مثال معادلات را حل کنید.

I) $\underbrace{(x^2-y^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2xy}_{N(x,y)}\,dy=0$

قدم دیگر: $y' \leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \rightarrow f(x,y)$

توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو همگن از درجه $n=2$ می‌باشند بنابراین معادله همگن است.

لذا فرض می‌کنیم $y=xv$

$y=xv \longrightarrow dy=x\,dv+v\,dx$

بجایگذاری خواهیم داشت:

$(x^2-x^2v^2)\,dx+2x^2v(x\,dv+v\,dx)=0$

$\xrightarrow{\div x^2} (1-v^2)dx+2xv\,dv+2v^2dx=0$

$\longrightarrow (1+v^2)\,dx=-2xv\,dv \longrightarrow \left(\frac{dx}{x}\right)=-\frac{2v\,dv}{1+v^2}$

$\xrightarrow{\int} \ln x=-\ln^{1+v^2}+\ln c \rightarrow \ln x+\ln^{1+v^2}=\ln c$

$x(1+v^2)=c \xrightarrow{v=\frac{y}{x}} x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=c \rightarrow \boxed{y^2+x^2=cx \quad \text{جواب عمومی}}$

II $\underbrace{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}_{M(x,y)}dx-\underbrace{\left(\frac{x}{y}\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)}_{N(x,y)}dy=0$

M,N توابع همگن از درجه $n=0$ می‌باشند بنابراین معادله دیف همگن است. فرض می‌کنیم: $y=xv$

$v\cos v\,dx-\left(\frac{1}{v}\sin v+\cos v\right)(x\,dv+v\,dx)=0$

$\frac{x}{v}\sin v\,dv+\sin v\,dx+x\cos v\,dv=0$

$x\left(\frac{\sin v}{v}+\cos v\right)dv=-\sin v\,dx \longrightarrow \left(\frac{1}{v}+\cot v\right)dv=-\frac{dx}{x}$

$\xrightarrow{\int} \ln^{v}+\ln^{\sin v}=-\ln^{x}+\ln^{c} \longrightarrow xv\sin v=c$

$y=xv \longrightarrow \boxed{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)=c}$ جواب عمومی

$y' = f\left(\frac{ax+by}{ex+hy}\right)$ a، b، e، h ثابت دلخواه

معادلات فوق از نوع همگن می‌باشند اما با اضافه شدن ثابت به صورت و مخرج خاصیت همگن بودن معادله از بین می‌رود.

$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ ناهمگن

(a، b، c، d، e، h ثابت دلخواه)

معادلات فوق را می‌توان تبدیل به همگن نمود. فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+hy+d=0 \end{cases}$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

I) دو خط متقاطع باشند (شیب نابرابر $\left(\frac{a}{b} \neq \frac{e}{h}\right.$

II) " موازی " (" برابر $\left(\frac{a}{b} = \frac{e}{h}\right.$

I) برای حالت I فرض می‌کنیم (x_0 , y_0) محل برخورد دو خط باشند تعریف می‌کنیم $\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases} \xrightarrow[dy=dY]{dx=dX} y'=f\left(\frac{a\overset{X+x_0}{x}+b\overset{Y+y_0}{y}+c}{e\underset{X+x_0}{x}+h\underset{Y+y_0}{y}+d}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right)}$$

معادله همگن

$(Y=XV)$

(II) درحالت II با فرض اینکه دو خط موازی باشند می‌توان از تغییر متغیر زیر استفاده نمود.

در این حالت با تغییر متغیر $U=ax+by$ یا $U=ex+hy$ می‌توان معادله را مستقیماً به معادلهٔ جداپذیر تبدیل کرد.

$$U=ax+by \xrightarrow{d/dx} U'=a+by' \longrightarrow y'=\frac{1}{b}(U'-a) \quad (b\neq 0)$$

با جایگذاری در معادله می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{b}(U'-a)=f\left(\frac{U+c}{\frac{h}{b}U+d}\right)$$

$$U'=b\,f\left(\frac{U+c}{\frac{h}{b}U+d}\right)+a \qquad \text{(جداپذیر!)}$$

Ex) معادلات را حل کنید.

