ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

توابع برداری و خم‌ها (منحنی‌ها)

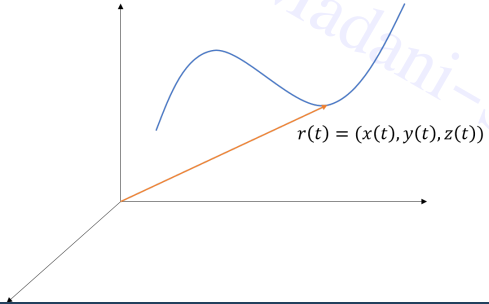
توابع اسکالر

قرارداد: منظور از I وقتی در دامنه‌ی توابع ظاهر می‌شود، یک بازه است.

هر تابع به فرم $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر نامیده می‌شود.

بردار مکان یک ذره‌ی متحرک در فضا

$$r = r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)i + y(t)j + z(t)k.$$



توابع برداری

تابع $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ که هر $t \in I$ را به $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ تصویر می‌کند، یک تابع برداری نامیده می‌شود.

توجه می‌کنیم که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، γ_i یک تابع اسکالر است.

مثال

فرض می‌کنیم که $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ به صورت $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ تعریف می‌شود، که در آن $R > 0$ ثابت است.

داریم

$$x(t) = \gamma_1(t) = R\cos(t) \quad \text{و} \quad y(t) = \gamma_2(t) = R\sin(t)$$

بنابراین، به‌ازای هر t داریم

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$$

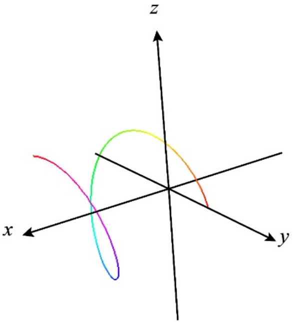
هم‌چنین،

$$\text{برد } \gamma = \mathrm{Im}(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in [0, 2\pi]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

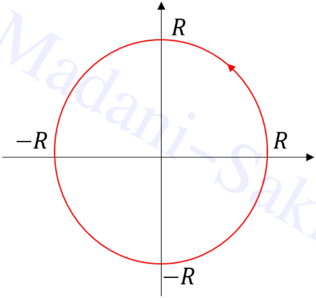
ادامه‌ی مثال

به علاوه،

$$\text{نمودار}\ \gamma = \{(t, \gamma_1(t), \gamma_2(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$$
$$= \{(t, R\cos(t), R\sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$$



(ب) نمودار γ



(آ) $\mathrm{Im}(\gamma)$

حد و پیوستگی در $\mathbb{R}^n$

فرض می‌کنیم که $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ و $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = l = (l_1, \ldots, l_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \lim_{t\to t_0} \gamma_i(t) = l_i.$$

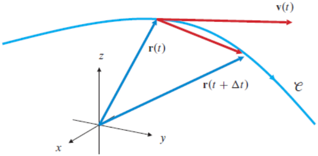
گوییم γ در $t_0 \in I$ پیوسته است، هرگاه:

$$\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$$

معادلاً، γ در $t = t_0$ پیوسته است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، γ_i در $t = t_0$ پیوسته باشد.

مشتق‌پذیری توابع برداری

فرض کنید که $r : I \to \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری است.



سرعت :

$$\mathrm{v}(t) = \frac{d}{dt} r(t) = r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

تندی:

$$\nu(t) = |\mathrm{v}(t)|$$

شتاب:

$$a(t) = \mathrm{v}'(t) = r''(t) = \frac{d^2}{dt^2} r(t)$$

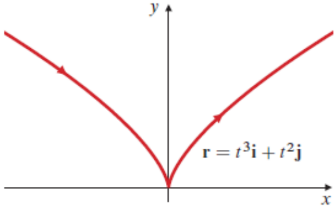
شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری یک تابع برداری:

تابع برداری $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ با $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ در $t_0 \in (a, b)$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، تابع اسکالر γ_i در t_0 مشتق پذیر باشد.

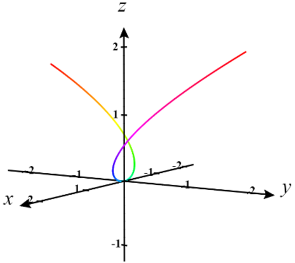
اگر γ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0))$$

فرض کنید خم $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ به صورت $r(t)=(t^3,t^2)$ تعریف می‌شود.
هر دوی $r_1(t)=t^3$ و $r_2(t)=t^2$ بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر هستند، که نتیجه می‌دهد $r(t)$ هم بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر است. داریم $r'(t)=(3t^2,2t)$.
توجه می‌کنیم که تصویر $r(t)$ متناظر با $y=x^{\frac{2}{3}}$ است که از ریاضی ۱ می‌دانیم این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.



