بسم الله الرحمن الرحیم

تمرینات سری اول : حد و پیوستگی

۲۵ آبان ۱۳۹۹

سوال ۱

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt[n]{۱+x}-۱}{x}$

۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}\cos x-۱}{۱-\tan^۲ x}$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۱-۲\cos x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})\cdots(۱-\sqrt[n]{x})}{(۱-x)^n}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x}$

قسمت الف) از تغییر متغیر $t = ۱ + x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین اگر $x \to ۰$ ، آنگاه داریم:

$$L = \lim_{t \to ۱} \frac{\sqrt[n]{t} - ۱}{t - ۱} = \lim_{t \to ۱} \frac{\sqrt[n]{t} - ۱}{(\sqrt[n]{t} - ۱)(\sqrt[n]{t^{n-۱}} + \sqrt[n]{t^{n-۲}} + \sqrt[n]{t^{n-۳}} + \ldots + ۱)}$$
$$= \lim_{t \to ۱} \frac{۱}{\sqrt[n]{t^{n-۱}} + \sqrt[n]{t^{n-۲}} + \sqrt[n]{t^{n-۳}} + \ldots + ۱} = \frac{۱}{n}.$$

قسمت ب)

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲} cos x - ۱}{۱ - tan^{۲} x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲} cos x - ۱}{۱ - \frac{sin^{۲} x}{cos^{۲} x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{(\sqrt{۲} cos x - ۱) cos^{۲} x}{cos^{۲} x - sin^{۲} x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{(\sqrt{۲} cos x - ۱) cos^{۲} x}{۲ cos^{۲} x - ۱}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{(\sqrt{۲} cos x - ۱) cos^{۲} x}{(\sqrt{۲} cos x - ۱)(\sqrt{۲} cos x + ۱)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{cos^{۲} x}{\sqrt{۲} cos x + ۱} = \frac{۱}{۴}$$

قسمت ج) از تغییر متغیر $t = x - \frac{\pi}{۳}$ استفاده می‌کنیم، وقتی $x \to \frac{\pi}{۳}$ داریم $t \to ۰$
.

$$L = \lim_{t\to ۰} \frac{sint}{۱ - ۲cos(t + \frac{\pi}{۳})} = \lim_{t\to ۰} \frac{sint}{۱ - ۲(costcos\frac{\pi}{۳} - sintsin\frac{\pi}{۳})}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{sint}{۱ - ۲(\frac{۱}{۲}cost - \frac{\sqrt{۳}}{۲}sint)} = \lim_{t\to ۰} \frac{sint}{۱ - cost + \sqrt{۳}sint}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{sint}{۱ - (۱ - ۲sin^{۲}\frac{t}{۲}) + ۲\sqrt{۳}sin\frac{t}{۲}cos\frac{t}{۲}}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{sint}{۲sin\frac{t}{۲}(sin\frac{t}{۲} + \sqrt{۳}cos\frac{t}{۲})} = \lim_{t\to ۰} \frac{۲sin\frac{t}{۲}cos\frac{t}{۲}}{۲sin\frac{t}{۲}(sin\frac{t}{۲} + \sqrt{۳}cos\frac{t}{۲})}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{cos\frac{t}{۲}}{sin\frac{t}{۲} + \sqrt{۳}cos\frac{t}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}.$$

قسمت د)

$$L = \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})\ldots(۱-\sqrt[n]{x})}{(۱-x)^n}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۱-\sqrt{x})(۱-\sqrt[۳]{x})\ldots(۱-\sqrt[n]{x})}{(۱-x)^n}$$

$$\times \frac{(۱+\sqrt{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})\ldots(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^۲}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})}{(۱+\sqrt{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})\ldots(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^۲}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)[(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})][(۱-\sqrt[۳]{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})]\ldots[(۱-\sqrt[n]{x})(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^۲}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})]}{(۱-x)^n(۱+\sqrt{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})\ldots(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^۲}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)^n}{(۱-x)^n(۱+\sqrt{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})\ldots(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^۲}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{(۱+\sqrt{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})\ldots(۱+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^۲}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-۱}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{۲\times ۳\times \ldots\times n} = \frac{۱}{n!}\,.$$

قسمت ه)

رابطه‌ی زیر برای هر $x \neq ۰$ برقرار است:

$$-|x| \leq x sin\frac{۱}{x} \leq |x|.$$

در نتیجه چون

$$\lim_{x\to ۰} -|x| = \lim_{x\to ۰} |x| = ۰,$$

با استفاده از قضیه فشردگی (ساندویچ) داریم:

$$\lim_{x\to ۰} x sin\frac{۱}{x} = ۰.$$

سوال ۲

فرض کنید تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

الف) نشان دهید اگر $f(a) > 0$ تابع f در یک همسایگی $x = a$ مثبت است.

ب) نشان دهید اگر $f(a) < 0$ تابع f در یک همسایگی $x = a$ منفی است.

حل) از آن جا که تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، طبق تعریف داریم:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad \forall x; |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

حال اگر طبق فرض (الف) داشته باشیم $f(a) > 0$، قرار می‌دهیم $\epsilon := \frac{f(a)}{2}$ ، در نتیجه طبق تعریف بالا $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر x که در رابطه $|x-a| < \delta$ صدق می‌کند، داریم:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \tag{1}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}.$$

آنگاه نتیجه می‌شود در همسایگی به شعاع $\delta > 0$ از $x = a$، طبق رابطه (۱) تابع $f(x)$ مثبت است.

از طرفی اگر طبق فرض (ب) داشته باشیم $f(a) < 0$، قرار می‌دهیم $\epsilon := -\frac{f(a)}{2}$ ، در نتیجه به طور مشابه طبق تعریف پیوستگی $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر x که در رابطه $|x-a| < \delta$ صدق می‌کند، داریم:

$$|f(x)-f(a)| < -\frac{f(a)}{2} \tag{2}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2}.$$

آنگاه نتیجه می‌شود در همسایگی به شعاع $\delta > 0$ از $x = a$، طبق رابطه (۲) تابع $f(x)$ منفی است.

سوال۳

نقاط ناپیوستگی تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} & , x \in Q \\ -x^{۲} & , x \notin Q \end{cases}$$

حل) برای حل این سوال از این نکته استفاده می‌کنیم که پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ معادل با این است که برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که $a_n \to a$ داشته باشیم $f(a_n) \to f(a)$. حال ادعا می‌کنیم تابع f با ضابطه تعریف شده در سوال، در نقطه $x=۰$ پیوسته است. زیرا اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد گویا یا اصم باشد که $a_n \to ۰$، آنگاه $a_n^۲$ و $-a_n^۲$ نیز به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه تابع $f(x)$ در صفر پیوسته است.

اکنون ادعا می‌کنیم تابع f در هیچ نقطه‌ی دیگری غیر از صفر پیوسته نیست. نقطه دلخواه $a_۰ \in Q$ را در نظر گرفته و فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ به صورت $a_n := a_۰ + \frac{۱}{\sqrt{۲}n}$ تعریف شود. در این‌صورت $a_n \in Q'$ برای هر n و به علاوه $a_n \to a_۰$. اما داریم

$$f(a_n) = -(a_۰ + \frac{۱}{\sqrt{۲}n})^۲ = -(a_۰^۲ + \frac{۱}{۲n^۲} + ۲\frac{a_۰}{\sqrt{۲}n})$$

در نتیجه $f(a_n) \to -a_۰^۲$. از طرفی طبق ضابطه، $f(a_۰) = a_۰^۲$ پس نتیجه می‌شود $lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a_۰)$ بنابراین تابع f در اعداد گویا پیوسته نیست.

