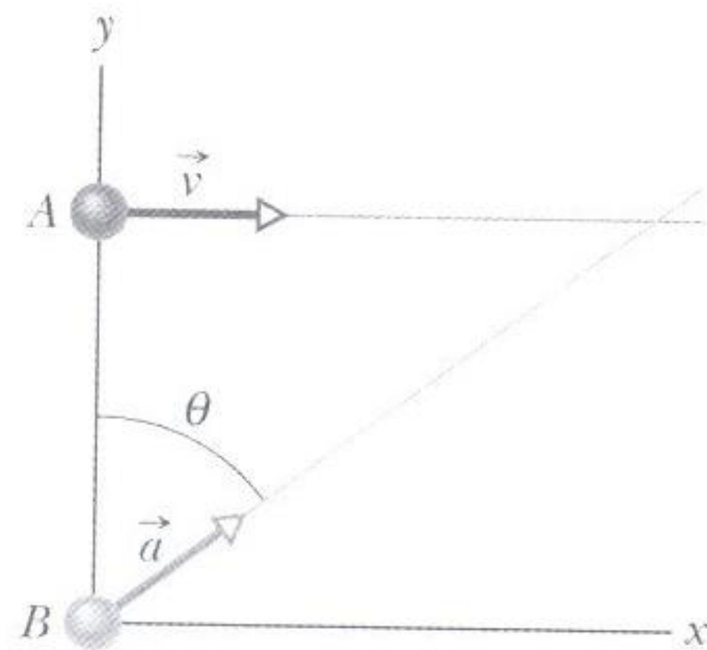
۲۰•••- در شکل ۴-۳۲، ذرهٔ A در امتداد خط $y = ۳۰\,m$ با سرعت ثابت $\vec{v}$ به بزرگی $۳/۰\,m/s$ و موازی محور x حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که ذرهٔ A از محور y می‌گذرد، ذرهٔ B از مبدأ با تندی اولیهٔ صفر و شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $۰/۴۰\,m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند. زاویهٔ θ بین $\vec{a}$ و سوی مثبت محور y که در نتیجهٔ برخورد این دو ذره به وجود می‌آید چقدر است؟



شکل ۴-۳۲ مسئلهٔ ۲۰

حل: شتاب ثابت است پس می‌توانیم از رابطه‌های جدول ۲-۱ استفاده کنیم (برای هر دو راستای x و y). بر روی شکل یکاها مشخص نشده‌اند و بنابراین از یکاهای SI استفاده می‌کنیم. برای این‌که بین A و B برخورد رخ دهد به دو شرط نیاز داریم. اول این‌که مؤلفهٔ y ذرهٔ B باید در رابطهٔ زیر صدق کند (از رابطهٔ ۲-۱۵ استفاده می‌کنیم و θ نسبت به راستای y اندازه‌گیری می‌شود)

$$y = \frac{۱}{۲} a_y t^۲ \Rightarrow ۳۰\,m = \frac{۱}{۲}[(۰/۴۰\,m/s^۲)\cos\theta]\, t^۲$$

دوم اینکه، حرکت در راستای x ذره‌های A و B باید همزمان باشد:

$$vt = \frac{۱}{۲} a_x t^۲ \Rightarrow (۳۰\,m/s)t = \frac{۱}{۲}[(۰/۴۰\,m/s^۲)\sin\theta]t^۲$$

با حذف یک ضریب t از رابطهٔ آخر و حل کردن برحسب t داریم

$$t=\frac{۲v}{a_x}=\frac{۲(۳/۰\,\mathrm{m/s})}{(۰/۴۰\,\mathrm{m/s^۲})\sin\theta}$$

با قرار دادن t در رابطهٔ قبل داریم:

$$۳۰\,\mathrm{m}=\frac{۱}{۲}[(۰/۴۰\,\mathrm{m/s^۲})\cos\theta](\frac{۲(۳/۰\,\mathrm{m/s})}{(۰/۴۰\,\mathrm{m/s^۲})\sin\theta})^۲$$

که با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta$ داریم

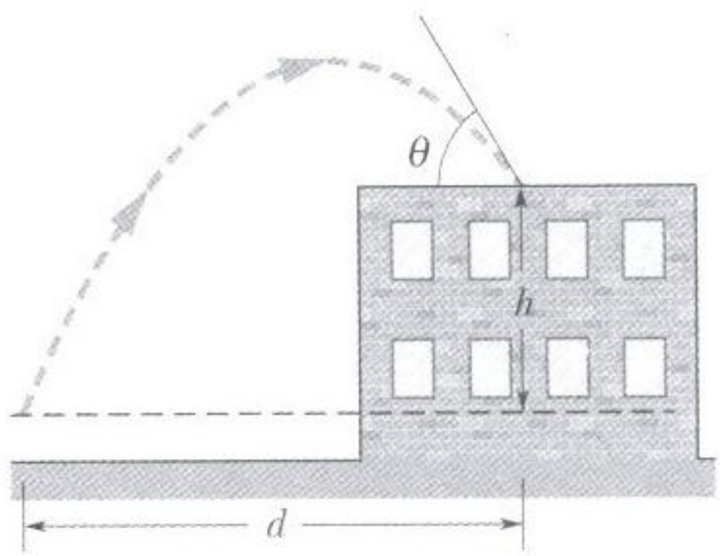
$$۳۰=\frac{۹/۰}{۰/۲۰}\frac{\cos\theta}{۱-\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱-\cos^۲\theta=\frac{۹/۰}{(۰/۲۰)(۳۰)}\cos\theta$$

