بسم الله الرحمن الرحیم

تمرینات سری دوم : مشتق و کاربرد مشتق

۴ آذر ۱۳۹۹

سوال ۱

فرض کنید f تابعی مشتق پذیر در $x = a$ باشد. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a) \quad \lim_{x \to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$$

$$(b) \quad \lim_{h \to ۰} \frac{f(a + ۲h) - f(a - h)}{h}$$

حل:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}=\lim_{a\to a}\frac{a^n f(x)-x^n f(a)+a^n f(a)-a^n f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^n f(x)-a^n f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{x^n f(a)-a^n f(a)}{x-a}$$

$$=a^n\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=a^n f'(a)-nf(a)a^{n-۱}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+۲h)-f(a-h)}{h} &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+۲h)-f(a-h)+f(a)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+۲h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to ۰} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} \\
&= ۲\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+۲h)-f(a)}{۲h} + \lim_{h\to ۰} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} \\
&= ۲f'(a) + f(a) = ۳f'(a)
\end{aligned}
$$

سوال ۲

فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا باشد و $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x sin\frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ثابت کنید f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

حل: **قضیه مورد استفاده برای حل سوال:** اگر $\lim_{x\to a} g(x) = l$ و دنباله $a_n \to a$، آنگاه $g(a_n) \to l$.

نحوه استفاده از قضیه برای حل سوال: دو دنباله‌ی $a_n \to a$ و $b_n \to a$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر داشته باشید $g(a_n) \to l$ و $g(b_n) \to l'$ به طوری که $l \neq l'$ ، آنگاه $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود ندارد.

هدف بررسی وجود حد $lim \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \circ} \frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ} = f'(\circ)$. اما بنابر تعریف تابع $f(x)$ داریم

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} ۱ & x \in Q - \{\circ\} \\ sin\frac{۱}{x} & x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$$

از این رو دنباله‌ی $\{a_n\} = \{\frac{۱}{n}\}$ را در نظر بگیرید. چون $a_n \in Q$، از تعریف تابع نتیجه می‌شود $g(a_n) \to ۱$.

حال اگر دنباله‌ای $b_n = \frac{۱}{n\pi}$ را در نظر بگیرید.آنگاه از تعریف تابع و $b_n \in \mathbb{R} - Q$ نتیجه می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) = \lim_{n\to\infty} (sin\,(n\pi)) = \circ$$

در نتیجه دو دنباله مختلف با وجود این که به صفر میل می‌کردند ولی حد مقادیر دو دنباله متفاوت است، لذا حد $f'(\circ) = \lim_{x\to\circ} g(x)$ وجود ندارد.

سوال ۳

الف) فرض کنید $f(x) = xsin^۲\pi x, x \in \mathbb{R}$. تابع مشتق f را پیدا کنید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه ای به طول $x = ۱$ بنویسید.

حل: قسمت الف)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'\, sin^{۲}(\pi x) + x\,(sin^{۲}(\pi x))' \\ &= sin^{۲}(\pi x) + ۲\pi x sin(\pi x) cos(\pi x) \\ &= sin^{۲}(\pi x) + \pi x sin(۲\pi x) \end{aligned}$$

قسمت ب) معادله خط مماس به تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ به فرم

$$y - f(۱) = f'(۱)(x - ۱),$$

می‌باشد که در آن

$$f(۱) = sin^{۲}\pi = ۰, \quad f'(۱) = sin^{۲}(\pi) + \pi sin(۲\pi) = ۰.$$

بنابراین

$$y - f(۱) = f'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y = ۰.$$

سوال ۴

فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در $x = c$ باشد. اگر $a, b, d \in \mathbb{R}$، ثابت کنید:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+ah) - f(c+bh)}{sin(dh + h^3)} = \frac{a-b}{d} f'(c). \qquad (d \neq 0)$$

