سری های توانی

سری های به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

$$= a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

را سری توانی (برحسب توان های $x-c$) یا سری توانی حول

$x = c$ گوییم.

- مثال: سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ یک سری توانی است (حول $x=0$).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots \xrightarrow{|x|<1} \frac{1}{1-x}$$

* پس سری فوق برای xهایی که $|x|<1$ همگرا است و برای $|x|\geq 1$ واگرا است.

Scanned with CamScanner

- حال فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یک سری توانی حول $x=c$ باشد.

* c را مرکز همگرایی آن گوییم.

* اگر در سری فوق، x را برابر c قرار دهیم، سری به a_0 همگرا می‌باشد.

* حال، از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right|$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)}_{\ell} |x-c| < 1$$

$$|x-c| < \frac{1}{\ell} = R$$

سری توانی همگرا.

*گزاره : فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یک سری توانی

باشد حول c . قرار می‌دهیم :

- $l = \lim_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

- $R = \dfrac{1}{l}$ "شعاع همگرایی"

در این صورت داریم :

(1) اگر $0 < R < \infty$ ، آن‌گاه سری توانی برای x هایی

که $|x-c| < R$ ، همگرای مطلق است و برای x هایی که $|x-c| > R$ ،

واگرا است . برای $x = c-R$ و $x = c+R$ ، نتیجه‌ای نمی‌توان

گرفت.

(2) اگر $R = \infty$ ، آن‌گاه سری توانی برای تمام x ها همگرا است .

(3) اگر $R = 0$ ، آن‌گاه سری توانی فقط در $x = c$ همگرا است .

Scanned with CamScanner

پس، بازه‌ی همگرایی یک سری توانی به صورت‌های زیر ممکن است باشد:

$$[c-R, c+R] \quad , \quad [c-R, c+R) \quad ,$$

$$(c-R, c+R] \quad , \quad (c-R, c+R) \quad ,$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad , \quad \{c\}$$

* توجه می‌کنیم که نقاط انتهایی بازه، باید به طور دقیق بررسی گردند و تعیین نماییم که همگرایی مطلق یا مشروط داریم یا واگرایی.

مثال: قبلاً درمورد سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ صحبت نموده ایم. حال داریم:

$$c = 0 \;;\quad a_n = 1$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow \underbrace{R = 1}_{\text{شعاع همگرایی}}$$

پس سری روی بازه‌ی $(-1, 1)$ همگراست.

اگر $x = 1$ یا $x = -1$ را در سری فوق جایگذاری کنیم، به وضوح سری های عددی واگرایی خواهیم داشت.

پس بازه‌ی همگرایی سری توانی فوق، عبارتست از:

$(-1, 1)$

و سری توانی روی این بازه، همگرایی مطلق دارد.

مثال: مرکز، شعاع و بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ را تعیین کنید:

مرکز همگرایی: صفر ; $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\rightarrow l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0 \longrightarrow R = \infty$$

شعاع همگرایی

بازه‌ی همگرایی: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

- مثال: مطلوبست بازه‌ی همگرایی سری توانی $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{\sqrt[3]{n}\, 4^n}$.

حل:

$$c = -\frac{3}{2} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\, 2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n}\, 4^n} \left(x + \frac{3}{2}\right)^n$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}\, 2^{n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}\, 2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R = 2}$$

پس، سری توانی فوق روی $\left(-\frac{3}{2}-2, -\frac{3}{2}+2\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

همگراست. حال بررسی سروته بازه:

$$\begin{cases} x=-\frac{7}{2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\, 2^n}\left(-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \\ \text{} \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\, 2^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \end{cases}$$

از آزمون لایب‌نیتز، همگراست ولی همگرای مطلق نیست ← مشروط.

واگرا.

$\Rightarrow$ بازه‌ی همگرایی : $\left[-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

که همگرایی به جز در $x=-\frac{7}{2}$ ، مطلق می‌باشد.

*گزاره: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$

دارای شعاع همگرایی R_a و R_b باشند و $\alpha \in \mathbb{R}$، آنگاه داریم:

① $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n (x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی R_a است.

