فصل دوم: معادلات مرتبه دوم و بالاتر

فرم کلی یک معادله مرتبه دوم $\quad F(x,y,y',y'')=0$

فرم صریح معادله مرتبه دوم $\quad y''=f(x,y,y')$

قسمت اعظم این فصل به حل معادلات مرتبه دوم خطی اختصاص دارد.

فرم استاندارد معادله مرتبه دوم خطی $\quad y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$

اگر جمله $g(x)$ متحد صفر باشد معادله خطی را همگن می‌خوانیم در غیر این صورت معادله را ناهمگن می‌خوانیم.

قبل از ورود به بحث اصلی این فصل، ابتدا این نکته را یادآور می‌شویم که برخی حالات خاص معادلات مرتبه دوم را می‌توان با تغییر متغیرهای ساده به معادلات مرتبه اول تبدیل و حل کرد. در زیر برخی از این نمونه‌ها را ذکر می‌کنیم.

۱) معادلات مرتبه دوم فاقد y ، $\quad F(x,y',y'')=0$

در این معادلات کافیست قرار دهید $y'=p$ و در نتیجه داریم $y''=p'$ ولذا:

$F(x,p,p')=0$

معادله اخیر یک معادله مرتبه اول برحسب x و p است که با حل آن p (یا همان y') به دست می‌آید. مجدداً با حل معادله شامل y' می‌توان جواب معادله اصلی را یافت.

مثال)

$$xy''+y'=1+x^2$$

$$xp'+p=1+x^2 \Rightarrow p'+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x}+x$$

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x \Rightarrow p(x)=\frac{1}{x}\left[\int x\left(\frac{1}{x}+x\right)dx+C_1\right]=\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{3}+C_1\right)$$

$$\Rightarrow y'=1+\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x} \Rightarrow y=x+\frac{x^3}{9}-\frac{C_1}{x^2}+C_2$$

۲) معادلات مرتبه دوم فاقد x ، $f(y, y', y'')=0$

در این حالت قرار دهید $y'=p$. هدف حذف متغیر x از معادله است لذا

$$y''=p'=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$$

پس معادله به فرم $f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0$ خواهد شد که یک معادله برحسب y و p و از مرتبه ی اول است.

مثال)

$$yy''-(y')^2=0$$

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0 \Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)=0$$

از $y'=p=0$ داریم $y=k$ که جواب بدیهی معادله است.

از $y\frac{dp}{dy}-p=0$ داریم $\frac{dy}{y}=\frac{dp}{p} \Rightarrow y=c_1p \Rightarrow y=c_1y'$

$$y=c_1\frac{dy}{dx} \Rightarrow dx=\frac{c_1}{y}dy \Rightarrow x=\ln c_1y+c_2$$

۳) معادله مرتبه دوم همگن نسبت به y و y' و y''

در حالت کلی معادله $f(x, y, y', y'')=0$ که در شرط زیر به ازای هر $\lambda\neq 0$ صدق کند

$$f(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'')=\lambda^2 f(x, y, y', y'')$$

را می توان با تغییر متغیر خاص $y=e^{\int z(x)dx}$ به یک معادله مرتبه اول برحسب z تبدیل کرد.

مثال)

$$2yy''-3y'^2-4y^2=0$$

به وضوح این معادله در شرط همگنی گفته شده در بالا صدق می کند. قرار دهید:

$$y=e^{\int zdx} \Rightarrow y'=ze^{\int zdx} \Rightarrow y''=(z'+z^2)e^{\int zdx}$$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$2(z'+z^2)\left[e^{\int zdx}\right]^2-3z^2\left[e^{\int zdx}\right]^2-4\left[e^{\int zdx}\right]^2=0$$

$$(2z'-z^2-4)\underbrace{\left[e^{\int zdx}\right]^2}_{\neq 0}=0 \Rightarrow 2z'-z^2-4=0 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{z^2+4}{2}$$

$$dx = \frac{2}{z^2+4}dz \Rightarrow x = \frac{2}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} - c_1 \Rightarrow x + c_1 = \tan^{-1}\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow z = 2\tan(x+c_1) \Rightarrow y = e^{\int z\,dx} = e^{2\int \tan(x+c_1)\,dx}$$

$$\Rightarrow y = e^{2\ln|\cos(x+c_1)|+c_2} = \bar{c}_2\cos^2(x+c_1)$$

□

از اینجا به بعد تمرکز ما روی حل معادلات خطی مرتبه دوم است:

قضیه: مسأله مقدار اولیه زیر که در آن p و q و g توابعی پیوسته در بازه I هستند:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y_1 \qquad x_0\in I$$

دارای جواب منحصر به فردی مانند $y=\varphi(x)$ در بازه I است.

گفتیم حالت کلی معادله خطی مرتبه دوم در حالت ناهمگن و همگن به ترتیب به فرم زیر هستند:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad \text{ناهمگن} \qquad (1)$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad \text{همگن} \qquad (2)$$

(2) را معادله همگن متناظر با (1) می خوانیم. یک تفاوت عمده بین این دو معادله وجود دارد.

قضیه (اصل جمع): هرگاه y_1 و y_2 دو جواب معادله همگن (2) باشند آن هر ترکیب خطی از آن ها به شکل $c_1y_1+c_2y_2$ نیز یک جواب معادله (2) است.

اثبات این قضیه بسیار ساده است. کافیست ثابت کنید $c_1y_1+c_2y_2$ در معادله (2) صدق می‌کند.

اما آیا مشابه این قضیه را می توان برای معادله ناهمگن (1) نیز اثبات کرد؟

جواب منفی است. چرا که اگر y_1 و y_2 جواب هایی از (1) باشند

$$\begin{array}{rl} & y_1''+py_1'+qy_1=g \\ + & y_2''+py_2'+qy_2=g \\ \hline & (y_1+y_2)''+p(y_1'+y_2')+q(y_1+y_2)=2g\neq g \end{array}$$

(مگر اینکه $g\equiv 0$ باشد)

نکته: می توان ثابت کرد اگر y_1 جواب معادله ناهمگن (1) باشد و y_2 جواب معادله همگن (2) باشد، در آن صورت $y = y_1 + y_2$ نیز یک جواب معادله (1) است.

یک بیان متفاوت تر از این نکته این است که اگر Y_1 و Y_2 دو جواب معادله ناهمگن (1) باشند آن گاه $y = Y_2 - Y_1$ نیز جواب معادله همگن متناظر (2) خواهد بود!

در این قسمت ابتدا به پیدا کردن جواب عمومی معادله همگن (2) می پردازیم.

معادله ساده $y+y''=0$ را در نظر بگیرید. توابع زیر همگی جواب این معادله هستند:

$$y_1=\cos x \qquad y_2=\sin x \qquad y_3=5\cos x \qquad y_4=\sqrt{3}\sin x$$

طبق قضیه اصل جمع هر ترکیب خطی از این جواب ها نیز جواب معادله است به عنوان مثال

$$y_a = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$y_b = C_1y_1 + C_2y_3 = C_1\cos x + C_2 5\cos x$$

$$y_c = C_1y_2 + C_2y_4 = C_1\sin x + C_2\sqrt{3}\sin x$$

اما از میان جواب های ترکیبی گفته شده کدام می تواند جواب عمومی معادله باشد؟

به وضوح y_b و y_c این خاصیت را ندارند چرا که همه جواب های معادله را در بر نمی گیرند. مثلا y_b جواب $y_2=\sin x$ را شامل نمی شود. و از این بین تنها y_a شایستگی این را دارد که به عنوان جواب عمومی معرفی شود. اما چه تفاوتی بین زوج جواب $\{\cos x, \sin x\}$ در y_a و زوج جواب های $\{\cos x, \cos 5x\}$ و $\{\sin x, \sqrt{3}\sin x\}$ در دیگران وجود دارد؟ این تفاوت در مفهومی به نام استقلال خطی توابع نهفته است.

