اشکان شکیبا
تمرینات ۱.۱ و ۲.۱
۹۹۳۱۰۲۰
Subject: Year: Month: Date:

۳) الف) (اصل ضرب) $۴ \times ۱۲ \times ۳ \times ۲ = ۲۸۸$

ب) $۴ \times ۱ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

۴) الف) $۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۵۰۴۰$

ب) I) $\binom{۳}{۱} \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۱۵۱۲$

II) $\binom{۳}{۱} \times \binom{۷}{۳} \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۵۲۰$

III) $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۸۴۰$: بدون هیچ پزشک

حداقل یک پزشک = کل حالات − بدون هیچ پزشک = ۴۲۰۰

۱۰) ۱۶ شی داریم (۱۵ کتاب و یک جداکننده قفسه‌ها) که به !۱۶ حالت در کنار یکدیگر چیده می‌شوند، اما حالتی که شی جداکننده در ابتدا یا انتهای لیست باشد مورد قبول نیست که هر یک از این حالات به !۱۵ روش قابل انجام اند، بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$!۱۶ - (۲ \times !۱۵) = ۱۴ \times !۱۵$

Mahdi

Subject: Year: Month: Date:

۱۵) پنج نماد e و چهار نماد غیر e داریم، پس باید دنباله‌ای با آغاز و پایان e که در آن e ها یک درمیان تکرار می‌شوند تشکیل دهیم:

$e \square e \square e \square e \square e$

$\hookrightarrow ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

۱۶) برای هر یک از ~~~~ ۲۵ نماد، ۴۰ حالت وجود دارد؛

بنابراین تعداد کل حالات: $۴۰^{۲۵}$

در حالت دوم، نماد نخستین و پایانی ۴۰ حالت و سایر نماد ها ۳۰ حالت دارند؛ بنابراین: $۴۰^{۲} \times ۳۰^{۲۳}$

۲۴) رقم سمت چپ تنهای توانند ۳ یا ۴ باشد و برای سایر ارقام محدودیتی وجود ندارد؛ بنابراین:

$$\frac{۳ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{\underset{\text{تعداد ۴ ها}}{۲!} \times \underset{\text{تعداد ۵ ها}}{۲!}} = ۵۴۰ \quad (\text{حالت متمم})$$

حالات مطلوب = کل حالات − حالت متمم $= \frac{۷!}{۲!۲!} - ۵۴۰ = ۷۲۰$

Mahdi

۲۵) تعداد حالات انجام این کار مشابه تعداد حالات چینش ۴ تا R، ۳ تا W، ۳ تا B و ۲ تا G است که برابر است با:

$$\frac{12!}{4!\,3!\,3!\,2!} = 277200$$

۲۸) تعداد حالات مشابه چینش هفت R و هفت U است

$$\frac{14!}{7!\,7!} = 3432$$

در حالت بعدی نیز هفت R و هفت U نیاز داریم، بنابراین تعداد حالات مشابه است و به طور کلی می توان گفت برای رفتن از (a,b) به (c,d) ، $\frac{\big((c-a)+(d-b)\big)!}{(c-a)!\,(d-b)!}$ حالت داریم.

۲۹) الف) در اینجا نیز می توان مسئله را به شکل چینش دو H، یک V و هفت A مدل سازی کرد؛ بنابراین:

$$\frac{10!}{2!\,1!\,7!} = 360$$

Subject: Year: Month: Date:

ب) به شکل مشابه:

$$\frac{10!}{7!\ 1!\ 2!} = 360$$

پ) تعداد حالات رفتن از (a,b,c) به (d,e,f):

$$\frac{((d-a)+(e-b)+(f-c))!}{(d-a)!\ (e-b)!\ (f-c)!}$$

۳۰) الف) $counter = (12 \times 1) + (6 \times 2) + (8 \times 3) = 48$

ب) اصل جمع، زیرا جدا از هم انجام می شوند.

۳۱) الف) $12 \times 6 \times 8 = 576$

ب) اصل ضرب، زیرا همزمان باهم انجام می شوند.

۳۸) الف) بدون در نظر گرفتن یکسان بودن شکل (الف) و (ب)، $8!$ حالت داریم که با متناظر شدن هر چهار تا از این حالات، $\frac{8!}{4} = 10080$ حالت خواهیم داشت.