با حل معادلهٔ درجه دوم برای $\cos\theta$ (و انتخاب ریشه مثبت) داریم

$$\cos\theta=\frac{-۱/۵+\sqrt{۱/۵^۲-۴(۱/۰)(-۱/۰)}}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

$$\theta=\cos^{-۱}(\frac{۱}{۲})=۶۰^\circ$$

●●۴۸- در شکل ۴-۴۱ توپی رو به بالا به سمت بام خانه‌ای پرتاب شده است. توپ $۴/۰۰ \,s$ بعد، در ارتفاع $h = ۲۰/۰۰ \,m$ بالای نقطهٔ پرتاب فرود می‌آید. مسیر توپ درست پیش از فرود زاویهٔ $\theta = ۶۰/۰^\circ$ را با بام می‌سازد. (الف) فاصلهٔ افقی d پیموده شده را به دست آورید (به راهنمایی مسئلهٔ ۴۱ نگاه کنید.) (ب) بزرگی و (پ) زاویهٔ (نسبت به افق) سرعت اولیهٔ توپ چقدر بوده است؟



شکل ۴-۴۱ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف) با توجه به راهنمایی مسئله، می‌توان معکوس زمانی مسئله را بررسی کرد به این ترتیب که فرض می‌کنیم، توپ از بام خانه به سمت چپ با زاویهٔ ۶۰° (که به‌صورت ساعتگرد نسبت

به محوری که به سمت چپ است) پرتاب می‌شود. این مسئله معکوس شده با موقعیتی متناسب است که در آن $x+$ به سمت چپ اشاره دارد و زاویه‌های مثبت به‌صورت ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شوند. طول‌ها برحسب متر و زمان‌ها برحسب ثانیه هستند.

(الف) با $y_\circ = ۲۰/۰\text{m}$ و $y = ۰$ در $t = ۴/۰۰$، می‌توان $v_\circ$ را به‌دست آورد:

$$y - y_\circ = (v_\circ \sin\theta_\circ)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow$$

$$۰ - ۲۰/۰\text{m} = [v_\circ \sin(۶۰^\circ)](۴/۰۰\text{s}) - \frac{۱}{۲}(۹/۸۰\text{m/s}^۲)(۴/۰۰\text{s})^۲$$

$$\Rightarrow v_\circ = ۱۶/۹\text{m/s}$$

با جایگزینی در رابطهٔ زیر و با توجه به این‌که $x_\circ = ۰$ و $x = d$ داریم

$$x - x_\circ = v_{\circ x}t \Rightarrow d = (۱۶/۹\text{m/s})\cos ۶۰^\circ(۴/۰۰\text{s}) = ۳۳/۷\text{m}$$

(ب) داریم:

$$v_x = v_{\circ x} = (۱۶/۹\text{m/s})\cos ۶۰/۰^\circ = ۸/۴۳\text{m/s}$$

$$v_y = v_{\circ y} - gt = (۱۶/۹\text{m/s})\sin ۶۰/۰^\circ - (۹/۸۰\text{m/s}^۲)(۴/۰۰\text{s})$$
$$= -۲۴/۶\text{m/s}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(۸/۴۳\text{m/s})^۲ + (-۲۴/۶\text{m/s})^۲}$$
$$= ۲۶/۰\text{m/s}$$

(پ) زاویه نسبت به افق برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{-۲۴/۶\text{m/s}}{۸/۴۳\text{m/s}}\right) = -۷۱/۱^\circ$$

می‌توان نتیجه‌های به‌دست آمده را به‌صورت بزرگی و زاویه هم نمایش داد

$$\vec{v} = (۸/۴۳, -۲۴/۶) \rightarrow (۲۶/۰\angle -۷۱/۱^\circ)$$

می‌توان این نتیجه‌ها را برای مسئله اصلی (مسئله‌ای که برگشت زمان داده نشده است) تفسیر کرد: سرعت اولیه با بزرگی $۲۶/۰\text{m/s}$ با زاویهٔ $۷۱/۱^\circ$ (به سمت راست).

