

۱. لوکوموتیو به جرم m شروع به حرکت می‌کند و سرعت آن با توجه به رابطه $v = a\sqrt{x}$ تغییر می‌کند. (a عدد ثابت). و S مسافت طی شده به وسیله لوکوموتیو می‌باشد. کل کار انجام شده به وسیله نیروی کشی که در t ثانیه اول بعد از شروع حرکت اعمال می‌شود را پیدا کنید.

پاسخ:

با توجه به رابطه $v = a\sqrt{x}$ چون همیشه $v \gg 0$ است لذا تغییر جهت نمی‌دهد و جواب‌های با مسافت برابر است. بنابراین:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = a dt \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \underbrace{\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2\sqrt{x}} = \underbrace{\int_0^t a dt}_{at}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = at \Rightarrow x = \frac{a^2}{4} t^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a^2}{2} t$$

$$A = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{2}$$

تغییر متغیر $x \leftarrow t$

$$dx = dx\left(\frac{dt}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot dt$$

نکته: می‌دانیم با توجه به اینکه نیروی لوکوموتیو همواره در راستای x اعمال می‌شود بنابراین:

$$W = \int F dx = \int m A dx = \int m \frac{a^2}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int m \frac{a^2}{2} v dt = \int m \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} t dt$$

$$= m \frac{a^4}{4} \int_0^t t dt = m \frac{a^4}{4} \times \frac{t^2}{2} = \frac{1}{8} m a^4 t^2 \quad \text{جواب مسئله}$$

۲. سورتیه‌ای به جرم 85 kg با تندی اولیه $v_0 = 37 \text{ m/s}$ از یک سراسیمه‌ی دایره‌ای
 می‌آید و وارد یک مسیر مستقیم افقی می‌شود. اگر نیروی بازتاب $a = 2 \text{ m/s}^2$
 حرکت آن را تا لحظه‌ی توقف آهسته کند، (الف) بزرگی F مورد نیاز چیست؟
 (ب) فاصله‌ی d که سورتیه در حین آهسته شدن طی می‌کند چیست؟
 (ج) نیروی کار W روی سورتیه انجام می‌دهد

پاسخ :

(الف) از قانون دوم نیوتن داریم: $F = ma = 85 \times 2 = 170 \text{ N}$

(ب) از قوانین حرکت شتاب ثابت داریم:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2a} = d$$

$$\Rightarrow d = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-1369}{2(-2)} = 342.25 \text{ m}$$

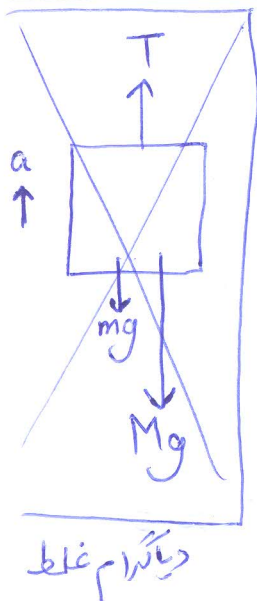
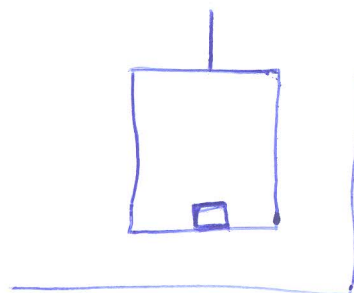
(ج) طبق قضیه کار-انرژی جنبه‌ای داریم:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

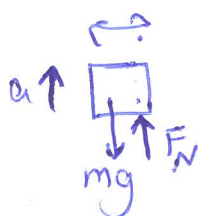
$K_f = 0 \Rightarrow W = -K_i = -\frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} (85) 37^2 = -5.8 \times 10^4 \text{ J}$

۳ مطابق شکل، چسبی به جرم ۲۵۰ و برفک آتاکت پلاستیکی به جرم ۹۰۰ قرار دارد.