حال نقطه دلخواه $b_0 \in Q'$ در نظر می‌گیریم. دنباله $b_n := \frac{[nb_0]}{n}$ را تعریف می‌کنیم. برای هر n داریم $b_n \in Q$ و همچنین $b_n \to b_0$. زیرا برای $n \neq 0$ داریم:

$$b_0 - 1 \leq [b_0] \leq b_0 \Longrightarrow nb_0 - 1 \leq [nb_0] \leq nb_0 \Longrightarrow b_0 - \frac{1}{n} \leq \frac{[nb_0]}{n} \leq b_0$$

از طرفی چون

$$\lim_{n\to\infty} b_0 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} b_0 = b_0,$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nb_0]}{n} = b_0$$

اما به این دلیل که $b_n \in Q$ در نتیجه $f(b_n) = b_n^2 = (\frac{[nb_0]}{n})^2$ پس $f(b_n) \to b_0^2$. اما طبق ضابطه تابع می‌دانیم $f(b_0) = -b_0^2$ که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(b_0).$$

پس تابع f در نقاط گنگ هم پیوسته نیست. پس ادعای موردنظر درست است و تابع f فقط در صفر پیوسته است.

سوال۴

فرض کنید $f(x) = \frac{x^3}{4} - sin\pi x + 3$. آیا نقطه $x_0 \in (-2, 2)$ وجود دارد بطوریکه $f(x_0) = \frac{7}{3}$ ؟

حل) تابع مورد نظر روی بازه‌ی داده شده پیوسته است و $f(2) = 5$ و $f(-2) = 1$ و در نتیجه

$$f(-2) < \frac{7}{3} < f(2)$$

حال با استفاده از قضیه مقدار میانی برای تابع پیوسته‌ی f روی بازه $(-2, 2)$ نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مثل $x_0 \in (-2, 2)$ وجود دارد که $f(x_0) = \frac{7}{3}$.

یادآوری (قضیه مقدار میانی): اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a, b]$ پیوسته و s عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه عددی مانند c متعلق به $[a, b]$ هست به طوری که $f(c) = s$.

سوال ۵

فرض کنید $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به‌طوری‌که برای همه $x \in (0, 1)$ داریم $f(x)^2 = 1$. ثابت کنید $f = 1$ یا $f = -1$.

حل) طبق فرض سوال داریم:

$$\forall\ x \in (۰,۱)\ ,\ f(x)^۲ = ۱ \to f(x) = \pm ۱ \qquad (۳)$$

حال باید نشان دهیم که مقدار تابع f در بازه $(۰,۱)$ یا $+۱$ یا -۱ است.
فرض خلف می‌کنیم که تابع f در جاهایی از بازه $(۰,۱)$ برابر -۱ و در جاهای دیگری برابر $+۱$ شود یعنی:

$$\exists\ y_۱ \in (۰,۱)\ s.t\ f(y_۱) = -۱\ ,\ \exists\ y_۲ \in (۰,۱)\ s.t\ f(y_۲) = +۱ \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) می‌توان نتیجه گرفت طبق قضیه مقدار میانی یک z بین $y_۱$ و $y_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z) = ۰$ و این با فرض $\forall\ x \in (۰,۱)\ f(x)^۲ = ۱$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

سوال۶

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$. با بیان قضایا به طور دقیق ثابت کنید عدد حقیقی مانند x_0 هست به‌طوری‌که :

$$x_0^3 + ax_0 + sinx_0 = 1$$

حل) تابع $f(x) = x^۳ + ax + sinx - ۱$ روی $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است، همچنین:

$$f(\circ) = -۱ < \circ,$$

از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، یعنی برای هر $M > \circ$، Nای مثبت موجود است که برای هر $x > N$، $f(x) > M$. مثلا برای $M = ۱$، Nای موجود است که در بازه $(N, +\infty)$، $f(x) > M = ۱$؛ پس $f(N+۱) > \circ$. لذا بنابر قضیه مقدار میانی یا حالت خاص آن بولتزانو عددی چون $x_\circ$ در بازه $[\circ, N+۱]$ موجود است که $f(x_\circ) = \circ$ یعنی $x_\circ^۳ + ax_\circ + sinx_\circ = ۱$.

سوال ۷

فرض کنید $f\ ,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند و به ازای هر $q \in \mathbb{Q}$ داشته باشید $f(q) = g(q)$.
نشان دهید به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = g(x)$.

