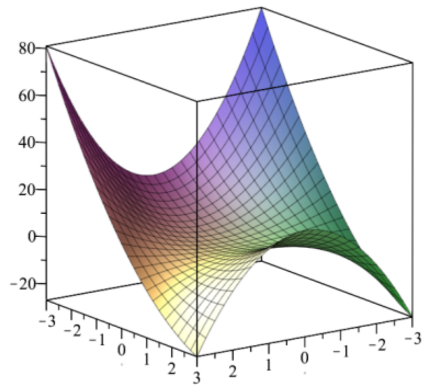
تمرین تحویلی شماره ۷

نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^۲-x^۲y+۲y^۲$ را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.



پاسخ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=۰ \\ \frac{\partial f}{\partial y}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۲xy=۰ \\ -x^۲+۴y=۰ \quad (۲) \end{cases}$$ (۱ نمره)

$$\Rightarrow ۲x(۱-y)=۰ \Rightarrow x=۰ \ or \ y=۱$$

حل دستگاه (۲ نمره). با استفاده از معادله (۲) داریم :

$$\text{if} \quad x=۰ \quad \rightarrow \quad y=۰$$

$$\text{if} \quad y=۱ \quad \rightarrow \quad x^۲=۴ \quad \Rightarrow x=\pm ۲$$

نقاط بحرانی : $\{(۰,۰),(۲,۱),(-۲,۱)\}$

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲-۲y & -۲x \\ -۲x & ۴ \end{bmatrix}$$ (۰,۵ نمره)

$$H(۰,۰)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \qquad f_{xx}=۲>۰ \quad , \quad \det \ H>۰ \quad \Rightarrow$$ نقطه$(۰,۰)$مینیمم نسبی است

$$H(۲,۱)=\begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ -۴ & ۴ \end{bmatrix} \qquad f_{xx}=۰ \quad , \quad \det \ H\neq ۰ \quad \Rightarrow$$ نقطه$(۲,۱)$ زینی است

$$H(-۲,۱)=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \qquad f_{xx}=۰ \quad , \quad \det \ H\neq ۰ \quad \Rightarrow$$ نقطه$(-۲,۱)$ زینی است

(بررسی هر نقطه ۰,۵ نمره جمعا ۱,۵ نمره)

راه حل دوم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ۰ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲xy = ۰ \\ -x^۲ + ۴y = ۰ \quad (۲) \end{cases}$$ (۱ نمره)

$$\Rightarrow ۲x(۱ - y) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ or \ y = ۱$$

حل دستگاه (۲ نمره). با استفاده از معادله (۲) داریم :

$$\text{if} \quad x = ۰ \quad \rightarrow \quad y = ۰$$
$$\text{if} \quad y = ۱ \quad \rightarrow \quad x^۲ = ۴ \quad \Rightarrow x = \pm ۲$$

نقاط بحرانی : $\{(۰, ۰), (۲, ۱), (-۲, ۱)\}$

همچنین داریم:

$$f_{xx} = ۲ - ۲y, \qquad f_{xy} = -۲x, \qquad f_{yy} = ۴$$ (۰,۵ نمره)

$f_{xx}(۰, ۰) = ۲ > ۰, \qquad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^۲|_{(۰,۰)} = ۸ > ۰ \quad \Rightarrow$ نقطه$(۰, ۰)$مینیمم نسبی است

$f_{xx}(۲, ۱) = ۰, \qquad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^۲|_{(۲,۱)} \neq ۰ \quad \Rightarrow$ نقطه$(۲, ۱)$ زینی است

$f_{xx}(-۲, ۱) = ۰, \qquad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^۲|_{(-۲,۱)} \neq ۰ \quad \Rightarrow$ نقطه$(-۲, ۱)$ زینی است

(بررسی هر نقطه ۰,۵ نمره جمعا ۱,۵ نمره)

راه حل سوم:

اگر برای مشخص کردن نوع نقاط بحرانی از بررسی رفتار تابع در همسایگی نیز استفاده شود صحیح است.

$$f(h,k)-f(۰,۰)=h^۲-h^۲k+۲k^۲=h^۲(۱-k)+۲k^۲$$

که در همسایگی $(۰,۰)$ عبارت بالا مثبت است لذا $f(h,k)>f(۰,۰)$. در نتیجه نقطه $(۰,۰)$ نقطه مینیمم نسبی است.
(۱ نمره)

$$\begin{aligned}f(۲+h,۱+k)-f(۲,۱)&=(۲+h)^۲-(۲+h)^۲(۱+k)+۲(۱+k)^۲-۲\\&=(۲+h)^۲(۱-۱-k)+۲(۱+k)^۲-۲\\&=(۲+h)^۲(-k)+۲(۱+k)^۲-۲\end{aligned}$$

عبارت بالا بسته به مقدار h,kمی تواند مثبت یا منفی باشد بنابراین نقطه $(۲,۱)$ زینی است. (۰٫۵ نمره)

$$\begin{aligned}f(-۲+h,۱+k)-f(-۲,۱)&=(-۲+h)^۲-(-۲+h)^۲(۱+k)+۲(۱+k)^۲-۲\\&=(h-۲)^۲(-k)+۲(۱+k)^۲-۲\end{aligned}$$

عبارت بالا نیز بسته به مقدار h,kمی تواند مثبت یا منفی باشد بنابراین نقطه $(-۲,۱)$ زینی است. (۰٫۵ نمره)

(مانند قبل نوشتن دستگاه مربوطه ۱ نمره و حل دستگاه ۲ نمره)