حل:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+ah)-f(c+bh)}{sin(dh+h^3)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+ah)-f(c+bh)-f(c)+f(c)}{sin(dh+h^3)}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{f(c+ah)-f(c)}{ah}ah - \frac{f(c+bh)-f(c)}{bh}bh\right)\frac{dh+h^3}{sin(dh+h^3)}\frac{1}{dh+h^3}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{f(c+ah)-f(c)}{ah}a - \frac{f(c+bh)-f(c)}{bh}b\right)\frac{dh+h^3}{sin(dh+h^3)}\frac{1}{d+h^2}\right)\\
&= \left(a\lim_{h\to 0}\frac{f(c+ah)-f(c)}{ah}h - b\lim_{h\to 0}\frac{f(c+bh)-f(c)}{bh}h\right)\\
&\times \lim_{h\to 0}\frac{dh+h^3}{sin(dh+h^3)}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{d+h^2}
\end{aligned}$$

حال تغییر متغیرهای $h' = ah$، $h'' = bh$ و $h''' = dh + h^3$ را به ترتیب در سه حد از چپ به راست در نظر بگیرید که چون $h \to 0$ لذا $h', h'', h''' \to 0$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
A &= \left(a\lim_{h'\to 0}\frac{f(c+h')-f(c)}{h'}h - b\lim_{h''\to 0}\frac{f(c+h'')-f(c)}{h''}h\right)\\
&\times \lim_{h'''\to 0}\frac{h'''}{sin(h''')}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{dh+h^2}\\
&= (af'(c)-bf'(c))\times 1\times\frac{1}{d} = \frac{a-b}{d}f'(c).
\end{aligned}$$

سوال ۵

(آدامز) فرض کنید f بر بازه‌ای مانند I دو بار مشتق‌پذیر باشد (یعنی f'' بر I وجود داشته باشد)، نقاط ۰ و ۲ متعلق به I باشند و $f(۰) = f(۱) = ۰$ و $f(۲) = ۱$ ثابت کنید که:

آ) به ازای نقطه‌ای مانند a متعلق به I داریم $f'(a) = \frac{۱}{۲}$.

ب) به ازای نقطه‌ای مانند b متعلق به I داریم $f''(a) > \frac{۱}{۲}$.

ج) به ازای نقطه‌ای مانند c متعلق به I داریم $f'(c) = \frac{۱}{۷}$.

الف) از آنجایی که ۰ و ۲ در بازه‌ی I قرار دارند و $f(x)$ روی بازه‌ی I مشتق پذیر است، لذا تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[۰, ۲]$ پیوسته و روی $(۰, ۲)$ مشتق پذیر می‌باشد. در این صورت بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند $a \in (۰, ۲)$ وجود دارد، به طوری که

$$f'(a) = \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۱}{۲}.$$

ب) چون f'' بر بازه‌ی I موجود است و همچنین $I \ni ۰,۲$، لذا توابع $f(x)$ و $f'(x)$ روی بازه‌های $[۰,۲]$ و $(۰,۲)$ به ترتیب پیوسته و مشتق پذیر هستند. از طرفی چون $f(۰) = f(۱) = ۰$ پس بنابر قضیه رول عددی مانند $b_۱ \in (۰,۱)$ وجود دارد به طوری که $f'(b_۱) = ۰$.
از طرفی چون $f(x)$ روی بازه‌های $[۱,۲]$ و $(۱,۲)$ به ترتیب پیوسته و مشتق پذیر است، لذا بنابر قضیه مقدار میانگین عددی مانند $b_۲ \in (۱,۲)$ وجود دارد، به طوری که

$$f'(b_۲) = \frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱} = ۱.$$

حال چون $b_۱ \in (۰,۱)$، $b_۲ \in (۱,۲)$ و $f(x)$ بر بازه‌ی I دو بار مشتق پذیر است، لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برای تابع $f'(x)$ روی بازه‌ی $[b_۱, b_۲]$ بر قرار است، پس عددی مانند $b \in (b_۱, b_۲)$ وجود دارد، به طوری که

