



دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فصل ۱ - اصول بنیادی شمارش

بخش دوم

کلاس تدریس یار ریاضیات گسسته

1

**Fundamental
Principles of
Counting**

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

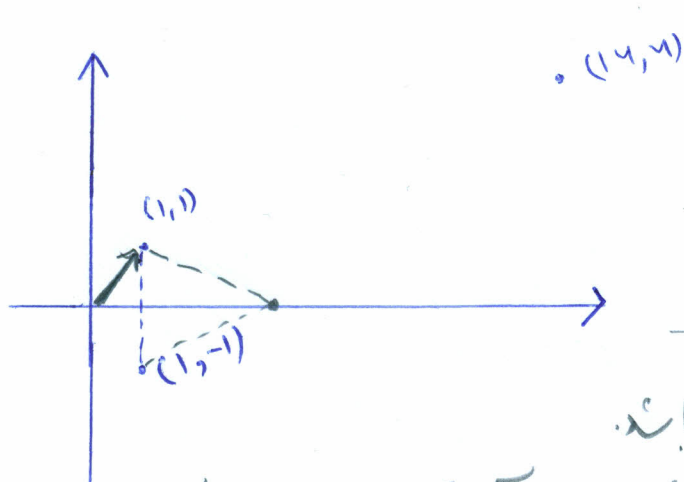
تمرین ۳۴ - قسمت ث (صفحه ۵۳ - تمیزات تکمیلی فصل اول)

دو دانشجو به سبب استازات تحصیلی برجسته برای تعیین دانشجوی برجسته قریب انتخاب شده اند.
شورای مرکب از ۱۴ عضو داشته شده است و هر عضو یکی از ۲ نامزد را انتخاب می کند و نام

او را در صندوق رای گیری گذاشته اند. فرض کنیم دانشجوی اول ۹ رای و دانشجوی دوم ۸ رای بیارند.

به شرطی که هر باریک رای از صندوق استخراج شود، به چند طریق می توان مرتبه رای گیری را استخراج نمود

به طوری که همواره از بین آرای استخراج شده آرای بیشتر به نفع دانشجوی اول باشد؟



$$\begin{array}{l} (x,y) \rightarrow (x+1,y+1) \\ \text{شماره رای دانشجوی اول} \nearrow (u) \\ \text{شماره رای دانشجوی دوم} \searrow (d) \\ (x,y) \rightarrow (x+1,y-1) \end{array}$$

همچنان در شمارش، نخستین رای باید از آن قرار باشد.

- بین راه‌های از (۱,۱) به (۱۴,۴) که بر محور مختصات یا با آن متقاطع هستند و کل راه‌های از (۱,۱) به (۱۴,۴) تناظر یک به یک وجود دارد.

$$\begin{array}{l} \text{تعداد کل راه‌ها} - \text{تعداد کل راه‌های از (۱,۱) به (۱۴,۴)} \\ \text{تعداد کل راه‌های مطلوب} = \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u+d=13 \\ u-d=3 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} u=8 \\ d=5 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} u+d=13 \\ u-d=5 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} u=9 \\ d=4 \end{array} \end{array}$$

$$= \frac{13!}{8!5!}$$

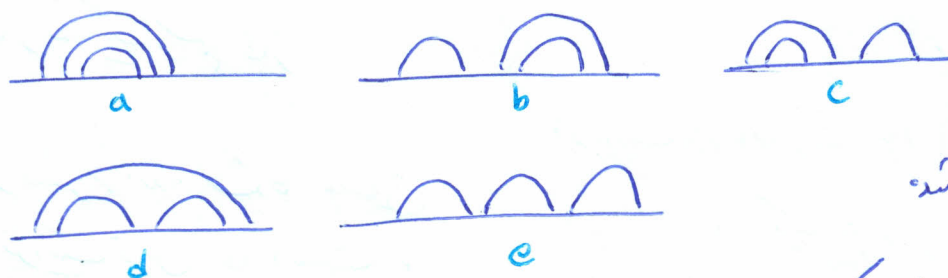
$$- \frac{13!}{9!4!}$$

$$= \binom{13}{8}$$

$$- \binom{13}{9} = 572$$

به چند طریق می‌توان n نیم‌دایره را بر روی خط افقی چپان رسم کرد که دو انتهای
کمان نیم‌دایره‌ها بر روی خط افقی بوده و هیچ ۲ نیم‌دایره‌ای یکدیگر را قطع نکند.

