III) جواب غیرعادی Singular solution

جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل جوابی است که تحت هیچ نوع شرایطی یا شرط مشخصی از جواب عمومی حاصل نمی‌شود.

نکته: می‌توان نشان داد منحنی نمایش جواب غیرعادی بر تمام منحنی‌ها جواب عمومی مماس است.

همچنین این جواب را منحنی پوش جواب‌ها عمومی معادله دیفرانسیل گوییم.

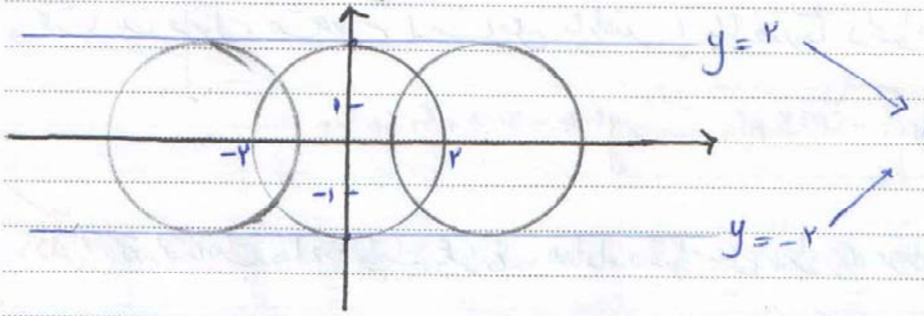
Ex) معادله دیفرانسیل $y^2(1+(y')^2)=4$، دارای جواب عمومی زیر است.

* مرتبه ۱ است پس یک ثابت دارد. دایره به مرکز $(c,0)$ و $r=2$ $\quad (x-c)^2+y^2=4$

برای اینکه ثابت کنیم جواب است یکبار مشتق می‌گیریم و جایگذاری می‌کنیم.

$$2(x-c)+2yy'=0 \to y'=-\frac{(x-c)}{y}$$

$$y^2(1+y'^2)=y^2\left(1+\frac{(x-c)^2}{y^2}\right)=4 \to y^2+(x-c)^2=4$$



مثال) معادله دیفرانسیل $y = xy' + \frac{1}{y'}$ دارای جواب عمومی $y = cx + \frac{1}{c}$ می‌باشد.

چرا؟

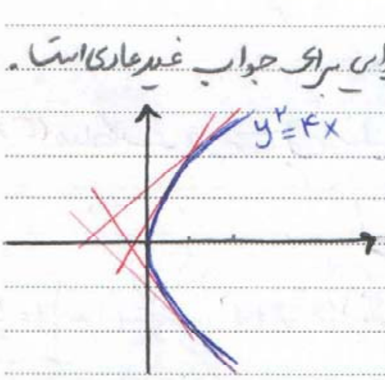
$y' = c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y = cx + \frac{1}{c}$ ✓

ادعا می‌کنیم $y^2 = 4x$ جواب غیرعادی است.

$2yy' = 4 \to y' = \frac{2}{y} \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$y = \frac{2x}{y} + \frac{1}{2/y} = \frac{2x}{y} + \frac{y}{2} \to \frac{y}{2} = \frac{2x}{y} \to y^2 = 4x$ ✓

$y^2 = 4x$ از جواب عمومی به دست نمی‌آید پس $y^2 = 4x$ کاندیدای برای جواب غیرعادی است.



همه خطوط مماس بر منحنی $y^2 = 4x$ هستند.

دسته‌بندی دیگر معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل خطی

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n به صورت زیر است:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = r(x)$$

که در آن $a_n(x), \dots, a_0(x)$ ضرایب معلوم هستند همچنین $r(x)$ نیز تابعی معلوم است.

در غیر این صورت معادله دیفرانسیل را غیرخطی گوییم.   خطی $y'' + x^2 y = 1$

تذکر: معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند. $\sin(y')$: غیرخطی $y^{(3)} + \sin(y') = x^2$

$y = xy' + \frac{1}{y'}$ غیرخطی ← . توان y' ، ۱- است.

yy' ظاهر شود غیرخطی $y(1+y') = 4$ | توان y' ، ۲ است و $y'^2 y$ است. $y(1+y'^2) = 4 \to$ غیرخطی

جلسه ۳ ـ ۱۹ اسفند

تشکیل معادله دیفرانسیل از روی جواب عمومی آن

فرض کنیم $y=F(x,c)$ یک دسته از منحنی ها باشند که در آن c ثابت دلخواه است.

می خواهیم معادله دیفرانسیل را بیابیم که جواب آن $y=F(x,c)$ جواب عمومی آن باشد. بدین منظور باید از روابط زیر بتوان ثابت c را حذف نمود.

$$\left\{\begin{array}{l} y=F(x,c) \\ y'=\dfrac{\partial F(x,c)}{\partial x} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{با حذف } c} \text{رابطه بین } \underline{\underline{y}},\ \underline{\underline{y'}},\ x \text{ حاصل می شود.}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x$ *

تاکید بر مشتق گیری نسبت به x

Ex) معادلات دیفرانسیل نظیر منحنی های زیر را بدست آورید.

