گروه آموزشی ریاضیات عمومی
تمرینات ریاضی عمومی– سری چهارم

نیمسال اول ۹۹
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

تدریس‌یاران محترم: لطفا ابتدا سوالات ذیل را در کلاس حل نمایید و در صورت داشتن وقت اضافه به حل سوالات منتخب خود بپردازید.

۱. آدامز) الف) با استفاده از تعویض متغیر $x = \pi - u$ نشان دهید که به ازای هر تابع پیوسته f بر بازه $[۰,۱]$ داریم $\int_{۰}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi} f(\sin x)dx$.

ب)انتگرال $\int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲} x}\, dx$ را محاسبه کنید.

حل قسمت الف)

$$x = \pi - u \Rightarrow dx = -du \qquad \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow u = \pi \\ x = \pi \Rightarrow u = ۰ \end{cases}$$

$$I = \int_{۰}^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{۰} (\pi - u)f(\sin(\pi - u))(-du)$$

می‌دانیم $\sin(\pi - u) = \sin(u)$. همچنین با جا به جا کردن کران بالا و پایین انتگرال، یک منفی در عبارت ایجاد می‌شود که با $-du$ ساده می‌شود. پس داریم:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{۰}^{\pi} (\pi - u)f(\sin u)du \\
I &= \int_{۰}^{\pi} \pi f(\sin u)du - \underbrace{\int_{۰}^{\pi} uf(\sin u)du}_{I} \\
&\Rightarrow ۲I = \pi \int_{۰}^{\pi} f(\sin u)du \\
&\Rightarrow I = \frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi} f(\sin u)du
\end{aligned}$$

حل قسمت ب)

اگر تابع $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ را همان $f(\sin x)$ در قسمت **(الف)** در نظر بگیریم به طور مشابه داریم:

$$I = \int_0^\pi x \left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

در نتیجه با تغییر متغیر $u = \cos x$ و $du = -\sin x \, dx$ داریم:

$$I = \frac{\pi}{2} \int \frac{-du}{1+u^2} = -\frac{\pi}{2} \times \arctan(u) = -\frac{\pi}{2} \arctan(\cos x) \mid_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

۲. مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$(a) \qquad I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx$$
$$(b) \qquad I = \int_{2}^{4} \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}}\, dx$$

حل قسمت a)

$$x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\cos(\pi/2-u)}}{\sqrt{\cos(\pi/2-u)} + \sqrt{\sin(\pi/2-u)}}(-du) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\sin u} + \sqrt{\cos u}} du$$
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$
$$\Rightarrow 2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

حل قسمت b)

$$x = 6 - u \Rightarrow dx = -du \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \longrightarrow u = 4 \\ x = 4 \longrightarrow u = 2 \end{cases}$$

$$I = \int_{4}^{2} \frac{\sqrt{\ln(9-(6-u))}}{\sqrt{\ln(9-(6-u))} + \sqrt{\ln(3+(6-u))}}\,(-du)$$
$$= \int_{2}^{4} \frac{\sqrt{\ln(3+u)}}{\sqrt{\ln(3+u)} + \sqrt{\ln(9-u)}}\,(du)$$
$$(a)\ \text{مشابه} \Rightarrow 2I = \int_{2}^{4} dx = x|_{2}^{4} = 2 \Rightarrow I = 1$$

۳. الف) اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ دوبار مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$. نشان دهید که

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx = 2\int_a^b f(x)dx.$$

ب) اگر $f'(x)$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، نشان دهید

$$2\int_a^b f'(x)f(x)dx = [f^2(b)-f^2(a)].$$

حل قسمت الف)
با استفاده از روش جز به جز داریم:

$$\begin{cases} u=(x-a)(x-b) \\ dv=f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(2x-a-b)dx \\ v=f'(x) \end{cases}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = \underbrace{(x-a)(x-b)f'(x)\big|_a^b}_{\text{صفر}} - \int_a^b (2x-a-b)\,f'(x)dx$$

$$\begin{cases} u=2x-a-b \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=f(x) \end{cases}$$

$$-\int_a^b (2x-a-b)\,f'(x)dx = -\Big[\underbrace{(2x-a-b)f(x)\big|_a^b}_{\text{صفر}} - \int_a^b 2f(x)dx\Big] = 2\int_a^b f(x)dx$$

حل قسمت ب)

$$\begin{cases} u=f(x) \\ du=f'(x)dx \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a\Rightarrow u=f(a) \\ x=b\Rightarrow u=f(b) \end{cases}$$

$$2\int_a^b f'(x)f(x)dx = 2\int_{f(a)}^{f(b)} udu = 2\left(\frac{1}{2}u^2\right)\Big|_{f(a)}^{f(b)} = f(b)^2-f(a)^2$$

۴. الف)فرض کنیم تابع f بر بازه I شامل نقطه یک پیوسته باشد و برای هر x در I داشته باشیم $۲f(x)+۱=۳\int_x^۱ f(t)dt$ ، $f(x)$ را بیابید.

