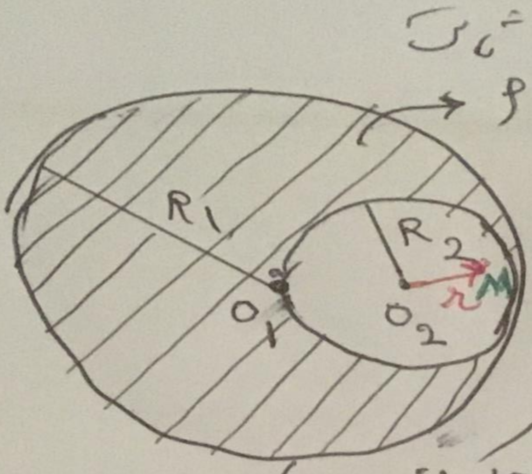
فیزیک عمومی ۲

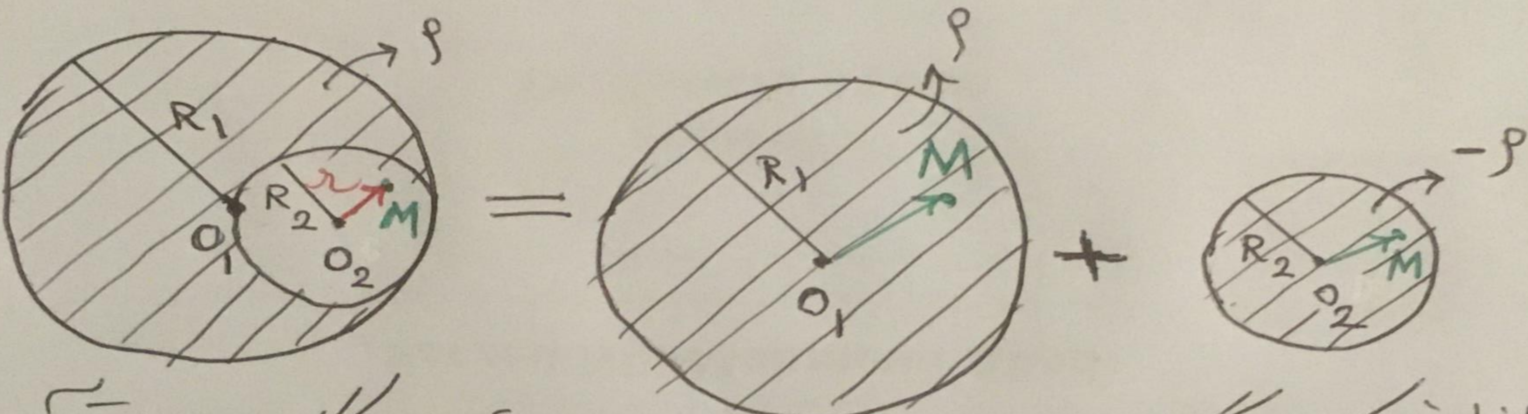
اصل برهم‌نهی - پتانسیل الکتریکی

اصل برهم‌نهی: (superposition principle)



مسئله: کره به شعاع R_1 دارای بار الکتریکی حجمی با چگالی ثابت ρ است. درون این کره یک حفره کروی به شعاع $R_2 = R_1/2$ ایجاد می‌کنیم. میدان الکتریکی را در هر نقطه درون حفره به دست آورید (نقطه M)

حل: استفاده از اصل برهم‌نهی می‌توان این مسئله را به سادگی حل کرد. داریم:



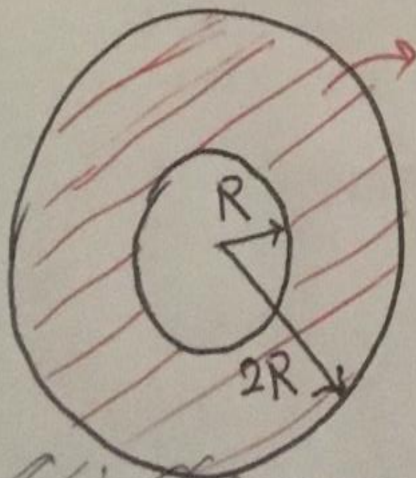
برای هر یک از این دو کره با چگالی بار حجمی ثابت، قبلاً میدان را با قانون گاوس به دست آوردیم

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_1M} \quad , \quad \vec{E}_2 = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_2M}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_1O_2}$$

مسئله: بار الکتریکی حجمی با چگالی غیر یکنواخت $\rho=\rho_0 \frac{r}{R}$ بین دو ناحیه کروی هم مرکز و به شعاع های R و $2R$ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در سه ناحیه زیر به دست آورید.

