

مقدمات معادلات دیفرانسیل

و مسائل مقدار مرزی

جلد اول

ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما
@jozve_iut

ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس



Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems
 William E. Boyce, Richard C. Diprima
 Third Edition
 John Wiley & Sons, 1977

مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی
 جلد اول

تألیف ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما
 ترجمه دکتر محمد رضا سلطانپور، بیژن شمس
 ویراسته دکتر منوچهر وصال
 مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۶۶
 چاپ یازدهم ۱۳۸۳
 تعداد ۴۰۰۰

حروفچینی: عبدالی
 لیتوگرافی: بهزاد
 چاپ: مازیار

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرستنويسي پيش از انتشار کتابخانه ملي جمهوري اسلامي ايران

Boyce, William E.
 مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی / ویلیام ا. بویس، ریچارد ک.
 دیپریما؛ ترجمه محمد رضا سلطانپور، بیژن شمس. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.—
 ج. : مصور، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۲۴: ریاضی، آمار، و کامپیووتر؛ ۳۷)
 فهرستنويسي براساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی:
 واژه‌نامه.
 کتابنامه.
 نمایه.

ج. ۱ (چاپ یازدهم: ۱۳۸۳).
 ۱. معادله‌های دیفرانسیل. ۲. مسئله‌های مقدار مرزی. الف. دیپریما، ریچارد دیپریما،
 Richard C. ب. سلطانپور، محمد رضا، ۱۳۱۴—. ، مترجم. ج. شمس، بیژن، ۱۳۱۰—.
 مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی. ه. عنوان.

ISBN 964-01-0324-7
 ۵۱۵/۲۵
 QA۳۷۱/۹۷
 ۱۳۶۷

فهرست

صفحه	عنوان	پیشگفتار
۱	۱. مقدمه	
۵	۱.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی	
۷	۲.۱ نگاهی به تاریخ	
۱۰		
۱۷	۲.۰ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول	
۱۷	۱.۰۲ معادلات خطی	
۲۷	۲.۰۲ بحث دیگری از معادلات خطی	
۳۳	۳.۰۲ معادلات غیرخطی	
۴۲	۴.۰۲ معادلات جدایی پذیر	
۴۸	۵.۰۲ معادلات کامل	
۵۵	۶.۰۲ عامل انتگرال ساز	
۵۹	۷.۰۲ معادلات همگن	
۶۳	۸.۰۲ مسائل گوناگون	
۶۶	۹.۰۲ کاربردهای معادلات مرتبه اول	
۸۰	۱۰.۰۲ مکانیک مقدماتی	
۹۱	۱۱.۰۲ قضیه وجود و یکتا بی	
۱۰۲	ضمنیمه. تعیین معادله حرکت یک جسم با جرم متغیر	
۱۰۷	۳. معادلات خطی مرتبه دوم	
۱۰۷	۱.۰۳ مقدمه	

@jozve_iut

عنوان

صفحه

۱۱۳	۲.۰.۳۷ جوابهای اساسی معادله همگن
۱۲۴	۳.۰.۳۸ استقلال خطی و روش تغییر
۱۲۸	۴.۰.۳۹ کاهش مرتبه روش دایکاری
۱۳۳	۵.۰.۴۰ معادلات همگن با ضرایب ثابت
۱۳۸	۵.۰.۴۱ ریشه‌های مختلط
۱۴۴	۶.۰.۴۲ معادله ناهمگن
۱۴۷	۱.۰.۴۳ روش ضرایب نامعین
۱۵۵	۲.۰.۴۴ روش تغییر پارامترها
۱۶۲	۳.۰.۴۵ ارتعاشات مکانیکی
۱۶۶	۱.۰.۴۶ ارتعاشات آزاد
۱۷۲	۲.۰.۴۷ ارتعاشات تقویت شونده
۱۷۷	۳.۰.۴۸ شبکه‌های الکتریکی

۴. سریهای جواب معادلات خطی مرتبه دوم

۱۸۵	۱.۰.۴۹ مقدمه. مروری بر سریهای توانی
۱۸۵	۲.۰.۵۰ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه عادی، بخش اول
۱۹۳	۱.۰.۵۱ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه عادی، بخش دوم
۲۰۴	۳.۰.۵۲ نقاط غیرعادی منظم
۲۱۴	۴.۰.۵۳ معادلات اویلر
۲۲۰	۵.۰.۵۴ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی منظم، بخش اول
۲۲۷	۱.۰.۵۵ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی منظم، بخش دوم
۲۳۵	۲.۰.۵۶ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی منظم؛ $r_1 = r_2$
۲۴۲	$N = r_1 - r_2$

۷.۰.۵۰ معادله بسل

۲۶۳	۵. معادلات خطی مرتبه بالاتر
۲۶۳	۱.۰.۵۱ مقدمه
۲۶۵	۲.۰.۵۲ نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه هم
۲۷۱	۳.۰.۵۳ معادلات همگن با ضرایب ثابت
۲۷۹	۴.۰.۵۴ روش ضرایب نامعین
۲۸۴	۵.۰.۵۵ روش تغییر پارامترها

۶. تبدیل لاپلاس

۲۸۹	۱.۰.۵۶ مقدمه. تعریف تبدیل لاپلاس
۲۸۹	۲.۰.۵۷ حل مسائل مقدار اوایله
۲۹۷	

عنوان

صفحه

۳۰۹	۳۰۶ توابع پلهای
۳۱۷	۱۰۳.۶ یک معادله دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته
۳۲۱	۴.۶ توابع ضربهای
۳۲۷	۵.۶ انگرال تلفیقی
۳۳۳	۶.۶ بحث کلی و خلاصه

۷. دستگاههای معادلات مرتبه اول

۳۳۷	۱۰۷ مقدمه
۳۴۷	۲۰۷ حل دستگاههای خطی با روش حذفی
۳۴۵	۳۰۷ یادآوری مبحث ماتریسها
۳۵۲	۴۰۷ دستگاههای معادلات جبری خطی؛ استقلال خطی، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه
۳۶۵	۵۰۷ نظریه اساسی دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول
۳۷۹	۶۰۷ دستگاههای خطی همگن با ضرايب ثابت
۳۸۶	۷۰۷ مقادیر ویژه مختلط
۳۹۶	۸۰۷ مقادیر ویژه مکرر
۴۰۲	۹۰۷ ماتریسها اساسی
۴۱۰	۱۰۰۷ دستگاههای خطی ناهمگن
۴۱۷	جوابهای مسائل
۴۲۵	واژه‌نامه انگلیسی بدفارسی
۴۷۹	واژه‌نامه فارسی بدانگلیسی
۴۸۴	فهرست راهنمای
۴۸۹	

@jozve_iut

بسم الله الرحمن الرحيم
@jozve_iut

یادداشت مترجمان

این کتاب ترجمه هفت فصل اول از یازده فصل کتاب مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدارمتری تألیف ویلیام ا. بویس و ریچارد ک. دیپریما است. چون هفت فصل اول شامل موادی است که در دانشگاههای ایران به عنوان درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی تدریس می‌شود، به ترجمه در آمد. امیدواریم این کتاب برای دانشجویان و خوانندگان علاقهمند به آشنایی با مقدمات معادلات دیفرانسیل مفید باشد.

محمد رضا سلطانپور، بیژن شمس

پیشگفتار

درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی وسیله‌ای است بسیار عالی برای اینکه دانشجو بتواند ارتباط بین ریاضیات محض و علوم فیزیکی یا مهندسی را درک کند. پیش از آنکه مهندس یا دانش‌پژوهی بتواند با اعتماد به کاربرد معادلات دیفرانسیل پردازد، باید بهروشهای حل آنها تسلط پیدا کند، و حداقل از نظریه زیربنایی این مبحث اطلاع مجملی داشته باشد. از سوی دیگر، آگاهی برای اینکه چگونه ضرورت حل مسائلی خاص، انگیزه‌پژوهش‌های مجردتری شده است، برای یک دانشجوی ریاضیات محض غالباً بسیار سودمند است.

این کتاب را از دید شخصی که کارش ریاضیات کاربسته است و ممکن است هم به قسمتها نظری و هم به جنبه‌های عملی بسیار علاقه‌مند باشد نوشته‌ایم، یعنی با دیدی بینا بین نظری و عملی. بنا بر این در صدد بوده‌ایم که نظریه مقدماتی کامل و دقیق (اما نه مجرد) معادلات دیفرانسیل را با مطالب قابل توجهی درباره روش‌هایی که در بسیاری از کاربردهای گوناگون سودمندی آنها به ثبوت رسیده است آنرا کمیاب کنیم. توجه اصلی بهروشهایی معطوف بوده است که دارای کاربرد وسیع‌اند و می‌توان آنها را به مسائل خارج از محدوده این کتاب نیز تعمیم داد. تأکید می‌شود که این روش‌ها دارای ساختاری مرتب و منظم‌اند، و تنها یک کلکسیون متنوع از شکردهای ریاضی نامرتبط نمی‌باشند. البته در برخی از موارد، دانشجو تشخیص می‌دهد که بسیاری از مسائل را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی مقدماتی به گونه‌ای رضایت‌بخش حل کرد. از این‌رو موضوعاتی را درباره جنبه‌های کیفی جوابها و روش‌های عددی تقریب آنها مورد بحث قرارداده‌ایم.

هنگامی که با مسئله‌ای مواجه شویم که جواب آن به آسانی پیدا نشود، سؤالاتی از قبیل وجود ویکنایی جواب مطرح می‌شود. برای پاسخ به این سؤالات قضایای مربوطه را، البته نه به‌عامترین صورت آن، بیان می‌کنیم، و مفاد آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. به‌ویژه، به بررسی تفاوت‌هایی که بین معادلات خطی و غیرخطی، و مسائل مقدار مرزی و شرایط اولیه وجود دارد می‌پردازیم.

گرچه اغلب دانشجویان، در این سطح، قادرند که اهمیت و کاربردهای قضایای گوناگون مذکور را به خوبی درک کنند، اما اثبات آنها در بسیاری از موارد متضمن مفاهیمی

است، مانند همگرایی یکنواخت، که هنوز با آنها آشنایی ندارند. در چنین وضعیتی از اثبات آنها صرف نظر شده است. چنان که در اثبات قضیه اساسی وجود و یکتا بی جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه از روش تقریبات متوالی استفاده کرده و مسائل مربوطه را مورد بحث قرارداده ایم و برای اجتناب از وارد شدن در جزئیات تحلیلی دشوارتری، تا اندازه‌ای از راه شهودی رفته ایم.

این کتاب را اساساً برای دانشجویانی نوشته ایم که دوره حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطابق برنامه‌های معمول در دو و یا سه نیمسال گذرانده‌اند؛ قسمت اعظم کتاب در خور توانایی چنین دانشجویانی است. دز فصل هفتم، «دستگاه معادلات خطی مرتبه اول»، آشنایی با جبر ماتریسی مفید است، گرچه درباره ماتریسها طی دو بند به اختصار اطلاعات لازم برای مطالعه بقیه فصل را آورده‌ایم. بند‌هایی که با ستاره مشخص شده است، ممکن‌باشد مستلزم قدرت استدلال ریاضی بیشتر (نه معلومات بیشتر) است.

چون غالباً در دانشجویان این احساس وجود دارد که دروس و کتب معادلات دیفرانسیل به «کتاب آشپزی» شبیه‌اند، از این رو کوشش خاصی در مبارزه با این تمایل به کار برده‌ایم. هر جا ممکن بوده است معلومات قبلی دانشجو را به کار گرفته‌ایم و او را به طرح روشی برای حل مسائل تازه هدایت کرده‌ایم. علاوه بر این، در بحث کار بردها معمولاً طرز تشکیل معادلات مربوطه را دقیقاً بیان کرده‌ایم. برای یک کتاب مقدماتی نمی‌توان ایجاد را جزو محسنات اولیه به شمار آورد، و ما کوشش کرده‌ایم وضوح را بر احتضار مقدم داریم. امید است که سهولت مطالعه، نقصان ظرافت را جبران کند.

گرچه مندرجات کتاب را با مراجعه به فهرست می‌توان به خوبی بررسی کرد، در اینجا بدخی از ویژگیهای آن را بیان می‌کنیم. فصل اول مقدمه‌ای اختصاری است بر اصطلاحات و تاریخچه معادلات دیفرانسیل. فصل دوم به معادلات مرتبه اول اختصاص دارد. تفاوت بین معادلات خطی و غیرخطی را در سه بند نخست بررسی کرده‌ایم. سپس به بحث درباره روش‌های مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل پرداخته‌ایم و کار بردا آنها را در دینامیک جمعیت، اختلاط، رشد و استهلاک، هندسه، و مکانیک، مشتمل بر حرکت مستقیم الخط جسم با جرم متغیر، بیان کرده‌ایم. در پایان فصل قضیه پیکار را درباره وجود و یکتا بی شرح داده‌ایم.

فصلهای سوم تا هفتم به معادلات دیفرانسیل خطی اختصاص دارند. در فصل سوم معادلات خطی مرتبه دوم را بررسی می‌کنیم. مفاهیم مجموعه‌های اساسی جواب، استقلال خطی، و انتطباق همراه با روش‌های حل، مورد تأکید قرار گرفته است. مثال‌ها را از ارتعاشات مکانیکی و شبکه‌های الکتریکی انتخاب کرده‌ایم. مطالب این فصل در فصل پنجم به معادلات خطی مراتب بالاتر تعمیم یافته است. در فصل چهارم که بدسریهای توانی جواب اختصاص دارد، نشان می‌دهیم که طبقه‌بندی نقاط به عنوان عادی، غیرعادی منظم، یا غیرعادی غیرمنظم یک تقسیم‌بندی ضروری و طبیعی است نه دلخواه. از معادله اویلر به عنوان مدلی برای حالت کلیتر معادلاتی که دارای نقطه غیرعادی منظم‌اند استفاده کرده‌ایم. بحث در حالتهای دشوارتر را که در آنها ریشه‌های معادله شاخص برابرند، یا تفاصل آنها عدد صحیح است، با

شکلهای مناسبی از معادله بدل توضیع داده ایم. در فصل ششم به معرفی تبدیل لاپلاس پرداخته ایم و فواید آن را در حل مسائل مقدار اویله که در آنها تابع نیرو و پیوسته قطعه ای یا خربه ای است تأکید کرده ایم. در فصل هفتم به بررسی دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول اختصاص دارد. دو بند نخست به معرفی دستگاهها و حل آنها به روشهای حذفی می پردازد و بدون اطلاعی از ماتریسها می توان آن را مطالعه کرد. در بقیه فصل از نماد بردار ماتریس استفاده کرده ایم. بدین سان ارتباط نزدیک بین مبحث یک معادله تنها و مبحث دستگاهها روشن می شود. کاربردهای متعددی با تأکید بر تحلیل شبکه های الکتریکی مورد بحث قرار گرفته اند.

در فصلهای هشتم و نهم مسائلی را که با روشهای پیش نمی توان حل کرد، به ویژه مسائل غیرخطی را بررسی کرده ایم. در فصل هشتم روشهای عددی گستره حل مسائل مقدار اویله مورد توجه و دقت قرار گرفته اند. دامنه این بحث از روش خط مماس اویلر تا روشهای پیش بینی و تصحیح رونگه-کوتا^۱ و آدامس-مولتون^۲ را شامل می شود، که آنها را توضیع داده و مقایسه کرده ایم. تأکید و توجه بسیاری بر اصول حاکم بر روشهای عددی، پیرایش آنها و درنظر گرفتن نوع، منبع و کنترل خطاهای به عمل آمده است. فصل نهم مقدمه ای بر نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل است و در آن بر مسائل پایداری دستگاههای آزاد تأکید شده است. موضوعات این فصل را با کاربردهای آن در اکولوژی در مواردی که متضمن تنازع انواع و روابط صیاد-صید می باشند توضیع داده و توجیه کرده ایم. نقاط بحرانی دستگاههای خطی را طبقه بندی کرده ایم و دستگاههای تقریباً خطی را به وسیله مقایسه با یک دستگاه خطی مجاور آن بررسی کرده ایم. روش لیاپونف^۳ را از دیدگاه فیزیکی مطرح نموده ایم، این فصل را با بررسی مختصری درباره سیکلهای حدی به پایان بوده ایم.

در دو فصل آخر به معادلات با مشتقاتی جزئی، سری فوریه، و مسائل مقدار مرزی استورم-لیوویل^۴ پرداخته ایم. در فصل دهم، حل معادله حرارت با استفاده از روش جداسازی متغیرها به بحث درباره خواص اویله سری فوریه انجامیده است. همین روشهای برای حل مسائل مربوط به معادله موج و معادله پتانسیل به کار رفته اند. در فصل یازدهم به بررسی مسائل مقدار مرزی استورم-لیوویل در حالتی کلیتر، منظم و غیرعادی پرداخته ایم. مقادیر ویژه و توابع ویژه این نوع مسائل را مورد بحث قرار داده و با استفاده از سری توابع ویژه روش جداسازی متغیرها را به مسائل کلی همگن یا ناهمگن در معادلات با مشتقاتی جزئی تعمیم داده ایم.

این کتاب برای استفاده در کلاس درس دارای انعطاف بسیار زیادی است. از فصل چهارم به بعد فصول از یکدیگر اساساً مستقل اند، گرچه فصل یازدهم دنباله منطقی فصل دهم است. علاوه بر این، در بیشتر فصول موضوعات پایه ای را در بندهای اویله شرح داده ایم، و بندهای دیگر به تعمیم و کاربردها اختصاص دارد. بدین سان معلم برای انتخاب و تنظیم مواد

1. Runge-Kutta

2. Adams-Moulton

3. Liapounov

4. Sturm-Liouville

و عمق مطلوب برای هر یک از مباحث، حداقل آزادی و کنترل را دارد.
ما در تدریس خود در رنسلر مشاهده کردہ ایم که در یک نیمسال با سه ساعت درس در هفته می‌توان تقریباً بندهای زیر را تدریس کرد.

۱۰.۵ تا ۲۰.۵	۱۰.۱ تا ۲۰.۱
۱۰.۷ تا ۱۵.۷	۹.۰۲ تا ۴۰.۲
۱۰.۸ تا ۷.۸	۱۰.۳ تا ۸.۰۳
۱۰.۱۵ تا ۸.۱۵	۱۰.۴ تا ۵.۰۴

ترتیب‌های دیگری نیز ممکن است. مثلاً اگر روشهای عددی در درس‌های دیگر تدریس می‌شود، طبعاً باید بدجای فصل هشتم بخشناهی از فصل نهم را جایگزین کرد. در درس‌هایی که توجه به تحلیل دستگاههاست محتملاً باید فصلهای ششم، هفتم و نهم را مورد تأکید قرار داد. بالاخره اگر دانشجویان در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با معادلات دیفرانسیل آشنا شده‌اند، می‌توان موضوعات مقدماتی در فصلهای دوم و سوم را حذف کرد، و فصلهای دیگر را کاملتر تدریس نمود.

بندها را به روش دهدۀ شماره گذاری کرده‌ایم. قضایا و اشکال در یک فصل به ترتیب شماره گذاری شده‌اند. بدین‌سان قضیه ۷.۰۳ نمایشگر قضیه هفتم در فصل سوم است؛ اما لزومی ندارد که در بند ۷.۰۳ باشد. در پایان هر فصل مأخذ و مراجع ذکر شده است. در پایان اکثر بندها مجموعه مسائلی برای دانشجو آورده‌ایم، و جواب همه آنها در پایان کتاب داده شده است. برخی از مسائل دشوارتر را با ستاره مشخص کرده‌ایم. برخی از بندها نیز ستاره دارند، این بندها حاوی موضوعات پیشرفته‌تری می‌باشند، و دانشجوی مبتدی در دور اول مطالعه می‌تواند آنها را محفوظ کند.^۱

ویلیام ای. بویس
ریچارد سی. دیپریما
تروی، نیویورک
نوامبر ۱۹۷۶

۱. در ترجمۀ پیشگفتار قسمت هر بوط به توضیح تغییراتی که در چاپ دوم داده شده است و همچنین سپاسگزاری از افرادی که با مؤلفین کتاب به نحوی همکاری و اظهار علاقه کرده‌اند، حذف شده است.—متوجهیم.

مقدمه

بسیاری از مسائل مهم و شایان توجه در مهندسی، علوم تجربی، و علوم اجتماعی را چون به صورت ریاضی بیان کنیم، به تعیین تابعی منجر می‌شود که باید در معادله‌ای که شامل مشتقهای این تابع مجهول است صدق کند. چنین معادله‌ای را معادله دیفرانسیل می‌نامند. ممکن‌لا آشناترین مثال قانون نیوتون است:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = F \left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt} \right] \quad (1)$$

که در آن $u(t)$ موضع نقطه مادی تحت اثر نیروی F را نشان می‌دهد، این نیرو به نوبه خود می‌تواند تابعی از زمان t ، از موضع $u(t)$ و از سرعت $du(t)/dt$ باشد. برای تعیین حرکت یک نقطه مادی تحت اثر نیروی مفروض F ، لازم است تابع u را که در معادله (۱) صدق کند، بیابیم. اگر F نیروی ناشی از ثقل باشد، آنگاه

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -mg \quad (2)$$

با انتگرال‌گیری معادله (۲) خواهیم داشت

$$\frac{du(t)}{dt} = -gt + c_1$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \quad (3)$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت‌اند. برای آنکه (1) کاملاً معین شود لازم است دو شرط اضافی، مانند موضع و سرعت نقطه در یک لحظه مفروض، مشخص گردد. از این شرایط برای تعیین ثابت‌های c_1 و c_2 استفاده می‌شود.

برای آنکه شرح و بسط نظریه معادلات دیفرانسیل به طور منظم بیان شود، مفید است که انواع گوناگون معادلات طبقه‌بندی شود. یکی از رایجترین طبقه‌بندی‌ها مبتنی است بر اینکه آیا تابع مجهول به یک متغیر مستقل بستگی دارد و یا به چند متغیر مستقل. در حالت اول فقط مشتقهای معمولی در معادله دیفرانسیل وجود دارند، و آن را معادله دیفرانسیل معمولی می‌گویند. در حالت دوم مشتقهای جزئی اند، و معادله را معادله با مشتقهای جزئی می‌نامند.

علاوه بر معادله (1) دو مثال دیگر برای معادلات دیفرانسیل معمولی می‌آوریم. یکی

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t) \quad (4)$$

است که در آن $Q(t)$ بار یک خازن با ظرفیت C ، مقاومت R ، و ضریب خودالقائی L در مداری با ولتاژ $E(t)$ است، و دیگری معادله‌ای است که قانون کاهش مقدار $R(t)$ از یک ماده رادیو اکتیو مانند رادیوم را بر حسب زمان t بیان می‌کند،

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \quad (5)$$

که در آن k ثابت معلومی است. نمونه‌های اصلی معادلات با مشتقهای جزئی عبارتند از معادله پتانسیل

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

معادله انتشار یا حرارت

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (7)$$

و معادله موج

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

در اینجا α^2 و α^2 مقادیری ثابت‌اند. معادله انتشار، معادله انتشار، و معادله موج در مسائل گوناگونی در زمینه‌های الکتریسیته و مغناطیس، کشسانی و مکانیک سیالات پدید می‌آیند. هر یک از آنها می‌بین یک پدیده مشخص فیزیکی است (به نام آنها توجه شود)، و هر یک نماینده طبقه وسیعی از معادلات با مشتقهای جزئی است. گرچه توجه اصلی ما به معادلات دیفرانسیل معمولی معطوف است، اما معادلات با مشتقهای جزئی را نیز در نظر خواهیم گرفت؛ بدینه

سه معادله مهم مزبور را در فصول ۱۰ و ۱۱ بررسی خواهیم کرد.

۱۰.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

مرتبه یک معادله دیفرانسیل معمولی عبارت است از، بالاترین مرتبه مشتق موجود در آن معادله. بدینسان معادلات (۱) و (۴) بند پیش معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم‌اند، و معادله (۵) یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول است. به طور کلی، معادله

$$F[x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)] = 0 \quad (1)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n است. معادله (۱) نماشگر یک رابطه بین متغیر مستقل x و مقادیر تابع u و نخستین n مشتق آن $'u$, $''u$, ..., $^{(n)}u$ نمی‌باشد. از لحاظ سهولت و رعایت علامت گذاری متداول در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی، $(x)u$ را با y ، و $(x)'u$, $(x)''u$, ..., $(x)^{(n)}u$ را به ترتیب با y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ نشان می‌دهیم. بدینسان معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

به عنوان مثال،

$$x^4 = y' + y'' + 2e^x y''' + y^{(4)} \quad (3)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم برای $y = u(x)$ است. گاهی حروف دیگر نیز به جای y به کار خواهد رفت، که معنی آن ازمن عبارت روشن می‌شود.

همواره فرض می‌کنیم که معادله دیفرانسیل معمولی مفروض را بتوان بر حسب بالاترین مشتق موجود حل کرد و نوشت

$$(y^{(n)}) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4)$$

ما فقط به بررسی معادلاتی به صورت (۴) می‌پردازیم. این نکته اساساً برای اجتناب از ابهامی است که می‌تواند پیش آید، زیرا یک معادله به صورت (۲) ممکن است با چندین معادله به صورت (۴) متناظر باشد. مثلاً معادله

$$y'' + y' + 4y = 0$$

به دو معادله زیر منجر می‌گردد

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y}}{2} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 16y}}{2}$$

جواب. البته نوشتن معادله به صورت (۴)، بدان معنی نیست که لزوماً تابع $y = \phi(x)$ که در آن صدق کند، وجوددارد. در واقع، این یکی از مسائلی است که می‌خواهیم مورد بررسی قرار دهیم. مقصود از جواب معادله دیفرانسیل معمولی (۴) در فاصله $\alpha < x < \beta$ تابعی است مانند ϕ به طوری که دارای مشتقهای $'\phi$, $''\phi$, ..., $^{(n)}\phi$ باشد،

و به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ رابطه زیر برقرار باشد

$$(5) \quad \phi^{(n)}(x) = f[x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)]$$

تابع f در معادله (۴) را همواره یک تابع با مقدار حقیقی فرض می‌کنیم، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود، و همواره می‌خواهیم جوابهای با مقدار حقیقی $\phi(x) = y$ را بیایم. به آسانی با جایگذاری مستقیم می‌توان تحقیق کرد که معادله مرتبه اول

$$(6) \quad \frac{dR}{dt} = -kR$$

دارای جواب

$$(7) \quad R = \phi(t) = ce^{-kt}, \quad -\infty < t < \infty$$

است، که در آن c مقدار ثابت دلخواهی است. به همین طریق دیده می‌شود که توابع $y_1(x) = \sin x$ و $y_2(x) = \cos x$ جوابهای معادله

$$(8) \quad y'' + y = 0$$

هستند. مثال نسبتاً پیچیده‌تری تحقیق این نکته است که تابع $x \phi_1(x) = x^2 \ln x$ یک جواب معادله زیر است

$$(9) \quad x^2 y'' - 2xy' + 4y = 0 \quad x > 0$$

داریم

$$\phi_1(x) = x^2 \ln x$$

$$\phi_1'(x) = x^2 \frac{1}{x} + 2x \ln x = x + 2x \ln x$$

$$\phi_1''(x) = 1 + 2x \frac{1}{x} + 2 \ln x = 3 + 2 \ln x$$

با جایگزینی در معادله دیفرانسیل (۹) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} x^2(3 + 2 \ln x) - 2x(x + 2x \ln x) + 4(x^2 \ln x) = \\ 3x^2 - 2x^2 + (2 - 6 + 4)x^2 \ln x = 0 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $\phi_1(x) = x^2 \ln x$ یک جواب معادله (۹) است. همچنین می‌توان تحقیق کرد که $x^2 = \phi_2(x)$ یک جواب دیگر این معادله است، و آن را به عنوان تمرین بدخواننده واگذار می‌کنیم.

سؤالی که ممکن است به ذهن آید این است که آیا معادلات (۶)، (۸)، و (۹) علاوه بر جوابهای مزبور، می‌توانند جوابهای دیگری نیز داشته باشند. سؤال دیگری که امکان دارد حتی قبل از آن مطرح شود عبارت است از: هنگامی که معادله به صورت (۴) داده

شده است، چگونه می‌توان دانست که این معادله اصلاً دارای جوابی هست؟ این مسئله وجود جواب است. نه همه معادلات دیفرانسیل دارای جواب‌اند، و نه مسئله وجود به طور محض ریاضی است. اگر مسئله فیزیکی معنی‌داری را به‌طور صحیح به صورت ریاضی با یک معادله دیفرانسیل بیان کنیم، آنگاه این مسئله ریاضی باید دارای جوابی باشد. از این لحاظ مهندس و یا فیزیکدان نظارتی بر اعتبار فرمول‌بندی ریاضی خود دارد.

دومین سؤال آنکه فرض کنیم معادله دارای یک جواب است، آیا دارای جوابهای دیگری نیز هست؟ و اگر چنین است، چه نوع شرایط اضافی باید مشخص شود، تا به تعیین یک جواب خاص بینجامد؟ این مسئله یکتاپی است. توجه شود که برای معادله مرتبه اول (۶) یک دسته نامتناهی جواب متناظر به امکانات نامتناهی انتخاب ثابت ψ در معادله (۷) وجود دارد. اگر R به‌ازای یک مقدار ψ مشخص باشد، این شرط مقدار ψ را معین می‌کند، اما هنوز نمی‌دانیم که معادله (۶) دارای جوابهای دیگری که در این شرط اخیر صدق کنند، هست یا نه. مسائل وجود و یکتاپی، مسائلی دشوارند، بحث درباره آنها و مسائل مربوطه به تدریج مطرح خواهد شد.

سومین سؤال، که بیشتر جنبه عملی دارد، عبارت است از: معادله دیفرانسیلی به صورت (۴) داده شده است، چگونه واقعاً جوابی برای آن به‌دست می‌آوریم؟ روشن است که اگر برای معادله مفروض جوابی بیا بیم، همزمان با آن مسئله وجود جواب را نیز پاسخ گفته‌ایم. از طرف دیگر، بدون شناخت نظریه وجود ممکن است، مثلاً، از کامپیوتر برای یافتن تقریب عددی «جوابی» اقدام کنیم و حال آنکه معادله اصلاً دارای جوابی نباشد. حتی هنگامی که بدانیم جوابی وجود دارد، ممکن است این جواب قابل بیان بر حسب توابع مقدماتی، یعنی توابع چند جمله‌ای، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی، و هذلولی نباشد. متأسفانه وضع بیشتر معادلات دیفرانسیل چنین است. در هر صورت، پیش از آنکه به مسائل دشوار پردازیم کسب مهارت در بخشی از نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل معمولی از ضروریات اولیه است.

معادلات خطی و غیرخطی. یک طبقه بندی اساسی در معادلات دیفرانسیل معمولی بر طبق خطی و یا غیرخطی بودن آنها انجام می‌گیرد. معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$$

را خطی گویند، هرگاه F تابعی خطی از متغیرهای $y, y', \dots, y^{(n)}$ باشد. بدین‌سان صورت کلی معادله دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه n چنین است

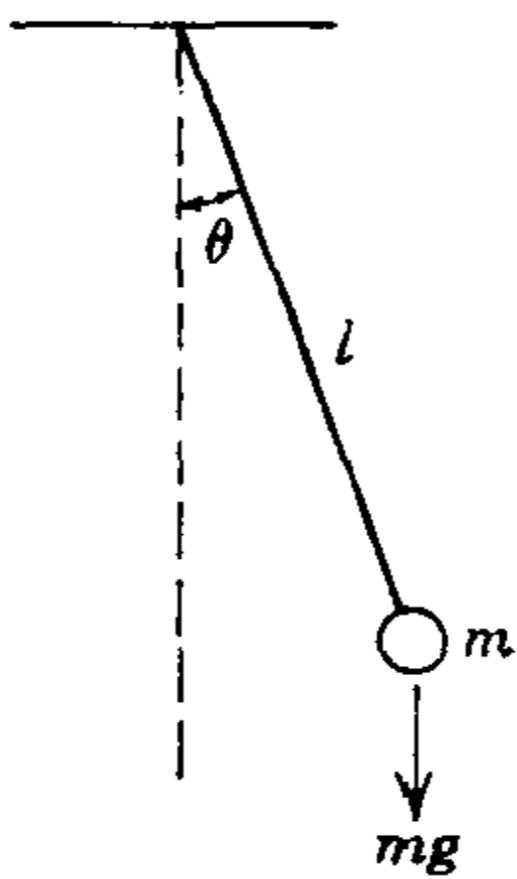
$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x) \quad (10)$$

معادلات (۲)، (۴) و (۵) در بند پیش و معادلات (۶)، (۸)، و (۹) در این بند معادلات خطی‌اند. معادله‌ای که به صورت (۱۰) نباشد، معادله‌ای است غیرخطی. معادله (۳) بدعلت جمله $y^{(n)}$ غیرخطی است. یک مسئله ساده فیزیکی که به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی می‌ازجامد، مسئله آونگ است. اگر θ طول آونگ باشد، زاویه θ که آونگ در هر لحظه با

امتداد شاغول می‌سازد (شکل ۱۰.۱) در معادله غیرخطی

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (11)$$

صدق می‌کند.



شکل ۱۰.۱

نظریه ریاضی و روش‌های حل معادلات خطی توسعه و گسترش بسیار یافته‌اند. بر عکس، در مورد معادلات غیرخطی وضع رضایت بخش نیست. برای حل معادلات غیرخطی روش کلی در دست نداریم، و نظریه وابسته به این معادلات نیز بسیار پیچیده‌تر از نظریه معادلات خطی است. خوب شیخناه بسیاری از مسائل مهم به معادلات دیفرانسیل معمولی خطی، یا اقلایی، در تقریب اول به معادلات دیفرانسیل معمولی خطی می‌انجامند. مثلًا، در مورد مسئله آونگ، اگر زاویه θ کوچک باشد، آنگاه $\sin \theta \approx \theta$ و به جای معادله (۱۱) می‌توان معادله خطی زیر را در نظر گرفت

@jozve_iut

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (12)$$

از طرف دیگر، پدیده‌های فیزیکی مهمی، مانند جریان در لامپ الکترونی، وجود دارند که در آن نمی‌توان معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر آن را با معادله خطی تقریب کرد، زیرا غیرخطی بودن آن اساسی است.

در یک کتاب مقدماتی طبیعی است که بحث معادلات خطی مورد تأکید قرار گیرد. بنابراین بخش اعظم این کتاب به معادلات خطی و روش‌های گوناگون حل آنها اختصاص یافته است. اما فصول ۸ و ۹، و بخش قابل توجهی از فصل ۲، به معادلات غیرخطی تعلق دارد. در سراسر کتاب کوشش شده است، که نشان دهیم چرا معادلات غیرخطی عموماً دشوارترند، و چرا بسیاری از روش‌ها که در حل معادلات خطی مفیدند، در مورد معادلات غیرخطی به کار نمی‌روند.

۲۰.۱ نکاهی به تاریخ

بدون آنکه چیزی درباره معادلات دیفرانسیل و روش‌های حل آنها بدانیم، بحث راجع

به تاریخ و گسترش این شاخه مهم از ریاضیات دشوار است. علاوه بر این، رشد نظریه معادلات دیفرانسیل با رشد عمومی ریاضیات درهم بافته شده است و نمی‌تواند از آن جدا شود. در این شرح مختصر فقط می‌خواهیم به ذکر بعضی از ریاضیدانان مشهور قرن هفدهم و هیجدهم که تحقیقات مهمی در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل داشته‌اند پردازیم. در این باره از بررسی تاریخی مختصری که اینس^۱ در ضمیمه الف کتاب^۲ مفصل و موثر خود درباره معادلات دیفرانسیل آورده است پیروی می‌کنیم.

نظریه معادلات دیفرانسیل در همان زمان آغاز حساب دیفرانسیل و انتگرال به وسیله آیزک نیوتن^۳ و گوتفرید ویلهلم لاپینیتز^۴ در قرن هفدهم پدیدآمده است، چنان‌که اینس آورده است:

با وجود این، اطلاع مبهم ما از تولد و کودکی دانش معادلات دیفرانسیل به روز تاریخی یازدهم نوامبر ۱۶۷۵ تمرکز می‌یابد، در این روز لاپینیتز برای اولین بار معادله

$$\int y dy = \frac{1}{2} y^2$$

رادوی کاغذ نوشته، مقصود حل یک معادله دیفرانسیل ساده که خود حائز اهمیتی نبوده است نیست، آنچه در این لحظه بزرگ انجام شد، ابداع ابزار پرتوان علامت انتگرال بود.

گرچه نیوتن در نظریه معادلات دیفرانسیل، به این عنوان، نسبتاً کارزیادی انجام نداده است، اما توسعه حساب دیفرانسیل و انتگرال و توضیح اصول بنیادی مکانیک اساس گسترش و کاربردهای این نظریه را فراهم ساخت، این کار در قرن هیجدهم و بیش از همه به وسیله اویلر^۵ انجام گرفت. نیوتن معادلات مرتبه اول را طبق صورتهای $f(x)$, $dy/dx = f(x)$, $y(x)$, $dy/dx = f(x, y)$ و d^2y/dx^2 طبقه‌بندی کرد. در مورد معادله اخیر هنگامی که $f(x, y)$ یک چندجمله‌ای از x و y است، روش حلی با استفاده از سری به دست داد وی نسبت به انتقاد بسیار حساس بود و در نتیجه نسبت به انتشار بسیاری از اکتشافات خود سستی می‌کرد.

لایپنیتز، نتایج بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقل^۶ گرچه اندکی بعد از نیوتن، به دست آورد. علامت گذاریهای جدید که برای مشتق (dy/dx) و انتگرال به کار می‌بریم، از لایپنیتز می‌باشند. او روش جدا کردن متغیرها (بند ۴۰۲) و روش‌های حل معادلات همگن مرتبه اول (بند ۷۰۲) و معادلات مرتبه اول خطی (بند ۱۰۲) را به دست آورد. وی مکاتبات پرباری را با ریاضیدانان دیگر به ویژه برادران برنولی^۷ ادامه داد. در جریان این مکاتبات بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل در اواخر قرن هفدهم حل شدند.

1. Ince

۲. فهرست منابع در پایان هر فصل آمده است.

3. Isaac Newton (1642–1727)

4. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

5. Euler

6. Bernoulli

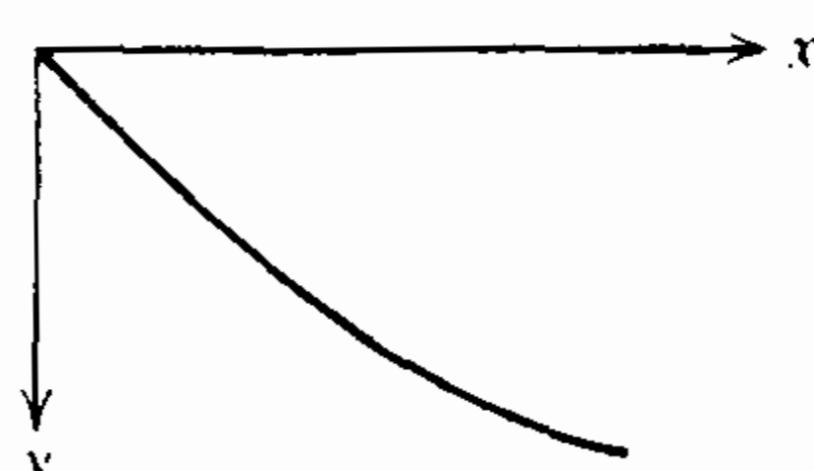
بعداز نیوتن و لاپینیتر نوبت به برادران برنولی می‌رسد، یاکوب^۱، و یوهان^۲، و دانیل^۳ فرزند یوهان. اینان سه تن از هشت عضو خانواده برنولی‌اند که همه در عصر خود ریاضیدان و دانشمند برجسته‌ای بوده‌اند. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال بسیاری از مسائل مکانیک را به صورت معادله دیفرانسیل بیان کرده و حل نمودند. یکی از مسائلی (۱۶۹۶-۱۶۹۷) که هر دو برادر در باره آن به تحقیق پرداختند، و موجب برخورد زیادی بین آنها شد، مسئله خم با کوقا هترین (زمان)^۴، تعیین خم با سرعتین فرود است. در مسئله ۱۳، بند ۱۰۲، خواهیم دید که این مسئله (شکل ۲۰.۱) به معادله مرتبه اول غیرخطی

$$y' = \frac{1}{x} + c$$

که در آن c مقداری ثابت است منجر می‌شود. نیوتن نیز این مسئله را در ۱۶۹۷ حل کرد. روایت مشکوکی حاکی است که نیوتن این مسئله را (به عنوان مجادله) در عصر یک روز خسته‌کننده در ضرایخانه شنید، و همان شب بعداز شام آن را حل کرد. حل مسئله را بدون ذکر نام منتشر کرد، اما یوهان برنولی با دیدن آن با شگفتی فریاد برآورد: «من شیر را از پنجه‌اش می‌شناسم». معادله مشهور برنولی در مکانیک سیالات از دانیل است. در ۱۶۹۵ یاکوب برنولی حل معادله دیفرانسیلی را که به صورت دیفرانسیلی $dy = a^{3/2} dx / (b^2 y^2 - a^2)^{1/2}$ نوشته شده است منتشر کرد. امروز این یک تمرین ساده است، اما در آن ایام معادله $[a^3/(b^2 y^2) - a^2]^{1/2} = y'$ را به صورت دیفرانسیلی درآوردن، و بیان آنکه انتگرال دو طرف جز در مقدار ثابت اختلافی ندارند، گامی بزرگ بود. چنان‌که، مثلاً، یوهان برنولی می‌دانست که $dx/x = d(\ln x)$. با وجود این توانست نشان دهد که معادله $dy/dx = y/ax$ (که می‌توان آن را با ترشیت با صورت

$$a \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

حل کرد) دارای جواب $y = x^p$ است، که در آن c مقدار ثابت انتگرال‌گیری است (بند ۴۰۲).



شکل ۲۰.۱

1. Jakob (1654–1705)

3. Daniel (1700–1782)

2. Johann (1667–1748)

4. brachistochrone

۵. به نظر می‌رسد که یاکوب برنولی، نخستین کسی است که اصطلاح انتگرال را به کار برده است.

در اوآخر قرن هفدهم بیشتر روش‌های مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (فصل ۲) شناخته شده بود، و توجه به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه بالاتر، و معادلات با مشتقهای جزئی تمرکز یافته بود. ریاضیدان ایتالیایی، یا کوپوریکاتی^۱، معادلاتی به صورت $y = (y_1, y_2, y_3)$ ، (مسئله ۲، بند ۱.۳) را در نظر گرفت. وی نیز معادله غیرخطی مهمی را که به معادله ریکاتی $y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$ معروف است، البته نه بدین کلیت، مورد بررسی قرار داد (مسائل ۳۵ و ۳۶، بند ۸.۲).

لئونارد اویلر^۲ یکی از بزرگترین ریاضیدانان تمام ازمنه، نیز در قرن هیجدهم می‌زیست. او ریاضیدانی پر بار بود، **مجموعه آثار** وی را در هفتاد مجلد جمع آوری کرده‌اند. با وجود آنکه در هفده سال آخر زندگی خود کور بود، تحقیقاتش را مانند سابق ادامه داد. موضوعی که در اینجا شایان توجه خاص است، کار وی در بیان مسائل مکانیک به زبان ریاضی و بسط روش‌های حل این مسائل ریاضی است. لاگرانژ درباره اثر اویلر در مکانیک، گفته است «نخستین اثر بزرگی است که آنالیز را در دانش حرکت به کار گرفته است». اویلر مسائلی از قبیل امکان تحويل معادلات مرتبه دوم به معادلات مرتبه اول با تعویض متغیرهای مناسب را بررسی کرده است. وی مفهوم عامل انتگرال ساز (بند ۲.۶) را معرفی کرد، روش عمومی بررسی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت (فصل ۳ و ۵) را در ۱۷۳۹ به دست داد، روش حل به وسیله سریهای توانی (فصل ۴) را مورد پژوهش قرار داد، و روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل (بند ۲.۸) را ابداع کرد. وی همچنین تحقیقات مهمی درباره نظریه سری فوریه (فصل ۱۰) انجام داد، و برای نخستین بار نیز نظریه حساب تغییرات را عرضه کرد.

بعداً در قرن هیجدهم ریاضیدان بزرگ فرانسوی ژوزف-لویی لاگرانژ^۳ و پیر-سیمون لابل^۴ تحقیقات مهمی در بازه نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی نمودند، و نخستین بررسی علمی معادلات با مشتقهای جزئی را ارائه کردند. محتملأً مشهورترین معادله با مشتقهای جزئی در فیزیک ریاضی معادله پتانسیل $\nabla^2 u = f$ است، که در آن اندیشه‌ها نمایشگر مشتقهای جزئی اند، و به معادله لابل نیز معروف است. مکانیک تحلیلی اثر عظیم لاگرانژ حاوی معادلات عمومی حرکت یک دستگاه دینامیکی است، که امروز به معادلات لاگرانژ معروف‌اند. کتاب مکانیک سماوی لابل که در پنج مجلد تدوین یافته است، عنوان «نیوتن فرانسه» را برای وی تحصیل کرد. آخرین مجلدات آن در سالهای ۱۷۸۹ تا ۱۸۲۵ انتشار یافت، و شامل تمام مکانیک آن عصر است. یعنیش لاگرانژ و لابل در ریاضی در دو فلسفه خلاصه می‌شود. از نظر لابل طبیعت اساسی و ذاتی است، و ریاضیات ابزاری برای شناخت اسرار آن است، اما لاگرانژ ریاضیات را هنری می‌داند که خود توجیه‌گر خویش

-
1. Jacopo Riccati (1676–1754)
 2. Leonhard Euler (1707–1783)
 3. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
 4. Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

است. در هر صورت، این دو ریاضیدان پیشرفت‌های پردازمنه و گستردگی‌ای را هم در نظر یه وهم در کاربرد ریاضیات به وجود آوردند.

دانشجویی که به تاریخ ریاضیات (ومعادلات دیفرانسیل) علاقه‌مند باشد، می‌تواند به‌یکی از کتابهای مربوط به گسترش ریاضیات که در پایان این فصل فهرست آنها را آورده‌ایم مراجعه کند.

در سالهای اخیر، بخشی از کوشش ریاضیدانان در زمینه‌های معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتقهای جزئی به فراهم آوردن نظریه‌ای، عمومی، منظم و متقن اختصاص داشته است. هدف یافتن و بسط روش‌های مناسب برای بررسی طبقات معادلات دیفرانسیل است، نه آنکه معادلات دیفرانسیل خاصی را حل کنیم.

این تاریخچه کوتاه را با تبصره‌ای که برای دانشجویی که با نگرانی، وفور کاربرد اصطلاحات «واضح است که...» یا «به آسانی می‌توان نشان داد...» را در متون ریاضی ملاحظه کرده است، می‌تواند خوش آیند باشد، پایان می‌دهیم. ناتانیل باودیج^۱ ریاضیدان و منجم آمریکایی که در سالهای اوایل ۱۸۰۰ به ترجمه مکانیک سماوی لاپلاس اشتغال داشته است، می‌گوید «هرگز به‌یکی از (کاملاً) واضح است) های لاپلاس بر نخوردم، مگر آنکه می‌دانستم ساعتها کار شاق در پیش دارم تا این شکاف را پر کرده و این وضوح کامل را بیابم و چگونگی روشنی آن را نشان دهم».

مسائل

۱. مرتبه هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید و معلوم کنید که کدامیک خطی است.

@jozve_iut

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + x \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x \quad (\text{الف})$$

$$(1+y^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0 \quad (\text{د})$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \sin(x+y) = \sin x \quad (\text{ه})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^5 \quad (\omega)$$

۲. در هر یک از حالت‌های زیر تحقیق کنید که تابع یا توابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل مربوطه است.

$$y'' - y = 0; y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cosh x \quad (\alpha)$$

$$y''' + 2y' - 3y = 0; y_1(x) = e^{-3x}, y_2(x) = e^x \quad (\beta)$$

$$y'''' + 4y'' + 3y = x; y_1(x) = \frac{x}{3}, y_2(x) = e^{-x} + \frac{x}{3} \quad (\gamma)$$

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, x > 0; y_1(x) = x^{1/2}, y_2(x) = x^{-1} \quad (\delta)$$

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0; y_1(x) = x^{-1}, y_2(x) = x^{-1} \ln x \quad (\epsilon)$$

$$y'' + y = \sec x, 0 < x < \frac{\pi}{2}; y = \phi(x) = (\cos x) \ln \cos x + x \sin x$$

$$y' - 2xy = 1; y = \phi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \quad (\zeta)$$

۳. تعیین کنید برای چه مقادیری از α ، هر یک از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی به صورت $y = e^{rx}$ است.

$$y'' - y = 0 \quad (\alpha) \quad y' + 2y = 0 \quad (\beta)$$

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0 \quad (\delta) \quad y'' + y' - 6y = 0 \quad (\gamma)$$

۴. تعیین کنید برای چه مقادیری از α ، هر یک از معادلات دیفرانسیل خطی زیر، دارای جوابهایی به صورت $y = x^\alpha$ بازی $x > 0$ است.

$$(a) x^2y'' - 4xy' + 4y = 0 \quad (b) x^2y'' + 4xy' + 4y = 0 \quad (\beta)$$

۵. مرتبه یک معادله با مشتقهای جزئی عبارت است از بالاترین مرتبه مشتق جزئی موجود در آن معادله، همچنین معادله را خطی گویند اگر بر حسب تابع مربوطه و مشتقهای آن خطی باشد. برای هر یک از معادلات زیر مرتبه، و خطی یا غیرخطی بودن آن را تعیین کنید.

$$a^2u_{xx} = u_t \quad (\alpha) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (\beta)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0 \quad (\delta) \quad a^2u_{xx} = u_{tt} \quad (\gamma)$$

$$u_t + uu_x = 1 + u_{xx} \quad (\omega) \quad u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0 \quad (\epsilon)$$

۶. در مورد هر یک از معادلات با مشتقهای جزئی زیر تحقیق کنید که تابع یا توابع

داده شده جواب معادله است.

(الف)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; u_1(x, y) = \cos x \cosh y, u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t; u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin x, u_2(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin \lambda x \quad (\text{ب})$$

λ عددی حقیقی است.

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}; u_1(x, t) = \sin \lambda x \sin \lambda at, u_2(x, t) = \sin(x - at) \quad (\text{ج})$$

λ عددی حقیقی است.

۷. در مورد هر یک از معادلات با مشتقهای جزئی زیر تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادله است.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0; u = \phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad (\text{الف})$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t; u = \phi(x, t) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}, t > 0 \quad (\text{ب})$$

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}; u = f(x - at) + g(x + at) \quad (\text{ج})$$

که در آن توابع f و g دارای مشتقهای مرتبه اول و دوماند.

@jozve_iut

مراجع

Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.

Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, Second Edition, Macmillan New York, 1919.

Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Third Edition, Holt, New York, 1964.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, Third Edition, Dover, New York, 1967.

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۲ معادلات خطی

در این فصل به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می پردازیم، این معادلات به صورت

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

می باشند، که در آن y تابع مفروضی از دو متغیر است. هر تابع $\phi(x) = y$ را که خود و مشتقش در معادله (۱) متحداً صدق کنند یک جواب می نامند، و هدف ما بررسی مسئله وجود این گونه توابع، و در صورت وجود طرز یافتن آنها است.

ساده‌ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول آن است که در آن y فقط به x بستگی داشته باشد. در این حالت

$$(2) \quad y' = f(x)$$

و باید تابع $\phi(x) = y$ را طوری تعیین کرد که مشتق آن، تابع مفروض f باشد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که ϕ تابع اولیه f است، و می نویسیم

$$(3) \quad y = \phi(x) = \int^x f(t) dt + c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. مثلاً، اگر

$$y' = \sin 2x$$

آنگاه

$$y = \phi(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

در معادله (۳) و به طور کلی در این کتاب از علامت $\int^x f(t) dt$ برای نشان دادن تابع

اولیه تابع f استفاده می‌کنیم، یعنی $F(x) = \int^x f(t) dt$ نماینده خاصی است از طبقه توابعی که مشتق آنها برابر f است. عبارت $c + F(x)$ که در آن c ثابت دلخواهی است شامل همه عضوهای این طبقه می‌باشد.

ما پیش از این در معادلات به صورت (۲) بحث نمی‌کنیم و فقط به دونکته ازویژگیهای مهم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول اشاره می‌کنیم. اول آنکه برای حذف مشتق y' و به دست آوردن خود y فقط به یک عمل انتگرال گیری نیاز داریم. دوم آنکه عبارتی که به عنوان جواب از عمل انتگرال گیری حاصل می‌شود شامل یک ثابت دلخواه است.

اکنون توجه خود را به معادله (۱) معطوف می‌کنیم. متأسفانه روش کلی رضایت‌بخشی برای تعیین جوابهای این معادله در دست نیست. در عوض روش‌های متعددی را که هر یک درباره طبقه خاصی از معادلات به صورت (۱) قابل اجراست بیان می‌کنیم. نخست، به بررسی معادله مرتبه اول خطی

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (4)$$

می‌پردازیم، که در آن p و g در فاصله‌ای مانند $\beta < x < \alpha$ توابعی پیوسته هستند. در این بند روش‌های حل معادله (۴) را بررسی می‌کنیم. مسائلی که بیشتر جنبه نظری دارند و به طور کلی متناسب وجود دیکتا بی جوابها می‌باشند در بند ۲۰.۲ مورد بحث قرار خواهد گرفت.
نخست معادله

$$y' + ay = 0 \quad (5)$$

را که در آن a یک ثابت حقیقی است در نظر می‌گیریم. این معادله را می‌توان با جستجو حل کرد. باید یک تابع y پیدا کرد که مشتق آن $'y$ مساوی با $(-a)$ برابر خود y باشد. روشن است که، $y = e^{-ax}$ این خاصیت را دارد، و نتیجتاً در معادله (۵) صدق می‌کند.
علاوه بر این

$$y = ce^{-ax} \quad (6)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است نیز همین خاصیت را دارد. چون c دلخواه است، رابطه (۶) بینهایت جواب برای معادله دیفرانسیل (۵) به دست می‌دهد. طبعاً این سؤال پیش می‌آید که آیا برای معادله (۵) جوابهایی غیر از آنچه از رابطه (۶) حاصل می‌شود وجود

دارد؟ در بند بعد نشان خواهیم داد که جوابهای دیگری وجود ندارد، اما فعلاً^{*} این سؤال همچنان باقی است.

به تغییر هندسی، رابطه (۶) یک خانواده یک پارامتری از خمها را نمایش می‌دهد، که خمها انتگرال معادله (۵) نامیده می‌شوند. در شکل ۱۰.۲ چند عضو این خانواده به ازای $a = 1$ نشان داده شده است. هر خم انتگرال نمایش هندسی جواب متناظر معادله دیفرانسیل است. مشخص کردن یک جواب خاص، با انتخاب یک خم انتگرال خاص از خانواده یک پارامتری مزبور، همارز است. غالباً مناسب است که این کار با تعیین یک نقطه (x_0, y_0) که خم انتگرال باید از آن بگذرد انجام شود، یعنی باید جواب $\phi(x) = y$ را طوری تعیین کرد که

$$\phi(x_0) = y_0.$$

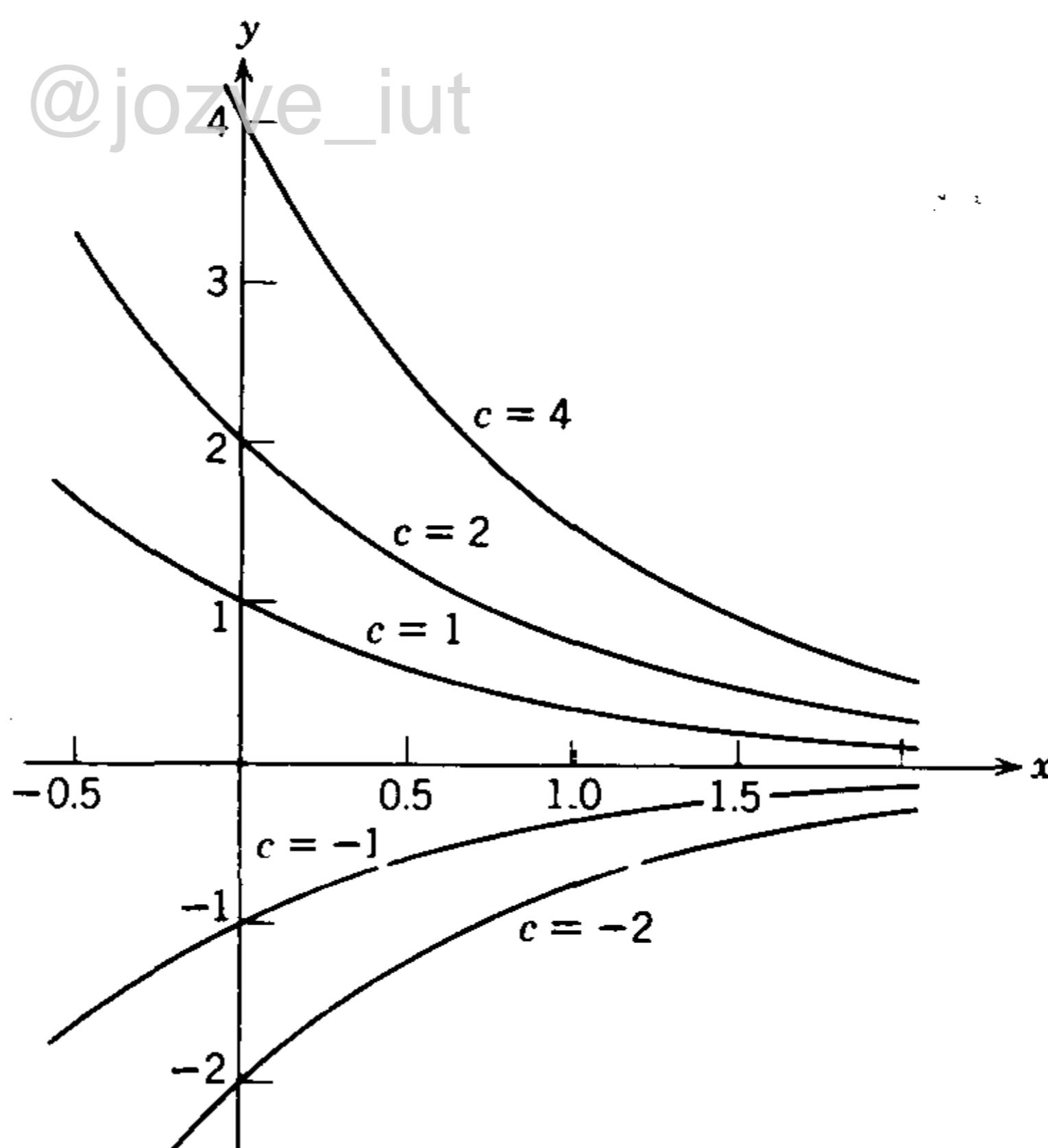
چنین شرطی را شرط اولیه می‌نامند. چون بر همان $\phi(x)$ را نشان می‌دهد، این شرط را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$x = x_0 \quad \text{در} \quad y = y_0.$$

اما، در عمل متداول است که شرط اولیه به صورت

$$y(x_0) = y_0. \tag{7}$$

بیان شود، و ما در این کتاب معمولاً^{*} از همین نماد استفاده می‌کنیم. هر معادله دیفرانسیل



شکل ۱۰.۲

مرتبه اول همراه با یک شرط اولیه، یک مسئله مقدار اولیه^۱ را تشکیل می‌دهند.
مثلثاً معادله دیفرانسیل (۵)

$$y' + ay = 0,$$

و شرط اولیه

$$y(0) = 2, \quad (8)$$

یک مسئله مقدار اولیه است. چنان‌که در بالا اشاره شد همه جوابهای معادله دیفرانسیل (۵) از رابطه (۶) به دست می‌آیند. برای پیدا کردن جوابی که در شرط اولیه (۸) صدق می‌کند، در رابطه (۶)، $0 = x$ و $2 = y$ می‌گذاریم. آنگاه $2 = ce^{-ax}$ و جواب مطلوب عبارت است از

$$y = \phi(x) = 2e^{-ax} \quad (9)$$

این جواب یکنای مسئله مقدار اولیه مفروض است. به طور کلیتر می‌توان نشان داد که مسئله مقدار اولیه مشکل از معادله دیفرانسیل (۶) و شرط اولیه (۷)، هرگاه ضرایب p و q توابع پیوسته‌ای باشند، دارای جوابی یکنای است. این مطلب در بند بعد مورد بحث قرار می‌گیرد.

