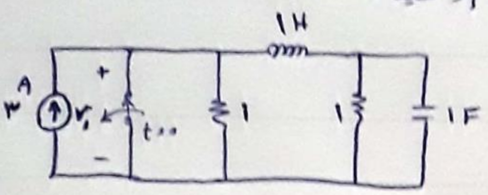
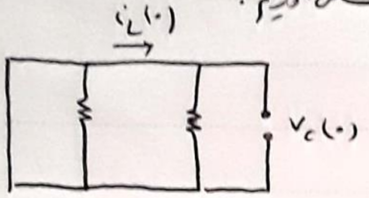
مدارهای مرتبه دوم

۱-

کلید در $t=0$ باز می‌شود و قبل از آن به حالت دائم رسیده است. $V_1(0^+)$ و $\frac{dv_1}{dt}(0^+)$ را بدست آورید:

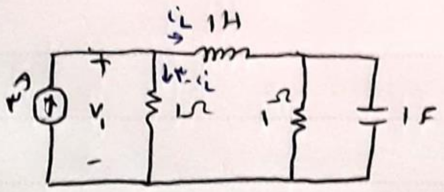


ابتدا جریان سلف و ولتاژ خازن را در $t<0$ بدست می‌آوریم:



چون منبع مستقل نداریم
$$\begin{cases} V_C(0)=0 \\ i_L(0)=0 \end{cases}$$

در $t>0$

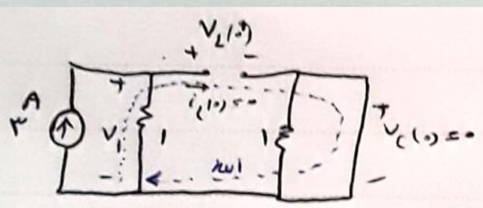


$$V_1 = 1^{\Omega}(3-i_L)$$
$$V_1 + i_L = 3$$

از طرفین مشتق می‌گیریم $\Rightarrow \frac{dv_1}{dt}+\frac{di_L}{dt}=0 \xrightarrow{\text{in } t=0} \frac{dv_1}{dt}(0^+) = -\frac{di_L}{dt}(0^+)$

$$\frac{dv_1}{dt}(0^+) = -\frac{V_L(0^+)}{L}$$

پس کافیست ولتاژ سلف را در صفر مثبت بدست بیاوریم برای این کار مدار را در صفر مثبت رسم می‌کنیم:



مدار در $t=0$ به صورت مقابل است:

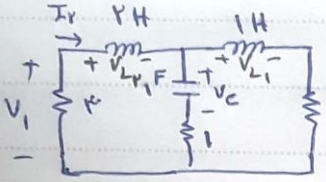
$$V_L(0^+) = 3^A \times 1^{\Omega} = 3^V$$

$$\frac{dv_1}{dt}(0^+) = -3$$

در حلقه (KVL) $\Rightarrow$ $-V_1$
مشخص شده

-۲

در مدار زیر اگر $i_{L_1}(0^-)=i_{L_2}(0^-)=1^A$ و $V_C(0^-)=1^V$ باشد مطلوب است محاسبه $\frac{dv_1}{dt}(0^+)$:



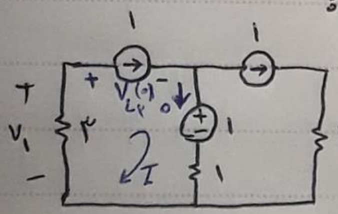
با توجه به مدار مشخص است که $V_1=-3I_2$

و جریان I_2 برابر با جریان سلف 2^H است و می‌دانیم $V_L=L\frac{di}{dt}$ پس داریم:

$$\begin{cases} I_2 = -\frac{V_1}{3} \\ V_{L_2} = 2\frac{dI_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow V_{L_2} = 2\frac{d}{dt}\left(-\frac{V_1}{3}\right) \Rightarrow V_{L_2} = -\frac{2}{3}\frac{d}{dt}(V_1)$$

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt}(0) = -\frac{3}{2}V_{L_2}(0) \quad (1)$$

پس برای بدست آوردن $\frac{dv_1}{dt}$ در لحظه صفر مثبت، کافیست ولتاژ سلف ۲ هانری را در صفر مثبت حساب کنیم. می‌دانیم جریان سلف تغییرات آنی ندارد ولی ولتاژ سلف می‌تواند تغییرات آنی را تجربه کند پس برای بدست آوردن $V_{L_2}(0^+)$ باید مدار را در لحظه صفر مثبت رسم کنیم:

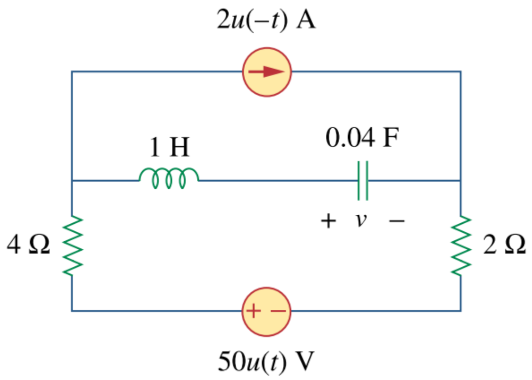


$$(KVL)_I \Rightarrow 3\times1 + V_{L_2}(0^+) + 1 + (1\times0) = 0$$

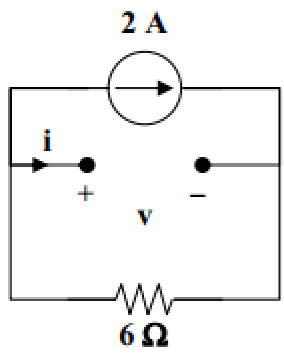
$$V_{L_2}(0^+) = -4 \quad (2)$$

$$(1,2) \Rightarrow \frac{dv_1}{dt}(0^+) = -\frac{3}{2}\times(-4) = 6$$

۳- ولتاژ $v(t)$ را برای زمان های $t \geq 0$ بدست آورید.



For t = 0-, the equivalent circuit is shown below.



$$i(0-) = 0, \ \ v(0-) = -2x6 = -12V$$

For t > 0, we have a series RLC circuit with a step input.

$$\alpha = R/(2L) = 6/2 = 3, \ \ \omega_o = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.04}$$

$$s = -3 \pm \sqrt{9-25} = -3 \pm j4$$

$$\text{Thus,} \quad v(t) = V_f + [(A\cos 4t + B\sin 4t)e^{-3t}]$$

$$\text{where } V_f = \text{final capacitor voltage} = 50 \text{ V}$$

$$v(t) = 50 + [(A\cos 4t + B\sin 4t)e^{-3t}]$$

$$v(0) = -12 = 50 + A \ \text{ which gives } A = -62$$

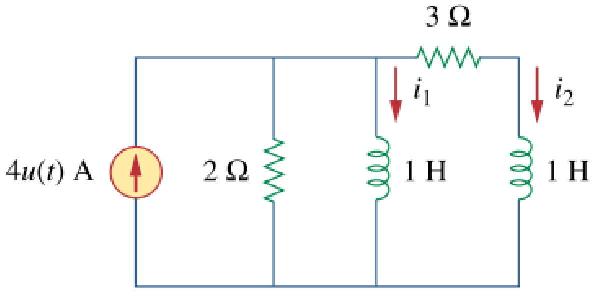
$$i(0) = 0 = Cdv(0)/dt$$

$$dv/dt = [-3(A\cos 4t + B\sin 4t)e^{-3t}] + [4(-A\sin 4t + B\cos 4t)e^{-3t}]$$

$$0 = dv(0)/dt = -3A + 4B \ \text{ or } \ B = (3/4)A = -46.5$$

$$v(t) = \underline{\mathbf{\{50 + [(-62\cos 4t - 46.5\sin 4t)e^{-3t}]\}\ V}}$$

۴- جریانهای i_1 و i_2 را برای زمان های $t \geq 0$ بدست آورید..



At $t = 0-$, $4u(t) = 0$ so that $i_1(0) = 0 = i_2(0)$ (1)

Applying nodal analysis,

$$4 = 0.5di_1/dt + i_1 + i_2 \quad (2)$$

Also, $i_2 = [1di_1/dt – 1di_2/dt]/3$ or $3i_2 = di_1/dt – di_2/dt$ (3)

Taking the derivative of (2), $0 = d^2i_1/dt^2 + 2di_1/dt + 2di_2/dt$ (4)

From (2) and (3), $di_2/dt = di_1/dt – 3i_2 = di_1/dt – 3(4 – i_1 – 0.5di_1/dt)$

$$= di_1/dt – 12 + 3i_1 + 1.5di_1/dt$$

Substituting this into (4),

$$d^2i_1/dt^2 + 7di_1/dt + 6i_1 = 24 \text{ which gives } s^2 + 7s + 6 = 0 = (s + 1)(s + 6)$$

Thus, $i_1(t) = I_s + [Ae^{-t} + Be^{-6t}]$, $6I_s = 24$ or $I_s = 4$

$$i_1(t) = 4 + [Ae^{-t} + Be^{-6t}] \text{ and } i_1(0) = 4 + [A + B] \quad (5)$$

$$i_2 = 4 – i_1 – 0.5di_1/dt = i_1(t) = 4 + -4 - [Ae^{-t} + Be^{-6t}] – [-Ae^{-t} - 6Be^{-6t}]$$

