ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

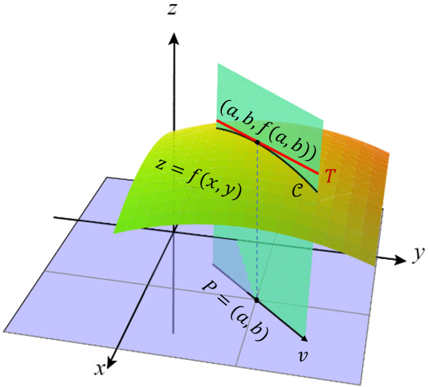
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مشتق جهتی

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است. در این صورت، مشتق جهتی (سویی) f در نقطه‌ی $P \in U$ در جهت بردار یکه‌ی $v \in \mathbb{R}^n$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_v f(P) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(P + hv) - f(P)}{h}$$

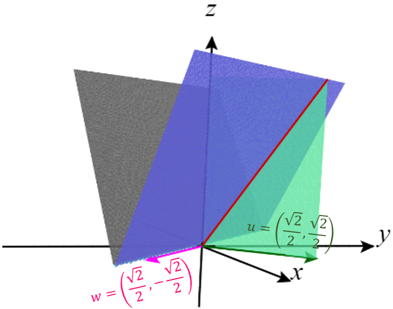
با توجه به شکل، مشتق جهتی تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $P = (a, b) \in U$ در جهت $v \in \mathbb{R}^2$، برابر با شیب خط مماس بر خم $\mathcal{C}$ در نقطه‌ی $(a, b, f(a, b))$ است؛ که در آن $\mathcal{C}$ خم فصل مشترک نمودار f و صفحه‌ای است که شامل خط $P + \langle v \rangle$ است و بر صفحه‌ی xy عمود است.



مثال

فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x,y) = |x+y|$ تعریف شده و $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ یک بردار یکه است. درباره‌ی $D_v f(0,0)$ بحث کنید.

پاسخ:



داریم:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h(v_1,v_2)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|hv_1 + hv_2|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h||v_1+v_2|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h|v_1+v_2|}{h} = |v_1+v_2|$$

توجه:

در مثال قبل، مشتقات جزیی اول تابع f موجود نیستند. بنابراین، ممکن است مشتقات جهتی تابعی در یک نقطه در تمام جهت‌ها وجود داشته باشند (مثل جهت‌های i، j و k) اما مشتقات جزیی اول آن تابع وجود نداشته باشند.

نکته:

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر و $v \in \mathbb{R}^n$ برداری یکه است. هم‌چنین، فرض کنید که $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ با ضابطه‌ی $\gamma(h) = P + hv$ باشد و $0 \in I$ (با توجه به درونی‌بودن $P \in U$، چنین بازه‌ی Iای وجود دارد). حال، تابع $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$g(h) = f(\gamma(h)), \qquad h \in \mathbb{R}$$

در این صورت، با توجه به اینکه $\gamma(h)$ در $h = 0$، و f در P مشتق‌پذیر است، g به عنوان ترکیبی از این دو تابع در $h = 0$ مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + hv) - f(P)}{h} = D_v f(P)$$

⋇ به عنوان یک نتیجه، وجود مشتق در P، منجر به وجود مشتقات جهتی در P در جهت‌های مختلف می‌شود. بنابراین، اگر مشتق جهتی تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی P در جهتی مثل $v \in \mathbb{R}^n$ موجود نباشد، آن‌گاه f در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر نیست.

قضیه (استفاده از گرادیان به منظور یافتن مشتقات جهتی)

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر و $v \in \mathbb{R}^n$ برداری یکه باشد. در این صورت، داریم:

$$D_v f(P) = \nabla f(P).v$$

اثبات: فرض کنید $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که $0 \in I$، به صورت $g(h) = f(P + hv)$ تعریف می‌شود. در این صورت، بنابر نکته‌ی دو اسلاید قبل، داریم $g'(0) = D_v f(P)$.
از طرفی، با فرض اینکه $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ به صورت $\gamma(h) = P + hv$ تعریف می‌شود، داریم $g = f \circ \gamma$. از این‌رو، بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$g'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(P) \cdot v$$

بنابراین، داریم $D_v f(P) = \nabla f(P).v$.

