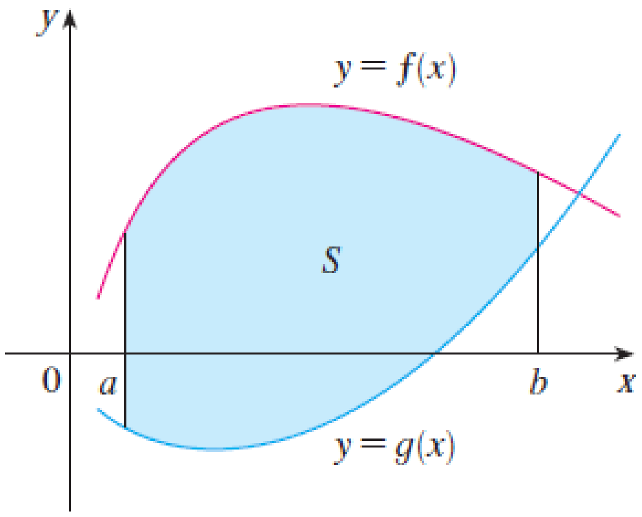
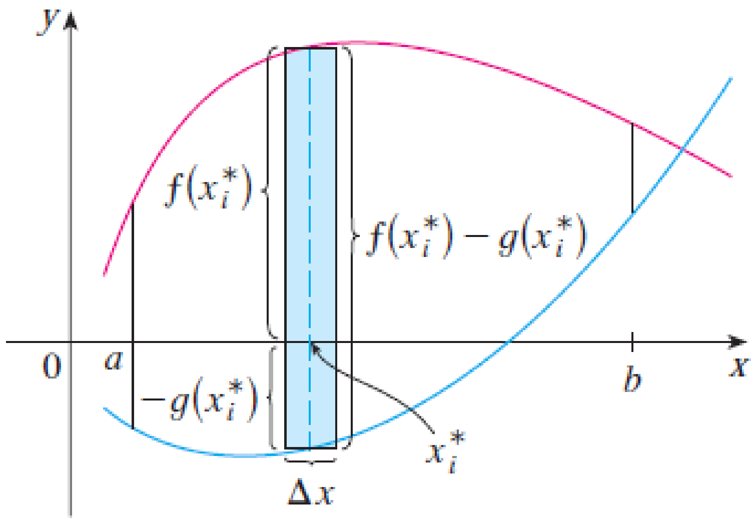
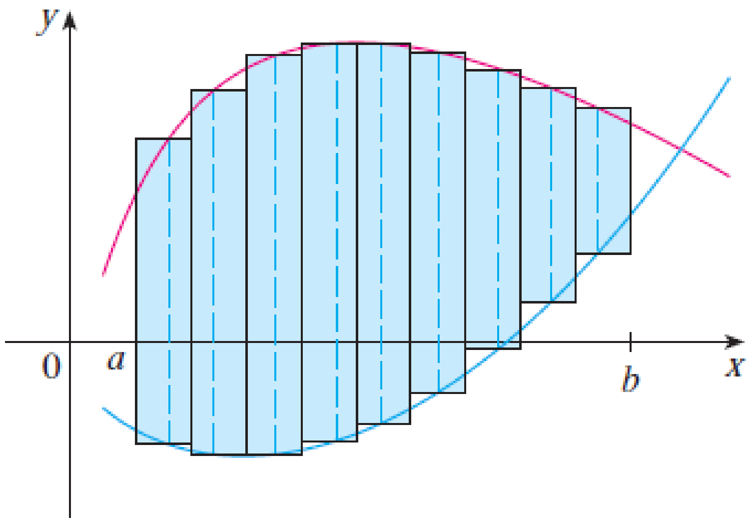
مساحت بین منحنیها



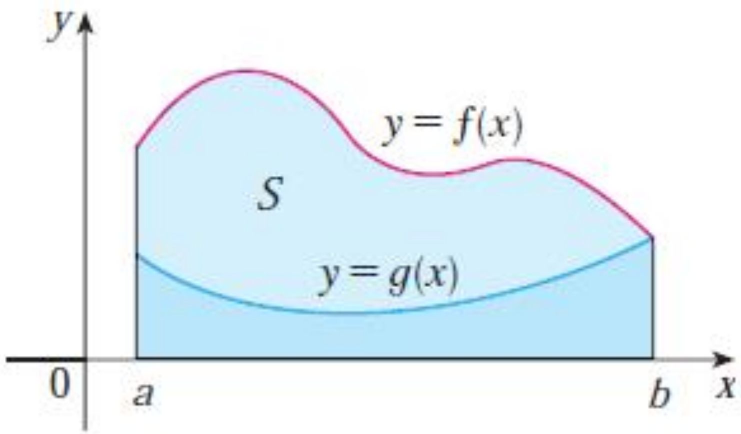
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [\, f(x_i^*) - g(x_i^*)]\, \Delta x$$





مساحت ناحیهٔ محدود به منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطهای $x = a$ و $x = b$، که در اینجا f و g پیوسته‌اند و به‌ازای هر x در $[a, b]$، $f(x) \geq g(x)$، برابر است با

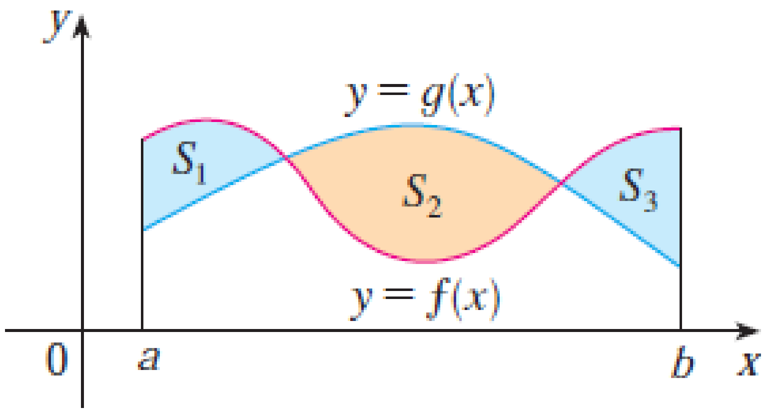
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



$$A = (\text{مساحت زیر } y = f(x)) - (\text{مساحت زیر } y = g(x))$$
$$= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

اگر بخواهیم مساحت بین منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را که در اینجا به‌ازای برخی مقدارهای x، $f(x) \geq g(x)$ و به‌ازای بقیهٔ مقدارهای x، $g(x) \geq f(x)$، پیدا کنیم، ناحیهٔ مفروض S را مانند شکل به چند ناحیه مانند $S_۱$، $S_۲$، ... با مساحتهای $A_۱$، $A_۲$، ... تقسیم می‌کنیم. بعد مساحت ناحیهٔ S را مجموع مساحتهای ناحیه‌های کوچکتر $S_۱$، $S_۲$، ... تعریف می‌کنیم، یعنی، $A = A_۱ + A_۲ + \cdots$. چون