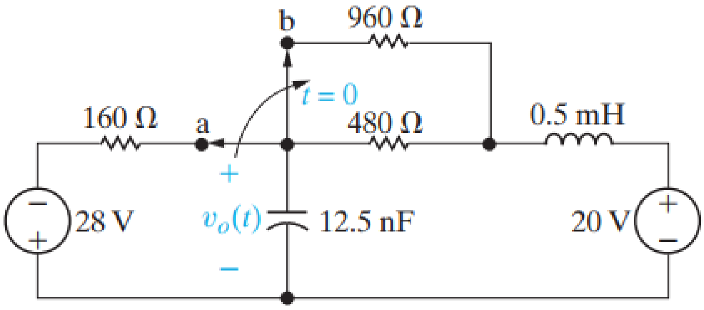
$$= [-0.5Ae^{-t} + 2Be^{-6t}] \text{ and } i_2(0) = 0 = -0.5A + 2B \quad (6)$$

From (5) and (6), $A = -3.2$ and $B = -0.8$

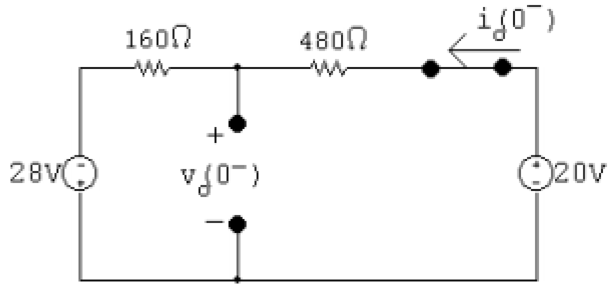
$$i_1(t) = \underline{\mathbf{\{4 + [-3.2e^{-t} – 0.8e^{-6t}]\}\ A}}$$

$$i_2(t) = \underline{\mathbf{[1.6e^{-t} – 1.6e^{-6t}]\ A}}$$

۵- ولتاژ $v_o(t)$ را برای زمانهای t>0 بدست آورید؟

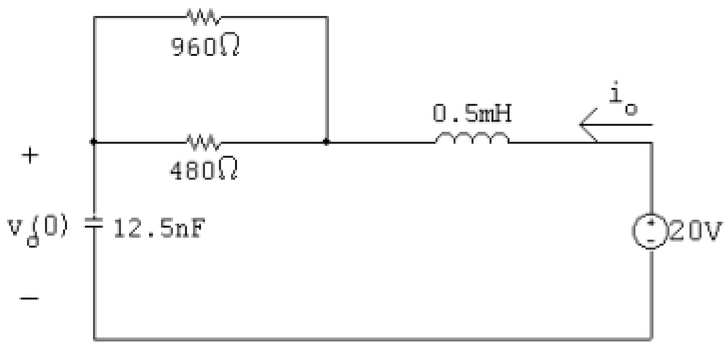


$t < 0$:



$$i_o(0^-) = \frac{20 + 28}{160 + 480} = 75\,\text{mA}$$

$$v_o(0^-) = 20 - 480(0.075) = -16\,\text{V}$$



As $t \to \infty$, $V_f = 20$ V.

$$R_{\text{eq}} = 960 \| 480 = 320\,\Omega$$

$$\alpha = \frac{R_{\text{eq}}}{2L} = \frac{320}{2(0.5 \times 10^{-3})} = 320{,}000 \text{ rad/s}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(0.5 \times 10^{-3})(12.5 \times 10^{-9})}} = 400{,}000\,\text{rad/s}$$

$\alpha^2 < \omega_0^2$: underdamped

$$\omega_d = \sqrt{400{,}000^2 - 320{,}000^2} = 240{,}000 \text{ rad/s}$$

$$v_o = 20 + B_1' e^{-320{,}000t} \cos 240{,}000t + B_2' e^{-320{,}000t} \sin 240{,}000t$$

$$v_o(0) = 20 + B_1' = -16 \qquad \text{so} \qquad B_1' = -36 \text{ V}$$

$$\frac{dv_o}{dt}(0) = -\alpha B_1' + \omega_d B_2' = \frac{I_0}{C} \qquad \text{so} \qquad -320{,}000(-36) + 240{,}000 B_2' = \frac{75 \times 10^{-3}}{12.5 \times 10^{-9}}$$

solving, $\quad B_2' = -23$

$$\therefore \qquad v_o(t) = 20 - 36e^{-320{,}000t} \cos 240{,}000t - 23e^{-320{,}000t} \sin 240{,}000t \text{ V} \quad t \geq 0$$