۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند. نشان دهید:

الف. $f(nx)=nf(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$.

ب. f در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

ج. f پیوسته است اگر و فقط اگر برای عددی مانند $m\in\mathbb{R}$، $f(x)=mx$.

حل:

الف

به استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم.

$n=1$: $f(1x)=1\,f(x)$ ✓

فرض استقراء: فرض می‌کنیم حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد.

حکم استقراء: نشان می‌دهیم حکم به ازای $n=k+1$ هم برقرار است.

داریم:

$$f((k+1)x)=f(kx+x)$$

$$\stackrel{\text{فرض مسأله}}{=} f(kx)+f(x) \stackrel{\text{فرض استقراء}}{=} kf(x)+f(x)$$

$$=(k+1)f(x)$$

ب. واضح است که اگر f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در نقطه‌ای مانند $x \in \mathbb{R}$ نیز پیوسته است.

برعکس فرض کنیم تابع f در نقطه‌ای مانند $x_\circ \in \mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان می‌دهیم در هر نقطه دلخواه مانند $y \in \mathbb{R}$ نیز تابع f پیوسته است. باید نشان دهیم $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

می‌دانیم تابع f در $x_\circ$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$. این معادل است با $\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h) = f(x_\circ)$.

بنابراین

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y} f(x) &= \lim_{h\to\circ} f(y+h) \\
&= \lim_{h\to\circ} f(y+h+x_\circ-x_\circ) \\
&\overset{\text{فرض سوال}}{=} \lim_{h\to\circ} \big(f(y)+f(x_\circ+h-x_\circ)\big) \\
&\overset{\text{قسمت الف}}{=} \lim_{h\to\circ} \big(f(y)+f(x_\circ+h)-f(x_\circ)\big) \\
&= f(y) + \lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h) - f(x_\circ) \\
&= f(y) + f(x_\circ) - f(x_\circ) = f(y)
\end{aligned}$$

ج فرض کنیم f پیوسته باشد و $f(1) = m$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم

$$f(n) = f(n \times 1) \overset{\text{قسمت الف}}{=} nf(1) = mn$$

به ازای $n \in \mathbb{Z}^-$ داریم

$$f(n) = f(-n \times -1) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times f(-1) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times (-f(1)) = mn$$

به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$، $x = \frac{p}{q}$ که $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}$. بنابراین

$$f(p) = f(qx) \overset{\text{قسمت الف}}{=} qf(x) = mp$$

بنابراین $f(x) = m\frac{p}{q} = mx$.
برای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $(x_n) = (\frac{[rn]}{n})$ وجود دارد که $x_n \to r$ بنابراین

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{\text{پیوستگی}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} mx_n = mr.$$

۱۳. فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و $f(a)=f(b)$. اگر $n\in\mathbb{N}$، نشان دهید عددی مانند $c\in[a,b-\frac{b-a}{n}]$ وجود دارد که $f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$.

حل: تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{n})$$

دامنه تابع g برابر $[a,b-\frac{b-a}{n}]$ است. نقاط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_k=a+(\frac{b-a}{n})k,\qquad k=0,1,\dots,n-1,n.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}g(x_k)&=g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{n-1})\\&=\{f(a)-f(a+\frac{b-a}{n})\}+\{f(a+\frac{b-a}{n})-f(a+2(\frac{b-a}{n}))\}\\&+\cdots+\{f(a+(n-1)(\frac{b-a}{n}))-f(a+n(\frac{b-a}{n}))\}\end{aligned}$$

با توجه $f(a+n(\frac{b-a}{n}))=f(b)$ داریم $f(a)=f(b)$ بنابراین

$$g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{n-1})=f(a)-f(b)=0$$

بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول: اگر x_jای وجود داشته باشد که $g(x_j)=0$ که آنگاه $c=x_j$ جواب مسئله خواهد بود.

حالت دوم: چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $x_i\neq x_j$ که $i\neq j$ وجود دارد که

$$g(x_i)g(x_j)<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین x_i و x_j هست که $g(c)=0$ و در نتیجه

$$f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$$

۱۴. فرض کنید n عددی طبیعی و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$. نشان دهید $a,b\in[0,1]$ وجود دارند به‌طوری‌که $b-a=\frac{1}{n}$ و $f(a)=f(b)$.

حل: تابع کمکی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوستگی f و چون تفاضل و ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است، بنابراین $g(x)$ تابعی پیوسته است. داریم

$$\begin{aligned} g(0)&=f(\frac{1}{n})-f(0)\\ g(\frac{1}{n})&=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})\\ &\vdots\\ g(\frac{n-1}{n})&=f(1)-f(\frac{n-1}{n}) \end{aligned}$$

اگر مقادیر فوق را با هم جمع کنیم، داریم

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)$$

چون طبق فرض سوال $f(1)=f(0)$، بنابراین

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0.$$

چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $0\le i,j\le n-1$ وجود دارند که $i\neq j$ به‌طوری‌که $g(\frac{i}{n})\ge 0$ و $g(\frac{j}{n})\le 0$. بنابراین

$$g(\frac{i}{n})g(\frac{j}{n})<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین $\frac{i}{n}$ و $\frac{j}{n}$ هست که $g(c)=0$. بنابراین

$$f(c+\frac{1}{n})=f(c)$$

کافی است قرار دهیم $a=c$ و $b=c+\frac{1}{n}$.