اکنون معادله

$$y' + ay = g(x) \quad (10)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر $a = 0$ ، آنگاه طرف اول معادله (۱۰) درست مشتق y است، و جواب از رابطه (۳) با قراردادن y به جای f به دست می‌آید. اگر $a \neq 0$ ، آنگاه طرف اول معادله (۱۰) ترکیبی از جمله‌هایی است که منطبق $y = ce^{-ax}$ و y' باشند. باید دید که آیا می‌توان این جمله‌ها را با مشتق تابعی متعدد گرفت. به عبارت دیگر، آیا می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} + ay = \frac{d}{dx}(\quad)? \quad (11)$$

اگر چنین باشد، آنگاه معادله (۱۰) به صورت

$$\frac{d}{dx}(\quad) = g(x)$$

در می‌آید، و می‌توان فوراً آن را با انتگرال‌گیری از دو طرف حل کرد.
بررسی مجدد جواب (۶) معادله (۵) را به چگونگی عملی که باید انجام داد هدایت می‌کند. اگر $ce^{-ax} = y$ را به صورت

۱. این اصطلاح ناشی از این ذکته است که اغلب متغیر مستقل، زمان است، شرط اولیه وضعیت را در لحظه ثابتی معین می‌کند، و جواب مسئله مقدار اولیه، آنچه را که بعداً واقع می‌شود بیان می‌کند.

$$ye^{ax} = c \quad (12)$$

بنویسیم، و از دو طرف رابطه (۱۲) مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax}) = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx}e^{ax} + ae^{ax}y = e^{ax}\left(\frac{dy}{dx} + ay\right) = 0$$

بدینسان، اگر معادله (۱۵) را در e^{ax} ضرب کنیم، آنگاه می‌توان طرف اول معادله حاصل را به صورت مشتق تابع ye^{ax} نوشت

$$\underbrace{e^{ax}y' + ae^{ax}y}_{\frac{d}{dx}(e^{ax}y)} = e^{ax}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = e^{ax}g(x) \quad (13)$$

از معادله (۱۳) می‌توان انتگرال گرفت، و بدست آورد

$$e^{ax}y = \int^x e^{at}g(t)dt + c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. بنابراین معادله (۱۵) دارای جواب زیراست

$$y = \phi(x) = e^{-ax} \int^x e^{at}g(t)dt + ce^{-ax} \quad (14)$$

بدینسان، هنگامی که تابع g داده شده باشد، مسئله تعیین جواب معادله (۱۵) به محاسبه تابع اولیه‌ای که در رابطه (۱۴) است می‌انجامد. دشواری این روش بستگی به g دارد، با وجود این، معادله (۱۴) فرمول صریحی برای جواب $y = \phi(x)$ به دست می‌دهد. اگر شرط اولیه‌ای مشخص شده باشد، ثابت c را می‌توان معین کرد.

مثال ۱. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بباید

$$y' + 2y = e^{-x} \quad (15)$$

$$y(0) = 3 \quad (16)$$

از مقایسه معادلات (۱۵) و (۱۰)، دیده می‌شود که در این مسئله $a = 2$. بدینسان، معادله (۱۵) را در e^{2x} ضرب می‌کنیم، و در نتیجه

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{2x}e^{-x} \quad (17)$$

طرف اول معادله (۱۷) مشتق y^{2x} است، بنابراین می‌توان آن را به صورت

$$(e^{2x}y)' = e^x \quad (18)$$

نوشت. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۸) به دست می‌آید

$$ye^{2x} = e^x + c$$

و بنابراین

$$y = e^{-x} + ce^{-2x} \quad (19)$$

به ازای هر مقدار c یک جواب معادله (۱۵) است. برای برقراری شرط اولیه (۱۶)، در معادله (۱۹)، $x=0$ و $y=3$ می‌گذاریم. از اینجا $c=2$ به دست می‌آید، و بدین ترتیب جواب مسئله مقدار اولیه (۱۵)، (۱۶) عبارت خواهد بود از

$$y = e^{-x} + 2e^{-2x} \quad (20)$$

اکنون برگردیم به معادله خطی مرتبه اول کلی (۲)

$$y' + p(x)y = g(x)$$

با روشی مشابه آنچه در بالا به کار رفت، باید تابع μ را طوری انتخاب کرد که اگر معادله (۲) در $(x)\mu$ ضرب شود، آنگاه طرف اول آن به صورت مشتق^۱ یک تابع $y(x)\mu$ در آید. یعنی، در صورت امکان می‌خواهیم μ را طوری انتخاب کنیم که

$$\begin{aligned} \mu(x)[y' + p(x)y] &\equiv [\mu(x)y]' \\ &= \mu(x)y' + \mu'(x)y. \end{aligned}$$

بدینسان $\mu(x)$ باید در

$$\mu(x)p(x)y = \mu'(x)y$$

صدق کند. موقتاً فرض کنیم که $\mu(x) > 0$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x)$$

چون $\ln \mu(x)$ مشتق $\mu'(x)/\mu(x)$ است، داریم

$$\ln \mu(x) = \int^x p(t) dt$$

۱. هر تابع μ که دارای این خاصیت باشد، عامل انتگرال‌ساز نامیده می‌شود. در بند ۶.۲ بحث مژروحتی درباره عاملهای انتگرال‌ساز خواهیم داشت.

و بالاخره

$$\mu(x) = \exp \left[\int^x p(t) dt \right] \quad (21)$$

دیده می شود که $\mu(x)$ به صورتی که با رابطه (21) تعریف شده است، واقعاً مثبت است. علاوه بر این، چون $\int^x p(t) dt$ فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه معین شده است، $\mu(x)$ نیز فقط با تقریب یک ثابت ضریب دلخواه معین خواهد شد. اکنون چون معادله (4) را در $\mu(x)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x)$$

بنابراین

$$\mu(x)y = \int^x \mu(s)g(s) ds + c$$

با

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(s)g(s) ds + c \right] \quad (22)$$

که در آن $\mu(x)$ از رابطه (21) به دست می آید. رابطه (22) فرمول صریح جواب معادله خطی مرتبه اول کلی (4) را که در آن p و q توابعی پیوسته اند به دست می دهد. در اینجا به دو بار انتگرال گیری نیاز داریم، یکی برای به دست آوردن $\mu(x)$ از رابطه (21)، و دیگری برای تعیین y از رابطه (22). از ثابت دلخواه c می توان برای برقراری شرط اولیه استفاده کرد.

در باره روشی که برای حل معادله (4) بیان شد، دو نکته اضافی را باید مورد توجه قرارداد. اولاً، قبل از محاسبه سازه انتگرال کننده μ از رابطه (21)، لازم است اطمینان حاصل کرد که معادله دیفرانسیل دقیقاً به صورت (4) باشد، به ویژه، ضریب $'y$ باید برابر باشد. ثانیاً، پس از تعیین μ و ضرب در معادله (4) باید مطمئن شد که جمله های شامل y' ، حقیقتاً مشتق y هستند. این خود آزمونی از صحت محاسبه μ است. البته، هنگامی که جواب y به دست آمد، می توان صحت محاسبات را نیز با جایگزین کردن آن در معادله دیفرانسیل و شرط اولیه بررسی کرد.

مثال ۲. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید

$$y' = 1 \quad (5) \quad y = x - 2x^2 \quad (23)$$

برای این معادله نابع μ عبارت است از

$$\mu(x) = \exp \left(- \int^x 2t dt \right) = e^{-x^2}$$

پس

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

به طوری که

$$(e^{-x^2}y)' = xe^{-x^2}$$

بنا بر این

$$ye^{-x^2} = \int^x te^{-t^2} dt + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

و بالاخره

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

برای برقراری شرط اولیه $y(0) = 1$ باید c را برابر $\frac{3}{2}$ اختیار کرد. پس جواب مسئله مقدار اولیه مزبور چنین است

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2} \quad (24)$$

مثال ۳. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را باید

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 1 \quad (25)$$

مانند مثال پیش $\mu(x) = e^{-x^2}$ و

$$ye^{-x^2} = \int^x e^{-t^2} dt + c \quad (26)$$

به دست می آید. برای محاسبه c مناسب است حد پایین انتگرال گیری را همان نقطه اولیه $x=0$ انتخاب کنیم. آنگاه، با ضرب رابطه (۲۶) در e^{x^2} خواهیم داشت

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + ce^{x^2}$$

شرط اولیه $y(0) = 1$ مستلزم آن است که $c = 1$ ، و از این رو

$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \quad (27)$$

۱. انتخاب حد پایین انتگرال گیری در واقع اهمیتی ندارد، زیرا اختلاف بین $\int_a^x e^{-t^2} dt$ و

$\int_b^x e^{-t^2} dt$ فقط مقدار ثابتی است که می توان آن را با c جمع کرد.

جواب مسئله داده شده می باشد.

توجه شود که انتگرال تابع e^{-t^2} در حل مثال ۳ را نمی توان بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد. از اینجا این نکته روشن می شود که ممکن است به ناجار جواب حتی یک مسئله بسیار ساده به صورت انتگرال باقی بماند. اما، تابع

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (28)$$

که به تابع خطای مشهور است، به طور گسترده‌ای جدول‌بندی شده و می‌توان آن را به عنوان یک تابع شناخته شده در نظر گرفت. بنابراین از نظر محاسباتی، رابطه (۲۷) عبارت کاملاً رضایت‌بخشی برای جواب مسئله مقدار اولیه (۲۵) است. در واقع این عبارت به اندازه

جواب $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2}$ مربوط به مسئله مقدار اولیه (۲۳) رضایت‌بخش است. معمولاً

برای محاسبه y به ازای مقدار مفروض x به جدول مراجعه می‌شود (یا از ماشین حساب الکترونیکی استفاده می‌شود)، و محاسبه $\operatorname{erf}(x)$ نیز با مراجعه به جدولی دیگر به همان سادگی به دست می‌آید.

شیوه دیگر، به کار بردن عبارت انتگرالی مانند رابطه (۲۷) برای آغاز محاسبات عددی جواب مسئله مقدار اولیه است. به ازای هر مقدار داده شده x ، انتگرال در رابطه (۲۷)، یک انتگرال معین است، و می‌توان مقدار آن را با روش‌های عددی مانند دستور سیمپسون، به دست آورد. با تکرار انتگرال گیری عددی به ازای مقادیر مختلف x می‌توان جدولی از مقادیر جواب y تشکیل داد. روش‌های عددی دیگری، نیز وجود دارد که در آنها برای محاسبه مقادیر تقریبی جواب به ازای مجموعه مفروضی از مقادیر x مستقیماً از خود معادله دیفرانسیل استفاده می‌شود، این روشها را در فصل ۸ مورد بحث قرار می‌دهیم.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۶ معادله دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

$$y' - 2y = x^2 e^{2x} \quad (1.2) \quad y' + 3y = x + e^{-2x} \quad (1.1)$$

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = 2\cos 2x, \quad x > 0 \quad (1.4) \quad y' + y = xe^{-x} + 1 \quad (1.3)$$

$$xy' + 2y = \sin x, \quad x > 0 \quad (1.6) \quad y' - y = 2e^x \quad (1.5)$$

در هر یک از مسائل ۷ تا ۱۲ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیاورد.

$$y' - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1 \quad (1.7)$$

$$y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0 \quad (1.8)$$

$$y' + y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 0 \quad (9)$$

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0 \quad (10)$$

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 2 \quad (11)$$

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (12)$$

۱۳. جواب معادله زیر را بباید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x - x}$$

(اهمابی): x را به جای y بدعنوان تابع در نظر بگیرید.

۱۴. (الف) نشان دهید که $\phi(x) = e^{2x}$ یک جواب معادله

$$y' - 2y = 0$$

است، و $y = c\phi(x)$ نیز به ازای هر مقدار ثابت c جواب این معادله می باشد.

(ب) نشان دهید که $\phi(x) = 1/x$ یک جواب معادله

$$y' + y^2 = 0$$

است، اما $y = c\phi(x)$ جواب این معادله نیست. توجه شود که در قسمت (ب) معادله خطی نیست، در صورتی که در قسمت (الف) معادله خطی است.

۱۵. نشان دهید که اگر $\phi(x)$ یک جواب معادله

$$y' + p(x)y = 0$$

باشد، آنگاه $y = c\phi(x)$ نیز به ازای هر مقدار ثابت c جواب است.

۱۶. فرض کنیم $y_1(x) = y$ یک جواب معادله

$$y' + p(x)y = 0 \quad (\text{یک})$$

و $y_2(x) = y$ یک جواب معادله

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (\text{دو})$$

باشد. نشان دهید که $y = y_1(x) + y_2(x)$ نیز یک جواب معادله (دو) است.

۱۷. روش زیر را برای حل معادله خطی کلی مرتبه اول

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (یک)$$

در نظر می‌گیریم.

(الف) اگر $g(x)$ متعدد با صفر باشد، نشان دهید که جواب معادله عبارت است از

$$y = A \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (دو)$$

که در آن A ثابت است.

(ب) اگر $g(x)$ متعدد با صفر نباشد، فرض می‌کنیم که جواب آن به صورت

$$y = A(x) \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (سه)$$

باشد، و A در اینجا تابعی از x است. در معادله دیفرانسیل داده شده این مقدار را به جای y بگذارید و نشان دهید که $A(x)$ باید در شرط زیر صدق کند

$$A'(x) = g(x) \exp \left[\int^x p(t) dt \right] \quad (چهار)$$

(ج) $A(x)$ را از معادله (چهار) بیاورد. آنگاه آن را به جای $A(x)$ در رابطه (سه) قرار دهید و لزرا تعیین کنید. تحقیق کنید جوابی که با این روش بدست آمده است با رابطه (۲۲) در متن مطابقت دارد. این روش بروش تغییر پارامترها موسوم است، و در بند ۲.۶.۳ در ارتباط با معادلات خطی مرتبه دوم دقیقاً مورد بحث قرار خواهد گرفت.

با استفاده از روش مسئله ۱۷ هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(الف) y' + \left(\frac{1}{x} \right) y = 3 \cos 2x, \quad x > 0 \quad (ب) y' - 2y = x^2 e^{2x}$$

۲.۲ بحث دیگری از معادلات خطی

در بند ۱.۲ نشان دادیم که چگونه جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول را می‌توان ساخت. در اینجا به بررسی چند مسئله که بیشتر جنبه نظری دارند می‌پردازیم. نخست قضیه اساسی را بیان می‌کنیم، این قضیه شرایطی را که تحت آن مسئله مقدار اولیه مربوط به معادله خطی مرتبه اول دارای یک و فقط یک جواب است بدست می‌دهد. بقیه این بند به بررسی برخی از نتایج این قضیه اختصاص یافته است.

قضیه ۱.۲.۰ اگر توابع p و g در دو نقطه $x_0 < x_1$ که حدی نقطه x_0 باز $\alpha < \beta$ است پیوسته باشند، آنگاه تابع دیکتاپی ها نند $\phi(x) = y$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (۱)$$

به ازای $\beta < x < \alpha$ صدق می‌کند، و شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

درا که در آن p مقدار اولیه دلخواهی است که از پیش داده شده است برقرا د می‌کند.

اثبات این قضیه اساساً در ضمن بحث بند پیش که به فرمول

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(s) g(s) ds + c \right] \quad (3)$$

با

$$\mu(x) = \exp \int^x p(t) dt \quad (4)$$

انجامید، آمده است. اگر فرض کنیم که معادله (۱) دارای جوابی باشد، بررسی بند ۱.۲ نشان می‌دهد که باید جواب مزبور به صورت (۳) باشد. دیده می‌شود که چون p به ازای $\beta < x < \alpha$ پیوسته است، در نتیجه μ در این فاصله تابعی معین، مشتق پذیر و مخالف صفر است. با این توجیه معادله (۱) را می‌توان به صورت

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \quad (5)$$

نوشت. چون μ و g پیوسته‌اند، تابع μg دارای تابع اولیه است، و رابطه (۳) از معادله (۵) نتیجه می‌شود. فرضی که در اول کردیم، یعنی وجود حداقل یک جواب برای معادله (۱)، اکنون با گذاشتن عبارت p از رابطه (۴) در معادله دیفرانسیل محقق می‌شود. سرانجام، شرط اولیه (۲) مقدار p را به طور یکتا معین می‌کند، بدین‌سان اثبات کامل می‌شود. چون رابطه (۳) شامل همه جوابهای معادله (۱) است، به طور معمول آن را جواب عمومی معادله (۱) می‌نامند.

باید جنبه‌های متعددی از قضیه بالا مورد توجه قرار گیرد. نخست این قضیه می‌بین آن است که مسئله مقدار اولیه داده شده جوابی دارد و نیز مسئله مزبور فقط یک جواب دارد. بدعبارت دیگر، قضیه مزبور هم وجود و هم یکتاپذیر مسئله مقدار اولیه (۱) و (۲) را نشان می‌دهد. دیگر آنکه جواب $y(x) = \phi$ تابعی مشتق پذیر است، و در واقع چون $(x)y' + g(x) = -p$ ، مشتق $(x)\phi' = y'$ پیوسته است. بالاخره، جواب مزبور در سراسر فاصله $\beta < x < \alpha$ که در آن ضرایب p و g پیوسته‌اند در معادله دیفرانسیل (۱) صدق می‌کند. این بدان معنی است که اگر نقاطی یافت شوند که p یا g در آنها ناپیوسته باشند، جواب مزبور فقط در این نقاط ممکن است معتبر نباشد. بدین‌سان فقط با مشخص کردن نقاط ناپیوستگی p و g مقداری اطلاعات کیفی درباره جواب به دست می‌آید. به عنوان مثال مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم

$$xy' + 2y = 4x^2 \quad (6)$$

$$y(1) = 2 \quad (7)$$

مانند بند ۱۰.۲ عمل می‌کنیم، و معادله (۶) را به صورت

$$y' + \frac{2}{x} y = 4x \quad (8)$$

می‌نویسیم، و به جستجوی جوابی در یک فاصلهٔ حاوی $1 \leq x \leq 2$ می‌پردازیم. چون ضرایب معادله (۸) بجز در $x=0$ پیوسته‌اند، بنا بر قضیه ۱۰.۲ جواب مسئلهٔ مقدار اولیه داده شده حداقل در فاصله $\infty < x < 0$ معتبر است. برای یافتن جواب، نخست $(x)\mu$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \exp\left(\int^x \frac{2}{t} dt\right) = e^{2 \ln x} \\ &= x^2 \end{aligned} \quad (9)$$

چون معادله (۸) را در $x^2 \mu$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$x^2 y' + 2x y = 4x^3 \quad \text{یا}$$

$$(x^2 y)' = 4x^3$$

$$\text{پس } x^2 y = x^4 + C, \text{ و}$$

@jozve_iut

$$y = x^2 + \frac{C}{x^2} \quad (10)$$

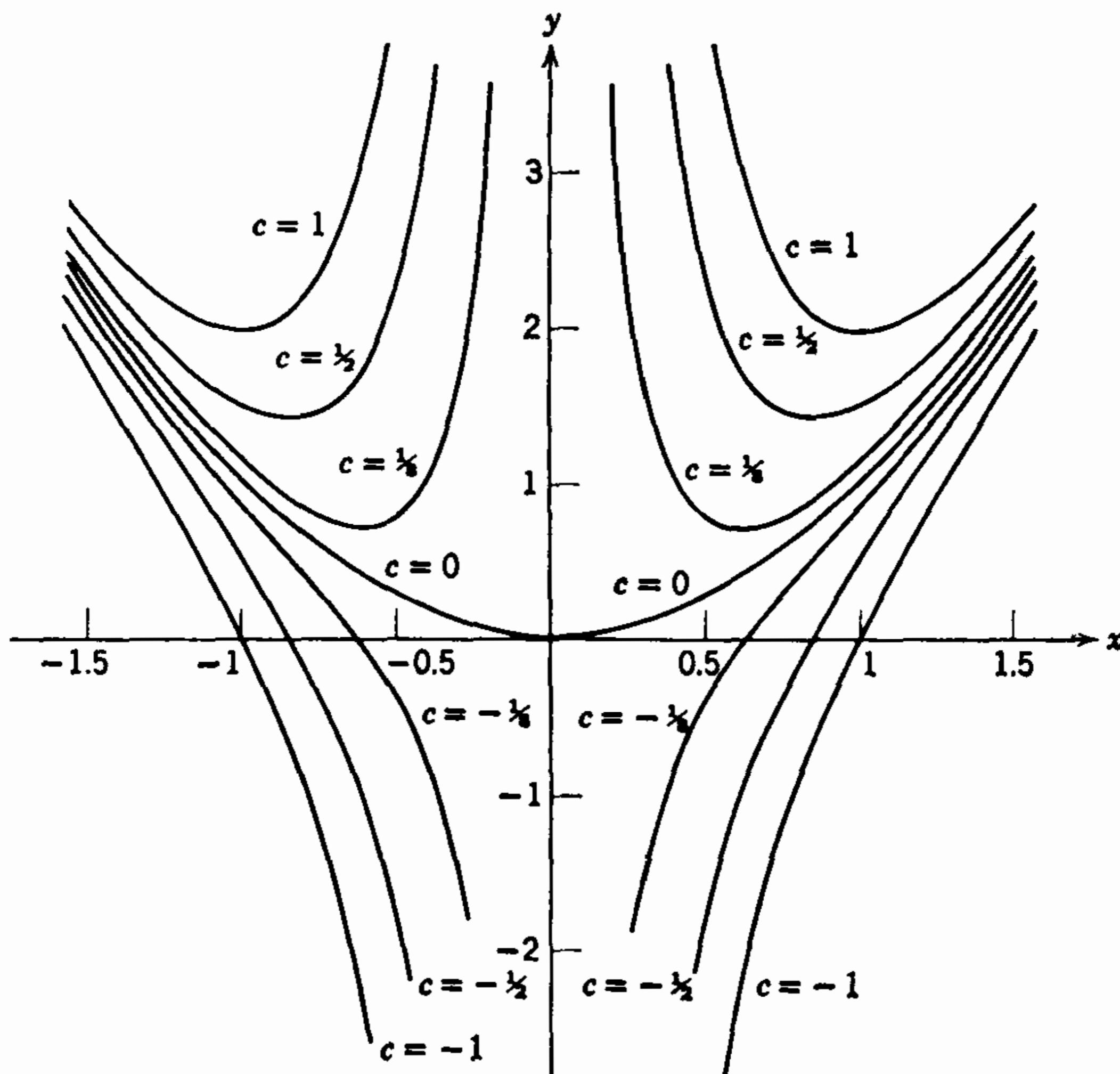
که در آن C دلخواه است، جواب عمومی معادله (۶) می‌باشد. خمهای انتگرال معادله (۶) به ازای چند مقدار C در شکل ۲۰.۲ رسم شده است. برای برقراری شرط اولیه (۷)، لازم است که $1 = C$ باشد، بدینسان جواب مسئلهٔ مقدار اولیه (۶) و (۷) عبارت است از

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (11)$$

دیده می‌شود که جواب (۱۱) هنگامی که $0 < x < 1$ بی‌کران می‌شود. این چندان شکفت‌آور نیست، زیرا $x=0$ نقطهٔ ناپیوستگی ضریب y' در معادله دیفرانسیل (۸) است. اما، اگر شرط اولیه (۷) به صورت

$$y(1) = 1 \quad (12)$$

تغییر کند. آنگاه از رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود که $C = 0$. بنا بر این جواب مسئلهٔ مقدار اولیه (۶) و (۱۲)



شکل ۲۰.۲

$$y = x^2 \quad (13)$$

خواهد بود که وقتی $x \rightarrow 0$ کاملاً خوش رفتار است. این مثال نشان می‌دهد که قضیه ۱۰.۲ مدعی آن نیست که جواب مسئله مقدار اولیه حتماً باید در نقاط ناپیوستگی توابع p و q غیرعادی شود، بلکه قضیه مزبور می‌بین آن است که جواب در نقاط دیگری نمی‌تواند غیرعادی گردد.

وضعیت جوابهای مسائل مقدار اولیه برای معادلات خطی مرتبه اول در همسایگی نقاط ناپیوستگی p و q از آنچه در بحث بالا بد نظرمی رسید پیچیده‌تر است. بررسی نسبتاً مبسوطی از این امکانات در مسائل ۹ تا ۱۲ و ۱۵ به عمل آمده است، بحث مشروحتری در فصل ۴ در ارتباط با معادلات خطی مرتبه دوم خواهد آمد.

گاهی، معادلات غیر خطی را می‌توان با تعویض متغیر به معادله خطی برگرداند و آن را حل کرد. نوعی از این معادلات به معادله برنولی مشهور است (مسائل ۱۶ و ۱۷ را ببینید).

مسائل

در هریک از مسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید.

$$y' + (1/x)y = \sin x, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$x^2 y' + 2xy = (\sin x)/x, \quad x < 0 \quad (2)$$

$$y' + (\operatorname{tg} x) y = x \sin 2x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad .\cdot ۳$$

$$xy' + 2y = e^x, \quad x > 0 \quad .\cdot ۴$$

در هر یک از مسائل ۵ تا ۸ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بباید. فاصله‌ای را که در آن جواب معتبر است معین کنید.

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2} \quad .\cdot ۵$$

$$xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1 \quad .\cdot ۶$$

$$y' + (\operatorname{cotg} x)y = 2 \csc x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad .\cdot ۷$$

$$xy' + 2y = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad .\cdot ۸$$

در هر یک از معادلات مسائل ۹ تا ۱۲ حداقل یک ضریب در $x = 0$ ناپیوسته است. هر معادله را به ازای $x > 0$ حل کنید و وضعیت جواب را هنگامی که $x \rightarrow 0$ به ازای مقادیر مختلف ثابت انتگرال‌گیری بررسی کنید. چند عضو از خانواده خمها ای انتگرال را رسم کنید.

$$y' - \left(\frac{1}{x}\right)y = x \quad .\cdot ۹ \quad y' + \left(\frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}$$

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \frac{(\cos x)}{x} \quad .\cdot ۱۰ \quad y' - \left(\frac{1}{x}\right)y = x^{1/2} \quad .\cdot ۱۱$$

۱۳. (الف) نشان دهید که جواب (۳)ی معادله خطی کلی (۱) را می‌توان به صورت

$$y = c y_1(x) + y_2(x) \quad (\text{یک})$$

نوشت. که در آن c ثابت دلخواهی است. توابع y_1 و y_2 را مشخص کنید.

(ب) نشان دهید که y_2 جواب معادله دیفرانسیل

$$y' + p(x)y = 0 \quad (\text{دو})$$

است که متضطر به $y = g(x)$ باشد.

(ج) نشان دهید که y_2 جواب معادله خطی کامل (۱) است. بعداً خواهیم دید (مثل)، در بند ۶.۳ که جوابهای معادلات خطی مرتبه بالاتر نیز طرحی مشابه رابطه (یک) دارند.

۱۴. نشان دهید که اگر a و λ ثابت‌های مشبت، و b عدد حقیقی دلخواهی باشد،

آنگاه هر جواب معادله

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

دارای این خاصیت است که $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ هنگامی که $a = \lambda$ و $a \neq \lambda$ را جداگانه بررسی کنید.

۱۵. ضرایب ناپیوسته. گاهی در معادلات دیفرانسیل خطی توابع p و g و یا یکی از آنها دارای ناپیوستگی جهشی است. اگر x_0 چنین نقطه ناپیوستگی باشد، آنگاه لازم است که معادله به ازای $x < x_0$ و به ازای $x > x_0$ جداگانه حل شود. سپس باید دو جواب را طوری به هم پیوند داد که y در x_0 پیوسته شود، این کار با انتخاب مناسب ثابت‌های دلخواه انجام می‌گیرد. دو مسئله زیر این وضعیت را روشن می‌کند. در هر حالت به این نکته توجه شود که نمی‌توان y را نیز در x_0 پیوسته ساخت.

(الف) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' + 2y = g(x), \quad y(0) = 0$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

(ب) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' + p(x)y = 0, \quad y(0) = 1$$

که در آن

$$p(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

*معادلات برنولی. گاهی می‌توان معادله غیرخطی را با تعویض تابع به معادله خطی برگرداند. مهمترین طبقه این گونه معادلات به صورت

$$y' + p(x)y = q(x)$$

است، این معادلات را معادلات برنولی می‌نامند (منسوب به یاکوب برنولی ۱۶۵۴-۱۷۰۵). در مسائل ۱۶ و ۱۷ این نوع معادلات بررسی می‌شود.

(الف) (الف) معادله برنولی را به ازای $n=1$ و $n=2$ حل کنید.

(ب) نشان دهید که اگر $n \neq 0, 1$ ، آنگاه باگرفتن y^{-n} معادله برنولی به معادله خطی بدل می‌شود. این روش حل را لاپینیتز در ۱۶۹۶ یافته است.

۱۷. با استفاده از روش مسئله ۱۶، قسمت (ب) هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$$

(الف)

$$y' = \epsilon y - \sigma y^3; \quad \epsilon > 0, \quad \sigma > 0$$

(ب)

$$y' = \epsilon y - \sigma y^3; \quad \epsilon > 0, \quad \sigma > 0$$

(ج)

$$y' = f(x) - \epsilon y^2; \quad \epsilon > 0 \quad (d)$$

تبصره: معادله (ب) در بررسی دینامیک جمعیت دارای اهمیت است. معادله (ج) و تعمیم آن (د)، در پایداری نیدرودینامیکی به کار می‌رود. معادلات (ب) و (ج) را نیز می‌توان با روش‌های بند ۴۰.۲ حل کرد. برای بحث بیشتر درباره معادله (ب) مسئله ۱۹، بند ۴۰.۲، مسئله ۱۱، بند ۹۰.۲ و بند ۱۰.۹ را بینید.

۳.۲ معادلات غیر خطی

در اینجا به بررسی معادلات دیفرانسیلی به صورت

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

مقید به شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه (۲) با هم تشکیل یک مسئله مقدار اولیه می‌دهند. سؤالات اساسی که باید مورد توجه قرار گیرند عبارتند از اینکه آیا جوابی برای این مسئله مقدار اولیه وجود دارد؟ آیا چنین جوابی یکتاست؟ جواب در چند فاصله‌ای معین است، و چگونه می‌توان فرمول مناسبی برای جواب ساخت؟ به همه این سؤالات در بند ۱۰.۲ و ۲۰.۲ در حالتی که معادله (۱) خطی است بـآسانی پاسخ داده شد. اما، اگر از نسبت به متغیر وابسته z تابعی خطی نباشد، بررسی پیش دیگر به کار نمی‌آید. در این بند چند نوع از مسائل مقدار اولیه غیرخطی را به روشی کلی مورد بحث قرار می‌دهیم. به ویژه، تفاوت‌های مهم متعددی را بین مسئله غیرخطی (۱) و (۲) و مسئله خطی مشکل از معادله دیفرانسیل

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (3)$$

و شرط اولیه (۲) مورد توجه قرار خواهیم داد.

علت آنکه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبتاً ساده‌ترند این است که فرمولی وجود دارد که جواب چنین معادله‌ای را در همهٔ حالاتها به دست می‌دهد. بر عکس، برای حل معادلات غیرخطی مرتبه اول یک چنین روش کلی وجود ندارد. در واقع، تعیین جواب $y(x) = \phi(z)$ برای معادله غیرخطی به روش تحلیلی معمولاً دشوار و اغلب غیرممکن است. فقدان روش کلی برای جواب معادله غیرخطی حداقل دارای دو نتیجهٔ مهم است. اول آنکه، روش‌های تقریب جواب، مانند روش عددی، و اطلاعات کیفی درباره جوابها در معادلات غیرخطی اهمیت بیشتری از مورد معادلات خطی پیدا می‌کنند. مقدمه‌ای بر برخی از این روشها در فصول (۸) و (۹) آمده است. دوم آنکه، برای بررسی سؤالات وجود و یکتاپی جواب باید از روش‌های غیرمستقیم استفاده کرد، زیرا عموماً نمی‌توان مستقیماً به ساختن جواب پرداخت.

وجود و یکتاپی. قضیه اساسی وجود و یکتاپی زیرین نظیر قضیه ۱.۲ مربوط به معادلات خطی است. اما، اثبات آن بسیار پیچیده‌تر است، و آن را به بند ۱۱.۲ مسوكول می‌کنیم.

قضیه ۲.۰.۲. فرض کنیم توابع f و $y/\partial f/\partial y$ دو مستطیل $\alpha < x < \beta$ و $x_0 - h < x < x_0 + h$ که حاوی نقطه (x_0, y_0) است پیوسته باشند. آنگاه، دریک فاصله h مشمول $\alpha < x < \beta$ یک جواب یکتاپی $y = y(x)$ باشد. برای مسئله مقدار اولیه $(1), (2)$

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

وجود دارد.

شرایطی که در قضیه ۲.۰.۲ بیان شد برای تضمین وجود و یکتاپی جواب مسئله مقدار اولیه (1) ، (2) دریک فاصله $x_0 + h > x > x_0 - h$ کافی است. اما، امکان دارد که تعیین مقدار h دشوار باشد. علاوه بر این امکان دارد که حتی اگر f در فرضهای قضیه صدق نکند، باز هم یک جواب یکتاپی وجود داشته باشد. درواقع، اگر برای فرض پیوستگی $y/\partial f/\partial y$ شرایطی ضعیفتر بگذاریم، نتیجه قضیه همچنان برقرار می‌ماند. به علاوه، می‌توان وجود جواب (اما نه یکتاپی آن) را تنها براساس پیوستگی f بدون هیچ گونه فرض اضافی اثبات کرد. اما، صورت فعلی قضیه برای اکثر مقاصد رضایت‌بخش است.

با مثال‌هایی می‌توان نشان داد که برای به دست آوردن نتایج مذکور در قضیه، برخی شرایط مربوط به f ضروری هستند. مثلاً، درمثال زیر می‌بینیم که اگر فرضهای قضیه ۲.۰.۲ نقض شود، مسئله مقدار اولیه $(1), (2)$ می‌تواند دارای بیش از یک جواب باشد.

مثال ۱: جواب مسئله مقدار اولیه زیر را به ازای $x \geq 0$ پیدا کنید.

$$y' = y^{1/2}, \quad y(0) = 0 \quad (4)$$

این مسئله را می‌توان به آسانی با روش بند ۴.۰.۲ حل کرد. اما دیده می‌شود که تابع

$$y = \phi(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0$$

در روابط (۴) صدق می‌کند. از طرف دیگر، تابع

$$y = 0$$

نیز یک جواب مسئله مقدار اولیه مزبور است. بنابراین مسئله دارای جواب یکتا نیست. این نکته، قضیه وجود و یکتاپی را نقض نمی‌کند، زیرا

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (y^{1/2}) = \frac{1}{2}y^{-1/2}$$

و این تابع در هر نقطه‌ای که $y \neq 0$ صفر باشد، پیوسته و حتی معین نیست. بنابراین قضیه را

در ناحیدای که شامل بخشی از محور x باشد نمی‌توان بدکار برد. اما بـد ازای هر نقطه (y, x) که بر محور x واقع نباشد، معادله دیفرانسیل $y' = y^2$ دارای جوابی یکنایت است که از (y, x) می‌گذرد.

فاصله تعریف جواب مسئله خطی (۲) : در سراسر هر فاصله حول $x = x_0$ که در آن توابع p و q پیوسته باشند وجود دارد. از سوی دیگر، برای مسئله مقدار اولیه غیرخطی (۱)، (۲) ممکن است به دشواری بتوان فاصلهای را که در آن جوابی وجود دارد تعیین کرد. مادامی که نقطه (x_0, ϕ) در ناحیدای واقع باشد که در آن فرضهای قضیه برقرارند جواب $\phi = y$ وجود خواهد داشت، اما چون معمولاً (x_0, ϕ) در دست نیست، امکان دارد که تشخیص وضع نقطه (x_0, ϕ) نسبت به این ناحیده غیرممکن باشد. به هر حال، ممکن است فاصلهای که در آن جوابی وجود دارد، ارتباط ساده‌ای با تابع f معادله (۱) نداشته باشد. مثال زیر این مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۲. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم

$$(5) \quad y' = 1 - y^2, \quad y(0) = 1$$

به آسانی با جایگزینی مستقیم می‌توان تحقیق کرد که تابع

$$(6) \quad y = \frac{1}{1-x}$$

جواب این مسئله مقدار اولیه است. روشن است که این جواب هنگامی که $1 \rightarrow x$ بـی کران می‌شود، و فقط بـدرازای $1 < x < \infty$ – معتبر خواهد بود. اما در خود معادله دیفرانسیل نشانه‌ای وجود ندارد که پر اهمیت نقطه $1 = x$ دلالت کند. دلاوه بر این، اگر به جای شرط اولیه قرار دهیم

$$(7) \quad y(0) = 2$$

باز به آسانی می‌توان تحقیق کرد که جواب معادله دیفرانسیل (۵) کـد در شرط اولیه (۷) صدق کـند، عبارت است از

$$(8) \quad y = \frac{2}{1-2x}$$

و این جواب هنگامی کـه $1/2 \rightarrow x$ بـی کران می‌شود. این مثال دشواری دیگری از مسائل مقدار اولیه معادلات غیرخطی را نشان می‌دهد، بدین معنی کـه، امکان دارد نقاط غیرعادی جواب بر حسب شرط اولیه تغییر کـند.

جواب عمومی. معادلات خطی و غیرخطی از جنبه دیگری نیز تفاوت دارند کـه مربوط به مفهوم جواب عمومی است. برای معادله مرتبه اول می‌توان جوابی یافت کـه شامل یک ثابت دلخواه باشد، و از آن همه جوابهای ممکن با مشخص کردن مقادیر این ثابت

به دست می‌آیند. در باره معادلات غیرخطی ممکن است وضع چنین نباشد؛ حتی اگر بتوان جوابی شامل یک ثابت دلخواه پیدا کرد، ممکن است جوابهای وجود داشته باشند که نتوان آنها را به ازای هیچ مقداری از این ثابت به دست آورد. در این باره مثالهایی در مسائل ۳ و ۶ می‌آوریم. بنا بر این واژه «جواب عمومی» را فقط در بحث معادلات خطی به کار خواهیم برد.

جوابهای ضمنی. بار دیگر یادآوری می‌کنیم که معادله خطی مرتبه اول دارای فرمول صریح [رابطه (۲۲)، بند ۱۰۲] برای جواب $y = \phi(x)$ می‌باشد. مادامی که توابع اولیه لازم را بتوان به دست آورد، در هر نقطه مقدار جواب را می‌توان تنها با گذاشتن مقدار مناسب x در فرمول مزبور به دست آورد. برای معادله غیرخطی به ندرت می‌توان چنین جواب صریحی پیدا کرد. در بیشتر موارد حداکثر می‌توان مشتق موجود در معادله (۱) را حذف کرد و به جای معادله دیفرانسیل، معادله‌ای فاقد مشتق به صورت

$$\psi[x, \phi(x)] = 0 \quad (9)$$

به دست آورد که همه، یا برخی از جوابهای $\phi(x) = y$ معادله (۱) در آن صدق می‌کنند. در حالتهای بسیاری از معادلات غیرخطی حتی همین کار را هم نمی‌توان انجام داد. اما، هنگامی که بتوان رابطه‌ای مانند رابطه (۹) به دست آورد، معمولاً آن را فرمول ضمنی جواب معادله (۱) می‌گویند. هر رابطه به صورت (۹) رانیز یک انتگرال (یا انتگرال اول) معادله (۱) می‌نماید.

به عنوان مثال، معادله غیرخطی ساده

@jozve_iut

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (10)$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش‌های بند بعد، به آسانی می‌توان نشان داد که تمام جوابهای معادله (۱۰) در معادله جبری

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (11)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است نیز صدق می‌کنند. برای تحقیق صحت این گزاره می‌توان از معادله (۱۱) نسبت به x مشتق گرفت و بدست آورد $0 = y' + 2x$ ، یا $y' = -x/y$ که همان معادله (۱۰) می‌باشد. بنا بر این معادله (۱۱) یک فرمول ضمنی برای جوابهای معادله (۱۰) است. به ازای $c^2 \leq x^2$ ، توابع $y = \phi(x)$ بسیاری وجود دارد که در معادله (۱۱) صدق می‌کنند. برخی از آنها به قرار زیر است

$$y = \phi_1(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \quad -c \leq x \leq c \quad (12)$$

$$y = \phi_2(x) = -\sqrt{c^2 - x^2} \quad -c \leq x \leq c \quad (13)$$

$$y = \phi_r(x) = \begin{cases} \sqrt{c^2 - x^2} & -c \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{c^2 - x^2} & 0 < x \leq c \end{cases} \quad (14)$$

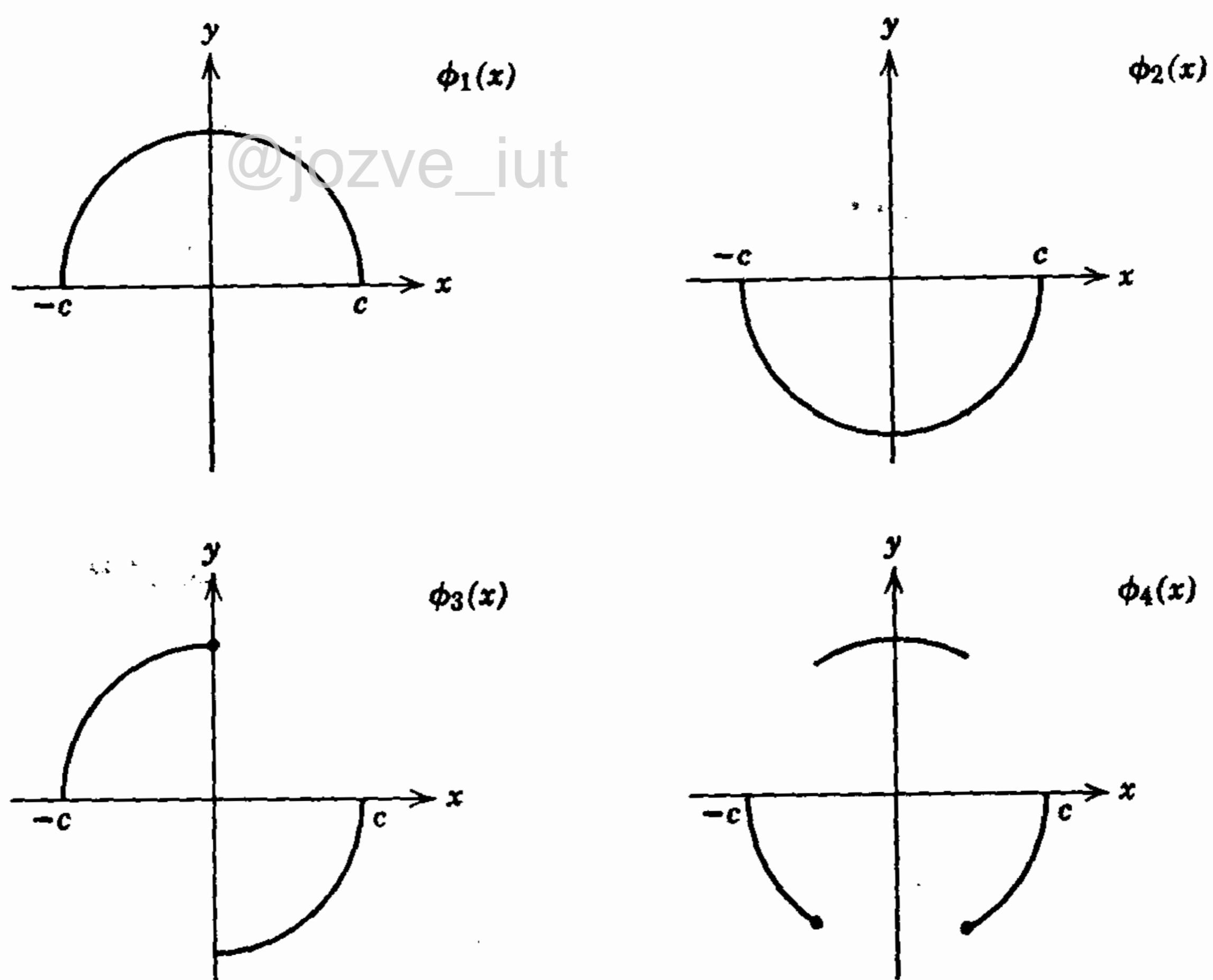
$$y = \phi_r(x) = \begin{cases} -\sqrt{c^2 - x^2} & -c \leq x \leq -c/2 \\ \sqrt{c^2 - x^2} & -c/2 < x < c/2 \\ -\sqrt{c^2 - x^2} & c/2 \leq x \leq c \end{cases} \quad (15)$$

در شکل ۳.۲ نمودار توابع (۱۵) تا (۱۲) را بینید. اما، از آنها فقط دو تابع، یعنی، توابع (۱۴) و (۱۳) در تمام فاصله $c < x < -c$ در معادله دیفرانسیل (۱۰) صدق می‌کند. اگر شرط اولیه‌ای نیز داده شده باشد، آنگاه باید هر کدام از توابع ϕ_1 و ϕ_2 را که در شرط مزبور صدق می‌کند و همچنین مقدار بخصوصی را انتخاب کنیم. مثلاً، اگر شرط اولیه عبارت باشد از

$$y(0) = 2 \quad (16)$$

آنگاه باید ϕ_2 را کنار گذاشت، و ϕ_1 را حفظ نمود و مقدار c را برابر ۳ انتخاب کرد.
بنابراین

$$y = \sqrt{9 - x^2}, \quad -3 < x < 3 \quad (17)$$



شکل ۳.۲

یک جواب مسئله مقدار اولیه (۱۵) و (۱۶) است. بنابر قضیه ۲.۲ این مسئله روی فاصله $x < ۳$ - جواب دیگری ندارد.

درمثال پیش، بهعلت آنکه رابطه ضمنی (۱۱) نسبت به y از درجه دوم بود، جوابهای صریح (۱۲) و (۱۳) بهآسانی بهدست آمد. اما، با کمی تأمل دیده می‌شود که رابطه ضمنی (۹)، بهفرضی که بتوان آن را پیدا کرد اغلب پیچیده‌تر از معادله (۱۱) است. در این صورت، احتمالاً حل آن (به‌طور تحلیلی) نسبت به y غیر ممکن خواهد بود، و حتی تعیین فواصلی که جوابها در آن وجود دارند ممکن است بسیار دشوار باشد. علاوه بر این باید به‌خاطر سپرد که ممکن است جوابهایی از رابطه ضمنی (۹) در معادله دیفرانسیل صدق نکند، و نیز در برخی از حالتها ممکن است معادله دیفرانسیل جوابهایی داشته باشد که در رابطه ضمنی مزبور صدق نکنند.

ساختن خمهای انتگرال به‌روش ترسیمی. چون روشی کلی برای بهدست آوردن جوابهای تحلیلی دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود ندارد ممکن است روش‌هایی که جوابهای تقریبی یا اطلاعات کیفی دیگری درباره جوابها بهدست می‌دهند دارای اهمیت بسیاری باشند. یکی از این روشها مبتنی بر تقریب ترسیمی خمهای انتگرال است. در هر نقطه از صفحه $y = f(x)$ که در آن $f'(x, y)$ معین باشد، معادله دیفرانسیل (۱)

$$y' = f(x, y)$$

مقداری برای y' بهدست می‌دهد، که می‌توان آن را به عنوان شیب قطعه خطی که از این نقطه می‌گذرد در نظر گرفت. همه این قطعه خطها به‌طور کلی یک میدان امتدادی برای معادله دیفرانسیل مزبور تشکیل می‌دهند. خمهای انتگرال عبارتند از خمهایی که در هر نقطه به عنصری از میدان امتدادی که به آن نقطه وابسته است مماس باشند.

شکل کلی یک خم انتگرال را می‌توان گاهی با رسم عناصر میدان امتدادی در تعداد زیادی نقاط، مجسم کرد. به عنوان مثال، معادله ساده

$$(y - ۱)y' = ۴ \quad (۱۸)$$

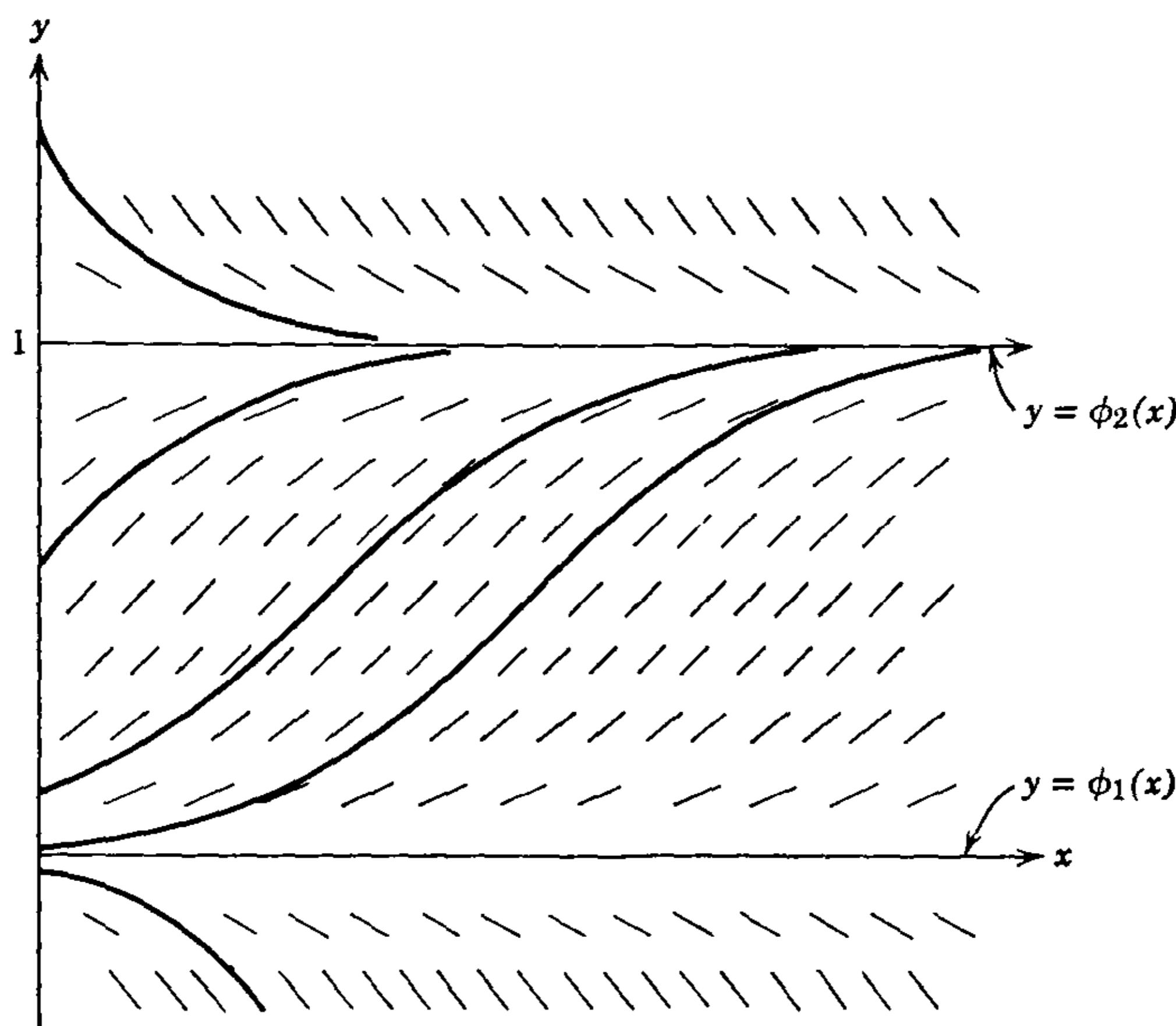
را که در عین حال نوع مهمی از معادلات غیرخطی است در نظر می‌گیریم. ساختن میدان امتدادی، با توجه به اینکه طرف دوم معادله (۱۸) مستقل از x است بسیار ساده می‌شود. بنابراین، عناصر میدان امتدادی در همه نقاط هر خط موازی محور x خود متوازی‌اند. علاوه بر این، با جستجو می‌توان برای معادله (۱۸) دو جواب خصوصی، یعنی جوابهای ثابت $y = \phi_1(x) = ۱$ و $y = \phi_2(x) = ۴$ را به دست آورد. این جوابهای خصوصی صفحه $y = f(x)$ را به سه منطقه تقسیم می‌کنند، که در هر یک از آنها y دارای علامت ثابتی است. در واقع

اگر $y < ۰$ ، آنگاه $y' < ۰$

اگر $۰ < y < ۱$ ، آنگاه $y' > ۰$

اگر $y > 1$ باشد، آنگاه $y' < 0$

با استفاده از این اطلاعات به آسانی می‌توان شکل ۴.۲ را که نمایشگر میدان امتدادی معادله (۱۸) است رسم کرد.



شکل ۴.۲

از این طرح به آسانی می‌توان برخی از خواص کیفی جوابها را استنباط کرد. نخست، جواب متناظر بدشوط اولیه $y = \phi_1(x)$ با $y' < 0$ را در نظر می‌گیریم. چنین جوابی صعودی است، زیرا در مجاورت نقطه اولیه داریم $y' < 0$. اما، این جواب نمی‌تواند از $y = 1$ فراتر رود، زیرا اگر به $y = 1$ برسد، شبیه آن صفر می‌شود (و صفر باقی می‌ماند). در واقع، جواب مزبور نمی‌تواند بدازای هیچ مقدار متناظر x به $y = 1$ برسد، زیرا اگر برسد، از این نقطه به عنوان نقطه اولیه دو جواب خواهد گذشت [یکی جواب مورد بحث و دیگری جواب $y = \phi_2(x)$] و این با قضیه ۲.۲ در تناقض است. بدین ترتیب هر جوابی که نقطه آغاز آن در فاصله $1 < y < 0$ باشد، هنگامی که $x \rightarrow -\infty$ به $y = 1$ میل می‌کند. به همین طریق هر جوابی که نقطه آغاز آن بالای $1 < y < \infty$ باشد، نزولی است و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به $y = 1$ میل می‌کند. بالاخره، هر جوابی که نقطه آغاز آن در زیر $0 < y < 1$ باشد بازهم تنزل می‌کند و سرانجام به $-\infty$ میل می‌کند. معادله (۱۸) را با روش مذکور در بند ۴.۲، یا تشخیص آن به عنوان معادله برنولی (مسائل ۱۶ و ۱۷، بند ۲.۲) می‌توان حل کرد. در شکل ۴.۲ چند جواب رسم شده است.

اما، تأکید می‌شود که رفتار کیفی جوابهای معادله (۱۸) بدون حل آن تعیین شده است. موضوعاتی که در اینجا مطرح شد، با مفاهیم پایداری و ناپایداری جوابهای معادلات دیفرانسیل ارتباط دارند، و در فصل (۹) مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل

۱. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، ناحیه‌ای از صفحه x را باید که در هر نقطه آن وجود ویکتاوی جواب، بنابر قضیه اساسی وجود ویکتاوی تضمین می‌شود.

$$y' = (1 - x^2 - y^2)^{1/2} \quad (\text{ب}) \quad y' = \frac{x - y}{2x + 5y} \quad (\text{الف})$$

$$y' = 3(x+y)^{-2} \quad (\text{د}) \quad y' = 2xy/(1+x^2+y^2) \quad (\text{ج})$$

$$y' = (x^2 + y^2)^{3/2} \quad (\text{و}) \quad y' = \frac{\ln |xy|}{1 - x^2 + y^2} \quad (\text{ه})$$

۲. نشان دهید که $y = \phi(x) = (1 - x^2)^{-1}$ یک جواب مسئله مقدار اولیه

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1$$

است. درجه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟

۳. نشان دهید که $y = \phi(x) = [2(x+c)]^{-1/2}$ یک ثابت دلخواه است، در معادله دیفرانسیل

$$y' + y^3 = 0$$

صدق می‌کند. جوابی را که در شرط اولیه $y(0) = c$ صدق می‌کند باید. درجه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟ توجه شود که $y = 0$ نیز یک جواب این معادله دیفرانسیل است، اما آن را نمی‌توان از $\phi(x) = y$ به ازای مقداری از c بدست آورد.

۴. تحقیق کنید که

$$y = \phi(x) = \left[1 + \frac{2}{3} \ln(1 + x^2) \right]^{1/2}$$

یک جواب مسئله مقدار اولیه

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^2)}, \quad y(0) = 1$$

می‌باشد. درجه فاصله‌ای این جواب معتبر است؟

۵. تحقیق کنید که

$$y = (c^2 - 4x^2)^{1/2}, \quad y = -(c^2 - 4x^2)^{1/2}$$

جوابهای معادله دیفرانسیل

$$y' = -4x/y$$

می باشند. در چه بخشها بی از صفحه y/x این جوابها معتبرند؟ جوابهای خصوصی متناظر به نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ را بیابید.

۶. (الف) تحقیق کنید که $x - 1 - x^2/4 + y = 0$ و $y(x) = 1$ هر دو جوابهای

مسئله مقدار اولیه

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = 1$$

می باشند. در چه فواصلی این جوابها معتبرند؟

(ب) توضیح دهید که چرا وجود دو جواب برای مسئله مذکور با بخش یکتا بی قضیه در تناقض نیست.

۷. (ج) نشان دهید که $x^2 + cx + c^2 = y$ که در آن c ثابت داخواهی است به ازای $x \geq -2c$

در معادله دیفرانسیل قسمت (الف) صدق می کند. اگر $c = 1$ ، شرط اولیه نیز برقرار است، و همان جواب $y(x) = 1$ به دست می آید. نشان دهید که نمی توان مقدار c را طوری انتخاب کرد که جواب دوم، $y(x) = 2$ به دست آید.

۸. برای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر، میدان امتدادی را طوری بسازید، که بتوان رفتار عمومی خانواده خمها ای انتگرال را به خوبی تجسم کرد.

$$(الف) \quad y' = x^2 + y^2 \quad (ب) \quad y' = x^2 - xy + y^2 - 1 \quad (ج) \quad y' = x^2 + y^2$$

$$y' = \frac{2x - 3y}{x + y} \quad (د) \quad y' = \frac{xy}{1 + x^2}$$

۹. برای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر، با در نظر گرفتن میدان امتدادی الگوی کلی خمها ای انتگرال را معین کنید. فرض کنیم $\phi(x, y) = y$ جواب متناظر به شرط اولیه $y_0 = \phi(x_0, y_0)$ باشد. $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y)$ به ازای چه مقادیری از y متناهی است؟ این حد را در هریک از حالتها مذکور حساب کنید.

$$(الف) \quad y' = y(1 - y^2) \quad (ب) \quad y' = -y(1 + y^2)$$

$$(ج) \quad y' = \epsilon y - \sigma y^2 \quad \sigma > 0, \epsilon > 0 \quad (د) \quad y' = (1 - y)(2 - y)$$

در هریک از مسائل ۹ تا ۱۲ :

(الف) طرح اجمالی میدان امتدادی را رسم کنید.

(ب) چند عضو خانواده خمها ای انتگرال را بدون حل معادله دیفرانسیل رسم کنید.

