آزمون پایانی درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

خرداد ماه ۱۳۹۴ مهلت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

۱- به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$، d_n تعداد پریشهای $\{1, 2, \cdots, n\}$ است. (۴ نمره)

الف) اگر $n > 2$، بدون استفاده از فرمول تعداد پریشها که در قسمت (ت) همین مساله دیده می شود، نشان دهید d_n در رابطه بازگشتی

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \quad d_2 = 1, \ d_1 = 0$$

صدق می کند .

ب) چگونه d_0 را تعریف کنیم تا نتیجه قسمت (الف) به ازای هر $n \geq 2$ معتبر باشد؟

پ) نشان دهید $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$.

ت) فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$. تحقیق کنید $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ و بنابراین،

$$d_n = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

۲- به دو قسمت (الف) و (ب) پاسخ دهید.

الف) استدلال زیر را در قالب نمادها بنویسید. آنگاه یا اعتبار استدلال را برقرار کنید یا یک مثال نقض بیاورید که استدلال نامعتبر است. «قرارداد به سر خواهد رسید اگر و فقط اگر در ماه بهمن پنجره‌های جدید در خانه نصب شوند. اگر در ماه بهمن پنجره‌های جدید نصب شوند، آنگاه ریحانه می‌تواند روز اول اسفند به خانه جدیدش نقل مکان کند. اگر ریحانه نتواند روز اول اسفند نقل مکان کند، آنگاه باید اجاره اسفند آپارتمان خود را بپردازد. در ماه بهمن پنجره‌ها نصب شده‌اند یا ریحانه باید اجاره اسفند آپارتمان خود را بپردازد. بنابراین، ریحانه مجبور نخواهد بود اجاره آپارتمان را برای ماه اسفند بپردازد.»

ب) جمله زیر را در قالب نمادهای منطق مرتبه اول بنویسید. «دقیقا دو عدد صحیح وجود دارند که برقراری خاصیت P در مورد یکی برقراری خاصیت Q را در مورد دیگری ایجاب می‌کند.» (۳ نمره)

۳- ثابت کنید دو گزاره زیر معادلند. (۳ نمره)

$$\big(P(0) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.\, P(k) \to P(k+1)\big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.\, P(n)$$

$$\Big(\forall m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.\, \big(\forall k < m.\, P(k)\big) \to P(m)\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.\, P(n)$$

Scanned by CamScanner

۴- فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

الف) رابطه $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$ به ازای $f, g \in \mathcal{F}$ چنین تعریف می کنیم: $f\mathcal{R}g$ اگر $f \in \Theta(g)$. ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{F}$ است.

ب) به ازای $f \in \mathcal{F}$، فرض کنیم $[f]$ رده هم ارزی f نسبت به رابطه $\mathcal{R}$ باشد. همچنین، فرض کنیم $\mathcal{F}^*$ مجموعه همه رده های هم ارزی القا شده توسط $\mathcal{R}$ باشد. رابطه $\mathcal{S}$ را روی $\mathcal{F}^*$، به ازای $[f], [g] \in \mathcal{F}^*$ چنین تعریف می کنیم: $[f]\mathcal{S}[g]$ اگر $f \in O(g)$. تحقیق کنید آیا $\mathcal{S}$ ترتیب جزئی است. (۳ نمره)

۵- اگر به ازای $i \geq 0$، F_i عدد فیبوناچی i ام را نشان دهد، ثابت کنید به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ رابطه $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$ برقرار است. (۳ نمره)

۶- فرض کنید d_n دترمینان ماتریس $n \times n$ ای است که درایه های روی قطر اصلی آن a، درایه های روی قطر بالای قطر اصلی آن b، درایه های روی قطر پایین قطر اصلی آن c، و سایر درایه های آن صفر هستند. الف) رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه d_n به دست آورید. ب) در صورتی که $a = b = c = 1$، d_n را محاسبه کنید. (۳ نمره)

۷- با استدلال کافی نشان دهید کدام مورد زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) دو مجموعهٔ مرتب جزئی را متشابه می نامیم هرگاه تابعی یک به یک، پوششی، و حفظ کننده ترتیب از یکی به دیگری موجود باشد. دو مجموعهٔ مرتب $(A, \preccurlyeq)$ و $(X_A = \{S(a)\}_{a \in A}, \subseteq)$، که در آن $S(a) = \{x | x \in A, x \preccurlyeq a\}$، متشابهند.

ب) F مجموعهٔ همهٔ توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و

$$\mathcal{R} = \{(f, g) \in F \times F \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \leq g(x)\}.$$

در این صورت، $(F, \mathcal{R})$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی است.

پ) اگر $f: X \to Y$ یک به یک و $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه های X باشد، آنگاه $f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

ت) $(A, \subseteq)$ مجموعه ای مرتب جزئی و $B = \{a_i\}_{i \in I}$ زیر مجموعه ای از A است. در این صورت، اگر B کران بالا داشته باشد، $\bigcup_{i \in I} a_i$ نیز کران بالای B است. (۴ نمره)

Scanned by CamScanner

به نام خدا

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ: ۱۳۹۱/۴/۳ مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت

۱- فرض کنید برای بیان جمله «دقیقاً یک عنصر درمجموعه A وجود دارد که خاصیت p را برآورده می کند.» از عبارت q به شکل $\exists x \forall y\, [y \neq x \longrightarrow (p(x) \wedge \sim p(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده ایم (منظور از $\sim$ نقیض است). کدام گزینه درست است؟ استدلال کافی ارائه کنید.

الف) q همواره معادل منطقی جمله داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل منطقی جمله داده شده است که A مجموعه ای نامتناهی باشد.

ج) هیچگاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله داده شده است.

۲- عددهای $1, 2, \ldots, n-1$ و n به ترتیب دلخواهی بر روی یک ردیف قرار گرفته‌اند $(n > 1)$. می‌خواهیم با استفاده از عمل زیر این اعداد را به ترتیب صعودی از چپ به راست مرتب کنیم: در هر مرحله می‌توانیم i عدد سمت چپ را برعکس کنیم $(1 < i \leq n)$. به عنوان مثال، در 6 مرحله می‌توانیم ترتیب $4, 1, 3, 5, 6, 2$ را به شکل زیر مرتب کنیم.

$$
\begin{array}{ll}
4, 1, 3, 5, 6, 2 & i = 2 \\
\rightarrow 1, 4, 3, 5, 6, 2 & i = 6 \\
\rightarrow 2, 6, 5, 3, 4, 1 & i = 5 \\
\rightarrow 4, 3, 5, 6, 2, 1 & i = 2 \\
\rightarrow 3, 4, 5, 6, 2, 1 & i = 4 \\
\rightarrow 6, 5, 4, 3, 2, 1 & i = 6 \\
\rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6 &
\end{array}
$$

ثابت کنید هر ترتیبی از اعداد 1 تا n را می‌توان با این اعمال حداکثر در $2n-3$ مرحله مرتب کرد.

۳- در صورتی که $f(x)$ تابع مولد پیچش دنباله های $(a_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ و $(b_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 3, 3^2, 3^3, \ldots$ باشد، عبارت $\boxed{\frac{2f(x)}{1-x^4}}$ را محاسبه کنید.

۴- اثبات یا رد کنید.

الف) دو مجموعهٔ مرتب جزئی را متشابه می نامیم هرگاه تابعی یک به یک، پوششی، و حفظ کننده ترتیب از یکی به دیگری موجود باشد. دو مجموعهٔ مرتب $(A, \preccurlyeq)$ و $(X_A = \{S(a)\}_{a\in A}, \subseteq)$، که در آن $S(a) = \{x | x \in A, x \preccurlyeq a\}$، متشابهند.

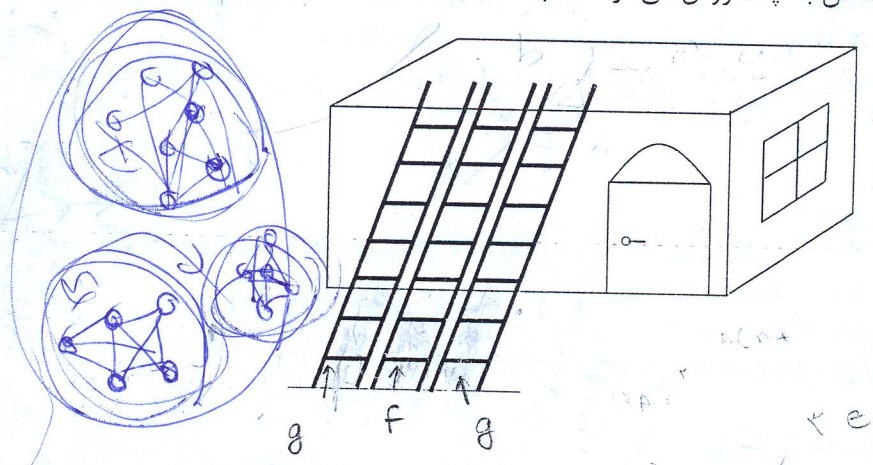
ب) $(A, \subseteq)$ مجموعه ای مرتب جزئی و $B = \{a_i\}_{i\in I}$ زیر مجموعه ای از A است. در این صورت، اگر B کران بالا داشته باشد، $\bigcup_{i\in I} a_i$ نیز کران بالای B است.

۵- فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

الف) رابطه $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$ به ازای $f, g \in \mathcal{F}$ چنین تعریف می کنیم: $f\mathcal{R}g$ اگر $f \in \Theta(g)$. ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{F}$ است.

ب) به ازای $f \in \mathcal{F}$، فرض کنیم $[f]$ رده هم ارزی f نسبت به رابطه $\mathcal{R}$ باشد. همچنین، فرض کنیم $\mathcal{F}^*$ مجموعه همه رده های هم ارزی القا شده توسط $\mathcal{R}$ باشد. رابطه $\mathcal{S}$ را روی $\mathcal{F}^*$، به ازای $[f], [g] \in \mathcal{F}^*$ چنین تعریف می کنیم: $[f]\mathcal{S}[g]$ اگر $f \in O(g)$. تحقیق کنید آیا $\mathcal{S}$ ترتیب جزئی است.

۶- مطابق شکل زیر سه نردبان 7 پله ای در کنار هم بین حیاط و پشت بام قرار گرفته اند. شخصی می خواهد از حیاط به پشت بام برود. هنگامی که او بر روی پله ای از یک نردبان ایستاده است، می تواند قدم بعدی خود را بر روی پله بعدی از همان نردبان یا پله بعدی از نردبان (یا نردبانهای) مجاور قرار دهد. این شخص به چند روش می تواند به پشت بام برسد؟



۷- رابطه بازگشتی $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n)$ را که در آن $n \geq 0$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 4$ حل کنید.

۴- اثبات یا رد کنید.

الف) دو مجموعهٔ مرتب جزئی را متشابه می نامیم هرگاه تابعی یک به یک، پوششی، و حفظ کننده ترتیب از یکی به دیگری موجود باشد. دو مجموعهٔ مرتب $(A, \preccurlyeq)$ و $(X_A = \{S(a)\}_{a\in A}, \subseteq)$، که در آن $S(a) = \{x | x \in A, x \preccurlyeq a\}$، متشابهند.

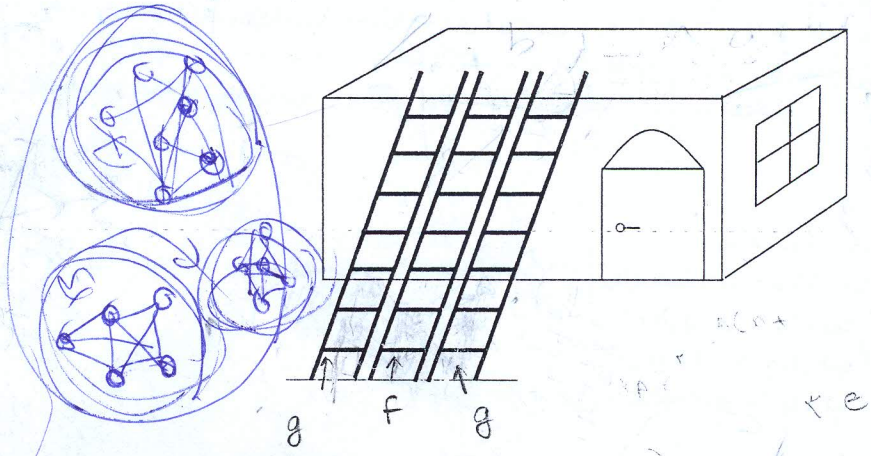
ب) $(A, \subseteq)$ مجموعه ای مرتب جزئی و $B = \{a_i\}_{i\in I}$ زیر مجموعه ای از A است. در این صورت، اگر B کران بالا داشته باشد، $\bigcup_{i\in I} a_i$ نیز کران بالای B است.

۵- فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

الف) رابطه $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$ به ازای $f, g \in \mathcal{F}$ چنین تعریف می کنیم: $f\mathcal{R}g$ اگر $f \in \Theta(g)$. ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{F}$ است.

ب) به ازای $f \in \mathcal{F}$، فرض کنیم $[f]$ رده هم ارزی f نسبت به رابطه $\mathcal{R}$ باشد. همچنین، فرض کنیم $\mathcal{F}^*$ مجموعه همه رده های هم ارزی القا شده توسط $\mathcal{R}$ باشد. رابطه $\mathcal{S}$ را روی $\mathcal{F}^*$، به ازای $[f], [g] \in \mathcal{F}^*$ چنین تعریف می کنیم: $[f]\mathcal{S}[g]$ اگر $f \in O(g)$. تحقیق کنید آیا $\mathcal{S}$ ترتیب جزئی است.

۶- مطابق شکل زیر سه نردبان 7 پله ای در کنار هم بین حیاط و پشت بام قرار گرفته اند. شخصی می خواهد از حیاط به پشت بام برود. هنگامی که او بر روی پله ای از یک نردبان ایستاده است، می تواند قدم بعدی خود را بر روی پله بعدی از همان نردبان یا پله بعدی از نردبان (یا نردبانهای) مجاور قرار دهد. این شخص به چند روش می تواند به پشت بام برسد؟



۷- رابطه بازگشتی $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n)$ را که در آن $n \geq 0$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 4$ حل کنید.

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۱)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

آذر ماه ۱۳۸۴ مهلت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

۱- (شمارش)

الف) به چند روش می توان mn کتاب را در یک کتابخانه m قفسه ای چید به طوری که در هر قفسه دست کم 2 کتاب قرار گیرد؟ ($n \geq 2$ و ظرفیت هر قفسه mn کتاب است.)

ب) n نفر به سالن ورزش می روند. هر یک از آنها به هنگام ورود به سالن ورزش پالتو و کیف دستی خود را به مسئول سالن تحویل می دهد. پس از اتمام ورزش، به هر یک از n نفر به تصادف پالتو و کیف دستی داده می شود. احتمال اینکه هیچ یک از این n نفر پالتو یا کیف دستی خود را دریافت نکند چقدر است؟ احتمال اینکه هیچ یک از این n نفر هم پالتو و هم کیف خود را دریافت نکند چقدر است؟

۲- (منطق)

الف) اعتبار استدلال زیر را بررسی کنید.

اگر احتمال باران آمدن باشد یا ریحانه نوار قرمز دور سرش را گم کند، آنگاه چمنهای باغچه را نخواهد چید. وقتی دما بالای ۸۰ درجه فارنهایت است، شانسی برای باران آمدن نیست. امروز دما ۸۰ درجه فارنهایت است و ریحانه نوار قرمز دور سرش را بسته است. بنابراین، امروز ریحانه چمنهای باغچه را خواهد چید.

ب) جمله "همه روزهای سال ۱۳۸۴ به جز روزهای فرد نیمه اول ماه فروردین و روزهای زوج نیمه دوم ماه شهریور هوا آلوده بود." را در قالب عبارتهای منطق مرتبه اول بیان کنید.

ج) نقیض جمله داده شده در (ب) را ابتدا در قالب عبارتهای منطق مرتبه اول و سپس در قالب زبان طبیعی بیان کنید.

۳- (دنباله مجموعه ها)

فرض کنید $n \in Z^{>1}$. ثابت کنید برای $k = \left\lceil 3 \cdot (\frac{3}{2})^{n-2} \right\rceil$، دنباله $A_1, A_2, \ldots, A_k$ وجود دارد به طوریکه

الف) $A_i \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$،

ب) $i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j$، و

ج) $|(A_i - A_j) \cup (A_j - A_i)| = 1 \Leftrightarrow |i-j| = 1$.

۴- (اعداد اول و بخش پذیری)

الف) فرض کنیم p عددی اول و a عددی صحیح باشد که $1 < a < p$. نشان دهید $p \mid \binom{p}{a}$.

ب) فرض کنیم p عددی اول، و a و b اعدادی صحیح باشند. نشان دهید که $a^p - b^p$ یا نسبت به p اول است یا $p^2 \mid (a^p - b^p)$.

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فنآوری اطلاعات - دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

مدت پاسخگویی ۱۸۰ دقیقه

توضیح: ۱) مشخصات کامل خود را بر روی برگه پاسخنامه و مسئله ها بنویسید. ۲) پاسخ هر مساله را در یک صفحه جداگانه بنویسید. ۳) آزمون جزوه بسته و کتاب بسته است. ۴) ارجاع به قضیه های مطرح شده در درس یا کتاب مرجع درس مجاز است. ۵) در مسائل (۴) و (۵) پیشنهادی برای حل مساله داده شده است، ارائه راه حلی که از این پیشنهاد بهره نمی گیرد مجاز است.