حل :

$$۲f(x)+۱=۳\int_x^۱ f(t)dt$$

$$\rightarrow ۲f(x)=-۳\int_۱^x f(t)dt-۱$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{-۳\int_۱^x f(t)dt-۱}{۲} \quad *$$

حال طبق قضیه اساسی حسابان، f روی I مشتق پذیر است و

$$f'(x)=-\frac{۳}{۲}f(x)$$

لذا $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{۳}{۲}$. حال داریم

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int-\frac{۳}{۲}dx$$

$$\rightarrow (\ln|f(x)|)+C_۱=-\frac{۳}{۲}x+C_۲$$

$$\rightarrow \ln|f(x)|=-\frac{۳}{۲}x+C_۳$$

$$\rightarrow |f(x)|=e^{-\frac{۳}{۲}x+C_۳} \quad *_۲$$

$$\xrightarrow[f(۱)=-\frac{۱}{۲}]{\text{طبق } * \text{ داریم:}} \frac{۱}{۲}=e^{-\frac{۳}{۲}+C_۳}\rightarrow \ln\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}+C_۳$$

$$\rightarrow C_۳=(\ln\frac{۱}{۲})+\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{*_۲} |f(x)|=e^{-\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}+\ln\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۳}{۲}(x-۱)}$$

$$\xrightarrow{f(۱)=-\frac{۱}{۲}} \boxed{f(x)=-\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۳}{۲}(x-۱)}}$$

ب) اگر تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد بطوریکه برای هر x داشته باشیم $\int_0^x f(t)dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)dt$ ضابطه f را بیابید.

حل قسمت ب)

هر دو تابع $f(x)$ و e^{-t} پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. طبق قضیه اساسی حسابان $\int_0^x e^{-t} f(t)dt$ و $\int_0^x f(t)dt$ مشتق پذیرند. با مشتق‌گیری از طرفین معادله، داریم:

$$f(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} + e^{-x} f(x) \Rightarrow f(x)\left[1 - e^{-x}\right] = e^{2x} + 2xe^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{1-e^{-x}}$$

۵. (میانترم امیرکبیر۹۷)حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_0^{\ln x}\cosh^2(t)dt}{1-e^{x-1}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 1}\int_0^{\ln x}\cosh^2(t)dt=\int_0^0\cosh^2(t)dt=0$$
$$\lim_{x\to 1}(1-e^{x-1})=1-e^0=0$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)}f(t)dt=u'(x)f(u(x))$$
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x}\cosh^2(t)dt=\frac{1}{x}\cosh^2(\ln x)$$

چون هم صورت و هم مخرج در همسایگی نقطه ۱ مشتق‌پذیر هستند، پس طبق قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_0^{\ln x}\cosh^2(t)dt}{1-e^{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}\cosh^2(\ln x)}{-e^{x-1}}=\frac{\cosh^2(0)}{-e^0}=-1$$

۶. (آدامز) انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

۱. $\int e^{2x} sin 3x dx,$ ۲. $\int sin^4 t \; cos^5 t \; dt,$ ۳. $\int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\, dx$ ۴. $\int_0^1 \sqrt{x}\sin(\pi\sqrt{x})dx$

۵. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}},$ ۶. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+\sin\theta},$ ۷. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+x-2},$ ۸. $\int \frac{t dt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$

۹. $\int \frac{4xe^{x^2}}{e^{2x^2}+2e^{x^2}+2}\, dx$ ۱۰. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\arcsin(\ln x)}{x}\, dx$ ۱۱. $\int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ ۱۲. $\int \frac{\text{sech}^2 x}{1+\tanh^2 x}\, dx$

حل قسمت اول)

$$\int e^{۲x} sin۳x dx$$

برای محاسبه انتگرال $I = \int e^{۲x}\sin ۳x \, dx$ از روش جز به جز استفاده می‌کنیم، که عبارت است از $\int v\mathrm{d}u = uv - \int u\mathrm{d}v$. حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \sin ۳x \\ dv = e^{۲x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ۳\cos ۳x \\ v = \frac{۱}{۲} e^{۲x} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\int e^{۲x}\sin ۳x \; dx = \frac{۱}{۲} e^{۲x}\sin ۳x \; - \int \frac{۳}{۲} e^{۲x}\cos ۳x \; dx$$

حال با به کارگیری مجدد روش جز به جز، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \cos ۳x \\ dv = e^{۲x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -۳\sin ۳x \\ v = \frac{۱}{۲} e^{۲x} \end{cases}$$

و در نتیجه داریم:

$$\int e^{۲x}\sin ۳x \; dx = \frac{۱}{۲} e^{۲x}\sin ۳x \; - \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲} e^{۲x}\cos ۳x \; - \int -\frac{۳}{۲} e^{۲x}\sin ۳x \; dx\right)$$

$$\Longrightarrow I = \frac{۱}{۲} e^{۲x}\sin ۳x \; - \frac{۳}{۴} e^{۲x}\cos ۳x \; - \frac{۹}{۴} I$$

$$\Longrightarrow \frac{۱۳}{۴} I = \frac{۱}{۲} e^{۲x}\sin ۳x \; - \frac{۳}{۴} e^{۲x}\cos ۳x$$

$$\Longrightarrow I = e^{۲x}\left(\frac{۲\sin ۳x \; - ۳\cos ۳x}{۱۳}\right) + c$$

حل قسمت دوم)

$$\int sin^{4}t\ cos^{5}t\ dt$$

برای حل انتگرال $\int sin^{4}xcos^{5}xdx$ ابتدا محاسبه زیر را انجام می‌دهیم:

$$cos^{5}x = cos^{4}x\ cosx = \left(1 - sin^{2}x\right)^{2}\cos x\ = \left(1 - 2sin^{2}x + sin^{4}x\right)\cos x$$

با جای‌گذاری در انتگرال موردنظر داریم:

$$\int sin^{4}x\left(1 - 2sin^{2}x + sin^{4}x\right)\cos x\ dx = \int \left(sin^{4}x - 2sin^{6}x + sin^{8}x\right)\cos x\ dx$$

حال تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u = \sin x\ \Rightarrow du = \cos x\ dx$$

در نتیجه داریم:

$$\int \left(u^{4} - 2u^{6} + u^{8}\right)du = \frac{u^{5}}{5} - \frac{2u^{7}}{7} + \frac{u^{9}}{9} = \frac{sin^{5}x}{5} - \frac{2sin^{7}x}{7} + \frac{sin^{9}x}{9} + c$$

حل قسمت سوم)

$$\int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\,dx$$

برای محاسبه انتگرال $\int \frac{x}{(4x^2+1)^5}dx$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = 4x^2+1 \Rightarrow du = 8xdx$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int \frac{x}{(4x^2+1)^5}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{(4x^2+1)^5}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{u^5}du = \frac{1}{8}\int u^{-5}du = \frac{1}{8}\frac{u^{-4}}{-4} = -\frac{1}{32(4x^2+1)^4} + c$$

حل قسمت چهارم)

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} sin(\pi\sqrt{x})dx$$

برای محاسبه انتگرال $I = \int_{0}^{1} \sqrt{x}\sin(\pi\sqrt{x})\ dx$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$I = \int_{0}^{1} 2t^2\sin(\pi t)\ dt$$

حال با به کارگیری روش جز به جز قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \sin(\pi t)\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2tdt \\ v = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$I = 2\int_{0}^{1} t^2\sin(\pi t)\ dt = -\frac{2}{\pi}t^2\cos(\pi t)\Big|_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1} -\frac{2}{\pi}t\cos(\pi t)\ dt = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1} t\cos(\pi t)\ dt$$

با استفاده دوباره از روش جز به جز، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = t \\ dv = \cos(\pi t)\ dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t) \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$I = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}t\sin(\pi t)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\ dt\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(0 - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\ dt\right)$$

$$I = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\Big|_{0}^{1}\right)\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}(-1-1)\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3} = \frac{2\pi^2 - 8}{\pi^3}$$