(I) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+2}{x-y-4}$

$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+3 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=\frac{1(X+1)+(Y-3)+2}{1(X+1)-(Y-3)-4}=\frac{X+Y}{X-Y}$

$\xrightarrow[\text{همگن}]{Y=XV} V+X\frac{dV}{dX}=\frac{1+V}{1-V} \rightarrow \frac{X}{dX}dV=\frac{1+V^2}{1-V}$

$\longrightarrow \frac{1-V}{1+V^2}dV=\frac{dX}{X} \xrightarrow{\int}$

$\Longrightarrow tg^{-1}(V)-\frac{1}{2}\ln(1+V^2)+C=\ln X$

$\rightarrow \ln^{x-1}=tg^{-1}\frac{y+3}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2\right)$ جواب عمومی

(II) $\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2\sin y-3}{(2x-4\sin y-3)\cos y}$ $(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$

$Z:=\sin y \longrightarrow dZ=\cos y\,dy \longrightarrow \left(\frac{dZ}{dx}=\frac{-x+2Z-3}{2x-4Z-3}\right)$ $\begin{cases} -x+2Z-3=0 \\ 2x-4Z-3=0 \end{cases}$ دوخط موازی

فرض می‌کنیم: $V:=-x+2Z-3 \longrightarrow V'=-1+2Z' \Rightarrow Z'=\frac{1}{2}(1+V')$

$Z'=\frac{dZ}{dx}=\frac{V-3}{-2V-3} \longrightarrow \frac{1}{2}(1+V')=\frac{V-3}{-2V-3} \rightarrow V'=\frac{4V-3}{-2V-3}$ جدانیی

$\frac{-2V-3}{4V-3}dV=dx \xrightarrow{\int} 9\ln|4V-3|+4V=-8x+C$

$\begin{cases} V=-x+2Z-3 \\ Z=\sin y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه}} V=-x+2\sin y-3$

معادلات دیفرانسیل کامل Exact DE

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گوئیم هرگاه تابع $\varnothing(x,y)$ موجود باشد به طوری که $\frac{\partial\varnothing}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial\varnothing}{\partial y}=N(x,y)$

در این حالت $\varnothing(x,y)=C$ جواب عمومی معادله است.

چرا؟

$$\varnothing(x,y)=C \xrightarrow{d/dx} \frac{\partial\varnothing}{\partial x}+\frac{\partial\varnothing}{\partial y}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \longrightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \checkmark$$

تذکر: فرض کنیم توابع $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ ، $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ ، $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ در ناحیه R از صفحه پیوسته باشند. در اینصورت معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ در R^* کامل است اگر و تنها اگر به ازای هر $(x,y)\in R^*$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M_y=N_x$$

اثبات

فرض می‌کنیم معادله کامل باشد. نشان می‌دهیم $M_y = N_x$: چون معادله کامل است

بنابر تعریف تابع $\phi(x,y)$ موجود است به طوری که

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = M_y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \xrightarrow{\partial/\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = N_x$$

با توجه به پیوستگی عبارات سمت چپ برابرند درنتیجه $M_y = N_x$

بالعکس

فرض می‌کنیم $M_y = N_x$ نشان می‌دهیم معادله کامل است. باید تابع ϕ را به گونه‌ای بیابیم که

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = N \end{cases} \xrightarrow{\int dx} \phi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \underbrace{h(y)}_{\text{ثابت انتگرال‌گیری نسبت به } x}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \int M_y(x,y)\,dx + h'(y) \xrightarrow{\frac{\partial \phi}{\partial y} = N} N(x,y)$$

$$h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)\,dx$$

عبارت تحت این مستقل از x است و تنها تابعی از y است زیرا:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \int M_y(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$N(x,y) - M(x,y) = 0$$

۳۰
2019 ۱۴۴۰
فروردین ۹۸ جمعه
Apr 19 ۱۳ شعبان

درنتیجه با انتگرال‌گیری نسبت به y، تابع $h(y)$ معلوم می‌شود.

مثال)

I) $\underbrace{(x^2-y^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2xy}_{N(x,y)}dy=0$

$M_y=-2y \neq N_x=2y$ معادله کامل نیست!

$(y\cos x+2xe^y)dx+(\sin x+x^2e^y-1)dy=0$

$M_y=\cos x+2xe^y = N_x=\cos x+2xe^y$ معادله کامل است.

بنابراین تابع $\phi(x,y)$ موجوداست زیرا:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M(x,y)=y\cos x+2xe^y$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N(x,y)=\sin x+x^2e^y-1 \quad *$$

با انتگرال گیری از رابطه اول داریم:

$$\phi(x,y)=y\sin x+x^2e^y+h(y)$$

مشتق عبارت فوق را مساوی طرف راست رابطه * قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\sin x+x^2e^y+h'(y)\stackrel{*}{=}\sin x+x^2e^y-1$$

$$\longrightarrow h'(y)=-1 \xrightarrow{\int dy} h(y)=-y+c$$

$$y\sin x+x^2e^y-y=c$$