نتیجه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $P \in U$. در این صورت:

- اگر گرادیان f در نقطه‌ی P موجود باشد، و بردار یکه‌ی $v \in \mathbb{R}^n$ چنان باشد که $D_v f(P)$ موجود باشد و $D_v f(P) \neq \nabla f(P) \cdot v$، آن‌گاه f در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر نیست.
- اگر f در P مشتق‌پذیر باشد و v بر مجموعه‌ی تراز f گذرنده از P در نقطه‌ی P مماس باشد، آن‌گاه داریم $D_v f(P) = 0$.

مثال

میزان تغییر تابع $f(x,y)=y^4+2xy^3+x^2y^2$ در نقطه‌ی $(0,1)$ را در هر یک از جهت‌های $v_1=i+2j$ و $v_2=j-2i$ بیابید.

پاسخ: داریم $\widehat{v_1}=\frac{i+2j}{\sqrt{5}}$ و $\widehat{v_2}=\frac{j-2i}{\sqrt{5}}$. باید $D_{\widehat{v_1}}f(0,1)$ و $D_{\widehat{v_2}}f(0,1)$ را بیابیم. مشتقات جزیی f موجود و پیوسته هستند؛ پس f تابعی مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$D_{\widehat{v_1}}f(0,1)=\nabla f(0,1)\cdot\widehat{v_1},\qquad D_{\widehat{v_2}}f(0,1)=\nabla f(0,1)\cdot\widehat{v_2}$$

توجه کنید که:

$$f_1(x,y)=2y^3+2xy^2,\quad f_2(x,y)=4y^3+6xy^2+2x^2y$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\nabla f(x,y)=(2y^3+2xy^2,4y^3+6xy^2+2x^2y)\implies\nabla f(0,1)=(2,4)$$

در نهایت، داریم:

$$D_{\widehat{v_1}}f(0,1)=(2,4)\cdot\widehat{v_1}=\frac{10}{\sqrt{5}},\quad D_{\widehat{v_2}}f(0,1)=(2,4)\cdot\widehat{v_2}=0$$

مثال

فرض کنید که $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz$ و $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. مقدار $D_v f(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ در کدام گزینه آمده است؟

۱. 3

۲. 1

۳. 5

۴. 2

پاسخ:

از آنجا که f دارای مشتقات جزیی اول پیوسته است، مشتق‌پذیر است. پس، بنابر قضیه‌ای داریم:

$$D_v f(0,\sqrt{3},\sqrt{3}) = \nabla f(0,\sqrt{3},\sqrt{3}) \cdot v$$

توجه کنید که:

$$f_1(x,y,z) = 2x + y, \quad f_2(x,y,z) = x + z, \quad f_3(x,y,z) = y$$

از این‌رو، داریم:

$$f_1(0,\sqrt{3},\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \quad f_2(0,\sqrt{3},\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \quad f_3(0,\sqrt{3},\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$D_v f(0,\sqrt{3},\sqrt{3}) = (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3$$

بنابراین، گزینه‌ی ۱ درست است.

در ادامه، بعضی از خواص هندسی بردار گرادیان را مرور می‌کنیم.

قضیه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر است. به‌ازای هر بردار یکه‌ی $v \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$-|\nabla f(P)| \leq D_v f(P) \leq |\nabla f(P)|$$

به‌علاوه، f در نقطه‌ی P در جهت $\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ بیش‌ترین افزایش و در جهت $-\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ بیش‌ترین کاهش را دارد.