حل) به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای در $\mathbb{Q}$ وجود دارد که به r میل می‌کند. مثلا

$$a_n = \frac{[nr]}{n} \ , \ \lim_{n\to+\infty} a_n = r$$

طبق فرض به ازای هر n داریم:

$$f(a_n) = g(a_n) \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n)$$

می‌دانیم f و g هردو پیوسته اند، بنابراین داریم:

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(\lim_{n\to\infty} a_n) \longrightarrow f(r) = g(r).$$

سوال۸

تابع f در فاصله $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ پیوسته است و به ازای هر x در این فاصله داریم $\circ \leq f(x) \leq ۱$ ثابت کنید حداقل یک $x_\circ \in [\circ, \frac{\pi}{۲}]$ وجود دارد که $f(x_\circ) = sinx_\circ$.

حل) یک تابع کمکی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in [\circ, \frac{\pi}{۲}]\ ,\ g(x) = f(x) - sin(x)$$

تابع $g(x)$ تابعی پیوسته است زیرا تفاضل دو تابع پیوسته است و داریم:

$$g(\circ) = f(\circ)\ \xrightarrow[\circ \leq f(x) \leq ۱]{\forall x \in [\circ, \frac{\pi}{۲}]}\ g(\circ) \geq \circ$$

$$g(\frac{\pi}{۲}) = f(\frac{\pi}{۲}) - ۱\ \xrightarrow[\circ \leq f(x) \leq ۱]{\forall x \in [\circ, \frac{\pi}{۲}]}\ g(\frac{\pi}{۲}) \leq \circ$$

اگر $g(\circ) = \circ$ یا $g(\frac{\pi}{۲}) = \circ$ آن‌گاه کافی است $x_\circ = \circ$ یا $x_\circ = \frac{\pi}{۲}$ اختیار کنیم.
در غیر اینصورت داریم:

$$g(\circ) > \circ\ ,\ g(\frac{\pi}{۲}) < \circ \longrightarrow\ g(\circ)\, g(\frac{\pi}{۲}) < \circ$$

لذا بنا بر قضیه بولتزانو $x_\circ \in [\circ, \frac{\pi}{۲}]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x_\circ) = \circ$ و درنتیجه داریم:

$$f(x_\circ) = sinx_\circ$$

سوال۹

فرض کنید که $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ پیوسته باشد. ثابت کنید عددی مانند c در بازه $[۰, ۱]$ وجود دارد که $f(c) = c$.

حل) یک تابع کمکی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in [0, 1] \; , \; g(x) = f(x) - x$$

تابع $g(x)$ تابعی پیوسته است زیرا تفاضل دو تابع پیوسته است و داریم:

$$x = 0 \longrightarrow g(0) = f(0) \xrightarrow[0 \le f(x) \le 1]{\forall x \in [0,1]} 0 \le g(0) \le 1$$

$$x = 1 \longrightarrow g(1) = f(1) - 1 \xrightarrow[0 \le f(x) \le 1]{\forall x \in [0,1]} -1 \le g(1) \le 0$$

اگر $g(0) = 0$ یا $g(1) = 0$ آن‌گاه کافی است $c = 0$ یا $c = 1$ اختیار کنیم.
در غیر اینصورت داریم:

$$g(0) > 0 \; , \; g(1) < 0 \Longrightarrow g(0)\, g(1) < 0$$

لذا بنا بر قضیه بولتزانو $c \in [0, 1]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(c) = 0$ و درنتیجه داریم:

$$f(c) = c$$

سوال ۱۰

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند.
نشان دهید:
۱. $f(nx)=nf(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$.
۲. f
در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.
۳. f پیوسته است اگر و فقط اگر برای عددی مانند $m\in\mathbb{R}$، $f(x)=mx$.