② $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی R و $\min(R_a,R_b) \le R$ است.

* مشتق گیری و انتگرال گیری از سری های توانی :

- قضیه : فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

$$= a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

بر بازه ی $(C-R, C+R)$ همگرا باشد که $R>0$. در این صورت،

$f(x)$ روی این بازه ی همگرایی، مشتق پذیر است و داریم :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2 (x-c) + \dots$$

به علاوه، $f(x)$ بر این بازه، انتگرال پذیر است و داریم :

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$$

قضیه آبل

قضیه آبل: سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ بر

بازه‌ی همگرایی‌اش، یعنی $(c-R, c+R)$ پیوسته است.

به علاوه، اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ همگرا

باشند، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \to (c+R)^-} f(x) = f(c+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$\lim_{x \to (c-R)^+} f(x) = f(c-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

* گزاره:

فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ برای هر x از بازه‌ی $(c-R, c+R)$ که $R>0$. در این صورت:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

- $n=0 \rightarrow a_0 = \frac{f(c)}{0!} = f(c)$

- $n=1 \rightarrow a_1 = \frac{f'(c)}{1!} = f'(c)$

$$\begin{cases} f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \\ \Big\downarrow x=c \\ f'(c) = a_1 \end{cases}$$

- $n=2 \rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$

$$\begin{cases} f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} \\ \Big\downarrow x=c \\ f''(c) = (2\times 1) a_2 \rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{2!} \end{cases}$$

***توجه:** از گزاره ی قبل، نتیجه می شود که اگر تابع $f(x)$ دارای نمایش سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$، حول $x=c$ باشد، آن گاه:

1) این نمایش منحصر به فرد است.

2) f در نقطه ی $x = c$ از هر مرتبه مشتق پذیر است و مشتق n اُم آن، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f^{(n)}(c) = n!\, a_n$$

بسط تیلور و مک‌لورن

تعریف: اگر تابع f در x_0 بی نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه سری $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ را سری(بسط) تیلور f حول x_0 و در حالتی که $x_0 = 0$ ، سری(بسط) مک‌لورن f می‌نامیم.

* تابع تحلیلی :

- تابع $f(x)$ در $x=c$ تحلیلی است، هرگاه برابر با یک سری توانی حول $x=c$ با شعاع همگرایی $R>0$ باشد.

- اگر $f(x)$ در هر نقطه از بازه‌ی باز I تحلیلی باشد، آن‌گاه گوییم $f(x)$ بر I تحلیلی است.

- مجموع و تفاضل توابع تحلیلی نیز تحلیلی هستند (روی اشتراک بازه‌های همگرایی هر یک).

مثال: نشان دهید e^x روی $\mathbb{R}$ تحلیلی است.

$c \in \mathbb{R}$ دلخواه

$$f(x) = e^x \longrightarrow f^{(n)}(c) = e^c$$

$\Leftarrow$ سری تیلور e^x حول $x = c$ $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$

Scanned with CamScanner

$$L = \lim \left| \frac{\frac{e^c}{(n+1)!}}{\frac{e^c}{n!}} \right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

(ب) $R = +\infty$ است و بازه همگرایی y برابر $\mathbb{R}$ است.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!} (x-c)^n$$

[redacted]

$$* \ e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$* \sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x + x^3/3! + x^5/5! + \cdots$$

$$* \cosh x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

فرض: $\sin x$, $\cos x$ بر روی $\mathbb{R}$ تحلیلی است، داریم:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Scanned with CamScanner

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر بی نهایت بار مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\forall k\geq 0: f^{(k)}(0)=0$$

پس سری مک‌لورن f برابر صفر می‌شود، اما تابع مذکور فقط در مبدا برابر صفر است.

⇐ برای هر $R>0$ و هر $x\neq 0$ از بازه‌ی $(-R,R)$، واضح است که: $f(x)\neq 0$.

سری مک‌لورن $f(x)$

⇐ $f(x)$ تحلیلی **نیست**.