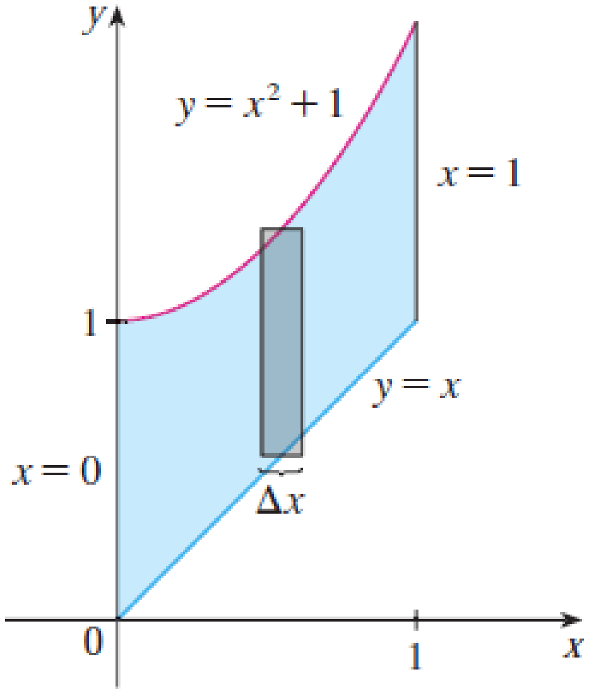
$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{when } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{when } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$



مساحت بین منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و میان $x = a$ و $x = b$ برابر است با

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

مثال مساحت ناحیه‌ای را پیدا کنید که از بالا به $y = x^2 + 1$ محدود است، از پایین به $y = x$ محدود است و از کناره‌ها به $x = 0$ و $x = 1$ محدود است.

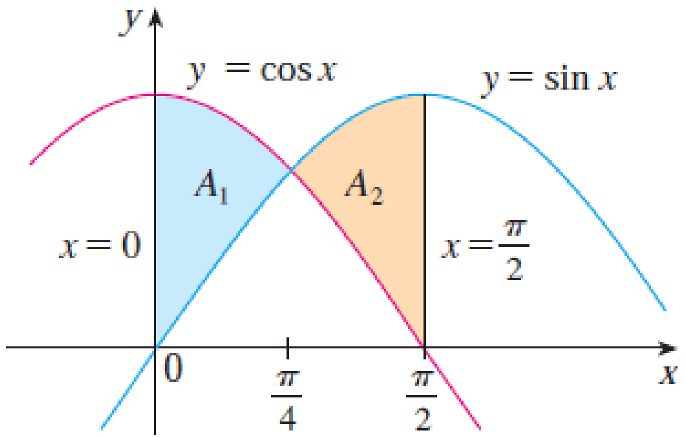


$$A = \int_0^1 [(x^2 + 1) - x]\, dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

مثال مساحت ناحیهٔ محدود به منحنیهای $y = \sin x$، $y = \cos x$، $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ را پیدا کنید.

راه‌حل منحنیها وقتی برخورد می‌کنند که $\sin x = \cos x$، یعنی وقتی‌که $x = \frac{\pi}{4}$ (زیرا $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$). ناحیهٔ موردنظر را در شکل رسم کرده‌ایم. توجه کنید که وقتی $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$، $\cos x \ge \sin x$، اما وقتی که $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$، $\sin x \ge \cos x$. بنابراین، مساحت موردنظر برابر است با



$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x|\, dx = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

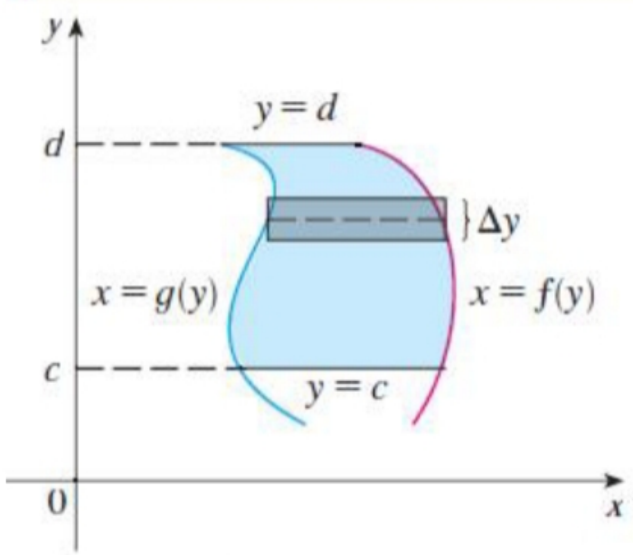
$$= 2\sqrt{2} - 2$$

* اگر $x=f(y)$ و $x=g(y)$ ، که

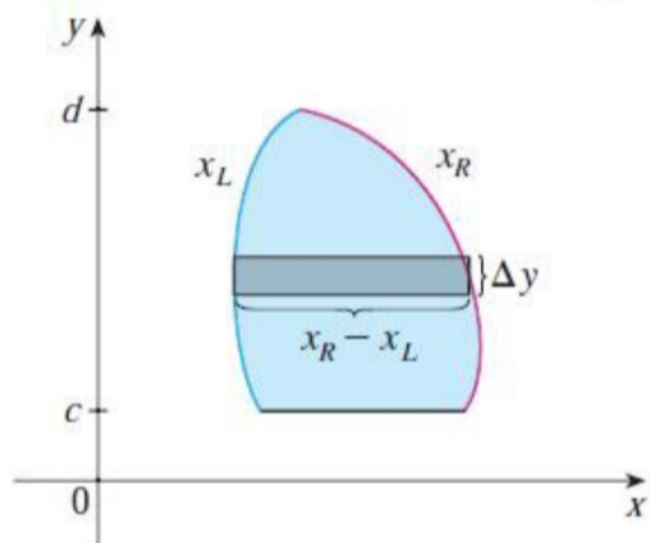
$c \le y \le d$ ، آن‌گاه مساحت محصور بین دو منحنی فوق

و $y=c$ و $y=d$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \int_{c}^{d} |f(y)-g(y)| \, dy$$



y
y = d
d
}Δy
x = g(y)
x = f(y)
c
y = c
0
x

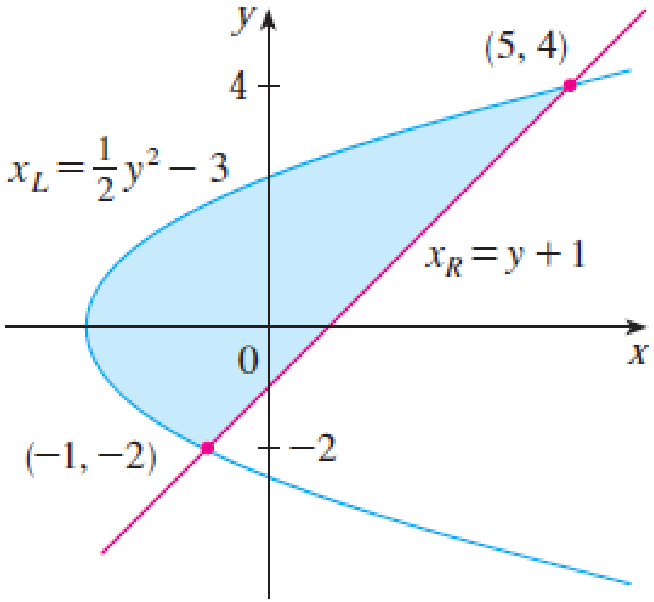


y
d
x_L
x_R
}Δy
$x_R - x_L$
c
0
x

مثال مساحت ناحیهٔ محصور به خط $y = x - ۱$ و سهمی $y^۲ = ۲x + ۶$ را پیدا کنید.

راه‌حل اگر این دو معادله را حل کنیم معلوم می‌شود که نقطه‌های برخوردشان $(-۱, -۲)$ و $(۵, ۴)$ اند.

