ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تقریب خطی

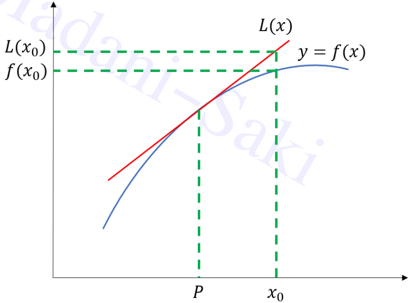
یادآوری تقریب خطی توابع اسکالر تک‌متغیره:

فرض کنید تابع $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $P \in I$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، تقریب خطی f حول P به صورت زیر است:

$$f(x) \approx L(x) = f(P) + f'(P)(x - P)$$

که البته این همان معادله‌ی خم مماس بر نمودار f در $x = P$ است.

به‌ازای $x = x_0$ در نزدیکی نقطه‌ی P، مانند شکل داریم $f(x_0) \approx L(x_0)$.



تقریب خطی توابع اسکالر چندمتغیره:

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P = (a_1, \dots, a_n) \in D$ دارای مشتقات جزیی اول است. تقریب خطی یا خطی‌سازی f حول نقطه‌ی P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{L(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, \dots, a_n)(x_i - a_i)}$$

به عنوان یک تقریب، حول نقطه‌ی P داریم:

$$f(x_1, \dots, x_n) \approx L(x_1, \dots, x_n)$$

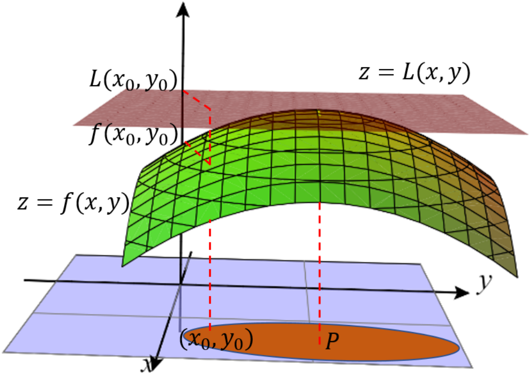
توجه کنید که –همان‌طور که بعداً خواهیم دید– $L(x_1, \dots, x_n)$ معادله‌ی ابرصفحه‌ی مماس بر نمودار f در نقطه‌ی P است. می‌توان ضابطه‌ی $L(x_1, \dots, x_n)$ را به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\boxed{L(x) = f(P) + \nabla f(P) \cdot (x - P)}$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$.

در حالت خاص دو متغیره، با فرض $z = f(x, y)$ و $P = (a, b)$ داریم:

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$
$$= f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b)$$



مثال

با استفاده از تقریب خطی، یک مقدار تقریبی برای تابع $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ در نقطه‌ی $(2.2,-0.2)$ بیابید.

پاسخ: باید تقریب خطی f را حول نقطه‌ای نزدیک به $(2.2,-0.2)$ در نظر بگیریم که در آن نقطه محاسبه‌ی f دشوار نیست. بنابراین، تقریب خطی f را حول نقطه‌ی $P=(2,0)$ می‌نویسیم. داریم:

$$f_1(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+e^{2y}}},\quad f_2(x,y)=\frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} f(2.2,-0.2) &\approx f(2,0)+f_1(2,0)(2.2-2)+f_2(2,0)(-0.2-0) \\ &= 3+\left(\frac{4}{3}\right)(0.2)+\left(\frac{1}{3}\right)(-0.2)=3+0.2=3.2 \end{aligned}$$

یادآوری: فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $x = P$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، با فرض اینکه L تقریب خطی f حول P است، داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(P+h) - L(P+h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(P+h) - (f(P) + hf'(P))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(P+h) - f(P)}{h} \right) - f'(P) \\ &= f'(P) - f'(P) = 0\end{aligned}$$

البته، داریم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P+h) - L(P+h)}{h} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(P+h) - L(P+h)}{|h|} = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P+h) - L(P+h)}{|h|} = 0$$

در اینجا، $|h|$ را فاصله‌ی نقطه‌ی P تا $P+h$ تفسیر کنید.