۵۱۰۰۰- [redacted] یک اسکی‌باز ماهر می‌داند که قبل از رسیدن به یک شیب باید به بالا پرش کند. پرشی را در نظر بگیرید که تندی پرتاب برابر $v_{۰} = ۱۰ \, m/s$ و زاویهٔ پرتاب برابر $\theta_{۰} = ۹/۰^{\circ}$ و مسیر اولیه تقریباً مسطح و زاویهٔ مسیر شیبدار برابر $۱۱/۳^{\circ}$ است. شکل ۴-۴۲ الف یک پیش پرشی را نشان می‌دهد که امکان می‌دهد تا اسکی‌باز در قسمت بالایی شیب فرود می‌آید. شکل ۴-۴۲ ب پرش در لبهٔ شیب را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۴۲ الف اسکی‌باز تقریباً در همان سطح پرتاب، فرود آمده است. (الف) در فرود، زاویهٔ ϕ بین مسیر اسکی‌باز و شیب چقدر است؟ در شکل ۴-۴۲ ب، (ب) اسکی‌باز در چه فاصله‌ای از سطح پرتاب روی شیب فرود می‌آید و (پ) زاویهٔ ϕ چقدر است؟ (فرود طولانی‌تر و ϕ بزرگ‌تر می‌تواند موجب از دست دادن کنترل در موقع فرود شود).

(الف) (ب)

شکل ۴-۴۲ مسئلهٔ ۵۱

حل: (الف) اسکی‌باز با زاویهٔ $\theta_{۰} = ۱۱/۳^{\circ}$ بالای افق به بالا می‌پرد و بنابراین با بردار سرعتی که $۱۱/۳^{\circ}$ زیر خط افق است به سطح پرتاب بازمی‌گردد. چون سطح برفی زاویهٔ $\alpha = ۹/۰^{\circ}$ (به سمت پایین) با خط افق می‌سازد زاویهٔ بین شیب و بردار سرعت برابر است با

$$\phi = \theta_{۰} - \alpha = ۱۱/۳^{\circ} - ۹/۰^{\circ} = ۲/۳^{\circ}$$

(ب) فرض کنید که اسکی‌باز در مسافت d پایین شیب به زمین می‌رسد. با استفاده از رابطهٔ ۴-۲۵ و با $x = d\cos\alpha$ و $y = -d\sin\alpha$ (لبهٔ مسیر، مبدأ مختصات است) داریم

$$y = (\tan\theta_{۰})x - \frac{g x^{۲}}{۲(v_{۰}\cos\theta_{۰})^{۲}} \Rightarrow$$

$$-d\sin\theta_{۰} = d\cos\alpha \, \tan\theta_{۰} - \frac{g(d\cos\alpha)^{۲}}{۲v_{۰}^{۲}\cos^{۲}\theta_{۰}}$$

با به‌دست آوردن d داریم:

$$d=\frac{2v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos^2\alpha}(\cos\alpha\tan\theta_0+\sin\alpha)$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\theta_0}{g\cos^2\alpha}(\cos\alpha\sin\theta_0+\cos\theta_0\sin\alpha)$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\theta_0}{g\cos^2\alpha}\sin(\theta_0+\alpha)$$

با جایگذاری مقدارهای داده شده داریم:

$$d=\frac{2(10\,\mathrm{m/s})^2\cos(11/3^\circ)}{(9/8\,\mathrm{m/s^2})\cos^2(9/0^\circ)}\sin(11/3^\circ+9/0^\circ)=7/117\,\mathrm{m}$$

بنابراین داریم

$$y=-d\sin\alpha=-(7/117\,\mathrm{m})\sin(9/0^\circ)=-1/11\,\mathrm{m}$$

بنابراین اسکی‌باز حدود $1/1\mathrm{m}$ زیر سطح پرتاب به زمین برخورد می‌کند.

(پ) مدت زمانی که طول می‌کشد تا اسکی‌باز به زمین برخورد کند

$$t=\frac{x}{v_x}=\frac{d\cos\alpha}{v_0\cos\theta_0}=\frac{(7/117\,\mathrm{m})\cos(9/0^\circ)}{(10\,\mathrm{m/s})\cos(11/3^\circ)}=0/72\,\mathrm{s}$$

با استفاده از رابطهٔ ۳–۲۳ مؤلفه‌های x و y سرعت در هنگام برخورد با زمین برابر است با