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 6 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 = 2x + 6 \Rightarrow x = -1, 5$$

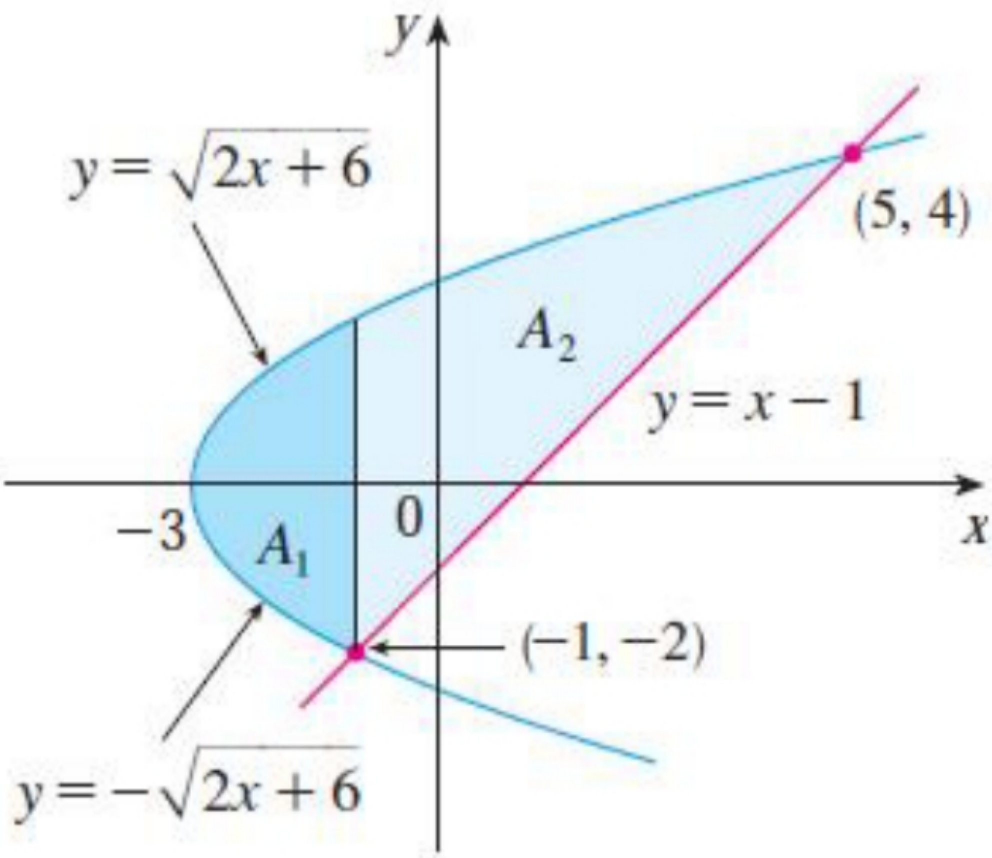


$$A = \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Big]_{-2}^{4}$$

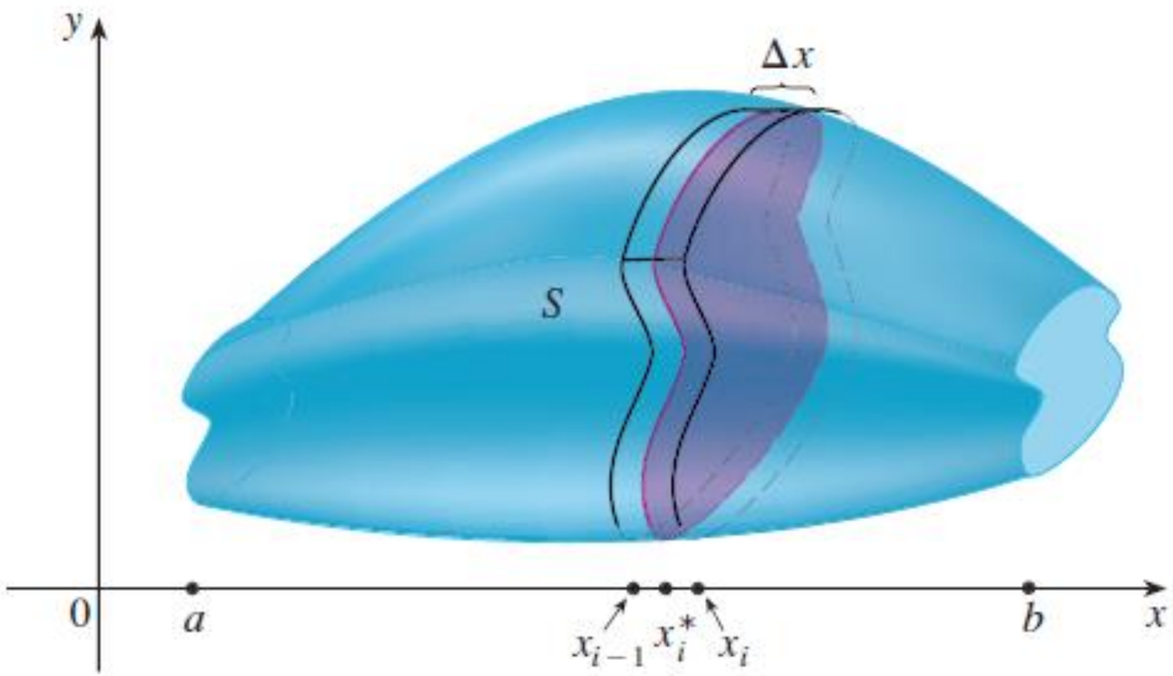
$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

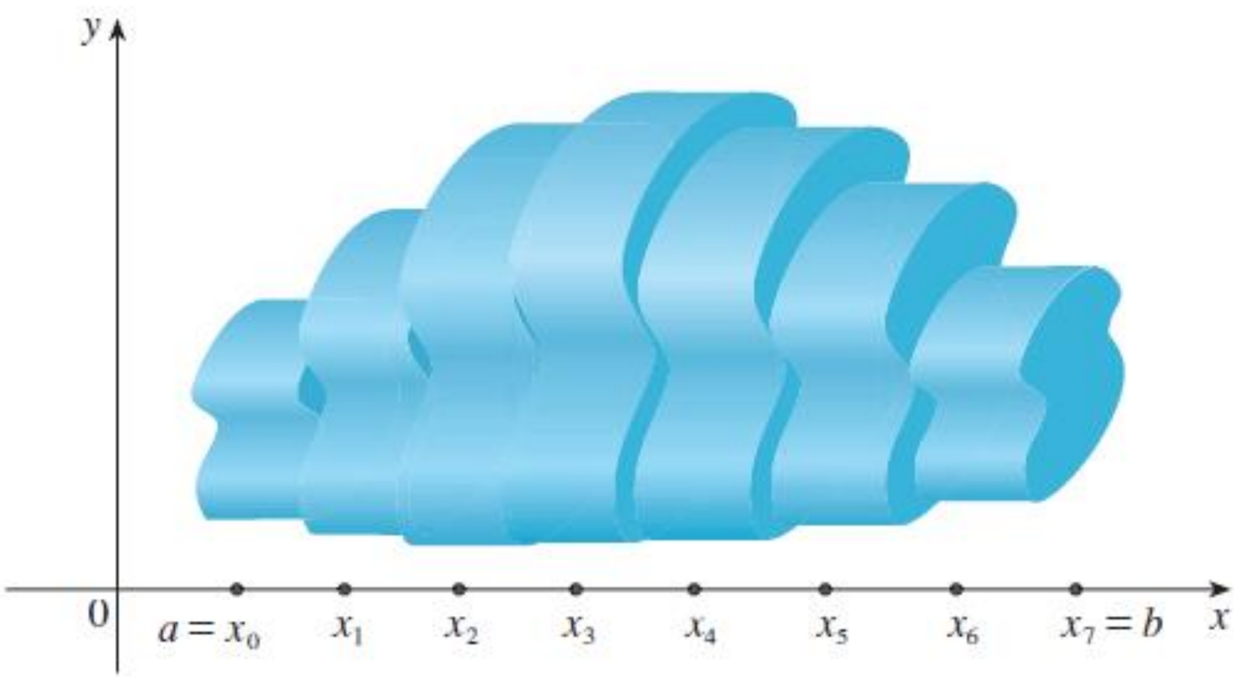


y
x
$y = \sqrt{2x + 6}$
(5, 4)
A_2
$y = x - 1$
−3
0
A_1
(−1, −2)
$y = -\sqrt{2x + 6}$

