بسم الله الرحمن الرحیم

تمرینات سری سوم : مفاهیم انتگرال

۲۱ آذر ۱۳۹۹

سوال ۱

(آدامز) برای تابع مفروض $f(x) = x^3$ بر بازه مفروض $[0, 1]$ مقادیر $L(f, P_n), U(f, P_n)$ که در آن P_n افرازی است که بازه را به n زیر بازه، هر یک به طول $\Delta x = \frac{1}{n}$ تقسیم می کند محاسبه کنید. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$$

بنابراین f بر بازه $[0, 1]$ انتگرال پذیر است. مقدار $\int_0^1 x^3 dx$ چقدر است؟

حل : می‌دانیم:

$$L(f,P_n)=\sum_{i=۱}^{n} f(l_i)\triangle x_i \quad \& \quad U(f,P_n)=\sum_{i=۱}^{n} f(u_i)\triangle x_i$$

که در آن $f(l_i)$ مینیمم مقدار f و $f(u_i)$ ماکزیمم مقدار f در بازه $[x_{i-۱},x_i]$ است. با توجه به اینکه $f(x)=x^۳$ تابعی صعودی است لذا f مینیمم و ماکزیمم خود در بازه $[x_{i-۱},x_i]$ را به ترتیب در ابتدا و انتهای بازه می‌گیرد. داریم:

$$\{x_۰=۰,\ x_۱=\frac{۱}{n},\ x_۲=\frac{۲}{n}...,\ x_n=\frac{n}{n}=۱\} \quad \& \quad \triangle x_i=\frac{۱}{n}$$

$$\Rightarrow L(f,P_n)=\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\triangle x_i=\frac{۱}{n}\{۰^۳+(\frac{۱}{n})^۳+(\frac{۲}{n})^۳...+(\frac{n-۱}{n})^۳\}$$

$$=\frac{۱^۳+۲^۳+...+(n-۱)^۳}{n^۴}=\frac{n^۲(n-۱)^۲}{۴n^۴}$$

$$U(f,P_n)=\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\triangle x_i=\frac{۱}{n}\{(\frac{۱}{n})^۳+(\frac{۲}{n})^۳...+(\frac{n}{n})^۳\}$$
$$=\frac{۱^۳+۲^۳+...+n^۳}{n^۴}=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴n^۴}$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین f بر بازه $[۰,۱]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_۰^۱ x^۳dx=\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\frac{۱}{۴}$$

سوال ۲

آدامز) می دانیم برای تابع انتگرال پذیر $f(x)$ بر بازه $[a,b]$، عددی مانند $c \in [a,b]$ وجود دارد بطوریکه $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. $f(c)$ را مقدار متوسط تابع بر بازه $[a,b]$ می نامیم. مقدار متوسط توابع زیر را بر بازه داده شده محاسبه کنید.

الف) $f(t) = 1 + sint$ بر بازه $[-\pi,\pi]$.

ب) $f(x) = |x+1|sgnx$ بر بازه $[-2,2]$ که در آن $sgnx$ تابع علامت است و بصورت زیر تعریف می شود.

$$sgnx = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

حل الف:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}(1+sint)dt=\frac{1}{2\pi}(t-cost)|_{-\pi}^{\pi}=1$$

حل ب: داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \;\; or \;\; x<-1 \\ 0 & x=0 \\ -(x+1) & -1\leq x<0 \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4}\Big\{\int_{-2}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{0}-(x+1)dx+\int_{0}^{2}(x+1)dx\Big\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big\{(\frac{x^2}{2}+x)|_{-2}^{-1}-(\frac{x^2}{2}+x)|_{-1}^{0}+(\frac{x^2}{2}+x)|_{0}^{2}\Big\}=\frac{3}{4}$$

سوال ۳

حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۳}\left(\frac{x}{x-۳}\int_{۳}^{x}\frac{sint}{t}dt\right)$$

حل :

$$\lim_{x\to ۳}\left(\frac{x}{x-۳}\int_{۳}^{x}\frac{sint}{t}dt\right)=\lim_{x\to ۳}\left(\frac{x\int_{۳}^{x}\frac{sint}{t}dt}{x-۳}\right)=\frac{۰}{۰}$$

