ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

توجه:

فرض کنید $z = f(x,y,s,t)$ یک تابع چندمتغیره است. در این صورت، نمادگذاری زیر نیز استفاده می‌شود:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x,y,s} = \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,s,t) = f_4(x,y,s,t)$$

در این صورت، گاهی می‌گوییم که متغیر t از متغیرهای x، y و s مستقل است.

قرارداد:

از این پس، وقتی صحبت از مشتقات جزیی یک تابع مثل $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقاطی از دامنه‌اش می‌شود، فقط مشتقات جزیی f در نقاطی از نقاط یادشده مدنظر است که در درون D قرار می‌گیرند.

قرارداد: فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است با $z = f(x_1, \dots, x_n)$.
اگر $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ با $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$، آن‌گاه تابع زیر را داریم:

$$\widetilde{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(t) = f(\gamma(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

در این صورت، به منظور سادگی، تابع $\widetilde{f}$ را مجدداً با f نمایش می‌دهیم؛ یعنی داریم:

$$z(t) = f(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

در حالت کلی، فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با $z = f(x_1, \dots, x_n)$ است. اگر

$$F : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \; F(t_1, \dots, t_m) = (x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$$

آن‌گاه تابع $\widetilde{f} : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر داریم:

$$\widetilde{f}(t_1, \dots, t_m) = f(F(t_1, \dots, t_m)) = f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$$

در این صورت، به منظور سادگی، تابع $\widetilde{f}$ را مجدداً با f نمایش می‌دهیم؛ یعنی داریم:

$$z(t_1, \dots, t_m) = f(t_1, \dots, t_m) = f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$$

تذکر:

اگر $z = f(x_1, \ldots, x_n)$، و به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، x_i تابعی از متغیر t باشد، آن‌گاه به‌جای $\frac{\partial z}{\partial t}$، می‌توان از نماد $\frac{dz}{dt}$ استفاده کرد.

قاعده‌ی زنجیره‌ای

حالتی از قاعده‌ی زنجیره‌ای:

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است با $z = f(x, y)$. هم‌چنین فرض کنید که $x = x(t)$ و $y = y(t)$ روی I تعریف شده و مشتق‌پذیر باشند. اگر همواره $(x(t), y(t))$ در درون D قرار بگیرد، آن‌گاه روی I داریم:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

یعنی به‌ازای هر $t_0 \in I$، داریم:

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0)$$

توجه: در تساوی‌های بالا، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را می‌توان با $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ جای‌گزین کرد؛ زیرا $z = f(x, y)$. مطلب مشابهی در مورد حالت‌ها یا صورت‌بندی‌های دیگر قاعده‌ی زنجیره‌ای که در ادامه می‌آیند نیز صادق است.

دیاگرام درختی قاعده‌ی زنجیره‌ای اسلاید قبل:

$$\begin{tikzcd}
 & & z \arrow[dll, "\frac{\partial z}{\partial x}"'] \arrow[drr, "\frac{\partial z}{\partial y}"] & & \\
x \arrow[d, "\frac{dx}{dt}"'] & & & & y \arrow[d, "\frac{dy}{dt}"] \\
t & & & & t
\end{tikzcd}$$

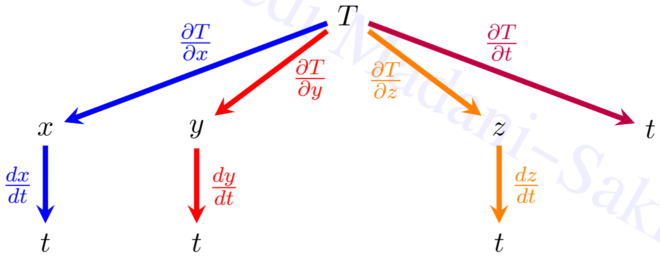
$$\frac{dz}{dt} = \text{حاصل‌ضرب مسیرهای آبی} + \text{حاصل‌ضرب مسیرهای قرمز}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

مثال

فرض کنید $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ تابعی بر حسب متغیرهای x, y, z, t و با مشتقات جزیی اول پیوسته باشد. به‌علاوه، فرض کنید که هر یک از توابع x, y, z تابعی از t هستند. در این صورت، مطلوب است $\frac{dT}{dt}$.

