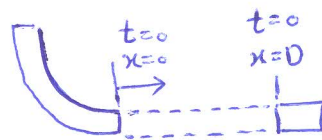
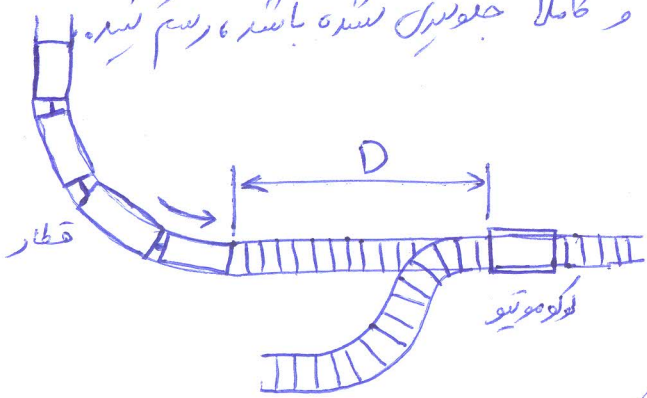


فصل دوم - حرکت در راستای یک خط راست

۱. هنگامی که قطار مسافری سریع السیر بی‌نیی را با سرعت 121 km/h دور می‌زنند، راننده آن با ناراحتی متوجه می‌شود که یک لوکوموتیو به طور نامناسبی در فاصله $D = 277 \text{ m}$ از آن وارد خط آهن شده است. لوکوموتیو با سرعت 29 km/h حرکت می‌کند. راننده قطار می‌داند که متوقف می‌شود.

(الف) بزرگی شتاب ثابت به وجود آمده چقدر باید باشد تا فقط از برخورد جلوگیری شود؟

(ب) فرض کنید که راننده در $x=0$ در $t=0$ لوکوموتیو را دیده باشد. نمودار $x(t)$ لوکوموتیو و قطار را در مواردی که از برخورد جلوگیری شده باشد و کاملاً جلوگیری نشده باشد، رسم کنید.



یادداشت:

(الف) روش اول

برای اینکه از برخورد جلوگیری شود حتماً نیاز نیست که قطار متوقف شود. اگر در لحظه‌ای که قطار به لوکوموتیو می‌رسد، سرعت قطار به سرعت لوکوموتیو کاهش یابد و برابر سرعت لوکوموتیو شود از برخورد جلوگیری می‌شود.

برای قطار که پس از توقف کردن دارای حرکت شتاب منفی است از روابط شتاب دار فرمول مکان برای آن به صورت $x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} t + 0$ بدست می‌آید. (فرمول اصلی: $x - x_0 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) t$) v_1 : سرعت اولیه قطار v_2 سرعت قطار در لحظه رسیدن به لوکوموتیو - سرعت ثانویه یا سرعت در لحظه t

و برای لوکوموتیو که دارای سرعت ثابت است از روابط سرعت ثابت فرمول مکان به صورت $x_2 = v_2 t + D$ بدست می‌آید. x_2 مکان لوکوموتیو در لحظه t و v_2 سرعت لوکوموتیو که در هر لحظه ثابت است.

می‌توانیم دو رابطه مکان که در بالا برای قطار و لوکوموتیو بدست آوردیم را برابر قرار دهیم و یک دستگاه یک مجهولی بسازیم (t : مجهول) و آن را بدست آوریم. همزمان شرط اینکه زمانی که دو قطار به هم می‌رسند

ببرخورد نگذرد این است که در آن لحظه (t : لحظه) سرعت قطار برابر یا کمتر از سرعت لوکوموتیو باشد یعنی $v_1 \leq v_2$ که برای بدست آوردن حد اکثر شتابی که لوکوموتیو می‌تواند داشته باشد که برخورد انجام نگیرد باید در روابط فوق $v_1' = v_2$ قرار دهیم.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{v_1' + v_1}{2} t + 0 = v_2 t + D$$

مقدار یک مجهولی

$$\left. \begin{array}{l} v_1' = v_2' = 1,1 \text{ m/s} \\ v_1 = 44,72 \text{ m/s} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تبدیل واحد} \\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} \quad \left(\frac{1,1 + 44,72}{2} \right) t = (1,1) t + 474$$

$$\Rightarrow t = 36,9 \text{ s}$$

لحظه رسیدن قطار به لوکوموتیو

متوجه شدیم که قطار باید پس از مدت 36,9 ثانیه از سرعت 141 km/h به سرعت 29 km/h برسد. طبق رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ می‌توانیم شتاب منفی مورد نیاز برای ترمز کردن قطار را بدست آوریم.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,1 - 44,72}{36,9} = \boxed{-0,993 \text{ m/s}^2} \quad (\text{الف})$$

