اعداد مختلط

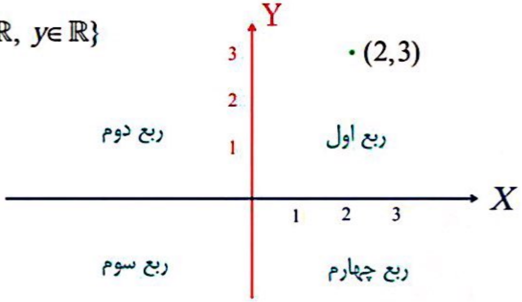
* معادله‌ی $x^2+1=0$ در $\mathbb{R}$

جواب ندارد.

صفحه مختصات دکارتی

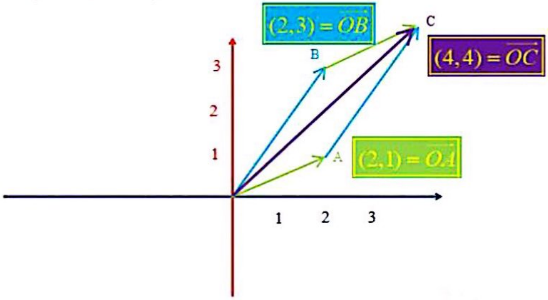
تعریف: صفحه مختصات دکارتی، مجموعه تمام زوج مرتب هایی به شکل (x, y) می باشد که $x, y \in \mathbb{R}$ و آن را با $\mathbb{R}^2$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

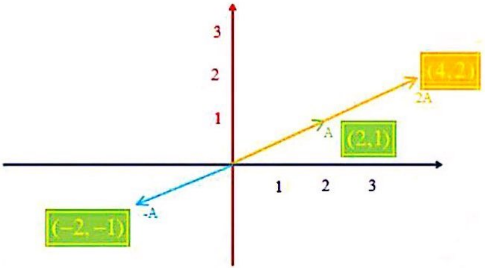


جمع برداری:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$



ضرب اسکالر: $c \in \mathbb{R} \to c(a,b) = (ca, cb)$



* ضرب زیر را روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌نماییم:

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

* حال، $\mathbb{R}^2$ را با ضرب و جمع تعریف‌شده، مجموعه‌ی

اعداد مختلط می‌نامیم و آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.

* خواص جمع :

اگر $z_1=(x_1,y_1)$، $z_2=(x_2,y_2)$، $z_3=(x_3,y_3)$.

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (خاصیت جابه‌جایی)

(2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

(3) $z_1+(0,0)=z_1$ (عضو خنثی در $\mathbb{C}$)

$(x_1,y_1)+(0,0)=(x_1,y_1)$

④ $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ (عضو قرینه)

$$z=(x,y) \rightsquigarrow \underbrace{-z}_{\text{قرینه } z}=(-x,-y)$$

*** خواص ضرب :**

① $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (خ جابجایی)

توضیح :
$$\begin{cases}(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',\ xy'+yx') \\ (x',y')\cdot(x,y)=(x'x-y'y,\ x'y+y'x)\end{cases}$$

② $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$ (خ شرکت پذیری)

③ $\underbrace{(x,y)\cdot(1,0)}_{(x-0,\ 0+y)}=(x,y)$ (عضو همانی یا خنثی ضرب)

④ $\underbrace{(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)}=(1,0)$; $(x,y)\neq(0,0)$ (عضو وارون ضرب برای)

$$(0,0)\neq z=(x,y) \rightsquigarrow z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

⑤ $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

(خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع).

قرارداد: عدد مختلط $(a,0)$ را با a نشان می‌دهیم.

تعریف: عدد مختلط $(0,1)$ را یکه‌ی مختلط یا یکه‌ی موهومی نامیده و با i نشان می‌دهیم.

