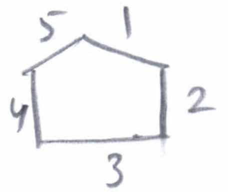
تمرین ششم (تمرینات تکمیلی فصل ۸) صفحه ۵۴۸

الف) اگر k رنگ مختلف در اختیار داشته باشیم به چند طریق می‌توانیم دیوارهای اتاق پنج دیواری را چنان رنگ آمیزی کنیم که هر دو دیوار مجاور با رنگ‌های مختلف رنگ آمیزی شوند؟



راه حل: دیوارهای اتاق را با شماره‌های ۱ تا 5 مشخص می‌کنیم و c_i را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

c_i: دیوارهای i و $i+1$ همرنگ هستند. $1 \le i \le 4$

c_5: دیوارهای 5, 1 همرنگ هستند.

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = S_0 - S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S_5$$

$$= N - \sum_{1\le i\le 5} N(c_i) + \sum_{1\le i<j\le 5} N(c_ic_j) - \sum_{1\le i<j<k\le 5} N(c_ic_jc_k)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k<l\le 5} N(c_ic_jc_kc_l) - \sum_{1\le i<j<k<l<m\le 5} N(c_ic_jc_kc_lc_m)$$

$$= k^5 - \binom{5}{1}k^4 + \binom{5}{2}k^3 - \binom{5}{3}k^2 + \binom{5}{4}k^1 - \binom{5}{5}k^1$$

$$= (k-1)^5 - (k-1) = (k-1)\left[(k-1)^4 - 1\right]$$

ب) کوچکترین k را تعیین کنید که به ازای آن چنین رنگ آمیزی امکان پذیر باشد؟

عدد 3 کوچکترین مقدار عدد k است که عبارت فوق بزرگتر از صفر گردد.

و در واقع عبارت فوق به ازای $k=3$ برابر است با 30 ،

پ) درصورتی که این اتاق ۶ دیوار داشته باشد به قسمتهای الف و ب پاسخ دهید

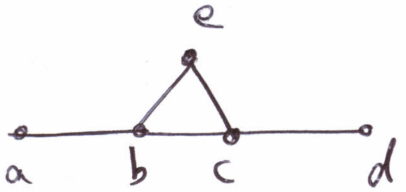
$$N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}\bar{C_4}\bar{C_5}\bar{C_6}) = K^6 - \binom{6}{1}K^5 + \binom{6}{2}K^4 - \binom{6}{3}K^3 + \binom{6}{4}K^2 - \binom{6}{5}K^1 + \binom{6}{6}K^1$$

کوچکترین K برای اینکه عبارت فوق بزرگتر از صفر شود برابر است با $K=2$

و درصورتی که $K=2$ باشد در این صورت مقدار عبارت فوق برابر با 2 می‌گردد.

تمرین ۱۲ - (تمرینات تکمیلی - فصل ۸) صفحه ۵۴۹

الف) فرض کنید $\lambda \in Z^+$. اگر λ رنگ مختلف در اختیار داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم رأس‌های گراف شکل زیر را چنان رنگ آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند.



راه حل: شرط c_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $1 \le i \le 5$

c_1: رئوس a و b همرنگ هستند. c_2: رئوس b و c همرنگ هستند. c_3: رئوس b و e همرنگ هستند.

c_4: رئوس c و e همرنگ هستند. c_5: رئوس c و d همرنگ هستند.

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5) = N_0 - \sum_{1\le i\le 5} N(c_i) + \sum_{1\le i<j\le 5} N(c_ic_j)$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le 5} N(c_ic_jc_k) + \sum_{1\le i<j<k<l\le 5} N(c_ic_jc_kc_l)$$

$$- \sum_{1\le i<j<k<l<m\le 5} N(c_ic_jc_kc_lc_m)$$

$$= \lambda^5 - \binom{5}{1}\lambda^4 + \binom{5}{2}\lambda^3 - (\underbrace{\lambda^3}_{N(c_2c_3c_4)} + 9\lambda^2)$$

$$+ (\underbrace{2\lambda^2}_{N(c_2c_3c_4c_5) \text{ و } N(c_1,c_2,c_3,c_4)} + 3\lambda) - \lambda$$

$$= \lambda^5 - 5\lambda^4 + 9\lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda$$

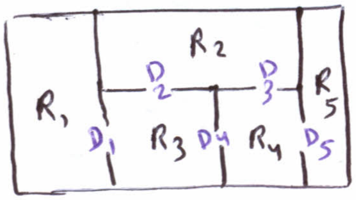
کمترین λ ای که به ازای آن عبارت فوق بزرگتر از صفر شود برابر است با $\lambda = 3$

تعدادی که برحسب λ بدست آوردید چند جمله‌ای رنگی این گراف و کوچکترین مقدار λ که به ازای آن مقدار این چند جمله‌ای مثبت است عدد رنگی این گراف نامیده می‌شود

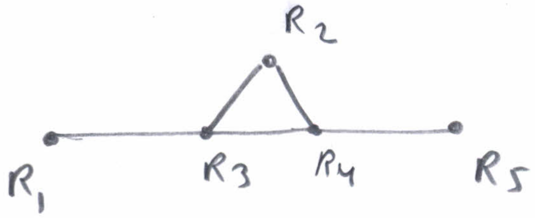
عدد رنگی این گراف چند است ؟

$\lambda = 3$

ب) اگر ۶ رنگ در اختیار داشته باشید ، به چند طریق می‌توان اتاق‌های R_i ، 1,2,3,4,5 را رنگ آمیزی کرد ، بطوریکه اتاق‌هایی که درگاه‌های مشترک دارند دارای رنگ‌های مختلف باشند.



گراف متناظر با شکل داده شده را رسم می‌کنیم . هر راس گراف نمایانگر یک اتاق و یال بین رئوس نشان دهنده وجود درگاه بین آنها (دو اتاق) است .



حاصل گراف صفحه قبلی است

با توجه به اینکه $\lambda = 6$ در چند جمله‌ای رنگی بدست آمده داریم :

$$6^5 - 5\times 6^4 + 9\times 6^3 - 7\times 6^2 + 2\times 6$$