روش دوم (روشن نسبی)

در این روش سرعت نسبی بین قطار و لوکوموتیو را مد نظر قرار می‌دهیم. فرض کنیم که

لوکوموتیو ثابت است و سرعت اولیه قطار نیز $v_0 = 141 - 29 = 112$ می‌باشد. در این صورت برای اینکه قطار به نقطه $x = D$ نرسد و با لوکوموتیو برخورد نکند باید سرعت قطار در نقطه $x = D$ به صفر برسد. از فرمول روابط شتاب داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

تحقیقات قطار

شتاب ثابت در $x=0$

سرعت اولیه قطار

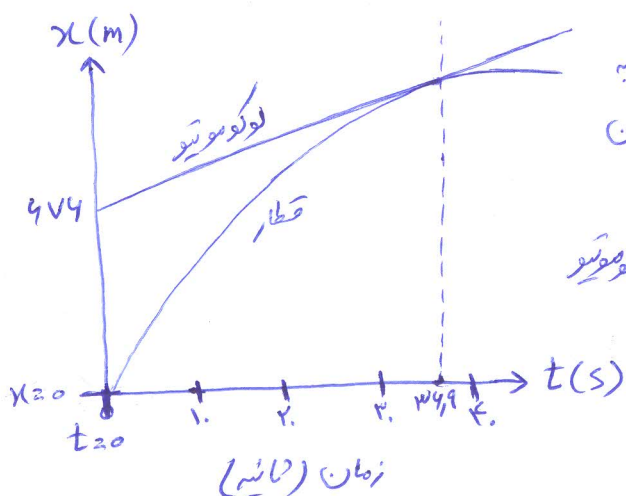
سرعت قطار در x

$$\begin{cases} v_0 = 44,72 - 1,1 = 36,24 \text{ m/s} \\ v_0 = 141 - 29 = 112 \text{ km/h} \end{cases}$$

$$0^2 - (36,24)^2 = 2aD$$

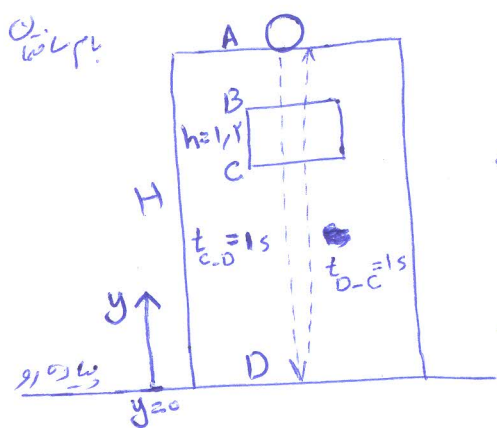
$\nearrow 474 \text{ m}$

$$a = - \frac{(36,24)^2}{2(474)} = -0,992 \text{ m/s}^2$$



(ب) مقدار جابه‌جایی لوکوموتیو به دلیل اینکه سرعت ثابت است به صورت خطی می‌باشد و مقدار حرکت قطار بر حسب زمان با توجه به اینکه حرکت شتاب دار است به صورت منحنی است. از روش مقدار متوسط می‌توانیم که در لحظه $t = 36,9$ قطار و لوکوموتیو به هم می‌رسند و پس از آن لوکوموتیو از قطار فاصله می‌گیرد، البته اگر راسته قطار ترمز را رها نکنند.

۲ یک گلوله فولادی از بام ساختمانی پایین می‌افتد و از مقابل پنجره‌ای که فاصله بالا تا پایین آن ۲m است در مدت ۰.۲۵s می‌گذرد. گلوله پس از برخورد به پاره رو «به طور کامل» به بالا می‌چسبد و از پایین پنجره تا بالای آن را در مدت ۰.۲۵s طی می‌کند. فرض کنید که حرکت رو به بالا درست معکوس شود. زمانی که گلوله پایین‌تر از زیر پنجره بوده ۰.۲۵s است. بلندی ساختمان چقدر است؟



