ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مثال

معادله‌ی دایره‌ی بوسان $y = x^2$ را در $(0,0)$ به‌دست آورید.

پاسخ:

نمایش پارامتری $r(t) = (t, t^2)$ را از نمودار $y = x^2$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\kappa(t) = \frac{|y''(t)|}{(1 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \kappa(0) = 2, \quad \rho(0) = \frac{1}{2}$$

داریم:

$$r'(t) = (1, 2t) \implies T(0) = \frac{r'(0)}{|r'(0)|} = (1,0) = i$$

هم‌چنین، داریم:

$$r''(t) = (0,2) = 2j \implies B(0) = \frac{r'(0) \times r''(0)}{|r'(0) \times r''(0)|} = \frac{i \times (2j)}{|i \times (2j)|} = k$$

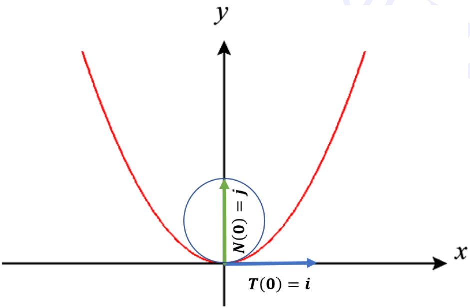
$$\implies N(0) = B(0) \times T(0) = k \times i = j$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$\text{مرکز انحنا} = r_c(0) = r(0) + \rho(0)N(0) = (0,0) + \frac{1}{2}(0,1) = (0, \frac{1}{2})$$

پس، معادله‌ی دایره‌ی بوسان خم در $(0,0)$ به صورت زیر است:



$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

مثال

ذره‌ای روی فصل مشترک استوانه‌های $y=-x^2$ و $z=x^2$ در جهتی که x افزایش می‌یابد، در حرکت است (همه‌ی فاصله‌ها بر حسب سانتی‌متر هستند). تندی این ذره، در لحظه‌ای که در نقطه‌ی $(1,-1,1)$ است، برابر است با $9\frac{cm}{s}$ و این تندی با آهنگ $3\frac{cm}{s^2}$ افزایش می‌یابد. شتاب و سرعت ذره را در این لحظه به‌دست آورید.

پاسخ: بنابر فرض، داریم $y(t)=-x(t)^2$ و $z(t)=x(t)^2$. پس منحنی $\gamma(t)$ که بردار مکان حرکت ذره را در لحظه‌ی t مشخص می‌کند، به صورت زیر است:

$$\gamma(t)=(x(t),-x(t)^2,x(t)^2)$$

بنابراین، داریم:

$$\mathrm{v}(t)=(x'(t),-2x(t)x'(t),2x(t)x'(t))=x'(t)(1,-2x(t),2x(t))$$

$$a(t)=(x''(t),-2x'(t)^2-2x(t)x''(t),2x'(t)^2+2x(t)x''(t))$$

ادامه‌ی مثال

گیریم t_0 لحظه‌ای است که ذره در $(1,-1,1)$ است. پس، $\gamma(t_0)=(1,-1,1)$، که نتیجه می‌دهد $x(t_0)=1$. حال، داریم:

$$9=\nu(t_0)=|\mathrm{v}(t_0)|=|x'(t_0)|\sqrt{1+4x(t_0)^2+4x(t_0)^2}=3|x'(t_0)|$$

بنابراین $|x'(t_0)|=3$. بنابر فرض، $x(t)$ با افزایش t افزایش می‌یابد. پس $x'(t_0)>0$، و از این‌رو $x'(t_0)=3$. در نهایت، داریم:

$$\mathrm{v}(t_0)=x'(t_0)(1,-2x(t_0),2x(t_0))=3(1,-2,2)$$

بنابر فرض، داریم $\nu'(t_0)=3$. از این‌رو، داریم:

$$\nu'(t)=\left(x'(t)\sqrt{1+8x(t)^2}\right)'=x''(t)\sqrt{1+8x(t)^2}+\frac{16x'(t)^2x(t)}{2\sqrt{1+8x(t)^2}}$$

$$\implies 3=\nu'(t_0)=3x''(t_0)+\frac{144}{6}\implies x''(t_0)=-7$$

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$a(t) = (x''(t), -2x'(t)^2 - 2x(t)x''(t), 2x'(t)^2 + 2x(t)x''(t)) \implies$$

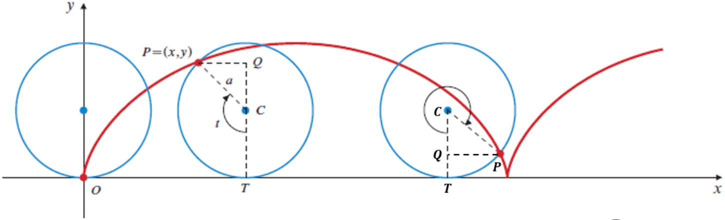
$$a(t_0) = (x''(t_0), -2x'(t_0)^2 - 2x(t_0)x''(t_0), 2x'(t_0)^2 + 2x(t_0)x''(t_0))$$

$$= (-7, -4, 4)$$

مثال (چرخزاد یا Cycloid)

حرکت یک ذره روی دایره‌ای به شعاع a را که روی سطح زمین می‌غلتد، پارامتری کنید.

