گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی- سری دوم

نیمسال اول ۹۹
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس‌یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود بپردازید.

۱. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر در $x=a$ باشد. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a) \quad \lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}$$

$$(b) \quad \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+۲h)-f(a-h)}{h}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)+a^n f(a)-a^n f(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-a^n f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{x^n f(a)-a^n f(a)}{x-a}\\
&= a^n \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\\
&= a^n f'(a)-nf(a)a^{n-۱}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+۲h)-f(a-h)}{h} &= \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+۲h)-f(a-h)+f(a)-f(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+۲h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to ۰}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\\
&= ۲\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+۲h)-f(a)}{۲h}+\lim_{h\to ۰}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\\
&= ۲f'(a)+f'(a)=۳f'(a)
\end{aligned}$$

۲. فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا باشد و $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x\sin\frac{1}{x} & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ ثابت کنید f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

حل:

قضیه مورد استفاده برای حل سوال: اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ و دنباله $a_n \to a$، آنگاه $g(a_n) \to l$.

نحوه استفاده از قضیه برای حل سوال: دو دنباله‌ی $a_n \to a$ و $b_n \to a$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر داشته باشید $g(a_n) \to l$ و $g(b_n) \to l'$ به طوری که $l \neq l'$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود ندارد.

هدف بررسی وجود حد $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim \frac{f(x)}{x}$. اما بنابر تعریف تابع $f(x)$ داریم

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 & x \in Q - \{0\} \\ sin\frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$$

از این رو دنباله‌ی $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ را در نظر بگیرید. چون $a_n \in Q$، از تعریف تابع نتیجه می‌شود $g(a_n) \to 1$.

حال اگر دنباله‌ای $b_n = \frac{1}{n\pi}$ را در نظر بگیرید.آنگاه از تعریف تابع و $b_n \in \mathbb{R} - Q$ نتیجه می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) = \lim_{n\to\infty} (sin\,(n\pi)) = 0$$

در نتیجه دو دنباله مختلف با وجود این که به صفر میل می‌کردند ولی حد مقادیر دو دنباله متفاوت است، لذا حد $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ وجود ندارد.

۳. الف) فرض کنید $f(x) = x\sin^{۲}\pi x, x \in \mathbb{R}$. تابع مشتق f را پیدا کنید.
ب) معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه ای به طول $x = ۱$ بنویسید.
حل: قسمت الف)

$$f'(x) = (x)' sin^{۲}(\pi x) + x\left(sin^{۲}(\pi x)\right)'$$
$$= sin^{۲}(\pi x) + ۲\pi x sin(\pi x)cos(\pi x)$$
$$= sin^{۲}(\pi x) + \pi x sin(۲\pi x)$$

قسمت ب) معادله خط مماس به تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ به فرم

$$y - f(۱) = f'(۱)(x - ۱),$$

می‌باشد که در آن

$$f(۱) = sin^{۲}\pi = ۰, \quad f'(۱) = sin^{۲}(\pi) + \pi sin(۲\pi) = ۰.$$

بنابراین

$$y - f(۱) = f'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y = ۰.$$

۴. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در $x = c$ باشد. اگر $a, b, d \in \mathbb{R} \neq 0$، آنگاه ثابت کنید.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+ah) - f(c+bh)}{\sin(dh + h^3)} = \frac{a-b}{d} f'(c).$$

حل:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+ah)-f(c+bh)}{sin(dh+h^3)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+ah)-f(c+bh)-f(c)+f(c)}{sin(dh+h^3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{f(c+ah)-f(c)}{ah} ah - \frac{f(c+bh)-f(c)}{bh} bh \right) \frac{dh+h^3}{sin(dh+h^3)} \frac{1}{dh+h^3} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{f(c+ah)-f(c)}{ah} a - \frac{f(c+bh)-f(c)}{bh} b \right) \frac{dh+h^3}{sin(dh+h^3)} \frac{1}{d+h^2} \right) \\
&= \left(a \lim_{h\to 0} \frac{f(c+ah)-f(c)}{ah} - b \lim_{h\to 0} \frac{f(c+bh)-f(c)}{bh} \right) \\
&\times \lim_{h\to 0} \frac{dh+h^3}{sin(dh+h^3)} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{d+h^2}
\end{aligned}$$