ب)

$$\frac{\underbrace{8}_{\text{مکان A}} \times \underbrace{5}_{\text{مکان B}} \times 6!}{4} = 10 \times 6!$$

پ) A هر جا که باشد، دو خانه

مجاور آن و یک خانه روبروی آن قابل استفاده برای B نیستند؛

بنابراین: $\frac{۸ \times ۴ \times ۶!}{۴} = ۸ \times ۶!$

تمرینات ۳.۱

۱) $\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۴!\,۲!} = ۱۵$

ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce,

cf, de, df, ef

۴) الف) هر یک از نقاط ۲ حالت دارند؛ بنابراین: $۲^{۶} - ۱$

(حداقل یک نقطه برجسته داریم)

ب) $\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!\,۳!} = ۲۰$

پ) $\binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۶} = ۳۱$

ت) $\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$

Subject: Year: Month: Date:

۶)

$$\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}\left(\frac{n}{n-2}+\frac{1}{1}\right)=\frac{(n-1)!}{2\times(n-3)!}\times\frac{2(n-1)}{n-2}$$

$$=\frac{(n-1)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=(n-1)^2$$

۷) الف)

$$\binom{20}{12}=\frac{20!}{8!\ 12!}=125970$$

ب)

$$\binom{10}{6}\times\binom{10}{6}=\left(\frac{10!}{4!\ 6!}\right)^2=44100$$

پ)

$$\left(\binom{10}{2}\times\binom{10}{10}\right)+\left(\binom{10}{4}\times\binom{10}{8}\right)+\left(\binom{10}{6}\times\binom{10}{6}\right)$$

$$+\left(\binom{10}{8}\times\binom{10}{4}\right)+\left(\binom{10}{10}\times\binom{10}{2}\right)=\sum_{i=1}^{5}\binom{10}{2i}\binom{10}{12-2i}$$

ت)

$$\left(\binom{10}{10}\times\binom{10}{2}\right)+\left(\binom{10}{9}\times\binom{10}{3}\right)+\left(\binom{10}{8}\times\binom{10}{4}\right)$$

$$+\left(\binom{10}{7}\times\binom{10}{5}\right)=\sum_{i=7}^{10}\binom{10}{i}\binom{10}{12-i}$$

ث)

$$\left(\binom{10}{8}\times\binom{10}{4}\right)+\left(\binom{10}{9}\times\binom{10}{3}\right)+\left(\binom{10}{10}\times\binom{10}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=8}^{10}\binom{10}{i}\binom{10}{12-i}$$

۱۳) الف) $\binom{12}{3}\times\binom{9}{3}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}$

ب) $\binom{12}{4}\times\binom{8}{4}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$

۱۷) الف) هر دو نقطه یک خط را مشخص می‌کنند، بنابراین به

تعداد $\binom{15}{2}$ حالت داریم.

ب) تعداد مثلث‌ها / صفحه‌ها: $\binom{25}{3}$

تعداد چهاروجهی‌ها: $\binom{25}{4}$

۲۰) الف) $\binom{10}{4}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}$

ب) $\left(\binom{10}{8}\times 2^2\right)+\left(\binom{10}{9}\times 2^1\right)+\left(\binom{10}{10}\right)$

پ) حالت‌های گوناگون تشکیل ۴:

I) چهار تا ۱: $\binom{10}{4}$

II) دو تا ۱ و یک ۲: $\binom{10}{2}\times\binom{8}{1}$

III) دو تا ۲: $\binom{10}{2}$

که در حالات فوق، بقیه اعضا همگی صفرند.

۲۱) الف) $\binom{10}{1}+\binom{10}{1}\binom{9}{2}+\binom{10}{3}=220$

ب) $\binom{10}{4}+\binom{10}{2}+\binom{10}{1}\binom{9}{2}+\binom{10}{1}\binom{9}{1}=705$

پ) تعداد زوجی از جایگاه‌ها را برای ارقام فرد در نظر می‌گیریم

که برابر است با $\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{2i}$ که هر توزیع، 2^{10} حالت دارد

(جایگاه‌های فرد دو حالت ۱ و ۳ و جایگاه‌های زوج دو حالت

۰ و ۲) بنابراین مجموعاً $\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{2i}\times 2^{10}$ حالت وجود دارد.

۲۵) الف) $\binom{۱۲}{۹}\times\binom{۳}{۳} = ۲۲۰$

ب) $\binom{۱۲}{۹}\times\binom{۳}{۳}\times ۲^{۳} = ۱۷۶۰$

پ) $\binom{۱۲}{۹}\times\binom{۳}{۳}\times ۲^{۹}\times(-۳)^{۳} = -۳۰۴۱۲۸۰$

۲۸) الف) $\binom{۱۰}{۲}\times\binom{۸}{۲}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۲}$

ب) $\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۱۰}{۲}\times\binom{۸}{۲}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۴}\times ۲^{۲}\times(-۱)^{۲}\times ۳^{۲}\times(-۲)^{۴}$