مساله ۱: مسابقات دوره ای (۳۰ امتیاز، هر قسمت ۱۰ امتیاز)

در یک دوره مسابقات فوتبال n تیم حضور دارند و هر تیم دقیقا یک بار با هر یک از تیمهای دیگر مسابقه می دهد. اگر نتیجه هر مسابقه فقط برد یا باخت بوده، امتیاز هر برد 1 و امتیاز هر باخت -1 باشد

أ) ثابت کنید پس از اتمام مسابقات لیستی از این n تیم می توان از بالا به پایین نوشت به طوری که هر تیم، تیم درست زیر خود را برده باشد.

ب) ثابت کنید پس از اتمام مسابقات مجموع توان دوم برد تیمها با مجموع توان دوم باخت تیمها برابر است.

ج) اگر ایران یکی از تیمها باشد، چند حالت برای نتایج به دست آمده از مسابقات او وجود دارد به طوری که امتیاز او در پایان بازیها عدد مشخص k، $1-n \le k \le n-1$، بوده و هیچگاه در طول مسابقات امتیاز او منفی نباشد؟

مساله ۲: منطق، اعداد و رابطه (۶۰ امتیاز، هر قسمت ۱۰ امتیاز)

هر یک از قسمتهای زیر را اثبات یا رد کنید.

أ) بحث منطقی $[(p \to q) \wedge [(q \wedge r) \to s] \wedge r] \Rightarrow (p \to s)$ معتبر است.

ب) بحث منطقی $[\exists n_0\, P(n_0) \wedge \forall k\,[(k \ge n_0) \to (p(k) \Rightarrow p(k+1))]] \Rightarrow \forall n\,[(n \ge n_0) \to p(n)]$ با فرض اینکه عالم سخن مجموعه اعداد صحیح باشد، یک بحث معتبر است.

ج) هرگاه برای دو عدد صحیح a, b دست کم دو عدد صحیح x, y چنان پیدا شوند که $ax + by = 5$، آنگاه بزرگترین شمارنده مشترک a, b برابر 5 است.

د) عبارت $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ بر 9 بخش پذیر است.

ه) اگر $f : A \to B$ و $g : B \to C$ دو تابع بوده و $gof : A \to C$ یک به یک باشد، آنگاه g یک به یک است.

و) اگر $(A, \mathcal{R})$ یک لتیس بوده و A مجموعه ای متناهی باشد، $(A, \mathcal{R})$ یک بزرگترین عنصر دارد.

مساله ۳: رنگ آمیزی گراف (۳۰ امتیاز، هر قسمت ۱۵ امتیاز)

فرض کنیم گراف $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت باشد. می گوییم این گراف با k رنگ قابل رنگ آمیزی است اگر تابع $c : V \to \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ موجود باشد به طوری که اگر دو راس $u, v \in V$ نقاط انتهایی یال $e \in E$ باشند، $c(u) \ne c(v)$.

أ) نشان دهید عبارتهای زیر معادلند.

۱) G گراف دو بخشی است.

۲) G با دو رنگ قابل رنگ آمیزی است.

۳) G هیچ دوره ای با طول فرد ندارد.

ب) اگر d ماکزیمم درجه راس در گراف G باشد، ثابت کنید G با $d+1$ رنگ قابل رنگ آمیزی است.

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

مهلت پاسخگویی: ۱۸۰ دقیقه

۱- (بازی پینگ- پونگ) (۴۰ امتیاز)

دو بازیکن پینگ- پونگ به نامهای A و B قرار می گذارند که چند بازی انجام دهند. هر دو بازیکن در این بازی به یک اندازه مهارت دارند. با وجود این، فرض می کنیم که احتمال برنده شدن اولین زننده سرویس در هر بازی P باشد (ممکن است A در یک بازی و یا B در بازی دیگری زننده سرویس باشد.) فرض کنیم که در اولین بازی، سرویس اول در اختیار A و در بازیهای دیگر در اختیار نفر بازنده باشد. احتمال برنده شدن A در بازی n ام را بیابید.

۲- (زنجیرها و پاد زنجیرها) (هر قسمت ۲۵ امتیاز)

فرض کنیم $A \neq \phi$ و (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم $\phi \neq B \subseteq A$. رابطه R' روی B را به شکل $R' = (B \times B) \cap R$ در نظر می گیریم. اگر (B,R') تماما مرتب باشد، (B,R') را زنجیری در (A,R) می نامیم. در حالتی که B متناهی است، می توان عناصر B را به صورت $b_1 R' b_2 R' \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کرد. در این صورت B زنجیری با طول n نامیده می شود. زنجیری مانند B با طول n را ماکسیمال گویند هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد که $a \notin \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و aRb_1 یا $b_n Ra$ یا با ازای iای که $1 \le i \le n-1$، $b_i RaRb_{i+1}$.

الف) فرض کنیم (B,R') زنجیری ماکسیمال در (A,R) به صورت $b_1 R' b_2 R' \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ باشد. ثابت کنید b_1 عنصری مینیمال و b_n عنصری ماکسیمال در (A,R) است.

ب) فرض کنیم طولانی ترین زنجیر در (A,R) دارای طول n است. ثابت کنید می توان افرازی مانند $\{C_i\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$ روی A ایجاد کرد به طوری که برای هر $1 \le i \le n$، $(C_i \times C_i) \cap R = \phi$.

۳- (مجموعه های همتوان) (هر قسمت ۲۰ امتیاز)

دو مجموعه X و Y را همتوان می گویند و نماد $X \sim Y$ را برای آن به کار می برند، هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک $f: X \to Y$ وجود داشته باشد. همچنین نماد $f: X \sim Y$ به معنای آن است که $f: X \to Y$ یک تناظر یک به یک است.

الف) فرض کنیم φ یک خانواده مجموعه ها است و R رابطه ای روی φ است که با "XRY اگر و تنها اگر X و Y عضوهای φ باشند و $X \sim Y$" تعریف شده است. ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است.

ب) نشان دهید $(0,1) \sim (-1,1)$، $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ و $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

ج) مجموعه های X، Y، Z، و W با شرطهای $X \cap Z = \phi = Y \cap W$، $f: X \sim Y$، و $g: Z \sim W$ مفروضند. ثابت کنید $(X \cup Z) \sim (Y \cup W)$.

د) مجموعه X شمارای نامتناهی گفته می شود هرگاه $X \sim \mathbb{Z}^+$. ثابت کنید هر زیر مجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

۴- اثبات یا رد کنید. (هر قسمت ۱۰ امتیاز)

الف) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \to q)] \Rightarrow s$.

ب) هر عدد گویای مثبت را می توان به شکل مجموعی متناهی از جملات متمایزی به شکل $\frac{1}{n}$ نوشت.

ج) عدد $1000!$ به 248 صفر ختم می شود.

د) $\log_2^n \in O(n)$.

ه) دو دستگاه اصل موضوعی با مجموعه اصول موضوع A_1 و A_2 برای علم X وجود دارند به طوری که $A_1 \subset A_2$.

و) عمل دوتایی بسته $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(a,b) = a + b - 3ab$ شرکت پذیر است.

ز) اگر $n \in \mathbb{Z}^+$ و $n \ge 2$، $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$.

ح) تعداد روشهایی که می توان n $(n \ge 0)$ رقم صفر و یک را در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو صفر متوالی پشت سر هم قرار نگیرند برابر با $n+1$ امین عدد فیبوناچی است $(F_0 = F_1 = 1)$.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته ـ خرداد ماه ۱۳۸۳

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت و نیم

۷۵

۱- الف) دانش آموزی n، $n \geq 2$، کتاب مختلف دارد. به چند طریق می تواند کتابهایش را در دو قفسه بچیند به طوری که در هر قفسه حداقل یک کتاب باشد؟

ب) تعداد جایگشتهای $(1,2,\ldots,n)$، مانند $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$، $n!$ است. چه تعداد از این جایگشتها در شرطهای $s_i \geq i-2$، $1 \leq i \leq n$، صدق می کنند؟

ج) در طول یک کنفرانس 12 هفته ای درباره ریاضیات، ریحانه 7 نفر از همکلاسان دانشکده خود را ملاقات کرد. او در طول این کنفرانس، به هنگام صرف ناهار، هر یک از دوستانش را 35 بار، هر جفت از دوستان خود را 16 بار، هر مجموعه سه نفری از دوستان خود را 8 بار، هر مجموعه چهار نفری از دوستان خود را 4 بار، هر مجموعه پنج نفری از دوستان خود را 2 بار، و هر مجموعه شش نفری از آنها را 1 بار ملاقات کرد، ولی هرگز هر هفت نفر را با هم ملاقات نکرد. اگر ریحانه در طول برگزاری کنفرانس هر روز ناهار خورده باشد، آیا هرگز هنگام صرف ناهار تنها بوده است؟

۷۶

۲- الف) اثبات یا رد کنید.

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \underline{\neg s \qquad\qquad} \\ \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

ب) جمله "حاصل جمع هر دو عدد حقیقی دلخواه، عددی یکتاست." را با استفاده از نمادهای منطق مرتبه اول بنویسید.

۷۷

۳- ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n می توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به طوری که هیچ دو دایره ای متقاطع نباشند.

۷۸

۴- ثابت کنید که یک و فقط یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $2^8+2^{11}+2^n$ مربع کامل باشد.

۷۹

۵- الف) فرض کنیم $f: X \to Y$، و به ازای هر $i \in I$، فرض کنیم $A_i \subseteq X$. ثابت کنید اگر f یک به یک باشد، آنگاه $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

ب) همه توابع $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(yf(x)) = x^2 f(f(x)+f(y)).$$

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۲)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

آذر ماه ۱۳۸۴ مهلت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

۱- (شمارش) ۷۱

الف) فرض کنیم $k \le n < 2k$. به چند طریق می توانیم n تا 1 و r تا 0 را چنان مرتب کنیم که ردیفی حاوی دقیقا k تا 1 کنار هم داشته باشیم؟

ب) اگر k رنگ مختلف در اختیار داشته باشیم، به چند روش می توانیم دیوارهای اتاق ۶ دیواری را چنان رنگ آمیزی کنیم که هر دو دیوار مجاور با رنگهای مختلف رنگ آمیزی شوند؟

۲- (منطق) ۷۲

الف) اعتبار استدلال زیر را بررسی کنید.

اگر آرین به میدان اسب دوانی برود، رویا عصبانی خواهد شد. اگر آرمان تمام شب را بازی کند، مژگان عصبانی خواهد شد. اگر رویا یا مژگان عصبانی شوند، رضا مطلع خواهد شد. رضا چیزی در این باره نشنیده است. در نتیجه آرین به میدان اسب دوانی نرفته است و آرمان تمام شب را بازی نکرده است.

ب) جمله "در همه روزهای سال ۱۳۸۴ فقط چند ساعت، که آن هم هرگز بیش از ۴ ساعت نشد، هوا تمیز بود." را در قالب عبارتهای منطق مرتبه اول بیان کنید.

ج) نقیض جمله داده شده در (ب) را ابتدا در قالب عبارتهای منطق مرتبه اول و سپس در قالب زبان طبیعی بیان کنید.

۳- (انسانهای خبر رسان) ۷۳

یک مجموعه n ($n \ge 4$) نفری از انسانها را در نظر بگیرید که هر کدام از آنها در ابتدا یک خبر جدید را می داند و خبرهای جدید متمایز هستند. در هر مرحله، دو نفر از این افراد به هم تلفن می زنند و تمام اخباری را که دارند با هم مبادله می کنند. ثابت کنید این افراد می توانند با $2n-4$ بار تلفن زدن، همگی از همه اخبار مطلع شوند.

۴- (اعداد) ۷۴

الف) فرض کنیم p_n معرف n امین عدد اول باشد. نشان دهید که به ازای $n \ge 4$، $p_{n+1}^2 < p_1 p_2 \cdots p_n$.

ب) ثابت کنید $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\dfrac{(m,n)}{\varphi((m,n))}$ که در آن φ تابع فای اویلر است.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گ۲)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر ـ دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

اردیبهشت ۱۳۹۰ . مهلت پاسخگویی: ۱ ساعت

۱- به چند روش می‌توان اعداد $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ را در دو ردیف n تایی زیر هم قرار داد به طوری که سطرها و ستونها از کوچک به بزرگ مرتب باشند؟

۲- در صورتی که $f(x)$ تابع مولد پیچش دنباله‌های $(a_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$ و $(b_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 3, 3^2, 3^3, \dots$ باشد، $\frac{2f(x)}{1-x^4}$ را بیابید؟

۳- تعداد جایگشتهای $(1, 2, \dots, n)$، مانند $(s_1, s_2, \dots, s_n)$، $n!$ است. چه تعداد از این جایگشتها در شرطهای $s_i \geq i-2$، $1 \leq i \leq n$، صدق می‌کنند؟

۴- جملهٔ "دربین هر سه عدد صحیح متوالی فقط و فقط یکی بر سه بخش‌پذیر است" را در قالب نمادها و فقط با استفاده از سورهای وجودی و عمومی و بدون به کارگیری نماد نقیض بنویسید.

۵- فرض کنید $(s \Delta t) \Leftrightarrow (s \leftrightarrow (s \wedge t))$. در صورتی که $v: \Omega \to \{0,1\}$ تابع ارزش و Ω مجموعه تمام گزاره‌ها باشد، $v(s \Delta t)$ را بیابید و سپس، با استفاده از آن، ارزش $p \Delta (p \to q)$ را به دست آورید.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (آذر ماه ۱۳۸۳)
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
مهلت پاسخگویی: ۹۰ دقیقه

۱- (مسابقات دوره ای) ۵۸

در یک سری مسابقات دوره ای فوتبال n تیم شرکت دارند و تیم A یکی از این تیم ها است. هر تیم با هر یک از دیگر تیم ها دقیقا یک بار مسابقه می دهد. نتیجه هر مسابقه برای یک تیم برد معادل $+1$ امتیاز، تساوی معادل 0 امتیاز و باخت معادل -1 امتیاز است. الف) اگر شانس هر تیم برای برد، تساوی یا باخت در یک بازی یکسان باشد، احتمال اینکه تیم A در پایان بازیها k امتیاز داشته باشد چه قدر است؟ (۲۰ امتیاز) ب) قسمت (الف) را برای حالتی که امتیاز برد، تساوی و باخت به ترتیب $+3$، $+1$ و 0 است حل کنید. (۱۰ امتیاز)

۲- (منطق مرتبه اول) ۵۹

الف) استدلال زیر را در قالب نمادها بنویسید و آنگاه یا اعتبار استدلال را برقرار کنید، یا یک مثال نقض بیاورید.

"قرار داد به سر خواهد رسید اگر، و فقط اگر، در ماه بهمن پنجره های جدید در خانه نصب شوند. اگر در ماه بهمن پنجره های جدید نصب شوند، آنگاه ریحانه می تواند روز اول اسفند به خانه جدیدش نقل مکان کند. اگر ریحانه نتواند روز اول اسفند نقل مکان کند، آنگاه باید اجاره اسفند آپارتمان خود را بپردازد. در ماه بهمن پنجره ها نصب شده اند یا ریحانه باید اجاره اسفند آپارتمان خود را بپردازد. بنابراین، ریحانه مجبور نخواهد بود اجاره اسفند آپارتمان خود را بپردازد." (۱۰ امتیاز)

ب) جمله "فقط دو عدد صحیح وجود دارند که خاصیت P را دارند" را در قالب منطق مرتبه اول بیان کنید. (۱۰ امتیاز)

۳- (دنباله فیبوناچی) ۹۰

دنباله فیبوناچی $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ به صورت $F_0 = 1$، $F_1 = 1$ و $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ برای $n \geq 2$ تعریف می شود. ثابت کنید $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2$. (۲۰ امتیاز)

۴- (معادله دیوفانتین) ۹۱

نشان دهید معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 2^t xyz$ برای $x, y, z, t \in Z^+$ جواب ندارد. (۱۰ امتیاز)

۵- (بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد)

ثابت کنید اگر $(a,b) = 1$، آنگاه $(a+b, a^2+b^2-ab)$ برابر 1 یا 3 است. (۱۰ امتیاز)

۶- (عدد استرلینگ) ۹۲

ثابت کنید به ازای هر $m, n \in Z^+$، $\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (i!) S(n,i) = m^n$، که در آن $S(n,i)$ نشان دهنده عدد استرلینگ نوع دوم است. (۱۰ امتیاز)

موفق باشید.

۱۷

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۱)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

آذر ماه ۱۳۸۵ مهلت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

۱- (شمارش) ۶۳

الف) می خواهیم جدولی 5×5 از حروف انگلیسی به جز حرف A به صورت زیر ایجاد کنیم. ابتدا یک کلمه معنادار یا بی معنا را که حروف تکراری در آن وجود ندارد از چپ به راست با شروع از ردیف اول این جدول می نویسیم (در صورتی که کلمه طولانی باشد ممکن است در چند ردیف از جدول نوشته شود). سپس، حروف باقیمانده را به ترتیب الفبای انگلیسی در خانه های جدول قرار می دهیم. تعداد جدولهای ممکن را بیابید.

ب) در گروه ریاضی دانشگاهی قرار است تدریس پنج درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، آنالیز، جبر، آمار، و ترکیبیات به پنج نفر از استادان به نامهای A، B، C، D، و E واگذار شود. A حساب دیفرانسیل و انتگرال یا ترکیبیات را تدریس نخواهد کرد، C آمار را تدریس نمی کند، B و E هر دو تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال یا ترکیبیات را رد می کنند، و D تدریس آنالیز را دوست ندارد. مدیر گروه ریاضی به چند طریق می تواند تدریس این پنج درس را به این استادان واگذار کند به طوری که همه راضی باشند؟

۲- (منطق) ۶۴

در درس معنای مرسوم $p\to q$ با استفاده از تابع $v:\Omega^*\to\{0,1\}$ ارائه شده است. اکنون، معنای دیگری برای $p\to q$ به صورت "رخداد q فقط با حصول رخداد p امکان پذیر است" در نظر می گیریم. تابع v مناسب برای این معنای جدید را بیان کرده و $v(p\to(p\vee q))$ را محاسبه کنید.