پاسخ :
از توضیحات مسئله متوجه می‌شویم که سرعت گلوله در لحظه برخورد صفر است و چون به طور کامل به بالا می‌چسبد و از اصطکاک هوا بدون تأثیر است بنابراین سرعت گلوله در لحظه بازگشت به لبه پشت بام دوباره به صفر می‌رسد. در حرکت سقوط آزاد شتاب برابر g است. $(g = 9.8 \frac{m}{s^2})$

ارتفاع پنجره $h = 1.2m$ است. باید ارتفاع ساختمان (H) را بدست آوریم. گلوله فاصله ۲m را در مدت ۰.۲۵s طی می‌کند. از فرمول زیر می‌توانیم سرعت گلوله در لبه بالای پنجره را بدست آوریم. (v_B)

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_B t \Rightarrow -1.2 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + v_B t \Rightarrow v_B = \frac{-1.2 + \frac{1}{2}(9.8)(0.25)^2}{0.25}$$

$$v_B = -8.99 \frac{m}{s}$$

علامت منفی به این دلیل است که جهت حرکت گلوله رو به پایین است (خلاف جهت y)
علامت منفی قبل از g نیز به این دلیل است که جهت بردار شتاب خلاف جهت y است. البته در حرکت برگشت گلوله به سمت بالا باز هم علامت قبل از g - قرار دارد زیرا این بار شتاب کاهشنده است.

آنگاه که سرعت در نقطه B را بدست آوریم از معادلات شتاب ثابت سرعت در نقطه D را بدست آوریم.

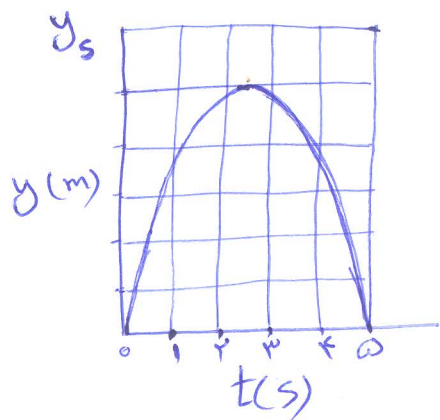
$$t_{BD} = t_{BC} + t_{CD} = 1 + 0.25$$

$$v_D = -gt_{BD} + v_B = -(9.8)(\frac{2}{3} + 0.25) - 8.99 = -20 \frac{m}{s}$$

آنگاه از رابطه $v_A^2 - v_D^2 = -2gH$ مقدار H را بدست می‌آوریم:

$$0 - (-20)^2 = -2(9.8)H \Rightarrow H = 20.4m$$

۳. تویی از سطح سیاره‌ای به قطر قائم و روبه بالا پرتاب می‌شود. نمودار y بر حسب t برای این توپ در شکل زیر نشان داده شده است که y ارتفاع توپ از نقطه شروع و $t=0$ لحظه‌ای است که توپ پرتاب شده است. معادله قائم شکل $y_s = 30 \text{ m}$ را مشخص کرده است. بزرگ (الف) شتاب سقوط آزاد روی سیاره و (ب) سرعت اولیه توپ چقدر است؟



پاسخ :

بناوبه به اینکه $y_s = 30$ است بنابراین فاصله هر خانه عمودی 5 m است و فاصله هر خانه افقی 1 s است. طبق نمودار در لحظه $t = 2.5 \text{ s}$ مکان نیم ارتفاع کل $y = 25 \text{ m}$ است. نقطه اوج

$$y - y_0 = \frac{1}{2} g' t^2$$

$$25 - 0 = \frac{1}{2} g' (2.5)^2 \Rightarrow g' = 8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{الف})$$

بناوبه به اینکه سرعت در نقطه اوج صفر است

بنابراین از نقطه اوج برای بدست آوردن سرعت اولیه در لحظه پرتاب استفاده می‌کنیم.

