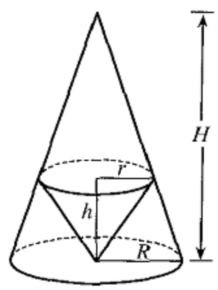
۱۴. مخروطی با ارتفاع h درون یک مخروط بزرگتر به ارتفاع H طوری محاط شده است که راس مخروط کوچکتر در مرکز قاعده مخروط بزرگتر قرار گرفته است. نشان دهید که اگر $h = \frac{1}{3}H$ مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را اختیار میکند.



حل: بنابرقضیه تالس خواهیم داشت

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$$

از طرفی حجم مخروط برابراست با $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{Hr}{R} = H - h \Rightarrow h = H - \frac{Hr}{R} = \frac{HR - Hr}{R} = \frac{H}{R}(R-r) \qquad (1)$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3}r^2(\frac{H}{R})(R-r) = \frac{\pi}{3}\frac{H}{R}(Rr^2 - r^3)$$
$$V'(r) = \frac{\pi}{3}\frac{H}{R}(2Rr - 3r^2) = \frac{\pi}{3}\frac{H}{R}r(2R - 3r)$$
$$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{یا} \quad 2R = 3r$$

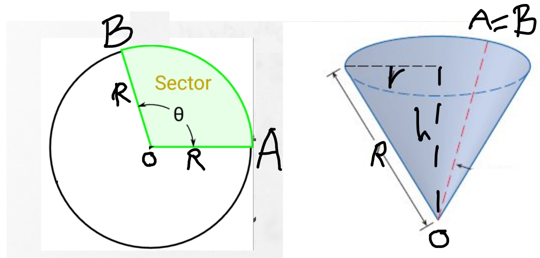
در نتیجه $r = \frac{2}{3}R$ بنابر (۱) داریم:

$$h = \frac{H}{R}(R - \frac{2}{3}R) = \frac{H}{R}\frac{1}{3}R$$

با توجه به اینکه $V'(r)$ از مثبت به منفی در $r = \frac{2}{3}R$ تغییر می کند. بنابر این حجم مخروط داخلی ماکزیمم حجم خود را دارد.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{2}{3}R)^2(\frac{1}{3}H) = \frac{4}{7}2\pi R^2 H$$

۱۵. قطاعی از یک قرص دایره‌ای شکل به شعاع R را جدا و سپس قسمت باقیمانده‌ی قرص را طوری تا می‌کنیم که از انطباق دو لبه‌ی آن بر هم یک مخروط پدید آید. بیشترین حجم ممکن برای مخروط چقدر است؟



حل:

محیط قاعده مخروط برابر است با طول کمان مقابل زاویه θ ، یعنی $2r\pi = R\theta$ از طرفی بنابر قضیه فیثاغورس $R^2 = h^2 + r^2$ اکنون حجم مخروط را برحسب R و θ بدست می آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3\theta^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

با مشتق گیری نسبت به θ داریم:

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} + \theta^2\frac{-2\theta}{2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}\right)$$

از برابر صفر قرار دادن V' ، $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ بدست می آید.. برای $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ حجم برابر است با $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.

اصل استقرای ریاضی :

فرض کنید $P(n)$ عبارتی درباره‌ٔ عدد طبیعی n باشد.
اگر $P(1)$ درست باشد و به ازای هر عدد طبیعی k
از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آنگاه
$P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال :

$P(n):$ مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از یک
برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$

اثبات به استقرای ریاضی:

$P(1): \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

حال فرض کنیم حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم
حکم به ازای $k+1$ هم درست است. یعنی باید نشان دهیم

$$1+2+\cdots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

داریم :

$$\underbrace{1+2+\cdots+k}_{\text{طبق فرض استقرا}}+k+1 = \frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

در نتیجه $P(n)$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ درست خواهد بود.

۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند. نشان دهید:

الف. $f(nx)=nf(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$.

ب. f در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

ج. f پیوسته است اگر و فقط اگر برای عددی مانند $m\in\mathbb{R}$، $f(x)=mx$.

حل:

الف

به استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم.

$n=1: \quad f(1x)=1\,f(x)$ ✓

فرض استقراء: فرض می‌کنیم حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد.

حکم استقراء: نشان می‌دهیم حکم به ازای $n=k+1$ هم برقرار است.

داریم:

$$f((k+1)x)=f(kx+x)$$

$$\overset{\text{فرض مسأله}}{=\!=} f(kx)+f(x) \overset{\text{فرض استقراء}}{=\!=} kf(x)+f(x)$$

$$=(k+1)f(x)$$

ب. واضح است که اگر f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در نقطه‌ای مانند $x \in \mathbb{R}$ نیز پیوسته است.