پاسخ:



داریم $at = |\widehat{TP}| = |OT|$. فرض کنید t مانند شکل بالا است و $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ با $r(t) = (x(t), y(t))$ منحنی حرکت ذره است. اگر P روی نیم‌دایره‌ی چپ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x(t) = |OT| - |PQ| = at - a\sin(\pi - t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a + |CQ| = a + a\cos(\pi - t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال (چرخزاد یا Cycloid)

در غیر این صورت، اگر P در نیم‌دایره‌ی راست باشد، آنگاه:

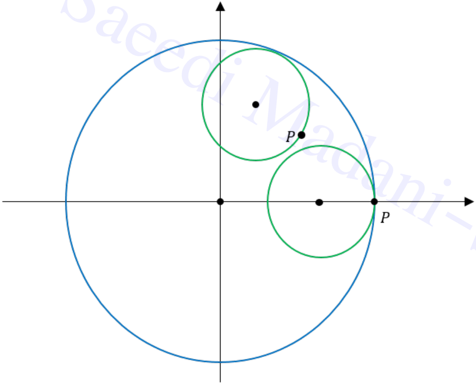
$$\begin{cases} x(t) = |OT| + |PQ| = at + a\sin(2\pi - t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a - |CQ| = a - a\cos(2\pi - t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

پس، در هر صورت داریم:

$$\gamma(t) = (a(t - \sin(t), a(1 - \cos(t)))$$

مثال

حرکت یک ذره روی دایره‌ای به شعاع b که درون دایره‌ای به شعاع a مطابق شکل می‌غلتد را پارامتری کنید.



ادامه‌ی مثال

پاسخ:

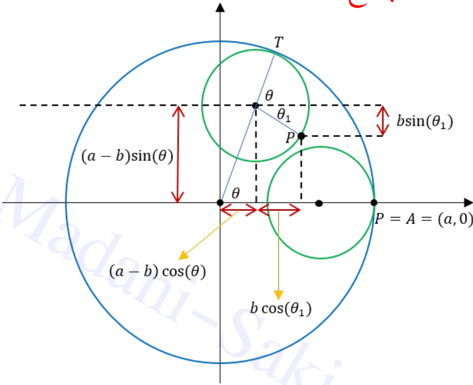
توجه کنید که

$$\underbrace{|\widehat{AT}|}_{\text{روی دایره‌ی بزرگ}} = \underbrace{|\widehat{PT}|}_{\text{روی دایره‌ی کوچک}}$$

در حالی که

$$|\widehat{AT}| = a\theta, \quad |\widehat{PT}| = b(\theta+\theta_1)$$

بنابراین، $a\theta = b(\theta+\theta_1)$ که نتیجه می‌دهد $\theta_1 = \left(\frac{a-b}{b}\right)\theta$. حال، اگر $\gamma(\theta) = (x_P(\theta), y_P(\theta))$ منحنی حرکت P باشد، با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} x_P(\theta) = (a-b)\cos(\theta) + b\cos(\theta_1) = (a-b)\cos(\theta) + b\cos\left(\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta\right) \\ y_p(\theta) = (a-b)\sin(\theta) - b\sin(\theta_1) = (a-b)\sin(\theta) + b\sin\left(\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta\right) \end{cases}$$

مثال

فرض کنید که $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. تابع برداری $\frac{d^2T}{ds^2} \times \frac{dN}{ds}$ را بر حسب T، N و B بنویسید.

پاسخ: داریم $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ و $N'(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)$. بنابراین:

$$T''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s)$$

از این‌رو داریم:

$$\begin{aligned}
N'(s) \times T''(s) &= N'(s) \times \big(\kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s)\big) \\
&= \kappa'(s)\left(N'(s) \times N(s)\right) \\
&= \kappa'(s)\left((\tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)) \times N(s)\right) \\
&= \kappa'(s)\left(\tau(s)\left(B(s) \times N(s)\right) - \kappa(s)\left(T(s) \times N(s)\right)\right) \\
&= \left(-\kappa'(s)\tau(s)\right)T(s) + \left(-\kappa'(s)\kappa(s)\right)B(s)
\end{aligned}$$

مثال

خم $\mathcal{C}$ را با معادلات پارامتری $x(t)=t$، $y(t)=t^2$ و $z(t)=t^2$ در نظر بگیرید. در چه نقاطی از $\mathcal{C}$، خطوط مماس بر خم با صفحه‌ی $x+2y+z=1$ موازی هستند؟

