سری ها

فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله باشد.

دنباله‌ی $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= s_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\
s_3 &= s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را یک سری نامیم.

به علاوه، $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ را مجموع جزئی iام

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ گوییم.

همگرایی و واگرایی سری

◀ تعریف: سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ را همگرا می نامیم هرگاه، دنباله‌ی مجموع‌های جزئی آن همگرا باشد و در غیر این‌صورت آن را واگرا گوییم.

◀ تعریف: به a_i، جمله‌ی عمومی سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ گوییم.

سری هندسی

تعریف: فرض کنید $a,r\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$. سری $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ را سری هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت r گوییم.

قضیه: برای سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ داریم:

الف) اگر $|r|<1$، آن‌گاه سری هندسی به $\frac{a}{1-r}$ همگراست.

ب) اگر $|r|\geq 1$، آن‌گاه سری واگراست.

مثال ۱:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ r=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 :\text{همگراست به}$$

مثال ۲:

$$\sum^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ r=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow |r|>1 \Rightarrow \text{واگراست}$$

اثبات قضیه‌ی قبل:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$$

$$= a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \quad ; \quad r \neq 1$$

- به وضوح، اگر $r=1$، سری واگرا است.

- اگر $|r|>1$، از رابطه‌ی فوق، به وضوح سری واگرا است.

- اگر $|r|<1$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$ (سری همگرا است).

* سری تلسکوپی :

فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا به a باشد و

قرار دهید : $b_t = a_{t+1} - a_t \quad , \quad \forall t \geq 1$.

دراین صورت، سری $\sum_{t=1}^{\infty} b_t$ همگراست

و داریم :

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} b_t$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} b_t = a - a_1$$

سری $\sum_{t=1}^{\infty} b_t$ را سری تلسکوپی می‌نامیم.

شرط لازم همگرایی سری

قضیه: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اثبات:

داریم: $a_n = S_n - S_{n-1}$. پس:

$$\left(\lim_{n\to\infty} S_n = s\right) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s - s = 0$$

نتیجه: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال: سری‌های زیر واگرا هستند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$$

قضایای همگرایی

قضیه: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست، اگروتنهااگر برای هر عدد طبیعی N، $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد

قضایای همگرایی

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به ترتیب همگرا به S و R باشند، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$ همگرا به $S \pm R$ است

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$ واگراست.

* قضیه: فرض کنید سری های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به ترتیب به A و B همگرا باشند، و $c \in \mathbb{R}$.

در این صورت داریم:

(1) سری $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ به cA همگرا است.

(2) اگر برای هر $n \geq 1$، داشته باشیم: $a_n \leq b_n$، آنگاه: $A \leq B$.

Scanned with CamScanner

*گزاره: فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله باشد و Nای

موجود باشد که برای هر $n \geq N$، داشته باشیم: $a_n \geq 0$.

در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است یا واگرا به $+\infty$.

اثبات:

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$$

$\Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow$ دنباله‌ی (S_n) صعودی است.

- اگر (S_n) کران‌دار باشد $\xRightarrow{\text{از قضیه‌ای}}$ همگرا.

- اگر (S_n) کران‌دار نباشد $\Rightarrow$ واگرا به $+\infty$.

* آزمون انتگرال

فرض کنید : $f:[a,+\infty)\to \mathbb{R}$

تابعی پیوسته، نزولی و نامنفی باشد که a عدد صحیح مثبت

است. اگر برای هر عدد صحیح $i \geq a$، قرار دهیم :

$$a_i = f(i)$$

در این صورت داریم :

$$\sum_{n=a}^{\infty} a_n \text{ همگراست } \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ همگراست.}$$

* **نتیجه:** سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ همگرا است و برای $p \leq 1$ واگرا است.

اثبات: تعریف می‌کنیم $f(x) = \frac{1}{x^p}$ روی $[1, +\infty)$.

f روی این بازه، نزولی، مثبت و پیوسته است.

پس طبق آزمون انتگرال، نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ و انتگرال ناسره‌ی $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ هم‌رفتارند و بنابراین، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌گردد.

مثال۲:سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ برای $p > 1$ همگرا و برای $0 < p \leq 1$ واگراست.

حل: اگر $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^p}$ ، آن‌گاه $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p}$ برای $p > 1$ همگرا و برای $0 < p \leq 1$ واگراست.