$$v_x=v_0\cos\theta_0=(10\,\mathrm{m/s})\cos(11/3^\circ)=9/81\,\mathrm{m/s}$$

$$v_y=v_0\sin\theta_0-gt$$

$$=(10\,\mathrm{m/s})\sin(11/3^\circ)-(9/8\,\mathrm{m/s^2})(0/72\,\mathrm{s})$$

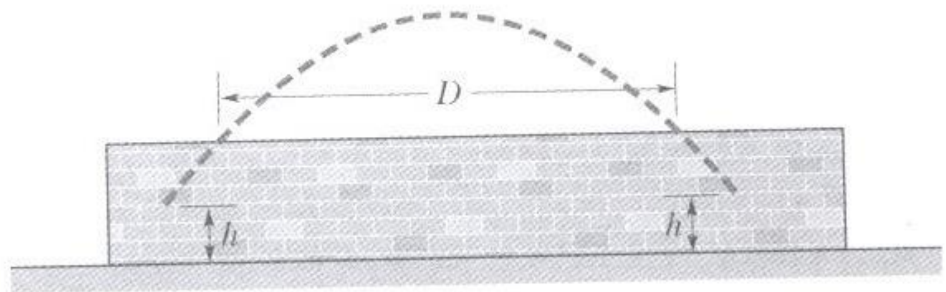
$$=-5/07\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین راستای سرعت در هنگام برخورد با زمین برابر است

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-5/07\,\mathrm{m/s}}{9/81\,\mathrm{m/s}}\right)=-27/3^\circ$$

و یا $27/3^\circ$ زیر خط افق. این نتیجه حاکی از آن است که زاویهٔ بین مسیر اسکی‌باز و شیب برابر است با $\phi=27/3^\circ-9/0^\circ=18/3^\circ$ و یا با دو رقم معنادار تقریباً 18°.

۵۳●●●- در شکل ۴-۴۴، به یک توپ بیسبال در ارتفاع $h = ۱/۰۰\,\text{m}$ ضربه‌ای زده شده و سپس در همان ارتفاع گرفته شده است. توپ از کنار دیواری می‌گذرد و ۱/۰۰s پس از پرتاب، رو به بالا و ۴/۰۰s بعد، با طی مسافت $D = ۵۰/۰\,\text{m}$، رو به پایین از بالای دیوار می‌گذرد. (الف) فاصلهٔ افقی پیموده شده توسط توپ از لحظهٔ ضربه زدن تا لحظهٔ گرفتن، چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویهٔ (نسبت به افق) سرعت توپ درست پس از ضربه زدن چقدر است؟ (ت) ارتفاع دیوار چقدر است؟



شکل ۴-۴۴ مسئلهٔ ۵۳

حل: در لحظهٔ ضربه زدن به توپ قرار می‌دهیم $y_{\circ} = h_{\circ} = ۱/۰۰\,\text{m}$ و $x_{\circ} = ۰$. همچنین $y_۱ = h$ (ارتفاع دیوار) و $x_۱$ را نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که توپ یک ثانیه پس از ضربه‌زدن به سمت بالای دیوار بالا می‌رود. به‌طور مشابه $y_۲ = h$ و $x_۲$ را جایی در نظر می‌گیریم که توپ ۴ ثانیه پس از پرتاب در مسیر برگشت به سمت پایین دیوار حرکت می‌کند و $y_f = ۱/۰۰\,\text{m}$ و $x_f = R$ را جایی در نظر می‌گیریم که توپ گرفته می‌شود.

(الف) به یاد بیاورید که v_x ثابت است. همچنین داریم: $x_۲ - x_۱ = ۵۰/۰\,\text{m} = v_{۱x}(۴/۰۰\,\text{s})$ که نتیجه می‌دهد $v_{۱x} = ۱۲/۵\,\text{m/s}$. بنابراین در طول ۶ ثانیه کل حرکت داریم:

$$x_f - x_{\circ} = R = v_x(۶/۰۰\,\text{s}) = ۷۵/۰\,\text{m}$$

(ب) از رابطهٔ $y - y_{\circ} = v_{\circ y}t - \frac{۱}{۲}gt^۲$ برای حرکت در بالای دیوار استفاده می‌کنیم.

$$y_۲ - y_۱ = ۰ = v_{۱y}(۴/۰۰\,\text{s}) - \frac{۱}{۲}g(۴/۰۰\,\text{s})^۲ \Rightarrow$$

$$v_{۱y} = ۱۹/۶\,\text{m/s}$$

برای ۱ ثانیه جلوتر داریم:

$$v_{1y} = v_{0y} - gt \Rightarrow ۱۹/۶\,\mathrm{m/s} = v_{0y} - (۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱/۰۰\,\mathrm{s}) \Rightarrow$$

$$v_{0y} = ۲۹/۴\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین سرعت توپ پس از ضربه زدن برابر است با:

$$\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} = (۱۲/۵\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} + (۲۹/۴\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$$

بزرگی سرعت برابر است با

$$|\vec{v}| = \sqrt{(۱۲/۵\,\mathrm{m/s})^۲ + (۲۹/۴\,\mathrm{m/s})^۲} = ۳۱/۹\,\mathrm{m/s}$$

(پ) زاویهٔ سرعت برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۲۹/۴\,\mathrm{m/s}}{۱۲/۵\,\mathrm{m/s}}\right) = ۶۷/۰^\circ$$

این نتیجه‌ها را این‌گونه تفسیر می‌کنیم: بزرگی بردار سرعت $۳۱/۹\,\mathrm{m/s}$ است که $۶۷/۰^\circ$ بالای خط افق و به سمت راست اشاره دارد.

