جلسه دوم

معادله خطی مرتبه اول

حل و تحلیل

مقدمه مهمترین معادله در درس معادلات دیفرانسیل معمولی، معادله خطی مرتبه اول می‌باشد، چون :

- به طور مستقیم در مدلسازی مسایل زیادی ظاهر می‌شود.
- حل و تحلیل جواب آن به معادلات خطی مراتب بالاتر و دستگاه معادلات قابل تعمیم است.
- معادلات مراتب بالاتر به صورت دستگاه معادلات مرتبه اول قابل نمایش است.

معرفی معادله خطی مرتبه اول

هرگاه یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به متغیرهای y و $\acute{y}$ درجه اول باشد، یک معادله خطی مرتبه اول نامیده می‌شود، یعنی

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{۱}$$

توجه. به دو دلیل حل معادلات مرتبه اول را با حل معادله خطی مرتبه اول آغاز می کنیم :

دلیل اول. در مدل‌سازی مسایل عملی زیاد ظاهر می‌شود. همانند معادلات رشد و زوال جمعیت و مساله سقوط که در درس جلسه اول مدل شده‌اند.

دلیل دوم. ایده‌های حل آن را می‌توان به روش جدایی پذیری و عامل انتگرال ساز برای حل معادلات غیرخطی مرتبه اول گسترش داد. همچنین ساختار جواب آن به معادلات خطی مرتبه دوم و بالاتر نیز قابل تعمیم است.

صورت متعارف معادله اگر طرفین صورت خطی ضمنی (۱) را بر $a(x)$ تقسیم کنیم، صورت متعارف آن حاصل می‌شود.

$$y' + f(x)y = r(x) \tag{۲}$$

که در آن $f(x)$ و $r(x)$ توابع معلومی از متغیر مستقل x هستند و $y(x)$ مجهول است.

نکته ۱ دو تابع معلوم r و f در عمل به ترتیب به ضریب تناسب و تابع بار (که تاثیر عوامل خارجی می باشد) معروف هستند.

نکته۲ اگر تابع بار r هم ارز صفر باشد، معادله خطی همگن نامیده می شود.

نکته۳ اگر f مستقل از x باشد، معادله با ضرایب ثابت می‌باشد.

تفاوت صورت معادله خطی و غیرخطی‌ها معادله خطی مرتبه اول یک صورت متعارف دارد، اما غیرخطی‌ها می‌توانند بی‌نهایت صورت مختلف داشته باشند.

مثال ۱. دو معادله زیر **معادله خطی مرتبه اول** هستند .

۱. $\frac{dy}{dx} + 2y = x + 1$ 　　　۲. $4t\dot{x} + 2x = t$

معادله اول یک معادله خطی y برحسب x و معادله دوم یک معادله خطی x بر حسب t است.

مثال ۲. دو معادله زیر **غیرخطی مرتبه اول** هستند.

۱. $(1-y)y' + 2y = e^{-x}$ 　　　۲. $y' - \sin y = x^2$

جملات $(1-y)y'$ و $\sin y$ عوامل غیرخطی در این دو معادله هستند.

توجه : به بیانی ساده هر معادله‌ای که خطی نباشد، غیرخطی است.

حل معادله خطی مرتبه اول روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول ضمنی (۱) یا متعارف (۲) وجود دارد که دو مورد مهم آن عبارتند از :

روش لایب نیتس (عامل انتگرال ساز) : بر اساس ضرب طرفین در یک عامل و تعیین تابع اولیه با انتگرال از طرفین بنا می‌شود. این روش در ادامه به عامل انتگرال ساز توسعه می‌یابد.

روش لاگرانژ (تغییر پارامتر) : ابتدا حل معادله همگن متناظر، سپس با تغییر پارامتر حل غیرهمگن آن به دست می‌آید. روش حل صورت همگن آن در ادامه به روش جدایی پذیری توسعه می یابد.

توجه۱. روش لایب نیتس ساده‌تر است، برای مرتبه اول قابل استفاده است،

توجه۲. روش لاگرانژ قابل تعمیم به معادلات خطی مراتب دوم و بالاتر است.

روش لایب نیتس(ضرب در عامل انتگرال ساز)

حل معادله خطی مرتبه اول با یک انتگرال گیری ساده از طرفین حاصل نمی‌شود (چرا؟).