تعریف حجم فرض کنید S جسمی سه‌بعدی باشد که بین $x = a$ و $x = b$ قرار دارد. اگر مساحت سطح مقطع S در صفحهٔ P_x، که از x می‌گذرد و بر محور x عمود است، $A(x)$ باشد، که در اینجا A تابعی پیوسته است، آن‌وقت حجم S برابر است با

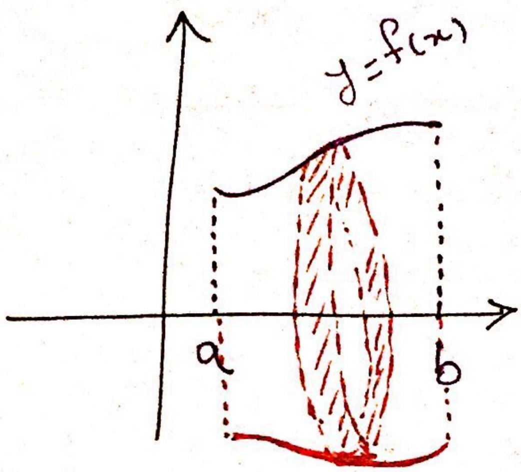
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$





حجم اجسام دوار :

* روش برش های دایره ای :



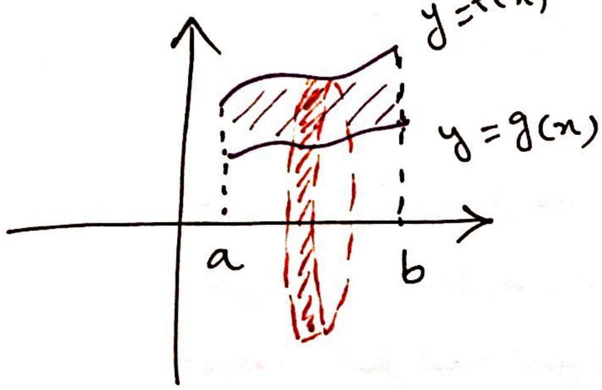
$$A(x) = \pi f(x)^2$$

حجم جسم حاصل از دوران سطح زیر نمودار $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ حول محور x ها :

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 dx$$

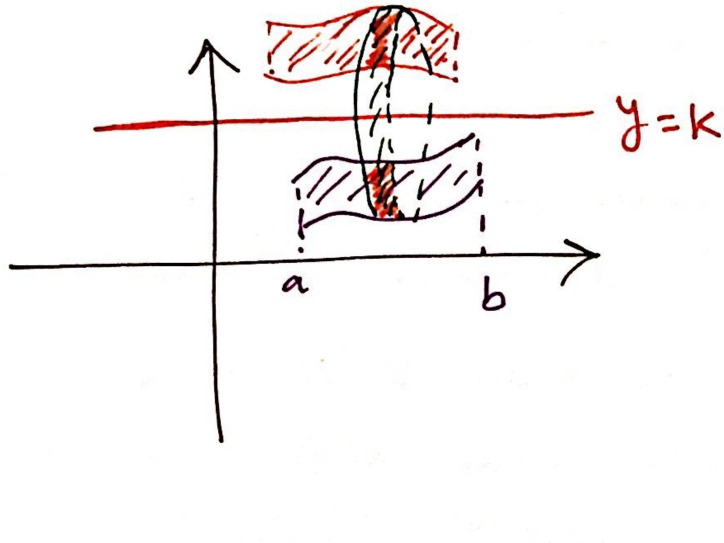
* حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و $x=a$ و $x=b$ ، حول محور x ها:



$$V=\int_a^b \pi \left|(f(x))^2-(g(x))^2\right| dx$$

* اگر ناحیه‌ی مورد نظر را حول خط

$y = k$ دوران دهیم ، داریم :

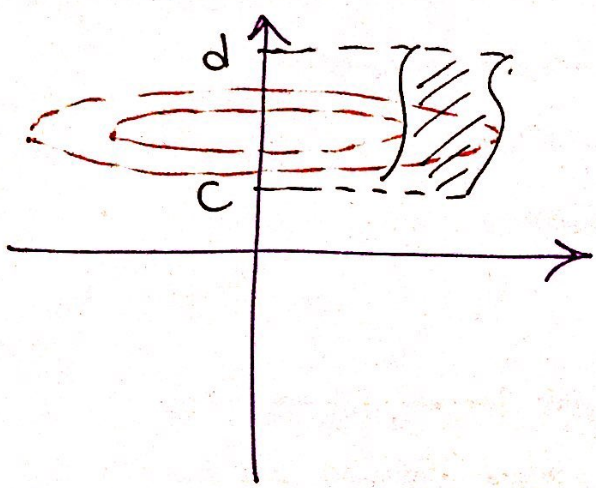


$$V = \int_a^b \pi \left| (f(x)-k)^2 - (g(x)-k)^2 \right| dx$$

* حجم حاصل از دوران ناحیه بین نمودارها

$x=g(y)$ و $x=f(y)$ و $y=c$ و $y=d$ ،

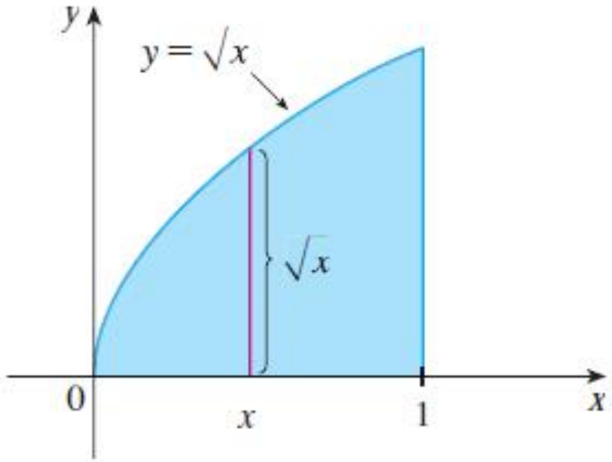
عبارتست از :