آتاکت توسط کابلی نخست به مسافت $d_1 = 2,4 \text{ m}$ و سپس به مسافت $d_2 = 2,5 \text{ m}$ رو به بالا کشیده می‌شود. (الف) اگر در طی مسافت d_1 ، نیروی عمودی وارد به جسم از سوی کف، مقدار ثابت $F_N = 3 \text{ N}$ داشته باشد، و قطر کار توسط کابل روی آتاکت انجام شده است؟ (ب) اگر در طی مسافت d_2 کار انجام شده روی آتاکت توسط نیروی ثابت کابل برابر $92,61 \text{ J}$ باشد، بزرگی F_N چقدر است؟



M : جرم بالا
 m : جرم ج



(الف) دینام نیروی وارد به جسم و پلاستیک را رسم کنید و قانون دوم نیوتن را برای هر دو معین کنید.

جسم: $\sum F_y = ma$

$$F_N - mg = ma$$

$$a = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \frac{3 - 20(9,8)}{20}$$

غالب اشتباه رایج

$$\sum F_y = Ma$$

$$T - Mg - mg = Ma$$

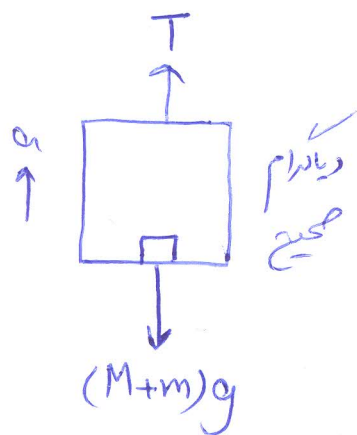
$$T - (M+m)g = Ma$$

سیستم
بالا پلاستیک - جسم: $\sum F_y = (M+m)a$

$$T - (M+m)g = (M+m)a$$

$$T = (a+g)(M+m)$$

$$T = (2,2 + 9,8)(900 + 250) = 10803 \text{ N}$$



نصفین کار، نیروی کشش T را محاسبه میکنیم

$$W_T = T d_1 = 10 \times 10^3 \times 2,4 = 2,4 \times 10^4 \text{ J} \quad \text{الف}$$

(ب) اکنون باید قسمت قبل با این تفاوت که به یکسره می‌شود، احل میکنیم.

در قسمت اول F_N معلوم بود و نیروی کار W_T را بدست آوردیم. اکنون نیروی W_T داده شده است و نیروی F_N خواسته شده است. البته در طی مسافت d_2 .

$$W_T = T d_2 = 92,71 \text{ J}$$

$$\rightarrow T = \frac{W_T}{d_2} = \frac{92,71 \times 10^3}{10,5} = 8,82 \text{ kN}$$

اکنون از قانون دوم نیوتن که برای سیستم بالا بر- جسم فشرده استفاده میکنیم:

$$T - (m+M)g = (m+M)a \Rightarrow$$

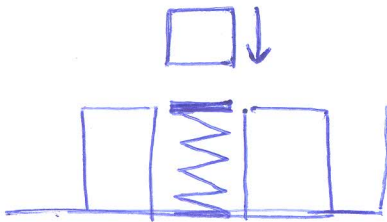
$$\rightarrow a = \frac{T - (m+M)g}{m+M} = \frac{8,82 \times 10^3 - (20+900)(9,8)}{20+900} \approx 0$$

نصفین از قانون دوم نیوتن که برای جسم فشرده استفاده میکنیم و F_N را بدست میآوریم:

$$F_N - mg = ma$$

$$\rightarrow F_N = mg = 20 \times 9,8 = 1,96 \text{ N} \quad \text{ب}$$

۴. قطعه ای جرم $m = 250 \text{ g}$ روی فنر قائمی با ثابت فنر $k = 210 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ فرو مر افته. قطعه به فنر می چسبید و فنر را تا رسیدن از توقف لحظه ای $d = 12 \text{ cm}$ فشرده می کند. دستگاهی که فنر فشرده می شود، چقدر کار توسط (الف) نیروی کششی وارد بر آن و (ب) نیروی فنر انجام شده است؟ (پ) تندی قطعه درست پس از برخورد آن با فنر چقدر است؟ (د) اصطکاک صرف نظر کنید (ت) اگر تندی در هنگام برخورد دو برابر شود، فشرده گی بیشینه فنر چقدر می شود؟



پاسخ:

(الف) کار نیروی وزن از رابطه مقابل بدست می آید:

$$W_g = mgd = 0.25 \times 9.8 \times 0.12 = 0.294$$

(ب) کار نیروی فنر از رابطه مقابل بدست می آید:

$$W_k = -\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}(210 \times 10^3)(12 \times 10^{-2})^2 = -1.18 \text{ J}$$

$\frac{\text{N}}{\text{m}}$

(د) از قانون کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_{\text{net}} = \Delta K$$

$$W_g + W_k = K_f - K_i \Rightarrow mgd - \frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$W = \Delta K \quad \text{(ت) معادله درج دوم}$$

$$\left(-\frac{k}{2}\right)d^2 + (mg)d + \left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

حل معادله درج دوم به روش Δ

$$d = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + mkv^2}}{k} = 0.23 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{2gd - \frac{kd^2}{m}}$$

$$v = \sqrt{2(9.8)(0.12) - \frac{210 \times 10^3 \times (0.12)^2}{250}} = 1.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۵ در حالی که بر جسمی نیروی \vec{F}_a وارد شده است و روی سطحی در جهت مثبت

همواره x حرکت می‌کند. نیرو در جهت همواره x است و دارای مؤلفه x برابر $F_{ax} = 9x - 3x^2$

است که در آن x بر حسب متر و F_{ax} بر حسب نیوتن است. حجم از حالت

سکون در مکان $x=0$ شروع به لغزش کرده و تا وضعیت سکون مجدد حرکت می‌کند.

(الف) کار انجام شده توسط \vec{F}_a روی جسم را بر حسب تابع از x بدست آورید.

(ب) در چه مکانی این کار بیشینه است؟

(ج) این مقدار بیشینه چقدر است؟

(د) در چه مکانی کار به مقدار صفر کاهش می‌یابد؟

(ه) چه در چه مکانی دوباره ساکن می‌گردد؟

پاسخ ه

$$W = \int F(x) dx = \int_0^x (9x - 3x^2) dx = \left[\frac{9}{2}x^2 - x^3 \right]$$

(الف)

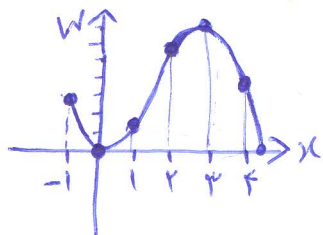
$$\frac{dW}{dx} = 0 \Rightarrow 9x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

(ب)

$$W = \frac{9}{2}x^2 - x^3$$

(ج) برای درک بهتر متناظریم نمودار $W(x)$ را رسم کنیم:

x	-1	0	1	2	3	4	$x_{f.o}$
y	0,5	0	1,5	10	13,5	8	0



نقطه‌یابی می‌کنیم و نمودار را رسم می‌کنیم

نقاط $x=0$ و $x=3$ نقاط اکسترم هستند و نقطه $x=0$ نقطه محلی و نقطه $x=3$ نقطه ماکزیمم

بنابراین جواب قسمت (د) به صورت مقابل بدست می‌آید.

$$W_{max} = W|_{x=3} = \frac{9}{2}(3)^2 - (3)^3 = 13,5 \text{ J}$$

د

$$W = \frac{9}{2}x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, 4,5$$

(ه)

$$K = W = 0 \Rightarrow x = 4,5$$

(ب) در جایی که انرژی جنبشی ذره صفر باشد ($K=0$) ذره ساکن است

۱. انرژی جنبشی یک ذره در حال حرکت در طول یک دایره به شعاع R به فاصله s از مرکز به صورت $K = as^2$ بستگی دارد. (a ثابت است). نیروی اعمال شده به روی ذره را به صورت تابعی از s پیدا کنید.

۲. نیروی $\vec{F} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 7\hat{k}$ (به واحد نیوتن) به جسم متحرکی به جرم 2 kg که از مکان اولیه $\vec{d} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ (به واحد متر) به مکان نهایی $\vec{d}_f = -5\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ در مدت 4 s ضرور، وارد شده است. مطلوب است:

(الف) کار انجام شده توسط نیرو به جسم در بازه زمانی 4 s

(ب) توان متوسط ناشی از نیرو در آن بازه

(پ) زاویه میان بردارهای \vec{d} و \vec{d}_f