نیروی جاذبه: نیرویی است که بین هر دو جسم اثر می‌کند. مقدار جاذبه بستگی مستقیم به جرم جسم دارد. لذا جسم با جرم بیشتر، جاذبهٔ بزرگ‌تری دارد. اگر جرم جسم ۱: m_1 ، جرم جسم ۲: m_2

$$\text{مقدار } F_G \propto m_1 \cdot m_2$$

همچنین اگر فاصلهٔ بین دو جسم r باشد، مقدار نیروی جاذبه با $F_G \propto \frac{1}{r^2}$ کاهش می‌یابد.

قانون گرانش نیوتن:

$$\rightarrow \underset{\text{مقدار}}{F_G} \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \rightarrow \boxed{\underset{\text{مقدار}}{F_G} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

ثابت گرانش: 6.67×10^{-11}

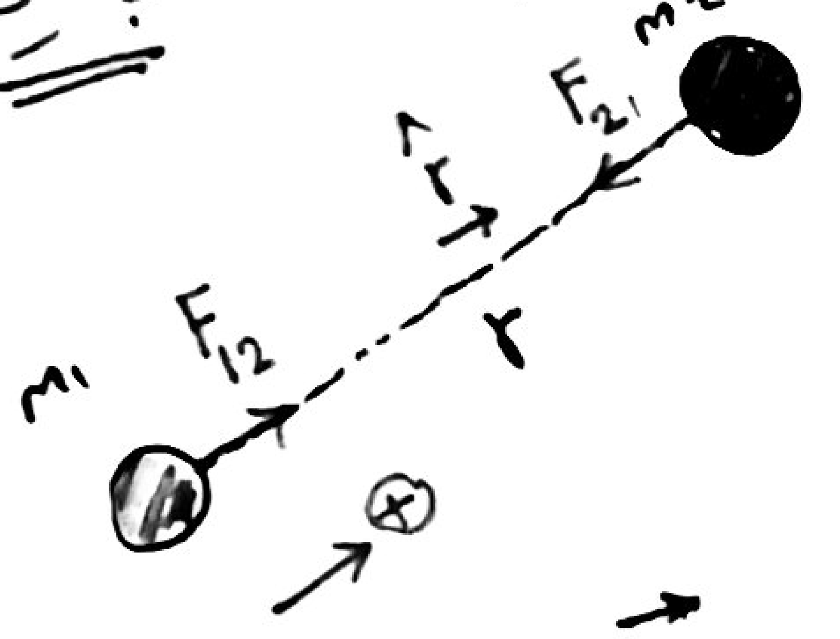
G بسیار کوچک است، ولی عالی. بیش از این بود، روی سطح زمین می‌چسبیدیم، کمتر از این بود، به پرواز در می‌آمدیم.

توجه: فرمول F_G شبیه قانون کولن برای نیروی الکترواستاتیکی بین دو بار Q_1 و Q_2 به فاصلهٔ r از هم است:

$$F_C = K\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad \text{و} \quad F_G = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ولی نیروی گرانش برخلاف نیروی الکترواستاتیکی که بسته به علامت‌های Q_1 و Q_2 می‌تواند جاذبه یا دافعه باشد: فقط ربایشی است!

لذا شکل برداری قانون گرانش نیوتن: ($\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ برداری به اندازه واحد در جهت $\vec{r}$)



F_{12} : نیروی گرانشی وارده بر m_1 توسط m_2

F_{21} : نیروی گرانشی وارده بر m_2 توسط m_1

$$\vec{F}_{12} = +G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\hat{r} \quad \text{و} \quad \vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\hat{r} \rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

★ زمین و سیب:

اگر زمین به جرم M و سیب به جرم m را در نظر بگیریم، به هر دو یک مقدار نیروی گرانشی F_G وارد می‌شود:

$$F_G = \frac{GM \cdot m}{R^2} \rightarrow$$ این نیرو سبب شتاب a_g در سیب و a'_g در زمین می‌شود:

$$\underset{\text{سیب}}{m}\, a_g = F_G = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow \underset{\text{شتاب سقوط سیب}}{a_g} = \frac{GM}{R^2}$$

$$\underset{\text{زمین}}{M} \cdot a'_g = F_G = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow \underset{\text{شتاب حرکت زمین به سوی سیب}}{a'_g} = \frac{Gm}{R^2}$$

$M \gg m \rightarrow a_g \gg a'_g$

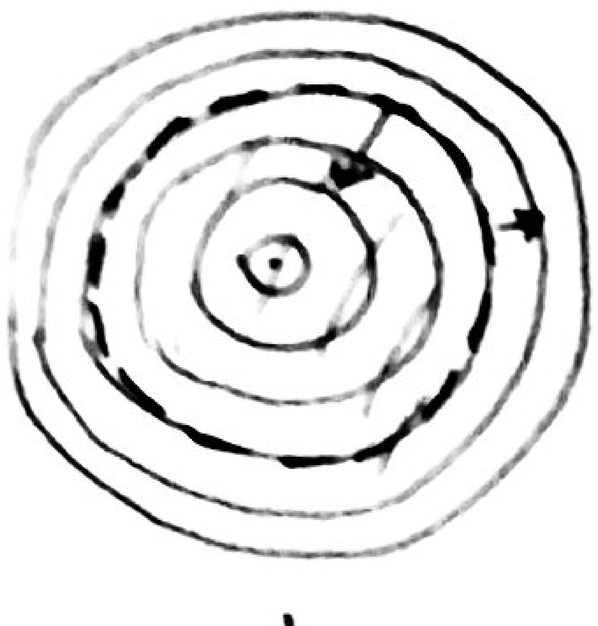
لذا هر چند به اثر گرانش، زمین هم در اثر نیروی F_G باید به سوی سیب با شتاب a'_g حرکت کند، ولی a'_g بسیار کوچک و قابل صرف‌نظر کردن است:

$a'_g \simeq 10^{-25}\, m/s^2$

ولی $a_g \simeq 9.8\, m/s^2$

قضیه پوسته گرانش: مهم

اگر جسمی کروی داشته باشیم می توانیم آن را به تعداد پوسته های کروی از جرم ها در نظر بگیریم:



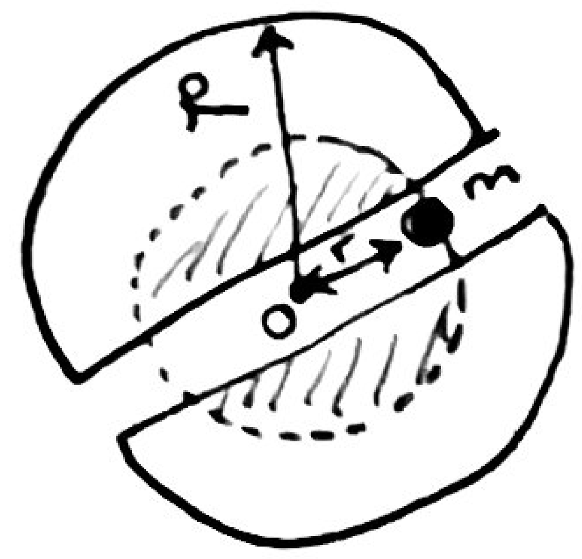
برای یک پوسته فرضی خط چین: شکل و عمل نیروی گرانش طوری است که:

الف) جرم های داخل خط چین طوری بر جرم های بیرون خط چین نیروی گرانشی وارد می کنند که گویی تمام جرم داخل خط چین در نقطه مرکز جرمش قرار دارد.

