ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

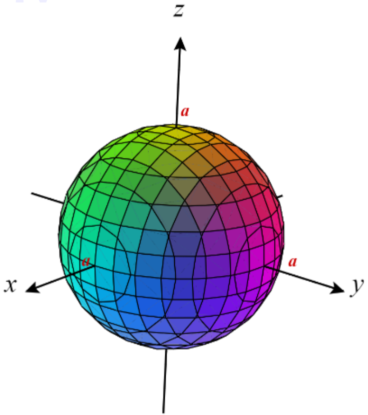
توابع چندمتغیره

قبل از تعریف دقیق یک تابع چندمتغیره، برخی سطوح (رویه‌های) درجه‌ی دوم را مرور می‌کنیم.

کره:

کره با مرکز (x_0, y_0, z_0) و شعاع a: $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2$$

کره با مرکز مبدأ و شعاع a: $$x^2+y^2+z^2 = a^2$$



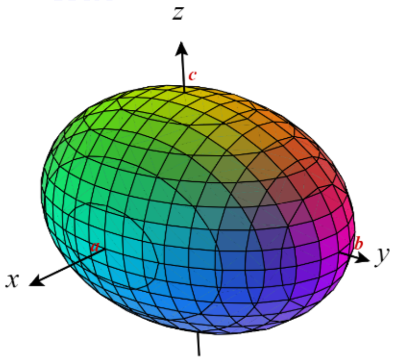
بیضی‌گون:

بیضی‌گون با مرکز (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

بیضی‌گون با مرکز مبدأ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



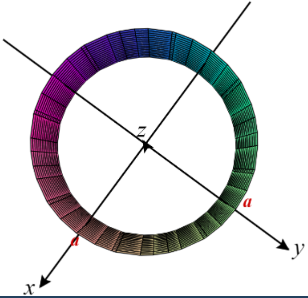
استوانه:

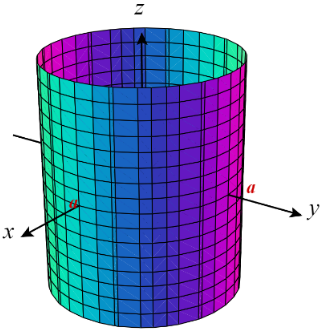
استوانه‌ی قائم با متغیر آزاد z که مقطع آن دایره‌ای به شعاع a و مرکز (x_0, y_0) است:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

استوانه‌ی قائم با متغیر آزاد z که مقطع آن دایره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ است:

$$x^2 + y^2 = a^2$$



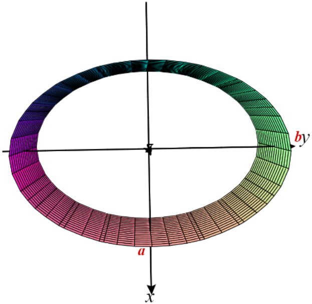


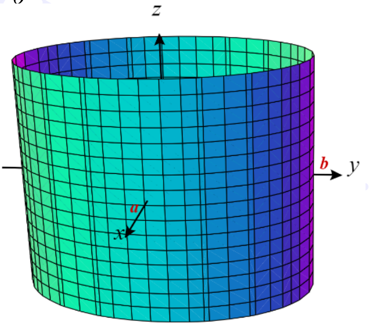
استوانه‌ی بیضوی با متغیر آزاد z که مقطع آن یک بیضی با مرکز (x_0, y_0) است:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

استوانه‌ی بیضوی با متغیر آزاد z که مقطع آن یک بیضی با مرکز مبدأ است:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



