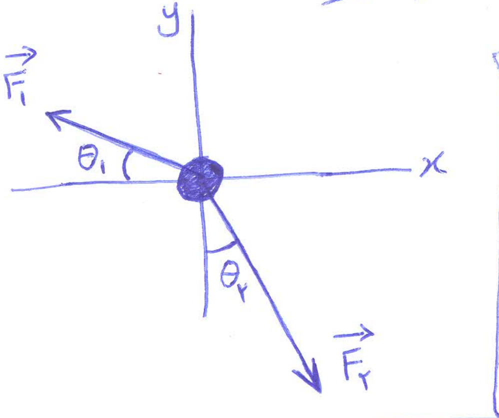
فصل ۵ - نیرو و حرکت I

۱ سه نیروی افقی بر گلوله‌ای به جرم ۲۵ g که روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد اثر می‌کند. در شکل زیر، دید از بالای آن با دو نیرو از مجموع سه نیروی وارد شده نشان داده شده است. بزرگی نیروی $\vec{F}_1$ برابر با ۶ N و زاویهٔ آن $\theta_1 = 30^\circ$ است. بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ برابر ۷ N و زاویهٔ آن $\theta_2 = 30^\circ$ است. در صورتی که گلوله (الف) ساکن باشد، (ب) سرعت ثابت $\vec{v} = (13\hat{i} - 14\hat{j})\ \mathrm{m/s}$ را داشته باشد، و (پ) سرعت متغیر $\vec{v} = (13t\hat{i} - 14t\hat{j})\ \mathrm{m/s}$ را داشته باشد (t زمان است)، نیروی سوم ($\vec{F}_3$) برحسب بردارهای یکه چیست؟



پاسخ:

(الف) برای آنکه گلوله ساکن باشد، باید نیروی خالص وارد بر گلوله صفر باشد. ($\vec{F}_{net} = 0$)

$$\vec{F}_{net} = \underbrace{\vec{F}_1}_{\text{معلوم}} + \underbrace{\vec{F}_2}_{\text{معلوم}} + \underbrace{\vec{F}_3}_{?} = 0 \rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = (-F_1\cos\theta_1)\hat{i} + (F_1\sin\theta_1)\hat{j}$$

$$= (-6\cos 30)\hat{i} + (6\sin 30)\hat{j} = \boxed{-5.2\,\hat{i} + 3\,\hat{j}}\ \vec{F}_1$$

$$\vec{F}_2 = (F_2\sin\theta_2)\hat{i} + (-F_2\cos\theta_2)\hat{j} = (7\sin 30)\hat{i} + (-7\cos 30)\hat{j} = \boxed{3.5\,\hat{i} - 6.06\,\hat{j}}\ \vec{F}_2$$

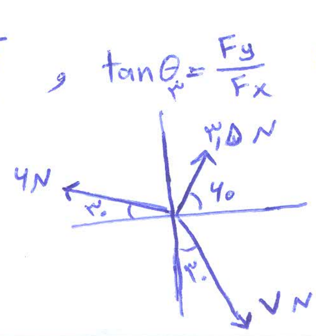
$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -(-5.2\,\hat{i} + 3\,\hat{j}) - (3.5\,\hat{i} - 6.06\,\hat{j}) = \boxed{1.7\,\hat{i} + 3.06\,\hat{j}}\ \vec{F}_3$$

الف

می‌توانیم از رابطهٔ $\tan\theta_3 = \frac{F_y}{F_x}$ و $|\vec{F}_3| = \sqrt{F_y^2 + F_x^2}$ جهت و بزرگی نیروی $\vec{F}_3$ را بدست آوریم و رسم کنیم.

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{F_{y3}}{F_{x3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3.06}{1.7}\right) = 60.9^\circ$$

$$F_3 = \sqrt{(3.06)^2 + (1.7)^2} = 3.5\ \mathrm{N}$$



پ) برای حالتی که بخواهیم یک جسم ساکن باشد و یا با سرعت ثابت حرکت کند باید نیروی خالص وارد به جسم صفر باشد. بنابراین جواب قسمت الف و ب یکی است.

$$\vec{F}_3 = (1.7\,\hat{i} + 3.06\,\hat{j})\,N$$

ت) برای حالتی که بخواهیم سرعت جسم متغیر باشد، باید یک نیروی خالص به جسم وارد شود. یعنی $(\vec{F}_{net} \neq 0)$

از قانون دوم نیوتن می دانیم $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$