تعریف: گوییم توابع $y_1, \ldots, y_n$ در بازه I مستقل خطی هستند هرگاه اگر

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n = 0 \qquad x\in I$$

آن گاه داشته باشیم $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$. در غیر این صورت آن ها را وابسته خطی می نامیم.

بیان ساده تر این تعریف این گونه است که $y_1, \ldots, y_n$ مستقل خطی هستند هرگاه نتوان یکی از آن ها را بر اساس ترکیب خطی از دیگر توابع نوشت.

دقت کنید اگر یکی از C_i ها ناصفر باشد داریم:

$$y_i = \frac{1}{C_i}(C_1y_1 + \cdots + C_{i-1}y_{i-1} + C_{i+1}y_{i+1} + \cdots + C_ny_n)$$

تشخیص استقلال خطی توابع با استفاده از تعریف دشوار است. تعریف و قضیه زیر ما را در این امر یاری خواهد کرد.

تعریف: فرض کنید $y_1, \ldots, y_n$ توابعی تا $n-1$ بار مشتق پذیر در بازه I باشند. رونسکین این توابع در نقطه $x_0 \in I$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (x_0)$$

قضیه: با مفروضات تعریف قبل، شرط لازم و کافی برای وابستگی خطی توابع فوق در بازه I این است که رونسکین آن ها در این بازه متحد صفر باشد.

نکته: پس اگر رونسکین حتی در یک نقطه از بازه I صفر نباشد، $y_1, \ldots, y_n$ مستقل خطی هستند.

مثال: زوج تابع $\{\sin x, \cos x\}$ در هر بازه دلخواه مستقل خطی اند:

$$w(\sin, \cos)(x_0) = \begin{vmatrix} \sin x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\sin x_0 \end{vmatrix} = \sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1 \neq 0$$

اما توابع $\{\sin x, \sqrt{3}\sin x\}$ در هر بازه دلخواهی وابسته خطی اند چونکه

$$w(\sin, \sqrt{3}\sin)(x_0) = \begin{vmatrix} \sin x_0 & \sqrt{3}\sin x_0 \\ \cos x_0 & \sqrt{3}\cos x_0 \end{vmatrix} = 0$$

اکنون می توانیم قضیه زیر را در خصوص جواب عمومی یک معادله همگن مرتبه دوم مانند (2) بیان کرد.

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله همگن (2) در بازه I باشند، آن گاه هر جواب دیگری از این معادله به صورت ترکیب خطی از y_1, y_2 خواهد بود. یعنی اگر y جوابی از معادله (2) باشد آن گاه $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ چنان وجود دارند که:

$$y = c_1 y_1 + c y_2$$

در واقع $\{y_1, y_2\}$ یک مجموعه جواب پایه ای معادله است.

پس قضیه به روشنی بیان می کند که برای نوشتن جواب عمومی معادله (2) کافیست دو جواب خصوصی آن معادله که مستقل خطی اند را بیابیم.

به عنوان مثال در معادله $y+y''=0$ حالا می توان گفت $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ جواب عمومی معادله است و هر جواب دیگری از معادله با انتخاب c_1, c_2 مناسب به این فرم است.

یک قضیه کاربردی در خصوص جواب های معادله همگن (2) قضیه آبل است:

قضیه آبل: هرگاه y_1 و y_2 دو جواب از معادله همگن (2) باشند که ضرایب آن همگی در بازه I پیوسته هستند، آن گاه

$$W(y_1,y_2)(x)=c\,e^{-\int p(x)dx}$$

که در آن c ثابتی مستقل از x است. (برای اثبات حتماً به کتاب مراجعه شود)

یک نتیجه سرراست این قضیه این است که اگر y_1 و y_2 جواب های وابسته خطی از معادله (2) باشند آن گاه، رونسکین شان در هر نقطه بازه I صفر خواهد بود. (چون $c=0$). و اگر مستقل خطی باشند، رونسکین شان در هیچ نقطه صفر نخواهد بود (چون $c\neq 0$).

