دنباله‌ها:

فرض کنید $S=\{k,k+1,\dots\}\subseteq \mathbb{Z}$. تابع $a:S\to \mathbb{R}$

را یک دنباله گوییم و معمولاً آن را با نمادهای زیر نمایش می‌دهیم:

$$\{a_n\}_{n=k}^{\infty} \quad , \quad (a_n)_{n=k}^{\infty}$$

$$\{a_n\} \quad , \quad (a_n)$$

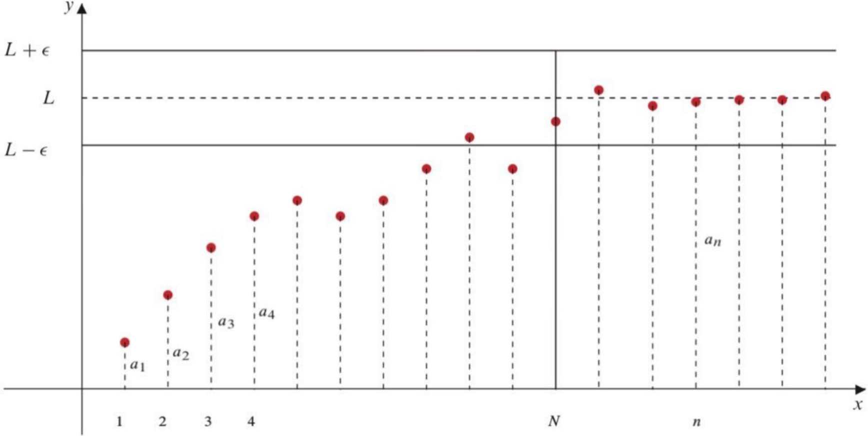
مثال: $a_n=(-1)^n$; $a_n=n^2$; $a_n=\frac{1}{n}$

* دنباله‌ی (a_n) را همگرا به a گوییم، اگر

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists N > 0 : \quad \forall n \ (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

و می‌نویسیم: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$.

* حد دنباله، در صورت وجود، یکتاست.


y
$L + \epsilon$
L
$L - \epsilon$
a_1
a_2
a_3
a_4
a_n
1
2
3
4
N
n
x

* قبلاً قضیه‌ی فشردگی را برای دنباله‌ها دیدیم.

گزاره: اگر (a_n) و (b_n) دنباله‌هایی باشند که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \,،$$

آن‌گاه داریم:

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + c b_n) = a + cb \; ; \; c \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

3) اگر $b \neq 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.

* گزاره: اگر $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ و $\lim_{n \to \infty} b_n = b$

و N ای موجود باشد که برای هر $n \geq N$، داشته باشیم:

$a_n \leq b_n$، آن‌گاه: $a \leq b$.

* گزاره: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$.

(آ) دنبالهٔ $\{a_n\}$ از پایین به L کراندار است و L کران پایینی $\{a_n\}$ است اگر به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_n \geq L$. دنباله از بالا به M کراندار است و M یک کران بالایی است اگر به‌ازای هر چنین n، $a_n \leq M$.

دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار است اگر از بالا و پایین کراندار باشد.

گزاره: اگر (a_n) دنباله‌ای کران‌دار باشد و $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$،

آن‌گاه: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

*** تعریف**: فرض کنید $(a_n)_{n\in S}$ یک دنباله باشد که

$S=\{k, k+1, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$. همچنین فرض کنید $T=\{n_1, n_2, \dots\}$

که $n_1 < n_2 < \dots$ و $T \subseteq S$.

در این صورت، $(a_n)_{n\in T}$ را یک زیردنباله‌ی $(a_n)_{n\in S}$

گوییم.

مثال: (a_n) : $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10, 11, 12, \dots$

زیردنباله‌ای از a_n: $3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 100, 101, \dots$

Scanned with CamScanner

قضیه: دنباله (a_n) همگرا به a است اگر و تنها اگر هر زیردنباله از آن مانند (a_{n_j}) به a همگرا باشد. (توجه باید کاربرد مهم قضیه برای زمانی است که می‌خواهیم ثابت کنیم (a_n) واگراست بنابه قضیه کافی است نشان دهیم، زیردنباله‌ای از (a_n) موجود که واگراست یا دو زیردنباله از آن موجود که به دو عدد مختلف همگراست)

مثال: $a_n=(-1)^n$ واگراست زیرا $(a_{2k})_{k=0}^{+\infty}$ همگرا به یک است و $(a_{2k+1})_{k=0}^{+\infty}$ همگرا به (-1) است.

پس طبق نکته بالا a_n واگراست.

