فصل ۱۰ – روابط بازگشتی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

10

Recurrence Relations

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

تمرین ۷ (تمرینات ۱۰-۳) ص ۲۱۲

رابطه بازگشتی $a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=3+5(n)$ را حل کنید.
$n\in \mathbb{Z}^{\geq 0}$

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ n\geq 0 \quad A,r\neq 0 \end{cases} \Rightarrow Ar^{n+3}-3Ar^{n+2}+3Ar^{n+1}-3Ar^n=0$$

$$\Rightarrow (r-1)^3=0 \Rightarrow r_1=r_2=r_3=1$$ (معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)} = A_0+A_1n+A_2n^2}$$

$$a_n^{(p)} = n^3(B_0+B_1n) = B_0n^3+B_1n^4$$

با جایگذاری $a_n^{(p)}$ در معادله اصلی داریم:

$$B_0(n+3)^3+B_1(n+3)^4-3\left(B_0(n+2)^3+B_1(n+2)^4\right)$$
$$+3\left(B_0(n+1)^3+B_1(n+1)^4\right)-\left(B_0n^3+B_1n^4\right)=3+5n$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{-3}{4}, \quad B_1=\frac{5}{24}$$

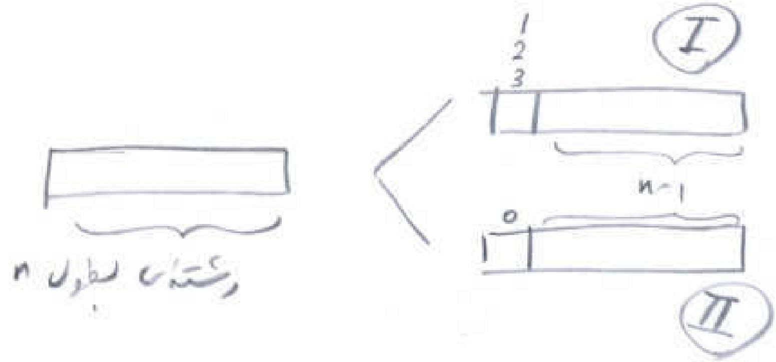
$$a_n^{(p)} = -\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{24}n^4$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = a_n^{(h)}+a_n^{(p)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = A_0+A_1n+A_2n^2-\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{24}n^4 \\ n\geq 0 \end{array}}$$

تعداد رشته‌های n رقمی با استفاده از ارقام $\{0,1,2,3\}$ را بیابید بطوریکه عدد ۳ هیچ گاه در سمت راست ۰ قرار نگیرد.



رشته‌هایی که رقم سمت چپ‌ترین آن ها ۱، ۲ یا 3 است.

رشته‌هایی که رقم سمت چپ‌تر آن ها ۰ است.

اگر کل رشته‌هایی بطول n با شرایط ذکر شده را با a_n نشان دهیم در اینصورت مجموع حالات I و II برابر با a_n است.

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1} \qquad (*)$$

$$a_1 = 4$$

حل معادله همگن متناظر

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n^{(h)} = cr^n \Rightarrow cr^n - 3cr^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow r = 3 \Rightarrow \boxed{a_n^{(h)} = A3^n}$$

یافتن جواب خصوصی $\Rightarrow$ $B3^{n-1}$ نمی‌تواند جواب خصوصی باشد (به علت وابستگی به جواب معادله همگن) $\Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = Bn3^{n-1}} \Rightarrow$ جایگذاری در معادله (*)

$$Bn3^{n-1} - 3\left(B(n-1)3^{n-2}\right) = 3^{n-1} \Rightarrow B=1 \Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = n3^{n-1}}$$

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A3^n + n3^{n-1}}$$

$$a_1 = 4 = 3A + 3^0 \Rightarrow \boxed{A=1} \Rightarrow \boxed{a_n = 3^n + n3^{n-1} \quad n \geq 1}$$

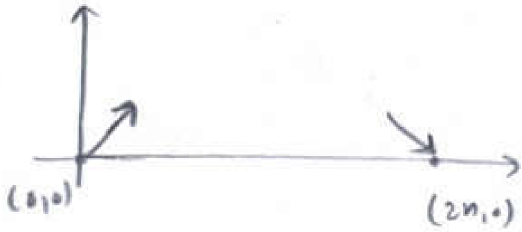
به ازای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$