پ) $\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۱۰}{۲}\times\binom{۸}{۲}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۴}\times(-۲)^{۲}+۵^{۲}+۳^{۴}$

۳۴) این معادله می‌تواند راه حلی برای مسئله زیر باشد:

مسئله: n سطل متمایز داریم که تعداد دلخواهی از آنها را می‌توان با رنگ آبی یا قرمز پر کرد. این کار مجموعاً چند حالت دارد؟

اما می‌دانیم که می‌توان از زاویه‌ای دیگر به مسئله نگاه کرد:

آبی، قرمز و یا خالی. از آن‌جایی که تعداد سطل‌ها n تاست، بنابراین ۳^{n} حالت داریم.

از این رو می‌توان نتیجه گرفت معادله صورت سوال برابر ۳^{n} است.

Subject: Year: Month: Date:

تمرینات ۴.۱

۱) الف)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$$

$$\text{تعداد پاسخ‌ها} = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10}$$

ب)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10-(5\times1)=5$$

$$\text{تعداد پاسخ‌ها} = \binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5}$$

پ)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10-2=8$$

$$\text{تعداد پاسخ‌ها} = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8}$$

۵) الف) برای هر سکه غیر یک دلاری، ۲ انتخاب وجود دارد؛ بودن یا نبودن! که در صورت نبودن، آن را با سکه ای یک دلاری جایگزین می کنیم؛ بنابراین به 2^5 طریق

ب) مشابه پرسش الف، هر یک از n شی متمایز ۲ حالت دارد، بنابراین 2^n

۷) الف)

$$\binom{4+32-1}{32} = \binom{35}{32}$$

Mahdi

ب) $\binom{۴+(۳۲-(۴\times۱))-۱}{۳۲-(۴\times۱)} = \binom{۳۱}{۲۸}$

پ) $\binom{۴+(۳۲-۵-۵-۷-۷)-۱}{(۳۲-۵-۵-۷-۷)} = \binom{۱۱}{۸}$

ت) $\binom{۴+(۳۲-۸-۸-۸-۸)-۱}{(۳۲-۸-۸-۸-۸)} = \binom{۳}{۰} = ۱$

ث) $\binom{۴+(۳۲+(۴\times۲))-۱}{(۳۲+(۴\times۲))} = \binom{۴۳}{۴۰}$

ج) $۰ < x_i : \binom{۴+(۳۲-۴)-۱}{۳۲-۴} = \binom{۳۱}{۲۸}$

$۰ < x_i \;\&\; ۲۵ < x_۴ : \binom{۴+(۳۲-۲۹)-۱}{۳۲-۲۹} = \binom{۶}{۳}$

تعداد پاسخ ها $= \binom{۳۱}{۲۸} - \binom{۶}{۳}$

۱۲) الف) $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + t = ۳۹$

تعداد پاسخ ها $= \binom{۶+۳۹-۱}{۳۹} = \binom{۴۴}{۳۹}$

ب) $y_i = x_i + ۳ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ < ۵۵$

$\Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ + t = ۵۴ \Rightarrow \binom{۶+۵۴-۱}{۵۴} = \binom{۵۹}{۵۴}$

۱۴) الف) $\binom{8}{2}\times\binom{6}{4}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}\times 3^2\times 3^4$

ب) $V+W+X+Y+Z=8 \Rightarrow \binom{5+8-1}{8}=\binom{12}{8}$

۱۵) توزیع جایگاه‌ها میان قفسه‌ها: $\binom{4+(24-4)-1}{24-4}=\binom{23}{20}$

توزیع کتاب‌ها در جایگاه‌ها: $24!$

پاسخ $=\binom{23}{20}\times 24!$

۱۶) $\binom{19+(n-19)-1}{n-19}=\binom{64+(n-64)-1}{n-64}$

$$\Rightarrow \binom{n-1}{n-19}=\binom{n-1}{n-64} \xrightarrow{\text{۲ حالت}} \begin{cases} n-19=n-64 \quad \times \\ (n-19)+(n-64)=n-1 \\ \Rightarrow n=83 \end{cases}$$

۱۹) الف) $5\times5\times5\times\binom{5+25-1}{25}=5^3\times\binom{29}{25}$

ب) $\left(4\binom{23}{20}+4^2\binom{18}{15}+4^2\binom{13}{10}+4^3\binom{8}{5}\right)$

برای ۲۰ تست

$$+\left(4^2\binom{28}{25}+4^2\binom{18}{15}+4^2\binom{13}{10}+4^2\binom{8}{5}+4^3\right)$$