(ج) مسئله مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

(د) جوابی را که در (ج) به دست آورده اید رسم کنید، و آن را با آنچه در

(ب) یا فتید مقایسه کنید.

$$y' = x + 1, \quad y(0) = 1 \quad \cdot 10 \quad y' = -1, \quad y(1) = 2 \quad \cdot 9$$

$$y' - y = 1 - e^x, \quad y(0) = 0 \quad \cdot 12 \quad y' + xy = 1, \quad y(1) = 0 \quad \cdot 11$$

۴.۲ معادلات جدایی پذیر

اغلب مناسبتر است که معادله

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

را به صورت زیر بنویسیم

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

این عمل را می‌توان همواره با قراردادن $y = f(x)$ و $M(x, y) = -f(x, y)$ انجام داد، اما امکان دارد راههای دیگری نیز وجود داشته باشد. در حالتی که M فقط تابع x و N فقط تابع y باشد، آنگاه معادله (۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3)$$

@jozve_iut

معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{1+y^4}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-x^4 + (1+y^4) \frac{dy}{dx} = 0$$

هر معادله دیفرانسیلی را که بتوان به صورت (۳) نوشت، جدایی پذیر می‌گویند؛ علت این نامگذاری، با نوشتن معادله (۳) به صورت دیفرانسیلی

$$M(x)dx = -N(y)dy \quad (4)$$

روشن می‌شود. اکنون فرض کنیم که توابع H_1 و H_2 به گونه‌ای باشند که

$$H'_1(x) = M(x), \quad H'_2(y) = N(y) \quad (5)$$

آنگاه معادله (۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$H'_1(x) + H'_2(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (6)$$

اگر $y = \phi(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد، آنگاه طبق قاعدة زنجیری داریم

$$H'_2(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2[\phi(x)] \quad (7)$$

در نتیجه، اگر $\phi(x) = y$ جوابی از معادله دیفرانسیل (۳) باشد، آنگاه معادله (۶) به صورت

$$H'_1(x) + \frac{d}{dx} H_2[\phi(x)] = 0$$

یا

$$\frac{d}{dx} \{H_1(x) + H_2[\phi(x)]\} = 0 \quad (8)$$

نوشته می‌شود. با انتگرال‌گیری از معادله (۸) به دست می‌آید

$$H_1(x) + H_2[\phi(x)] = c \quad (9)$$

یا

$$H_1(x) + H_2(y) = c \quad (10)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. بدینسان برای معادله دیفرانسیل (۳) جواب $\phi(x) = y$ به صورت ضمنی (۱۰) به دست آمده است. توابع H_1 و H_2 عبارتند از توابعی که در معادلات (۵) صدق کنند، یعنی به ترتیب توابع اولیه M و N باشند. در عمل جواب (۱۰) معمولاً از معادله (۶) با انتگرال‌گیری از طرف اول نسبت به x و از طرف دوم نسبت به y به دست می‌آید، استدلال بالا این عمل را توجیه می‌کند.

اگر علاوه بر معادله دیفرانسیل، شرط اولیه

$$y(x_0) = y_0 \quad (11)$$

داده شده باشد، برای تعیین جواب معادله (۳) که در این شرط صدق کند، در معادله (۱۰) قرار می‌دهیم $x = x_0$ و $y = y_0$. از آنجا

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0) \quad (12)$$

با گذاشتن این مقدار c در معادله (۱۰)، و توجه به رابطه‌های

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(t) dt, \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(t) dt$$

به دست می‌آید

$$\int_{x_0}^x M(t) dt + \int_{y_0}^y N(t) dt = 0 \quad (13)$$

معادله (۱۳) جواب معادله دیفرانسیل (۳) را که در شرط اولیه (۱۱) نیز صدق می‌کند، به طور ضمنی نمایش می‌دهد. خواهند باید به خاطر بسپاردن که تعیین جواب به صورت صریح، یا حتی تعیین دقیق فاصله‌ای که در آن جواب وجود دارد، عموماً مستلزم آن است که معادله (۱۳) را نسبت به y به عنوان تابعی از x حل کنیم. این عمل ممکن است دشواریهای بزرگی در برداشته باشد.

مثال ۱. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1 \quad (14)$$

این معادله دیفرانسیل را می‌توان به صورت

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx$$

نوشت. چون از طرف اول نسبت به y و از طرف دوم نسبت به x انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \quad (15)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است. برای تعیین جوابی که در شرط اولیه مذبور صدق کند، در معادله (۱۵) قرار می‌دهیم $0 = x^3 + 2x^2 + 2x + C$ و $1 = y^2 - 2y$. بنابراین جواب مسئله مقدار اولیه (۱۴) به صورت ضمنی

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \quad (16)$$

داده می‌شود. برای آنکه جواب را به صورت صریح به دست آوریم، باید از معادله (۱۶)، y را بر حسب x به دست آورد. این عمل را در اینجا به آسانی می‌توان انجام داد، زیرا معادله (۱۶) نسبت به y از درجه دوم است، و داریم

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (17)$$

بدینسان رابطه (۱۷) برای معادله دیفرانسیل مذبور دو جواب به دست می‌دهد، که فقط یکی از آنها در شرط اولیه داده شده صدق می‌کند. این جواب متناظر به علامت منفی در رابطه (۱۷) است. پس بالاخره جواب مسئله مقدار اولیه (۱۴) عبارت است از

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (18)$$

توجه شود که اگر اشتباهًا در رابطه (۱۷) علامت مثبت را انتخاب کنیم، در این صورت برای همان معادله دیفرانسیل جوابی بدست می‌آید که در شرط اولیه $y(0) = 3$ صدق

می کند. بالاخره، برای تعیین فاصله ای که در آن جواب (۱۸) معتبر است، باید به تعیین فاصله ای که در آن مقدار زیر رادیکال مشتث است بپردازیم. با ترسیم این عبارت به عنوان تابعی از x ، خواسته می تواند نشان دهد که فاصله مطلوب $2 - > x$ است.

مثال ۲. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را باید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}, \quad y(0) = 1 \quad (19)$$

نخست معادله دیفرانسیل را به صورت

$$\frac{1 + 2y^2}{y} dy = \cos x dx \quad (20)$$

می نویسیم و چون از طرف اول نسبت به y و از طرف دوم نسبت به x انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + c \quad (21)$$

برای برقراری شرط اولیه، مقادیر $x = 0$ و $y = 1$ را در معادله (۲۱) جایگزین می کنیم، $c = 0$ به دست می آید. از این رو جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) به طور ضمنی با رابطه زیر داده می شود

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + 1 \quad (22)$$

چون نمی توان y را از رابطه (۲۲) به صورت تابع صریحی از x به دست آورد، تحلیل بیشتر این مسئله دشوار تر می گردد. نکتدایی که به خوبی روشن است این است که هیچ جوابی محور x را قطع نمی کند، یعنی نقطه ای که مختص y آن صفر باشد و در رابطه (۲۲) صدق کند وجود ندارد. برای ذکر این مطلب، توجه شود که طرف اول رابطه (۲۲) به ازای $y = 0$ بینها یست می شود، در حالی که طرف دوم هیچگاه بینها یست نمی شود، از این رو هیچ نقطه ای از محور x در رابطه (۲۲) صدق نمی کند. بدین سان، نتیجه می شود که برای جواب معادلات (۱۹) همواره $y > 0$ است. در نتیجه، می توان برای این مسئله از علامت قدر مطلق در رابطه (۲۲) صرف نظر کرد. همچنین می توان نشان داد که فاصله تعریف جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) تمام محور x ، $x < \infty$ می باشد. در مسئله ۲۵ طرز اثبات آن را می بینیم.

در مثال ۱ تعیین y به عنوان تابعی صریح از x و مشخص کردن دقیق فاصله ای که جواب مزبور در آن وجود دارد دشوار نبود. اما، این یک وضعیت استثنایی است، و اغلب لازم می آید که جواب را به همان صورت ضمنی مانند مثال ۲ رها کنیم. بدین ترتیب، در مسائل این بند و بند های ۵.۲ تا ۸.۲، اصطلاح «معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید» بدان

معنی است که اگر دشوار نباشد جواب را به صورت صریحی به دست آوریم، و در غیر این صورت یک فرمول ضمیمی برای جواب بیابیم.

مسائل

هر یک از معادلات مسائل ۱ تا ۸ را حل کنید. نواحی صفحه x را که در آنها شرایط قضیه اساسی وجود و یکتا بی برقرارند بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^2)}$$

۱.۲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

۱.۱

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

۱.۴

$$y' + y^2 \sin x = 0$$

۱.۳

$$xy' = (1 - y^2)^{1/2}$$

۱.۶

$$y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$$

۱.۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$$

۱.۸

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$$

۱.۷

جواب هر یک از مسائل مقدار اولیه ۹ تا ۱۴ را به صورت صریح بیابید، و فاصله تعریف جواب را (حداقل به طور تقریب) تعیین کنید.

$$\sin 2x dx + \cos 2y dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

۱.۹

$$x dx + ye^{-x} dy = 0, \quad y(0) = 1$$

۱.۱۰

$$\frac{dr}{d\theta} = r, \quad r(0) = 2$$

۱.۱۱

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+x^2 y}, \quad y(0) = -2$$

۱.۱۲

$$\frac{dy}{dx} = xy^2(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$$

۱.۱۳

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y}, \quad y(2) = 0$$

۱.۱۴

۱۵. معادله زیر را در فاصله $1 < x < 1$ - حل کنید

$$y^2(1-x^2)^{1/2} dy = \sin^{-1} x dx$$

۱۶. معادله زیر را که در آن a, b, c, d مدادیر ثابت‌اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+b}{cy+d}$$

۱۷. معادله زیر را که در آن a, b, c, d مقادیر ثابت‌اند حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d}$$

۱۸. نشان دهید که معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{x-y}$$

جدایی پذیر نیست؛ اما اگر به جای y متغیر جدید v را که با رابطه $v/y = x$ تعریف شده است بگذاریم، آنگاه معادله نسبت به x و v جدایی پذیر است. جواب معادله داده شده را با این روش بیا بید.

۱۹. (الف) مسئله مقدار اولیه $y' = \epsilon y + y^2$ را که در آن ϵ ثابت مثبتی است حل کنید. نشان دهید که حد جواب $\phi(x) = y$ هنگامی که $x \rightarrow \infty$ دارای وضعیت زیر است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \infty \quad \cdot y_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \quad \cdot y_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = -\infty \quad \cdot y_0 < 0$$

(ب) اکنون فرض کنیم که معادله دیفرانسیل را با افزودن جمله σy که در آن σ عدد مثبت (کوچک) است تغییر دهیم. با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' = \epsilon y - \sigma y^2, \quad y(0) = y_0$$

نشان دهید که در اینجا حد $\phi(x) = y$ هنگامی که $x \rightarrow \infty$ دارای وضعیت زیر است

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad \cdot y_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \quad \cdot y_0 = 0$$

نشان دهید که اگر $y_0 < 0$ ، آنگاه هنگامی که x به یک محدود متناهی که به y_0 بستگی دارد می‌گراید، $\phi(y)$ بی‌کران می‌شود. معادله غیرخطی قسمت (ب) در کاربردهای بسیاری دارای اهمیت است (بندهای ۱۰.۲ و ۱۰.۹ را ببینید). توجه شود که این معادله یک معادله برنولی است، و می‌توان آن را با روش مسئله ۱۶ در بنده ۲۰.۲ حل کرد.

۲۰. مسئله مقدار اولیه (۱۹) مثال ۲ را دوباره در نظر می‌گیریم. طرف دوم معادله دیفرانسیل را با (y, x) نشان می‌دهیم، و مشاهده می‌کنیم که

$$|f(x, y)| = \left| \frac{y}{1+2y^2} \right| |\cos x|$$

(الف) با پیدا کردن مقادیر ماکزیمم و مینیمم $(1+2y^2)/y$ ، نشان دهید که به ازای همه مقادیر y داریم

$$\left| \frac{y}{1+2y^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و بنابراین به ازای همه مقادیر x و y خواهیم داشت $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |\cos x|$.

(ب) با بدکار بردن نتیجه قسمت (الف) نشان دهید که فاصله تعریف جواب مسئله مقدار اولیه (۱۹) عبارت است از $-\infty < x < \infty$.

۵.۲ معادلات کامل

نخست معادله

$$\psi(x, y) = c \quad (1)$$

را که در آن c مقدار ثابتی است در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه معادله (۱)، y را به طور خصمنی به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x معین می‌کند، از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم به دست می‌آید^۱

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = 0 \quad (2)$$

معادله (۲) معادله دیفرانسیلی است که جواب آن به وسیله معادله (۱) معین می‌شود.
بر عکس: معادله دیفرانسیل

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (3)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر بتوان تابع y را طوری تعیین کرد که

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y) \quad (4)$$

$\phi(x, y) = c$ به طور خصمنی $y = \phi(x)$ را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x معین کند، آنگاه

$$\begin{aligned} M(x, y) + N(x, y)y' &= \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' \\ &= \frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] \end{aligned} \quad (5)$$

۱. اندیشهای مشتقهای جزئی نسبت به آن متغیر را نشان می‌دهند.

در نتیجه معادله (۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] = 0 \quad (6)$$

در این حالت معادله (۳) را معادله دیفرانسیل کامل می‌گویند. جواب معادله (۳)، یا معادله هم‌ارز آن (۶)، به صورت ضمنی با معادله (۱)

$$\psi(x, y) = c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است معین می‌گردد.

در عمل معادله دیفرانسیل (۳) را اغلب به صورت متقاضی دیفرانسیلی زیر می‌نویسد

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (7)$$

مثال ۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

با جستجو می‌توان دید که طرف اول، مشتق $3y^2x^2$ است. بدین‌سان معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3) = 0$$

وجواب به صورت ضمنی $c = kx^{-2/3}y^3 = kx^2y^3$ و صریح $y = kx^{-2/3}$ به دست می‌آید.

در این مثال ساده تشخیص آنکه معادله دیفرانسیل مزبور کامل است آسان بود، در واقع با توجه به اینکه طرف اول مشتق $3y^2x^2$ است جواب به آسانی بدست آمد. امکان دارد که در مورد معادلات پیچیده‌تر نتوان به این طریق عمل کرد. قضیه زیر روش منظمی برای تشخیص کامل بودن یک معادله دیفرانسیل را فراهم می‌سازد.

قضیه ۲۰.۳. فرض کنیم توابع M, N, M_y و N_x در ناحیه مستطیلی^۱ $R: \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

در R یک معادله دیفرانسیل کامل است اگر فقط اگر

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (8)$$

دست نقطه R بروگرد باشد. یعنی، شرط لازم و کافی برای وجود یک تابع ψ که دست معادلات (۳)

۱. ضرورتی ندارد که ناحیه R مستطیلی باشد، بلکه تنها باید همبسته ساده باشد، برای بحث در معنای این اصطلاح مسئله ۱۶ را ببینید.

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

صدق کند، آن است که معادله (۸) به ازای M و N برقرار باشد.

اثبات این قضیه شامل دو قسمت است. نخست نشان می‌دهیم که اگر یک تابع ψ وجود داشته باشد به طوری که معادلات (۴) برقرار باشند، آنگاه معادله (۸) نیز برقرار است. با محاسبه M_y و N_x از معادلات (۴) داریم

$$M_y(x, y) = \psi_{xx}(x, y), \quad N_x(x, y) = \psi_{yy}(x, y) \quad (9)$$

چون M_y و N_x پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که ψ_{xx} و ψ_{yy} نیز پیوسته می‌باشند، بنابراین متساویند و معادله (۸) برقرار می‌گردد.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر M و N در معادله (۸) صدق کنند، آنگاه معادله (۳) کامل است. برای اثبات یک تابع ψ که در معادلات (۴)

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

صدق کند می‌سازیم. با انتگرال‌گیری از معادله اول (۴) نسبت به x ، با فرض ثابت بودن y ، به دست می‌آید

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y) dt + h(y) \quad (10)$$

تابع دلخواهی از y است، و نقش مقدار ثابت دلخواه را ایفا می‌کند. اکنون باید نشان دهیم که می‌توان همواره $h(y)$ را طوری انتخاب کرد که $N = \psi_y$. از معادله (۱۰) داریم

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(t, y) dt + h'(y)$$

$$= \int^x M_y(t, y) dt + h'(y)$$

با قراردادن $N = \psi_y$ و استخراج $h'(y)$ خواهیم داشت

$$h'(y) = N(x, y) - \int^x M_y(t, y) dt \quad (11)$$

برای آنکه بتوان $h(y)$ را از معادله (۱۱) تعیین کرد، ضروری است که طرف دوم معادله، علیرغم ظاهرش، فقط تابع y باشد. برای اثبات این مطلب می‌توان از آن نسبت به x مشتق گرفت و به دست آورد.

$$N_x(x, y) - M_y(x, y)$$

۱. فرض پیوستگی ضروری است، زیرا در غیر این صورت ψ_{xx} و ψ_{yy} همواره مساوی نیستند. هوارد استثنای توابع بخصوصی هی باشند که بزرگتر به آنها بر می‌خوریم.

که با توجه به معادله (۸) صفر است. بنا بر این برخلاف شکل ظاهری آن، طرف دوم معادله (۱۱) در واقع به x بستگی ندارد، و با یک انتگرال گیری $(y)h$ به دست می‌آید. چون $(y)h$ را در معادله (۱۰) بگذاریم، جواب معادلات (۴) به صورت

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y) dt + \int^y \left[N(x, s) - \int^x M_s(t, s) dt \right] ds \quad (12)$$

به دست می‌آید.

باید توجه داشت که این اثبات شامل روشی برای محاسبه $(y)h$ و در نتیجه حل معادله دیفرانسیل اصلی (۳) می‌باشد. معمولاً بهتر است به جای اینکه کوشش کنیم معادله (۱۲) را به خاطر بسپاریم، در هر مورد مستقیماً این روش را بدهکار گیریم. همچنین باید توجه داشت که جواب به صورت ضمنی به دست آمده است. مانند بند پیش امکان دارد که بتوان ویا نتوان جواب را به صورت صریح به دست آورد.

مثال ۲. معادله زیر را حل کنید

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0 \quad (13)$$

روشن است که

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y)$$

و معادله داده شده کامل است. بنا بر این تابع $(y)h$ وجود دارد به طوری که

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y$$

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + 2$$

با انتگرال گیری از معادله اول خواهیم داشت

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + h(y) \quad (14)$$

از $N = \psi_y$ به دست می‌آید

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y + 2$$

پس

$$h'(y) = 2$$

و

$$h(y) = 2y$$

در اینجا می‌توان ثابت انتگرال گیری را حذف کرد، زیرا هر جواب این معادله دیفرانسیل برای منظور ما کافی است، و نیازی به عامترین جواب آن نیست. با گذاشتن عبارت $(y)h$ در معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + 2y$$

بنا بر این جواب معادله اصلی به صورت ضمی با رابطه زیر داده می شود

$$y \sin x + x^2 e^x + 2y = c \quad (15)$$

مثال ۳. معادله زیر را حل کنید

$$(3x^2 + 2xy) + (x + y^2)y' = 0 \quad (16)$$

در اینجا

$$M_y(x, y) = 2x, \quad N_x(x, y) = 1$$

وچون $N_x \neq M_y$ ، معادله داده شده کامل نیست. برای آنکه بیینیم این معادله را نمی توان با روش بالا حل کرد، به جستجوی یک تابع ψ می پردازیم به طوری که

$$\psi_x(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad \psi_y(x, y) = x + y^2 \quad (17)$$

با انتگرال گیری از معادله اول به دست می آید

$$\psi(x, y) = x^3 + x^2 y + h(y) \quad (18)$$

که در آن تابع دلخواه h فقط به y بستگی دارد. برای آنکه معادله دوم (۱۷) نیز برقرار گردد، ψ را از معادله (۱۸) محاسبه می کنیم و آن را برابر با N قرار می دهیم

$$\psi_y(x, y) = x^2 + h'(y) = x + y^2$$

با

$$h'(y) = x + y^2 - x^2 \quad (19)$$

چون طرف دوم معادله (۱۹) هم به x و هم به y بستگی دارد، بنا بر این تعیین (y) h از معادله (۱۹) غیرممکن است. بنا بر این نمی توان تابع (y, x) ψ را طوری تعیین کرد که در هر دو معادله (۱۷) صدق کند.

مسائل

تعیین کنید که آیا هر یک از معادلات مسائل ۱ تا ۱۲ کامل است یا نه. اگر کامل باشد، جواب آن را بیابید.

$$(2x+3)+(2y-2)y' = 0 \quad ۱$$

$$(2x+4y)+(2x-2y)y' = 0 \quad ۲$$

$$(9x^2+y-1)-(4y-x)y' = 0 \quad ۳$$

$$(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)y' = 0 \quad ۴$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy} \quad ۵$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax - by}{bx - cy} \quad (6)$$

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0 \quad (7)$$

$$(e^x \sin y + 2y)dx - (2x - e^x \sin y)dy = 0 \quad (8)$$

$$(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 2)dy = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{y}{x} + ex\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0, \quad x > 0 \quad (10)$$

$$(x \ln y + xy)dx + (y \ln x + xy)dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (11)$$

$$\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \quad (12)$$

۱۳. در هر یک از معادلات زیر مقدار b را طوری تعیین کنید که معادله کامل باشد، و سپس بذای این مقدار b معادله را حل کنید.

$$(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2 dy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy} dy = 0 \quad (\text{ب})$$

۱۴. معادله دیفرانسیل کامل زیر را در نظر می‌گیریم

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

به جای انتگرال‌گیری از $M = \int P dx$ در متن آمده است، نخست از معادله $N = \int Q dy$ انتگرال بگیرید و یک فرمول ضمنی $c = F(x, y)$ نظیر رابطه (۱۲) برای جواب بیابید.

۱۵. نشان دهید که هر معادله جداً بذیر، یعنی معادله‌ای به صورت

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

یک معادله دیفرانسیل کامل است.

۱۶. در این مسئله به توضیح عملت لزوم قیدی در باره ناحیه R در قضیه ۳.۲ می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(الف) نشان دهید که در همه نقاط به استثنای مبدأ داریم $M_y - N_x = 0$.

(ب) نشان دهید که، معادله داده شده را به جز در $(0, 0)$ می‌توان به صورت

$$d[\tan^{-1}(y/x)] = 0$$

و یا در مختصات قطبی به صورت زیر نوشته شود

$$d\theta = 0$$

(ج) اکنون جواب معادله داده شده را در ناحیه R' (شکل ۵.۲ را بینید) داخل مربع محدود به $x^2 + y^2 = 4$ و خارج دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نظر می‌گیریم. شرط کامل بودن در همه نقاط این ناحیه برقرار است. از قسمت (ب) به دست می‌آید

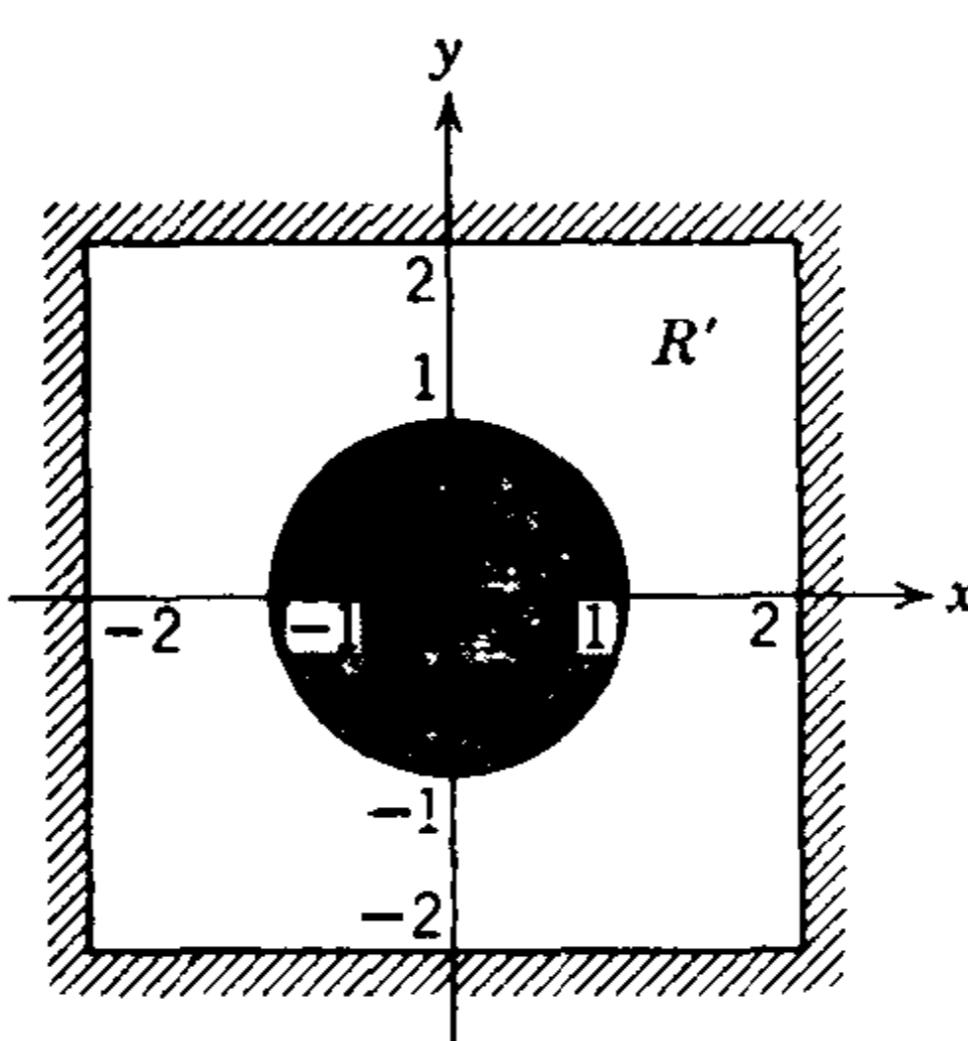
$$\psi(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(y/x) = c$$

یا

$$\theta = c$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. اما، عبارت (y/x) تک مقداری نیست، و بنابراین تابعی را تعریف نمی‌کند. مثلاً، $(1, 1) = (\pi/4) + 2n\pi$ ، که در آن n می‌تواند هر عدد صحیحی باشد. بنابراین با وجود آنکه در تمام ناحیه R' معادلات (۸) صادقند، هیچ تابعی وجود ندارد که معادلات (۴) را در R' برقرار کند. توضیح آنکه R' ، ناحیه‌ای از نوع مناسب نیست، و فرضی که در برآراء ناحیه R در قضیه گنجانده شده است دقیقاً به منظور حذف نواحی مانند R' است. اما در واقع لزومی ندارد که R ناحیه مستطیلی باشد، بلکه کافی است R تنها به یک خم بسته پیوسته‌ای که خود را قطع نکند محدود باشد. این گونه نواحی را همبسته ساده می‌نامند.

نواحی همبسته ساده را همچنین می‌توان به عنوان ناحیه‌هایی که از تغییر شکل یک ورقه دایره‌ای لاستیکی کاملاً مرجع در اثر کشیدن یا برش ایجاد پارگی به دست می‌آیند، یا ناحیه‌هایی که دایره با تغییر شکل پیوسته به آنها تبدیل می‌شود، تصور کرد. به عبارت دیگر، نواحی همبسته ساده، نواحی بدون سوراخ می‌باشند. این مطالب در شاخه‌ای از ریاضیات موسوم به توپولوژی بررسی می‌شوند.



شکل ۵.۲

۶.۲ عامل انتگرال‌ساز

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روش‌های بند ۵.۲ را درباره مسائل طبقه و سیعتری تعمیم داد. معادله‌ای به صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

اگر این معادله کامل نباشد، سعی می‌کنیم یک تابع μ ، که می‌تواند به (1) و (2) هردو بستگی داشته باشد، طوری انتخاب کنیم که معادله

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0 \quad (2)$$

کامل باشد. تابع μ را عامل انتگرال‌ساز می‌نامند. بنا بر این می‌توان معادله (2) را با روش‌های بند ۵.۲ حل کرد، و جوابه‌ای آن در معادله اصلی (1) نیز صدق خواهد کرد. این روش تعمیم روشنی است که در بند ۱.۲ درباره معادلات خطی بیان شد.

برای بررسی امکان اجرای این روش، بادآوری می‌کنیم که با توجه به بند ۵.۲، معادله (2) کامل است اگر و فقط اگر

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad (3)$$

چون M و N توابع داده شده‌ای می‌باشند، عامل انتگرال‌ساز μ باید در معادله با مشتقهای جزئی مرتبه اول

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_x - N_y)\mu = 0 \quad (4)$$

صدق کند. اگر بتوان یک تابع μ که در معادله (4) صدق کند به دست آورد، آنگاه معادله (2) کامل خواهد بود. بدینسان جواب معادله (2) با استفاده از روش بند ۵.۲ به صورت ضمنی

$$\psi(x, y) = c$$

به دست خواهد آمد. این رابطه معرف جواب معادله (1) نیز می‌باشد. زیرا می‌توان عامل انتگرال‌ساز μ را از جمله‌های معادله (2) حذف کرد.

معادله با مشتقهای جزئی (4) می‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد، اگر چنین بود، هر یک از جوابها را می‌توان بدغونان عامل انتگرال‌ساز معادله (1) بذکار برد. درمثال ۳، این امکان عدم یکتاپی عامل انتگرال‌ساز را توضیح داده‌ایم.

متاسفانه، معادله (4) که باید عامل انتگرال‌ساز را به دست دهد معمولاً حداقل به همان دشواری معادله اصلی (1) است. بنا بر این، هر چند عاملهای انتگرال‌ساز اصولاً ابزارهای نیرومندی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشند اما در عمل فقط در حالتها خاص می‌توان آنها را به دست آورد. برخی از این حالتها در مثالهای زیر و مسائل ۱۵ و ۱۱ در پایان این بند مشخص شده‌اند.

مثال ۱. تحقیق کنید که $\mu(x, y) = (x^2y^2)^{-1}$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله

دیفرانسیل

$$(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0 \quad (5)$$

است، و آنگاه جواب آن را بیابید.

$$چون \ N(x, y) = -x^2, \ M(x, y) = y^2 + xy, \text{ در نتیجه}$$

$$N_x(x, y) = -2x, \ M_y(x, y) = 2y + x$$

پس معادله داده شده کامل نیست. برای نشان دادن آنکه $(x, y) = (xy^2)^{-1}$ یک عامل انتگرال‌ساز این معادله است، معادله (5) را در (x, y) ضرب می‌کنیم، بدینسان به دست می‌آید

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این معادله کامل است. با روش بند ۵.۲ جواب آن به صورت ضمنی زیر به دست می‌آید

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = c; \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \quad (6)$$

توجه شود که $y = 0$ نیز یک جواب معادله (5) است، اما از رابطه (6) به دست نمی‌آید.

مثال ۲. مهمترین دو حالتی که در آن به آسانی می‌توان عاملهای انتگرال‌ساز را به دست آورد، هنگامی است که مل بجای آنکه تابع هردو متغیر x و y باشد، فقط تابع یکی از آنها باشد. اگر نون درباره M و N شرایط لازم را طوری تعیین می‌کنیم که مل عامل انتگرال‌ساز معادله $M dx + N dy = 0$ فقط تابع x باشد.
با فرض آنکه مل فقط تابعی از x باشد، خواهیم داشت

$$(\mu M)_y = \mu M_{yy}, \quad (\mu N)_x = \mu N_{xx} + N \frac{d\mu}{dx}$$

بدینسان، از تساوی $\mu M_{yy} = \mu N_{xx}$ با μ لازم می‌آید که

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_{yy} - N_{xx}}{N} \mu \quad (7)$$

اگر $(M_{yy} - N_{xx})/N$ فقط تابعی از x باشد، آنگاه یک عامل انتگرال‌ساز مل که فقط تابع x است وجود خواهد داشت، علاوه بر این $(x)\mu$ را می‌توان از حل معادله خطی مرتبه اول (7) به دست آورد.

به روش مشابهی می‌توان به تعیین شرطی پرداخت که تحت آن عامل انتگرال‌ساز معادله (1) فقط تابع y باشد (مسئله ۱۵ را بیینید).

مثال ۳. یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (8)$$

باید، و آنگاه معادله را حل کنید.

با محاسبه مقدار $(M_y - N_x)/N$ به دست می‌آید که

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

بدین‌سان، بنابر مثال ۲، یک عامل انتگرال‌ساز μ وجود دارد که فقط تابع x است، و در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

صدق می‌کند. پس

$$\mu(x) = x \quad (9)$$

با ضرب معادله (8) در این عامل انتگرال‌ساز خواهیم داشت

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (10)$$

که یک معادله کامل است. جواب آن به‌آسانی با روش بند ۵.۰.۵ به صورت ضمیم زیر به دست می‌آید

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c \quad (11)$$

توجه شود که می‌توان معادله درجه دوم (11) را حل کرد و y را بر حسب x به دست آورد. خواننده می‌تواند تحقیق کند که مانند مثال ۱، $(y/x)^2 + y/x = 1$ نیز یک عامل انتگرال‌ساز معادله (8) است. اگر این عامل انتگرال‌ساز را به کار ببریم همان جواب، اما با دشواری بیشتر، به دست می‌آید (مسئله ۱۲ را بینید).

مسائل

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۳ کامل نیستند، اما با ضرب در عامل انتگرال‌ساز داده شده کامل می‌شوند. آنگاه معادلات را حل کنید.

$$x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0; \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$$

۱

$$\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x \right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y} \right) dy = 0 ; \quad \textcircled{۲}$$

$$\mu(x, y) = ye^x$$

$$y dx + (2x - ye^x) dy = 0 ; \quad \mu(x, y) = y \quad \textcircled{۳}$$

در هر یک از مسائل ۴ تا ۹ یک عامل انتگرال‌ساز بیابید، و معادله را حل کنید.

$$(3x^2 y + 2xy + y^2) dx + (x^2 + y^2) dy = 0 \quad \textcircled{۴}$$

$$y' = e^{2x} + y - 1 \quad \textcircled{۵}$$

$$dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y \right) dy = 0 \quad \textcircled{۶}$$

$$y dx + (2xy - e^{-2x}) dy = 0 \quad \textcircled{۷}$$

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0 \quad \textcircled{۸}$$

$$\left(2x + \frac{y}{y} \right) + \left(\frac{x^2}{y} + 2\frac{y}{x} \right) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \textcircled{۹}$$

۱۰. نشان دهید که اگر $(N_x - M_y)/M = Q$ فقط تابع y باشد، آنگاه

معادله دیفرانسیل

$$M + Ny' = 0$$

دارای یک عامل انتگرال‌ساز به صورت زیر است

$$\mu(y) = \exp \int^y Q(t) dt$$

۱۱. نشان دهید که اگر $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$ فقط به مقدار x بستگی داشته باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل

$$M + Ny' = 0$$

دارای یک عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu(x, y)$ است. یک فرمول کلی برای این عامل انتگرال‌ساز بیابید.

۱۲. معادله دیفرانسیل

$$(2xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

را با استفاده از عامل انتگرال‌ساز

$$\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$$

حل کنید. تحقیق کنید که این جواب همان جوابی است که در مثال ۳ با عامل انتگرال‌ساز دیگری به دست آمده است.

۷.۲ معادلات همگن

دونوع اصلی معادلات مرتبه اول غیرخطی که می‌توان آنها را مستقیماً با انتگرال‌گیری حل کرد عبارتند از معادلات جدا ای بذیر و معادلات کامل. در بند ۲.۶ کاربرد عاملهای انتگرال‌ساز را برای حل برخی از انواع معادلات با تبدیل آنها به معادلات کامل مورد بحث قرار دادیم. در این بند به معرفی روش دیگری می‌پردازیم، و آن تعویض متغیرهاست، که گاهی با استفاده از آن معادله دیفرانسیل ساده می‌شود و بدین‌سان حل آن ممکن (یا آسان‌تر) می‌گردد. به‌طور کلی از ترکیبات متغیرها که در معادله تکرار شده‌اند، یا از ویژگیهای دیگر ساختمان معادله به تبدیل مناسب پی می‌بریم.

مهمترین طبقهٔ معادلات که می‌توان برای آن قاعدةٔ صریحی وضع کرد، طبقهٔ معادلات دیفرانسیل همگن^۱ است. معادله‌ای به صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

را هنگامی همگن می‌گویند که در آن تابع f به‌طور جداگانه بستگی به x و y نداشته و فقط تابعی از نسبت x/y یا y/x باشد. پس معادلات همگن به صورت زیر می‌باشند

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

مثالهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln \frac{1}{y/x} + \frac{1+(y/x)}{1-(y/x)} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \quad (\text{ج})$$

بدین‌سان (الف) و (ب) همگن‌اند، زیرا طرف دوم هر یک از آنها را می‌توان به صورت تابعی از x/y بیان کرد، و چون (ج) را نمی‌توان به‌این صورت نوشت از این‌رو همگن نیست. معمولاً با جستجو به آسانی می‌توان تشخیص داد که معادله همگن است یا نه، در مورد

۱. داڑه همگن در پرسی معادلات دیفرانسیل به معانی گوناگونی به کار می‌رود. خواننده باید در هر مورد معنی مناسب آن را تشخیص دهد.

معادلات پیچیده‌تر می‌توان از ملاک مذکور در مسئله ۱۵ استفاده کرد.
از شکل معادله همگن به‌این نکته بی‌می‌بریم که ممکن است با درنظر گرفتن متغیر جدید^۱ v که نمایشگر نسبت y/x است معادله ساده شود. بدین‌سان

$$y = xv \quad (۲)$$

و معادله (۱) به صورت

$$\frac{dy}{dx} = F(v) \quad (۳)$$

در می‌آید. چون v را به عنوان متغیر وابسته جدید (به جای y) در نظر می‌گیریم، باید آن را تابع x فرض کرد و به جای dy/dx در معادله (۳) عبارت مناسبی بر حسب v قرارداد.
از رابطه (۲) مشتق می‌گیریم، به دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

واز آنجا معادله (۳) به صورت

$$x \frac{dv}{dx} + v = F(v) \quad (۴)$$

در می‌آید. نکته شایان توجه در معادله (۴) آن است که شکل تابع F هرچه باشد، متغیرهای x و v را همراه می‌توان جدا کرد و نوشت

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v} \quad (۵)$$

چون معادله (۵) را حل کنیم و در آن x/v را به جای v بگذاریم جواب معادله اصلی به دست می‌آید.

بدین‌سان هر معادله همگن را می‌توان با تعویض متغیر (۲) به معادله‌ای که در آن متغیرها جدا می‌شوند تبدیل کرد. البته در عمل ممکن است نتوان انتگرال لازم برای حل معادله (۵) را به روش‌های مقدماتی محاسبه کرد. علاوه بر این، امکان دارد که یک معادله همگن به‌یکی از طبقه‌هایی که قبلاً بررسی شد نیز تعلق داشته باشد، مثلاً، کامل یا حتی خطی باشد. در این حال‌ها برای یافتن جواب روش‌های متعددی در اختیار داریم.

مثال. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \quad (۶)$$

۱. این روش را اولین بار لاپینیتز در سال ۱۶۹۱ به کار برد.

با نوشتن این معادله به صورت

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

دیده می شود که همگن است. این معادله، نه کامل است و نه در آن متغیرها جدا می شوند و نه دارای عامل انتگرال ساز واضحی است. بدینسان به تعویض متغیر (۲) متوجه می شویم، و معادله داده شده به صورت زیر تبدیل می شود

$$x \frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v$$

از آنجا

$$x \frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

و با جدا کردن متغیرها

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}$$

طرف دوم را به کسرهای ساده بسط می دهیم، به دست می آید

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv$$

@jozve_iut

از هر دو طرف انتگرال می گیریم، حاصل می شود

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln|v| - \ln|v+1|$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. از آنجا، با ترکیب لگاریتمها و گرفتن آنتی لگاریتم از دو طرف، به دست می آید

$$cx = \frac{v}{v+1}$$

بالاخره، چون x/y را به جای v قرار دهیم، جواب معادله (۶) به صورت

$$cx = \frac{y/x}{(y/x)+1} = \frac{y}{y+x}$$

به دست می آید، که چون آن را نسبت به y حل کنیم، خواهیم داشت

$$y = \frac{cx^2}{1-cx}$$

گاهی لازم می‌آید که هم متغیر مستقل و هم متغیر وابسته را تغییر دهیم. مثلاً در مسائل ۹، ۱۰ و ۱۱ برای آنکه معادله همگن شود باید هر دو متغیر را تعویض کرد و پس از آن بار دیگر به تعویض تابع پرداخت تا جواب مسئله بدست آید.

مسائل

نشان دهید که معادلات مسائل ۱ تا ۸ همگن‌اند، و جواب آنها را بیابید.

$$2y \, dx - x \, dy = 0$$

$$\textcircled{۱} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \quad \textcircled{۱}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

$$\textcircled{۴} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} \quad \textcircled{۴}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$$

$$\textcircled{۵} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y} \quad \textcircled{۵}$$

$$(x^2 + 3xy + y^2) \, dx - x^2 \, dy = 0 \quad \textcircled{۸}$$

$$\textcircled{۷} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y} \quad \textcircled{۷}$$

\textcircled{۹} (الف) جواب معادله زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{2x-y}$$

@jozve_iut

\textcircled{۹} (ب) جواب معادله زیر را بیابید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$$

(راهنمایی) : برای تبدیل معادله قسمت (ب) به معادله قسمت (الف)، جایگزینی مقدماتی به صورت $y = Y - k$ ، $x = X - h$ را در نظر می‌گیریم. ثابت‌های h و k را طوری انتخاب می‌کنیم که معادله بر حسب متغیرهای X و Y همگن شود.

\textcircled{۱۰} معادله $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y+15}{2x+y+7}$ را حل کنید. راهنمایی مسئله ۹ قسمت (ب) را بیینیم.

\textcircled{۱۱} معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$ را حل کنید. راهنمایی مسئله ۹ قسمت (ب) را بیینیم.

(۱۲) جواب معادله

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

را با روش این بند بیاید، و آن را با جوابی که بروشهای دیگر در مثال ۳ و مسئله ۱۲ بند ۲۰۶ به دست آمده است مقایسه کنید.

۱۳*. نشان دهید که اگر

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

یک معادله همگن باشد، آنگاه دارای عامل انتگرال‌ساز زیر است

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

۱۴*. با بدکار بردن نتیجه مسئله ۱۳ هریک از معادلات زیر را حل کنید

(الف) معادله مسئله ۲.

۱۵*. نشان دهید که معادله $y' = f(x, y)$ همگن است، اگر $f(x, y)$ بدگوندای

باشد که

$$f(x, tx) = f(1, t)$$

که در آن t یک پارامتر حقیقی است. با استفاده از این نکته همگنی هریک از معادلات زیر را بررسی کنید.

$$y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} \quad (الف) \quad y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 y + xy^2}$$

$$y' = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (د) \quad y' = \frac{(x^2 + 2xy + 4y^2)^{1/2}}{x + 2y} \quad (ج)$$

۸.۲ مسائل گوناگون

این بند شامل مجموعه‌ای از مسائل است. ۳۲ مسئله اول را می‌توان با روش‌های بندهای پیش حل کرد. این مسائل را به منظور کسب مهارت خواننده در تشخیص روش یا روش‌های قابل اجرا در مورد معادله داده شده‌ای آورده‌ایم. در پایان چند مسئله که مستلزم روش‌های خاصی می‌باشند آمده است، این روشها در مورد برخی از انواع معادلات بدکار می‌روند. به‌ویژه، مسائل ۳۵ و ۳۶ مربوط به معادله ریکاتی ($1676-1754$) است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y}{x}$$

(۱)

$$(x+y)dx - (x-y)dy = 0$$

(۲)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx + y}{x^2 + 2xy - x}, y(0) = 0$$

.۳

$$(x + e^y) dy - dx = 0$$

.۴

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$$

.۵

$$x \frac{dy}{dx} + xy = 1 - y, y(1) = 0$$

.۶

$$u = x^2 \quad (\text{اهنایی: فرض کنید}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 y + y^2}$$

.۷

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{\sin x}{x}, \quad y(2) = 1$$

.۸

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$$

.۹

$$(2y^2 + 2xy) dx - (2xy + x^2) dy = 0$$

.۱۰

$$(x^2 + y) dx + (x + e^y) dy = 0$$

.۱۱

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^x} \quad @jozve_iut$$

.۱۲

$$x dy - y dx = (xy)^{1/2} dx$$

.۱۳

$$(x + y) dx + (x + 2y) dy = 0, \quad y(2) = 2$$

.۱۴

$$(e^x + 1) \frac{dy}{dx} = y - ye^x$$

.۱۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

.۱۶

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2y$$

.۱۷

$$(2y + 2x) dx = -x dy$$

.۱۸

$$x dy - y dx = 2x^2 y^2 dy, \quad y(1) = -2$$

.۱۹

$$y' = e^{x+y}$$

.۲۰

$$xy' = y + xe^{y/x} \quad \cdot ۲۱$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1 \quad \cdot ۲۲$$

$$xy' + y - y^2 e^{yx} = 0 \quad \cdot ۲۳$$

$$2 \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy = 0 \quad \cdot ۲۴$$

$$\left(2 \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2} \right) dy = 0 \quad \cdot ۲۵$$

$$(2y+1)dx + \left(\frac{x^2 - y}{x} \right) dy = 0 \quad \cdot ۲۶$$

$$(\cos 2y - \sin x)dx - 2 \operatorname{tg} x \sin 2y dy = 0 \quad \cdot ۲۷$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 2y - y^2}{2x + 2xy} \quad \cdot ۲۸$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x} \quad \cdot ۲۹$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1 \quad \cdot ۳۰$$

$$(x^2y + xy - y)dx + (x^2y - 2x^2)dy = 0 \quad \cdot ۳۱$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2y + y^2}{2x^2 + 2xy}, \quad y(1) = -2 \quad \cdot ۳۲$$

۳۳. نشان دهید که هر معادله به صورت

$$y = G(p)$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، می توان به طریق زیر حل کرد.

(الف) نسبت به x مشتق می گیریم،

(ب) با حل معادله قسمت (الف) x را به صورت تابعی از p به دست می آوریم.

این رابطه و معادله اصلی $y = G(p)$ را به صورت پارامتری نشان می دهد.

۳۴. معادله دیفرانسیل

$$y - \ln p = 0$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، با روش مسئله ۳۳ حل کنید. این معادله را مستقیماً نیز

حل کنید، و تحقیق کنید که هر دو جواب یکی است.

۳۵. معادله

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

مشهور به معادله ریکاتی است. فرض کنیم که یک جواب خصوصی $y_1(x)$ این معادله معلوم باشد. جواب عمومیتری را که شامل یک ثابت دلخواه است، می‌توان با تبدیل زیر به دست آورد

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

نشان دهید که $(x)_1$ در معادله خطی مرتبه اول

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3$$

صدق می‌کند. توجه شود که $(x)_1$ تنها شامل یک ثابت دلخواه است.

۳۶. با استفاده از روش مسئله ۳۵ و جواب خصوصی داده شده، هر یک از معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2; \quad y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2; \quad y_1(x) = 1/x \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}; \quad y_1(x) = \sin x \quad (\text{ج})$$

۹.۲ کاربردهای معادلات مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل اصولاً بعملت امکان استفاده از آنها در پژوهش مسائل بسیار گوناگون در علوم فیزیک، زیست‌شناسی، و اجتماعی مورد توجه غیر ریاضیدانان می‌باشند. در این خط مشی می‌توان بدون توجه به حوزه خاص کاربرد، سه مرحله تشخیص داد.

نخست لازم است که وضعیت طبیعی را به عبارت ریاضی برگردانیم. برای این کار عموماً در باره آنچه اتفاق می‌افتد فرضیاتی می‌شود که ظاهرآ با پذیرفته مشاهده شده‌ساز گارند. مثلاً، مشاهده شده است که میزان ازین رفتن مواد را دیو اکتیو با مقدار ماده موجود متناسب است، میزان عبور حرارت از یک جسم گرمتر به یک جسم سردتر با اختلاف دما متناسب است، حرکت اجسام در فضا طبق قوانین حرکت نیوتون انجام می‌گیرد، و میزان رشد جمعیتهای مجزای حشرات با جمعیت موجود متناسب است. هریک از این گزاره‌ها متنضم یک میزان تغییر (مشتق) می‌باشند، و در نتیجه هنگامی که با عبارت ریاضی بیان شوند،

به صورت معادله دیفرانسیل در می‌آیند.

این نکته مهم را باید در نظر داشت که تقریباً همیشه معادلات ریاضی فرایند واقعی را فقط به طور تقریب توصیف می‌کنند، زیرا این معادلات مبتنی بر تجربیات اند که نتیجه آنها تقریبی است. مثلاً، حرکت اجسامی که سرعت آنها با سرعت نور قابل مقایسه باشد، از قوانین نیوتون پیروی نمی‌کند، جمعیتهای حشرات به علت محدودیتهای احتمالی منابع تغذیه دارای رشد نامتناهی بدان صورت که گفته شد نیستند، و در انتقال حرارت عوامل دیگری به غیر از اختلاف دما مؤثرند. علاوه بر این، هنگامی که یک مسئله فیزیکی را به صورت ریاضی فرمول بندی می‌کنیم، اغلب لازم می‌آید که به جای فرایندی منفصل به طور مجازی فرایند پیوسته‌ای را در نظر بگیریم. به عنوان مثال، در یک جمعیت حشره تغییر تعداد آنها کمیتی است منفصل، اما اگر جمعیت بزرگ باشد، بد نظر معقول است که آن را به عنوان متغیری پیوسته در نظر بگیریم و حتی درباره مشتق آن بحث کنیم. از سوی دیگر می‌توان این دیدگاه را پذیرفت که معادلات ریاضی دقیقاً بیانگر عمل مدل ساده‌ای است که به نظر در برداشتن مهمترین جنبه‌های فرایند واقعی ساخته (یا تصور) شده است.

به هر حال، هنگامی که مسئله به صورت ریاضی فرمول بندی شد اغلب با مسئله حل یک یا چند معادله دیفرانسیل مواجه می‌شویم. در صورت عدم امکان حل، مسئله تعیین بیشترین خاصیتهاي جواب مطرح می‌شود. ممکن است اتفاقاً مسئله از لحاظ ریاضی کاملاً دشوار باشد، و اگر چنین باشد، در این مرحله به منظور راهیابی به مسئله از لحاظ ریاضی تقریبات دیگری در دستور قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، امکان دارد به جای یک معادله غیر خطی به طور تقریب یک معادله خطی گذاشته شود، یا به جای تابعی با تغییرات بطيی مقدار متوسط آن در نظر گرفته شود. طبعاً، هر تقریبی از این نوع را باید از دیدگاه طبیعی نیز مورد بررسی قرار داد، تا اطمینان حاصل شود که این مسئله ریاضی ساده شده باز هم جنبه‌های اصلی فرایند طبیعی مورد پژوهش را منعکس کند. در همین مرحله با شناخت نزدیکی از طبیعت مسئله، می‌توان تقریبات ریاضی معقولی را به دست آورد، تا مسئله ریاضی بهتر قابل تحلیل گردد. این ارتباط متقابل بین درک پدیده طبیعی و شناخت روشهای ریاضی و محدودیتهای آنها به بهترین وجه خصیصه ریاضیات کاربسته را نشان می‌دهد، و در ساختن مدل‌های ریاضی موفقیت آمیز برای فرایندهای پیچیده طبیعی ضروری است.

بالاخره، پس از آنکه جواب (یا حداقل اطلاعاتی درباره آن) به دست آمد، باید بر حسب اصطلاحات متنی که مسئله را مطرح کرده است تعبیر شود. به ویژه، همواره باید بررسی کرد که آیا جواب ریاضی به دست آمده از لحاظ طبیعی هم به نظر معقول است. این کار حداقل مستلزم آن است که جواب وجود داشته باشد، یکتا باشد، و نسبت به داده‌های مسئله پیوسته باشد. اهمیت قید اخیر در این است که ضرایب معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه اغلب در نتیجه اندازه‌گیری کمیتهاي طبیعی به دست آمده‌اند و از این‌رو در آنها امکان خطاهای کوچک وجود دارد. اگر این خطاهای کوچک در جواب مسئله ریاضی متناظر تغییراتی بزرگ (یا ناپیوسته) به وجود آورند که در طبیعت مشاهده نشده‌اند، باید ارتباط

مدل ریاضی را با مسئله طبیعی مجدداً مورد بررسی قرار داد. البته، این نکته که جواب ریاضی به نظر معقول باشد، صحت آن را تضمین نمی‌کند. اما، اگر با مشاهدات دقیق دستگاه طبیعی مزبور به طور جدی ناسازگار باشد، بدان علت است که یا در حل مسئله ریاضی خطاهایی صورت گرفته و یا این مدل ریاضی بسیار ناهمجارت است.

در مثالهای این بند و بند بعد نمونه کاربردهایی آمده است که به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول منجر می‌گردد.

مثال ۱ (تجزیه اتم رادیواکتیو). ایزوتوپ رادیواکتیو توریم ۲۳۴ به میزان متناسب با مقدار موجود تجزیه می‌شود. اگر ۱۰۰ میلی گرم این ماده در یک هفته بد ۸۲۵۴ ریزمان را به دست دهد. همچنین زمان لازم را برای اینکه ماده اولیه به نصف تقلیل یابد، بیابید.

فرض کنیم $(t) Q$ مقدار توریم ۲۳۴ موجود در هر زمان باشد، که در آن Q بر حسب میلی گرم و t بر حسب روز است. مشاهده فیزیکی که توریم ۲۳۴ به میزان متناسب با مقدار موجود تجزیه می‌شود بدان معنی است که میزان تغییر بر حسب زمان، یعنی dQ/dt ، با Q متناسب است. بنابراین Q در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad (1)$$

صدق می‌کند، که در آن ضریب تناسب k ثابتی است منفی و باید آن را تعیین کرد. اکنون به جستجوی جوابی از معادله (۱) می‌پردازیم که در شرط اولیه

$$Q(0) = 100 \quad (2)$$

و همچنین در شرط

$$Q(7) = 8254 \quad (3)$$

صدق کند. معادله (۱) را می‌توان به عنوان یک معادله خطی یا با جدا کردن متغیرها حل کرد، و جواب عمومی آن عبارت است از

$$Q(t) = ce^{kt} \quad (4)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. از شرط اولیه (۲) به دست می‌آید $c = 100$ ، بنابراین

$$Q(t) = 100e^{kt} \quad (5)$$

و برای آن که شرط (۳) برقرار گردد، $t = 7$ و $Q = 8254$ را در رابطه (۵) می‌گذاریم؛ به دست می‌آید

$$8254 = 100e^{7k}$$

و بنابراین

$$k = \frac{\ln 0.8204}{\tau} = -\frac{1}{\tau} \quad (6)$$

بدینسان ضریب کاهش k تعیین گردید. چون این مقدار k را در رابطه (۵) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$Q(t) = 100 e^{-0.2828 t} \quad (7)$$

که مقدار $(t) Q$ را در هر زمان به دست می‌دهد.

مدت زمانی که جرمی به نصف مقدار اولیه تقلیل می‌یابد، نیمه عمر ماده مزبور نام دارد. گیریم τ زمانی باشد که $(t) Q$ برابر 50 میلی گرم است. در این صورت، از رابطه (۵) داریم

$$50 = 100 e^{k\tau} \quad \text{یا}$$

$$k\tau = -\ln 2 \quad (8)$$

رابطه (۸) بین ضریب کاهش و نیمه عمر نه تنها برای توریم ۲۳۴ معتبر است بلکه در مورد هر ماده‌ای که از معادله دیفرانسیل (۱) تبعیت کند نیز صادق است، و چون به جای k مقدار آن را از رابطه (۶) قرار دهیم در مورد توریم ۲۳۴ خواهیم داشت

$$\tau = \frac{\ln 2}{0.2828} \approx 245 \text{ روز} \quad (9)$$

مثال ۲ (ربع موکب). فرض کنیم که پس مبلغ پولی باشد که با نرخ بهره u در صد به بانک سپرده شده است. مقدار سرمایه $(t) S$ پس از مدت t سال بستگی به تعداد دفعاتی دارد که بهره به آن اضافه شده است. در این مثال به بررسی تأثیر تعداد دفعات اضافه شدن بهره می‌پردازیم.

اگر بهره یک بار در سال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t) = S_0 (1 + 0.06)^t$$

اگر بهره دو بار در سال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t) = S_0 \left[\left(1 + \frac{0.06}{2} \right) \left(1 + \frac{0.06}{2} \right)^t \right] = S_0 \left(1 + \frac{0.06}{2} \right)^{2t}$$

و به طور کلی اگر بهره k بار در سال به سرمایه اضافه شود، آنگاه

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{0.06}{k} \right)^{kt} \quad (10)$$

اکنون این وضعیت را با یک مدل ریاضی با فرض آنکه بهره به طور پیوسته به

سرمایه اضافه می شود تقریب می زنیم. با این فرض می توان قانون رشد سرمایه را به صورت معادله دیفرانسیل

$$(1) S'(t) = S(t)$$

نوشت. جواب این معادله، همراه با شرط اولیه $S(0) = S_0$ عبارت است از

$$(11) S(t) = S_0 e^{kt}$$

توجه شود که چون $\infty \rightarrow k$ طرف دوم رابطه (10) به طرف دوم رابطه (11) میل می کند. درستون دوم جدول ۲.۱ مقادیر $S(t)/S_0$ را که به ازای مقادیر مختلف k از رابطه (11) به دست می آید درج کرده ایم. مقادیر $S(t)/S_0$ درستون سوم و چهارم از رابطه (10) با استفاده از $k = 365$ و $k = 365$ به ترتیب متناظر با اضافه کردن بهره هرسه ماه یک بار و روزانه به دست آمده اند.

نتایج جدول نشان می دهد که تعداد دفعاتی که بهره بد سرمایه اضافه می شود در بیشتر حالتها اهمیت چندانی ندارد. مثلاً، بعد از یک دوره ده ساله، اختلاف بین اضافه کردن بهره به سرمایه هرسه ماه یک بار و بد طور پیوسته کمتر از نیم درصد می باشد، یعنی در حدود ۸ ریال در ۱۰۰۰ ریال یا در حدود ۸٪ ریال در سال است. بدایی نرخهای بالاتر این اختلاف بیشتر خواهد بود، ولیکن، هنگامی که S بسیار بزرگ باشد حتی تفاوتها بی کم به صورت درصد بسیار کوچک اند می توانند قابل توجه باشند. بهر حال اگر فاصله زمانی زیاد باشد (چند قرن یا بیشتر)، در این صورت این تفاوت بزرگ خواهد بود.

از جدول نیز دیده می شود که نرخ واقعی بهره سالانه درمورد اضافه کردن بهره هر سه ماه یک بار برابر ۱۴٪ درصد و درمورد روزانه یا پیوسته برابر ۱۸٪ درصد می باشد. در بسیاری از بانکها نرخ واقعی سالانه رایج است که حتی از ۱۸٪ درصد متناظر به اضافه شدن بهره بد طور پیوسته، بالاتر است. برای این کار نرخ بهره روزانه را براساس سال اسمی ۳۶۵ روز محاسبه می کنند و سپس اضافه کردن بهره را در طول سال واقعی تقویمی منظور می نمایند. با استفاده از این روش برای نرخ عدد درصد و صرف نظر از کیسه ها، خواهیم داشت

$$(12) S(t) = S_0 \left(1 + \frac{365}{360}\right)^{365t}$$

نتایج حاصل از رابطه (12) درستون آخر جدول ۱.۲ آمده است. در این روش، نرخ واقعی سالانه ۲۷٪ درصد است. در حدود دقت محاسبات موجود می توان همین نتیجه را با ضرب عامل $360/365$ در نرخ واقعی متناظر به فرض اضافه شدن بهره بد طور پیوسته به دست آورد. بدین سان $27\% = (365/360) \times 18\%$. درمورد نرخهای بهره بالاتر این اثر شدیدتر است، مثلاً، یک نرخ بهره سالانه ۵٪ در ۷٪ در حالت اضافه شدن بد طور پیوسته، نرخ واقعی بهره برابر ۷۹٪ درصد و با استفاده از رابطه (12) نرخ بیشتر ۷۹٪ درصد را بدست می دهد.