نتیجه۱: $\boxed{i^2=-1}$

$$i^2=(0,1)\bullet(0,1)=(-1,0)=-1$$

نتیجه۲: نمایش مختلط و دکارتی

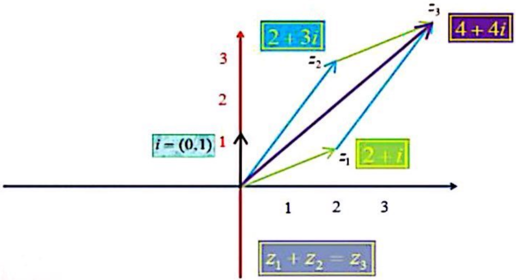
$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a+ib \quad \Rightarrow \quad \boxed{(a,b)=a+ib}$$

جمع اعداد مختلط

مثال۱:

$$(1+2i)+(3-i)=4+i$$

مثال۲:

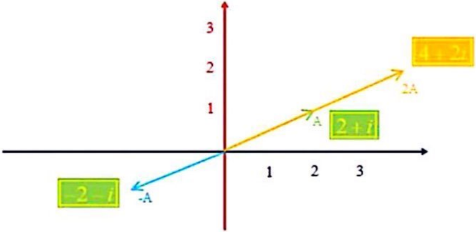


ضرب اعداد مختلط

مثال۱:

$$(1+2i)\bullet(3-i)=(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=5+5i$$

مثال۲:



* ضرب اعداد مختلط:

اگر $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$ ، داریم:

$$z.z' = (x+iy)(x'+iy')$$

$$= \underline{\underline{xx'}} + ixy' + iyx' + \underline{\underline{\overset{-1}{i^2}yy'}}$$

$$= (xx'-yy') + i(xy'+yx')$$

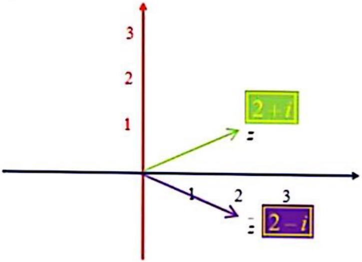
نمایش دیگر $\underline{\underline{\quad}}$ $(xx'-yy' \text{ و } xy'+yx').$

Scanned with CamScanner

مزدوج عدد مختلط

◀ مزدوج یک عدد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z = a + ib \rightarrow \bar{z} = a - ib$$



$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

◁ تعریف: قدرمطلق(اندازه) عدد مختلط

$$z=a+ib \rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

》 مثال: فرض کنیم $z=a+ib$ یک عدد مختلط باشد. در این صورت داریم:

$$z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$$

$$z-\bar{z}=2ib$$

$$z+\bar{z}=2a$$

◀ قرارداد: در عدد مختلط $z=a+ib$، عدد a را قسمت حقیقی و عدد b را قسمت مختلط (موهومی) می‌نامیم و به ترتیب با $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ نشان می‌دهیم.

* توجه: اگر $z \neq 0$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه داریم:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

دلیل: $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$

* نتیجه: اگر $|z| = 1$، آنگاه: $z^{-1} = \bar{z}$.

Scanned with CamScanner

* اگر $z \neq 0$ عددی مختلط باشد، داریم:

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$$

دلیل: $z z^{-1} = 1 \Longrightarrow |z z^{-1}| = 1$

$$\Longrightarrow |z||z^{-1}| = 1 \Longrightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}.$$

* داریم : $\operatorname{Im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

* دو عدد مختلط z و z' با هم برابرند، اگر و تنها اگر

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z'$ و $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'$.

$\cdot\ |z| = 0 \iff z = 0$ *

$\cdot\ z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ *

$\overline{(\bar{z})} = z$ *

$\cdot\ |zw| = |z|\,|w| \Leftarrow z, w \in \mathbb{C}$ اگر *

دلیل: $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z}\bar{w})$

$= (z\bar{z})(w\bar{w})$

$= |z|^2\,|w|^2$

مثال : عدد مختلط $z = \frac{4+5i}{2-3i}$ را

به شکل $A + iB$ بنویسید :

حل :

$$z = (4+5i)(2-3i)^{-1}$$

$$= (4+5i)\left(\frac{2}{13} + i\frac{3}{13}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{13} - \frac{15}{13}\right) + i\left(\frac{12}{13} + \frac{10}{13}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{-7}{13}}_{A} + i\,\underbrace{\frac{22}{13}}_{B}$$