همچنین از فصل قبل آموختیم $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{v} = 13t\,\hat{i} + 14t\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \overset{kg}{(25\times 10^{-3})}\,\overset{m/s^2}{(13\,\hat{i} - 14\,\hat{j})} = \overset{N}{\underbrace{(0.325\,\hat{i} - 0.35\,\hat{j})}_{\vec{F}_{net}}}$$

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.325\,\hat{i} - 0.35\,\hat{j}$$

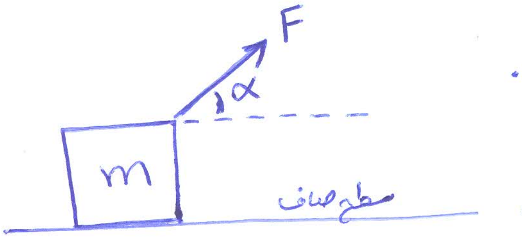
$$\vec{F}_3 = 0.325\,\hat{i} - 0.35\,\hat{j} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = 0.325\,\hat{i} - 0.35\,\hat{j} + \underbrace{(1.7\,\hat{i} + 3.06\,\hat{j})}_{-\vec{F}_1 - \vec{F}_2}$$

$$\vec{F}_3 = \boxed{2.025\,\hat{i} - 2.71\,\hat{j}}$$ (ت)

۲ در لحظه‌ی $t=0$ نیروی $F=at$ مطابق شکل بر جسمی به جرم m که روی یک سطح صاف در حال سکون است وارد می‌شود. (a یک ثابت است). جهت این نیرو ثابت و با سطح افق زاویه‌ی α می‌سازد. مطلوب است محاسبه‌ی:

(الف) سرعت جسم در لحظه‌ی جدا شدن آن از سطح.

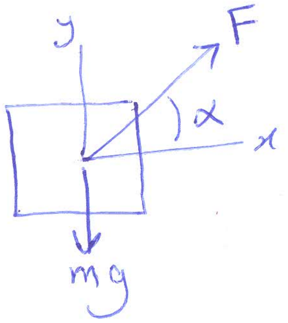
(ب) مسافت طی شده بوسیله جسم تا این لحظه.



پاسخ:

الف) در لحظه‌ی جدا شدن جسم از زمین نیروی وارده از زمین صفر می‌شود $(N=0)$

به کمک قانون دوم نیوتن نیروی F بدست می‌آید:



$$\underbrace{\Sigma F_y = 0}_{\text{برآیند نیروها صفر است زیرا حرکت عمودی نداریم}} \qquad F\sin\alpha - mg = 0$$

$$F = \frac{mg}{\sin\alpha}$$ (نیرو در لحظه‌ی جدا شدن)

از طرفی داریم $F = \underbrace{a}_{\text{عدد ثابت}}t$ بنابراین در لحظه‌ی جدا شدن رابطه‌ی $a t_0 = \frac{mg}{\sin\alpha}$ برقرار است.

از این رابطه t_0 (زمان جدا شدن جسم از زمین) بدست می‌آید.

$$t_0 = \frac{mg}{a\sin\alpha}$$

قانون دوم نیوتن را برای حرکت افقی جسم می‌نویسیم:

A شتاب جسم $\quad A = \frac{dv}{dt}$

$$\Sigma F_x = m\underbrace{A}_{\text{شتاب جسم}}$$

$$\underbrace{F}_{at}\cos\alpha = m\underbrace{A}_{\frac{dv}{dt}} \Rightarrow at\cos\alpha = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \frac{a}{m}t\cos\alpha\, dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{a}{m}t\cos\alpha\, dt \Rightarrow v = \frac{a}{m}\cos\alpha\int_0^t t\,dt = \boxed{\frac{at^2\cos\alpha}{2m}}$$

سرعت افقی در هر لحظه؛ اکنون باید به جای t مقدار t_0 را جایگذاری کنیم.

$$t=t_0 \Rightarrow v(t_0)=\frac{a\cos\alpha}{2m}\cdot\frac{(mg)^2}{a^2\sin^2\alpha}=\boxed{\frac{mg^2\cos\alpha}{2a\sin^2\alpha}}$$

سرعت در لحظهٔ جدا شدن جسم از زمین (الف)

(ب) با توجه به اینکه معادلهٔ سرعت برحسب زمان $v(t)$ را بدست آوردیم می‌توانیم با انتگرال‌گیری از این رابطه به معادلهٔ مکان جسم برسیم

$$v=\frac{dx}{dt} \Rightarrow dx=v\,dt \Rightarrow \underline{x=\int_0^t v\,dt}$$