جدول ۱۰۲

$S(t)/S_0$ از رابطه (۱۲)	$(10) S(t)/S_0$ $k=365$	$S(t)/S_0$ $k=4$	$S(t)/S_0$ از رابطه (۱۱)	سالها
۱۰۶۲۷	۱۰۶۱۸	۱۰۶۱۴	۱۰۶۱۸	۱
۱۱۲۹۴	۱۱۲۷۵	۱۱۲۶۵	۱۱۲۷۵	۲
۱۳۵۵۵	۱۳۴۹۸	۱۳۴۶۹	۱۳۴۹۹	۵
۱۸۳۷۳	۱۸۲۲۰	۱۸۱۴۰	۱۸۲۲۱	۱۰
۳۵۷۵۶	۳۵۳۱۹۸	۳۵۲۹۰۷	۳۵۳۲۰۱	۲۰
۱۱۳۹۵×10	۱۱۰۲۱×10	۱۰۸۲۸×10	۱۱۰۲۳×10	۴۰
۱۲۹۸۴×10^2	۱۲۱۴۶×10^2	۱۱۷۲۶×10^2	۱۲۱۵۱×10^2	۸۰
۱۹۲۰۸×10^5	۱۶۲۶۰×10^5	۱۴۸۸۸×10^5	۱۶۲۷۵×10^5	۲۰۰
۳۶۸۹۵×10^{10}	۲۶۴۳۹×10^{10}	۲۲۱۶۵×10^{10}	۲۶۴۸۹×10^{10}	۴۰۰

مثال ۳ (اختلاط). مخزنی در زمان $t = 0$ ، حاوی Q_0 پوند نمک محلول در ۱۰۰ گالن آب است. فرض کنیم که آبی که $\frac{1}{4}$ پوند در گالن نمک دارد با سرعت ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌شود، و محلول خوب بسته باشد. با فرمان سرعت از مخزن خارج می‌شود. عبارتی که مقدار نمک $(t) Q$ موجود در مخزن را در زمان t نشان می‌دهد بسددست آورید.

میزان تغییر نمک موجود در مخزن در زمان t ، یعنی $(t) Q'$ باید برابر تفاضل مقدار نمک وارد و مقدار نمکی که خارج می‌شود باشد. میزان ورود نمک برابر

$$\frac{1}{4} \text{lb/gal} \times 3 \text{gal/min}$$

است. میزان خروج نمک برابر است با $(Q(t)/100) \text{lbs/gal} \times 3 \text{gal/min}$. بدینسان فرایند مذبور از معادله دیفرانسیل

$$Q'(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{100} Q(t) \quad (13)$$

تبعیت می‌کند. معادله (۱۳) خطی است و جواب آن عبارت است از

$$Q(t) = 25 + ce^{-\frac{3}{4}t} \quad (14)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است. شرط اولیه

$$Q(0) = Q_0 \quad (15)$$

مستلزم آن است که $c = Q_0 - 25$ ، از آنجا

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.2t}) + Q_0 e^{-0.2t} \quad (16)$$

جمله دوم طرف دوم رابطه (۱۶) نمایشگر آن قسمت از نمک اولیه است که در زمان t در مخزن باقی مانده است. این جمله با گذشت زمان با خارج شدن محلول اولیه از مخزن بسیار کوچک می‌شود. جمله اول طرف دوم رابطه (۱۶) مقدار نمکی را که در اثر این جریان در زمان t در مخزن بدوجود آمده است نشان می‌دهد. هنگامی که t بزرگ شود، این جمله به مقدار ثابت 25 پوند نزدیک می‌شود. از لحاظ فیزیکی نیز روشن است که حد Q هنگامی که محلول اولیه به تدریج جای خود را بمحلول وارد و با غلظت $1/4$ پوند برگالن می‌دهد برابر همین مقدار است.

مثال ۴ (اپیدمی). برای اپیدمیها نظریه ریاضی مبسوطی وجود دارد که براساس نکات کلی زیر است. فرض کنیم جامعه ای از n عضو تشکیل شده که شامل p نفر مبتلا و q نفر دیگر در معرض ابتلا می‌باشند، و $p+q=n$. از طرف دیگر، فرض کنیم x نسبت افراد بیمار و y نسبت افراد سالم باشد. در این صورت $x=p/n$ ، $y=q/n$ ، $x+y=1$ و $x+y=1$. اگر n بزرگ باشد می‌توان x و y را به عنوان متغیرهای پیوسته در نظر گرفت، در این صورت میزان شیوع بیماری برابر dx/dt خواهد بود. براساس این فرض معقول که بیماری در اثر تماس بین افراد بیمار و سالم جامعه شیوع پیدا می‌کند، dx/dt با تعداد این تماسها متناسب خواهد بود. اگر افراد هردو گروه آزادانه بین هم در حرکت باشند، تعداد تماسها به بُعد خود متناسب با حاصل ضرب x و y می‌شود. بدینسان به معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = \beta xy$$

با

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1-x) \quad (17)$$

می‌رسیم، که در آن β ضریب تناوب و مثبت است. شرط اولیه عبارت است از

$$x(0) = x_0 \quad (18)$$

که در آن x_0 نسبت افراد بیمار در $t=0$ است.

معادله (۱۷) جداگانه پذیر است، و می‌توان آن را به صورت

$$\frac{dx}{x(1-x)} = \beta dt$$

با استفاده از بسط بدکسرهای جزئی، به صورت

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \beta dt$$

نوشت. بنابراین

$$\ln x - \ln(1-x) = \beta t + C \quad (19)$$

توجہ شود که $x \neq 1$ اساساً مشتقات و نیازی به قدر مطلق نیست. از رابطه (19) نتیجه می‌شود که

$$\frac{x}{1-x} = ce^{\beta t} \quad (20)$$

که در آن $c = e^C$. شرط اولیه مستلزم آن است که $(1-x_0)/x_0 = c$. چون این مقدار c را در رابطه (20) قرار دهیم. و آن را نسبت به t حل کنیم، خواهیم داشت

$$x = \frac{x_0 e^{\beta t}}{x_0 + (1-x_0)e^{-\beta t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\beta t}} \quad (21)$$

اگر $x_0 > 0$ ، آنگاه مقدار واقعی x هرچه باشد، $1 \rightarrow x$ هنگامی که $\beta t \rightarrow \infty$. بدینسان، هر قدر هم که تعداد بیماران اولیه کم باشد، سرانجام اپیدمی در سراسر کل جامعه شیوع می‌یابد.

روشن است که این مدل ریاضی از برخی جنبه‌ها با واقعیت مطابقت ندارد. یکی آنکه، اگر بیماری مزبور مهم تلقی شود، طبعاً با ایجاد قرنطینه‌ای مناسب، فعالیت افراد بیمار را محدود می‌کنند. از طرف مقامات بهداری هم برای محدود کردن امکان تماس بین افراد بیمار و سالم قرنطینه دیگری نیز در نظر گرفته می‌شود. دیگر آنکه، هر بیماری فقط برای مدت محدودی مسرب است، اما در این مدل فرض شده است که افراد بیمار به طور نامحدودی به همین وضع باقی می‌مانند. همه این عوامل موجب می‌شوند که شیوع بیماری از میزانی که در بالا پیش‌بینی شده است بطيئتر باشد.

برخی از بیماریها (مانند مalaria) با تماس مستقیم شیوع نمی‌یابد، و به توسط حشره یا حیوانی انتقال پیدا می‌کند. مدل ریاضی شیوع این بیماریها از آنچه در این مثال آمد بسیار پیچیده‌تر است. حالت دیگری را که از نوع تب تیفوئید است در مسئله ۱۹ بررسی کرده‌ایم. بالاخره اغلب لازم می‌آید که تأثیرات تصادفی را در بررسی اپیدمیها منظور کنیم و از مفاهیم مناسب نظریه احتمالات استفاده کنیم.

مسائل

۱. فرض کنیم که مبلغ S را با نرخ بهره سالانه r بدبانک سپرده‌ایم، و بهره به طور پیوسته به سرمایه اضافه می‌شود.

(الف) مطلوب است مدت T به صورت تابعی از نرخ بهره r برای آنکه مبلغ اولیه دو برابر شود.

(ب) اگر $5 = r$ درصد باشد، T را بیابید.

(ج) اگر سرمایه اولیه ظرف ۱۵ سال دو برابر شود، نرخ بهره را بیابید.

۲۰ جوانی بدون سرمایه اولیه سالانه k ریال با نرخ بهره سالانه r سرمایه‌گذاری می‌کند. فرض کنیم که بهره به طور پیوسته به سرمایه اضافه شود و سرمایه‌گذاریها نیز به طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) مبلغ اندوخته $(t)S$ را در زمان t بیابید.

(ب) اگر $5 = r$ درصد باشد، k را طوری تعیین کنید که اندوخته پس از چهل سال یک میلیون ریال شود.

۳۰ در هر یک از برنامه‌های سرمایه‌گذاری زیر مبلغ اندوخته را پس از ۲۵ سال تعیین کنید. فرض می‌کنیم که نرخ بهره r درصد و به طور پیوسته به سرمایه اضافه شود. و سرمایه‌گذاریها به طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) بدون سرمایه اولیه، و 15000 ریال در سال به مدت ۲۵ سال.

(ب) سرمایه اولیه 100000 ریال، و 10000 ریال در سال به مدت ۲۵ سال.

(ج) سرمایه اولیه 200000 ریال. و 5000 ریال در سال به مدت ۲۵ سال.

(د) سرمایه اولیه 300000 ریال، و بدون سرمایه‌گذاری اضافی دیگر.

توجه شود که در هر حالت مبلغ کل سرمایه‌گذاری شده 300000 ریال است.

۴۰ بازنشسته‌ای مبلغ $(t)S$ ریال را با نرخ بهره سالانه r سرمایه‌گذاری کرده است، و بهره به طور پیوسته به سرمایه اضافه می‌شود. برای هزینه‌های زندگی به میزان k ریال در سال برداشت می‌کند. فرض کنیم که برداشتها به طور پیوسته انجام گیرد.

(الف) اگر مقدار اولیه سرمایه‌گذاری S_0 باشد، مقدار $(t)S$ را در زمان t بیابید.

(ب) فرض کنیم که S_0 و r داده شده‌اند، در این صورت میزان برداشت k را طوری تعیین کنید که $(t)S$ ثابت باقی بماند.

(ج) اگر k از مقدار k_0 که در قسمت (ب) تعیین شد بزرگتر باشد، آنگاه $(t)S$ تنزل می‌کند و سرانجام صفر می‌شود. مطلوب است تعیین زمان T که در آن $0 = S(T)$ باشد.

(د) مطلوب است تعیین T اگر $5 = r$ درصد و $k_0 = 3k$ باشد.

(ه) فرض کنیم که مقدار اولیه سرمایه‌گذاری در هنگام بازنشستگی شخصی S_0 باشد، و بخواهد که برداشت سالانه به میزان k از T سال تجاوز نکند. ماکزیمم میزان برداشت ممکن را بیابید.

(و) فرض کنیم که نرخ بهره r درصد است. مقدار سرمایه‌گذاری اولیه چقدر باید باشد، تا بتوان به مدت ۲۵ سال سالانه مبلغ 500000 ریال برداشت کرد؟

۵۰ فرض کنیم که میزان افزایش ثروت شخصی متناسب با مجدور مقدار موجود آن است. اگر ثروتش در سال گذشته 10000000 ریال و امروز 20000000 ریال باشد،

ثروت او در شش ماه بعد و همچنین دو سال دیگر چقدر خواهد بود؟

۶۰ تعزیه ایزوتوپ رادیواکتیو پلوتونیم 231 به گوندای است که در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dQ}{dt} = -50525Q$$

صدق می‌کند، و در آن Q بر حسب میلی‌گرم و t بر حسب سال است.

(الف) t ، نیمه عمر پلوتونیم ۲۴۱ را تعیین کنید.

(ب) اگر امروز ۵۵ میلی‌گرم پلوتونیم موجود باشد، پس از ده سال چقدر از آن باقی خواهد ماند؟

۷. میزان تجزیه اینشتینیوم ۲۵۳ با مقدار موجود آن متناسب است. مطلوب است تعیین نیمه عمر t این ماده در صورتی که بدانیم در ۱۱۷ روز ثلث جرم خود را از دست می‌دهد.

۸. نیمه عمر رادیوم ۲۲۶ برابر ۱۶۲۰ سال است. مطلوب است تعیین مدت لازم برای آنکه این ماده به $\frac{3}{4}$ مقدار اولیه خود تقلیل یابد.

۹. تاریخ یابی به وسیله رادیوکربن. یکی از وسائل مهم در پژوهش‌های باستان‌شناسی تاریخ یابی با رادیوکربن است. بدین وسیله عمر برخی از بقایای گیاهی و چوبی را تعیین می‌کند و از آنجا عمر استخوانهای انسانی و حیوانی یا مصنوعاتی را که در همان سطوح مدفون‌اند به دست می‌آورند. این روش را شیمیدان آمریکایی ویلارد لیبی^۱ در اوایل ۱۹۵۰ به وجود آورد و بدین سبب جایزه نوبل شیمی در ۱۹۶۵ به او تعلق گرفت. تاریخ یابی با رادیوکربن مبتنی بر این حقیقت است که در برخی از بقایای چوبی و گیاهی مقداری کربن ۱۴ که ایزوتوپ رادیواکتیو کربن است باقی مانده است. این ایزوتوپ در طول حیات گیاه اندوخته می‌شود و از هنگام مرگ او شروع به تجزیه شدن می‌کند. چون کربن ۱۴ دارای نیمه عمر طولانی (قریباً ۵۷۴۵ سال) است، در نتیجه بعداز هزاران سال باز هم مقادیری از آن که قابل اندازه‌گیری باشد باقی می‌ماند. لیبی نشان داد که اگر تقریباً ۲۰۰۰ ره یا بیشتر از مقدار اولیه کربن ۱۴ هنوز وجود داشته باشد، ما اندازه‌گیریهای آزمایشگاهی مناسب می‌توان دقیقاً نسبتی از مقدار اولیه کربن ۱۴ را که باقی مانده است تعیین کرد. به عبارت دیگر، اگر Q_0 مقدار اولیه کربن ۱۴ و $(t)Q$ مقدار آن در زمان t باشد، آنگاه می‌توان نسبت $\frac{Q}{Q_0}$ را حداقل هنگامی که بسیار کوچک نباشد تعیین کرد.

(الف) فرض کنیم که Q در معادله دیفرانسیل $\frac{dQ}{dt} = kQ$ صدق می‌کند، k ضریب ثابت تجزیه را برای کربن ۱۴ بیاورد.

(ب) اگر $Q_0 = Q(0)$ ، عبارت $\frac{Q}{Q_0}$ را بر حسب t بیاورد.

(ج) فرض کنیم که بقایایی کشف شده است که مقدار کربن ۱۴ موجود در آن ۲۰ درصد مقدار اولیه است. عمر این بقایا را تعیین کنید.

۱۰. فرض کنیم که میزان تغییر جمعیت زمین متناسب با جمعیت موجود باشد. (فرض دقیقتراز درباره قانون رشد جمعیت در مسئله ۱۱ آمده است.) علاوه بر این برآورد شده است که در زمان $t = 1650$ (بعداز میلاد) جمعیت زمین 4×10^9 میلیون (4×10^9 رع) بوده است، و در زمان $t = 1950$ (بعداز میلاد) جمعیت آن به 2.8×10^9 میلیون (2.8×10^9 رع) رسیده است. مطلوب است تعیین عبارتی که جمعیت زمین را بر حسب زمان به دست دهد.

فرض کنیم که امکانات زمین حداًکثر برای 25×10^{10} بیلیون نفر کفايت کند، چه زمانی این حد فرا می‌رسد؟

۱۱. دریک جمعیت مجزا شده $(t)p$ ، میزان رشد جمعیت dp/dt تابعی از جمعیت است، یعنی

$$\frac{dp}{dt} = f(p)$$

(الف) ساده‌ترین عبارتی که می‌توان برای $f(p) = \epsilon p - \sigma p^2$ در نظر گرفت، که در آن ϵ ثابت مشبّت است. در این حالت $f(p) = p$ را اگر $p_0 = 0$ بیا بید. حد $(t)p$ را هنگامی که $\infty \rightarrow t$ پیدا کنید.

(ب) فرض دیگری که در بسیاری از موارد بهتر است $f(p) = \epsilon p - \sigma p^2$ می‌باشد، که در آن ϵ و σ دو ثابت مشبّت اند. ممکن است در مواردی جمله σp^2 لازم باشد، مثلاً هنگامی که شرایط تراکم به‌ازای مقادیر بزرگ p موجب افزایش میزان مرگ و میر و کاهش میزان موالید گردد. اگر $p_0 = 0$ ، برای جمعیت عبارتی بر حسب t بیا بید. جمعیت حدی را هنگامی که $\infty \rightarrow t$ بیا بید. این نتایج را با آنچه در قسمت (الف) به دست آمده است مقایسه کنید. توجه شود، حتی اگر σ بسیار کوچک باشد، به محض آنکه جمله درجه دوم در $f(p)$ منظور شود، طبیعت جواب به‌طور اساسی تغییر می‌کند (به‌ازای مقادیر بزرگ p). این بدان علت است که dp/dt با افزایش p تنزل می‌کند و حد آن هنگامی که p از طرف چپ به σ/ϵ میل می‌کند برابر صفر است. بدین‌سان p نمی‌تواند از این مقدار حدی تجاوز کند.

۱۲. بر اساس مشاهدات تجربی معلوم شده است با تقریبی که در بسیاری موارد رضایت‌بخش است، میزان تغییرات حرارت سطحی شیئی با اختلاف حرارت آن با حرارت محیط اطراف، متناسب است. گاهی این ارتباط را قانون سردشدن نیوتن می‌نامند. بدین‌سان اگر $(t)u$ حرارت شیئی در زمان t و u_0 حرارت ثابت محیط باشد، رابطه

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0)$$

که در آن k ضریب ثابت تناسب است برقرار می‌باشد.

(الف) جوابی را که در شرط اولیه $u_0 = 0$ صدق می‌کند بیا بید.

(ب) فرض کنیم در اتفاقی که حرارت آن 70°F است، یک فنجان قهوه در آغاز 200°F باشد، و یک دقیقه بعد حرارت آن به 190°F برسد. مطلوب است تعیین مدت لازم برای آنکه قهوه به حرارت 150°F برسد (با این فرض که می‌توان قانون سردشدن نیوتن را به کار برد).

۱۳. فرض کنیم که قطره باران کروی بد میزانی متناسب با مساحت سطح آن تبخیر شود. اگر شعاع آن در آغاز 3 میلی‌متر باشد، و یک ساعت بعد به 2 میلی‌متر تقلیل یا بد، مطلوب

است تعیین عبارتی برای شعاع قطره باران بر حسب زمان.

۱۴. مخزنی که در بعضی از آزمایش‌های هیدرودینامیکی به کار می‌رود، بعد از یک آزمایش، حاوی ۲۰۰ لیتر محلول رنگی با غلظت ۱ گرم در لیتر است. برای آنکه مخزن را برای آزمایش بعدی تمیز و آماده کنیم، جریان آب تازه‌ای به میزان ۲ لیتر در دقیقه وارد مخزن می‌کنیم و در حالی که آن را خوب به همین میزان تمیز از مخزن خارج می‌شود. مطلوب است تعیین مدت زمان لازم برای آنکه غلظت رنگ در مخزن به ۱ درصد مقدار اولیه برسد.

۱۵. مخزنی در آغاز حاوی ۱۰۰ گالن آب خالص است. آبی که حاوی ۱/۲ پوند نمک در گالن است به میزان ۲ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌شود، و مخلوط به همین میزان از مخزن خارج می‌شود. بعد از ۱۵ دقیقه این عمل را متوقف کرده و آب خالص به میزان ۲ گالن در دقیقه وارد مخزن می‌کنیم و مخلوط به همان میزان از مخزن خارج می‌شود. مقدار نه کسی را که پس از ۲۵ دقیقه در مخزن باقی می‌ماند بیابید.

۱۶. مخزنی به ظرفیت ۵۰۰ گالن، در آغاز حاوی ۲۰۰ گالن آب و ۱۰۰ پوند نمک محلول می‌باشد. آبی که حاوی ۱ پوند نمک در گالن است به میزان ۳ گالن در دقیقه وارد مخزن شده و مخلوط به میزان ۲ گالن در دقیقه خارج می‌شود. مقدار نمک موجود در مخزن را برای هر زمان، قبل از پرشدن مخزن بیابید. غلظت نمک موجود در مخزن را (بر حسب پوند در گالن) در لحظه لبریزشدن آن پیدا کنید. این غلظت را با غلظت حدی نظری مربوط به حالتی که ظرفیت مخزن بینهاست باشد مقایسه کنید.

۱۷. در یک واکنش شیمیایی رتبه دوم با تأثیر متقابل (برخورد) یک مولکول از ماده P و یک مولکول از ماده Q یک مولکول از ماده حديد X ایجاد می‌شود، بنابراین $X \rightarrow P + Q$. فرض کنیم که غلظت اولیه مواد P و Q به ترتیب p و q باشد، و غلظت X در زمان t را $x(t)$ می‌گیریم. آنگاه غلظت P و Q در زمان t برابر $(p-x(t))$ و $(q-x(t))$ است، و پیشرفت واکنش با معادله

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p-x)(q-x)$$

بیان می‌شود، که در آن α ثابت مثبتی است.

(الف) اگر $x(0) = 0$ ، $x(t)$ را بیابید.

(ب) اگر مواد P و Q یکی باشند، آنگاه

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p-x)^2$$

اگر $x(0) = 0$ ، $x(t)$ را بیابید.

۱۸. فرض کنیم که در واکنش شیمیایی معینی ماده P به ماده X تبدیل می‌شود. فرض کنیم غلظت اولیه P برابر p و غلظت X در زمان t برابر $x(t)$ باشد. در این صورت غلظت P در زمان t برابر $(x(t)-p)$ است. علاوه بر این فرض کنیم که واکنش، خود

کاتالیزور باشد، یعنی، واکنش با ماده‌ای که ایجاد می‌شود تشدید شود. بنابراین $\frac{dx}{dt}$ هم با x وهم با $p - x$ متناسب است، و

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(p - x)$$

که در آن α ثابت مثبتی است. اگر $x(0) = x_0$ ، $x(t)$ را باید.

۱۹. برخی از بیماریها (مانند تیفوئید) عموماً به وسیله حاملین (یعنی، افرادی که علایم بیماری در آنها دیده نمی‌شود بیماری را انتقال می‌دهند) شیوع پیدا می‌کنند. فرض کنیم x و y به ترتیب چگالی افراد حامل و سالم مستعد در جامعه در زمان t باشد. فرض کنیم که میزان جدا کردن حاملین از جامعه برابر β باشد، به طوری که

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy \quad (\text{یک})$$

همچنین فرض کنیم که میزان شیوع بیماری با حاصل ضرب x و y متناسب است. یعنی

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy \quad (\text{دو})$$

(الف) با حل معادله (یک) که مقید به شرط اولیه $x(0) = x_0$ است، x را بر حسب t تعیین کنید.

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف)، y را با حل معادله (دو)، مقید به شرط اولیه $y(0) = y_0$ ، بر حسب t بیان کنید.

(ج) نسبت افرادی از جامعه را که به این اپیدمی مبتلا نمی‌شوند، یعنی، مقدار حدی y را هنگامی که $\rightarrow \infty$ تعیین کنید. همچنین تغییرات آن را بر حسب α و β بررسی کنید. ۲۰. فرض کنیم اطاقی که 1200 فوت مکعب هوا دارد، در ابتدا فاقد منواکسید کربن است. از لحظه $t = 0$ دودسیگاری که دارای 4 درصد منواکسید کربن است به میزان 1 و فوت مکعب در دقیقه وارد اطاق می‌شود، و با هوای اطاق خوب مخلوط شده به همان میزان از اطاق خارج می‌شود.

(الف) مطلوب است تعیین عبارت $(1)x$. غلظت منواکسید کربن در اطاق در هر زمان $t > 0$.

(ب) قرار گرفتن مدت طولانی در معرض منواکسید کربن حتی با غلظت اندک 0.00012 برای بدن انسان مضر است. زمان t را که غلظت به این مقدار می‌رسد، بیان کنید. ۲۱. در یا چهاری با حجم ثابت V را که در زمان t مقدار آلودگی آن برابر $Q(t)$ است در نظر می‌گیریم. این آلودگی در سراسر در یا چه به طور یکنواخت توزیع شده و غلظت آن برابر $V/Q(t)$ است. فرض کنیم که آبی با غلظت آلودگی k به میزان P وارد در یا چه می‌شود، و به همین میزان آب از در یا چه خارج می‌گردد. همچنین فرض می‌کنیم که آلودگیها به میزان ثابت P مستقیماً به در یا چه افزوده می‌شود. توجه شود که در این

فرضها از عوامل متعددی که ممکن است در بعضی حالات مهمن باشند صرف نظر کرده‌ایم، مثلاً افزایش و کاهش آب در اثر بارندگی، جذب، و تبخیر، طبقه طبیعی شدن آب در اثر اختلاف حرارت در دریاچه‌های عمیق، تمامی بی‌نظمیهای خط ساحلی در ایجاد دهانه‌های با حفاظ، و این نکته که رسوب آسودگی‌ها در سراسر دریاچه یکنواخت نیست، و (عموماً) در نقاط مجزایی در اطراف سواحل صورت می‌گیرد. نتایج زیر باید با توجه به حذف این گونه عوامل تعبیر شوند.

(الف) اگر در زمان $t = 0$ غلظت آسودگی برابر r_0 باشد، عبارت غلظت (t) را بر حسب زمان بیاورد. غلظت حدی هنگامی که $\rightarrow \infty$ چقدر است؟

(ب) اگر افزایش آسودگی‌ها به دریاچه متوقف شود ($k = 0$) و $P = 0$ به ازای $t > T$ ، فاصله زمانی T را برای آنکه غلظت آسودگی به 50 درصد مقدار اولیه، به 10 درصد مقدار اولیه تقلیل یا بد تعیین کنید.

(ج) جدول ۲.۲ حاوی داده‌هایی^۱ درباره چند دریاچه بزرگ است. از قسمت (ب) با استفاده از این داده‌ها زمان T را برای آنکه آسودگی هر یک از این دریاچه‌ها به 10 درصد مقدار اولیه تقلیل یا بد بیاورد.

جدول ۲.۲

دریاچه	$V(\text{km}^3 \times 10^{-3})$	$r(\text{km}^3/\text{yr})$
سوپریور ^۲	۱۲۰۲	۶۵۲
میشیگان ^۳	۴۹	۱۵۸
اری ^۴	۰۴۶	۱۷۵
انتاریو ^۵	۱۶	۲۰۹

۲.۲۰. مسیرهای قائم. یک مسئله هندسی متقاضی تعیین خانواده خمها بی است که در هر نقطه خانواده مفروضی از خمها را به طور قائم قطع کند. در این صورت خمها بی هر خانواده را مسیرهای قائم خانواده دیگر می‌نامند.

(الف) خانواده سهمیهای

$$y = kx^a \quad (\text{یک})$$

۱. این مسئله هبتنی بر مقاله «جایه‌جا شدن طبیعی آسودگی‌های دریاچه‌های بزرگ» از R.H. Rainey در مجله Science، ۱۵۵، ۱۹۶۷، صفحه‌های ۱۲۴۲-۱۲۴۳ می‌باشد. اطلاعات جدول از این منبع است.

را که در آن k یک مقدار ثابت است در نظر می‌گیریم. نمودار معادله (یک) را به ازای چند مقدار k رسم کنید. عبارتی برای شبیه‌سی مار بر نقطه مفروض (y, x) بیا بیند که شامل مختصات (y, x) نقطه باشد، و به پارامتر k بستگی نداشته باشد.

(اهنگی): از معادله (یک) مشتق بگیرید و k را حذف کنید.

(ب) با استفاده از این نکته که شبیهای خمهای عمود بر هم منفی معکوس یکدیگرند، معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم معادله (یک) را بنویسید.

(ج) معادلهای را که در قسمت (ب) به دست آمد حل کنید، و مسیرهای قائم را تعیین کنید. تعدادی از خمهای این خانواده را رسم کنید.

۲۳. در هر یک از حالت‌های زیر با استفاده از روش مسئله ۲۲ مسیرهای قائم خانواده خمهای داده شده را بیا بیند. طرح اجمالی خانواده داده شده و مسیرهای قائم آنها را رسم کنید.

(الف) خانواده هذلولیهای $xy = c$.

(ب) خانواده دایره‌های $(x - c)^2 + y^2 = c^2$.

(ج) خانواده بیضیهای $x^2 - xy + y^2 = c^2$.

(د) خانواده سهمیهای $2cy + x^2 = c^2$ ، $c > 0$.

۲۴. اگر در صفحه $y(x)$ دو خط مستقیم بترتیب با شبیهای m_1 و m_2 یکدیگر را به زاویه θ قطع کنند، نشان دهید که

$$(\tan \theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1$$

با استفاده از این نکته، خانواده خمهای را که هر یک از خانواده‌های زیر را به زاویه 45° قطع می‌کنند بیا بیند. در هر حالت طرح اجمالی دو خانواده خمهای مزبور را رسم کنید.

$$(ب) x^2 + y^2 = c^2 \quad (\text{الف}) c = x - 2y$$

۲۵. در صفحه همه خمهای را که در هر نقطه (y, x) آنها، خط مماس از نقطه ثابت (a, b) می‌گذرد، بیا بیند.

۲۶. خط قائم در هر نقطه (y, x) خم مفروضی از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد. اگر این خم شامل نقطه $(2, 3)$ باشد، معادله آن را بیا بیند.

۲۷. در صفحه همه خمهای را که در هر نقطه خم، قطعه مماس محصور بین نقطه تماس و محور x را به وسیله محور y را نصف می‌شود بیا بیند.

۱۰۰۲ مکانیک مقدماتی

برخی از مهمترین کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در حوزه مکانیک مقدماتی دیده می‌شوند. در این بند به بررسی مسائلی مربوط به تغییر مکان جسم در انداد خط مستقیم می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که این اجسام از قانون حرکت نیوتون ($1642-1727$) تبعیت

می‌کنند: حاصل ضرب جرم دستاب برابر است با نیروی خارجی. به بیان نمادی

$$F = ma \quad (1)$$

که در آن F نیروی خارجی، m جرم جسم، و a شتاب جسم در امتداد F است. اگر جرم جسم ثابت باشد، معادله (۱) را می‌توان به صورت

$$F = \frac{d}{dt} (mv) = \frac{dP}{dt} \quad (2)$$

نوشت، که در آن v سرعت، و $P = mv$ اندازه خطی حرکت یا اندازه حرکت است. برای واحدها دو دستگاه متداول است. در دستگاه متری، یا CGS واحدهای اساسی عبارتند از سانتی‌متر (طول)، کیلوگرم (جرم)، و ثانیه (زمان). دین واحد نیرو، از معادله (۱) به صورت نیروی لازم برای ایجاد شتابی برابر ۱ سانتی‌متر بر محدوده ثانیه در جرمی برابر ۱ کیلوگرم تعریف می‌شود. از طرف دیگر، در دستگاه انگلیسی واحدهای اساسی عبارتند از فوت (طول)، پوند (نیرو)؛ و ثانیه (زمان). واحد جرم، یعنی اسلوگ از معادله (۱) به عنوان جرمی که تحت ۱ پوند نیرو شتابی برابر ۱ فوت بر محدوده ثانیه پیدا می‌کند تعریف می‌شود.

اکنون سقوط آزاد جسمی را در خلا^۳ و در مجاورت سطح زمین در نظر می‌گیریم به طوری که تنها نیروی قابل توجه مؤثر بر آن همان وزن جسم ناشی از میدان جاذبه زمین باشد. آنگاه معادله (۱) به صورت

$$w = mg \quad (3)$$

در می‌آید، که در آن w وزن جسم و g شتاب ناشی از جاذبه را نشان می‌دهد.

حتی اگر جرم جسم ثابت بماند، وزن و شتاب ثقلی آن بر حسب مسافت جسم از مرکز میدان جاذبه زمین تغییر می‌کند. در سطح دریا مقدار g به طور تجربی و تقریبی، برابر ۹۸۲ فوت بر محدوده ثانیه (دستگاه انگلیسی)، یا ۹۸۵ سانتی‌متر بر محدوده ثانیه (دستگاه متری) تعیین شده است. معمول براین است که شتاب ثقلی در سطح دریا را با g نشان می‌دهند، بدینسان g یک مقدار ثابت است. با این تغییر، فقط در سطح دریا می‌توان معادله (۳) را دقیق دانست.

می‌توان عبارت کلی وزن جسمی به جرم m را از قانون محدود عکس مسافت نیوتن به دست آورد. اگر R شعاع زمین، و x ارتفاع از سطح دریا باشد، آنگاه

$$w(x) = \frac{K}{(x+R)^2}$$

که در آن K مقدار ثابتی است. در $x=0$ (سطح دریا)، داریم $w = mg$ ، در نتیجه $K = mgR^2$

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2} \quad (4)$$

چون $(x+R)$ را در حواله x به سری تیلر بسط دهیم، خواهیم داشت

$$w(x) = mg \left(1 - \frac{x}{R} + \dots \right) \quad (5)$$

در نتیجه اگر بتوان از جمله‌های معادل با R/x در مقایسه با واحد صرف نظر کرد، آنگاه می‌توان به جای معادله (۴) تقریبی ساده‌تر یعنی معادله (۳) را قرار داد. بدینسان، در مورد حرکت در مجاورت سطح زمین یا هنگامی که دقت بسیار زیاد لازم نباشد، معمولاً کافی است از معادله (۳) استفاده شود. در حالنهای دیگر مانند مسائلی که مربوط به پروازهای فضایی می‌باشند ممکن است لازم آید که معادله (۴) یا حداقل تقریب بهتری از معادله (۳) مورد استفاده قرار گیرد.

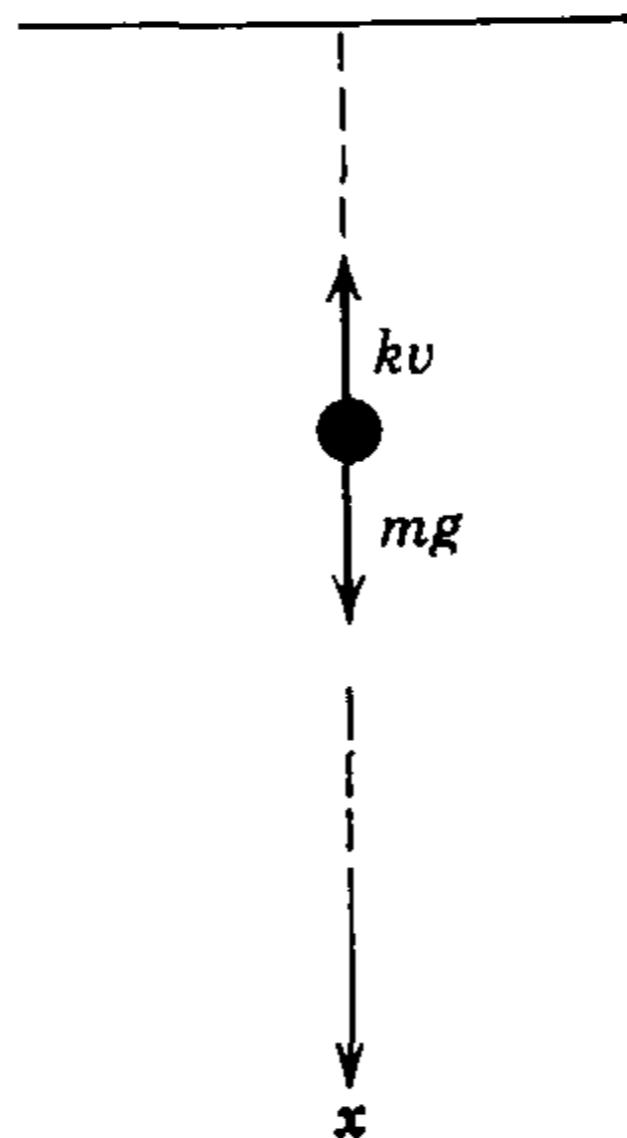
در بسیاری از حالات نیروی خارجی F علاوه بر وزن جسم شامل عوامل دیگری نیز می‌باشد. مثلاً ممکن است لازم آید که نیروهای اصطکاک ناشی از مقاومت هوا یا محیط‌های فرآگیرنده دیگر را در نظر گرفت. همچنین، ممکن است تأثیر تغییرات جرم مهم باشد، مانند حالتی که سفینه فضایی سوخت خود را در حین پرواز مصرف می‌کند.

در مسائلی که اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد باید حرکت جسم را در مقایسه با دستگاه مختصات مناسبی بیان کرد. ما همواره خطی را که حرکت در امتداد آن انجام می‌گیرد به عنوان محور x ها انتخاب می‌کنیم، جهت مثبت محور x را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. هنگامی که جهت مثبت محور x مشخص شد، هر مقدار مثبت x نمایشگر تغییر مکانی در این جهت است، هر مقدار مثبت $dx/dt = v$ نمایین آن است که جسم در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، هر مقدار مثبت نیروی F نشان‌دهنده آن است که نیروی مزبور در جهت مثبت محور x اثر می‌کند، وغیره. چند مسئله نمونه در مثالهای زیر آمده است.

مثال ۱. جسمی به جرم m در محیطی که مقاومت آن متناسب با $|v|$ ، یعنی قدر مطلق سرعت لحظه‌ای جسم^۱ است از حالت سکون به طور آزاد سقوط می‌کند. فرض کنیم که نیروی جاذبه ثابت باشد، موضع و سرعت جسم را در هر زمان t بیایید.

در این حالت مناسب است که جهت مثبت محور x را به طرف پایین و موضع اولیه جسم را به عنوان مبدأ اختیار کنیم (شکل ۲.۶ را بینید). در این صورت mg وزن جسم در جهت پایین (مثبت) اثر می‌کند، اما مقاومت $|v|k$ که در آن k ثابت مثبتی است موجب کندی حرکت می‌شود. هنگامی که $v < 0$ ، مقاومت در جهت بالا (منفی) است، و بدینسان

۱. به طور کلی، مقاومت تابعی از تندی، یعنی، قدر مطلق سرعت است. فرض خطی بودن رابطه فقط در مورد تندیهای نسبتاً کم می‌تواند موجه باشد. در مورد تندیهای زیاد ممکن است لازم آید که مقاومت را متناسب با توان بالاتری از $|v|$ یا حتی به صورت یک تابع چندجمله‌ای از $|v|$ فرض کنیم.



شکل ۶.۲

برابر $-kv$ می‌باشد. هنگامی که $v = 0$ ، مقاومت درجهت پایین اثر می‌کند، و باز هم برابر $-kv$ است. بدین‌سان در همهٔ حالتها قانون نیوتون را می‌توان به صورت

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

یا

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad (6)$$

نوشت. معادله (۶) یک معادله خطی مرتبهٔ اول است، و دادای عامل انتگرال‌ساز $e^{kt/m}$ می‌باشد. جواب معادله (۶) عبارت است از

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m} \quad (7)$$

شرط اولیه $v(0) = 0$ مستلزم آن است که $c_1 = -mg/k$ ، بدین‌سان

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) \quad (8)$$

برای به دست آوردن موضع جسم، یعنی x ، در رابطه (۸) به جای v می‌گذاریم و با انتگرال‌گیری واستفاده از شرط اولیه دوم $x(0) = 0$ خواهیم داشت

$$x = \frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2} (1 - e^{-kt/m}) \quad (9)$$

موقع وسعت جسم در هر زمان t به ترتیب با روابط (۹) و (۸) داده می‌شود. شایان توجه است که در رابطه (۷) هنگامی که $v \rightarrow \infty$ سرعت به مقدار حدی

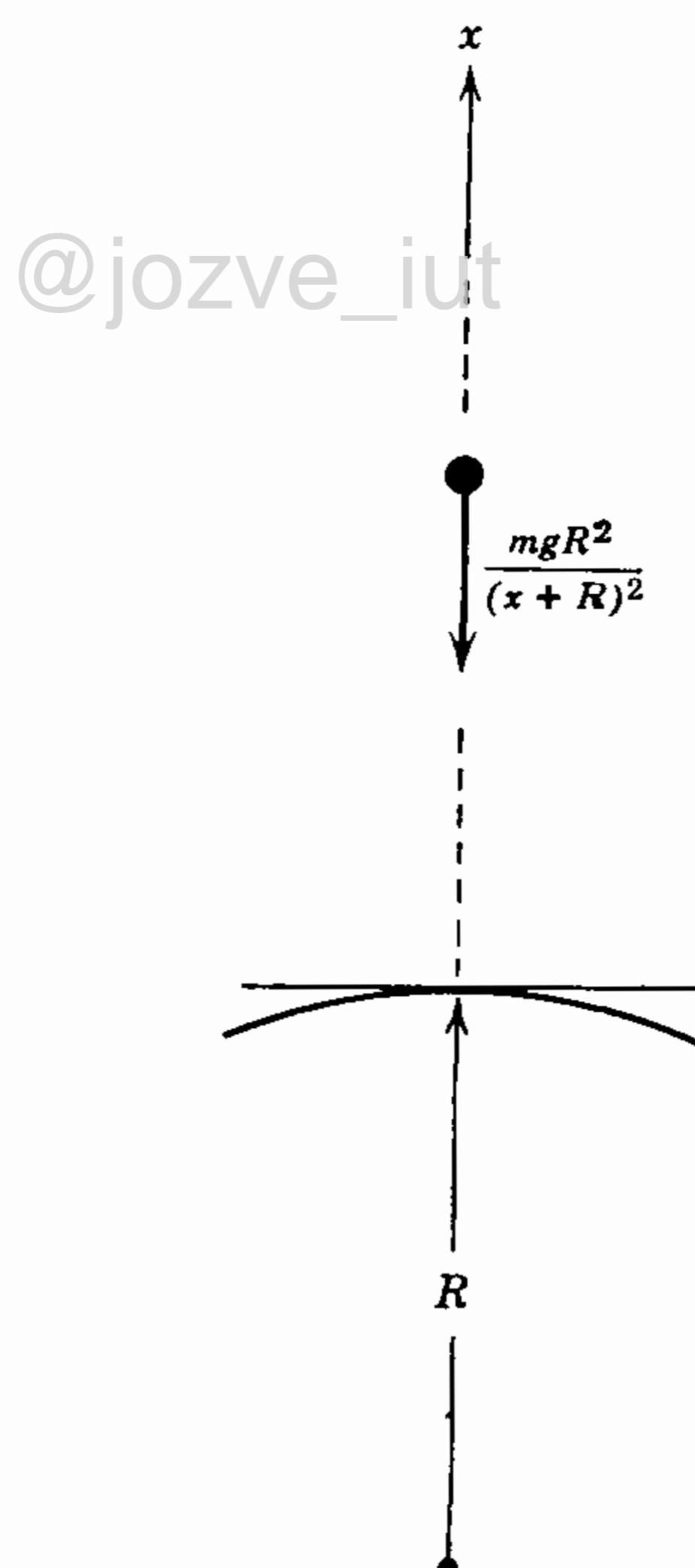
$$v_1 = \frac{mg}{k} \quad (10)$$

می‌گراید. ۱) سرعت حدی در سقوط آزاد از شرایط اوایله مستقل است، و فقط به جرم جسم و ضریب مقاومت محیط بستگی دارد. با داشتن یکی از مقادیر v_1 یا k می‌توان از معادله (۱۰) دیگری را محاسبه کرد. هنگامی که k به صفر نزدیک شود (یعنی، مقاومت کاهش یابد)، سرعت حدی به طور نامحدود افزایش می‌یابد.

مثال ۲. جسمی به جرم ثابت m با سرعت اولیه v_0 از سطح زمین به طرف بالا پرتاب شده است. فرض می‌کنیم که مقاومت هوا وجود نداشته باشد. اما تغییرات میدان جاذبه زمین را بر حسب ارتفاع در نظر می‌گیریم، مطلوب است تعیین کوچکترین سرعت اولیه‌ای که بد ازای آن جسم دیگر به زمین بر نگردد. این همان سرعتی است که آن را «سرعت فرار» می‌نامند.

جهت مشتت محور x را به طرف بالا، و مبدأ را بر سطح زمین اختیار می‌کنیم (شکل ۷.۲ را بینید). تنها نیروی مؤثر بر جسم وزن آن است که از رابطه (۶) به دست می‌آید. و درجهت پایین اثر می‌کند. بدینسان معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2} \quad (11)$$



شکل ۷.۲

شرط اولیه

$$v(0) = v_0 \quad (12)$$

است. چون نیروی موجود در طرف دوم معادله (۱۱) فقط تابعی از x است، مناسبتر است که به جای t ، x را متغیر مستقل بگیریم. این کار مستلزم آن است که dv/dt را با استفاده از قاعده زنجیری مشتق گیری بر حسب dx/dx بیان کنیم، بدینسان

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (13)$$

و معادله (۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \quad (14)$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + C \quad (15)$$

چون هنگامی که $t = 0$ ، داریم $x = 0$ ، بنا بر این می‌توان به جای شرط اولیه (۱۲) که متناظر به $t = 0$ است، شرط $v = v_0$ به ازای $x = 0$ را قرار داد. این مستلزم آن است که

$$C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$$

@jozve_iut

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \quad (16)$$

برای تعیین سرعت فرار باید قید کرد که سرعت v حاصل از معادله (۱۶) بدارای همه مقادیر (ثبت) x مثبت بماند. این شرط هنگامی برقرار است که داشته باشیم $v^2 \geq 2gR$. بدینسان سرعت فرار v با رابطه

$$v = (2gR)^{1/2} \quad (17)$$

داده می‌شود. اندازه v تقریباً برابر ۹۶ میل بر ثانیه است.

در محاسبه سرعت فرار $v = (2gR)^{1/2}$ از مقاومت هوا صرف نظر شده است. سرعت فرار واقعی، که شامل تأثیر مقاومت هوا است، تا اندازه‌ای بزرگ‌تر است. از طرف دیگر، اگر جسم را قبل از پرتاب به ارتفاع قابل ملاحظه‌ای از سطح دریا بالا ببریم سرعت فرار مؤثر به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. بدین وسیله نیروی جاذبه و اصطکاک هر دو تقلیل پیدا می‌کنند، به ویژه، مقاومت هوا با افزایش ارتفاع سریعاً کاهش می‌یابد.

اجسام با جرم متغیر. در مورد برخی از سفینه‌های فضایی، جرم اولیه m_0 شامل ذخیره مهندسی سوخت است که در حین پرواز مصرف می‌شود و لازم است تغییر جرم سفینه را در نظر گرفت. برای آن که معادله (۲) را در این مورد به کار ببریم باید علاوه بر مقدار حرکت موشک، خروج گازهای حاصل از مصرف سوخت را نیز به حساب آورد. فرض می‌شود که گازهای خروجی نسبت به سفینه دارای سرعت ثابت u باشند، و جرم کل دستگاه سفینه و سوخت (با اختساب گازهای خروجی) ثابت باقی می‌ماند. اگر در لحظه t جرم سفینه و محموله آن $m(t)$ و جرم گازهای خروجی $m_e(t)$ باشد، داریم

$$m(t) + m_e(t) = m_0 \quad (18)$$

با بدکار بردن معادله (۲) در مورد دستگاه سفینه و گاز خواهیم داشت^۱

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \quad (19)$$

که در آن v سرعت موشک است. جمله دوم طرف دوم معادله (۱۹) تأثیر گازهای خروجی بر مقدار حرکت دستگاه را نشان می‌دهد.

مثال ۳. یک سفینه فضایی با جرم اولیه m_0 از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا پرتاب شده است. فرض کنیم که قسمتی از این جرم $m_f < m_0$ جرم سوختی باشد که به میزان ثابت β در فاصله زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ مصرف می‌شود. همچنین تندی خروج $-u = s$ را نیز ثابت فرض می‌کنیم. از مقاومت هوای صرف نظر می‌شود، و نیروی جاذبه را ثابت فرض می‌کنیم. سرعت سفینه را به صورت ثابعی از زمان t به ازای $t_1 \leq t \leq t_2$ بیایید.

شرایط مذکور مستلزم آن است که جرم سفینه با رابطه

$$m(t) = m_0 - \beta t \quad t < t_1 \quad (20)$$

مشخص شود. در زمان t_1 جرم سفینه به مقدار

$$m_1 = m_0 - \beta t_1 = m_0 - m_f$$

تقلیل می‌یابد. به ازای $t_1 < t \leq t_2$ معادله حرکت (۱۹) به صورت

$$-(m_0 - \beta t)g = (m_0 - \beta t) \frac{dv}{dt} - s\beta$$

یا

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{s\beta}{m_0 - \beta t} \quad (21)$$

در می‌آید. با انتگرال گیری از معادله (۲۱) خواهیم داشت

۱. جزئیات تعیین این معادله در ضمیمه پایان همین فصل آمده است.

$$v = -gt - s \ln(m_0 - \beta t) + c$$

شرط اولیه $v_0 = v$ مستلزم آن است که

$$c = v_0 + s \ln m_0$$

و از آنجا

$$v = v_0 - gt + s \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (22)$$

هنگامی که سوخت در $\beta/(m_0 - m_1)$ تمام می‌شود، سفینه دارای سرعت v_1 به صورت زیر است

$$v_1 = v_0 - \frac{gm_0}{\beta} \left(1 - \frac{m_1}{m_0} \right) + s \ln \frac{m_0}{m_1} \quad (23)$$

اگر v_1 حداقل برابر سرعت فرار متناظر به ارتفاعی که به آن رسیده است باشد، سفینه در آن لحظه می‌تواند از میدان جاذبه زمین بیرون رود. در غیر این صورت، سرانجام به زمین بر می‌گردد مگر آن که شامل طبقات دیگری باشد. از معادله (۲۲) همچنین نتیجه می‌شود که سرعت v_1 با تندی خروجی s و میزان مصرف β افزایش می‌یابد.

مسائل

۱. جسمی به جرم ثابت m در امتداد قائم به طرف بالا با سرعت اولیه v_0 پرتاب شده است. فرض می‌کنیم که جاذبه زمین ثابت باشد، وازیروهای دیگری که بر جسم اثر می‌کنند صرف نظر می‌کنیم، مطلوب است

(الف) ارتفاع ماکزیممی که جسم به آن می‌رسد.

(ب) زمانی که جسم به این ارتفاع ماکزیمم می‌رسد.

(ج) زمانی که جسم به نقطه آغازی خود بر می‌گردد.

۲. جسمی در امتداد قائم به طرف پایین با سرعت اولیه v_0 در محیطی که مقاومت آن متناسب با اندازه سرعت است پرتاب می‌شود. سرعت v_1 را به عنوان تابعی از زمان بیاورد. سرعت حدی v_2 را پیدا کنید.

۳. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با اندازه سرعت است رها می‌شود. مطلوب است مدت زمان لازم برای آنکه سرعت جسم برابر ۹۰ درصد سرعت حدی آن گردد.

۴. وزن یک قایق موتوری با سرنشی آن ۳۲۰ پوند است. اگر کشش موتور در امتداد حرکت معادل نیروی ثابت ۵۰ پوند باشد، و اندازه عددی مقاومت آب در برابر حرکت مساوی با دو برابر تندی بر حسب فوت بر ثانیه، و قایق در ابتدا در حالت سکون باشد مطلوب است

(الف) سرعت قایق در زمان t .

(ب) سرعت حدی.

۵. جسمی به جرم m در امتداد قائم به طرف پایین با سرعت اولیه v_0 در محیطی که مقاومت آن با جذر اندازه سرعت متناسب است پرتاب می‌شود. رابطه بین سرعت v و زمان t را بیابید. سرعت حدی را پیدا کنید.

۶. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با مجددور سرعت است سقوط می‌کند. رابطه بین سرعت v و زمان t را بیابید. سرعت حدی را پیدا کنید.

۷. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که مقاومت آن متناسب با $|v|^{1/2}$ است، و در آن v ثابت مثبتی است سقوط می‌کند. با فرض آنکه نیروی جاذبه ثابت باشد، سرعت حدی جسم را بیابید

۸. جسمی به جرم ثابت m در امتداد قائم با سرعت اولیه v_0 در محیطی که مقاومت آن برابر $k|v|$ است، و در آن k ثابت مثبتی است به طرف بالا پرتاب می‌شود. از تغییرات نیروی جاذبه صرف نظر می‌کنیم، مطلوب است تعیین (الف) ارتفاع ماکزیمم x_m که جسم به آن می‌رسد.

(ب) زمان t_m متناظر به این ارتفاع ماکزیمم. همچنین نشان دهید که می‌توان x_m را به صورت زیر بیان کرد

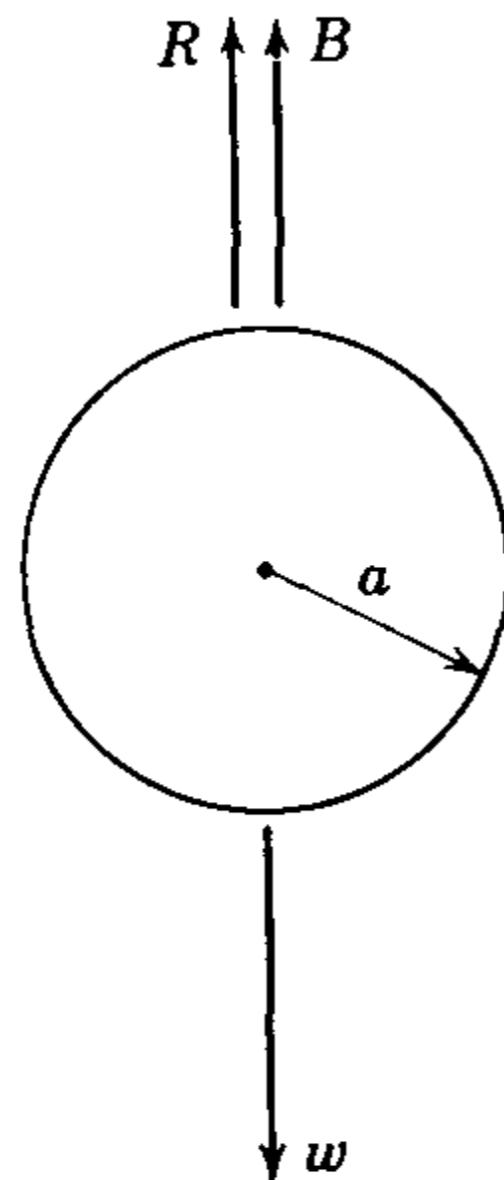
$$t_m = \frac{v_0}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right]$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right]$$

هنگامی که $1 < kv_0/mg$ باشد، هر دو سری همگرا می‌باشند.

۹. جسمی که در سیال نسبتاً غلیظی مانند روغن سقوط می‌کند، تحت سه نیرو قرار دارد (شکل ۸.۲ را بینید): نیروی مقاومت R ، نیروی ارشمیدس B ، و وزن آن W که ناشی از ثقل است. نیروی ارشمیدس برابر است با وزن سیالی که به وسیله جسم جا به جا می‌شود. در مورد یک جسم کروی به شعاع a که به کندی حرکت کنده نیروی مقاومت از قانون استوکس^۱ $R = 6\pi\mu a|v|$ به دست می‌آید، که در آن v سرعت جسم و μ ضریب چسبندگی محیط سیال است.

۱. جرج گابریل استوکس (George Gabriel Stokes) (۱۸۱۹-۱۹۰۳) استاد کمبریج یکی از بزرگترین ریاضیدانان کلربسته قرن نوزدهم بوده است. معادلات اساسی مکانیک سیالات (معادلات ناویر-استوکس) را به افتخار او و ناویر نامگذاری کرده‌اند، و یکی از قضایای اساسی آنالیز برداری به نام اوست. وی نیز یکی از بنیانگذاران کاربرد سریهای (محابی) و اگرا می‌باشد، موضوعی که امروز دارای اهمیت و فواید بسیاری است.



شکل ۸.۲

(الف) مطلوب است تعیین سرعت حدی کرهٔ صلبی به شعاع a و چگالی ρ که به طور آزاد در محیطی به چگالی $'\rho'$ و ضریب چسبندگی $'m'$ سقوط می‌کند.

(ب) در ۱۹۱۵ فیزیکدان آمریکایی د. ا. میلیکان^۱ باریک الکترون را از بررسی حرکت قطرات ریز روغن در یک میدان الکتریکی تعیین کرد. نیرویی که از طرف یک میدان به شدت E بر یک قطره با بار e وارد می‌شود برابر Ee است. فرض کنیم که E طوری تنظیم شده باشد که قطره را در توقف نگاه دارد ($v = 0$)، و w و B به همان صورت قسمت (الف) باشند. فرمولی برای e بیابید. میلیکان توانست e را به عنوان بار یک الکترون شناسایی کند، و مقدار آن را برابر $15^{-10} \times 4803 \times e = 4803 \times 10^{-10} \text{ esu}$ تعیین کند.

۱۰. (الف) اگر وزن جسمی در سطح دریا ۱۰۰ پوند باشد، در ۱۰۰۰ میلی بالای سطح زمین وزن آن چقدر است؟

(ب) شعاع ماه تقریباً $۱۵۰/۲۷$ شعاع زمین است، و چگالی متوسط ماه در حدود $۵/۸$ چگالی متوسط زمین می‌باشد. اگر جسمی در سطح زمین ۱۰۰ پوند وزن داشته باشد، وزن آن را در سطح ماه بیابید.

۱۱. جسمی به جرم ثابت m از سطح دریا با سرعت اولیه v_0 که از سرعت فرار $(2gR)^{1/2} = v_0$ تجاوز نمی‌کند در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. با صرف نظر کردن از مقاومت هوا و با در نظر گرفتن تغییرات جاذبه بر حسب ارتفاع، ما کزیم ارتفاعی را که جسم به آن می‌رسد بیابید (مثال ۲ را ببینید).

۱۲. سرعت فرار جسمی را که از نقطه $R = x$ در بالای سطح زمین با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا پرتاب شده است بیابید، R شعاع زمین و x مقدار ثابتی است. از مقاومت هوا صرف نظر کنید. تعیین کنید جسم از چه ارتفاعی باید پرتاب شود تا سرعت

فرار به ۸۵ درصد مقدار آن در سطح زمین تقلیل یا بد.

۱۳. مسئله کوتاهترین زمان.^۱ مسئله کوتاهترین زمان یکی از مسائل مشهور در تاریخ ریاضیات است: مطلوب است تعیین خمی که یک نقطه مادی در انداد آن در کوتاهترین زمان از نقطه مفروض P به نقطه دیگر Q بدون اصطکاک بلغزد، نقطه دوم پایینتر از نقطه اول قرار دارد، اما مستقیماً در زیر آن واقع نیست (شکل ۹.۲ را بینید).

این مسئله را یوهان برنولی در ۱۶۹۶ برای زورآزمایی با ریاضیدانان عصر خود طرح کرد. جوابهای صحیح آن را خود یوهان برنولی و همچنین برادرش یاکوب برنولی، آیزک نیوتن، گوتفرید لاپیتیز، و مارکی لوپیتال به دست آوردند. مسئله کوتاهترین زمان به عنوان یکی از مسائل آغازگر حساب تغییرات، در توسعه ریاضیات دارای اهمیت است. برای حل این مسئله مناسب است که نقطه بالاتر یعنی P را به عنوان مبدأ بگیریم، و محورها را مطابق شکل ۹.۲ توجیه کنیم. Q نقطه پایینتر دارای مختصات (x_0, y_0) است. می‌توان نشان داد که خم کوتاهترین زمان با تابع $y = k \sin^2 t$ در معادله دیفرانسیل

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = k^2 \quad (\text{یک})$$

صدق می‌کند معین می‌گردد، k ثابت مشبّتی است که بعداً تعیین خواهد شد.