۲۱) می دانیم $1 \le m \le k \le j \le i \le 20$ ؛ بنابراین می توان با در نظر گرفتن بیشینه مقدار هر یک از متغیرها، به معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{19} + x_{20} = 4$ رسید که تعداد پاسخ های آن برابر تعداد حالات گوناگون متغیرها و اجرای Writeln است.

$$\text{تعداد پاسخ ها} = \binom{20+4-1}{4} = \binom{23}{4}$$

۲۳) از آنجایی که $1 \le k \le j \le i \le 10$ و مشابه مسئله قبل، $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$ بار متغیر increment افزایش می یابد و به ازای هر بار اجرای آن، متغیر sum به اندازه آن افزایش می یابد. بنابراین مقدار sum برابر حاصل جمع اعداد ۱ تا $220 = \binom{12}{3}$ است؛ یعنی ۲۴۳۱۰

۲۵) الف) اگر چهار حلقه تو در تو با متغیرهای $1 \le m \le k \le j \le i \le n$ داشته باشیم، برای محاسبه تعداد اجرا شدن درونی ترین حلقه دو حالت داریم:

I) مشابه مسائل قبل، $\binom{n+4-1}{4} = \binom{n+3}{4}$.

II) به ازای هر مقدار i برای سایر متغیرها $\binom{i+2}{3} = \binom{i+3-1}{3}$

حالت داریم؛ بنابراین $\binom{n+3}{4} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3}$

ب) $$\binom{n+3}{4} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3} \Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)(i+2)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \sum_{i=1}^{n} (i^3 + 3i^2 + 2i)$$

همچنین می‌توان ثابت کرد:

$$\binom{n+2}{3} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

بنابراین:

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+ 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n(n+1)(n^2+5n+6-4n-6)}{4} = \frac{1}{4}(n+1)^2 n^2$$

Subject:

Year: Month: Date:

۲۷) الف) $x_1+x_2+\dots+x_n = m-(n\times 1) = m-n$

$$\text{تعداد پاسخ ها} = \binom{(m-n)+n-1}{m-n} = \binom{m-1}{m-n}$$

$$(m-1)-(m-n) = n-1 \Rightarrow \binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$$

ب) $x_1+x_2+\dots+x_n = m-(n\times r) = m-nr$

$$\text{تعداد پاسخ ها} = \binom{n+(m-nr)-1}{m-nr} = \binom{m-1+n(1-r)}{m-nr}$$

$$= \binom{m-1+n(1-r)}{n-1}$$

تمرینات تکمیلی

۲) الف) 5^9 : چون هر صفحه ۵ حالت دارد

ب) شماره گیر اول ۵ حالت و بعدی ها ۴ حالت دارند (شماره شماره گیر قبلی مطلوب نیست) ؛ بنابراین 5×4^8

پ) 3×2^8

۴) الف) $\binom{25}{2}\times\binom{25}{2}\times\binom{25}{2}$

ب) $3\binom{25}{1}\binom{25}{1}\binom{25}{4} + 6\binom{25}{1}\binom{25}{2}\binom{25}{3} + \binom{25}{2}\binom{25}{2}\binom{25}{2}$

۵) الف) 10^{25}

ب) تعداد حالات توزیع جایگاه ها $= \binom{10+25-1}{25} = \binom{34}{25}$

تعداد پاسخ ها $= \binom{34}{25} \times 25!$

پ) $\binom{10+15-1}{15} \times 25! = \binom{24}{15} \times 25!$

۶) میان خط ها، ۱۴ جایگاه داریم که نباید خالی باشد، همچنین قبل و

بعد آنها نیز ۲ جایگاه وجود دارد؛ بنابراین $\binom{16+(45-14)-1}{45-14} = \binom{46}{31}$

۸) $\binom{n}{2} \times 3^{n-2}$

بقیه ارقام

جایگاه یک ها

۱۱) الف) $(2-1)+(3-1)+(5-1)+(6-1) = 12$

ب) $1\times2 + 1\times4 + 1\times5 + 2\times4 + 2\times5 + 4\times5 = 49$

۱۵) الف) یک) $\binom{4}{4} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} + \binom{5}{4}$

دو) $\binom{4+4-1}{4} + \binom{4+2-1}{2}\binom{5+2-1}{2} + \binom{5+4-1}{4}$

$= \binom{7}{4} + \binom{6}{2}\binom{5}{2} + \binom{8}{4}$

سه) $\binom{7}{4} + \binom{6}{2}\times\binom{5}{2} + \binom{8}{4} - 9 \Rightarrow 9 =$ حالات نامطلوب