$$f''(b) = \frac{f'(b_۲) - f'(b_۱)}{b_۲ - b_۱} = \frac{۱}{b_۲ - b_۱}.$$

اما چون $b_۱ \in (۰,۱)$ و $b_۲ \in (۱,۲)$ پس $b_۲ - b_۱ < ۲$. در نتیجه

$$f''(b) = \frac{۱}{b_۲ - b_۱} > \frac{۱}{۲} \to f''(b) > \frac{۱}{۲}.$$

ج) تابع $g(x) = f'(x) - \frac{۱}{۷}$ را در نظر بگیرید. آنجایی که تابع $f'(x)$ روی بازه I مشتق پذیر و لذا پیوسته است، بنابراین $g(x)$ نیز روی I پیوسته می‌باشد. حال فرض کنید $b_۱, b_۲ \in I$، همان دو عدد حاصل شده در بخش قبل باشند، در این صورت

$$g(b_۱) = f'(b_۱) - \frac{۱}{۷} = -\frac{۱}{۷},$$
$$g(b_۲) = f'(b_۲) - \frac{۱}{۷} = \frac{۶}{۷}$$

لذا بنابر قضیه میانی عددی مانند $c \in (b_۱, b_۲) \subseteq I$ وجود دارد، به طوری که

$$g(c) = ۰ \rightarrow f'(c) = \frac{۱}{۷}.$$

سوال ۶

ثابت کنید توابع $f(x) = x^۲ - cosx$ و $g(x) = x^۲ - xsinx - cosx$ هر کدام دارای دقیقاً دو ریشه‌ی حقیقی می‌باشند.

حل: نخست تابع $f(x) = x^۲ - cosx$ را در نظر بگیرید. واضح است که توابع $f(x)$ و $f'(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر هستند (چون حاصل تفریق دو تابع مشتق پذیر هستند) و همچنین

$$f\left(\frac{-\pi}{۲}\right) = \frac{\pi^۲}{۴},\ f(۰) = -۱,\ f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{\pi^۲}{۴}.$$

بنابراین

$$\exists c_۱ \in (\frac{-\pi}{۲}, ۰) :\ f(c_۱) = ۰,$$

$$\exists c_۲ \in (۰, \frac{\pi}{۲}) :\ f(c_۲) = ۰.$$

که این وجود حداقل دو ریشه را تضمین می‌کند. حال نشان می‌دهیم $f(x)$ حداکثر دو ریشه می‌تواند داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید، $f(x)$ دارای سه ریشه متمایز مانند $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳$، $(\alpha_۱ < \alpha_۲ < \alpha_۳)$، باشد. در این صورت از قضیه رول نتیجه می‌شود که

$$\exists \beta_۱ \in (\alpha_۱, \alpha_۲) :\ f'(\beta_۱) = ۰,$$

$$\exists \beta_۲ \in (\alpha_۲, \alpha_۳) :\ f'(\beta_۲) = ۰.$$

اما با توجه به اینکه شرایط قضیه رول برای تابع $f'(x) = ۲x + sinx$ روی بازه‌ی $[\beta_۱, \beta_۲]$ بر قرار است، لذا عددی مانند $\gamma \in (\beta_۱, \beta_۲)$ وجود دارد به طوری که $f''(\gamma) = ۰$. که با این حقیقت که تابع $f''(x) = ۲ + cos(x)$ هیچ ریشه‌ی حقیقی ندارد، در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم مسئله درست است.
حال تابع $g(x) = x^۲ - xsinx - cosx$ را در نظر بگیرید. واضح است که تابع $g(x)$ و $g'(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر هستند (چون از ضرب وتقسیم چندتابع مشتق پذیر بدست آمده است) و همچنین

$$g(\frac{-\pi}{۲}) = \frac{\pi^۲}{۴} + \frac{\pi}{۲} > ۰,$$
$$g(\frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi^۲}{۴} - \frac{\pi}{۲} > ۰,$$
$$g(۰) = -۱ < ۰.$$

