فصل ۸ - اصل شمول و عدم شمول
(اصل شمول و طرد)
بخش اول

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

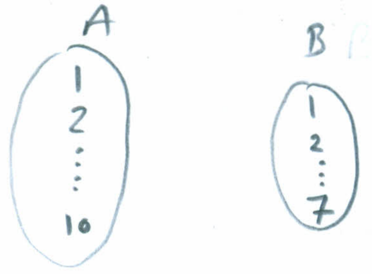
8

The Principle of Inclusion and Exclusion

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

تمرین ۴ (از تمرینات ۲۰۸) ص ۵۳۴

فرض کنیم $A=\{1,2,\dots 10\}$ ، $B=\{1,2,\dots,7\}$. چند تابع $f:A\to B$ در $|f(A)|=4$ صدق می‌کنند؟ چند تابع در $|f(A)|\le 4$ صدق می‌کنند.



حل بخش اول

c_i : i در برد تابع قرار نگیرد.

$1\le i\le 7$

حال باید تعداد توابعی را پیدا کنیم که دقیقاً ۳ تا از اعضای B در برد آن تابع قرار نگیرند.
هر تابع که این شرایط را داشته باشد در اینصورت $|f(A)|=4$ برای آن تابع برقرار است.

$$E_3 = S_3 - \binom{4}{1}S_4 + \binom{5}{2}S_5 - \binom{6}{3}S_6 + \binom{7}{4}S_7$$

$$= \binom{7}{3}4^{10} - \binom{4}{1}\binom{7}{4}3^{10} + \binom{5}{2}\binom{7}{5}2^{10} - \binom{6}{3}\binom{7}{6}1^{10} + \binom{7}{4}\binom{7}{7}0^{10}$$

حل بخش دوم

منظور از $|f(A)|\le 4$ یعنی اینکه حداقل ۳ تا از اعضای B در برد قرار نگیرد.
یعنی حداقل ۳ تا از c_i ها $(1\le i\le 7)$ برقرار باشد.

$$L_3 = S_3 - \binom{3}{2}S_4 + \binom{4}{2}S_5 - \binom{5}{2}S_6 + \binom{6}{2}S_7$$

$$= \binom{7}{3}4^{10} - \binom{3}{2}\binom{7}{4}3^{10} + \binom{4}{2}\binom{7}{5}2^{10} - \binom{5}{2}\binom{7}{6}1^{10} + \binom{6}{2}\binom{7}{7}0^{10}$$

نکته: برای تمرین ۵ هم در همین صفحه از ایده‌ای مشابه می‌توان استفاده کرد.

به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $n \geq 2$ فرض می‌کنیم $\varphi(n)$ تعداد اعداد صحیح مثبت m باشد که $1 \leq m < n$ و $\gcd(m,n)=1$ باشد. این تابع، تابع فی اویلر نام دارد.

مطلوبست ارائه فرمولی برای $\varphi(n)$ بطوریکه مجبور نباشیم به مقایسه‌ٔ حالت به حالت هر m $(1 \leq m < n)$ با n بپردازیم.

به ازای اعداد طبیعی $n \geq 2$ ، طبق قضیه بنیادی حساب داریم: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$

$e_i \geq 1 \quad 1 \leq i \leq t$

هر یک از p_i ها یک عدد اول متمایز با بقیه است. | مجموعه کل اعداد ممکن را برابر $S=\{1,2,\dots,n\}$ می‌گیریم.

c_i: عدد $k \in S$ در c_i صدق می‌کند اگر $p_i \mid k$

$1 \leq i \leq t$

دراینصورت پاسخ مسئله $\varphi(n)$ برابر است با: $\varphi(n) = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_t)$

یعنی چه تعدادی از اعضای S هستند که نه p_1 آنها را عاد می‌کند، نه p_2 آنها را عاد می‌کند و ... نه p_t آنها را عاد می‌کند.

$$\varphi(n) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots$$

$$= n - \left[\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_t}\right]$$

$$+ \left[\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_2 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{t-1} p_t}\right]$$

$$- \cdots$$

$$+ (-1)^t \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}\right]$$

$$= n\left(1 - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_t}\right) + \left(\frac{1}{p_1 p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{t-1} p_t}\right) + \cdots + (-1)^t\left(\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_t}\right)\right)$$

$$= \boxed{n \prod_{i=1}^{t}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}$$