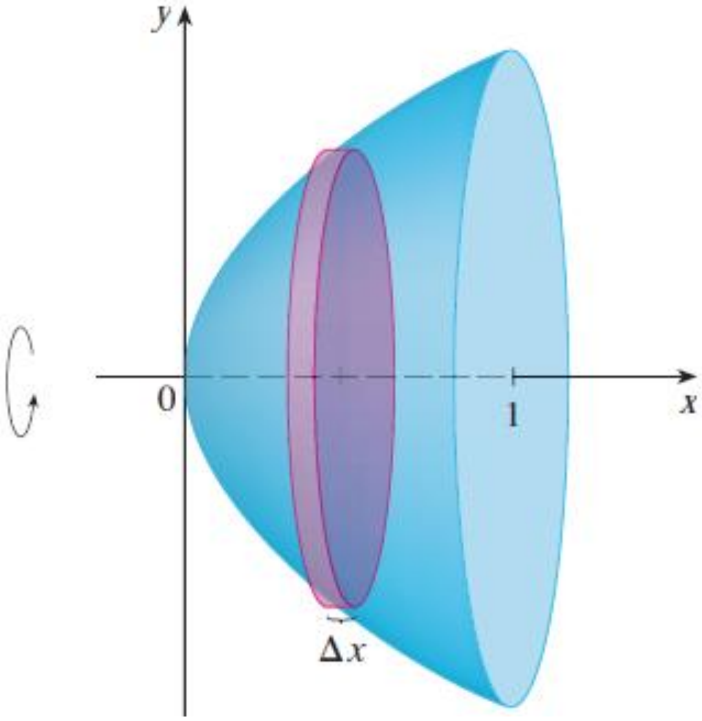


$$V=\int_a^b \pi \left|(f(y))^2-(g(y))^2\right| dy$$

* مشابهاً حول خط $x=k$:

$$V=\int_a^b \pi \left|(f(y)-k)^2-(g(y)-k)^2\right| dy$$

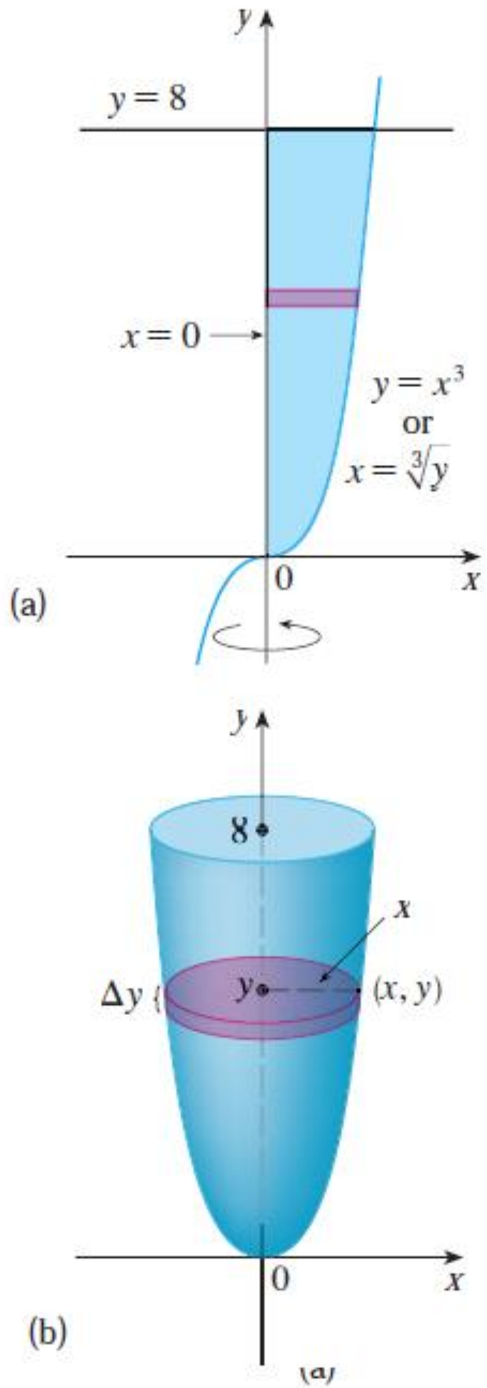




مثال حجم جسمی سه‌بعدی را پیدا کنید که از دوران دادن ناحیهٔ زیر منحنی $y = \sqrt{x}$ از ۰ تا ۱ حول محور x به‌دست می‌آید.

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



مثال حجم جسمی سه‌بعدی را پیدا کنید که از دوران‌دادن ناحیهٔ محدود به $y = x^۳$، $y = ۸$ و $x = ۰$ حول محور y به‌دست می‌آید.

راه‌حل چون ناحیهٔ موردنظر حول محور y دوران داده شده است، بهتر است که جسم موردنظر را برشهایی عمود بر محور y بزنیم و سپس نسبت به y انتگرال بگیریم. اگر در ارتفاع y برش بزنیم، قرصی دوار به شعاع x به‌دست می‌آوریم، که در اینجا $x = \sqrt[3]{y}$. بنابراین مساحت سطح مقطعی که از y می‌گذرد برابر است با

$$A(y) = \pi x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

چون جسم سه‌بعدی موردنظر بین $y = ۰$ و $y = ۸$ قرار دارد، حجمش برابر است با

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

مثال : ناحیه‌ی محصور به منحنی‌های $y=x$ و

$y=x^2$ را حول خط $y=2$ دوران می‌دهیم.

مطلوبست حجم جسم حاصل.

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

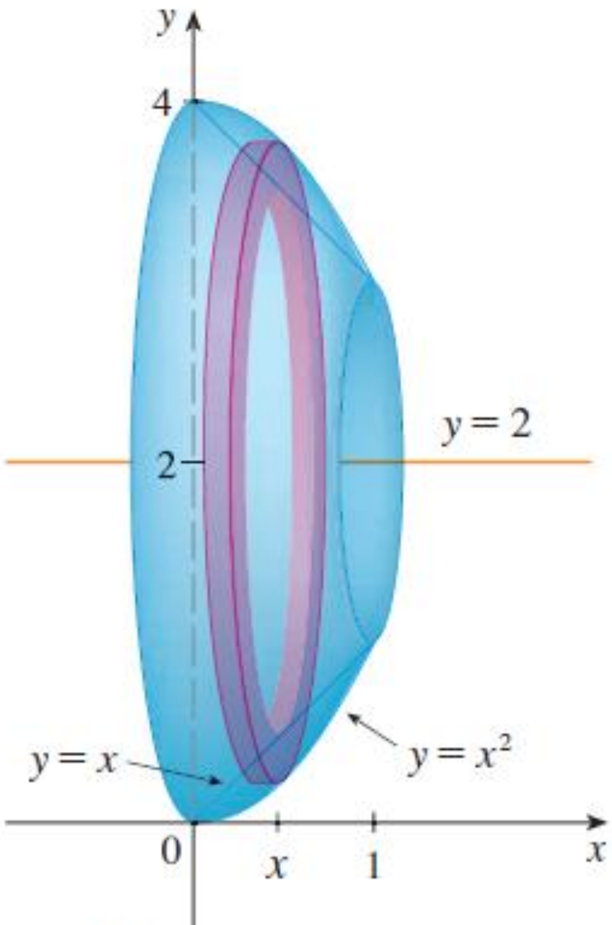
$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

