Ex) $(4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)\,dx + (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\,dy = 0$

$M_y = 12x^3\cos y\sin^2 y - 2x\cos y = N_x$ معادله فوق کامل است.

بنابراین تابع $\phi(x,y)$ موجود است به طوری که:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = M = 4x^3\sin^3 y - 2x\sin y \xrightarrow{\int dx} *$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y \quad **$$

$$* \quad \phi = x^4\sin^3 y - x^2\sin y + \overset{?}{\widehat{h(y)}} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^4\sin^2 y\cos y - x^2\cos y + h'(y) = **$$

$$3x^4\sin^2 y\cos y - x^2\cos y$$

$$h'(y) = 0 \xrightarrow{\int} h(y) = c \longrightarrow \boxed{\phi(x,y) = c \Rightarrow x^4\sin^3 y - x^2\sin y = c \quad \text{جواب عمومی}}$$

روش دیگر: بهتر است در امتحان تشریحی نوشته نشود! (خطاپذیرتر است)

$$\int (4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)\,dx + \int \cancel{(3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y}\,dy = \int 0$$

$$x^4\sin^3 y - x^2\sin y + 0 = c$$

Ex.) $(y\cos x + 2xe^y)\,dx + (\sin x + x^2e^y - 1)\,dy = 0$

$$\xrightarrow{\int} \int (y\cos x + 2xe^y)\,dx + \int (\cancel{\sin x} + \cancel{x^2e^y} - 1)\,dy = \int 0$$

$$y\sin x + x^2e^y - y = c$$

عامل انتگرال ساز (Integrating factor)

ممکن است معادله دیفرانسیل کامل نباشد امّا با ضرب تابعی مانند $\mu(x,y)$ کامل شود.

چنین تابعی را عامل انتگرال ساز معادله گوییم.

فرض کنیم معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

کامل نباشد و $\mu(x,y)$ عامل انتگرال ساز آن باشد. بنابراین معادله جدید زیر کامل است.

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\rightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + N_x \mu$$

$$\rightarrow \mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \longrightarrow M_y - N_x = \frac{\mu_x}{\mu} N - \frac{\mu_y}{\mu} M$$

معادله PDE

PDE فوق برای یافتن تابع $\mu(x,y)$ در حالت کلی قابل حل نمی‌باشد. بنابراین در بعضی حالات خاص می‌توان آن را حل نمود.

I) فرض می‌کنیم μ تنها تابعی از متغیر x می‌باشد. در این حالت PDE مذکور به فرم ساده‌تر زیر تبدیل می‌شود

$$M_y - N_x = N\,\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} \longrightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\partial \ln\mu}{\partial x}$$

با فرض اینکه کسر سمت چپ تابعی از تنها متغیر x باشد مانند $f(x)$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

page26

II) فرض کنیم μ تنها تابعی از y باشد. در این صورت PDE مذکور به فرم زیر در می‌آید.

$$M_y - N_x = -M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \longrightarrow \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \longrightarrow$$ در صورتی که کسر سمت چپ تنها تابعی از y باشد مانند $g(y)$

$$\longrightarrow \mu_y = e^{\int g(y)\,dy}$$

III) فرض کنیم μ تابعی از $Z = xy$ باشد. در این حالت داریم:

$$M_y - N_x = N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial z}\ln \mu(z)$$

$$\frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial z}\ln \mu(z)$$

$$M_y - N_x = \cancel{M}\ \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z}(yN - xM) \rightarrow \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{\partial \ln(\mu(z))}{\partial z}$$

$\longrightarrow$ در صورتی که کسر سمت چپ تنها تابع از $Z = xy$ باشد مانند $h(z)$ $\Longrightarrow \mu(z) = e^{\int h(z)\,dz}$

فرض کنیم μ تابعی از z باشد

$$M_y - N_x = N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times Z_x \qquad \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times Z_y$$

$$\frac{M_y - N_x}{NZ_x - MZ_y} = \frac{\partial}{\partial z}\ln \mu(z)$$

page 27

مثال) با چه شرطی معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای عامل انتگرال سازی است

که فقط تابعی از $Z=x^2+y^2$ است؟

(Ans.) در صورتی که کسر $\frac{M_y-N_x}{2xN-2yM}$ تنها تابعی از $Z=x^2+y^2$ باشد.