اثبات: به‌ازای هر بردار یکه‌ی $v \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v = |\nabla f(P)||v| \cos(\theta) = |\nabla f(P)| \cos(\theta)$$

که در آن θ زاویه‌ی بین v و $\nabla f(P)$ است. تساوی بالا فوراً نتیجه می‌دهد که:

$$-|\nabla f(P)| \leq D_v f(P) \leq |\nabla f(P)|$$

ادامه‌ی اثبات قضیه

به‌علاوه، بیش‌ترین مقدار $D_v f(P)$ به‌ازای $\theta = 0$ و کم‌ترین مقدار آن به‌ازای $\theta = \pi$ به‌دست می‌آید. وقتی $\theta = 0$، آن‌گاه v و $\nabla f(P)$ هم‌جهت هستند، و از این‌رو داریم $v = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$. هم‌چنین، وقتی $\theta = \pi$، آن‌گاه $\nabla f(P)$ و v هم‌راستا اما در خلاف جهت هم هستند، و از این‌رو داریم $v = -\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$.

مثال

فرض کنید که $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

۱. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ را در $(1,-1,2)$ بیابید.

۲. میزان بیش‌ترین افزایش f در $(1,-1,2)$ را بیابید.

۳. میزان تغییر f در نقطه‌ی $(1,-1,2)$ در جهت برداری که از $(1,-1,2)$ به $(3,1,1)$ می‌رود، چقدر است؟

پاسخ ۱: از آنجا که کره‌ی داده‌شده همان مجموعه‌ی تراز $f^{-1}(6)$ است، بنابر قضیه‌ای $\nabla f(1,-1,2)$ بر کره‌ی یادشده در نقطه‌ی $(1,-1,2)$ عمود و لذا بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر این کره در $(1,-1,2)$ است. داریم:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z) \implies \nabla f(1,-1,2) = (2,-2,4)$$

پس، معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$2(x-1) + (-2)(y-(-1)) + 4(z-2) = 0 \implies 2x - 2y + 4z = 12$$

ادامه‌ی مثال

پاسخ ۲: بنابر قضیه‌ی قبل، میزان بیش‌ترین افزایش f در $(1,-1,2)$ برابر است با $|\nabla f(1,-1,2)|$؛ یعنی $2\sqrt{6} = \sqrt{2^2+(-2)^2+4^2}$.

پاسخ ۳: داریم:

$$v = (3,1,1) - (1,-1,2) = (2,2,-1) \implies \widehat{v} = \frac{1}{3}(2,2,-1)$$

بنابراین، از آنجا که f همه‌جا مشتق‌پذیر است (زیرا مشتقات جزیی پیوسته دارد)، داریم:

$$D_{\widehat{v}} f(1,-1,2) = \nabla f(1,-1,2) \cdot \widehat{v} = (2,-2,4) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

مثال

فرض کنید که تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است. به‌ازای هر بردار یکه‌ی $v\in\mathbb{R}^2$، $D_vf(0,0)$ را بیابید. آیا f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پاسخ: فرض کنید که $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ یک بردار یکه است. داریم:

$$D_vf(0,0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{2(hv_1)^2(hv_2)}{(hv_1)^4+(hv_2)^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{2h^3v_1^2v_2}{h^2(h^2v_1^4+v_2^2)}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{2v_1^2v_2}{h^2v_1^4+v_2^2}$$

اگر $v_2=0$، آن‌گاه $\frac{2v_1^2v_2}{h^2v_1^4+v_2^2}=0$. پس حد بالا و از این‌رو $D_vf(0,0)$ برابر با 0 است. در غیر این صورت، اگر $v_2\neq0$، داریم $D_vf(0,0)=2\frac{v_1^2}{v_2}$.

ادامه‌ی مثال

حال، مشتق‌پذیری f در $(0,0)$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4+0} - 0}{h} = 0$$

به طور مشابه، داریم $f_2(0,0) = 0$. حال، اگر f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه به‌ازای هر بردار یکه‌ی $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$، داریم:

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = (0,0) \cdot v = 0$$

در حالی‌که اگر $v_1, v_2 \neq 0$، دیدیم که $D_v f(0,0) = 2\frac{v_1^2}{v_2} \neq 0$. پس، f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.