گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی ۱ــ سری اول

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

نیمسال اول ۹۹
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

---

۱. حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

(آ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

(ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$

(ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$

(د) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}$

(ه) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

حل: قسمت الف) از تغییر متغیر $t=1+x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین اگر $x\to 0$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
L&=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[n]{t}-1}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[n]{t}-1}{(\sqrt[n]{t}-1)(\sqrt[n]{t^{n-1}}+\sqrt[n]{t^{n-2}}+\sqrt[n]{t^{n-3}}+\ldots+1)}\\
&=\lim_{t\to 1}\frac{1}{\sqrt[n]{t^{n-1}}+\sqrt[n]{t^{n-2}}+\sqrt[n]{t^{n-3}}+\ldots+1}=\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

حل قسمت ب)

$$\begin{aligned}
L=&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}\\
=&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt{2}\cos x-1)\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\\
=&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt{2}\cos x-1)\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}\\
=&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt{2}\cos x-1)\cos^2 x}{(\sqrt{2}\cos x-1)(\sqrt{2}\cos x+1)}\\
=&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}\cos x+1}=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

حل قسمت ج) از تغییر متغیر $t=x-\frac{\pi}{3}$ استفاده می‌کنیم، بنابراین وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ نتیجه می‌شود $t\to 0$ ، در این‌صورت

داریم:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-2\cos(t+\frac{\pi}{3})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-2(\cos t\cos\frac{\pi}{3} - \sin t\sin\frac{\pi}{3})} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-2(\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-(1-2\sin^2\frac{t}{2}) + 2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\sin\frac{t}{2}(\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}(\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2})} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

حل قسمت د)

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n} \times \frac{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\dots(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\dots(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)[(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})][(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})]\dots[(1-\sqrt[n]{x})(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})]}{(1-x)^n(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\dots(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^n}{(1-x)^n(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\dots(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\dots(1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\times 3\times\dots\times n} = \frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

حل قسمت ه) رابطه‌ی زیر برای هر $x \neq 0$ برقرار است:

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|.$$

در نتیجه چون

$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

با استفاده از قضیه فشردگی (ساندویچ) داریم:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

۲. فرض کنید تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته باشد.
الف) نشان دهید اگر $f(a)>0$ تابع f در یک همسایگی $x=a$ مثبت است.
ب) نشان دهید اگر $f(a)<0$ تابع f در یک همسایگی $x=a$ منفی است.
حل: حل) از آن جا که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است، طبق تعریف داریم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ s.t. \ \ \forall x; |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon.$$

حال اگر طبق فرض (الف) داشته باشیم $f(a)>0$، قرار می‌دهیم $\epsilon := \frac{f(a)}{2}$ ، در نتیجه طبق تعریف بالا $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر x که در رابطه $|x-a|<\delta$ صدق می‌کند، داریم:

$$|f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2} \tag{1}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}.$$

آنگاه نتیجه می‌شود در همسایگی به شعاع $\delta>0$ از $x=a$، طبق رابطه (۱) تابع $f(x)$ مثبت است. از طرفی اگر طبق فرض (ب) داشته باشیم $f(a)<0$، قرار می‌دهیم $\epsilon := -\frac{f(a)}{2}$ ، در نتیجه به طور مشابه طبق تعریف پیوستگی $\delta>0$ وجود دارد که برای هر x که در رابطه $|x-a|<\delta$ صدق می‌کند، داریم:

$$|f(x)-f(a)| < -\frac{f(a)}{2} \tag{2}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2}.$$

آنگاه نتیجه می‌شود در همسایگی به شعاع $\delta>0$ از $x=a$، طبق رابطه (۲) تابع $f(x)$ منفی است.

۳. نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ,x \in Q \\ -x^۲ & ,x \notin Q \end{cases}$ را بررسی کنید.