به عنوان نمونه اگر n خود یک عدد اول باشد، مثلاً $n=p$ باشد

در این صورت داریم:

$$\varphi(p) = p \prod_{i=1}^{1} \left(1-\frac{1}{p}\right) = p-1$$

یعنی تعداد اعداد ۱ تا p که gcd آنها با p برابر با یک است برابر است با $p-1$

(کل اعداد ۱ تا $p-1$ نسبت به عدد p اول هستند)

مثال

$$\varphi(36) = \varphi(2^2 3^2) = 36\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 12$$

مثال اگر $m, n \in \mathbb{Z}^+$ باشند، در این صورت $\varphi(n^m) = n^{m-1}\varphi(n)$

gcd : greatest common divisor (بزرگترین مقسوم علیه مشترک)
ب.م.م

lcm : least common multiple (کوچکترین مضرب مشترک)
ک.م.م

تمرین ۳ (از تمرینات ۱۰۸ ص ۵۲۸)

به چند طریق می‌توانیم همهٔ حروف واژهٔ INFORMATION را چنان مرتب کنیم که، هیچ جفتی از حروف متوالی بیش از یک بار دیده نشود؟

همانطور که صورت مسئله گفته است، نباید در جایگشت های مجاز، دوبار IN ببینیم یا ۲ بار IO ببینیم و....

بنابراین C_i را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: $(1 \leq i \leq 6)$.

C_1: دوبار IN در جایگشت دیده شود.
C_2: « NI « « «
C_3: « IO « « «
C_4: دوبار OI در جایگشت دیده شود.
C_5: « NO « « « «
C_6: « ON « « « «

لذا پاسخ مسئلهٔ فوق به یافتن $N(\overline{C_1}, \overline{C_2}, \dots, \overline{C_6})$ تبدیل می‌گردد:

توجه کنیم که کل جایگشت های ممکن برابر است با: $N = S_0 = \dfrac{11!}{2!\,2!\,2!}$

چرا که تعداد I ۲ تا، O ۲ تا، N ۲ تا داریم و از A, F، R، M، T تنها یک تا داریم.

در اینصورت برای محاسبهٔ S_1 داریم:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{6} N(C_i) = \binom{6}{1} \frac{9!}{2!\,2!}$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم $N(C_1)$ را محاسبه کنیم در اینصورت دوبار در جایگشت باید IN دیده شود. لذا هر یک از این IN ها را باید به عنوان یک کاراکتر جداگانه X در نظر گرفت. در اینصورت کل جایگشت های ممکن برابر است با:

$$\frac{(7+2)!}{2!\;2!}$$

برای X ۲ تا

برای ۵ کاراکتری که از هر یک ۱ تا داریم + ۲ تا O

برای O ۲ تا

برای دو تا X (که نشان‌دهندهٔ ۲ تا IN است)

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 6} N(c_i c_j)$$

منظور از S_2 یعنی اینکه کدام دو شرط را می‌توانند همزمان برقرار باشند تا بدین ترتیب بتوانیم تعداد جایگشت‌هایی را حساب کنیم که هر یک از این جایگشت‌ها در دو شرط صدق می‌کنند. بدیهی است که بسیاری از شروط نمی‌توانند همزمان در یک جایگشت حضور داشته باشند. به عنوان نمونه نمی‌توان همزمان c_1 و c_2 برقرار باشد این بدین مفهوم است که نمی‌شود همزمان ۲ تا IN و ۲ تا NI در یک جایگشت وجود داشته باشد بنابراین:

$$N(c_1,c_2) = N(c_1,c_3) = N(c_1,c_6) = N(c_2,c_4) = N(c_2,c_5)$$

$$= N(c_3,c_4) = N(c_3,c_5) = N(c_4,c_6) = N(c_5,c_6) = 0$$

تنها حالتی که می‌تواند واقعاً رخ دهد، هنگامی است که مثلاً ۳ کاراکتر OIN پشت سرهم در یک جایگشت رخ دهد در اینصورت هم OI رخ داده هم IN.

از آنجاییکه از چنین زیررشته‌ای مشابه (OIN) می‌تواند به تعداد ۶ تا وجود داشته باشد لذا:

$$S_2 = \binom{6}{1} \frac{7!}{2!}$$

(این شش زیررشته جایگشت‌های مختلف سه کاراکتر O، I و N هستند):

جابجایی ۲ تا OI۳ باهم

توجه کنیم که: $S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$

در نهایت جواب مسئله می‌شود:

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

$$= \frac{11!}{2!2!2!} - \binom{6}{1}\frac{9!}{2!2!} + \binom{6}{1}\frac{7!}{2!}$$

تمرین ۱۶ (از تمرینات ۱۰۸) ص ۵۲۹

در طول یک کنفرانس ۱۲ هفته‌ای درباره ریاضیات، ریحانه هفت نفر از همکلاسی‌های دانشکده خود را ملاقات کرد. ریحانه در طول این کنفرانس

هر یک از دوستان خود را ۳۵ بار، هر جفت از دوستان را ۱۶ بار

هر مجموعه سه تایی از دوستان را ۸ بار، هر مجموعه ۴ تایی از دوستان را ۴ بار

هر مجموعه پنج تایی از دوستان را ۲ بار و هر مجموعه شش تایی از دوستان را ۱ بار ملاقات کرد،

ولی هرگز هر هفت نفر را با هم ملاقات نکرد.