* **قضیه**: اگر (a_n) دنباله‌ای همگرا باشد، آن‌گاه کران دار است.

* **توجه**: عکس مطلب فوق برقرار نیست.

مثال: $a_n = (-1)^n$ کران دار است ولی واگرا است.

دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی است اگر به‌ازای هر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a_n \leq a_{n+۱}$؛ نزولی است اگر به‌ازای هر چنین n، $a_n \geq a_{n+۱}$.
گوییم دنباله یکنواست اگر صعودی یا نزولی باشد.

* قضیه :

1. اگر (a_n) دنباله‌ای صعودی و از بالا کران‌دار باشد، آن‌گاه (a_n) همگراست.

2. اگر (a_n) دنباله‌ای نزولی و از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه (a_n) همگراست.

* یادآوری از استقرای ریاضی :

فرض کنید $P(n)$ یک گزاره‌ی ریاضی باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم:

«برای هر $n \geq n_0$، گزاره‌ی $P(n)$ درست است.»

1. درستی $P(n_0)$ را بررسی می‌کنیم.
2. فرض می‌کنیم $P(n)$ برقرار باشد.
3. نشان می‌دهیم $P(n+1)$ درست است.

مثال فرض کنید a_n به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a_۱ = ۱,\ a_{n+۱} = \sqrt{۶ + a_n} \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots).$$

نشان دهید که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد و مقدارش را بیابید.

حل. ملاحظه می‌کنیم که $a_۱ < \sqrt{۷} = \sqrt{۶+۱} = a_۲$. هرگاه $a_{k+۱} > a_k$، آنگاه

$$a_{k+۲} = \sqrt{۶ + a_{k+۱}} > \sqrt{۶ + a_k} = a_{k+۱};$$

در نتیجه، طبق استقرا، $\{a_n\}$ صعودی است. حال ملاحظه می‌کنیم که $a_۱ = ۱ < ۳$. هرگاه $a_k < ۳$، آنگاه

$$a_{k+۱} = \sqrt{۶ + a_k} < \sqrt{۶ + ۳} = ۳;$$

در نتیجه، طبق استقرا، به‌ازای هر n، $a_n < ۳$. چون $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است، $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ وجود دارد. چون $\sqrt{۶+x}$ تابع پیوسته‌ای از x است، داریم

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_{n+۱} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{۶ + a_n} \\ &= \sqrt{۶ + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{۶ + a}. \end{aligned}$$

لذا، $a^۲ = ۶ + a$ یا $a^۲ - a - ۶ = ۰$ یا $(a-۳)(a+۲) = ۰$. این معادلهٔ درجهٔ دو دارای ریشه‌های $a = ۳$ و $a = -۲$ است. چون به‌ازای هر n، $a_n \geq ۱$، باید داشته باشیم $a \geq ۱$. بنابراین، $a = ۳$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = ۳$.

گزاره: فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. اگر $a_n = f(n)$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l.$$

عکس مطلب بالا درست نیست:

مثال:

$$\begin{cases} f(x) = \sin(\pi x) \\ a_n = f(n) = \sin(\pi n) \end{cases}$$

به وضوح، $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$، در صورتی که حد $f(x)$

وقتی $x \to +\infty$، موجود نیست.

مثال ۷. $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan^{-1}(1/n)$ را حساب کنید.

حل. در این مثال بهترین کار تعویض جملهٔ nم دنباله با تابع نظیر از متغیر حقیقی x وگرفتن حد وقتی $x \to \infty$ می‌باشد. ما قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(1/x^2)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.
\end{aligned}$$

□

قضیه .

(آ) هرگاه $|x| < ۱$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x^n = ۰$.

(ب) هرگاه x عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = ۰$.

مثال $\lim_{n\to\infty} \frac{۳^n + ۴^n + ۵^n}{۵^n}$ را بیابید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۳^n + ۴^n + ۵^n}{۵^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{۳}{۵}\right)^n + \left(\frac{۴}{۵}\right)^n + ۱ \right]$$
$$= ۰ + ۰ + ۱ = ۱.$$

- مثال :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n}\, n^{10}}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{n^{10}}{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-9)}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{2^{n-10}}{(n-10)!}}_{\to 0} \times \underbrace{2^{10}}_{}\right)$$

$$= \boxed{0}$$

* گزاره : فرض کنید $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای باشد که زیردنباله‌های $(a_{2k})_{k=0}^{\infty}$

و $(a_{2k+1})_{k=0}^{\infty}$ از آن، به a همگرا باشند.

در این صورت، (a_n) نیز به a همگراست.