جلسه نهم معادلات دیفرانسیل دکتر مختار ۱۴، فروردین، ۱۴۰۰

«بررسی چند معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی»

(I) معادله دیفرانسیل برنولی Bernoulli،

فرم کلی این معادله به صورت زیر است:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \; ; \; n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\rightarrow y^{-n}y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

فرض می‌کنیم $U(x) = y^{1-n}$ داریم: $U'(x) = (1-n)y'y^{-n}$

$$\hookrightarrow y^{-n}y' = \frac{U'(x)}{1-n}$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-n}U'(x) + p(x)\,U(x) = q(x) \longrightarrow U'(x) + \underbrace{(1-n)p(x)}_{p^*(x)}\,U(x) = \underbrace{(1-n)q(x)}_{q^*(x)}$$

Ex.) (I) $y' - y = xy^2$ $(n=2)$ (II) $3xy' - 2y = x^3/y^2$ $(n=-2)$

$$\text{(I)} \quad y^{-2}y' - y^{-1} = x \longrightarrow U = y^{-1} \longrightarrow U' = -y'y^{-2} \rightarrow -U' - U = x$$

$$U' + U = -x \longrightarrow \mu = e^{\int dx} = e^x \qquad U(x) = \frac{1}{e^x}\Big[\underbrace{\int -xe^x\,dx}_{-(xe^x - e^x)} + c\Big]$$

$$U_g(x) = -x + 1 + ce^{-x} \xrightarrow{U = y^{-1}} \boxed{y_g(x) = \frac{1}{1 - x + ce^{-x}}}$$

$$\text{(II)} \quad \xrightarrow{\frac{y^2}{3x}\ \text{ضرب}} y^2y' + \frac{-2}{3x}y^3 = \frac{x^2}{3} \rightarrow U = y^3 \longrightarrow U' = 3y^2y'$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری و ضرب در } 3} U' + \frac{-2}{x}U = x^2 \longrightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{-2dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$U_g(x) = x^2\Big[\int x^2\frac{1}{x^2}\,dx + c\Big] = x^3 + cx^2 \xrightarrow{U = y^3} \boxed{y_g = \sqrt[3]{x^3 + cx^2}}$$

Ex.) $xy' + y = 2x^2 yy' \ln y$ جواب های عمومی معادله روبه‌رو را بدست آورید.

$$\overset{\frac{dy}{dx}}{y'}(x - 2x^2 y \ln y) = -y \rightarrow \frac{dx}{dy} = 2x^2 \ln y - \frac{x}{y}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right)x = (2\ln y)\,x^2 \rightarrow x^{-2}\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right)x^{-1} = 2\ln y$$

$$\rightarrow U = x^{-1} \rightarrow \frac{dU}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy} \rightarrow \frac{dU}{dy} - \frac{1}{y}U = -2\ln y$$

$$\mu_{(y)} = e^{\int \frac{-1}{y}dy} = \frac{1}{y} \rightarrow U = y\left[\int -2\frac{\ln y}{y}\,dy + c\right]$$

$$\rightarrow U = -y(\ln y)^2 + cy \xrightarrow{U = x^{-1}} x = \frac{1}{cy - y(\ln y)^2}$$ پاسخ به صورت ضمنی

(II) معادلات دیفرانسیل به فرم $f'(y)y' + f(y)p(x) = q(x)$ را می‌توان به معادله خطی تبدیل نمود.

$$U = f(y) \xrightarrow{d/dx} U' = y' f'(y) \rightarrow U' + p(x)\,U = q(x)$$ معادله خطی مرتبه اول

$$y_g = f^{-1}(U)$$

Ex.) (I) $y' - 2 = 2x\,e^{-y}$ (II) $y'\cos y + \sin y = x + 1$

$$\xrightarrow{*e^y} e^y y' - 2e^y = 2x \quad e^y = U \xrightarrow{d/dx} y'e^y = U' \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$\rightarrow U' - 2U = 2X \rightarrow \mu_{(x)} = e^{\int -2dx} = e^{-2x} \rightarrow U = e^{2x}\left[\int 2xe^{-2x}dx + c\right]$$

$$U = e^y \rightarrow \ln^U = y \rightarrow y_g = \ln\left(\frac{1}{2} - x + ce^{2x}\right)$$

