ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سؤال

آیا می‌توان معادله‌ی

$$F(x,y) = x^3y^4 + \sin(x^4y^3) + \cos(x+y) - e^{\sin(y)} = 0$$

را در نزدیکی نقطه‌ی $P=(0,0)$ به گونه‌ای حل کرد که $y=g(x)$ (یعنی y تابعی از x شود) با $g(0)=0$، و داشته باشیم $F(x,g(x))=0$؟ (توجه کنید که $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\neq 0$. در ادامه، خواهیم دید که این شرط به منظور پاسخ‌دهی به سؤال بالا نقش مهمی دارد).

سؤال کلی‌تر:

فرض کنید که تابع $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته در یک همسایگی نقطه‌ی درونی $P=(a,b)\in U$ است. آیا می‌توان معادله‌ی $F(x,y)=0$ با $F(a,b)=0$ را به گونه‌ای حل کرد که در نزدیکی نقطه‌ی P، y تابعی از x باشد؟ به عبارت دقیق‌تر، آیا تابع مشتق‌پذیر $y=\phi(x)$ روی بازه‌ای مثل I حول a وجود دارد که $\phi(a)=b$ و به‌ازای هر $x\in I$ داشته باشیم $F(x,\underbrace{\phi(x)}_{y})=0$؟

فرض کنید که تابع مشتق‌پذیر $y = \phi(x)$ به طور مطلوب وجود دارد. در این صورت، $\frac{dy}{dx}|_{x=a} = \phi'(a)$ را می‌یابیم. داریم:

$$F(x,y) = 0 \implies \frac{d}{dx}F(x,y) = 0, \quad x \in I$$

در این صورت، بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$F_1(x,y) + F_2(x,y)\frac{dy}{dx}(x) = 0$$

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_2"] & \\ x & & y \arrow[d, "\frac{dy}{dx}"'] \\ & & x \end{tikzcd}$$

حال، با فرض $F_2(a,b) \neq 0$، داریم:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{F_1(a,b)}{F_2(a,b)}$$

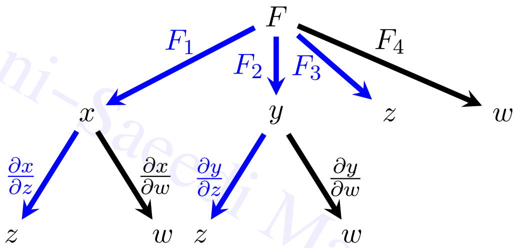
توجه:

در ادامه‌ی درس خواهیم دید که در حالت خاصی از قضیه‌ای با عنوان قضیه‌ی تابع ضمنی، اگر $F_2(a,b) \neq 0$، آن‌گاه تابع مشتق‌پذیر $y=\phi(x)$ با شرایط یادشده وجود دارد.

حال، به طور مثال، به حالت خاص دیگری از قضیه‌ی تابع ضمنی می‌پردازیم. فرض کنید $F, G : U \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته هستند. معادله‌های $F(x, y, z, w) = G(x, y, z, w) = 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید x و y توابعی از z و w هستند؛ یعنی $x = x(z, w)$ و $y = y(z, w)$. به دنبال یافتن $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ (یا همان $\frac{\partial x}{\partial z}$) هستیم. داریم:

$$F(x(z, w), y(z, w), z, w) = 0, \quad G(x(z, w), y(z, w), z, w) = 0$$

حال، با مشتق‌گیری نسبت به z از دو طرف معادله‌ی مربوط به F، داریم:



$$F_1 \frac{\partial x}{\partial z} + F_2 \frac{\partial y}{\partial z} + F_3 = 0$$

به طور مشابه، داریم:

$$G_1 \frac{\partial x}{\partial z} + G_2 \frac{\partial y}{\partial z} + G_3 = 0$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} F_1 \frac{\partial x}{\partial z} + F_2 \frac{\partial y}{\partial z} + F_3 = 0 \\ G_1 \frac{\partial x}{\partial z} + G_2 \frac{\partial y}{\partial z} + G_3 = 0 \end{cases}$$

به منظور حذف $\frac{\partial y}{\partial z}$، با ضرب دو طرف معادله‌ی اول در G_2 و ضرب دو طرف معادله‌ی دوم در $-F_2$ و سپس جمع دو معادله‌ی حاصل، داریم:

$$F_1 G_2 \frac{\partial x}{\partial z} + F_3 G_2 - F_2 G_1 \frac{\partial x}{\partial z} - F_2 G_3 = 0$$

