تمرین تحویلی شماره ۲ فرض کنید $\alpha = \alpha(s)$ یک خم با پارامتر طول قوس است؛ یعنی به ازای هر s داریم $||\alpha'(s)|| = ۱$. بعلاوه فرض کنید κ و τ به ترتیب انحنا و تاب خم α هستند. ثابت کنید بردار مماس یکه خم α در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\mathbf{T}' \cdot (\mathbf{T}'' \times \mathbf{T}''') = \kappa^{۵}(\frac{\tau}{\kappa})',$$

که در آن $'$ به معنای مشتق نسبت به پارامتر s است.

پاسخ: با توجه به اینکه خم α بر حسب طول قوس پارامتری شده است، می‌توانیم از شکل استاندارد فرمول‌های فرنه استفاده کنیم.

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s) \qquad \text{(۰,۵ نمره)}$$

$$\mathbf{T}''(s) = \kappa'(s)\mathbf{N}(s) + \kappa(s)\mathbf{N}'(s) = -\kappa^{۲}(s)\mathbf{T}(s) + \kappa'(s)\mathbf{N}(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{B}(s). \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\mathbf{T}'''(s) = -۳\kappa(s)\kappa'(s)\mathbf{T}(s) + \Big(\kappa(s)'' - \kappa(s)^{۳} - \kappa(s)\tau(s)^{۲}\Big)\mathbf{N}(s) + \Big(۲\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\Big)\mathbf{B}(s). \text{(۱,۵ نمره)}$$

حال با توجه به اینکه بردارهای $\mathbf{T}(s)$، $\mathbf{N}(s)$ و $\mathbf{B}(s)$ دو به دو بر هم عمودند و یکه نیز هستند، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{T}'' \times T''' = \lambda\mathbf{T}(s) + \kappa^{۴}(\frac{\tau}{\kappa})'\mathbf{N}(s) + \mu\mathbf{B}(s), \qquad \text{(۱,۵ نمره)}$$

که در آن

$$\lambda = ۲\tau\kappa'^{۲} + \tau'\kappa'\kappa - \tau\kappa\kappa'' + \tau\kappa^{۴} + \tau^{۳}\kappa^{۴}, \;\; \mu = -\kappa^{۲}\kappa'' + \kappa^{۵} + \tau^{۲}\kappa^{۳} + ۳\kappa\kappa'^{۲}$$

بنابراین

$$\mathbf{T}' \cdot T'' \times T''' = \kappa^{۵}(\frac{\tau}{\kappa})', \qquad \text{(۰,۵ نمره)}$$