حال تغییر متغیرهای $h' = ah$، $h'' = bh$ و $h''' = d + h^2$ را به ترتیب در سه حد از چپ به راست در نظر بگیرید که چون $h \to 0$ لذا $h', h'', h''' \to 0$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
A &= \left(a \lim_{h'\to 0} \frac{f(c+h')-f(c)}{h'} - b \lim_{h''\to 0} \frac{f(c+h'')-f(c)}{h''} \right) \\
&\times \lim_{h'''\to 0} \frac{h'''}{sin(h''')} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{d+h^2} \\
&= \left(af'(c) - bf'(c) \right) \times 1 \times \frac{1}{d} = \frac{a-b}{d} f'(c).
\end{aligned}$$

۵. (آدامز) فرض کنید f بر بازه‌ای مانند I دو بار مشتق‌پذیر باشد (یعنی f'' بر I وجود داشته باشد)، نقاط 0 و 2 متعلق به I باشند و $f(0)=f(1)=0$ و $f(2)=1$ ثابت کنید که:

آ) به ازای نقطه‌ای مانند a متعلق به I داریم $f'(a)=\frac{1}{2}$.

ب) به ازای نقطه‌ای مانند b متعلق به I داریم $f''(a)>\frac{1}{2}$.

ج) به ازای نقطه‌ای مانند c متعلق به I داریم $f'(c)=\frac{1}{7}$.

حل:

(آ) از آنجایی که 0 و 2 در بازه‌ی I قرار دارند و $f(x)$ روی بازه‌ی I مشتق پذیر است، لذا تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[0,2]$ پیوسته و روی $(0,2)$ مشتق پذیر می‌باشد. در این صورت بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند $a\in(0,2)$ وجود دارد، به طوری که

$$f'(a)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

(ب) چون f'' بر بازه‌ی I موجود است و همچنین $0,2\in I$، لذا توابع $f(x)$ و $f'(x)$ روی بازه‌های $[0,2]$ و $(0,2)$ به ترتیب پیوسته و مشتق پذیر هستند. از طرفی چون $f(0)=f(1)=0$ پس بنابر قضیه رول عددی مانند $b_1\in(0,1)$ وجود دارد به طوری که $f'(b_1)=0$.

از طرفی چون $f(x)$ روی بازه‌های $[1,2]$ و $(1,2)$ به ترتیب پیوسته و مشتق پذیر است، لذا بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند $b_2\in(1,2)$ وجود دارد، به طوری که

$$f'(b_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=1.$$

حال چون $b_1\in(0,1)$، $b_2\in(1,2)$ و $f(x)$ بر بازه‌ی I دو بار مشتق پذیر است، لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برای تابع $f'(x)$ روی بازه‌ی $[b_1,b_2]$ بر قرار است، پس عددی مانند $b\in(b_1,b_2)$ وجود دارد، به طوری که

$$f''(b)=\frac{f'(b_2)-f'(b_1)}{b_2-b_1}=\frac{1}{b_2-b_1}.$$

اما چون $b_1\in(0,1)$ و $b_2\in(1,2)$ پس $b_2-b_1<2$. در نتیجه

$$f''(b)=\frac{1}{b_2-b_1}>\frac{1}{2}\to f''(b)>\frac{1}{2}.$$

(ج) تابع $g(x) = f'(x) - \frac{۱}{۷}$ را در نظر بگیرید. آنجایی که تابع $f'(x)$ روی بازه I مشتق پذیر و لذا پیوسته است، بنابراین $g(x)$ نیز روی I پیوسته می‌باشد. حال فرض کنید $b_۱, b_۲ \in I$، همان دو عدد حاصل شده در بخش قبل باشند، در این صورت

$$g(b_۱) = f'(b_۱) - \frac{۱}{۷} = -\frac{۱}{۷},$$
$$g(b_۲) = f'(b_۲) - \frac{۱}{۷} = \frac{۶}{۷}$$

لذا بنابر قضیه میانی عددی مانند $c \in (b_۱, b_۲) \subseteq I$ وجود دارد، به طوری که

$$g(c) = ۰ \rightarrow f'(c) = \frac{۱}{۷}.$$

۶. ثابت کنید توابع $f(x)=x^{2}-\cos x$ و $g(x)=x^{2}-x\sin x-\cos x$ هر کدام دارای دقیقاً دو ریشه‌ی حقیقی می‌باشند.