این قضیه ما را کمک خواهد کرد تا با در دست داشتن یک جواب خصوصی معادله همگن (2) یک جواب خصوصی دیگر که مستقل از این جواب باشد را بیابیم و جواب عمومی (2) را بنویسیم نام این روش، کاهش مرتبه است.

روش کاهش مرتبه:

فرض کنید y_1 یک جواب ناصفر از معادله همگن (2) باشد. می خواهیم جواب دیگری همچون y_2 چنان بیابیم که $\{y_1,y_2\}$ مستقل خطی باشند. بدین منظور فرض کنید:

$$y_2(x)=v(x)y_1(x) \qquad \forall x\in I$$

در واقع می خواهیم تابع v را چنان بیابیم که y_2 هم جواب معادله باشد و هم مستقل از y_1.

با توجه به فرمول آبل داریم:

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'=y_1(v'y_1+vy_1')-(vy_1)y_1'=v'y_1^2=c\,e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow v'=\frac{1}{y_1^2}c\,e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow v=c\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

بدون اینکه خللی به کلیت مساله وارد کرده می توان قرار داد $c=1$ و لذا v باید به فرم زیر باشد

$$\boxed{v(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}}$$

بررسی کنید آیا y_2 در معادله صدق می کند؟

پس روش کاهش مرتبه به ما کمک می‌کند تا با در دست داشتن y_1 جواب y_2 را به صورت زیر بسازیم، به نحوی که $\{y_1, y_2\}$ مستقل از هم باشند

$$y_2 = \left[\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx\right] y_1$$

مثال: ابتدا ثابت کنید معادله زیر جوابی به شکل $y_1=e^{kx}$ دارد. (k را بیابید) سپس جواب عمومی معادله را بنویسید.

$$xy''+(2x-1)y'-2y=0$$

جواب: قسمت اول سوال ساده است. کافیست y_1 مفروض را در معادله قرار دهید.

$$y_1=e^{kx} \Rightarrow y_1'=ke^{kx},\ y_1''=k^2e^{kx}$$

$$x(k^2e^{kx})+(2x-1)(ke^{kx})-2e^{kx}=0 \Rightarrow [k^2x+2xk-k-2]\underbrace{e^{kx}}_{\neq 0}=0$$

$$\Rightarrow x(k^2+2k)-k-2=0 \Rightarrow \begin{cases} k^2+2k=0 \Rightarrow k(k+2)=0 \\ -k-2=0 \Rightarrow k+2=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{k=-2}$$

یعنی اگر $k=-2$ باشد y_1 جواب معادله است چون در معادله صدق می‌کند. پس $y_1=e^{-2x}$.

اکنون قسمت دوم سوال را با استفاده از روش کاهش مرتبه حل می‌کنیم چراکه فعلاً یک جواب معادله همگن در دست است و ما برای نوشتن جواب عمومی دو جواب از این معادله که مستقل هم باشند لازم داریم.

p در حالت استاندارد

$$V=\int \frac{1}{(e^{-2x})^2} e^{-\int \frac{2x-1}{x}dx} dx = \int e^{4x}\cdot e^{-2x+\ln x}dx = \int e^{2x}\cdot e^{\ln x}dx$$

$$=\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_2 = Vy_1 = \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}e^{-2x} = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

پس جواب عمومی معادله به فرم زیر است:

$$y=c_1e^{-2x}+c_2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)$$

معادلات همگن با ضریب ثابت:

حالت ساده تری از معادله همگن را در نظر بگیرید که در آن همه ضرایب عدد ثابت باشند.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in R \qquad (3)$$

می توان ثابت کرد این معادله جوابی به فرم $y = e^{\lambda x}$ دارد:

$$y = e^{\lambda x} \rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)\, e^{\lambda x} = 0$$