لذا بنابر قضیه مقدار میانی $c_1 \in (\frac{-\pi}{2}, 0)$ و $c_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد به طوری که $g(c_1) = g(c_2) = 0$. حال نشان می‌دهیم $g(x)$ حداکثر دو ریشه می‌تواند داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید، $g(x)$ دارای سه ریشه متمایز مانند $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$، $(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3)$، باشد. در این صورت از قضیه رول نتیجه می‌شود که

$$\exists \beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2) : \ g'(\beta_1) = 0,$$

$$\exists \beta_2 \in (\alpha_2, \alpha_3) : \ g'(\beta_2) = 0.$$

در نتیجه تابع $g'(x) = x(2 - cosx)$ حداقل دارای دو ریشه‌ی حقیقی β_1, β_2 می‌باشد، اما همان طور که از ضابطه‌ی $g'(x)$ مشخص است، $x = 0$ تنها ریشه‌ای حقیقی آن است. لذا فرض خلف باطل و حکم مسئله درست است.

سوال ۷

نشان دهید که معادله $x^{2n+1} + ax + b = 0$ برای $n \in \mathbb{N}$ و $a > 0$ فقط یک جواب دارد.

حل: تابع $f(x) = x^{۲n+۱} + ax + b$ را در نظر بگیرید. چون توابع چند جمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر هستند، لذا تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر است و همچنین

$$f(۰) = b,\ f(-\sqrt[۲n+۱]{b}) = -a\sqrt[۲n+۱]{b}.$$

اما چون a یک عدد مثبت است، پس همواره دو مقدار $f(-\sqrt[۲n+۱]{b})$ و $f(۰)$ مختلف علامت هستند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $-\sqrt[۲n+۱]{b} < ۰$، یعنی b مقداری مثبت باشد. لذا بنابر قضیه بولتزانو یا قضیه مقدار میانی، چون $f(x)$ تابعی پیوسته روی $[-\sqrt[۲n+۱]{b}, ۰]$ است، پس عددی مانند $c \in (-\sqrt[۲n+۱]{b}, ۰)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = ۰$. که این وجود حداقل یک ریشه را تضمین می‌کند.

حال نشان می‌دهیم $f(x)$ حداکثر یک ریشه می‌تواند داشته باشد. به برهان خلف فرض کنید، $f(x)$ دارای دو ریشه متمایز مانند $c_۱, c_۲$، $(c_۱ < c_۲)$، باشد. در این صورت از قضیه رول نتیجه می‌شود که

$$\exists d \in (c_۱, c_۲) : f'(d) = ۰.$$

که بیان گر آن است که تابع $f'(x) = (۲n+۱)x^{۲n} + a$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی مانند d می‌باشد. اما چون $a > ۰$ و $(۲n+۱)x^{۲n} \geq ۰$، لذا $f'(x)$ همواره مثبت و مخالف صفر خواهد بود. پس فرض خلف باطل و حکم مسئله درست است.

سوال ۸

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\tan x}\\
&(b) \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}
\end{aligned}
$$

حل:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x - sinx}{x - tanx} \overset{H}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - cosx}{-tan^۲ x} \overset{H}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{sinx}{-۲tanx sec^۲ x}$$

$$= -\frac{۱}{۲} \lim_{x\to ۰} \frac{sinx cosx}{sinx sec^۲ x} = -\frac{۱}{۲} \lim_{x\to ۰} cos^۳ x$$

$$= -\frac{۱}{۲}$$

لازم به ذکر است در محاسبه حد فوق به علت برقرار بودن شرایط قضیه هوپیتال، یعنی رخ دادن حال مبهم $\frac{۰}{۰}$ و مشتق پذیر بودن صورت و مخرج در $x = ۰$، از قاعده هوپیتال دو مرتبه به صورت متوالی استفاده شده است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{tan۲x}{cot(\frac{\pi}{۴}-x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۲sec^{۲}۲x}{csc^{۲}(\frac{\pi}{۴}-x)} = ۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{sin^{۲}(\frac{\pi}{۴}-x)}{cos^{۲}۲x}$$

$$= ۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{۱+cos۴x} \overset{H}{=} ۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۲sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{-۴sin۴x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۲cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{۴cos۴x} = \frac{۱}{۲}$$

در محاسبه حد فوق به علت برقرار بودن شرایط قضیه هوپیتال، یعنی رخ دادن حالات مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{۰}{۰}$ و همچنین مشتق پذیر بودن صورت و مخرج در $x = \frac{\pi}{۴}$، از قاعده هوپیتال دو مرتبه استفاده شده است

سوال ۹

نامساوي‌هاي زير را ثابت كنيد.