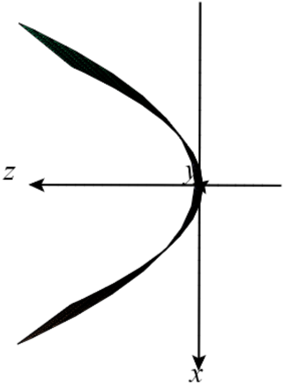


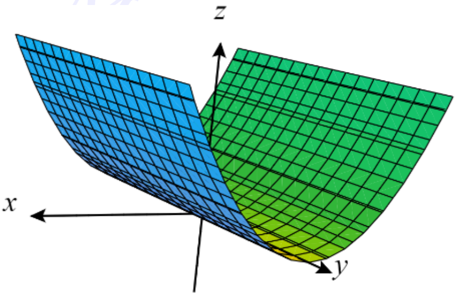
استوانه‌ی سهموی با متغیر آزاد y که مقطع آن یک سهمی با رأس (x_0, z_0) است :

$$z - z_0 = \alpha(x - x_0)^2, \quad \alpha \neq 0$$

استوانه‌ی سهموی با متغیر آزاد y و $\alpha = 1$، که مقطع آن یک سهمی با رأس مبدأ است:

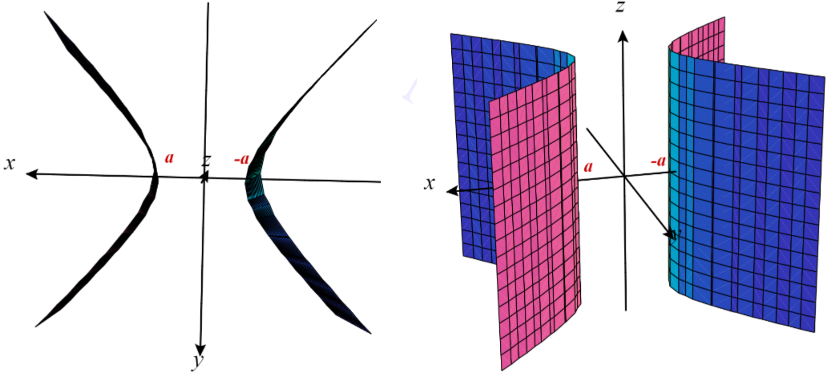
$$z = x^2$$





استوانه‌ی هذلولوی با متغیر آزاد z که مقطع آن یک هذلولی با مرکز مبدأ است :

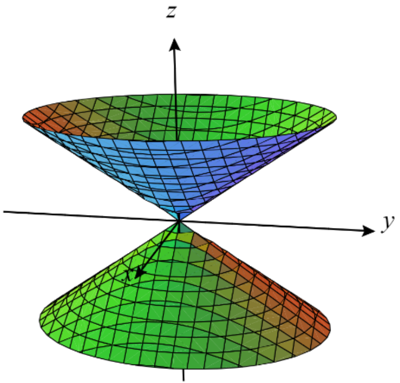
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



مخروط:

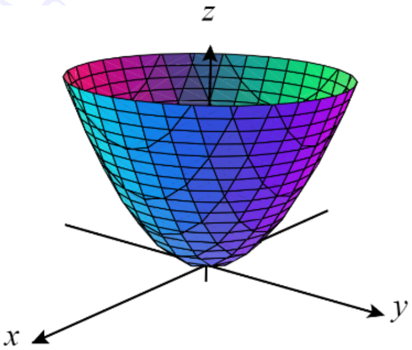
با قاعده‌ی بیضی: $$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

با قاعده‌ی دایره: $$z^2 = x^2 + y^2$$

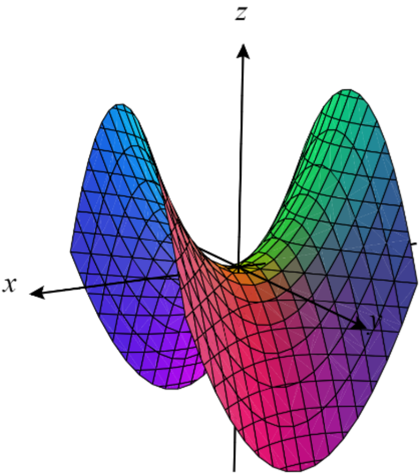


سهمی‌گون:

سهمی‌گون بیضوی: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



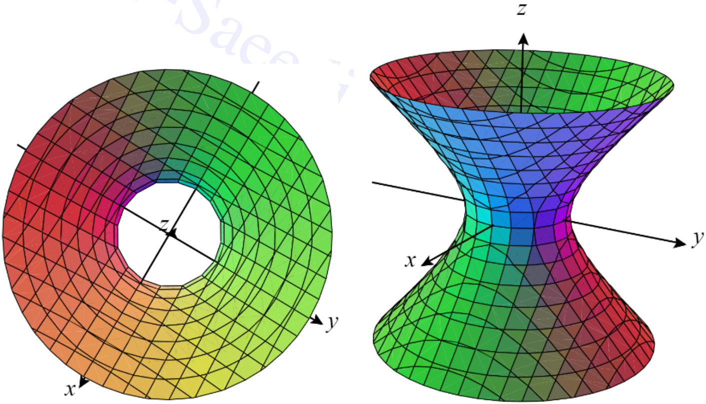
سهمی‌گون هذلولوی: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

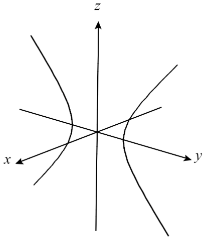


هذلولی‌گون:

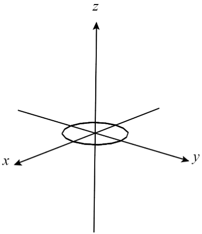
هذلولی‌گون یک‌پارچه:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

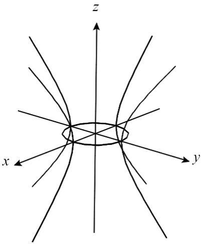




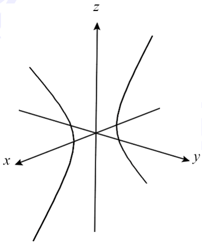
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

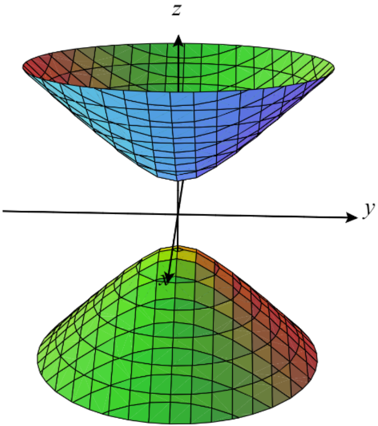


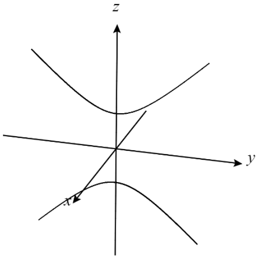
مقاطع در کنار هم



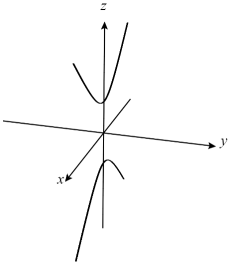
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولی‌گون دوپارچه: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ یا $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

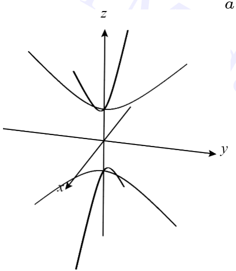




$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

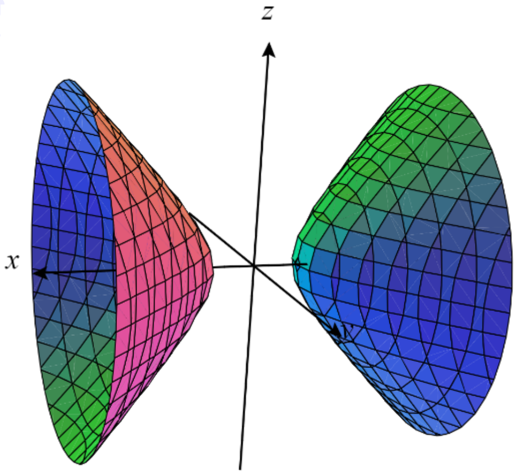


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



هر دو مقطع بالا درکنار هم

هذلولی‌گون دوپارچه: $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ یا $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



تعریف توابع چندمتغیره

فرض کنید $1 \geq m$ و $2 \geq n$. تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را یک تابع چندمتغیره می‌نامیم، که در آن

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

و به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- با توجه به اینکه تحلیل f_iها به تحلیل f کمک می‌کند، غالب اوقات حالت $m = 1$ را در نظر می‌گیریم.