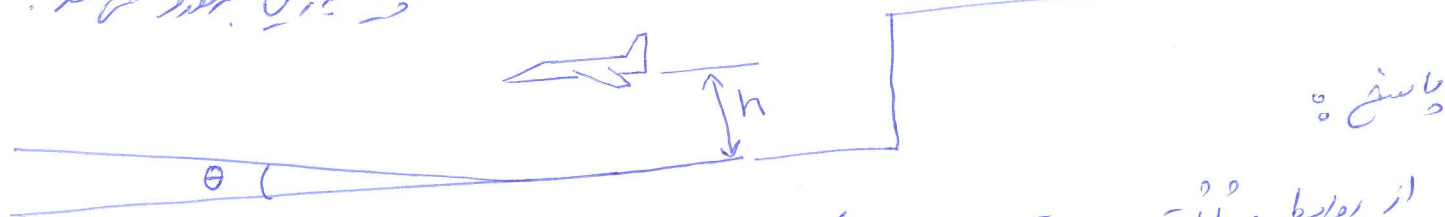
$$v - v_0 = -g' t \Rightarrow$$

↓
سرعت در نقطه اوج

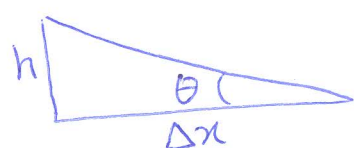
$$0 - v_0 = -8 (2.5) \Rightarrow v_0 = 20 \text{ m/s} \quad (\text{ب})$$

۴. خلبانی با سرعت $1300 \frac{km}{h}$ در ارتفاع $h = 35m$ بالاتر از سطح زمین به خط افقی پرواز می‌کند.

در لحظه $t = 0$ خلبان شروع به پرواز روی زمین سیدار به طرف بالا و بازو به $\theta = 4,3^\circ$ می‌کند. اگر خلبان مسیر هوایی را تغییر ندهد، پس از چه مدت زمان t هوایی به زمین برخورد می‌کند؟



از روابط مثلثات می‌توانیم مسافتی را که هوایی به خط مستقیم طی می‌کند و به سطح زمین می‌رسد بدست آورد.



$$\tan \theta = \frac{h}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = \frac{h}{\tan \theta} = \frac{35}{\tan(4,3)} = 460,5 m$$

$$\Delta x = 460,5$$

از روابط سرعت ثابت داریم: $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \Leftarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{460,5}{37,1} = 1,24 s$$

$$v = 1300 \frac{km}{h} = 37,1 \frac{m}{s}$$

۵. سوره صحرانی که در مسیر مستقیم هوایی حرکت می‌کند برای بررسی انرژی فیزیکی سبب می‌کند. در انسان به کار می‌رود. یک چلیپا سوره صحرانی با شروع از حالت سکون، در مدت ۱,۸ s به سبب $1700 \frac{km}{h}$ می‌رسد. (الف) سبب (بافرض ثابت بودن) را بر حسب v و (ب) مسافت طی شده را پیدا کنید.

پاسخ: در قسمت (الف) سبب را بر حسب v از ما خواسته اند زیرا بتوانیم مقایسه ای بین شدت این سبب با سبب گرانش (سبب سقوط آزاد) داشته باشیم.

$$v - v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{444,4 - 0}{1,8} = 247 \frac{m}{s^2} = 25,2 g \quad (\text{الف})$$

$$v = 1700 \frac{km}{h} = 444,4 \frac{m}{s}$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow x = \frac{1}{2} (247) (1,8)^2 + 0 (1,8) = 400,14 m \quad (\text{ب})$$

۴ سنگی از حال سکون از بالای ساقچانی به بلندی ۹ m سقوط می‌کند. ۱۲ s پیش از برخورد با زمین، در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

پاسخ: سرعت اولیه سنگ در لحظه رها شدن صفر است ($v_0 = 0$). از رابطه سقوط آزاد $y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ می‌توانیم مدت زمانی که طول می‌کشد سنگ به زمین برسد را حساب کنیم.

$$0 - 9 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + (0)t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(9)}{9.8}} = 1.5 \text{ s}$$

۱۲ s پیش از برخورد با زمین یعنی ($1.5 - 12 = 10.5$ s) ۱۰.۵ s پس از رها شدن سنگ. بنابراین اگر در لحظه $t = 10.5$ s به است آدرس یعنی ارتفاع سنگ را ۱۲ s پیش از برخورد با زمین بدست آورده‌ایم.

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt'^2 + v_0t'$$

$$y - 9 = -\frac{1}{2}(9.8)(10.5)^2 + 0(10.5) \Rightarrow y = 34 \text{ m}$$

فرمول‌های اصلی

سرعت ثابت | $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
 $a = 0$

سرعت متغیر تسارع ثابت	فرمول حرکت متعقیم	کمیت نامیده	فرمول سقوط آزاد
	$v = v_0 + at$	$\Delta x = x - x_0$	$v = v_0 - gt$
	$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$\Delta y = y - y_0$	$y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$
	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	v	$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$
	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	t	$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$
	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	a, g	$y - y_0 = vt + \frac{1}{2}gt^2$
		v_0	