(الف) معادله (یک) را نسبت به y حل کنید. چرا باید ریشه مشبّت را انتخاب کرد؟

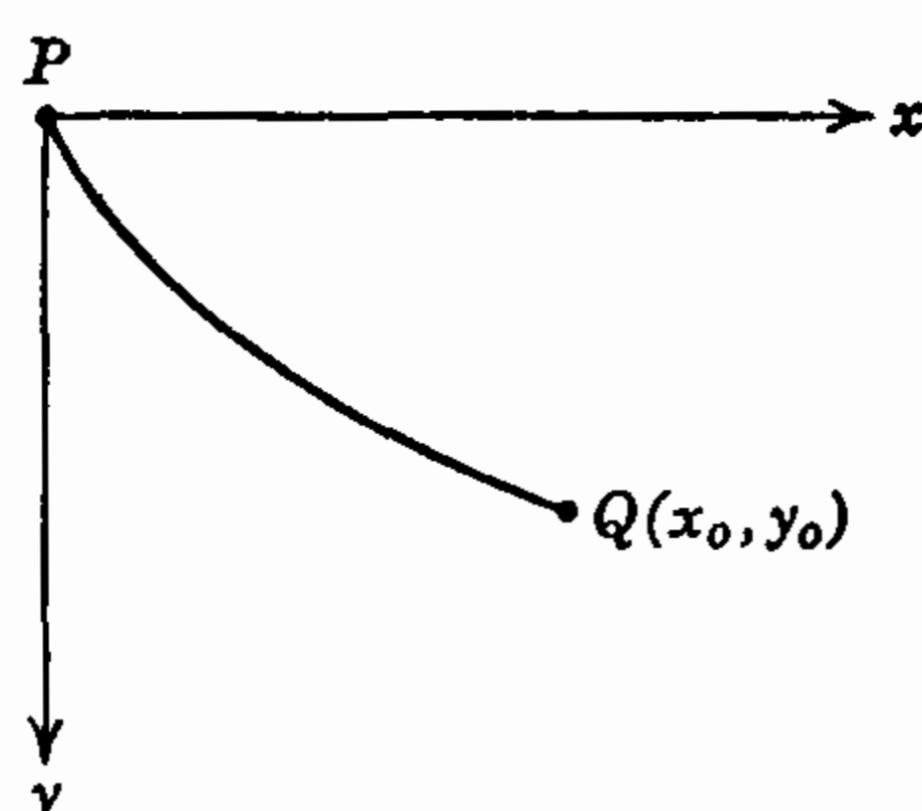
(ب) متغیر جدید t را با رابطه

$$y = k^2 \sin^2 t \quad (\text{دو})$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که معادله قسمت (الف) به صورت زیر در می‌آید

$$2k^2 \sin^2 t dt = dx \quad (\text{سه})$$

(ج) با قراردادن $t = \theta$ ، نشان دهید که جواب معادله (سه) که با شرط $x = 0$ و $y = 0$ متناظر است با رابطه



شکل ۹.۲

$$x = \frac{k^2}{2}(\theta - \sin \theta) \quad (چهار)$$

داده می شود، و با استفاده از معادله (دو) نشان دهید که

$$y = \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta) \quad (\ پنج)$$

معادلات (چهار) و (پنج) معادلات پارامتری جواب معادله (یک) می باشد که از نقطه $(0, 0)$ می گذرد. نمودار معادلات (چهار) و (پنج) سیکلوئید نام دارد. اگر ثابت k را به طور مناسب انتخاب کنیم، این سیکلوئید از نقطه $(0, y_0)$ می گذرد، و جواب مسئله کوتاهترین زمان خواهد بود. می توان θ را حذف کرد و جواب را به صورت $y = r \phi$ به دست آورد، اما استفاده از معادلات پارامتری آسانتر است.

۱۴. وزن موشكی قبل از پرتاپ ۱۲۰۰ پوند سوخت می باشد. فرض کنیم که سوخت در مدت ۵ ثانیه به طور یکنواخت مصرف می شود، و تندی خروج ازموشك ۵۰۰۰ فوت بر ثانیه است. اگر موشك دارای سرعت اولیه نباشد، سرعت آن را در پایان ۵ ثانیه بیابید. از مقاومت هوا و تغییرات میدان جاذبه زمین صرف نظر کنید.

۱۵. یک سفینه فضایی به جرم اولیه m_0 از سطح زمین از حالت سکون به حرکت در می آید. فرض کنیم که میزان مصرف سوخت در فاصله زمانی $t_1 < t < t_2$ برابر مقدار ثابت $\beta = -dm/dt$ و تندی خروج گاز نیز مقدار ثابت s باشد. علاوه بر این فرض کنیم که مقاومت هوا با اندازه سرعت $v(t)$ سفینه متناسب است، از تأثیر مقاومت هوا بر گازهای خروجی و همچنین از تغییر میدان جاذبه بر حسب ارتفاع صرف نظر می شود. نشان دهید که سرعت سفینه در معادله دیفرانسیل

$$m \frac{dv}{dt} + kv = -mg + s\beta \quad t < t_1$$

صدق می کند، که در آن $m(t) = m_0 - \beta t$. این معادله را حل کنید و v را بر حسب t ، $t > t_1$ بیابید.

۱۱۰ قضیه وجود و یکتاپی

در این بند به بحث درباره اثبات قضیه ۲.۲ یعنی قضیه اساسی وجود و یکتاپی درباره مسائل مقدار اولیه مرتبه اول می پردازیم. این قضیه میان آن است که اگر $f(x, y)$ در شرایطی صدق کند، آنگاه مسئله مقدار اولیه

$$y' = f(x, y) \quad (۱\alpha)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (۱\beta)$$

در فاصله‌ای حاوی نقطه x_0 دارای جواب یکتاست.

وجود جواب مسئله مقدار اولیه (۱) را در برخی از حالات‌ها (مثل، هنگامی که معادله دیفرانسیل خطی است) می‌توان مستقیماً با حل مسئله وارائیه فرمولی برای جواب آن اثبات کرد. اما، در حالات کلی نمی‌توان از این روش استفاده کرد، زیرا برای حل معادله (۱الف) روشی که در همه حالات‌ها به کار رود وجود ندارد. بنا بر این، در مورد حالت کلی برای اثبات وجود جواب معادلات (۱) لازم است از روش غیرمستقیمی استفاده کنیم. عمده‌لا با این روش، در عمل نمی‌توان جواب را به آسانی به دست آورد. اساس این روش ساختن دنباله‌ای از توابع است که حد آن در مسئله مقدار اولیه صدق کند، هر چند که جمله‌های دنباله‌منفرد اداری این خاصیت نیستند. عموماً نمی‌توان بیش از چند جمله دنباله را صریحاً محاسبه کرد، بنا بر این، به ندرت می‌توان تابع حدی را به طور صریح به دست آورد. با وجود این، تحت قیودی که در قضیه ۲.۲ در باره (۲.۱) بیان شد می‌توان نشان داد که دنباله مزبور همگراست و تابع حدی دارای خواص مطلوب است. استدلال این قضیه بفرنج است و مبتنی به روشها و نتایجی است که نخستین بار در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفت مطرح می‌شود. بنا بر این، ما وارد تمام جزئیات اثبات نمی‌شویم، و تنها به تعیین خطوط اصلی آن می‌پردازیم، و به برخی از دشواریها اشاره می‌کنیم.

نخست، دیده می‌شود که کافی است مسئله‌ای را در نظر بگیریم که در آن نقطه اولیه (x_0, y_0) مبدأ باشد، یعنی مسئله

$$(2\text{الف}) \quad y' = f(x, y)$$

$$(2\text{ب}) \quad y(x_0) = y_0$$

را. اگر نقطه اولیه دیگری داده شده باشد، همواره می‌توان متغیرها را با تبدیلی که متناظر به انتقال دستگاه مختصات است تعویض کرد و نقطه داده شده (x_0, y_0) را مبدأ گرفت. بدیان دیگر، تابع و متغیر جدید w و s را به ترتیب با معادلات زیر تعریف می‌کنیم

$$(3) \quad w = y - y_0, \quad s = x - x_0$$

چون w را به عنوان تابعی از s بگیریم، بنا بر قاعدة زنجیری خواهیم داشت

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(y - y_0) \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx}$$

اگر (x_0, y_0) را با $F(s, w)$ نشان دهیم، مسئله مقدار اولیه (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$(4\text{الف}) \quad w'(s) = F(s, w(s))$$

$$(4\text{ب}) \quad w(s_0) = y_0$$

معادلات (۴) همان معادلات (۲) می‌باشند، تنها نام متغیرها عوض شده است. از این به بعد به جای مسئله اصلی (۱) مسئله (۲) را که اندکی ساده‌تر است در نظر می‌گیریم.

اکنون می‌توان قضیه وجود و یکتاپی را به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۴.۲. اگر $\frac{\partial f}{\partial y}$ د دسته باشد، آنگاه فاصله $a \leq |x| \leq R$ پیوسته باشد، $|y| \leq h$ می‌توان طوری تعیین کرد که در آن مسئله مقدار اولیه (۲)

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

دادای جواب یکتاپی $y = \phi(x)$ باشد.

برای اثبات قضیه لازم است که مسئله مقدار اولیه (۲) را به صورت مناسبتری درآوریم. اگر موقتاً فرض کنیم که تابعی مانند $\phi(x) = y$ وجود دارد که در مسئله مقدار اولیه صدق می‌کند، آنگاه $[x, \phi(x)]_f$ فقط تابعی از x و پیوسته می‌باشد. بنابراین می‌توان از معادله (۲) از نظر اولیه $h = x$ تامقدار دلخواه x انتگرال گرفت؛ و به دست آورد

$$\phi(x) = \int_0^x f(t, \phi(t)) dt \quad (5)$$

که در آن از شرط اولیه $y(0) = \phi(0)$ استفاده شده است.

چون معادله (۵) شامل انتگرال تابع مجهول ϕ است آن را معادله انتگرالی می‌نامند. این معادله انتگرالی فرمول جواب مسئله مقدار اولیه نیست، اما معرف رابطه دیگری است که هر جواب معادلات (۲) در آن صدق می‌کند. بر عکس، فرض کنیم که یک تابع پیوسته $\phi(x) = y$ وجود دارد که در معادله انتگرالی (۵) صدق می‌کند، این تابع در مسئله مقدار اولیه (۲) نیز صدق می‌کند. برای اثبات این مطلب نخست در معادله (۵) به جای x صفر می‌گذاریم، بدینسان معادله (۲) به دست می‌آید. علاوه بر این، چون تابعی که در معادله (۵) زیر علامت انتگرال قرار دارد پیوسته است، از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌شود که $[x, \phi(x)]_f = (\phi'(x))^f$. بنابراین مسئله مقدار اولیه و معادله انتگرالی هم ارزند، بدین معنی که هر جواب یکی از آنها جواب دیگری نیز می‌باشد. آسانتر است ثابت کنیم که این معادله انتگرالی در یک فاصله $h \leq |x|$ دارای جوابی یکتاپی است. آنگاه همین نتیجه درباره مسئله مقدار اولیه نیز برقرار خواهد بود.

یکی از روشهای اثبات اینکه معادله انتگرالی (۵) دارای جواب یکتاپی است، به دوش تقریبات متوالی یا دوش تکرار پیکار (۱۸۵۶-۱۹۴۱) موسوم است. در این روش نخست یک تابع ϕ به طور دلخواه با تقریبی از جواب مسئله مقدار اولیه انتخاب می‌کنیم. ساده‌ترین انتخاب عبارت است از

$$\phi_0(x) = 0 \quad (6)$$

آنگاه ϕ حداقل در شرط اولیه (۲) صدق می‌کند، هر چند ممکن است که در معادله دیفرانسیل (۲) اولیه صدق نکند. تقریب بعدی که آن را ϕ_1 می‌نامیم از گذاشتن $(t)\phi_0$ به جای $(t)\phi$ در طرف دوم معادله (۵) بدست می‌آید. بدینسان

$$\phi_1(x) = \int_0^x f(t, \phi_0(t)) dt \quad (7)$$

به همین طریق ϕ_2 را از ϕ_1 به دست می آوریم

$$\phi_2(x) = \int_0^x f[t, \phi_1(t)] dt \quad (8)$$

و به طور کلی

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)] dt \quad (9)$$

بدینسان دنباله توابع

$$\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots$$

به وجود می آید. هر جمله این دنباله در شرط اولیه (۲ ب) صدق می کند، اما عموماً هیچ یک از آنها در معادله دیفرانسیل صادق نیست. اما، اگر در مرحله‌ای مثلًا به ازای $k=n$ داشته باشیم $\phi_k(x) = \phi_{k+1}(x)$ ، آنگاه ϕ جواب معادله انتگرالی (۵) خواهد بود. بنابراین ϕ جواب مسئله مقدار اولیه (۲) نیز می باشد، و دنباله در این نقطه متوقف می شود. عموماً، این حالت پیش نخواهد آمد، و لازم است که یک دنباله نامتناهی به طور کامل، در نظر گرفته شود.

برای اثبات قضیه ۴.۲ باید به چهار سؤال اصلی پاسخ گفت:

۱. آیا همه جمله‌های دنباله $\{\phi_n\}$ وجود دارند، یا آنکه ممکن است جریان در مرحله‌ای مختل شود؟
۲. آیا این دنباله همگراست؟
۳. خواص تابع حدی چیست، به ویژه، آیا در معادله انتگرالی (۵) و در نتیجه در مسئله مقدار اولیه (۲) صدق می کند؟
۴. آیا این تنها جواب است یا آنکه جوابهای دیگری نیز وجود دارد؟

نخست با مثال نسبتاً ساده‌ای نشان می دهیم که چگونه می توان به این پرسشها پاسخ گفت، و سپس به شرح برخی از دشواریها که در حالت کلی پیش می آید می پردازیم.

مثال. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0 \quad (10)$$

برای حل این مسئله بدروش تقریبات متوالی، نخست توجه می کنیم که اگر $y(x) = \phi(x)$ ، آنگاه معادله انتگرالی متناظر چنین است

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1+\phi(t)] dt \quad (11)$$

اگر تقریب اولیه را $y(0) = \phi_0(x)$ انتخاب کنیم، نتیجه می شود که

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_0(t)] dt = \int_0^x 2t dt = x^2 \quad (12)$$

به همین طریق

$$\phi_2(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_1(t)] dt = \int_0^x 2t[1 + t^2] dt = x^2 + \frac{x^4}{2} \quad (13)$$

و

$$\phi_n(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_{n-1}(t)] dt = \int_0^x 2t\left[1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right] dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3} \quad (14)$$

معادلات (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) دال براین است که بهازای هر $n \geq 1$

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \quad (15)$$

و این نتیجه را می‌توان با استغای ریاضی اثبات کرد. روشن است که رابطه (۱۵) بهازای $n=k$ برقرار است، و باید نشان دهیم که اگر رابطه بهازای $n=k+1$ برقرار باشد، بهازای $n=k+1$ نیز برقرار است. داریم

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_k(t)] dt \\ &= \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots + \frac{t^{2k}}{k!}\right) dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} \end{aligned} \quad (16)$$

و بدین وسیله اثبات کامل می‌شود.

از رابطه (۱۵) دیده می‌شود که $\phi_n(x)$ عبارت است از n امین حاصل جمع جزئی سری نامتناهی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \quad (17)$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ وجود داشته باشد این است که سری (۱۷) همگرا باشد. با استفاده از آزمون نسبت دیده می‌شود که بهازای هر x

$$\left| \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} \frac{k!}{x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{k+1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (18)$$

بنا بر این سری (۱۷) به ازای همه مقادیر x همگراست، و مجموع آن $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ دنباله $\{\phi(x)\}$ می باشد. علاوه بر این چون سری (۱۷) یک سری تیلر است، می توان از آن جمله به جمله مشتق و انتگرال گرفت به شرط آنکه x در فاصله همگرایی، که در اینجا همه محور x است، باقی بماند. بنا بر این با محاسبه مستقیم می توان تحقیق کرد که $\phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kx^{2k-1}}{k!}$ یک جواب معادله انتگرالی (۱۱) است. همچنین می توان با گذاشتن $\phi(x)$ به جای x در معادله (۱۵) تحقیق کرد که این تابع در مسئله مقدار اولیه نیز صدق می کند.

بالاخره، برای بررسی یکتاوی جواب، فرض کنیم که مسئله مقدار اولیه دارای یک جواب دیگر ψ نباشد. این فرض چنان که نشان خواهیم داد به تناقض می انجامد. چون ϕ و ψ هردو در معادله انتگرالی (۱۱) صدق می کنند، داریم

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x [\phi(t) - \psi(t)] dt$$

چون از هر دو طرف قدر مطلق بگیریم، به ازای $x > 0$ خواهیم داشت

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

اگر برای x فاصله $A/2 \leq x \leq A$ را که در آن A ثابت دلخواه است در نظر بگیریم، آنگاه $2t \leq A$ و

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad (19)$$

در اینجا مناسب است که تابع U را به صورت زیر تعریف کنیم

$$U(x) = \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad (20)$$

بلافاصله نتیجه می شود که

$$U(0) = 0 \quad (21)$$

$$U(x) \geq 0, \quad x \geq 0 \quad (22)$$

علاوه بر این، U مشتق پذیر است و داریم $|U'(x)| = |\phi(x) - \psi(x)|$. بنا بر این با توجه به رابطه (۱۹)،

$$U'(x) - AU(x) \leq 0 \quad (23)$$

۱. در این حالت می توان ϕ را بر حسب توابع مقدماتی به صورت $\phi(x) = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ نوشت. اما، این نکته هیچ ارتباطی با بحث وجود و یکتاوی ندارد.

چون رابطه (۲۳) را در مقدار مثبت e^{-x} ضرب کنیم، بدست می‌آید

$$[e^{-x} U(x)]' \leqslant 0 \quad (24)$$

آنگاه، با انتگرال گیری از معادله (۲۴) از صفر تا x و با استفاده از معادله (۲۱) خواهیم داشت

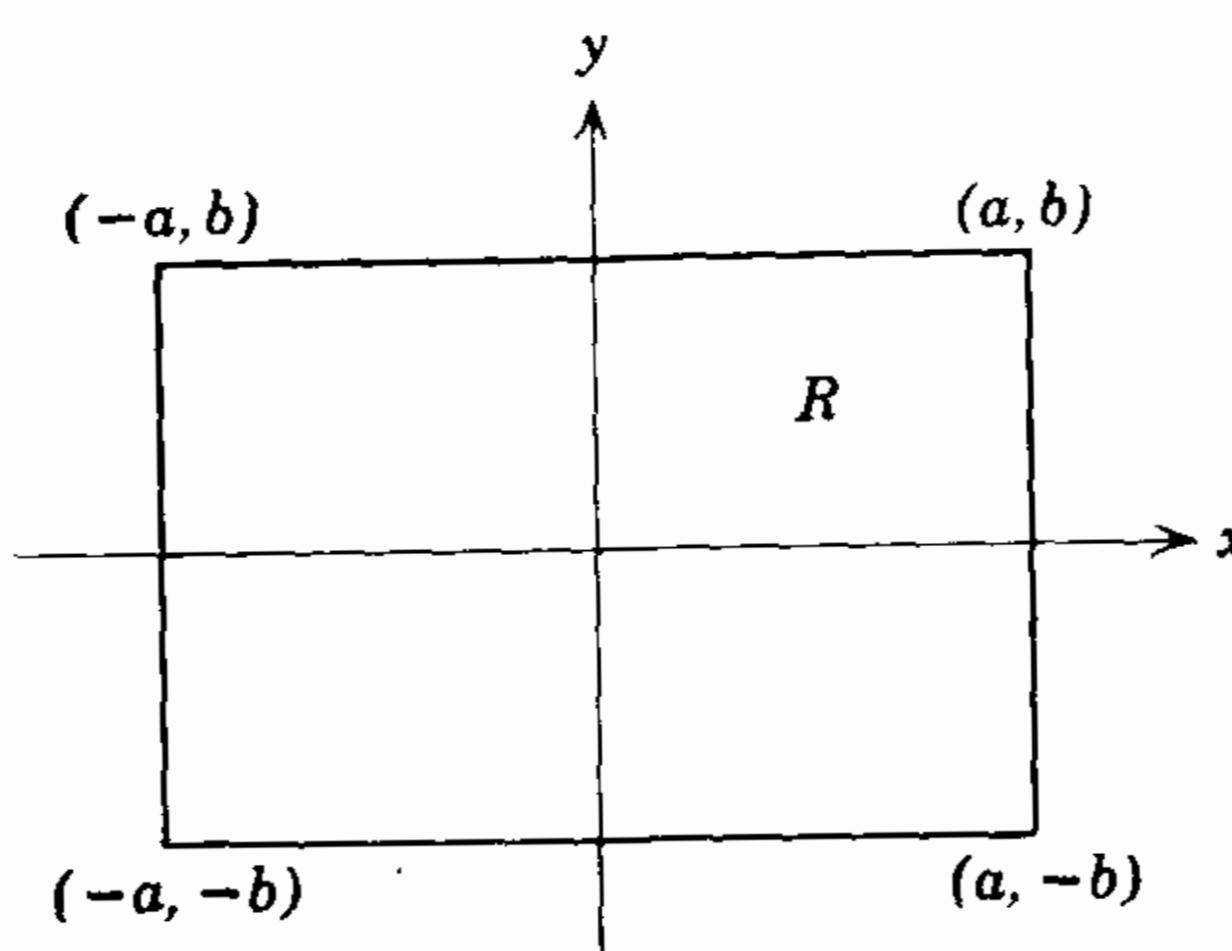
$$e^{-x} U(x) \leqslant 0, \quad x \geqslant 0$$

بنا بر این به ازای $x \geqslant 0$ داریم $U(x) \leqslant e^x$ و با در نظر گرفتن رابطه (۲۲) به ازای هر $x \geqslant 0$ نتیجه می‌شود که $U(x) = \phi(x)$. بدینسان $U'(x) = \phi'(x)$ ، و بنا بر این $\phi'(x) \equiv \phi(x)$ ، که متناقض با فرض اصلی است. در نتیجه، به ازای $x \geqslant 0$ مسئله مقدار اولیه نمی‌تواند دارای دو جواب متمایز باشد. با اندک تغییری در این استدلال می‌توان همین نتیجه را در مورد $x \leqslant 0$ بدست آورد.

اکنون بدمسئله کلی حل معادله انتگرالی (۵) بر می‌گردیم و هر یک از سوالاتی را که در پیش مطرح شد به اختصار بررسی می‌کنیم.

۱. آیا همه جمله‌های دنباله $\{\phi_n\}$ وجود دارند؟ درمثال بالا f و $y/\partial f/\partial y$ در تمام صفحه \mathbb{R}^2 پیوسته بودند، و هر جمله دنباله صریحاً قابل محاسبه بود. اما، در حالت کلی f و $y/\partial f/\partial y$ فقط در یک مستطیل $R: |x| \leqslant a, |y| \leqslant b$ (شکل ۱۰.۲ را بینید) پیوسته فرض می‌شوند. علاوه بر این، جمله‌های دنباله را معمولاً نمی‌توان به طور صریح معین کرد. این خطر وجود دارد که در مرحله‌ای مثلاً به ازای $k=1$ ، نمودار (x, ϕ_k) شامل نقاطی واقع در خارج مستطیل R باشد. بنا بر این در مرحله بعد، یعنی در محاسبه (x, ϕ_{k+1}) ، لازم می‌آید که (x, ϕ_k) را در نقاطی که معلوم نیست در آنها پیوسته و یا حتی وجود داشته باشد محاسبه کرد. بدینسان امکان دارد که محاسبه (x, ϕ_k) غیرممکن باشد.

ممکن است برای اجتناب از این خطر لازم آید که x را در فاصله کوچکتری از $|x| \leqslant a$ محدود کنیم. برای تعیین چنین فاصله‌ای از این مطلب که هرتابع پیوسته روی یک ناحیه بسته، کراندار است استفاده می‌کنیم. بنا بر این R روی R کراندار است و می‌توان



شکل ۱۰.۲

عدد مثبت M را طوری تعیین کرد که

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (x, y) \in R \quad (25)$$

قبلای بیان شد که به ازای هر n داریم

$$\phi_n(0) = 0$$

چون $[f(x, \phi_k(x))] \leq M$ برای k ماکزیمم قدر مطلق شیب نمودار $y = \phi_{k+1}(x)$ برابر است، از آنجاکه نمودار مزبور شامل نقطه $(0, 0)$ است، باشد نمودار در ناحیه سایه زده شده شکل ۱۱.۲ واقع باشد. بنا بر این حداقل مادامی که شامل ناحیه سایه زده شده باشد که برای آن $|x| \leq b/M$ است، نقطه $[x, \phi_{k+1}(x)]$ در R باقی می‌ماند. از اینجا به بعد فقط مستطیل $b \leq |x| \leq h, |y| \leq b$ را در نظر می‌گیریم، که در آن h یکی از دو مقدار a و b/M را که کوچکتر است نشان می‌دهد. با این تحدید همه جمله‌های دنباله $\{\phi_n(x)\}$ وجود خواهد داشت. توجه شود که اگر $b/M < a$ آنگاه می‌توان با تعیین کران دقیق‌تری برای $|f(x, y)|$ مقدار بزرگتری برای h به دست آورد، البته در صورتی که M از پیش برای مقدار ماکزیمم $|f(x, y)|$ اختیار نشده باشد.

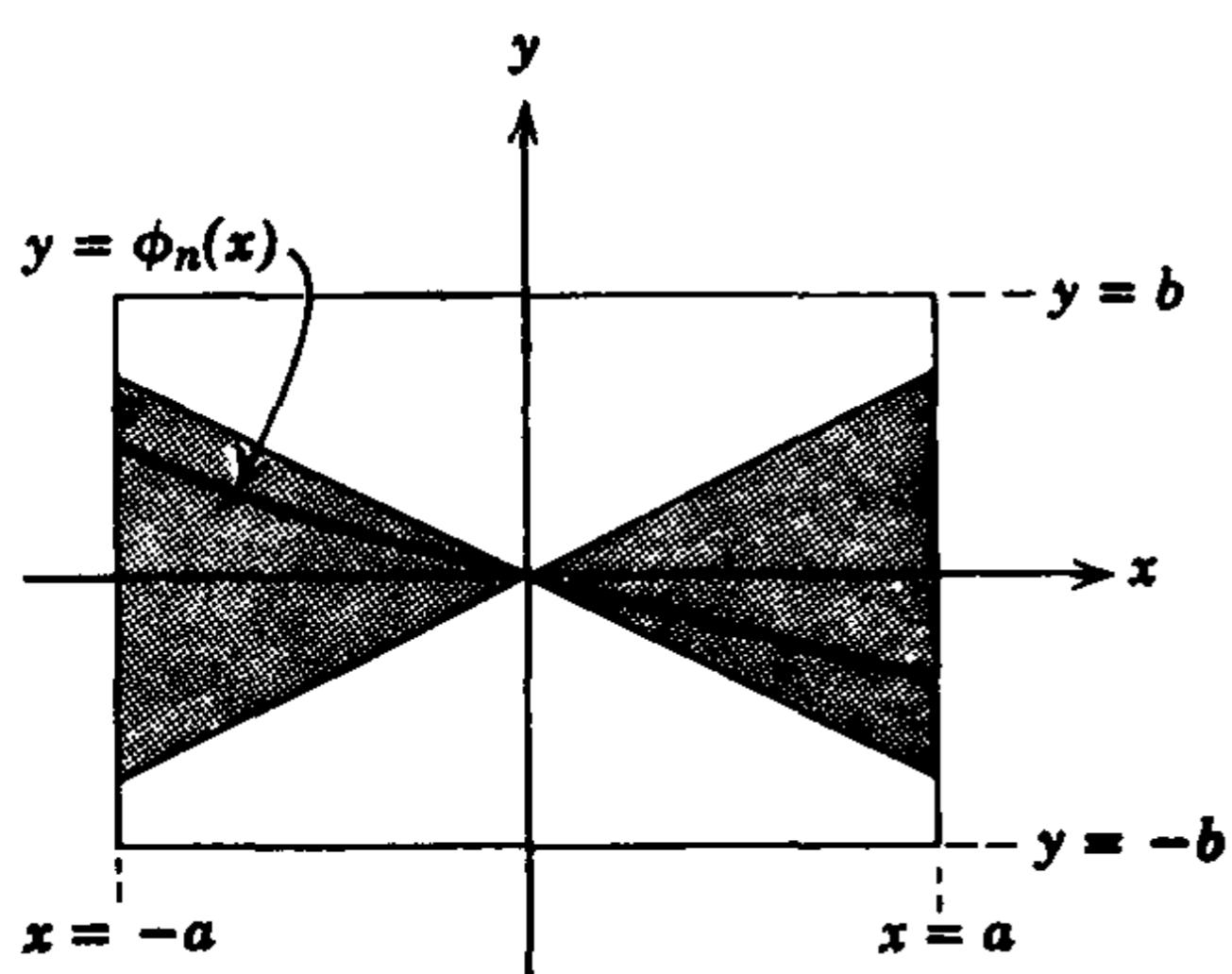
۲. آیا دنباله $\{\phi_n(x)\}$ همگراست؟ همان‌گونه که در مثال داشتیم می‌توان

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + [\phi_1(x) - \phi_0(x)] + \dots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$$

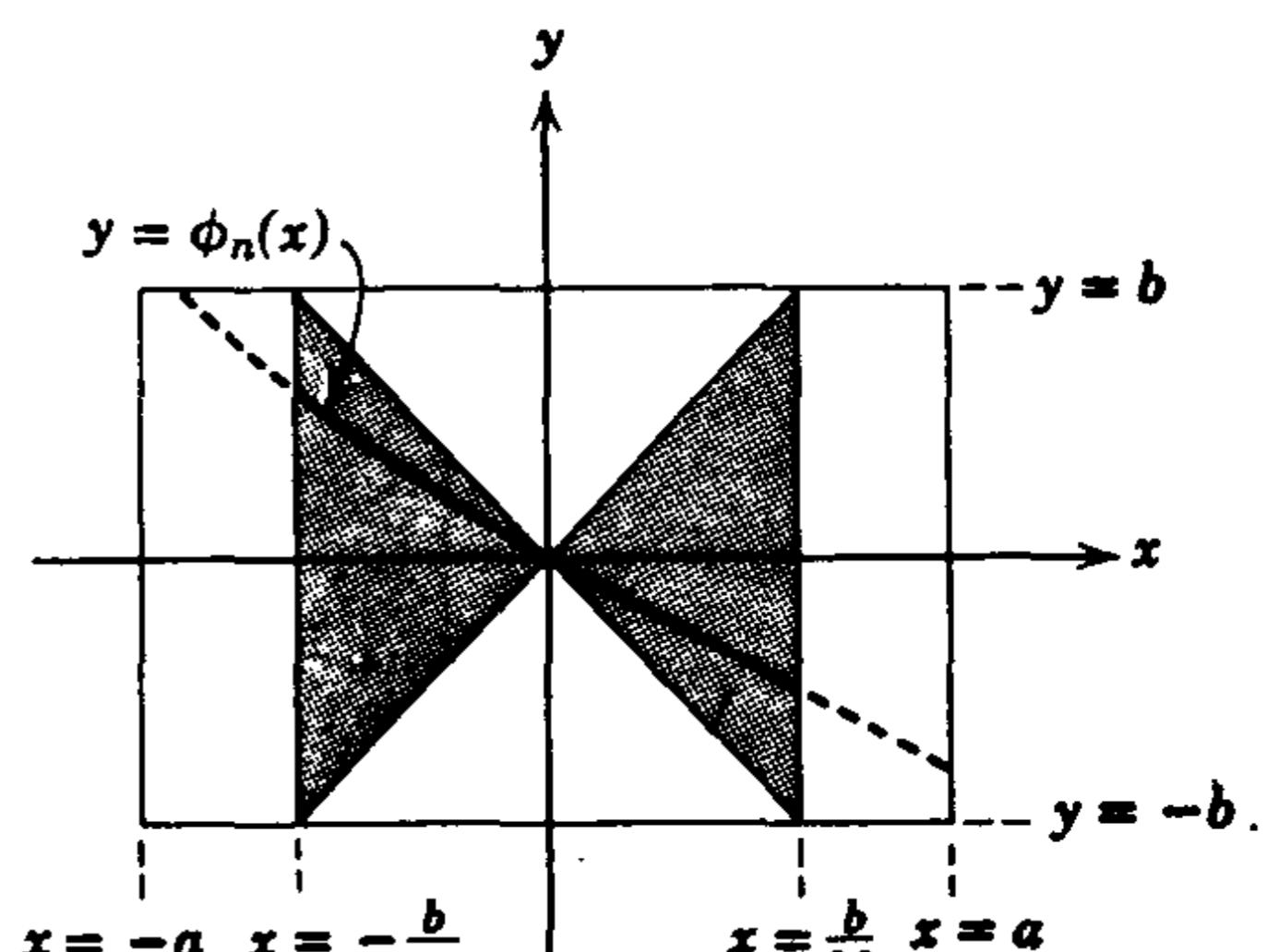
را به عنوان n امین حاصل جمع جزئی سری

$$\phi_0(x) + \sum_{k=1}^n [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)]. \quad (26)$$

در نظر گرفت. برای اثبات همگرای دنباله $\{\phi_n(x)\}$ کافی است نشان دهیم که سری (26)



(ب) $b/M > a$.



(الف) $b/M < a$.

همگر است. برای این کار لازم است که مقدار جمله عمومی $|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)|$ را برآورد کنیم. طرز عمل را در مسائل ۳ تا ۶ نشان داده ایم و در اینجا از آن صرف نظر می کنیم. بافرض آنکه دنباله همگرا باشد، تابع حدی را با ϕ نشان می دهیم، و بدینسان

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \quad (27)$$

۳. خواص تابع حدی ϕ چیست؟ نخست باید دانست که ϕ پیوسته است. این نتیجه لزوماً از همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ باوجود آنکه هر جمله آن تابع پیوسته‌ای است حاصل نمی شود. در فصل ۱۵ به برخی از مسائل بر می خوریم که در آنها دنباله‌ای از توابع پیوسته به یک تابع حدی ناپیوسته می گراید. مثال ساده‌ای از این پدیده را در مسئله ۱ آورده ایم. یک راه برای نشان دادن پیوستگی ϕ آن است که نه تنها همگرایی دنباله $\{\phi_n\}$ را اثبات کنیم بلکه نشان دهیم که همگرایی بدطرز خاصی که به همگرایی یکنواخت موسوم است انجام می گیرد. در اینجا بداین موضوع نمی پردازیم و فقط متذکرمی شویم که همان استدلال قسمت ۲ برای اثبات همگرایی یکنواخت دنباله $\{\phi_n\}$ و در نتیجه پیوستگی تابع حدی ϕ در فاصله $h \leq |x|$ کافی است.

اکنون بر می گردیم به رابطه (۹)،

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)] dt$$

اگر n به ∞ بگراید، خواهیم داشت

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f[t, \phi_n(t)] dt. \quad (28)$$

اگر بتوانیم در طرف دوم رابطه (۲۸) ترتیب اعمال انتگرال گیری و حد گیری را تعویض کنیم، به دست می آید

$$\phi(x) = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} f[t, \phi_n(t)] dt \quad (29)$$

در حالت کلی این تعویض مجاز نیست (برای مثال، مسئله ۲ را بینید)، اما چون دنباله $\{\phi_n(x)\}$ نه تنها همگراست بلکه همگرایی یکنواخت است بنا بر این می توان عمل حد گیری را بسیار داخل علامت انتگرال برد. اکنون می خواهیم حد را بسیار داخل تابع f بیریم تا به دست آید

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)] dt \quad (30)$$

و از آنجا

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)] dt \quad (31)$$

گزاره $\lim_{n \rightarrow \infty} f[t, \phi_n(t)] = f[t, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)]$ با گزاره $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ نسبت به متغیر دوم پیوسته است هم ارز می باشد، و این گزاره بنا بر فرض راست است. بنا بر این رابطه (۳۱) برقرار است و تابع ϕ در معادله انتگرالی (۵) صدق می کند. از این رو ϕ جواب مسئله مقدار اولیه (۲) نیز می باشد.

۴. آیا معادله انتگرالی (۵) علاوه بر $\phi = y$ دارای جوابهای دیگر نیز هست؟ برای اثبات یکتاپی جواب $\phi = y$ می توان به همان نحو که در مثال بیان شد عمل کرد. نخست فرض می کنیم که یک جواب دیگر ψ وجود داشته باشد. آنگاه می توان نشان داد (مسئله ۷ را بینید) که تفاضل $\phi - \psi$ به ازای $h \leq x \leq 0$ در نامساوی

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad (32)$$

صدق می کند، که در آن A عدد مثبت مناسبی است. از اینجا به بعد استدلال با آنچه در مثال آمد یکسان است، و به این نتیجه می رسیم که برای مسئله مقدار اولیه (۲) جواب دیگری به جز جوابی که بdroosh تقریبات متوالی بدست آمد وجود ندارد.

مسائل

۱. فرض کنیم $\phi_n(x) = x^n$ به ازای $0 \leq x \leq 1$ ، نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

این مثال نشان می دهد که ممکن است حد دنباله ای از توابع پیوسته تابعی ناپیوسته باشد.

۲. دنباله $\phi_n(x) = 2nx e^{-nx^2}$ به ازای $0 \leq x \leq 1$ را در نظر می گیریم.

(الف) نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = 0$ و از آنجا

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx = 0$$

$$(ب) \text{ نشان دهید که } \int_0^1 2nx e^{-nx^2} dx = 1 - e^{-1} \text{ و از آنجا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_n(x) dx = 1$$

این مثال میان آن است که حتی اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ وجود داشته و پیوسته باشد لزومی ندارد که تساوی زیر برقرار باشد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) dx$$

در مسائل ۳ تا ۶ طرز اثبات همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ را که باروابط عناوین تعریف شد بیان می‌کنیم.

۳. اگر $y/\partial f/\partial y$ در مستطیل D پیوسته باشد، نشان دهید که عدد ثابت مثبت K را می‌توان طوری تعیین کرد که

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

که در آن (x, y_1) و (x, y_2) دو نقطه دلخواه D با طول برابر x می‌باشند.
اهمایی: x را ثابت بگیرید و از قضیه مقدار متوسط درباره f به عنوان تابعی از y تنها استفاده کنید. K را برابر مقدار ماکزیمم $|\partial f/\partial y|$ در D اختیار کنید.

۴. اگر $\phi_n(x)$ و $\phi_{n-1}(x)$ دو جمله از دنباله $\{\phi_n(x)\}$ باشند، با استفاده از نتیجه مسئله ۳ نشان دهید که

$$|f[x, \phi_n(x)] - f[x, \phi_{n-1}(x)]| \leq K |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|$$

۵. (الف) نشان دهید که اگر $|x| \leq h$ ، آنگاه

$$|\phi_1(x)| \leq M|x|$$

که در آن M طوری انتخاب شده است که برای هر (x, y) در D داشته باشیم $|f(x, y)| \leq M$.

(ب) با استفاده از نتایج مسئله ۴ و قسمت (الف) مسئله ۵ نشان دهید که

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \frac{MK|x|^2}{2}$$

(ج) با استفاده از نتایج مسئله ۴ و قسمت (الف) مسئله ۵ نشان دهید که

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}|x|^n}{n!} \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}$$

۶. با توجه به

$$\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \dots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$$

(الف) نشان دهید که

$$|\phi_n(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x) - \phi_1(x)| + \dots + |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|$$

(ب) با استفاده از نتایج مسئله ۵ نشان دهید که

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{M}{K} \left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \dots + \frac{(Kh)^n}{n!} \right]$$

(ج) نشان دهید که حاصل جمع قسمت (ب) هنگامی که $\rightarrow \infty$ همگر است، و از آنجا نشان دهید که حاصل جمع قسمت (الف) نیز هنگامی که $\rightarrow \infty$ همگر است. بدینسان همگرایی دنباله $\{\phi_n(x)\}$ را که دنباله حاصل جمعهای جزئی یک سری نامتناهی همگر است نتیجه بگیرید.

۷. در این مسئله به موضوع یکتا بی جواب معادله انتگرالی (۵)،

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)] dt$$

می پردازیم.

(الف) فرض کنیم که ϕ و ψ دو جواب معادله (۵) باشد. نشان دهید که

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x \{f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]\} dt$$

(ب) نشان دهید که

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]| dt$$

(ج) با استفاده از نتیجه مسئله ۳ نشان دهید که

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq K \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

که در آن K یک کران بالای $|\partial f / \partial y|$ در D است. این همان رابطه (۳۲) است، و بقیه اثبات را می توان به همان گونه که در متن اشاره شد تکمیل کرد.

ضمیمه

تعیین معادله حرکت یک جسم با جرم متغیر. برای بدست آوردن معادله (۱۹) بند ۱۰.۲، می توان به روش زیر عمل کرد. فرض کنیم که جرم کل دستگاه مشکل از سفینه، سوخت و گاز خروجی همواره برابر مقدار ثابت m_0 باشد، در این صورت داریم

$$m(t) + m_e(t) = m_0 \quad (1)$$

که در آن $m(t)$ و $m_e(t)$ بدتریب عبارتند از جرم سفینه (با احتساب سوخت) و جرم گازهای خروجی. با بدکار بردن قانون نیوتون درباره کل دستگاه، خواهیم داشت

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{dP_r}{dt} + \frac{dP_e}{dt} \quad (2)$$

که در آن $P_e(t)$ و $P_c(t)$ به ترتیب اندازه خطی حرکت سفینه، گازهای خروجی و کل دستگاه می‌باشند. در این بحث فرض می‌کنیم که تنها نیروی خارجی مؤثر بر کل دستگاه، نیروی ثقل است. چون از نیروهای مقاومت و تغییرات میدان جاذبه صرف نظر کنیم، نتیجه می‌شود که

$$F = -m_0 g \quad (۳)$$

اگر $v(t)$ نمایشگر سرعت سفینه در زمان t باشد، آنگاه $P_e(t) = m(t)v(t)$ و

$$\frac{dP_e}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} \quad (۴)$$

از طرف دیگر، محاسبه اندازه حرکت گازهای خروجی یعنی P_e پیچیده‌تر است، زیرا قسمتهای مختلف گازهای خروجی دارای سرعتهای متفاوتی می‌باشند. فرض کنیم که گاز به طور پیوسته با سرعت u نسبت به سفینه پیرون رانده می‌شود، و گیریم $\Delta m_e(\tau)$ نمایشگر جرم گاز خروجی در مدت زمان کوتاه $(\tau, \tau + d\tau)$ باشد. سرعت اولیه این عنصر جرم تقریباً برابر $u + v(\tau)$ است. معادله حرکت عنصر جرم $\Delta m_e(\tau)$ با فرض آنکه از هنگام خروج به بعد تنها تحت تأثیر نیروی ثقل می‌باشد عبارت است از

$$\Delta m_e \frac{dr_e}{dt} = -g \Delta m_e$$

که در آن $v_e(t, \tau)$ سرعت عنصر گازی را که در لحظه τ ایجاد شده است، در زمان t نشان می‌دهد. بنابراین

$$v_e(t, \tau) = -gt + c(\tau)$$

مقدار $c(\tau)$ از این شرط که در زمان $\tau = t$ سرعت v_e برابر $v(\tau)$ است تعیین می‌شود. از آنجا

$$c(\tau) = v(\tau) + u + g\tau$$

و

$$v_e(t, \tau) = -(t - \tau)g + v(\tau) + u$$

بدینسان اندازه حرکت عنصر جرم $\Delta m_e(\tau)$ برابر است با $v_e(t, \tau)\Delta m_e(\tau)$ و $P_e(t)$ اندازه حرکت کل مربوط به تمام گاز خروجی با انتگرال زیر داده می‌شود

$$P_e(t) = \int v_e(t, \tau) dm_e$$

اگر عمل خروج از زمان $t = 0$ آغاز شده، و تا زمان حاضر t ادامه یافته باشد، آنگاه $P_e(t)$ را می‌توان با یک انتگرال زمانی روی فاصله $(t, 0)$ نیز نمایش داد. بدینسان

$$P_e(t) = \int_0^t v_e(t, \tau) \frac{dm_e}{d\tau}(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t [-(t-\tau)g + v(\tau) + u] \frac{dm_e}{d\tau}(\tau) d\tau$$

و چون با توجه به معادله (۱) داریم $dm_e/dt = -dm/dt$ از آنجا

$$P_e(t) = \int_0^t [(t-\tau)g - v(\tau) - u] \frac{dm}{d\tau}(\tau) d\tau \quad (5)$$

برای محاسبه dP_e/dt باید از انتگرال (۵) مشتق گرفت. با توجه به این که پارامتر t هم در حد بالایی وهم در زیر علامت انتگرال موجود است، dP_e/dt مساوی است با

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{dt}(t) &= g \int_0^t \frac{dm}{d\tau}(\tau) d\tau - [v(t) + u] \frac{dm}{dt}(t) \\ &= g[m(t) - m(0)] - [v(t) + u] \frac{dm}{dt}(t) \\ &= g[m(t) - m_0] - [v(t) + u] \frac{dm}{dt}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

در آخرین مرحله از این نکته که جرم اولیه سفینه شامل جرم کل دستگاه می‌باشد استفاده شده است.

معادله حرکت سفینه فضایی با جرم متغیر از گذاشتن عبارتهای (۳)، (۴) و (۶) به ترتیب به جای F ، dP_e/dt و dP_r/dt در معادله (۲) جایگزین می‌آید. نتیجه پس از ساده کردن عبارت است از:

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \quad (7)$$

مراجع

برای بحث کاملتری در باره اثبات قضیه وجود و یکتاپی می‌توانید به کتابهای پیشنهاده شده در اینجا مراجعه کنید. دو کتاب زیر برای خوانندۀ مبتدی قابل استفاده هستند.

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Brauer, F. and Nohel, J., *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Benjamin, New York, 1973.

کتاب زیر شامل فهرست مفیدی از معادلات دیفرانسیل و جوابهای آنها است:

Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea, New York, 1948.

متن کتاب آلمانی است، اما برای مراجعه به فهرست مسائل حل شده اطلاع بسیار اندکی از زبان آلمانی کافی است.

۳

معادلات خطی مرتبه دوم

۱.۰۳ مقدمه

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به طور کلی به صورت زیر است

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

نظریه مربوط به این معادلات بسیار پیچیده است. بنابراین در آغاز معادلاتی را مورد توجه قرار می‌دهیم که بتوان آنها را نسبت به "ز حل کرد، و به صورت زیر نوشت

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

چنان که دیدیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ دارای جوابی است که در آن یک ثابت ذلخواه وجود دارد. چون معادله دیفرانسیل مرتبه دوم متضمن مشتق دوم است. بنابراین، به بیان اجمالی، تعیین جواب آن مستلزم دوانتگرال‌گیری است، طبعاً می‌توان انتظار داشت که برای معادله (۲) جوابهایی حاوی دو ثابت ذلخواه به دست آید. به عنوان مثال، جواب معادله

$$y'' = g(x) \quad (3)$$

عبارة است از

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x + \int \left[\int g(s) ds \right] dt \quad (4)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های ذلخواهی می‌باشند. در مورد معادله مرتبه اول برای تعیین یک

نم انتگرال یکتا کافی بود مقدار جواب را دریک نقطه مشخص کنیم. چون امکان دارد که جواب معادله مرتبه دوم حاوی دو ثابت دلخواه باشد، بنا براین برای تعیین یک جواب یکتا لازم است دو شرط، مثلاً y_1 و y_2 مقدار جواب و مشتق آن در نقطه x_0 مشخص شود. این شرایط را شرایط اولیه می‌نامند. بدینسان برای آنکه یک نم انتگرال معادله مرتبه دوم به طور یکتا معین گردد، نه تنها باید نقطه‌ای را که از آن می‌گذرد مشخص کرد بلکه باید شبیه نم را نیز در نقطه مزبور تعیین نمود.

برای آنکه نسبت به وجود جواب معادله (۲) با شرایط اولیه مفروض اطمینان حاصل شود، لازم است فرض کنیم که تابع y واجد چند خاصیت است. این نکته در قضیه وجود و یکتا بیان شده است.

قضیه ۱۰۳. اگر توابع y_1, y_2 در دیک ناحیه باز R از فضای سه بعدی \mathbb{R}^3 پیوسته باشند، و اگر نقطه (x_0, y_0) به R متعلق باشد، آنگاه در یک فاصله حول x_0 برای معادله دیفرانسیل (۲)،

$$y'' = f(x, y, y')$$

جواب یکتا $\phi(x) = y$ وجود دادکه در شرایط اولیه مفروض

$$(5) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

صدق می‌کند.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه مرتبه اول است که در بند ۱۱.۲ آمد. برای اثبات معمولاً مناسبتر است که به جای معادله مرتبه دوم یک دستگاه متشکل از دو معادله مرتبه اول هم ارز پیا آن را بگذاریم (فصل ۷ را بینید). این قضیه در بسیاری از کتابهای پیشرفته‌تر، مانند کادیگتون (فصل ۶) یا اینس (فصل ۳) اثبات شده است.

گرچه وجود جواب معادله (۲) تحت شرایط قضیه ۱۰۳ تضمین شده است، اما امکان دارد که نتوان عبارت تحلیلی مناسبی برای جواب به دست آورد، مگر آنکه تابع y به قدر کافی ساده باشد. درست مانند معادلات مرتبه اول برای معادلات مرتبه دوم نیز دو حالت خطی و غیرخطی در نظر می‌گیریم. حدوت‌کلی معادله خطی مرتبه دوم چنین است

$$(6) \quad P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

که در آن P, Q, R و G توابع معلومی هستند.

مثال ساده و مهمی از معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، معادله حرکت جرمی است که به فنری بسته شده باشد.

$$(7) \quad m \frac{d^2u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t),$$

که در آن m, c و k مقادیر ثابت و F تابع مفروضی است. این معادله را در بند ۷.۳

به دست می آوریم، مثالهای دیگر عبارتند از معادله لزاندر^۱ از رتبه α ،

$$(8) \quad 0 = y(1 + \alpha x^{\alpha} y' - x^{\alpha} y'')$$

و معادله بسل^۲ از رتبه α ،

$$(9) \quad x^{\alpha} y'' + (x^{\alpha} - x^{\alpha}) y' + (x^{\alpha} - x^{\alpha}) y = 0$$

که در آنها α و α مقادیر ثابت، و اغلب اعداد صحیح می باشند. معادله بسل در بسیاری از مسائل فیزیکی گوناگون، به ویژه در مسائلی که متضمن هندسه دایره‌ای است، از قبیل تعیین توزیع حرارت در سک صفحه مدور، ظاهر می شود. معادله لزاندر غالباً در مسائل فیزیکی متضمن هندسه کروی پدید می آید.

اگر معادله (۲) به صورت (۶) نباشد، آن را غیرخطی می نامند. گرچه نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی نسبتاً دشوار است، اما در دو حالت خاص می توان معادله غیرخطی مرتبه دوم کلی (۲) را ساده کرد. این هنگامی است که $(y, y', x) f$ فاقد متغیر x یا متغیر y باشد، یعنی وقتی که معادله (۲) به صورت

$$(10) \quad y'' = f(x, y')$$

با

$$(11) \quad y'' = f(y)$$

باشد. در این حالتها همواره می توان معادله (۱۱) یا معادله (۱۰) را با $y' = v$ به معادله مرتبه اول تبدیل کرد. چون معادله مرتبه اول حاصل از نوعی است که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت، می توان با حل آن v را پیدا کرد، و با یک انتگرال گیری دیگر جواب معادله دیفرانسیل اصلی را به دست آورد. این مطلب در مسائل ۱، ۲ و ۳ در پایان همین بند مورد بحث قرار گرفته است.

بقیه این فصل و فصل بعد به بیان روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم اختصاص دارد. گرچه برای حل معادله (۶) فرمول خاصی نظیر آنچه که در حالت معادله خطی مرتبه اول داشتیم در دست نیست، اما درباره آن نظریه ریاضی جامعی وجود دارد. در بحث زیر به جز مواردی که تصریح خواهد شد، فرض می کنیم که در معادله (۶) توابع P ، Q و R روی یک فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته‌اند (در برخی از مسائل فاصله مزبور

۱. آ. م. لزاندر (A. M. Legendre)، (۱۷۵۲ – ۱۸۳۳) یکی از ریاضیدانان بر جسته فرانسوی است و تحقیقاتش عمدها در زمینه‌های توابع بیضوی و نظریه اعداد بوده است. توابع لزاندر که جوابهای معادله دیفرانسیلی به همین نام می باشند، حاصل بر دیوهای او درباره جاذبه اجسام کروی شکل است.

۲. ف. و. بسل (F. W. Bessel)، (۱۷۸۴ – ۱۸۴۶) یکی از ریاضیدانان آلمانی است، که در زمینه‌های نجوم، زئودزی و مکانیک سماوی دارای تحقیقات بنیادی است. وی برای تحسین بار به تحلیل سیستماتیک جوابهای معادله‌ای که به نام او موسوم است (و توابع بسل نامیده می شوند) پرداخت.

می‌تواند نامحدود باشد، یعنی α می‌تواند $-\infty$ باشد) و علاوه بر این، تابع P در این فاصله هیچگاه صفر نمی‌شود. در این حالت می‌توان معادله (۶) را به (x) تقسیم کرد و معادله‌ای به صورت زیر به دست آورد.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x) \quad (12)$$

دیده می‌شود که مفروضات بالا در مورد معادله (۷) در $-\infty < x < \infty$ ، و در مورد معادله لزاندر روی فواصل $1 < x < 1 - \alpha$ ، یا $1 - \alpha < x$ ، و در مورد معادله بسل روی هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد برقرارند.

اگر معادله (۱۲) را به صورت معادله (۲) بنویسیم، تابع f عبارت خواهد بود از

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + g(x) \quad (13)$$

چون $(x, y, y')/ \partial y' = -p(x)$ و $(x, y, y')/ \partial y = -q(x)$ پیوسته‌اند، از قضیه ۱.۳ وجود و یکتاپی جواب معادله (۱۲) که در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x_0) = y'_0$ در فاصله‌ای حول x_0 ، $\alpha < x_0 < \beta$ صدق کند محرومی گردد. اما، همانند معادلات مرتبه اول، قضیه وجود و یکتاپی مربوط به معادلات مرتبه دوم را می‌توان درباره معادلات خطی به صورتی قویتر از حالات غیرخطی بیان کرد.

قضیه ۲۰۳. اگر توابع p ، q و g در فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه یک و فقط یک تابع $\phi(x) = y$ وجود دارد که دو مامفاحله $\alpha < x < \beta$ دو معادله دیفرانسیل (۱۲) را

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

و در نقطه خاص x_0 متعلق به فاصله مذکور، در شرایط اولیه (۵)،

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

صدق کند.

برای توضیح یکی از کاربردهای این قضیه مثالهای ساده زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۰. جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = 0$$

را که در شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ صدق می‌کند بیایید.

به آسانی تحقیق می‌شود که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای این معادله دیفرانسیلند. علاوه بر این $y = \sin x$ در $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ صدق می‌کند، بنابراین طبق قضیه ۲۰۳، $y = \sin x$ جواب یکتاپی مسئله است.

مثال ۲. تنها جواب معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

را که در شرایط اولیه $y(x_0) = 0$ ، $y'(x_0) = 0$ صدق می‌کند بیا بیند، x نقطه‌ای از فاصله $\alpha < x < \beta$ است.

چون $y = 0$ هم در معادله دیفرانسیل وهم در شرایط اولیه صدق می‌کند همان جواب یکتاً مطلوب است.

باید توجه داشت که شرایط اولیه در قضیه‌های ۱۰.۳ و ۲۰.۳ که موجب می‌شوند معادله (۱۲) یا معادله (۱۴) یک جواب یکتاً داشته باشد شرایطی روی مقدار تابع جواب و مشتق اول آن در یک نقطه ثابت از فاصله مزبور هستند. بر عکس، مسئله تعیین جواب برای، مثلاً معادله (۱۲) در فاصله $\alpha < x < \beta$ ، که در $A = y(\alpha)$ ، $B = y(\beta)$ صدق کند مشمول این قضیه نیست. در واقع، همواره ممکن است مسئله اخیر دارای جواب نباشد. این گونه مسائل را مسائل مقدارهای محدود می‌نامند، و در فصلهای ۱۵ و ۱۱ مورد بحث قرار می‌گیرند.

برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱۲)،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

لازم می‌آید که نخست معادله همگن^۱ یا ماده، یا همکمل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (14)$$

را که از معادله (۱۲) با قراردادن $g(x) = 0$ به دست می‌آید حل کنیم. هنگامی که جواب معادله همگن (۱۴) به دست آمد، می‌توان بدیک زوشن کلی معادله غیرهمگن (۱۲) را حل کرد. در سه بند آینده چند نتیجه کلی درباره معادله همگن (۱۴) بیان خواهد شد. آنگاه در بند ۵.۳ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادله (۱۴) را در حالت خاصی که توابع p و q مقادیر ثابتی باشند حل کرد. حتی همین حالت خاص در عمل دارای اهمیت بسیاری است، مثلاً معادله مربوط به حرکت جرمی که بدیک فترسته شده است دارای ضرایب ثابت است. در بند ۳.۶ معادله غیرهمگن (۱۲) را مورد توجه قرار می‌دهیم. بقیه این فصل به کاربردهای در زمینه‌های ارتعاشات مکانیکی و شبکه‌های الکتریکی اختصاص دارد.

مسائل

۱. با جایگزینی $y = u'$ ، $y' = u'$ در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ($y'' = f(x, u')$) یک معادله مرتبه اول به صورت $u'' = f(x, u')$ به دست می‌آید. اگر بتوان از حل این معادله را به دست آورد، آنگاه با انتگرال‌گیری از $u(x) = \int u'(x) dx$ تابع y معین می‌گردد. توجه شود که یک ثابت دلخواه در حل معادله مرتبه اول مربوط به u ، و یک ثابت دیگر

۱. توجه شود که مفهوم واژه همگن در اینجا، با مفهومی که در بحث معادلات دیفرانسیل همگن مرتبه اول در بند ۷.۲ به کاررفت ارتبا طی ندارد.

در انتگرال گیری مربوط به x ظاهر می‌شود. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(الف) \quad x^2y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$$

$$(ب) \quad xy'' + y' = 1, \quad x > 0$$

$$(ج) \quad y'' + x(y')^2 = 0$$

$$(د) \quad 2x^2y'' + (y')^2 = 2xy', \quad x > 0$$

۲. معادله دیفرانسیل مرتبه دومی به صورت $y'' = f(y, y')$ را در نظر می‌گیریم.

اگر قراردهیم $y = v$, خواهیم داشت $v' = y'$. این معادله شامل متغیرهای v , x و y است، و بنا بر این به صورت معادله مرتبه اولی که در فصل ۲ بحث شد نمی‌باشد. می‌توان متغیر x را با انتخاب y به عنوان متغیر مستقل حذف کرد، زیرا بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dy}$$

و بنا بر این معادله دیفرانسیل اصلی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$v \frac{dv}{dy} = f(y, v)$$

اگر بتوان این معادله مرتبه اول را حل کرد، v به عنوان تابعی از y به دست می‌آید. رابطه بین y و x از حل $\frac{dy}{dx} = v$ نتیجه می‌شود. در اینجا نیز، در نتیجهٔ نهایی دو مقدار ثابت دلخواه وجود خواهد داشت. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(الف) \quad y'' + y = 0 \quad (ب) \quad yy'' + (y')^2 = 0$$

$$(ج) \quad 1 = y'' + 2y^2y' \quad (د) \quad y'' + y(y')^2 = 0$$

۳. با به کار بردن روش‌های مسائل ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. اگر شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی بیایید که در شرایط مزبور صدق کند.

$$(الف) \quad y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$(ب) \quad y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

$$(ج) \quad (1+x^2)y'' + 2xy' + 2x^{-2} = 0, \quad x > 0$$

$$(د) \quad y'y'' - x = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

۴. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل خطی زیر فاصله‌ای را تعیین کنید که در آن یک جواب یکتا با شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$ وجود داشته باشد، x_0 نقطه‌ای از فاصله مزبور است.

$$(الف) \quad y'' + 6y' + 7y = 2\sin x \quad (ب) \quad xy'' + 2y = x$$

$$x(x-1)y'' + 3xy' + 4y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y'' + (\cos x)y' + 3(\ln|x|)y = 0 \quad (\text{د})$$

$$(1+x^2)y'' + 4y' = e^x \quad (\text{ه})$$

$$e^x y'' + x^2 y' + y = \tan x \quad (\text{و})$$

۵. گیریم p و q روی یک فاصله باز که شامل مبدأ است پیوسته باشند، و جواب $y = \phi(x)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$$

باشد، $(\circ)\phi$ را بیابید. اگر p و q چند جمله‌ای باشند، ثابت می‌کنند که از جواب $y = \phi(x)$ می‌توان بینهایت بار مشتق گرفت. با فرض آنکه p و q چند جمله‌ای باشند، $(\circ)\phi$ را بر حسب $a_0, a_1, p(0), q(0), p'(0), q'(0)$ بیابید. آیا این عمل را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد؟

۶. جواب هر معادله مرتبه دوم به صورت $y'' = f(x, y, y')$ عموماً متضمن دو مقدار ثابت دلخواه است. بر عکس، می‌توان نشان داد که هر خانواده از توابع که متضمن دو ثابت دلخواه باشد، جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دومی خواهد بود. در هر یک از حالاتی زیر با حذف c_1 و c_2 بین y ، y' و y'' معادله دیفرانسیلی بیابید که خانواده توابع داده شده در آن صدق کند.