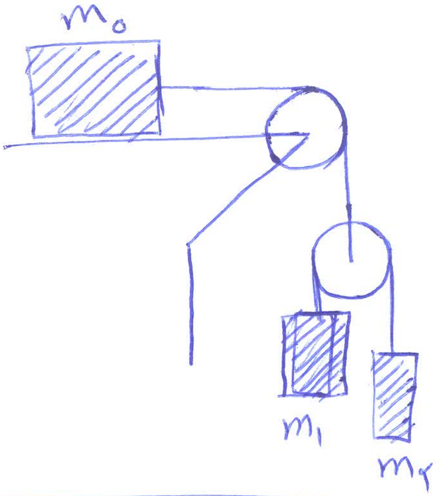
$$x=\int_0^t \frac{at^2\cos\alpha}{2m}\,dt=\frac{a\cos\alpha}{2m}\int_0^t t^2\,dt=\boxed{\frac{at^3\cos\alpha}{6m}}$$

معادلهٔ مکان جسم در هر لحظه (برای تعیین مسافت طی شده در لحظهٔ جدا شدن باید t_0 را جایگذاری کنیم)

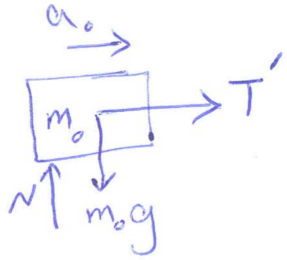
$$x(t_0)=\frac{a\cos\alpha}{6m}\cdot\frac{m^3g^3}{a^3\sin^3\alpha}=\boxed{\frac{m^2g^3\cos\alpha}{6a^2\sin^3\alpha}}$$

مسافت طی شده در لحظهٔ جدا شدن جسم از زمین (ب)

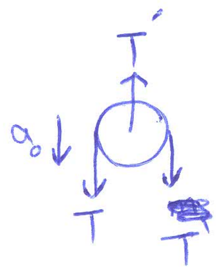
در شکل زیر، اجسام دارای جرم‌های m_0 ، m_1 و m_2 می‌باشند و اصطکاک نداریم. جرم قرقره‌ها و نخ‌ها قابل چشم‌پوشی است. شتاب جرم m_1 را پیدا کنید.
(فرض کنید $m_1 > m_2$)



می‌دانیم که شتاب جرم m_0 یعنی a_0 با شتاب دستگاه آتود یکسان است. یعنی قرقره متحرک نیز با شتاب a_0 به سمت پایین حرکت می‌کند.
نمودار اجسام را به صورت زیر رسم می‌کنیم.

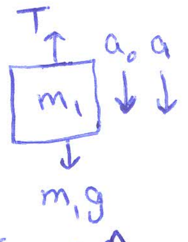


$$\Sigma F_x = m_0 a_x$$
$$T' = m_0 a_0$$

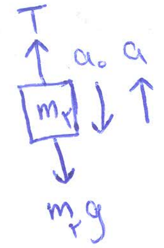


چون در قرقره اصطکاک نداریم کشش در دو طرف قرقره یکسان و برابر T است

$$\Sigma F_y = \cancel{m} a_0$$
$$T' - 2T = 0 \Rightarrow T' = 2T$$



$$\Sigma F_y = m_1 A_1$$
$$m_1 g - T = m_1(a + a_0) \quad (1)$$



$$\Sigma F_y = m_2 A_2$$
$$T - m_2 g = m_2(a - a_0) \quad (2)$$

A_1 شتاب مطلق جرم m_1
a شتاب جرم m_1 و m_2 اگر دستگاه مختصات روی قرقره متحرک در نظر بگیریم.
a_0 شتاب دستگاه آتود
A_2 شتاب مطلق جرم m_2

معادلات (۱) و (۲) دارای دو مجهول a و T هستند. با حل این دستگاه دو معادله دو مجهول می‌توانیم a و T را بدست آوریم.

