ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

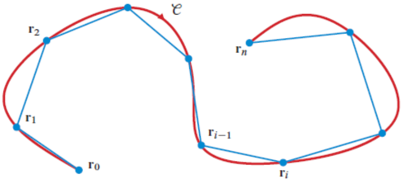
نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طول قوس

فرض کنید $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ یک منحنی است و

$$P: a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b, \quad r_i=r(t_i),\ i=0,1,\ldots,n$$



در این صورت، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های شکل بالا، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S_P=\sum_{i=1}^{n}|r_i-r_{i-1}|$$

اگر فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی در P به صفر میل کند، انتظار داریم که S_P به طول قوس r میل کند.

قضیه

فرض کنید $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد که مشتق آن پیوسته است.
آن‌گاه داریم

$$\text{طول قوس } r = S = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$

نتیجه 1

فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد. در این صورت، داریم

$$\text{طول قوس نمودار } f \text{ از } a \text{ تا } b = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

اثبات:

پارامتری‌سازی زیر از نمودار f را در نظر می‌گیریم:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

در این صورت، بنابر قضیه‌ی قبل داریم

$$\text{طول قوس } f = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b |(1, f'(t))|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

نتیجه 2

فرض کنید $r = g(\theta)$ نمایش قطبی یک خم در صفحه باشد، طوری‌که $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است. در این صورت، داریم

$$\text{طول قوس از } \alpha \text{ تا } \beta = S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2}\, d\theta$$

اثبات: نمایش پارامتری زیر را برای منحنی قطبی $r = g(\theta)$ در نظر می‌گیریم:

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\theta) = (g(\theta)\cos(\theta), g(\theta)\sin(\theta))$$

در این صورت، γ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است. بنابر قضیه‌ی قبل، داریم:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(\theta)|\, d\theta$$

ادامه‌ی اثبات نتیجه 2

داریم:

$$\gamma'(\theta) = \left(g'(\theta)\cos(\theta) - g(\theta)\sin(\theta), g'(\theta)\sin(\theta) + g(\theta)\cos(\theta)\right).$$

پس، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |\gamma'(\theta)|^2 &= \left(g'(\theta)\cos(\theta) - g(\theta)\sin(\theta)\right)^2 + \left(g'(\theta)\sin(\theta) + g(\theta)\cos(\theta)\right)^2 \\ &= (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))(g'(\theta))^2 + (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))(g(\theta))^2 \\ &= (g'(\theta))^2 + (g(\theta))^2 \end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(g'(\theta))^2 + (g(\theta))^2}\, d\theta$$

پارامتری‌سازی بر حسب طول قوس

قرارداد: از اینجا به بعد، فرض می‌کنیم که همه‌ی منحنی‌های مورد بحث، هموار هستند.

منحنی $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\text{طول قوس } \gamma \text{ از } a \text{ تا } b = L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

در این صورت، می‌توان تابع زیر را در نظر گرفت:

$$s : [a,b] \to [0,L], \quad s(t) = \text{طول قوس } \gamma \text{ از } a \text{ تا } t = \int_a^t |\gamma'(u)|\, du.$$

بنابراین، داریم $s'(t) = \underbrace{|\gamma'(t)| > 0}_{\gamma \text{ هموار است}}$، که نتیجه می‌دهد s تابعی اکیداً صعودی است.

از این‌رو، s تابعی یک‌به‌یک است. همچنین، از آنجا که $s(a) = 0$ و $s(b) = L$ و s تابعی پیوسته است، نتیجه می‌شود که s پوشا نیز هست.

بنابراین، s تابعی وارون‌پذیر است و اگر α وارون s باشد، آن‌گاه داریم

$$\alpha : [0, L] \to [a, b], \quad \alpha(s) = t, \quad \alpha'(s) = \frac{dt}{ds}$$

حال، منحنی زیر را پارامتری‌سازی γ بر حسب طول قوس می‌نامیم:

$$\widetilde{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\alpha(s))$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}|\widetilde{\gamma}'(s)| &= \left|(\gamma(\alpha(s)))'\right| = \left|\alpha'(s)\gamma'(\alpha(s))\right| = |\alpha'(s)||\gamma'(\alpha(s))| \\ &= \left|\frac{dt}{ds}\right| |\gamma'(t)| = \left|\frac{dt}{ds}\right| \left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dt}\right| = 1\end{aligned}$$

بنابراین، نکته‌ی زیر را ثابت کردیم:

- اگر خم γ بر حسب طول قوس پارامتری شده باشد، آن‌گاه داریم $|\gamma'| = 1$.