پس، داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{F_2 G_3 - F_3 G_2}{F_1 G_2 - F_2 G_1}, \quad F_1 G_2 - F_2 G_1 \neq 0$$

توجه می‌کنیم که رابطه‌ی قبل را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت (البته رابطه‌ی زیرمستقیماً از روش کرامر نیز قابل دست‌یابی است):

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_3G_2 - F_2G_3}{F_1G_2 - F_2G_1} = -\frac{\det \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ G_3 & G_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix}}, \quad \det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

توجه:

کمی بعد، در قضیه‌ی تابع ضمنی خواهیم دید که اگر نقطه‌ی $P = (x, y, z, w) \in U$ با شرایط مطلوب باشد و

$$\det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix}_P \neq 0$$

آنگاه می‌توان در نزدیکی P، x و y را به عنوان توابعی از z و w نوشت، طوری که در دستگاه یادشده صدق کنند.

نمادگذاری:

فرض کنید که $F_{(1)}, \dots, F_{(n)} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ توابعی از متغیرهای $z_1, \dots, z_n$ هستند. در این صورت، نمادگذاری زیر را داریم:

$$\frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{(1)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{(1)}}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{(n)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{(n)}}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

بنابراین، در مثال قبل داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

قضیه‌ی تابع ضمنی

فرض کنید که توابع $F_{(1)}, \ldots, F_{(n)} : U \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ با متغیرهای $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ هستند و $P = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in U$. هم‌چنین فرض کنید که این توابع دارای مشتقات جزیی اول پیوسته در یک همسایگی P هستند. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

و فرض کنید که نقطه‌ی P در این دستگاه صدق می‌کند. اگر

$$\frac{\partial(F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(P) \neq 0$$

آنگاه دستگاه بالا را می‌توان در یک همسایگی P نسبت به $y_1, \ldots, y_n$ به عنوان توابعی از $x_1, \ldots, x_m$ حل کرد.

ادامه‌ی قضیه‌ی تابع ضمنی

یعنی در یک همسایگی P، توابعی مانند

$$\phi_{(i)}(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, n$$

وجود دارند که

$$\phi_{(i)}(a_1, \dots, a_m) = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

و دستگاه زیر را در این همسایگی داریم:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, \dots, x_m, \phi_{(1)}(x_1, \dots, x_m), \dots, \phi_{(n)}(x_1, \dots, x_m)) = 0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1, \dots, x_m, \phi_{(1)}(x_1, \dots, x_m), \dots, \phi_{(n)}(x_1, \dots, x_m)) = 0 \end{cases}$$

ادامه‌ی قضیه‌ی تابع ضمنی

به‌علاوه، داریم:

$$\frac{\partial \phi_{(i)}}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial\big(F_{(1)},\dots,F_{(i)},\dots,F_{(n)}\big)}{\partial(y_1,\dots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\dots,y_n)}}{\dfrac{\partial\big(F_{(1)},\dots,F_{(i)},\dots,F_{(n)}\big)}{\partial(y_1,\dots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\dots,y_n)}}$$

که در آن:

$$i = 1,\dots,n, \qquad j = 1,\dots,m$$

مثال

فرض کنید دو معادله‌ی چهار مجهولی زیر را داریم:

$$\begin{cases} xe^y - y^2 z e^w = 1 \\ 2x + x^3 z^5 - x^2 y w + z^2 w^4 = 2 \end{cases}$$

همچنین، فرض کنید که $P = (x, y, z, w) = (1, 0, -1, 1)$.

۱. نشان دهید که در دستگاه بالا می‌توان در یک همسایگی P، x و z را بر حسب y و w نوشت.

۲. اگر $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ با $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 \sin(z^2)$، آن‌گاه $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial w}$ را در نقطه‌ی $(y_0, w_0) = (0, 1)$ بیابید.

