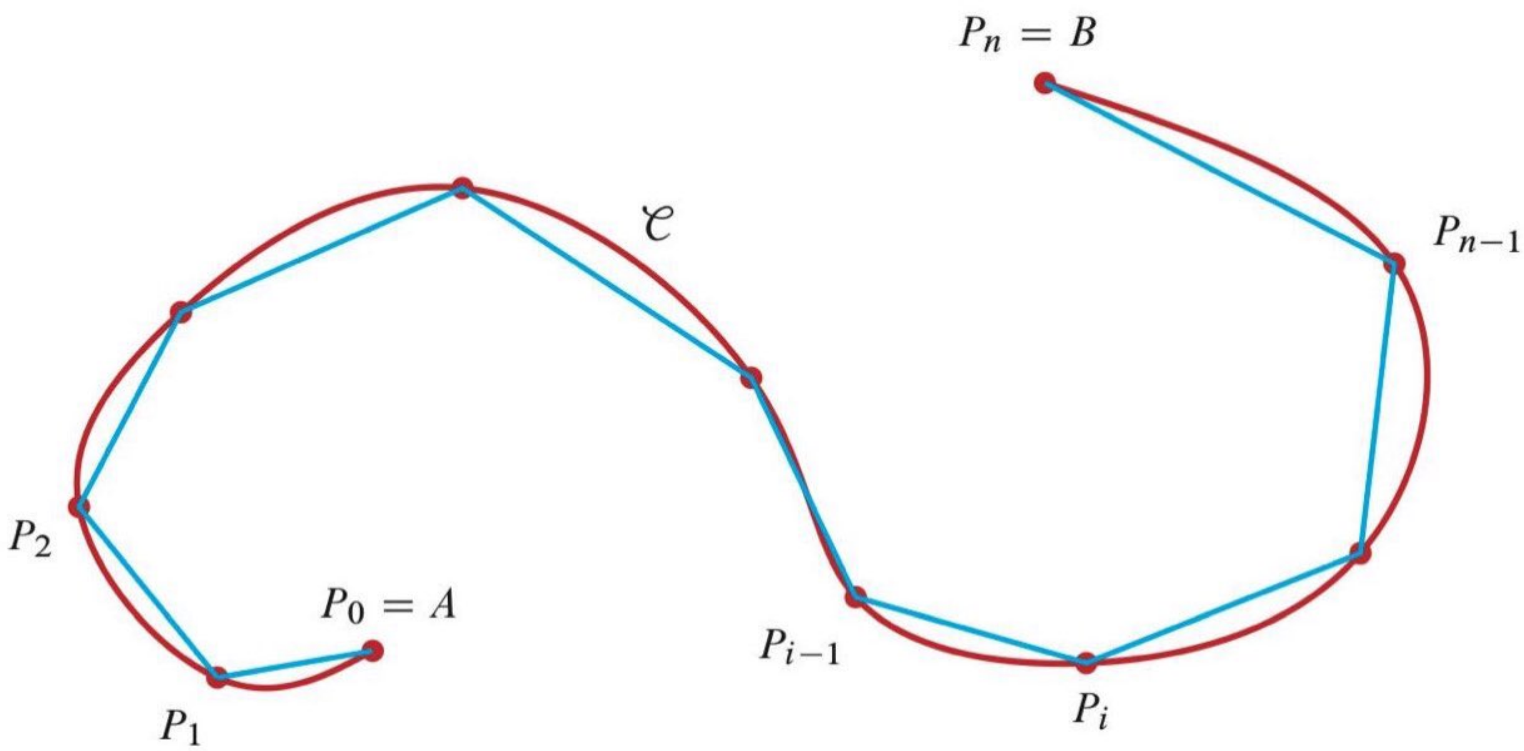
محاسبه‌ی طول قوس

(طول منحنی) :


$P_n = B$
$\mathcal{C}$
P_{n-1}
P_2
$P_0 = A$
P_{i-1}
P_1
P_i

گزاره: فرض کنید $y=f(x)$ تابعی با مشتق پیوسته

روی $[a,b]$ باشد. در این صورت:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

