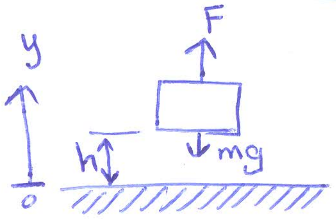
فصل ۸ - انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی

۱ جسمی به جرم m توسط نیروی F از سطح میز بالا برده می‌شود. نیروی F با افزایش ارتفاع y به صورت $F=2(ay-1)mg$ تغییر می‌کند که در اینجا a یک ثابت مثبت است. کار انجام شده به وسیلهٔ نیرو و افزایش انرژی پتانسیل جسم را در میدان گرانش زمین طی نیمهٔ اول صعود آن پیدا کنید.



پاسخ:

می‌دانیم دو نیروی F و mg به جسم وارد می‌شود. لذا باید کار این دو نیرو برابر است با:

$$W=\int_0^h(\vec{F}+\vec{mg})\cdot\vec{dr}=\int_0^h(F_y-mg)\,dy=\int_0^h\left[2(ay-1)mg-mg\right]dy$$

$$=mg\int_0^h\left[2(ay-1)-1\right]dy=mg\int_0^h(2ay-3)\,dy=mg(ay^2-3y)\Big|_0^h$$

$$=mg(ah^2-3h) \qquad (1)$$

h ارتفاع صعود است. چون در ابتدا و انتهای مسیر سرعت صفر است. لذا $\Delta K=0$ می‌شود. و از قضیه کار و انرژی $W=\Delta K=0$ خواهد شد. از رابطهٔ (1) داریم:

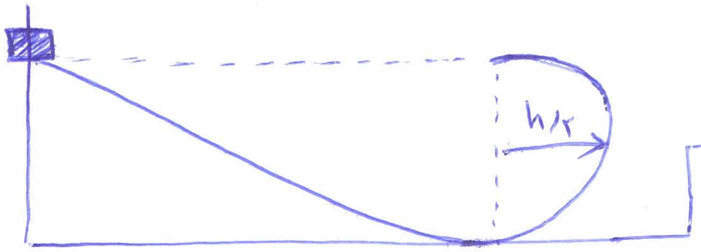
$$\Delta K=W=0 \Rightarrow mg(ah^2-3h)=0 \Rightarrow \begin{cases} h=0 & \times \\ h=\frac{3}{a} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

کار انجام شده توسط نیروی F در نصف مسیر برابر است با:

$$W_F=\int_0^{h/2}F_y\,dy=\int_0^{h/2}2(ay-1)mg=mg\int_0^{h/2}(2ay-2)\,dy=mg(ay^2-2y)\Big|_0^{\frac{h}{2}}=$$

$$\frac{-3mg}{4a}\xleftarrow{h=\frac{3}{a}}mg\left(\frac{ah^2}{4}-h\right)$$

۲ جسم کوچکی به جرم m مطابق شکل زیر از بالای سطح منحنی شیبداری به ارتفاع h به طرف پایین سر می‌خورد و سپس وارد نیم دایره‌ای به شعاع $h/2$ می‌گردد. فرض کنید اصطکاک قابل چشم پوشی باشد. سرعت جسم را در بالاترین نقطه از مسیر حرکت پرتابی خود بعد از جدا شدن از نیم دایره پیدا کنید.



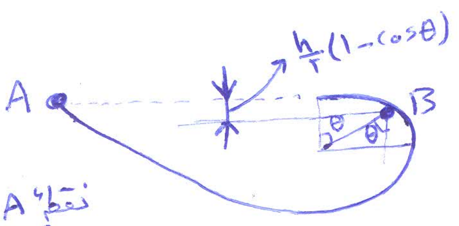
پاسخ:

فرض می‌کنیم جسم در نیمهٔ بالایی نیم دایره در زاویهٔ θ نسبت به خط قائم از سطح جدا می‌شود. می‌توان قانون دوم نیوتن را در دستگاه مختصات عمودی ـ مماسی به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{\Sigma F_n}_{N + mg\cos\theta} = \underbrace{m a_n}_{m\frac{v^2}{h/2}} \qquad (1)$$

حال به کمک پایستگی انرژی بین دو نقطهٔ شروع (A) و نقطهٔ جدا شدن از سطح (B) می‌توان نوشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \underbrace{mg\frac{h}{2}(1-\cos\theta)}_{\text{اختلاف انرژی پتانسیل بین نقاط A و B}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{انرژی جنبشی در B}} \quad (2) \Rightarrow \left[E_{U_A} = E_{K_B}\right]$$



معادلهٔ پایستگی بالا را در حالتی نوشتیم که سطح صفر $(y=0)$ را در نقطهٔ B قرار دادیم. در این حالت جسم در نقطهٔ B فقط انرژی جنبشی دارد.

