فصل ۸ - اصل شمول و عدم شمول
(اصل شمول و طرد)
بخش دوم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

8

The Principle of Inclusion and Exclusion

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

تمرین ۱۱. (از تمرینات ۳.۸ صـ ۲۳۷)

۱۰ نفر در سمیناری شرکت کرده‌اند. هر یک از آنها به هنگام ورود به سالن سخنرانی پالتو و کیف خود را به مسئول سالن تحویل میدهد. در پایان سخنرانی، به هر یک از این ۱۰ نفر به تصادف پالتو و کیفی داده می‌شود.

(الف) به چند طریق می‌توان این پالتو و کیف‌ها را چنان توزیع کرد که هیچ یک از این ۱۰ نفر کیف یا پالتوی خود را دریافت نکند؟
(No one gets either of his coat and bag)

(ب) به چند طریق می‌توان آنها را چنان توزیع کرد که هیچ یک از این ۱۰ نفر هم پالتو و هم کیف خود را دریافت نکند؟
(No one gets both of his coat and bag)

(الف)

$$d_{10} \times d_{10}$$

نکته: $d_{10} = 10!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{10!}\right]$

(ب) c_i: نفر iام هم پالتو و هم کیف خود را بگیرد.
$1 \le i \le 10$

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_{10}) = S_0 - S_1 + S_2 \cdots + S_{10}$$

$$= (10!)^2 - \binom{10}{1}(9!)^2 + \underbrace{\binom{10}{2}(8!)^2}_{} - \cdots + \binom{10}{10}(0!)^2$$

به عنوان مثال، در اینجا 2 نفر را انتخاب می‌کنیم (از میان ۱۰ نفر) و کیف و پالتوی خودشان اشتباهی به آنها تحویل داده می‌شود و باقی کیف‌ها (به !8 حالت) و باقی کت‌ها (به !8 حالت) توزیع می‌گردد.

تمرین ۸ (از تمرینات تکمیلی) ص ۵۴۸

با استفاده از نتیجه قضیه ۲.۸ ، ثابت کنید تعداد طرقی که می‌توانیم s شیء مختلف را در n ظرف متمایز چنان قرار دهیم که m تا از ظروف هر یک حاوی (دقیقاً) r شیء باشد برابر است با:

$$\frac{(-1)^m \, n! \, s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i (n-i)^{s-ir}}{(i-m)!\,(n-i)!\,(s-ir)!\,(r!)^i}$$

مروری بر قضیه ۲.۸

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} \cdots + (-1)^{t-m} \binom{t}{t-m} S_t$$

$$= \sum_{i=0}^{t-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} S_{m+i} = \sum_{i=m}^{t} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} S_i$$

C_i: ظرف iام دقیقاً دارای r شیء باشد. (بنابراین حداکثر تعداد شروط برابر با n است)

$1 \leq i \leq n$

$$E_m = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} S_i$$

حال به محاسبه S_i می‌پردازیم:

$$S_i = \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{انتخاب } i \text{ ظرف از } n \text{ ظرف (یعنی انتخاب } i \text{ شرط از } n \text{ شرط ممکن)}} \overbrace{\binom{s}{r}\binom{s-r}{r} \cdots \binom{s-(i-1)r}{r}}^{\text{قرار دادن } r \text{ شیء متمایز در هر یک از } i \text{ ظرف انتخابی}} \underbrace{(n-i)^{s-ir}}_{\text{توزیع باقیمانده اشیاء در باقیمانده ظروف}}$$

$$S_i = \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \times \frac{s!}{r!\,\cancel{(s-r)!}} \times \frac{\cancel{(s-r)!}}{r!\,\cancel{(s-2r)!}} \times \cdots \times \frac{\cancel{(s-(i-1)r)!}}{r!\,(s-ir)!} \times (n-i)^{s-ir}$$

$$S_i = \frac{n!\,s!}{(n-i)!\; i!\,(r!)^i\,(s-ir)!}\,(n-i)^{s-ir}$$

$$E_m = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} S_i$$

$$= \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \underbrace{\frac{\cancel{i!}}{(i-m)!\,m!}}_{\binom{i}{m}} \times \underbrace{\frac{n!\,s!}{(n-i)!\,\cancel{i!}\,(r!)^i\,(s-ir)!}\,(n-i)^{s-ir}}_{S_i}$$

$$= \frac{n!\,s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \frac{(n-i)^{s-ir}}{(i-m)!\,(r!)^i\,(n-i)!\,(s-ir)!}$$

$\Updownarrow$ با ضرب صورت و مخرج کسر فوق در $(-1)^m$ داریم:

$$E_m = (-1)^m \frac{n!\,s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i\,(n-i)^{s-ir}}{(i-m)!\,(r!)^i\,(n-i)!\,(s-ir)!}$$

تمرین ۱۴ (از گریمالدی ت ۸.۳) ص ۵۳۸

الف) به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱، ۲، ...، n را در یک خط چنان مرتب کرد که هیچ یک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ۳۴، ....، $(n-1)n$ روی ندهد.