دستگاه دو معادله دو مجهول

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1(a + a_0) & (1) \\ T - m_2 g = m_2(a - a_0) & (2) \end{cases}$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)(g - a_0)}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2 (g - a_0)}{m_1 + m_2}$$

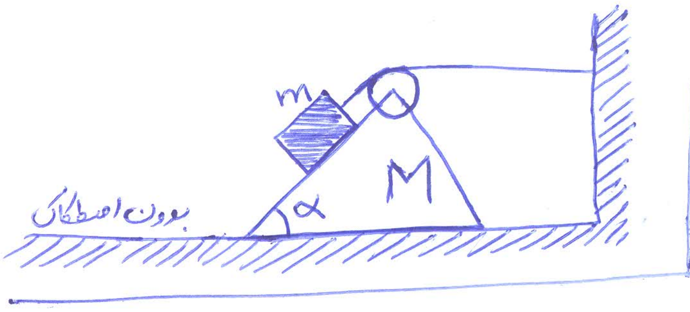
$$\begin{cases} T' = 2T \\ T' = m_0 a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{2T}{m_0} = \frac{2}{m_0}\left(\frac{2 m_1 m_2 (g - a_0)}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow A_1 = a + a_0$$

$$A_1 = a + a_0 = \frac{(m_1 - m_2)(g - a_0)}{m_1 + m_2} + \frac{2}{m_0}\left(\frac{2 m_1 m_2 (g - a_0)}{m_1 + m_2}\right)$$

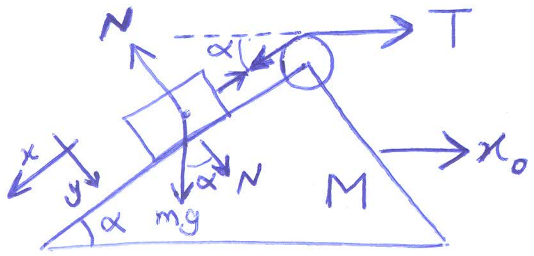
$$\boxed{A_1 = \frac{[4 m_1 m_2 + m_0(m_1 + m_2)]g}{4 m_1 m_2 + m_0(m_1 + m_2)}}$$

جواب آخر

۴- در شکل زیر، جرم جسم m و جرم گوه M و زاویهٔ α معلوم هستند. مطلوب است محاسبه شتاب گوه در صورتی که اصطکاک بین سطوح و جرم قرقره و ریسمان ناچیز باشد.



پاسخ: با توجه به شکل واضح است که گوه M به سمت راست و جرم m به سمت پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند.



با توجه به این که طول طناب ثابت است، هر مقدار مسافتی که جسم m روی گوه حرکت کند، برابر مسافت طی شده توسط گوه روی سطح افقی است. یعنی:

$$\Delta x_{m/M} = \Delta x_M$$

همچنین با توجه به اینکه جابه‌جایی جسم m و گوه در یک زمان اتفاق می‌افتد بنابراین سرعت‌ها و شتاب‌های این دو جسم نیز برابر هستند

$$v_{m/M} = v_M$$

$$\boxed{a_{m/M} = a_M = a}$$

از حرکت نسبی می‌دانیم $\Leftarrow$ $\vec{a}_m = \vec{a}_M + \vec{a}_{m/M}$ (1)

$$a_m = \sqrt{a_M^2 + a_{m/M}^2 - 2a_{m/M}a_M\cos\alpha} = \sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)} = a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

برای گوه M می‌توان نوشت: $\boxed{T - T\cos\alpha + N\sin\alpha = Ma}$ (2)

برای جسم m در دستگاه مختصات افقی x-y متصل به زمین می‌توان نوشت :

$$mg\sin\alpha - T = ma_{mx} = m(\underbrace{a_{m/M\,x} + a_{Mx}}_{})$$

$$\underbrace{a_{m/M} + a_M\cos(\pi-\alpha)}_{} \rightarrow \underbrace{a(1+\cos(\pi-\alpha))}_{} \rightarrow a(1-\cos\alpha)$$

$$\boxed{mg\sin\alpha - T = a(1-\cos\alpha)}$$ ۳

$$mg\cos\alpha - N = ma_{my} = m(\underbrace{a_{m/M\,y} + a_{My}}_{a\sin\alpha + 0}) = ma\sin\alpha$$

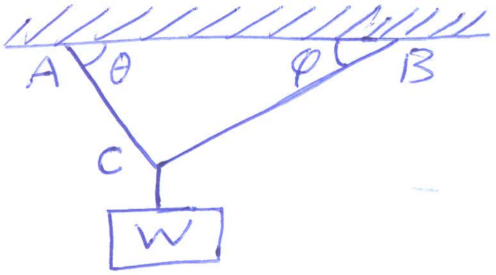
$$\boxed{mg\cos\alpha - N = ma\sin\alpha}$$ ۴

از حل همزمان ۴ معادلهٔ فوق داریم :

$$\boxed{a = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}}$$

۵

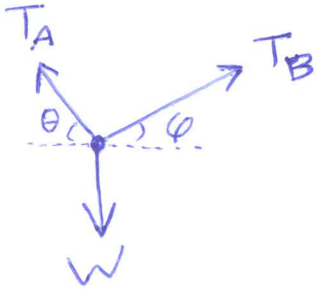
جسمی به وزن W با دو طناب ناکشسان از دو نقطه‌ی هم سطح A و B آویخته شده اند. ریسمان ها بدون جرم اند و با افق زاویه‌های θ و φ می سازند. جسم مطابق شکل در نقطه‌ی C به ریسمان بسته شده است. کشش را در هر دو ریسمان بیابید.