اگر او در طول این ۸۴ روز برگزاری کنفرانس هر روز ناهار خورده باشد. آیا هرگز هنگام صرف ناهار تنها بوده است؟

در اینجا مجموعه‌ای از ۸۴ روز در اختیار داریم ($\overset{\text{هفته}}{12}\times 7=84$)

حال c_i را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: دوست i ام ریحانه با او در یک روز ملاقات داشته است. $1 \le i \le 7$

$$\underbrace{N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_7)}_{\text{تعداد روزهایی که هیچ یک از شروط را برآورده نمی‌کنند}} = \overbrace{84}^{S_0} - \overbrace{\binom{7}{1}35}^{S_1} + \overbrace{\binom{7}{2}16}^{S_2} - \overbrace{\binom{7}{3}8}^{S_3} + \overbrace{\binom{7}{4}4}^{S_4}$$

$$- \underbrace{\binom{7}{5}2}_{S_5} + \underbrace{\binom{7}{6}1}_{S_6} + \underbrace{\binom{7}{7}0}_{S_7} = 0$$

- توجه کنیم که منظور از $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_7)$ تعداد روزهایی است که هیچ یک از شروط را برآورده نمی‌کنند.

تمرین ۸ (از تمرینات ۲.۸) ص ۵۳٤

اثبات؟ $L_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} - \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \dots + (-1)^{t-m} \binom{t-1}{m-1} S_t$

الف) کنت ملاحظه می‌کنیم $E_t = L_t = S_t$

ابتدا ۲ رابطهٔ E_m و L_m را می‌نویسیم چرا که در طول حل مسأله از آنها استفاده خواهیم کرد:

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} - \dots + (-1)^{t-m} \binom{t}{t-m} S_t$$

$$= \sum_{i=0}^{t-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} S_{m+i} \qquad \text{I}$$

$$L_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \dots + (-1)^{t-m} \binom{t-1}{m-1} S_t$$

$$= \sum_{i=0}^{t-m} (-1)^i \binom{m+i-1}{m-1} S_{m+i} \qquad \text{II}$$

در این مسئله فرض می‌کنیم رابطه (I) درست است حال می‌خواهیم درستی رابطه (II) را بدست آوریم.

درمورد درستی عبارت $E_t = L_t = S_t$ می‌توان چنین استدلال کرد.

اولاً $E_t = L_t$. تعداد اعضای مجموعهٔ S که دقیقاً t شرط را برآورده می‌کنند با تعداد اعضای مجموعهٔ S که حداقل t شرط را برآورده می‌کنند برابر است. زیرا حداکثر t شرط داریم.

دوماً $E_t = S_t$. این تساوی با قرار دادن $m=t$ در رابطهٔ (I) بدست می‌آید:

$$E_t = \sum_{i=0}^{t-t} (-1)^i \binom{t+i}{i} S_{t+i} = S_t$$

بنابراین داریم: $E_t = L_t = S_t$

الف) E_{t-1} چیست و L_t چه ارتباطی با L_{t-1} دارد؟

$$L_{t-1} = L_t + E_{t-1} \qquad \text{III}$$

از طرفی با قرار دادن $m = t-1$ در رابطهٔ I داریم:

$$E_{t-1} = \sum_{i=0}^{t-(t-1)} (-1)^i \binom{t-1+i}{i} S_{t-1+i} = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{t+i-1}{i} S_{t+i-1}$$

$$= (-1)^0 \binom{t+0-1}{0} S_{t-1} + (-1)^1 \binom{t+1-1}{1} S_t$$

$$= S_{t-1} + (-1)\, t\, S_t = S_{t-1} - t S_t$$

ب) نشان دهید $L_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t$

طبق قسمت ب (رابطه III) داریم:

$$L_{t-1} = L_t + E_{t-1} = S_t + S_{t-1} - t S_t$$

$$= S_{t-1} - (t-1) S_t = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t$$

در واقع از رابطهٔ $\binom{t-1}{t-2} = \binom{t-1}{1} = t-1$ استفاده شده است.