پاسخ: با توجه به اینکه $T(t) = T(x(t), y(t), z(t), t)$، داریم:



$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

توجه:

در مثال قبل، فرض کنید:

$$T(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z + t, \quad x(t) = y(t) = t, \quad z(t) = t^2$$

در این صورت، بنابر اسلاید قبل داریم:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}\\ &= (2x)(1) + (2y)(1) + (1)(2t) + 1\\ &= 2t + 2t + 2t + 1 = 6t + 1\end{aligned}$$

البته، می‌توانیم مستقیماً به جای $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ مقادیر متناظرشان را بر حسب t در ضابطه‌ی T جای‌گذاری کنیم. در این صورت، داریم:

$$T(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2 + z(t) + t = t^2 + t^2 + t^2 + t = 3t^2 + t$$

بنابراین، داریم $\frac{dT}{dt} = 6t + 1$.

در حالتی کلی‌تر، فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته است با $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، توابع $x_i = x_i(t)$ روی بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشند، و همواره $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ در درون D قرار گیرد، آن‌گاه روی I داریم:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

یعنی به‌ازای هر $t_0 \in I$، با فرض $P = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$ داریم:

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial z}{\partial x_1}(P)\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}(P)\frac{dx_n}{dt}(t_0)$$

گرادیان یک تابع چندمتغیره

فرض کنید مشتقات جزیی اول $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ وجود دارند. گرادیان f با نماد ∇f، تابعی به صورت $\nabla f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ است، که در آن E درون D است، و ∇f در هر $(a_1, \ldots, a_n) \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(a_1, \ldots, a_n) \right)$$

مثال

فرض کنید $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y, z) = xyz^2$ تعریف می‌شود. در این صورت، داریم:

$$\nabla f(1, 2, 3) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(1, 2, 3), \frac{\partial}{\partial y} f(1, 2, 3), \frac{\partial}{\partial z} f(1, 2, 3) \right)$$
$$= (yz^2, xz^2, 2xyz)_{(x,y,z)=(1,2,3)} = (18, 9, 12)$$

مثال

فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است. مقدار $\nabla f(0,0)$ برابر با کدام گزینه است؟

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

۱. $(0,0)$

۲. $(1,1)$

۳. $(2,2)$

۴. $(3,3)$

پاسخ: داریم:

$$\nabla f(0,0) = (f_1(0,0), f_2(0,0))$$

در حالی که:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h+0+0) - 0}{h} = 1$$
$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h+0) - 0}{h} = 1$$

بنابراین، داریم:

$$\nabla f(0,0) = (1,1)$$

و از این‌رو، گزینه‌ی ۲ درست است.

صورت‌بندی دیگری از حالت اول قاعده‌ی زنجیره‌ای

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته است و داریم $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، توابع $x_i = x_i(t)$ روی بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشند، و همواره $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ در درون D قرار گیرد، آن‌گاه با فرض $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ که $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$، روی I داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right) \\
&= \nabla z \cdot \frac{d\gamma}{dt}
\end{aligned}$$

یعنی به‌ازای هر $t_0 \in I$، داریم:

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \nabla z(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t_0).$$

حالت دیگری از قاعده‌ی زنجیره‌ای

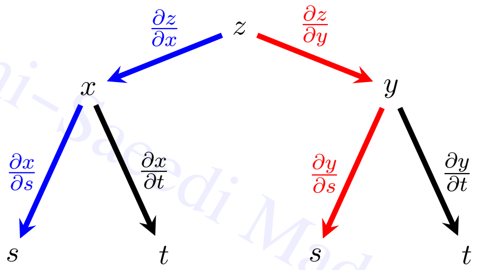
فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است با $z = f(x,y)$. همچنین، فرض کنید که $x, y : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ نیز توابعی دارای مشتقات جزیی اول هستند و داریم $x = x(s,t)$ و $y = y(s,t)$. اگر همواره $(x(s,t), y(s,t))$ در درون D قرار بگیرد، آن‌گاه روی E داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

یعنی به‌ازای هر $(s_0, t_0) \in E$، با فرض $P = (x(s_0,t_0), y(s_0,t_0))$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s_0,t_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(P)\frac{\partial x}{\partial s}(s_0,t_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(P)\frac{\partial y}{\partial s}(s_0,t_0)$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}(s_0,t_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(P)\frac{\partial x}{\partial t}(s_0,t_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(P)\frac{\partial y}{\partial t}(s_0,t_0)$$

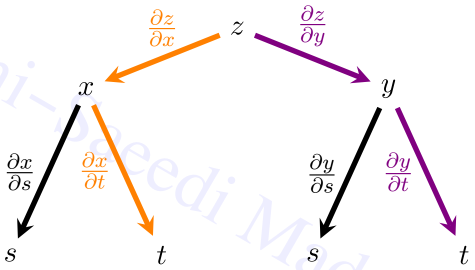
دیاگرام درختی حالت دوم قاعده‌ی زنجیره‌ای:



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \text{حاصل‌ضرب مسیرهای آبی} + \text{حاصل‌ضرب مسیرهای قرمز}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

دیاگرام درختی حالت دوم قاعده‌ی زنجیره‌ای:



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \text{حاصل‌ضرب مسیرهای نارنجی} + \text{حاصل‌ضرب مسیرهای بنفش}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

در حالت کلی، فرض کنید $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته است و $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. همچنین، فرض کنید که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ نیز تابعی دارای مشتقات جزیی اول است و داریم $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m)$. اگر همواره $(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m))$ در درون D قرار بگیرد، آن‌گاه روی E داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_m} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

بنابراین، می‌توان دستگاه قبل را به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial t_m} \end{bmatrix}}_{m\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_m} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

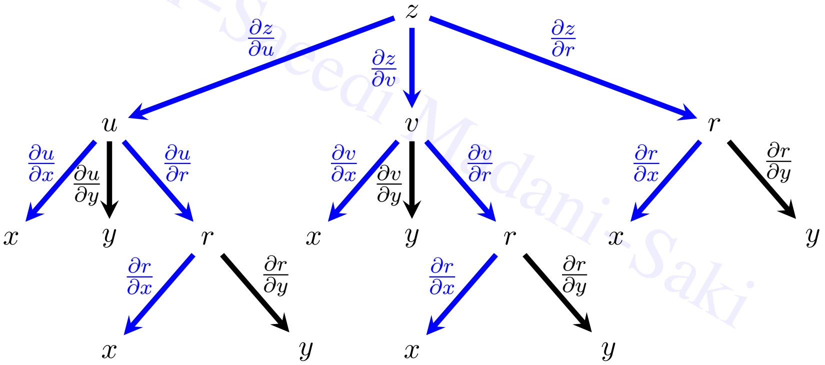
با ترانهاده گرفتن از دو طرف تساوی بالا، معادلاً داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial t_m} \end{bmatrix}}_{1\times m} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{bmatrix}}_{n\times m}$$

مثال

فرض کنید $z=z(u,v,r)$، $u=u(x,y,r)$، $v=v(x,y,r)$ و $r=r(x,y)$ مشتقات جزیی اول پیوسته دارند. در این صورت، قاعده‌ی زنجیره‌ای را برای $\frac{\partial z}{\partial x}$ بنویسید.

پاسخ: از آنجا که $z=z(u(x,y,r(x,y)),v(x,y,r(x,y)),r(x,y))$، داریم:



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

مثال

فرض کنید $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ با مشتقات جزیی پیوسته و با متغیرهای x,y,z باشد. همچنین، فرض کنید که

$$x(u,v)=uv,\quad y(u,v)=u^2+v,\quad z(u,v)=u+v^2$$

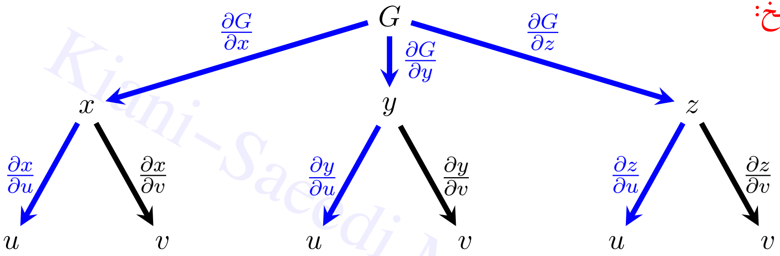
حال، اگر

$$\frac{\partial G}{\partial x}(1,2,2)=3,\quad \frac{\partial G}{\partial y}(1,2,2)=4,\quad \frac{\partial G}{\partial z}(1,2,2)=5$$

آنگاه $\frac{\partial G}{\partial u}$ به‌ازای $(u,v)=(1,1)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 14
۲. 15
۳. 16
۴. 17

پاسخ:



بنابراین، اگر $P = (x(1,1), y(1,1), z(1,1)) = (1,2,2)$، آن‌گاه داریم:

$$\frac{\partial G}{\partial u}(1,1) = \frac{\partial G}{\partial x}(P)\frac{\partial x}{\partial u}(1,1) + \frac{\partial G}{\partial y}(P)\frac{\partial y}{\partial u}(1,1) + \frac{\partial G}{\partial z}(P)\frac{\partial z}{\partial u}(1,1)$$
$$= (3(v) + 4(2u) + 5(1))_{(u,v)=(1,1)} = 16$$

پس گزینه‌ی ۳ درست است.

