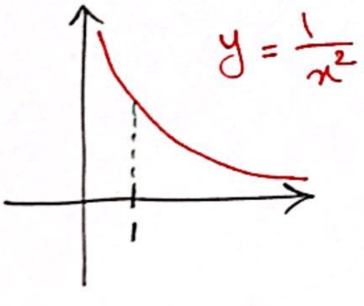
انتگرال های مجازی یا ناسره :

اگر طول بازه‌ی (a,b) نامتناهی باشد، یا اگر

$$\lim_{\substack{x\to a^+ \\ x\to -\infty}} f(x) \quad \text{یا} \quad \lim_{\substack{x\to b^- \\ x\to +\infty}} f(x)$$

بی‌کران باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,dx$ را یک انتگرال ناسره یا مجازی گوییم.

مثال :



$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \quad \text{و} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

هر دو مجازی هستند.

* اگر f روی $[a,+\infty)$ یا $(-\infty, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه داریم:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$

* اگر f روی (a,b) پیوسته باشد و $\lim_{x \to a^+ \text{ یا } b^-} f(x)$ بی‌کران باشد، آن‌گاه داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to a^+} \int_R^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to b^-} \int_a^R f(x)\,dx$$

* اگر مقدار چنین انتگرال هایی، عددی متناهی شود، گوییم انتگرال ناسره، همگراست و در غیر این صورت، گوییم انتگرال ناسره، واگراست.

* انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ را به صورت

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

در نظر می‌گیریم و گوییم چنین انتگرالی همگراست، هرگاه هر دوی انتگرال های فوق همگرا باشند.

مثال : همگرا یا واگرا ؟

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_0^R \sin x \, dx$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left(-\cos x \right)_0^R$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left(-\cos R + 1 \right)$$

این حد موجود نیست $\Leftarrow$ انتگرال ناسره فوق،

واگرا می باشد.

مثال : همگرا یا واگرا؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{+\infty} \sin x \, dx$$

در مثال قبل دیدیم که $\int_{0}^{+\infty} \sin x \, dx$ واگراست. پس انتگرال مورد سؤال نیز واگراست.

* قضیه : اگر $+\infty > a > 0$، آن گاه :

(1)
$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^P} : \begin{cases} \dfrac{a^{1-P}}{P-1} & \text{همگرا به} : P > 1 \\ \text{واگرا} & : P \leq 1 \end{cases}$$

② $\int_0^a \frac{dx}{x^p} : \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{1-p} \quad \text{همگرا به:} & ; p<1 \\ \text{واگرا} & ; p\geq 1 \end{cases}$

اثبات ①: ابتدا فرض کنید $p\neq 1$، آن‌گاه:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right)_a^R$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R^{1-p}}{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}\right)$$

$\xrightarrow{p>1} \frac{a^{1-p}}{p-1}$:همگرا به

$\xrightarrow{p<1} +\infty \rightsquigarrow$ واگرا

حال، فرض کنید $P=1$:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to+\infty}\left(\ln x\right)_a^R$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\ln R-\ln a\right) = +\infty$$

$\Downarrow$

واگرا

* قضیه (مقایسه) : فرض کنید $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و g و f روی (a,b) پیوسته باشند و برای هر x از (a,b)، داشته باشیم: $0 < f(x) < g(x)$. در این صورت:

اگر $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ همگرا است.

(و به عبارتی، اگر $\int_a^b f(x)dx$ واگرا باشد $\Leftarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ واگرا است.)

* قضیه (مقایسه‌ی حدی): اگر f, g روی (a,b) پیوسته و مثبت باشند و $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$،

آن‌گاه داریم:

① اگر $0 \neq l < \infty \Leftarrow \int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b g(x)dx$ هم‌رفتارند.

② اگر $l = 0 \Leftarrow$ (اگر $\int_a^b g(x)dx$ همگرا $\Leftarrow \int_a^b f(x)dx$ همگرا).

③ اگر $l = +\infty \Leftarrow$ (اگر $\int_a^b g(x)dx$ واگرا $\Leftarrow \int_a^b f(x)dx$ واگرا).