ت) برای هر $1 \leq m \leq t-1$، L_m، L_{m+1} و E_m چه ارتباطی با هم دارند؟

$$L_m = L_{m+1} + E_m$$

ادامه تمرین ۸ (از تمرینات ۲۰۸) ص ۵۳۴

ث) با استفاده از نتایج مراحل الف تا ت این فرع را با استقرا در جهت عکس ثابت کنید.

$$L_t = S_t \qquad \text{(طبق الف)}$$

$$L_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t \qquad \text{(طبق ب)}$$

حال فرض می‌کنیم رابطهٔ (II) برای $m = k+1$ درست باشد:

$$L_{k+1} = S_{k+1} - \binom{k+1}{k} S_{k+2} + \cdots + (-1)^{t-k-1}\binom{t-1}{k} S_t$$

حال باید ثابت کنیم رابطهٔ (II) برای $m = k$ نیز درست است (استقرا در جهت عکس)

طبق رابطهٔ (III) داریم:

$$L_k = L_{k+1} + E_k$$

$$= \left(S_{k+1} - \binom{k+1}{k} S_{k+2} + \cdots + (-1)^{t-k-1}\binom{t-1}{k} S_t\right)$$

$$+$$

$$\left(S_k - \binom{k+1}{1} S_{k+1} + \binom{k+2}{2} S_{k+2} - \cdots + (-1)^{t-k}\binom{t}{t-k} S_t\right) \qquad \text{(IV)}$$

برای محاسبهٔ حاصل جمع دو عبارت بالا باید ضریب جملات یکسان را باهم جمع کنیم.

بنابراین جملهٔ S_{k+i} را در نظر می‌گیریم. $(1 \leq i \leq t-k)$، این ضریب برابر است با:

$$(-1)^{i-1}\binom{k+i-1}{k} + (-1)^{i}\binom{k+i}{i} = (-1)^{i}\binom{k+i-1}{k-1}$$

توجه کنیم که در حاصل عبارت فوق از اتحاد پاسکال استفاده شده است.

و تقارن

بنابراین ضریب جملهٔ S_{k+i} ($1 \le i \le t-k$) بصورت زیر است:

$$(-1)^{i}\binom{k+i-1}{k-1}$$

این ضریب، همان ضریبی است که در رابطهٔ II تعریف شده است.

توجه کنیم که جملهٔ اول موجود در حاصل جمع رابطهٔ IV برابر با S_k با ضریب 1 است
و این ضریب با قراردادن $i=0$ در رابطهٔ II بدست می‌آید.
همچنین جملهٔ tام در همان رابطهٔ IV برابر است با

$$\left((-1)^{t-k-1}\binom{t-1}{k} + (-1)^{t-k}\binom{t}{t-k}\right) S_t = \underbrace{(-1)^{t-k}\binom{t-1}{k-1}} S_t$$

این ضریب با قراردادن $i = t-m$ در رابطهٔ II نیز بدست می‌آید.

جمع‌بندی: رابطهٔ II (فرمول بسط L_m) را در نظر بگیرید:

- درستی رابطه روبرو توضیح داده شد (مستقل از رابطهٔ II) $\quad L_t = S_t = E_t$
- در رابطهٔ II هم به جای m، t قرار داده شد و رابطهٔ روبرو بدست آمد (Basis Step)
- درستی رابطهٔ روبرو هم برقرار است. $\quad L_k = L_{k+1} + E_k \quad 1 \le k \le t-1$

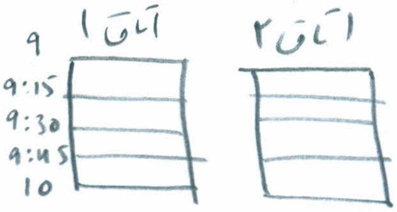
اگر فرض کنیم رابطهٔ II برای L_{k+1} درست است
و از درستی آن به درستی رابطهٔ II برای L_k برسیم
یعنی بعد از محاسبهٔ L_{k+1} با فرمول II و جمع کردن آن با E_k به خود رابطهٔ II برسیم
(یعنی L_k) (Inductive Step)

از دو مرحله بالا و طبق استقرا در جهت عکس (Backward Induction) درستی رابطهٔ II برای $1 \le k \le t$ برقرار است.

تمرین ۸ (از تمرینات ۳.۸) ص ۵۳۷

بنا ست در موسسه‌ای از ٤ متقاضی برای استخدام مصاحبه شود. هر مصاحبه ۳۰ دقیقه به طول می‌انجامد: ۱۵ دقیقه با هر یک از ۲ مصاحبه کننده (مصاحبه‌ها در اتاق‌های جداگانه به عمل می‌آیند و در ساعت ۹ صبح شروع می‌شوند).