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p} \quad ; \quad x \geq 2$$

f بر $[2, +\infty)$ پیوسته، نامنفی و نزولی است.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \xrightarrow[dU = \frac{dx}{x}]{U = \ln x} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$$

$p > 1$ همگرا

$p \leq 1$ واگرا

آزمون مقایسه

قضیه(آزمون مقایسه): : اگر N عددی طبیعی و k عدد حقیقی مثبتی باشد که: $\forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq kb_n$ ، در این‌صورت:

الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

مثال: همگرا یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{n^2}$$

حل:

$$0 \leq \frac{1+\sin(n)}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

اما $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست، پس از آزمون مقایسه

داریم: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{n^2}$ همگرا ست.

مثال ۲: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^{n+1}}$ $\quad a_n=\frac{1}{n3^{n+1}}, b_n=\frac{1}{3^{n+1}}\Rightarrow 0\le a_n\le b_n$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ یک سری هندسی همگراست، پس $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

* آزمون مقایسه حدی:

فرض کنید (a_n) و (b_n) دنباله‌های مثبت باشند و

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. در این صورت، داریم:

① اگر $0 \neq l < \infty$، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ هم‌رفتارند.

② اگر $l = 0$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

③ اگر $l = +\infty$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال ۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ $\qquad$ $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

اما دیدیم، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست و چون و$0 < L < \infty$، پس طبق آزمون مقایسه‌ی حدی سری فوق نیز واگر است.

مثال : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+2)^{\frac{3}{2}}}$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n^2+2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n^2+2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)^{\frac{3}{2}}=1$$

اما $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ همگراست و چون $0<L<\infty$ ، پس سری داده شده نیز همگراست.

* آزمون نسبت :

فرض کنید (a_n) یک دنباله باشد و

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

در این صورت داریم :

① اگر $0 \le \rho < 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

② اگر $\rho > 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

③ اگر $\rho = 1$ $\Leftarrow$ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow \rho = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{واگراست.} \\ b_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow \rho = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{همگراست.} \end{cases}$$

مثال۱: سری همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(99)^n}{n!}\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(99)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(99)^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{99}{n+1}=0 \Rightarrow$$

مثال: همگرا یا واگرا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n 100^n}{n!}}_{a_n}$$

حل:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} 100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n 100^n}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 100^{n+1} n!}{(-1)^n 100^n (n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0 < 1 \rightarrow$$ سری همگراست.

مثال۳:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1 \Rightarrow$$

سری همگراست

مثال۴:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4>1 \Rightarrow$$

سری واگراست

مثال: نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

حل:

$$y_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$$

$$\to \lim y_n = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} Ln\, y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Ln(n) \overset{\text{قضیه رشد}}{=\!=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = e^0 = 1$$

* آزمون ریشه:

فرض کنید (a_n) یک دنباله باشد و

$$r = \lim_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

در این صورت، داریم:

① اگر $0 \leq r < 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

② اگر $r > 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

③ اگر $r = 1$ $\Leftarrow$ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال:
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow r = 1 \ , \ \sum \frac{1}{n} \text{ واگرا} \\ b_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow r = 1 \ , \ \sum \frac{1}{n^2} \text{ همگرا} \end{cases}$$

مثال:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$ $\quad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0 \Rightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ $\quad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{3}{1} = 3 > 1 \Rightarrow$ سری واگراست

مثال: همگرا یا واگرا؟

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

حل:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1$$

پس I همگرا است.

تعریف: هرگاه $a_n \geq 0$ ، به $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ سری متناوب گوییم.

قضیه(آزمون لایبنیتز): : هرگاه دنباله‌ی a_n مثبت، نزولی و همگرا به صفر باشد، آن‌گاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

مثال: همگرا یا واگرا؟ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

حل: طبق آزمون لایب‌نیتز، همگراست، چون $a_n = \frac{1}{n}$ مثبت، نزولی و همگرا به صفر است.

*گزاره: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ایده‌ی اثبات: قرار دهید: $b_n = a_n + |a_n|$

به وضوح: $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

از آزمون مقایسه و قضایای مربوط به همگرایی سری‌ها، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

همگرایی مطلق

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق می‌نامیم، هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ یک سری همگرا باشد.

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ یک سری همگرای مطلق است.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مشروط نامیم، هرگاه همگرا باشد اما همگرای مطلق نباشد.

◁ مثال ۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

چون دنباله‌ی $\frac{1}{n}$ نزولی و مثبت و همگرا به صفر است طبق آزمون لایبنیتز سری فوق همگرا و چون همگرای مطلق نیست لذا همگرای مشروط است.

◁ مثال ۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

دنباله‌ی $\frac{1}{\sqrt{n}}$ نزولی و مثبت و همگرا به صفر است پس سری همگراست و چون سری همگرای مطلق نیست پس همگرای مشروط است.

◁ مثال ۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$

در این مثال هم از آزمون لایبنیتز نتیجه می‌شود سری همگراست و هم از همگرایی مطلق سری نتیجه می‌شود که سری همگراست.