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۱: دستگاه داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(y,w,x,z) = xe^y - y^2ze^w - 1 = 0 \\ G(y,w,x,z) = 2x + x^3z^5 - x^2yw + z^2w^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

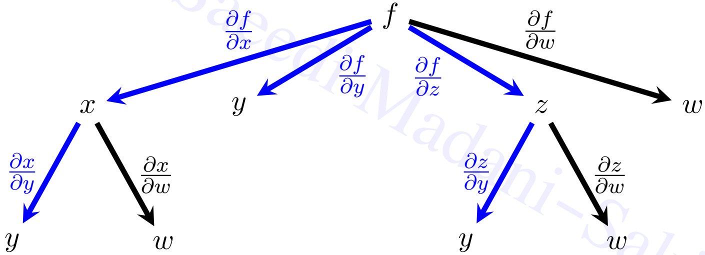
توجه می‌کنیم که نقطه‌ی $P = (x,y,z,w) = (1,0,-1,1)$ در دستگاه بالا صدق می‌کند، و F و G دارای مشتقات جزیی اول پیوسته هستند. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(P) &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix}_P \\ &= \det\begin{bmatrix} e^y & -y^2e^w \\ 2+3x^2z^5-2xyw & 5x^3z^4+2zw^4 \end{bmatrix}_P \\ &= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3 \neq 0 \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

پس، بنابر قضیه‌ی تابع ضمنی می‌توان در یک همسایگی نقطه‌ی P، x و z را بر حسب y و w نوشت.

پاسخ ۲: بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای، داریم:



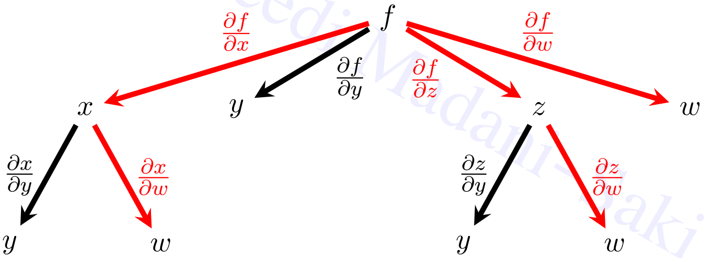
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 2x\frac{\partial x}{\partial y} + 2y\sin(z^2) + 2zy^2\cos(z^2)\frac{\partial z}{\partial y}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، به‌ازای $(1, 0, -1, 1)$ = $P = (x, y, z, w)$، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2(1)\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) + 0 + 0 = 2\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$$

به طور مشابه، داریم:



$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = 2x\frac{\partial x}{\partial w} + 0 + 2zy^2\cos(z^2)\frac{\partial z}{\partial w}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,1) = 2(1)\frac{\partial x}{\partial w}(0,1) + 0 + 0 = 2\frac{\partial x}{\partial w}(0,1)$$

پس، باید $\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$ و $\frac{\partial x}{\partial w}(0,1)$ را بیابیم. ابتدا $\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$ را می‌یابیم. از معادلات دستگاه

$$\begin{cases} F(y,w,x,z) = xe^y - y^2 ze^w - 1 = 0 \\ G(y,w,x,z) = 2x + x^3 z^5 - x^2 yw + z^2 w^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

بر حسب y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} xe^y + e^y \frac{\partial x}{\partial y} - 2yze^w - y^2 e^w \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ 2\frac{\partial x}{\partial y} + 3x^2 z^5 \frac{\partial x}{\partial y} + 5x^3 z^4 \frac{\partial z}{\partial y} - 2xyw\frac{\partial x}{\partial y} - x^2 w + 2zw^4 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

ادامه‌ی مثال

حال، با جای‌گذاری نقطه‌ی $(1,0,-1,1) = P = (x,y,z,w)$ در دستگاه به‌دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} 1 + \frac{\partial x}{\partial y}(0,1) - 0 - 0 = 0 \\ 2\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) - 3\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) + 5\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) - 0 - 1 - 2\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0 \end{cases}$$

یعنی:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial y}(0,1) = -1 \\ -\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) + 3\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1 \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0$$

به طور مشابه، می‌توان دید که $\frac{\partial x}{\partial w}(0,1) = 0$. پس، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(0,1) = 2\frac{\partial x}{\partial w}(0,1) = 0$$

مثال

فرض کنید دو معادله‌ی چهار مجهولی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 + uv + u = 4 \\ xy + u^3 + v = 3 \end{cases}$$

هم‌چنین، فرض کنید که $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$.

۱. نشان دهید که در دستگاه بالا می‌توان در یک همسایگی P، u و v را بر حسب x و y نوشت.

۲. u_x، u_y، v_x، v_y، u_{xx}، u_{xy}، v_{xx} و v_{xy} را در نقطه‌ی $(x_0, y_0) = (1, 1)$ محاسبه کنید.