مشابه

m2 = جرم داخل خط چین

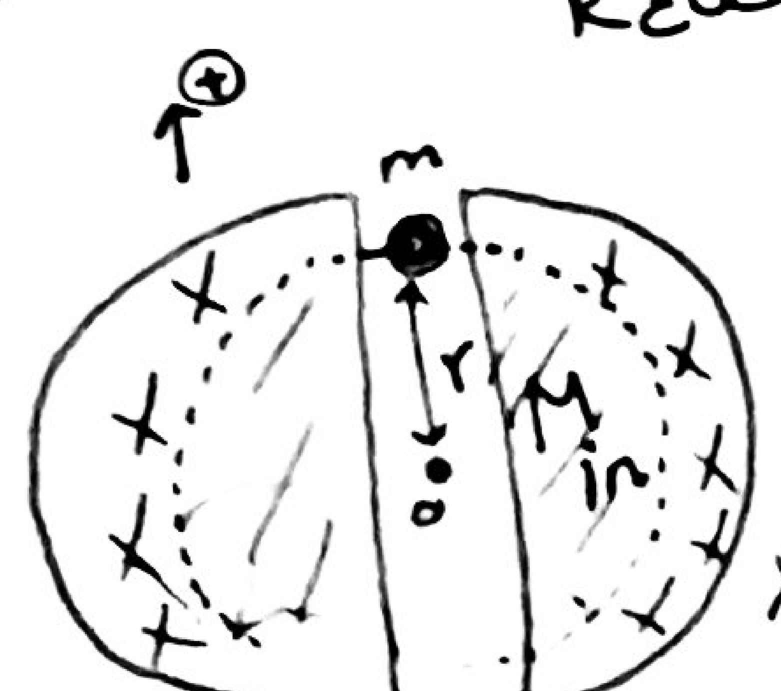
ب) اگر یک جرم m فرضی داشته و بخواهیم نیروی گرانش بین آن و یک جسم کروی را هنگامی که جرم m در داخل (شعاع فرضی r) آن قرار دارد حساب کنیم:



طبق قضیه پوسته: فقط جرم هاشور زده داخل خط چین بر جرم m در نیروی گرانشی اثر می گذارند و طبق بند (الف) هم این مقدار جرم هاشور زده گویی در مرکز جرم یعنی نقطه O متمرکز هستند. لذا اگر جرم کل کره M و شعاعش R باشد و جرم هاشور M' و فاصله اش تا جرم m برابر r: $F_G = \frac{GmM'}{r^2}$ مهم است.

☆ کاربردهای قضیه پوسته گرانشی:

مسئله: کپسولی به جرم m می خواهد تونلی از قطب شمال تا جنوب را درون زمین به جرم M طی کند و فرض می کنیم که جرم زمین یکنواخت است. حرکت را تحلیل کنید؟ شعاع R



$$F_G = \frac{Gm\cdot M_{in}}{r^2}$$
طبق قضیه پوسته

در بیرون خط چین هاشور X ربطی به نیروی گرانشی ندارند. در درون خط چین: هاشور /// انگار در نقطه O تمرکز دارند که به فاصله r در یک لحظه از کپسول قرار دارند (= جرم M_{in}).

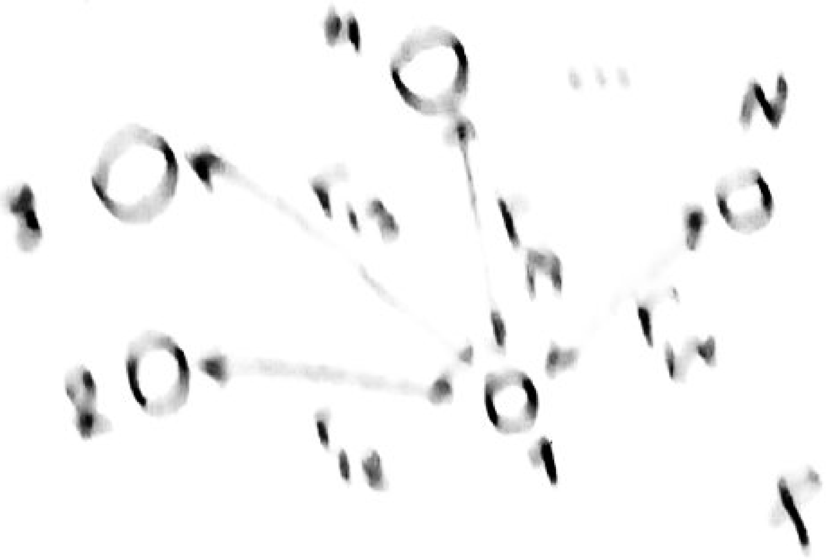
$$\rho = \frac{M}{V_{\text{زمین}}} = \frac{M_{in}}{V_{\text{هاشور}}} \to \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_{in}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$\Rightarrow M_{in} = M\cdot\frac{r^3}{R^3} \to \underbrace{F_G}_{\text{مقدار}} = \underbrace{\frac{GmM}{R^3}}_{A}\cdot r$$