مشتق‌پذیری توابع چندمتغیره

حالت دومتغیره:

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع است که دارای مشتقات جزیی اول در نقطه‌ی $P = (a, b) \in D$ است. همچنین، فرض کنید که L تقریب خطی f حول P است. در این صورت، f را در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر یا دیفرانسیل‌پذیر گوییم، هرگاه

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(P + (h, k)) - L(P + (h, k))}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

یا معادلاً

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b) - f(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

که در آن $\sqrt{h^2 + k^2}$ را می‌توان فاصله‌ی دو نقطه‌ی P و $P + (h, k)$ تفسیر کرد.

حالت چندمتغیره‌ی دل‌خواه:

فرض کنید $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است که دارای مشتقات جزیی اول در نقطه‌ی $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ است. هم‌چنین، فرض کنید که L تقریب خطی f حول P است. در این صورت، f را در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر یا دیفرانسیل‌پذیر گوییم، هرگاه

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(P+(h_1,\ldots,h_n)) - L(P+(h_1,\ldots,h_n))}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}} = 0$$

یا معادلاً

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n) - f(a_1,\ldots,a_n) - \sum_{i=1}^n h_i f_i(a_1,\ldots,a_n)}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}} = 0$$

که در آن $\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$ را می‌توان فاصله‌ی دو نقطه‌ی P و $P+(h_1,\ldots,h_n)$ تفسیر کرد.

شرط مشتق‌پذیری برای تابع n–متغیره‌ی f در نقطه‌ی $P=(a_1,\ldots,a_n)$ را می‌توانیم به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}=0}$$

که در آن $h=(h_1,\ldots,h_n)$ و $|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$.

⋇ اگر تابع n–متغیره‌ی f در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\nabla f(P)$ را مشتق f در P گوییم، و آن را به $f'(P)$ نیز نمایش می‌دهیم.

قضیه

فرض کنید $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $P \in D$ مشتق‌پذیر هستند. در این صورت:

- $f \pm g$ در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر هستند.
- fg در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر است.
- در صورتی که $g(P) \neq 0$، آنگاه $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر است.

قضیه

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی هستند که $\mathrm{Im}(f) \subseteq I$.
اگر f در $P \in U$ و g در $f(P) \in I$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در P مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(g \circ f)'(P) = g'(f(P))f'(P)$$

یا معادلاً داریم:

$$\nabla(g \circ f)(P) = g'(f(P))\nabla f(P)$$

قضیه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر است. در این صورت، f در P پیوسته است.

اثبات: داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(f(P+h)-f(P)) &= \lim_{h\to 0}(f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)+h\cdot\nabla f(P)) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\tfrac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}|h| + h\cdot\nabla f(P)\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}|h| + \lim_{h\to 0}(h\cdot\nabla f(P)) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}\lim_{h\to 0}|h| + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{h\to 0} f(P+h) = f(P)$، که نتیجه می‌دهد f در P پیوسته است.

قضیه

فرض کنید $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $P \in D$. اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، تابع $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ در یک همسایگی از نقطه‌ی P موجود و پیوسته باشد، آن‌گاه $f(x_1, \ldots, x_n)$ در نقطه‌ی P مشتق‌پذیر است.

توجه: عکس قضیه‌ی بالا برقرار نیست. مثالی که در ادامه می‌آید، مؤید این مطلب است.

توجه:

واضح است که مشتقات جزیی اول چندجمله‌ای‌ها مجدداً چندجمله‌ای و از این‌رو پیوسته هستند. پس، بنابر قضیه‌ای چندجمله‌ای‌ها همگی مشتق‌پذیر هستند. بنابراین، ترکیب یک تابع نمایی، مثلثاتی و یا لگاریتمی با یک چندجمله‌ای یا تحدیدیافته‌ی آن، مشتق‌پذیر است.

مثال

فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۱. نشان دهید که f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۲. آیا $f_1(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته است؟

پاسخ ۱: داریم:

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h^2+0^2}\right)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=0$$

ادامه‌ی مثال

$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_1(0,0) - kf_2(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

در حالی که داریم:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2 \cos^2(\theta) \sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{r} = 0$$

که در آن از مختصات قطبی و روابط $h = r\cos(\theta)$ و $k = r\sin(\theta)$ استفاده کرده‌ایم

(البته این حد را با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نیز می‌توانستیم به‌دست آوریم).

ادامه‌ی مثال

بنابراین، f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ ۲: داریم:

$$f_1(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

توجه کنید که $0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. بنابراین، کافی است که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ با $g(x,y) = \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ را بررسی کنیم.

- مسیر $x=0$:

واضح است که تابع $g(x,y)$ روی این مسیر برابر با 0 است.

