک پذیری) یک معادله

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

جدایی پذیر نامیده می‌شود، هرگاه بتوان تابع $f(x,y)$ را به صورت حاصل ضرب دو تابع با متغیرهای جدا از هم نوشت، یعنی :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

توجه ۱. به بیانی دیگر یک معادله مرتبه اول جدایی پذیر است، اگر بتوان آن را به صورت دیفرانسیلی زیر نوشت :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

مثال ۱ دو معادله زیر معادله جدایی پذیر هستند .

$$\frac{dy}{dx} = y \ln x \qquad \text{و} \qquad y' = e^{x-y}$$

سمت راست معادله دوم $e^{x-y} = e^x e^{-y}$.

مثال ۲ دو معادله زیر معادله جدایی پذیر نیستند. (چرا؟)

$$y' = \sin(x+y) \qquad \text{و} \qquad (x+y)dx + (x-y)dy = 0$$

راهنمایی با تعریف مقایسه کنید.

نکته. معادله خطی با ضرایب ثابت و بار ثابت $\frac{dy}{dt} + ay = b$ نیز جدایی پذیر است.

حل معادله جدایی پذیر

ظاهراً حل یک معادله جدایی پذیر خیلی ساده است، با جدا سازی متغیرها و انتقال عبارت به دو طرف تساوی، یعنی

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \qquad \text{و} \qquad M(x)dx = -N(y)dy$$

و یک انتگرال از طرفین حل معادله انجام می‌شود :

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \qquad \text{و} \qquad \int M(x)dx = -\int N(y)dy$$

سوال. چگونه می‌توان از طرفین رابطه فوق که دو متغیر x و y جدا از همدیگر هستند، انتگرال گرفت ؟

جواب. فرض کنید که دو تابع P و Q وجود دارند که :

$$Q'(y) = N(y) \quad \text{و} \quad P'(x) = M(x)$$

لذا معادله جدایی پذیر $M(x)dx + N(y)dy = 0$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$P'(x)dx + Q'(y)dy = 0 \quad \rightarrow \; P'(x) + Q'(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

برای قسمت دوم طبق قاعده زنجیرهای داریم $\frac{d}{dx}Q(y) = Q'(y)\frac{dy}{dx}$، لذا

$$\frac{d}{dx}(P(x) + Q(y)) = 0$$

حال با انتگرال از طرفین فقط بر حسب متغیر x داریم :

$$P(x) + Q(y) = c$$

مثال ۱ معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$ را حل می‌کنیم .

حل ملاحظه می کنید که یک معادله جدایی پذیر است، لذا داریم

$$\left(1 - y^2\right)dy = x^2 dx$$

حال با یک انتگرال ساده از طرفین جواب را خواهیم داشت $3y - y^3 = x^3 + C$.

روش دوم در جواب کسانی که هنوز نپذیرفتند که چطور می‌توان از دوطرف انتگرال گرفت. می‌توان نوشت :

$$\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$$

دومین جمله معادله مشتق $-x^3/3$ و اولین جمله (بنابر قاعده زنجیره‌ای) مشتق $y - y^3 / 3$ نسبت به xاست. لذا، معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx}(y - \frac{y^3}{3}) - \frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3}) = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dx}(y - \frac{y^3}{3} - \frac{x^3}{3}) = 0$$

دوباره نتیجه می‌گیریم $3y - y^3 - x^3 = c$.

توجه ملاحظه می‌کنید که جواب عمومی آن به صورت یک رابطه ضمنی است. همانند جواب معادله خطی به صورت یک تابع صریح نمی‌باشد.

نکته هر تابع مشتق پذیر $y = u(x)$ که در این جواب صدق کند، جواب معادله است.

مثال ۲ تعیین جواب خصوصی مساله (معادله به همراه یک شرط) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad , y(0) = -1$$

حل ابتدا جواب عمومی معادله جدایی پذیر را به دست می آوریم . معادله را می توان به صورت زیر نوشت :

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

با انتگرال از طرفین جواب عمومی حاصل می‌شود،

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

حال با استفاده از شرط اولیه داده شده در $y(0) = -1$، با $x = 0$ و $y = -1$ در جواب عمومی به دست می‌آوریم $c = 3$.

