مثال ۱) فرض کنید $k\in\mathbb{N}$ و f تابعی باشد که در $x=a$ مشتق‌پذیر

است در این صورت مطلوب است مقدار حد زیر:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f(a+\frac{1}{n})+f(a+\frac{2}{n})+\cdots+f(a+\frac{k}{n})-kf(a)\right)$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty \\ 1/n\to 0}}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{1/n}+2\,\frac{f(a+\frac{2}{n})-f(a)}{\frac{2}{n}}+\cdots\right.$$

چون f مشتق‌پذیره در $x=a$

این حدود وجود دارد

$$\left.+k\,\frac{f(a+\frac{k}{n})-f(a)}{\frac{k}{n}}\right)=$$

$$=f'(a)+2f'(a)+\cdots+kf'(a)=f'(a)(1+2+\cdots+k)$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}f'(a)$$

مثال: فرض کنید f بر بازه‌ی باز I، دوبار مشتق‌پذیر باشد و $0,1,2 \in I$ و داده $f(1)=f(0)=0$ و $f(2)=1$. ثابت کنید $b \in I$ موجود است که $f''(b) > \frac{1}{2}$.

حل:

$$\xrightarrow{\text{ق رل}} \exists c_1 \in (0,1) \subseteq I : \quad \underbrace{f'(c_1) = 0}$$

$$\xrightarrow{\text{ق مقدار میانگین}} \exists c_2 \in (1,2) \subseteq I : \quad \underbrace{\frac{f(2)-f(1)}{2-1}}_{= \frac{1-0}{1} = 1} = f'(c_2) \quad \Rightarrow \underbrace{f'(c_2) = 1}$$

حال، f' بر I مشتق‌پذیر است و $\underset{\uparrow}{c_1, c_2} \in (0,2)$ ($c_2 > c_1$). از ق مقدار میانگین (برای f')، داریم:

$$\exists b \in (c_1, c_2) : \quad f''(b) = \frac{f'(c_2) - f'(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{1}{c_2 - c_1} > \frac{1}{2}$$

$0 < c_2 - c_1 < 2$.

$$\Rightarrow f''(b) > \frac{1}{2}. \quad \triangle$$

- مثال: نشان دهید که برای هر $x > 0$، داریم: $\sin x < x$.

حل: اگر $x > 2\pi$، آن‌گاه داریم:

$$\sin x \leq 1 < 2\pi < x.$$

اگر $0 < x \leq 2\pi$، آن‌گاه برای تابع $f(x) = \sin x$، طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

$$= f'(c) = \cos(c) < 1$$

که در آن، $c \in (0, 2\pi)$.

$$\Rightarrow \sin x < x.$$

مثال: برای $x>0$ و $-1 \le x < 0$، نشان دهید:

$$\sqrt{1+x} < 1 + x/2 .$$

حل: فرض کنید $f(x) = \sqrt{1+x}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

ابتدا فرض کنید $x>0$. قضیه‌ی مقدار میانگین را برای $f(x)$ روی بازه‌ی $[0,x]$ به کار می‌بریم. پس $c \in (0,x)$ ای موجود است که:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \underset{(c>0)}{<} \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x>0} \sqrt{1+x} - 1 < x/2 \Rightarrow \sqrt{1+x} < 1 + x/2 .$$

حال، فرض کنید $-1 \le x < 0$. قضیه‌ی مقدار میانگین را برای $f(x)$ روی بازه‌ی $[x,0]$ به کار می‌بریم. پس $c \in (x,0)$ ای موجود است که:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \underset{(0 \le 1+x < 1+c < 1)}{>} 1/2$$

$$= \frac{1-\sqrt{1+x}}{-x}$$

$$\xrightarrow{x<0} 1 - \sqrt{1+x} > \frac{-x}{2} \Longrightarrow 1 + x/2 > \sqrt{1+x} .$$