

تمرین تحویلی شماره ۳

فرض کنید abc سه رقم آخر سمت راست شماره دانشجویی تان است. این مقادیر را در تابع زیر قرار دهید و به سوالات بعد از آن پاسخ دهید:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{(a+1)x - (b+1)\frac{\sin(x^c + y^c)}{x^c + y^c}}, & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ, & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

الف) آیا تابع f در مبدأ پیوسته است؟ چرا؟

ب) ضابطه تابع $g(x) := f(x, 14 \circ \circ x)$ را بنویسید و حد آن را در $x = \circ$ بیابید (در صورت وجود).
پاسخ:

$$\begin{aligned} \circ &\leq \left| e^{(a+1)x - (b+1)\frac{\sin(x^c + y^c)}{x^c + y^c}} \right| \leq \left| e^{(a+1)x - (b+1)\frac{x^c + y^c}{x^c + y^c}} \right| \\ &= \left| e^{(a+1)x - (b+1)} x^c y^{\frac{x^c}{x^c + y^c}} \right| \leq \left| e^{(a+1)x - (b+1)} x^c y \right| \quad (1 \text{ نمره}) \\ \circ &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (\circ, \circ)} \left| e^{(a+1)x - (b+1)\frac{\sin(x^c + y^c)}{x^c + y^c}} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (\circ, \circ)} \left| e^{(a+1)x - (b+1)} x^c y \right| = \circ \end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\circ, \circ)} \left| e^{(a+1)x - (b+1)\frac{\sin(x^c + y^c)}{x^c + y^c}} \right| = \circ = f(\circ, \circ). \quad (1 \text{ نمره})$$

بنابراین تابع در مبدأ پیوسته است.

ب: چون تابع $f(x, y)$ در مبدأ حد دارد و برابر صفر است، حد آن به ازای هر مسیر دلخواهی برابر صفر است و با در نظر گرفتن مسیر $y = 14 \circ \circ x$ حد زیر حاصل می شود که برابر صفر است: (1 نمره)

$$\lim_{(x, 14 \circ \circ x) \rightarrow (\circ, \circ)} f(x, 14 \circ \circ x) = \lim_{x \rightarrow \circ} g(x) = \circ. \quad (1 \text{ نمره})$$

ضابطه $g(x)$ بصورت زیر است:

$$g(x) := f(x, 14 \circ \circ x) = \begin{cases} e^{(a+1)x - (b+1)\frac{\sin(14 \circ \circ x^c + x^c)}{x^c + 14 \circ \circ x^c}}, & x \neq \circ \\ \circ, & x = \circ \end{cases} \quad (1 \text{ نمره})$$