۳- (قضیه زکندورف) ۶۵

ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت را می توان به شکل مجموعی از اعداد فیبوناچی متمایز نوشت.

۴- (اعداد) ۶۶

ثابت کنید به ازای هر $a,m,n\in\mathbb{Z}^+$ رابطه $\gcd(a^m-1,a^n-1)=a^{\gcd(m,n)}-1$ برقرار است.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)- دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

(مدت پاسخگویی ۱۲۰ دقیقه)

۱- (گویها و ظرفها)- (۵، ۵، ۵ و ۱۰)

n گوی با رنگ سفید، n گوی با رنگ قرمز و n ظرف با رنگ سبز در اختیار داریم. روی گویهای سفید، قرمز و همچنین ظرفها به ترتیب اعداد $1,2,3,\ldots,n$ نوشته شده است.

الف- در صورتی که رنگ و شماره گویها و ظرفها مورد نظر باشد، به چند روش می توان $2n$ گوی را در ظرفها قرار داد؟

ب- در صورتی که فقط رنگ گویهای سفید و رنگ و شماره گویهای قرمز و ظرفها مورد نظر باشد، به چند روش می توان $2n$ گوی را در ظرفها قرار داد به طوری که در هر ظرف دست کم یک گوی سفید قرار گیرد؟

ج- در صورتی که رنگ و شماره گویها مورد نظر بوده ولی شماره ظرفها مورد نظر نباشد، به چند روش می توان $2n$ گوی را در ظرفها قرار داد به طوری که در هر ظرف دست کم یک گوی قرار گیرد؟

د- در صورتی که رنگ و شماره گویها و ظرفها مورد نظر باشد، به چند روش می توان $2n$ گوی را در ظرفها قرار داد به طوری که در هر ظرف دقیقا یک گوی سفید و یک گوی قرمز قرار بگیرد و دو شرط زیر برقرار باشد: ۱) شماره گوی سفید قرار گرفته در هر ظرف با شماره آن ظرف متفاوت باشد و ۲) شماره گوی قرمز قرار گرفته در هر ظرف با شماره آن ظرف و همچنین با شماره گوی سفید قرار گرفته شده در آن ظرف متفاوت باشد.

۲- (استقرای ریاضی و دنباله فیبوناچی) (۵و ۱۰)

الف- فرض کنیم $R(n) \Leftrightarrow P(n) \wedge Q(n)$. با بحث منطقی صحت گزاره زیر را بررسی کنید.

$$[R(b) \wedge \forall k.[[R(k) \Rightarrow P(k+1)] \wedge [(P(k+1) \wedge Q(k)) \Rightarrow Q(k+1)]]] \Rightarrow \forall m.[m \geq b \rightarrow R(k+1)]$$

ب- دنباله فیبوناچی با روابط $F_1 = 1$، $F_2 = 1$ و $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ برای $n \geq 3$ تعریف می شود. با دو مرحله استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$.

۳- (کاربردهای قضیه لاگرانژ) (۱۰ و ۱۰)

الف- ثابت کنید اگر $(n-1)! \equiv (-1) \pmod{n}$، آنگاه n عدد اول است.

ب- اگر p عدد اول و $p \geq 5$ و $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} = \frac{r}{ps}$ ثابت کنید $p^3 \mid (r-s)$.

۴۸ ۴- (نماد O) (۵ و ۵)

الف- رابطه R را بر روی مجموعه توابع $f:Z^+ \to R$ به شکل $fRg \Leftrightarrow f \in O(g)$ تعریف می کنیم. آیا این رابطه یک رابطه تراگذری است؟ آیا می توان مجموعه ای از توابع مثال زد که رابطه R روی آن یک ترتیب جزئی باشد؟

ب- ثابت کنید $(1^r + 2^r + \ldots + n^r) \in O(n^{r+1})$. آیا $O(1^r + 2^r + \ldots + n^r) = O(n^{r+1})$؟

۴۸ ۵- (رابطه ها) (۵، ۵، ۱۰ و ۱۰)

الف- فرض کنیم A,B,C سه مجموعه، $R_1 \subseteq A \times B$ و $R_2 \subseteq B \times C$. آیا $(R_1 \circ R_2)^c = R_2^c \circ R_1^c$؟

ب- اثبات یا رد کنید: ۱) اگر (A,R) یک لتیس باشد، یک مجموعه کلا مرتب است و ۲) اگر (A,R) یک مجموعه کلا مرتب باشد، یک لتیس است.

ج- اگر $U = \{1,2,\ldots,n\}$ و $A = P(U)$ (مجموعه تمام زیر مجموعه های A)، طولانی ترین پادزنجیر در $(A,\subseteq)$ چند عضو دارد؟

د- ثابت کنید تعداد افرازهای یک مجموعه با تعداد روابط هم ارزی روی آن مجموعه برابر است.

موفق باشید

$A = \{1,2\}, \quad B = \{\gamma, z\}, \quad C = \{\alpha, \beta\}$

$R_1 = \{(1,\gamma), (2,z)\}$

$R_2 = \{(\gamma,\beta), (\gamma,\alpha), (z,\beta)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(1,\beta), (2,\beta)\}$

$(R_1 \circ R_2)^c = \{(\beta,1), (\beta,2)\}$

$R_1^c = \{(\gamma,1), (z,2)\}$

$R_2^c = \{(\beta,\alpha), (\alpha,\gamma), (\beta,z)\}$

$R_2^c \circ R_1^c = \{(\beta,1), (\beta,2)\}$

$100 \to 20$

$90 \to 50$

$10 \to 6$

$200 \to 140$

$\binom{n}{\frac{n}{2}}, \quad \max\left\{\binom{n}{k} \,\middle|\, k = 0,1,2,\ldots,n\right\} = \binom{n}{n/2}$

$\{1,2,\ldots,n\}$

$\{1\} \quad \{2\} \quad \ldots \quad \{n\} \quad \binom{n}{1}$

$\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots \{n-1,n\} \quad \binom{n}{2}$

$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2})!} = \frac{n}{n}\frac{(n-1)!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2})!}$

$n-1$

$\binom{n}{n}$

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه

---

۱) (۱۵ امتیاز) در ظرفی m مهره سفید و n مهره سیاه وجود دارد. مهره های سفید از 1 تا m و مهره های سیاه از 1 تا n شماره گذاری شده اند. می خواهیم r مهره از این ظرف را در k ظرف دیگر قرار دهیم. در هر یک از حالتهای زیر، به چند روش می توان این کار را انجام داد؟

الف- $r < m,n$، شماره مهره ها مهم نیست، و ظرفها متمایز هستند.

ب- $k < r$، شماره مهره ها مهم است، و ظرفها نامتمایز هستند.

۲- (۱۵ امتیاز) به قسمتهای (الف) و (ب) زیر پاسخ دهید.

الف- آیا بحث منطقی $[(p \to q) \wedge [(q \wedge r) \to s] \wedge r] \Rightarrow (p \to s)$ معتبر است؟

ب- در قطعه برنامه پاسکال زیر i و j متغیرهای صحیح بوده و A آرایه دو بعدی با 10 سطر و 20 ستون است. با استفاده از سورها گزاره های زیر را در قالب نمادها بنویسید.

(۱) درایه های هر سطر A به طور صعودی مرتب شده اند.

(۲) درایه های هر سه سطر متوالی دلخواه A متمایزند.

```
For i:=1 to 10 do
    For j:=1 to 20 do
        A[i,j]=i+3*j;
```

۳) (۱۵ امتیاز) با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید که مساحت یک چند ضلعی مشبکه ای ساده (یک چند ضلعی که رئوس آن نقاط مشبکه ای باشند و اضلاع آن یکدیگر را قطع نکنند) برابر است با $I+\frac{B}{2}-1$ که در آن I و B به ترتیب تعداد نقاط مشبکه ای درونی و مرزی آن چند ضلعی هستند.

۴) (۲۰ امتیاز) معادله دیوفانتینی $ax+by=c$ را در نظر می گیریم که در آن a، b، و c اعداد صحیح هستند. ثابت کنید:

الف- این معادله جواب دارد اگر و فقط اگر $\gcd(a,b)|c$.

ب- اگر x_0 و y_0 جوابی برای این معادله باشد، کلیه جوابهای این معادله از روابط زیر به دست می آیند.

$$x' = x_0 - \frac{bk}{\gcd(a,b)}\ ,\ y' = y_0 + \frac{ak}{\gcd(a,b)} \quad (k \in Z)$$

۵) (۱۵ امتیاز) ثابت کنید هرگاه 11 عدد صحیح از $\{1,2,...,100\}$ انتخاب کنیم دو عدد مانند x و y در بین اعداد انتخاب شده وجود خواهند داشت به طوری که $0<|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<1$.

۶) (۲۰ امتیاز) به قسمتهای (الف) تا (د) زیر پاسخ دهید.

الف- فرض کنیم R رابطه ای تراگذر روی مجموعه A باشد. ثابت کنید R ترتیب جزئی روی A است اگر و فقط اگر $R \cap R^c = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

ب- ثابت کنید اگر مجموعه جزئا مرتب (A,R) کوچکترین عنصری داشته باشد، آنگاه آن عنصر یکتاست.

ج- مثالی از مجموعه جزئا مرتب بیاورید که چهار عنصر ماکسیمال داشته باشد ولی بزرگترین عنصر نداشته باشد.

د- اگر (A,R) شبکه و A متناهی باشد، ثابت کنید (A,R) بزرگترین و کوچکترین عنصر دارد.

موفق باشید

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

ذی ماه سال ۱۳۸۴ مهلت پاسخگویی: ۲/۵ ساعت

۱- (منطق، اعداد، رابطه ها)

اثبات یا رد کنید.

۱-۱- برای دو رشته باینری n بیتی a و b، $a \oplus b$ رشته ای n بیتی است که از عمل یای انحصاری نظیر به نظیر بیتهای a و b به دست می آید. همچنین $\bar{a}$ رشته ای n بیتی است که هر بیت آن نقیض بیت متناظر در a است. در این صورت $\overline{a \oplus b} = \bar{a}$. (۲۰ امتیاز)

۱-۲- تعداد سه تاییهای مرتب (x, y, z) موجود در مجموعه $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^3$ با خاصیت $\max\{x, y\} < z$ برابر با $C(n+1,2) + 2C(n+1,3)$ است. (۲۰ امتیاز)

۱-۳- اگر p و q اعدادی اول، $n = pq$، و $0 < m < n$، آنگاه $m^{k\phi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$ که در آن ϕ تابع فای اویلر و $k \in Z^+$ است. (۲۰ امتیاز)

۱-۴- هرگاه (A, R) مشبکه باشد، (A, R) بزرگترین و کوچکترین عنصر دارد. (۲۰ امتیاز)

۱-۵- هرگاه R_1 و R_2 دو رابطه متقارن روی A بوده و $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$، آنگاه $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ که در آن $R_1 \circ R_2$ ترکیب رابطه R_1 با R_2 است. (۲۰ امتیاز)

۲- (معادله تابعی)

تمام توابع $f: Z \to Z$ را بیابید که $\forall m, n \in Z\ [f(m + f(n)) = f(m) + n]$. (۵۰ امتیاز)

۳- (زنجیرها)

به ازای $A \neq \phi$ فرض کنیم (A, R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم B زیر مجموعه ای ناتهی از A است. رابطه $R' = (B \times B) \cap R$ را در نظر می گیریم. اگر (B, R') تماما مرتب باشد، (B, R') را زنجیری در (A, R) می نامیم. در حالتی که B متناهی باشد، می توانیم عنصرهای B را به صورت $b_1 R' b_2 R' b_3 \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کنیم. در این صورت، می گوییم B زنجیری به طول n است. زنجیری به طول n را ماکسیمال می نامیم هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $a \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ و $a R b_1$، $b_n R a$، یا به ازای iای، $1 \le i \le n-1$، $b_i R a R b_{i+1}$.

۳-۱- اگر (B, R') زنجیر ماکسیمالی در (A, R) باشد و عناصر B به شکل $b_1 R' b_2 R' b_3 \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ نوشته شوند، ثابت کنید b_n عنصری ماکسیمال در (A, R) است. (۲۵ امتیاز)

۳-۲- اگر $\mathcal{U} = \{1,2,\ldots,n\}$، مجموعه جزئا مرتب $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ چند زنجیر ماکسیمال دارد؟ (۲۵ امتیاز)

۴- (رنگ آمیزی قطاعهای دایره)

دایره ای را به $n \ge 3$ قطاع مساوی تقسیم کرده ایم. می خواهیم این قسمتها را با k رنگ، رنگ آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو قطاع مجاوری همرنگ نباشند. اگر a_n تعداد روشهای ممکن برای انجام این کار باشد، a_n را به ازای $n \ge 3$ بیابید. (۵۰ امتیاز)

۵- (دستگاه روابط بازگشتی)

دستگاه رابطه های بازگشتی زیر را که در آن $a_0 = 0$، $b_0 = 1$، و $n \ge 0$ حل کنید. (۵۰ امتیاز)

$$a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2$$
$$b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1$$

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ: ۱۳۸٤/۳/۲۹ مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت حداکثر امتیاز: ۳۰۰

$(q \wedge \neg(r)) \vee (\neg q \wedge r)$

۱- اثبات یا رد کنید.

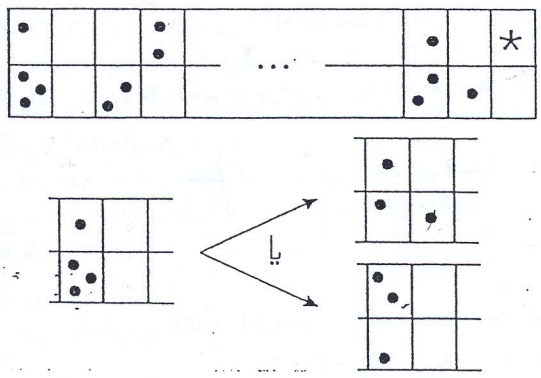
الف) $[p \to (q \veebar r)] \Rightarrow [(p \to q) \veebar (p \to r)]$.

ب) اگر $f: A \to B$ و $B_1, B_2 \subseteq B$، آنگاه $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

ج) (A, R) مشبکه است اگر و فقط اگر تماما مرتب باشد.

د) در بین هر هفت عدد صحیح و مثبت متمایز نابیشتر از 126 می توان دو عدد مانند m و n یافت که $1 < \frac{m}{n} \leq 2$.

۲- در برخی از خانه های جدولی $2 \times n$ تعدادی مهره قرار دارد. اگر در خانه ای بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می توانیم دو مهره از آن خانه خارج کنیم و در عوض یا یک مهره در خانه سمت راستش یا یک مهره در خانه بالایی اش قرار دهیم. فرض کنید در ابتدا دست کم 2^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می توان مهره ها را طوری جا به جا کرد که یک مهره به خانه انتهایی، که در شکل با علامت ستاره مشخص شده است، برسد.



به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

مهلت پاسخگویی: ۱۸۰ دقیقه

۱- (بازی پینگ- پونگ) (۴۰ امتیاز)

دو بازیکن پینگ- پونگ به نامهای A و B قرار می گذارند که چند بازی انجام دهند. هر دو بازیکن در این بازی به یک اندازه مهارت دارند. با وجود این، فرض می کنیم که احتمال برنده شدن اولین زننده سرویس در هر بازی P باشد (ممکن است A در یک بازی و یا B در بازی دیگری زننده سرویس باشد.) فرض کنیم که در اولین بازی، سرویس اول در اختیار A و در بازیهای دیگر در اختیار نفر بازنده باشد. احتمال برنده شدن A در بازی n ام را بیابید.

۲- (زنجیرها و پاد زنجیرها) (هر قسمت ۲۵ امتیاز)

فرض کنیم $A \neq \phi$ و (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم $\phi \neq B \subseteq A$. رابطه R' روی B را به شکل $R' = (B \times B) \cap R$ در نظر می گیریم. اگر (B,R') تماما مرتب باشد، (B,R') را زنجیری در (A,R) می نامیم. در حالتی که B متناهی است، می توان عناصر B را به صورت $b_1 R' b_2 R' \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کرد. در این صورت B زنجیری با طول n نامیده می شود. زنجیری مانند B با طول n را ماکسیمال گویند هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد که $a \notin \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و aRb_1 یا $b_n Ra$ یا با ازای iای که $1 \leq i \leq n-1$، $b_i RaRb_{i+1}$.

الف) فرض کنیم (B,R') زنجیری ماکسیمال در (A,R) به صورت $b_1 R' b_2 R' \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ باشد. ثابت کنید b_1 عنصری مینیمال و b_n عنصری ماکسیمال در (A,R) است.

ب) فرض کنیم طولانی ترین زنجیر در (A,R) دارای طول n است. ثابت کنید می توان افرازی مانند $\{C_i\}_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ روی A ایجاد کرد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $(C_i \times C_i) \cap R = \phi$.

۳- (مجموعه های همتوان) (هر قسمت ۲۰ امتیاز)

دو مجموعه X و Y را همتوان می گویند و نماد $X \sim Y$ را برای آن به کار می برند، هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک $f: X \to Y$ وجود داشته باشد. همچنین نماد $f: X \sim Y$ به معنای آن است که $f: X \to Y$ یک تناظر یک به یک است.