نقطهٔ A:
$$E_K = 0$$
$$E_U = mg\frac{h}{2}(1-\cos\theta)$$

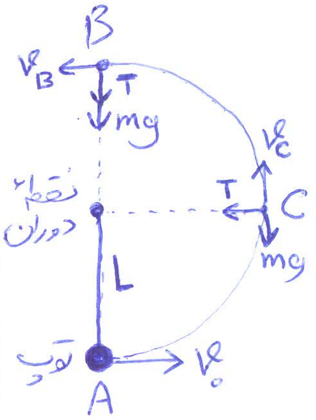
نقطهٔ B:
$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$
$$E_U = 0$$

در معادلهٔ (1) در لحظهٔ جدا شدن جسم از سطح $N=0$.

با حل معادلات (1) و (2) سرعت v و زاویهٔ θ بدست خواهد آمد.

$$\cos\theta = \frac{2v^2}{gh} \xrightarrow{(1)} v = \sqrt{\frac{gh}{3}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.1^\circ$$

۳ توپی به جرم m با یک ریسمان به طول L از نقطه‌ای آویزان است. می‌خواهیم نقطهٔ اتصال این نخ را طوری به حرکت درآوریم که توپ در طول دایره‌ای حول آن حرکت کند. چه سرعت حداقلی برای این کار لازم خواهد بود؟ کشش ریسمان را در لحظه‌ای که توپ در حالت افقی قرار دارد، پیدا کنید.



پاسخ:

حداقل سرعت اولیه در A مقداری است که کشش نخ در نقطهٔ B برابر صفر گردد (تنها نیروی وزن، شتاب عمودی می‌دهد).

با استفاده از قانون دوم برای نقطهٔ B می‌توان نوشت:

$$B: \sum F_n = m a_n \Rightarrow mg + T = m\frac{v_B^2}{L} \xrightarrow{T_B=0} v_B^2 = gL \quad (1)$$

حال با توجه به قضیه کار و انرژی برای دو نقطهٔ A و B می‌توان نوشت:

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = 2mgL + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{از معادلهٔ (1) و (2)}} v_0^2 = 4gL + gL = 5gL \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{5gL}}$$ الف

پس به کمک پایستگی انرژی، سرعت در نقطهٔ C را بدست می‌آوریم.

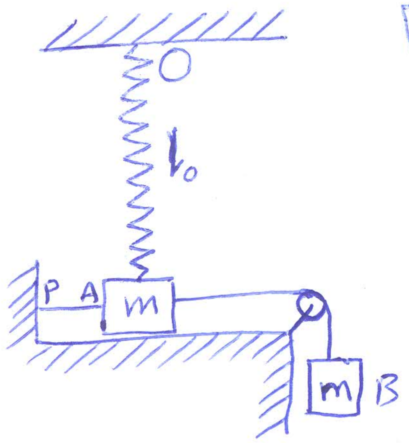
$$\text{قانون دوم برای نقطهٔ } C \Rightarrow T = m\frac{v_C^2}{L} \Rightarrow v_C = ?$$

$$E_A = E_C \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = mgL + \frac{1}{2} m v_C^2 \Rightarrow 5mgL - 2mgL = m v_C^2 \rightarrow v_C^2 = 3gL$$

$$T = m\frac{v_C^2}{L} = m\frac{3gL}{L} = \boxed{3mg}$$ ب

۴

جرم A مطابق شکل زیر روی سطح افق توسط ریسمانی به نقطه‌ی P متصل شده است.
جرم جسم A با جرم جسم B برابر و جسم A با یک فنر سبک که در وضعیت تعادل (بدون تغییر طول) قرار دارد به نقطه‌ی O متصل شده است. طول فنر $l_0 = 50cm$ و سختی آن $K = \frac{5mg}{l_0}$ می‌باشد که در آن m جرم جسم است. ریسمان PA پاره می‌گردد و جرم A شروع به حرکت می‌کند. سرعت آن را هنگامی که از صفحه جدا می‌شود، بیابید.