S: طول قوس منحنی $y=f(x)$ روی $[a,b]$

توضیح:

$$P_0=(\underset{\overset{\shortparallel}{x_0}}{a}, f(a)),\ P_1=(x_1, f(x_1)), \dots, P_n=(\underset{\overset{\shortparallel}{x_n}}{b}, f(b))$$

$$l_n=\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\, \Delta x_i$$

قضیه مقدار میانگین

$\forall i,\ \exists c_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\, \Delta x_i$$

$$\underbrace{g(x)} = \sqrt{1+f'(x)}$$

پیوسته

$$\Rightarrow \overbrace{\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\|P\|\to 0)}} l_n}^{S} = \lim_{\|P\|\to 0} R(g, c, P)$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$dS = \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

گزاره : فرض کنید $x = g(y)$ تابعی با مشتق پیوسته روی $[c,d]$ باشد. در این صورت :

طول قوس $y = g(x)$ روی $[c,d]$: $S = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy$.

مثال: طول منحنی‌های زیر را بیابید:

① $y = \cosh x \quad ; \quad 0 \le x \le a$

$$S = \int_0^a \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^a \cosh x \, dx$$

$$= \left(\sinh x\right)_0^a = \boxed{\sinh(a)}\,.$$

② $y = \ln(\cos x)$; $\pi/6 \leq x \leq \pi/4$

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1 + tg^2 x}\, dx$$

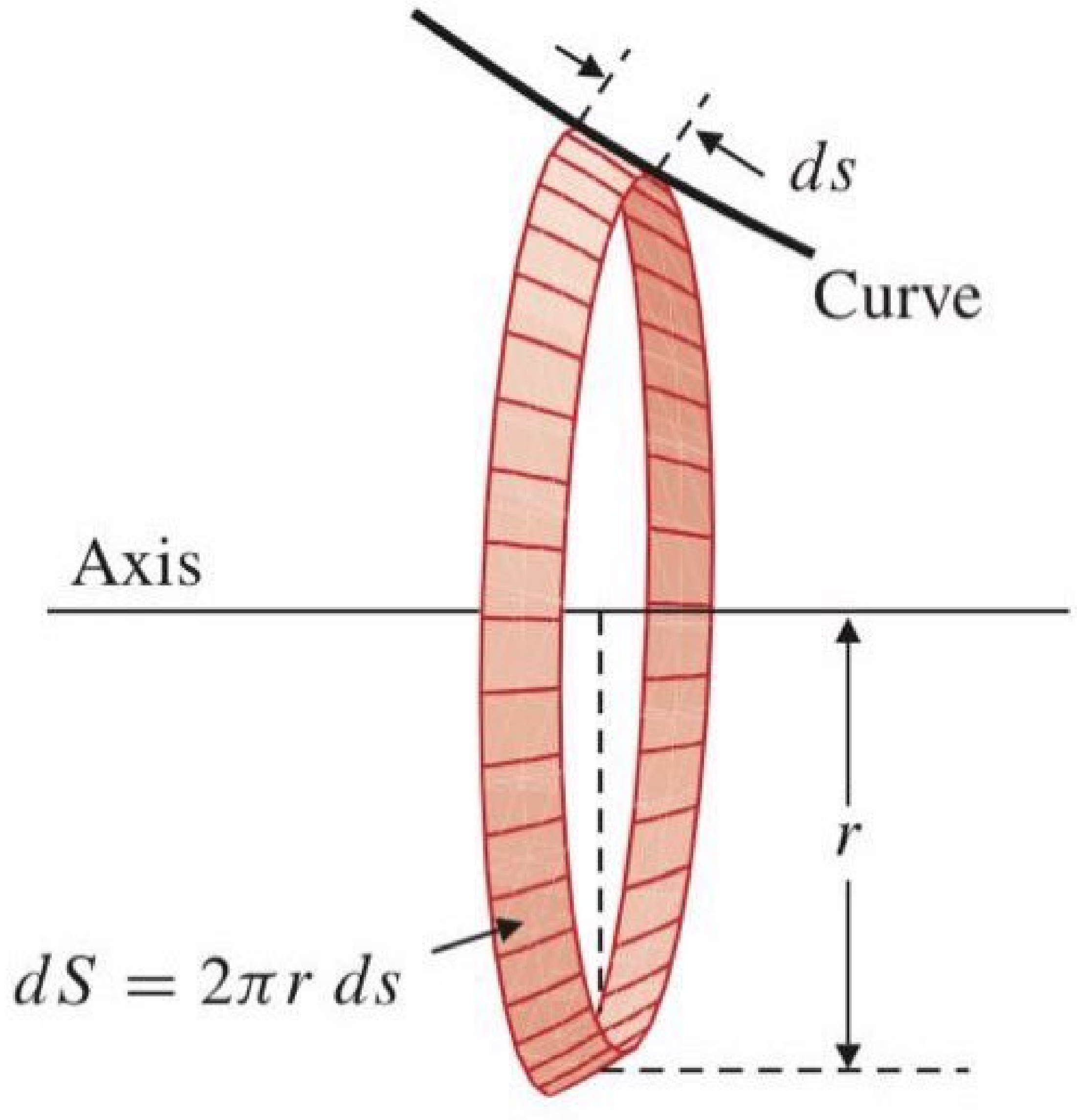
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec x \, dx$$