حل: برای حل این سوال از این نکته استفاده می‌کنیم که پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ معادل با این است که برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که $a_n \to a$ داشته باشیم $f(a_n) \to f(a)$. حال ادعا می‌کنیم تابع f با ضابطه تعریف شده در سوال، در نقطه $x = ۰$ پیوسته است. زیرا اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد گویا یا اصم باشد که $a_n \to ۰$، آنگاه $a_n^۲$ و $-a_n^۲$ نیز به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه تابع $f(x)$ در صفر پیوسته است. اکنون ادعا می‌کنیم تابع f در هیچ نقطه‌ی دیگری غیر از صفر پیوسته نیست. نقطه دلخواه $a_۰ \in Q$ را در نظر گرفته و فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ به صورت $a_n := a_۰ + \frac{۱}{\sqrt{۲}n}$ تعریف شود. در این‌صورت $a_n \in Q'$ برای هر n و به علاوه $a_n \to a_۰$. اما داریم

$$f(a_n) = -(a_۰ + \frac{۱}{\sqrt{۲}n})^۲ = -(a_۰^۲ + \frac{۱}{۲n^۲} + ۲\frac{a_۰}{\sqrt{۲}n})$$

در نتیجه $f(a_n) \to -a_۰^۲$. از طرفی طبق ضابطه، $f(a_۰) = a_۰^۲$ پس نتیجه می‌شود $lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a_۰)$ بنابراین تابع f در اعداد گویا پیوسته نیست. حال نقطه دلخواه $b_۰ \in Q'$ در نظر می‌گیریم. دنباله $b_n := \frac{[nb_۰]}{n}$ را تعریف می‌کنیم. برای هر n داریم $b_n \in Q$ و همچنین $b_n \to b_۰$. زیرا برای $n \neq ۰$ داریم:

$$b_۰ - ۱ \leq [b_۰] \leq b_۰ \Longrightarrow nb_۰ - ۱ \leq [nb_۰] \leq nb_۰ \Longrightarrow b_۰ - \frac{۱}{n} \leq \frac{[nb_۰]}{n} \leq b_۰$$

از طرفی چون

$$\lim_{n\to\infty} b_۰ - \frac{۱}{n} = \lim_{n\to\infty} b_۰ = b_۰,$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nb_۰]}{n} = b_۰$$

اما به این دلیل که $b_n \in Q$ در نتیجه $f(b_n) = b_n^۲ = (\frac{[nb_۰]}{n})^۲$ پس $f(b_n) \to b_۰^۲$. اما طبق ضابطه تابع می‌دانیم $f(b_۰) = -b_۰^۲$ که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(b_۰).$$

پس تابع f در نقاط گنگ هم پیوسته نیست. پس ادعای موردنظر درست است و تابع f فقط در صفر پیوسته است.

۴. فرض کنید $f(x) = \frac{x^۳}{۴} - \sin \pi x + ۳$. آیا نقطه $x_۰ \in (-۲,۲)$ وجود دارد بطوریکه $f(x_۰) = \frac{۷}{۳}$؟

حل: تابع مورد نظر روی بازه‌ی داده شده پیوسته است و $f(۲) = ۵$ و $f(-۲) = ۱$ و در نتیجه

$$f(-۲) < \frac{۷}{۳} < f(۲)$$

حال با استفاده از قضیه مقدار میانی برای تابع پیوسته‌ی f روی بازه $(-۲,۲)$ نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مثل $x_۰ \in (-۲,۲)$ وجود دارد که $f(x_۰) = \frac{۷}{۳}$.

یادآوری (قضیه مقدار میانی): اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و s عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه عددی مانند c متعلق به $[a,b]$ هست به طوری که $f(c) = s$.

۵. فرض کنید $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای همه $x \in (0,1)$ داریم $f^2(x) = 1$. ثابت کنید $f = 1$ یا $f = -1$.