قضیه:

اگر f و g دو تابع پیوسته روی $[a,b)$ باشند و $-\infty \le a < b \le +\infty$

اگر $\int_a^b f$ و $\int_a^b g$ هردو همگرا باشند و $A,B \in \mathbb{R}$ باشد

آنگاه $\int_a^b Af + Bg$ نیز همگرا است.

قضیه:

اگر f تابعی پیوسته روی (a,b) که $-\infty \le a < b \le +\infty$. چنانچه

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\int_a^b |f|$ همگرا باشد آن گاه $\int_a^b f$ نیز همگراست.

اثبات: $g(x) = |f| + f$ در

$$\Rightarrow 0 \le g(x) \le 2|f|$$

حال $\int_a^b 2|f(x)|dx$ همگراست بنابراین $\int_a^b g$ نیز طبق آزمون مقایسه همگراست، حال چون $\int_a^b |f(x)|dx$ نیز همگراست. از قضیه قبل $\int_a^b g-|f|$ نیز همگراست پس $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگراست.

مثال: اگر $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ باشد، در مورد همگرایی آن بحث کنید.

$$I=\underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx}_{I_2}$$

چون e^{-x^2} در $[0,1]$ پیوسته است پس $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ وجود دارد و به عبارتی همگراست (انتگرال معمولی)

حال $\forall x \ge 1 \quad x^2 \ge x \Rightarrow e^{x^2} \ge e^{x}$

$$0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$$

(از آزمون مقایسه اگر $\int_1^{+\infty} e^{-x}$ همگرا باشد، I_2 نیز همگراست)

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx = \lim_{x \to R} -e^{-x}\Big]_1^R =$$

$$e^{-1}$$

پس انتگرال دوم همگراست یعنی I_2 همگراست پس چون I_1 همگراست

پس I نیز همگراست.

مثال: همگرا یا واگرا؟

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_{1}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$\underline{\underline{U = 1/x \ , \ dV = \sin x\, dx}}$$
$$dU = \frac{-dx}{x^2} \ , \ V = -\cos x$$

$$\lim_{R \to +\infty} \left[\left(\frac{-\cos x}{x} \right)_1^R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\, dx \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{R \to +\infty} \left(-\frac{\cos R}{R} + \frac{\cos(1)}{1} \right)}_{\text{عدد متناهی}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx}_{\text{کافی است این را بررسی کنیم.}}$$

J

داریم: $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad , \quad \forall x \geq 1$

چون $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست، پس $\int \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ نیز همگراست.

پس از قضیهٔ انتگرال نامساوی J نیز همگراست. پس I همگراست.

مثال: همگرا یا واگرا؟

① $$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

حل:

$$I=\underbrace{\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}}_{I_2}$$

برای I_1: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1\neq 0$$

حال، چون $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، پس I_1 نیز همگراست.

برای I_2 :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1$$

حال، چون $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ همگراست، پس I_2 نیز

همگراست.

$\Leftarrow$ I نیز همگراست.

② $$I = \int_0^{\pi^2} \frac{dx}{(1-\cos\sqrt{x})^{\alpha}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{(1-\cos\sqrt{x})^{\alpha}}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha}}{2^{\alpha}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right)^{2\alpha}}$$
$$= 2^{\alpha} \neq 0$$

پس I و $\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{x^\alpha}$ هم رفتارند. پس:

اگر $\alpha < 1 \longrightarrow I$ همگرا

اگر $\alpha \geq 1 \longrightarrow I$ واگرا

در مورد همگرایی انتگرال‌های ناسره زیر بحث کنید:

ⓐ برای کدام $p>0$ ، $I_p = \int_0^1 \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}}$ همگراست.

$$g(x) = \frac{1}{x^{3/4}} \quad , \quad f(x) = \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{3/4}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/4} |\ln x|^p \underset{=}{\overset{\text{قضیه رشد}}{=}} 0 \Rightarrow$$

چون $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ همگراست از آزمون مقایسه حدی داریم برای هر $p>0$ ، $\int_0^1 \frac{|\ln x|^p}{\sqrt{x}}$ نیز همگراست.