(ρ_0 مقداری ثابت و مثبت و r فاصله هر نقطه تا مرکز کره است).

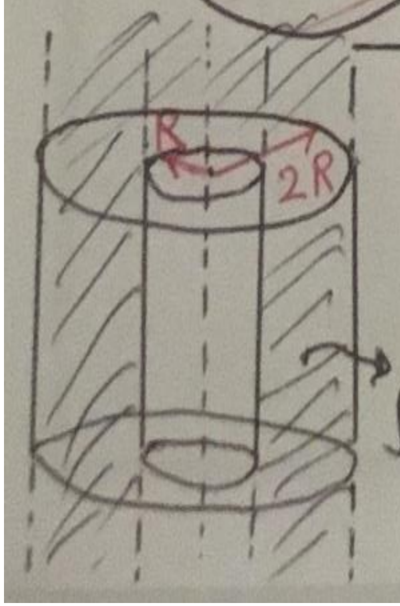


$r<R \Rightarrow E=?$

$R<r<2R \Rightarrow E=?$ ، $r>2R \Rightarrow E=?$

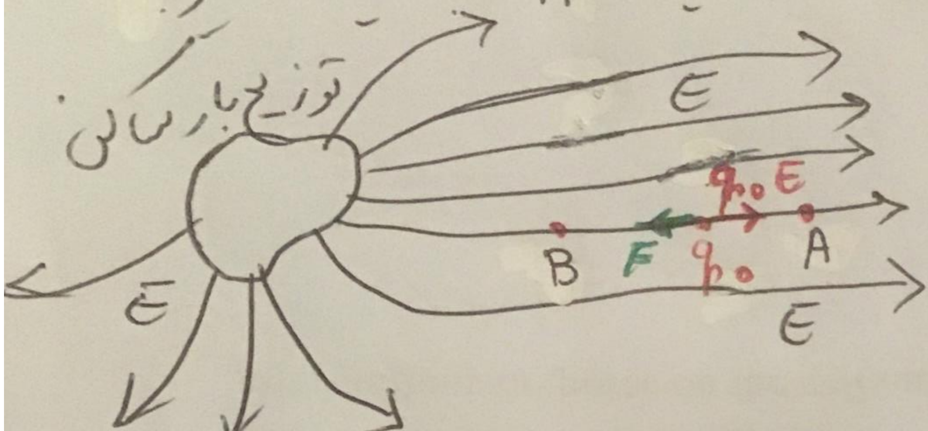
مسئله: بار الکتریکی حجمی با چگالی غیر یکنواخت $\rho=\rho_0 \frac{r}{R}$ در فضای بین دو ناحیه استوانه‌ای هم محور طویل به شعاع های R و $2R$ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نواحی $r<R$ ، $R<r<2R$ و $r>2R$ حساب کنید.

(ρ_0 مقداری ثابت و مثبت و r فاصله از محور استوانه است).



پتانسیل الکتریکی

پتانسیل الکتریکی : بار الکتریکی ساکن در فضا مفروض است و ایجاد میدان الکتریکی ساکن (الکترواستاتیک) می کند. برای سادگی بحث، فرض می کنیم که این بار ساکن مثبت باشد. کار لازم برای انتقال بار آزمون (q_0 از موقعیت A به موقعیت دیگر B عبارت است از:



$$\vec{F} = -q_0 \vec{E}$$

نیروی $\vec{F}$ از طرف یک عامل خارجی به بار آزمون q_0 وارد می شود تا بار q_0 را با سرعت ثابت (شتاب صفر) از نقطه A به B ببرد.

کار لازم برای انتقال بار آزمون q_0 از نقطه A به B برابر است با:

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dL} = \int_A^B -q_0 \vec{E} \cdot \vec{dL} \Rightarrow W_{A \to B} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dL}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B (یعنی $V_B - V_A$) را به صورت کار لازم برای انتقال واحد بار آزمون از نقطه A به B تعریف می کنیم. داریم:

$$V_B - V_A = \frac{W_{A \to B}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dL}$$

(واحد: V (ولت))

اگر بار الکتریکی دارای ابعاد محدود باشد (بی نهایت نباشد)، می توان اختلاف پتانسیل هر نقطه را نسبت به یک نقطه خیلی دور (بی نهایت) بدست آورد که در آن داریم: $V_\infty = 0$.