- مسیر $y=x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{4x^4}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

ادامه‌ی مثال

حال، دنباله‌های زیر را (که هر دو همگرا به 0 هستند) در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

فرض کنید $h(x) = \frac{1}{2x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$. در این صورت، داریم:

$$h(a_n) = \frac{1}{2a_n}\cos\left(\frac{1}{2a_n^2}\right) = \frac{1}{2\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}}\cos\left(\frac{1}{2\frac{1}{4n\pi}}\right) = \sqrt{n\pi}\,\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1}$$

پس، $\lim_{n\to\infty} h(a_n) = \infty$. به طور مشابه، داریم $\lim_{n\to\infty} h(b_n) = 0$. از این‌رو $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ وجود ندارد، که نتیجه می‌دهد $f_1(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته نیست.

قضیه‌ی مقدار میانگین

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول پیوسته در یک همسایگی نقطه‌ی $P \in D$ است. اگر قدرمطلق‌های h و k به‌اندازه‌ی کافی کوچک باشند، آن‌گاه اعداد $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ وجود دارند که

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_1(a+\theta_1 h, b+k) + kf_2(a, b+\theta_2 k)$$

دیفرانسیل یک تابع اسکالر چندمتغیره

فرض کنید که تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزیی اول است. در این صورت، دیفرانسیل تابع f، با نماد df، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

یعنی به‌ازای هر $P \in D$، داریم:

$$df(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) dx_n$$

توجه:

با فرضیات تعریف بالا، اگر $P = (a_1, \ldots, a_n)$، آن‌گاه تقریب‌های زیر را داریم:

$$dx_i \approx \Delta x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$df(P) \approx f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

مثال

فرض کنید $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. اگر L به اندازه‌ی 2% افزایش، و g به‌اندازه‌ی 0.6% کاهش یابند، آن‌گاه درصد تغییر T را بیابید.

پاسخ: داریم $dL = 0.02L$ و $dg = -0.006g$. توجه کنید که:

$$
\begin{aligned}
dT = \frac{\partial T}{\partial L}dL + \frac{\partial T}{\partial g}dg &= \pi\sqrt{\frac{1}{Lg}}(0.02L) - \pi\sqrt{\frac{L}{g^3}}(-0.006g) \\
&= 0.02\pi\sqrt{\frac{L}{g}} + 0.006\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \\
&= 0.013\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) = 0.013T
\end{aligned}
$$

بنابراین، T به‌اندازه‌ی 1.3% افزایش می‌یابد.

ماتریس ژاکوبی یک تابع چندمتغیره

تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را با $f = (\underbrace{f^{(1)}}_{y_1}, \ldots, \underbrace{f^{(m)}}_{y_m})$ در نظر بگیرید. هم‌چنین، فرض کنید که به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، مشتقات جزیی y_i در $P \in U$ موجود هستند. ماتریس ژاکوبی یا ژاکوبین تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Df(P) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \nabla f^{(1)}(P) \\ \vdots \\ \nabla f^{(m)}(P) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

مشتق یک تابع برداری چندمتغیره

تابع $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ با $f = (\underbrace{f^{(1)}}_{y_1}, \ldots, \underbrace{f^{(m)}}_{y_m})$ را در $P \in U$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، تابع $f^{(i)}$ در P مشتق‌پذیر باشد.

- اگر $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $Df(P)$ را مشتق f در P گوییم، و آن را با $f'(P)$ نمایش می‌دهیم.

مشتق ترکیب توابع برداری چندمتغیره

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ توابعی باشند که $\mathrm{Im}(f)$ در درون V قرار می‌گیرد. همچنین، فرض کنید که $f = (y_1, \dots, y_m)$ و $g = (z_1, \dots, z_k)$. اگر f در $P \in U$، و g در $f(P)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $g \circ f$ در P مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\boxed{D(g \circ f)(P) = Dg\left(f(P)\right) Df(P)}$$

معادلاً، داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\text{در نقطه‌ی } P} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{bmatrix}}_{\text{در نقطه‌ی } f(P)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\text{در نقطه‌ی } P}$$

مثال

فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده است. ماتریس ژاکوبی f در $(1,0)$، یعنی $Df(1,0)$، را بیابید.

