۵-۲ معادله بسل و خواص جواب آن

در این بخش سه حالت خاص از معادله بسل زیر که در آن ν ثابت است را در نظر می‌گیریم؛

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0 \tag{۱}$$

این حالات، نظریه مطرح شده در بخش ۴، را توضیح می‌دهند. به آسانی معلوم می‌شود که $x = 0$ یک نقطه تکین منظم است. برای سادگی در اینجا نیز فقط حالت $x > 0$ را در نظر می‌گیریم.

■ **معادله بسل مرتبه صفر.** این مثال وضعیتی را توضیح می‌دهد که در آن ریشه‌های معادله شاخصی مساوی هستند. با فرض $\nu = 0$ در معادله‌ی (۱) داریم

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{۲}$$

و با قرار دادن

$$y = \phi(r,x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n} \tag{۳}$$

به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)\right]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0\left[r(r-1)+r\right]x^r + a_1\left[(r+1)r+(r+1)\right]x^{r+1} \\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{a_n\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)+a_{n-2}\right]x^{r+n}\right. = 0. \end{aligned} \tag{۴}$$

ریشه‌های معادله شاخصی $F(r) = r(r-1)+r = 0$ عبارتند از $r_1 = 0$ و $r_2 = 0$؛ لذا حالت ریشه‌های مساوی رخ می‌دهد. رابطه بازگشتی عبارت است از

$$a_n(r) = \frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1)+(r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}\ , \ n \geq 2. \tag{۵}$$

برای تعیین $y_1(x)$، r را مساوی 0 قرار می‌دهیم. در این‌صورت از رابطه‌ی (۴) معلوم می‌شود که برای صفر شدن ضریب x^{r+1} باید $a_1 = 0$ را اختیار کنیم. لذا، از رابطه‌ی (۵) داریم $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$. به علاوه،

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2\ \ ,\ n = 2,4,6,8,\ldots,$$

یا با فرض $n = 2m$ به دست می‌آوریم :

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2\ \ ,\ m = 1,2,3,\ldots$$

لذا،

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \quad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6 (3 \times 2)^2},$$

و به طور کلی،

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \quad m = 1,2,3,\ldots. \tag{۶}$$

بنابراین

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \right], \quad x > 0. \tag{۷}$$

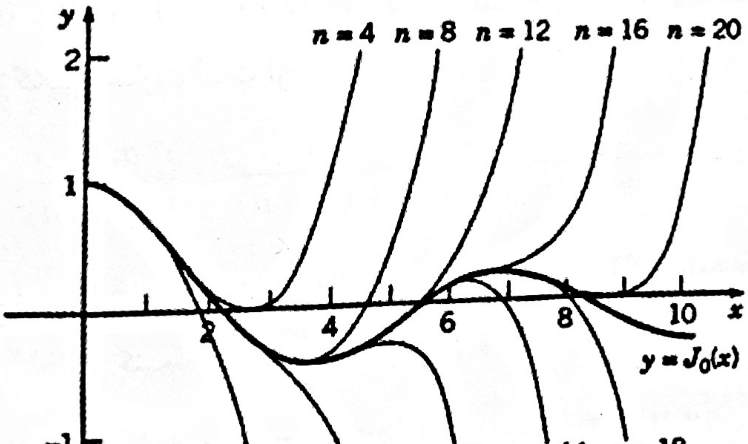
تابع داخل کروشه به **تابع بسل نوع اول مرتبه صفر** معروف است و با $J_0(x)$ نشان داده می‌شود. از قضیه ۲، معلوم می‌شود که سری به ازای هر x همگرا است، و J_0 در $x = 0$ تحلیلی است. بعضی از خواص مهم J_0 در مسایل مطرح می‌شوند. شکل ۱، نمودارهای $y = J_0(x)$ و چند مجموع جزیی سری (۷) را نشان می‌دهد.