پس اگر بخواهیم جواب های (3) را بیابیم باید معادله درجه دوم زیر را حل کنیم

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

این معادله جبری را معادله مشخصه برای (3) می خوانیم چراکه جواب های این معادله چگونگی جواب های معادله (3) را مشخص می کند. سه حالت رخ خواهد داد:

الف) اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. یعنی معادله مشخصه دو جواب حقیقی به شکل λ_1 و λ_2 دارد. پس با توجه به اینکه جواب های (3) به فرم $e^{\lambda x}$ هستند، لذا

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad , \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

دو جواب معادله (3) خواهند. به سادگی می توان ثابت کرد که y_1 و y_2 مستقل از هم هستند و لذا در این حالت جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

ب) اگر $\Delta = 0$. یعنی معادله مشخصه یک ریشه مضاعف λ_1 دارد. در این حالت پس $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ جواب معادله (3) است.

اکنون می توانیم از روش کاهش مرتبه برای بدست آوردن جواب دیگر مستقل خطی از (3) استفاده کرد. نتیجه $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ خواهد بود. پس جواب عمومی این حالت به صورت زیر است:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

ب) اگر $\Delta<0$. یعنی معادله مشخصه دو ریشه مختلط به فرم $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ دارد

در این حالت نیز جواب هایی از معادله (3) به فرم $\bar{y}_1=e^{\lambda_1 x}$ و $\bar{y}_2=e^{\lambda_2 x}$ هستند اما این جواب ها توابعی حقیقی نیستند برای به دست آوردن جواب های حقیقی معادله (3) می توان نوشت:

$$\bar{y}_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$\bar{y}_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

اکنون قرار دهید $y_1=(\bar{y}_1+\bar{y}_2)/2$ و $y_2=(\bar{y}_1-\bar{y}_2)/2i$ و لذا داریم:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{و} \quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

توجه کنید که با توجه به اصل جمع y_1 و y_2 جواب های معادله همگن با ضریب ثابت (3) هستند. اثبات استقلال خطی y_1 و y_2 نیز با محاسبه رونسکین امکان پذیر است. لذا جواب عمومی معادله (3) در این حالت به فرم زیر است

$$\boxed{y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)}$$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید:

الف) $y''+2y'-3y=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-3$

$$\Rightarrow \boxed{y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}}$$

ب) $y''-2y'+y=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=1$

$$\Rightarrow \boxed{y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}}$$

ج) $2y''+2y'+1=0 \Rightarrow 2\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$

$$\Rightarrow \boxed{y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos(\tfrac{1}{2}x)+c_2\sin(\tfrac{1}{2}x)\right)}$$

معادله همبعد کوشی - اویلر از مرتبه دوم:

فرم کلی این معادله به صورت زیر است:

$$x^2y''+Axy'+By=0 \qquad A,B\in R$$

که یک معادله همگن مرتبه دوم با ضرایب غیرثابت است. خوشبختانه می‌توان چنین معادلاتی را با تغییر متغیر مناسب به یک معادله ضریب ثابت تبدیل کرد.

متغیر جدیدی به صورت $z=\ln x$ تعریف کنید. در این صورت

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{xy'=\frac{dy}{dz}}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{dy}{dz}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y''=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{x}+\frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right] \Rightarrow \boxed{x^2y''=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}}$$

حالا نتایج بدست آمده را در معادله کوشی اویلر جایگذاری کنید:

$$\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)+A\left(\frac{dy}{dz}\right)+By=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}+(A-1)\frac{dy}{dz}+By=0$$

که به وضوح معادله اخیر یک معادله ضریب ثابت برحسب y و z است و قابل حل است.

مثال:

$$x^2y''+2xy'+2y=0$$

با تغییر متغیر $z=\ln x$ معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+2y=0$$

$$\lambda^2+\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$\Rightarrow y(z)=e^{-\frac{1}{2}z}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}z\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}z\right)\right)$$

فراموش نکنید که در انتها تغییر متغیر را به حالت اول برگردانید:

$$y(x)=x^{-1/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right)\right)$$