حل قسمت الف)

با توجه به شرط $f(x+y)=f(x)+f(y)$ داریم:

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

بنابراین $f(0)=0$ و همچنین:

$$.f(a+(-a))=f(0)=0$$

بنابراین:

$$.f(a+(-a))=f(a)+f(-a)$$

در نتیجه

$$f(-a)=-f(a)$$

داریم:

$$f(nx)=f(x+\cdots+x)=f(x)+f(x+\cdots+x)=f(x)+\cdots+f(x)$$

بنابراین

$$.f(nx)=nf(x)$$

حل قسمت ب)

واضح است که اگر f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در نقطه‌ای مانند $x \in \mathbb{R}$ نیز پیوسته است.

برعکس فرض کنیم تابع f در نقطه‌ای مانند $x_\circ \in \mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان می‌دهیم در هر نقطه دلخواه مانند $y \in \mathbb{R}$ نیز تابع f پیوسته است. باید نشان دهیم $\lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$.

می‌دانیم تابع f در $x_\circ$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$. این معادل است با $\lim\limits_{h \to \circ} f(x_\circ + h) = f(x_\circ)$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to y} f(x) &= \lim_{h \to \circ} f(y+h) \\
&= \lim_{h \to \circ} f(y+h+x_\circ - x_\circ) \\
&\overset{\text{فرض سوال}}{=} \lim_{h \to \circ} \left(f(y) + f(x_\circ + h - x_\circ)\right) \\
&\overset{\text{قسمت الف}}{=} \lim_{h \to \circ} \left(f(y) + f(x_\circ + h) - f(x_\circ)\right) \\
&= f(y) + \lim_{h \to \circ} f(x_\circ + h) - f(x_\circ) \\
&= f(y) + f(x_\circ) - f(x_\circ) = f(y)
\end{aligned}$$

حل قسمت ج)
فرض کنیم f پیوسته باشد و $f(۱) = m$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$f(n) = f(n \times ۱) \overset{\text{قسمت الف}}{=} nf(۱) = mn$$

به ازای $n \in \mathbb{Z}^-$ داریم:

$$f(n) = f(-n \times -۱) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times f(-۱) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times (-f(۱)) = mn$$

به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$، $x = \frac{p}{q}$ که $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}$. بنابراین:

$$f(p) = f(qx) \overset{\text{قسمت الف}}{=} qf(x) = mp$$

بنابراین $f(x) = m\frac{p}{q} = mx$.
برای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $(x_n) = \left(\frac{[rn]}{n}\right)$ وجود دارد که $x_n \to r$ بنابراین

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{\text{پیوستگی}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} mx_n = mr.$$

سوال۱۱

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $a\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوری‌که $f(f(a))=a$ ثابت کنید $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری‌که $f(c)=c$.

حل) اگر $f(a) = a$ باشد که مسئله حل است، در غیر این صورت تابع کمکی $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوستگی f، تابع g نیز پیوسته است. در این صورت

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \\ g(f(a)) &= f(f(a)) - f(a) = a - f(a) \end{aligned}$$

می‌بینیم که $g(a)$ و $g(f(a))$ مختلف العلامت هستند. بنابراین طبق قضیه مقدار میانی cای وجود دارد که $g(c) = ۰$. بنابراین

$$f(c) = c$$

سوال۱۲

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0$، $a_i \in \mathbb{R}$. نشان دهید وجود دارد $y \in \mathbb{R}$، به‌طوری‌که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq f(y)$.

حل) واضح است که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

قرار می‌دهیم $M_1 = M_2 = |f(0)| + 1 = |a_0| + 1$. در این صورت

$$M_1 : \exists N_1 \quad \forall x \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > |f(0)| + 1 > f(0)$$

$$M_2 : \exists N_2 \quad \forall x \leq -N_2 \quad \Rightarrow \quad f(x) > |f(0)| + 1 > f(0)$$

بنابراین تابع $f : [-N_2, N_1] \to \mathbb{R}$ پیوسته است و طبق قضیه اکسترمم می‌نیمم خود را در این بازه می‌پذیرد،
یعنی $y \in [-N_2, N_1]$ وجود دارد که برای هر $x \in [-N_2, N_1]$ داریم

$$f(y) \leq f(x)$$

به ویژه $f(y) \leq f(0)$. همچنین برای هر $x \geq N_1$ و $x \leq -N_2$ داریم $f(x) > f(0)$. پس
$f(y) \leq f(x)$ یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f(y) \leq f(x)$$

سوال۱۳

فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد و $f(a) = f(b)$. اگر $n \in \mathbb{N}$، نشان دهید عددی مانند $c \in [a, b - \frac{b-a}{n}]$ وجود دارد که $f(c) = f(c + \frac{b-a}{n})$.

