۶. (آدامز) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱. $\int e^{۲x} sin۳x dx,$

۲. $\int sin^{۴}t \, cos^{۵}t \, dt,$

۳. $\int \frac{x}{(۴x^{۲}+۱)^{۵}} \, dx$

۴. $\int_{۰}^{۱} \sqrt{x}\sin(\pi\sqrt{x})dx$

۵. $\int \frac{dx}{(۴x-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}},$

۶. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{۲+\sin\theta},$

۷. $\int \frac{x^{۲}dx}{x^{۲}+x-۲},$

۸. $\int \frac{tdt}{(t+۱)(t^{۲}+۱)^{۲}}.$

۹. $\int \frac{۴xe^{x^{۲}}}{e^{۲x^{۲}}+۲e^{x^{۲}}+۲} \, dx$

۱۰. $\int_{۱}^{\sqrt{e}} \frac{\arcsin(\ln x)}{x} \, dx$

۱۱. $\int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

۱۲. $\int \frac{\text{sech}^{۲}x}{۱+\tanh^{۲}x} \, dx$

حل قسمت اول)

$$\int e^{۲x} sin۳x dx$$

برای محاسبه انتگرال $I = \int e^{۲x}\sin ۳x\ dx$ از روش جز به جز استفاده می‌کنیم، که عبارت است از $\int \mathrm{u}d\mathrm{v} = uv - \int v\mathrm{d}u$. حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \sin ۳x \\ dv = e^{۲x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ۳\cos ۳x \\ v = \frac{۱}{۲}e^{۲x} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\int e^{۲x}\sin ۳x\ dx = \frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۳x\ - \int \frac{۳}{۲}e^{۲x}\cos ۳x\ dx$$

حال با به کارگیری مجدد روش جز به جز، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \cos ۳x \\ dv = e^{۲x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -۳\sin ۳x \\ v = \frac{۱}{۲}e^{۲x} \end{cases}$$

و در نتیجه داریم:

$$\int e^{۲x}\sin ۳x\ dx = \frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۳x\ - \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}e^{۲x}\cos ۳x\ - \int -\frac{۳}{۲}e^{۲x}\sin ۳x\ dx\right)$$

$$\Longrightarrow I = \frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۳x\ - \frac{۳}{۴}e^{۲x}\cos ۳x\ - \frac{۹}{۴}I$$

$$\Longrightarrow \frac{۱۳}{۴}I = \frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin ۳x\ - \frac{۳}{۴}e^{۲x}\cos ۳x$$

$$\Longrightarrow I = e^{۲x}\left(\frac{۲\sin ۳x\ - ۳\cos ۳x}{۱۳}\right) + c$$

حل قسمت دوم)

$$\int sin^{۴}t\ cos^{۵}t\ dt$$

برای حل انتگرال $\int sin^{۴}xcos^{۵}xdx$ ابتدا محاسبه زیر را انجام می‌دهیم:

$$cos^{۵}x = cos^{۴}x\ cosx = \left(۱ - sin^{۲}x\right)^{۲}\mathrm{cos}x\ = \left(۱ - ۲sin^{۲}x + sin^{۴}x\right)\mathrm{cos}x$$

با جای‌گذاری در انتگرال موردنظر داریم:

$$\int sin^{۴}x\left(۱ - ۲sin^{۲}x + sin^{۴}x\right)\mathrm{cos}x\ dx = \int\left(sin^{۴}x - ۲sin^{۶}x + sin^{۸}x\right)\mathrm{cos}x\ dx$$

حال تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u = \mathrm{sin}x\ \Rightarrow du = \mathrm{cos}x\ dx$$

در نتیجه داریم:

$$\int\left(u^{۴} - ۲u^{۶} + u^{۸}\right)du = \frac{u^{۵}}{۵} - \frac{۲u^{۷}}{۷} + \frac{u^{۹}}{۹} = \frac{sin^{۵}x}{۵} - \frac{۲sin^{۷}x}{۷} + \frac{sin^{۹}x}{۹} + c$$

حل قسمت سوم)

$$\int \frac{x}{(۴x^۲+۱)^۵}\,dx$$

برای محاسبه انتگرال $\int \frac{x}{(۴x^۲+۱)^۵}dx$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = ۴x^۲ + ۱ \Rightarrow du = ۸xdx$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int \frac{x}{(۴x^۲+۱)^۵}dx = \frac{۱}{۸}\int \frac{۸x}{(۴x^۲+۱)^۵}dx = \frac{۱}{۸}\int \frac{۱}{u^۵}du = \frac{۱}{۸}\int u^{-۵}du = \frac{۱}{۸}\frac{u^{-۴}}{-۴} = -\frac{۱}{۳۲(۴x^۲+۱)^۴} + c$$

حل قسمت چهارم)

$$\int_0^1 \sqrt{x} sin(\pi\sqrt{x})dx$$

برای محاسبه انتگرال $I = \int_0^1 \sqrt{x}\sin\left(\pi\sqrt{x}\right)\ dx$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$I = \int_0^1 2t^2\sin\left(\pi t\right)\ dt$$