(ج) $\mathrm{Im}(\gamma)$



(د) نمودار γ

مثال

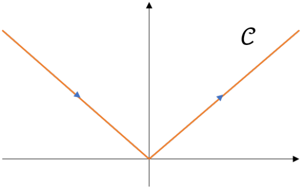
اگر $\mathcal{C}$ نمودار تابع $y = |x|$ باشد، آن‌گاه تصویر توابع برداری زیر است:

$$\begin{cases} r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ r(t) = (t, |t|) \end{cases}$$

r در $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

$$\begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ \gamma_1(t) = \begin{cases} t^2 & , t \geq 0 \\ -t^2 & , t < 0 \end{cases} \quad , \gamma_2(t) = t^2 \end{cases}$$

γ در $t = 0$ مشتق‌پذیر است.



خم هموار

خم $\mathbb{R}^n \to \gamma : I$ **هموار** نامیده می‌شود، هرگاه γ روی I مشتق‌پذیر و γ' پیوسته باشد و به‌علاوه، به‌ازای هر $t \in I$، داشته باشیم $\underbrace{\gamma'(t) \neq 0}_{\text{به عنوان بردار}}$.

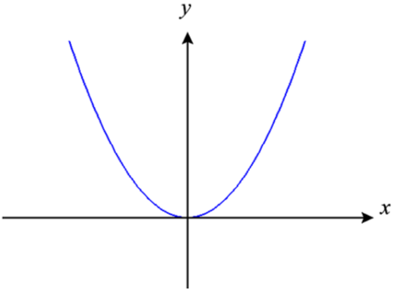
مثال

خم $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ با $r(t) = (t^3, t^2)$ هموار نیست؛ زیرا داریم $r'(t) = (3t^2, 2t)$، که نتیجه می‌دهد $r'(0) = 0$.

مثال

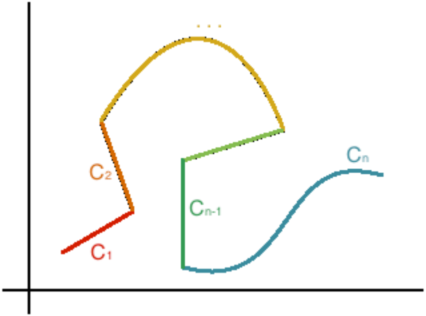
خم $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ را با $\gamma(t) = (t, t^2)$ در نظر بگیرید. داریم $\gamma'(t) = (1, 2t)$، و بنابراین γ' پیوسته است و در هیچ نقطه‌ای صفر نیست. پس γ یک خم هموار است.

توجه می‌کنیم که $\mathrm{Im}(\gamma)$ یک سهمی است.



خم قطعه‌به‌قطعه هموار:

خم γ که به‌جز تعدادی متناهی نقطه، در سایر نقاط هموار است، یک خم قطعه‌به‌قطعه هموار نامیده می‌شود.



قواعد مشتق‌گیری توابع برداری

قضیه: فرض کنید $u(t)$ و $v(t)$ دو تابع برداری مشتق‌پذیر هستند، و $\lambda(t)$ نیز یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر است. در این صورت، $u(t)+v(t)$، $\lambda(t)u(t)$، $u(t).v(t)$، $u(t)\times v(t)$ و $u(\lambda(t))$ در همه‌ی نقاط، و $|u(t)|$ در نقاط t با $u(t)\neq 0$ مشتق‌پذیر هستند، و داریم

۱. $(u(t)+v(t))' = u'(t)+v'(t)$

۲. $(\lambda(t)u(t))' = \lambda'(t)u(t)+\lambda(t)u'(t)$

۳. $(u(t).v(t))' = u'(t).v(t)+u(t).v'(t)$

۴. $(u(t)\times v(t))' = (u'(t)\times v(t))+(u(t)\times v'(t))$

۵. $(u(\lambda(t)))' = \lambda'(t)u'(\lambda(t))$

۶. $(|u(t)|)' = \frac{u(t).u'(t)}{|u(t)|}$

مثال

نشان دهید که تندی یک ذره‌ی متحرک در یک بازه از زمان ثابت می‌ماند اگر و تنها اگر شتاب در سراسر بازه بر سرعت عمود باشد.