حل:

نخست تابع $f(x)=x^{2}-cosx$ را در نظر بگیرید. واضح است که توابع $f(x)$ و $f'(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر هستند (چون حاصل تفریق دو تابع مشتق پذیر هستند) و همچنین

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{\pi^{2}}{4},\ f(0)=-1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^{2}}{4}.$$

بنابراین

$$\exists c_1\in(\frac{-\pi}{2},0):\ f(c_1)=0,$$
$$\exists c_2\in(0,\frac{\pi}{2}):\ f(c_2)=0.$$

که این وجود حداقل دو ریشه را تضمین می‌کند. حال نشان می‌دهیم $f(x)$ حداکثر دو ریشه می‌تواند داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید، $f(x)$ دارای سه ریشه متمایز مانند $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$، $(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$، باشد. در این صورت از قضیه رول نتیجه می‌شود که

$$\exists\beta_1\in(\alpha_1,\alpha_2):\ f'(\beta_1)=0,$$
$$\exists\beta_2\in(\alpha_2,\alpha_3):\ f'(\beta_2)=0.$$

اما با توجه به اینکه شرایط قضیه رول برای تابع $f'(x)=2x+sinx$ روی بازه‌ی $[\beta_1,\beta_2]$ بر قرار است، لذا عددی مانند $\gamma\in(\beta_1,\beta_2)$ وجود دارد به طوری که $f''(\gamma)=0$. که با این حقیقت که تابع $f''(x)=2+cos(x)$ هیچ ریشه‌ی حقیقی ندارد، در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم مسئله درست است.

حال تابع $g(x)=x^{2}-xsinx-cosx$ را در نظر بگیرید. واضح است که تابع $g(x)$ و $g'(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر هستند (چون از ضرب وتقسیم چندتابع مشتق پذیر بدست آمده است) و همچنین

$$g(\frac{-\pi}{2})=\frac{\pi^{2}}{4}+\frac{\pi}{2}>0,$$
$$g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^{2}}{4}-\frac{\pi}{2}>0,$$
$$g(0)=-1<0.$$

لذا بنابر قضیه مقدار میانی $c_1 \in (\frac{-\pi}{2}, 0)$ و $c_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد به طوری که $g(c_1) = g(c_2) = 0$. حال نشان می‌دهیم $g(x)$ حداکثر دو ریشه می‌تواند داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید، $g(x)$ دارای سه ریشه متمایز مانند $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$، $(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3)$، باشد. در این صورت از قضیه رول نتیجه می‌شود که

$$\exists \beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2): \ g'(\beta_1) = 0,$$

$$\exists \beta_2 \in (\alpha_2, \alpha_3): \ g'(\beta_2) = 0.$$

در نتیجه تابع $g'(x) = x(2 - cosx)$ حداقل دارای دو ریشه‌ی حقیقی β_1, β_2 می‌باشد، اما همان طور که از ضابطه‌ی $g'(x)$ مشخص است، $x = 0$ تنها ریشه‌ای حقیقی آن است. لذا فرض خلف باطل و حکم مسئله درست است.

۷. نشان دهید که معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ برای $n\in\mathbb{N}$ و $a>0$ فقط یک جواب دارد.

حل:

تابع $f(x)=x^{2n+1}+ax+b$ را در نظر بگیرید. چون توابع چند جمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر هستند، لذا تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر است و همچنین

$$f(0)=b,\ f(-\sqrt[2n+1]{b})=-a\sqrt[2n+1]{b}.$$

اما چون a یک عدد مثبت است، پس همواره دو مقدار $f(-\sqrt[2n+1]{b})$ و $f(0)$ مختلف علامت هستند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $-\sqrt[2n+1]{b}<0$، یعنی b مقداری مثبت باشد. لذا بنابر قضیه بولتزانو یا قضیه مقدار میانی، چون $f(x)$ تابعی پیوسته روی $[-\sqrt[2n+1]{b},0]$ است، پس عددی مانند $c\in(-\sqrt[2n+1]{b},0)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=0$. که این وجود حداقل یک ریشه را تضمین می‌کند. حال نشان می‌دهیم $f(x)$ حداکثر یک ریشه می‌تواند داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید، $f(x)$ دارای دو ریشه متمایز مانند c_1,c_2، $(c_1<c_2)$، باشد. در این صورت از قضیه رول نتیجه می‌شود که

$$\exists d\in(c_1,c_2):f'(d)=0.$$

که بیان گر آن است که تابع $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+a$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی مانند d می‌باشد. اما چون $a>0$ و $(2n+1)x^{2n}\geq 0$، لذا $f'(x)$ همواره مثبت و مخالف صفر خواهد بود. پس فرض خلف باطل و حکم مسئله درست است.