برای تعیین $y_2(x)$ مقدار $a_n'(0)$ را حساب می‌کنیم. در مساله ۱۰، روش دیگری مطرح شده است که در آن صورت (۲۳) در بخش ۴، در معادله‌ی (۲) گذاشته شده و سپس b_n تعیین می‌شود. ابتدا از ضریب x^{r+1} در معادله‌ی (۴) معلوم می‌شود که $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. سپس نه تنها $a_1(0) = 0$، بلکه $a_1'(0) = 0$ نیز نتیجه خواهد شد. به آسانی از رابطه بازگشتی (۵) نتیجه می‌شود که

$$a_3'(0) = a_5'(0) = \cdots = a_{2n+1}'(0) = \cdots = 0,$$

لذا، کافی است $a_{2m}'(0)$، $m = 1,2,3,\ldots$ محاسبه شود. از معادله (۵) داریم

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(r+2m)^2, \quad m = 1,2,3,\ldots.$$



شکل ۱. تقریبات چندجمله‌ای درجه n به $J_0(x)$.

با حل این رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم :

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2 (r+4)^2 \dots (r+2m-2)^2 (r+2m)^2} \quad ، \quad m = 1,2,3,\dots \qquad (۸)$$

محاسبه $a'_{2m}(r)$ را می‌توان به بهترین وجه با توجه به این‌که هرگاه

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1} (x-\alpha_2)^{\beta_2} (x-\alpha_3)^{\beta_3} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n}$$

و x مساوی $\alpha_n, \dots, \alpha_2, \alpha_1$ نباشد، آن‌گاه داریم

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}$$

با اعمال این نتیجه بر $a_{2m}(r)$ از رابطه‌ی (۸) در می‌یابیم که

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \dots + \frac{1}{r+2m}\right)$$

حال با قرار دادن $r = 0$، به دست می‌آوریم

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0).$$

با جایگزینی $a_{2m}(0)$ از رابطه‌ی (۶) و قرار دادن

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}, \qquad (۹)$$

در نهایت به دست می‌آوریم

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2} \ , \ m = 1,2,3,\dots$$

جواب دوم معادله بسل مرتبه صفر با قرار دادن $a_0 = 1$ و جایگزینی $y_1(x)$ و $a'_{2m}(0) = b_{2m}(0)$ در معادله (۲۳) از بخش ۴، به دست می‌آید. لذا خواهیم داشت

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \ , \ x > 0. \qquad (۱۰)$$

به جای y_2، جواب دوم معمولاً ترکیب خطی خاصی از J_0 و y_2 اختیار می‌شود. این جواب به **تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر** معروف است و با Y_0 نشان داده می‌شود. با پیروی از **کاپسون** می‌توان نوشت

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)\right]. \qquad (۱۱)$$

در اینجا γ یک ثابت است که به **ثابت اویلر - ماشرونی** معروف است؛ و با رابطه زیر تعریف می‌شود :

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) \cong 0.5772. \qquad (۱۲)$$

اگر $y_2(x)$ را در رابطه‌ی (۱۱) قرار دهیم، به دست می‌آوریم

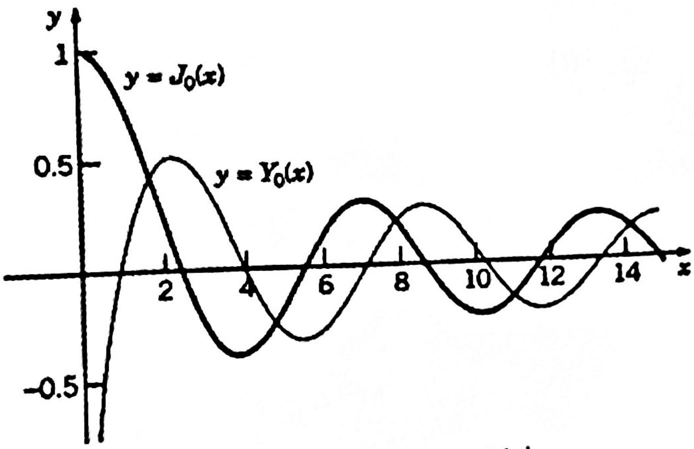
$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right], \quad x > 0.$$

بنابراین جواب عمومی معادله بسل مرتبه صفر به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

☑ **توجه.** وقتی $x \to 0$، $J_0(x) \to 1$، بنابراین $Y_0(x)$ در $x = 0$ تکین لگاریتمی دارد، یعنی $Y_0(x)$ وقتی x از طریق مقادیر مثبت $x \to 0$، مانند $(2/\pi)\ln x$ رفتار می‌کند. لذا اگر به جواب‌های معادله بسل مرتبه صفر که در مبداء متناهی هستند علاقمند باشید (که اغلب چنین است)، باید از Y_0 صرف‌نظر کنید.