پاسخ:

فرض کنید γ خم حاصل از حرکت ذره است. داریم $|\gamma'(t)| = |\mathrm{v}(t)| = \nu(t)$. ابتدا فرض کنید ثابت c وجود دارد که در یک بازه‌ی زمانی، $\nu(t) = c$. پس $|\gamma'(t)| = c$، و از این‌رو $\gamma'(t).\gamma'(t) = |\gamma'(t)|^2 = c^2$. حال، با مشتق‌گیری از طرفین، داریم

$$\gamma''(t).\gamma'(t) + \gamma'(t).\gamma''(t) = 0 \implies \gamma''(t).\gamma'(t) = 0$$

پس داریم

$$a(t).\mathrm{v}(t) = \gamma''(t).\gamma'(t) = 0$$

که نتیجه می‌دهد $a(t)$ و $\mathrm{v}(t)$ بر هم عمود هستند.

ادامه‌ی مثال

برعکس، فرض کنید که $a(t)$ و $\mathrm{v}(t)$ در یک بازه از زمان بر هم عمود هستند. بنابراین، داریم $a(t).\mathrm{v}(t) = 0$. حال، نشان می‌دهیم که در این بازه $\nu(t) = |\gamma'(t)|$ ثابت است. داریم

$$\frac{d}{dt}(\nu(t))^2 = \frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2 = \frac{d}{dt}\left(\gamma'(t).\gamma'(t)\right)$$
$$= 2\gamma''(t).\gamma'(t) = 2a(t).\mathrm{v}(t) = 0$$

پس $(\nu(t))^2$ و بنابراین $\nu(t)$ بر بازه‌ی یادشده ثابت است.

مثال

در بازه‌ی حرکت یک ذره، در لحظه‌ای که مکان و سرعت آن در رابطه‌ی $r.\mathrm{v} > 0$ صدق می‌کنند، چه می‌توان گفت؟ برای $r.\mathrm{v} < 0$ چطور؟

پاسخ:

فرض کنید که $r(t).\mathrm{v}(t) > 0$. داریم $r(t).r(t) = |r(t)|^2$. حال، با مشتق‌گیری از دو طرف داریم

$$2|r(t)|\tfrac{d}{dt}|r(t)| = 2r(t).r'(t) = 2r(t).\mathrm{v}(t) > 0$$

پس $\frac{d}{dt}|r(t)| > 0$، که نتیجه می‌دهد $r(t)$ از مبدأ دورشونده است.

در صورتی که در لحظه‌ی $t = t_0$ داشته باشیم $r(t).\mathrm{v}(t) < 0$، آن‌گاه با استدلالی مشابه، نتیجه می‌شود که $\frac{d}{dt}|r(t)| < 0$، و از این‌رو $r(t)$ به مبدأ نزدیک‌شونده است.

انتگرال‌پذیری توابع برداری

خم $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ با $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، تابع اسکالر γ_i انتگرال‌پذیر باشد.

در صورتی که γ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه انتگرال آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)\, dt \right)$$

مثال

فرض کنید $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ با $\gamma(t) = (t^3, t^2)$. در این صورت، داریم

$$\int_0^1 \gamma(t)\, dt = \left(\int_0^1 t^3\, dt, \int_0^1 t^2\, dt \right) = \left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1, \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

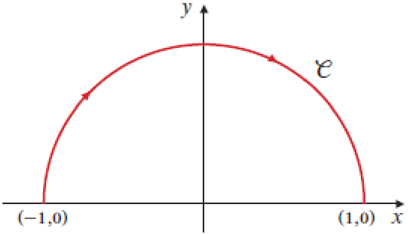
خم‌ها و پارامتری‌سازی

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک منحنی و $r(t)$ یک تابع برداری است، طوری که $\mathcal{C} = \mathrm{Im}(r)$. آن‌گاه $r(t)$ یک پارامتری‌سازی برای $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود.

مثال

فرض کنید خم $\mathcal{C}$ یک نیم‌دایره به صورت زیر است. در این صورت، هر یک از توابع برداری زیر، یک نمایش پارامتری برای $\mathcal{C}$ هستند.

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \sin(t)i + \cos(t)j, && -\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2} \\ r_2(t) &= (t-1)i + \sqrt{2t-t^2}j, && 0 \le t \le 2 \\ r_3(t) &= t\sqrt{2-t^2}i + (1-t^2)j, && -1 \le t \le 1 \end{aligned}$$



مثال

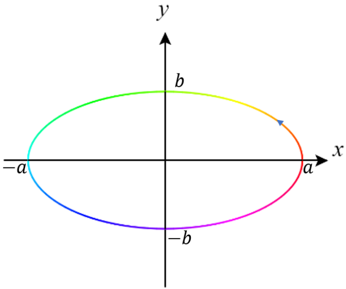
یک معادله‌ی پارامتری برای بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بنویسید.