$$\text{I)}\quad y=\overbrace{x^3+c}^{F(x,c)} \xrightarrow{d/dx} \boxed{y'=3x^2}$$

$$\text{II)}\quad y=\underbrace{cx^2+1}_{F(x,c)} \xrightarrow{d/dx} y'=2cx \rightarrow \frac{y'}{2x}=c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y=\frac{y'}{2x}(x^2)+1=\frac{xy'}{2}+1 \rightarrow \boxed{y=\frac{xy'}{2}+1}$$

تذکر: درحالتی که دسته منحنی داده شده به صورت زیر باشد: $y=F(x,c_1,c_2,c_3,\dots,c_n)$

آنگاه باید از معادلات زیر ثابت های c_1 تا c_n را حذف نمائیم و به معادله دیف موردنظر برسیم.

$$\left.\begin{array}{l} y=F(x,c_1,\dots,c_n) \\ y'=\dfrac{\partial F(x,c_1,\dots,c_n)}{\partial x} \\ \vdots \\ y^{(n)}=\dfrac{\partial^n F(x,c_1,\dots,c_n)}{\partial x^n} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با حذف } c} (\text{رابطه بین } x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

۸

2019 ۱۴۴۰

فروردین ۹۸ پنجشنبه

Mar 28 ۲۱ رجب

EX) معادله دیفرانسیل را بیابید.

I) $y=2x^2+c_1x+c_2 \xrightarrow{d/dx} y'=4x+c_1 \xrightarrow{d/dx} \boxed{y''=4}$

II) $y=(c_1+c_2x)e^x \xrightarrow{d/dx} \begin{cases} y'=c_2e^x+(c_1+c_2x)e^x \xrightarrow{d/dx} y''=\underbrace{c_2e^x}_{y'-y}+\underbrace{c_2e^x+(c_1+c_2x)e^x}_{y'} \\ y'=c_2e^x+y \to c_2e^x=y'-y \end{cases}$

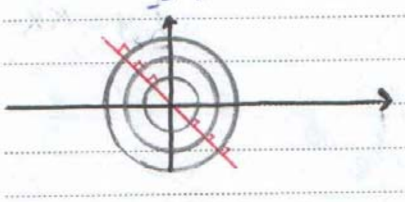
$y''=(y'-y)+y'=2y'-y \to \boxed{y''-2y'+y=0}$

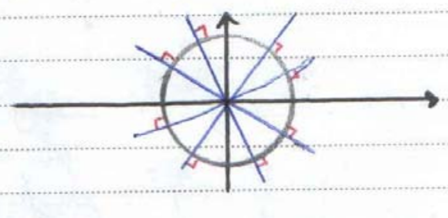
مسیرهای قائم orthognal trajectories (متعامد)

دو دسته منحنی $x^2+y^2=c$ و $y=Kx$ را در نظر بگیرید که در آن K, c ثابت‌های دلخواه هستند.

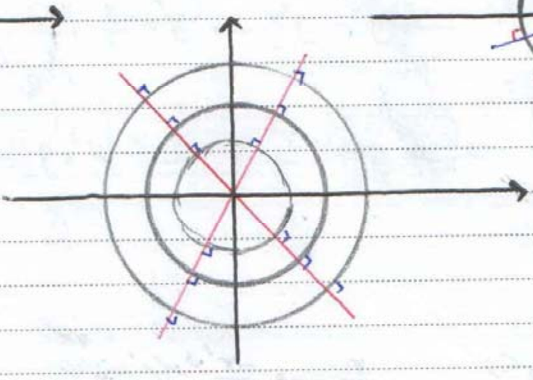
واضح است که هر منحنی از یک دسته بر تمام منحنی‌ها دسته دیگر عمود است.

هرگاه چنین ارتباطی میان دو دسته برقرار باشد یک دسته را مسیرهای قائم دسته دیگر گوییم.





$y_1'(x)\, y_2'(x)=-1$



۹

2019 ۱۴۴۰

فروردین ۹۸ جمعه

Mar 29 ۲۲ رجب

* ابتدا معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی داده شده را بدست می‌آوریم.
سپس در معادله دیف حاصل، y' را با $\frac{-1}{y'}$ جایگزین می‌کنیم. جواب معادله دیف جدید همان مسیرهای قائم دسته منحنی اولیه می‌باشد.

EX) مسیرهای قائم دسته منحنی زیر را بدست آورید. $\{x^2+y^2=c$

$$x^2+y^2=c \xrightarrow{d/dx} 2x+2yy'=0 \xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y'}} x+y\left(\frac{-1}{y'}\right)=0 \to y'=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \to \ln y=\ln x+\overset{\ln K}{c}$$

$$\ln y=\ln x+\ln K=\ln Kx \longrightarrow y=Kx$$

روش یکی از دانشجوها: $\frac{y'}{x}=\frac{y}{x^2} \longrightarrow \frac{yx-y}{x^2}=0 \longrightarrow \frac{y}{x}=K \to y=Kx$

$\{y=Kx$

$$y=Kx \xrightarrow{d/dx} y'=K \longrightarrow y=y'x \to y'=\frac{y}{x} \xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y'}} \frac{-1}{y'}=\frac{y}{x} \to y'=\frac{-x}{y}$$

$$y\,dy=-x\,dx \xrightarrow{\int} \frac{y^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+c \to x^2+y^2=c^*$$

* مختصات قطبی (r,θ) $r=F(\theta,c)$ $\frac{r}{r'} \to \frac{-r'}{r}$ جایگزین می‌شود.