1. $|sina - sinb| \ \leq \ |b-a|, \quad \forall a,b \in R.$
2. $(۱+x)^p \leq ۱+x^p, \quad ۰ \leq p \leq ۱, \quad x > ۰.$
3. $x + \frac{x^۳}{۳} \leq tanx, \quad x \in \left(۰, \frac{\pi}{۲}\right)$

حل: الف) از تابع کمکی $f(x) = sin\ x$ استفاده می کنیم، این تابع در بازه $[a, b]$ پیوسته و روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\exists\ a\ \ \leq c\ \ \leq b, cos\ c = \frac{sin\ a - sin\ b}{a - b}$$

و با توجه به اینکه ۱ $\leq$ $|cos\ c|$ پس

$$|sin\ a - sin\ b| \leq |a - b|$$

ب) تابع کمکی $f(x) = (۱ + x)^p - ۱ - x^p$ را در نظر می گیریم، برای $x > ۰$ پیوسته و مشتق پذیر است، مشتق تابع را محاسبه می کنیم:

$$f'(x) = p(۱ + x)^{(p-۱)} - px^{(p-۱)}$$

از آنجایی که $x > ۰$ و

$$۰ \leq p \leq ۱ \rightarrow -۱ \leq p - ۱ \leq ۰$$

داریم:

$$(۱ + x)^{(p-۱)} < x^{(p-۱)}$$

پس $f'(x) < ۰$ و در نتیجه $f(x)$ نزولی است. بنابراین، برای هر $x > ۰$ ،

$$f(x) \leq f(۰) = ۰$$

و نامساوی حکم نتیجه خواهد شد.

ج)تابع کمکی $f(x) = tan\ x - x - \frac{x^۳}{۳}$ را در نظر می گیریم که در بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ پیوسته و مشتق پذیر می باشد. مشتق های متوالی آن را محاسبه می کنیم:

$$f'(x) = (۱ + tan^۲\ x) - ۱ - x^۲ = tan^۲\ x - x^۲$$

$$f''(x) = ۲tan\ x(۱ + tan^۲\ x) - ۲x$$

$$f^{(۳)}(x) = ۲(۱ + tan^۲\ x) + ۶tan^۲\ x(۱ + tan^۲\ x) - ۲ = ۸tan^۲\ x + ۶tan^۴\ x$$

و به ازای هر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ ، $f^{(۳)}(x) \geq ۰$ پس $f''(x)$ صعودی است. در نتیجه

$$if\ x > ۰ \to f''(x) \geq f''(۰) = ۰$$

بنابراین، f' نیز صعودی و به همین ترتیب f هم صعودی خواهد شد.

$$if\ x > ۰ \to f'(x) \geq f'(۰) = ۰$$

پس

$$if\ x > ۰ \to f(x) \geq f(۰) = ۰$$

بنابراین به ازای هر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$tan\ x \geq x + \frac{x^۳}{۳}$$

سوال ۱۰

(آدامز)الف) تقریب خطی را برای تابع $f(x) = \sqrt[4]{x}$ حول نقطه $x_{\circ} = ۸۱$ نوشته و مقدار تقریبی $\sqrt[4]{۸۵}$ را بدست آورید.

ب)مقدار تقریبی $\sqrt[6]{۶۵}$ را محاسبه کنید.