الف) فرض کنیم φ یک خانواده مجموعه ها است و R رابطه ای روی φ است که با "XRY اگر و تنها اگر X و Y عضوهای φ باشند و $X \sim Y$" تعریف شده است. ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است.

ب) نشان دهید $(0,1) \sim (-1,1)$، $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ و $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

ج) مجموعه های X، Y، Z، و W با شرطهای $X \cap Z = \phi = Y \cap W$، $f: X \sim Y$، و $g: Z \sim W$ مفروضند. ثابت کنید $(X \cup Z) \sim (Y \cup W)$.

د) مجموعه X شمارای نامتناهی گفته می شود هرگاه $X \sim \mathbb{Z}^+$. ثابت کنید هر زیر مجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

۴- اثبات یا رد کنید. (هر قسمت ۱۰ امتیاز)

الف) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg s \to q)] \Rightarrow s$.

ب) هر عدد گویای مثبت را می توان به شکل مجموعی متناهی از جملات متمایزی به شکل $\frac{1}{n}$ نوشت.

ج) عدد !1000 به 248 صفرختم می شود.

د) $\log_2^n \in O(n)$.

ه) دو دستگاه اصل موضوعی با مجموعه اصول موضوع A_1 و A_2 برای علم X وجود دارند به طوری که $A_1 \subset A_2$.

و) عمل دوتایی بسته $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(a,b) = a + b - 3ab$ شرکت پذیر است.

ز) اگر $n \in \mathbb{Z}^+$ و $n \geq 2$، $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$.

ح) تعداد روشهایی که می توان n $(n \geq 0)$ رقم صفر و یک را در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو صفر متوالی پشت سر هم قرار نگیرند برابر با $n+1$ امین عدد فیبوناچی است $(F_0 = F_1 = 1)$.

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فنآوری اطلاعات - دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

مدت پاسخگویی ۱۸۰ دقیقه

توضیح: ۱) مشخصات کامل خود را بر روی برگه پاسخنامه و مسئله ها بنویسید. ۲) پاسخ هر مساله را در یک صفحه جداگانه بنویسید. ۳) آزمون جزوه بسته و کتاب بسته است. ۴) ارجاع به قضیه های مطرح شده در درس یا کتاب مرجع درس مجاز است. ۵) در مسائل (۴) و (۵) پیشنهادی برای حل مساله داده شده است، ارائه راه حلی که از این پیشنهاد بهره نمی گیرد مجاز است.

مساله ۱: مسابقات دوره ای (۳۰ امتیاز، هر قسمت ۱۰ امتیاز)

در یک دوره مسابقات فوتبال n تیم حضور دارند و هر تیم دقیقا یک بار با هر یک از تیمهای دیگر مسابقه می دهد. اگر نتیجه هر مسابقه فقط برد یا باخت بوده، امتیاز هر برد 1 و امتیاز هر باخت -1 باشد

أ) ثابت کنید پس از اتمام مسابقات لیستی از این n تیم می توان از بالا به پایین نوشت به طوری که هر تیم، تیم درست زیر خود را برده باشد.

ب) ثابت کنید پس از اتمام مسابقات مجموع توان دوم برد تیمها با مجموع توان دوم باخت تیمها برابر است.

ج) اگر ایران یکی از تیمها باشد، چند حالت برای نتایج به دست آمده از مسابقات او وجود دارد به طوری که امتیاز او در پایان بازیها عدد مشخص k، $1-n \le k \le n-1$، بوده و هیچگاه در طول مسابقات امتیاز او منفی نباشد؟

مساله ۲: منطق، اعداد و رابطه (۶۰ امتیاز، هر قسمت ۱۰ امتیاز)

هر یک از قسمتهای زیر را اثبات یا رد کنید.

أ) بحث منطقی $[(p \to q) \wedge [(q \wedge r) \to s] \wedge r] \Rightarrow (p \to s)$ معتبر است.

ب) بحث منطقی $[\exists n_0\ P(n_0) \wedge \forall k\,[(k \ge n_0) \to (p(k) \Rightarrow p(k+1))]] \Rightarrow \forall n\,[(n \ge n_0) \to p(n)]$ با فرض اینکه عالم سخن مجموعه اعداد صحیح باشد، یک بحث معتبر است.

ج) هرگاه برای دو عدد صحیح a,b دست کم دو عدد صحیح x,y چنان پیدا شوند که $ax+by=5$، آنگاه بزرگترین شمارنده مشترک a,b برابر 5 است.

د) عبارت $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ بر 9 بخش پذیر است.

ه) اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دو تابع بوده و $gof: A \to C$ یک به یک باشد، آنگاه g یک به یک است.

و) اگر $(A,\mathcal{R})$ یک لتیس بوده و A مجموعه ای متناهی باشد، $(A,\mathcal{R})$ یک بزرگترین عنصر دارد.

مساله ۳: رنگ آمیزی گراف (۳۰ امتیاز، هر قسمت ۱۵ امتیاز)

فرض کنیم گراف $G=(V,E)$ یک گراف بدون جهت باشد. می گوییم این گراف با k رنگ قابل رنگ آمیزی است اگر تابع $c: V \to \{0,1,2,\dots,k-1\}$ موجود باشد به طوری که اگر دو راس $u,v \in V$ نقاط انتهایی یال $e \in E$ باشند، $c(u) \ne c(v)$.

أ) نشان دهید عبارتهای زیر معادلند.

۱) G گراف دو بخشی است.

۲) G با دو رنگ قابل رنگ آمیزی است.

۳) G هیچ دوره ای با طول فرد ندارد.

ب) اگر d ماکزیمم درجه راس در گراف G باشد، ثابت کنید G با $d+1$ رنگ قابل رنگ آمیزی است.

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

خرداد ماه سال ۱۳۸۵ مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت حداکثر امتیاز: ۷۰ امتیاز

۱- n نفر در سمیناری شرکت کرده اند. هر یک از آنها به هنگام ورود به سالن سخنرانی پالتو و کیف خود را به مسئول سالن تحویل می دهد. در پایان سخنرانی، به هر یک از این n نفر به تصادف پالتو و کیفی داده می شود. (الف) به چند طریق می توان پالتوها و کیفها را چنان توزیع کرد که هیچ یک از این n نفر کیف یا پالتوی خود را دریافت نکند؟ (ب) به چند طریق می توان آنها را چنان توزیع کرد که هیچ یک از این n نفر هم پالتو و هم کیف خود را دریافت نکند؟

۲- همه توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که

الف) $f(2)=2$،

ب) $\forall m,n\in\mathbb{N}\,[f(mn)=f(m)f(n)]$، و

ج) $\forall m,n\in\mathbb{N}\,[m>n\to f(m)>f(n)]$.

۳- $n+2$ عدد صحیح مفروضند. ثابت کنید در میان این عددها دو عدد وجود دارند که مجموع یا تفاضلشان بر $2n$ بخش پذیر است.

۴- اعتبار استدلال زیر را برقرار کنید.

$$\begin{array}{l} p\to(q\to r)\\ p\vee s\\ t\to q\\ \neg s\\ \hline \therefore \neg r\to\neg t \end{array}$$

۵- به قسمتهای زیر پاسخ دهید.

(الف) اگر (A,R) مشبکه و A متناهی باشد، ثابت کنید (A,R) بزرگترین و کوچکترین عنصر دارد.

(ب) $|A|=30$ و رابطه هم ارزی R روی A مجموعه A را به رده های هم ارزی A_1، A_2، و A_3 چنان افراز می کند که $|A_1|=|A_2|=|A_3|$. در این صورت $|R|$ را بیابید.

۶- فرض کنید d_n دترمینان ماتریس $n\times n$ ای است که درایه های روی قطر اصلی آن a، درایه های روی قطر بالای قطر اصلی آن b، درایه های روی قطر پایین قطر اصلی آن c، و سایر درایه های آن صفر هستند. رابطه ای بازگشتی برای محاسبه d_n به دست آورده و آن را به ازای $a=b=c=1$ حل کنید.

۷- n عددی طبیعی بزرگتر از یک و p عددی اول است که $n\mid p-1$ و $p\mid n^3-1$. نشان دهید $4p-3$ مربع کامل است.

موفق باشید.

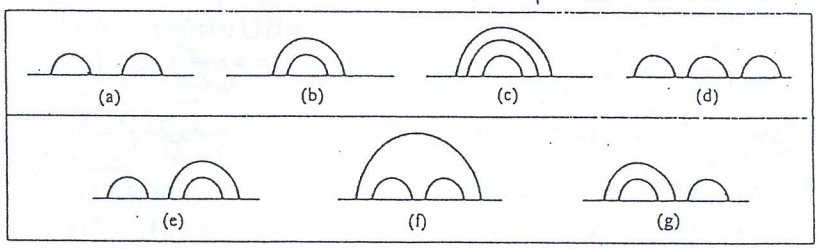
به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دی ماه سال ۱۳۸۵ مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت

۱- فرض کنید n نیم دایره را بر زو و بالای یک خط افقی رسم کنیم به طوری که هیچ دو نیم دایره ای متقاطع نباشند. در شکلهای (a) و (b) زیر دو روش ممکن برای انجام این کار به ازای $n=2$ رسم شده است. نتایج برای $n=3$ در شکلهای (c) تا (g) رسم شده است.



تعداد روشهای ممکن برای انجام این کار را به ازای n بیابید.

۲- فرض کنید در بررسی مفهوم علیت نماد $p \mapsto q$ به معنای آن است که p تنها علت q است. معنای این جمله را با استفاده از تابع ارزش گذاری $v:\Omega \to \{0,1\}$ که در آن Ω مجموعه تمام گزاره ها است بیان کرده و سپس $v((p \wedge q) \mapsto q)$ را بر اساس $v(p)$ و $v(q)$ بیان کنید.

۳- به ازای $A \neq \phi$ فرض کنیم (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم B زیر مجموعه ای ناتهی از A است. رابطه $R' = (B \times B) \cap R$ را در نظر می گیریم. اگر (B,R') تماما مرتب باشد، (B,R') را زنجیری در (A,R) می نامیم. در حالتی که B متناهی باشد، می توانیم عنصرهای B را به صورت $b_1 R' b_2 R' b_3 \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کنیم. در این صورت، می گوییم B زنجیری به طول n است. زنجیری به طول n را ماکسیمال می نامیم هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $a \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ و aRb_1، $b_n Ra$، یا به ازای iای، $1 \le i \le n-1$، $b_i RaRb_{i+1}$.

۳-۱- اگر (B,R') زنجیر ماکسیمالی در (A,R) باشد و عناصر B به شکل $b_1 R' b_2 R' b_3 \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ نوشته شوند، ثابت کنید b_n عنصری ماکسیمال در $(A;R)$ است.

۳-۲- اگر $\mathscr{U} = \{1,2,\ldots,n\}$، مجموعه جزئا مرتب $(\mathscr{P}(\mathscr{U}),\subseteq)$ چند زنجیر ماکسیمال دارد؟

۴- ثابت کنید ناحیه های حاصل از رسم هر تعداد دایره دلخواه در صفحه را می توان با دو رنگ سبز و سفید چنان رنگ کرد که هیچ دو ناحیه مجاوری همرنگ نباشند.

۵- معادله بازگشتی زیر را حل کرده و پاسخ را به ساده ترین شکل ممکن با استفاده از نماد Θ بنویسید.

$$T(n) = \begin{cases} n & \text{if } n=0 \text{ or } n=1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}T^2(n-1) + \frac{1}{2}T^2(n-2) + n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

موفق باشید.

۳- رابطه R روی $F=\{f:Z^{+}\to R\}$ به صورت $\forall g,h\in F[gRh\Leftrightarrow g\in\Theta(h)]$ تعریف می شود. الف) نشان دهید R یک رابطه هم ارزی روی F است. ب) به ازای $f\in F$، فرض کنیم $[f]$ رده هم ارزی f نسبت به R باشد. همچنین، فرض کنیم $\tilde{F}$ مجموعه همه رده های هم ارزی القا شده توسط R باشد. رابطه $\tilde{R}$ را روی $\tilde{F}$ به صورت $\forall[g],[h]\in\tilde{F}\ [[g]\tilde{R}[h]\Leftrightarrow g\in O(h)]$ تعریف می کنیم. نشان دهید $\tilde{R}$ ترتیبی جزئی است.

۴- n خط در صفحه اقلیدسی رسم شده اند به طوری که هیچ سه تای آنها همرس و هیچ دو تای آنها موازی نیستند. چه تعداد ناحیه از رسم این خطوط حاصل شده است.

۵- فرض کنید d_n دترمینان ماتریس $n\times n$ ای است که درایه های روی قطر اصلی آن a، درایه های روی قطر بالای قطر اصلی آن b، درایه های روی قطر پایین قطر اصلی آن c، و سایر درایه های آن صفر هستند. الف) نشان دهید که به ازای $n>2$، $d_n=ad_{n-1}-bcd_{n-2}$. ب) در صورتی که $a=b=c=1$، d_n را محاسبه کنید.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۲)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

آذر ماه ۱۳۸۵ — مهلت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

۱- (شمارش) ۴۴

الف) در یک دوره مسابقات فوتبال n تیم شرکت دارند و بازیها به صورت دوره ای برگزار می شود. برای هر برد $+1$ امتیاز، تساوی 0 امتیاز و باخت -1 امتیاز در نظر گرفته می شود. احتمال اینکه امتیاز یک تیم در پایان بازیها k بوده و در طول بازیها مجموع امتیازاتش منفی نشده باشد چقدر است؟

ب) چند عدد صحیح n هست که در $0 \le n < 1000000$ صدق کنند و مجموع رقمهای آنها کوچکتر از یا برابر 37 باشد؟

$\binom{42}{5} - 9\binom{32}{5} + \binom{6}{2}\binom{22}{5} - \binom{6}{3}\binom{12}{5}$ $\quad a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 37$

$0 \le a_i \le 9 \quad a_i \ge 10$

۲- (منطق) ۴۵

بر طبق نظریات ارسطو دو نوع بی نهایت وجود دارد، بالقوه و واقعی. بی نهایت بالقوه در قالب این جمله بیان می شود که هر عددی در نظر بگیریم عددی بزرگتر از آن وجود دارد. همچنین، بی نهایت واقعی عددی است که از هر عدد دیگری بزرگتر است. او اعتقاد داشت که بی نهایت واقعی وجود ندارد. تعریف این دو نوع بی نهایت را با استفاده از منطق مرتبه اول بیان کنید. کدامیک از این انواع بی نهایت در مجموعه اعداد صحیح مثبت وجود دارد.

$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \; y > x$

$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \; x > y$

۳- (سری هارمونیک) ۴۶

قضیه برتران بیان می کند که به ازای هر عدد صحیح $x > 1$، عدد اولی بین x و $2x$ وجود دارد. با استفاده از این قضیه ثابت کنید به ازای هر $n > 1$ مجموع زیر عددی ناصحیح است.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = k$$

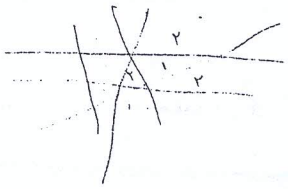
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = k$

$1 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2}{n} = 2k$

۴- (ناحیه های رنگی) ۴۷

با رسم تعداد متناهی خط راست، صفحه اقلیدسی را به ناحیه هایی تقسیم کرده ایم. ثابت کنید می توان با دو رنگ آبی و قرمز، این ناحیه ها را طوری رنگ کرد که هیچ دو ناحیه مجاوری همرنگ نباشند.

موفق باشید.



آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دی ماه 1387 مهلت پاسخگویی: 150 دقیقه

1- فرض کنید $f(x) = 1 + x + x^2$ و $g(x) = \frac{2}{1-2x}$. در این صورت دنباله ای بیابید که تابع مولد آن $f(x)g(x)$ باشد.

2- فرض کنید برای بیان جمله "دقیقا یک عنصر درمجموعه A وجود دارد که خاصیت p را برآورده می کند." از عبارت q به شکل $\exists x\, \forall y\, [y \neq x \longrightarrow (p(x) \wedge \sim p(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده ایم (منظور از $\sim$ نقیض است). کدام گزینه درست است؟ استدلال کافی ارائه کنید.

الف) q همواره معادل منطقی جمله داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل منطقی جمله داده شده است که A مجموعه ای نامتناهی باشد.

ج) هیچگاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله داده شده است.

3- ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$، اگر به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داشته باشیم $0 \leq x_i \leq 1$، آنگاه

$$2^{n-1}(1 + x_1 x_2 \ldots x_n) \geq (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $n - 1$ تا از x_i ها برابر با 1 باشند.

4- الف) ثابت کنید به ازای هر عدد اول p، همه ضرایب چند جمله ای

$$f(x) = (x-1)(x-2) \ldots (x-p+1) - x^{p-1} + 1$$

بر p بخش پذیرند.

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد اول $p \geq 5$، $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv 0 \ (mod\ p^2)$.

5- ابتدا ثابت کنید تابع $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ که برای هر $x,y \in \mathbb{R}^+$ در رابطه زیر صدق می کند تابعی یک به یک است و سپس همه اینگونه توابع را بیابید.

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x)+f(y))$$

6- فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f:\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\}$

الف) رابطه $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$ به ازای $f,g \in \mathcal{F}$ چنین تعریف می کنیم: $f\mathcal{R}g$ اگر $f \in \Theta(g)$.
ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{F}$ است.