$$\vec{F}_G = -Ar$$

شکل $\vec{F}_G$ مانند نیروی فنر $\vec{F} = -kr$ است که یک نیروی نوسان ساده است. در نتیجه کپسول بین دو قطب تا ابد در حال نوسان خواهد بود.

گرانش حاصل چند جرم: اگر بیش از دو جرم داشته باشیم، مانند شکل، نیروی کل وارد بر جرم ۱ را حساب می‌کنیم:



$$\vec F_{1,net} = \vec F_{12} + \vec F_{13} + \dots + \vec F_{1n} = \sum_{i=2}^{n} \vec F_{1i}$$

زمین کروی یکنواخت و جهت [illegible]

سؤال: آیا همواره وزن اندازه‌گیری شده برابر با نیروی گرانش وارد بر جسم از طرف زمین است؟

جواب: چون زمین با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود از قطب شمال به قطب جنوب می‌گردد، اگر جسم m در خط استوا (به شعاع R از مرکز) قرار داشته باشد، همراه با زمین با سرعت ω در حال چرخش است.

به دلیل اینکه کل جرم زمین در O متمرکز و به فاصله R از جسم m است.

به دلیل چرخش جسم m یک نیروی جانب به مرکز $\frac{mv^2}{R}$ بر جسم اعمال می‌شود که $v = R\omega$

$\Rightarrow F_c = mR\omega^2$

عامل این نیروی جانب به مرکز چیست؟ $\Rightarrow N - F_G$

یک دور: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $\begin{cases} \Delta\theta = 2\pi \\ \Delta t = 24h \end{cases}$

و می‌دانیم N همان مقدار اندازه‌گیری شده توسط ترازو یا وزن جسم است

$\Rightarrow N = mg = W$ مقدار

$+mg - F_G = -mR\omega^2$ (۱)

$F_G = m \cdot a_G$ نیروی گرانشی وارد بر جسم m $\Rightarrow W = F_G - mR\omega^2$

$g = a_G - R\omega^2$ (۲)

$R = 6.37\times10^6 m$ → $0.034\ m/s^2$ است

(۱) وزن جسم در روی خط استوا به اندازه $mR\omega^2$ کمتر از نیروی گرانشی وارد بر آن است و این کاهش در خط استوا بیشینه است. در خط قطب شمال می‌بینیم که $g = a_G$ می‌شود. مقدار این کاهش ۰ می‌باشد، $0.034\ m/s^2$

(۲) شتاب سقوط آزاد g وقتی با شتاب گرانشی a_G برابر است که جسم به جرم m روی ترازو در قطب باشد.