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۱: دستگاه داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x^2 + y^3 + uv + u - 4 = 0 \\ G(x,y,u,v) = xy + u^3 + v - 3 = 0 \end{cases}$$

واضح است که نقطه‌ی P در دو معادله‌ی بالا صدق می‌کند، و F و G دارای مشتقات جزیی اول پیوسته هستند. داریم:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix}_P = \det \begin{bmatrix} v+1 & u \\ 3u^2 & 1 \end{bmatrix}_P$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

پس، بنابر قضیه‌ی تابع ضمنی u و v را می‌توان در یک همسایگی نقطه‌ی P بر حسب x و y نوشت.

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۲: از معادلات دستگاه داده‌شده به صورت زیر بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2x + u_x v + u v_x + u_x = 0 \\ y + 3u^2 u_x + v_x = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

در نقطه‌ی $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$، داریم:

$$\begin{cases} 2(1) + u_x(1,1)(1) + (1)v_x(1,1) + u_x(1,1) = 0 \\ (1) + 3(1)^2 u_x(1,1) + v_x(1,1) = 0 \end{cases}$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2u_x(1,1) + v_x(1,1) = -2 \\ 3u_x(1,1) + v_x(1,1) = -1 \end{cases}$$

در نتیجه، داریم $u_x(1,1) = 1$ و $v_x(1,1) = -4$.

ادامه‌ی مثال

حال، به منظور به‌دست آوردن u_{xx} و v_{xx} از دستگاه $(*)$ به صورت زیر بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2 + u_{xx}v + 2u_x v_x + uv_{xx} + u_{xx} = 0 \\ 6uu_x^2 + 3u^2 u_{xx} + v_{xx} = 0 \end{cases}$$

در نقطه‌ی $(1,1,1,1) = (x,y,u,v) = P$، داریم:

$$\begin{cases} 2 + u_{xx}(1,1)(1) + 2u_x(1,1)v_x(1,1) + (1)v_{xx}(1,1) + u_{xx}(1,1) = 0 \\ 6(1)u_x^2(1,1) + 3(1)^2 u_{xx}(1,1) + v_{xx}(1,1) = 0 \end{cases}$$

حال، با توجه به اینکه $u_x(1,1) = 1$ و $v_x(1,1) = -4$، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2u_{xx}(1,1) + v_{xx}(1,1) = 6 \\ 3u_{xx}(1,1) + v_{xx}(1,1) = -6 \end{cases}$$

در نتیجه، داریم $u_{xx}(1,1) = -12$ و $v_{xx}(1,1) = 30$.

ادامه‌ی مثال

به منظور به‌دست آوردن $u_y(1,1)$ و $v_y(1,1)$، به صورت زیر از دستگاه داده‌شده در صورت مثال بر حسب y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} 3y^2 + u_y v + u v_y + u_y = 0 \\ x + 3u^2 u_y + v_y = 0 \end{cases}$$

بنابراین، در نقطه‌ی P داریم:

$$\begin{cases} 2u_y(1,1) + v_y(1,1) = -3 \\ 3u_y(1,1) + v_y(1,1) = -1 \end{cases}$$

پس، داریم $u_y(1,1) = 2$ و $v_y(1,1) = -7$.

حال، به منظور به‌دست آوردن $u_{xy}(1,1)$ و $v_{xy}(1,1)$، از دستگاه $(*)$ بر حسب y مشتق می‌گیریم.

ادامه‌ی مثال

$$\begin{cases} u_{xy}v + u_x v_y + u_y v_x + u v_{xy} + u_{xy} = 0 \\ 1 + 6uu_y u_x + 3u^2 u_{xy} + v_{xy} = 0 \end{cases}$$

در نقطه‌ی P داریم:

$$\begin{cases} 2u_{xy}(1,1) + u_x(1,1)v_y(1,1) + u_y(1,1)v_x(1,1) + v_{xy}(1,1) = 0 \\ 3u_{xy}(1,1) + 6u_y(1,1)u_x(1,1) + v_{xy}(1,1) = -1 \end{cases}$$

اما داریم:

$$u_x(1,1) = 1,\ v_x(1,1) = -4,\ u_y(1,1) = 2,\ v_y(1,1) = -7$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} 2u_{xy}(1,1) + v_{xy}(1,1) = 15 \\ 3u_{xy}(1,1) + v_{xy}(1,1) = -13 \end{cases}$$

بنابراین، داریم $u_{xy}(1,1) = -28$ و $v_{xy}(1,1) = 71$.

