ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

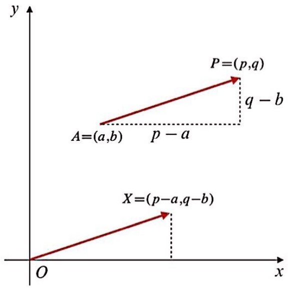
دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

یادآوری هندسه تحلیلی در فضای دوبعدی $\mathbb{R}^2$ و سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$

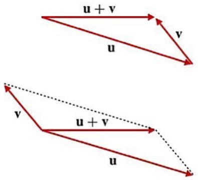
بردار با نقطه‌ی ابتدایی A
و نقطه‌ی انتهایی P:



جمع برداری:

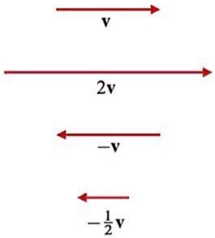
$$\vec{u} = \overrightarrow{(x_1, y_1)}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{(x_2, y_2)}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$



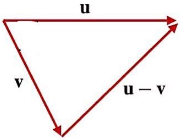
ضرب اسکالر:

$$t \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{(x_1, y_1)}$$
$$t\vec{v} = \overrightarrow{(tx_1, ty_1)}$$



تفاضل بردارها:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



فاصله دو نقطه $P_0=(x_0,y_0)$ و $P_1=(x_1,y_1)$:

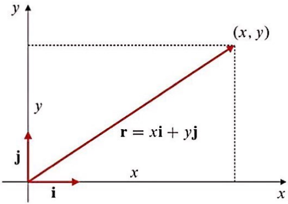
$$|P_0P_1|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$|tu|=|t||u|$$

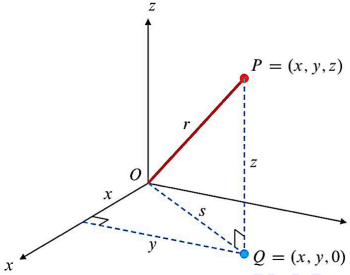
بردار یکه برداری است که طول آن برابر ۱ است. مثل i، $-j$ و $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

اگر $\vec{v}\neq 0$، آنگاه $\hat{v}=\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ برداری یکه است.

$$\vec{r}=(\overrightarrow{x,y})=x\underbrace{(\overrightarrow{1,0})}_{i}+y\underbrace{(\overrightarrow{0,1})}_{j}$$



یک نقطه مانند P با سه مؤلفه، در $\mathbb{R}^3$ و بردار مکان آن، یعنی r مطابق شکل است.



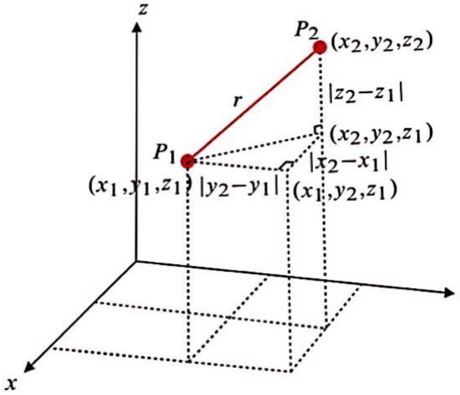
جمع برداری و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر است:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

$$t(x, y, z) = (tx, ty, tz); \quad t \in \mathbb{R}$$

فاصله دو نقطه‌ی P_1 و P_2 (مانند شکل) در $\mathbb{R}^3$ عبارتست از:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



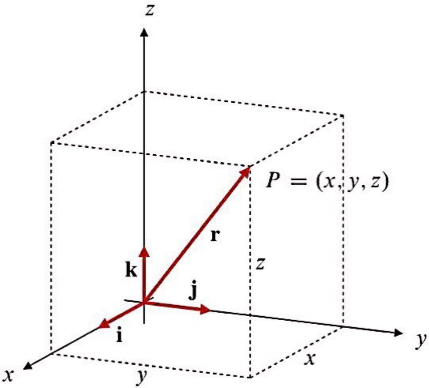
در $\mathbb{R}^3$، مطابق شکل، بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را داریم:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$P = xi + yj + zk$$



مثال:

$$\begin{cases} \vec{u} = i - j + 2k \\ \vec{v} = j - k \end{cases}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = i + k$$

$$-2\vec{v} = -2j + 2k$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{6}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(j - k)$$

ضرب داخلی/درونی/نقطه‌ای:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

خواص:

1. $u.v = v.u$
2. $u.(v+w) = u.v + u.w$
3. $(t \in \mathbb{R}) \quad (tu).v = t(u.v) = u.(tv)$
4. $u.u = |u|^2$

گزاره

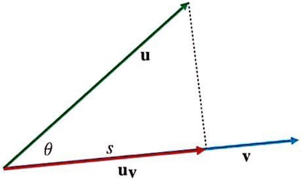
فرض کنید u و v دو بردار در $\mathbb{R}^2$ (یا $\mathbb{R}^3$) باشند و فرض کنید θ زاویه‌ی بین آن‌ها باشد $(0 \leq \theta \leq \pi)$. آن‌گاه:

$$u.v = |u||v| \cos\theta$$

بردارهای u و v بر هم عمودند $\Leftrightarrow u.v = 0$.