ب) به ازای $f \in \mathcal{F}$، فرض کنیم $[f]$ رده هم ارزی f نسبت به رابطه $\mathcal{R}$ باشد. همچنین، فرض کنیم $\mathcal{F}^*$ مجموعه همه رده های هم ارزی القا شده توسط $\mathcal{R}$ باشد. رابطه $\mathcal{S}$ را روی $\mathcal{F}^*$ به ازای $[f],[g] \in \mathcal{F}^*$ چنین تعریف می کنیم: $[f]\mathcal{S}[g]$ اگر $f \in O(g)$. تحقیق کنید آیا $\mathcal{S}$ ترتیب جزئی است.

7- دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ در روابط $a_n = 5a_{n-1} - 7a_{n-2} + 3a_{n-3}$، $a_1 = 2$، $a_2 = 5$ و $a_3 = 12$ صدق می کند. شکل صریح a_n را به دست آورید.

8- به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$، d_n تعداد پریشهای $\{1, 2, \cdots, n\}$ است.

الف) اگر $n > 2$، بدون استفاده از فرمول تعداد پریشها که در قسمت (ت) همین مساله دیده می شود، نشان دهید d_n در رابطه بازگشتی

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \quad d_2 = 1, \ d_1 = 0$$

صدق می کند.

ب) چگونه d_0 را تعریف کنیم تا نتیجه قسمت (الف) به ازای هر $n \geq 2$ معتبر باشد؟

پ) نشان دهید $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$.

ت) فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$. تحقیق کنید $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ و بنابراین،

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر ـ زمستان ۱۳۸۳

مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت

۱- معادله بازگشتی زیر را حل کنید که در آن $a_0 = 0$، $a_1 = 1$ و برای $n \geq 2$

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n(n+1).$$

۲- فرض کنیم g_n تعداد پریشهای n شی مجزا باشد.

الف) نشان دهید $g_n = (n-1)(g_{n-1} + g_{n-2})$.

ب) اگر f_n تعداد جایگشتهای n شی باشد که در آنها دقیقا یکی از اشیا در جای خود باقی می ماند، نشان دهید $|f_n - g_n| = 1$.

۳- اثبات یا رد کنید.

الف) اگر A که یک مجموعه مرتب جزئی است فقط یک عضو ماکسیمال داشته باشد، آن عضو بزرگترین عضو A است.

ب) اگر A که یک مجموعه مرتب جزئی متناهی است فقط یک عضو ماکسیمال داشته باشد، آن عضو بزرگترین عضو A است.

ج) اگر A که یک مجموعه مرتب کلی است فقط یک عضو ماکسیمال داشته باشد، آن عضو بزرگترین عضو A است.

د) مجموعه $B = \{x \in Q \mid 8 < x^3 < 15\}$ با ترتیب معمولی بزرگترین کران پایین دارد ولی کوچکترین کران بالا ندارد.

۴- دو مجموعه مرتب جزئی A و B را متشابه گوییم و با $A \cong B$ نشان می دهیم هرگاه تابع یک به یک و پوششی $f: A \to B$ وجود داشته باشد که $\forall a, a' \in A\, [a \leq a' \Leftrightarrow f(a) \leq f(a')]$.

الف) ثابت کنید اگر A مرتب با ترتیب کلی بوده و $B \cong A$، آنگاه B مرتب با ترتیب کلی است.

ب) حداکثر چند مجموعه مرتب سه عضوی دو به دو نا متشابه وجود دارد؟ دیاگرام هاسه آنها را رسم کنید.

۵- ثابت کنید اگر در یک دسته n نفری هر کسی با دست کم نیمی از افراد آن دسته آشنا باشد، آنگاه این n نفر می توانند دور یک دایره طوری بنشینند که در دو طرف هر کس دو نفر از آشنایانش نشسته باشند.

۶- مجموعه A معادل مجموعه B است و با $A \sim B$ نشان داده می شود هر گاه تابع یک به یک و پوششی $f: A \to B$ وجود داشته باشد.

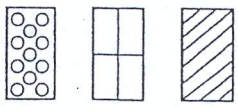
الف) نشان دهید $Z^{>0} \sim Z^{>0} \times Z^{>0}$.

ب) نشان دهید $(-\pi/2, \pi/2) \sim R$.

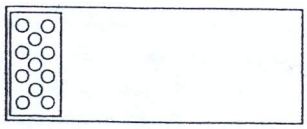
موفق باشید.

مساله ۴: کاشی کردن (۴۰ امتیاز)

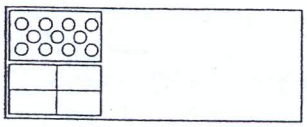
چند روش برای کاشی کردن یک زمین مستطیلی $2\times n$ توسط سه نوع کاشی مستطیلی 2×1 با اشکال زیر وجود دارد به طوری که هیچ دو کاشی هم شکلی مجاور نباشند؟ با توجه به اهمیت شکل کاشیها، 3 روش برای کاشی کردن یک زمین 2×1 و 12 روش برای کاشی کردن یک زمین 2×2 وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد روشهای کاشی کردن زمین مستطیلی $2\times n$ تحت این شرایط را با T_n نشان دهیم، $T_0=1$، $T_1=3$ و $T_2=12$.



برای ساده تر کردن مساله می توان دو دنباله جدید زیر را تعریف کرد:



U_n: تعداد روشهایی که می توان یک زمین مستطیلی $2\times n$ را تحت شرایط گفته شده کاشی کرد به طوری که اولین ستون سمت چپ فقط با یک کاشی پوشش داده شود.

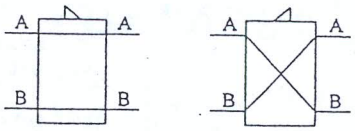


V_n: تعداد روشهایی که می توان یک زمین مستطیلی $2\times n$ را تحت شرایط گفته شده کاشی کرد به طوری که اولین ستون سمت چپ با دو کاشی به صورت افقی پوشش داده شود.

از آنجایی که $T_n=U_n+V_n$، می توان T_n را با بررسی U_n و V_n به دست آورد. بنابراین، ابتدا دستگاهی از روابط بازگشتی بر حسب U_n و V_n به دست آورده و سپس با به کار گیری توابع مولد مناسب و شرایط اولیه لازم، T_n را به دست آورید.

مساله ۵: کلیدهای جایگشت ساز (۴۰ امتیاز)

یک کلید جابگشت ساز کلیدی شامل دو ورودی، یک کنترل کننده و دو خروجی است که دو ورودی را با توجه به وضعیت کنترل کننده به دو خروجی وصل می کند. بنابراین، مطابق شکل زیر، A را به A و B را به B و یا A را به B و B را به A وصل می کند. با استفاده از کلیدهای جایگشت ساز، شبکه ای با n ورودی و n خروجی طراحی کنید به طوری که بتوان فقط با تغییر وضعیت کنترل کننده ها تمام $n!$ جایگشت ممکن از یک ورودی خاص را به دست آورد. (اگر تعداد کلیدهای لازم برای این طراحی را با T_n نشان دهیم، طراحی شما باید به گونه ای باشد که $T_n\in O(n\log n)$.)



به عنوان نمونه برای $n=4$ شبکه را می توان به شکل زیر طراحی کرد (بر روی شکل وضعیت کلیدها برای ایجاد یکی از جایگشتها نشان داده شده است.)

به نام خدا

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فنآوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۳ ساعت

تاریخ: ۱۳۸۲/۱۱/۲

---

۲۸ ۱- (حاصل جمع های متمایز ـ ۳۵ امتیاز) ثابت کنید مجموعه ای هفت عضوی از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از 24 وجود ندارد به طوری که مجموع اعضای همه زیر مجموعه های آن متمایز باشند.

---

۲۹ ۲- (تابع مشخصه مجموعه ـ ٤٥ امتیاز) اگر $\mathscr{U}$ یک عالم و $A \subseteq \mathscr{U}$، تابع مشخصه A، $\chi_A : \mathscr{U} \to \{0,1\}$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

برای مجموعه های $A, B \subseteq \mathscr{U}$ ثابت کنید:

الف) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ که در آن $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$،

ب) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$، و

پ) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.

---

۳۰ ۳- (وزن دنباله های باینری ـ ۵۰ امتیاز) به ازای $I = \{0,1\}$، فرض کنیم $A = \{x_1 x_2 .. x_n \mid x_i \in I, 1 \le i \le n\}$. به عبارت دیگر A مجموعه همه دنباله های باینری با طول n است.

الف) $|A|$ را بیابید.

ب) برای هر $x \in A$ که $x = x_1 x_2 .. x_n$ وزن x را با $w(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ تعریف می کنیم. فرض کنیم رابطه R روی A چنین تعریف می شود: $x R y$ اگر و فقط اگر $w(x) = w(y)$. نشان دهید R یک رابطه هم ارزی روی A است.

پ)در افرازی که R بر A القا می کند، چند رده هم ارزی وجود دارد؟ تعداد عناصر هر یک از رده های هم ارزی را تعیین کنید.

---

۳۱ ٤- (زنجیرها ـ ٦٠ امتیاز) فرض کنیم $A \neq \phi$ و (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم $\phi \neq B \subseteq A$. رابطه R' روی B را به شکل $R' = (B \times B) \cap R$ را در نظر می گیریم. اگر (B,R') تماما مرتب باشد، (B,R') را زنجیری در (A,R) می نامیم. در حالتی که B متناهی است، می توان عناصر B را به صورت $b_1 R' b_2 R' \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کرد. در این صورت B زنجیری با طول n نامیده می شود. زنجیری مانند

B با طول n را ماکسیمال گویند هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد که $a \notin \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و aRb_1 یا b_nRa یا با ازای iای که $1 \le i \le n-1$، b_iRaRb_{i+1}.

الف) فرض کنیم $\mathcal{U} = \{1,2,\cdots,n\}$ و $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$. برای مجموعه جزئا مرتب $(A,\subseteq)$ دو زنجیر ماکسیمال بیابید. این مجموعه جزئا مرتب چند زنجیر ماکسیمال دارد؟

ب) فرض کنیم (B,R') زنجیری ماکسیمال در (A,R) به صورت $b_1R'b_2R'\cdots R'b_{n-1}R'b_n$ باشد. ثابت کنید b_1 عنصری مینیمال و b_n عنصری ماکسیمال در (A,R) است.

پ) فرض کنیم طول زنجیر ماکسیمال در مجموعه جزئا مرتب (A,R) برابر n بوده و $n \ge 2$. فرض کنیم M مجموعه همه عنصرهای ماکسیمال در (A,R) بوده و $D = A - M$. اگر $R' = (D \times D) \cap R$، ثابت کنید طول زنجیر ماکسیمال در (D,R') برابر با $n-1$ است.

۳۲

۵- (پرتاب سکه ـ ۶۰ امتیاز) سکه ای را $2n$ بار پرتاب می کنیم. $(n \ge 0)$

الف) اگر a_n تعداد دنباله هایی مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آنها n رو و n پشت هست، a_n را بر حسب n بیابید.

ب) r، s و t را چنان بیابید که $(r+sx)^t = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

پ) فرض کنیم b_n تعداد دنباله هایی مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آنها، فقط پس از آنکه هر $2n$ پرتاب انجام شد، تعداد روها و پشت ها برای نخستین بار برابر شوند. مثلا اگر $n=3$، $HHHTTT$ و $HHTHTT$ در b_n به حساب می آیند، ولی $HTHHTT$ و $HHTTHT$ به حساب نمی آیند. تعریف می کنیم $b_0 = 0$. نشان دهید به ازای هر $n \ge 1$،

$$a_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$$

ت) فرض کنیم $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$. نشان دهید $g(x) = 1 - \dfrac{1}{f(x)}$ و سپس b_n، $n \ge 1$، را به دست آورید.

۳۳

۶- (قلعه های غیر مهاجم ـ ۵۰ امتیاز) فرض کنیم به a_n روش متفاوت بتوان n قلعه غیر مهاجم را روی یک صفحه شطرنجی n در n طوری قرار داد که نسبت به قطری که گوشه سمت چپ پایین را به گوشه سمت راست بالا متصل می کند، متقارن باشند. رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورده و از روی آن a_{10} را محاسبه کنید.

موفق باشید.

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

خرداد ماه 1388 مهلت پاسخگویی: 120 دقیقه

1- فرض کنید $f(x) = 1 + x + x^2$ و $g(x) = \frac{2}{1-2x}$. در این صورت دنباله ای بیابید که تابع مولد آن $f(x)g(x)$ باشد.

2- فرض کنید برای بیان جمله "دقیقا یک عنصر درمجموعه A وجود دارد که خاصیت p را برآورده می کند." از عبارت q به شکل $\exists x\, \forall y\, [y \neq x \longrightarrow (p(x) \wedge \sim p(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده ایم (منظور از $\sim$ نقیض است). کدام گزینه درست است؟ استدلال کافی ارائه کنید.

الف) q همواره معادل منطقی جمله داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل منطقی جمله داده شده است که A مجموعه ای نامتناهی باشد.

ج) هیچگاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله داده شده است.

3- ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$، اگر به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داشته باشیم $0 \leq x_i \leq 1$، آنگاه

$$2^{n-1}(1 + x_1 x_2 \ldots x_n) \geq (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $n - 1$ تا از x_i ها برابر با 1 باشند.

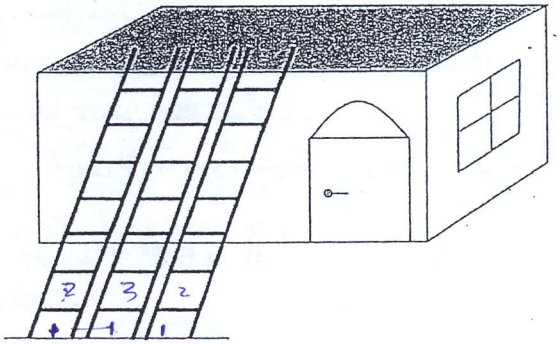
4- ابتدا ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ در رابطه زیر صدق می کند تابعی یک به یک است و سپس همه اینگونه توابع را بیابید.

$$(x + y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y))$$

5- در صورتی که محدودیت های زیر وجود داشته باشد، به چند روش می توان یکی از 6 اتاق یک نفره هتل را به هر یک از 4 مسافر مراجعه کننده به هتل اختصاص داد؟

- به مسافر 1 نمی توان اتاق های 1، 3، یا 6 را اختصاص داد.
- به مسافر 2 نمی توان اتاق های 2 یا 4 را اختصاص داد.
- به مسافر 3 نمی توان اتاق های 3 یا 6 را اختصاص داد.
- به مسافر 4 نمی توان اتاق های 4 یا 5 را اختصاص داد.

6- مطابق شکل زیر سه نردبان 7 پله ای در کنار هم بین حیاط و پشت بام قرار گرفته اند. شخصی می خواهد از حیاط به پشت بام برود. هنگامی که او بر روی پله ای از یک نردبان ایستاده است، می تواند قدم بعدی خود را بر روی پله بعدی از همان نردبان یا پله بعدی از نردبانهای (یا نردبانهای) مجاور قرار دهد. این شخص به چند روش می تواند به پشت بام برسد؟



7- منطق مرتبه اول برای استدلال در مورد درستی کدام یک از جمله های زیر کافی است؟

الف) اگر امروز حتما باران ببارد، شاید امروز باران ببارد.

ب) اگر در هر هفت روز آینده حتما باران ببارد، فردا حتما باران می بارد.

آزمون میان‌ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۲)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

۱- فرض کنید $f(x) = 1 + x + x^2$ و $g(x) = \frac{2}{1-2x}$. در این صورت دنباله ای بیابید که تابع مولد آن $f(x)g(x)$ باشد.

۲- فرض کنید برای بیان جمله "دقیقا یک عنصر درمجموعه A وجود دارد که خاصیت p را برآورده می کند." از عبارت q به شکل $\exists x\, \forall y\, [y \neq x \longrightarrow (p(x) \wedge \sim p(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده ایم (منظور از ~ نقیض است). کدام گزینه درست است؟ استدلال کافی ارائه کنید.

الف) q همواره معادل منطقی جمله داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل منطقی جمله داده شده است که A مجموعه ای نامتناهی باشد.

ج) هیچگاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله داده شده است.

۳- با استفاده از استقرای ریاضی، خوش ترتیبی را ثابت کنید.

۴- به چند روش می توانیم همه حروف واژه INFORMATION را چنان مرتب کنیم که هیچ جفتی از حروف متوالی بیش از یک بار دیده نشود؟

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته ریاضی (گروه ۲)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر - دانشکده مهندسی کامپیوتر

مهلت پاسخگویی : ۸۰ دقیقه

آذرماه ۱۳۸۷

۱- ثابت کنید تعداد روشهایی که می‌توانیم s شی مختلف را در n ظرف متمایز چنان قرار دهیم که m تا از ظرفها هر یک حاوی دقیقاً r شی باشند برابر است با

$$\frac{(-1)^m n!\, s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i (n-i)^{s-ir}}{(i-m)!\,(n-i)!\,(s-ir)!\,(r!)^i}$$

2- چند تا از زیرمجموعه‌های 5 عضوی مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ حاوی هیچ دو عددی با تفاضل کمتر از 3 نیست؟

3- اعتبار استدلال زیر را اثبات یا رد کنید.

$$\left[(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (r \wedge q)) \wedge (r \rightarrow (s \vee t)) \wedge \neg s\right] \Rightarrow t$$

4- جملهٔ "فقط 2 عنصر در مجموعهٔ A وجود دارند که یکی از خواص p یا q را برقرار نمی‌کنند" را در منطق مرتبهٔ اول، صرفاً با استفاده از سورهای $\exists$ و $\forall$ بیان کنید.

