

۹۹۳۱۰۳۰

گروه ۱۲

استاد شکیبا

$$2x^r(x-1)y'' + x(3x+1)y' - y = 0$$

(الف)

تغییر متغیر: $x = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{x}$ مشتق گیری
بر حسب x $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^r}$

همچنین داریم: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{-dy}{x^r dz}$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{-dy}{x^r dz}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dz^r} \left(\frac{-1}{x^r}\right)' + \frac{1}{x^r} \frac{dy}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^r} = \frac{d^2y}{x^r dz^r} + \frac{2dy}{x^r dz}$$

به بیان دیگر: $y'' = z^r y_z'' + 2z^r y_z'$

جایگذاری $x = \frac{1}{z}$ در معادله
صورت سوال: $2\left(\frac{1}{z^r}\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right)(z^r y_z'' + 2z^r y_z') - y = 0$

$$+ \frac{1}{z} \left(\frac{r}{z} + 1\right)(-z^r y_z') - y = 0$$

$$\Rightarrow y_z'' + \frac{1-dz}{rz(1-z)} y_z' + \frac{-1}{rz(1-z)} y = 0$$

$$p(z) = \frac{1-5z}{2z(1-z)} ; q(z) = \frac{-1}{2z(1-z)} \quad \text{تعریف می کنیم}$$

می دانیم $\lim_{z \rightarrow 0} p(z) = \infty$ ؛ بنابراین $z=0$ نقطه عریضی است.

همچنین می توان نوشت،

$$\lim_{z \rightarrow 0} z p(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-5z}{2-2z} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 q(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z^2}{-(2z^2-2z)} = 0$$

پس می توان نتیجه گرفت فقط $z=0$ ، نقطه عریضی منظم است.

۹۹۳/۵۲۵

گروه ۱۲

استکان شکلیا

$$r(r-1) + rx_0 + 0 = 0 \Rightarrow r(r-1) = 0$$

(ا) ب

پایه های معادله: $r_1 = 0$, $r_2 = 1$

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, y_2 = \ln(x) y_1 x^k + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n x^k \ln(x) + x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

پس می توان نوشت: