جلسه اول

معرفی معادلات دیفرانسیل

و تعیین جایگاه آن

مقدمه. اولین گام برای شروع درس، معرفی و **تعیین جایگاه** درس است تا خواننده با انگیزه بیشتری به مطالعه درس بپردازد.

هدف درس اول همین است که، مفاهیم و تعاریف مورد نیاز را گردآوری کند، همچنین جایگاه درس را برای دانشجویان علوم و مهندسی تعیین کند.

تعریف معادلات دیفرانسیل

جهانی که در آن زندگی می‌کنیم تغییر و تحول یک اصل است.

این تغییرات، با تغییر یک (یا چند) پارامتر تحت تغییرات یک (یا چند) پارامتر دیگر با اصول و قوانین که بین آنها وجود دارد ایجاد می‌شود.

از طرفی دیگر، چون میزان تغییرات یک پارامتر (متغیر) نسبت به پارامتر (متغیر) دیگر مشتق را تداعی می‌کند، لذا مشتق‌ها هم ظاهر می‌شوند.

در نتیجه، وقتی در این نوع مسایل پارامترها و قوانین به ترتیب با متغیرهای ریاضی و روابط بین آنها بیان شوند، مدل اغلب مسایل یک معادله دیفرانسیل است.

تعریف شهودی هر معادله که شامل مشتقات مجهول باشد، یک معادلات دیفرانسیل نام دارد.

مثال . سه نمونه از معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید :

۱. $y' + 2y = e^x$

۲. $y'' - y = 0$

۳. $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$

توجه ۱ : در هر سه معادله $y(x)$ مجهول است.

توجه ۲ : متغیرهای x و y به ترتیب متغیر مستقل و وابسته هستند.

توجه ۳ : هر چند در معادله (۲) متغیر مستقل x وجود ندارد، با این حال معادله باید بر حسب یک متغیر مستقل باشد.

مثال. معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ یک معادله جبری است، چون مجهول x به متغیر دیگری وابسته نمی‌باشد.

مدل ریاضی مسایل برای درک و بررسی مسایل در حوزه‌های مختلف از علوم و مهندسی، باید اطلاعاتی راجع به معادلات دیفرانسیل داشته باشید.

هر معادله دیفرانسیل که توصیف ریاضی یک فرآیند زیستی، فیزیکی و غیره باشد، مدل ریاضی آن مساله نام دارد.

توجه: در این درس به بررسی مدل دو مساله معروف که اغلب دانشجویان با آنها آشنایی دارند می‌پردازیم تا ارزش این درس بهتر درک شود.

مساله رشد و زوال جمعیت گونه‌ای از جمعیت را در نظر بگیرید که در یک منطقه خاص بدون حضور شکارچی زندگی می‌کنند.

در غیاب یک عامل کنترلی مانند شکارچی‌ها، اصل زیر یک فرض اولیه می‌باشد.

"میزان رشد جمعیت، متناسب با جمعیت فعلی تغییر می‌کند"

اگر $p(t)$ میزان جمعیت یک گونه خاص در زمان t و میزان رشد نیز متناسب با ثابت r باشد، خواهیم داشت :

$$\frac{dp}{dt} = rp$$

چون تنها تابع ریاضی که مشتق آن یک مضرب خودش است تابع نمایی است، لذا جواب آن عبارت است از :

$$p(t) = ce^{rt}$$

اما اگر در اینجا، عامل دیگر مانند شکارچی اثرگذار بر تغییرات با مقدار k باشد، مدل به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{dp}{dt} = rp + k$$

توجه: این معادله دیگر به برحسب p به سادگی قابل حل نمی‌باشد. برای حل آن نیاز به دانش این درس دارید.

مساله سقوط می‌دانید که اگر جسمی فقط تحت نیروی وزن خودش $W = mg$ سقوط کند، ارتفاع سقوط $y(t)$ در هر لحظه t طبق قانون دوم نیوتن $F = ma$، در معادله

$$ma = mg \rightarrow \ddot{y} = g$$

صدق می‌کند، که به معادله سقوط آزاد معروف است.

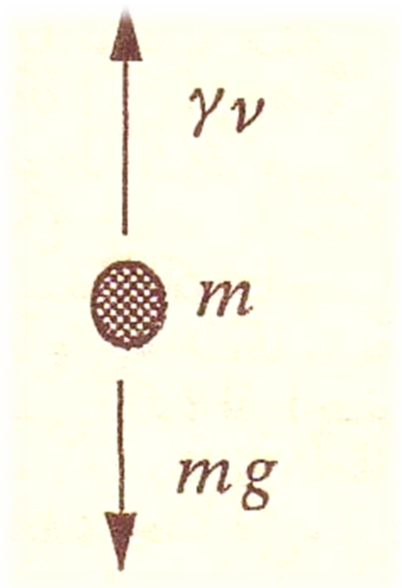
حل این معادله هم ساده است، که با دوبار انتگرالگیری جواب عمومی زیر حاصل می‌شود.

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

توجه: اگر ارتفاع اولیه $y(0) = y_0$ و سرعت اولیه $\dot{y}(0) = v_0$ معلوم باشند، جواب خصوصی زیر حاصل می‌شود.

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

توجه این فرمول همان فرمول آشنای دبیرستانی می‌باشد. اما پاسخگوی نیاز دانشجویان نمی‌باشد.



اگرعوامل دیگر در سقوط موثر باشند، همانند مقاومت هوا، طبق قانون دوم نیوتن

$$F = mg - k\,v$$

لذا، مدل مساله عبارت است از :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k\,v$$

این معادله دیگر به دوبار انتگرالگیری قابل حل نمی‌باشد (چرا ؟) .

تعیین جایگاه درس توجه کنید که با اینکه این دو معادله مجزا از دو مساله کاملاً متفاوت انتخاب شده‌اند، فارغ از نوع پارامترها با دیدگاه ریاضی هر دو مساله یک معادله را به صورت کلی زیر نمایش می‌دهند.

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

در این دو مدل پارامترهای a و b ثابت می‌باشند، در حالت کلی تر که ضرایب ثابت نباشند، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$$

توجه علاوه بر این دو مساله، مسایل زیادی وجود دارند که مدلشان به صورت معادله فوق ظاهر می‌شوند. لذا با حل این معادله جواب این دو معادله و همه معادلات، با هم تعیین می‌شوند.

به عبارتی معادلات، با یک تیر چند هدف زدن است. این است جایگاه درس معادلات دیفرانسیل که مورد نظر می‌باشد.

دستگاه معادلات دیفرانسیل در مدل‌سازی مساله رشد و زوال جمعیت تنها یک پارامتر را در نظر گرفته بودیم. چنانچه پارامترهای دیگر همانند شکارچی و غیره را وارد مساله نماییم، در این صورت دو یا چند مجهول خواهیم داشت. بنابراین مدل ریاضی با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شود.

مثال . معادلات شکار و شکارچی : در مدل‌سازی مسایلی در زیست شناسی ظاهر می شوند .

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

که در آنها $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب جمعیت شکار و شکارچی هستند. ثابت‌های c, b, a و d مبتنی بر ملاحظات تجربی و نمونه‌های خاص مورد مطالعه می‌باشند.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی در هر دو مدل قبلی، معادله فقط به یک متغیر مستقل (زمان t) وابسته بود.

اگر متغیر مستقل بیش از یکی باشد (مثلاً مکان و زمان) ، مدل، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خواهد شد.

مثال. مدل ریاضی مساله گرمای یک بعدی در جهت x و در هر لحظه t به صورت زیر می‌باشد

$$u_t = u_{xx}$$

که در آن جواب $u(x,t)$ بر حسب x و t مجهول مورد نظر است.

نکته. $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ و $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ به ترتیب مشتقات جزیی از مرتبه اول و دوم برحسب t و x هستند.

توجه . در این درس فقط معادلات دیفرانسیل معمولی مورد نظر است، لذا هر جا و هر زمان از کلمه معادلات استفاده می‌-شود، منظور معادله دیفرانسیل معمولی است.

دسته بندی معادلات دیفرانسیل

هدف اصلی این درس ارایه چند روش مهم برای یافتن جواب‌های تحلیلی معادله دیفرانسیل و بررسی خواص آنها است.

برای این منظور نیاز به یک دسته بندی مناسب از معادلات داریم.

مرتبه معادلات دیفرانسیل مرتبه یک معادله دیفرانسیل، **بالاترین** مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود. در

حالت کلی :

صورت ضمنی :
$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

صورت صریح :
$$y^{(n)} = f\big(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\big)$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n می‌باشد.

مثال. معادلات زیر را در نظر بگیرید :

۱. $$y' + 2ty = t + 1$$

۲. $$y'' + 3y' + 2y = 0$$

۳. $$y^{(4)} + y = 0$$

به ترتیب معادلات مرتبه اول، دوم و چهارم می باشند.

توجه : درجه معادلات : را با مرتبه معادلات اشتباه نکنید. توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل (همانند درجه چندجمله‌ای‌ها) درجه را تعیین می‌کند.

مثال. به عنوان نمونه معادله $y'''^2 - 2y'' + 2 = 0$ یک معادله مرتبه سوم از درجه دوم است.

صورت‌های مختلف معادلات مرتبه اول هر معادله مرتبه اول تنها به یکی از سه صورت زیر قابل نمایش است.

صورت ضمنی $$F(x,y,y')=0$$

صورت صریح $$y'=f(x,y)$$

صورت دیفرانسیلی $$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

توجه. سه صورت معادله اغلب قابل تبدیل به همدیگر نیز می باشند.

معادلات خطی و غیرخطی یک رده‌بندی بسیار مهم از معادلات دیفرانسیل خطی یا غیرخطی بودن آنها است.

معادله دیفرانسیل معمولی $F(t,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ را خطی گوییم هرگاه F در متغیرهای $y,y',\dots,y^{(n)}$ درجه اول باشند، یعنی

$$a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=g(t).$$

که در آن، ضرایب $a_i(t)$ توابع معلوم، $g(t)$ تابع بار معلوم، تنها $y(t)$ تابع مجهول است.

توجه ۱. دو گونه از مهمترین معادلات، که قسمت اعظم این درس به حل و تحلیل آن اختصاص دارد عبارتند از :

- معادلات خطی مرتبه اول $\qquad y'+f(x)y=r(x)$
- معادلات خطی مرتبه دوم $\qquad y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)$

توجه ۲. بر خلاف معادلات خطی، معادلات غیرخطی صورت خاصی ندارند. هر معادله که به شکل خطی نباشد یک معادله غیرخطی است. به عنوان نمونه معادله

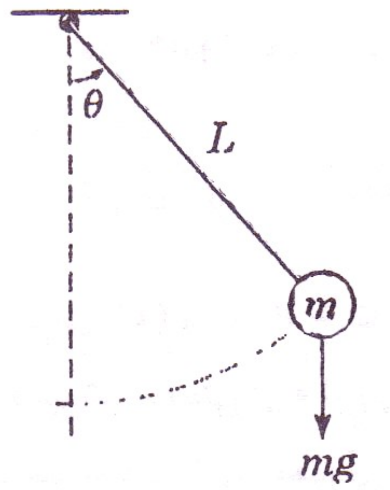
$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$$

به سبب جمله yy' یک معادله غیرخطی است.

مثال. آونگ ساده : یک مساله فیزیکی ساده که به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی منجر می‌شود، آونگ نوسانی ساده است. زاویه θ که آونگ نوسانی به طول L با جهت قایم می‌سازد (همانند شکل)، در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0,$$

وجود جمله $\sin\theta$ معادله را غیرخطی می‌سازد.



توجه : برای زاویه‌های کوچک، چون $\sin\theta \simeq \theta$، لذا معادله را می‌توان با معادله خطی زیر تقریب زد که به خطی‌سازی معروف است.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

جواب‌های معادله دیفرانسیل

جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی

$$F(t,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$$

روی بازه (a,b)، تابعی مانند $y=u(t)$ می‌باشد که تا مرتبه n مشتق پذیر است و روی بازه فوق در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

توجه ۱ : همواره نمی‌توان معادله را به صورت تحلیلی حل نمود و جواب را به دست اورد.

توجه ۲ : با فرض قابل حل بودن، شاید همیشه نتوان جواب را به صورت یک تابع بدست آورد یا درآورد.

توجه ۳ : جواب یک معادله خطی به صورت صریح یک تابع است، ولی معادله غیرخطی به صورت ضمنی یک رابطه است.

مثال ۱. تابع $y(t) = e^t$ در معادله زیر صدق می کند.

$$y' - y = 0$$

چون مشتق آن خودش می‌باشد.

مثال ۲. توابع $y_1(t) = \sin t$ و $y_2(t) = \cos t$ در معادله زیر صدق می‌کنند.

$$y'' + y = 0$$

چون مشتق دوم این دو تابع قرینه خودشان می‌باشد. لذا هر دو جواب معادله را برقرار می‌کنند.

جواب عمومی جواب کلی معادله دیفرانسیل

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

تابعی مانند $y(t) = u(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ می‌باشد که شامل n ثابت اختیاری است.

مثال ۱. دسته توابع $y(t) = ce^{-t}$ شامل هر مقدار از ثابت c، در معادله صدق می‌کند.

$$y' - y = 0$$

مثال ۲. دسته توابع $y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ به ازای هر مقدار از دو ثابت c_1 و c_2، در معادله زیر صدق می‌کنند.

$$y'' + y = 0$$

جواب خصوصی یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل معمولی

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

تابعی مانند $y = u(t)$ می‌باشد که به همراه n شرایط اولیه یا شرایط مرزی که به همراه معادله است از روی جواب عمومی $y = u(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$ به دست می آید.

مثال ۱. تابع $y(t) = e^t$ یک جواب خصوصی مساله زیر است.

$$y' - y = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

مثال ۲. تابع $y(t) = \sin t$ یک جواب خصوصی مساله زیر است.

$$y'' + y = 0 \quad , \qquad y(0) = 0 \ , \ y(\pi) = -1$$

مجموعه تمرین‌های منتخب

۱. حل معادلات ساده جواب هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

الف. $xy' = 1$ ب. $y' = xe^{x^2}$

ج. $y' = \sin^{-1} x$ د. $y'' = x + 1$

۲. حل معادلات ساده به همراه شرط اولیه جواب خصوصی هر یک از معادلات دیفرانسیل‌های زیر با شرط آغازی معین شده را بیابید.

الف. $y' = 2\sin x \cos x$ با $y = 3$ زمانی که $x = 0$.

ب. $\dot{x} = \ln t$ با $x(e) = 0$.

ج. $y' = xe^{x}$ با $y(1) = 3$.

۳. حل با سعی و خطا. همه دسته توابعی که در هر یک از معادلات زیر صدق می‌کنند را تعیین کنید.

الف. $y' = xy$

ب. $y'' + 9y = 0$

ج. $y'' - 2y = 0$

د. $y^{(4)} = y$

۴. صدق جواب. در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل می‌باشد یا خیر؟

الف. $ty' - y = t^2, \quad y = 3t + t^2$

ب. $y'' + y = \sec t, \quad y = \left(\cos t\right) \ln \cos t + t \sin t$

ج. $y' - 2ty = 1, \quad y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$

د. $y'' - 6y' + 13y = 0 \;\; ; \quad y = e^{3x} \cos 2x$

ه. $y^{(4)} - y = 0 \;\; , \quad y = \cos x + \sinh x$

۵. تعیین پارامتر در هر یک از حالات زیر مقادیر پارامتر m را چنان تعیین کنید که معادله دیفرانسیل داده شده جواب‌های به صورت $y = e^{mt}$ داشته باشد.

الف. $y' + 2y = 0$ ب. $y'' + y' - 6y = 0$

ج. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ د. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

۶. تعیین پارامتر در هر یک از مسایل حالات زیر مقادیر پارامتر r را طوری تعیین کنید که معادله دیفرانسیل جواب‌هایی به شکل $y = t^r$ به ازای $t > 0$ داشته باشد.

الف. $ty' + 2y = 0$

ب. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$

ج. $t^3y''' + 2t^2y'' + ty' - y = 0$