در شکل ۲، نمودار تابع‌های J_0 و Y_0 نشان داده شده‌اند. از نمودارها معلوم می‌شود که به ازای x بزرگ، هر دوی $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ نوسانی هستند. یک چنین رفتار از معادله اصلی قابل پیش‌بینی است؛ این در واقع برای جواب‌های معادله بسل مرتبه ν نیز درست است.



شکل ۲. توابع بسل مرتبه صفر.

اگر معادله (۱) را بر x^2 تقسیم کنیم، به دست می‌آوریم

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

🗋 **تقریبات مجانبی.** اگر x خیلی بزرگ باشد، این گمان می‌رود که جمله‌های $(1/x)y'$ و (ν^2/x^2) کوچک هستند و لذا می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد. اگر این درست باشد، معادله بسل مرتبه ν را می‌توان با

$$y'' + y = 0$$

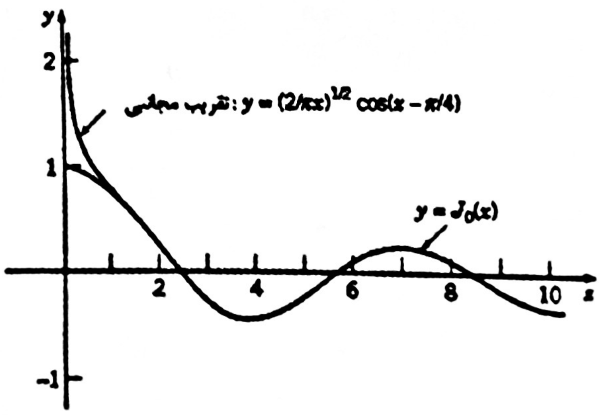
تقریب کرد. جواب‌های این معادله عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$. بنابراین، می‌توان پیش‌بینی کرد که جواب‌های معادله بسل به ازای x های بزرگ شبیه ترکیب خطی $\sin x$ و $\cos x$ هستند. این امر تا وقتی توابع بسل نوسانی هستند درست است، لذا این حالت نیز فقط تا حدودی درست است. به ازای x بزرگ، توابع J_0 و Y_0 با افزایش x میرایی

هستند؛ لذا معادله $y'' + y = 0$ تقریب مناسبی به معادله بسل به ازای x های بزرگ به دست نمی‌دهد و تحلیل ظریف‌تری مورد نیاز است. در واقع، می‌توان نشان داد که وقتی $x \to \infty$ آن‌گاه

$$J_0(x) \simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1.2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{۱۴}$$

$$Y_0(x) \simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1.2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{۱۵}$$

این تقریبات مجانبی وقتی $x \to \infty$ عملاً بسیار مفیدند. مثلاً شکل۳، نشان می‌دهد که تقریب مجانبی (۱۴) به $J_0\,(x)$ به ازای هر $x \geq 1$ به قدر معقول دقیق است. لذا، برای تقریب $J_0\,(x)$ روی تمام برد از 0 تا بی‌نهایت می‌توان دو یا سه جمله از سری (۷) به ازای $x \leq 1$ و تقریب مجانبی (۱۴) به ازای $x \geq 1$ را به کار برد.



شکل ۳. تقریب مجانبی به $J_0(x)$.