توابع همگن

تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را به طور مثبت همگن از درجه‌ی k گوییم، هرگاه به‌ازای هر $t > 0$ بتوان نتیجه گرفت که:

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

مثال

- تابع $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ به طور مثبت همگن از درجه‌ی 2 است؛ زیرا:

$$t>0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \implies$$

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(tx)(ty)-(ty)^2=t^2(x^2+xy-y^2)=t^2f(x,y)$$

- تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$ به طور مثبت همگن از درجه‌ی 1 است؛ زیرا:

$$t>0,\quad (x,y)\in D_f \implies$$

$$f(tx,ty)=\sqrt{(tx)^2-(ty)^2}=t\sqrt{x^2-y^2}=tf(x,y)$$

مثال

- تابع $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ به طور مثبت همگن از درجه‌ی 0 است؛ زیرا:

$$t>0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \implies$$
$$f(tx,ty)=\frac{2(tx)(ty)}{(tx)^2+(ty)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$$

- تابع $f(x,y,z)=\frac{x-y+5z}{yz-z^2}$ به طور مثبت همگن از درجه‌ی -1 است؛ زیرا:

$$t>0,\quad (x,y,z)\in D_f \implies$$
$$f(tx,ty,tz)=\frac{tx-ty+5tz}{(ty)(tz)-(tz)^2}=\frac{1}{t}\frac{x-y+5z}{yz-z^2}=t^{-1}f(x,y,z)$$

مثال

- تابع $f(x,y)=x^2+y$ به طور مثبت همگن نیست؛ زیرا:

$$t>0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \implies$$
$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)=t(tx+y) \implies f(t(1,1))=t(t+1)$$

با برهان خلف فرض کنید که تابع f به طور مثبت همگن از درجه‌ی k است. آنگاه داریم $f(t(1,1))=t^k f(1,1)$؛ یعنی $t(t+1)=2t^k$. اما در این صورت، با جای‌گذاری $t=2$ و $t=4$ به تناقض می‌رسیم.

- تابع $f(x,y)=x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}$ به طور مثبت همگن از درجه‌ی $\sqrt{2}$ است؛ زیرا:

$$t>0,\quad (x,y)\in D_f \implies$$
$$f(tx,ty)=(tx)^{\sqrt{2}}+(ty)^{\sqrt{2}}=t^{\sqrt{2}}\left(x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}\right)=t^{\sqrt{2}}f(x,y)$$

قضیه‌ی اویلر

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزیی اول پیوسته و به طور مثبت همگن از درجه‌ی k باشد. به‌ازای هر نقطه‌ی درونی $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(a_1, \ldots, a_n) = k f(a_1, \ldots, a_n)$$

اثبات:

فرض کنید $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ یک نقطه‌ی درونی است. در این صورت، تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f(ta_1, \ldots, ta_n) = t^k f(a_1, \ldots, a_n), \quad t > 0$$

بنابراین، از یک‌سو $g'(t) = kt^{k-1} f(a_1, \ldots, a_n)$. از سویی دیگر، اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم $x_i(t) = ta_i$، آن‌گاه $g(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

ادامه‌ی اثبات قضیه

لذا بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(ta_1, \ldots, ta_n)$$

بنابراین، داریم:

$$g'(t) = kt^{k-1} f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(ta_1, \ldots, ta_n)$$

حال، با قراردادن $t = 1$، حکم اثبات می‌شود.

مثال

فرض کنید:

$$f(x,y,z)=\sin\left(\cos\left(e^{\frac{x^8+y^8+x^4y^4}{z^8}}\right)\right)$$

در این صورت، f به طور مثبت همگن از درجه‌ی 0 است و مشتقات جزیی اول پیوسته دارد، و لذا بنابر قضیه‌ی اویلر داریم:

$$xf_1(x,y,z)+yf_2(x,y,z)+zf_3(x,y,z)=0$$

مثال

فرض کنید:

$$f(x,y,z)=\sqrt[4]{\frac{x^8+y^8+z^8}{yz}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{z}\right)}$$

در این صورت، f به طور مثبت همگن از درجه‌ی $\frac{3}{2}$ است، و مشتقات جزیی اول پیوسته دارد. لذا با فرض $(a_1,a_2,a_3)=\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)$ در قضیه‌ی اویلر، داریم:

$$\frac{\pi}{4}f_1\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)+f_2\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)+f_3\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)=\frac{3}{2}f\left(\frac{\pi}{4},1,1\right)$$