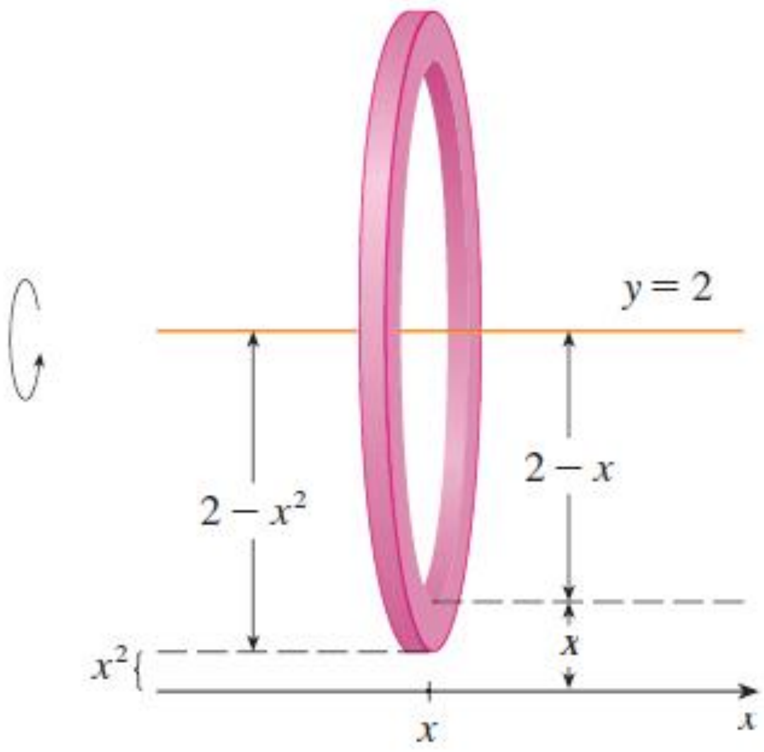
$$= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

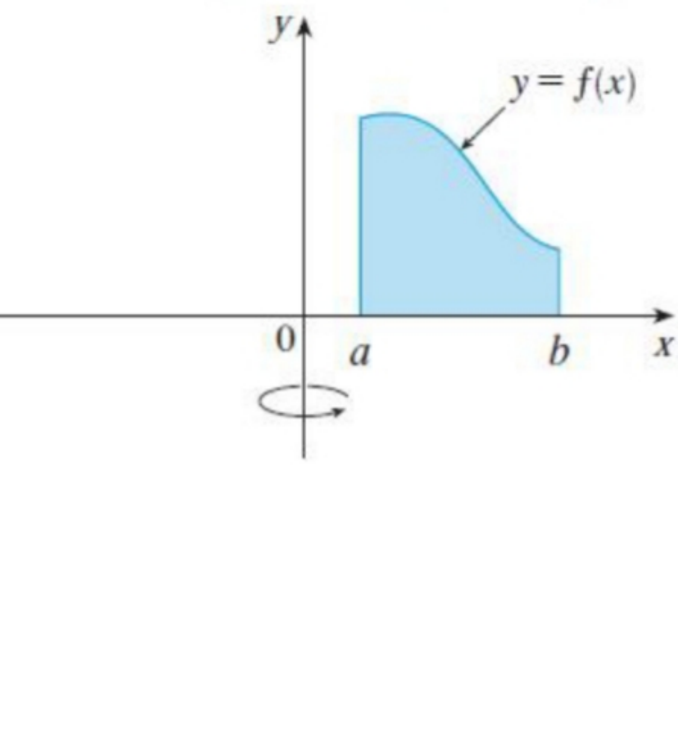
$$= \frac{8\pi}{15}$$

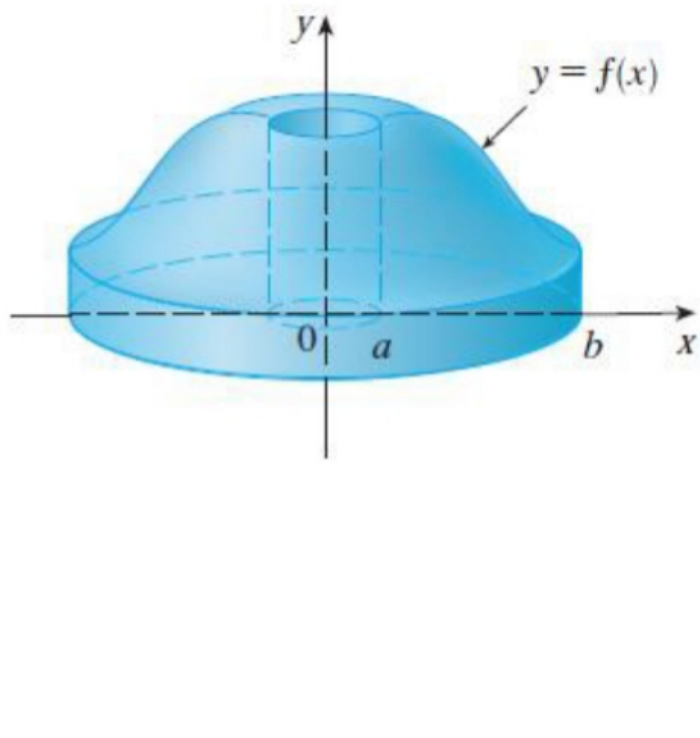


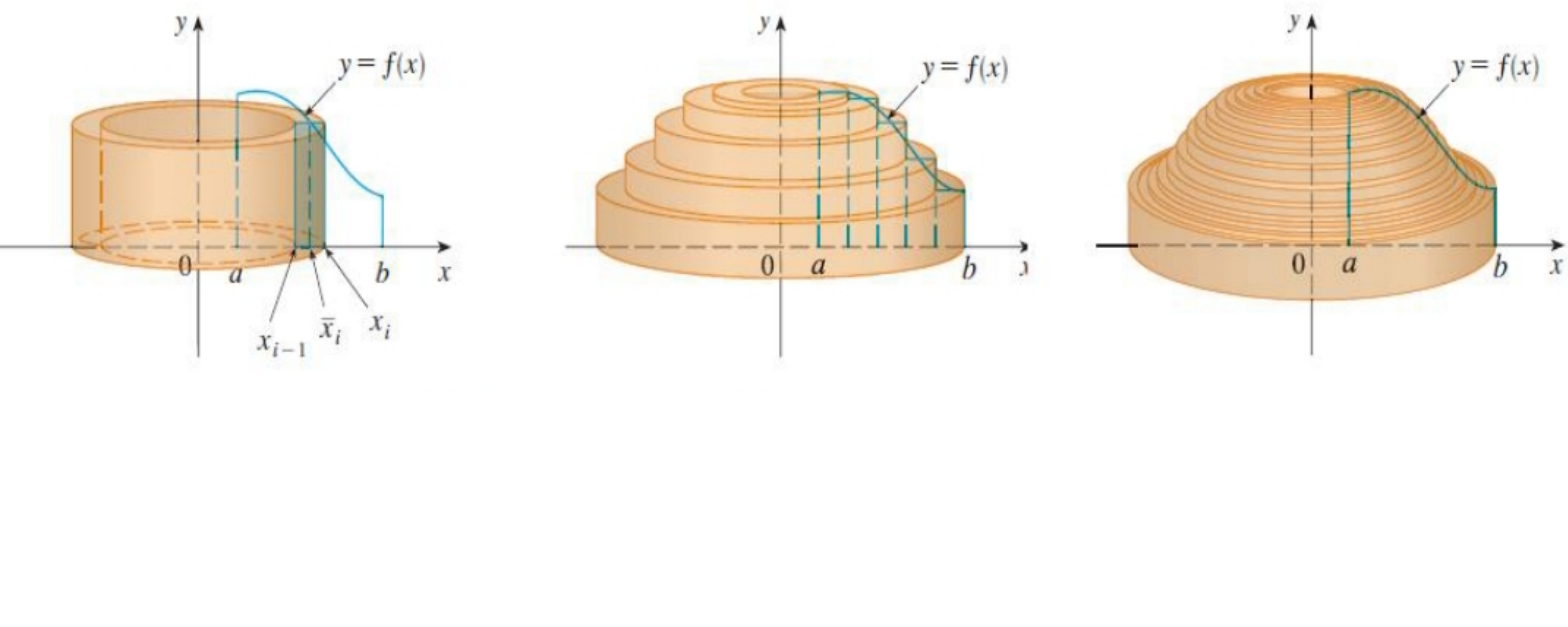


* روش برش های استوانه ای

یا پوسته های استوانه ای :