حل: الف) برای بدست آوردن تقریب خطی تابع $f(x)=\sqrt[۴]{x}$ ، ابتدا مشتق آن را در نقطه $x_{۰}=۸۱$ محاسبه می کنیم

$$f'(x)=\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۴}} \rightarrow f'(۸۱)=\frac{۱}{۱۰۸}$$

پس تقریب خطی این تابع حول $x_{۰}=۸۱$ برابر است با:

$$L(x)=f(۸۱)+f'(۸۱)(x-۸۱)=۳+\frac{۱}{۱۰۸}(x-۸۱)$$

و مقدار تقریبی $\sqrt[۴]{۸۵}$ برابر است با:

$$f(۸۵)\simeq L(۸۵)=۳+\frac{۱}{۱۰۸}(۸۵-۸۱)=۳.۰۳۷$$

ب) تقریب خطی تابع $f(x)=\sqrt[۶]{x}$ را در نقطه $x=۶۵$ حول $x_{۰}=۶۴$ می یابیم،

$$f'(x)=\frac{۱}{۶}x^{-\frac{۵}{۶}} \rightarrow f'(۶۴)=\frac{۱}{۱۹۲}$$

$$L(x)=f(۶۴)+f'(۶۴)(x-۶۴)=۲+\frac{۱}{۱۹۲}(x-۶۴)$$

$$f(۶۵)\simeq L(۶۵)=۲+\frac{۱}{۱۹۲}(۶۵-۶۴)=۲.۰۰۵$$

سوال ۱۱

(آدامز نسبت های وابسته) هوا را با تلنبه وارد یک بادکنک کروی می کنیم. هنگامی که شعاع بادکنک ۳۰ سانتیمتر است ، حجم آن با آهنگ $\frac{cm^{3}}{s}$ ۲۰ افزایش می یابد. آهنگ افزایش شعاع در این لحظه چقدر است؟

حل: فرمول حجم کره ای با شعاع r عبارت است از $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ ، پس

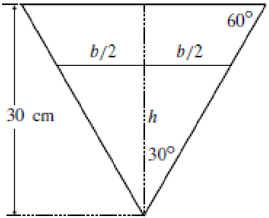
$$\frac{dv}{dt} = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times \pi \times r^۲ \times \frac{dr}{dt} = ۴\pi r^۲ \frac{dr}{dt}$$

طبق فرض سوال، $\frac{dv}{dt} = ۲۰$ و $r = ۳۰$ بنابراین ،

$$\frac{dr}{dt} = \frac{۱}{۱۸۰\pi}$$

سوال ۱۲

(آدامز نسبت های وابسته)سطح مقطع جانبی حوض آبی به شکل مثلث متساوی الاضلاع است که ضلع بالایی آن افقی است. اگر حوض دارای ۱۰ متر طول و ۳۰ سانتیمتر عمق باشدو نیز اگر آب با آهنگ $\frac{1}{4}\frac{m^3}{min}$ در آن جاری شود، زمانی که آب ۲۰ سانتیمتر عمق داشته باشد سطح آب با چه سرعتی بالا می آید؟



حل:

$$\frac{h}{\frac{۱}{۴}b} = tan۶۰ = \sqrt{۳} \Rightarrow b = \frac{۲}{\sqrt{۳}}h$$

$$V(t) = \frac{۱}{۲}h(t)b(۱۰) = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}}h^{۲}$$

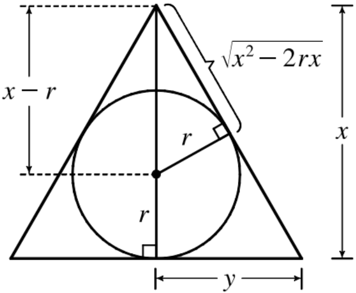
$$\frac{dV}{dt} = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}h\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲۰h}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲۰(۰.۲)}\frac{۱}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۶}\frac{m}{min}$$

سوال ۱۳

کمترین مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را پیدا کنید که محیط بر دایره ای به شعاع r است.