پاسخ:

داریم:

$$\gamma(t)=(t,t^2,t^2) \implies \gamma'(t)=(1,2t,2t)$$

از آنجا که $T(t)$ با $\gamma'(t)$ موازی است، باید همه‌ی نقاط $\gamma(t)$ را بیابیم که $\gamma'(t)$ بر بردار نرمال صفحه‌ی داده‌شده، یعنی $(1,2,1)$، عمود است. داریم:

$$\gamma'(t).(1,2,1)=0 \iff 1+4t+2t=0 \iff t=-\frac{1}{6}$$

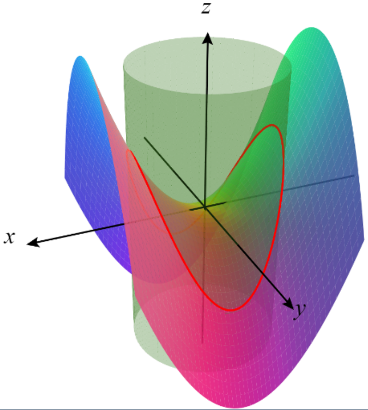
پس، تنها نقطه‌ی مطلوب به صورت زیر است:

$$\gamma\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{36},\frac{1}{36}\right)$$

مثال

برای خم حاصل از اشتراک رویه‌های $x^2+y^2=1$ و $z=x^2-y^2$ یک نمایش پارامتری ارائه کنید. سپس، با استفاده از این نمایش پارامتری، کنج فرنه، انحنا، مرکز انحنا، تاب و صفحه‌ی بوسان خم را در نقطه‌ی $(1,0,1)$ بیابید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

توجه کنید که z در $x^2+y^2=1$ متغیر آزاد است. از این‌رو، ابتدا $x^2+y^2=1$ را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$x(t)^2+y(t)^2=1 \xRightarrow[\text{یک نمایش پارامتری ارائه می‌کنیم}]{} x(t)=\cos(t), \quad y(t)=\sin(t)$$

که در آن $t\in[0,2\pi]$. بنابراین، داریم:

$$z(t)=x(t)^2-y(t)^2=\cos^2(t)-\sin^2(t)=\cos(2t)$$

از این‌رو، خم فصل مشترک به صورت زیر قابل پارامتری‌سازی است:

$$\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t),\cos(2t)), \quad t\in[0,2\pi]$$

ادامه‌ی مثال

توجه کنید که $\gamma(0) = (1, 0, 1)$. از این‌رو، داریم:

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), -2\sin(2t)) \implies \gamma'(0) = (0, 1, 0)$$

$$\gamma''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), -4\cos(2t)) \implies \gamma''(0) = (-1, 0, -4)$$

$$\gamma'''(t) = (\sin(t), -\cos(t), 8\sin(2t)) \implies \gamma'''(0) = (0, -1, 0)$$

$$\gamma'(0) \times \gamma''(0) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} = (-4, 0, 1) \implies$$

$$|\gamma'(0) \times \gamma''(0)| = \sqrt{17}$$

$$T(0) = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = \gamma'(0) = (0, 1, 0)$$

ادامه‌ی مثال

هم‌چنین، داریم:

$$B(0) = \frac{\gamma'(0) \times \gamma''(0)}{|\gamma'(0) \times \gamma''(0)|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4, 0, 1)$$

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{-4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4)$$

$$\kappa(0) = \frac{|\gamma'(0) \times \gamma''(0)|}{|\gamma'(0)|^3} = \sqrt{17}, \qquad \rho(0) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$(\gamma'(0) \times \gamma''(0)).\gamma'''(0) = (-4, 0, 1).(0, -1, 0) = 0$$

$$\tau(0) = \frac{(\gamma'(0) \times \gamma''(0)).\gamma'''(0)}{|\gamma'(0) \times \gamma''(0)|^2} = 0$$

ادامه‌ی مثال

حال، معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم را در $(1,0,1)$ می‌یابیم. توجه کنید که این صفحه از $(1,0,1) = \gamma(0)$ می‌گذرد و بردار نرمال آن $B(0) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4,0,1)$ است. بنابراین، این صفحه مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ است که:

$$\begin{aligned} B(0).((x,y,z)-(1,0,1)) = 0 &\implies (-4,0,1).(x-1,y,z-1) = 0 \\ &\implies -4(x-1)+(z-1) = 0 \\ &\implies -4x+z = -3 \end{aligned}$$

در نهایت، مرکز انحنا در $(1,0,1)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \gamma_c(0) &= \gamma(0)+\rho(0)N(0) = (1,0,1)+\frac{1}{\sqrt{17}}\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}(1,0,4)\right) \\ &= (1,0,1)-\left(\frac{1}{17},0,\frac{4}{17}\right) = \left(\frac{16}{17},0,\frac{13}{17}\right) \end{aligned}$$