ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

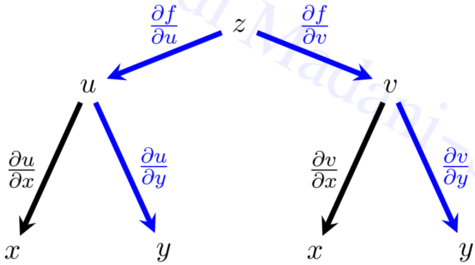
نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مثال

فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته با مشتقات جزیی اول و دوم پیوسته است. تابع $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x^2-y^2,xy)$ را بر حسب مشتقات جزیی f بنویسید.

پاسخ:
با فرض $u(x,y)=x^2-y^2$، $v(x,y)=xy$ و $z(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$،
باید $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ را بر حسب مشتقات جزیی f محاسبه کنیم. ابتدا $\frac{\partial z}{\partial y}$ را می‌یابیم:



$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2yf_1(u,v)+xf_2(u,v)$$

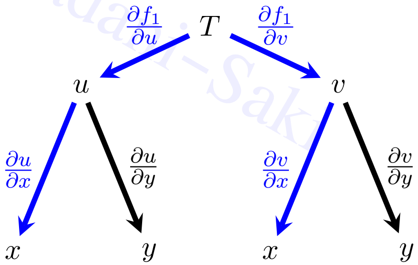
ادامه‌ی مثال

داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2y f_1(u,v)) + \frac{\partial}{\partial x}(x f_2(u,v)) \\ &= -2y \frac{\partial}{\partial x} f_1(u,v) + f_2(u,v) + x \frac{\partial}{\partial x} f_2(u,v)\end{aligned}$$

حال، قرار می‌دهیم $T(x,y) = f_1(u(x,y), v(x,y))$. در این صورت، داریم:

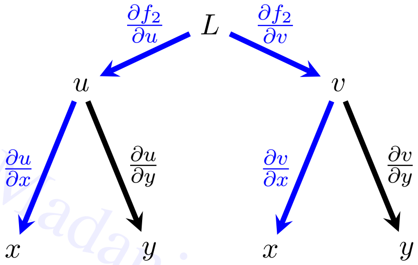
$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2x f_{11}(u,v) + y f_{12}(u,v)\end{aligned}$$



ادامه‌ی مثال

به طور مشابه، با فرض $L(x,y)=f_2(u(x,y),v(x,y))$، داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=2xf_{21}(u,v)+yf_{22}(u,v)$$



پس، در نهایت داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2y\left(2xf_{11}(u,v)+yf_{12}(u,v)\right)+f_2(u,v)$$
$$+x\left(2xf_{21}(u,v)+yf_{22}(u,v)\right)$$
$$=f_2(u,v)-4xyf_{11}(u,v)+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}(u,v)$$

مثال

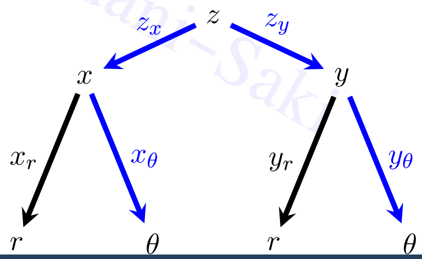
فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی پیوسته و با مشتقات جزیی اول و دوم پیوسته باشد. تساوی $r^2 z_{rr} + z_\theta = 0$ را بر حسب مختصات دکارتی بیان کنید.

پاسخ: داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_r = \cos(\theta) \\ y_r = \sin(\theta) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_\theta = -r\sin(\theta) = -y \\ y_\theta = r\cos(\theta) = x \end{cases}$$

بنابراین، از آنجا که $z(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$، داریم:

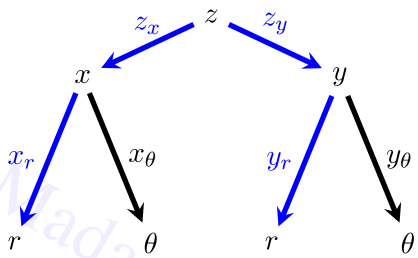
$$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -y z_x + x z_y$$



ادامه‌ی مثال

هم‌چنین، داریم:

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r$$
$$= \cos(\theta) z_x + \sin(\theta) z_y$$



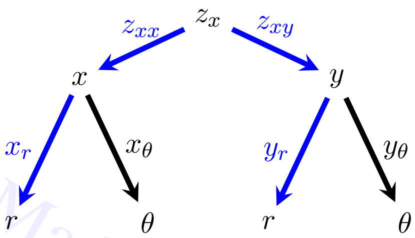
حال، داریم:

$$z_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} z_r = \frac{\partial}{\partial r}(\cos(\theta) z_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\sin(\theta) z_y)$$
$$= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} z_x + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} z_y$$