(ت) در $۱/۰۰\,\mathrm{s}$ اول حرکت داریم

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$h = ۱/۰\,\mathrm{m} + (۲۹/۴\,\mathrm{m/s})(۱/۰۰\,\mathrm{s}) - \frac{۱}{۲}(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱/۰۰\,\mathrm{s})^۲$$

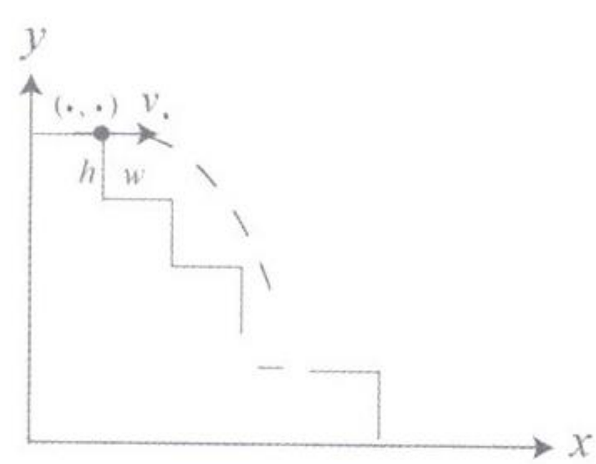
$$= ۲۵/۵\,\mathrm{m}$$

●●●۵۵- SSM توپی به طور افقی از بالای پلکانی می‌غلتد و با تندی $1/52\,m/s$ فرو می‌افتد. بلندی هر پله $20/3\,cm$ و پهنای آن نیز $20/3\,cm$ است. توپ نخست به کدام پله برخورد می‌کند؟

حل: فکر کنید. در این مسئله توپی با تندی اولیه از بالای پلکانی به پایین می‌غلتد. می‌خواهیم بدانیم توپ نخست به کدام پله برخورد می‌کند.

بیان کنید. ارتفاع هر پله را h و پهنای آن را w در نظر می‌گیریم. برای برخورد به پلهٔ n، توپ باید مسافت nh را به سمت پایین و فاصلهٔ افقی‌ای بین $(n-1)w$ و nw را طی کرده باشد. مبدأ مختصات را نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که توپ از بالای پلکان حرکت را آغاز کرده است و سوی مثبت y را به سمت بالا در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید. مختصات توپ در زمان t با $x = v_{0x}t$ و $y = -\frac{1}{2}gt^2$ $(v_{0y} = 0)$ نشان داده می‌شود.

تحلیل کنید. y را برابر $-nh$ قرار می‌دهیم و زمان رسیدن به پلهٔ n را حساب می‌کنیم.



$$t = \sqrt{\frac{2nh}{g}}$$

بنابراین مختصات x برابر است با

$$x = v_{0x}\sqrt{\frac{2nh}{g}} = (1/52\,m/s)\sqrt{\frac{2n(0/203\,m)}{9/8\,m/s^2}}$$
$$= (0/309\,m)\sqrt{n}$$

روش حل به این صورت است که به n مقدارهای مختلفی اختصاص می‌دهیم به‌طوری که x/w از n کوچک‌تر و از $(n-1)$ بزرگ‌تر باشد، اگر $n=1$ آن‌گاه $x = 0/309\,m$ و

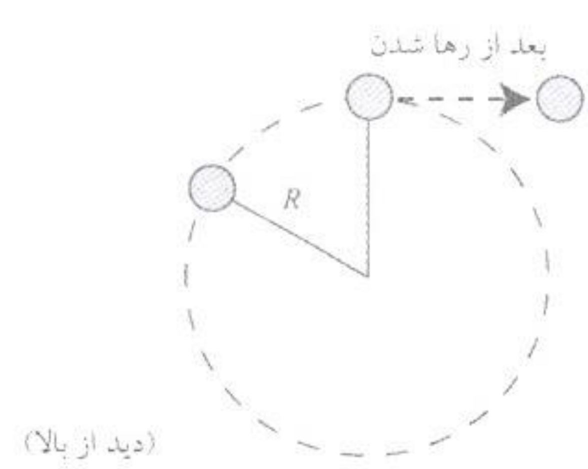
$x/w = ۱/۵۲$ که بزرگ‌تر از n است. اگر $n = ۲$ باشد آن‌گاه $x = ۰/۴۳۷\,\mathrm{m}$ و $x/w = ۲/۱۵$ است که همچنان از n بزرگ‌تر است. برای $n = ۳$، $x = ۰/۵۳۵\,\mathrm{m}$ و $x/w = ۲/۶۴$ است که از n کم‌تر و از $n-۱$ بزرگ‌تر است. بنابراین توپ به پلهٔ سوم برخورد می‌کند.