پاسخ:

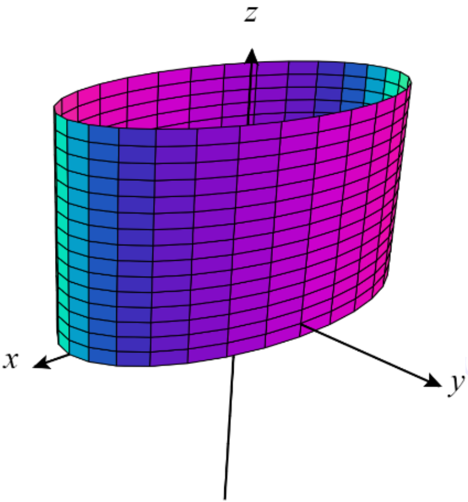
کافی است به‌ازای $0 \leq t \leq 2\pi$، قرار دهیم $x(t) = a\cos(t)$ و $y(t) = b\sin(t)$.

بنابراین، تابع برداری زیر یک پارامتری‌سازی برای بیضی داده‌شده است:

$$r(t) = a\cos(t)i + b\sin(t)j, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



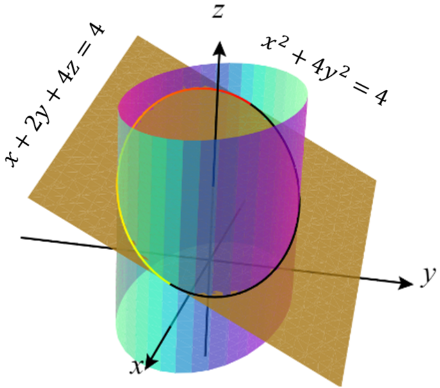
توجه کنید که $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ در $\mathbb{R}^3$ یک استوانه‌ی بیضوی است.



مثال

خم فصل مشترک صفحه‌ی $x+2y+4z=4$ و استوانه‌ی بیضوی $x^2+4y^2=4$ را پارامتری کنید.

پاسخ:



ادامه‌ی مثال

معادله‌ی $x^2+4y^2=4$ مستقل از z است، پس ابتدا آن را پارامتری می‌کنیم. داریم $\frac{x^2}{4}+y^2=1$، که معادله‌ی یک بیضی در صفحه است. بنابراین، آن را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم

$$x=2\cos(t), \quad y=\sin(t), \qquad 0\le t\le 2\pi$$

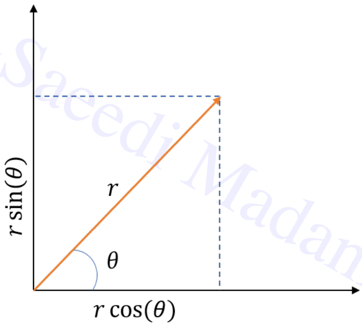
حال، z را به صورت زیر بر حسب t به‌دست می‌آوریم

$$z=\frac{4-x-2y}{4}=\frac{4-2\cos(t)-2\sin(t)}{4}=1-\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$$

بنابراین، داریم

$$r(t)=2\cos(t)i+\sin(t)j+\left(1-\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}\right)k, \qquad 0\le t\le 2\pi$$

نمایش قطبی در $\mathbb{R}^2$



$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نمایش قطبی یک خم در $\mathbb{R}^2$

فرض می‌کنیم که $\mathcal{C}$ یک منحنی در $\mathbb{R}^2$ است، طوری که نقاط منحنی در رابطه‌ی $r = g(\theta)$ با $\theta \in I$ صدق می‌کنند. در این صورت، می‌توان نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}$ در نظر گرفت

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(\theta) = (g(\theta)\cos(\theta))\, i + (g(\theta)\sin(\theta))\, j$$

تذکر:

اگر در ترسیم $r = g(\theta)$ به‌ازای بعضی زوایای θ، $g(\theta)$ منفی شود، آن‌گاه مقدار منفی برای r به‌دست می‌آید. در این صورت، به طور قراردادی، به جای نمایش قطبی (r, θ)، نمایش قطبی $(-r, \theta + \pi)$ را در صفحه‌ی مختصات مشخص می‌کنیم. به عبارتی، اگر $r = g(\theta) = -\alpha$ که $\alpha > 0$، آن‌گاه داریم

$$\gamma(\theta) = (-\alpha\cos(\theta), -\alpha\sin(\theta)) = (\alpha\cos(\theta + \pi), \alpha\sin(\theta + \pi))$$