$\exists x, y \cdot (\neg p(x) \vee \neg q(x)) \wedge (p(x) \vee q(x))$

$\forall z \cdot (z \neq x, z \neq y) \cdot (p(x) \vee q(x))$

موفق باشید

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دی ماه 1387 مهلت پاسخگویی: 150 دقیقه

$\frac{2}{1-2x} + \frac{2x}{1-2x} + \frac{2x^2}{1-2x}$

1- فرض کنید $f(x) = 1 + x + x^2$ و $g(x) = \frac{2}{1-2x}$. در این صورت دنباله ای بیابید که تابع مولد آن $f(x)g(x)$ باشد.

2- فرض کنید برای بیان جمله "دقیقا یک عنصر درمجموعه A وجود دارد که خاصیت p را برآورده می کند." از عبارت q به شکل $\exists x\, \forall y\, [y \neq x \longrightarrow (p(x) \wedge \sim p(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده ایم (منظور از $\sim$ نقیض است). کدام گزینه درست است؟ استدلال کافی ارائه کنید.

الف) q همواره معادل منطقی جمله داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل منطقی جمله داده شده است که A مجموعه ای نامتناهی باشد.

ج) هیچگاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله داده شده است.

3- ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$، اگر به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داشته باشیم $0 \leq x_i \leq 1$، آنگاه

$$2^{n-1}(1 + x_1 x_2 \ldots x_n) \geq (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $n - 1$ تا از x_i ها برابر با 1 باشند.

4- الف) ثابت کنید به ازای هر عدد اول p، همه ضرایب چند جمله ای

$$f(x) = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - p + 1) - x^{p-1} + 1$$

بر p بخش پذیرند.

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد اول $p \geq 5$، $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اردیبهشت ۱۳۸۸

مهلت پاسخگویی : ۸۵ دقیقه

۱- فرض کنیم n فرد باشد. به چند طریق می‌توانیم 1 تا n و 2 تا 5 را چنان مرتب کنیم که ردیفی حاوی دقیقاً K تا 1 داشته باشیم؟ (فرض بر این است که $K \leq n$)

۲- L_m تعداد عنصرهایی از S را نشان می‌دهد که حداقل در m شرط از t شرط موضوعی صدق کنند. در این صورت ثابت کنید

$$L_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{t-m} \binom{t-1}{m-1} S_t .$$

راهنمایی: نشان دهید $E_t = L_t = S_t$ و سپس ارتباط L_t و L_{t-1} را بیابید. آنگاه نشان دهید $L_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t$ و به ازای هر $1 \leq m \leq t-1$، ارتباط L_m و L_{m+1} و E_m را بیابید.

$L_{t-1} = E_{t-1} + L_t$

۳- برای پیچش دنباله‌های زیر فرمول پیدا کنید

$$a_n = (-1)^n , \quad b_n = (-1)^n , \quad n \geq 0 .$$

۴- اعتبار استدلال زیر را برقرار کنید

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

۵- جمله "دقیقاً دو عدد در مجموعه A وجود دارند که خاصیت P را برقرار کنند" را در منطق مرتبه اول و فقط با به کارگیری سورهای $\exists$ و $\forall$ بنویسید.

موفق باشید

a a a b b b

b

a b a

a b b

۱	۲	۳
۴	۵	۶

۱				۲n

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۱)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ: ۱۳۸۶/۹/۱۱ مهلت پاسخگویی: ۱/۵ ساعت حداکثر امتیاز: ۱۰۰

n a

n b

۱- با استفاده از توابع مولد تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله $3x+4y+5z=n$ را بیابید.

۲- به چند روش می توان اعداد $1,2,\ldots,2n-1,2n$ را در دو ردیف n تایی چنـان قـرار داد که همه سطرها و نیز همه ستونها از کوچک به بزرگ مرتب باشند.

۳- با استدلال دقیق درستی یا عدم درستی گزاره زیر را بررسی کنید.

$$\left(P(n_0)\wedge\left(\left(\forall n_0\le m\le k\ [P(m)]\right)\to P(k+1)\right)\right)\Rightarrow \forall n\ge n_0\ [P(n)]$$

۴- به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) جمله زیر را در قالب منطق مرتبه اول بنویسید.

ماتریسی $m\times n$ وجود دارد که دترمینان هر ماتریس $n\times n$ حاصـل از در کنار هم گذاشتن n سطر متوالی آن معکوس پذیر است.

ب) با به کارگیری معنای ارائه شده برای فرمول های منطق مرتبه اول، نشان دهید فرمول زیر معتبر است.

$$\exists x\in A\ \exists y\in B\ [P(x,y)]\ \Leftrightarrow\ \exists y\in B\ \exists x\in A\ [P(x,y)]$$

۵- ثابت کنید هر عدد صحیح $n\ge 12$ مجموع دو عدد مرکب است.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۱)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

آذر ماه ۱۳۸۵ مهلت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

۱- (شمارش)

الف) می خواهیم جدولی 5×5 از حروف انگلیسی به جز حرف A به صورت زیر ایجاد کنیم. ابتدا یک کلمه معنادار یا بی معنا را که حروف تکراری در آن وجود ندارد از چپ به راست با شروع از ردیف اول این جدول می نویسیم (در صورتی که کلمه طولانی باشد ممکن است در چند ردیف از جدول نوشته شود). سپس، حروف باقیمانده را به ترتیب الفبای انگلیسی در خانه های جدول قرار می دهیم. تعداد جدولهای ممکن را بیابید.

ب) در گروه ریاضی دانشگاهی قرار است تدریس پنج درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، آنالیز، جبر، آمار، و ترکیبیات به پنج نفر از استادان به نامهای A، B، C، D، و E واگذار شود. A حساب دیفرانسیل و انتگرال یا ترکیبیات را تدریس نخواهد کرد، C آمار را تدریس نمی کند، B و E هر دو تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال یا ترکیبیات را رد می کنند، و D تدریس آنالیز را دوست ندارد. مدیر گروه ریاضی به چند طریق می تواند تدریس این پنج درس را به این استادان واگذار کند به طوری که همه راضی باشند؟

۲- (منطق)

در درس معنای مرسوم $p\to q$ با استفاده از تابع $v:\Omega^*\to\{0,1\}$ ارائه شده است. اکنون، معنای دیگری برای $p\to q$ به صورت "رخداد q فقط با حصول رخداد p امکان پذیر است" در نظر می گیریم. تابع v مناسب برای این معنای جدید را بیان کرده و $v(p\to(p\vee q))$ را محاسبه کنید.

۳- (قضیه زکندورف)

ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت را می توان به شکل مجموعی از اعداد فیبوناچی متمایز نوشت.

۴- (اعداد)

ثابت کنید به ازای هر $a,m,n\in\mathbb{Z}^+$ رابطه $\gcd(a^m-1,a^n-1)=a^{\gcd(m,n)}-1$ برقرار است.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تیر ۱۳۸۶

مهلت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱- دو دانشجو به سبب امتیازات تحصیلی برجسته برای تعیین دانشجوی برجسته فیزیک انتخاب شده اند. شورایی مرکب از ۱۴ عضو دانشکده تشکیل شده است و هر عضو یکی از دو نامزد را انتخاب می کند و نام او را پس از نوشتن روی ورقه رای گیری در صندوق می اندازد. فرض کنیم دانشجوی اول ۹ رای و دانشجوی دوم ۵ رای بیاورد. به شرط آنکه هر بار یک رای از صندوق استخراج شود، به چند روش می توان ورقه های رای گیری را استخراج کرد به طوری که همواره از بین آرای استخراج شده آرای بیشتری به نفع دانشجوی اول باشد؟ (۲ امتیاز)

۲- در صورتی که d_n تعداد پریشهای n شی باشد، نشان دهید به $d_{n-1}+d_n$ روش می توان اعداد ۱، ۲، ... ، n را در یک ردیف مرتب کرد به طوری که هیچیک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ...، $(n-1)n$ رخ ندهد. (۲ امتیاز)

۳- فرض کنید $(s \Uparrow t) \Leftrightarrow (s \leftrightarrow (s \wedge t))$. در صورتی که $v:\Omega \to \{0,1\}$ تابع ارزش دهی و Ω مجموعه تمام گزاره ها باشد، $v(s \Uparrow t)$ را بیابید و سپس، با استفاده از آن، ارزش $p \Uparrow (p \to q)$ را به دست آورید. (۳ امتیاز)

۴- فرض کنیم A و B دو مجموعه متناهی و جدا از هم از اعداد صحیح هستند به طوری که برای هر $x \in A \cup B$، $x+1 \in A$ یا $x-2 \in B$. ثابت کنید تعداد عناصر مجموعه A دو برابر تعداد عناصر مجموعه B است. (۳ امتیاز)

۵- مثالی برای تابعی یک به یک مانند $f:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ بیاورید که $f \in O(1)$. (۱ امتیاز)

۶- اثبات یا رد کنید. (۴ امتیاز)

الف) اگر (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب بوده ولی تماما مرتب نباشد و $\phi \neq B \subset A$، آنگاه $(B, B \times B \cap R)$ مجموعه ای تماما مرتب است.

ب) اگر (A,R) مشبکه باشد، آنگاه مجموعه ای تماما مرتب است.

ج) اگر (A,R) مشبکه و A متناهی باشد، (A,R) کوچکترین عنصر دارد.

د) اگر (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد، آنگاه عنصری مینیمال دارد.

۷- فرض کنید S مجموعه ای از n عدد صحیح باشد. ثابت کنید زیر مجموعه ای ناتهی از S وجود دارد که مجموع اعداد موجود در آن بر n بخش پذیر است. (۲ امتیاز)

۸- به چند روش می توان ستونی از n جعبه یک شکل قرمز، سفید، سبز، و آبی درست کرد به طوری که هیچ دو جعبه سفید روی هم قرار نگیرند. (۳ امتیاز)

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دی ماه سال ۱۳۸۴ مهلت پاسخگویی: ۲/۵ ساعت

۱- (منطق، اعداد، رابطه ها)

اثبات یا رد کنید.

۱-۱- برای دو رشته باینری n بیتی a و b، $a \oplus b$ رشته ای n بیتی است که از عمل یای انحصاری نظیر به نظیر بیتهای a و b به دست می آید. همچنین $\bar{a}$ رشته ای n بیتی است که هر بیت آن نقیض بیت متناظر در a است. در این صورت $\overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b$. (۲۰ امتیاز)

۱-۲- تعداد سه تاییهای مرتب (x,y,z) موجود در مجموعه $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^3$ با خاصیت $\max\{x,y\} < z$ برابر با $C(n+1,2)+2C(n+1,3)$ است. (۲۰ امتیاز)

۱-۳- اگر p و q اعدادی اول، $n=pq$، و $0<m<n$، آنگاه $m^{k\phi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$ که در آن ϕ تابع فای اویلر و $k \in \mathbb{Z}^+$ است. (۲۰ امتیاز)

۱-۴- هرگاه (A,R) مشبکه باشد، (A,R) بزرگترین و کوچکترین عنصر دارد. (۲۰ امتیاز)

۱-۵- هرگاه R_1 و R_2 دو رابطه متقارن روی A بوده و $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$، آنگاه $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ که در آن $R_1 \circ R_2$ ترکیب رابطه R_1 با R_2 است. (۲۰ امتیاز)

۲- (معادله تابعی)

تمام توابع $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را بیابید که $\forall m,n \in \mathbb{Z}\ [f(m+f(n)) = f(m)+n]$. (۵۰ امتیاز)

۳- (زنجیرها)

به ازای $A \neq \phi$ فرض کنیم (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم B زیر مجموعه ای ناتهی از A است. رابطه $R' = (B \times B) \cap R$ را در نظر می گیریم. اگر (B,R') تماما مرتب باشد، (B,R') را زنجیری در (A,R) می نامیم. در حالتی که B متناهی باشد، می توانیم عنصرهای B را به صورت $b_1 R' b_2 R' b_3 \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کنیم. در این صورت، می گوییم B زنجیری به طول n است. زنجیری به طول n را ماکسیمال می نامیم هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $a \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ و aRb_1، $b_n Ra$، یا به ازای iای، $1 \le i \le n-1$، $b_i R a R b_{i+1}$.

۳-۱- اگر (B,R') زنجیر ماکسیمالی در (A,R) باشد و عناصر B به شکل $b_1 R' b_2 R' b_3 \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ نوشته شوند، ثابت کنید b_n عنصری ماکسیمال در (A,R) است. (۲۵ امتیاز)

۳-۲- اگر $\mathcal{U} = \{1,2,\ldots,n\}$، مجموعه جزئا مرتب $(\mathcal{P}(\mathcal{U}),\subseteq)$ چند زنجیر ماکسیمال دارد؟ (۲۵ امتیاز)

۴- (رنگ آمیزی قطاعهای دایره)

دایره ای را به $n \ge 3$ قطاع مساوی تقسیم کرده ایم. می خواهیم این قسمتها را با k رنگ، رنگ آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو قطاع مجاوری همرنگ نباشند. اگر a_n تعداد روشهای ممکن برای انجام این کار باشد، a_n را به ازای $n \ge 3$ بیابید. (۵۰ امتیاز)

۵- (دستگاه روابط بازگشتی)

دستگاه رابطه های بازگشتی زیر را که در آن $a_0 = 0$، $b_0 = 1$، و $n \ge 0$ حل کنید. (۵۰ امتیاز)

$$a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2$$
$$b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1$$

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته ـ خرداد ماه ۱۳۸۳

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت و نیم

۱- الف) دانش آموزی n، $n \geq 2$، کتاب مختلف دارد. به چند طریق می تواند کتابهایش را در دو قفسه بچیند به طوری که در هر قفسه حداقل یک کتاب باشد؟

ب) تعداد جایگشتهای $(1,2,\ldots,n)$، مانند $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$، $n!$ است. چه تعداد از این جایگشتها در شرطهای $s_i \geq i-2$، $1 \leq i \leq n$، صدق می کنند؟

ج) در طول یک کنفرانس 12 هفته ای درباره ریاضیات، ریحانه 7 نفر از همکلاسان دانشکده خود را ملاقات کرد. او در طول این کنفرانس، به هنگام صرف ناهار، هر یک از دوستانش را 35 بار، هر جفت از دوستان خود را 16 بار، هر مجموعه سه نفری از دوستان خود را 8 بار، هر مجموعه چهار نفری از دوستان خود را 4 بار، هر مجموعه پنج نفری از دوستان خود را 2 بار، و هر مجموعه شش نفری از آنها را 1 بار ملاقات کرد، ولی هرگز هر هفت نفر را با هم ملاقات نکرد. اگر ریحانه در طول برگزاری کنفرانس هر روز ناهار خورده باشد، آیا هرگز هنگام صرف ناهار تنها بوده است؟

۲- الف) اثبات یا رد کنید.

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

ب) جمله "حاصل جمع هر دو عدد حقیقی دلخواه، عددی یکتاست." را با استفاده از نمادهای منطق مرتبه اول بنویسید.

۳- ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n می توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به طوری که هیچ دو دایره ای متقاطع نباشند.

۴- ثابت کنید که یک و فقط یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $2^8 + 2^{11} + 2^n$ مربع کامل باشد.

۵- الف) فرض کنیم $f: X \to Y$، و به ازای هر $i \in I$، فرض کنیم $A_i \subseteq X$. ثابت کنید اگر f یک به یک باشد، آنگاه $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

ب) همه توابع $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbf{R}^+$،

$$(x+y)f(yf(x)) = x^2 f(f(x)+f(y)).$$

به نام خدا

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فنآوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۳ ساعت

تاریخ: ۱۳۸۲/۱۱/۲

۱- **(حاصل جمع های متمایز ـ ۳۵ امتیاز)** ثابت کنید مجموعه ای هفت عضوی از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از 24 وجود ندارد به طوری که مجموع اعضای همه زیر مجموعه های آن متمایز باشند.

۲- **(تابع مشخصه مجموعه ـ ٤٥ امتیاز)** اگر $\mathscr{U}$ یک عالم و $A \subseteq \mathscr{U}$، تابع مشخصه A، $\chi_A : \mathscr{U} \to \{0,1\}$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

برای مجموعه های $A, B \subseteq \mathscr{U}$ ثابت کنید:

الف) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ که در آن $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$،

ب) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$، و

پ) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.

۳- **(وزن دنباله های باینری ـ ۵۰ امتیاز)** به ازای $I = \{0,1\}$، فرض کنیم $A = \{x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_i \in I, 1 \le i \le n\}$. به عبارت دیگر A مجموعه همه دنباله های باینری با طول n است.

الف) $|A|$ را بیابید.

ب) برای هر $x \in A$ که $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ وزن x را با $w(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ تعریف می کنیم. فرض کنیم رابطه R روی A چنین تعریف می شود: $x R y$ اگر و فقط اگر $w(x) = w(y)$. نشان دهید R یک رابطه هم ارزی روی A است.

پ)در افرازی که R بر A القا می کند، چند رده هم ارزی وجود دارد؟ تعداد عناصر هر یک از رده های هم ارزی را تعیین کنید.

٤- **(زنجیرها ـ ٦٠ امتیاز)** فرض کنیم $A \neq \phi$ و (A,R) مجموعه ای جزئا مرتب باشد و فرض کنیم $\phi \neq B \subseteq A$. رابطه R' روی B را به شکل $R' = (B \times B) \cap R$ را در نظر می گیریم. اگر (B,R') تماما مرتب باشد، (B,R') را زنجیری در (A,R) می نامیم. در حالتی که B متناهی است، می توان عناصر B را به صورت $b_1 R' b_2 R' \cdots R' b_{n-1} R' b_n$ مرتب کرد. در این صورت B زنجیری با طول n نامیده می شود. زنجیری مانند

به نام خدا

آزمون پایان ترم درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر ـ زمستان ۱۳۸۳

مهلت پاسخگویی: ۲ ساعت

۱- معادله بازگشتی زیر را حل کنید که در آن $a_0 = 0$، $a_1 = 1$ و برای $n \geq 2$

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n(n+1).$$

۲- فرض کنیم g_n تعداد پریشهای n شی مجزا باشد.