حل: طبق فرض سوال داریم:

$$\forall\, x \in (0,1)\ ,\ f(x)^2 = 1 \to f(x) = \pm 1 \qquad \textbf{(3)}$$

حال باید نشان دهیم که مقدار تابع f در بازه $(0,1)$ یا $+1$ یا -1 است.
فرض خلف می‌کنیم که تابع f در جاهایی از بازه $(0,1)$ برابر -1 و در جاهای دیگری برابر $+1$ شود یعنی:

$$\exists\, y_1 \in (0,1)\ s.t\ f(y_1) = -1\ ,\ \exists\, y_2 \in (0,1)\ s.t\ f(y_2) = +1 \qquad \textbf{(4)}$$

از (۳) و (۴) می‌توان نتیجه گرفت طبق قضیه مقدار میانی یک z بین y_1 و y_2 وجود دارد به طوری که $f(z) = 0$ و این با فرض $\forall\, x \in (0,1)\ f(x)^2 = 1$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

۶. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$. با بیان قضایا ثابت کنید عدد حقیقی مانند x_0 هست بطوریکه $x_0^3 + ax_0 + sinx_0 = 1$.

حل: تابع $f(x) = x^3 + ax + \sin x - 1$ روی $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است، همچنین:

$$f(0) = -1 < 0,$$

از طرفی $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$، یعنی برای هر $M > 0$، Nای مثبت موجود است که برای هر $x > N$، $f(x) > M$. مثلا برای $M = 1$، Nای موجود است که در بازه $(N, +\infty)$، $f(x) > M = 1$؛ پس $f(N+1) > 0$. لذا بنابر قضیه مقدار میانی یا حالت خاص آن بولتزانو عددی چون x_0 در بازه $[0, N+1]$ موجود است که $f(x_0) = 0$ یعنی $x_0^3 + ax_0 + \sin x_0 = 1$.

۷. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعي پیوسته باشند و به ازاي هر $q \in \mathbb{Q}$ داشته باشید $f(q) = g(q)$. نشان دهید به ازاي هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = g(x)$.

حل: به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای در $\mathbb{Q}$ وجود دارد که به r میل می‌کند. مثلا

$$a_n = \frac{[nr]}{n} \ , \ \lim_{n \to +\infty} a_n = r$$

طبق فرض به ازای هر n داریم:

$$f(a_n) = g(a_n) \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} g(a_n)$$

می‌دانیم f و g هردو پیوسته اند، بنابراین داریم:

$$f(\lim_{n \to \infty} a_n) = g(\lim_{n \to \infty} a_n) \longrightarrow \ f(r) = g(r).$$

۸. تابع f در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ پیوسته است و به ازاي هر x در این فاصله داریم $0 \leq f(x) \leq 1$ ثابت کنید حداقل یك $x_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$ وجود دارد که $f(x_0) = \sin x_0$.

حل: یک تابع کمکی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]\ ,\ g(x) = f(x) - \sin(x)$$

تابع $g(x)$ تابعی پیوسته است زیرا تفاضل دو تابع پیوسته است و داریم:

$$g(0) = f(0) \xrightarrow[0 \leq f(x) \leq 1]{\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]} g(0) \geq 0$$

$$g(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) - 1 \xrightarrow[0 \leq f(x) \leq 1]{\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]} g(\frac{\pi}{2}) \leq 0$$

اگر $g(0) = 0$ یا $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ آن‌گاه کافی است $x = 0$ یا $x = \frac{\pi}{2}$ اختیار کنیم.
در غیر اینصورت داریم:

$$g(0) > 0\ ,\ g(\frac{\pi}{2}) < 0 \longrightarrow\ g(0)\,g(\frac{\pi}{2}) < 0$$

لذا بنا بر قضیه بولتزانو $x_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x_0) = 0$ و درنتیجه داریم:

$$f(x_0) = \sin x_0$$

۹. فرض کنید که $f:[0,1]\to[0,1]$ پیوسته باشد. ثابت کنید عددی مانند c در بازه $[0,1]$ وجود دارد که $f(c)=c$.