۸. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

حل:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-\tan^2 x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\tan x\sec^2 x}\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{\sin x\sec^2 x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos^3 x\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

لازم به ذکر است در محاسبه حد فوق به علت برقرار بودن شرایط قضیه هوپیتال، یعنی رخ دادن حال مبهم $\frac{0}{0}$ و مشتق پذیر بودن صورت و مخرج در $x=0$، از قاعده هوپیتال دو مرتبه به صورت متوالی استفاده شده است.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot(\frac{\pi}{4}-x)} &\overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2 2x}{\csc^2(\frac{\pi}{4}-x)} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos^2 2x}\\ &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2x)}{1+\cos 4x} \overset{H}{=} 2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{-4\sin 4x}\\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\cos(\frac{\pi}{2}-2x)}{4\cos 4x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

در محاسبه حد فوق به علت برقرار بودن شرایط قضیه هوپیتال، یعنی رخ دادن حالات مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ و همچنین مشتق پذیر بودن صورت و مخرج در $x=\frac{\pi}{4}$، از قاعده هوپیتال دو مرتبه استفاده شده است.

۹. نامساوي‌هاي زیر را ثابت کنید.

(آ) $|\sin a - \sin b| \ \leq \ |b-a|, \quad \forall a,b \in R.$

(ب) $(1+x)^p \leq 1 + x^p, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad x > 0.$

(ج) $x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

حل:

الف) از تابع کمکی $f(x) = sinx$ استفاده می کنیم، این تابع در بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر است، طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\exists \ a \ < c \ < b, \ \ cos \ c = \frac{sin \ b - sin \ a}{b-a}$$

و با توجه به اینکه $|cos \ c| \leq 1$ پس

$$|sin \ a - sin \ b| \leq |a-b|$$

ب) تابع کمکی $f(x) = (1+x)^p - 1 - x^p$ را در نظر می گیریم، برای $x > 0$ پیوسته و مشتق پذیر است، مشتق تابع را محاسبه می کنیم:

$$f'(x) = p(1+x)^{(p-1)} - px^{(p-1)}$$

از آنجایی که $x > 0$ و

$$0 \leq p \leq 1 \rightarrow -1 \leq p-1 \leq 0$$

داریم:

$$(1+x)^{(p-1)} < x^{(p-1)}$$

پس $f'(x) < 0$ و در نتیجه $f(x)$ نزولی است. بنابراین، برای هر $x > 0$ ،

$$f(x) \leq f(0) = 0$$

و نامساوی حکم نتیجه خواهد شد.

ج)تابع کمکی $f(x) = tan\ x - x - \frac{x^3}{3}$ را در نظر می گیریم که در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ پیوسته و مشتق پذیر می باشد. مشتق های متوالی آن را محاسبه می کنیم:

$$f'(x) = (1 + tan^2\ x) - 1 - x^2 = tan^2\ x - x^2$$

$$f''(x) = 2tan\ x(1 + tan^2\ x) - 2x$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1 + tan^2\ x) + 6tan^2\ x(1 + tan^2\ x) - 2 = 8tan^2\ x + 6tan^4\ x$$

و به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $f^{(3)}(x) \geq 0$ پس $f''(x)$ صعودی است. در نتیجه

$$if\ x > 0 \rightarrow f''(x) \geq f''(0) = 0$$

بنابراین، f' نیز صعودی و به همین ترتیب f هم صعودی خواهد شد.

$$if\ x > 0 \rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0$$

پس

$$if\ x > 0 \rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$$

بنابراین به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$tan\ x \geq x + \frac{x^3}{3}$$

راه حل دوم: تابع کمکی $f(x) = tan\ x - x - \frac{x^3}{3}$ را در نظر می گیریم، به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ تابع مشخص شده روی بازه $[0, x]$ و $(0, x)$ به ترتیب پیوسته و مشتق پذیر است، پس با استفاده از قضیه مقدار میانگین

$$\exists\, 0 < c < x, (1 + tan^2\ c) - 1 - c^2 = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{tan\ x - x - \frac{x^3}{3}}{x}$$

$$x(tan^2\ c - c^2) = tan\ x - x - \frac{x^3}{3}$$

می خواهیم ثابت کنیم $tan\ x - x - \frac{x^3}{3} \geq 0$ ، پس با توجه به اینکه $x > 0$ اگر نشان دهیم $tan^2\ c - c^2 \geq 0$ حکم ثابت شده است. به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ تابع $g(x) = tan\ x$ را تعریف می کنیم که روی بازه $[0, x]$ و $(0, x)$ به ترتیب پیوسته و مشتق پذیر است، پس طبق قضیه مقدار میانگین:

$$\exists\ 0 < c_1 < x, \frac{tan\ x - tan(0)}{x - 0} = 1 + tan^2\ c_1 > 1 \ \rightarrow\ tan\ x > x$$