الف) نشان دهید $g_n = (n-1)(g_{n-1} + g_{n-2})$.

ب) اگر f_n تعداد جایگشتهای n شی باشد که در آنها دقیقا یکی از اشیا در جای خود باقی می ماند، نشان دهید $|f_n - g_n| = 1$.

۳- اثبات یا رد کنید.

الف) اگر A که یک مجموعه مرتب جزئی است فقط یک عضو ماکسیمال داشته باشد، آن عضو بزرگترین عضو A است.

ب) اگر A که یک مجموعه مرتب جزئی متناهی است فقط یک عضو ماکسیمال داشته باشد، آن عضو بزرگترین عضو A است.

ج) اگر A که یک مجموعه مرتب کلی است فقط یک عضو ماکسیمال داشته باشد، آن عضو بزرگترین عضو A است.

د) مجموعه $B = \{x \in \mathrm{Q} \mid 8 < x^3 < 15\}$ با ترتیب معمولی بزرگترین کران پایین دارد ولی کوچکترین کران بالا ندارد.

٤- دو مجموعه مرتب جزئی A و B را متشابه گوییم و با $A \cong B$ نشان می دهیم هرگاه تابع یک به یک و پوششی $f: A \to B$ وجود داشته باشد که $\forall a, a' \in A\,[a \leq a' \Leftrightarrow f(a) \leq f(a')]$.

الف) ثابت کنید اگر A مرتب با ترتیب کلی بوده و $B \cong A$، آنگاه B مرتب با ترتیب کلی است.

ب) حداکثر چند مجموعه مرتب سه عضوی دو به دو نا متشابه وجود دارد؟ دیاگرام هاسه آنها را رسم کنید.

۵- ثابت کنید اگر در یک دسته n نفری هر کسی با دست کم نیمی از افراد آن دسته آشنا باشد، آنگاه این n نفر می توانند دور یک دایره طوری بنشینند که در دو طرف هر کس دو نفر از آشنایانش نشسته باشند.

٦- مجموعه A معادل مجموعه B است و با $A \sim B$ نشان داده می شود هر گاه تابع یک به یک و پوششی $f: A \to B$ وجود داشته باشد.

الف) نشان دهید $\mathrm{Z}^{>0} \sim \mathrm{Z}^{>0} \times \mathrm{Z}^{>0}$.

ب) نشان دهید $(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathrm{R}$.

موفق باشید.

B با طول n را ماکسیمال گویند هرگاه عنصری مانند $a \in A$ وجود نداشته باشد که $a \notin \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ و aRb_1 یا b_nRa یا با ازای iای که $1 \le i \le n-1$، b_iRaRb_{i+1}.

الف) فرض کنیم $\mathscr{U} = \{1,2,\cdots,n\}$ و $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$. برای مجموعه جزئا مرتب $(A,\subseteq)$ دو زنجیر ماکسیمال بیابید. این مجموعه جزئا مرتب چند زنجیر ماکسیمال دارد؟

ب) فرض کنیم (B,R') زنجیری ماکسیمال در (A,R) به صورت $b_1R'b_2R'\cdots R'b_{n-1}R'b_n$ باشد. ثابت کنید b_1 عنصری مینیمال و b_n عنصری ماکسیمال در (A,R) است.

پ) فرض کنیم طول زنجیر ماکسیمال در مجموعه جزئا مرتب (A,R) برابر n بوده و $n \ge 2$. فرض کنیم M مجموعه همه عنصرهای ماکسیمال در (A,R) بوده و $D = A - M$. اگر $R' = (D \times D) \cap R$، ثابت کنید طول زنجیر ماکسیمال در (D,R') برابر با $n-1$ است.

۵- **(پرتاب سکه ـ ۶۰ امتیاز)** سکه ای را $2n$ بار پرتاب می کنیم. ($n \ge 0$)

الف) اگر a_n تعداد دنباله هایی مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آنها n رو و n پشت هست، a_n را بر حسب n بیابید.

ب) r، s و t را چنان بیابید که $(r+sx)^t = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

پ) فرض کنیم b_n تعداد دنباله هایی مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آنها، فقط پس از آنکه هر $2n$ پرتاب انجام شد، تعداد روها و پشت ها برای نخستین بار برابر شوند. مثلا اگر $n=3$، $HHHTTT$ و $HHTHTT$ در b_n به حساب می آیند، ولی $HTHHTT$ و $HHTTHT$ به حساب نمی آیند. تعریف می کنیم $b_0 = 0$. نشان دهید به ازای هر $n \ge 1$،

$$a_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$$

ت) فرض کنیم $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$. نشان دهید $g(x) = 1 - \frac{1}{f(x)}$ و سپس b_n، $n \ge 1$، را به دست آورید.

۶- **(قلعه های غیر مهاجم ـ ۵۰ امتیاز)** فرض کنیم به a_n روش متفاوت بتوان n قلعه غیر مهاجم را روی یک صفحه شطرنجی n در n طوری قرار داد که نسبت به قطری که گوشه سمت چپ پایین را به گوشه سمت راست بالا متصل می کند، متقارن باشند. رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورده و از روی آن a_{10} را محاسبه کنید.

موفق باشید.

آزمون میان ترم درس ساختمانهای گسسته (گروه ۱)

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهلت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

۱- فرض کنید n فرد باشد. به چند روش می توان n تا 1 و r تا 0 را چنان مرتب کرد که ردیفی حاوی دقیقا k تا 1، $k \leq n$، داشته باشیم؟

۲- ثابت کنید تعداد عنصرهایی از S که دست کم m شرط از t شرط داده شده را داشته باشند از رابطه

$$L_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{t-m} \binom{t-1}{m-1} S_t$$

به دست می آید.

راهنمایی:

- نخست نشان دهید $E_t = L_t = S_t$.
- E_{t-1} چیست و L_t چه ارتباطی با L_{t-1} دارد؟
- نشان دهید $L_{t-1} = S_{t-1} - \binom{t-1}{t-2} S_t$.
- به ازای هر $1 \leq m \leq t-1$، L_m، L_{m+1}، و E_m چه ارتباطی با هم دارند؟

۳- در کیسه ای 6 مهره یکسان قرار دارد که اعداد 1 تا 6 را روی آنها نوشته ایم. به تعداد دفعات دلخواه مهره ای را از کیسه بیرون می کشیم و عدد روی مهره را می خوانیم (در هر بار مهره را به کیسه باز می گردانیم). تحقیق کنید که $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ تابع مولد برای تعداد حالاتی است که مجموع اعداد خوانده شده برابر n باشد.

۴- اعتبار استدلال زیر را برقرار کنید.

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \\ p \vee s \\ t \longrightarrow q \\ \sim s \\ \hline \therefore \sim r \longrightarrow \sim t \end{array}$$

آزمون پایانی درس ساختمانهای گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

خرداد ماه 1388 مهلت پاسخگویی: 120 دقیقه

1- فرض کنید $f(x) = 1 + x + x^2$ و $g(x) = \frac{2}{1-2x}$. در این صورت دنباله ای بیابید که تابع مولد آن $f(x)g(x)$ باشد.

2- فرض کنید برای بیان جمله "دقیقا یک عنصر درمجموعه A وجود دارد که خاصیت p را برآورده می کند." از عبارت q به شکل $\exists x\, \forall y\, [y \neq x \longrightarrow (p(x) \wedge \sim p(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده ایم (منظور از $\sim$ نقیض است). کدام گزینه درست است؟ استدلال کافی ارائه کنید.

الف) q همواره معادل منطقی جمله داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل منطقی جمله داده شده است که A مجموعه ای نامتناهی باشد.

ج) هیچگاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله داده شده است.

3- ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$، اگر به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داشته باشیم $0 \leq x_i \leq 1$، آنگاه

$$2^{n-1}(1 + x_1 x_2 \ldots x_n) \geq (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $n - 1$ تا از x_i ها برابر با 1 باشند.

4- ابتدا ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ در رابطه زیر صدق می کند تابعی یک به یک است و سپس همه اینگونه توابع را بیابید.

$f(x) = u$

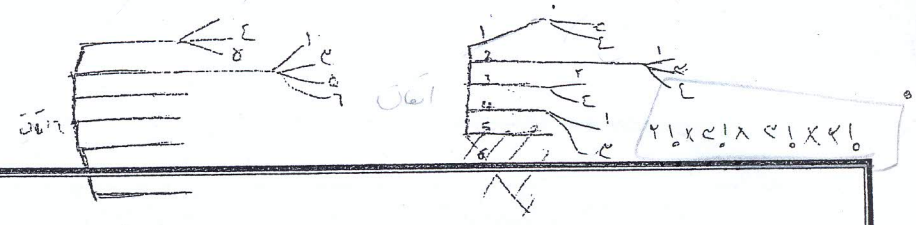
$$(x + y) f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y))$$

$$(x+y) f(yu) = x^2 f(u + f(y))$$

$$\frac{f(yu)}{f(u+f(y))} = \frac{x^2}{x+y} \qquad f(yu) = x^2 \qquad f(u + f(y)) = x + y$$

$$\sqrt{f(yu)} = x$$

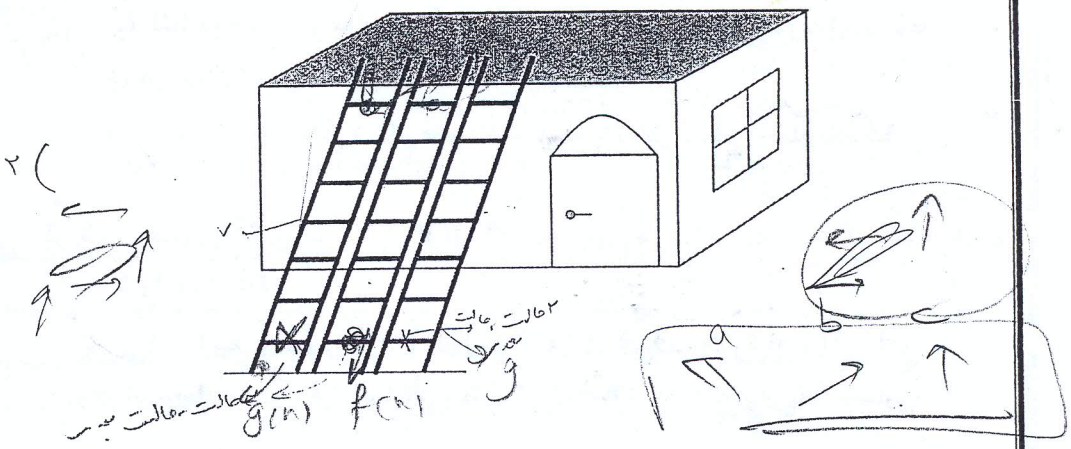
$$f(u + f(y)) = \sqrt{f(yu)} + y$$



5- در صورتی که محدودیت های زیر وجود داشته باشد، به چند روش می توان یکی از 6 اتاق یک نفره هتل را به هر یک از 4 مسافر مراجعه کننده به هتل اختصاص داد؟

- به مسافر 1 نمی توان اتاق های 1، 3، یا 6 را اختصاص داد.
- به مسافر 2 نمی توان اتاق های 2 یا 4 را اختصاص داد.
- به مسافر 3 نمی توان اتاق های 3 یا 6 را اختصاص داد.
- به مسافر 4 نمی توان اتاق های 4 یا 5 را اختصاص داد.

6- مطابق شکل زیر سه نردبان 7 پله ای در کنار هم بین حیاط و پشت بام قرار گرفته اند. شخصی می خواهد از حیاط به پشت بام برود. هنگامی که او بر روی پله ای از یک نردبان ایستاده است، می تواند قدم بعدی خود را بر روی پله بعدی از همان نردبان یا پله بعدی از نردبان (یا نردبانهای) مجاور قرار دهد. این شخص به چند روش می تواند به پشت بام برسد؟



7- منطق مرتبه اول برای استدلال در مورد درستی کدام یک از جمله های زیر کافی است؟

الف) اگر امروز حتما باران ببارد، شاید امروز باران ببارد.

ب) اگر در هر هفت روز آینده حتما باران ببارد، فردا حتما باران می بارد.

$f(1) = 3$

$g(1) = 2$

$$\begin{cases} f(n) = 2g(n-1) + f(n-1) \\ g(n) = g(n-1) + f(n-1) \end{cases}$$

آزمون پایانی درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تیر ماه ۱۳۹۷ مهلت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

۱- چند روش برای کاشی کردن یک زمین مستطیلی $2 \times n$ با استفاده از کاشی‌های مستطیلی 2×1 از سه رنگ مختلف سبز، سفید، و زرد وجود دارد به طوری که هیچ دو کاشی مجاوری همرنگ نباشند؟ (دو کاشی مجاور آن دو کاشی را می‌گوییم که طول یا عرض آنها در کنار هم است.)

۲- نشان دهید گزاره

$$\big(P(0) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}. P(k) \to P(k+1)\big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}. P(n)$$

گزاره

$$\Big(\forall m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}. \big(\forall k < m. P(k)\big) \to P(m)\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}. P(n)$$

را نتیجه می‌دهد.

۳- مجموعه $\mathcal{B}$ از تمام رشته‌های بیتی با تعداد صفرها و یک‌های برابر را به صورت استقرایی تعریف کنید و آنگاه با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید تعریف شما درست است.

۴- رابطه‌ها نیز مانند توابع ترکیب می‌شوند. اگر $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ و $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ دو رابطه باشند، ترکیب این دو رابطه $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq A \times C$ اینگونه تعریف می‌شود که $(x, z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ اگر و فقط اگر $y \in B$ وجود داشته باشد که $(x, y) \in \mathcal{R}$ و $(y, z) \in \mathcal{S}$. همچنین، برای رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی مجموعه‌ای مانند A، رابطه $\mathcal{R}^n$ به صورت $\mathcal{R}^0 = \{(x, x) | x \in A\}$ و $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$ تعریف می‌شود.

الف) ثابت کنید $\mathcal{R}$ رابطه تعدی است اگر $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$.

ب) برای رابطه داده شده $\mathcal{R}$، بستار تعدی $\mathcal{R}$ با اضافه کردن زوج‌های (x, z) به رابطه مادامی که زوج‌های (x, y) و (y, z) در رابطه حاصل وجود داشته باشند به دست می‌آید. به عبارت دیگر، این کار آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا دیگر امکان اضافه کردن چنین زوجی وجود نداشته باشد. ثابت کنید $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots$ بستار تعدی $\mathcal{R}$ است.

پ) فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ باشد و $(x, y) \in \mathcal{R}$ اگر و فقط اگر $n \notin x$ وجود داشته باشد که $y = x \cup \{n\}$. بستار تعدی $\mathcal{R}$ را به دست آورید.

Powerset

۵- با استدلال کافی نشان دهید کدام مورد زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) دو مجموعهٔ مرتب جزئی را متشابه می نامیم هرگاه تابعی یک به یک، پوششی، و حفظ کننده ترتیب از یکی به دیگری موجود باشد. دو مجموعهٔ مرتب $(A, \preccurlyeq)$ و $(X_A = \{S(a)\}_{a\in A}, \subseteq)$، که در آن $S(a) = \{x | x \in A, x \preccurlyeq a\}$، متشابهند.

ب) F مجموعهٔ همهٔ توابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و

$$\mathcal{R} = \{(f, g) \in F \times F \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \leq g(x)\}.$$

در این صورت، $(F, \mathcal{R})$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی است.

پ) اگر $f: X \to Y$ یک به یک و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه های X باشد، آنگاه $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

ت) $(A, \subseteq)$ مجموعه ای مرتب جزئی و $B = \{a_i\}_{i\in I}$ زیر مجموعه ای از A است. در این صورت، اگر B کران بالا داشته باشد، $\bigcup_{i\in I} a_i$ نیز کران بالای B است.

۶- رابطه بازگشتی زیر را حل کنید.

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n; \quad n \geq 0$$
$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = 3$$

۷- یک اتومورفیزم گراف G یک ایزومورفیزم از G به G است. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است.

الف) مسیری با رأسهای $\{1,2,3,4\}$ و یالهای $\{12,23,34\}$ دو اتومورفیزم دارد.

ب) اتومورفیزم‌های G جایگشتهایی از رأسهای G هستند که اگر هم به سطرها و هم به ستونهای ماتریس همسایگی G اعمال شوند، ماتریس همسایگی تغییر نمی‌کند.

پ) گراف کامل دوبخشی $K_{3,5}$ دارای 720 اتومورفیزم است.

ت) گراف کامل دوبخشی $K_{3,3}$ دارای 36 اتومورفیزم است.

آزمون میان‌ترم درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اردیبهشت ۱۳۹۷ مهلت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

۱- ثابت کنید تعداد روشهایی که می توان s شیء مختلف را در n ظرف متمایز چنان قرار داد که m تا از ظرفها هر یک حاوی دقیقا r شیء باشد برابر با $\frac{(-1)^m n! s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i (n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i}$ است.

۲- فرض کنیم $p(n,k)$ تعداد افرازهای n باشد که در آنها بزرگترین بخش k است.

الف) ثابت کنید $\sum_{n=0}^{\infty} p(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$.

ب) ثابت کنید $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$.