سیاه‌چاله‌ها: در ستاره‌ها F_G ذرات داخل جرم نیروی گرانشی به سمت هسته ستاره دارند. ولی در اثر سوختن (واکنش هسته‌ای) نیروی F_B یک فشار ایجاد می‌شود که با F_G متوازن می‌شود. $F_G = F_B$

با اتمام واکنش‌های هسته‌ای در یک ستاره، $F_G > F_B$ و لذا کم‌کم جرم ستاره در خودش فشرده می‌شود، تا اینکه تمام جرم ستاره‌ای در یک کره کوچک، با چگالی بسیار سنگین جمع می‌شود، در نتیجه [illegible] ← یک عامل بسیار قدرتمند F_G برای سایر جرم‌هایی که در اطراف آنها هستند و لذا در اثر این نیروی عظیم گرانشی، هر جسمی که به آن نزدیک شود جذب و حتی نور هم به طرف آن رفته و در آن به دام می‌افتد ← سیاه‌چاله. در مرکز کهکشان راه شیری هم یک سیاه‌چاله است که سبب نگه داشتن تعداد عظیمی از اجرام و ستارگان در اطراف خود می‌شود.

جرم سیاه‌چاله‌ها [illegible] و [illegible] است.

انرژی پتانسیل گرانشی بین هر دو ذره مانند زمین به جرم M و توپی به جرم m

فرض کنید توپ را به سمت بالا پرتاب می‌کنیم و در حال بالا رفتن است ← چون نیروی F_G بین زمین و توپ در حین بالا رفتن به آن وارد می‌شود، در هر فاصله دلخواه r بین مرکز زمین و توپ: $F(r)=\frac{GM.m}{r^2}$.

حالا که توپ در حال تغییر فاصله است ← کاری توسط نیروی گرانشی F_G روی توپ در حال انجام است:

برای یک جابجایی امکانی dr: $W=\int F(r).dr.\cos(\vec{F},\vec{dr}) = -\int F(r).dr$

مسئله: مقدار کار نیروی گرانشی (انرژی پتانسیل) در فاصله R_0 (نقطه P) بین مرکز زمین و توپ؟
← یک کران انتگرال R_0 است. کران دیگر؟ یک نقطه مرجع انتخاب می‌کنیم تا خبری از نیروی گرانشی در آنجا نباشد (بین زمین و جسم m) و لذا $r=\infty$ بهترین انتخاب است.

$$\to W=-\int_R^\infty \frac{GmM}{r^2}dr = GMm.\left(\frac{1}{r}\Big|_R^\infty\right) = -\frac{GmM}{R_0}$$

$$\Delta U=-W=\frac{GmM}{R}=\cancel{U_\infty}^{0}-U_R \Rightarrow \boxed{U_R=-\frac{GmM}{R}}$$

انرژی پتانسیل گرانشی بین جسم و زمین

در $R=\infty$ توجه کنیم که $W=U=0$ و ذره کاملاً متوقف می‌شود. و دیگر حرکتی ندارد.

$K=0$, $U=0$ در $r=\infty$

* سرعت فرار:

شاتلی از سطح زمین با سرعت v و جرم m پرتاب می‌شود. سرعتش حداقل چقدر باشد تا از نیروی گرانشی زمین بتواند فرار کند؟

در سطح زمین: $r=R \to K=\frac{1}{2}mv^2$ ، $U=-\frac{GM.m}{R}$

در $r=\infty$: $U=K=0$

بقای انرژی مکانیکی $\to \frac{1}{2}mv_f^2-\frac{GMm}{R}=0+0 \Rightarrow v_f=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$