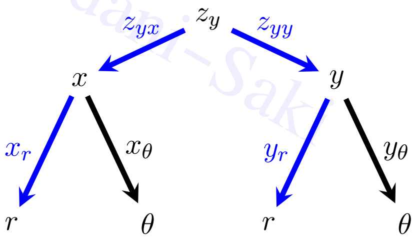
ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial r} z_x = z_{xx} x_r + z_{xy} y_r$$
$$= \cos(\theta) z_{xx} + \sin(\theta) z_{xy}$$



$$\frac{\partial}{\partial r} z_y = z_{yx} x_r + z_{yy} y_r$$
$$= \cos(\theta) z_{yx} + \sin(\theta) z_{yy}$$



ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned} z_{rr} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}z_x + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}z_y \\ &= \cos(\theta)\left(\cos(\theta)z_{xx} + \sin(\theta)z_{xy}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)z_{yx} + \sin(\theta)z_{yy}\right) \\ &= \cos^2(\theta)z_{xx} + \sin^2(\theta)z_{yy} + 2\sin(\theta)\cos(\theta)z_{xy} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} r^2 z_{rr} &= r^2\cos^2(\theta)z_{xx} + r^2\sin^2(\theta)z_{yy} + 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)z_{xy} \\ &= x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} + 2xyz_{xy} \end{aligned}$$

و از این‌رو:

$$r^2 z_{rr} + z_\theta = 0 \implies$$

$$(x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} + 2xyz_{xy}) + (-yz_x + xz_y) = 0$$

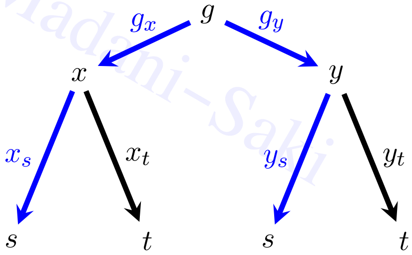
مثال

فرض کنید $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است با $g(s,t)=f(s^2-t^2,t^2-s^2)$، که در آن f دارای مشتقات جزیی اول پیوسته است. نشان دهید که $t\frac{\partial g}{\partial s}+s\frac{\partial g}{\partial t}=0$.

پاسخ:

با فرض $x(s,t)=s^2-t^2$، $y(s,t)=t^2-s^2$، و $g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$، داریم:

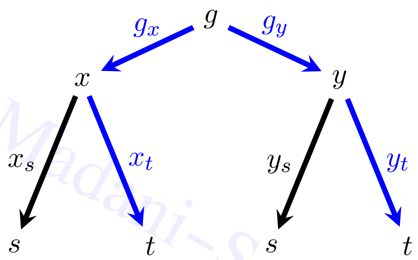
$$\begin{aligned} g_s &= g_x x_s + g_y y_s \\ &= 2sg_x - 2sg_y \end{aligned}$$



ادامه‌ی مثال

به طور مشابه، داریم:

$$g_t = g_x x_t + g_y y_t$$
$$= -2tg_x + 2tg_y$$



بنابراین، داریم:

$$tg_s + sg_t = t(2sg_x - 2sg_y) + s(-2tg_x + 2tg_y) = 0$$

مثال

فرض کنید که $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع به طور مثبت همگن از درجه‌ی k است، طوری که مشتقات جزیی اول آن موجود هستند. نشان دهید که مشتقات جزیی اول f به طور مثبت همگن از درجه‌ی $k-1$ هستند.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم که f_1 همگن از درجه‌ی $k-1$ است. فرض می‌کنیم که $P=(a_1,\ldots,a_n)\in D$. به‌ازای هر $t>0$ داریم:

$$f_1(tP)=\lim_{h\to 0}\frac{f(ta_1+h,ta_2,\ldots,ta_n)-f(ta_1,\ldots,ta_n)}{h}$$

حال، با تغییر متغیر $h=th'$، می‌دانیم $h\to 0$ معادل است با $h'\to 0$. پس داریم:

$$\begin{aligned} f_1(tP) &= \lim_{h'\to 0}\frac{f(ta_1+th',ta_2,\ldots,ta_n)-f(ta_1,\ldots,ta_n)}{th'} \\ &= \lim_{h'\to 0}\frac{t^k\left(f(a_1+h',a_2,\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n)\right)}{th'} = t^{k-1}f_1(P) \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه، سایر مشتقات جزیی اول f، به طور مثبت همگن از درجه‌ی $k-1$ هستند.