معادله بسل مرتبه نیم

$$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$$

$x=0$ یک نقطه منفرد معادله است ($R(0)=0$).

$$\alpha=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x}{x^2}=1 \quad , \quad \beta=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2}=-\frac{1}{4}$$

پس $x=0$ یک نقطه منفرد منظم معادله است. معادله مشخصه به شکل زیر است:

$$r(r-1)+1r-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow r_1=\frac{1}{2} \text{ و } r_2=-\frac{1}{2}$$

پس یک جواب معادله به صورت زیر است:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}$$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})a_nx^{n-\frac{3}{2}}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})a_nx^{n-\frac{1}{2}}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})a_nx^{n+\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})a_nx^{n+\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}=0$$

$$\boxed{n\to n-2}$$

$$\text{''} \qquad \text{''} \qquad +\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+\frac{1}{2}} \qquad - \qquad \text{''} \qquad =0$$

اکنون جملات $n=0$ و $n=1$ را از سری های اول دوم و چهارم خارج کنید و مابقی جملات همه سری ها را به صورت یک سری بنویسید.

$$-\frac{1}{4}a_0x^{1/2}+\frac{3}{4}a_1x^{3/2}+\frac{1}{2}a_0x^{1/2}+\frac{3}{2}a_1x^{3/2}-\frac{1}{4}a_0x^{1/2}-\frac{1}{4}a_1x^{3/2}+\dots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}\right)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+1/2}=0$$

۱) جملات شامل $x^{1/2}$ باهم حذف می‌شوند. این یعنی شرطی روی a_0 وجود ندارد و دلخواه است.

۲) مجموع جملات شامل $x^{3/2}$ را مساوی صفر قرار دهید $2a_1x^{3/2}=0 \Rightarrow \boxed{a_1=0}$

۳) همچنین

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} \Rightarrow a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(n+1)} \qquad n=2,3,4,\dots$$

با توجه به $a_1=0$ در رابطه بازگشتی بدست آمده داریم $a_3=a_5=\cdots=a_{2k+1}=0$

در برای اندیس های زوج:

$$a_2=\frac{-a_0}{2\times3},\quad a_4=\frac{-a_2}{4\times5}=\frac{a_0}{2\times3\times4\times5},\quad \ldots,\quad a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{(2k+1)!}$$

و در نتیجه:

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{(2k+1)!}x^{2k+\frac{1}{2}}=a_0x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

که سری اخیر همان سری مک لورن تابع $\sin x$ است. معمولاً $a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ قرار می دهیم

و جواب حاصل را با عبارت $J_{1/2}$ نشان می دهیم و آن را تابع بسل مرتبه نیم از نوع اول

می خوانیم

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\qquad x>0.$$

به عنوان تمرین نشان دهید جواب دوم و مستقل خطی این معادله به ازای $r_2=-1/2$

به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\qquad x>0$$

ولذا جواب معادله بسل مرتبه نیم به شکل زیر است:

$$y=c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x).$$

■ **معادله بسل مرتبه یک.** این مثال وضعیتی را نشان می‌دهد که در آن ریشه‌های معادله شاخصی در عدد صحیح مثبتی تفاوت دارند و جواب دوم شامل یک جمله لگاریتمی است. با فرض $\nu = 1$ در معادله (۱) داریم

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right)y = 0 \tag{۲۳}$$

اگر به جای $y = \phi(r, x)$ سری (۳) را قرار دهیم و جملات را (همانند حالات پیش) دسته‌بندی کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= a_0\left(r^2 - 1\right)x^r + a_1\left[(r+1)^2 - 1\right]x^{r+1} \\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2 - 1\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

ریشه‌های معادله شاخصی عبارتند از : $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$. رابطه بازگشتی برابر است با

(۲۵) $$\left[(r+n)^2 - 1\right]a_n(r) = -a_{n-2}(r) \ , \ n \geq 2.$$

رابطه بازگشتی نظیر ریشه بزرگ‌تر $r = 1$ برابر است با

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)\,n} \ , \ n = 2,3,4,\ldots.$$

نیز از ضریب x^{r+1} در معادله (۲۴) در می‌یابیم که $a_1 = 0$. لذا، از رابطه بازگشتی نتیجه $a_3 = a_5 = \cdots = 0$ حاصل می‌شود. به ازای مقادیر زوج n اگر قرار دهیم $n = 2m$، خواهیم داشت :