حل: یک تابع کمکی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x\in[0,1]\ ,\ g(x)=f(x)-x$$

تابع $g(x)$ تابعی پیوسته است زیرا تفاضل دو تابع پیوسته است و داریم:

$$x=0\longrightarrow g(0)=f(0)\ \xrightarrow[0\le f(x)\le 1]{\forall x\in[0,1]} 0\le g(0)\le 1$$

$$x=1\longrightarrow g(1)=f(1)-1\ \xrightarrow[0\le f(x)\le 1]{\forall x\in[0,1]} -1\le g(1)\le 0$$

اگر $g(0)=0$ یا $g(1)=0$ آنگاه کافی است $c=0$ یا $c=1$ اختیار کنیم.
در غیر اینصورت داریم:

$$g(0)>0\ ,\ g(1)<0\Longrightarrow g(0)\,g(1)<0$$

لذا بنا بر قضیه بولتزانو $c\in[0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(c)=0$ و درنتیجه داریم:

$$f(c)=c$$

۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند. نشان دهید:

الف. $f(nx)=nf(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$.

ب. f در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

ج. f پیوسته است اگر و فقط اگر برای عددی مانند $m\in\mathbb{R}$، $f(x)=mx$.

حل:

الف. با توجه به شرط $f(x+y)=f(x)+f(y)$ داریم

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

بنابراین $f(0)=0$. همچنین $f(a+(-a))=f(0)=0$. بنابراین $f(a+(-a))=f(a)+f(-a)$. در نتیجه

$$f(-a)=-f(a)$$

داریم

$$f(nx)=f(x+\cdots+x)=f(x)+f(x+\cdots+x)=f(x)+\cdots+f(x)$$

بنابراین $f(nx)=nf(x)$.

ب. واضح است که اگر f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در نقطه‌ای مانند $x\in\mathbb{R}$ نیز پیوسته است.
برعکس فرض کنیم تابع f در نقطه‌ای مانند $x_0\in\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان می‌دهیم در هر نقطه دلخواه مانند $y\in\mathbb{R}$ نیز تابع f پیوسته است. باید نشان دهیم $\lim_{x\to y}f(x)=f(y)$.
می‌دانیم تابع f در x_0 پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. این معادل است با $\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y}f(x)&=\lim_{h\to 0}f(y+h)\\
&=\lim_{h\to 0}f(y+h+x_0-x_0)\\
&\overset{\text{فرض سوال}}{=}\lim_{h\to 0}\big(f(y)+f(x_0+h-x_0)\big)\\
&\overset{\text{قسمت الف}}{=}\lim_{h\to 0}\big(f(y)+f(x_0+h)-f(x_0)\big)\\
&=f(y)+\lim_{h\to 0}f(x_0+h)-f(x_0)\\
&=f(y)+f(x_0)-f(x_0)=f(y)
\end{aligned}$$

ج فرض کنیم f پیوسته باشد و $f(۱) = m$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم

$$f(n) = f(n \times ۱) \overset{\text{قسمت الف}}{=} nf(۱) = mn$$

به ازای $n \in \mathbb{Z}^-$ داریم

$$f(n) = f(-n \times -۱) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times f(-۱) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times (-f(۱)) = mn$$

به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$، $x = \frac{p}{q}$ که $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}$. بنابراین

$$f(p) = f(qx) \overset{\text{قسمت الف}}{=} qf(x) = mp$$

بنابراین $f(x) = m\frac{p}{q} = mx$.

برای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $(x_n) = (\frac{[rn]}{n})$ وجود دارد که $x_n \to r$ بنابراین

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{\text{پیوستگی}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} mx_n = mr.$$

۱۱. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوری‌که $f(f(a)) = a$ ثابت کنید $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوری‌که $f(c) = c$.

حل: اگر $f(a) = a$ باشد که مسئله حل است، در غیر این صورت تابع کمکی $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوستگی f، تابع g نیز پیوسته است. در این صورت

$$g(a) = f(a) - a$$

$$g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) = a - f(a)$$

می‌بینیم که $g(a)$ و $g(f(a))$ مختلف العلامت هستند. بنابراین طبق قضیه مقدار میانی cای وجود دارد که $g(c) = 0$. بنابراین

$$f(c) = c$$

۱۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_0$ ، $a_i \in \mathbb{R}$. نشان دهید وجود دارد $y \in \mathbb{R}$، به‌طوری‌که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq f(y)$.

