۱۰. (آدامز) الف) مینیمم و ماکسیمم تابع $F(x) = \int_0^{2x-x^2} \cos(\frac{1}{1+t^2})dt$ را بیابید.

ب) اگر $f(x) = \int\limits_0^x \left(1-t^2\right)\cos^2 t \, dt$ ، روی کدام بازه $f(x)$ صعودی است.

حل:

الف). برای محاسبه ماکزیمم و منیمم تابع $F(x)$ از مشتق گرفته و برابر با صفر قرار می‌دهیم. در این صورت

$$F'(x) = (2-2x)\cos\left(\frac{1}{1+(2x-x^2)^2}\right) = 0.$$

بنابراین نقطه $x=1$ یک نقطه بحرانی تابع $F(x)$ است، که به راحتی می‌توان بررسی کرد، به ازای $x<1$ مقدار تابع $F'(x)$ مثبت و به ازای $x>1$ مقدار آن منفی است، لذا $F(x)$ در $x=1$ ماکسیمم خود را اختیار می‌کند.

برای هر t داریم:

$$0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

پس:

$$0 < \cos(1) \leq \cos(\frac{1}{1+t^2}) \leq 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \int_0^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt}$$

$$//$$

یا

$$-\lim_{x \to \pm\infty} \int_{2x-x^2}^{0} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$\leq -\lim_{x \to \pm\infty} \int_{2x-x^2}^{0} \cos 1 \, dt$$

$$= -\left(\lim_{x \to \pm\infty} \cos(1)\left(x^2 - 2x\right)\right)$$

$$= -\cos(1)\,\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = -\infty$$

Scanned by CamScanner

پس نقطه ماکسیمم تابع در $x = ۱$ است و این تابع مینیمم ندارد.

ب). از تابع $F(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \int_{۰}^{x} (۱ - t^{۲}) \cos^{۲} t \quad \rightarrow \quad f^{'}(x) = (۱ - x^{۲}) \cos^{۲} x$$

لذا:

$$f^{'}(x) \geq ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad -۱ \leq x \leq ۱$$