$$= \ln\left|\sec x + tg\, x\right| \Big)_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

مساحة سطوح دوارة


ds
Curve
Axis
r
dS = 2πr ds

* فرض کنید $y=f(x)$ روی $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته باشد.

① اگر آن را حول محور x ها دوران دهیم، مساحت سطح دوار به دست آمده عبارت است از:

$$S=\int_a^b 2\pi\,|f(x)|\,ds$$

$$=\int_a^b 2\pi\,|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

② اگر آن را حول محور y ها دوران دهیم:

$$S=\int_a^b 2\pi\,|x|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

* اگر $x=g(y)$ روی $[c,d]$ دارای مشتق پیوسته باشد، داریم:

① اگر آن را حول محور x ها دوران دهیم:

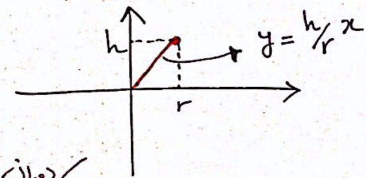
$$S=\int_c^d 2\pi\,|y|\,\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

② اگر آن را حول محور y ها دوران دهیم:

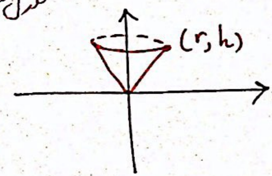
$$S=\int_c^d 2\pi\,|x|\,ds$$

$$=\int_c^d 2\pi\,|g(y)|\,\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

مثال: مساحت جانبی مخروط به ارتفاع h و شعاع r را بیابید:



دوران حول محورها

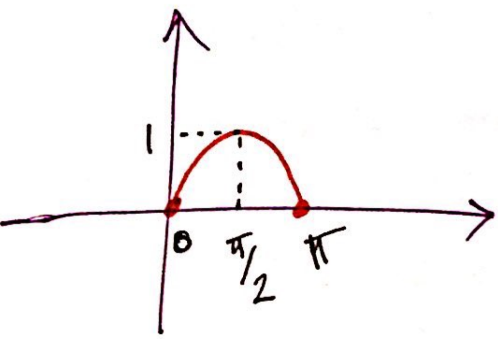


$$S = 2\pi \int_0^r |x| \sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}\, dx$$

$$= \pi r \sqrt{r^2+h^2}$$

Scanned with CamScanner

مثال: اگر منحنی $y=\sin x$ را برای $0 \leq x \leq \pi$ ، حول محور x ها دوران دهیم، مساحت سطح دوار حاصل را بیابید:



$$S=\int_0^{\pi} 2\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$\frac{U=\cos x}{dU=-\sin x\, dx} \qquad -\int_1^{-1} 2\pi \sqrt{1+U^2}\, dU$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1} \sqrt{1+U^2}\, dU = \cdots$$

(قبلاً در کلاس دیده‌ایم).

محاسبه‌ی حد با انتگرال معین

مثال: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$ را بدست آورید.

حل:

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_i)$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x_i=\frac{i}{n}\ \Longrightarrow\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

حل :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \overbrace{\left(\frac{(n!)}{n^n}\right)^{1/n}}^{y_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (\ln y_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \ln x \, dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(x \ln x - x\right)\Big|_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(-1 - a \ln a + a\right)$$

$$= \boxed{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} y_n = e^{-1}$$