- باید یک عامل پیدا کنیم به طوری که با ضرب طرفین معادله خطی (۲) در آن، سمت چپ معادله حاصل را بتوان به صورت مشتق حاصل ضرب دو عبارت نوشت، یعنی $u'v + v'u = (uv)'$.

- به این صورت که بتوان از طرفین انتگرال گرفت، جواب معادله را به دست آورد.

- برای این منظور باید عاملی یافت که مشتق آن مضرب $f(x)$ در خودش باشد. این عامل $e^{\int f(x)dx}$ است، که با ضرب طرفین معادله خطی در آن خواهیم داشت:

$$y'e^{\int f(x)dx} + f(x)e^{\int f(x)dx}y = r(x)e^{\int f(x)dx}$$

- دقت کنید، سمت چپ مشتق $ye^{\int f(x)dx}$ می‌باشد، لذا می‌توان نوشت :

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int f(x)dx}) = r(x)e^{\int f(x)dx}$$

- اکنون با یک انتگرال گیری از طرفین خواهیم داشت :

$$ye^{\int f(x)dx} = \int r(x)e^{\int f(x)dx}dx + c$$

لذا جواب معادله عبارت است از جواب کلی معادله مرتبه اول :

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\int r(x)e^{\int f(x)dx}dx + c\,e^{-\int f(x)dx}$$

نکته ۱. معمولاً از این فرمول بدون روش حل آن برای جواب (دو قسمت) معادله استفاده می کنند.

نکته ۲. اگر $r(x) = 0$ جواب قسمت همگن برابر است $y_h(x) = c\,e^{-\int f(x)dx}$.

نکته ۳. جواب قسمت غیرهمگن $y_p(x) = e^{-\int f(x)dx}\int r(x)e^{\int f(x)dx}dx$ پاسخ به تابع بار $r(x)$ است.

مثال. معادله $y' + 2y = 3$ را حل می‌کنیم.

حل ملاحظه می‌کنید که یک معادله خطی نسبت به $y(x)$ است که در آن $f(x) = 2$ و $r(x) = 3$.

حال با ضرب طرفین در عامل $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ خواهیم داشت :

$$y'e^{2x} + 2e^{2x}y = e^{2x}3$$

با فاکتور مشتق سمت چپ داریم $\left(ye^{2x}\right)' = 3e^{2x}$، که با انتگرال از طرفین جواب حاصل می‌شود

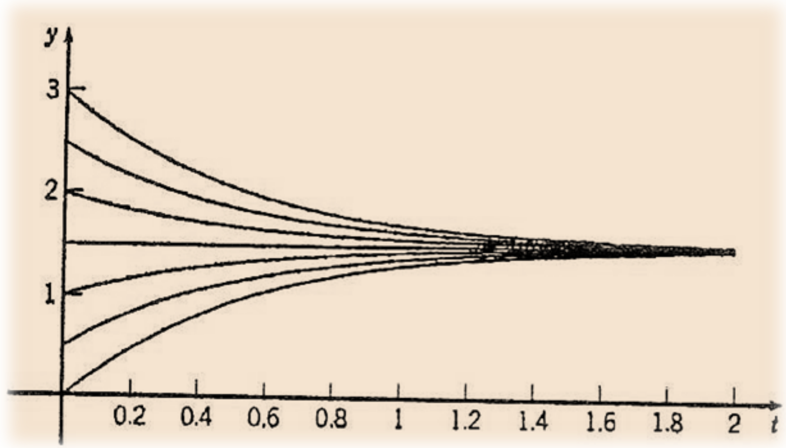
$$y(x) = ce^{-2x} + \frac{3}{2}$$

توجه۱. چند نکته مهم در مورد این معادله و جواب آن وجود دارد که باید خوب درک کنید.

نکته ۱. جواب عمومی معادله به صورت یک تابع صریح $y(x) = ce^{-2x} + \frac{3}{2}$ میباشد. در صورتی که تجربه خواهید نمود برای معادلات غیرخطی چنین نمی‌باشد.

نکته ۲. جواب عمومی از دو قسمت، جواب قسمت همگن $y_h(x) = ce^{-2x}$ و پاسخ به تابع بار ثابت $r(x) = 3$ به صورت $y_p(x) = \frac{3}{2}$، تشکیل می‌شود.