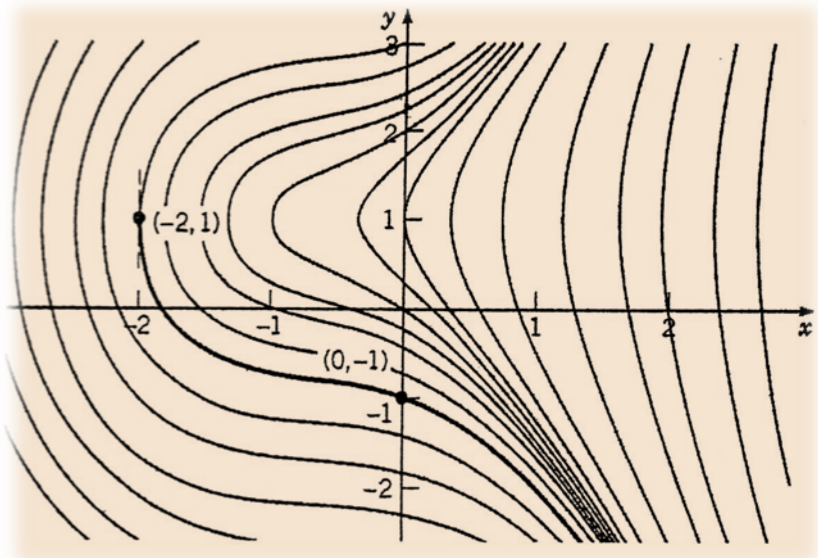
لذا جواب خصوصی برابر $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ میباشد.

بحث روی جواب مثال ۲ چون جواب عمومی بر حسب y یک معادله درجه دو است، لذا می توان نوشت :

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

دو جواب برای معادله فوق حاصل شده است، اما فقط یکی از آنها با توجه به شرط اولیه داده شده معتبر است.

$$y = u(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$



توجه اگر از شرط $y(x) = 3$ استفاده کنیم جواب مثبت آن قابل قبول است :

$$y = u(x) = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

مثال ۳ . تعیین جواب خصوصی یک مساله (معادله به همراه یک شرط) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2} \quad , \qquad y(0) = 1$$

حل. ابتدا جواب عمومی معادله جدایی پذیر را به دست می آوریم :

$$\frac{1 + 2y^2}{y} dy = \cos x dx$$

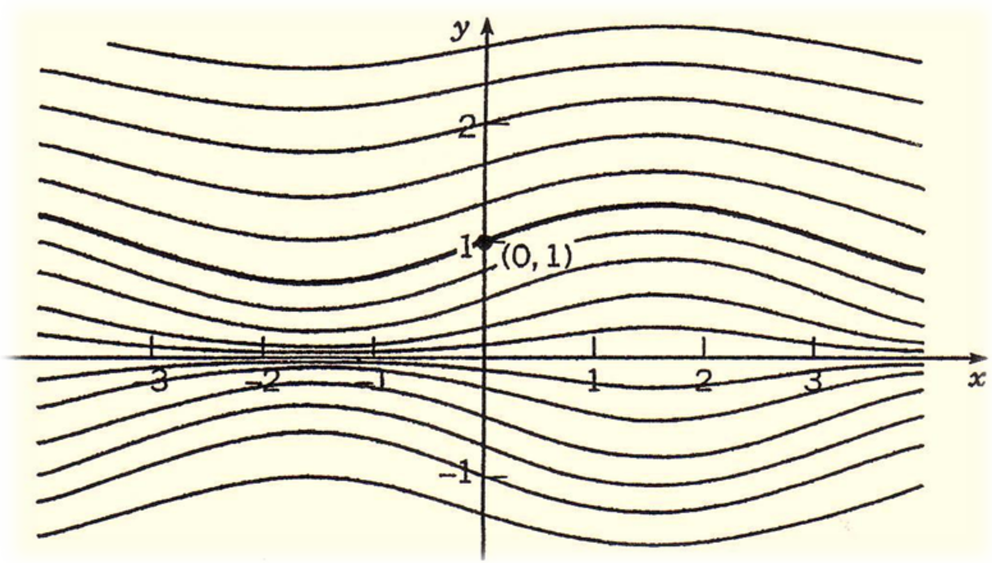
با انتگرال از طرفین جواب عمومی حاصل میشود

$$\ln | y | + y^2 = \sin x + c$$

برای برقرار بودن شرط $y(0) = 1$، در جواب عمومی $x = 0$ و $y = 1$ قرار می‌دهیم ، نتیجه می‌گیریم $c = 1$.

