تمرین تحویلی شماره۱۳

فرض کنید که S بخشی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. هم چنین، فرض کنید N بردار قائم یکه بر S ، به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)$$

(الف) $\iint_{\mathrm{S}} F.N\,dS$ را بیابید.

(ب) $\oint_C F.dr$ را بیابید.

حل الف: سطح S قسمتی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار دارد. برای استفاده از قضیه دیورژانس سطح $\mathrm{S}_۱$ ، قسمتی از صفحه $z=۰$ را که به رویه S محدود شده است را اضافه می کنیم. از طرفی برای استفاده از قضیه دیورژانس قائم یکه باید روبه خارج سطح بسته مورد نظر باشد. بردار N که طبق فرض اینگونه است. بنابراین بردار $N_۱$ را روی سطح $\mathrm{S}_۱$ روبه پایین می گیریم، در واقع داریم $N_۱=-k$. بعلاوه ناحیه مشخص شده توسط $\mathrm{S}_۱$ عبارتست از تمام نقاط صفحه xy که $x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$. حال با استفاده از قضیه دیورژانس داریم :

$$\iint_{\mathrm{S}} F.NdS+\iint_{\mathrm{S}_۱} F.N_۱dS=\iiint_V divFdV \qquad (\text{۱ نمره})$$

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)=(P,Q,R)$$

$$\Rightarrow divF=\nabla.F=P_x+Q_y+R_z=۰ \qquad (\text{۱ نمره})$$

$$\iint_{\mathrm{S}} F.NdS+\iint_{\mathrm{S}_۱} F.N_۱dS=۰\Rightarrow \iint_{\mathrm{S}} F.NdS=-\iint_{\mathrm{S}_۱} F.(-k)dS \qquad (\text{۱ نمره})$$

$$\iint_{\mathrm{S}} F.NdS=-\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱}(xz\sin y-z\cos x+۱).(-۱)dxdy$$

$$=\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} dxdy=\pi. \qquad (\text{۲ نمره})$$

در تابع داخل انتگرال $z=۰$ قرار داده شده است.

روش دوم: با دوبار استفاده از قضیه استوکس، داریم:

$$\iint_{\mathrm{S}} curlF.NdS=\oint_C F.dr=\iint_{\mathrm{S}'} curlF.NdS \qquad (\text{۲ نمره})$$

S رویه داده شده و جهت دار، C مرز S با جهت القایی از S و S' رویه $x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$ است. (۱ نمره)

N رویه S' برابر است با $N=(۰,۰,۱)$. لذا داریم :

$$\iint_{\mathrm{S}'} curlF.NdS=\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱}(xzsiny-zcosx+۱)dxdy=\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} dxdy=\pi. \qquad (\text{۲ نمره})$$

حل ب: S' رویه $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ است. و بردار قائم یکه آن $N = (۰, ۰, ۱)$ است. (۱ نمره)

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S'} curlF.NdS = \iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} (h, g, Q_x - P_y).(۰, ۰, ۱)dxdy$$ (۲ نمره)

$$= \iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} -(cosy + ۱ - cosy)dxdy = -\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} dxdy = -\pi.$$ (۲ نمره)