زمین $v_f=11.2\ \frac{Km}{s}$

مشتری $v_f=59.5\ \frac{Km}{s}$

خورشید $v_f=618\ Km/s$

ستاره نوترونی $v_f=2\times10^5\ \frac{Km}{s}$

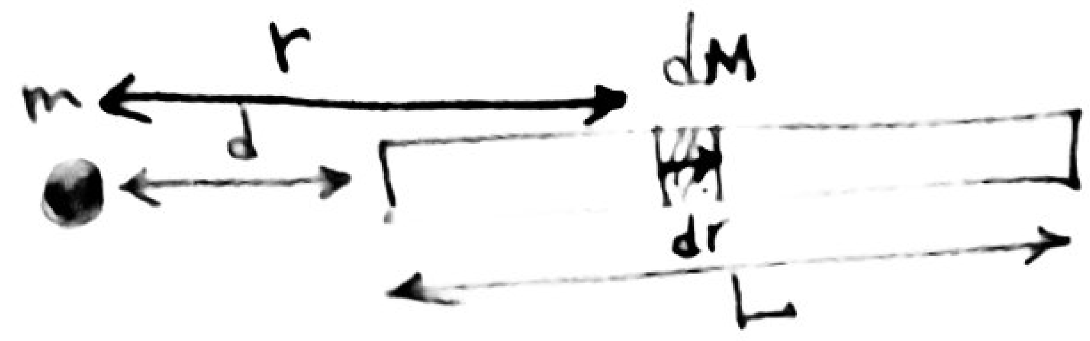
توجه: رابطه بین نیروی F و انرژی پتانسیل U:

$$F=-\frac{du}{dr} \xrightarrow{\text{امتحان}} u=-\frac{GMm}{r} \to F_G=-\frac{du}{dr}=-\frac{GMm}{r^2}$$

*

فصل ۱۳ - گرانش - حل مسایل

م ۱۰۳. برای ذره‌ای به جرم m که در فاصله d از یک میله یکنواختی به جرم M و به طول L قرار دارد، بزرگی نیروی گرانشی F وارد بر ذره توسط میله را حساب کنید؟



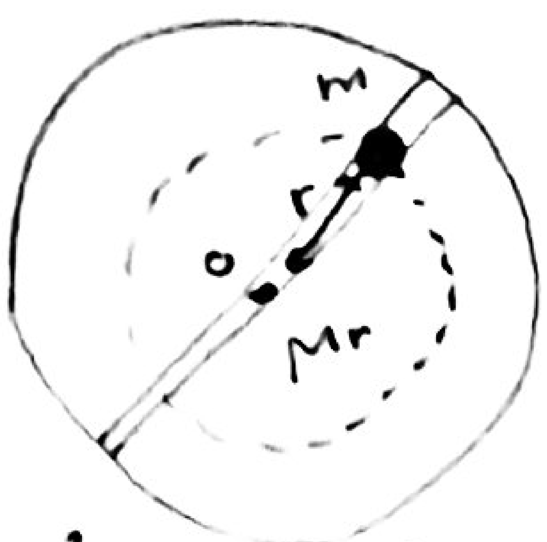
نیروی گرانشی بین m و المان جزئی dM به فاصله r از جرم m:

$$\left.\begin{array}{l} dF_G = \dfrac{G m . dM}{r^2} \\ dM = \lambda . dr \text{ و } \lambda = \dfrac{M}{L} \Rightarrow dM = \dfrac{M}{L} dr \end{array}\right\} \Rightarrow F_G = \frac{GmM}{L}\int_{r=d}^{r=L+d} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow F = G\frac{M.m}{d(d+L)}$$

م ۲۰۳. کره توپر یکنواختی به شعاع R در سطح خود شتاب گرانشی a_g ایجاد می‌کند. در چه فاصله‌ای از مرکز کره الف) در داخل و ب) در خارج کره: نقطه‌ای وجود دارد که شتاب a_{gr} آنها $\frac{a_g}{3}$ باشد؟

الف) داخل کره به فاصله r از o:



(جرم کره‌ی هاشور Mr)

$$\left.\begin{array}{l} F_G = \dfrac{Gm.M_r}{r^2} \rightarrow a_{gr} = \dfrac{GM_r}{r^2} \\ M_r = ?\quad \rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{M_r}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow M_r = \dfrac{r^3}{R^3}M \end{array}\right\} \rightarrow a_{gr} = \frac{GM}{R^3}.r$$