مثال: اگر سه نیم‌دایره داشته باشیم، حالات خواسته شده در مثال به صورت زیر خواهد بود:



یعنی سه نیم‌دایره را با شرایط ذکر شده

در می‌توان به ۵ طریق رسم کرد.

- به عنوان نمونه شکل ۴ را در نظر بگیرید. اگر از سمت چپ شکل ۴ به راست حرکت کنیم و در هنگام

مشاهده یک نیم‌دایره (محل شروع آن نیم‌دایره) عدد ① را بنویسیم و موقع مشاهده مجدد همان نیم‌دایره

عدد ⑤ را بنویسیم در این صورت به رشته ۱۱۰۱۰۵ می‌رسیم:



- ویژگی رشته‌های مشابه با نیم‌دایره‌ها رسم شده این است که این رشته‌ها:

حاصل تعداد مساوی از یک‌ها و صفرها هستند و اگر این رشته‌ها را از چپ به راست
خوانیم، هیچ‌گاه تعداد صفرها بیشتر از تعداد یک‌ها نخواهد بود.

* همچنین بین رسم‌های مجاز از نیم‌دایره‌ها و رشته‌های از صفر و یک با ویژگی بالا
تناظر یک به یک برقرار است.

- بنابراین به جای شمارش رسم‌های مجاز از نیم‌دایره می‌توان رشته‌های با ویژگی فوق را شمرد که آن هم

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \text{پاسخ می‌دهد}$$

$$n \geq 1$$

برابر با عدد n ام کاتالان است.

(n : تعداد نیم‌دایره‌ها)

هر رسم مجاز از سیم دایره ما با شرایط ذکر شده معدل بارشگاه از صفرها و یک ۴
 با شرایط بیان شده است .

۱ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰



در صورت خواندن رشته بالا از چپ به راست

باریدن مرا یک سیم دایره شروع می شود

باریدن هره نزدیک ترین سیم دایره بسته می شود .

- نحوه بندیل یک رشته

مجاز به یک رسم مجاز

- هر صفر خوانده شده متعلق

به نزدیک ترین ۱ است .



۱ ۱ ۰ ۰ ۰ ۱



X

یک رشته غیر مجاز و یک رسم غیر مجاز

فرض کنید a_n تعداد راههای قرار دادن اعداد $1, 2, \dots, 2n$ در جدولی $2 \times n$ باشد.
به طوری که اعداد واقع در هر سطر و ستون به صورت صعودی باشند. a_n را بیابید.

نشان: اگر $n=3$ باشد داریم:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 6 |

یک چسبش مجاز

اعداد 1 تا 6 را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسیم: 1 2 3 4 5 6

حال شروع به خواندن این اعداد می‌نمایم. اگر هر عددی که می‌خوانیم در سطر بالا جدول باشد عدد ① و اگر در سطر پایین جدول باشد عدد ⑤ را قرار می‌دهیم. یعنی برای جدول مثال فوق داریم:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

و در کس‌های رشته‌های ①، ⑤ به دست آمده عبارتند از:

① هر رشته‌ای حاوی تعدادی مساوی از صفرها و یک 1 هستند و اگر هر رشته را از چپ به راست بخوانیم هیچ‌گاه تعداد صفرها بیشتر از تعداد یک‌ها نخواهد بود.

② بین جدول‌های مجاز (با شرایط ذکر شده در صورت سوال) و رشته‌های با ویژگی فوق شواهد یک‌به‌یک وجود دارد.

- بنابراین به جای شمارش جدول‌های مجاز، میتوان رشته‌های با ویژگی فوق را شمرد.

که آن‌ها هم برابر با عدد n ام کاتالان است.