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2\,(m+1)\,m} \ , \ m = 1,2,3,\ldots.$$

حال با حل این رابطه بازگشتی می‌توان نتیجه گرفت :

(۲۶) $$a_{2m} = \frac{(-1)^m\,a_0}{2^{2m}\,(m+1)!\,m!} \ , \ m = 1,2,3,\ldots.$$

تابع بسل نوع اول مرتبه یک که با J_1 نشان داده می‌شود با انتخاب $a_0 = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید. بنابراین،

(۲۷) $$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,x^{2m}}{2^{2m}\,(m+1)!\,m!}.$$

این سری به ازای هر x به طور مطلق همگرا است؛ در نتیجه تابع J_1 همه‌جا تحلیلی است.

در تعیین جواب دوم معادله بسل مرتبه یک، روش جایگزینی مستقیم را توضیح می‌دهیم. محاسبه جمله عمومی معادله (۲۸) کمی پیچیده است ولی a و چند ضریب اول c_n را می‌توان به آسانی به دست آورد. بنابر قضیه ۲، فرض می‌کنیم

(۲۸) $$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \ x > 0.$$

با محاسبه $y_2'(x)$ و $y_2''(x)$؛ و جایگزینی در معادله‌ی (۲۳) و استفاده از این امر که J_1 جواب معادله‌ی (۲۳) است، خواهیم داشت

(۲۹) $$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n\right]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0,$$

که در آن $c_0 = 1$. اگر از رابطه‌ی (۲۷) به جای $J_1(x)$ جایگزین نموده، اندیس‌های جمع‌بندی در دو سری را انتقال داده و چند مرحله اعمال جبری انجام دهیم، نتیجه می‌شود

$$-c_1 + \left[0.c_2 + c_0\right]x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(n^2 - 1\right)c_{n+1} + c_{n-1}\right]x^n$$

$$= -a\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)\, x^{2m+1}}{2^{2m} (m+1)!\, m!}\right]. \quad (۳۰)$$

از رابطه‌ی (۳۰) معلوم می‌شود که $c_1 = 0$ و $a = -c_0 = -1$. به علاوه، چون در سمت راست فقط توان‌های فرد x وجود دارند، ضریب هر توان زوج x در سمت چپ باید صفر باشد. لذا، چون $c_1 = 0$، داریم $c_3 = c_5 = \cdots = 0$. نظیر توان‌های فرد x می‌توان رابطه بازگشتی زیرا را به دست آورد (در سری سمت چپ رابطه‌ی (۳۰) قرار دهید $n = 2m + 1$) :

$$\left[(2m+1)^2 - 1\right] c_{2m+2} + c_{2m} = -\frac{(-1)^m (2m+1)}{2^{2m} (m+1)!\, m!} \quad , m = 1, 2, 3, \ldots. \quad (۳۱)$$

وقتی در معادله (۳۱) قرار دهیم $m = 1$، خواهیم داشت

$$\left(3^2 - 1\right) c_4 + c_2 = (-1)\, 3 / \left(2^2 2!\right).$$

توجه کنید که c_2 را می‌توان دلخواه اختیار کرد و سپس c_4 را از این معادله به دست آورد. هم‌چنین ملاحظه می‌کنیم که در این معادله برای ضریب x، c_2 در صفر ضرب شده است؛ و این معادله برای تعیین a به کار رفته است. دلخواه بودن c_2 تعجب‌آور نیست، زیرا c_2 ضریب x در عبارت $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$ است. در نتیجه، c_2 فقط مضربی از J_1 را تولید می‌کند و y_2 با تقریب مضربی از J_1 معین می‌شود. طبق معمول $c_2 = \frac{1}{2^2}$ را قرار می‌دهیم. در این‌صورت داریم

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 \times 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 \times 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right] = \frac{(-1)}{2^4 \times 2!}\left(H_2 + H_1\right).$$

می‌توان نشان داد که جواب رابطه بازگشتی (۳۱) با این فرض که $H_0 = 0$ عبارت است از

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1} \left(H_m + H_{m-1}\right)}{2^{2m}\, m!\,(m-1)!}\ , \ m = 1, 2, 3, \ldots.$$