حل) تعریف می‌کنیم $g(x) = f(x) - f(x + \frac{b-a}{n})$
دامنه تابع g برابر $[a, b - \frac{b-a}{n}]$ است. نقاط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_k = a + (\frac{b-a}{n})k, \qquad k = ۰, ۱, \dots, n-۱, n.$$

تعریف می‌کنیم $g(x) = f(x) - f(x + \frac{b-a}{n})$. دامنه تابع g برابر $[a, b - \frac{b-a}{n}]$ است. نقاط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_k = a + (\frac{b-a}{n})k, \qquad k = ۰, ۱, \dots, n-۱, n.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=۰}^{n-۱} g(x_k) &= g(x_۰) + g(x_۱) + \cdots + g(x_{n-۱}) \\
&= \{f(a) - f(a + \frac{b-a}{n})\} + \{f(a + \frac{b-a}{n}) - f(a + ۲(\frac{b-a}{n}))\} \\
&+ \cdots + \{f(a + (n-۱)(\frac{b-a}{n})) - f(a + n(\frac{b-a}{n}))\}
\end{aligned}$$

با توجه $f(a+n(\frac{b-a}{n}))=f(b)$ داریم $f(a)=f(b)$ بنابراین

$$g(x_۰)+g(x_۱)+\cdots+g(x_{n-۱})=f(a)-f(b)=۰$$

بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.
حالت اول: اگر x_jای وجود داشته باشد که $g(x_j)=۰$ که آنگاه $c=x_j$ جواب مسئله خواهد بود.
حالت دوم: چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $x_i\neq x_j$ که $i\neq j$ وجود دارد که

$$g(x_i)g(x_j)<۰$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین x_i و x_j هست که $g(c)=۰$ و در نتیجه

$$f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$$

سوال۱۴

فرض کنید n عددی طبیعی و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(۱)=f(۰)$. نشان دهید $a,b\in[۰,۱]$ وجود دارند به‌طوری‌که $b-a=\frac{۱}{n}$ و $f(a)=f(b)$.

حل) تابع کمکی $g : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = f(x + \frac{۱}{n}) - f(x)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوستگی f و چون تفاضل و ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است، بنابراین $g(x)$ تابعی پیوسته است. داریم

$$
\begin{aligned}
g(۰) &= f(\frac{۱}{n}) - f(۰) \\
g(\frac{۱}{n}) &= f(\frac{۲}{n}) - f(\frac{۱}{n}) \\
&\vdots \\
g(\frac{n-۱}{n}) &= f(۱) - f(\frac{n-۱}{n})
\end{aligned}
$$

اگر مقادیر فوق را با هم جمع کنیم، داریم

$$g(۰) + g(\frac{۱}{n}) + \cdots + g(\frac{n-۱}{n}) = f(۱) - f(۰)$$

چون طبق فرض سوال $f(۱) = f(۰)$،

بنابراین

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0.$$

چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $0\leq i,j\leq n-1$ وجود دارند که $i\neq j$ به‌طوری‌که $g(\frac{i}{n})\geq 0$ و $g(\frac{j}{n})\leq 0$. بنابراین

$$g(\frac{i}{n})g(\frac{j}{n})<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین $\frac{i}{n}$ و $\frac{j}{n}$ هست که $g(c)=0$. بنابراین

$$f(c+\frac{1}{n})=f(c)$$

کافی است قرار دهیم

$$a=c \text{ و } b=c+\tfrac{1}{n}$$

با تشکر از توجه شما