در حد فوق شرایط قضیه هوپیتال، یعنی رخ دادن حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ و مشتق پذیر بودن صورت و مخرج در همسایگی $x=۳$، برقرار است، لذا می‌توان برای محاسبه حد از قضیه هوپیتال استفاده نمود. در این صورت،

$$\overset{Hopital}{\Longrightarrow} L=\lim_{x\to ۳}\left\{\int_{۳}^{x}\frac{sint}{t}dt+x\frac{sinx}{x}\right\}=sin۳$$

سوال ۴

اگر تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر x داشته باشیم

$$\int_{۰}^{x} f(t)dt = xsinx + \int_{۰}^{x} \frac{f(t)}{۱+t^{۲}}dt$$

ضابطه f را بیابید.

حل: با توجه به پیوستگی توابع f و $f(x)/(x^۲+۱)$، شرایط قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برقرار است. لذا میتوان از رابطه

$$\int_{۰}^{x} f(t)dt = xsinx + \int_{۰}^{x} \frac{f(t)}{۱+t^۲}dt$$

مشتق گرفت:

$$\begin{aligned}
&f(x) = sinx + xcosx + \frac{f(x)}{۱+x^۲}\\
\Longrightarrow &(۱-\frac{۱}{۱+x^۲})f(x) = \frac{x^۲}{۱+x^۲}f(x) = sinx + xcosx\\
\Longrightarrow &f(x) = (\frac{۱+x^۲}{x^۲})(sinx + xcosx)
\end{aligned}$$

سوال ۵

فرض می کنیم $a < b$ و f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشد. ثابت k را طوری بیابید که انتگرال

$$\int_a^b (f(x) - k)^۲ dx$$

مینیمم شود.

حل :

تابع f بر بازه (a,b) پیوسته و $a<b$ داریم:

$$g(k)=\int_a^b (f(x)-k)^2dx=\int_a^b ((f(x))^2-2kf(x)+k^2)dx$$

$$=\int_a^b (f(x))^2dx-2k\int_a^b f(x)dx+k^2\int_a^b dx$$

بنابراین با مشتق گیری از $g(k)$ نسبت به k داریم:

$$\to g'(k)=-2\int_a^b f(x)dx+2k(b-a)=0\to k=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\bar{f}$$

حال چون $\lim\limits_{k\to+\infty} g(k)=+\infty$ و $\lim\limits_{k\to-\infty} g(k)=+\infty$ لذا تابع g در $k=\bar{f}$ مقدار مینیمم خود را اختیار می کند.

سوال ۶

فرض کنید $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: f تابعی پیوسته باشد و $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 1$. نشان دهید $c \in [0, 1]$ وجود دارد بطوریکه $f(c) = 3c^{2}$.

حل :

تابع $g(x) = f(x) - 3x^2$ را روی بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید، با به کار بردن قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\exists c \in [0, 1] : g(c) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{1-0} \int_0^1 (f(x) - 3x^2)dx$$

$$\rightarrow g(c) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 3x^2 dx = \int_0^1 f(x)dx - 1 = 0 \rightarrow f(c) = 3c^2$$

سوال ۷

فرض کنید $0 < a < b$ و $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

نشان دهید $c \in (a, b)$ وجود دارد بطوریکه $\int_a^c f(x)\, dx = c\, f(c)$.

حل :
تابع $g(x)$ را با ضابطه زیر در نظربگیرید که چون f پیوسته است تابع g مشتق پذیر است.

$$g(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x} \to g'(x) = \frac{xf(x) - \int_a^x f(t)dt}{x^2}$$

حال مقدار تابع $g(x)$ را در نقطه a, b بدست می آوریم

$$g(a) = 0, g(b) = 0$$

با استفاده از قضیه رول داریم:

$$\to \exists c \in (a, b) : g'(c) = 0 \to \frac{cf(c) - \int_a^c f(t)dt}{c^2} = 0$$

$$cf(c) - \int_a^c f(t)dt = 0 \to \int_a^c f(t)dt = cf(c)$$

سوال ۸

ثابت کنید اگر $g(x)$, $f(x)$ دو تابع روی بازه $[a,b]$ باشند به نحوی که $g(x)$ تابعی پیوسته و $f \geq 0$ تابعی پیوسته و انتگرال پذیر باشد، در اینصورت نقطه ای مانند $x_0 \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(x_0) \int_a^b f(x)\, dx.$$