مجموعه‌های تراز و نمودار توابع چندمتغیره

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است.

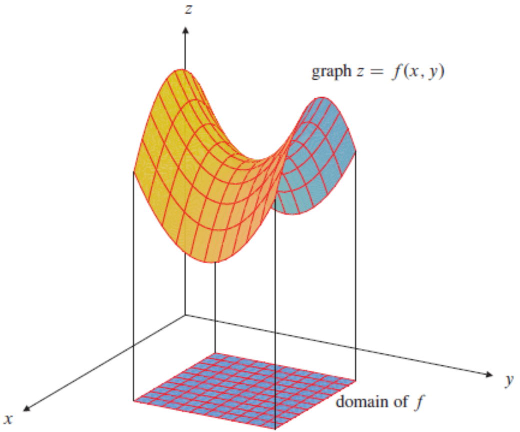
- به‌ازای هر $c \in \mathbb{R}$، مجموعه‌ی تراز منسوب به c را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$$

- نمودار f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in D \times \mathbb{R} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

مثالی از نمودار یک تابع دو متغیره:



مثال

مجموعه‌های تراز تابع زیر را بیابید:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad z=f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad a,b>0$$

پاسخ: داریم:

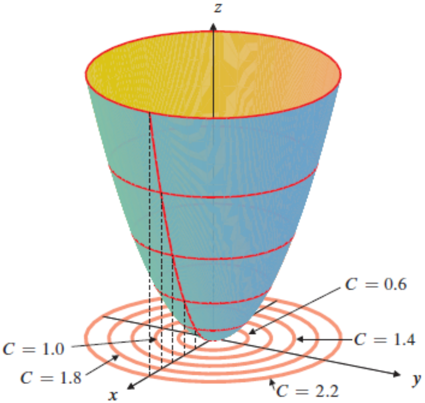
$$f^{-1}(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c\right\}$$

بنابراین، به‌ازای $c<0$، $f^{-1}(c)=\emptyset$. واضح است که به‌ازای $c=0$، داریم $f^{-1}(c)=\{(0,0)\}$. اما به‌ازای $c>0$، $f^{-1}(c)$ یک بیضی است. همچنین، نمودار f به صورت زیر است:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right\}$$

ادامه‌ی مثال

نمودار و بعضی از مجموعه‌های تراز f:



مثال

مجموعه‌های تراز تابع زیر را بیابید:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad z=f(x,y)=x^2-y^2$$

پاسخ: داریم:

$$f^{-1}(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=c\}$$

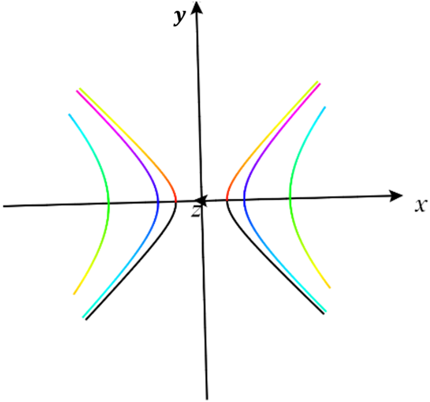
سه حالت مختلف به‌ازای c در نظر می‌گیریم.