$(II)\quad v = \sin y \longrightarrow v' = y'\cos y \longrightarrow v' + v = x+1$ خطی

$$\mu_{(x)} = e^{\int dx} = e^{x} \longrightarrow v = \frac{1}{e^{x}}\left[\int (x+1)e^{x}dx + C\right] = \frac{xe^{x}+c}{e^{x}} = x + ce^{-x}$$

$$\xrightarrow{v=\sin y} \quad \sin y = x + ce^{-x} \longrightarrow y_g = \sin^{-1}(x + ce^{-x})$$

(III) معادله ریکاتی Ricatti فرم کلی این معادلات به صورت زیر است :

$$y' + P_1(x)y + P_2(x)y^2 = q(x)$$

برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی $y_1(x)$ معلوم باشد . در این صورت جواب عمومی عبارت است از :

$$y_g(x) = y_1(x) + \frac{1}{Z(x)}$$

که در آن $Z(x)$ از حل یک معادله مرتبه اول خطی حاصل می شود .

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \longrightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2} \xrightarrow{\text{جاگذاری}}$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + P_1(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + P_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 = q(x) \qquad \left(y_1' + P_1(x)y_1 + P_2(x)y_1^2\right) = q(x)^{*}$$

$$-\frac{z'}{z^2} + P_1(x)\left(\frac{1}{z}\right) + P_2(x)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{2y_1}{z}\right) = 0$$

$$\longrightarrow z' - P_1(x)\,z - 2P_2(x)\,z\,y_1 = P_2(x)$$

$$\longrightarrow z' - \underbrace{\left(P_1(x) + 2P_2(x)\,y_1\right)}_{P^*(x)} z = \underbrace{P_2(x)}_{q^*(x)}$$ خطی بر تابع $Z(x)$

page 44

ما در حل معادلات خطی مرتبه اول یک ثابت داشتیم در این معادلات ریکاتی ثابت در z ظاهر می‌شود

(از جمله این رابطه $y_g = y_1 + \frac{1}{z}$ رسیده شد که چنین چیزی پاسخ معادله است؟)

$$y' + P_1 y + P_2 y^2 = q \rightarrow (y_1' + v') + P_1(y_1 + v) + P_2(y_1 + v)^2 = q \rightarrow v' + P_1 v + P_2(v^2 + 2y_1 v) = 0$$

$y = y_1 + v$ جایگذاری

$y_1' + P_1 y_1 + P_2 y_1 = q$ (*) مطابق صفحه قبل

$$v' + P_1 v + 2y_1 P_2 v + P_2 v^2 = 0$$

$$v' + (P_1 + 2y_1 P_2)v = -P_2 v^2$$

معادله برنولی است و تغییر متغیر آن $z = \frac{1}{v}$ ← $\frac{1}{z} = v$ فلذا $y = y_1 + \frac{1}{z}$ و ...

Ex.) $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$

$$y' + \left(\frac{-1}{x}\right)y + \left(\frac{+1}{x^2}\right)y^2 = 1$$

جواب عمومی را به حدس بدان رسیدیم: $y_1 = x$

$$y_g = x + \frac{1}{z} \longrightarrow z' - \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{+x^2}(x)\right)z = \frac{+1}{x^2}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = \frac{+1}{x^2} \longrightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$z = x\left[\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx + c\right] = x\left(-\frac{x^{-2}}{2} + c\right) = cx - \frac{1}{2x}$$

$$y_g(x) = x + \frac{1}{cx - \frac{1}{2x}}$$