نکته ۳ . ملاحظه می‌کنید که جواب‌های عمومی به سمت جواب خصوصی متمایل می‌شوند. به این دلیل به جواب قسمت همگن جواب گذرا و به جواب قسمت غیرهمگن یا پاسخ به تابع بار جواب پایدار می‌نامند.



توجه۲. این یک معادله به ضریب ثابت است، یعنی تابع تناسب برابر $f(x)=2$ می‌باشد. تعیین جواب خصوصی این نوع معادلات گاهی بسیار ساده قابل تعیین است.

نکته چون تابع بار ثابت است، برای یک سیستم خطی منطقی است که پاسخ به آن باید یک تابع ثابت $y_p(x)=A_0$ باشد. بعد از جایگزینی این حدس در معادله ضریب نامعین $A_0=1/5$ به دست می‌آید. ملاحظه می‌کنید همان جواب $y_p=1/5$ حاصل می‌شود.

مثال. حل معادله $ty' + 2y = 4t^2$ به همراه شرط اولیه $y(1) = 2$.

حل یک معادله خطی بر حسب $y(t)$ است که در آن $f(t) = 2 / t$ و $r(t) = 4t$.

با ضرب طرفین در عامل $F(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2\ln|t|} = t^2$ خواهیم داشت :

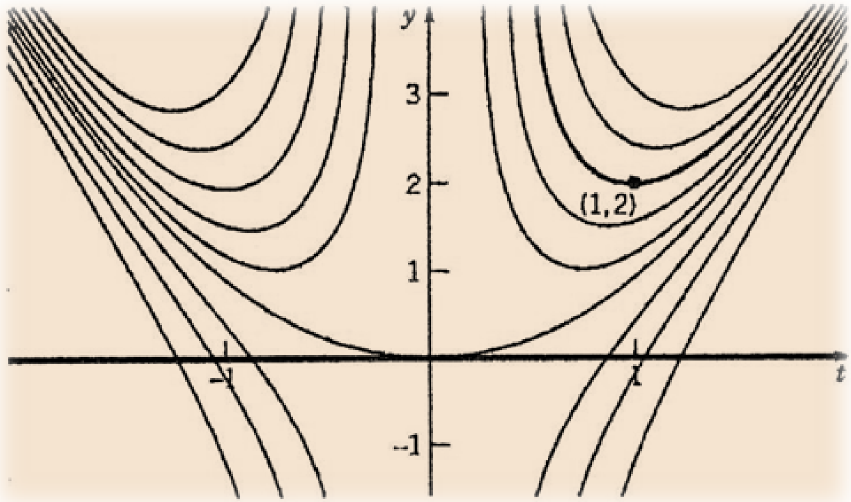
$$t^2 y' + 2ty = \left(t^2 y\right)' = 4t^3$$

حال با انتگرال از طرفین جواب عمومی حاصل میشود

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

با استفاده از شرط $y(1) = 2$ خواهیم داشت $c = 1$. لذا جواب خصوصی برابر $y = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ می‌باشد.

توجه جواب عمومی معادله به ازای $t = 0$ تعریف نشده است شکل زیر را ملاحظه نمایید. لذا بهتر بود صورت معادله روی بازه‌ای که شامل این نقطه نیست تعریف گردد.



روش لاگرانژ (یا تغییر پارامتر)

در اغلب مراجع حل معادله خطی با روش لاگرانژ شروع می‌شود. هر چند ما روش ساده تر لایب نیتس را ترجیح داده‌ایم. ولی به دلیل استفاده آن در حل معادلات خطی مراتب بالاتر آن را بیان می‌کنیم.

$$y' + f(x)y = r(x)$$

همان طور که می‌دانید، جواب این معادله مجموع دو جواب معادله است.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

که در آن $y_h(x)$ جواب قسمت همگن (جواب گذرای سیستم) و $y_p(x)$ جواب قسمت غیرهمگن (جواب پایدار سیستم) پاسخ به تابع بار $r(x)$ است.