که در اینجا منظور از C_n ، عدد nام کاتالان است. $C_0 = 1$

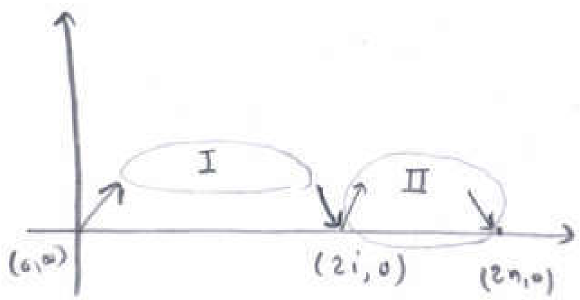
C_n برابر است با کلیه مسیرهایی که بین $(0,0)$ و $(2n,0)$ وجود دارد و این مسیرها صرفاً با استفاده از حرکت‌های $(x,y) \to (x+1,y+1)$ و $(x,y) \to (x+1,y-1)$ انجام می‌گیرد و در عین حال هیچ‌گاه در طول مسیر پایین‌تر از محور xها نمی‌رویم.

این چون عدد کاتالان nام است.

حال می‌خواهیم به روشی دیگر عدد nام کاتالان را محاسبه کنیم.



کلیه مسیرهای مطلوب ما (با شرایطی که در بالا ذکر شد) از $(0,0)$ شروع می‌شوند اما در نهایت برای نخستین بار در یکی از نقاط $(2i,0)$ (که $1 \le i \le n$) با محور xها مماس می‌شوند.



پس می‌توان مسیرها را بر حسب اینکه اولین نقطه برخوردشان با محور xها کجاست، افراز کرد.

پس تعداد مسیرهای مطلوب ما که اولین برخورد در $(2i,0)$ صورت گیرد برابر است با:

(تعداد مسیرهای II) × (تعداد مسیرهای I) = مسیرهای مطلوب با شرط بالا

$= C_{i-1} \times C_{n-i}$

(توجه: C_n تعداد مسیرهایی به طول $2n$ است. C_i نیز تعداد مسیرهایی به طول $2i$ است.)

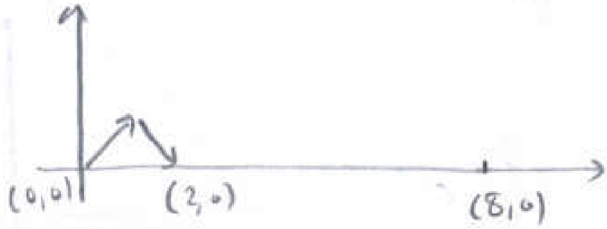
I مسیرهای : مسیرهایی هستند که از $(1,1)$ به $(2i-1,1)$ وجود دارند و هیچ گاه از خط $y=1$ پایین‌تر نمی‌آیند.

II مسیرهای : چون مسئله اصلی است با ابعاد کوچکتر یعنی کلیه مسیرهایی از $(2i,0)$ به $(2n,0)$ بطوریکه زیر محور x ها نیایند.

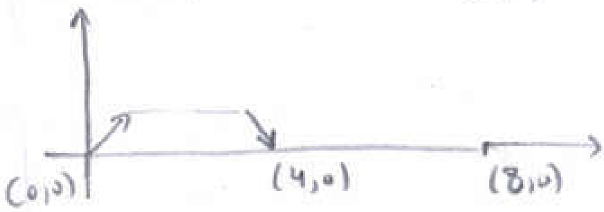
$$\Rightarrow \text{کل مسیرها} = C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}\, C_{n-i}$$

نکته: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $C_0 = 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$

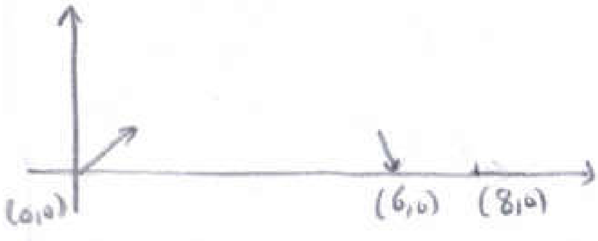
مثال: می‌خواهیم برای $n=4$ ، C_4 را حساب کنیم:



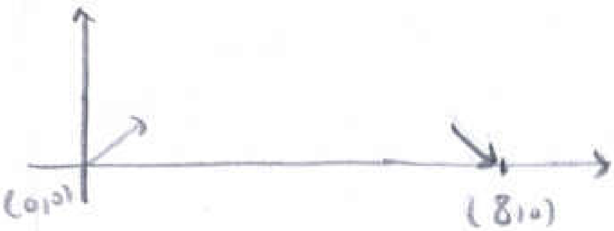
C_0C_3



C_1C_2



C_2C_1



C_3C_0

پس تعداد کل مسیرها می‌شود: $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0$

$(C_0 = 1)$

به ازای $n \geq 0$ فرض کنید $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

(اگر $n=0$ باشد آنگاه $S = \emptyset$)

اگر a_n تعداد زیرمجموعه‌هایی از S را نشان دهد که شامل هیچ سه عضو متوالی نیستند، رابطهٔ بازگشتی برای a_n بیابید.

فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ زیرمجموعه‌ای باشد که هیچ سه عضو متوالی ندارد. $(n \geq 3)$

در اینصورت A به صورت یکی از موارد زیر است:

① $n \notin A \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع $= a_{n-1}$

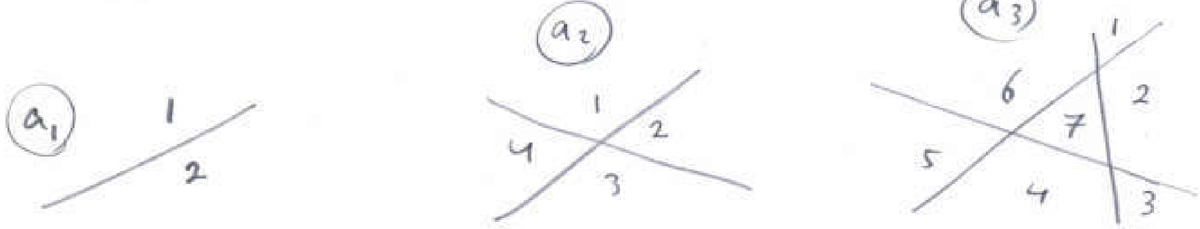
② $\begin{cases} n \in A \,,\ (n-1) \notin A \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع} = a_{n-2} \\ n \in A \,,\ (n-1) \in A \Rightarrow (n-2) \notin A \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع} = a_{n-3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \,, & n \geq 3 \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \\ \emptyset \qquad \emptyset, \{1\} \qquad \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \end{cases}$$

تمرین ۳. (از تمرینات ۳.۱۰ - ص ۶۱۶)

الف) فرض کنید n خط در صفحه چنان رسم شده اند که هر خط همه خط‌های دیگر را قطع می‌کند، ولی هیچ سه خطی در یک نقطه همدیگر را قطع نمی‌کنند. فرض کنید a_n به ازای $n \geq 0$ تعداد ناحیه‌هایی در صفحه باشد که این n خط پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ابتدا به عنوان مثال، به چند مقدار اولیه a_n $(n = 1,2,3)$ توجه کنید:



و اما برای حل و رسیدن به یک راه حل کلی: (l_i نشان دهنده i امین خط رسم شده است. $i \in \mathbb{Z}^+$)

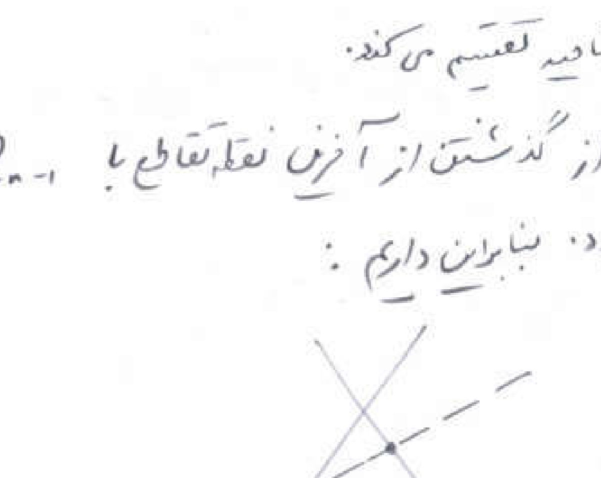
فرض کنید $n-1$ خط را رسم کرده‌ام. حال در حین نصب n امین خط (یعنی l_n) یکایک خطوط را قطع می‌کنم بدین ترتیب که ابتدا l_1، سپس l_2، .... و در نهایت l_{n-1}.

هر بار l_n که با یکی از خطوط از قبل رسم شده برخورد می‌کند، یکی از ناحیه‌های ایجاد شده قبلی را به دو ناحیه تقسیم می‌کند.

