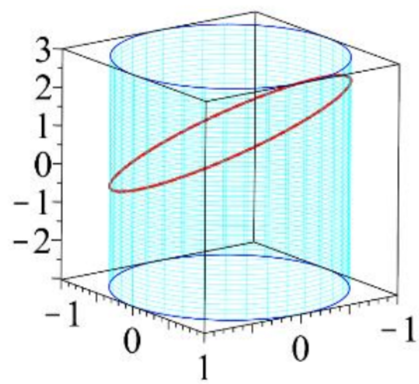
تمرین تحویلی شماره ۸

فرض کنید ab دو رقم آخر شماره دانشجویی باشد. ماکزیمم مطلق تابع $f(x,y,z)=x+(a+1)y+(b+1)z$ بر منحنی فصل مشترک صفحه $x-y+z=1$ و استوانه $x^2+y^2=1$ را بیابید.



پاسخ

قرار می دهیم $g(x,y,z)=x-y+z-1$ و $h(x,y,z)=x^2+y^2-1$. در این صورت تابع لاگرانژین به صورت

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

و دستگاه لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda+2\mu x=0 \\ (a+1)-\lambda+2\mu y=0 \\ (b+1)+\lambda=0 \qquad \Rightarrow \lambda=-(b+1) \\ x-y+z-1=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

با جایگذاری λ داریم:

$$\begin{cases} 1-b-1+2\mu x=0 \quad \Rightarrow \quad b=2\mu x \\ a+b+2+2\mu y=0 \quad (2) \\ x-y+z-1=0 \quad (3) \\ x^2+y^2-1=0 \quad (4) \end{cases}$$

حالت اول: $b=0$. در این حالت داریم:

$$2\mu x=0 \quad \Rightarrow \quad \mu=0 \ \ or \ \ x=0$$

$if \quad \mu=0 \ \Rightarrow (2) \quad a+b+2=0$ غیر قابل قبول $\quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow (4) \quad y=\pm 1$

$$(3) \quad \Rightarrow \text{ نقاط بدست آمده } : (0,1,2),(0,-1,0)$$

$$f(0,1,2) = (a+1) + 2(b+1) = a + 2b + 3 \quad \Rightarrow \quad \max\ f$$

$$f(0,-1,0) = -(a+1)$$

حالت دوم: $b \neq 0$. در این حالت از معادله (۱) و (۲) نتیجه می شود که $x \neq 0$ و $y \neq 0$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow \mu = \frac{b}{2x} \\ (2) \Rightarrow \mu = -\frac{(a+b+2)}{2y} \Rightarrow \frac{b}{2x} = -\frac{(a+b+2)}{2y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-by}{a+b+2} \\ x - y + z - 1 = 0 \quad (3) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

با جایگذاری x در معادله (۴) داریم:

$$[\frac{b^2}{(a+b+2)^2} + 1]\, y^2 = 1 \quad \Rightarrow y = \pm\frac{a+b+2}{\sqrt{b^2 + (a+b+2)^2}}$$

با استفاده از معادله (۳) داریم:

$$A = (\frac{-b}{\sqrt{b^2+(a+b+2)^2}}, \frac{a+b+2}{\sqrt{b^2+(a+b+2)^2}}, 1 + \frac{a+2b+2}{\sqrt{b^2+(a+b+2)^2}})$$

$$B = (\frac{b}{\sqrt{b^2+(a+b+2)^2}}, -\frac{a+b+2}{\sqrt{b^2+(a+b+2)^2}}, 1 - \frac{a+2b+2}{\sqrt{b^2+(a+b+2)^2}})$$

با محاسبه مقادیر $f(A)$ و $f(B)$ مشخص می شود که ماکزیمم f در نقطه A اتفاق می افتد.

(نوشتن دستگاه لاگرانژ : ۲ نمره)

(حل دستگاه : ۲ نمره)

(محاسبه مقادیر تابع در نقاط بدست آمده و مشخص کردن جواب: ۱ نمره)

روش دوم :

قرار می دهیم $g(x,y,z) = x - y + z - 1$ و $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$. از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda\, \nabla g + \mu\, \nabla h \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + 2\mu x \\ (a+1) = -\lambda + 2\mu y \\ (b+1) = \lambda \\ x - y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

با جایگذاری $\lambda = (b+1)$ داریم:

$$\begin{cases} 2\mu x = -b & (1) \\ 2\mu y = a+b+2 & (2) \\ x-y+z-1=0 & (3) \\ x^2+y^2-1=0 & (4) \end{cases}$$

حالت اول: $b=0$. در این حالت داریم:

$$2\mu x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \;\; or \;\; x=0$$

$$if \quad \mu = 0 \;\Rightarrow (2) \quad a+b+2=0 \ \text{غیر قابل قبول} \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow (4) \quad y=\pm 1$$

$$(3) \quad \Rightarrow \ \text{نقاط بدست آمده} \ : (0,1,2),(0,-1,0)$$

$$\begin{aligned} &f(0,1,2) = (a+1)+2(b+1) = a+2b+3 \quad \Rightarrow \quad \max \ f \\ &f(0,-1,0) = -(a+1) \end{aligned}$$

حالت دوم: $b\neq 0$. در این حالت از معادله (۱) و (۲) نتیجه می شود که $x\neq 0$ و $y\neq 0$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow \mu = \frac{b}{2x} \\ (2) \Rightarrow \mu = -\frac{(a+b+2)}{2y} \Rightarrow \frac{b}{2x} = -\frac{(a+b+2)}{2y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-by}{a+b+2} \\ x-y+z-1=0 \quad (3) \\ x^2+y^2-1=0 \quad (4) \end{cases}$$

ادامه راه حل مانند روش اول