فصل سوم: حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها

یادآوری: با سری های توانی از ریاضی یک آشنا هستیم:

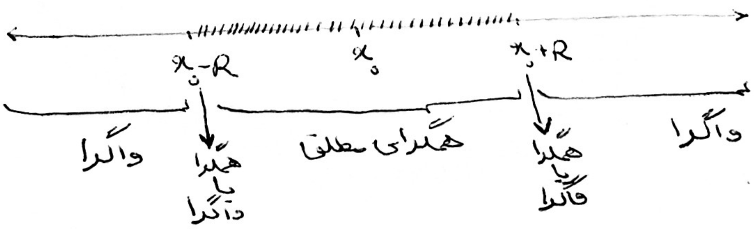
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

مقادیری از x که به ازای آن سری فوق یک سری همگرا خواهد شد را بازه همگرایی سری می خوانیم. آزمون های مختلفی برای همگرایی و تعیین بازه همگرایی سری ها وجود دارد. یکی از آن ها آزمون نسبت است:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$ شعاع همگرایی

در واقع سری توانی به ازای همه xهایی که $|x-x_0|<R$ باشد همگرای مطلق است. و به ازای همه xهایی که $|x-x_0|>R$ است واگرا است و در خصوص نقاط $x=x_0 \pm R$ همگرایی یا واگرایی به صورت مجزا بررسی می شود.

شعاع همگرایی R، می تواند صفر باشد یعنی سری توانی فقط در x_0 همگرا باشد. همچنین می تواند $R=\infty$ باشد یعنی سری به ازای هر x همگرا باشد.



تعریف: اگر تابع f دارای بسط تیلور حول نقطه $x=x_0$ با شعاع همگرایی $R>0$ باشد، گوییم تابع f در x_0 تحلیلی است.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

در این فصل هدف آن است که جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را به صورت یک سری توانی حول هر نقطه دلخواه x_0 محاسبه کنیم. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$R(x)y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

حالت استاندارد (1):

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (2)$$

تعریف: اگر توابع p و q در نقطه x_0 تحلیلی باشند، x_0 را یک نقطه عادی معادله (1) می خوانیم. در غیر این صورت یک نقطه منفرد نامیده می شود.

نکته: اگر R, P, Q همگی چندجمله ای باشند، کافیست $R(x_0)\neq 0$ باشد تا x_0 یک نقطه عادی باشد.

اگر بخواهیم جواب معادله (1) را حول یک نقطه عادی همچون x_0 بیابیم باید فرض شود که y حول این نقطه تحلیلی است یعنی بسط تیلور دارد و می توان قرار داد:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (3)$$

پس برای محاسبه y در واقع باید ضرایب a_n در سری فوق یافت شود. البته می دانیم که

$$a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (4)$$

اکنون فرض کنید که معادله (1) به همراه شرایط اولیه $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ داده شده باشد. رابطه (4) نتیجه می دهد $a_0=y_0$ و $a_1=y'_0$ است. معادله (2) را در نقطه x_0 بنویسید:

$$y''(x_0)=-p(x_0)y'(x_0)-q(x_0)y(x_0)=-p(x_0)a_1-q(x_0)a_0 \Rightarrow a_2=\frac{-p(x_0)a_1-q(x_0)a_0}{2!}$$

اکنون می توان از رابطه (2) مشتق گرفت تا مشتق سوم ظاهر شود و سپس در نقطه x_0 بنویسید. با این روش می توان مانند قبل a_3 را نیز به دست آورد و به همین ترتیب می توان با ادامه مشتق گیری متوالی از معادله، تا هر مرتبه دلخواه a_n ها را به دست آورد. این روش زمانی مناسب است که تعداد محدودی از a_n ها را بخواهیم محاسبه کنیم. در حالت کلی اما علاقمندیم که یک رابطه مشخص برای همه a_n ها بدست آوریم. این کار را به صورت زیر انجام می دهیم:

روش دیگر این است که بدون در نظر گرفتن شرایط اولیه. عبارت (3) را مستقیماً در معادله (1) یا (2) جایگذاری کنیم و با دسته‌بندی جملات ضریب x^n ها در دو طرف معادله، ضرایب a_n را به دست آوریم.