تصویر بردار:

تصویر بردار $\vec{u}$ بر بردار $\vec{v}$ که آن‌را با $\vec{u}_v$ نمایش می‌دهیم، با توجه به شکل، به‌صورت زیر است:



$$\vec{u}_v = (|u|\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|v|} = (|v||u|\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|v|^2} = \left(\frac{u.v}{|v|^2}\right)\vec{v}$$

بنابراین داریم:

$$\vec{u}_v = \left(\frac{u.v}{|v|^2}\right)\vec{v}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \underset{i=1,\dots,n}{x_i \in \mathbb{R}}\}$$

فرض کنید $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ و $X = (x_1, \dots, x_n)$ و $t \in \mathbb{R}$.

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$tX = (tx_1, \dots, tx_n)$$

$$|Y - X| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

$$X.Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

بردارهای یکه در $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

(پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$)

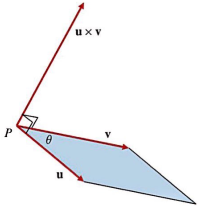
ضرب خارجی:

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) i + (u_3 v_1 - u_1 v_3) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$



خواص:

$1)\ u.(u\times v) = v.(u\times v) = 0$

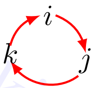
$2)\ |u\times v| = |u||v|\sin\theta$ (مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط u و v)

※ u و v موازی هستند $\Leftrightarrow$ $u\times v = 0$

۳) u، v، $u\times v$ یک سه وجهی راست دست تشکیل می‌دهند.

$4)\ i\times i = j\times j = k\times k = 0$

$5)\ i\times j = k \qquad j\times k = i \qquad k\times i = j$



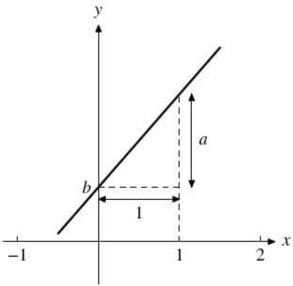
$6)\ u\times v = -v\times u$ پاد جابه‌جایی

$$7)\ u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$

$$(v + w) \times u = v \times u + w \times u$$

$$8)\ (tu) \times v = u \times (tv) = t(u \times v)$$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$:



$$\begin{aligned} L &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\} \\ &= \{(x, ax+b) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\underbrace{(x, ax)}_{x(1,a)} + (0,b) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= (0,b) + \underbrace{\{x(1,a) : x \in \mathbb{R}\}}_{<(1,a)>} \end{aligned}$$

صفحه در $\mathbb{R}^3$:

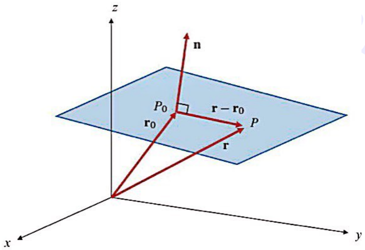
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{n} = Ai + Bj + Ck$$

صفحه گذرنده از P_0 و عمود بر $\vec{n}$ مجموعه‌ی نقاطی مانند $P = (x, y, z)$ است که:

$$(\overrightarrow{P - P_0}).\vec{n} = 0$$

بردار n را بردار نرمال صفحه گوییم.



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$Ax+By+Cz=D$$

که $D=Ax_0+By_0+Cz_0$.

اگر T و R و Q سه نقطه در صفحه‌ای باشند که روی یک خط راست نیستند، آن‌گاه داریم:

$$u=Q-T \qquad \vec{n}=u\times v$$
$$v=R-T$$

و صفحه گذرنده از سه نقطه‌ی T و R و Q عبارتست از مجموعه‌ی نقاطی مانند P به‌طوری‌که:

$$\vec{n}.(P-Q)=0$$

مثال

※ معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $P_0=(1,0,1)$ با بردار نرمال $\vec{n}=(1,-2,-1)$:

$$1(x-1)+(-2)(y-0)+(-1)(z-1)=0 \implies x-2y-z=0$$

※ معادله‌ی صفحه‌ی شامل نقاط $Q=(1,1,0)$، $R=(1,0,1)$ و $T=(0,1,1)$:

$$u=Q-T=(1,0,-1), \quad v=R-T=(1,-1,0) \implies$$

$$\vec{n}=u\times v=\det\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} i$$

$$-\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} j+\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} k=-i-j-k$$

بنابراین، $\vec{n}.((x,y,z)-Q)=0$، یعنی $-(x-1)-(y-1)-(z-0)=0$ معادله‌ی صفحه‌ی مورد نظر است.