مثال

معادله‌ی قطبی $r = \frac{10}{6\cos(\theta)+5\sin(\theta)}$ نمایش چه نوع خمی در صفحه است؟

پاسخ:

داریم

$$6r\cos(\theta) + 5r\sin(\theta) = 10 \iff 6x + 5y = 10$$

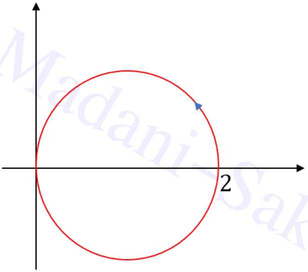
بنابراین، یک خط در صفحه به‌دست می‌آید.

مثال

تصویر خم $r = 2\cos(\theta)$ را به‌ازای $0 \le \theta \le 2\pi$ در صفحه ترسیم کنید.

پاسخ:

r	θ
2	0
0	$\frac{\pi}{2}$
-2	π
0	$\frac{3\pi}{2}$
2	2π



تذکر:

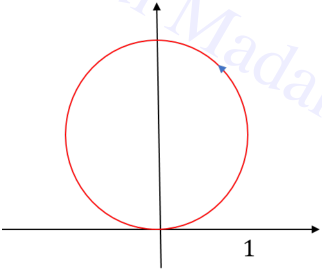
می‌توان خم مثال قبل را به صورت زیر با تبدیل به مختصات دکارتی رسم کرد:

$$
\begin{aligned}
r = 2\cos(\theta) &\iff r^2 = 2r\cos(\theta) \\
&\iff x^2 + y^2 = 2x \\
&\iff (x-1)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}
$$

تذکر:

خم قطبی $r = g(\theta - \theta_0)$ دوران‌یافته‌ی $r = g(\theta)$ به‌اندازه‌ی θ_0 در جهت مثلثاتی است.

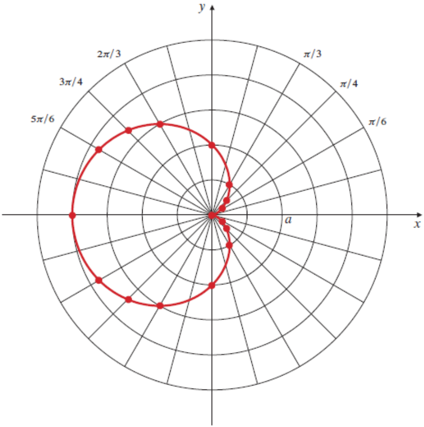
مثلاً با توجه به مثال قبل، می‌توان خم قطبی $r = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ را به صورت زیر رسم کرد:



مثال

خم قطبی $r = a(1 - \cos(\theta))$ را رسم کنید $(a > 0)$.

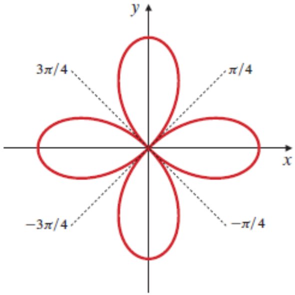
پاسخ:



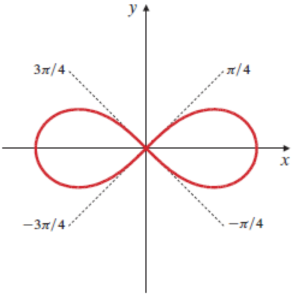
مثال

منحنی‌های قطبی $r = \cos(2\theta)$ ، $r^2 = \cos(2\theta)$ را در صفحه رسم کنید.

پاسخ:



(ه) $r = \cos(2\theta)$



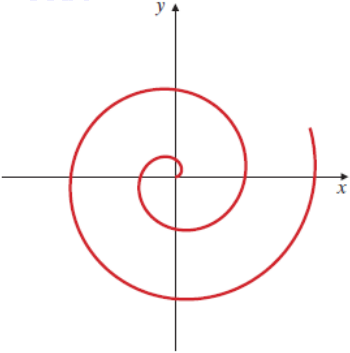
(و) $r^2 = \cos(2\theta)$

مثال

منحنی $\gamma(\theta) = (\theta\cos(\theta), \theta\sin(\theta))$ را رسم کنید.

پاسخ:

منحنی γ همان منحنی قطبی $r = \theta$ است.



تمرین

فرض کنید که $a, b > 0$. خم قطبی $r = a + b\cos(\theta)$ را به‌ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ رسم کنید (راهنمایی: حالت‌های مختلف $a = b$، $a < b$ و $a > b$ را در نظر بگیرید).