آهنگ لحظه‌ای تغییرات $f(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

مثال) آهنگ افزایش مساحت یک دایره نسبت به شعاع

را وقتی که شعاع آن 5 متر است، بیابید.

$$S=\pi r^2 \qquad \frac{dS}{dr}=2\pi r \overset{r=5}{=} 10\pi \ \ m^2/m$$

مثال) فرض کنید دمای هوا در محل معینی در روز معینی در ساعت t

بعد از ظهر T درجه‌ی سانتی‌گراد است که در آن

$T=\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t+10$ که $5 \geq t \geq 0$ دمای هوا در

ساعت ۱ بعد از ظهر با چه آهنگی کم یا زیاد می‌شود؟

ایستا $t=2,4$

در ساعت ۳ بعد از ظهر چه طور؟ $\frac{dT}{dt}=t^2-6t+8=0$

$\frac{dT}{dt}(1)=3\ ^\circ C/h$ افزایش $\qquad \frac{dT}{dt}(3)=-1\ ^\circ C/h$ کاهش

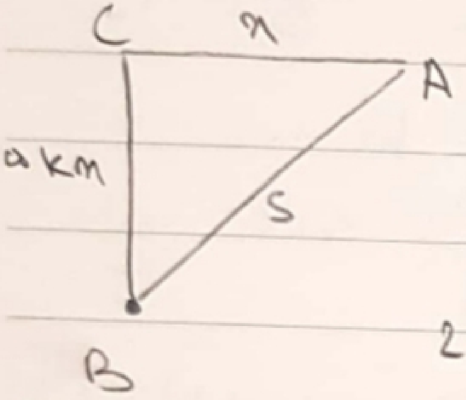
تغییرات داشته به طور:

مثال) هواپیمایی با سرعت $600\ \frac{km}{h}$ به طور افقی در حال پرواز

است. ۱ دقیقه بعد از عبور از نقطه‌ای که در ارتفاع 5 کیلومتری

برج مراقبت قرار گرفته است . فاصله‌ی بین هواپیما و این

برج با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟



$$\frac{ds}{dt} = ?$$

$$s^2 = x^2 + 25$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$x = \frac{600}{60} = 10\ km$$

$$s = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\frac{dx}{dt} = 600\ \frac{km}{h}$$

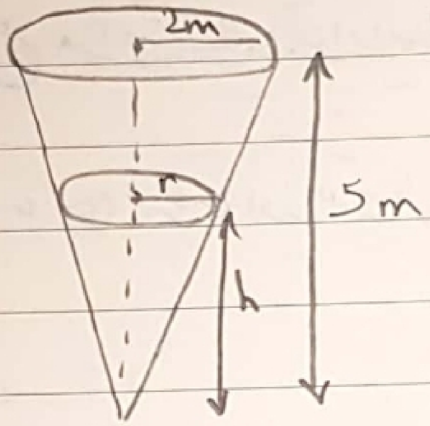
$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{5}}(600)\ \frac{km}{h}$$

مثال) منبع آبی به شکل یک مخروط دوار وارونه در نظر بگیرید.

عمق این منبع $5m$ و شعاع آن $2m$ است وقتی عمق آب موجود

منبع ۴ متر است ، آب با آهنگ $\frac{1}{12}\ \frac{m^3}{min}$ از منبع خارج می‌شود.

در این لحظه سطح آب با چه سرعتی پایین می‌آید؟



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

داریم

$$\frac{r}{2} = \frac{h}{5}$$

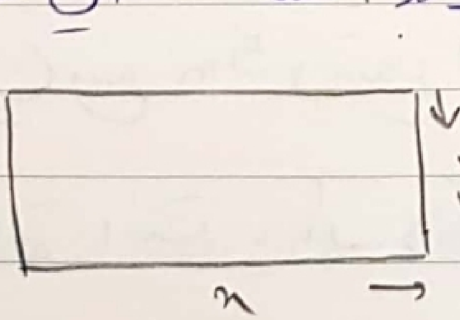
$$r = \frac{2}{5}h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h = \frac{4}{75}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left(\frac{-1}{12}\right) = \frac{4\pi}{25}\,16\,\frac{dh}{dt} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{12}\,\frac{25}{4\pi\times 16}\ \frac{m}{min}$$