حل : تابع g روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است، لذا در این بازه ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند.
قرار دهید:

$$\exists u \;\; s.t \;\; g(u) = \min_{[a,b]} g(x) \;, \quad \exists v \;\; s.t \;\; g(v) = \max_{[a,b]} g(x)$$

$$g(u) \leq g(x) \leq g(v) \quad \xrightarrow{f \geq 0} \quad g(u)f(x) \leq f(x)g(x) \leq g(v)f(x)$$

اگر $\int_a^b f(x)dx = 0$ ، بنابر نامنفی بودن f و قضیه گفته شده، $f(x) = 0$ و به وضوح حکم برقرار است. لذا فرض کنید $\int_a^b f(x)dx$ ناصفر است. در اینصورت داریم

$$g(u) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \leq g(v)$$

اما چون $g(x)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است، لذا از قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود

$$\exists x_\circ \in (a,b) \quad s.t. \quad g(x_\circ) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

و در نتیجه:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(x_\circ)\int_a^b f(x)dx$$

سوال ۹

(آدامز) با استفاده از انتگرال معین، تابعی مانند $F(x)$ تعریف کنید که به ازای هر x ،
$F'(x) = \dfrac{sinx}{۱ + x^۲}$ و در رابطه $F(۱۷) = ۰$ صدق کند.

حل: تابع $\frac{sinx}{۱+x^۲}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. بنابراین انتگرال پذیر است:

$$F(x) := \int_{۱۷}^{x} \frac{sint}{۱+t^۲} dt + C$$

چون $F(۱۷) = ۰$ در نتیجه $C = ۰$ و

$$F'(x) = \frac{sinx}{۱+x^۲}$$

سوال ۱۰

(آدامز) الف) مینیمم و ماکسیمم تابع $F(x) = \int_{0}^{2x-x^2} cos(\frac{1}{1+t^2})dt$ را بیابید.

ب) اگر $f(x) = \int_{0}^{x} (1-t^2)cos^2t\ dt$ ، روی کدام بازه $f(x)$ صعودی است.

حل : قسمت الف)
از تابع $F(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$F^{'}(x) = (۲-۲x)\,cos(\frac{۱}{۱+(۲x-x^۲)^۲}) = ۰$$

پس نقطه $x=۱$ نقطه بحرانی است. اگر $x<۱$ لذا $F'(x)>۰$ و اگر $x>۱$ در نتیجه $F'(x)<۰$ لذا F در $x=۱$ ماکسیمم خود را اختیار می‌کند.
برای هر t داریم:

$$۰ < \frac{۱}{۱+t^۲} \leq ۱$$

است. چون تابع $cosx$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ نزولی است ، پس:

$$۰ < cos(۱) \leq cos(\frac{۱}{۱+t^۲}) \leq ۱ \quad \rightarrow \quad \int_a^b cos(۱) \leq \int_a^b cos(\frac{۱}{۱+t^۲}).$$

تابع انتگرال برای هر t پیوسته است پس $F(x)$ تعریف‌پذیر و مشتق‌پذیر برای هر x است. اگر x به حد کافی بزرگ یا کوچک شود $2x - x^2 < 0$ پس:

$$F(x) = -\int_{2x-x^2}^{0} cos\frac{1}{1+t^2}dt \leq -\int_{2x-x^2}^{0} cos(1)dt = (2x - x^2)cos(1)$$

از آنجا که $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x - x^2 = -\infty$ لذا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = -\infty \ .$$

پس نقطه ماکسیمم تابع در $x = 1$ است و این تابع مینیمم ندارد.

قسمت ب)
از تابع $F(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \int_{۰}^{x} (۱ - t^{۲}) cos^{۲} t \quad \rightarrow \quad f^{'}(x) = (۱ - x^{۲}) cos^{۲} x$$

لذا:

$$f^{'}(x) \geq ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad -۱ \leq x \leq ۱$$

با تشکر از توجه شما