همچنین اگر $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ طوری باشد که $|\gamma'| = 1$، آن‌گاه داریم

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(u)|\, du = \int_0^t du = t$$

بنابراین، γ خودبه‌خود بر حسب طول قوس پارامتری شده است.

پس، نکته‌ی زیر را داریم:

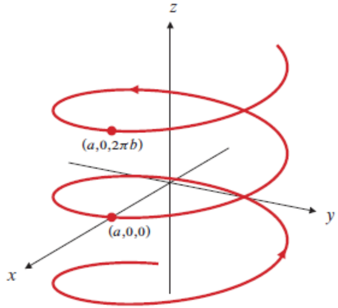
- خم $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ بر حسب طول قوس پارامتری شده است اگر و تنها اگر $|\gamma'| = 1$.

توجه: در بعضی از منابع، بعد از اینکه یک منحنی مثل $\gamma(t)$ بر حسب طول قوس پارامتری شد، منحنی حاصل به جای $\tilde{\gamma}(s)$ با $\gamma(s)$ نمایش داده می‌شود.

مثال

فرض کنید $a, b > 0$. مارپیچ مستدیر $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ را بر حسب طول قوس از نقطه‌ی $(a, 0, 0)$ و در جهت افزایش t پارامتری کنید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b) \implies$$
$$|\gamma'(t)|^2 = (-a\sin(t))^2 + (a\cos(t))^2 + b^2$$
$$= a^2\left((\sin(t))^2 + (\cos(t))^2\right) + b^2 = a^2 + b^2$$

پس با توجه به اینکه $\gamma(0) = (a, 0, 0)$، می‌توان نوشت:

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(u)|\, du = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = t\sqrt{a^2+b^2}$$

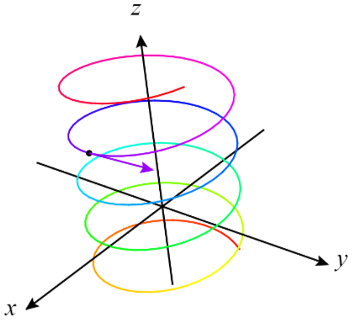
بنابراین، داریم $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و لذا $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})$، که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \widetilde{\gamma} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

بردار مماس یکه

فرض کنید $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. در این صورت، به‌ازای هر t، بردار $\gamma'(t)$ بر تصویر γ در t مماس است. بنابراین، بردار یکه‌ی زیر جهت حرکت را نشان می‌دهد:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$



قرارداد: از اینجا به بعد، همه‌ی منحنی‌هایی که در نظر گرفته می‌شوند، سه‌بار مشتق‌پذیر با مشتق سوم پیوسته هستند. همچنین، وقتی می‌نویسیم $\gamma(s)$، منظور این است که γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است.

۱. توجه می‌کنیم که اگر γ بر حسب طول قوس پارامتری شده باشد، آن‌گاه $|\gamma'| = 1$، و از این‌رو به‌ازای هر s داریم $T(s) = \gamma'(s) = \mathrm{v}(s)$.

۲. توجه کنید که T یک بردار یکه است، لذا $|T| = 1$، که نتیجه می‌دهد:

$$1 = |T(s)|^2 = T(s).T(s) \implies 0 = 2T'(s).T(s)$$

بنابراین، $T(s)$ و $T'(s)$ به‌ازای هر s بر هم عمودند.

انحنا

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. انحنای γ در هر $s \in [0, L]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa(s) = \left| \frac{d}{ds} T(s) \right|$$

همچنین، شعاع انحنای γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}, \quad \kappa(s) \neq 0$$

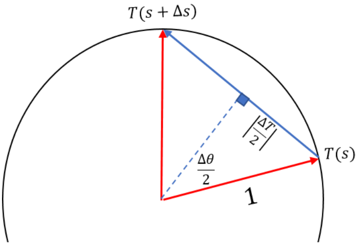
و اگر $\kappa(s) = 0$، آنگاه تعریف می‌کنیم $\rho(s) = \infty$.

قضیه

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. در این صورت، انحنا نمایانگر میزان چرخش مماس یکه است؛ یعنی

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d}{ds} \theta(s) \right|$$

اثبات:



داریم

$$\frac{|\Delta T|}{2} = \sin\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right)$$

پس وقتی $\Delta s \to 0$، داریم $\Delta \theta \to 0$.