و پس از گذشتن از آخرین نقطه تقاطع با l_{n-1}، یک ناحیه دیگر جدید نیز به دو بخش تقسیم می‌گردد. بنابراین داریم:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

$$a_0 = 1$$



$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

معادله همگن متناظر

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \underset{(\text{معادله مشخصه})}{Ar^n - Ar^{n-1} = 0} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow a_n^{(h)} = A1^n = A$$

$$\boxed{a_n^{(h)} = A}$$

$$\begin{cases} a_n^{(p)} = n(B + Cn) = Bn + Cn^2 \\ Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + n \Rightarrow \\ B = C = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \end{cases}$$

نحوه محاسبه جواب خصوصی

(ضرایب توان‌های یکسان n باید با یکدیگر برابر باشند)

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$a_0 = 1 = A + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0)^2 \Rightarrow A = 1$$

پس جواب نهایی:

$$\boxed{\begin{array}{c} a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \\ n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \end{array}}$$

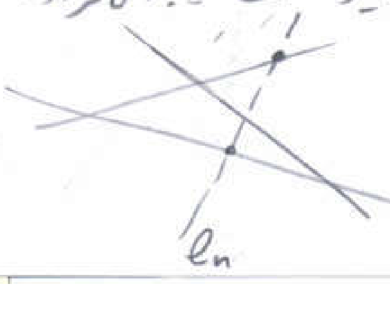
ب) برای وضعیت قسمت الف فرض کنید b_n تعداد ناحیه‌های بیکران حاصل باشد. رابطه بازگشتی برای b_n بیابید و آن را حل کنید.

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2 \\ b_1 = 2 \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} b_n = 2n \\ b_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 1} \end{cases}}$$

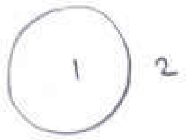
در هنگام رسم خط ℓ_n، ابتدا (قبل از برخورد با اولین خط)، و همچنین بعد از برخورد با آخرین خط دو فضای بیکران جدید ایجاد می‌گردد.



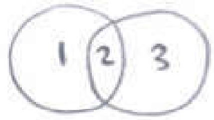
n دایره دو به دو متقاطع در صفحه رسم شده‌اند، بطوریکه هیچ ۳ دایره‌ای از یک نقطه نمی‌گذرند.
فرض کنید a_n تعداد ناحیه‌هایی باشد که این n دایره پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ابتدا به عنوان مثال، به چند مقدار اولیه a_n توجه کنید:

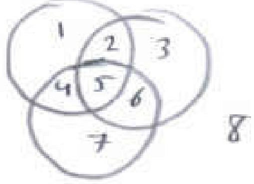
a_1



a_2



a_3



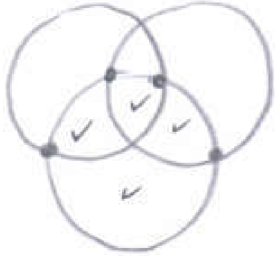
اگر فرض کنیم n-1 دایره، صفحه را به a_{n-1} ناحیه تقسیم کرده‌اند، در اینصورت داریم:

در حین رسم دایرهٔ nام، این دایره جدید با هر یک از n دایره قبلی، در ۲ نقطه متقاطع خواهد بود.

سپس روی دایرهٔ جدید، $2(n-1)$ نقطه تقاطع ایجاد می‌گردد.

بین هر دو نقطه متوالی روی دایرهٔ جدید (دایره nام)، یک ناحیه درون دایره جدید وجود دارد.

به عنوان مثال دایرهٔ سوم که دو دایره قبلی را قطع می‌کند، نواحی زیر را بوجود می‌آورد:



بنابراین با افزودن دایرهٔ nام، تعداد $2(n-1)$ ناحیه جدید به نواحی قبلی اضافه می‌گردد.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \qquad n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

معادله همگن متناظر

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad Ar^n - Ar^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow r = 1 \qquad a_n^{(h)} = A\,1^n = A$$

(معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)} = A}$$

نحوه حل به جواب خصوصی
(ضرایب توان‌های یکسان n با یکدیگر
باید برابر باشند)

$$\begin{cases} a_n^{(p)} = n(B + Cn) = Bn + Cn^2 \\ Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + 2(n-1) \\ \cancel{Bn} + \cancel{Cn^2} = \cancel{Bn} - B + \cancel{Cn^2} - 2Cn + C + 2n - 2 \\ \quad B - C + 2 = 2n - 2Cn = n(2 - 2C) \\ \quad \begin{cases} B - C + 2 = 0 \\ 2 - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = 1, \; B = -1 \quad \Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = n^2 - n} \end{cases}$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A + n^2 - n$$

$$a_1 = 2 = A + 1 - 1 \quad \Rightarrow A = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = n^2 - n + 2 \\ a_1 = 2 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{array}}$$

To understand recursion, one must first understand recursion.

Stephen Hawking