

جلسه پنجم ۱۴ اسفند

ادامه تئوری معادلات دیفرانسیل همگن

تذکره: اگر $f(x, y)$ تابع همگن از درجه n باشد داریم: $f(x, y) = x^n f(1, \frac{y}{x})$

$$\text{Ex. } f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3 = x^3 \left(1 + 3\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \right) \quad (n=3)$$
$$\underbrace{\phantom{x^3 \left(1 + 3\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \right)}}_{f(1, \frac{y}{x})}$$

می دانیم $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n (f(x, y))$ با فرض اینکه $\lambda = \frac{1}{x}$ داریم:

$$f(1, \frac{y}{x}) = \frac{1}{x^n} f(x, y) \Rightarrow f(x, y) = x^n f(1, \frac{y}{x})$$

به طور متقارن به مرتکب شدن دارد:

$$f(x, y) = y^n f(\frac{x}{y}, 1)$$

حل معادلات دیفرانسیل همگن

معادله دیفرانسیل همگن را می توان با تغییر متغیر $(y = xv, \frac{y}{x} = v)$ به معادله جدایی تبدیل نمود.

با توجه به اینکه $f(x, y)$ تابعی همگن از درجه صفر است می توان نوشت

$$y' = f(x, y) \Rightarrow y' = f(1, \frac{y}{x})$$

$$y = xv \Rightarrow y' = v + xv' \xrightarrow{\text{گذاشتن}} v + xv' = f(1, v) \quad ; \quad \frac{y}{x} = v$$

$$\Rightarrow xv' = f(1, v) - v \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{dv}{f(1, v) - v} = \frac{dx}{x} \\ \int \end{array} \right.$$

$v = \frac{dv}{dx}$