پس،

$$tan^2\ c - c^2 = (tan\ c - c)(tan\ c + c) \geq 0 \ \rightarrow\ tan\ x - x - \frac{x^3}{3} \geq 0$$

بنابراین به ازای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم

$$tan\ x \geq x + \frac{x^3}{3}$$

۱۰. (آدامز)الف) تقریب خطی را برای تابع $f(x) = \sqrt[۴]{x}$ حول نقطه $x_۰ = ۸۱$ نوشته و مقدار تقریبی $\sqrt[۴]{۸۵}$ را بدست آورید.
ب)مقدار تقریبی $\sqrt[۶]{۶۵}$ را محاسبه کنید.

حل:

الف) برای بدست آوردن تقریب خطی تابع $f(x) = \sqrt[۴]{x}$ ، ابتدا مشتق آن را در نقطه $x_۰ = ۸۱$ محاسبه می کنیم

$$f'(x) = \frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۴}} \rightarrow f'(۸۱) = \frac{۱}{۱۰۸}$$

پس تقریب خطی این تابع حول $x_۰ = ۸۱$ برابر است با:

$$L(x) = f(۸۱) + f'(۸۱)(x - ۸۱) = ۳ + \frac{۱}{۱۰۸}(x - ۸۱)$$

و مقدار تقریبی $\sqrt[۴]{۸۵}$ برابر است با:

$$f(۸۵) \simeq L(۸۵) = ۳ + \frac{۱}{۱۰۸}(۸۵ - ۸۱) = ۳٫۳۷$$

ب) تقریب خطی تابع $f(x) = \sqrt[۶]{x}$ را در نقطه $x = ۶۵$ حول $x_۰ = ۶۴$ می یابیم،

$$f'(x) = \frac{۱}{۶}x^{-\frac{۵}{۶}} \rightarrow f'(۶۴) = \frac{۱}{۱۹۲}$$

$$L(x) = f(۶۴) + f'(۶۴)(x - ۶۴) = ۲ + \frac{۱}{۱۹۲}(x - ۶۴)$$

$$f(۶۵) \simeq L(۶۵) = ۲ + \frac{۱}{۱۹۲}(۶۵ - ۶۴) = ۲٫۰۰۵$$

۱۱. (آدامز نسبت های وابسته) هوا را با تلنبه وارد یک بادکنک کروی می کنیم. هنگامی که شعاع بادکنک ۳۰ سانتیمتر است ، حجم آن با آهنگ $۲۰\frac{cm^۳}{s}$ افزایش می یابد. آهنگ افزایش شعاع در این لحظه چقدر است؟

حل:

فرمول حجم کره ای با شعاع r عبارت است از $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ ، پس

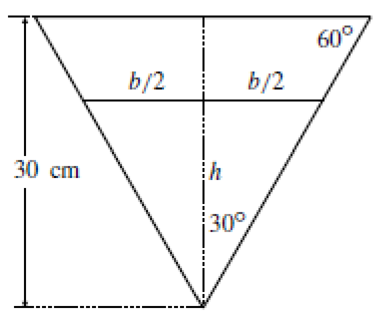
$$\frac{dv}{dt} = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times \pi \times r^۲ \times \frac{dr}{dt} = ۴\pi r^۲ \frac{dr}{dt}$$

طبق فرض سوال، $\frac{dv}{dt} = ۲۰\frac{cm^۳}{s}$ و $r = ۳۰cm$ بنابراین ،

$$\frac{dr}{dt} = \frac{۱}{۱۸۰\pi}\frac{cm}{s}$$

۱۲. (آدامز نسبت های وابسته)سطح مقطع جانبی حوض آبی به شکل مثلث متساوی الاضلاع است که ضلع بالایی آن افقی است. اگر حوض دارای ۱۰ متر طول و ۳۰ سانتیمتر عمق باشدو نیز اگر آب با آهنگ $\frac{۱}{۴}\frac{m^۳}{min}$ در آن جاری شود، زمانی که آب ۲۰ سانتیمتر عمق داشته باشد سطح آب با چه سرعتی بالا می آید؟

حل:

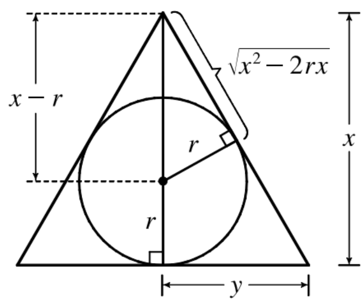


$$\frac{h}{\frac{۱}{۲}b} = tan۶۰ = \sqrt{۳} \Rightarrow b = \frac{۲}{\sqrt{۳}}h$$

$$V(t) = \frac{۱}{۲}h(t)b(۱۰) = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}}h^۲$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}h\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲۰h}\frac{dV}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲۰(۰٫۲)}\frac{۱}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۶}\frac{m}{min}$$

۱۳. کمترین مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را پیدا کنید که محیط بر دایره ای به شعاع r است.

حل:



$$\frac{y}{x}=\frac{r}{\sqrt{x^2-2rx}} \Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}(2y)x=\frac{rx^2}{\sqrt{x^2-2rx}}$$

$$A'(x)=\frac{2rx\sqrt{x^2-2rx}-rx^2\frac{(x-r)}{\sqrt{x^2-2rx}}}{x^2-2rx}=\frac{rx^2(x-3r)}{\sqrt[2]{(x^2-2rx)^3}}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$x=3r \Rightarrow A'(x)=0$$

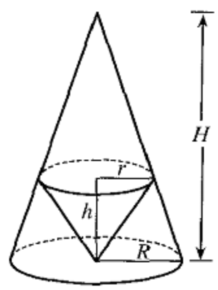
$$2r<x<3r \Rightarrow A'(x)<0$$

$$x>3r \Rightarrow A'(x)>0$$

در نتیجه $x=3r$ کمترین مقدار را خواهد داشت پس

$$A(3r)=\frac{r(9r^2)}{\sqrt{3}r}=3\sqrt{3}r^2$$

۱۴. مخروطی با ارتفاع h درون یک مخروط بزرگتر به ارتفاع H طوری محاط شده است که راس مخروط کوچکتر در مرکز قاعده مخروط بزرگتر قرار گرفته است. نشان دهید که اگر $h = \frac{1}{3}H$ مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را اختیار میکند.



حل: بنابرقضیه تالس خواهیم داشت

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$$

از طرفی حجم مخروط برابراست با $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{Hr}{R} = H - h \Rightarrow h = H - \frac{Hr}{R} = \frac{HR - Hr}{R} = \frac{H}{R}(R-r) \qquad (1)$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3}r^2(\frac{H}{R})(R-r) = \frac{\pi}{3}\frac{H}{R}(Rr^2 - r^3)$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{3}\frac{H}{R}(2Rr - 3r^2) = \frac{\pi}{3}\frac{H}{R}r(2R-3r)$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{یا} \quad 2R = 3r$$

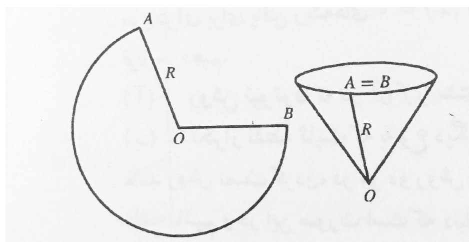
در نتیجه $r = \frac{2}{3}R$ بنابر (۱) داریم:

$$h = \frac{H}{R}(R - \frac{2}{3}R) = \frac{H}{R}\frac{1}{3}R$$

با توجه به اینکه $V'(r)$ از مثبت به منفی در $r = \frac{2}{3}R$ تغییر می کند. بنابر این حجم مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را دارد.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{2}{3}R)^2(\frac{1}{3}H) = \frac{4}{7}2\pi R^2 H$$

۱۵. قطاعی از یک قرص دایره‌ای شکل به شعاع R را جدا و سپس قسمت باقیمانده‌ی قرص را طوری تا می‌کنیم که از انطباق دو لبه‌ی آن بر هم یک مخروط پدید آید. بیشترین حجم ممکن برای مخروط چقدر است؟



حل:

محیط قاعده مخروط برابر است با طول کمان مقابل زاویه θ ، یعنی $R\theta = 2r\pi$ از طرفی بنابر قضیه فیثاغورس $R^2 = h^2 + r^2$ اکنون حجم مخروط را برحسب R و θ بدست می آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3\theta^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

با مشتق گیری نسبت به θ داریم:

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \theta^2\frac{-2\theta}{2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}\right)$$

از برابر صفر قرار دادن V' ، $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ بدست می آید.. برای $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ حجم برابر است با $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.