مثال) در یک مستطیل یکی از اضلاع 10cm طول دارد و طول آن با آهنگ ۲ $\frac{cm}{s}$ افزایش می‌یابد و طول ضلع دیگر که ۸cm است با آهنگ ۳ $\frac{cm}{s}$ کاهش می‌یابد. پس مساحت این مستطیل با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

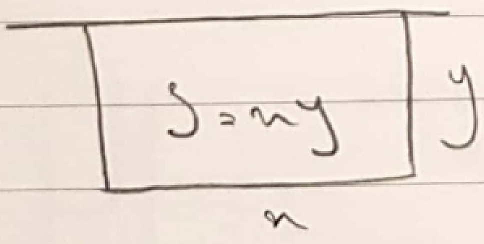


$$S = xy \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x$$

$$\frac{ds}{dt} = (2)(8) + (-3)(10) = -14 \ \frac{cm^2}{s}$$

(بهینه سازی)

مثال) قرار است محوطه‌ای مستطیل شکل برای نگهداری حیوانات ساخته شود. یک طرف این محوطه دیوار طویلی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن را نرده گذاری کنیم. اگر 100 m نرده داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه مورد نظر کدام است؟



$2y + x = 100 \qquad x = 100 - 2y$

$S = xy \Rightarrow S = y(100 - 2y)$

$S = 100y - 2y^2 \qquad \frac{ds}{dy} = 100 - 4y = 0 \quad y = 25\ m$

$x = 50\ m$

$S = 50 \times 25 = 1250\ m^2$

بحرانی ← تابع همه جا مشتق پذیر

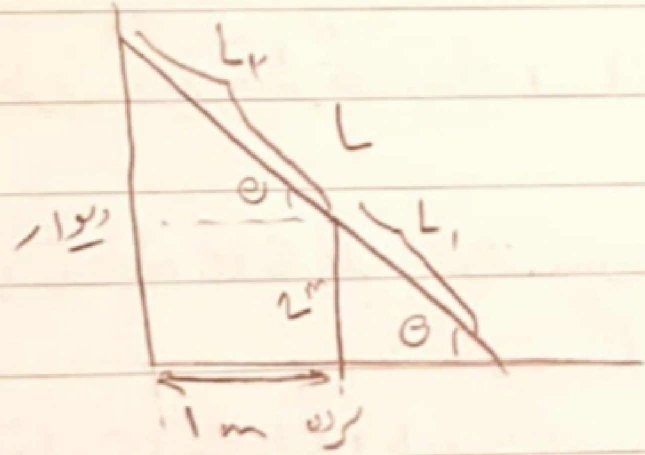
$S(0) = 0 \rightarrow S_{max} = 1250\ m^2$

$S(50) = 0$

مرزی $0 \leq y \leq 50$

کاهش ← بالا اصلاً ندارم

مثال) طول کوتاه‌ترین نردبانی را بیابید که بتوان یک سر آن را از بالای نرده‌ای به ارتفاع 2m در فاصله‌ی 1m از یک دیوار قائم به آن دیوار تکیه داد به طوری که سر دیگر آن بر زمین وضع کرده باشد؟



$$L = L_1 + L_2 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L_1 \sin\theta = 2$$

$$L_2 \cos\theta = 1$$

$$L(\theta) = L_1(\theta) + L_2(\theta) = \frac{2}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

روز بزرگداشت حافظ

$$L'(\theta) = \frac{-2\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta} = 0$$

Note

۲۱

جمعه

Friday / Oct.