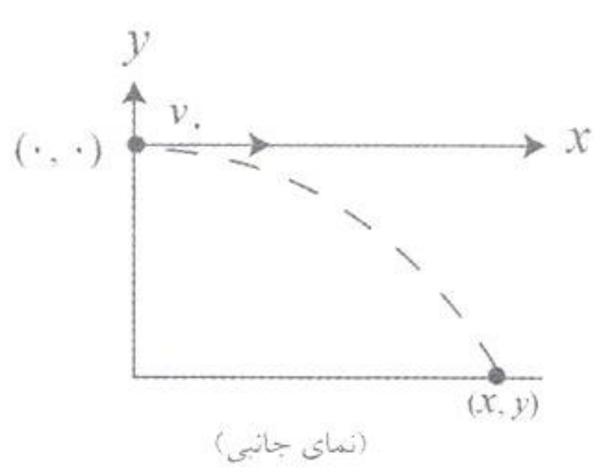
بیاموزید. برای این‌که صحت محاسبات انجام شده را بیازماییم، $n = ۳$ را در رابطه‌های بالا قرار می‌دهیم. نتیجه‌ها عبارت‌اند از $t = ۰/۳۵۳\,\mathrm{s}$، $y = ۰/۶۰۹\,\mathrm{m}$ و $x = ۰/۵۳۵\,\mathrm{m}$ که به درستی متناظر با پلهٔ سوم هستند.

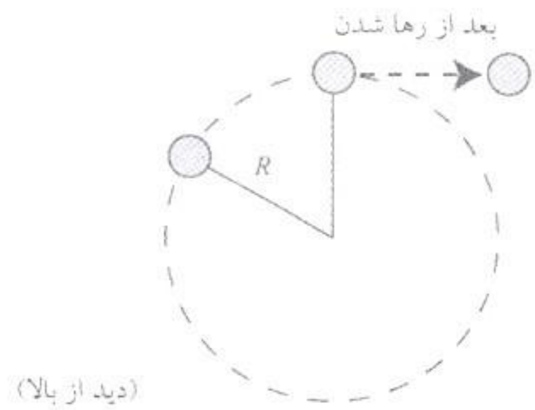
۶۷●●●- SSM WWW بچه‌ای سنگی را به وسیلهٔ ریسمانی به طول ۱/۵m در یک دایرهٔ افقی که ۲/۰m بالاتر از سطح زمین است، می‌چرخاند. ریسمان پاره و سنگ به طور افقی رها می‌شود و پس از طی یک مسافت افقی به طول ۱۰m، با زمین برخورد می‌کند. بزرگی شتاب مرکزگرای سنگ در هنگام حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

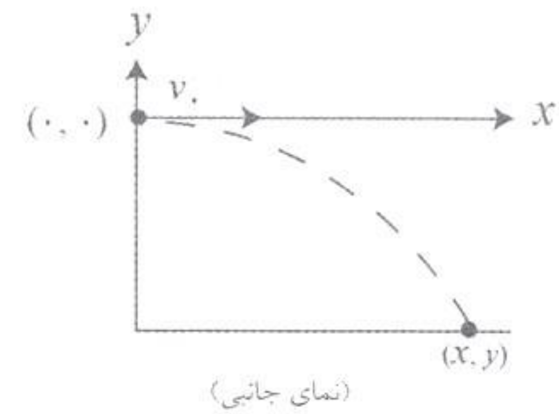
حل: فکر کنید. در این مسئله سنگی داریم که در یک دایرهٔ افقی می‌چرخد. بعد از پاره شدن طناب، سنگ حرکت پرتابی انجام می‌دهد.

بیان کنید. سنگ در ابتدا در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند (شکل سمت چپ دید از بالا را نشان می‌دهد). اما هنگامی که طناب پاره می‌شود، سنگ حرکت پرتابی انجام می‌دهد (نمای جانبی در شکل سمت راست). چون $a=v^2/R$ برای محاسبهٔ شتاب مرکزگرای سنگ، باید تندی سنگ را در حین حرکت دایره‌ای به‌دست آوریم (این تندی همچنین تندی اولیهٔ سنگ است هنگامی که شروع به پرواز می‌کند). از رابطه‌های سینماتیکی حرکت پرتابی برای یافتن تندی استفاده می‌کنیم. راستای $+y$ را به سمت بالا در نظر می‌گیریم و مبدأ مختصات را در نقطه‌ای که سنگ، مدار دایره‌ای خود را ترک می‌کند منظور می‌کنیم. بنابراین مختصات سنگ به‌عنوان یک پرتابه با $x=v_0 t$ و $y=-\frac{1}{2}gt^2$ $(v_{0y}=0)$ داده می‌شود. سنگ در $x=10\,\text{m}$ و $y=-2/0\,\text{m}$ به زمین برخورد می‌کند.