لذا،

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(H_m + H_{m-1}\right)}{2^{2m}\, m!\,(m-1)!} x^{2m}\right] \quad , x > 0. \quad (۳۲)$$

محاسبه $y_2(x)$ با استفاده از روند دیگر (بخش ۴ روابط (۱۹) و (۲۰)) که در آن $c_n(r_2)$ را تعیین می‌کنیم کمی آسان‌تر است. بخصوص، روند فوق بدون حل یک رابطه بازگشتی به صورت (۳۱) فرمول کلی برای c_{2m} به دست می‌دهد. (مساله ۱۱). در این رابطه ممکن است خواننده بخواهد محاسبات جواب دوم معادله بسل مرتبه صفر در متن را با مساله ۱۰، مقایسه نمایید.

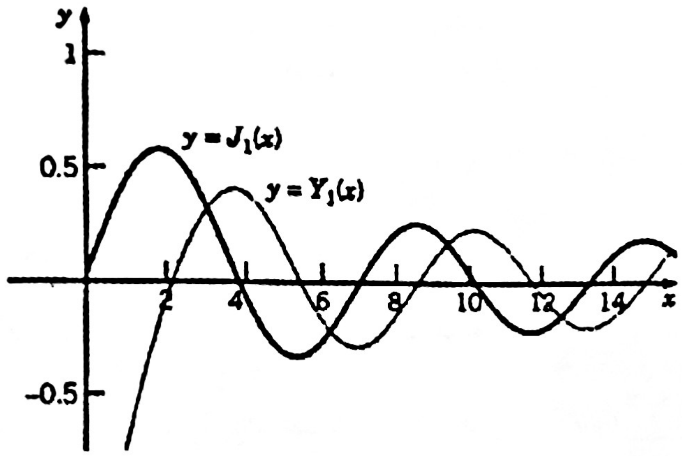
جواب دوم معادله (۲۳) (تابع بسل نوع دوم مرتبه یک) Y_1 را معمولاً ترکیبی خطی از J_1 و y_2 می‌گیرند. طبق کتاب کاپسون (فصل ۱۲)، Y_1 به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \qquad (۳۳)$$

که در آن γ در رابطه‌ی (۱۲) تعریف شده است. لذا جواب عمومی معادله (۲۳) به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

توجه کنید که J_1 در $x = 0$ تحلیلی است ولی جواب دوم Y_1 به همان روش $1/x$ وقتی $x \to 0$ بی‌کران می‌شود. در شکل ۵، نمودارهای J_1 و Y_1 دیده می‌شوند.



شکل ۵. تابع‌های بسل J_1 و Y_1.

■ **اتحادهای توابع بسل.** توابع بسل با اتحادهای شگفت آوری با هم ارتباط دارند. اساسی‌ترین آنها از دو حالت موجود در قضیه زیر نتیجه می‌شوند.

قضیه ۳ دو خاصیت مهم توابع بسل

اگر $J_v(x)$ توابع بسل نوع اول باشد، آن‌گاه اتحادهای زیر برقرارند.

i. $\frac{d}{dx}(x^v J_v(x)) = x^v J_{v-1}(x)$

ii. $\frac{d}{dx}(x^{-v} J_v(x)) = -x^{-v} J_{v+1}(x)$

اثبات : برهان هر قسمت به طور مستقیم به سادگی قابل بررسی است (به عهده خواننده). ■■■

با مشتق‌گیری از اتحادهای بالا و حل هر مورد بر حسب $J'_v(x)$ خواهیم داشت :

iii. $J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x)$

iv. $J'_v(x) = \frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x)$

با جمع و تفریق این دو اتحاد **فرمول‌های بازگشتی** زیر حاصل می‌شوند.

v. $2J'_v(x) = J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x)$

vi. $2\frac{v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)$

در حالت کلی همواره یک جواب معادله بسل مرتبه ν، تابع بسل نوع اول مرتبه ν است که آن را با J_ν نمایش می‌دهیم و در رابطه زیر صدق می‌کند

