First order ODE

مقدمه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول   فرم کلی : $F(x,y,y')=0$

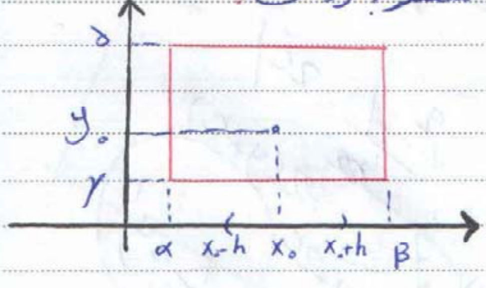
* برای جلوگیری از ابهام فرض می‌کنیم :   فرم استاندارد : $y'=f(x,y)$

قضیه : فرض کنیم توابع $f(x,y)$ ، $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ در مستطیل $\alpha<x<\beta$ ، $\gamma<y<\delta$: R

که شامل (x_0,y_0) است ، پیوسته است .

در اینصورت همسایگی $x_0-h<x<x_0+h$ حول x_0 موجود است (زیرمجموعه $[\alpha,\beta]$)

بطوری که در آن مسأله $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ دارای جواب منحصر به فرد است .



Ex) $\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

$f(x,y)=x^2+y^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y$

در هر مستطیلی که شامل $(0,1)$ می‌باشد پیوسته هستند

بنابراین همسایگی حول صفر موجود است بطوری که مسأله بالا در این

همسایگی دارای جواب یکتاست .

$y'=2xy^2 \to y=\frac{1}{1-x^2}$ $(-1,1)$

$\begin{cases} y'=\sqrt{y} \\ y(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی ندارد}} \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=\frac{x^2}{4} \end{cases}$ جواب منحصر به فرد ندارد

Ex) بزرگترین بازه‌ای که مسئله زیر دارای جواب منحصربفرد در آن است را بیابید.

$$\begin{cases} x(x-4)y' + y = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$y' = \underbrace{\frac{-y}{x(x-4)}}_{f(x,y)}$$

$x_0 = 2, y_0 = 1$

$x = 0, x = 4$ نقاط ناپیوستگی

بازه جواب : $(0, 4)$

نکته خارج از بحث: $y^2 + y'^2 = 0 \Longrightarrow y(x) = 0$ $\quad y'^2 + 1 = 0$ در $\mathbb{R}$ جواب ندارد.

جلسه چهارم ۱۱ اسفند

* معادلات دیفرانسیل مرتبه اول First order ODE

فرم استاندارد این معادلات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: $y' = f(x,y) \longrightarrow \frac{dy}{dx}$

می‌توان به صورت روبرو نیز نوشت: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

I) معادلات جداپذیر Separable DE

معادله دیف $y' = f(x,y)$ را جداپذیر گوییم هرگاه بتوان نوشت $f(x,y) = g(x)h(y)$ همچنین

در فرم $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ معادله را جداپذیر گوییم هرگاه بتوان نوشت:

$M(x,y) = g_1(x)\,h_1(y)$

$N(x,y) = g_2(x)\,h_2(y)$

در اینصورت این معادلات را می‌توان پس از مرتب‌سازی با انتگرال‌گیری حل نمود.

روز طبیعت (تعطیل)

(Ex) I) $y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{y(x+2)} \longrightarrow \frac{y}{1+y}\,dy = \frac{x\,dx}{x+2} \xrightarrow{\int}$

$$\int \frac{1+y-1}{1+y}\,dy = \int 1 - \frac{1}{1+y}\,dy = y - \ln(1+y) = \int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx = x - 2\ln(x+2) + C$$

جواب عمومی: $y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + C$

II) $y' = \frac{1+y^2}{2y(1+x^2)}$ $\quad \frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \xrightarrow{\int}$

$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

جواب عمومی $(1+y^2)(1+x^2) = Cx^2 \longrightarrow 1+y^2 = \frac{Cx^2}{1+x^2} \longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{Cx^2}{1+x^2} - 1}$

تذکر) معادلاتی به فرم $y' = f(ax+by+c)$ که در آنها a,b,c ثابت هستند جداپذیر نمی‌باشند.

اما با تغییر متغیر زیر می‌توان آنها را به معادلات جداپذیر تبدیل نمود:

$$U = ax+by+c \xrightarrow{d/dx} U' = a + by' \longrightarrow y' = \frac{1}{b}(U' - a) \quad \{b \neq 0\}$$

جایگذاری $\frac{1}{b}(U' - a) = f(U) \longrightarrow U' = bf(U) + a$

(EX.) I) $y' = 1 + \frac{1}{x-y}$

(I) $U = x-y \xrightarrow{d/dx} U' = 1-y' \Rightarrow y' = 1-U'$

$1-U' = 1+\frac{1}{U} \longrightarrow U' = \frac{-1}{U} = \frac{dU}{dx} \longrightarrow -UdU = dx \xrightarrow{\int} \frac{-U^2}{2} = x+C$

$\longrightarrow U^2 + 2x = C \longrightarrow (x-y)^2 + 2x = C$:جواب عمومی

II) $y' = tg(x+y) - 1$

(II) $U = x+y \xrightarrow{d/dx} U' = 1+y' \Rightarrow y' = U'-1$

$U' = tg\, U = \frac{dU}{dx} = tg\, U \rightarrow \frac{dU}{tgU} = dx \xrightarrow{\int} \ln(\sin U) = x+C$

$\rightarrow \ln|\sin(x+y)| = x+C$

II معادلات همگن Homogeneous

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را همگن گوییم

هرگاه توابع $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ را همگن از یک درجه باشند

بطور معادل معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را همگن گوییم هرگاه

$f(x,y)$ تابعی همگن از درجه $n=0$ باشد.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ $n=0$ همگن λ

$-\frac{\lambda^n}{\lambda^n}\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$

$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos y$ ناهمگن

$f(x,y) = tg\frac{y}{x}$ همگن از درجه $n=0$

$f(x,y) = \frac{1}{xy}$ $n=-2$ // //

*یادآوری

تابع همگن:

تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه $n \in \mathbb{Z}$ گوییم هرگاه

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

EX. $f(x,y) = x^3 + 5xy^2 + 2y^3$

Ans. همگن از درجه $n=3$

$f(x,y) = x\sin\frac{x}{y}$

Ans. $n=1$ همگن