لذا جواب خصوصی برابر $\ln \left| y \right| + y^2 = \sin x + 1$ می‌باشد.

بحث روی جواب مثال ۳ در این مثال به سادگی نمی توان برای y یک جواب صریح را یافت (چرا؟)



از روی شکل مشخص است که هیچ جوابی از محور طول‌ها نمی‌گذرد، لذا بازه اعتبار جواب بالای محور طول‌ها می باشد. در نتیجه می‌توان قدرمطلق را حذف نمود. ملاحظه می‌کنید که جواب صریح هم وجود دارد .

معادله جدایی پذیر با تغییر متغیر

گاهی معادله به طور مستقیم جدایی پذیر نمی‌باشد، اما نسبت به یک تغییر متغیر جدایی پذیر می شود.

مثال معادله زیر را حل کنید.

$$y' = \sin^2(y - x + 1)$$

حل معادله مورد نظر جدایی پذیر نمی‌باشد، اما با تغییر متغیر $u = y - x + 1$ جدایی پذیر می‌شود.

چون از آن داریم $u' = y' - 1$ در این صورت خواهیم داشت :

$$\frac{du}{dx} + 1 = \sin^2 u \qquad \text{یا} \qquad \frac{du}{\sin^2 u - 1} = dx$$

ملاحظه می‌کنید اکنون با یک انتگرال از طرفین معادله حل می‌شود.

$$-\tan u = x + c \quad \text{یا} \quad x - \tan(y - x + 1) = c$$

نکته هر معادله به صورت $y' = f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $u = ax+by+c$ به یک معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شود.

معادلات همگن درجه nام

قبل از معرفی شناخت معادله همگن درجه nام باید تابع همگن درجه nام را یادآوری کنیم .

تعریف تابع همگن درجه nام تابع دومتغیره $f(x,y)$ همگن درجه n می‌باشد، اگر $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

مثال۱ چند تابع همگن :

تابع همگن درجه دوم $f(x,y) = x^2 + 2xy$

تابع همگن درجه اول $f(x,y) = x + y$

تابع همگن درجه صفر $f(x,y) = \tan(\frac{x}{y})$

مثال ۲ یک تابع غیرهمگن،

$$f(x,y) = x + y^2$$

چون اگر به جای x و y به ترتیب tx و ty قرار دهیم، نمی‌توان از توانی از t فاکتور گرفت.

تعریف معادله همگن درجه nام اگر $M(x,y)$ و $N(x,y)$ توابع همگن درجه nام باشند، آنگاه معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ نیز همگن درجه nام می‌باشد.

مثال ۱ یک معادله همگن درجه اول

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0$$

مثال ۲ معادله همگن درجه دوم

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

چون اگر به صورت دیفرانسیلی $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ بنویسیم، یک معادله همگن درجه دوم است.

نکته اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن درجه nام باشد، در این صورت می‌توان نوشت

$$y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)$$

لذا تابع $f(x,y)$ در صورت صریح $y'=f(x,y)$ همگن درجه صفر می‌باشد.

توجه عکس نکته برقرار نیست، یعنی اگر در صورت صریح معادله $y'=f(x,y)$ تابع $f(x,y)$ همگن درجه صفر باشد، معادله دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ همگن درجه nام نمی‌باشد.

تبدیل معادله همگن درجه nام به معادله جدایی پذیر. اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن درجه nام باشد، می‌دانیم که تابع $f(x,y)$ در صورت صریح $y'=f(x,y)$ همگن درجه صفر است، یعنی $f(tx,ty)=f(x,y)$ و لذا با انتخاب $t=1/x$ داریم :

$$y' = f(tx, ty) = f(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$$

پس سمت راست را می‌توان تابعی بر حسب $y \,/\, x$ به صورت $g(\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$ در نظر گرفت. بنابراین :

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$$

که با تغییر متغیر $u = y \,/\, x$ یا $y = xu$ داریم $y' = u + xu'$ ، که با جایگزینی در این معادله داریم

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) \quad \text{یا} \quad \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

ملاحظه می‌کنید، به یک معادله جدایی پذیری رسیدیم.