قضیه‌ی تابع وارون

فرض کنید که $\varPhi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع است با

$$\varPhi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n), \quad y_i = \phi_{(i)}(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

هم‌چنین، فرض کنید که $P = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. اگر یک همسایگی از P مثل V وجود داشته باشد که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $\phi_{(i)}$ در آن دارای مشتقات جزیی اول پیوسته باشد، و

$$\frac{\partial(\phi_{(1)}, \ldots, \phi_{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(P) \neq 0$$

آن‌گاه با فرض $\varPhi(P) = (b_1, \ldots, b_n)$، یک همسایگی از $\varPhi(P)$ وجود دارد که می‌توان در این همسایگی $x_1, \ldots, x_n$ را به صورت توابعی از $y_1, \ldots, y_n$ نوشت، و به‌علاوه داریم:

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}}$$

اثبات: دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = y_1 - \phi_{(1)}(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = y_n - \phi_{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases}$$

نقطه‌ی $P' = (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$ در این دستگاه صدق می‌کند، و به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $F_{(i)}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته در نقطه‌ی P' است. داریم:

$$\frac{\partial(F_{(1)},\ldots,F_{(n)})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P') = \pm\frac{\partial(\phi_{(1)},\ldots,\phi_{(n)})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P') \neq 0$$

بنابر قضیه‌ی تابع ضمنی می‌توان دستگاه بالا را در یک همسایگی P' مثل V' نسبت به $x_1,\ldots,x_n$ بر حسب $y_1,\ldots,y_n$ نوشت. پس، همسایگی مناسب V'' حول $(b_1,\ldots,b_n)$ و تابع $\Psi : V'' \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ وجود دارند که

$$\Psi(y_1,\ldots,y_n) = (x_1,\ldots,x_n), \quad x_i = \psi_{(i)}(y_1,\ldots,y_n), \quad i = 1,\ldots,n$$

حال، به‌ازای هر $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$، و هر $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V''$، داریم:

$$\Psi \circ \Phi(x) = x, \quad \Phi \circ \Psi(y) = y$$

بنابراین، داریم:

$$D(\Psi \circ \Phi)(x) = D\Psi(\Phi(x))D\Phi(x)$$

حال، از دو طرف تساوی بالا دترمینان می‌گیریم:

$$1 = \underbrace{\frac{\partial(\pi_1, \ldots, \pi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)}_{\text{ماتریس همانی}} = \frac{\partial(\psi_{(1)}, \ldots, \psi_{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(\Phi(x)) \frac{\partial(\phi_{(1)}, \ldots, \phi_{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)$$

که در آن $\Psi \circ \Phi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$، طوری که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، داریم $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

در نهایت، داریم:

$$\frac{\partial(\psi_{(1)},\ldots,\psi_{(n)})}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(\Phi(x)) = \frac{1}{\frac{\partial(\phi_{(1)},\ldots,\phi_{(n)})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)}$$

یا معادلاً، داریم:

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}}$$

مثال

در چه نقاطی از صفحه، (r,θ) را می‌توان به عنوان تابعی از (x,y) بیان کرد؟

پاسخ: از قضیه‌ی تابع وارون استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x = r\cos(\theta) = \phi_{(1)}(r,\theta), \quad y = r\sin(\theta) = \phi_{(2)}(r,\theta)$$

واضح است که $\phi_{(1)}$ و $\phi_{(2)}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته هستند. داریم:

$$\frac{\partial(\phi_{(1)},\phi_{(2)})}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_{(1)}}{\partial r} & \frac{\partial\phi_{(1)}}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi_{(2)}}{\partial r} & \frac{\partial\phi_{(2)}}{\partial\theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r$$

پس اگر $r \neq 0$ (یعنی همه‌ی نقاط صفحه غیر از مبدأ)، آن‌گاه به‌ازای هر نقطه‌ی صفحه با نمایش قطبی (r_0,θ_0)، می‌توان یک همسایگی حول این نقطه یافت که r و θ را بتوان بر حسب x و y نوشت. روی همسایگی یادشده داریم:

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}}$$

تمرین

فرض کنید که $F(x, y, z) = 0$. اگر F_1، F_2 و F_3 موجود، پیوسته و ناصفر باشند، آن‌گاه نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$