$$f(x,y)=(xe^y+\cos(\pi y),x^2,x-e^y).$$

پاسخ: داریم:

$$f^{(1)}(x,y)=xe^y+\cos(\pi y),\ f^{(2)}(x,y)=x^2,\ f^{(3)}(x,y)=x-e^y$$

بنابراین:

$$Df(1,0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}\\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y}\\ \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x} & \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y}\end{bmatrix}_{(1,0)}=\begin{bmatrix}e^y & xe^y-\pi\sin(\pi y)\\ 2x & 0\\ 1 & -e^y\end{bmatrix}_{(1,0)}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

دیفرانسیل یک تابع چندمتغیره

فرض کنید ژاکوبین $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ با $f = (y_1, \ldots, y_m)$ قابل تعریف است.
در این صورت، دیفرانسیل تابع f را در نقطه‌ی $P \in U$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$df(P) := \begin{bmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = Df(P)dx$$

که در آن:

$$dx = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

تقریب خطی یک تابع چندمتغیره

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، در نزدیکی P تعریف می‌کنیم:

$$L(x) = f(P) + Df(P)(x - P)$$

همانند قبل، به منظور تقریب خطی f در نزدیکی P از $L(x)$ استفاده می‌کنیم. یعنی داریم $f(x) \approx L(x)$. به عبارتی دیگر، داریم:

$$f(x) \approx f(P) + df(P) = f(P) + Df(P)dx$$

مثال

فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده است. مقدار تقریبی $f(1.02, 0.01)$ را با استفاده از تقریب خطی بیابید.

$$f(x,y) = (xe^y + \cos(\pi y), x^2, x - e^y)$$

پاسخ: با استفاده از مثال قبل داریم:

$$f(1.02, 0.01) \approx f(1,0) + df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{Df(1,0)} \begin{bmatrix} \overbrace{1.02 - 1}^{dx} \\ \underbrace{0.01 - 0}_{dy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.04 \\ 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.03 \\ 1.04 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

توجه:
قبلاً قاعده‌ی زنجیره‌ای را با شرط پیوستگی مشتقات جزیی اول تعریف کردیم. با این‌حال، این قاعده با فرض مشتق‌پذیری نیز برقرار است.

قضیه

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ باشد که در $P \in U$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، اگر $\nabla f(P) \neq 0$، آن‌گاه $\nabla f(P)$ بر مجموعه‌ی تراز f گذرنده از P، در نقطه‌ی P عمود است. به عبارت دیگر، اگر $c \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $P \in f^{-1}(c)$، آن‌گاه به‌ازای هر منحنی $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to f^{-1}(c)$ که P در تصویر آن قرار دارد، با فرض $\gamma(t_0) = P$، داریم $\nabla f(P) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

اثبات: یادآوری می‌کنیم که:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U : f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$$

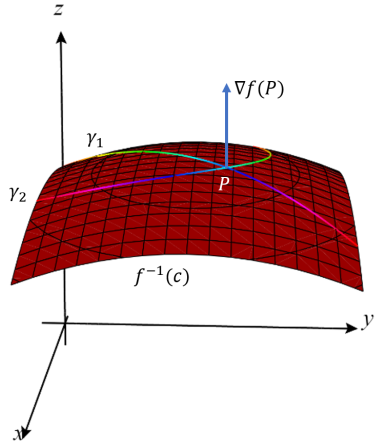
حال با توجه به اینکه γ یک منحنی در $f^{-1}(c)$ است، همواره داریم:

$$f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = f(\gamma(t)) = c$$

بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای، با مشتق‌گیری از رابطه‌ی بالا در نقطه‌ی $t = t_0$، داریم:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t_0))x_1'(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t_0))x_n'(t_0) = \nabla f(P) \cdot \gamma'(t_0)$$

شکل زیر متناظر با یک تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ است.



توجه:

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است. می‌خواهیم بردار قائم بر نمودار تابع f را در هر نقطه از U بیابیم. تابع $g : U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ را به صورت $g(x,y,z) = f(x,y) - z$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} g^{-1}(0) &= \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R} : g(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\} \end{aligned}$$

بنابراین، $g^{-1}(0)$ همان نمودار f است. حال، بنابر قضیه‌ی قبل می‌دانیم که به‌ازای هر $P = (a,b) \in U$، $\nabla g(a,b,f(a,b))$ بر $g^{-1}(0)$ و در نتیجه نمودار f در $(a,b,f(a,b))$ عمود است. پس، بردار قائم بر نمودار f در P به صورت زیر است:

$$\nabla g(a,b,f(a,b)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$$

توجه:

فرض کنید که $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. به عنوان تعمیمی از مثال قبل، به‌ازای هر $P = (a_1, \ldots, a_n) \in U$، بردار قائم بر نمودار f در نقطه‌ی $(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n))$ به صورت زیر است:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n), -1\right)$$

خطوط قائم بر نمودار یک تابع دومتغیره

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. معادله‌ی خط قائم بر نمودار f در $P = (a, b, f(a, b)) \in U \times \mathbb{R}$، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = a + t\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ y(t) = b + t\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad , t \in \mathbb{R} \\ z(t) = f(a, b) - t \end{cases}$$

یا معادلاً:

$$(a, b, f(a, b)) + \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right) \right\rangle$$

صفحات مماس بر نمودار یک تابع دومتغیره

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. توجه می‌کنیم که بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(a, b, f(a, b))$، یعنی n، همان بردار قائم بر نمودار f در این نقطه است. پس، معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$n \cdot ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right) \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$z = \underbrace{f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{\text{تقریب خطی } f \text{ حول } (a,b)}$$

مثال

صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع $z=\sin(xy)-\cos(xy)$ را در نقطه‌ی $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi},1)$ بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $f(x,y)=\sin(xy)-\cos(xy)$. در این صورت، داریم:

$$f_1(x,y)=y\cos(xy)+y\sin(xy),\quad f_2(x,y)=x\cos(xy)+x\sin(xy)$$

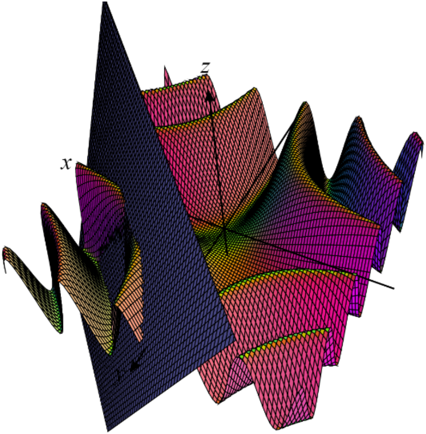
که نتیجه می‌دهد:

$$f_1(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})=f_2(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})=-\sqrt{\pi}$$

بنابراین، معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} z&=f(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})+(x-\sqrt{\pi})f_1(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})+(y-\sqrt{\pi})f_2(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})\\ &=1-\sqrt{\pi}(x-\sqrt{\pi})-\sqrt{\pi}(y-\sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال



صفحات مماس بر رده‌ی گسترده‌ای از رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، مجموعه‌ی تراز $f^{-1}(0)$ یک رویه است. در واقع، $f^{-1}(0)$ مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $(x, y, z) \in U$ است که $f(x, y, z) = 0$. پس، بنابر قضیه‌ای که داشتیم، $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه‌ی $(x_0, y_0, z_0) \in U$ است. از این‌رو، معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه در (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر است:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

یعنی با فرض $P = (x_0, y_0, z_0)$، داریم:

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$$

مثال

رویه‌ای که با معادله‌ی $\sin(z) = x^2 - 2xy + y^2x$ مشخص می‌شود را در نظر بگیرید. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر این رویه را در نقطه‌ی $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{\pi}{4}\right)$ به‌دست آورید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2x - \sin(z)$. در این صورت، رویه‌ی موردبحث با $f(x,y,z) = 0$ مشخص می‌شود. حال، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\cos(z)$$

بنابراین با فرض $P = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{\pi}{4}\right)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = -\frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نهایت، معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه‌ی P، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt[4]{2}}y - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

مثال

معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $\sin(xy)+\sin(xz)+\cos(yz)=2$ در نقطه‌ی $P=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$، در کدام گزینه آمده است؟

۱. $x+y+z=3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۲. $x+y=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۳. $x+z=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۴. $y+z=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

پاسخ: با فرض $f(x,y,z) = \sin(xy) + \sin(xz) + \cos(yz) - 2$، رویه‌ی موردبحث با معادله‌ی $f(x,y,z) = 0$ داده خواهد شد. حال، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + z\cos(xz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) - z\sin(yz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos(xz) - y\sin(yz)$$

از این‌رو، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

پس، معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه‌ی P برابر است با:

$$0 \times \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(z - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

بنابراین، $y + z = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$، و لذا گزینه‌ی ۴ صحیح است.