حال با به کارگیری روش جز به جز قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \sin\left(\pi t\right)\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2tdt \\ v = -\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi t\right) \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$I = 2\int_0^1 t^2\sin\left(\pi t\right)\ dt = -\frac{2}{\pi}t^2\cos\left(\pi t\right)\ \Big|_0^1 - 2\int_0^1 -\frac{2}{\pi}t\cos\left(\pi t\right)\ dt = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\int_0^1 t\cos\left(\pi t\right)\ dt$$

با استفاده دوباره از روش جز به جز، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = \cos\left(\pi t\right)\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{1}{\pi}\sin\left(\pi t\right) \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$I = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}t\sin\left(\pi t\right)\ \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\pi}\sin\left(\pi t\right)\ dt\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(0 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\pi t\right)\ dt\right)$$

$$I = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi t\right)\ \Big|_0^1\right)\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(-1-1\right)\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3} = \frac{2\pi^2 - 8}{\pi^3}$$

حل قسمت پنجم)

$$\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

انتگرال $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ را در نظر می‌گیریم. در مخرج کسر عبارت $4x - x^2 + 4 - 4 = 4 - (x-2)^2$ ظاهر می‌شود. برای توابعی که در قالب $\sqrt{a^2 - x^2}$ هستند، از تغییر متغیر $x = a\sin\theta$ استفاده می‌کنیم. در مخرج کسر این انتگرال داریم $(4x-x^2)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4-(x-2)^2})^3$. تغییر متغیر

$$x - 2 = 2\sin\theta \ \Rightarrow dx = 2\cos\theta \ d\theta$$

را اعمال می‌کنیم و داریم:

$$I = \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2\cos\theta \ d\theta}{(4-4sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2\cos\theta \ d\theta}{(4cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta \ d\theta}{cos^3\theta} = \frac{1}{4}\int sec^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\tan\theta \ + c$$

حال با استفاده از روابط زیر انتگرال را به فرم اولیه برمی‌گردانیم:

$$x - 2 = 2\sin\theta \ \Rightarrow \sin\theta \ = \frac{x-2}{2} \Rightarrow \cos\theta \ = \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta \ = \frac{\frac{x-2}{2}}{\frac{\sqrt{4x-x^2}}{2}} = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + c$$

حل قسمت ششم)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+sin\theta}$$

انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ را در نظر می‌گیریم. برای حل انتگرال‌هایی که به شکل توابع گویا بر حسب $sin\theta$ و $\cos\theta$ هستند، می‌توانیم از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم .

$$u=\tan\frac{\theta}{2}\ ,\sin\theta\ =\frac{2u}{1+u^2},\cos\theta\ =\frac{1-u^2}{1+u^2},d\theta=\frac{2du}{1+u^2}$$

برای حل انتگرال مورد نظر در این سوال، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \theta=0\Rightarrow u=0 \\ \theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\int_{0}^{1} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{2+\frac{2u}{1+u^2}}=\int_{0}^{1} \frac{2du}{2+2u^2+2u}=\int_{0}^{1} \frac{du}{1+u^2+u}=\int_{0}^{1} \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

تابع اولیه برای $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ به شکل زیر است:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\ +c$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{1} \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\ =\ \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

حل قسمت نهم)

$$\int \frac{۴xe^{x^۲}}{e^{۲x^۲}+۲e^{x^۲}+۲}\,dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{۴xe^{x^۲}}{e^{۲x^۲}+۲e^{x^۲+۲}}dx \qquad\qquad u = e^{x^۲} \Rightarrow du = ۲xe^{x^۲}dx \\
&= \int \frac{۲du}{u^۲+۲u+۲} = \int \frac{۲du}{(u+۱)^۲+۱} = ۲\tan^{-۱}(u+۱) = ۲\tan^{-۱}(e^{x^۲}+۱)+c
\end{aligned}$$

حل قسمت دهم)

$$\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{arcsin\,(lnx)}{x}\,dx$$

$$t=\ln x \Rightarrow dt=\tfrac{dx}{x}$$
$$\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{e}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$I=\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{\arcsin(\ln x)}{x}dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin t dt$$

$$\begin{cases} u=\arcsin t \\ dv=dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ v=t\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin t dt=t\arcsin t|_{0}^{\frac{1}{2}}-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

توجه شود که انتگرال $\int \arcsin t dt$ با استفاده از فرمول جزء به جزء محاسبه شده است.

$$z=1-t^2\Rightarrow dz=-2tdt$$
$$\begin{cases} t=0\Rightarrow z=1 \\ t=\frac{1}{2}\Rightarrow z=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{3}{4}}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\sqrt{z}|_{1}^{\frac{3}{4}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

حل قسمت یازدهم)

$$\int \frac{sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$I = \int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad\qquad x = u^۲ \Rightarrow dx = ۲udu$$

$$= \int \frac{\sinh u}{u}(۲udu) = ۲\int \sinh u\ du = ۲\cosh u = ۲\cosh\sqrt{x} + c$$

حل قسمت دوازدهم)

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+tanh^2 x}\,dx$$

$$I=\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\tanh^2 x}dx \qquad\qquad u=\tanh x \Rightarrow du=\operatorname{sech}^2 x dx$$

$$=\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\tanh^2 x}dx=\int \frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1} u=\tan^{-1}(\tanh x)+c$$