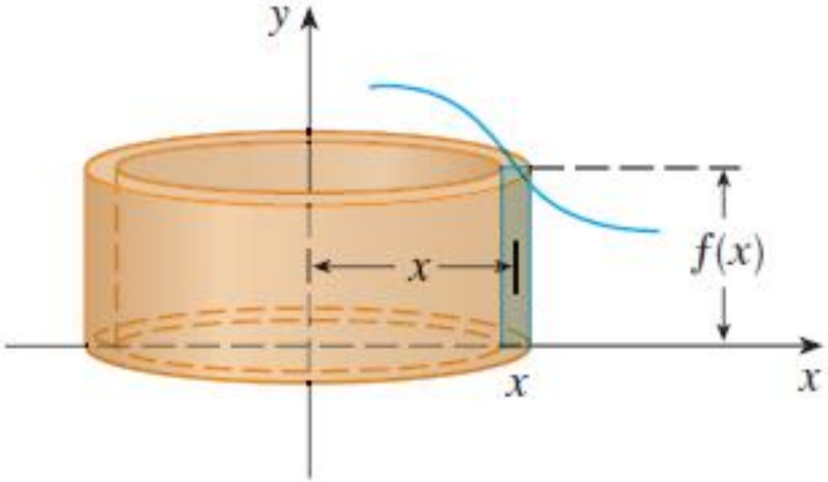

y
y = f(x)
0
a
b
x

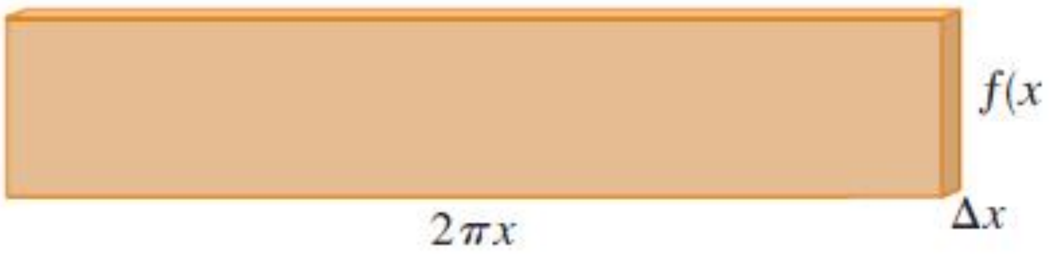

y
y = f(x)
0
a
b
x


y
y = f(x)
0
a
b
x
x_{i-1}
$\bar{x}_i$
x_i
y
y = f(x)
0
a
b
y
y = f(x)
0
a
b
x

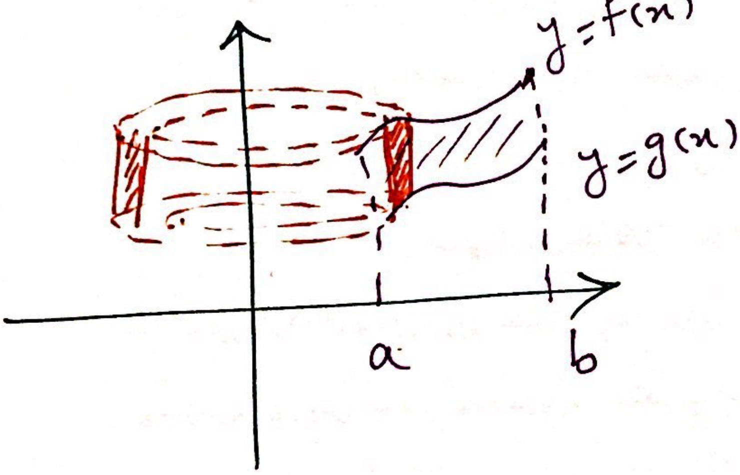
حجم جسم سه‌بعدی شکل   که از دوران دادن ناحیهٔ زیر منحنی $y = f(x)$ از a تا b، حول محور y به‌دست آمده است، برابر است با

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx, \qquad 0 \leq a < b$$





* ناحیه‌ی محصور به دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و $x=a$ و $x=b$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل، عبارتست از:



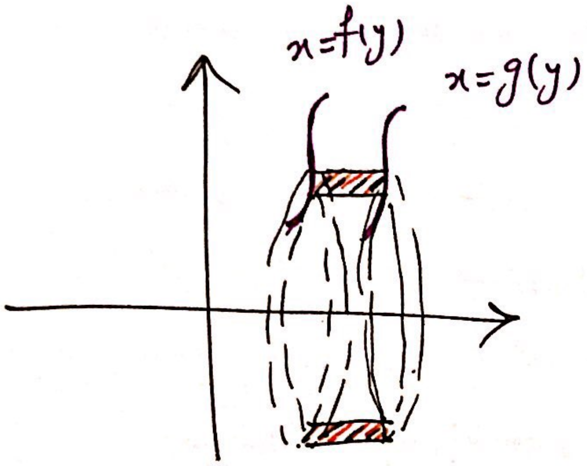
$$V=\int_{a}^{b} 2\pi\,|x|\,|f(x)-g(x)|\,dx$$

* اگر ناحیه مورد نظر را حول خط $x=k$

دوران دهیم، داریم:

$$V=\int_a^b 2\pi|x-k|\ |f(x)-g(x)|\,dx$$

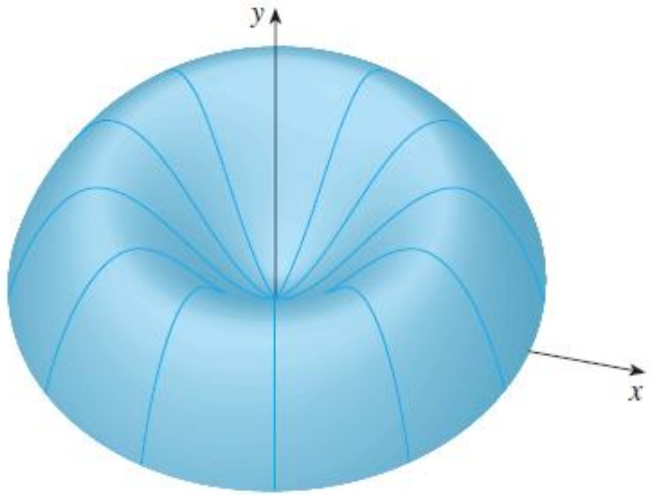
* حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به دو منحنی $x=f(y)$ و $x=g(y)$ و $y=c$ و $y=d$ ، عبارتست از :