پاسخ:

نمودار آزاد در نقطه‌ی C را رسم می کنیم.

و سپس قانون دوم نیوتن را برای جهت های x و y می نویسیم.



$$\sum F_x = m\cancel{a_x}^{0} = 0$$
$$\sum F_y = m\cancel{a_y}^{0} = 0$$

با توجه به اینکه حرکت نداریم بنابراین a صفر است

$$\begin{cases} \sum F_x = T_B \cos\varphi - T_A \cos\theta = 0 & (1) \\ \sum F_y = T_B \sin\varphi + T_A \sin\theta - W = 0 & (2) \end{cases}$$

دستگاه دو معادله دو مجهول

T_A و T_B مجهولند

α φ معلومند

$$(1)\quad T_A = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} T_B \rightarrow$$

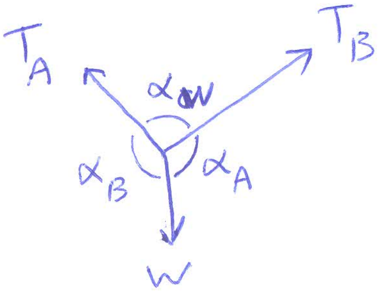
$$(2)\quad T_B \sin\varphi + \overbrace{\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right) T_B}^{T_A} \sin\theta - W = 0$$

$$\rightarrow T_B\left[\sin\varphi + \sin\theta\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\right] = W$$

$$T_B = \frac{W}{\sin\varphi + \sin\theta\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)}$$

$$T_A = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \cdot \frac{W}{\sin\varphi + \sin\theta\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)}$$

روش دوم :



$$\frac{T_A}{\sin\alpha_A} = \frac{T_B}{\sin\alpha_B} = \frac{W}{\sin\alpha_W}$$

$$T_A = \frac{\sin\alpha_A}{\sin\alpha_W} W$$

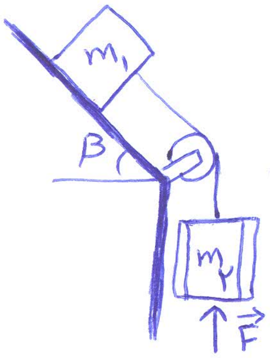
$$T_B = \frac{\sin\alpha_B}{\sin\alpha_W} W$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha_A = \sin(\pi - \alpha_A) = \cos\varphi \\ \sin\alpha_B = \sin(\pi - \alpha_B) = \cos\theta \\ \sin\alpha_W = \sin(\theta + \varphi) \end{array}\right\} \quad T_A = \frac{\cos\varphi}{\sin(\theta+\varphi)} W$$

$$T_B = \frac{\cos\theta}{\sin(\theta+\varphi)} W$$

تمرین

۱- کره ای به جرم ۳×۱۰^{-۴} kg از ریسمانی آویخته است. باد ملایمی که افقی می‌وزد کره را طوری به جلو می‌راند که با راستای قائم زاویهٔ ثابت ۳۷° می‌سازد. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی باد و (ب) نیروی کشش ریسمان.



۲- در شکل مقابل جعبهٔ کوچکی به جرم $m_1 = 1kg$ واقع بر سطح شیبدار بدون اصطکاک به جعبهٔ بزرگ‌تری به جرم $m_2 = ۲$ kg متصل است. قرقره بدون جرم و بدون اصطکاک است. نیروی رو به بالا به بزرگی $F = ۶ N$ بر جعبهٔ بزرگتر که شتاب رو به پایین $۵٫۵\ m/s^2$ را دارد وارد می‌شود. (الف) کشش در ریسمان و (ب) زاویهٔ β چقدر است؟

۳- نیروی معینی به جسمی به جرم m_1 شتاب $۱۲\ m/s^2$ و به جسمی به جرم m_2 شتاب $۳٫۳\ m/s^2$ می‌دهد. این نیرو به جسمی با جرم (الف) $m_2 - m_1$ و (ب) $m_2 + m_1$ چه شتابی می‌دهد؟