گام اول معادله همگن متناظر، یعنی $y' + f(x)y = 0$ را حل می‌کنیم :

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y \qquad , \qquad \frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

با انتگرال از طرفین جواب معادله همگن به دست می‌آید.

$$y_h(x) = c\,e^{-\int f(x)dx}$$

گام دوم جواب قسمت غیرهمگن حال پاسخ به تابع بار را به صورت زیر در نظر میگیریم.

$$y_p(x) = c(x)\,e^{-\int f(x)dx}$$

که برای تعیین پارامتر $c(x)$ در آن، این جواب را در معادله غیرهمگن جایگزین می‌نماییم.

بعد از جایگزینی خواهیم داشت :

$$c'(x)e^{-\int f(x)dx} - f(x)c(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)c(x)e^{-\int f(x)dx} = r(x)$$

که با حذف جمله‌های قرینه داریم :

$$c'(x)e^{-\int f(x)dx} = r(x) \quad \text{یا} \quad c'(x) = r(x)e^{\int f(x)dx}$$

که با انتگرال از طرفین پارامتر $c(x) = \int r(x)e^{\int f(x)dx}dx$ به دست می‌آید. لذا جواب قسمت غیرهمگن به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$y_p(x) = e^{-\int f(x)dx} \int r(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

مثال : به عنوان تمرین مثال قبلی را با این روش حل کنید.

مطالب بیشتر در مورد معادله خطی

پیوستگی و همواری جواب معادله توجه داشته باشید جواب معادله همواره، مشتق پذیر است حتی اگر توابع $r(x)$ و $f(x)$ ناپیوسته باشند.

مثال حل مساله زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{dy}{dx}+y=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x\le 1\\ 0 & , \quad 1<x\end{cases} \quad , \quad y\big(0\big)=0$$

حل چون تابع بار دو ضابطه‌ای است، دو معادله را به صورت جداگانه حل می‌نماییم.

حل معادله اول

$$\frac{dy}{dx}+y=1, \qquad 0\le x\le 1$$

که به طور معادل با ضرب در عامل e^x،

$$\frac{d}{dx}\big(e^x y\big)=e^x$$

با انتگرال‌گیری از معادله اخیر و حل آن برحسب y داریم،

$$y(x)=1+c_1e^{-x}$$

از آنجایی که $y\left(0\right) = 0$، باید داشته باشیم $c_1 = -1$. در نتیجه جواب :

$$y = 1 - e^{-x} \ , \qquad 0 \le x \le 1$$

حل معادله دوم برای $x > 1$ حل معادله $y' + y = 0$ منجر به جواب $y = c_2 e^{-x}$ می‌شود.

از این رو می‌توان جواب را به صورت زیر نوشت.

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad 0 \le x \le 1 \\ c_2 e^{-x} & , \quad 1 < x \end{cases}$$

حال برای آن که y تابعی پیوسته باشد، بایستی $\lim_{x \to 1^+} y\left(x\right) = y\left(1\right)$ لذا نتیجه می‌شود،

$$c_2 e^{-1} = 1 - e^{-1} \quad \text{یا} \quad c_2 = e - 1$$

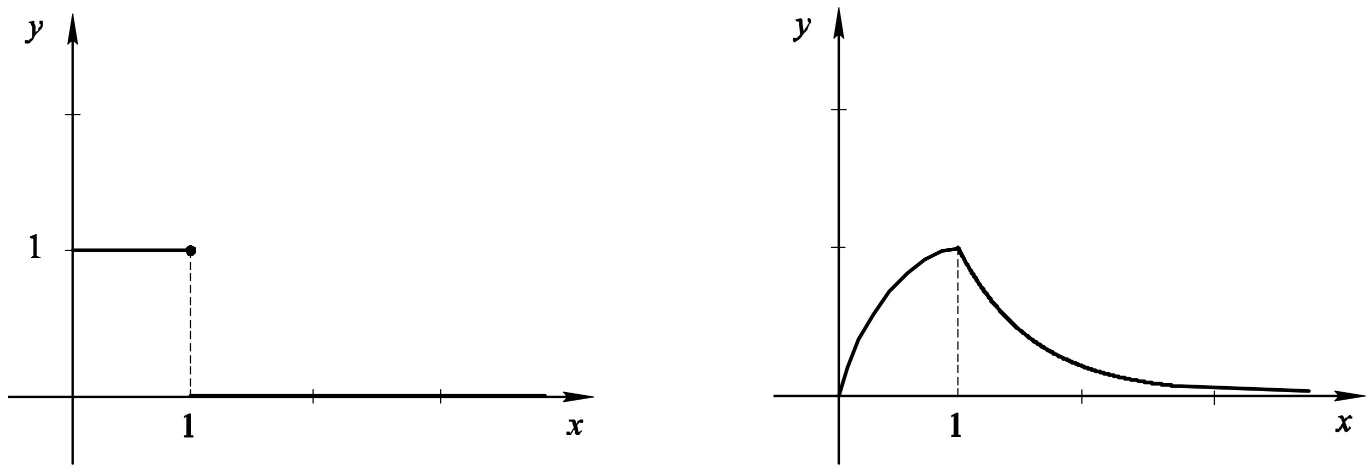
همان‌طور که نمودار در شکل زیر نشان می‌دهد، تابع جواب