توجه معادله همگن درجه nام را با معادله خطی همگن که تابع بار سمت راست صفر است اشتباه نکنید.

مثال ۱ معادله زیر را حل کنید.

$$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$$

حل با نوشتن صورت صریح و با تقسیم صورت و مخرج بر x^2 داریم :

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

با انتخاب تغییر متغیر $u=y\ /\ x$ نتیجه می شود، که یک معادله جدایی پذیر است :

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}\quad,\qquad \frac{2udu}{1-u^2}=\frac{dx}{x}$$

حال با انتگرال از طرفین جواب مورد نظر به دست می آید.

$$\frac{1}{1-u^2}=cx$$

تمرین. معادله $(x^3+3x^2y+xy^2)dx-(x^2y+xy^2+y^3)dy=0$ را حل کنید.

معادله دوخطی همگن . صورت کلی آن به شکل زیر است

$$y' = \frac{a_0 x + b_0 y}{a_1 x + b_1 y}$$

یک معادله همگن درجه اول است، که با تقسیم صورت و مخرج بر x به صورت x / y در می آید.

مثال ۱ معادله $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ را حل کنید.

حل : با تقسیم صورت و مخرج بر x :

$$y' = \frac{1 + y / x}{1 - y / x}$$

با انتخاب تغییر متغیر $u = y / x$ نتیجه می شود،

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} \qquad \text{یا} \qquad \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}$$

ملاحظه می‌-کنید که یک معادله جدایی پذیر است، با انتگرال از طرفین داریم :

$$\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln(cx)$$

معادله دوخطی غیرهمگن . صورت کلی آن به شکل زیر است

$$y' = \frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1}$$

اگر دو ثابت c_0 و c_1 با هم صفر باشند، معادله همگن درجه اول است. اگر حداقل یکی از این دو ثابت غیر صفر باشد، معادله غیرهمگن است.

تبدیل به معادله جدایی پذیر این معادله با یک انتقال به یک معادله همگن درجه **اول** یا با یک تغییر متغیر خطی به طور مستقیم به یک معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شود.

نکته اگر دو ثابت c_0 و c_1 با هم صفر باشند، معادله همگن است. در غیر این صورت یکی از دو حالت دیگر اتفاق می-افتد.

حالت ۱ اگر دو خط $a_0x+b_0y+c_0=0$ و $a_1x+b_1y+c_1=0$ موازی باشند $\frac{a_0}{a_1}=\frac{b_0}{b_1}$،

با تغییر متغیر $a_0=ma_1$ و $b_0=mb_1$ معادله مستقیم جدایی پذیر می‌شود.

حالت ۲ اگر دو خط متقاطع باشند با انتقال محور مختصات xoy به XOY محل تقاطع دو خط، دو ثابت حذف می شوند، در این حالت معادله همگن درجه اول تبدیل می شود.

$$\begin{cases} a_0x+b_0y+c_0=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases} \rightarrow x=\alpha \ , \ y=\beta$$

تعبیر هندسی : تغییر متغیر $X=x+\alpha \ , \ Y=y+\beta$ برای انتقال محور مختصات می‌باشند.

مثال. معادله $y'=\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ را حل کنید.

حل. چون $\frac{b_0}{b_1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} = \frac{a_0}{a_1}$ ، لذا دو خط متقاطع هستند، پس

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \ , \quad y = 1$$

لذا با تغییر متغیر $X = x \ , \ Y = y + 1$ نتیجه می شود،

$$Y' = \frac{X + Y}{X - Y}$$

این معادله همگن درجه اول را در همین درس حل نمودیم، با انتخاب $u = Y \,/\, X$ جواب :

$$\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln(cx)$$

تمرین. معادله $(x + y - 1)dx - (2x + 4y + 1) = 0$ را حل کنید.

معادلات با آرگومان دوخطی صورت کلی آن به شکل زیر است.

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_0x + b_0y + c_0}{a_1x + b_1y + c_1})$$

برای حل همانند قبل آرگومان را به دوخطی همگن درجه اول یا جدایی پذیر تبدیل می کنیم.

تمرین. معادله $y' = \sin(\frac{x+y-1}{x-y+1})$ را جدایی پذیر کنید.