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

در این تعریف نماد Γ معرف تابع مشهوری است به نام تابع گاما:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$$

این تابع کاربردهای فراوانی در ریاضی، آمار و مهندسی دارد. برخی خواص آن را با هم بررسی می‌کنیم:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0-(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(1)=1$$

اگر α یک عدد ~~[illegible]~~ بزرگتر از صفر باشد:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty t^{\alpha} e^{-t}\,dt$$

قرار دهید $u=t^\alpha$ و $dv=e^{-t}dt$ و روش جزء به جزء را به کار بگیرید:

$$\Gamma(\alpha+1) = -t^\alpha e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \alpha(t^{\alpha-1})(-e^{-t})\,dt = \underbrace{\lim_{b\to\infty} -t^\alpha e^{-t}\Big|_0^b}_{=0} + \alpha\underbrace{\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt}_{\Gamma(\alpha)}$$

ولذا همواره داریم:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

پس داریم:

$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$ و $\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\times1 = 2$ و $\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\times2 = 3!$

در حالت کلی اگر n یک عدد طبیعی باشد:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

اما نکته این جاست که تابع گاما تنها برای اعداد طبیعی تعریف نمی‌شود، بلکه α می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. به عبارت دیگر به نوعی تابع گاما تعمیم تابع فاکتوریل برای اعداد حقیقی است.

به عنوان یک مثال تابع گاما را به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$ به روش زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt$$

تغییر متغیر $t=x^2$ را اعمال کنید:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-1}e^{-x^2}(2x\,dx)=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

اکنون می‌توانید بنویسید:

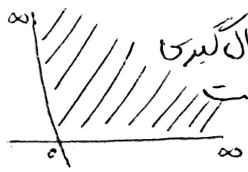
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\times2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\times\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

توجه کنید که تغییر متغیر انتگرال گیری از x به y هیچ تاثیری در مقدار انتگرال ندارد. پس

$$\left[\Gamma(1/2)\right]^2=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

اکنون تغییر متغیر قطبی را روی این انتگرال دوگانه به کار بگیرید:

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta\end{cases}$$



$$\left[\Gamma(1/2)\right]^2=4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{4}{-2}\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty -2re^{-r^2}dr$$

$$=-2\left(\pi/2\right)e^{-r^2}\Big|_0^\infty=-\pi(0-1)=\pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

همچنین از رابطه $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ داریم:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

و یا:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$

درحالت کلی اگر ν یک عدد صحیح نباشد، جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل مرتبه ν به شکل زیر است:

$$y(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

اما اگر ν عدد صحیح باشد می توان مشاهده کرد که J_{ν} و $J_{-\nu}$ رابطه خطی با هم دارند و:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

ولذا عبارت فوق نمی تواند جواب عمومی معادله باشد. در این حالت جواب عمومی معادله به صورت ترکیب خطی از توابع بسل نوع اول و نوع دوم خواهد بود:

$$y(x) = C J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

مثال: با کمک تغییر متغیر $z = 2e^{x/2}$ معادله $y'' + (e^x - \frac{4}{9})y = 0$ را حل کنید:

$$z = 2e^{x/2} \rightarrow \frac{dz}{dx} = e^{x/2} = \frac{z}{2} \qquad e^x = \frac{z^2}{4}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{z}{2} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{2}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{2}\frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} = \left(\frac{1}{2}\frac{dy}{dz} + \frac{z}{2}\frac{d^2y}{dz^2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$= \frac{z}{4}\frac{dy}{dz} + \frac{z^2}{4}\frac{d^2y}{dz^2}$$

اکنون با جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{z^2}{4}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{4}\frac{dy}{dz} + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{4}{9}\right)y = 0 \Rightarrow z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)y = 0$$

معادله اخیر همان معادله بسل با مرتبه $\nu = \frac{4}{3}$ است پس جواب آن:

$$y(z) = C_1 J_{4/3}(z) + C_2 J_{-4/3}(z)$$

$$y(x) = C_1 J_{4/3}(2e^{x/2}) + C_2 J_{-4/3}(2e^{x/2})$$