مثال: معادله ساده زیر که جواب آن را می‌دانیم در نظر بگیرید:

$$y'' + y = 0$$

قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در واقع می‌خواهیم جواب این معادله را به صورت یک سری حول نقطه $x=0$ بدست آوریم. پس با مشتق‌گیری جمله به جمله داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$$

اکنون در معادله جایگذاری کنید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

اکنون در سری اول یک تغییر اندیس به صورت $n \to n+2$ انجام دهید. توجه کنید که تغییر اندیس موجب تغییری در سری مذکور نخواهد شد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n \right] x^n = 0$$

به وضوح اگر سری سمت چپ برابر با صفر است پس باید همه ضرایب x^n به ازای هر n برابر صفر باشد

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n = 0 \qquad n = 0, 1, \dots$$

و بنابراین یک رابطه بازگشتی بین a_n ها به دست می‌آید:

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n = 0, 1, \dots$$

این رابطه بیانگر این مطلب است که اگر a_0 معلوم باشد می‌توان همه a_{2k} ها را برحسب آن نوشت و اگر a_1 هم معلوم باشد می‌توان همه a_{2k+1} ها را برحسب آن نوشت

$$a_2 = \frac{-a_0}{2\times 1} = \frac{-a_0}{2!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4\times 3} = \frac{-(-a_0)}{4\times 3\times 2!} = \frac{a_0}{4!}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6\times 5} = \frac{-a_0}{6!}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3\times 2} = \frac{-a_1}{3!}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{5\times 4} = \frac{-(-a_1)}{5\times 4\times 3!} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{7\times 6} = \frac{-a_1}{7!}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}$$

پس در این جا توانستیم از رابطه بازگشتی به دست آمده، روابط صریح a_nها را بر حسب a_0 و a_1 محاسبه کنیم. این نتایج را در سری مفروض برای y قرار دهید:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}_{1} + a_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{2}$$

به این صورت جواب به صورت یک سری حول نقطه $x=0$ نوشته شد. توجه کنید که از قبل می دانستیم سری ① همان بسط تیلور تابع $\cos x$ است و سری ② بسط تیلور تابع $\sin x$. پس

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

که در واقع همان نتیجه ای است که انتظار آن را داشتیم.

قضیه زیر وجود چنین جواب هایی به شکل سری توانی را برای معادله تضمین می کند.

قضیه: هرگاه x_0 یک نقطه عادی معادله (1) یا (2) باشد و همچنین p و q در x_0 تحلیلی باشند آن گاه جواب عمومی معادله به شکل زیر است

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

a_0 و a_1 دلخواهند و y_1 و y_2 دو سری تحلیلی در x_0 اند که مستقل خطی نیز هستند. به علاوه شعاع همگرایی سری های y_1 و y_2 برابر با مینیمم شعاع همگرایی p و q است.

مثال: جواب معادله زیر را به صورت یک سری حول $x=0$ بنویسید. $y''-xy=0$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n-2} + \cancel{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}=0$$

تغییر اندیس سری اول $n\rightarrow n+2$ و سری دوم $n\rightarrow n-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

اکنون جمله اول سری اول را از آن خارج کنید و جدا بنویسید تا هر دو سری از $n=1$ شروع شود:

$$1\times 2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_{n-1}\right]x^n=0$$

حال ضرایب توان‌های x را صفر قرار دهید:

(1) $2a_2=0 \Rightarrow \boxed{a_2=0}$

(2) $(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_{n-1}=0 \Rightarrow a_{n+2}=\dfrac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ $\quad n=1,2,3,\dots$

رابطه بازگشتی نشان می‌دهد که هر جمله a_n وابسته به سه جمله قبل خود است پس آن‌ها در سه مرحله به دست می‌آیند:

$$a_3=\frac{a_0}{3\times 2}$$
$$a_6=\frac{a_3}{6\times 5}=\frac{a_0}{6\times 5\times 3\times 2}$$
$$\vdots$$
$$a_{3k}=\frac{a_0}{3k(3k-1)(3k-3)\dots 3\times 2}$$

$$a_4=\frac{a_1}{4\times 3}$$
$$a_7=\frac{a_4}{7\times 6}=\frac{a_1}{7\times 6\times 4\times 3}$$
$$\vdots$$
$$a_{3k+1}=\frac{a_1}{(3k+1)(3k)(3k-2)\dots 4\times 3}$$

$$a_5=\frac{a_2}{5\times 4}=0$$
$$a_8=0$$
$$\vdots$$
$$a_{3k+2}=0$$

پس می‌توان جواب عمومی معادله را به شکل زیر نوشت:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\left(a_0+a_3x^3+a_6x^6+\dots\right)+\left(a_1x+a_4x^4+a_7x^7+\dots\right)$$

$$=a_0\left[1+\frac{x^3}{3\times 2}+\frac{x^6}{6\times 5\times 3\times 2}+\dots\right]+a_1\left[x+\frac{x^4}{4\times 3}+\frac{x^7}{7\times 6\times 4\times 3}+\dots\right]$$

تمرین: معادله مثال قبل را حول $x_0=1$ حل کنید.