برعکس فرض کنیم تابع f در نقطه‌ای مانند $x_\circ \in \mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان می‌دهیم در هر نقطه دلخواه مانند $y \in \mathbb{R}$ نیز تابع f پیوسته است. باید نشان دهیم $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

می‌دانیم تابع f در $x_\circ$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$. این معادل است با $\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h) = f(x_\circ)$.
بنابراین

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to y} f(x) &= \lim_{h\to\circ} f(y+h) \\
&= \lim_{h\to\circ} f(y+h+x_\circ-x_\circ) \\
&\overset{\text{فرض سوال}}{=} \lim_{h\to\circ} \big(f(y)+f(x_\circ+h-x_\circ)\big) \\
&\overset{\text{قسمت الف}}{=} \lim_{h\to\circ} \big(f(y)+f(x_\circ+h)-f(x_\circ)\big) \\
&= f(y)+\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h)-f(x_\circ) \\
&= f(y)+f(x_\circ)-f(x_\circ) = f(y)
\end{aligned}
$$

ج فرض کنیم f پیوسته باشد و $f(1) = m$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم

$$f(n) = f(n \times 1) \overset{\text{قسمت الف}}{=} nf(1) = mn$$

به ازای $n \in \mathbb{Z}^-$ داریم

$$f(n) = f(-n \times -1) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times f(-1) \overset{\text{قسمت الف}}{=} -n \times (-f(1)) = mn$$

به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$، $x = \frac{p}{q}$ که $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}$. بنابراین

$$f(p) = f(qx) \overset{\text{قسمت الف}}{=} qf(x) = mp$$

بنابراین $f(x) = m\frac{p}{q} = mx$.
برای هر $r \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $(x_n) = (\frac{[rn]}{n})$ وجود دارد که $x_n \to r$ بنابراین

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{\text{پیوستگی}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} mx_n = mr.$$

۱۳. فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و $f(a)=f(b)$. اگر $n\in\mathbb{N}$، نشان دهید عددی مانند $c\in[a,b-\frac{b-a}{n}]$ وجود دارد که $f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$.

حل: تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{n})$$

دامنه تابع g برابر $[a,b-\frac{b-a}{n}]$ است. نقاط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_k=a+(\frac{b-a}{n})k,\qquad k=0,1,\dots,n-1,n.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}g(x_k)&=g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{n-1})\\&=\{f(a)-f(a+\frac{b-a}{n})\}+\{f(a+\frac{b-a}{n})-f(a+2(\frac{b-a}{n}))\}\\&+\cdots+\{f(a+(n-1)(\frac{b-a}{n}))-f(a+n(\frac{b-a}{n}))\}\end{aligned}$$

با توجه $f(a+n(\frac{b-a}{n}))=f(b)$ داریم $f(a)=f(b)$ بنابراین

$$g(x_0)+g(x_1)+\cdots+g(x_{n-1})=f(a)-f(b)=0$$

بنابراین دو حالت رخ می‌دهد.

حالت اول: اگر x_jای وجود داشته باشد که $g(x_j)=0$ که آنگاه $c=x_j$ جواب مسئله خواهد بود.

حالت دوم: چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $x_i\neq x_j$ که $i\neq j$ وجود دارد که

$$g(x_i)g(x_j)<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین x_i و x_j هست که $g(c)=0$ و در نتیجه

$$f(c)=f(c+\frac{b-a}{n})$$

۱۴. فرض کنید n عددی طبیعی و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$. نشان دهید $a,b\in[0,1]$ وجود دارند به‌طوری‌که $b-a=\frac{1}{n}$ و $f(a)=f(b)$.

حل: تابع کمکی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به پیوستگی f و چون تفاضل و ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است، بنابراین $g(x)$ تابعی پیوسته است. داریم

$$g(0)=f(\frac{1}{n})-f(0)$$
$$g(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})$$
$$\vdots$$
$$g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(\frac{n-1}{n})$$

اگر مقادیر فوق را با هم جمع کنیم، داریم

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)$$

چون طبق فرض سوال $f(1)=f(0)$، بنابراین

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0.$$

چون مجموع فوق صفر است، لذا تمام جملات آن نمی‌توانند هم‌علامت باشند. بنابراین $0\leq i,j\leq n-1$ وجود دارند که $i\neq j$ به‌طوری‌که $g(\frac{i}{n})\geq 0$ و $g(\frac{j}{n})\leq 0$. بنابراین

$$g(\frac{i}{n})g(\frac{j}{n})<0$$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین $\frac{i}{n}$ و $\frac{j}{n}$ هست که $g(c)=0$. بنابراین

$$f(c+\frac{1}{n})=f(c)$$

کافی است قرار دهیم $a=c$ و $b=c+\frac{1}{n}$.

Subject:

Day. Month. Year. ( )

سری اول تمرینات ریاضی ۱

①

تابع کلی f(x) را می‌سازیم

$$\begin{cases} f(x): [0,1] \to \mathbb{R} \\ f(x) = (x^2+1)\sin x + (x^2-1)\cos x \end{cases}$$

f(x) حاصل ضرب و جمع تابع‌های پیوسته است پس خودش پیوسته است.

$$f(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1 \to f(0) < 0$$

$$f(1) = 2\sin(1) + 0 \xrightarrow{0<1<\frac{\pi}{2} \to \sin(1)>0} f(1) > 0$$

$$f(0)\,f(1) < 0$$

حالت خاص قضیه مقدار میانی (بولتزانو)

$$\exists c \in [0,1] : f(c) = 0$$

نتیجه گرفتیم → $\exists c \in [0,1] : f(c) = 0$

دیدیم → $f(0) < 0$ و $f(1) > 0$

پس $f(0)$، $f(1)$ مخالف صفرند پس c، ۰ و ۱ نیست

$$\exists c \in (0,1) : f(c) = 0$$

$$f(c) = (c^2+1)\sin c + (c^2-1)\cos c \to 0 = (c^2+1)\sin c - (1-c^2)\cos c$$

$$(c^2+1)\sin c = (1-c^2)\cos c$$

②

$$f(x) = \cos\frac{1}{x^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \cos(\overbrace{(2n+1)}^{\text{عدد فرد}}\pi) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \cos(\overbrace{2n}^{\text{زوج}}\pi) = 1$$

f(x) در x=0 حد ندارد.