تحلیل کنید. با حل معادلهٔ y و به‌دست آوردن t و جایگزینی در رابطهٔ x داریم

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{-۲y}{g}}$$

$$v_{۰}=x\sqrt{-\frac{g}{۲y}}=(۱۰\,\mathrm{m})\sqrt{-\frac{۹/۸\,\mathrm{m/s^{۲}}}{۲(-۲/۰\,\mathrm{m})}}=۱۵/۷\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین بزرگی شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a=\frac{v_{۰}^{۲}}{R}=\frac{(۱۵/۷\,\mathrm{m/s})^{۲}}{۱/۵\,\mathrm{m}}=۱۶۰\,\mathrm{m/s^{۲}}$$

بیاموزید. اگر رابطه‌های بالا را با یکدیگر ترکیب کنیم، به‌دست می‌آوریم $a=\frac{gx^{۲}}{-۲yR}$. این رابطه حاکی از آن است که هرچه شتاب مرکزگرا بزرگ‌تر باشد، تندی اولیه پرتابه و مسافتی که سنگ طی می‌کند، بیشتر هستند. این موضوعی است که انتظار آن را داریم.

۶۸●●●- گربه‌ای که سوار بر یک چرخ و فلک است، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در لحظهٔ $t_۱ = ۲/۰۰\,\text{s}$، سرعت گربه $\vec{v}_۱ = (۳/۰۰\,\text{m/s})\hat{\text{i}} + (۴/۰۰\,\text{m/s})\hat{\text{j}}$ است که در دستگاه مختصات افقی xy اندازه‌گیری شده است. در لحظهٔ $t_۲ = ۵/۰۰\,\text{s}$ سرعت گربه $\vec{v}_۲ = (-۳/۰۰\,\text{m/s})\,\hat{\text{i}} + (-۴/۰۰\,\text{m/s})\hat{\text{j}}$ است. بزرگی (الف) شتاب مرکزگرای گربه و (ب) شتاب میانگین گربه در بازهٔ زمانی $t_۲ - t_۱$ چقدر است؟

حل: باید توجه کنیم که بعد از گذشت $۳\text{s}\,(t_۲ - t_۱ = ۳/۰۰\text{s})$ سرعت جسم که حرکت دایره‌ای با دورهٔ تناوب T انجام می‌دهد، معکوس می‌شود. بنابراین این سه ثانیه صرف این می‌شود که جسم به طرف مقابل دایره برسد.

(الف) با استفاده از رابطهٔ ۴-۳۵

$$r = vT/۲\pi,\ \ v = \sqrt{(۳/۰۰\,\text{m/s})^۲ + (۴/۰۰\,\text{m/s})^۲} = ۵/۰۰\,\text{m/s}$$

$$r = (۵/۰۰\,\text{m/s})(۳/۰۰\,\text{s})/۲\pi = ۴/۷۷\,\text{m}$$

بنابراین بزرگی شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a = v^۲/r = ۵/۲۴\,\text{m/s}^۲$$

(ب) شتاب متوسط با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

$$= \frac{(-۳/۰۰\hat{\text{i}} - ۴/۰۰\hat{\text{j}})\,\text{m/s} - (۳/۰۰\hat{\text{i}} + ۴/۰۰\hat{\text{j}})\,\text{m/s}}{۵/۰۰\text{s} - ۲/۰۰\text{s}}$$

$$= (-۲/۰۰\,\text{m/s}^۲)\,\hat{\text{i}} + (-۲/۶۷\,\text{m/s}^۲)\hat{\text{j}}$$

$$|\vec{a}_{\text{avg}}| = \sqrt{(-۲/۰۰\,\text{m/s}^۲)^۲ + (-۲/۶۷\,\text{m/s}^۲)^۲} = ۳/۳۳\,\text{m/s}^۲$$

●●●۸۱- کشتی A به اندازهٔ $۴/۰\,km$ در شمال و $۲/۵\,km$ در شرق کشتی B واقع است. کشتی A دارای سرعت $۲۲\,km/h$ به طرف جنوب و کشتی B دارای سرعت $۴۰\,km/h$ در جهت ۳۷° شمال شرق است. (الف) سرعت A نسبت به B برحسب نمادگذاری بردار یکه و با در نظر گرفتن $\hat{i}$ به طرف شرق چیست؟ (ب) عبارتی برای مکان A نسبت به B برحسب تابعی از t بنویسید که در آن $t=۰$ زمانی است که کشتی‌ها در مکان‌های بالا هستند. (پ) در چه زمانی فاصلهٔ بین کشتی‌ها کم‌ترین مقدار است؟ (ت) این کم‌ترین فاصله چقدر است؟

حل: اندیس W را برای آب به‌کار می‌بریم. محورهای مختصات را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $+x$ به سمت شرق و $+y$ به سمت شمال باشد. بر این اساس زاویهٔ توصیف کنندهٔ شرق ۰° و زاویهٔ توصیف‌کننده جنوب -۹۰° یا ۲۷۰° است.