معادله لژاندر:

فرم کلی: $$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0 \qquad k=0,1,2,\dots$$

این معادله را معادله لژاندر مرتبه k می نامیم. جواب های این معادله نقش مهمی در علوم مهندسی دارند.

$x=0$ یک نقطه عادی معادله است. پس قرار دهید $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و داریم: (جمله ها را جدا می کنیم)

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

تغییر اندیس در سری اول:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \qquad '' \qquad = 0$$

اندیس شروع سری ها یکسان نیست لذا جملاتی را از آن ها استخراج می کنیم تا همه از $n=2$ شروع شوند.

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^n - 2a_1 x - 2\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + k(k+1)\left[a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right] = 0$$

$$\underbrace{\left[2a_2 + k(k+1)a_0\right]}_{1 \quad =0} + \underbrace{\left[6a_3 - 2a_1 + k(k+1)a_1\right]}_{2 \quad =0}x + \sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \left(-n(n-1)-2n+k(k+1)\right)a_n\right]}_{3 \quad =0}x^n = 0$$

$$1 \Rightarrow a_2 = \frac{-k(k+1)}{2}a_0$$

$$2 \Rightarrow a_3 = \frac{-(k-1)(k+2)}{6}a_1$$

فرم بازگشتی:

$$3 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{-(k-n)(k+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n=2,3,4,\dots$$

از فرم بازگشتی به دست آمده نتیجه می شود:

$$a_4 = \frac{-(k-2)(k+3)}{4\times 3}a_2 = \frac{(k-2)(k)(k+1)(k+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = \frac{-(k-3)(k+4)}{5\times 4}a_3 = \frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!}a_1$$

و همینطور در حالت کلی:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n(k-2n+2)(k-2n)\cdots k(k+1)(k+3)\cdots(k+2n-1)}{2n!}a_0$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n(k-2n+1)(k-2n+3)\cdots(k-1)(k+2)(k+4)\cdots(k+2n)}{(2n+1)!}a_1$$

بنابراین معادله لژاندر مرتبه kام دو جواب مستقل خطی به فرم زیر دارد

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{k(k+1)}{2!}x^2 + \frac{(k-2)(k)(k+1)(k+3)}{4!}x^4 + \dots\right) +$$

$$a_1\left(x - \frac{(k-1)(k+2)}{3!}x^3 + \frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!}x^5 + \dots\right)$$

یک نکته جالب در خصوص این جواب‌ها وجود دارد و آن این است که همواره یکی از این دو جواب به شکل یک چند جمله‌ای با تعداد متناهی جمله خواهد بود.

فرض کنید k عددی زوج باشد در آن صورت جملات جواب اول از جایی به بعد یک فاکتور صفر $(k-k)$ خواهند داشت پس این جواب یک چند جمله‌ای متناهی است (نه یک سری).
و اگر k عددی فرد باشد این اتفاق برای سری دوم رخ خواهد داد.

پس همواره یک جواب معادله لژاندر مرتبه kام یک چند جمله‌ای درجه kام است. این چند جمله‌ای را چند جمله‌ای لژاندر می‌نامیم. البته در اینجا مقادیر دلخواه a_0 و a_1 نیز طوری انتخاب می‌شوند که این چند جمله‌ای‌ها خواص مطلوب‌تری داشته باشند. مثلاً این ضرایب را طوری انتخاب می‌کنیم که همه توابع لژاندر از $(1,1)$ عبور کنند. در چنین حالتی می‌توان فرم کلی این چند جمله‌ای‌ها را به شکل زیر نوشت:

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2k-2n)!}{n!(k-n)!(k-2n)!} x^{k-2n} \qquad k=0,1,2,\dots$$