$$y=\begin{cases}1-e^{-x} & , \quad 0\le x\le 1\\ (e-1)e^{-x} & , \quad 1<x\end{cases}$$

روی بازه نیم باز $\left[0,\infty\right)$ پیوسته است.

■

توجه برای مقایسه و درک بهتر نمودارهای تابع بار ناپیوسته (سمت چپ) و پاسخ پیوسته (سمت راست) به آن آمده است .



نکته. (معادله خطی معکوس) گاهی معادله نسبت به متغیر وابسته خطی نمی‌باشد، بلکه با تعویض متغیرهای مستقل و وابسته معادله خطی می‌شود.

مثال. معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$$

حل ملاحظه می‌کنید که معادله نسبت به y خطی نیست، اما با مشتق معکوس معادله خطی نسبت x به داریم :

$$\frac{dx}{dy} - x = y^2$$

که با حل آن خواهیم داشت :

$$x = ce^y - y^2 - 2y - 2$$

معادله خطی با تغییر متغیر گاهی معادله به طور مستقیم خطی نمی‌باشد، اما نسبت به یک تغییر متغیر خطی می‌شود.

مثال. معادله زیر را حل کنید.

$$y' \cos y + \sin y = e^{-x}$$

حل. معادله نسبت به y خطی نیست، اما نسبت به $\sin y$ خطی است، لذا با تغییر متغیر $u = \sin y$ داریم

$$\frac{du}{dx} - u = e^{-x}$$

که با حل آن خواهیم داشت (پاسخ به تابع بار را با سعی و خطا بیابید) :

$$u = ce^{-x} + u_p$$

معادلات شبه‌خطی معروف

یک دسته از معادلات غیرخطی مرتبه اول مهم در عمل داریم که به معادله خطی خیلی نزدیک هستند.

معادله برنولی. صورت کلی به شکل زیر است که $\alpha \neq 0,1$:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = y^{\alpha} r(x)$$

با تقسیم طرفین بر y^{α} نسبت به $y^{1-\alpha}$ یک معادله خطی می‌باشد، که با انتخاب $u = y^{1-\alpha}$ خواهیم داشت:

$$\frac{du}{dx} + (1-\alpha)f(x)u = (1-\alpha)r(x)$$

تمرین. معادله زیر یک معادله برنولی با $\alpha = 2$ است، می توانید آن را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

توجه. گاهی معادله نسبت به متغیر وابسته برنولی نمی‌باشد، بلکه با تعویض متغیرهای مستقل و وابسته معادله برنولی می باشد، که به **معادله برنولی معکوس** معروف است.

معادله ریکاتی. صورت کلی به شکل زیر است که در آن $r(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = y^2 r(x) + g(x)$$

برای حل معادله ریکاتی باید یک جواب از معادله مانند $y = y_1(x)$ را داشته باشیم، که با تغییر متغیر

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{du}{dx} + (2y_1(x)r(x) - f(x)g(x))u = -r(x)$$

توجه. مشکل حل معادله ریکاتی این است که حدس یک جواب $y = y_1(x)$ با روش سعی و خطا گاهی بسیار مشکل است.