ادامه‌ی اثبات قضیه

بنابراین، داریم:

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta T|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\left|\frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right| \frac{|\Delta\theta|}{2}}{|\Delta s|}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right| \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d}{ds}\theta(s)\right|$$

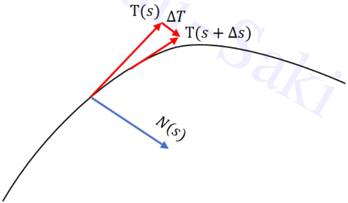
بردار قائم یکه‌ی اصلی

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. در این صورت، بردار قائم یکه‌ی اصلی γ را با نماد N، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = \rho(s) T'(s)$$

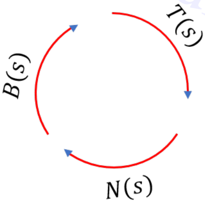
توجه کنید که $N(s)$ جهت تقعر تصویر منحنی را در $\gamma(s)$ نشان می‌دهد و $N(s)$ و $T(s)$ بر هم عمودند؛ زیرا قبلاً نشان دادیم که $T(s)$ بر $T'(s)$ عمود است.

بنابر شکل، ΔT به‌ازای Δs کوچک همان جهت $T'(s)$ را نشان می‌دهد که هم‌جهت با $N(s)$ است.



بردار قائم یکه‌ی دوم

فرض کنید که $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. در این صورت، **بردار قائم یکه‌ی دوم** γ با نماد B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

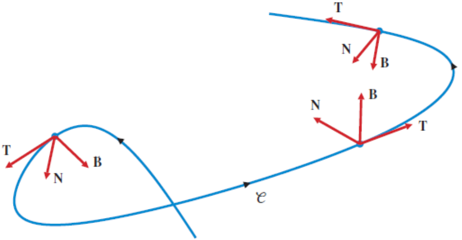


$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

کنج فرنه

فرض کنید که $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. در این صورت، سه‌تایی (T, N, B) را **کنج فرنه** برای γ می‌نامیم.

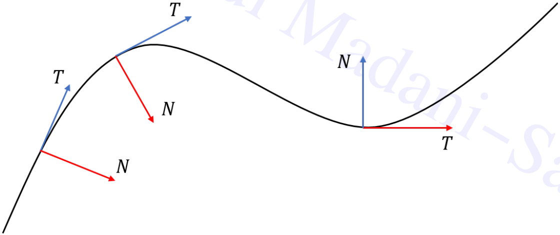
- به‌ازای هر $s \in [0, L]$، سه‌تایی $(T(s), N(s), B(s))$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.



- اگر $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ یک منحنی باشد، آن‌گاه می‌توانیم با برابر 0 قرار دادن مؤلفه‌ی سوم γ، یک منحنی در $\mathbb{R}^3$ داشته باشیم. پس، بردارهای مماس یکه، قائم یکه‌ی اصلی، انحنا و شعاع انحنا برای γ قابل تعریف خواهند بود.

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ یک خم است. در این صورت:

- دوتایی (T, N) را **کنج فرنه** برای γ می‌نامیم.
- به‌ازای هر $s \in [0, L]$، دوتایی $(T(s), N(s))$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.



مثال

فرض کنید $a > 0$ و خم $\mathcal{C}$ با نمایش پارامتری $r(t) = a\cos(t)i + a\sin(t)j$ به‌ازای $0 \le t \le 2\pi$ داده شده است. منحنی $r(t)$ را بر حسب طول قوس پارامتری کنید، و انحنا، شعاع انحنا و بردارهای یکه‌ی مماس و قائم اصلی را در یک نقطه روی $\mathcal{C}$ به‌دست آورید.

پاسخ: داریم $r'(t) = -a\sin(t)i + a\cos(t)j$، و از این‌رو:

$$|r'(t)| = \sqrt{(-a\sin(t))^2 + (a\cos(t))^2} = a, \quad s(t) = \int_0^t a\,du = at.$$

پس، $t = \frac{s}{a}$، و بنابراین r به صورت زیر بر حسب طول قوس پارامتری می‌شود:

$$\tilde{r}(s) = r\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)i + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)j$$

ادامه‌ی مثال

حال، بردارهای یکه‌ی مماس و قائم اصلی را به‌دست می‌آوریم:

$$T(s) = \tilde{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right) i + \cos\left(\frac{s}{a}\right) j$$

$$T'(s) = -\frac{\cos\left(\frac{s}{a}\right)}{a} i - \frac{\sin\left(\frac{s}{a}\right)}{a} j, \quad \kappa(s) = |T'(s)| = \frac{1}{a}, \quad \rho(s) = a$$

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = -\cos\left(\frac{s}{a}\right) i - \sin\left(\frac{s}{a}\right) j = -\frac{1}{a}\tilde{r}(s)$$