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (\text{ب}) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (\text{الف})$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x \quad (\text{د}) \quad y = c_1 x + c_2 \sin x \quad (\text{ج})$$

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x \quad (\text{و}) \quad y = c_1 x + c_2 x^2 \quad (\text{ه})$$

۲۰۳ جوابهای اساسی معادله همگن

در بحث نظریه معادلات دیفرانسیل خطی، استفاده از نماد عملگر دیفرانسیلی می‌تواند بسیار سودمند باشد. گیریم p و q توابع پیوسته‌ای روی یک فاصله باز $\alpha < x < \beta$ باشند. آنکه بدارای هر تابع دوبار مشتق پذیر ϕ روی $\alpha < x < \beta$ عملگر دیفرانسیلی L را با معادله زیر تعریف می‌کنیم

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi \quad (1)$$

تجدد شود که $L[\phi]$ نیز تابعی روی $\alpha < x < \beta$ است، در واقع L را می‌توان به عنوان تابعی که حوزه و دامنه آن خود توابعی از یک متغیر حقیقیند در نظر گرفت. عملگر L اغلب به صورت $L = D^2 + pD + q$ نوشته می‌شود، که در آن D عملگر مشتقی است. مقدار تابع $L[\phi]$ در نقطه x برابر است با

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$$

مثلًا، اگر $\phi(x) = \sin 3x$ ، $q(x) = 1+x$ ، $p(x) = x^2$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} L[\phi](x) &= (\sin 3x)'' + x^2(\sin 3x)' + (1+x)\sin 3x \\ &= -9\sin 3x + 3x^2\cos 3x + (1+x)\sin 3x \end{aligned}$$

در این بند به بررسی معادله همگن خطی مرتبه دوم زیر می‌پردازیم

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x) = 0 \quad (2)$$

توابع p و q روی یک فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته فرض می‌شوند. توجه شود که معمولاً $\phi(x)$ را با علامت y نشان می‌دهند. بدینسان اغلب به جای معادله (2) می‌نویسیم

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

باید توجه داشت که $L[\phi]$ در رابطه (1) نمایشگر یک تابع است، در صورتی که $[y] L$ در معادله (3) مقدار تابع $L[\phi]$ را در نقطه x نشان می‌دهد. بدینسان علامت y به طرز خاصی به کار می‌رود.

با استفاده از این نکته که اگر u_1 و u_2 توابع مشتق پذیری باشند، آنگاه

$$[c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)]' = c_1 u'_1(x) + c_2 u'_2(x)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی می‌باشند، می‌توان قضیه مهم زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۰.۳ اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل (3)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه ترکیب خطی $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ نیز یک جواب معادله (3) است.

باید نشان دهیم که اگر

$$L[y_2] = y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \quad \text{و} \quad L[y_1] = y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$$

آنگاه $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0$. اما

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

و قضیه ثابت می‌شود. اگر در اثبات بالا $c_2 = 0$ بگیریم، این نتیجه به دست می‌آید که اگر

۱. توجه شود که چون $L[y]$ نمایشگر یک تابع است، در طرف دوم کزاره 0 نمایشگر تابعی است که در $\alpha < x < \beta$ متحداً صفر است.

تابع y یک جواب معادله (۳) باشد، آنگاه هر مضرب ثابت c نیز یک جواب معادله (۳) است.

در ضمن اثبات قضیه ۳.۳، نشان داده شد که به ازای هردو تابع u_1 و u_2 که دارای مشتقهای دوم پیوسته باشند، و بذازای هردو ثابت دلخواه c_1 و c_2 داریم

$$L[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 L[u_1] + c_2 L[u_2]$$

عملگری که دارای این خاصیت باشد، به عملگر خطی موسوم است، به ویژه عملگر دیفرانسیلی L یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبه دوم است. مثال دیگری از عملگر خطی در مسئله ۱۵ آمده است. این نکته که هر ترکیب خطی جوابهای یک معادله همگن خطی همچنان یک جواب معادله مزبور است دارای اهمیت اساسی است، و اغلب آن را اصل انتباط می‌نامند. نظریه معادلات همگن خطی، مشتمل بر معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب بالاتر و معادلات با مشتقهای جزئی، به اصل انتباط بستگی زیاددارد. این اصل را با مثالهای ساده زیر توضیع می‌دهیم.

مثال ۱. مستقیماً با محاسبه تحقیق کنید که $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است.

چون $\phi'(x)$ را بدجای y قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned} \phi''(x) + \phi(x) &= (c_1 \cos x + c_2 \sin x)'' + (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\ &= c_1[(\cos x)'' + \cos x] + c_2[(\sin x)'' + \sin x] \\ &= c_1[-\cos x + \cos x] + c_2[-\sin x + \sin x] = 0 \end{aligned}$$

مثال ۲. تحقیق کنید که $\phi(x) = x + 1$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = 0$ است؛ اما $\psi(x) = 2\phi(x)$ یعنی $\psi(x) = 2x + 2$ جواب معادله نیست. چون $\phi'(x) = 1$ و $\phi''(x) = 0$ داریم

$$\psi''(x) + 2\psi'(x) + \psi(x) = 0 + 2(2) + 2(x+1) = x+4$$

اما

$$\psi''(x) + 2\psi'(x) + \psi(x) = 0 + 2(2) + 2(x+1) \neq x+4$$

این با قضیه ۳.۳ تناقضی ندارد، زیرا معادله دیفرانسیل مزبور همگن نیست.

مثال ۳. نشان دهید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله $y'' + y^2 = 0$ باشند، لزوماً ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ یک جواب معادله نیست. با جایگذاری، داریم

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + (c_1 y_1 + c_2 y_2)^2 \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1^2 y_1^2 + 2c_1 c_2 y_1 y_2 + c_2^2 y_2^2 \end{aligned}$$

$$\neq c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

در اینجا اصل انتطاق به علت خطی نبودن معادله دیفرانسیل تحقق نمی‌یابد.

دیدیم که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله (۳) باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز یک جواب معادله (۳) است، و متناظر به بینهایت مقدار که می‌توان به c_1 و c_2 نسبت داد، بینهایت جواب برای معادله (۳) ساخته می‌شود. اما آیا این بینهایت جواب شامل همه جوابهای ممکن معادله (۳) است؟

دو جواب y_1 و y_2 از معادله (۳) هنگامی بلکه مجموعه اساسی جوابها را تشکیل می‌دهند که هر جواب معادله (۳) را بتوان بدصورت یک ترکیب خطی y_1 و y_2 بیان کرد. برای اثبات آنکه y_1 و y_2 یک مجموعه اساسی از جوابها را تشکیل می‌دهند، باید نشان دهیم که به ازای هر جواب $\phi(x) = y$ می‌توان مقادیر ثابت c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \phi(x)$. برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم.

گیریم $\phi(x) = y$ جوابی از معادله (۳) باشد. نقطه x_0 را در فاصله $\alpha < x < \beta$ انتخاب می‌کنیم، آنگاه $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ به ترتیب مقادیر جواب مزبور و مشتق آن در نقطه x_0 است. اکنون باید ثابت‌نمای c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که تابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ و مشتق آن در $x = x_0$ به ترتیب مقادیر $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ را اختیار کنند. بدینسان c_1 و c_2 باید در دستگاه معادلات جبری خطی زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= \phi(x_0) \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) &= \phi'(x_0) \end{aligned} \quad (4)$$

دستگاه معادلات (۴) هنگامی دارای جواب یکتا برای c_1 و c_2 است که دترمینان ضرایب آن صفر نباشد، یعنی

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y'_2(x_0) - y'_1(x_0)y_2(x_0) \neq 0 \quad (5)$$

در این صورت به ازای c_1 و c_2 که از معادلات (۴) به دست می‌آیند، تابع $c_1 y_1 + c_2 y_2$ و ϕ هردو در معادله دیفرانسیل (۳) و شرایط اولیه متناظر به $x = x_0$ صدق می‌کنند. چون قضیه ۲.۳ می‌بین آن است که تنها یک جواب برای این مسئله مقدار اولیه وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ خواهیم داشت $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \phi(x)$. اگر بدانیم که رابطه (۵) به ازای هر x در فاصله $\alpha < x < \beta$ برقرار است، همواره می‌توان یک چنین x را انتخاب کرد. در این حالت معادلات (۴) را همواره می‌توان با صرف نظر کردن از مقادیر بخصوص x_0 ، $\phi(x_0)$ و $\phi'(x_0)$ حل کرد. بدینسان قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۴.۳. اگر تابع p و q دوی فاصله بآذ $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند داگر y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

د) شرط

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0 \quad (6)$$

به ازای هر نقطه از فاصله $\alpha < x < \beta$ مصدق کنند، آنگاه هر جواب معادله (۳) دوی فاصله $\alpha < x < \beta$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ بیان کرد.

مرسوم است که ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ را با c_1 و c_2 دلخواه جواب عمومی معادله (۳) بنامند.

مثال ۴. یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله زیر را بیابید

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

با بررسی می‌توان دید که $y_1(x) = \sin x$ و $y_2(x) = \cos x$ جوابهای معادله (۷) می‌باشند. علاوه بر این

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \cos x \cos x - (-\sin x)\sin x = 1$$

بنابراین اگر $y = \phi(x)$ یک جواب ثابت‌پذیر y_1 و y_2 باشد. آنگاه ثابت‌پذیر c_1 و c_2 وجوددارند بدطوری که $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

دو تابع مشتق‌پذیر y_1 و y_2 را روی یک فاصله باز در نظر می‌گیریم، تابع $y_1 - y_2$ را رونسکین^۱ y_1 و y_2 می‌نامند. و آن را معمولاً به صورت زیر می‌نویسند

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (8)$$

مقدار رونسکین y_1 و y_2 را در نقطه x با $W(y_1, y_2)(x)$ نشان می‌دهند.

اکنون فرض کنیم که برای معادله (۳) دو جواب y_1 و y_2 بدست آورده‌ایم، چگونه می‌توان تشخیص داد که توابع y_1 و y_2 تشکیل یک مجموعه اساسی می‌دهند، یعنی چگونه می‌توان معلوم کرد که $W(y_1, y_2)$ هیچگاه در فاصله $\alpha < x < \beta$ صفر نمی‌شود؟ در مثال ۴ داریم $W(\cos x, \sin x) = 1$ ، و بنابراین روشن است که $\cos x$ و $\sin x$ روی هر فاصله، یک مجموعه اساسی برای معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ تشکیل می‌دهند. اما، به طور کلی $W(y_1, y_2)$ مقدار ثابتی نخواهد بود، و ممکن است تشخیص آنکه تابع مزبور در نقطه‌ای از فاصله $\alpha < x < \beta$ صفر شود دشوار باشد. خوب شیخناه بده این سؤال با قضیه مهم زیر می‌توان پاسخ داد.

قضیه ۵.۳. اگر توابع p و q دوی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر

۱. به احترام ریاضیدان هلندی رونسکی (Wronski)، (۱۷۷۸-۱۸۵۳).

توابع y_1 و y_2 دیگر دو جوابهای معادله دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه $(y_1, y_2)W$ یا متعدد با صفر است و یا هیچگاه $\alpha < x < \beta$ در

نمی‌شود.

برای اثبات این قضیه می‌توان از استدلالی مشابه آنچه در اثبات قضیه ۴.۳ به کار رفت استفاده نمود، اما، ما اثبات دیگری عنوان می‌کنیم که در آن ضمناً فرمولی برای $(y_1, y_2)W$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه توابع y_1 و y_2 در

$$\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

صدق می‌کنند، معادله اول را در y_2 و معادله دوم را در y_1 ضرب کرده و باهم جمع می‌کنیم، در نتیجه

$$(y_1 y_2' - y_1' y_2) + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 \quad (10)$$

چون قرار دهیم $(y_1, y_2)(x)W_{12}(x) = W(y_1, y_2)(x)$ ، دیده می‌شود که

$$W_{12}' = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (11)$$

و می‌توان معادله (۱۰) را به صورت زیر نوشت

$$W_{12}' + pW_{12} = 0 \quad (12)$$

این یک معادله جدا ای پذیر (بند ۴.۲) و همچنین یک معادله خطي مرتبه اول (بند ۱.۲) است، و جواب آن متناسبی با صورت زیر به دست می‌آید

$$W_{12}(x) = c \exp \left[- \int^x p(t) dt \right] \quad (13)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است.^۱ چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی‌شود، $W_{12}(x)$ تنها اگر $c = 0$ باشد صفر خواهد شد، و در این صورت متعدد با صفر است، بدینسان قضیه ثابت می‌شود. علاوه بر این رابطه (۱۳) فرمولی است که می‌توان از آن رونسکین یک مجموعه اساسی جوابهای معادله (۳) را با تقریب ضریب ثابتی بدون حل کردن معادله تعیین کرد. همچنین باید توجه داشت که رونسکین هر دو مجموعه اساسی جوابهای تنها در یک

۱. نتیجه‌ای که به صورت معادله (۱۳) بیان شده است نخستین بار توسط ریاضیدان نروژی N. H. Abel (N. H. Abel)، (۱۸۰۲-۱۸۲۹) در ۱۸۲۷ به دست آمده است، و به اتحاد Abel مشهور است. وی همچنین ثابت کرد که برای حل معادله درجه پنجم یک فرمول کلی که متناسب عملیات جبری روی ضرایب معادله مزبور باشد وجود ندارد. بزرگترین تحقیق دی در آنالیز و در زمینه توابع بیضوی است، اما قبل از مرگ وی بداین رساله توجه نشد. لذا در ریاضیدان بزرگ فرانسوی آن را به عنوان «بنایی مستحکمتر از بن‌نیز» توصیف کرد.

ضریب ثابت باهم اختلاف دارند.

با ترکیب نتایج قضیه‌های ۴.۳ و ۵.۳ می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۶.۳. اگر توابع p و q در فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 در دوی فاصله $\alpha < x < \beta$ جوابهای معادله دیفرانسیل (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، و اگر حداقل در یک نقطه $\alpha < x < \beta$ ، $(y_1, y_2, W(y_1, y_2))$ صفر نباشد، آنگاه هر جواب $y = \phi(x)$ از معادله (۳) نمی‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

بالاخره باید نشان دهیم که واقعاً معادله (۳) دارای یک مجموعه اساسی جواب می‌باشد، یعنی باید به اثبات قضیه زیر پردازیم.

قضیه ۷.۳. اگر توابع p و q در فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه یک مجموعه اساسی جواب برای معادله (۳)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

در دوی فاصله $\alpha < x < \beta$ وجود دارد.

گیریم c نقطه‌ای از $\alpha < x < \beta$ باشد. بنابر قضیه ۲.۳ برای مسائل مقدار اولیه

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 ; \quad y(c) = 1 , \quad y'(c) = 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 ; \quad y(c) = 0 , \quad y'(c) = 1$$

جوابهای یکتا y_1 و y_2 در فاصله $\alpha < x < \beta$ وجود دارد. بدآسانی دیده می‌شود که $y_1(c) = 1 \neq 0$ و $y_2(c) = 0$. بنابراین از قضیه ۴.۳ نتیجه می‌شود که y_1 و y_2 یک مجموعه اساسی جواب برای معادله (۳) تشکیل می‌دهند.

در خاتمه این بند بر همان حالب دیگری برای قضیه ۴.۳ می‌آوریم. در این بر همان نیازی بدانستفاده از قضیه وجود و یکتا بی (بر همان قضیه ۴.۳ را بیینید) نمی‌باشد. فرض کنیم که توابع y_1 ، y_2 و y_3 جوابهای معادله (۳) باشند، و $(y_1, y_2, W(y_1, y_2))$ هیچگاه در $\alpha < x < \beta$ صفر نشود. برای اثبات رابطه $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$

$$y_3'' + p y_3' + q y_3 = 0$$

معادله اول را در y_2 ، و معادله دوم را در y_1 ضرب کرده با هم جمع می‌کنیم. و با

استفاده از معادله ۱۱ داریم

$$W'_{12} + pW_{12} = 0 \quad (14)$$

که در آن $(x)W_{12}(x) = W(y_1, y_2)(x)$. با محاسبه مشابهی در مورد معادلات دوم و سوم، و بالاخره معادلات اول و سوم، خواهیم داشت

$$W'_{23} + pW_{23} = 0 \quad (15)$$

$$W'_{13} + pW_{13} = 0 \quad (16)$$

معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) معادلات خطی مرتبه اول اند. جوابهای آنها عبارتند از

$$W_{12}(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) = k_{12} \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (17)$$

$$W_{23}(x) = y_2(x)y'_3(x) - y'_2(x)y_3(x) = k_{23} \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (18)$$

$$W_{13}(x) = y_1(x)y'_3(x) - y'_1(x)y_3(x) = k_{13} \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (19)$$

که در آن k_{12} ، k_{23} و k_{13} ثابت‌اند، و بدويشه W_{12} ، زیرا $k_{12} \neq 0$ بنا بر فرض هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. چون معادله (۱۸) را در $y_1(x) -$ ، و معادله (۱۹) را در $y_2(x)$ ضرب کرده و باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} [y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)]y_3(x) &= \\ @jozve_iut & [-k_{23}y_1(x) + k_{13}y_2(x)] \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \end{aligned} \quad (20)$$

بالاخره، چون به جای $y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)$ مقدار آن را از معادله (۱۷) جایگزین کنیم، و نمایه‌ها را حذف کنیم بدست می‌آید

$$y_3(x) = -\frac{k_{23}}{k_{12}}y_1(x) + \frac{k_{13}}{k_{12}}y_2(x)$$

بنابراین y_3 را می‌توان به صورت يك ترکیب خطی y_1 و y_2 ، همان‌طور که باید ثابت می‌کردیم، بیان کرد.

مسائل

۱. تحقیق کنید که e^x و e^{-2x} و ترکیب خطی $c_1e^x + c_2e^{-2x}$ ، که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی‌اند، جوابهای معادله دیفرانسیل زیر می‌باشند:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

۲. در مسئله ۱ جواب یکتای معادله دیفرانسیل را که در شرایط اولیه $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 0$ صدق می‌کند بیا بید. جواب یکتای این مسئله هنگامی که شرایط اولیه $y(1) = 0$ باشد چیست؟

۳. تحقیق کنید که $e^x + e^{-x}$ جوابهای $y'' - y = 0$ می‌باشند. از آنجا نشان دهید که $\cosh x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$ و $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ نیز جوابهای این معادله دیفرانسیل هستند.

۴. تحقیق کنید که $\cos x$ و $\sin x$ جوابهای $y'' + y = 0$ می‌باشند. فعلاً می‌پذیریم که $f' = cf$ که در آن f یک تابع با مقدار حقیقی و c یک عدد مختلط است، نشان دهید که ترکیب خطی $\cos x + (2-i)\sin x + (1+i)\sin x + y'' + y = 0$ نیز یک جواب $y'' + y = 0$ است. در اینجا نیز یکه موهمی $i^2 = -1$ است.

۵. تحقیق کنید که $x^2 + c_1 x^1 + c_2 x^0$ و ترکیب خطی $x^2 + c_1 x^1 + c_2 x^0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی هستند، جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' - 2y = 0$ می‌باشند.

۶. تحقیق کنید که $x^{1/2}$ جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ می‌باشند، اما ترکیب خطی $x^{1/2} + c_1 + c_2 x^{1/2}$ به طور کلی جواب نیست. چرا؟

۷. نشان دهید که اگر $y = \phi(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y = g(x)$ باشد، آنگاه $y = c\phi(x)$ که در آن c ثابتی مخالف یک است، جواب نیست. چرا؟

۸. فرض می‌کنیم $L[y] = ay'' + by' + cy$ باشد که در آن a ، b و c ثابت‌اند، مطلوب است محاسبه

$$(الف) L[x] \quad (ب) L[\sin x]$$

$$(ج) L[e^{rx}] \quad (د) L[x^r], r \text{ ثابت}$$

۹. فرض می‌کنیم $L[y] = ax^2y'' + bxy' + cy$ باشد که در آن a ، b و c ثابت‌اند، مطلوب است محاسبه

$$(الف) L[x^2], \quad (ب) L[e^{rx}], r \text{ ثابت}$$

$$(ج) L[\ln x], \quad (د) L[x^r], r \text{ ثابت}$$

۱۰. نشان دهید عامل M که با

$$M[u](x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x-t)u(t)dt, \quad \alpha < x < \beta$$

تعریف شده است و در آن K تابعی پیوسته در فاصله $\alpha - \beta \leq s \leq \beta - \alpha$ می‌باشد، یک عملکردنی خطی است، یعنی نشان دهید که

$$M[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 M[u_1] + c_2 M[u_2]$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌اند.

۱۱. رونسکین زوجهای توابع زیر را بیا بید:

- (الف) $m \neq n$ که در آن m و n اعداد صحیح هستند و $m \neq n$
- (ج) x, xe^x (ب) $\sinh x, \cosh x$
- (د) $\cos^2 x, 1 + \cos 2x$ (ه) $e^x \sin x, e^x \cos x$

۱۲. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل داده شده‌اند و با محاسبه (y_1, y_2) W تعیین کنید که در چه فواصلی تشکیل یک مجموعه اساسی جواب می‌دهند.

(الف) $y'' + \lambda^2 y = 0; y_1(x) = \sin \lambda x, y_2(x) = \cos \lambda x$
 λ یک عدد حقیقی است

(ب) $y'' - y' - 2y = 0; y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{2x}$

(ج) $y'' - 2y' + y = 0; y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x$

(د) $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0; y_1(x) = x, y_2(x) = xe^x$

توجه شود که اگر معادله (د) را به صورت استاندارد $0 = p(x)y' + q(x)y$ بنویسیم، ضرایب $p(x) = -(x+2)/x^2$ و $q(x) = (x+2)/x^3$ هنگامی که $0 \rightarrow x$ نامحدود می‌شوند، اما جوابهای x و xe^x هنگامی که $0 \rightarrow x$ کاملاً معین‌اند. بدینسان اگر در نقطه‌ای ضرایب ناپیوسته باشند، جواب لزوماً ناپیوسته نخواهد بود، اما اغلب چنین است.

۱۳. تحقیق کنید که اگر ϕ_1 ، ϕ_2 و ϕ توابع مشتق پذیری باشند، آنگاه

$$W(\phi\phi_1, \phi\phi_2) = \phi^2 W(\phi_1, \phi_2)$$

۱۴. در مسائل زیر تحقیق کنید که توابع y_1 و y_2 یک مجموعه اساسی جواب برای معادله دیفرانسیل داده شده تشکیل می‌دهند و جوابی را که در شرایط اولیه داده شده صدق می‌کند بیابید.

(الف) $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$

$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$

(ب) $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$

$y_1(x) = \sinh x, y_2(x) = \cosh x$

با نتیجه قسمت (الف) مقایسه شود.

(ج) $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;$

$y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = e^{-3x}$

(د) $y'' + y' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1;$

$y_1(x) = 2, y_2(x) = e^{-x}$

در مسائل ۱۵، ۱۶ و ۱۷ فرض می‌کنیم که p و q پیوسته، و توابع y_1 و y_2

جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ روی فاصله $\alpha < x < \beta$ باشند.

۱۵. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 هردو در نقطه‌ای از $\alpha < x < \beta$ صفر شوند، آنگاه نمی‌توانند روی این فاصله یک مجموعه اساسی جواب تشکیل دهند.

۱۶. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 هردو در یک نقطه از $\alpha < x < \beta$ دارای ماکزیمم یا مینیمم باشند، آنگاه نمی‌توانند روی این فاصله یک مجموعه اساسی جواب تشکیل دهند.

۱۷. ثابت کنید که اگر y_1 و y_2 یک مجموعه اساسی جواب باشند، آنگاه نمی‌توانند هردو به ازای مقداری از $\alpha < x < \beta$ توأمًا دارای نهایه عطف باشند، مگر آن‌که به ازای آن p و q هردو صفر شوند.

۱۸. می‌توان مفهوم کامل بودن را، که درباره معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بررسی شد، در مورد معادلات خطی مرتبه دوم تعمیم داد. معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ را کامل گویند اگر بتوان آن را به صورت $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$ که در آن $f(x)$ بر حسب $P(x)$ و $Q(x)$ معین می‌شود نوشت. با انتگرال‌گیری از معادله اخیر فوراً معادله دیفرانسیل مرتبه اولی به دست می‌آید که می‌توان آن را با روش بند ۱۰۲ حل کرد. با مساوی قراردادن ضرایب معادلات بالا، و حذف $f(x)$ ، نشان دهید که شرط لازم برای کامل بودن عبارت است از $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. می‌توان نشان داد که این شرط برای کامل بودن کافی نیز است. کامل بودن هریک از معادلات زیر را بررسی کنید، و در صورت کامل بودن، جواب آن را بیابید.

$$y'' + xy' + y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 3x^2y' + xy = 0 \quad (\text{ب})$$

$$xy'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = 0, \quad x > 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0 \quad (\text{د})$$

۱۹. اگر معادله همگن خطی مرتبه دومی کامل نباشد، می‌توان آن را با ضرب در یک عامل انتگرال‌ساز $\mu(x)$ کامل نمود. بدینسان باید $\mu(x)$ را طوری تعیین کرد که

$$\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$$

را بتوان به صورت

$$[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$$

نوشت. با مساوی قراردادن ضرایب این دو معادله و حذف $f(x)$ نشان دهید که تابع μ باید در معادله زیر صدق کند

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0$$

این معادله موسوم به معادله الحاقی است، و در نظریه پیشرفتة معادلات دیفرانسیل دارای

نقش بسیار مهمی می‌باشد. عموماً مسئله حل معادله دیفرانسیل الحاقی به همان دشواری حل معادله اصلی است. معادله الحاقی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را باید.

(الف) معادله بسل^۱ مرتبه ۷:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

(ب) معادله لزاندر^۲ مرتبه α :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

(ج) معادله ایری^۳:

$$y'' - xy = 0$$

(د) معادله ویتکر^۴:

$$x^2y'' + \left(-\frac{x^2}{4} + kx + \frac{1}{4} - m^2\right)y = 0$$

که در آن k و m اعداد صحیح می‌باشند.

۲۰. نشان دهید که در مورد معادله خطی مرتبه دوم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

معادله الحاقی معادله الحاقی، همان معادله اصلی است.

۲۱. معادله خطی مرتبه دوم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

را هنگامی که معادله الحاقی آن با معادله اصلی متحد باشد خودالحاقی می‌نامند. نشان دهید که شرط لازم برای خودالحاقی بودن این معادله دیفرانسیل آن است که $P'(x) = Q(x)$. معادلات مسئله ۱۹ را از لحاظ خودالحاقی بررسی کنید.

۲۲. در بررسی نظریه معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ اغلب به مواردی بر می‌خوریم که باید تابع را طوری تبدیل نمود که معادله به صورت $u'' + f(x)u = 0$ درآید. این صورت را فرم نرمال معادله همگن خطی مرتبه دوم می‌نامند. برای تبدیل معادله اصلی به فرم نرمال قرار دهید $u(x)v(x) = y$ و $v(x)u'(x) = f(x)$ را طوری انتخاب کنید که ضریب u' صفر شود. $f(x)$ و $v(x)$ را باید.

۳۰۳ استقلال خطی

مفهوم جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به عنوان ترکیب خطی دو جواب که رونسکین آنها صفر نشود با مفهوم استقلال خطی دو تابع ارتباط نزدیکی دارد. مفهوم

اخیر دارای اهمیت زیادی است و از محدوده این مسئله بسیار فراتر می‌رود، و در اینجا آن را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم.

گویند دو تابع f و g روی فاصله $\alpha < x < \beta$ دابستگی خطی دارند اگر دو ثابت c_1 و c_2 که توأمًا صفر نباشند وجود داشته باشد به طوری که بداعزای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad (1)$$

گویند دو تابع f و g روی فاصله $\alpha < x < \beta$ استقلال خطی دارند اگر وابستگی خطی نداشته باشند، یعنی هنگامی که معادله (1) تنها بداعزای $c_1 = c_2 = 0$ روی همه فاصله $\alpha < x < \beta$ برقرار باشد. همین تعریف را می‌توان روی هر فاصله‌ای هم که باز نباشد بهکار برد.

مثال ۱. توابع $\sin x$ و $\cos(x + \pi/2)$ روی هر فاصله‌ای وابستگی خطی دارند، زیرا

$$c_1 \sin x + c_2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

با انتخاب $c_1 = 1$ ، $c_2 = 0$ بداعزای همه مقادیر x برقرار می‌گردد.

مثال ۲. نشان دهید که توابع e^x و e^{2x} روی هر فاصله دارای استقلال خطی اند. باید نشان داد که نمی‌توان ثابت‌های c_1 و c_2 را که توأمًا صفر نیستند طوری تعیین کرد که بداعزای هر x در فاصله داده شده داشته باشیم

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

برای اثبات فرض می‌کنیم که معادله (2) روی $\alpha < x < \beta$ برقرار باشد. آنگاه نقاط x_0 و $x_1 \neq x_0$ را در این فاصله انتخاب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$c_1 e^{x_0} + c_2 e^{2x_0} = 0$$

$$c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} = 0$$

چون دترمینان ضرایب مخالف صفر است: $0 \neq e^{2x_1 + x_0} - e^{2x_0 + x_1}$ ، تنها $c_1 = c_2 = 0$ جواب این معادلات است. بنابراین e^x و e^{2x} دارای استقلال خطی اند.

اکنون می‌توان قضیه ۳.۶ را مجددًا با استفاده از مفهوم استقلال خطی بیان کرد.

قضیه ۳.۷. اگر تابع p و q روی فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

دارای استقلال خطی باشند، آنگاه $(y_1, y_2, W(y_1, y_2))$ هیچگاه روی فاصله $\alpha < x < \beta$ صفر

نمی‌شود، و بنابراین هر جواب معادله (۳) دارای ترکیب خطی جوابهای y_1 و y_2 بیان کرد.

برای اثبات این قضیه باید نشان دهیم که اگر y_1 و y_2 جوابهای معادله (۳) روی $\alpha < x < \beta$ استقلال خطی داشته باشند. آنگاه $W(y_1, y_2)$ هیچگاه روی x_0 صفر نمی‌شود. فرض کنیم که یک نقطه x_0 ، $\alpha < x_0 < \beta$ ، وجود داشته باشد به طوری که $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$ ، $c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = 0$. آنگاه دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

بر حسب c_1 و c_2 جواب مخالف صفری خواهد داشت. با استفاده از این مقادیر c_1 و c_2 قرار می‌دهیم $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$. آنگاه ϕ یک جواب معادله (۳) است، و علاوه بر این بنا بر معادلات (۴) در شرایط اولیه $\phi'(x_0) = 0$ صدق می‌کند. بنا براین طبق قضیه وجود یکتا بی، روی فاصله $\alpha < x < \beta$ داریم $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ (مثال ۲، بند ۱.۳ را بینید). یعنی روی فاصله $\alpha < x < \beta$ داریم $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ که مستلزم وابستگی خطی y_1 و y_2 است. و بدتفاض می‌رسیم.

عکس قضیه ۸.۳ نیز صادق است، یعنی اگر $L[y_1] = 0$ ، $L[y_2] = 0$ ، و $\alpha < x < \beta$ روی $W(y_1, y_2) \neq 0$ ، آنگاه توابع y_1 و y_2 روی $\alpha < x < \beta$ دارای استقلال خطی‌اند. برای اثبات این نکته نیز از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنیم که y_1 و y_2 روی $\alpha < x < \beta$ وابستگی خطی داشته باشند. در این صورت می‌توان c_1 و c_2 را که توأمًا صفر نباشند طوری تعیین کرد که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad (5)$$

نتیجه می‌شود که رابطه

$$c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x) = 0 \quad (6)$$

نیز روی $\alpha < x < \beta$ برقرار است. چون حداقل یکی از مقادیر c_1 یا c_2 مخالف صفر است برای برقراری معادلات (۵) و (۶) لازم (و کافی) است که $W(y_1, y_2)$ به ازای هر دو صفر باشد، و بدتفاض می‌رسیم. از این رود جواب معادله (۳) استقلال خطی دارند اگر و فقط اگر رونسکین آنها در هر نقطه فاصله مزبور مخالف صفر باشد.

باید توجه داشت که این رابطه بین رونسکین و استقلال خطی، اگر توابع مزبور جوابهای معادله (۳) نباشند برقرار نیست. در مثال ۱۵ امثالی از دو تابع مستقل خطی که رونسکین آنها متعدد با صفر است بیان شده است.

شباهت این نتیجه با نتایجی از جبر برداری دو بعدی بسیار جالب توجه است. دو

بردار a و b را وابسته خطی گویند اگر دو اسکالر c_1 و c_2 که توأم صفر نباشند وجود داشته باشد به طوری که $c_1a + c_2b = 0$ ، در غیر این صورت مستقل خطی نامیده می شوند. گیریم بردارهای یکه i و j به ترتیب در امتداد مثبت محورهای x و y باشند. چون نمی توان اسکالرهای c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $c_1i + c_2j = 0$ ، و توأم صفر نباشند، بنا بر این بردارهای i و j دارای استقلال خطی اند. علاوه بر این می دانیم که هر بردار با مؤلفه های a_1 و a_2 را می توان به صورت $a_1i + a_2j$ نوشت، یعنی آن را به صورت ترکیب خطی دو بردار مستقل خطی i و j بیان کرد، بدآسانی ثابت می شود که هر بردار صفحه را می توان به صورت ترکیب خطی از هر دو بردار مستقل خطی نمایش داد (مسئله ۷ را بینیید). این قبیل زوج بردارهای مستقل خطی را پایه یا مولد فضای برداری دو بعدی مزبور می نامند.

اصطلاح فضای برداری درباره اشیاء ریاضی دیگری که مانند بردارهای هندسی در همان قوانین جمع و ضرب در اسکالر صدق می کنند، به کار می رود. مثلاً می توان نشان داد که مجموعه توابعی که روی $\beta < x < \alpha$ دو بار مشتق پذیرند تشکیل یک فضای برداری می دهند. به همین نحو مجموعه \mathcal{V} مشکل از توابعی که در معادله (3) صدق می کنند نیز تشکیل یک فضای برداری می دهند.

چون هر عنصر \mathcal{V} را می توان به صورت یک ترکیب خطی از عناصر مستقل خطی i و j بیان کرد، از این رو زوج مزبور را یک پایه \mathcal{V} یا یک زوج مولد \mathcal{V} می نامند. از اینجا نتیجه می شود که \mathcal{V} دو بعدی است - معادله (3) از مرتبه دوم است - و از بسیاری جهات با فضای بردارهای هندسی صفحه شباخت دارد. بعداً خواهیم دید که مجموعه جوابهای معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n ام، یک فضای برداری n بعدی تشکیل می دهد، که به وسیله هر مجموعه n جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل مزبور ایجاد می شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۴ ثابت کنید که توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل داده شده می باشند.

$$y'' - y = 0 ; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad .1$$

$$y'' - y = 0 ; \quad y_1(x) = \cosh x, \quad y_2(x) = \sinh x \quad .2$$

$$y'' - 4y' - 4y = 0 ; \quad y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = e^{2x} \quad .3$$

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad x > 0 ; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-2} \quad .4$$

۵. ثابت کنید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند، آنگاه y_1 و y_2 نیز جوابهای مستقل خطی اند مشروط به آنکه هیچ کدام از p و q صفر نباشد.

۶. ثابت کنید که اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ و $y_1 - y_2$ نیز یک مجموعه اساسی جواب تشکیل می‌دهند.

۷. (الف) ثابت کنید که هر بردار صفحه را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی بردارهای $j+i$ و $j-i$ نوشت.

(اهنمایی): هر بردار a را می‌توان به صورت $a_1i + a_2j$ نوشت. نشان دهید که می‌توان c_1 و c_2 را طوری تعیین کرد که $(j+i) + c_2(j-i) = a$. برای این کار دو عبارت a را برابر قرار داده و c_1 و c_2 را بر حسب a_1 و a_2 بیان کنید.

(ب) ثابت کنید که اگر بردارهای $j+i$ و $j-i$ مستقل خطی باشند، آنگاه $x = x_1i + x_2j$ و $y = y_1i + y_2j$ دارای استقلال خطی باشند، آنگاه $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ چرا؟

۸. تحقیق کنید که x و x^2 روی $W(x, x^2)$ دارای استقلال خطی‌اند، اما x در $W(x, x^2)$ صفر می‌شود. از اینجا چه نتیجه‌ای می‌توانید درباره امکان این که x و x^2 جوابهای معادله (۳)ی متن باشند بگیرید؟ نشان دهید که x و x^2 جوابهای معادله $y'' + 2y' + 2x^2y - 2x^2 - 2x^2y''$ می‌باشند. آیا این نکته با نتیجه شما در تناقض است؟ آیا با قضیه ۵.۳ بند ۲.۳ در تناقض است؟

۹. اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ دارای یک و فقط یک صفر است.

(اهنمایی): از قضیه رول استفاده کرده و نتیجه را با برهان خلف اثبات کنید. این نتیجه را اغلب قضیه استورم می‌نامند. به عنوان مثال خاص، توجه شود که $\cos x$ و $\sin x$ جوابهای مستقل خطی $y'' + y = 0$ می‌باشند، و $(0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots)$ صفرهای $\cos x$ و $\sin x$ را در بین یکدیگر واقع‌اند.

۱۰. نشان دهید که تابع $|x| = x$ در $W(y_1, y_2)$ روی $x < 0$ و روی $x > 0$ دارای وابستگی خطی‌اند، اما روی $x < 0$ استقلال خطی دارند. توجه شود که گرچه y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند، (y_1, y_2, W) روی $x < 0$ متعدد با صفر است، بنابراین y_1 و y_2 نمی‌توانند جوابهای معادله (۳)ی متن باشند.

۴.۳ کاهش مرتبه

نکته زیر دارای اهمیت و کاربرد بسیاری است: اگر یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم معلوم باشد، می‌توان جواب مستقل خطی دیگری (و بنابراین یک مجموعه

اساسی جواب) به دست آورد. این روش از دالامبر^۱ است، و معمولاً آن را روش کاهش مرتبه می‌نامند.

فرض کنیم که یک جواب y که متعدد با صفر نباشد برای معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

در دست باشد. آنگاه y که در آن y ثابت دلخواهی است نیز یک جواب معادله (۱) است. در اینجا این سؤال پیش می‌آید: آیا می‌توان تابع غیرثابت y را طوری تعیین کرد که $y = v(x)y_1(x)$ یک جواب معادله (۱) باشد؟ پاسخ مثبت است، و علاوه بر این، چنان که خواهیم دید می‌توان v را برآسانی تعیین کرد. اگر فرارد همیم

$$y = v(x)y_1(x) \quad (2)$$

آنگاه

$$y' = v(x)y'_1(x) + v'(x)y_1(x)$$

$$y'' = v(x)y''_1(x) + 2v'(x)y'_1(x) + v''(x)y_1(x)$$

با جایگزینی y , y' و y'' در معادله (۱) خواهیم داشت

$$v(y''_1 + py'_1 + qy_1) + v'(2y'_1 + py_1) + v''y_1 = 0 \quad (3)$$

چون y یک جواب معادله (۱) است بنابراین مقدار پرانتز اول صفر است. در هر فاصله‌ای که y صفر نشود می‌توان (۳) را بر y تقسیم کرد و در نتیجه

$$v'' + \left(p + \frac{2y'_1}{y_1}\right)v' = 0 \quad (4)$$

معادله (۴) یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به v است و می‌توان آن را فوراً حل کرد (بند ۱۰۲). جواب آن عبارت است از

$$v'(x) = c \exp \left[- \int^x \left(p(s) + \frac{2y'_1(s)}{y_1(s)} \right) ds \right] = cu(x) \quad (5)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است، و

$$u(x) = \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp \left[- \int^x p(s) ds \right] \quad (6)$$

در نتیجه

$$v(x) = c \int^x u(t) dt + k \quad (7)$$

که در آن k نیز یک ثابت دلخواه است. اما می‌توان ثابت k را حذف کرد، زیرا با توجه به

۱. زان دالامبر (Jean D'Alembert)، (۱۷۱۷-۱۷۸۳) ریاضیدان فرانسوی که تحقیقات در مکانیک و مکانیک سیالات موجب شهرت وی گردیده است.

$$\begin{aligned} y &= y_1(x)v(x) \\ &= cy_1(x) \int^x u(t) dt + ky_1(x) \end{aligned} \quad (8)$$

دیده می شود که وجود c فقط یک مضرب (۸) را به جواب دوم اضافه می کند. بدین سان دو جواب معادله (۱) عبارتند از

$$y = y_1(x), \quad y = y_1(x) \int^x u(t) dt \quad (9)$$

چون تابع اولیه y_1 نمی تواند مقدار ثابتی باشد، جوابها دارای استقلال خطی اند. در روش کاهش مرتبه حفظ کردن فرمولهای (۹) و (۶) اهمیتی ندارد، آنچه باید به خاطر سپرد این است که اگر یک جواب y معلوم باشد جواب دیگری به صورت $(x)y = y$ به روش بالا به دست می آید.

با وجود آن که روش کاهش مرتبه، طرز تعیین جواب اول معادله (۱) را مشخص نمی کند، اما از این جهت که مسئله حل معادله (۱) را به بافت تنها یک جواب کاهش می دهد امید بخش است.

جواب مستقل خطی دوم را که در (۹) آمده است می توان با استفاده از فرمول آبل در مورد رونسکین دو جواب مستقل خطی معادله (۱) نیز به دست آورد. این نکته در مسائل ۱۲ و ۱۳ بررسی می شود.

روش کاهش مرتبه در مورد معادلات غیر همگن نیز مفید است، این مطلب در مسئله ۱۵ بند ۲۰.۳ مورد بحث قرار می گیرد.

@jozve_iut

مثال. نشان دهید که $y = y$ یک جواب معادله مرتبه یک لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (10)$$

است، و جواب مستقل خطی دوم را بباید.

نخست اگر $y = y$ ، آنگاه $y' = y'$ و $y'' = y''$ و چون این مقادیر y ، y' و y'' را در معادله (۱۰) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$(1-x^2) \cdot 0 - 2x + 2x = 0$$

بنابراین $y = y$ یک جواب است. برای تعیین جواب دوم قرار می دهیم $xv(x) = y$ ، آنگاه

$$y' = xv' + v, \quad y'' = xv'' + 2v'$$

با جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۱۰) داریم

$$(1-x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0$$

پس از ساده کردن و تقسیم بر $(1-x^2)$ خواهیم داشت

$$v'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2} \right) v' = 0 \quad (11)$$

توجه شود که ضریب v' در $x=0$ نامعین است. اما، این مطلب در جواب نهایی هیچ اشکالی به وجود نمی‌آورد. نخست جوابی برای معادله (۱۱) در فواصل $-1 < x < 0$ به دست می‌آوریم.

معادله (۱۱) نسبت به v' یک معادله خطی مرتبه اول است، و دارای عامل انتگرال ساز $(1-x^2)$ می‌باشد، بنابراین

$$[x^2(1-x^2)v']' = 0$$

$$x^2(1-x^2)v' = c$$

از آنجا

$$\begin{aligned} v(x) &= c \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = c \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt \\ &= c \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه، دومین جواب معادله (۱۰) (با حذف ضریب ثابت بدون آنکه از عمومیت کاسته شود) عبارت است از

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (12)$$

گرچه تابع y_2 در $x=0$ نامعین است، اما حد $y_2(x) = xv(x)$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ وجوددارد. تابع y_2 که با رابطه (۱۲) در $-1 < x < 0$ تعریف شده است نه فقط در $-1 < x < 0$ صادق است بلکه در همه فاصله $-1 < x < 1$ در معادله دیفرانسیل (۱۰) صدق می‌کند. از طرف دیگر $y_2(x)$ هنگامی که $x \rightarrow \pm 1$ نامحدود می‌شود، خاصیت مزبور در ارتباط با این نکته است که ضریب "ز" در معادله (۱۰) به ازای $x = \pm 1$ صفر می‌شود در حالی که ضرایب "ز" و "ز" مخالف صفر باقی می‌مانند. این موضوع در فصل ۴ به تفصیل بررسی می‌شود.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۷ جواب دومی برای معادله دیفرانسیل داده شده به روش کاهش مرتبه بیابید.

$$y'' - 4y' - 12y = 0, \quad y_1(x) = e^{6x} \quad \text{۱}$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y_1(x) = e^{-x} \quad \text{۲}$$

$$x^2y'' + 2xy' = 0, \quad y_1(x) = 1 \quad .\quad .\quad .$$

درجه دامنه‌ای از x می‌توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1(x) = x \quad .\quad .\quad .$$

درجه دامنه‌ای از x می‌توان انتظار داشت که جواب معتبر باشد؟

$$x^2y'' + 2xy' + y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1} \quad .\quad .\quad .$$

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x \quad .\quad .\quad .$$

$$(1-x \cot x)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x \quad .\quad .\quad .$$

(اهمایی): فاصله $\pi < x < 0$ را در نظر بگیرید.

$$\int \frac{x dx}{1-x \cot x} = \ln|x \cos x - \sin x|$$

$$1/2. \text{ تحقیق کنید که } y_1(x) = x^{-1/2} \sin x \text{ معادله بدل رتبه ۱/۲}$$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

است، و جواب دوم را بباید.

۹. معادله دیفرانسیل

$$xy'' - (x+N)y' + Ny = 0$$

که در آن N عدد صحیح غیرمنفی است به وسیله پژوهشگران متعددی مورد بحث قرار گرفته است. ۱. یکی از علل توجه به آن این است که دارای یک جواب نمایی و یک جواب چند جمله‌ای است.

(الف) تحقیق کنید که یک جواب آن $y_1(x) = e^x$ است.

(ب) نشان دهید که جواب دوم به صورت $y_2(x) = e^x \int x^N e^{-x} dx$ می‌باشد. ۲. محاسبه کنید و نتیجه بگیرید که $y_2(x)$

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^N}{N!}$$

نکته جالب آن که $y_2(x)$ دقیقاً نخستین $N+1$ جمله سری تیلر e^x است.

۱۰. تحقیق کنید که $y_1(x) = 3x^2 - 1$ یک جواب معادله رتبه دوم معادله لزاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

۱. ت.آ. نیوتن (T.A. Newton)، «درباره استفاده از یک معادله دیفرانسیل در ایجاد چند جمله‌ایها»، American Mathematical Monthly, 81, 1974، صفحات ۵۹۲-۶۰۴. مأخذ دیگری نیز در آن آمده است.

است، و جواب دوم را باید فواید. فواید $x < -1/\sqrt{3}$ ، $-1 < x < 1/\sqrt{3}$ ، $x > 1/\sqrt{3}$ را جداگانه در نظر بگیرید، اما توجه شود که جواب نمایی بر روی $1 < x < -1$ معتبر است.

(اهمایی): با استفاده از روش کسرهای ساده می‌توان نشان داد که

$$\frac{1}{(3x^2 - 1)(1-x^2)} = A \left[\frac{1}{(\sqrt{3}x - 1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}x + 1)^2} \right] + B \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right]$$

ثابت‌های A و B را تعیین کنید.

۱۱. جریان دو بعدی یکنواخت نهری را حول یک استوانه مستدير ثابت که محور آن بر نهر عمود است در نظر می‌گیریم. در بررسی تلاطم جریان در اثر مجاورت استوانه به معادله دیفرانسیل

$$f'' + \delta(\xi f' + f) = 0$$

بر می‌خوردیم. در اینجا متغیر بدون بعد ξ نمایشگر تغییرات در امتدادی است که بر محور استوانه و نهره دو عمود می‌باشد، $(\xi) = \sqrt{3}x$ اندازه کاهش سرعت نهر در اثر مجاورت، پریم نمایشگر مشتق‌گیری نسبت به ξ ، و δ پارامتری فیزیکی است که با عکس انتشار تلاطم متناسب است. نشان دهید که $f = e^{-\delta \xi^2/2}$ یک جواب است و جواب عمومی را به صورت انتگرال بیاید.

۱۲. فرض می‌کنیم که y یک جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد که هیچگاه صفر نشود و می‌خواهیم جواب مستقل خطی دوم y_2 را بیایم. نشان دهید که $y_2 = W(y_1, y_1')/y_1^2$ یک جواب است و آنگاه y_2 را با استفاده از فرمول آبل مربوط به $W(y_1, y_2)$ بیاید.

۱۳. تحقیق کنید که $x = (x, y)$ یک جواب معادله

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0$$

است، و آنگاه با استفاده از نتیجه مسئله ۱۲، جواب مستقل خطی دوم را تعیین کنید.

۵.۳ معادلات همگن با ضرایب ثابت

در اینجا نظریه عمومی معادلات خطی همگن مرتبه دوم را کنار گذاشته و به شرح روش‌های حل واقعی این گونه معادلات می‌پردازیم. در این بند مسئله تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت را بررسی می‌کنیم. این مسئله با

۱. دانیل برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲) و اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) هر دو طرز حل این نوع معادلات را قبل از ۱۷۴۵ می‌دانستند. نخستین گزارش در این مورد را اویلر در ۱۷۴۳ منتشر کرد.

ضرایب متغیر دشوارتر است و بررسی آن در فصل ۴ انجام خواهد گرفت.^۱
معادله

$$\begin{aligned} L[y] &= ay'' + by' + cy \\ &= (aD^2 + bD + c)y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

را که در آن $a \neq 0$ ، b و c اعداد حقیقی‌اند در نظر می‌گیریم. چون a ، b و c ثابت می‌باشند مستقیماً از قضیه وجود ویکتاپی ۲.۳ نتیجه می‌شود که جوابهای معادله (۱) روی $x < \infty$ معتبرند.

معادله (۱) این مسئله را مطرح می‌کند که کدام تابع $y(x) = \phi(x)$ است که a برابر مشتق دوم آن به اضافه b برابر مشتق اول آن به اضافه c برابر خود تابع به ازای همه مقادیر x صفر می‌شود؟ با دقت در این مطلب سرشته یک روش برای حل معادله مزبور به دست می‌آید. چون ضرایب ثابت‌اند طبیعی است توابع $y(x) = e^{rx}$ را طوری در نظر بگیریم که r ، $'r$ ، $"r$ فقط در ضرایب ثابت با هم اختلاف داشته باشند.

تابعی را می‌شناسیم که به طور وسیعی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مطالعه شده است و دقیقاً همین خاصیت را دارد یعنی همان تابع نمایی e^{rx} . بنابراین سعی می‌کیم برای معادله (۱) جوابهایی به صورت e^{rx} با مقادیر متناسب r بیابیم. با جایگزینی $e^{rx} = y$ در معادله (۱) خواهیم داشت

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = 0 \quad (2)$$

یا

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3)$$

چون e^{rx} صفر نیست، باید داشته باشیم

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (4)$$

اگر r یک ریشه این معادله درجه دوم، که اغلب آن را معادله مشخصه یا معین می‌نامند، باشد، آنگاه e^{rx} یک جواب معادله (۱) خواهد بود. توجه شود که ضرایب معادله مشخصه (۴) همان ضرایب معادله دیفرانسیل (۱) هستند. r_1 و r_2 ریشه‌های معادله (۴) عبارتند از

$$r_1 = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad (5)$$

روشن است که نوع جوابهای معادله (۱) به مقادیر r_1 و r_2 بستگی دارد، این مقادیر به نوبه خود به ضرایب ثابت معادله دیفرانسیل به وسیله روابط (۵) بستگی دارند. در اینجا نیز

۱. در بعضی از حالتها می‌توان با تعویض متغیر مناسب، معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد (مسائل ۱۶، ۱۷ و ۱۸ بند ۱.۵.۳ را ببینید).

به همان گونه که در جبر مقدماتی عمل می شود باید حالتهاي را که در آن $b^2 - 4ac < 0$ مشتت، صفر و یا منفی است جدا گانه بررسی کنیم.

دو حالت نخست را در این بند مطالعه می کنیم، بررسی حالت $b^2 - 4ac > 0$ را به بند بعد موکول می نماییم.

روشهای حقیقی و متمایز. هنگامی که $b^2 - 4ac > 0$ ، روابط (۵) دو مقدار حقیقی و متمایز برای r_1 و r_2 به دست می دهند. بنا بر این $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ جوابهای معادله (۱) می باشند. علاوه بر این به آسانی تحقیق می شود که $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})$ هیچگاه صفر نیست (مسئله ۱۵ را ببینید). بنا بر این جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (6)$$

مثال ۱. جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ را که در شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ صدق می کند ببینید.

با جایگزینی $y = e^{rx}$ خواهیم داشت

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$(r+2)(r+3) = 0$$

یا

بنا بر این $r_1 = -2$ و $r_2 = -3$ و جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

برای برقراری شرایط اولیه در $x = 0$ باید داشته باشیم

$$c_1 + c_2 = 1, \quad -2c_1 - 3c_2 = 0$$

از حل این معادلات به دست می آید

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1$$

بنا بر این جواب معادله دیفرانسیل مذبور که در شرایط داده شده صدق کند عبارت است از

$$y = e^{-2x} - e^{-3x}$$

روشهای حقیقی و برابر. هنگامی که $b^2 - 4ac = 0$ ، از روابط (۵) نتیجه می شود که $r_1 = r_2 = -b/2a$ ، و فقط یک جواب $y = v(x)e^{-(b/2a)x}$ را داریم. اما، با استفاده از روش کاهش مرتبه (بند ۴.۳ را ببینید) می توان جواب دومی به دست آورد. قرار می دهیم

$$y = v(x)e^{-(b/2a)x}$$

آنگاه

$$y' = v'(x)e^{-(b/2a)x} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-(b/2a)x}$$

$$y'' = \left[v''(x) - \frac{b}{a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x) \right] e^{-(b/2a)x}$$

با جایگزینی y, y' و y'' در معادله (۱) و تقسیم بر سازه مشترک $e^{-(b/2a)x}$ معادله زیر برای v حاصل می‌شود:

$$a\left(v'' - \frac{b}{a}v' + \frac{b^2}{4a^2}v\right) + b\left(v' - \frac{b}{2a}v\right) + cv = 0$$

پس از ساده کردن داریم

$$av'' - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)v = 0$$

چون $0 = b^2 - 4ac$ ، جمله آخر حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$v'' = 0$$

بنابراین

$$v(x) = c_1x + c_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه‌اند. در نتیجه، جواب دوم معادله (۱) عبارت است از $v(x) = c_1x + c_2e^{-(b/2a)x}$. به‌ویژه به ازای $c_1 = 1, c_2 = 0$ داریم $v(x) = xe^{-(b/2a)x}$. از بحث مربوط به روش کاهش مرتبه می‌دانیم که $x e^{-(b/2a)x}$ و $e^{-(b/2a)x}$ جواب‌های مستقل خطی معادله (۱) می‌باشند. این نکته را می‌توان با محاسبه رونسکین (مسئله ۱۶ را ببینید) نیز اثبات کرد. بدین‌سان در حالت $0 = b^2 - 4ac$ جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}, \quad r = -b/2a \quad (7)$$

مثال ۲. جواب عمومی معادله

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

را بیابید.

با جایگزینی $y = e^{rx}$ خواهیم داشت

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

با

$$(r+2)(r+2) = 0$$

بنابراین $r = -2$ یک ریشه مکرر معادله مشخصه است. یک جواب e^{-2x} است، و جواب مستقل خطی دیگر، بنابراین فوق e^{-2x} خواهد بود. بدین‌سان جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 e^{-rx} + c_2 x e^{-rx}$$

روش جالب دیگری برای تعیین جواب دوم هنگامی که ریشه‌های معادله مشخصه برآبر باشند وجود دارد. چون r_1 ریشه مکرر $ar^2 + br + c = 0$ است، در نتیجه $ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2$

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = ae^{rx}(r - r_1)^2 \quad (8)$$

طرف دوم رابطه (8) به ازای $r = r_1$ صفر می‌شود، یعنی $e^{r_1 x}$ همان طور که قبلاً می‌دانستیم یک جواب معادله (1) است. چون از دو طرف رابطه (8) نسبت به x مشتق بگیریم و ترتیب مشتق گیری نسبت به r و x را تعویض کنیم خواهیم داشت

$$L[xe^{rx}] = axe^{rx}(r - r_1)^2 + 2ae^{rx}(r - r_1) \quad (9)$$

به ازای $r = r_1$ طرف دوم معادله (9) صفر می‌شود و بنا بر این $L[xe^{r_1 x}] = 0$ ، بدینسان $xe^{r_1 x}$ نیز یک جواب معادله (1) است.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۳ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیاورد. اگر شرایط اولیه داده شده باشند جوابی را که در آن شرایط صدق می‌کند تعیین کنید.

$$4y'' + 4y' + y = 0 \quad .2$$

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad .1$$

$$2y'' - 3y' + y = 0 \quad .4$$

$$4y'' - y' - y = 0 \quad .3$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad .5$$

$$y'' - y = 0 \quad .5$$

$$y'' - 9y' + 9y = 0 \quad .8$$

$$y'' + 5y' = 0 \quad .7$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad .10$$

$$y'' - 2y' - 2y = 0 \quad .9$$

$$y'' + y' - 2y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .11$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad .12$$

$$y'' + 8y' - 9y = 0,$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \quad .13$$

۱۴. نشان دهید که جواب عمومی $y'' - 4y = 0$ عبارت است از

$$y = c_1 \sinh 2x + c_2 \cosh 2x$$

۱۵. نشان دهید که اگر $r_1 \neq r_2$ ، آنگاه توابع $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ روی $x \in (-\infty, \infty)$ دارای استقلال خطی‌اند. این نکته اثبات نتیجه‌ای را که در رابطه (۶) متن بیان شده تکمیل می‌کند.

۱۶. نشان دهید که به ازای هر مقدار r داریم $W(e^{rx}, xe^{rx}) \neq 0$. از اینجا نتیجه

بگیرید که اگر e^{rx} و $x e^{rx}$ جوابهای $ay'' + by' + cy = 0$ باشند، آنگاه این جوابها یک مجموعه اساسی جواب تشکیل می‌دهند.

۱۷. در این مسئله روش دیگری برای تشکیل جواب دوم معادله $ay'' + by' + cy = 0$ هنگامی که r_1 و r_2 ریشه‌های معادله مشخصه $ar^2 + br + c = 0$ برابر باشند، بیان می‌کنیم. نخست فرض کنیم که $r_2 \neq r_1$ ، و e^{rx} و $x e^{rx}$ جوابهای معادله دیفرانسیل مذکور باشند. تحقیق کنید که $\phi(x; r_1, r_2) = (e^{r_2 x} - e^{r_1 x}) / (r_2 - r_1)$ نیز به ازای $r_2 \neq r_1$ یک جواب است. اکنون r_1 را ثابت گرفته و حد $\phi(x; r_1, r_2)$ را هنگامی که $r_2 \rightarrow r_1$ با استفاده از دستور هوپیتال بیابید.

۱۰.۵.۳ ریشه‌های مختلف

برای تکمیل بحث معادله

$$(1) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

حالتی را در نظر می‌گیریم که ریشه‌های معادله مشخصه

$$(2) \quad ar^2 + br + c = 0$$

اعداد مختلفی به صورت $\lambda \pm i\mu$ باشند، که در آن λ و μ حقیقی‌اند. در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که معنای عبارتی به صورت $e^{(\lambda+i\mu)x}$ چیست؟

نخست یادآوری می‌کنیم که بنا بر آنچه در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی دیده‌ایم e^x حول $x=0$ دارای سری تیلر زیر است

$$(3) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty$$

اگر در رابطه (۳) به جای x قرار دهیم ix و نتیجه را به عنوان تعریف e^{ix} انتخاب کنیم، خواهیم داشت

$$(4) \quad \begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

که در آن از روابط $i^4 = 1$ ، $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ وغیره استفاده شده است. سری اول در رابطه (۴) دقیقاً همان سری تیلر $\cos x$ ، و سری دوم همان سری تیلر $\sin x$ است. از این رو بنا بر تعریف قرار می‌دهیم

$$(5) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

این رابطه به فرمول اویلر موسم است. با جایگزینی $x -$ به جای x در رابطه (۵) و توجه به روابط $\sin(-x) = -\sin x$ ، $\cos(-x) = \cos x$ خواهیم داشت

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (6)$$

توابع $\cos x$ و $\sin x$ را می‌توان به ترتیب با جمع و تفریق روابط (۵) و (۶) بر حسب e^{ix} و e^{-ix} بیان کرد.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

اکنون بنا بر تعریف قرار می‌دهیم

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) \quad (7)$$

با این تعریف می‌توان نشان داد که قوانین معمولی جبر برقرارند. به عنوان مثال

$$\frac{e^{(\lambda+i\mu)x}}{e^{(\alpha+i\beta)x}} = e^{(\lambda+i\mu)x - (\alpha+i\beta)x} = e^{(\lambda-\alpha)x + i(\mu-\beta)x}$$

و

$$[e^{(\lambda+i\mu)x}]^n = e^{n(\lambda+i\mu)x} = e^{n\lambda x + in\mu x}$$

که در آن n می‌تواند هر عدد صحیح مثبت یا منفی باشد. در واقع این نتیجه به ازای مقادیر غیر صحیح n نیز برقرار است.

بالاخره، باید مسئله مشتق‌گیری از $e^{(\lambda+i\mu)x}$ نسبت به x را بررسی کنیم. گرچه به ازای r حقیقی داریم

$$\frac{d}{dx} (e^{rx}) = r e^{rx} \quad (8)$$

اما معلوم نیست که به ازای r مختلط این رابطه درست باشد. به هر حال به آسانی با محاسبه مستقیم و استفاده از تعریف داده شده در رابطه (۷) می‌توان نشان داد که رابطه (۸) به ازای r مختلط نیز برقرار است. در واقع، قوانین معمول حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در مورد نمای مختلط هنگامی که e^{rx} به ازای r مختلط با رابطه (۷) تعریف شده باشد برقرارند. به طور عامتر در مورد هر تابع با مقدار مختلط $f(x) = u(x) + iv(x)$ که در آن u و v توابعی با مقدار حقیقی‌اند، و به ازای هر عدد مختلط c داریم

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x), \quad [cf(x)]' = cf'(x).$$

اکنون می‌توان به مسئله حل معادله (۱) هنگامی که ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشند پرداخت. چون a ، b و c حقیقی‌اند، ریشه‌ها به صورت زوج مزدوج $\lambda + i\mu$ و $\lambda - i\mu$ خواهند بود، بنابراین جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda-i\mu)x} \quad (9)$$

جواب عمومی (۹) دارای این نقص است که $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ توابعی با مقدار مختلط‌اند. چون معادله دیفرانسیل حقیقی است می‌خواهیم در صورت امکان جواب عمومی معادله (۱) به صورت ترکیب خطی جوابهایی با مقدار حقیقی باشد. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم. چون $e^{(\lambda+i\mu)x}$ و $e^{(\lambda-i\mu)x}$ جوابهای معادله (۱) می‌باشند، مجموع و تفاضل آنها نیز جواب است، بدینسان

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} + e^{(\lambda-i\mu)x} &= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) + e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \sin \mu x) \\ &= 2e^{\lambda x} \cos \mu x \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} - e^{(\lambda-i\mu)x} &= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) - e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \sin \mu x) \\ &= 2ie^{\lambda x} \sin \mu x \end{aligned}$$

جوابهای معادله (۱) می‌باشند. بنا بر این، با صرف نظر کردن از ضرایب ثابت ۲ و ۳، توابع

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (10)$$

جوابهای معادله (۱) و با مقدار حقیقی‌اند. به آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$W(e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x) = \mu e^{2\lambda x}$$

و چون این هیچگاه صفر نمی‌شود دو تابع مزبور یک مجموعه اساسی از جوابهای با مقدار حقیقی را تشکیل می‌دهند. بنا بر این می‌توان جواب عمومی معادله (۱) را به صورت زیر بیان کرد

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت دلخواه‌اند.

مثال. جواب عمومی معادله زیر را بیاید

$$y'' + y' + y = 0 \quad (11)$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^2 + r + 1 = 0$$

و ریشه‌های آن عبارتند از

$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب عمومی معادله (۱۱) چنین است

$$y = e^{-x/2} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

بار دیگر توابع $\cos \mu x$ و $\sin \mu x$ جوابهای با مقدار حقیقی معادله (۱) را در نظر می‌گیریم. این توابع به ترتیب بخش‌های حقیقی و موهومی جواب با مقدار مختلط $x^{(\lambda+i\mu)^2}$ می‌باشند. این ویژگی حالت خاصی از یک نتیجه کلی است، که از حقیقی بودن ضرایب معادله دیفرانسیل مزبور خواه ثابت و یا تابع با مقدار حقیقی باشند به دست می‌آید. این نتیجه را به عنوان یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۳. فرضی کنیم تابع با مقدار حقیقی p و q (وی فاصله باز $\alpha < x < \beta$) پیوسته باشد، و $y = u(x) + iv(x)$ یک جواب با مقدار مختلط معادله دیفرانسیل

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (12)$$

باشد که در آن تابع u و v با مقدار حقیقی‌اند. در این صورت u و v نیز جوابهای معادله دیفرانسیل (۱۲) می‌باشند.

برای اثبات این قضیه، کافی است توجه شود که

$$\begin{aligned} L[u+iv] &= (u+iv)'' + p(u+iv)' + q(u+iv) \\ &= (u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \\ &= L[u] + iL[v] = 0 \end{aligned}$$

اما یک عدد مختلط وقتی و فقط وقتی صفر است، که هر دو بخش حقیقی و موهومی آن صفر باشند، بدین سان $L[u] = 0$ و $L[v] = 0$.

اگر ثابت‌های a ، b و c در معادله (۱) عدد مختلط باشند، باز هم می‌توان جوابهایی به صورت e^{rx} به دست آورد، و باید در معادله زیر صدق کند

$$ar^2 + br + c = 0$$

اما، در این حالت عموماً ریشه‌های معادله مشخصه اعداد مختلط‌اند، ولی مزدوج نیستند، و جوابهای متناظر به معادله (۱) با مقدار مختلط خواهند بود. این مطلب در مسائل ۱۴، ۱۵ به اختصار بحث شده است.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۸ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را تعیین کنید. در صورتی که شرایط اولیه داده شده باشد، جوابی را که در آن شرایط صدق می‌کند بیابید.

$$\begin{array}{lll} y'' - 2y' + 6y = 0 & .2 & y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y'' + 2y' + 2y = 0 & .4 & y'' + 2y' - 8y = 0 \\ y'' + 6y' + 13y = 0 & .6 & 9y'' - 6y' + y = 0 \\ y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 & .7 \\ y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 & .8 \end{array}$$

۹. تحقیق کنید که $W(e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \sin \mu x) = \mu e^{2\lambda x}$

۱۰. در این مسئله پریم، مشتق‌گیری نسبت به زمان t را نشان می‌دهد.

(الف) نشان دهید که اگر a, b و c ثابت‌های مثبتی باشند، آنگاه همه جوابهای معادله $ay'' + by' + cy = 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ به صفر می‌گردند. آیا اگر $b = 0$ یا $c = 0$ ، این نتیجه برقرار خواهد بود؟

(ب) نشان دهید که به ازای هر مقدار ثابت k تابع $y = \sin t$ یک جواب معادله زیر است

$$y'' + (k \sin^2 t)y' + (1 - k \cos t \sin t)y = 0$$

همچنین نشان دهید که اگر $0 < k < 2$ ، آنگاه $0 < k \sin^2 t < 1$ و $1 - k \cos t \sin t > 0$. بدین‌سان مشاهده می‌شود که گرچه ضرایب این معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر، غیرمنفی‌اند (و ضریب t فقط در نقاط $\dots, 0, \pi, 2\pi, \dots$ صفر است) دارای جوابی است که به ازای $t \rightarrow \infty$ به صفر نمی‌گردد. بدین‌سان وضعیتی را که در نظریه معادلات دیفرانسیل چندان غیرعادی نیست ملاحظه می‌کنیم: امکان دارد معادلاتی که ظاهرآ بسیار بهم شبیه‌اند، دارای خواص کاملاً متفاوتی باشند.

۱۱. نشان دهید که جواب عمومی معادله

$$y'' + y = 0$$

را می‌توان به صورت $y = A_1 \sin(x + \delta_1)$ و $y = A_2 \cos(x + \delta_2)$ که در آنها A_1, A_2 و δ_1, δ_2 مقادیر ثابت‌اند بیان کرد.

۱۲. نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی r داریم

$$(\cos x + i \sin x)' = \cos rx + i \sin rx$$

این اتحاد را هنگامی که r یک عدد صحیح مثبت باشد، فرمول دعواود^۱ می‌نامند. با استفاده از این نتیجه فرمولهای کمان مضاعف، $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

۱۳. نشان دهید که هر عدد مختلط $a + ib$ را می‌توان به صورت $Ae^{i\theta}$ ، که در آن

A و θ اعداد حقیقی مثبت اند و $2\pi < \theta \leq 0$ نوشت.

(ا) اینها باید با استفاده از فرمول اویلر، $Ae^{i\theta}$ را بسط دهید و A و θ را بر حسب a و b بیابید.

۱۴۰. دو ریشه دوم عدد مختلط $Ae^{i\theta/2}$ را با $\pm A^{1/2}e^{i\theta/2}$ تعریف می کنیم، ریشه های دوم $i+1$ و $-i$ را حساب کنید.

۱۵۰. معادلات زیر را حل کنید

$$(f) \quad y'' + iy' + 2y = 0 \quad (b) \quad y'' + y' + 2y = 0$$

ملاحظه شود که ریشه های معادلات مشخصه اعداد مختلط مزدوج نیستند. آیا بخش حقیقی یا موهومی هیچ یک از جوابها در معادله دیفرانسیل مذبور صدق می کند؟

۱۶۰. اکنون که طرز حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت را فراگرفتیم به بررسی شرایطی که تحت آن می توان معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را با تعویض متغیر مناسبی به معادله ای با ضرایب ثابت تبدیل کرد می پردازیم. تعویض متغیر مستقل $(x) = z$ را، که در آن موقتاً ارتباط بین z و x تصریح نشده است، در نظر می گیریم. نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz} \quad (f)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{dy}{dz}$$

(ب) معادله دیفرانسیل مذبور به صورت زیر در می آید

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + p(x) \frac{dz}{dx}\right) \frac{dy}{dz} + q(x)y = 0$$

(ج) معادله قسمت (ب) با انتخاب

$$z = u(x) = \int^x [q(t)]^{1/2} dt$$

دارای ضرایب ثابت خواهد بود به شرط آنکه

$$\frac{z'' + p(x)z'}{q(x)} = \frac{q'(x) + 2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}}$$

مقداری ثابت باشد. باید توجه داشت که هنگامی تبدیل $(x) = z$ با مقدار حقیقی است که $q(x) \geq 0$. این بدان معنی است که در معادله دیفرانسیل اصلی $q(x)$ تغییر علامت ندهد، اگر $q(x) < 0$ باشد، معادله دیفرانسیل را در $1 -$ ضرب می کنیم.

از اینجا نتیجه بگیرید که شرط لازم و کافی برای امکان تبدیل معادله $z'' + p(x)z' + q(x)y = 0$ به یک معادله با ضرایب ثابت به وسیله تعویض متغیر مستقل

آن است که تابع $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ برابر مقداری ثابت باشد.

۱۷۰. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۶، کدام یک از معادلات زیر را می‌توان با تعویض متغیر مستقل به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد

$$y'' + xy' + e^{-x}y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 3xy' + x^2y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ب})$$

$$xy'' + (x^2 - 1)y' + x^2y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (\text{ج})$$

۱۸۰. با استفاده از مسئله ۱۶، نشان دهید که همواره می‌توان معادله

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \quad x > 0$$

را که در آن α و β ثابت‌های حقیقی‌اند، با قرار دادن $x = \ln z$ به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد. این گونه معادله را معادله اویلر می‌نامند، و در بند ۴.۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت. جواب عمومی

$$x^2y'' + xy' + y = 0, \quad x > 0$$

را پیدا می‌کند.

۱۹. با تعویضهای مناسب متغیرها می‌توان معادله خطی همگن مرتبه دوم را که در آن $p(x)y' + q(x)y = 0$ به یک معادله مرتبه اول تبدیل کرد. (الف) قرار دهید $y = u/v$ و $v = v(x)$ بر حسب u تعیین کنید. آنگاه نشان دهید که u در معادله

$$\frac{du}{dx} = q(x) - p(x)u + u^2$$

صدق می‌کند. این معادله به معادله ریکاتی موسوم است، و در مسئله ۳۵ بند ۸.۲ بررسی شده است. توجه شود که این تقلیل مرتبه به بهای از دست دادن همگنی معادله تمام شده است.

(ب) اکنون معادله کلی ریکاتی

$$\frac{dw}{dx} = q_0(x) + q_1(x)w + q_2(x)w^2$$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که با تبدیل $w = -y/q_2$ ، به معادله خطی همگن مرتبه دوم زیر می‌رسیم

$$q_2(x)y'' - [q'_2(x) + q_1(x)q_2(x)]y' + q''_2(x)q_0(x)y = 0$$

۳.۶ معادله ناهمگن

در بندهای پیشین این فصل نظریه عمومی معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم مورد بحث قرار گرفت، و در حالت ضرایب ثابت طرز ساختن جوابها را نشان دادیم. اکنون

توجه خود را به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن

$$(1) \quad L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

معطوف می‌داریم. در طول بحث فرض براین است که توابع p ، q و g روی فاصله مورد نظر پیوسته‌اند.

در مهندسی نوین مسئله حل معادله (1) را اغلب به عنوان یک مسئله ورودی-خر裘ی مطرح می‌کنند. موقتاً فرض کنیم که معادله دیفرانسیل (1) نمایشگر یک دستگاه مکانیکی یا الکتریکی باشد، طبیعی است که می‌توان جواب $y(x) = \phi$ را به عنوان خ裘ی دستگاه در نظر گرفت. ضرایب p و q به وسیله مکانیسم فیزیکی مزبور معین می‌گردند و جمله ناهمگن g همان تابع ورودی است. مسئله حل معادله (1) متاظر است با تعیین خ裘ی دستگاه به ازای توابع ورودی مختلف.

پیش از آنکه به حالتهای خاص معادله (1) پردازیم، چند قضیه کلی ساده و بسیار مفید اثبات می‌کنیم که موجب تسهیل بحث آتی خواهد گردید.

قضیه ۱۰۳. تفاصل هردو جواب معادله دیفرانسیل (1)،

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

یک جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر زیر است

$$(2) \quad L[u] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

برای اثبات این قضیه فرض کنیم که توابع u_1 و u_2 جوابهای معادله (1) باشند. آنگاه

$$L[u_1] = g$$

$$L[u_2] = g$$

با کم کردن معادله دوم از معادله اول به دست می‌آید

$$L[u_1] - L[u_2] = 0$$

و چون L یک عملگر خطی است،

$$L[u_1 - u_2] = 0$$

که همان نتیجه مطلوب است. با کمک این قضیه می‌توان قضیه مهم زیر را اثبات کرد.

قضیه ۱۱۰۳. اگر ϕ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن (1)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

باشد، آنگاه می‌توان هر جواب $y(x) = \phi$ را این معادله را به صورت زیر بیان کرد

$$(3) \quad \phi(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

که دلآن y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله همگن متناظر می‌باشند.

برای اثبات این قضیه، ملاحظه می‌کنیم که بنا بر قضیه ۱۵.۳، $y - \phi$ یک جواب معادله همگن مزبور است. بدینسان بنا بر قضیه ۴.۳ بند ۲۰۳، می‌توان $y - \phi$ را به صورت یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 بیان کرد، و قضیه ثابت می‌شود.

بر حسب معمول ترکیب خطی (۳) را جواب عمومی معادله (۱) می‌نامند.

در نتیجه، برای تعیین جواب عمومی معادله (۱) باید جواب عمومی معادله همگن (۲) را به دست آورد و سپس یک جواب دلخواه معادله ناهمگن را بدان افزود. همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود (بند ۱۰۳ را بینید) جواب عمومی معادله (۱) شامل دو ثابت دلخواه است، و از این‌رو برای مشخص کردن یک جواب یکتاًی معادله (۱) لازم است دو شرط اضافی تصریح شود، یعنی شرایط اولیه $y = (x)y_1 + (x)y_2$.

جواب عمومی معادله همگن (۲) را اغلب جواب مکمل نامیده و با y_p نشان می‌دهند. بدینسان $(x)y_2 + c_1y_1 = c_1y_1 + (x)y_2 = y_p$ ، جواب معادله ناهمگن، را معمولاً "جواب خصوصی" می‌نامند. توجه شود که p یکتا نیست، زیرا اگر \bar{Y} یک جواب معادله ناهمگن باشد، آنگاه اگر به \bar{Y} هر ترکیب خطی از y_1 و y_2 را بیفزاییم عبارت حاصل همچنان یک جواب معادله ناهمگن خواهد بود. از قضیه ۱۱.۳ نتیجه می‌شود که جواب عمومی معادله ناهمگن (۱) چنین است

$$y = y_p + (x)y_1 + (x)y_2 \quad (4)$$

در بسیاری از مسائل ممکن است جمله ناهمگن g خیلی پیچیده باشد، اما اگر بتوان آن را به صورت مجموع تعداد متناهی از توابع بیان کرد می‌توان با استفاده از خطی بودن معادله دیفرانسیل چند مسئله ساده‌تر را جایگزین مسئله اصلی کرد. به عنوان مثال، فرض کنیم که بتوان $(x)g$ را به صورت $(x)g_1 + (x)g_2 + \dots + (x)g_m$ نوشت، آنگاه معادله (۱) چنین نوشته می‌شود

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x) \quad (5)$$

اگر بتوان y_p ، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$L[y] = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

را پیدا کرد، آنگاه با جایگزینی مستقیم دیده می‌شود که

$$y_p(x) = y_m(x) + \dots + y_1(x) \quad (7)$$

یک جواب خصوصی معادله (۵) است. بنابراین جواب عمومی معادله (۵) به صورت زیر خواهد بود

۱. این اصطلاح چندان مناسب نیست، زیرا هر جواب که در شرایط اولیه مفروض صدق کند نیز جواب خصوصی نامیده هی‌شود. اما معمولاً می‌توان مقصود را از خود متن دریافت.

$$y = y_0 + \dots + y_n(x) \quad (8)$$

عموماً، تعیین جوابهای معادلات (۶) و جمع نتایج حاصل، از حل معادله (۵) به صورت اصلی آسانتر است. این روش را که در آن جواب مسائل پیچیده با جمع جوابهای مسائل ساده‌تر ساخته می‌شود، روش انطباق می‌نامند.

مثال. جواب عمومی معادله زیر را بیابید

$$y'' + 4y' + 4y = e^{rx} \quad (9)$$

نخست معادله همگن متناظر $y'' + 4y' + 4y = 0$ را در نظر می‌گیریم. با جایگزینی $y = e^{rx}$ معادله مشخصه $r^2 + 4r + 4 = 0$ حاصل می‌شود. بدینسان جواب مکمل عبارت است از

$$y_0(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

برای تعیین یک جواب خصوصی معادله (۹) جوابهای خصوصی معادلات $y'' + 4y' + 4y = 0$ و $y = e^{rx} + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ را با هم جمع می‌کنیم. بدآسانی می‌توان تحقیق کرد که جوابهای خصوصی این معادلات به قریب عبارتند از $x^{\frac{1}{4}} \cos \frac{1}{2}x$ و $x^{\frac{1}{4}} \sin \frac{1}{2}x$. بدینسان جواب عمومی معادله (۹) عبارت است از

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x^{\frac{1}{4}} \cos \frac{1}{2}x + x^{\frac{1}{4}} \sin \frac{1}{2}x$$

۱.۶.۳ روش ضرایب نامعین

برای به دست آوردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل خصی ناهمگن مرتبه دوم می‌توان از روش‌های متعددی استفاده کرد. روش ضرایب نامعین، در صورتی که قابل کاربرد باشد، یکی از ساده‌ترین روش‌های است. اساس این روش عبارت است از آنکه نخست شکل جواب خصوصی را حدس زده و سپس این تابع را که معمولاً شامل یک یا چند ضریب مجهول است در معادله دیفرانسیل جایگزین کنیم. هنگامی این روش موفقیت آمیز است که بتوان ضرایب مجهول را طوری تعیین کرد که تابع مزبور واقعاً در معادله دیفرانسیل صدق کند. روش نامعین است که این روش به مقیاس وسیعی بستگی به آن دارد. که از پیش شکل کلی جواب خصوصی را پیدا کنیم. در مورد یک معادله دیفرانسیل کامل دلخواه، چیزی نمی‌توان پیش‌بینی کرد. اما، اگر معادله به صورت

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x) \quad (1)$$

باشد که در آن a ، b و c ثابت‌های حقیقی‌اند و $g(x)$ جمله ناهمگن، یک تابع نمایی (e^{ax})، یا یک چندجمله‌ای ($a_n x^n + \dots + a_0$)، یا واجد خاصیت سینوسی ($\cos \beta x$ یا $\sin \beta x$) باشد، می‌توان قواعد ویژه‌ای برای تعیین جواب خصوصی بر روش ضرایب نامعین به دست

داد. این قواعد حالت کلیتری را که در آن $(x)g$ به صورت حاصل ضرب جمله‌ایی از نوع بالا مانند

$$g(x) = e^{\alpha x} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases} \quad (2)$$

باشد شامل می‌شود. توجه شود که هر حاصل ضرب توابع نمایی، چند جمله‌ای، سینوسی و کسینوسی هم‌ارز با مجموع جمله‌ایی از نوع (2) است. به ویژه، همواره می‌توان حاصل ضرب دو یا چند تابع سینوسی را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به مجموع توابع سینوسی تنها تبدیل کرد. حالاتی را که در آن $(x)g$ مجموع جمله‌ایی از نوع (2) است می‌توان با استفاده از روش ازطباق که در بند قبل بیان شد بررسی کرد. روش ضرایب نامعین بدندرت می‌تواند در مواردی که جمله‌های ناهمگن، از نوع (2) پیچیده‌تر باشند یا معادلات با ضرایب متغیر باشند مفید واقع شود.

پیش از آنکه روش کلی را مورد بحث قرار دهیم، آن را با ذکر چند مثال ساده توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر باید

$$y'' - 3y' + 4y = 2 \sin x \quad (3)$$

می‌خواهیم تابع y را طوری تعیین کنیم که مجموع مشتق دوم آن منهای سه برابر مشتق اول منهای چهار برابر خود تابع برابر $x \sin x$ گردد. آزمون توابعی از قبیل $\ln x$ ، e^x یا x^2 به عنوان $(x)y$ نمی‌تواند چندان مفید باشد، زیرا غیرممکن است از ترکیب این نوع توابع و مشتقهای آنها $\sin x$ را به دست آورد. توابعی که برای $(x)y$ مناسب به نظر می‌رسند عبارتند از $\cos x$ و $\sin x$. بنا براین $(x)y$ را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x$$

که در آن A و B فعلاً ثابت‌های مجهولی هستند. آنگاه

$$y'_p(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$y''_p(x) = -A \cos x - B \sin x$$

با جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (3) و جمع‌بندی جمله‌ها داریم

$$(-A - 2B - 4A) \cos x + (-B + 3A - 4B) \sin x = 2 \sin x$$

این معادله متحداً برقرار خواهد بود اگر و فقط اگر

$$-5A - 2B = 0, \quad 3A - 5B = 2$$

از آنجا $A = \frac{2}{17}$ ، $B = -\frac{5}{17}$ و یک جواب خصوصی معادله (3) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x)$$

مثال ۲. یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' - 4y' + 4y = 4x^2 \quad (4)$$

طبعاً تابع $y = Ax^2$ را که در آن باید ثابت A را تعیین کرد مورد آزمون قرار می‌دهیم. در این صورت $y' = 2Ax$ ، $y'' = 2A$ و با جایگزینی در معادله (۴) خواهیم داشت

$$2A - 4Ax + 4Ax^2 = 4x^2$$

اگر این معادله بخواهد به ازای همه مقادیر x برقرار باشد باید ضرایب توانهای مشابه x در هر دو طرف معادله برابر باشند. از اینجا سه معادله حاصل می‌شود و هیچ مقدار A در این سه معادله صادق نیست. بنابراین تعیین یک جواب خصوصی معادله (۴) به صورت Ax^2 غیرممکن است.

اما، اگر جمله ناهمگن $4x^2$ در معادله (۴) را به صورت چند جمله‌ای $5x^2 + 5x + 5$ تصور کنیم، معقول خواهد بود که برای $y = Ax^2 + Bx + C$ عبارت $Ax^2 + Bx + C$ را انتخاب کنیم و ثابتی A ، B و C را تعیین نماییم. از جایگزینی y ، y' و y'' در معادله (۴) و تساوی ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف معادله، یک دستگاه سه معادله جبری ناهمگن خطی برای سه مجهول A ، B و C حاصل می‌گردد. جواب این دستگاه عبارت است از $A = -1$ ، $B = \frac{3}{2}$ و $C = -\frac{13}{8}$. بنابراین یک جواب خصوصی معادله (۴) چنین است

$$y_p(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

ممکن است برای دانشجو این سؤال مطرح شود که اگر یک چند جمله‌ای از درجه بالاتر مانند $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ برای y انتخاب می‌کردیم، چه اتفاقی رخ می‌داد. پاسخ آن است که همه ضرایب بالاتر از جمله درجه دوم صفر می‌شدند. بدینسان، به جز در موارد استثنایی که بعداً بیان خواهد شد، لزومی ندارد درجه چند جمله‌ای که برای y انتخاب می‌کنیم از درجه چند جمله‌ای عبارت ناهمگن معادله بیشتر باشد.

مثال ۳. یک جواب خصوصی برای معادله زیر بیابید

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-x} \quad (5)$$

به همان دلایلی که قبل از کار رفت، فرض می‌کنیم که $y = Ae^{-x}$. با جایگزینی در معادله (۵) خواهیم داشت

$$(A + 4A - 4A)e^{-x} = e^{-x}$$

یا

$$\circ. Ae^{-x} = e^{-x}$$

که نمی‌توان از آن A را تعیین کرد. بنابراین جواب خصوصی به صورت Ae^{-x} نیست. اشکال این مطلب در آن است که e^{-x} یک جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر است. در نتیجه، عملیات طرف اول معادله (۵)، هنگامی که بر مضرب ثابت دلخواهی از e^{-x} اجرا شوند حاصل صفر می‌شود. بدین سازان این سؤال کلی مطرح می‌شود که آیا روش ضرایب نامعین را در حالتی هم که جمله ناهمگن خود جواب معادله همگن متناظر است می‌توان به کار برد؟ چنان‌که هم‌اکنون خواهیم دید پاسخ این سؤال مثبت است.

اکنون به بررسی حالتهای کلی که در آن $(x)g$ به یکی از صورتهای زیر است می‌پردازیم

$$g(x) = \begin{cases} P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\ e^{\alpha x} P_n(x) \\ e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x \\ e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x. \end{cases}$$

در این حالت معادله (۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$ay'' + by' + cy = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (6)$$

برای به دست آوردن یک جواب خصوصی فرض می‌کنیم که

$$y_p(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n \quad (7)$$

با جایگزین کردن در معادله (۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & a[n(n-1)A_0 x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}] + b(nA_0 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}) \\ & + c(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) = a_0 x^n + \dots + a_n \end{aligned} \quad (8)$$

از تساوی ضرایب توانهای متشابه x داریم

$$cA_0 = a_0$$

$$cA_1 + nbA_0 = a_1$$

⋮

$$cA_n + bA_{n-1} + 2A_{n-2} = a_n$$

اگر $c \neq 0$ ، آنگاه $A_0 = a_0/c$ جواب معادله اول است، و معادلات دیگر به ترتیب

A_1, A_2, \dots, A_n را به دست می‌دهند. اگر $c = 0$ و $b \neq 0$ باشد، چندجمله‌ای طرف اول معادله (۸) از درجه $1 - n$ خواهد بود، و نمی‌تواند در معادله (۸) صدق کند. برای آنکه حاصل $(x^m y' + b y'') + a y'''$ یک چندجمله‌ای درجه n شود باید $(x^m y)$ را یک چندجمله‌ای درجه $1 + n$ انتخاب کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم

$$y_p(x) = x(A_0 x^n + \dots + A_n)$$

در این عبارت جمله ثابت وجود ندارد، اما چون $c = 0$ یک جواب ثابت معادله دیفرانسیل همگن متناظر است، در $(x^m y)$ به آن نیازی نیست. چون $b \neq 0$ ، داریم $a_0 = a/b(n+1)$ ، و ضرایب A_1, A_2, \dots, A_n را می‌توان به طریق مشابه تعیین کرد. اگر $c = 0$ و b هردو صفر شوند، قرار می‌دهیم

$$y_p(x) = x^2(A_0 x^n + \dots + A_n)$$

حاصل $(x^m y)''' + b y'' + c y'$ یک چندجمله‌ای درجه n خواهد بود و می‌توان مانند پیش عمل کرد. در این حالت نیز جمله ثابت و درجه اول در $(x^m y)$ حذف شده‌اند، زیرا هر دو جوابهای معادله همگن متناظرند.

۱. مسئله تعیین یک جواب خصوصی معادله $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} P_n(x) \quad (9)$$

را می‌توان به مسئله‌ای که هم‌اکنون حل شد برگشت داد. ۲. فرض کنیم

$$y_p(x) = e^{\alpha x} u(x)$$

آنگاه

@jozve_iut

$$y'_p(x) = e^{\alpha x} [u'(x) + \alpha u(x)]$$

و

$$y''_p(x) = e^{\alpha x} [u''(x) + 2\alpha u'(x) + \alpha^2 u(x)]$$

با جایگزینی y , y' و y'' در معادله (۹)، و حذف سازه $e^{\alpha x}$ ، و دسته‌بندی جمله‌ها خواهیم داشت

۱. داشجو باید توجه کند که در حالت $c = 0$, $b \neq 0$ می‌توان از معادله (۶) یک بار انتگرال گرفت و معادله خطی مرتبه اولی به دست آورد که عبارت ناهمگن آن یک چندجمله‌ای از درجه $1 + n$ است. یک جواب خصوصی این معادله با روش ضرایب نامعین که در آن $(x^m y)$ یک چندجمله‌ای از درجه $1 + n$ است بود. اگر $c = 0$ هردو صفر باشند، آنگاه می‌توان از معادله (۶) مستقیماً دو بار انتگرال گرفت و جواب یک چندجمله‌ای از درجه $2 + n$ خواهد بود.
۲. یکی از شیوه‌های مورد علاقه ریاضیدانان آن است که یک مسئله جدید را به مسئله‌ای که قبل از حل شده است تبدیل کنند.

$$au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(x) = P_n(x) \quad (10)$$

تعیین یک جواب خصوصی معادله (۱۰) دقیقاً مسئله‌ای است که هم‌اکنون حل شد. اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر نشود، فرض می‌کنیم که $u(x) = A_0 x^n + \dots + A_n$ ، و بنا براین یک جواب خصوصی معادله (۹) به صورت

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) \quad (11)$$

است. از طرف دیگر، اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ صفر شود و $2a\alpha + b$ مخالف صفر باشد، باید $u(x)$ را به صورت $(A_0 x^n + \dots + A_n)x$ گرفت. در این حالت عبارت متناظر برای $y_p(x)$ برابر عبارت طرف دوم معادله (۱۱) خواهد بود. باید توجه داشت که صفر شدن $a\alpha^2 + b\alpha + c$ متناسب آن است که $e^{\alpha x}$ یک جواب معادله همگن متناظر است. اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c$ و $2a\alpha + b$ هردو صفر شوند (و در نتیجه $e^{\alpha x}$ و $x e^{\alpha x}$ جوابهای معادله همگن متناظر خواهند بود) در این صورت عبارت درست $u(x)$ چنین است

$$u(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x + e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$$

حالات دوم را در نظر می‌گیریم. می‌توان این مسئله را با توجه به i به صورت

به مسئله قبل تبدیل کرد. بنا براین $g(x)$ به صورت

$$g(x) = P_n(x) \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i}$$

است، و باید قرارداد

$$y_p(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} (A_0 x^n + \dots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)x} (B_0 x^n + \dots + B_n)$$

و یا همارز با آن

$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^n + \dots + A_n) \cos \beta x + e^{\alpha x} (B_0 x^n + \dots + B_n) \sin \beta x$ معمولاً صورت اخیر را ترجیح می‌دهند. اگر $\alpha \pm i\beta$ در معادله مشخصه متناظر به معادله همگن صدق کند، طبعاً باید هر یک از چند جمله‌ایها را در x ضرب کرد تا درجه آنها یک واحد افزایش یابد.

اگر جمله ناهمگن شامل عبارتهایی از قبیل $e^{\alpha x} \sin \beta x$ و $e^{\alpha x} \cos \beta x$ باشد مناسبتر است آنها را باهم مورد توجه قرار دهیم، زیرا صورت جوابهای خصوصی متناظر بدآنها یکسان است. به عنوان مثال، اگر $g(x) = x \sin x + 2 \cos x$ ، $y_p(x)$ به صورت زیر خواهد بود

$$(A_0 x + A_1) \sin x + (B_0 x + B_1) \cos x$$

البته با فرض آنکه $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای معادله همگن متناظر نباشند. نتایج پیشین را می‌توان در جدول ۱۰.۳ خلاصه نمود.

جدول ۱۰۳ جواب خصوصی $ay'' + by' + cy = g(x)$

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$	$x^s (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(x) e^{\alpha x}$	$x^s (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x}$
$P_n(x) e^{\alpha x}$ $\begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s [(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) e^{\alpha x} \sin \beta x]$

در اینجا s کوچکترین عدد صحیح نامنفی است ($s=0, 1, 2$ یا $s=0, 1, 2$) به طوری که بازای آن هیچ جمله‌ای از $(x)^s$ جواب معادله همگن متناظر نباشد.

این نتایج همراه با اصل انتطاق، که براساس آن می‌توان جواب خصوصی را هنگامی که جمله ناهمگن مجموع چند تابع باشد به دست آورد، این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان طبقه وسیعی از معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت را به طور نسبتاً سریع حل کرد.

اگر معادله دیفرانسیل دارای ضرایب متغیر، یا جمله ناهمگن از آنچه در معادله (۲) آمد پیچیده‌تر باشد، معمولاً بهتر است از روش تغییر پارامتر که در بند بعد مورد بحث قرار می‌گیرد استفاده شود.

مثال ۴. با استفاده از روش ضرایب نامعین، شکل درست $(x)^s$ را برای معادله دیفرانسیل زیر تعیین کنید

$$y'' + 4y = xe^x + x \sin 2x \quad (12)$$

نخست معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم. به آسانی به دست می‌آید که

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

برای تعیین y_p ، یک جواب خصوصی معادله (۱۲)، از اصل انتطاق استفاده می‌کنیم و معادلات زیر را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم

$$y'' + 4y = xe^x \quad (13)$$

و

$$y'' + 4y = x \sin 2x \quad (14)$$

برای معادله اول فرض می‌کنیم که $y = (A_0 x + A_1) e^x$. چون e^x جواب معادله همگن متناظر نیست، لزومی ندارد که در حدس اولیه خود تجدیدنظر کنیم. برای معادله دوم فرض می‌کنیم که $y = (B_0 x + B_1) \cos 2x + (C_0 x + C_1) \sin 2x$ ، اما چون

$\sin 2x$ و $\cos 2x$ جوابهای معادله همگن متناظرند، لازم است چندجمله‌ایهای ضرب را در x ضرب کنیم. بنابراین صورت درست $(x)_m$ برای معادله (۱۲) عبارت است از

$$y(x) = (A_0 x + A_1) e^x + (B_0 x^2 + B_1 x) \cos 2x + (C_0 x^2 + C_1 x) \sin 2x$$

برای تعیین ضرایب این عبارت آسانتر است، که جواب خصوصی متناظر با $x e^x$ در معادله (۱۳) و $x \sin 2x$ در معادله (۱۲) را جداگانه حساب کنیم، تا اینکه تمام این عبارت را یکباره تطبیق دهیم.

مسائل

با استفاده از روش ضرایب نامعین، مربوط به تعیین جواب خصوصی معادله ناهمگن، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. هنگامی که شرایط اولیه داده شده است، جوابی را که در آنها صدق می‌کند پیدا کنید.

$$y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .1$$

$$2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x} \quad .2$$

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad .3$$

$$y'' + 2y' = 3 + 4 \sin 2x \quad .4$$

$$y'' + 9y = x^2 e^{2x} + 6 \quad .5$$

$$y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .6$$

$$2y'' + 3y' + y = x^2 + 2 \sin x \quad .7$$

$$y'' + y = 2 \sin 2x + x \cos 2x \quad .8$$

$$y'' + 2y' + y = e^x \cos x \quad .9$$

$$u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2 \quad .10$$

$$u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega_0 t \quad .11$$

$$u'' + \mu u' + \omega_0^2 u = \cos \omega t \quad \mu^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad .12$$

$$y'' + y' + y = \sin^2 x \quad .13$$

$$y'' + y' + 4y = 2 \sinh x, \quad \sinh x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \quad .14$$

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2x, \quad \cosh x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \quad .15$$

در مسائل ۱۶ تا ۲۲ شکل مناسبی برای $(x)_m$ ، در صورتی که بخواهیم از روش ضرایب نامعین استفاده کنیم، بیابید. محاسبه ثابتها لازم نیست.

$$y'' + 3y' = 2x^4 + x^2 e^{-2x} + \sin 2x \quad .16$$

$$y'' + y = x(1 + \sin x) \quad .17$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x}(2x+4) \sin x \quad .18$$

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} + 2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} x^2 \sin x \quad .19$$

$$y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x \sin 2x \quad .20$$

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x+4) \cos 2x \quad .21$$

$$y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1) \sin 2x + 2e^{-x} \cos x + 4e^x \quad .22$$

۲۳. جواب عمومی

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^N a_m \sin m\pi x$$

را که در آن $\lambda > 0$ و $\lambda \neq m\pi$ ، $m = 1, 2, \dots, N$ ، تعیین کنید.

۰۴۰ اگر a, b و c مثبت و Y_1 و Y_2 جوابهای

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

باشند، نشان دهید که وقتی $\infty \rightarrow 0$ داریم $aY_1(t) - bY_2(t) \rightarrow 0$. اگر $b = 0$ باشد آیا این نتیجه برقرار است؟

۰۴۵ در بسیاری از مسائل فیزیکی امکان دارد که تابع ورودی (یعنی، جمله ناهمگن) در فواصل زمانی مختلف دارای فرمولهای مختلف باشند. به عنوان یک مثال ساده از این-گونه مسائل، برای معادله

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \pi e^{\pi-t}, & t > \pi \end{cases}$$

جواب $y = \phi(t)$ را طوری بیاید که در شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ صدق کند، و y و y' به ازای همه مقادیر t پیوسته باشند. جمله ناهمگن و جواب $y = \phi(t)$ را به عنوان تابعی از زمان رسم کنید.

(اهمایی): نخست مسئله مقدار اولیه را به ازای $\pi \leq t \leq \pi$ حل کنید و مقدار ثابت دلخواه را طوری تعیین کنید که y و y' در $t = \pi$ پیوسته باشند.

۲۶.۳ روش تغییر پارامترها

در بند ۱۶.۳ برای تعیین جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب ثابت که جمله ناهمگن آنها به صورت مناسبی است، روش ساده‌ای را بحث کردیم. در این بند به بررسی دو مشکلی تعیین جواب خصوصی معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (1)$$

می پردازیم، توابع p ، q و r روی فاصله مورد توجه پیوسته‌اند. برای کاربرد این روش، که به روش تغییرپارامترها^۱ موسوم است لازم است یک مجموعه اساسی از جوابهای معادله همگن متناظر

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

در دست باشد.

فرض کنیم y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن (۲) باشند. آنگاه جواب عمومی معادله (۲) چنین است

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

در روش تغییر پارامترها به جای ثابت‌های c_1 و c_2 توابع u_1 و u_2 را قرار می‌دهیم. آنگاه توابع u_1 و u_2 را طوری تعیین می‌کنیم که

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (3)$$

در معادله دیفرانسیل ناهمگن (۱) صدق کند. اهمیت این روش در آن است که می‌توان به آسانی توابع u_1 و u_2 را تعیین کرد. برای تعیین u_1 و u_2 به دو شرط نیازمندیم. یک شرط، از این نکته که y_p باید در معادله (۱) صدق کند برای u_1 و u_2 حاصل می‌شود. شرط دوم را می‌توان به طور دلخواه اختیار کرد، و طوری انتخاب می‌شود که محاسبات را آسان سازد. از مشتق‌گیری معادله (۳) به دست می‌آید

$$y'_p = (u'_1 y_1 + u'_2 y_2) + (u_1 y'_1 + u_2 y'_2) \quad (4)$$

چنان‌که هم‌اکنون اشاره شد، این عبارت را باقی‌آنکه $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (5)$$

صدق کند ساده می‌کنیم. y_p با توجه به این شرط به صورت زیر به دست می‌آید

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_1 y'_1 + u_2 y'_2 \quad (6)$$

توجه شود که در عبارت y_p ، به علت اعمال شرط (۵)، فقط مشتقهای اول u_1 و u_2 نمایان می‌شوند. با جایگزینی y_p و y'_p در معادله (۱) خواهیم داشت

$$u_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + u_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) = g$$

جمله‌های داخل پرانتزها صفرند، زیرا y_1 و y_2 جوابهای معادله همگن (۲) می‌باشند، بنابراین شرط آنکه y_p در معادله (۱) صدق کند به صورت زیر در می‌آید

۱. این روش را به احترام ریاضیدان فرانسوی ژ. ل. لاگرانژ (J. L. Lagrange) (۱۷۳۶–۱۸۱۳) روش لاگرانژ نیز می‌نامند، وی برای نخستین بار این روش را در ۱۷۷۴ به کار گرفت. لاگرانژ به سبب کارهایش در مکانیک سماوی، مکانیک تحلیلی، و آنالیز ریاضی مشهور است. وی در سن بیست و پنج سالگی به عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان زنده شناخته شد.

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g \quad (7)$$

معادلات (۵) و (۷) را به صورت دستگاه دو معادله

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = 0$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g$$

با دوتابع مجهول u'_1 و u'_2 می‌نویسیم. با حل این دستگاه به دست می‌آید

$$u'_1 = \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)}, \quad u'_2 = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} \quad (8)$$

که در آن $y'_1 y - y'_2 y = W(y_1, y_2)$. تقسیم بر $W(y_1, y_2)$ بدون اشکال است زیرا y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن‌اند، و در نتیجه $W(y_1, y_2)$ در فاصله مزبور صفر نمی‌شود. با انتگرال‌گیری از معادلات (۸) و جایگزینی در معادله (۳) یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن (۱) به دست می‌آید. این نتیجه را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۳. اگر توابع p ، q و g در $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و اگر توابع y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله همگن وابسته به معادله دیفرانسیل (۱)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

باشند، آنگاه یک جواب خصوصی معادله (۱) به صورت زیر خواهد بود

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \quad (9)$$

معادله (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y_p(x) = \int \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)} g(t) dt \quad (10)$$

توجه شود که در معادله (۱۰)، t متغیر گنگ انتگرال‌گیری و x متغیر مستقل است.

در بدکار بردن روش تغییر پارامترها در مورد یک مسئله خاص معمولاً اطمینان بخش‌تر است که $(x)y_2(x) + u_2(x)y_1(x) = u_1(x)y$ را جایگزین کرده و مانند بالا عمل کنیم تا اینکه سعی کنیم فرمولهای (۹) یا (۱۰) را به خاطر بسپاریم. اگر بخواهیم یکی از این فرمولها را به کار ببریم باید توجه داشته باشیم که معادله دیفرانسیل به صورت استاندارد (۱) نوشته شده باشد. باید متنزه کرد که گرچه روابط (۹) و (۱۰) فرمولهایی برای محاسبه $(x)y$ به دست می‌دهند، معلوم نیست که محاسبه این انتگرال‌ها به صورت دقیق همیشه آسان یا حتی ممکن باشد. با وجود این، حتی در این حالات نیز فرمولهای $(x)y$ نقطه آغازی برای محاسبه عددی (۱۰) فراهم می‌سازند و ممکن است که این حد اکثر کاری باشد که بتوان انجام داد. از دیدگاه عددی معمولاً مناسب‌تر است که جواب به صورت انتگرالی باشد،

زیرا غالباً محاسبه عددی یک انتگرال بهطور قابل توجهی، از انتگرال‌گیری عددی مستقیم معادله دیفرانسیل آسانتر است.

باردیگر تأکید می‌کنیم که در محاسبه جواب خصوصی با روش تغییر پارامترهای زومنی ندارد که ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت باشند، فقط باید دو جواب مستقل خطی معادله همگن را داشته باشیم.

مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید

$$y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \pi/2 \quad (11)$$

دو جواب مستقل خطی معادله همگن عبارتند از x : $y_1(x) = \sin x$ ، $y_2(x) = \cos x$ ، با وجود آنکه معادله (11) دارای ضرایب ثابت است و $y(x)$ را می‌شناسیم، نمی‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد، زیرا طرف دوم معادله (11) به صورت $e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$ یا $e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ نیست. پس از روش تغییر پارامترها استفاده کرده، و می‌نویسیم

$$y_p(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

آنگاه

$y'_p(x) = [-u_1(x) \sin x + u_2(x) \cos x] + [u'_1(x) \cos x + u'_2(x) \sin x]$
کروشه دوم را برابر صفر فرار داده و دوباره مشتق می‌گیریم، و در معادله (11) جایگزین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$u'_1(x) \cos x + u'_2(x) \sin x = 0$$

$$-u'_1(x) \sin x + u'_2(x) \cos x = \sec x$$

و از حل آن به دست می‌آید

$$u'_1(x) = -\operatorname{tg} x, \quad u'_2(x) = 1$$

$$u_1(x) = \ln \cos x, \quad u_2(x) = x$$

بنابراین یک جواب خصوصی معادله (11) عبارت است از

$$y_p(x) = x \sin x + (\cos x) \ln \cos x$$

وجواب عمومی چنین است

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + (\cos x) \ln \cos x$$

می‌توان نتایجی را که در بندهای پیشین این فصل در بحث روش‌های حل معادله دیفرانسیل (۱)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

آمده است با فرض پیوسته بودن p ، q و ρ روی $x < \alpha$ به صورت زیر خلاصه کرد.

۱. اگر p و q ثابت باشند، همواره می‌توان برای معادله همگن دو جواب مستقل خطی پیدا کرد. آنگاه می‌توان با روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی و از آنجا جواب کامل را به دست آورد. اگر ρ به صورت مناسبی باشد، محتتملاً استفاده از روش ضرایب نامعین برای تعیین یک جواب خصوصی آسانتر از روش تغییر پارامترها خواهد بود.
۲. اگر p و q ثابت نباشند، روش کلی برای حل معادله (۱) بر حسب تعدادی متناهی از توابع مقدماتی وجود ندارد.^۱ اما اگر بتوان یک جواب معادله همگن را پیدا کرد، می‌توان اصولاً جواب دومی را با کاهش مرتبه معادله به دست آورد. در این صورت یک جواب خصوصی با روش تغییر پارامترها به دست می‌آید، و بدین سان جواب کامل معین می‌گردد. در واقع می‌توان هر دو محاسبه را توأم به کار گرفت. اگر یک جواب معادله همگن معلوم باشد، می‌توان با روش کاهش مرتبه، معادله ناهمگن را حل کرده، هم جواب خصوصی و هم جواب مستقل خطی دومی برای معادله همگن به دست آورد. این مطلب در مسائل ۱۵ و ۱۶ توضیح داده شده است. از این رو، به طور کلی، مسئله حل معادله (۱) به یافتن یک جواب معادله همگن متناظر موقول می‌گردد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۷، یک جواب خصوصی را با استفاده از روش تغییر پارامترها بیابید.

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x \quad .1$$

$$y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x} \quad .2$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \quad .3$$

$$y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad .4$$

$$y'' + 9y = 9 \sec^2 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \quad .5$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x/x^2}, \quad x > 0 \quad .6$$

$$y'' + 4y = 3 \operatorname{cosec} 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad .7$$

۸. تحقیق کنید که x و xe^x جوابهای معادله همگن متناظر به

۱. روش سریها را که برای طبقه وسیعی از مسائل با ضرایب متغیر به کار می‌رود، در فصل ۴ مورد بحث قرار داده ایم. روش‌های عددی در فصل ۸ بررسی شده‌اند.

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3, \quad x > 0$$

می باشند، و جواب عمومی را بیابید.

۹. تحقیق کنید که $(x+1)^{-1}$ و x^2e^{-x} جوابهای معادله همگن متناظر به

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^{2x}, \quad x > 0$$

می باشند، و جواب عمومی را بیابید.

۱۰. دو جواب مستقل خطی معادله بدل رتبه ۱/۲،

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

عبارتند از $x^{-1/2} \sin x$ و $x^{-1/2} \cos x$. جواب عمومی

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 2x^{3/2} \sin x, \quad x > 0$$

را بیابید.

۱۱. تحقیق کنید که e^{-x} و x^2e^{-x} جوابهای معادله همگن متناظر به

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}, \quad x < 1$$

می باشند، و جواب عمومی را بیابید.

۱۲. فرمولی برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر بیابید

$$y'' - 5y' + 6y = g(x)$$

۱۳. فرمولی برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر بیابید

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = g(x), \quad x > 0$$

(مسئله ۱۵ را بینید.)

۱۴. مسئله مقدار اولیه

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را در نظر می گیریم. در اینجا پریم نمایشگر مشتق نسبت به زمان t است.

(الف) نشان دهید که جواب عمومی $y'' + y = g(t)$ عبارت است از

$$y = \phi(t) = \left(c_1 - \int_{\alpha}^t g(s) \sin s ds\right) \cos t + \left(c_2 + \int_{\beta}^t g(s) \cos s ds\right) \sin t$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه و α و β نقاطی می باشند که به طور مناسب انتخاب شده‌اند.

(ب) با استفاده از (الف) نشان دهید که اگر

$$c_1 = \int_a^b g(s) \sin s ds, \quad c_2 = - \int_b^a g(s) \cos s ds$$

آنگاه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ ، سپس نشان دهید که جواب مسئله مقدار اولیه بالا به ازای $g(t)$ دلخواه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = \phi(t) = \int_0^t g(s) \sin(t-s) ds$$

توجه شود که این رابطه فرمولی برای محاسبه جواب مسئله مقدار اولیه اصلی، به ازای هر جمله ناهمگن مفروض $(t)g$ ، به دست می‌دهد. تابع ϕ نه تنها در معادله دیفرانسیل مزبور صدق می‌کند، بلکه خود به خود در شرایط اولیه نیز صادق است. این فرمول رابطه موجود بین تابع ورودی $(t)g$ و خروجی $(t)\phi$ را نیز نشان می‌دهد. علاوه بر این، دیده می‌شود که تابع خروجی در زمان t تنها بستگی به تغییرات تابع ورودی از لحظه $0 = t$ تا لحظه مورد توجه $t = t$ دارد. این انتگرال را اغلب تلفیق \sin و $(t)g$ می‌نامند.

(ج) اکنون که جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن را که در شرایط اولیه همگن صدق می‌کند در اختیار داریم، می‌توان همان مسئله را برای شرایط اولیه ناهمگن به وسیله اضافه کردن جوابی از معادله همگن که در شرایط اولیه ناهمگن صدق کند، حل کرد. نشان دهید که جواب $y'' + y = g(x)$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ چنین است

$$y = \phi(t) = \int_0^t g(s) \sin(t-s) ds + y_0 \cos t + y_1 \sin t$$

@jozve_iut

۱۵. معادله ناهمگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (\text{یک})$$

را در صورتی که یک جواب معادله همگن متناظر معلوم باشد، می‌توان با روش کاهش مرتبه نیز حل کرد (بند ۴.۳ را بینید). با فرض آنکه v یک جواب معلوم معادله همگن باشد. (الف) نشان دهید که $v(x)v'(x) = y$ یک جواب معادله (یک) خواهد بود به شرط آنکه v در معادله زیر صدق کند

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = g \quad (\text{دو})$$

(ب) معادله (دو) یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به v است. نشان دهید که جواب آن چنین است

$$y_1'(x)h(x)v'(x) = \int_x^\infty y_1(s)h(s)g(s) ds + k$$

که در آن $[\int_x^\infty p(s) ds]$ و k مقدار ثابتی است.

(ج) با استفاده از قسمت (ب) نشان دهید که جواب عمومی معادله (یک) عبارت است از

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \int^x \frac{ds}{y_1(s) h(s)} \\ + y_1(x) \int^x \frac{1}{y_1(s) h(s)} \left[\int^s y_1(t) h(t) g(t) dt \right] ds$$

۱۶. با استفاده از روشی که در مسئله ۱۵ بیان شد، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$x^2 y'' + 2xy' + 2y = 4x^2, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' + 7xy' + 5y = x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1} \quad (\text{ب})$$

۷.۳ ارتعاشات مکانیکی

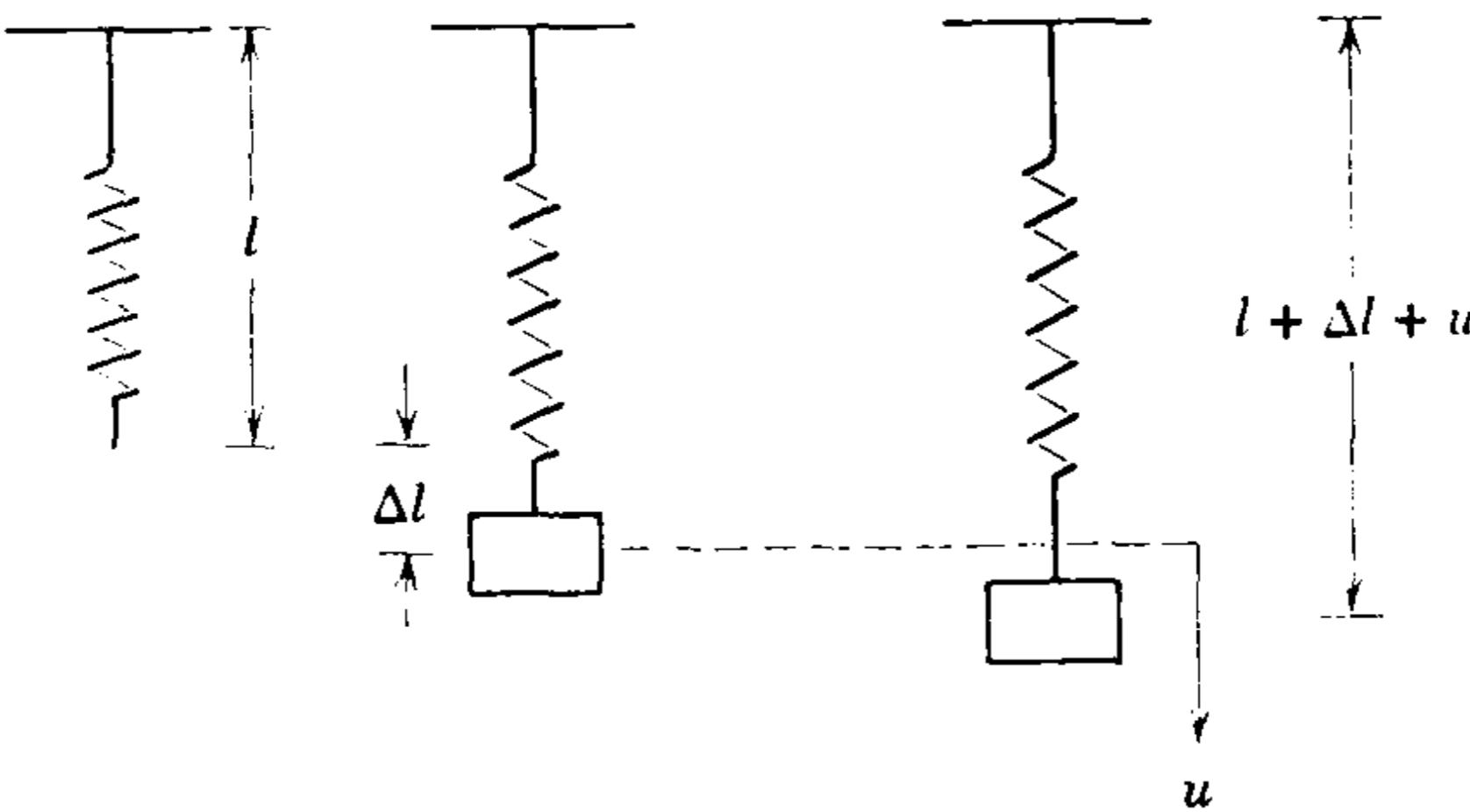
در بندهای ۱.۳ تا ۲.۶.۳ این فصل روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم بیان شد. دیده شد که وقتی معادله دیفرانسیل دارای ضربایب ثابت باشد، می‌توان آن را مستقیماً حل کرد. دو زمینه مهم کاربرد این نظریه در مباحث نوسانات الکتریکی و مکانیکی می‌باشد، که در آن تعداد بسیار زیادی از پدیده‌ها طبق معادلاتی به شکل

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t) \quad (1)$$

صورت می‌پذیرند. در اینجا m ، c و k مقادیر ثابت، $F(t)$ مفروض، و $u = \phi(t)$ نمایشگر جواب یک دستگاه فیزیکی به صورت تابعی از زمان t است. بهویژه، حرکت جرم مرتיעشی که به یک سر فنر قائمی آویخته شده باشد، طبق این معادله انجام می‌گیرد. شایسته است که طرز به دست آوردن معادله (۱) را در مورد این مسئله دقیقاً مورد توجه قرار دهیم، زیرا مسائل بسیاری در این اصول مشترکند.

نخست افزایش طول فنری به طول طبیعی / رادرهنجام تعادل در اثر اضافه کردن یک جرم m در نظر می‌گیریم. گیریم Δl افزایش طول مزبور را نشان دهد (شکل ۱.۳ را بینید). نیروهای وارد بر جرم عبارتند از نیروی ثقل که اثر آن به سوی پائین است، $w = mg$ ، که در آن g شتاب ثقل و w وزن جرم مزبور است، و نیروی فنر که اثر آن به سوی بالا است. چون جرم مزبور در این وضعیت در تعادل است، این نیروها از لحاظ اندازه عددی برابرند. اگر تغییر مکان Δl در مقایسه با طول l کوچک باشد، بنا بر قانون هوك^۱ نیروی فنر با Δl متناسب است، و بنا بر این اندازه آن $k\Delta l$ می‌باشد. ثابت k بستگی به فنر دارد و آن را ثابت

۱. هوك (Hooke)، (1635–1703) نخستین بار قانون خود را در ۱۶۷۶ به صورت رمزی، *ceiii inossistuv* منتشر کرد، و در ۱۶۷۸ حل آن را به صورت *this is sic sic sis* ارائه داد، و تقریباً بدین معنی است که «هر قدر نیرو، همان قدر تغییر مکان.»