(الف)

$$\vec{v}_A = -۲۲\hat{j}\ km/h$$

$$\vec{v}_B = ۴۰\cos ۳۷^\circ \hat{i} + ۴۰\sin ۳۷^\circ \hat{j} = (۳۱/۹\hat{i} + ۲۴/۱\hat{j})km/h$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (-۲۲\hat{j}) - (۳۱/۹\hat{i} + ۲۴/۱\hat{j})$$

$$\simeq (-۳۲\hat{i} - ۴۶\hat{j})\,km/h$$

(ب) چون مؤلفه‌های سرعت ثابت هستند، با انتگرال‌گیری از آن‌ها می‌توان، مکان را به‌دست آورد $(\vec{r} - \vec{r}_\circ = \int \vec{v}\,dt)$

$$\vec{r} = (۲/۵ - ۳۲t)\hat{i} + (۴/۰ - ۴۶t)\hat{j}$$

که طول‌ها برحسب km و زمان برحسب ساعت است.

(پ) بزرگی $\vec{r}$ عبارت است از $\sqrt{(۲/۵-۳۲t)^۲ + (۴/۰-۴۶t)^۲}$.

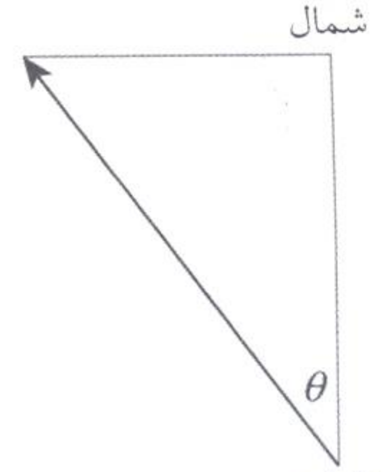
برای محاسبهٔ کمترین مقدار فاصله، از این رابطه نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{۱}{۲}\frac{۶۲۸۶t - ۵۲۸}{\sqrt{(۲/۵-۳۲t)^۲ + (۴/۰-۴۶t)^۲}} = ۰ \Rightarrow t = ۰/۰۸۴h$$

(ت) با جایگزینی این مقدار t در فاصلهٔ بین کشتی‌ها (r) به‌دست می‌آوریم $r = ۰/۲\,km$.

۸۲●●●- از رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰m که از جنگلی می‌گذرد جریان یکنواختی با تندی ۱/۱m/s رو به شرق می‌گذرد. سیاحی می‌خواهد از نقطه‌ای واقع بر ساحل جنوبی با یک قایق موتوری عرض رودخانه را با تندی ثابت ۴/۰ m/s نسبت به آب طی کند و به نقطه‌ای در ساحل شمالی که به فاصلهٔ افقی ۸۲m از نقطهٔ آغازین حرکت قرار دارد برود. (الف) قایق باید در چه جهتی حرکت کند تا بر یک خط مستقیم به نقطهٔ موردنظر برسد؟ (ب) چقدر زمان لازم است تا قایق از عرض رودخانه عبور کند و به نقطهٔ موردنظر برسد؟

حل: یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم که از ساحل جنوبی آغاز می‌شود، خطی (به‌طول ۲۰۰m) به سمت شمال (به‌سمت بالای طرح) که عرض رودخانه است و خطی به سمت غرب (جریان دورخانه که به سمت چپ طرح ماست) در امتداد ساحل شمالی با مسافت $(۸۲\text{m})+(۱/۱\text{m/s})t$ رسم می‌کنیم که مسافتی است که رودخانه قایق را در مدت زمان t جابه‌جا می‌کند. وتر این مثلث قائم‌الزاویه (بردار رسم شده در طرح ما) هم به‌زمان t و هم به تندی قایق (نسبت به آب) بستگی دارد.
این مقدار را مساوی رابطهٔ فیثاغورث برای اضلاع مثلث قرار می‌دهیم.



$$(۴/۰)t=\sqrt{۲۰۰^۲+(۸۲+۱/۱t)^۲}$$

(ب) که به رابطهٔ درجه دومی از t تبدیل می‌شود. با حل کردن این معادله و در نظر گرفتن مقدار مثبت داریم

$$۴۶۷۲۴+۱۸۰/۴t-۱۴/۸t^۲=۰ \Rightarrow t=۶۲/۶\text{s}$$

(الف) زاویهٔ بین ساقی که به سمت شمال اشاره دارد (۲۰۰m) و وتر مثلث (که به‌صورت غرب شمال اندازه‌گیری می‌شود) با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\theta=\tan^{-۱}[\frac{۸۲+۱/۱t}{۲۰۰}]=\tan^{-۱}(\frac{۱۵۱}{۲۰۰})=۳۷°$$