محرم

۲۲ / 13

$$\tan^3\theta = 2 \qquad \tan\theta = \sqrt[3]{2}$$

$$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta = 1 + 2^{2/3}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+2^{2/3}}}$$

$$\sin\theta = tg\theta \cdot \cos\theta = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1+2^{2/3}}}$$

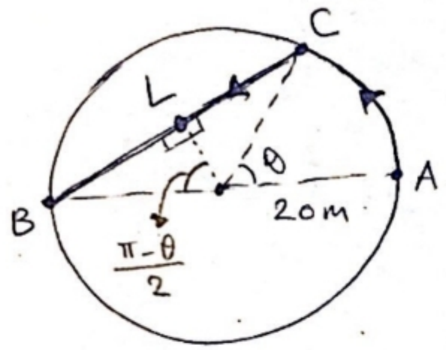
$$L(\theta) = \frac{2\sqrt{1+2^{2/3}}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt{1+2^{2/3}} \ m$$ کران

نقاط مرزی

$$\begin{cases} \lim_{\theta \to 0^+} L(\theta) = +\infty \\ \lim_{\theta \to (\pi/2)} L(\theta) = +\infty \end{cases}$$

مقدار بالا بیشترین طول ممکن از نردبان است.

مثال: سرعت شخصی در دویدن، دو برابر سرعت او در شنا کردن است. این شخص در نقطه‌ی A، کنار یک استخر شنای دایره‌ای به قطر $40m$ ایستاده است و می‌خواهد هر چه سریع‌تر به نقطه‌ی B که در طرف دیگر ~~استخر~~ قطر گذرنده از A قرار دارد، برسد. او می‌تواند دور استخر تا نقطه‌ی C بدود و سپس از C مستقیماً به طرف B شنا کند. نقطه‌ی C را کجا باید انتخاب کنیم تا کل زمان طی شده برای رفتن از A به B، min شود؟



حل:

$$(0 \le \theta \le \pi)$$

طول کمان $\widehat{AC} = 20\theta$

$$BC = 2BL = 40\sin\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$BL = 20\sin\frac{\pi-\theta}{2}$$

فرض کنیم شخص با آهنگ $k \ \frac{m}{s}$ شنا کند $\Longleftarrow$ آهنگ دویدن او $= 2k \ (\frac{m}{s})$.

فرض t زمان کل لازم برای رفتن از A به C و از C به B باشد، آنگاه داریم:

$$\text{سرعت} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{تغییرات زمان}} \longrightarrow \text{تغییرات زمان} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{سرعت}}$$

$t = t(\theta) =$ زمان A به C $+$ زمان C به B

$$\Rightarrow t_{(\theta)} = \frac{\text{طول } \widehat{AC}}{2k} + \frac{\text{طول } BC}{k} = \frac{20\theta}{2k} + \frac{40\sin\frac{\pi-\theta}{2}}{k} = \frac{10\theta}{k} + \left(\frac{40}{k}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = t'(\theta) = \frac{10}{k} - \frac{20}{k}\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{10/k}{20/k} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi-\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$$

بین 0 و $\frac{\pi}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

پس $\theta=\pi/3$ ، تنها مقدار بحرانی برای $t(\theta)$ است و داریم:

$$t(\pi/3)=\frac{10}{k}(\pi/3)+\frac{40}{k}\sin\left(\frac{\pi-\pi/3}{2}\right)$$

$$=\frac{10}{k}(\pi/3)+\frac{40}{k}\sin(\pi/3)=\frac{10\pi}{3k}+\left(\frac{40}{k}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{10\pi}{3k}+\frac{20\sqrt{3}}{k}$$

$$=\frac{10}{k}\left(\pi/3+2\sqrt{3}\right).$$

$$\simeq\frac{45.11}{k}$$

$$\begin{cases}\theta=0 \to t(0)=\frac{40}{k}\\[2ex] \theta=\pi \to t(\pi)=\frac{10\pi}{k}\simeq\frac{31.4}{k}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $t(\pi)$ کمترین مقدار را دارد. $\rightarrow$ min

پس برای رفتن از A به B ، در کمترین زمان، شخص باید کل مسیر را بدود!