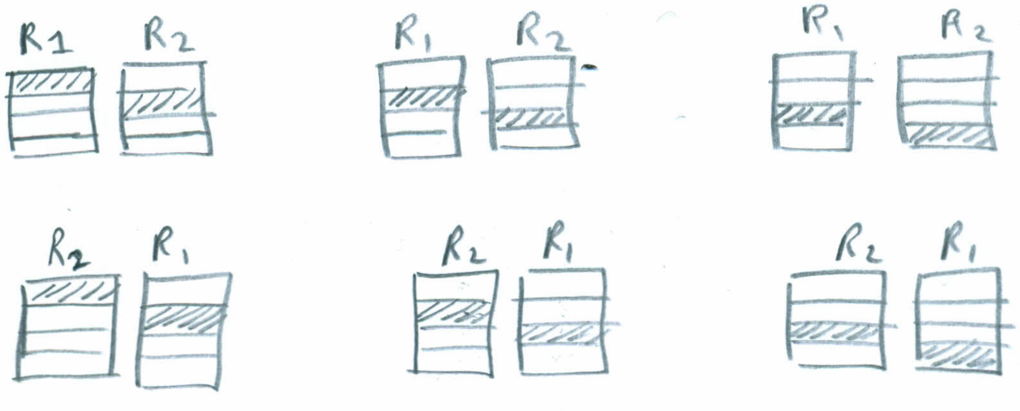
الف) به چند طریق می‌توان این مصاحبه‌ها را در مدت یک ساعت زمانبندی کرد؟



$$\boxed{4! \times d_4}$$

منظور از d_4 :
$$d_4 = 4!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right]$$

ب) یکی از متقاضیان ۹ صبح در موسسه حضور می‌یابد. احتمال اینکه مصاحبه‌های این متقاضی یکی پس از دیگری به عمل آیند چقدر است؟



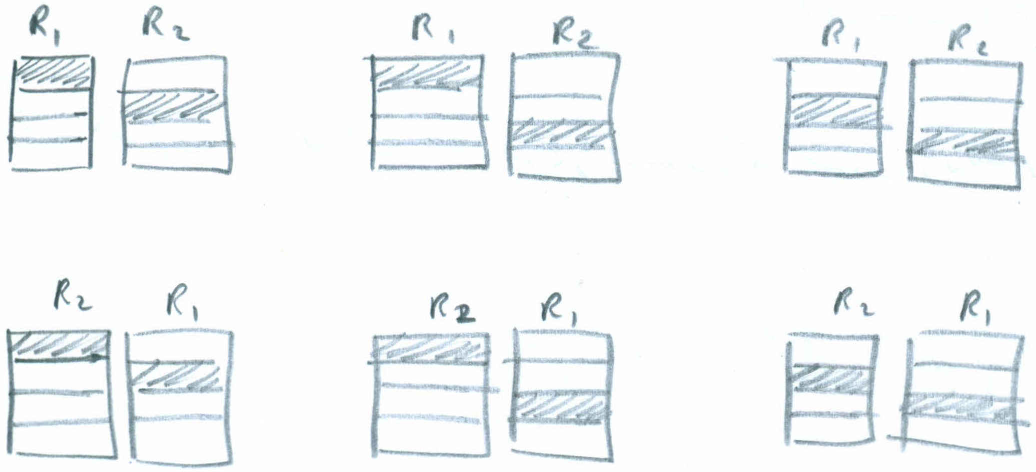
کل حالات بالا

تعداد راههای مصاحبه در یکی از اتاق‌ها

تعداد راههای مصاحبه در اتاق دیگر

$$\frac{6 \times \overbrace{(3\times2\times1)} \times 3}{4!\; d_4} = \frac{6\times 18}{4! \times 4!\, e^{-1}} = \frac{3e}{16} \simeq 0.50$$

پ) متقاضی دیگری نیز در ساعت ۹ صبح در موسسه حضور یابد و امید دارد است که مصاحبه‌اش قبل از 9:50 به پایان برسند تا به موقع به مصاحبه در موسسه دیگری برسد. احتمال اینکه این متقاضی بتواند به موقع موسسه را ترک کند چقدر است؟



$$\text{پاسخ مشابه بخش ب} = \frac{6 \times (3\times2\times1)\times 3}{4!\, d4} = \frac{3e}{16} \simeq 0.50$$