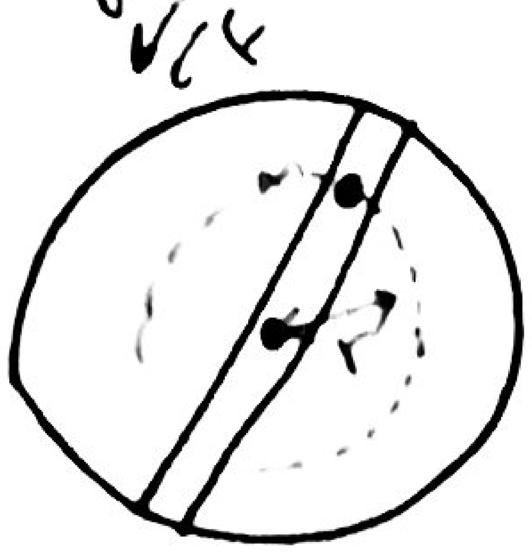
$a_g = \frac{GM}{R^2}$ هم که $\rightarrow a_{gr} = \frac{1}{3}a_g \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{3} \rightarrow r = \frac{R}{3}$

ب) در خارج کره به فاصله r از o:

$$F_G = \frac{GM.m}{r^2} \rightarrow a_{gr} = \frac{GM}{r^2} \quad , \quad a_g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow$$

$$a_{gr} = \frac{1}{3}a_g \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{R^2} \rightarrow r = \sqrt{3}.R$$

م ۳۰۳- اگر یک بسته پستی به جرم m را در تونلی که از مرکز زمین می‌گذرد رها کنیم، با چه سرعتی از مرکز زمین می‌گذرد؟



تغییرات انرژی جنبشی: $\Delta K = W = \int F.dr$

$$\left.\begin{array}{l} K_f - K_i = K_f = \displaystyle\int -\frac{GmM_r}{r^2} \end{array}\right\} K_f = -\frac{GmM}{R^3}\int_R^0 r.dr$$

از R: $R^2/2$

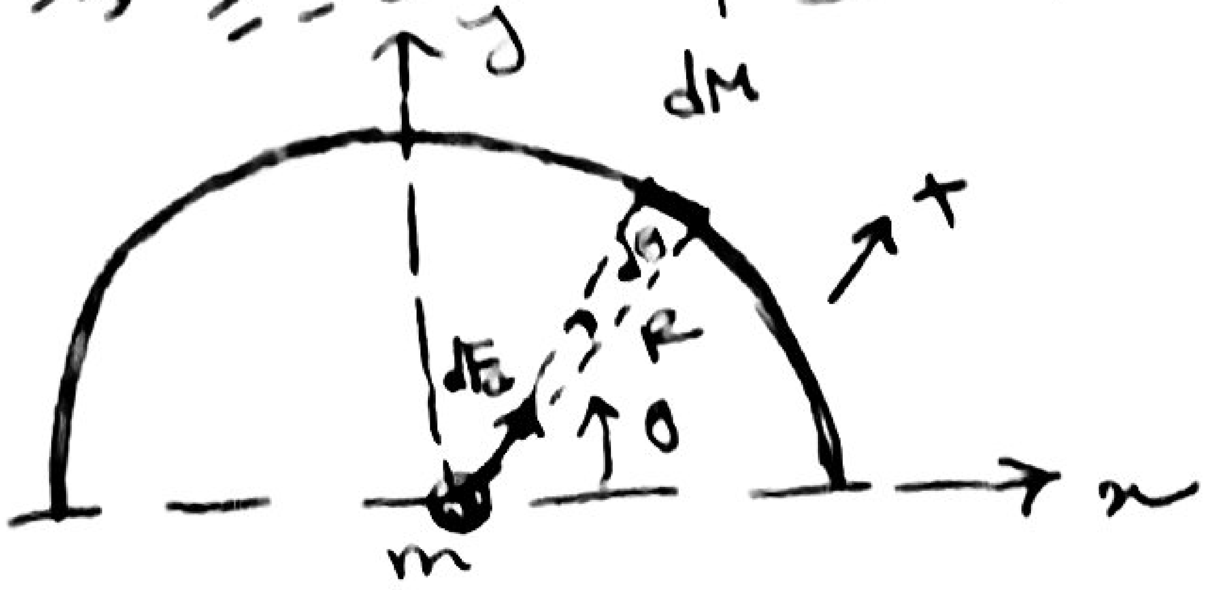
$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{GmM}{2R} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Mr جرم درون هاشور