Ex.) (I) $(x+y^2)dx-2xy\,dy=0$

$$(M_y=2y)\neq(N_x=-2y)$$

$$\frac{M_y-N_x}{NZ_x-MZ_y}=\frac{4y}{(-2xy)Z_x-(x+y^2)Z_y}\xrightarrow{\text{if } Z=x}=\frac{-2}{x}$$

لذا معادله دارای انتگرال ساز برحسب x است.

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\left(\frac{x+y^2}{x^2}\right)}_{M^*}dx-\underbrace{\frac{2xy}{x^2}}_{N^*}dy=0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y}=\frac{\partial N^*}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$$

$$\int M\,dx=\int\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\,dx=\ln(x)-\frac{y^2}{x}+h(y)=\phi$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{2}{x}y+h'(y)=N^*=\frac{-2xy}{x^2}=\frac{-2y}{x}\quad h'(y)=0\xrightarrow{\int dy}h(y)=c$$

$$\phi(x,y)=\ln(x)-\frac{y^2}{x}+c=0\longrightarrow \ln(x)-\frac{y^2}{x}=c^*$$ جواب عمومی

page 28

Ex.) $\underbrace{y(1+xy)}_{M}dx - \underbrace{x}_{N}dy = 0 \qquad (M_y = 1+2xy) \neq (N_x = -1)$

معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y - N_x}{NZ_x - MZ_y} = \frac{2+2xy}{-xZ_x - y(1+xy)Z_y} =$$

اگر $Z=x$ معادله ساده حل نمی‌شود اگر $Z=y$ فرض شود داریم: $\quad Z_x = 0 \quad Z_y = 1$

$$\xrightarrow{\text{if } Z=y} \frac{2(1+xy)}{0-y(1+xy)} = \frac{-2}{y} = g(y) \xrightarrow{\int} \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{y(1+xy)dx}{y^2} - \frac{x\,dy}{y^2} = \underbrace{\frac{(1+xy)dx}{y}}_{M^*} - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{N^*}dy = 0$$

$\left(M^*_y = \frac{-1}{y^2}\right) = \left(N^*_x = \frac{-1}{y^2}\right) \longrightarrow$ معادله کامل

* برعهده دانشجو:

$$\int M\,dx = \int\left(\frac{1}{y} + x\right)dx = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + h(y) = \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + h'(y) = N \longrightarrow h'(y) = 0 \xrightarrow{\int dy} h(y) = C$$

$\phi = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + C = 0 \longrightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C^*$ جواب عمومی

جلسه هشتم ۲۵ اسفند ۹۹

Ex.) $\underbrace{(y+x^4y^2)}_{M}dx+\underbrace{x}_{N}dy=0 \qquad (M_y=1+2x^4y)\neq(N_x=1)$

$$\frac{M_y-N_x}{NZ_x-MZ_y}=\frac{2x^4y}{xZ_x-(y+x^4y^2)Z_y}\longrightarrow \text{if } z=xy\longrightarrow\begin{cases}Z_x=y\\ Z_y=x\end{cases}$$

$$=\frac{2x^4y}{xy-x(y+y^2x^4)}=\frac{2x^4y}{xy-xy-y^2x^5}=\frac{2x^4y}{-x^5y^2}=\frac{2}{-xy}$$

z

$$\mu(z)=e^{\int-\frac{2}{z}dx}=\frac{1}{z^2}\qquad \mu(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}$$ عامل انتگرال ساز

$$\frac{y+x^4y^2}{x^2y^2}dx+\frac{x}{x^2y^2}dy=0$$ معادله کامل:

$$\frac{1+x^4y}{x^2y}dx+\frac{1}{xy^2}dy=0\xrightarrow{\text{حل}}$$ جواب عمومی: $\frac{-1}{xy}+\frac{x^3}{3}=C$

$$\rightarrow xy=\frac{1}{\frac{x^3}{3}-c}\Longrightarrow y(x)=\frac{1}{x(\frac{x^3}{3}-c)}$$

page 33

Ex. α و β را طوری تعیین کنید که $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$ عامل انتگرال‌ساز معادلهٔ زیر باشد.

