- مثال: (برخی روابط مهم):

① $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad ; |x|<1$$

$$* \; f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow f^{(100)}(0) = 100!\, a_{100} = \boxed{100!}$$

② $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$* \; f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f^{(50)}(0) = 50!\, a_{50} = \boxed{50! \times 51} \quad ; |x|<1$$

③ $$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

$$; |x|<1$$

$$* \; f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \rightarrow f^{(15)}(0) = ?$$

$$f^{(15)}(0) = 15!\, a_{15} = \boxed{15! \times (17 \times 16)}$$

④ $$\frac{1}{1+x} \overset{x=-t}{=\!=} \frac{1}{1-t} \overset{|t|<1}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad ; |x|<1$$

$$* \; f(x)=\frac{1}{1+x} \longrightarrow f^{(11)}(0)=?$$

$$f^{(11)}(0)= 11!\, a_{11} = \boxed{-11!}$$

⑤ $$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

$$\overset{|t|<1}{\underset{|x|<1}{=\!=}} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad ; \quad |x|<1$$

حال ، به بررسی سرحدته بازه می‌پردازیم :

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$$: واگرا

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$: همگرا

$$\xrightarrow{\text{از قضیه‌ی آبل}} \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \boxed{\ln 2}.$$

مثال : نمایش سری توانی برای $tg^{-1}x$ بنویسید : (حول صفر)

$$tg^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\overset{\text{از شماره ی } 4}{\underset{\text{در مثال قبل، با قرار دادن } x=t^2}{=}} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad |x|<1$$

حال، به بررسی سرو ته بازه می پردازیم :

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

همگرا

$\xRightarrow[\text{آبل}]{\text{از قضیه}}$ $\lim_{x \to (-1)^+} tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}$$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$: همگرا

$\xRightarrow{\text{از قآبل}}$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

- مثال: مطلوبست مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}$.

حل: با جایگذاری در مثال قبل، یعنی $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ که

در بازه‌ی $(-1, 1)$ است، داریم:

$$\underbrace{tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{\pi/6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}$$

- مثال: مطلوبست $(tg^{-1}x)^{(1399)}(0)$ و $(tg^{-1}x)^{(86)}(0)$.

حل:

$$a_m = \begin{cases} 0 & ; m = 2n \\ \frac{(-1)^n}{2n+1} & ; m = 2n+1 \end{cases}$$

$$f(x) = tg^{-1}x \Rightarrow f^{(m)}(0) = m!\, a_m \Rightarrow \begin{cases} f^{(86)}(0) = 0 \\ f^{(1399)}(0) = (1399)! \frac{(-1)^{699}}{1399} = -(1398)! \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

حل: مجموع سری های توانی $I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$, $I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ را بیابید.

$$I_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad \left(x=\tfrac{1}{3}\right) \qquad -1<x<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } x} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{3}} I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$I_2 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{(-x+1)^3} = \sum n^2 x^{n-1} \xrightarrow{\text{ضرب در } x} \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

$$x = \frac{1}{2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}$$

- مثال: مطلوبست مقدار $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$.

حل: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \; ; |x|<1$

انتگرال گیری از طرفین (قبلاً دیدیم).

$$\Longrightarrow Ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \; ; |x|<1$$

که در بازه همگرایی است.

$$\xrightarrow{x=1/3} I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \boxed{Ln(4/3)}.$$

مثال تابع $f(x)=\frac{1}{2+x}$ را به صورت سری توانی به مرکز یک بنویسید و سپس شعاع و بازه همگرایی آن را مشخص کنید.

$$f(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{x-1}{3})}$$

$$u:=-\frac{x-1}{3}\rightarrow f(u)=\frac{1}{3}\frac{1}{1-u}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}u^k \qquad |u|<1$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}(-\frac{x-1}{3})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}(x-1)^k \qquad |x-1|<3$$

پس شعاع همگرایی سری برابر سه می‌باشد و چون سری در نقاط $x=-2$ و $x=4$ واگراست پس بازه‌ی همگرایی برابر $(-2,4)$ است.