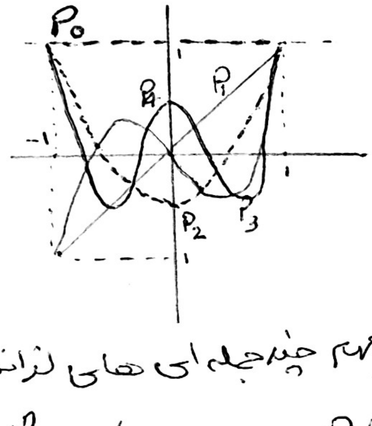
برخی از این چند جمله‌ای‌ها را در شکل زیر می‌بینید:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$



برخی خواص مهم چند جمله‌ای‌های لژاندر:

1) $P_n(1) = 1$ 2) $P_n(-1) = (-1)^n$ 3) $P_{2k+1}(0) = 0$

4) $P'_{2k}(0) = 0$ 5) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

اما خاصیت ویژه چندجمله‌ای های لژاندر، خاصیت تعامد این چندجمله‌ای ها در بازه [۱و۱-] است:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m=n \end{cases}$$

این خاصیت از این باب مهم است که امکان بسط بسیاری از توابع در بازه [۱و۱-] را برحسب یک سری از چندجمله‌ای های لژاندر، فراهم و تسهیل می کند.

فرض کنید f در بازه [۱و۱-] تعریف شده است. می خواهیم تابع f را در این بازه به بهترین وجه ممکن براساس توابع لژاندر تقریب بزنیم. عبارت "به بهترین وجه ممکن" را می توان با شروط ریاضی بسیاری تبیین کرد. یکی از مهم ترین روش ها روش کمترین مربعات پیوسته است: هدف پیدا کردن چندجمله‌ای حداکثر درجه n ام q_n به گونه است که عبارت خطای زیر را مینیمم مقدار ممکن کند

$$I=\int_{-1}^{1}\left(f(x)-q_n(x)\right)^2dx$$

q_n را می توان برحسب ترکیب خطی P_1 تا P_n نوشت.

$$q_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iP_i(x)$$

یعنی مساله به صورت پیدا کردن c_1 تا c_n در اعداد حقیقی به گونه‌ای است که عبارت زیر مینیمم مقدار ممکن شود:

$$I=\int_{-1}^{1}\left(f(x)-c_1P_1(x)-\dots-c_nP_n(x)\right)^2dx$$

برای مینیمم کردن این عبارت کافیست مشتق آن را نسبت به پارامترهای c_i بگیرید و مساوی صفر قرار دهید

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=\int_{-1}^{1}2P_i(x)\left(f(x)-c_1P_1(x)-\dots-c_nP_n(x)\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2P_i(x)f(x)-c_1 2P_i(x)P_1(x)-\dots-c_i 2P_i^2(x)-\dots-2c_nP_i(x)P_n(x)\,dx$$

اکنون با توجه به خاصیت تعامد فقط دو جمله از عبارت انتگرال بالا ناصفرند

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=\int_{-1}^{1}2P_i(x)f(x)-2c_iP_i^2(x)\,dx=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}P_i(x)f(x)\,dx-c_i\underbrace{\int P_i^2(x)\,dx}_{\frac{2}{2i+1}}=0$$

$$c_i=\frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}P_i(x)f(x)\,dx$$

مثال: تقریب کمترین مربعات لژاندر از درجه حداکثر دو را برای تابع زیر بیابید

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1\leqslant x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$f(x)\approx\sum_{i=0}^{2}c_iP_i(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)=c_0+c_1x+c_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_0(x)f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}-P_0(x)+\int_{0}^{1}xP_0(x)dx\right]=-\frac{1}{4}$$

$$c_1=\frac{2+1}{2}\int_{-1}^{1}P_1(x)f(x)dx=\frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{0}-P_1(x)+\int_{0}^{1}xP_1(x)dx\right]=\frac{5}{4}$$

$$c_2=\frac{4+1}{2}\int_{-1}^{1}P_2(x)f(x)dx=\frac{5}{2}\left[\int_{-1}^{0}-P_2(x)+\int_{0}^{1}xP_2(x)dx\right]=\frac{5}{16}$$

$$f(x)\approx-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}x+\frac{5}{16}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right).$$

نکته: در خصوص چندجمله ای های لژاندر می توان فرمول بازگشتی زیر را نیز ارائه کرد:

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_{k+1}(x)=\frac{2k+1}{k+1}xP_k(x)-\frac{k}{k+1}P_{k-1}(x)\qquad k\geqslant 1$$

همچنین این چندجمله ای ها در فرمولی به نام فرمول رودریگز صدق می کند:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]\qquad n=0,1,2,\dots$$