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

(n : تعداد اعداد موجود در هر سطر)

$$n \geq 1$$

حاصل مجموع زیر را بیابید.

$$\sum_{n_{60}=0}^2 \sum_{n_{59}=0}^{n_{60}} \sum_{n_{58}=0}^{n_{59}} \dots \sum_{n_1=0}^{n_2} \sum_{n_0=0}^{n_1} 1$$

- مجموع عبارت بالا معادل یا مقدار نهایی Sum در قطعه برنامه زیر است:

```
sum = 0;
for n60 = 0 to 2 do
    for n59 = 0 to n60 do
        ...
        for n1 = 0 to n2 do
            for n0 = 0 to n1 do
                sum = sum + 1; ←
```

هر بار از برای برنامه که به جمله $sum = sum + 1$ می رسد معادل با یک جواب معادل زیر است. و شش فرایک بیک وجود دارد (بین ابروی خط برنامه و جواب معادل):

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 &= 61 \\ 0 \leq x_i \\ 0 \leq x_i &\leq 2 \end{aligned}$$

n_i : بیانگر تعداد زنگی استفاده شده.

$$0 \leq n_0 \leq n_1 \leq n_2 \dots \leq n_{59} \leq n_{60} \leq 2$$

آن دستار n_i هایی که مقدارشان دو است. \downarrow تعداد این نوع از n_i را زنگی دارد.

آن دستار n_i هایی که مقدارشان یک است. \downarrow تعداد این نوع از n_i ها را زنگی دارد.

آن دستار n_i هایی که مقدارشان صفر است. \downarrow تعداد این نوع از n_i ها را زنگی دارد.

\Rightarrow تعداد پاسخ های معادله : $\binom{61+3-1}{61} = \binom{63}{61}$ جواب نهایی

یک اثبات ترکیبیاتی برای اتحاد وندرموند (Vandermonde's Identity) ارائه دهید.

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}$$

$$= \binom{m+n}{r} \quad m, n, r \in \mathbb{N}$$

مجموعه $X = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o'_1, \dots, o'_n\}$ از اشیاء را در نظر بگیرید.

حال فرض کنید زیر مجموعه r تایی از این مجموعه X (که دارای $m+n$ عضو است) را بشماریم:

راه نخست $\leftarrow \binom{m+n}{r}$

راه دوم \leftarrow مجموعه X را در نظر بگیرید:

$$X = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o'_1, \dots, o'_n\}$$

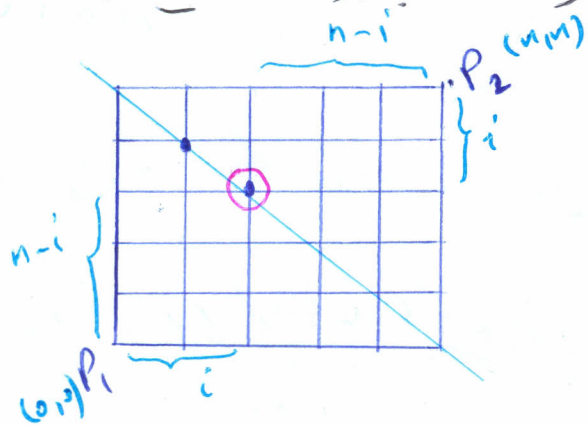
راه های دسته بندی به زیر مجموعه های r تایی را افزایم کنیم به اینگونه که تعداد از m سؤال اول برداریم و به تعدادی از n عضو بعدی. بنابراین داریم:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}$$

بنابراین شمارش متفاوت (Double Counting) باید دو راه نخست و دوم با یکدیگر برابر باشند:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

فرض کنید در یک صفحه مشبک ششگ P_1 در $(0,0)$ و ششگ P_2 در (n,n) قرار دارند.
 در هر نقطه از صفحه، حرکت از P_1 به P_2 با پرتاب یک سکه حرکت بعدی خود را تعیین می‌کنند.
 حرکت P_1 بصورت \uparrow یا \rightarrow است حرکت P_2 بصورت \leftarrow یا \downarrow



احتمال ملاقات این ۲ بازیگر چقدر است؟

- در ملاقات قطعاً برخوردی یک از نقاط قطراصل صورت می‌گیرد.

$$\frac{(i+n-i)!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}$$

- تعداد راه‌های P_1 از $(0,0)$ به $(i,n-i)$:

$$\frac{(n-i+i)!}{(n-i)!i!} = \binom{n}{i}$$

- تعداد راه‌های P_2 از (n,n) به $(i,n-i)$:

$$\text{احتمال ملاقات} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{i}}{2^n \times 2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

نکته: در راه حل بالا از اتحاد وندریوند و اتحاد تقارن استفاده شده است.