حل:



$$\frac{y}{x}=\frac{r}{\sqrt{x^2-2rx}}\Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}(2y)x=\frac{rx^2}{\sqrt{x^2-2rx}}$$

$$A^{'}(x)=\frac{2rx\sqrt{x^2-2rx}-rx^2(x-r)\sqrt{x^2-2rx}}{x^2-2rx}=\frac{rx^2(x-3r)}{\sqrt[3]{(x^2-2rx)^2}}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$x = ۳r \Rightarrow A^{'}(x) = ۰$$

$$۲r < x < ۳r \Rightarrow A^{'}(x) < ۰$$

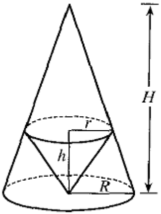
$$x > ۳r \Rightarrow A^{'}(x) > ۰$$

در نتیجه $x = ۳r$ کمترین مقدار را خواهد داشت پس

$$A(۳r) = \frac{r(۹r^{۲})}{\sqrt{۳}r} = ۳\sqrt{۳}r^{۲}$$

سوال ۱۴

مخروطی با ارتفاع h درون یک مخروط بزرگتر به ارتفاع H طوری محاط شده است که راس مخروط کوچکتر در مرکز قاعده مخروط بزرگتر قرار گرفته است. نشان دهید که اگر $h = \frac{1}{3}H$ مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را اختیار میکند.



حل: بنابرقضیه تالس خواهیم داشت

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$$

از طرفی حجم مخروط برابراست با $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$ بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{Hr}{R} = H - h \Rightarrow h = H - \frac{Hr}{R} \Rightarrow \frac{HR - Hr}{R} = \frac{Hr}{R}(R-r) \qquad (۱)$$

$$V(r) = \frac{\pi}{۳} r^{۲} (\frac{H}{R})(R-r) = \frac{\pi}{۳}\frac{H}{R}(Rr^{۲} - r^{۳})$$

$$V^{'}(r) = \frac{\pi}{۳}\frac{H}{R}(۲Rr - ۳r^{۲}) = \frac{\pi}{۳}\frac{H}{R} r(۲Rr - ۳r)$$

$$V^{'}(r) = ۰ \Rightarrow r = ۰ \quad \text{یا} \quad ۲R = ۳r$$

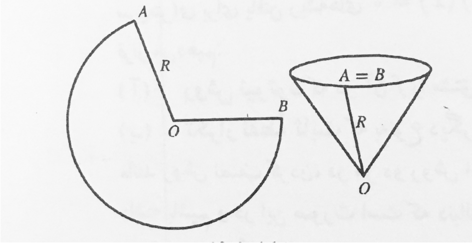
در نتیجه $r = \frac{۲}{۳}R$ بنابر (۱) داریم:

$$h = \frac{H}{R}(R - \frac{۲}{۳}R) = \frac{H}{R}\frac{۱}{۳}R$$

با توجه به اینکه $V^{'}(r)$ از مثبت به منفی در $r = \frac{۲}{۳}R$ تغییر می کند. بنابر این حجم مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را دارد.

سوال ۱۵

قطاعی از یک قرص دایره‌ای شکل به شعاع R را جدا و سپس قسمت باقیمانده‌ی قرص را طوری تا می‌کنیم که از انطباق دو لبه‌ی آن بر هم یک مخروط پدید آید. بیشترین حجم ممکن برای مخروط چقدر است؟



حل: محیط قاعده مخروط برابر است با طول کمان مقابل زاویه θ ، یعنی $R\theta = ۲r\pi$ از طرفی بنابر قضیه فیثاغورس $R^۲ = h^۲ + r^۲$ اکنون حجم مخروط را برحسب R و θ بدست می آوریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{R^۳\theta^۲}{۲۴\pi^۲}\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}$$

با مشتق گیری نسبت به θ داریم:

$$V^{'} = \frac{R^۳}{۲۴\pi^۲}(۲\theta\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲} - \theta^۲\frac{-۲\theta}{۲\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}})$$

از برابر صفر قرار دادن $V^{'}$ ، $\theta = ۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ بدست می آید.. برای $\theta = ۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ حجم برابر است با $\frac{۲\pi R^۳}{۹\sqrt{۳}}$.

با تشکر از توجه شما