Scanned with CamScanner

راه دیگر :

$$z = \frac{4+5i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{(8-15)+i(12+10)}{4+9}$$

$$= \frac{-7+i22}{13}$$

$$= \frac{-7}{13} + i\frac{22}{13}.$$

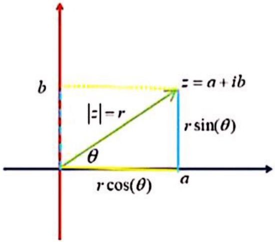
نمایش قطبی عدد مختلط

◀ فرض کنیم عدد مختلط $z = a + ib$ با راستای محور افقی، زاویه مثلثاتی θ بسازد و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$. آن‌گاه:

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$$



* **نماد گذاری:**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

پس نمایش قطبی z را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

* در نمایش قطبی عدد مختلط z ، به وضوح، مقدار θ یکتا نیست.

* تمام زاویه‌های ممکن را در مجموعه‌ای به صورت زیر، قرار می‌دهیم:

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

* پس برای هر α از مجموعه‌ی فوق، داریم:

$$z = |z| e^{i\alpha}$$

* در بین زوایایی که در مجموعه‌ی $\arg z$ قرار دارند،

مقداری که در $[0, 2\pi)$ است را آرگومان اصلی z

گوییم و آن را با $\operatorname{Arg} z$ نمایش می‌دهیم.

Scanned with CamScanner

* فرض کنید $z = |z| e^{i\theta}$, $w = |w| e^{i\phi}$.

$$\Rightarrow zw = \left(|z| e^{i\theta} \right) \left(|w| e^{i\phi} \right)$$

$$= |z||w| \, e^{i\theta} e^{i\phi}$$

$$= |zw| \, e^{i\theta} e^{i\phi}$$

$$= |zw| \left(\cos\theta + i\sin\theta \right) \left(\cos\phi + i\sin\phi \right)$$

$$= |zw| \left(\overbrace{\left(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \right)}^{\cos(\theta+\phi)} + i \underbrace{\left(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi \right)}_{\sin(\theta+\phi)} \right)$$

$$= |zw| \, e^{i(\theta+\phi)}$$

* نتیجه: اگر $z = |z| e^{i\theta}$ ، آن گاه:

$$z^2 = |z|^2 e^{i(2\theta)}$$

و به همین قیاس، داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$$

$$\Rightarrow z^n = |z|^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= |z|^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

*توجه: داریم:

$$|e^{i\theta}| = 1$$

$$\Rightarrow \overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$$

$$\Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow z^{-1} = |z|^{-1} e^{-i\theta}$$

$$= |z|^{-1} (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

* حال اگر $m<0$ ، آنگاه داریم:

$$m=-n \quad ; \quad n>0$$

$$z^m = z^{-n} = (z^n)^{-1}$$

$$= |z|^{-n}\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)^{-1}$$

$$= |z|^{-n}\left(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\right)$$

$$= |z|^{m}\left(\cos(m\theta)+i\sin(m\theta)\right)$$

$$= |z|^{m} e^{im\theta}$$

* فرمول دموآور :

اگر $z = |z| e^{i\theta}$ ، آن‌گاه برای هر $m \in \mathbb{Z}$،

داریم :

$$
\begin{aligned}
z^m &= |z|^m e^{im\theta} \\
&= |z|^m \left(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta) \right)
\end{aligned}
$$

توان عدد مختلط

مثال۱:

$$(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos(5.\frac{\pi}{4})+i\sin(5.\frac{\pi}{4})) = 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i) = -4-4i$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \theta = \tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

مثال۲:

$$(\frac{1+i}{1-i})^{100} = (\frac{(1+i)^2}{2})^{100} = \frac{(1+i)^{200}}{2^{100}} = \frac{2^{100}(\cos(200.\frac{\pi}{4})+i\sin(200.\frac{\pi}{4}))}{2^{100}} = 1$$