در اتحاد وندریوند حالت خاص $m=n=r$ را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{i} = \binom{2n}{n}$$

در یک تورنمنت ورزشی، ۸ تیم شرکت دارند. هر برد +۱، تساوی ۰ و باخت -۱ امتیاز محسوب می‌گردد.

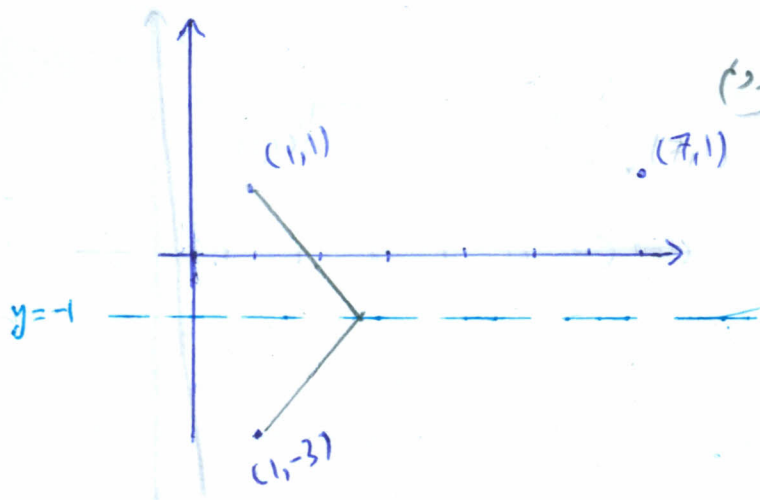
الف) در صورت نبود حالت تساوی، احتمال اینکه یک تیم مسخف در پایان مجموع امتیاز +۱ کسب کند و در طول مسابقات هرگز مجموع امتیاز منفی نداشته باشد، چند راست؟

ب) در صورت وجود حالت تساوی، درگاهانه این تیم مسخف، احتمال اینکه این تیم مجموع امتیاز صفر کسب کرده باشد، چند راست؟

$$\left. \begin{array}{l} \nearrow \text{ برد } u \\ \searrow \text{ باخت } d \\ \rightarrow \text{ تساوی } t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{نماد های} \\ \text{استعداد} \\ \text{سده} \end{array}$$

الف) - تعداد بازی های این تیم مسخف: ۷ بازی

• بازی اول حتماً برد است.



- می‌خواهیم از نقطه (۱، ۱) به (۷، ۱) برویم (با شرط ذکر شده در الف)

$$\begin{cases} u + d = 6 \\ u - d = 0 \end{cases} \Rightarrow u = d = 3 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{کل راه ها: } \frac{6!}{3!3!} \text{ (از (۱، ۱) به (۷، ۱))}}$$

راه های که خط $y = -1$ را قطع یا بر آن می‌ایستند

$$\begin{cases} u + d = 6 \\ u - d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = 5 \\ d = 1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{راه های غیر مجاز} = \frac{6!}{5!1!} \text{ (از (۱، -۳) به (۷، ۱))}}$$

$$\text{راه های مجاز و مقبول} = \frac{6!}{3!3!} - \frac{6!}{5!1!} = 14 \Rightarrow \boxed{\text{احتمال} = \frac{14}{2^7}}$$

(ب) چون مجموع امتیاز کب سه برای شش صفر است پس جایابی بصورت زیر خواهد بود:

$$(0,0) \rightarrow (7,0)$$

$$\begin{cases} u+d+t=7 \\ u-d=0 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{7-t}{2} \quad d = \frac{7-t}{2}$$

if $t=0 \Rightarrow$ غلط

if $t=1 \Rightarrow u=d=3 \Rightarrow$ کل حالت $= \frac{7!}{1!3!3!} = 140$

if $t=2 \Rightarrow$ غلط

if $t=3 \Rightarrow u=d=2 \Rightarrow$ کل حالت $= \frac{7!}{3!2!2!} = 210$

if $t=4 \Rightarrow$ غلط

if $t=5 \Rightarrow u=d=1 \Rightarrow$ کل حالت $= \frac{7!}{1!1!5!} = 42$

if $t=6 \Rightarrow$ غلط

if $t=7 \Rightarrow u=d=0 \Rightarrow$ کل حالت $= \frac{7!}{7!0!0!} = 1$

$$\text{امکان} = \frac{1 + 42 + 210 + 140}{3^7} = \frac{393}{3^7}$$