ب) نشان دهید جواب الف برابر است با: $d_{n-1}+d_n$ (d_n تعداد پریش‌های ۱ تا n را نشان می‌دهد)

الف) C_i : رخداد الگوی $i(i+1)$ در جایگشت از n عدد

$1 \le i \le n-1$

$$N(\bar{C}_1\bar{C}_2\cdots\bar{C}_{n-1}) = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^{n-1}S_{n-1}$$

$$= N - \sum_{1\le i\le n-1} N(C_i) + \sum_{1\le i<j\le n-1} N(C_iC_j) - \cdots$$

$$= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)!$$

$$\cdots + (-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-(n-1))!$$

$0 \le k \le n-1$

ب)

$$d_{n-1}+d_n =$$

$$\Big[(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}(n-k)! + \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}((n-1)-(n-2))!$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}((n-1)-(n-1))!\Big]$$

$$+$$

$$\Big[n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))!$$

$$+ (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$$

برای اینکه ثابت کنم جواب الف با $d_{n-1}+d_n$ معادل است باید ثابت کنم ضرایب جملات متناظر الف و ب مساویند.

جمله‌ی $(n-K)!$ را در نظر می‌گیریم:

ضریب $(n-k)!$ در الف: $(-1)^K\binom{n-1}{K}$

ضریب $(n-K)!$ در ب: $(-1)^{K-1}\binom{n-1}{K-1}+(-1)^K\binom{n}{K}$

$$=(-1)^{K-1}\left[\binom{n-1}{K-1}-\binom{n}{K}\right]=(-1)^K\binom{n-1}{K}$$

(اثبات با استفاده از اتحاد پاسکال)

$\Rightarrow$ ضریب جمله‌ی $(n-K)!$ در الف $=$ ضریب جمله‌ی $(n-K)!$ در $d_{n-1}+d_n$

توجه کنیم که ضرایب جملات اول و آخر در حاصل $d_{n-1}+d_n$ با ضرایب جملات اول و آخر در حاصل الف متناظر هستند.

تمرین ۱۸ - (تمرینات ۳.۸) ص ۵۳۸

به چند طریق می‌توان اعداد صحیح $1, 2, \dots, n$ را روی دایره‌ای، در جهت عکس عقربه‌های ساعت مرتب کرد که هیچ یک از الگوهای 12، 23، ....، $(n-1)n$ و $n1$ رخ ندهد؟

C_i: الگوی $i(i+1)$ در جایگاه iام رخ دهد، $1 \leq i \leq n-1$ + C_n: الگوی $n1$ رخ دهد.

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\cdots\overline{C_n})=S_0-S_1+S_2-\cdots$$

$$=\binom{n}{0}(n-1)!-\binom{n}{1}(n-2)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(0)!+(-1)^n\binom{n}{n}$$

تمرین ۱۱ (از تمرینات تکمیلی) ص ۵۴۹

الف) n شیء متمایز مفروضند. به چند طریق می‌توانیم r تا از این اشیاء را چنان برگزینیم که هر گزینش حاوی m شیء مشخص از n شیء مفروض باشد؟ ($m \leq r \leq n$).

ب) با استفاده از اصل شمول و طرد، ثابت کنید به ازای $m \leq r \leq n$ داریم:

$$\binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$$

الف) یعنی از اول m شیء مشخص را انتخاب کرده‌ام؛ پس به انتخاب $r-m$ شیء از $n-m$ شیء می‌پردازیم:

$$\text{تعداد راه‌ها}: \binom{n-m}{r-m} = \binom{n-m}{(n-m)-(r-m)} = \binom{n-m}{n-r}$$

(اتحاد تقارن)

ب) مجموعهٔ اشیاء را بصورت روبرو در نظر بگیرید: $O = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o'_1 \dots o'_{n-m}\}$

c_i: در یک انتخاب r عضوی از n شیء، o_i حضور ندارد.
$1 \leq i \leq m$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_m) = S_0 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^m S_m$$

$$= \binom{n}{r} - \binom{m}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{m}{2}\binom{n-2}{r} - \cdots + \cdots$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{m}\binom{n-m}{r}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$$

طبق اصل شمارش مضاعف پاسخ الف با ب برابر است:
$$\binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$$