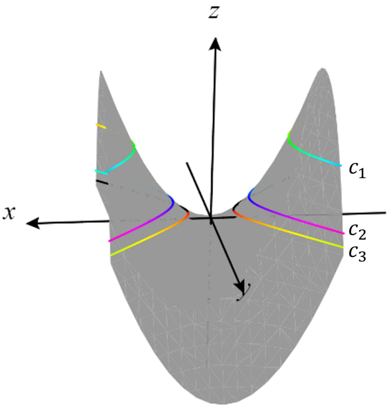
- حالت اول: $c>0$

در این صورت، مجموعه‌های تراز، همگی هذلولی‌هایی هستند که محور xها را در $\pm\sqrt{c}$ قطع می‌کنند.

ادامه‌ی مثال

بعضی از مجموعه‌های تراز f به‌ازای $c > 0$:

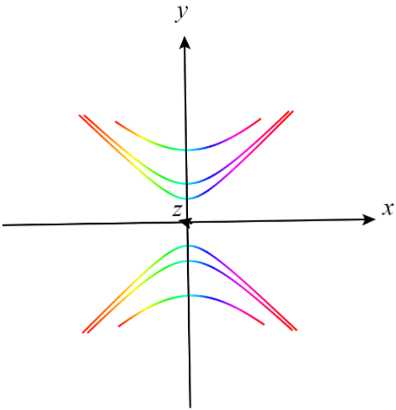


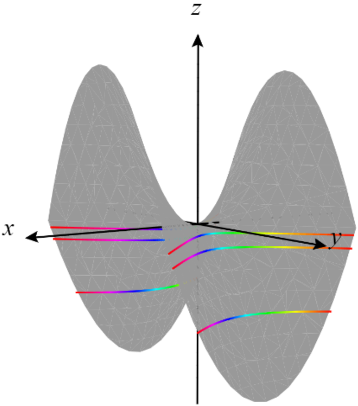


ادامه‌ی مثال

- حالت دوم: $c < 0$

در این صورت، مجموعه‌ی تراز منسوب به c، هذلولی $y^2 - x^2 = -c$ است.





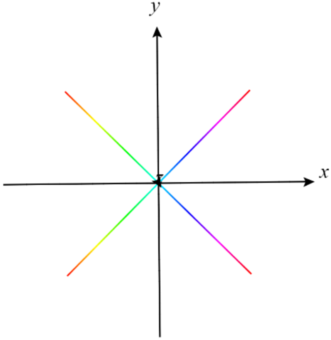
ادامه‌ی مثال

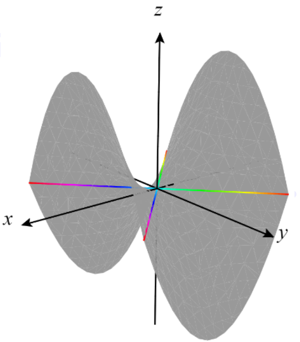
- حالت سوم: $c = 0$

در این صورت، مجموعه‌ی تراز، به صورت زیر است:

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$$

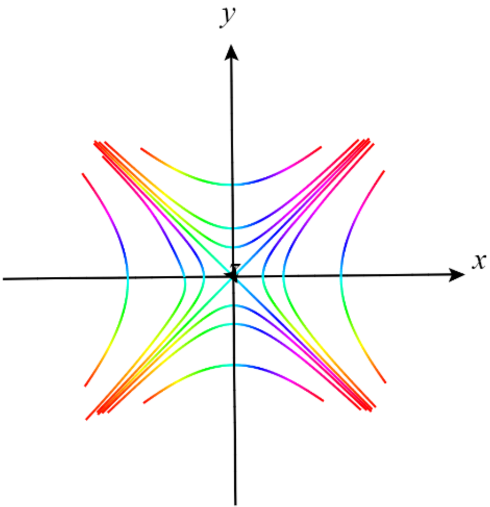
و از این‌رو، این مجموعه اجتماع نقاط دو خط $y = x$ و $y = -x$ در صفحه است.





ادامه‌ی مثال

مجموعه‌های تراز به‌ازای هر سه‌حالت $c > 0$، $c < 0$ و $c = 0$:



تمرین

مجموعه‌های تراز توابع زیر را به‌دست آورید:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$