$$(5xy^2 - 2y)\,dx + (3x^2y - x)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب}} \underbrace{(5x^{1+\alpha} y^{2+\beta} - 2x^{\alpha} y^{\beta+1})}_{M^*} dx + \overbrace{(3x^{2+\alpha} y^{\beta+1} - x^{\alpha+1} y^{\beta})}^{N^*} dy = 0$$

مطابق فرض معادله باید کامل باشد.

$$\left.\begin{aligned} M^*_y &= 5(2+\beta)\, x^{1+\alpha} y^{1+\beta} - 2(1+\beta)\, x^{\alpha} y^{\beta} \\ N^*_x &= 3(2+\alpha)\, x^{1+\alpha} y^{1+\beta} - (1+\alpha)\, x^{\alpha} y^{\beta} \end{aligned}\right\} \quad M^*_y = N^*_x$$

$$\begin{cases} 5(2+\beta) = 3(2+\alpha) \longrightarrow \\ -2(1+\beta) = -(1+\alpha) \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} 5\beta - 3\alpha = -4 \\ -2\beta + \alpha = 1 \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} 5\beta - 3\alpha = -4 \\ -6\beta + 3\alpha = 3 \end{cases}$$

$$\beta = 1, \ \alpha = 3$$

$$\boxed{\mu(x, y) = x^3 y}$$

«معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول»

فرم کلی معادله مرتبه اول

$$F(x,y,y')=0 \xrightarrow{\text{خطی}} A(x)y'+B(x)y=C(x) \xrightarrow{\div A(x)} y'+\frac{B(x)}{A(x)}y=\frac{C(x)}{A(x)}$$

معادلات خطی مرتبه اول را می‌توان به فرم استاندارد زیر در نظر گرفت:

$$\boxed{y'+P(x)y=q(x)}$$

یا در فرم دیفرانسیلی:

$$\underbrace{(p(x)y-q(x))}_{M}dx+\underbrace{dy}_{N=1}=0$$

$$\left(M_y=p(x)\right)\neq\left(N_x=0\right) \longrightarrow \frac{M_y-N_x}{N}=\frac{p(x)-0}{1}=p(x)$$ عامل انتگرال ساز دارد.

ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق دارای عامل انتگرال ساز به صورت زیر است:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

بنابراین معادله روبرو کامل است

$$\underbrace{\mu(x)(p(x)y-q(x))dx}_{M^*}+\underbrace{\mu(x)}_{N^*}dy=0$$

$$\left(M^*_y=\mu(x)p(x)\right)=\left(N^*_x=\mu'(x)\right)$$

اثبات برقراری:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx} \xrightarrow[\text{مشتق}]{} p(x)e^{\int p(x)dx}=\mu(x)\,p(x)$$

بنابراین $\phi(x,y)$ موجود است به طوری که

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\mu(x)(p(x)y-q(x))$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\mu(x) \xrightarrow{\int dy} \phi(x,y)=y\mu(x)+h(x) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial\phi}{\partial x}=\cancel{y\mu'(x)}+h'(x)=\mu(x)(\cancel{p(x)y}-q(x))$$

$$\longrightarrow h'(x)=-\mu(x)q(x) \xrightarrow{\int dx} h(x)=-\int\mu(x)q(x)dx$$

page 35

$$\boxed{\phi(x,y) = C \Rightarrow y\mu(x) - \int \mu(x)\, q(x)\, dx = C}$$

→ جواب عمومی $y_g(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)\, dx + C\right]$

$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}$

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

Ex.)