تمرین. معادله زیر یک معادله ریکاتی است که یکی از جوابهای آن $y = x$ می باشد.

$$\frac{dy}{dx} - (1-2x)y = y^2 + (x^2 - x + 1)$$

معادله کلرو. صورت کلی به شکل زیر است :

$$y = xy' + f(y')$$

برای حل معادله کلرو ابتدا $p = y'$ در نظر می‌گیریم، یعنی ،

$$y = xp + f(p)$$

حال با مشتق از طرفین نسبت به x خواهیم داشت :

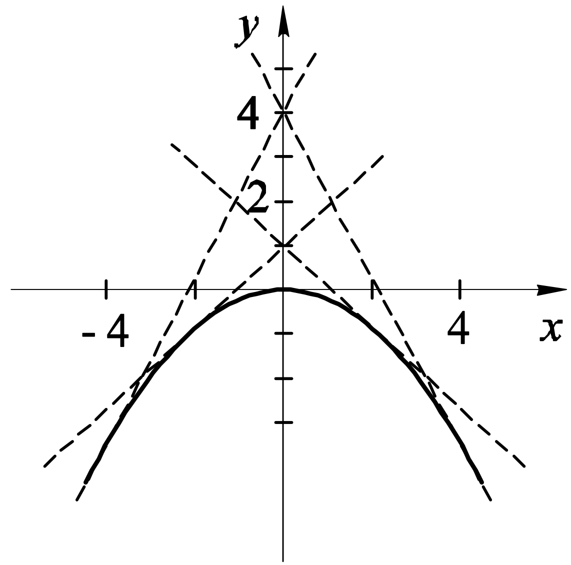
$$(x + f'(p))p' = 0$$

لذا با $p = c$ ، جواب عمومی معادله کلرو $y = xc + f(c)$ می باشد.

همچنین جواب غیرعادی معادله کلرو از حل $x + f'(p) = 0$ حاصل می‌شود، که پوش دسته جواب عمومی است.

مثال. معادله کلرو $y = xy' + y'^2$ دارای جواب عمومی $y = xc + c^2$ میباشد،

و پوش این دسته منحنی $y = -\dfrac{x^2}{4}$ است.



نکته صورت کلی معادله کلرو معادله لاگرانژ می‌باشد که به شکل زیر است.

$$y = xg(y') + f(y')$$

روند حل آن کاملا شبیه به حل معادله کلرو می‌باشد.

مجموعه تمرین های منتخب.

تمرین. جواب خصوصی معادله $(x+2)y' + y = f(x)$ را تعیین کنید، که در آن (دانشگاه تهران).

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 4 & , \quad 2 < x \end{cases} \quad , \quad y\big(0\big) = 4$$

تمرین. معادله (برنولی) $(1+x^2)y' = xy(1+xy)$ را حل کنید (دانشگاه تهران).

تمرین. معادله(کلرو) $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$ که در آن a ثابت می‌باشد، را حل کنید (دانشگاه تهران).

تمرین. معادله(کلرو) $y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$ را حل کنید (دانشگاه تهران).

تمرین. معادله(ریکاتی) زیر را حل کنید، با شرط این که $y_1 = \dfrac{1}{x}$ یک جواب آن باشد. (دانشگاه تهران).

$$y' = -\frac{2}{x^2} + y^2$$

تمرین. معادله(ریکاتی) زیر را حل کنید، با شرط این که $y_1 = 1$ یک جواب آن باشد. (دانشگاه تهران).

$$(1-x^3)y' + y^2 + x^2y - 2x = 0$$

تمرین. معادله (لاگرانژ) $y'^2 - 3xy' - 3x = 0$ (دانشگاه تهران).

تمرین. معادله (لاگرانژ) $y = x(y'+1) + y'^2 + y' - 1$ (دانشگاه تهران).

تمرین. معادله زیر را حل کنید و جواب غیر عادی (ویژه) آن را بیابید (دانشگاه امیرکبیر).

$$2xy' + y'^3y^2 - y = 0$$

تمرین. با استفاده از تغییر متغیر مناسب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل کنید سپس حل کنید (دانشگاه امیرکبیر).

$$(2x\cos^2 y)dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$$

تمرین. با فرض $y_1 = 1 - 4x$ یکی از جواب‌های معادله زیر باشد، آن را حل کنید (دانشگاه امیرکبیر).

$$y' = y^2 + 8xy + 16x^2 - 5$$

تمرین. معادله مرتبه اول $y = xy' + \frac{1}{1+y'}$ را حل کنید (دانشگاه تفرش).