خط در $\mathbb{R}^3$:

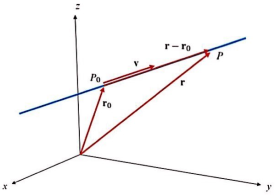
می‌خواهیم معادله خط ℓ، گذرنده از نقطه‌ی $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و موازی بردار ناصفر $\vec{v} = ai + bj + ck$ را به‌دست آوریم.

خط در $\mathbb{R}^3$:

$$P - P_0 = tv$$

$$P = P_0 + tv$$

$$\ell = \{P : P = P_0 + tv; t \in \mathbb{R}\} = P_0 + < v >$$



بردار v را بردار هادی خط گوییم.

معادله پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

※ اگر $a, b, c \neq 0$ آن‌گاه:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

※ مثلا اگر $c = 0$، $a, b \neq 0$ داریم:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0$$

مثال

※ معادله‌ی خط گذرنده از $P_0 = (1, 0, -1)$ با بردار هادی $u = (0, 1, -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{یا} \quad x = 1, \frac{y-0}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{یا} \quad P = (1, 0, -1) + t(0, 1, -1)$$

※ معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $P_0 = (1, 0, -1)$ و $P_1 = (1, 0, 1)$:

$$u = P_1 - P_0 = (0, 0, 2) \implies$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{یا} \quad P = (1, 0, -1) + t(0, 0, 2)$$

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$:

بردارهایی ناصفر که همراستا نیستند در $\mathbb{R}^2$ را مستقل خطی گوییم.

نمادگذاری : $< A, B >= \{tA + sB : t, s \in \mathbb{R}\}$

اگر A, B دو بردار مستقل خطی باشند آن‌گاه:

$$< A, B >= \mathbb{R}^2$$

⁎ به هر دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ یک پایه گفته می‌شود.

مثال: i, j یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

می‌توان دید که گزاره‌های زیر معادلند:

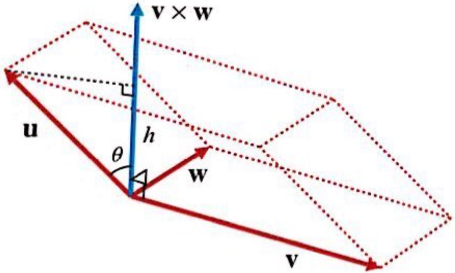
۱. A و B دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ هستند.

۲. اگر $xA + yB = 0$، که x و y اعدادی حقیقی هستند، آن‌گاه $x = y = 0$.

در $\mathbb{R}^3$:

سه بردار ناصفر $u = (u_1, u_2, u_3)$، $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $w = (w_1, w_2, w_3)$ را در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی گوییم، هرگاه حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط این سه بردار ناصفر باشد یا معادلاً دترمینان ماتریس زیر ناصفر باشد:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$



مطابق شکل، دترمینان ماتریس مذکور، برابر است با:

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = u.(v \times w)$$

سه بردار ناصفر مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ را یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ نیز می‌نامیم.

نمادگذاری : $$< A, B, C >= \{tA + sB + rC : t, s, r \in \mathbb{R}\}$$

ثابت می‌شود که اگر A, B, C مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشند، آن‌گاه

$$< A, B, C >= \mathbb{R}^3$$

می‌توان دید که گزاره‌های زیر معادلند:

۱. A, B, C سه بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ هستند.

۲. اگر $xA + yB + zC = 0$، که x, y, z اعدادی حقیقی هستند، آن‌گاه

$$x = y = z = 0.$$

مثال

نشان می‌دهیم که بردارهای $A=(1,1,0)$، $B=(1,0,1)$ و $C=(0,1,1)$ مستقل خطی (و بنابراین پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$) هستند.

روش اول: کافی است نشان دهیم که دترمینان ماتریس زیر ناصفر است:

$$\det\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}-\det\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=-2$$

روش دوم: فرض کنید $x,y,z\in\mathbb{R}$ طوری هستند که $xA+yB+zC=\vec{0}$. باید نشان دهیم که $x=y=z=0$. داریم:

$$xA+yB+zC=x(1,1,0)+y(1,0,1)+z(0,1,1)=(x+y,x+z,y+z)$$

پس باید $x+y=x+z=y+z=0$، که نتیجه می‌دهد $x=y=z=0$.