سری سوم، انتگرال

۴. اگر تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر x داشته باشیم

$$\int_0^x f(t)dt = x\sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

ضابطه f را بیابید.

$$\int_0^x f(t)\,dt = x\sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

مشتق

$$\longrightarrow f(x) = \sin x + x\cos x + \frac{f(x)}{1+x^2}$$

$$\longrightarrow f(x) - \frac{f(x)}{1+x^2} = \sin x + x\cos x$$

$$\longrightarrow \frac{f(x) + x^2 f(x) - f(x)}{1+x^2} = \sin x + x\cos x$$

$$\longrightarrow \frac{x^2 f(x)}{1+x^2} = \sin x + x\cos x$$

$$\longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{(1+x^2)(\sin x + x\cos x)}{x^2}}$$

۵. (آدامز) فرض می کنیم $a < b$ و f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشد. عدد k را طوری بیابید که انتگرال

$$\int_a^b (f(x) - k)^۲ dx$$

مینیمم شود.

تابع f بر بازه $[0, 1]$ پیوسته و $a < b$ داریم:

$$g(k) = \int_a^b (f(x) - k)^2 dx = \int_a^b ((f(x))^2 - 2kf(x) + k^2) dx = \int_a^b (f(x))^2 dx - 2k \int_a^b f(x) dx + k^2 \int_a^b dx$$

بنالراین با مشتق گیری از g(k) نسبت به k داریم

$$\rightarrow g'(k) = -2 \int_a^b f(x) dx + 2k(a - b) = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = \bar{f}$$

$g''(k) = ۲(a-b) > ۰ \Rightarrow$ نقطه بالا

۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\int_{۰}^{۱} f(x)\,dx = ۱$. نشان دهید $c\in[۰,۱]$ وجود دارد بطوریکه $f(c) = ۳\,c^{۲}$.

تابع $g(x)=f(x)-3x^2$ را روی بازه $[0,1]$ در نظر بگیرید، با به کار بردن قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\exists c\in[0,1] : g(c)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (f(x)-3x^2)dx$$

$$\to g(c)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 3x^2dx=\int_0^1 f(x)dx-1=0\to f(c)=3c^2$$

۷. فرض کنید $0 < a < b$ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. نشان دهید $c \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $\int_a^c f(x)\, dx = c\, f(c)$.

. تابع g(x) را با ضابطه زیر در نظربگیرید که چون f پیوسته است تابع g مشتق پذیر است°

$$g(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x} \to g'(x) = \frac{xf(x) - \int_a^x f(t)dt}{x^2}$$

$$g(a)=0, g(b)=0 \to \exists c \in (a,b) : g'(c)=0 \to \frac{cf(c)-\int\limits_a^c f(t)dt}{c^2}=0$$

$$cf(c)-\int\limits_a^c f(t)dt=0 \to \int\limits_a^c f(t)dt=cf(c)$$

Subject:
Day. Month. Year. ( )

سری اول تمرینات ریاضی ۱

①

تابع کلی را می‌سازیم f(x)

$$\begin{cases} f(x):[0,1]\to \mathbb{R} \\ f(x)=(x^2+1)\sin x+(x^2-1)\cos x \end{cases}$$

f(x) حاصل ضرب و جمع تابع‌های پیوسته است پس خودش پیوسته است.

$$f(0)=\sin 0-\cos 0=-1\to f(0)<0$$

$$f(1)=2\sin(1)+0 \xrightarrow{0<1<\frac{\pi}{2}\to \sin(1)>0} f(1)>0$$

$$f(0)f(1)<0$$

حالت خاص قضیه مقدار میانی (بولتزانو)

$$\exists c\in[0,1] : f(c)=0$$

نتیجه گرفتیم → $\exists c\in[0,1] : f(c)=0$

دیدیم → $f(0)<0$ و $f(1)>0$

پس $f(1)$ و $f(0)$ مخالف صفرند پس c، ۰ و ۱ نیست

$$\exists c\in(0,1) : f(c)=0$$

$$f(c)=(c^2+1)\sin c+(c^2-1)\cos c \longrightarrow 0=(c^2+1)\sin c-(1-c^2)\cos c$$

$$(c^2+1)\sin c=(1-c^2)\cos c$$

②

$$f(x)=\cos\frac{1}{x^2}$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\cos(\underbrace{(2n+1)}_{\text{عدد فرد}}\pi)=-1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\cos(\underbrace{2n}_{\text{زوج}}\pi)=1$$

$f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.