و از آنجا خواهیم داشت:

$$V - V_\infty = -\int_\infty \vec{E}\cdot\vec{dL} \Rightarrow V = -\int_\infty \vec{E}\cdot\vec{dL}$$

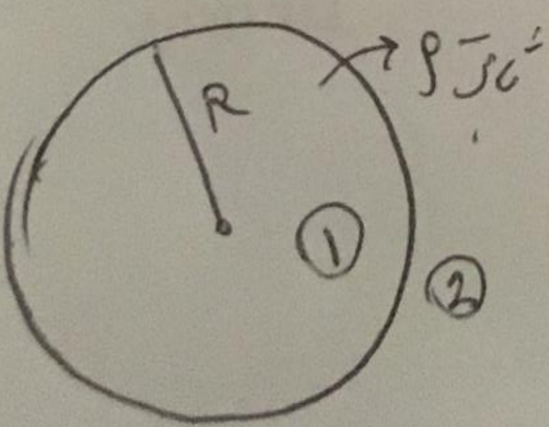
به V پتانسیل الکتریکی (یا پتانسیل مطلق) می گوییم:

$$V = -\int^{\infty} \vec{E}\cdot\vec{dL}$$

از این رو، با داشتن E می توان V را بدست آورد.

<u>مسئله</u>: بار الکتریکی حجمی با چگالی ثابت ρ در ناحیه کروی به شعاع R توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در هر از فضا (داخل و خارج ناحیه کروی) محاسبه کنید.

<u>حل</u>: برای نقاط خارج کره $(r>R)$ داریم:



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}_2\cdot\vec{ds} = Q_{en} \Rightarrow \varepsilon_0 E_2 \cdot 4\pi r^2 = \int_0^R \rho\cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{\rho\cdot R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_2 = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_2 \cdot \vec{dL} = -\int_{\infty}^{r} E_2 \hat{a}_r \cdot dr\, \hat{a}_r = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \boxed{\frac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon_0 r} \quad (r>R)}$$

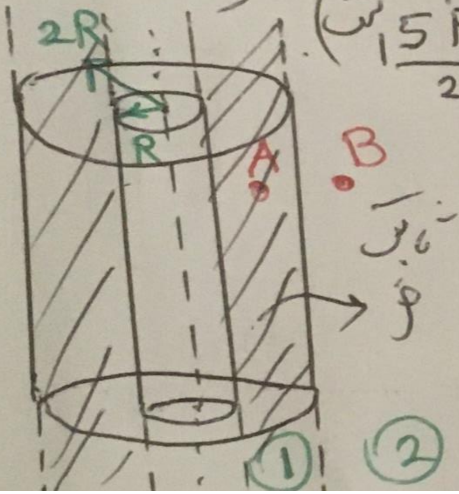
برای نقاط داخل کره نیز داریم:

$$E_1 = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0} \quad (0<r<R)$$

$$V_1 = -\int \vec{E} \cdot \vec{dL} = -\int_{\infty}^{R} E_2 \cdot dr - \int_{R}^{r} E_1 \cdot dr = -\int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{R}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) \quad (0<r<R)}$$

بار الکتریکی حجمی با چگالی ثابت ρ درون حجم استوانه‌ای طویل به شعاع‌های داخلی و خارجی R و $2R$ توزیع شده است. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه A و B را به دست آورید.
(فاصله A از محور استوانه برابر با $\frac{3R}{2}$ و فاصله B از محور استوانه $\frac{5R}{2}$ است).



حل: محاسبه میدان‌ها برای نواحی (1) و (2) با قانون گاوس

$$\varepsilon_0 \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{ds} = Q_{en} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 E_1 \cdot 2\pi r h = \int_{R}^{r} \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr = \rho \cdot \pi \cdot h (r^2 - R^2)$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\rho\,(r^2 - R^2)}{2\varepsilon_0 r} \qquad (R < r < 2R)$$

برای ناحیه $r > 2R$ نیز داریم:

$$\varepsilon_0 \int_{S_2} \vec{E_2} \cdot \vec{ds} = Q_{en} \Rightarrow \varepsilon_0 E_2 \cdot 2\pi r \cdot h = \int_R^{2R} \rho \cdot 2\pi r h \cdot dr = 3\pi \rho \cdot h \cdot R^2$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{3\rho \cdot R^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad (r > 2R)$$

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dL} = -\int_B^A E \cdot dr \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = -\int_{5R/2}^{2R} E_2 \cdot dr - \int_{2R}^{3R/2} E_1 \cdot dr \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = -\int_{5R/2}^{2R} \frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\, dr - \int_{2R}^{3R/2} \frac{\rho\,(r^2 - R^2)}{2\varepsilon_0 r} \cdot dr =$$ حل کنید.