پاسخ:

فرض کنیم بعد از پاره شدن نخ PA، جرم A به اندازه x جابه جا شود. در نتیجه جرم B نیز به اندازه‌ی x پایین می‌آید. لذا به کمک پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$E_{t_1=0} = E_{t_2} \Rightarrow m_B g x = \frac{1}{2}k(L-L_0)^2 + \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}m_B v^2$$

در لحظه‌ی ابتدایی ($t_1=0$) تنها انرژی سیستم فقط مربوط به انرژی پتانسیل جسم B است. در این لحظه، جسم A ساکن و فنر در حالت تعادل است.

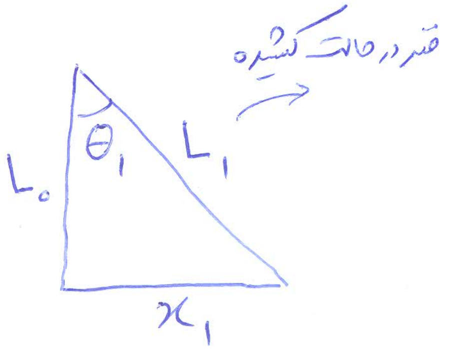
در لحظه‌ی t_2، جرم B به سطح پتانسیل صفر فرض می‌رسد و جسم A به سرعت v و همچنین جسم B نیز به سرعت v و فنر تحت کشش قرار می‌گیرد.

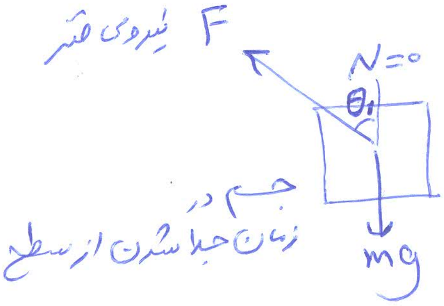
با ساده سازی معادله‌ی بالا

$m_A = m_B = m$

$$mgx = \frac{1}{2}k(L-L_0)^2 + mv^2 \quad (1)$$

از طرفی در لحظه‌ای که جسم A از سطح جدا می‌شود داریم $N=0$. فرض می‌کنیم در این لحظه طول فنر L_1 باشد. حال دیاگرام نیرو را رسم می‌کنیم.





$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F\cos\theta_1 + \cancel{N} = mg \Rightarrow F\cos\theta_1 = mg \quad (2)$$

نیروی فنر $F = K(L_1 - L_0) = \frac{5mg}{L_0}(L_1 - L_0) \quad (3)$ $\qquad \cos\theta_1 = \frac{L_0}{L_1} \quad (4)$

از حل معادلات (2) و (3) و (4) مقادیر L_1 و x_1 بدست می‌آیند:

$$L_1 = \frac{5}{4}L_0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{L_1^2 - L_0^2} = \frac{3}{4}L_0$$

به کمک رابطهٔ (1) در لحظهٔ جدا شدن می‌توان نوشت:

$$mgx_1 = \frac{1}{2}K(L_1 - L_0)^2 + mv_1^2 \Rightarrow \frac{3}{4}mgL_0 = \frac{1}{2}\frac{5mg}{L_0}\left(\frac{L_0^2}{16}\right) + mv_1^2$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{19g\frac{L_0}{32}} = \boxed{1.72\ m/s}$$

۵) گلوله‌ای به جرم $m = 50g$ با سرعت اولیه $v_0 = 8\ \frac{m}{s}$ با زاویه $\theta_0 = 30^\circ$ بالای افق از پنجره‌ای به بیرون پرتاب شده است.

الف) انرژی جنبشی گلوله در نقطه اوج پرواز را تعیین کنید.

ب) تندی گلوله هنگامی که $3m$ پایین‌تر از پنجره قرار دارد را بدست آورید.

پاسخ:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$$

الف) در نقطه اوج سرعت عمودی صفر است

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2\theta_0 = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times 8^2 \times \cos^2 30 = \boxed{1{,}18\,J}$$

ب) از پایستگی انرژی داریم:

$$E_i = E_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 - mgh$$

فرض کرده‌ایم که در سطح پرتاب $U = 0$ است.

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh = 8^2 + 2(9{,}8)(3) \Rightarrow v_f = \boxed{11{,}08\ \frac{m}{s}}$$