(I) $xy' + 2y - 4x^2 = 0$

(II) $(tg(x))y' + y = \frac{3x}{\cos x}$

(I) $y' + \frac{2}{x}y = 4x \rightarrow \frac{2}{x} = p(x),\ 4x = q(x) \quad \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$

$$y_g = \frac{1}{x^2}\left[\int (4x)(x^2)\, dx + c\right] = \frac{x^4 + C}{x^2} = x^2 + \frac{c}{x^2} = y_g$$

(II) $y' + \cot x\ y = \frac{3x}{tg x \cos x} = \frac{3x}{\sin x} \quad \mu_x = e^{\int \cot x\, dx} = \sin x$

$$y_g = \frac{1}{\sin x}\left[\int \frac{3x}{\sin x} \sin x\, dx + C\right] = \frac{3x^2}{2\sin x} + \frac{C}{\sin x} = y_g$$

جواب عمومی

روش دیگر: فکر کنم امتحانی نیست!

$$\int \mu(x)\left(p(x)y - q(x)\right)dx + \int \mu(x)\, dy = \int 0$$

$$-\int \mu(x) q(x)\, dx + y\,\mu(x) = 0 \rightarrow y\,\mu(x) = \int \mu(x) q(x)\, dx \rightarrow [y\,\mu(x)]' = \mu(x) q(x)$$

روش دیگر: (پرسیده شده یکبار از کتاب مرجع)

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

$0 = q(x)$ اگر در معادله فرض شود $\rightarrow \; y' + p(x)\, y = 0$ جدا پذیر $\rightarrow \dfrac{dy}{y} = -p(x)\, dx \rightarrow y_1 = e^{-\int p(x)\, dx}$

$$y_{(x)} = U_{(x)}\, y_1 \Rightarrow U' = q(x)\mu(x) \rightarrow U = \int q(x)\mu(x)\, dx + c$$

* در معادلات مرتبه بالاتر نیز این روش معرفی می‌شود.

تذکر: ممکن است یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به x به عنوان تابعی از y خطی باشد.

$$x' \left(\frac{dx}{dy}\right) + p(y)\, x = q(y) \longrightarrow \mu_{(y)} = e^{\int p(y)\, dy}$$

$$\longrightarrow x = \frac{1}{\mu_{(y)}}\left[\int q(y)\mu(y)\, dy + c\right]$$

(Ex.) معادله زیر را حل کنید.

$y'(x\sin y+2\sin 2y)=1$

غیرخطی است

$x\sin y+2\sin(2y)=\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}\longrightarrow \frac{dx}{dy}-(\sin y)x=2\sin(2y)$

$p(y)=-\sin y \quad q(y)=2\sin 2y$

$\mu_y=e^{\int p(y)dy}=e^{\int -\sin y\,dy}=e^{\cos y}$

$x=\frac{1}{e^{\cos y}}\left[2\int \sin(2y)\,e^{\cos y}dy+c\right]$

$(*)\int \sin(2y)\,e^{\cos y}dy=\int 2\sin y\cos y\,e^{\cos y}dy\longrightarrow u=\cos y\rightarrow du=-\sin y\,dy$

$(*)-2\int ue^{u}du=-2(ue^{u}-e^{u})=-2(e^{\cos y}\cos y-e^{\cos y})=-2e^{\cos y}(\cos y-1)$

$x=\frac{1}{e^{\cos y}}\left(-4e^{\cos y}(\cos y-1)+C\right)=-4(\cos y-1)+\frac{C}{e^{\cos y}}=X$

(تمرین)

$y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}\longrightarrow \frac{2y\ln y+y-x}{y}=\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}$

$p(y)=\frac{1}{y}$

$2\ln y+1-\frac{x}{y}=\frac{dx}{dy}\longrightarrow \frac{dx}{dy}+\left(\frac{1}{y}\right)x=(1+2\ln y) \qquad q(y)=1+2\ln y$

$\mu_{(y)}=e^{\int\frac{dy}{y}}=y\longrightarrow x=\frac{1}{y}\left[\int y(1+2\ln y)dy+c\right]=\frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}y^2+c+2\int y\ln y\,dy\right]$

$(*)\left(\int y\ln y\,dy\rightarrow\begin{cases}\ln y=u\rightarrow \frac{dy}{y}=du\rightarrow \int ue^{2u}du=\frac{u}{2}e^{2u}-\frac{e^{2u}}{4}=\frac{y^2}{2}\ln y-\frac{y^2}{4}\\ y=e^{u}\end{cases}\right)$

$\boxed{x=\frac{c}{y}+y\ln y}$