حل: واضح است که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

قرار می‌دهیم $M_1 = M_2 = |f(0)| + 1 = |a_0| + 1$. در این صورت

$$M_1 : \exists N_1 \quad \forall x \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > |f(0)| + 1 > f(0)$$

$$M_2 : \exists N_2 \quad \forall x \leq -N_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) > |f(0)| + 1 > f(0)$$

بنابراین تابع $f : [-N_2, N_1] \to \mathbb{R}$ پیوسته است و طبق قضیه اکسترمم می‌نیمم خود را در این بازه می‌پذیرد، یعنی $y \in [-N_2, N_1]$ وجود دارد که برای هر $x \in [-N_2, N_1]$ داریم

$$f(y) \leq f(x)$$

به ویژه $f(y) \leq f(0)$. همچنین برای هر $x \geq N_1$ و $x \leq -N_2$ داریم $f(x) > f(0)$. پس $f(y) \leq f(x)$ یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f(y) \leq f(x)$$

۱۳. فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و $f(a)=f(b)$. اگر $n\in\mathbb{N}$، نشان دهید عددی مانند $c\in[a,b-\frac{b-a}{n}]$ وجود دارد که $f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$.

حل: تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{n})$$

دامنه تابع g برابر $[a,b-\frac{b-a}{n}]$ است. نقاط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_k=a+(\frac{b-a}{n})k,\qquad k=0,1,\dots,n-1,n.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}g(x_k)&=g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{n-1})\\&=\{f(a)-f(a+\frac{b-a}{n})\}+\{f(a+\frac{b-a}{n})-f(a+2(\frac{b-a}{n}))\}\\&+\cdots+\{f(a+(n-1)(\frac{b-a}{n}))-f(a+n(\frac{b-a}{n}))\}\end{aligned}$$

با توجه $f(a+n(\frac{b-a}{n}))=f(b)$ داریم $f(a)=f(b)$ بنابراین

$$g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{n-1})=f(a)-f(b)=0$$

بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول: اگر x_jای وجود داشته باشد که $g(x_j)=0$ که آنگاه $c=x_j$ جواب مسئله خواهد بود.

حالت دوم: چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $x_i\neq x_j$ که $i\neq j$ وجود دارد که

$$g(x_i)g(x_j)<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین x_i و x_j هست که $g(c)=0$ و در نتیجه

$$f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$$

۱۴. فرض کنید n عددی طبیعی و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$. نشان دهید $a,b\in[0,1]$ وجود دارند به‌طوری‌که $b-a=\frac{1}{n}$ و $f(a)=f(b)$.

حل: تابع کمکی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوستگی f و چون تفاضل و ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است، بنابراین $g(x)$ تابعی پیوسته است. داریم

$$\begin{aligned}
g(0)&=f(\frac{1}{n})-f(0)\\
g(\frac{1}{n})&=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})\\
&\vdots\\
g(\frac{n-1}{n})&=f(1)-f(\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

اگر مقادیر فوق را با هم جمع کنیم، داریم

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)$$

چون طبق فرض سوال $f(1)=f(0)$، بنابراین

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0.$$

چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $0\le i,j\le n-1$ وجود دارند که $i\neq j$ به‌طوری‌که $g(\frac{i}{n})\geq 0$ و $g(\frac{j}{n})\leq 0$. بنابراین

$$g(\frac{i}{n})g(\frac{j}{n})<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین $\frac{i}{n}$ و $\frac{j}{n}$ هست که $g(c)=0$. بنابراین

$$f(c+\frac{1}{n})=f(c)$$

کافی است قرار دهیم $a=c$ و $b=c+\frac{1}{n}$.