$M_r = \frac{r^3}{R^3}.M$

$\vec{F}.\vec{dr} = F\,dr\cos\pi = -F.dr$

۴.۲ میله نازکی به شعاع R و جرم M شبه دایره‌ای را تشکیل می‌دهد نیروی گرانشی وارد بر ذره‌ای به جرم m در مرکز شبه دایره چقدر است؟



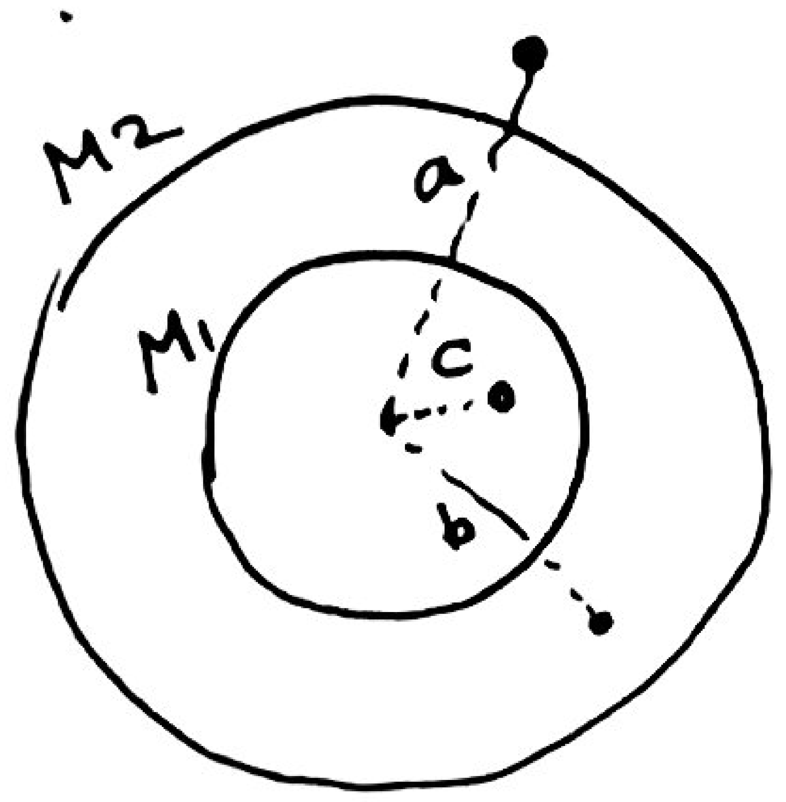
dF_G نیروی گرانشی بین m و dM است. از تقارن:

$$dF_{G\,\text{برآیند}} = dF_G \cdot \sin\theta \; \hat{e}_y$$

$$dF_G = \frac{G m \cdot dM}{R^2} \quad \text{و} \quad dM = (R \cdot d\theta) \cdot \lambda \quad \text{و} \quad \lambda = \frac{M}{\pi R}$$

$$\Rightarrow F_{G\,\text{برآیند}} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{G \cdot M \cdot m}{\pi R^2} \cdot \sin\theta \, d\theta = \frac{2GMm}{\pi R^2}$$

۵.۲ دو پوسته کروی هم مرکز به جرم‌های M_1 و M_2 طبق شکل داریم. بزرگی نیروی گرانشی خالص وارد بر ذره‌ای به جرم m در حالتی که ذره به فاصله شعاعی الف) a، ب) b و ج) c باشد، حساب کنید؟



$$a \rightarrow F_{G\,\text{وارد بر } m} = \frac{G \cdot m \cdot (M_1+M_2)}{a^2}$$

$$b \rightarrow F_{G\,\text{وارد بر } m} = \frac{G \cdot m \cdot M_1}{b^2}$$

$$c \rightarrow F_{G\,\text{وارد بر } m} = 0$$