ب) یک) $\binom{5}{1}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{1}$

دو) $\binom{5}{1}\binom{4+3-1}{3} + \binom{5+3-1}{3}\binom{4}{1} = \binom{5}{1}\binom{6}{3} + \binom{7}{3}\binom{4}{1}$

سه) مشابه دو)

۱۹) الف) $\frac{10!}{2}$ ، چون حالت های روبروی هم تکراری اند

ب) سه حالت برای A و B وجود دارد که هر یک از این حالات ، !۸ حالت برای بقیه دارند؛ بنابراین $3\times 8!$

۲۰) الف) $\Rightarrow x_4 + x_5 = 9$

تعداد پاسخ ها $= \binom{3+6-1}{6}\times\binom{2+9-1}{9} = \binom{8}{6}\times\binom{10}{9}$

ب) $x_1+x_2+x_3=k \to \binom{3+k-1}{k}=\binom{k+2}{k}$

$x_4+x_5 \le 15-k \to \binom{3+15-k-1}{15-k}=\binom{17-k}{15-k}$

$\Rightarrow$ تعداد پاسخ ها $= \sum_{k=0}^{6}\binom{k+2}{k}\binom{17-k}{15-k}$

۲۳) شروع با $\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{تا}}0$ یا پایان با $0\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{تا}}$:

$$\frac{(n-k+r-1)!}{(n-k)!\,(r-1)!}$$

قرار گرفتن $0\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{تا}}0$ درمیان دیگر ارقام:

$$\frac{(n-k+r-2+1)!}{(n-k)!\,(r-2)!} \Rightarrow \text{پاسخ} = \frac{2(n-k+r-1)!}{(n-k)!\,(r-1)!} \times \frac{(n-k+r-1)!}{(n-k)!\,(r-2)!}$$

۲۸) $\Delta counter = (12\times r\times(+2)) + $ [illegible]

$((3+4+\ldots+(s-2))\times(+2))$

$+ (10\times(+4)) + ((t-4)\times(+8)) \Rightarrow counter = 14+24r+8t+2s(s-3)$

Subject:

Year: Month: Date:

۳۲) الف) جایگشت ۴ تا H و ۷ تا V : $\frac{11!}{4! \times 7!}$

ب) صفر D: $\frac{11!}{4!\,7!}$ ، یک D: $\frac{10!}{1!\,3!\,6!}$ و ... تا چهار D:

پس می‌توان همه حالات را به شکل $\sum_{i=0}^{4} \frac{(11-i)!}{(i!\,(4-i)!\,(7-i)!)}$ نوشت.

۳۳) الف) ۷ تا H و ۴ تا V: $\frac{11!}{7!\,4!} = 330$

ب) $\frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{4!}{1!\,3!} = 24$ = حالات نامطلوب

حالات مطلوب = ۳۰۶

پ) الف) $\frac{11!}{7!\,4!} + \frac{10!}{6!\,3!\,1!} + \frac{9!}{5!\,2!\,2!} + \frac{8!}{4!\,1!\,3!} + \frac{7!}{3!\,0!\,4!}$

ب) $$\left(\frac{11!}{7!\,4!} + \frac{10!}{6!\,3!\,1!} + \frac{9!}{5!\,2!\,2!} + \frac{8!}{4!\,1!\,3!} + \frac{7!}{3!\,0!\,4!}\right) - \left(\left(\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{3!}{1!\,1!\,1!} + \frac{2!}{2!}\right) \times \left(\frac{3!}{3!\,1!} + \frac{3!}{2!\,1!}\right)\right)$$

۳۴) الف) تعداد U ها + تعداد L ها = ۷

تعداد U ها − تعداد L ها = ۱- $\Rightarrow$ ۴ تا L و ۳ تا U

تعداد مسیرها = $\frac{۷!}{۴!\,۳!} = ۳۵$

ب) ۶ تا U و یک L: $\frac{۷!}{۶!\,۱!} = ۷$

پ) با توجه به الف و ب: $۳۵ - ۷ = ۲۸$

ت) $\frac{۷!}{۴!\,۳!} - \frac{۷!}{۵!\,۲!} = ۳۵ - ۲۱ = ۱۴$

ث) مدل سازی: با شروع از نقطه (۱,۱) و پایان در (۱۴,۴)، هر رای دانشجوی اول را به شکل U و هر رای دانشجوی دوم را به شکل L تصور می‌کنیم و زمانی شرط مسئله محقق می‌شود که مسیرها هرگز بر محور xها مماس نشود یا آن را قطع نکند؛ بنابراین ۸ تا U و ۵ تا L داریم.

پس تعداد حالات:

$$\frac{۱۳!}{۸!\,۵!} - \frac{۱۳!}{۹!\,۴!} = ۵۷۲$$