۳- به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$، d_n تعداد پریش‌های $\{1, 2, \cdots, n\}$ است.

الف) اگر $n > 2$، بدون استفاده از فرمول تعداد پریش‌ها که در قسمت (ت) همین مساله دیده می‌شود، نشان دهید d_n در رابطه بازگشتی

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \quad d_2 = 1, \ d_1 = 0$$

صدق می کند .

ب) چگونه d_0 را تعریف کنیم تا نتیجه قسمت (الف) به ازای هر $n \geq 2$ معتبر باشد؟

پ) نشان دهید $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$.

ت) فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$. تحقیق کنید $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ و بنابراین،

$$d_n = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

۴- الف) استدلال زیر را در قالب نمادهای منطق گزاره ای بنویسید. آنگاه، یا درستی استلال را ثابت کنید یا مثال نقضی بیاورید که نشان دهد استدلال نامعتبر است.

«قرارداد به سر خواهد رسید اگر، و فقط اگر، در ماه بهمن پنجره های جدید در خانه نصب شوند. اگر در ماه بهمن پنجره های جدید نصب شوند، ریحانه می تواند روز اول اسفند به خانه جدیدش نقل مکان کند. اگر ریحانه نتواند روز اول اسفند نقل مکان کند، آنگاه باید اجاره اسفند ماه آپارتمان خود را بپردازد. در ماه بهمن پنجره ها نصب شده اند یا ریحانه باید اجاره اسفند آپارتمان خود را بپردازد. بنابراین، ریحانه مجبور نخواهد بود اجاره اسفند ماه را بپردازد.»

ب) ارزش گزاره زیر را بر حسب ارزش اتم‌های آن بیابید.

$$\big((p \to (q \leftrightarrow r)) \Rightarrow ((q \to r) \to \neg p)\big) \to (p \to \neg q)$$

۵- گزاره «دقیقا دو عدد صحیح وجود دارند که برقراری خاصیت P در مورد یکی برقراری خاصیت Q را در مورد دیگری ایجاب می کند.» را با استفاده از نمادهای منطق مرتبه اول و فقط با استفاده از گزاره‌های سوردار عمومی و وجودی بیان کنید. توجه داشته باشید که گزاره‌های سوردار فقط به یکی از دو شکل $\forall x.\varphi(x)$ و $\exists x.\varphi(x)$ هستند

آزمون میان‌ترم درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اردیبهشت ۱۳۹۷ مهلت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

۱- چهار متقاضی شغل هر یک باید به مدت ۳۰ دقیقه مصاحبه شوند که ۱۵ دقیقه آن با مدیرعامل و ۱۵ دقیقه دیگر آن با مدیر تولید است (مصاحبه‌ها در اتاقهای مجزا برگزار می‌شود و مصاحبه از ساعت ۹ صبح آغاز می‌شود.

الف) به چند روش می‌توان این مصاحبه‌ها را برای یک بازه زمانی یک‌ساعته زمان‌بندی کرد؟

ب) یکی از متقاضیان به نام خشایار درست در ساعت ۹ صبح می‌رسد. احتمال آنکه دو مصاحبه او پشت سر هم باشند چه‌قدر است؟

پ) متقاضی دیگری به نام سحر درست در ساعت ۹ صبح می‌رسد و امیدوار است که مصاحبه او به موقع تمام شود تا محل مصاحبه را در ساعت ۹:۵۰ صبح به منظور قرار دیگری ترک کند. احتمال آنکه او بتواند به موقع محل مصاحبه را ترک کند چه‌قدر است؟

۲- فرض کنیم $p(n,k)$ تعداد افرازهای n باشد که در آنها بزرگترین بخش k است.

الف) ثابت کنید $\sum_{n=0}^{\infty} p(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$.

ب) ثابت کنید $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$.

۳- دنباله b_n با $b_0 = 1$ و رابطه $b_{n+1} = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \dots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0$ برای $n \geq 0$ تعریف شده است.

الف) با استفاده از مفهوم پیچش دنباله ها، نشان دهید تابع مولد این دنباله $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ است.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، b_n را به دست آورید.

۴- به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف) ارزش گزاره زیر را بر حسب ارزش اتم‌های آن بیابید.

$$\big((\neg p \to (q \to r)) \Rightarrow (q \to (p \vee r))\big) \to p$$

ب) استدلال زیر را در قالب نمادهای منطق گزاره ای بنویسید. آنگاه، یا درستی استدلال را ثابت کنید یا مثال نقضی بیاورید که نشان دهد استدلال نامعتبر است.

اگر آرین به میدان اسب‌دوانی برود، آنگاه رویا عصبانی خواهد شد. اگر آرمان تمام شب را بازی کند، آنگاه مژگان عصبانی خواهد شد. اگر رویا یا مژگان عصبانی شود، آنگاه رضا (وکیل آنها) مطلع خواهد شد. رضا چیزی در این باره از این دو موکل نشنیده است. در نتیجه، آرین به میدان اسب‌دوانی نرفته است و آرمان تمام شب را بازی نکرده است.

۵- به دو قسمت زیر پاسخ دهید.

الف) گزاره باز «x زوج است.» را با $Even(x)$ و گزاره باز «x اول است.» را با $Prime(x)$ نشان می‌دهیم. با استفاده از این گزاره‌های باز، گزاره «هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مجموع دو عدد اول است.» را، که به حدس گلدباخ معروف است، با استفاده از نمادهای منطق مرتبه اول بیان کنید. توجه داشته باشید که گزاره‌های سوردار فقط به یکی از دو شکل $\forall x.p(x)$ و $\exists x.p(x)$ هستند.

ب) گزاره «دقیقا دو عنصر از مجموعه A وجود دارند که خاصیت p را برآورده می‌کنند.» را با استفاده از نمادهای منطق مرتبه اول و فقط با استفاده از گزاره‌های سوردار عمومی و وجودی بیان کنید.

آزمون پایانی درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تیر ماه ۱۳۹۶ مهلت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱- فرض کنید دنباله $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ با $h_0 = 5$، $h_1 = 13$، و $h_n = 4h_{n-1} + 5h_{n-2}$ برای $n \geq 2$ تعریف شده است. جمله عمومی این دنباله را از روی تابع مولد آن به دست آورید.

۲- فرض کنیم $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{u, v, w, x, y, z\}$. چه تعداد تابع یک‌به‌یک $f: A \to B$ وجود دارد که $f(1) \notin \{u, v\}$، $f(2) \neq w$، $f(3) \notin \{w, x\}$، و $f(4) \notin \{x, y, z\}$؟

- مجموعه $\mathcal{B}$ از تمام رشته‌های بیتی با تعداد صفرها و یک‌های برابر را به صورت استقرایی تعریف کنید و آنگاه با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید تعریف شما درست است.

۴- رابطه‌ها نیز مانند توابع ترکیب می‌شوند. اگر $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ و $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ دو رابطه باشند، ترکیب این دو رابطه $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq A \times C$ اینگونه تعریف می‌شود که $(x, z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ اگر و فقط اگر $y \in B$ وجود داشته باشد که $(x, y) \in \mathcal{R}$ و $(y, z) \in \mathcal{S}$. همچنین، برای رابطه‌ای مانند $\mathcal{R}$ روی مجموعه A، $\mathcal{R}^n$ به صورت $\mathcal{R}^0 = \{(x, x) | x \in A\}$ و $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$ تعریف می‌شود. رابطه $\mathcal{R}^c$ نیز معکوس رابطه $\mathcal{R}$ است.

الف) ثابت کنید $\mathcal{R}$ رابطه تعدی است اگر $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$

ب) برای رابطه داده شده $\mathcal{R}$، بستار تعدی $\mathcal{R}$ با اضافه کردن زوج‌های (x, z) به رابطه مادامی که زوج‌های (x, y) و (y, z) در رابطه حاصل وجود داشته باشند به دست می‌آید. به عبارت دیگر، این کار آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا دیگر امکان اضافه کردن زوج وجود نداشته باشد. ثابت کنید $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots$ بستار تعدی $\mathcal{R}$ است.

پ) فرض کنیم $\mathcal{R}$ رابطه‌ای روی $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^{\geq 0})$ باشد و $(x, y) \in \mathcal{R}$ اگر و فقط اگر $n \notin x$ وجود داشته باشد که $y = x \cup \{n\}$. بستار تعدی $\mathcal{R}$ را به دست آورید.

power set

$y \subsetneq x$ proper inclusion

۵- فرض کنید d_n دترمینان ماتریس $n \times n$ ای است که درایه های روی قطر اصلی آن a، درایه های روی قطر بالای قطر اصلی آن b، درایه های روی قطر پایین قطر اصلی آن c، و سایر درایه های آن صفر هستند.

الف) رابطه‌ای بازگشتی برای محاسبه d_n به دست آورید.

ب) در صورتی که $a = b = c = 1$، d_n را محاسبه کنید.

۶- به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف) ثابت کنید

$$\big((p \vee \neg q) \to \neg r\big) \wedge (\neg s \vee q) \wedge t \wedge (\neg p \to \neg t) \wedge \big((p \wedge \neg r) \to s\big) \Rightarrow q$$

ب) گزاره «اگر یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگری تقسیم شود حاصل ممکن است عدد طبیعی نباشد.» را در قالب نمادهای منطق مرتبه اول بنویسید.

پ) مسئله ارضاپذیری در منطق گزاره‌ای را بیان کرده و بررسی کنید آیا فرمول زیر ارضا پذیر است.

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

۷- فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\}$

الف) رابطه $\mathcal{R}$ را روی $\mathcal{F}$ به ازای $f, g \in \mathcal{F}$ چنین تعریف می کنیم: $f\mathcal{R}g$ اگر $f \in \Theta(g)$. ثابت کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی روی $\mathcal{F}$ است.

ب) به ازای $f \in \mathcal{F}$، فرض کنیم $[f]$ کلاس هم ارزی f نسبت به رابطه $\mathcal{R}$ باشد. همچنین، فرض کنیم $\mathcal{F}^*$ مجموعه همه کلاس‌های هم ارزی القا شده توسط $\mathcal{R}$ باشد. رابطه $\mathcal{S}$ را روی $\mathcal{F}^*$، به ازای $[f], [g] \in \mathcal{F}^*$ چنین تعریف می کنیم: $[f]\mathcal{S}[g]$ اگر $f \in O(g)$. تحقیق کنید آیا $\mathcal{S}$ ترتیب جزئی است.

آزمون میان‌ترم درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اردیبهشت ۱۳۹۸ مهلت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

۱- به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) به چند روش ساسان می‌تواند به هر یک از ۳ شهر متفاوت ۴ بار سفر کند به طوری که شهر اول و آخری که به آن‌ها سفر می‌کند یکسان نباشند؟

ب) به چند روش می‌توان n نیم‌دایره را بر رو و بالای یک خط افقی چنان رسم کرد که دو انتهای کمان نیم‌دایره‌ها بر روی خط افقی بوده و هیچ دو نیم‌دایره‌ای یکدیگر را قطع نکنند؟

۲- به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) بحث منطقی زیر را با استفاده از نمادهای منطق گزاره‌ای بنویسید و سپس یا درستی آن را با استفاده از قاعده‌های استنتاج ثابت کنید یا مثال نقضی برای عدم درستی آن بیاورید.

اگر شاهین به مسابقه ماشین‌سواری برود، سودابه عصبانی می‌شود. اگر آرش هر شب به تماشای مسابقه فوتبال برود، پریسا عصبانی می‌شود. اگر سودابه یا پریسا عصبانی شوند، کامران (وکیل آنان) مطلع خواهد شد. کامران از هیچیک از این دو مشتری چیزی نشنیده است. بنابراین، نه شاهین به مسابقه ماشین‌سواری رفته است و نه آرش هر شب به تماشای مسابقه فوتبال رفته است.

ب) با استفاده از برهان خلف و سایر قاعده‌های استنتاج، و با بیان دقیق گام‌های استنتاج، ثابت کنید گزاره زیر معتبر (همواره درست) است.

$$\big((p \to q) \land (\neg r \lor s) \land (p \lor r)\big) \to (\neg q \to s)$$

پ) در گزاره‌های زیر، عالم سخن (دامنه) مجموعه اعداد صحیح مخالف صفر است. ابتدا ارزش هر گزاره را تعیین کنید، و آنگاه، نقیض گزاره دوم را طوری بنویسید که علامت نقیض قبل از گزاره‌نماها (گزاره‌های باز) قرار گیرد.

$$\forall x\, \exists y\, [x^2 + y^2 > 7 \to x^2 + y^2 = 1]$$
$$\forall x\, \exists y\, [x^2 + y^2 > x + y \to \exists z\, [x^2 + y^2 + z^2 = 2]]$$

۳- با استفاده از اصل شمول و عدم شمول پاسخ دهید به چند روش می‌توان حروف CORRESPONDENTS را مرتب کرد به گونه‌ای که

الف) هیچ دو حرف پشت سر هم تکراری نباشند.

ب) دقیقاً دو جفت حرف تکراری پشت سر هم باشند.

۴- با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد افرازهای عدد $n \in \mathbb{Z}^+$ که در آن‌ها هیچ جمعوندی بر عدد ۴ بخش‌پذیر نیست با تعداد افرازهای n که در آن‌ها هیچ جمعوند زوجی تکراری نیست برابر است.

آزمون پایانی درس ریاضیات گسسته

دانشکده مهندسی کامپیوتر ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

خرداد ماه ۱۳۹۸ مهلت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

۱- فرض کنید X، Y، و Z مجموعه‌های متناهی بوده و $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دو تابع باشند. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. در صورتی که گزاره درست است آن را اثبات کنید و در صورتی که نادرست است مثال نقض بیاورید.

الف) اگر تابع gof یک تناظر یک‌به‌یک باشد، تابع f یک‌به‌یک و تابع g پوشا است.

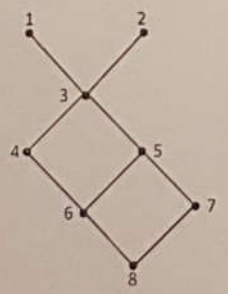
ب) اگر تابع gof یک تناظر یک‌به‌یک باشد، دست‌کم یکی از دو تابع f و g تناظر یک‌به‌یک است.

۲- صفحه‌های شطرنجی $2^n \times 2^n$ را در نظر بگیرید که یک خانه در گوشهٔ آن‌ها حذف شده است. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید چنین صفحه‌های شطرنجی را می‌توان با قطعه‌های L شکل سه‌خانه‌ای( ) پوشاند.

۳- به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) فرض کنید F مجموعهٔ همهٔ ترتیب‌های جزئی روی مجموعهٔ A باشد. رابطهٔ $\mathcal{R}$ را روی F به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای دو ترتیب جزئی $\alpha, \beta \in F$، $\alpha\mathcal{R}\beta$ اگر و فقط اگر $\forall x, y \in A.\, x\alpha y \to x\beta y$. آیا $\mathcal{R}$ ترتیب جزئی است؟ اگر پاسخ شما مثبت است، برای آن اثبات بیاورید. در غیر این صورت، مثال نقض بیاورید.

ب) با توجه به نمودار هاسه روبرو به موارد زیر پاسخ دهید.



(۱) اگر $A = \{1, 2, 4, 7\}$ کران بالا و پایین A را بیابید.

(۲) تعداد زیر مجموعه‌های 5 عضوی و نیز تعداد زیر مجموعه‌های 6 عضوی از $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ را بیابید که تشکیل ترتیب کلی می‌دهند.

۴- فرض کنید n و k دو عدد صحیح مثبت باشند و $n \geq k$. همچنین، فرض کنید $r(n,k)$ تعداد دنباله‌های n عضوی $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از اعداد صحیح مثبت $1, 2, \dots, k$ باشد به گونه‌ای که

(۱) هر یک از اعداد $1, 2, \dots, k$ دست‌کم یک بار در دنباله بیاید و

(۲) برای $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$، اولین رخداد عدد i قبل از اولین رخداد عدد $i+1$ باشد.

یک رابطه غیر بازگشتی برای $r(n,k)$ بیابید.

۵- به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) فرض کنید b_n تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که دارای 3 عدد متوالی نیستند. یک رابطه بازگشتی برای b_n بیابید.

ب) رابطه بازگشتی زیر را با فرض شرایط اولیهٔ $a_0 = 0$، $a_1 = 1$، و $a_2 = 2$ حل کنید.

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 5n - 12$$

۶- به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) مثالی برای تابع یک‌به‌یک $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ بیاورید که $f \in O(1)$.

ب) اگر دو تابع $f, g: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(n) = n^{t+1}$ و $g(n) = \sum_{i=1}^{n} i^t$ تعریف شده باشند و $t \in \mathbb{Z}^+$، ثابت کنید $f \in O(g)$.

پ) ثابت کنید اگر برای دو تابع $f, g: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ رابطه‌های $f \in O(g)$ و $g \in O(f)$ برقرار باشند، آنگاه $O(f) = O(g)$.

۷- یک اتومورفیزم گراف G یک ایزومورفیزم از G به G است. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است.

الف) مسیری با رأسهای $\{1,2,3,4\}$ و یالهای $\{12,23,34\}$ دو اتومورفیزم دارد.

ب) اتومورفیزم‌های G جایگشتهایی از رأسهای G هستند که اگر هم به سطرها و هم به ستونهای ماتریس همسایگی G اعمال شوند، ماتریس همسایگی تغییر نمی‌کند.

پ) گراف کامل دوبخشی $K_{3,5}$ دارای 720 اتومورفیزم است.

ت) گراف کامل دوبخشی $K_{3,3}$ دارای 36 اتومورفیزم است.