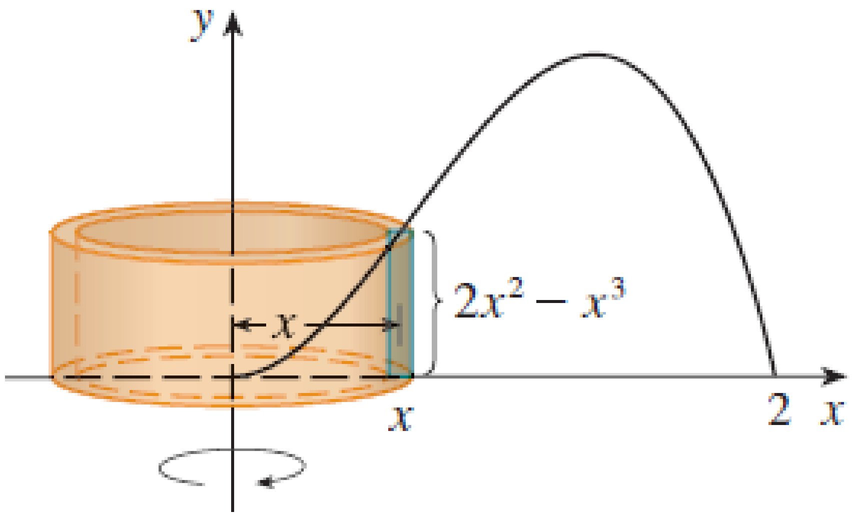
$$V=\int_c^d 2\pi |y|\,|f(y)-g(y)|\,dy.$$

* مشابهاً، اگر حول خط $y=k$ دوران دهیم :

$$V=\int_c^d 2\pi\,|y-k|\,|f(y)-g(y)|\,dy.$$



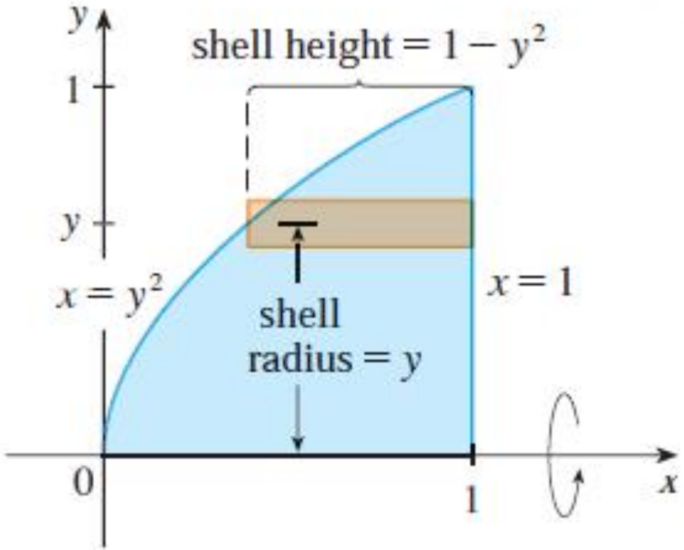
مثال حجم جسمی سه‌بعدی را که از دوران دادن ناحیهٔ محدود به $y = 2x^2 - x^3$ و $y = 0$ حول محور y به‌دست می‌آید پیدا کنید.



$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

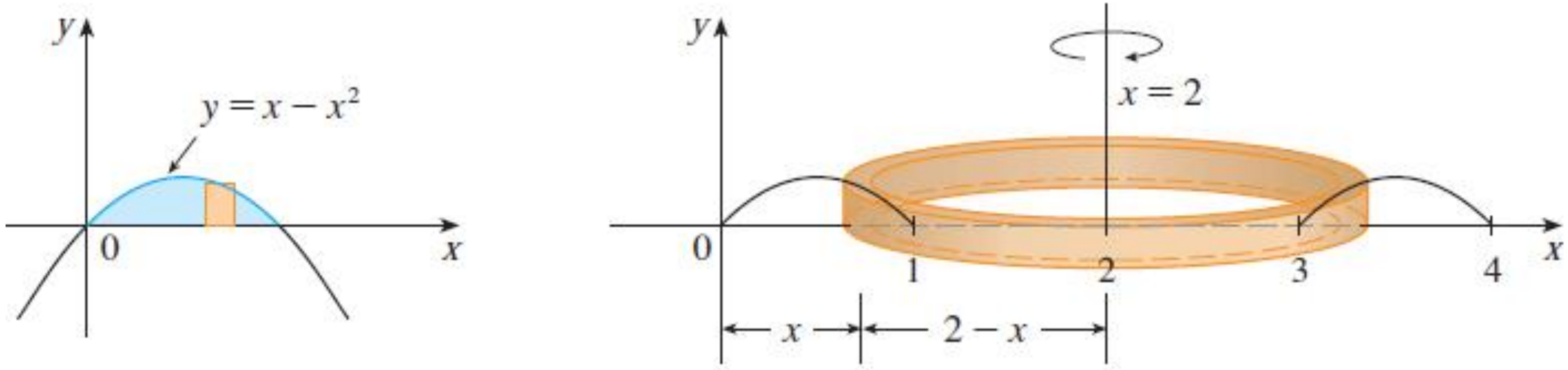
مثال با استفاده از روش پوسته حجم جسمی سه‌بعدی را که از دوران دادن ناحیهٔ زیر منحنی $y = \sqrt{x}$ از ۰ تا ۱ حول محور x به‌دست می‌آید پیدا کنید.



$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\, dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

مثال حجم جسمی سه‌بعدی را که از دوران‌دادن ناحیهٔ محدود به $y = x - x^2$ و $y = 0$ حول خط $x = 2$ به‌دست می‌آید پیدا کنید.



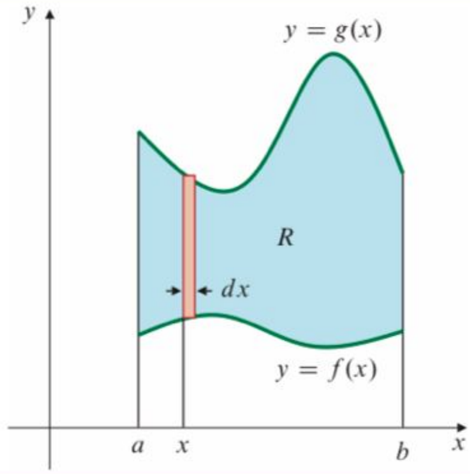
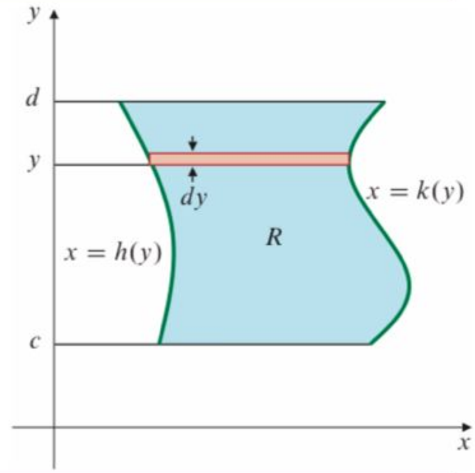
حجم جسم سه‌بعدی موردنظر برابر است با

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Table 1. Volumes of solids of revolution

If region R — is rotated about ↓		
the x-axis	use plane slices $V = \pi \int_a^b \left((g(x))^2 - (f(x))^2\right) dx$	use cylindrical shells $V = 2\pi \int_c^d y \left(k(y) - h(y)\right) dy$
the y-axis	use cylindrical shells $V = 2\pi \int_a^b x \left(g(x) - f(x)\right) dx$	use plane slices $V = \pi \int_c^d \left((k(y))^2 - (h(y))^2\right) dy$