شکل ۱.۳

فقر می نامند. با معلوم بودن وزن w و اندازه گیری Δl واستفاده از

$$k\Delta l = mg \quad (2)$$

می توان مقدار آن را محاسبه کرد. توجه شود که k دارای ابعاد $mg/\Delta l$ یعنی، طول / نیرو است.

از لحاظ دینامیک، موضوع مورد توجه در این مسئله بررسی حرکت جرم مزبور تحت تأثیر یک نیروی خارجی یا یک تغییر مکان اولیه است. فرض کنیم \ddot{u} که جهت مشبّت مقادیر آن به سوی پایین است، نمایشگر تغییر مکان جرم مزبور از وضعیت تعادل باشد. این تغییر مکان \ddot{u} ، تابع \ddot{u} است و ارتباط آن با نیروهای وارد بر جرم مزبور به وسیله قانون نیوتون بیان می شود، یعنی باشد $m\ddot{u}/dt^2$ از حیث اندازه و راستا با برآیند نیروهای وارد بر جرم m برابر باشد. در هنگام نوشتن معادله ناظر بر حرکت جرم، باشد توجه داشت که علامت صحیح هر یک از نیروهای مختلف وارد بر جرم، به دفت تعیین شود. در بررسی زیر جهت مشبّت نیروها را به سوی پایین، وجهت منفی را به سوی بالا انتخاب کرده ایم. چهار نیرو بر جرم مزبور اثر می کند:

۱. وزن آن، $w = mg$ که همواره به سوی پایین اثر می کند.

۲. نیروی ناشی از فقر F ، که با طول $\Delta l + u$ متناسب است، و تأثیرش همواره در جهت برگرداندن فقر به وضعیت طبیعی است. اگر $0 < \Delta l + u$ ؛ فقر کشیده شده و نیرو، که جهت آن به سوی بالاست، با $F = k(\Delta l + u)$ بیان می شود. دیده می شود که اندازه نیرویی که از فقر به جرم وارد می شود، برابر $k(\Delta l + u)$ است، علامت منفی نمایشگر آن است که جهت این نیرو در این حالت خاص به سوی بالاست. اگر $0 > \Delta l + u$ (یعنی، $\Delta l < -u$)، فقر بداندازه مسافت $(\Delta l) - (-u)$ فشرده شده است، و نیرو که راستای آن به سوی پایین است، برابر با $[k(\Delta l) - (-u)]$ می باشد. بنابراین بدانای همه مقادیر u

۱. توجه شود که اگر جرم در بالای وضعیت تعادل واقع باشد، مسافت آن در بالای وضعیت تعادل برابر $-u$ است، نه u .

داریم

$$F_s(t) = -k(\Delta t + u) \quad (3)$$

بار دیگر تأکید می کنیم که رابطه (3) نه فقط نمایشگر اندازه نیرویی است که فتر در هر وضعیت u بر جرم وارد می کند، بلکه راستای آن را نیز به دست می دهد.

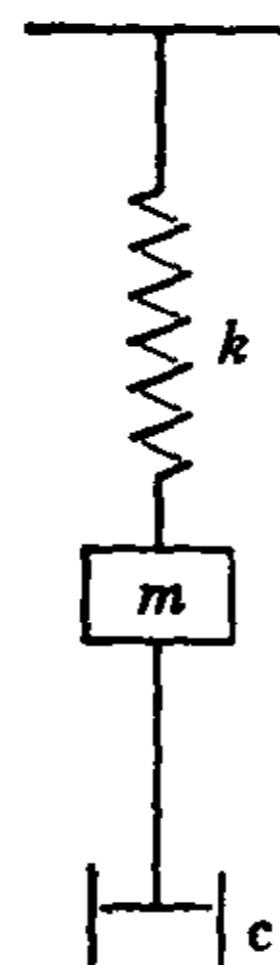
۰.۳ $F_d(t)$ نیروی مقاوم یا استهلاک. این نیرو ممکن است در اثر خواص چسبندگی سیالی که جرم مزبور در آن حرکت می کند به وجود آید (ماتن مقاومت هوا)؛ یا آنکه جرم متوجه به یک دستگاه مشکل از پیستونی که در استوانه ای مملو از روغن حرکت می کند (داشپوت) متصل شده باشد (شکل ۲۰.۳ را ببینید). در هر دو حالت نیروی استهلاک در خلاف جهت حرکت جرم اثر می کند. بنا به شواهد تجربی می دانیم که تا هنگامی که تندی جرم زیاد بزرگ نباشد می توان مقاومت را با تندی $|du/dt|$ متناسب گرفت. اگر جرم به سوی پایین در حرکت باشد، u صعودی و بنا بر این du/dt مثبت است، در نتیجه $F_d(t)$ که سوی آن به طرف بالا می باشد با $-c(du/dt)$ داده می شود. ثابت مثبت c را، ثابت استهلاک می نامند؛ واحد آن از جنس نیرو برسرعت است. اگر جرم به سوی بالا در حرکت باشد، u نزولی و du/dt منفی است، و $F_d(t)$ که در این حالت به سوی پایین است، همچنان با $-c(du/dt)$ معین می شود. بنا بر این به ازای هر u داریم

$$F_d(t) = -c \frac{du}{dt} \quad (4)$$

۰.۴ $F(t)$ نیروی اعمال شونده، که اگر مثبت باشد جهت آن به سوی پایین و اگر منفی باشد جهت آن به سوی بالاست. این نیرو ممکن است از حرکت پایه ای که فتر به آن بسته شده است ایجاد شود، یا آنکه نیرویی باشد که مستقیماً بد جرم اعمال شده است.

طبق قانون نیوتون

$$mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2}$$



شکل ۲۰.۳

با جایگزینی (t) و $F_d(t)$ خواهیم داشت

$$mg - k(\Delta l + u) - c \frac{du}{dt} + F_d(t) = m \frac{d^2u}{dt^2} \quad (5)$$

چون $k\Delta l = mg$ ، معادله (5) به معادله دیفرانسیل (۱) بدل می‌شود

$$m\ddot{u} + cu + ku = F_d(t)$$

در نوشتن این معادله از فرادرداد معمول که مشتقهای نسبت به زمان را با نقطه نشان می‌دهند استفاده شده است.

این نکته مهم را باید به خاطر داشت که در معادله (۱)، جرم m ، ضریب استهلاک c ، و ثابت فنر k همه ثابت‌های مثبت‌اند. همچنین باید به این نکته مهم توجه داشت که معادله (۱) فقط نمایشگر یک معادله تقریبی برای تعیین u می‌باشد. در واقع رابطه بین (t) و u $\Delta l + u = 1/(k + m\ddot{u})$ خطی نیست؛ اما، برای اکثر مواد معمولی، مانند فولاد، و همچنین هنگامی که $k \ll m\ddot{u}$ رابطه با درجه دقت زیاد، تقریباً خطی است. به همین نحو، عبارت نیروی بازدارنده نیز تقریبی است. همچنین در به دست آوردن معادله (۱) از جرم فنر در مقایسه با جرم جسمی که به آن بسته شده است صرف نظر کرده‌ایم. خوشبختانه، در کاربردهای وسیع و گوناگونی، معادله (۱) مدل ریاضی رضایت‌بخشی از دستگاه فیزیکی مزبور است.

ییان کامل مسئله ارتعاش مستلزم مشخص کردن دو شرط اولیه u_0 و سرعت اولیه \dot{u}_0 . از استدلال فیزیکی چندان روشن نمی‌شود که آیا فقط باید دو شرط اولیه مشخص شود، و یا آنکه این دو شرط باید همان شرایط مذکور باشد. اما از قضیه وجود ویکتاپی ۲۰۳ نتیجه می‌شود که با این شرایط یک مسئله ریاضی خواهیم داشت که دارای جوابی یکتاشت. جوابی از معادله (۱) که در این شرایط اولیه صدق کند، وضعیت جرم مزبور را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد.

مثال: مسئله مقدار اولیه مربوط به دستگاه جرم-داشپوت-فنر زیر را بیایید. افزایش طول فنر به ازای وزن ۵ پوندی برابر ۱ اینچ است. دستگاه داشپوت به ازای سرعت ۲ اینچ در ثانیه نیرویی برابر ۵۰۲ پوند اعمال می‌کند. یک وزنه ۲ پوندی به فنر بسته شده است و از وضعیت ۲ اینچ با بیشتر از موضع تعادل رها می‌شود.

داریم

$$m = \frac{w}{g} = \frac{2 \text{ lb}}{32 \text{ ft/sec}^2} = \frac{1 \text{ lb-sec}^2}{16 \text{ ft}}$$

$$c = \frac{502 \text{ lb}}{2 \text{ in./sec}} = \frac{502 \text{ lb}}{(1/16) \text{ ft/sec}} = 12 \frac{\text{lb-sec}}{\text{ft}}$$

$$k = \frac{5 \text{ lb}}{1 \text{ in.}} = \frac{5 \text{ lb}}{(1/12) \text{ ft}} = 60 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

و بنابراین

$$\frac{1}{16} \ddot{u} + 12\dot{u} + 60u = 0$$

یا

$$\ddot{u} + 192\dot{u} + 960u = 0$$

که در آن u بر حسب فوت و t بر حسب ثانیه است. شرایط اولیه عبارتند از $\dot{u}(0) = 0$ ، $u(0) = 0$.

۱.۷.۳ ارتعاشات آزاد

ارتعاشات آزاد بدون استهلاک. اگر نیروی خارجی واستهلاکی وجود نداشته باشد، آنگاه معادله (۱) بند پیش به صورت ساده زیر در می‌آید

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (1)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$u = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (2)$$

که در آن

$$\omega_0^2 = k/m \quad (3)$$

و ω_0 را فرکانس دوری می‌نامند، و روشن است که دارای واحدی از جنس معکوس زمان می‌باشد. در هر مورد خاص، ثابت‌های A و B به وسیله شرایط اولیه داده شده معین می‌گردند. در بحث جواب معادله (۱) مناسبتر است که رابطه (۲) را به صورت

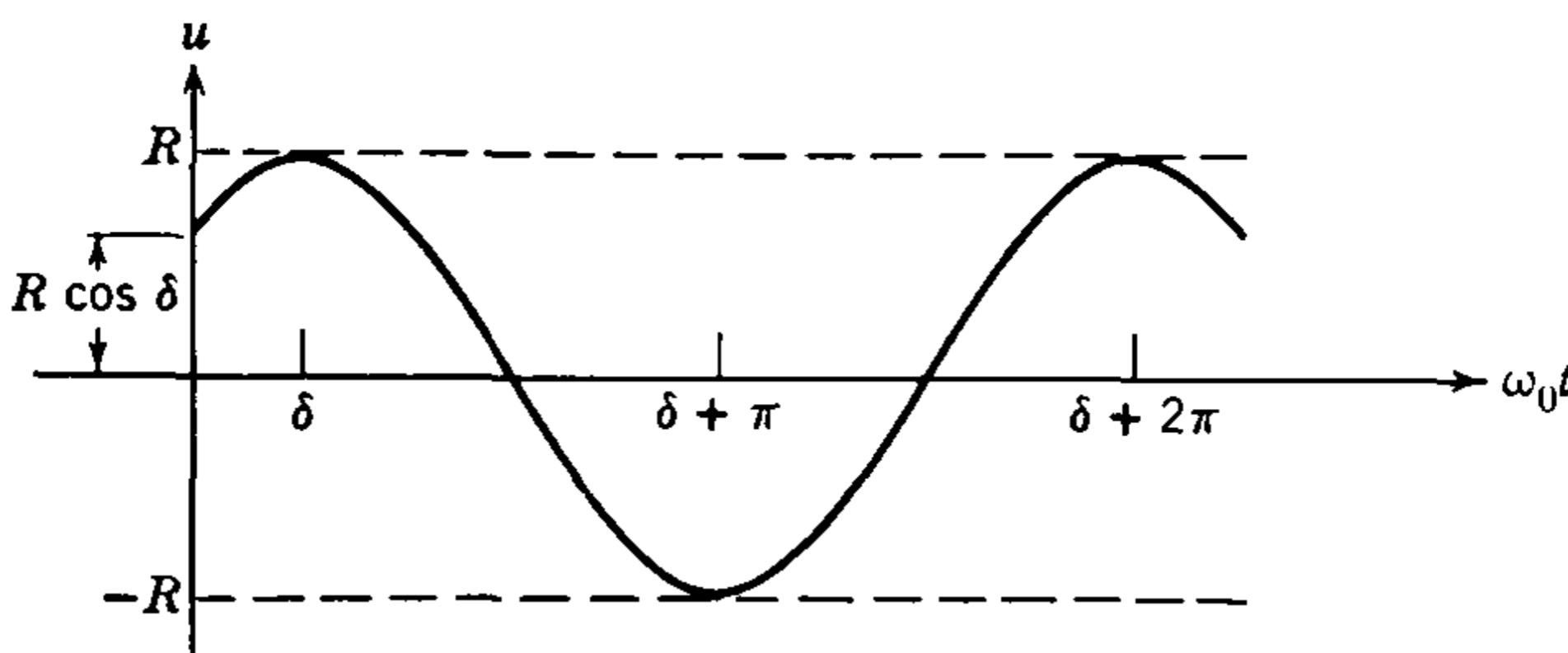
$$u = R \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (4)$$

درآوریم. مقادیر A و B هرچه باشند همواره می‌توان این تبدیل را با قراردادن $R = (A^2 + B^2)^{1/2}$ و حل معادلات $B = R \sin \delta$ و $A = R \cos \delta$ نسبت به δ انجام داد. به علت تناوب تابع کسینوس، معادله (۴) نمایشگر یک حرکت تناوبی، با حرکت هارمونیک ساده با تناوب

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} \quad (5)$$

است. برای تمايز بین مسائل ارتعاشات آزاد بدون استهلاک و مسائل ارتعاشات استهلاکی یا ارتعاشات تقویت شونده، فرکانس دوری ω_0 و تناوب $\omega_0/2\pi$ مربوط به حرکت بدون استهلاک و بدون تقویت را معمولاً فرکانس دوری طبیعی و تناوب طبیعی ارتعاش می‌نامند. چون $1 \leq |(\cos(\omega_0 t - \delta))|$ ، u همواره بین دو خط $u = \pm R$ قراردارد. ما کزیم

تغییر مکان در زمانهای $\dots, -\delta, \pi, 2\pi, \dots$ روی می‌دهد. ثابت‌های R و δ را به ترتیب دامنه و زاویه فاز حرکت مزبور می‌نامند. نمودار اجمالی حرکت که با معادله (۴) نمایش داده می‌شود در شکل ۳.۲ آمده است. توجه شود که این حرکت تناوبی با افزایش زمان ازین نمی‌رود. علت این امر آن است که نیروی مقاوم را در نظر نگرفتند، این نیرو موجب می‌شود که انرژی که در دستگاه از تغییر مکان اولیه و سرعت ذخیره شده است، اتلاف گردد.



شکل ۳.۲ حرکت هارمونیک ساده

مثال. مطلوب است تعیین تناوب طبیعی یک دستگاه فنر-جرم در صورتی که وزن جرم ۱۰ پوند و افزایش طول فنر ۲ اینچ باشد. اگر فنر را ۲ اینچ دیگر کشیده و سپس رها سازیم حرکت حاصل را معین کنید.

ثابت فنر برابر است با $k = 10 \text{ lb/in.} = 60 \text{ lb/ft}$. جرم m برابر است با

$$m = w/g = \frac{10}{32} \text{ lb/(ft/sec)}^2$$

بنابراین

$$T = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} = 2\pi \left[\frac{10}{(32)(60)} \right]^{1/2} = \frac{\pi \sqrt{3}}{12} \text{ sec}$$

معادله حرکت عبارت است از

$$\frac{10}{32} \ddot{u} + 60u = 0$$

از آنجا

$$u = A \cos(\sqrt{3}t) + B \sin(\sqrt{3}t).$$

جوابی که در شرایط اولیه فوت $u(0) = 0$ و $\dot{u}(0) = 1/6 \text{ ft/sec}$ می‌کند چنین است

$$u = \frac{1}{\epsilon} \cos(\sqrt{\frac{c^2 - 4km}{2}} t)$$

که در آن t بر حسب ثانیه و u بر حسب فوت است.

ارتعاشات آزاد با استهلاک. اگر تأثیر نیروی مقاوم را منظور کنیم، معادله دیفرانسیل حرکت جرم چنین خواهد بود

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (6)$$

ریشه‌های معادله مشخصه آن عبارتند از

$$r_1, r_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} \right)^{1/2} \quad (7)$$

چون c و k مثبت‌اند، $c^2 - 4km > 0$ همواره از $c^2 - 4km$ کوچکتر است، بنابراین اگر $c^2 - 4km \geq 0$ ، آنگاه r_1 و r_2 حاصل از معادله (7) منفی‌اند. اگر $c^2 - 4km < 0$ ، آنگاه مقادیر r_1 و r_2 حاصل از معادله (7) مختلف‌اند، اما بخش حقیقی آنها منفی است. جدول جوابهای معادله (6) عبارت است از

$$c^2 - 4km > 0, \quad u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad r_1, r_2 < 0 \quad (8)$$

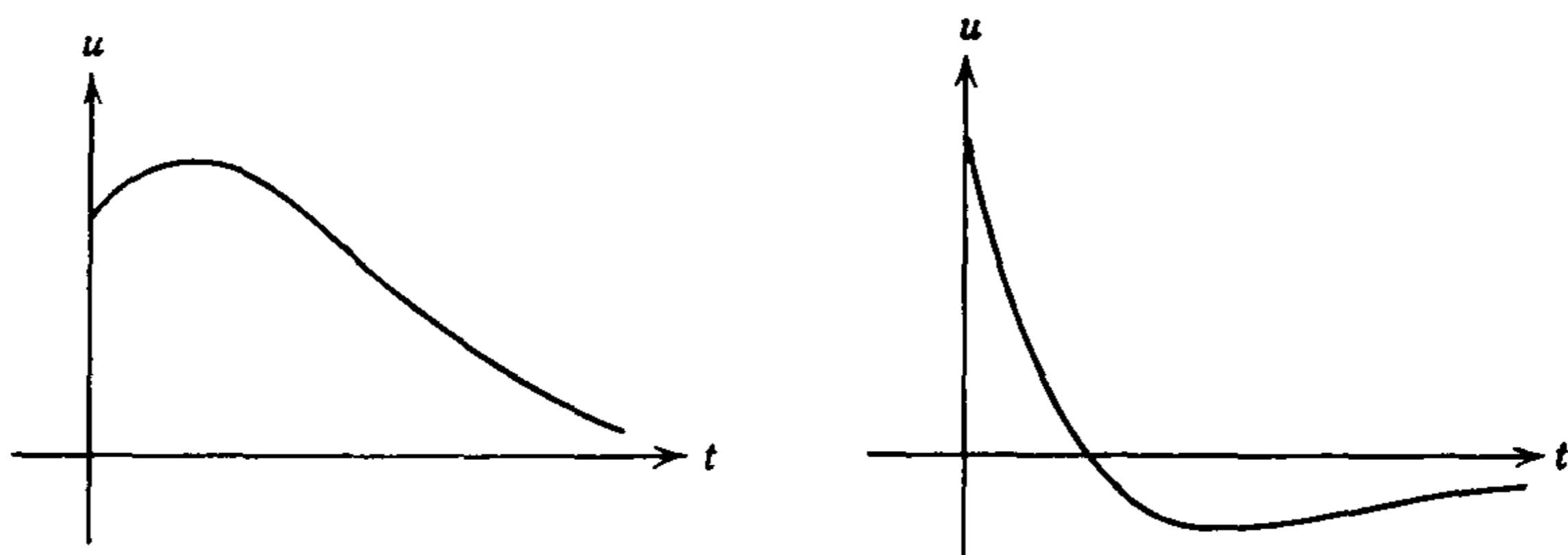
$$c^2 - 4km = 0, \quad u = (A + Bt)e^{-(c/2m)t} \quad (9)$$

$$c^2 - 4km < 0, \quad u = e^{-(c/2m)t} (A \cos \mu t + B \sin \mu t) \\ \mu = (4km - c^2)^{1/2} / 2m > 0 \quad (10)$$

در همه این حالات، بدون توجه به شرایط اولیه، یعنی، بدون توجه به مقادیر A و B ، وقتی که $\rightarrow \infty$ داریم $u \rightarrow 0$ ، و بنابراین حرکت با افزایش زمان مستهلك می‌شود. بدینسان جوابهای معادلات (1) و (6) آنچه را که انتظارش می‌رفت تأیید می‌کنند. بدون نیروی مقاوم، حرکت همواره بدون آنکه کند شود ادامه خواهد داشت، و با نیروی مقاوم، حرکت با افزایش زمان به صفر تنزل می‌کند.

دو حالت نخست، یعنی معادلات (8) و (9)، که به ترتیب استهلاکی شدید و استهلاکی بعزمی نامیده می‌شوند، نمایشگر حرکاتی هستند که در آنها جرمی که در آغاز تغییر مکان یافته است به موضع تعادل خود «کشیده می‌شود». بر حسب شرایط اولیه، امکان دارد که در این دو حالت جرم یک بار از موضع تعادل بگذرد، اما این یک «حرکت ارتعاشی» نیست. در شکل ۴.۳ طرح دو نمونه از این نوع حرکت آمده است. در مسائل ۱۵ و ۱۶ بازهم از این موضوع بحث خواهد شد.

حالت سوم، که آن را حرکت استهلاکی ضعیف می‌نامند، اغلب در دستگاههای مکانیکی روی می‌دهد، و نمایشگر «ارتعاش استهلاکی» است. برای توضیح، در معادله (10)



شکل ۴.۳ حرکت‌های استهلاکی شدید یا بحرانی

فرار می‌دهیم $B = R \sin \delta$ و $A = R \cos \delta$ داشت

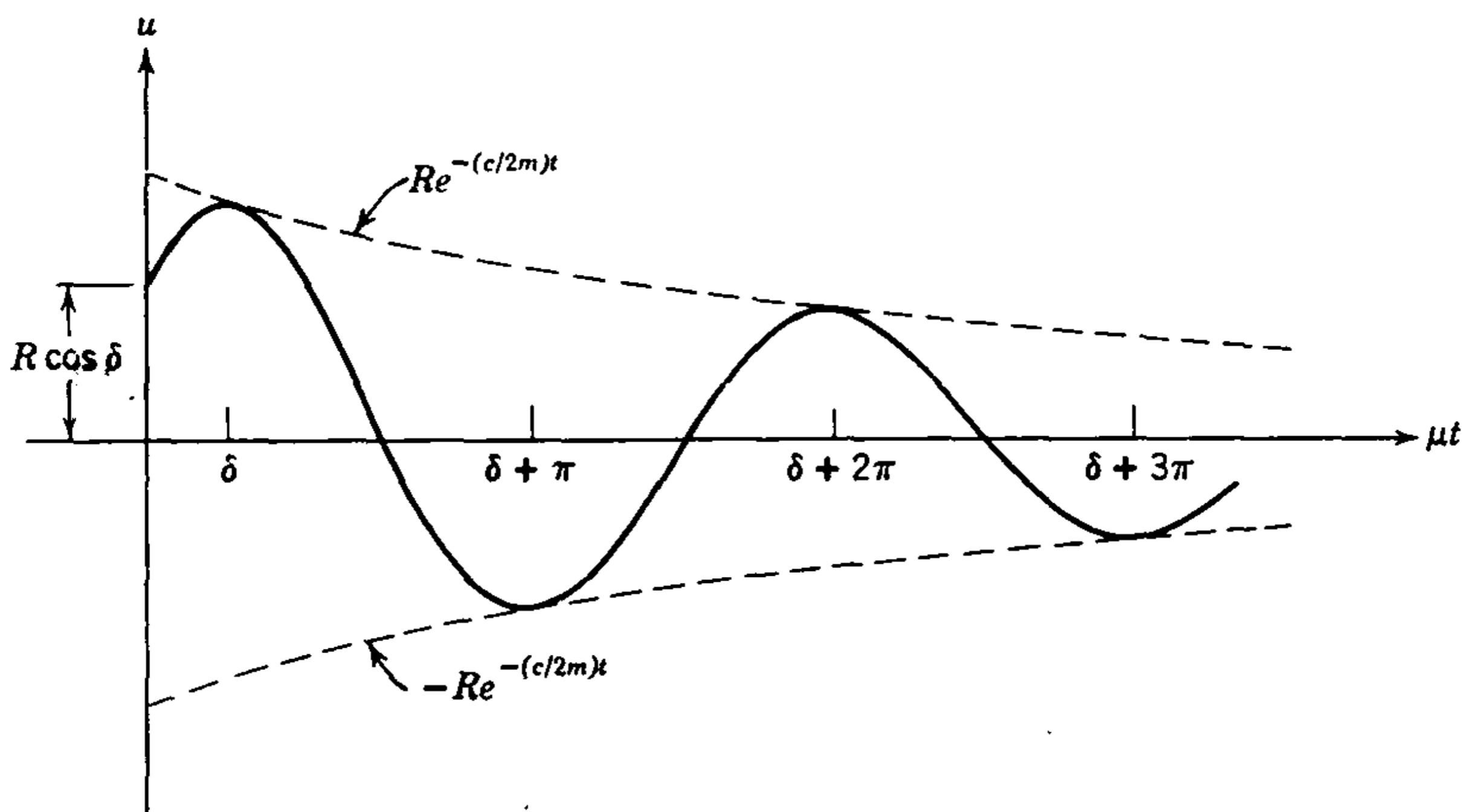
$$u = Re^{-(c/2m)t} \cos(\mu t - \delta) \quad (11)$$

تغییر مکان u باشد بین دو خم $u = \pm Re^{-(c/2m)t}$ واقع باشد، و بنابراین بدیگ خم کسینوسی شباهت دارد که دامنه آن کاهش می‌یابد. طرح یک نمونه در شکل ۵.۳ آمده است.

با وجود آنکه حرکت دقیقاً متناوب نیست، می‌توان یک شبیه دوده متناوب μ را به عنوان زمان بین ماکزیمم‌های متوالی تغییر مکان تعریف کرد. رابطه بین T_d و T جالب توجه است. داریم

$$T_d = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi \left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2} \right)^{-1/2} = 2\pi \left(\frac{k}{m} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{c^2}{4km} \right)^{-1/2}$$

$$= T \left(1 - \frac{c^2}{4km} \right)^{-1/2}$$



شکل ۵.۳ ارتعاش استهلاکی

بنا بر این اگر $c^2/4km$ کوچک باشد،

$$T_d \cong T \left(1 + \frac{c^2}{8km} \right)$$

در نتیجه هنگامی که نیروی مقاوم بسیار کوچک باشد (یعنی، هنگامی که کمیت مطلق $\lambda \leq c^2/4km$)، می‌توان در محاسبه شبه دوره تناوب ارتعاش از نیروی مقاوم صرف نظر کرد. در بسیاری از مسائل فیزیکی دقیقاً همین وضعیت وجود دارد. از طرف دیگر، اگر بخواهیم حرکت دقیق جرم را برای تمام مدت بررسی کنیم، هرگز نمی‌توان از نیروی مقاوم هر قدر هم کوچک باشد صرف نظر کرد. در بند بعدی که به بحث پیرامون ارتعاشات تقویت شونده می‌پردازیم، نیروی مقاوم اهمیت بیشتری خواهد یافت.

مسائل

۱. یک وزنه ۲ پوندی طول یک فتر ۲ فوتی را π اینچ افزایش می‌دهد. اگر وزنه را ۳ اینچ دیگر به طرف پایین کشیده و رهاسازیم، با صرف نظر کردن از مقاومت هوای حرکت حاصل را معین کنید. دامنه، فرکانس دوری، و تناوب حرکت را بیابید.
۲. یک جرم ۱۰۰ گرمی به یک فتر فولادی به طول طبیعی ۵ سانتی‌متر آویزان است. طول فتر در اثر این جرم ۵ سانتی‌متر افزایش یافته است. اگر سرعت اولیه جرم برابر ۱۵ سانتی‌متر بر ثانیه بشهسوی پایین باشد، حرکت حاصل را معین کنید. از مقاومت هوای صرف نظر شود.
۳. یک وزنه ۳ پوندی طول یک فتر π اینچ افزایش می‌دهد. اگر با فشاردادن وزنه بشهسوی بالا، فتر را ۱ اینچ منقبض کرده و سپس وزنه را با سرعت ۲ فوت بر ثانیه بشهسوی پایین رها کنیم، حرکت حاصل را معین کنید. از مقاومت هوای صرف نظر شود. دامنه، فرکانس دوری، و تناوب حرکت را بیابید.
۴. نشان دهید که تناوب حرکت ارتعاشی بدون استهلاک جرمی که به یک فتر شاغلی آویزان است برابر $\sqrt{\Delta l/g}/2\pi$ می‌باشد، که در آن Δl افزایش طول در اثر w وزن جرم مزبور است.
۵. در مسئله ۳ فرض کنیم مقاومت هوای یک نیروی استهلاکی برابر $3w^2$ پوند اعمال کند. شبه تناوب حرکت استهلاکی حاصل را با تناوب طبیعی حرکت بدون استهلاک مقایسه کنید. تغییر تناوب چه درصدی از تناوب طبیعی است؟
۶. در مسئله ۵، ضریب استهلاک باشد چقدر باشد، تاموجب ۵ درصد تغییر در تناوب حرکت گردد؟
۷. نشان دهید که $r \sin(\omega_0 t - \theta) + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t - \theta)$ را می‌توان به صورت $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \sin(\omega_0 t - \theta)$ نوشت. r و θ را بر حسب A و B معین کنید. اگر $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \sin(\omega_0 t - \theta)$ را برابر بین r ، R ، θ و δ چیست؟

۸. جواب معادله دیفرانسیل $m\ddot{u} + k u = 0$ که در شرایط اولیه زیر صدق می‌کند بیا بیند. جواب خود را به صورت $R \cos(\omega_0 t - \delta)$ بیان کنید.

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{ج})$$

۹. تناوب طبیعی نوسان آونگی بدطول l را که در شکل ۶.۳ نشان داده شده است بیا بیند. از مقاومت هوا و وزن نخ در مقایسه با وزن جرم مزبور صرف نظر کنید. θ را به قدر کافی کوچک فرض کنید به طوری که $\sin \theta \approx \theta$.

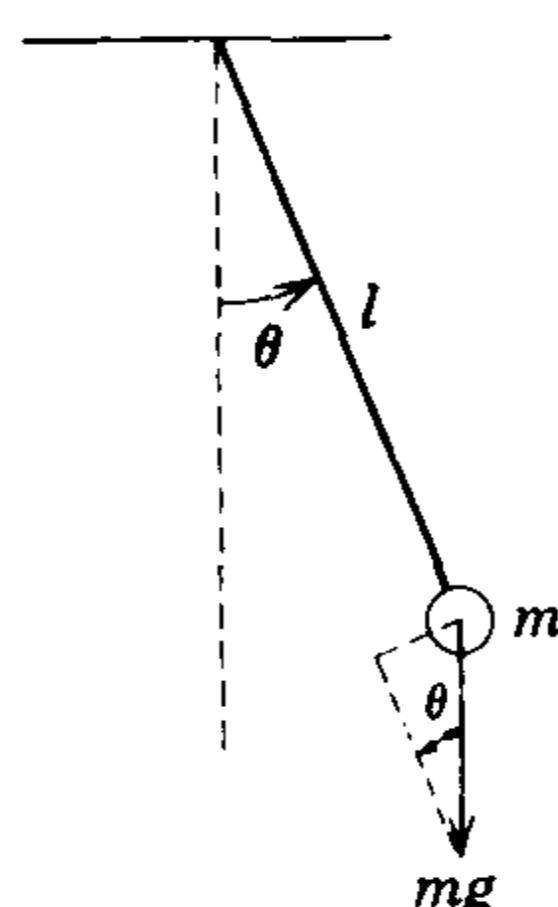
(اهمایی): قانون نیوتون را برای مؤلفه مماسی حرکت بنویسید.

۱۰. جسمی مکعبی شکل و همگن به ضلع l و چگالی حجمی ρ در مابینی به چگالی حجمی $\hat{\rho}$ شناور است. اگر جسم را اندکی در مایع فروبرده و رها سازیم، درامتداد شاغری به نوسان درمی‌آید. با فرض آنکه بتوان از استهلاک ناشی از غلظت مایع و مقاومت هوا صرف نظر کرد، معادله دیفرانسیل حرکت و تناوب آن را بیا بیند.

۱۱. افزایش طول یک فنر مارپیچی برا اثر یک جرم ۲۵ گرمی برابر ۵ سانتی متر است. اگر فنر را به یک داشپوت روغنی با ضریب مقاومت ۴۰۰ دین ثانیه برسانندی متصل کنیم، و جرم را ۲ سانتی متر دیگر کشیده و رها سازیم، حرکت حاصل را معین کنید.

۱۲. افزایش طول یک فنر برا اثر وزنه ۱۶ پوندی برابر ۳ اینچ است. وزنه را به یک دستگاه داشپوت با ضریب مقاومت ۲ پوند ثانیه برفوت متصل می‌کنیم. مطلوب است تعیین حرکت حاصل، در صورتی که وزنه را از موضع تعادل با سرعت ۳ اینچ بر ثانیه به سوی پایین رها کنیم.

۱۳. یک وزنه ۸ پوندی به یک فنر فولادی به طول ۱۵ اینچ آویزان است. افزایش طول فنر برا اثر وزنه برابر $1/8$ نوی است. اگر وزنه را به یک داشپوت روغنی با ضریب مقاومت ۰ نیز متصل کنیم، مقادیر C را طوری تعیین کنید که بدازای آنها حرکت، استهلاکی



شکل ۶.۳

شدید، استهلاکی بحرانی، واستهلاکی ضعیف باشد. واحدهای c را مشخص کنید.

۱۴. جوابی از معادله دیفرانسیل $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ را در حالت $Re^{-(c/2m)^t} \cos(\mu t - \delta)$ که در شرایط اولیه زیر صدق می‌کند بیا بیند. جواب خود را به صورت (پیان) کنید.

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = u_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_0 \quad (\text{ج})$$

۱۵. نشان دهید که اگر ضریب مقاومت c در معادله $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ طوری باشد که حرکت استهلاکی شدید یا بحرانی باشد، آنگاه شرایط اولیه هرچه باشد، جرم می‌تواند حد اکثر یک باراًز موضع صفر تغییر مکان بگذرد.
راهنمایی: همه مقادیر ممکن u را به طوری که $\dot{u} = 0$ بینایید.

۱۶. برای حالت استهلاکی بحرانی، جواب عمومی معادله (۱۴) را که در شرایط اولیه $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1$ صدق می‌کند بینایید. اگر $u_0 = u_1 = 0$ ، نشان دهید که وقتی $\infty \rightarrow t$ داریم $u \rightarrow u_0$ ، اما بـ t ازای هر مقدار متناهی u_0 خواهیم داشت $u \neq u_0$. فرض کنیم u_0 مثبت باشد، برای u_0 شرطی تعیین کنید که موجب شود جرم پس از رهاشدن از موضع صفر تغییر مکان بگذرد.

۱۷. برای نوسان استهلاکی که با معادله (۱۱) داده شده است، زمان بین ماکریمهای متواتری برابر است با $T_d = 2\pi/\sqrt{m/c}$. نسبت تغییر مکان دو ماکریم متواتری (متناظر به t) و $T_d + T_d e^{(c/2m)t}$ معین می‌شود. بدینسان تغییر مکانهای متواتری (متناظر به فاصل زمانی t) تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $e^{(c/2m)t}$ می‌دهند. لگاریتم طبیعی این نسبت را که با $\Delta = (\pi c/m\mu)T_d$ نشان داده می‌شود، کاهش لگاریتمی می‌نماید. چون μ, m و Δ مقادیری هستند که می‌توان به آسانی اندازه گیری کرد، این معادله روش عملی مناسبی برای محاسبه ضریب مقاومت دستگاه مکانیکی فراهم می‌سازد. به ویژه، در مورد حرکت ارتعاشی جرم در یک مایع غلیظ، ضریب مقاومت به غلظت مایع بستگی دارد؛ نوع این رابطه برای اشکال هندسی ساده معلوم است، و با استفاده از رابطه بالا می‌توان به طور تجربی غلظت را معین کرد. این یکی از دقیقترین روش‌های تعیین غلظت گاز در فشارهای بالاست.

(الف) در مسئله ۱۲، کاهش لگاریتمی را بینایید.

(ب) اگر در مسئله ۱۳ اندازه کاهش لگاریتمی برابر ۳، و ثانیه ۳ را $T_d = 0$ باشد، ضریب مقاومت c را بینایید.

۲.۷.۳ ارتعاشات تقویت شونده

اگرتون حالتی را که در آن یک نیروی خارجی متناوب، مانند $F \cos \omega t$ ، به دستگاه فر جرم

وارد می شود در نظر می گیریم. در این حالت معادله حرکت عبارت است از

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

نخست فرض کنیم که نیروی مقاومی وجود ندارد؛ آنگاه معادله (۱) به صورت ساده زیر در می آید

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \quad (2)$$

هنگامی که $\omega_0 = \sqrt{k/m} \neq \omega$ ، جواب عمومی معادله (۲) چنین است

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (3)$$

ثابت های c_1 و c_2 به وسیله شرایط اولیه تعیین می شوند. حرکت حاصل، عموماً، مجموع دو حرکت متناوب با فرکانس های (ω_0 و ω) و دامنه های مختلف است. در اینجا دو مثال را مورد توجه قرار می دهیم.

ضربان. فرض کنیم که جرم در آغاز ساکن باشد، یعنی، $u(0) = 0$ ، $\dot{u}(0) = 0$. در این صورت ثابت های c_1 و c_2 در معادله (۳) به صورت زیر بدست می آیند

$$c_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0 \quad (4)$$

وجواب معادله (۲) عبارت است از

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (5)$$

این عبارت مجموع دو تابع متناوب با تابعهای مختلف و دامنه یکسان است. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

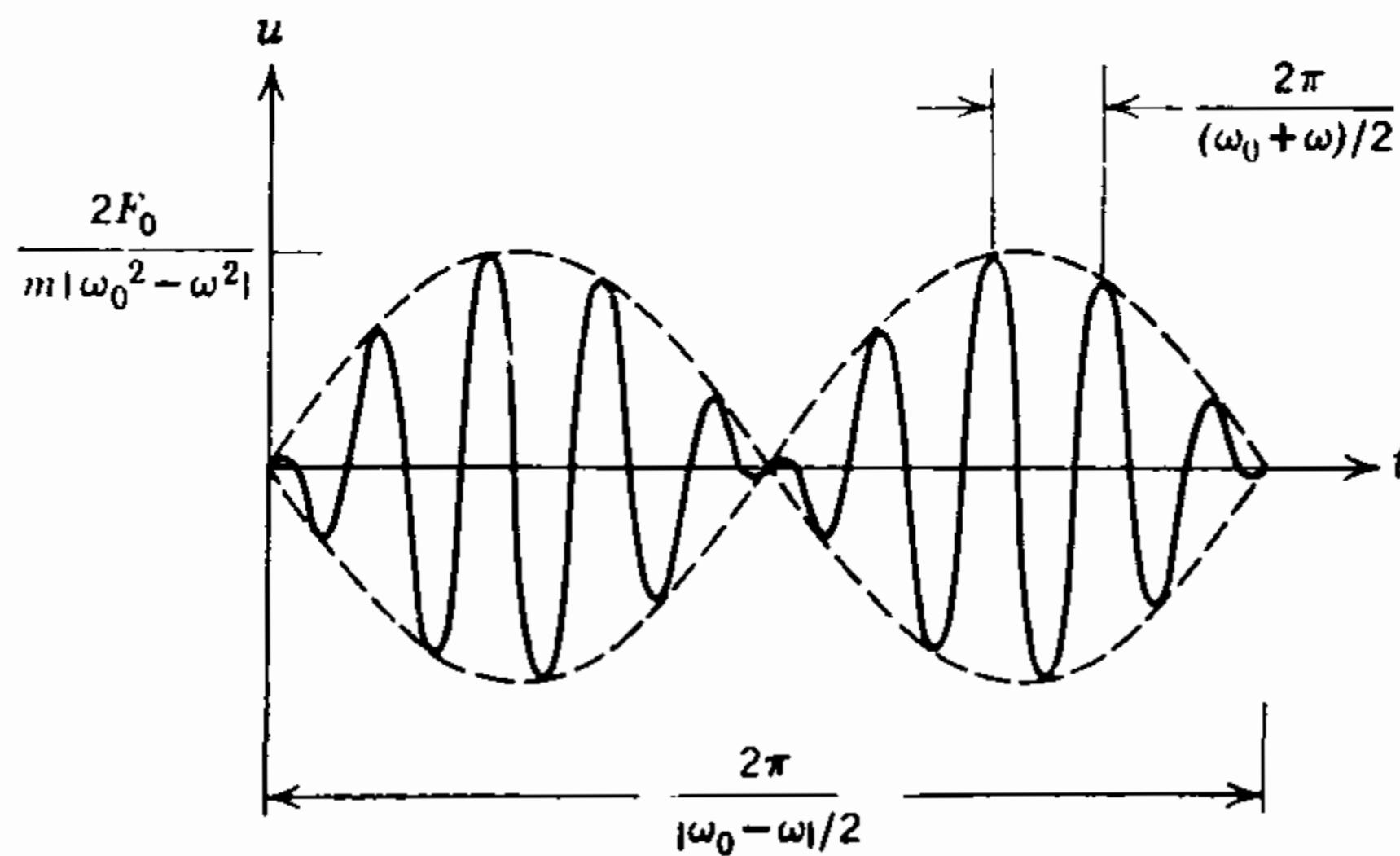
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

که در آن $A = (\omega_0 - \omega)t/2$ و $B = (\omega_0 + \omega)t/2$ ، می توان رابطه (۵) را به صورت زیر نوشت

$$u = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \quad (6)$$

اگر $|\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|$ باشد، آنگاه $(\omega_0 - \omega)t/2 \gg (\omega_0 + \omega)t/2$ ، و در نتیجه تابعی است که در مقایسه با $(\omega_0 - \omega)t/2$ دارای نوسانهای سریعتری است. بنابراین، حرکت نوسانی سریع با فرکانس دوری $2/((\omega_0 + \omega)t)$ می باشد، و دامنه آن دارای تغییرات طبیعی سینوسی است. این نوع حرکت، که دامنه آن دارای تغییرات تناوبی است، نمایانگر پدیده ای است که ضربان نامیده می شود. در آنکه هنگامی که دو دیاپازون با فرکانس های

تقریباً برابر همزمان به صدا در آیند، چنین پدیده‌ای بوجود می‌آید. در این حالت تغییرات تناوبی دامنه را می‌توان به طور ساده با گوش تشخیص داد. در الکترونیک تغییرات دامنه بر حسب زمان را مدولاسیون دامنه^۱ می‌نامند. طرح اجمالی تابع $(t)\phi = u$ مربوط بدرابطه (۶) در شکل ۷.۳ ترسیم شده است.



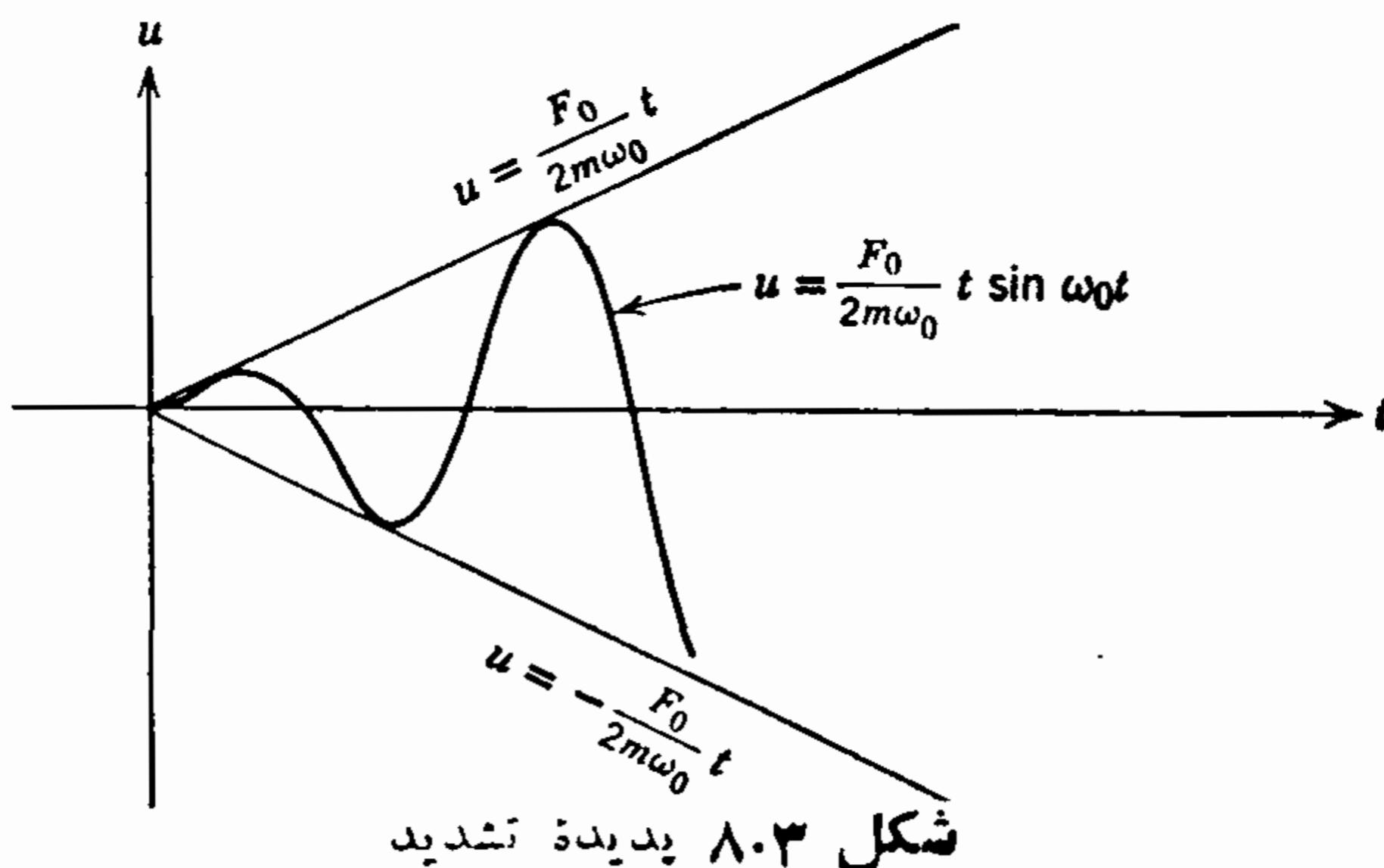
شکل ۷.۳ پدیده ضربان

تشدید. به عنوان مثال دیگر. حالت $\omega = \omega_0$ را در نظر می‌گیریم؛ در این حالت، تناوب تابع تقویت با تناوب طبیعی دستگاه برابر است. در این صورت جمله ناهمگن $F_0 \cos \omega t$ یک جواب معادله همگن متناظر است. در این حالت، جواب معادله (۲) عبارت است از

@jozve_iut

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (7)$$

بدعلت وجود جمله $\frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$ در رابطه (۷)، روشن است که c_1 و c_2 هر چه باشند، دامنه حرکت وقی $\rightarrow \infty$ نامحدود خواهد شد (شکل ۸.۳ را بینید). این پدیده به تشدید



شکل ۸.۳ پدیده تشدید

موسوم است. اما، در تحقیق عملی، فنر محتملاً می‌شکند. البته، به محض آنکه // بزرگ شود، این نظریه دیگر معتبر نخواهد بود، زیرا هنگامی که از یک رابطه خطی برای تعیین ثابت فنر استفاده کردیم، فرض این بود که // کوچک است. اگر دستگاه شامل نیروی مقاوم باشد، حرکت محدود باقی می‌ماند؛ اما، در این حالت نیز امکان دارد که به ازای تابع ورودی $F_0 \cos \omega t$ ، هنگامی که نیروی مقاوم کوچک و ω نزدیک به ω_0 باشد، دامنه بسیار بزرگ شود.

ارتعاشات تقویت‌شونده استهلاکی. حرکت دستگاه فنر-جرم با استهلاک و تابع تقویت $F_0 \cos \omega t$ را می‌توان مستقیماً تعیین کرد. گرچه محاسبات نسبتاً مفصل‌اند، اما دشوار نیستند. جواب معادله (۱) عبارت است از

$$u = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (8)$$

که در آن δ از Δ/Δ و $\sin \delta = c\omega / \Delta$ و $\cos \delta = m(\omega_0^2 - \omega^2) / \Delta$ با درنظر گرفتن $\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}$ به دست می‌آید. در اینجا ۲ و ۳ ریشه‌های معادله مشخصه وابسته به معادله (۱) می‌باشند. چنانکه در بند آخر دیدیم وقتی $\infty \rightarrow$ هر دو تابع $e^{i\omega t}$ و $e^{-i\omega t}$ به صفر می‌گرد़ند. بدینسان وقتی $\infty \rightarrow$ داریم

$$u \rightarrow u_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (9)$$

بدین علت $u = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$ را جواب گذاشت و $(t) = u_p(t)$ را جواب حالت دائمی نامند، به طور اجمالی می‌توان گفت که جواب اگررا موجب می‌شود تا شرایط اولیه برقرار باشند، با افزایش زمان انرژی که با تغییر مکان و سرعت اولیه به دستگاه داده شده است در اثر نیروی استهلاک ازین می‌رود، وسپس حرکت نمایشگر جواب دستگاه به نیروی خارجی $F(t)$ خواهد بود. بدون استهلاک (که طبعاً در هر دستگاه فیزیکی غیرممکن است) اثر شرایط اولیه برای همیشه پا بر جا می‌ماند.

توجه شود که $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2$ هیچگاه، حتی به ازای $\omega = 0$ صفر نمی‌شود، بنابراین وجود نیروی استهلاک حرکت موجب می‌شود که همواره دامنه حرکت محدود باقی بماند. به ازای مقادیر ثابت m ، c و k دامنه جواب حالت دائمی هنگامی نمایشگر می‌نماییم که $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2$ مینیمم باشد؛ و این متناظر است با انتخاب ω به صورت

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{m} \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \quad (10)$$

برای طرح یک دستگاه فنر-جرم^۱ به منظور کشف نیروهای متناوب در یک همسایگی

۱. معمولاً چنین ابزارهایی را، ابزارهای لرزه می‌نامند، زیرا اصولاً با لرزه‌نگار که برای کشف حرکات سطح زمین به کار می‌رود مشابه‌اند. حرکت تناوبی پایه‌ای که فنر به آن نصب شده است با مسئله‌ای که در آن یک نیروی تناوبی بر جرم مزبور اثر می‌کند معادل است.

کوچک ω باید k ، c و m را طوری انتخاب کنیم که معادله (۱۵) به طور تحقیقی یا تقریبی برقرار باشد. بدین طریق پاسخ دستگاه به این گونه نیروها مانند خواهد بود و کشف آنها را آسانتر می‌کند. در مسائل مربوط به کشف علایم الکتریکی در شبکه‌های الکتریکی نیز وضعیت مشابهی رخ می‌دهد.

مسائل

۱. عبارت $A \sin \alpha t \sin \beta t - \cos \gamma t - \cos \eta t$ را به صورت $A \sin \alpha t \sin \beta t$ بیان کنید.
۲. عبارت $A \sin \alpha t \cos \beta t - \sin \gamma t - \sin \eta t$ را به صورت $A \sin \alpha t \cos \beta t$ بیان کنید.
۳. یک فنر مارپیچی در اثر وزنه 4 پوندی $1/8$ فوت کشیده شده است. فنر تحت تأثیر یک نیروی خارجی $2\cos \omega t$ پوند قرار دارد. اگر وزنه را از وضعیت تعادل 2 اینچ تغییر مکان داده و سپس رها کنیم، حرکت حاصل را معین کنید؛ از نیروی استهلاک صرف نظر شود. اگر نیروی خارجی برابر $4\sin \omega t$ پوند باشد، به ازای چه مقدار ω تشدید به وجود می‌آید.
۴. اگر یک دستگاه فنر-جرم با وزن 4 پوند و ضریب ثابت فنر 1 پوند بر اینچ ناگهان در $t=0$ با نیروی خارجی $4\cos \omega t$ پوند و بدون استهلاک به حرکت درآید، حرکت حاصل را تعیین کرده و نمودار تغییر مکان بر حسب زمان t رارسم کنید.
۵. جواب معادله دیفرانسیل $m\ddot{u} + k u = F_0 \cos \omega t$ را برای هر یک از شرایط اولیه زیر بیانید:

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (\text{ج})$$

۶. تعمیمی از پدیده ضربان را در حرکتی که مجموع دوتابع متناوب با دامنه‌های مختلف $A \cos \omega_0 t$ و $B \cos \omega_0 t$ باشد، می‌توان مشاهده کرد. نشان دهید که این نوع حرکت را می‌توان به صورت

$$R(t) \cos \left[\frac{\omega_0 + \omega}{2} t - \delta(t) \right]$$

- بیان کرد. اگر $1 \ll |A - B| \ll |\omega_0 - \omega|$ ، نشان دهید که R تابعی با تغییرات کند است. تغییرات زاویه فاز δ را بر حسب زمان t ، مدولاسیون فرکانسی می‌نامند.
۷. مطلوب است تعیین حرکت $\phi(t) = u$ یک جرم m که به فنری با ثابت k آویزان است و نیروی

$$F(t) = F_0 \cdot \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi < t \leq 2\pi \\ 0 & 2\pi < t \end{cases}$$

برآن اثر می‌کند. برای سهولت فرض شود $\omega^2 = k/m = 1$. از مقاومت هوا صرف نظر کرده و فرض می‌کنیم که جرم در آغاز ساکن باشد.

(اهمایی): هر فاصله زمانی را جداگانه بررسی کنید، و جوابهای متناظر به فواصل مختلف را با استفاده از این شرط که هر ϕ تابع پیوسته‌ای از t است با هم پیوند دهید.
۸. افزایش طول یک فنر مارپیچی در اثر وزنه ۸ پوندی، برابر ۶ اینچ است. جرم به یک دستگاه داشپوت با ثابت استهلاک ۲۵ ره پوند ثانیه بر قوت وصل شده است. اگر جرم تحت تأثیر یک نیروی خارجی بد صورت $4\cos 2t$ پوند واقع باشد، جواب دائمی دستگاه را تعیین کنید. m را طوری انتخاب کنید که جواب دستگاه به این نیروی خارجی ماقریم باشد.

۹. جواب معادله دیفرانسیل $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin \omega t$ را با فرض $c^2 - 4km < 0$ برای هریک از شرایط اولیه زیر بیا بید.

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

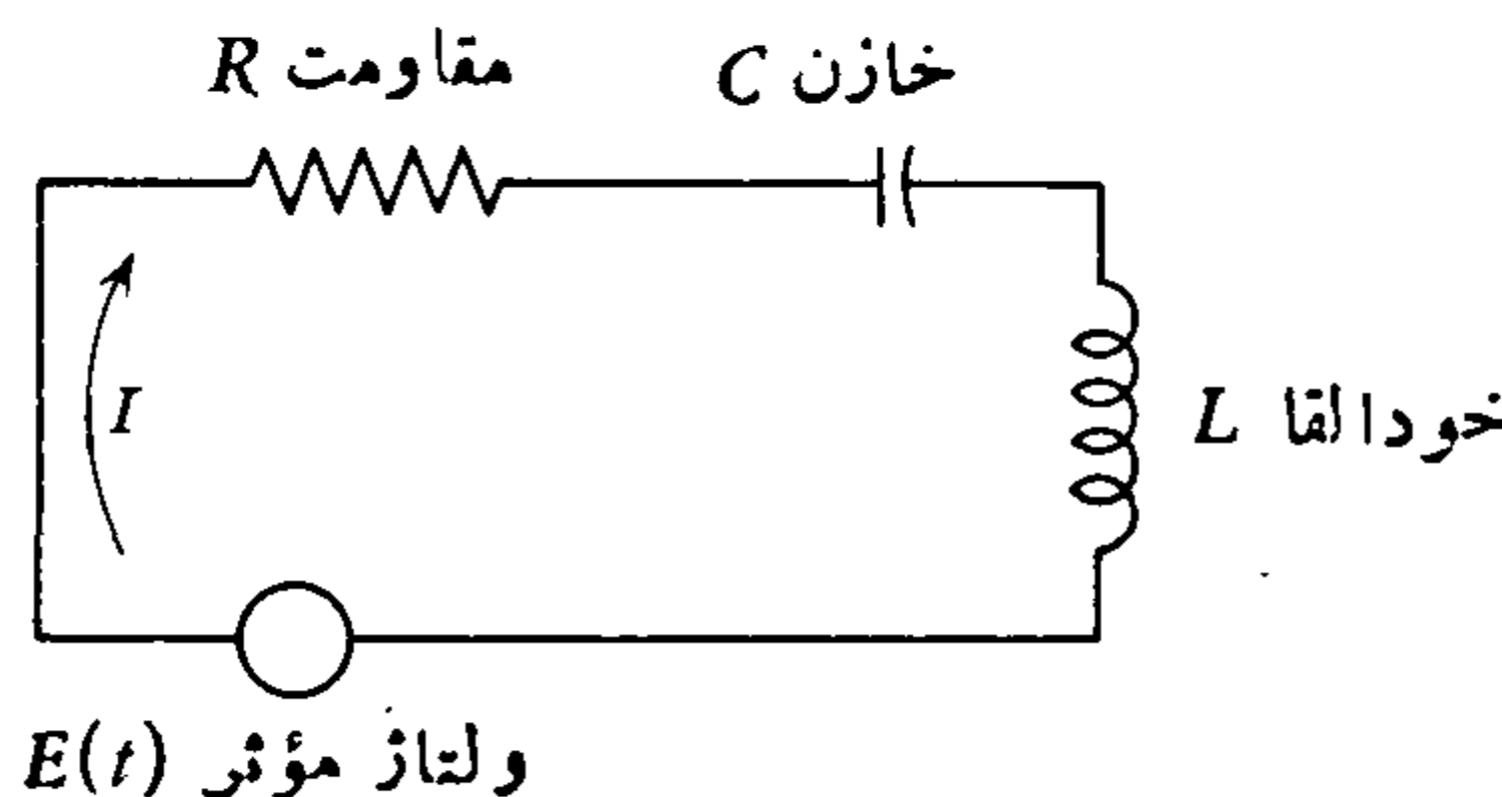
$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = u_0 \quad (\text{ب})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_0 \quad (\text{ج})$$

@jozve_iut

۹.۳ شبکه‌های الکتریکی

به عنوان دو میان مثال برای کاربرد نظریه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، به بررسی شدت جریان در یک مدار ساده به صورت سری، می‌پردازیم. مدار را در شکل ۹.۳ نشان داده ایم. شدت جریان $I(t)$ (بر حسب آمپر) تابعی از زمان t است. مقاومت R (اهم)، ظرفیت خازن C (فاراد)، و ضریب القای L (هنری) همه مثبت می‌باشند، و عموماً ممکن است تابع زمان t و شدت جریان I باشند. در دسته وسیعی از کاربردها می‌توان از این



شکل ۹.۳

بستگی صرف نظر کرد، و ما فرض می‌کنیم که R ، C و L ثابت‌های معلومی باشند. ولتاژ مؤثر E (ولت) تابعی از زمان است و اغلب به صورت $E_0 \cos \omega t$ می‌باشد. کمیت فیزیکی دیگری که در بحث وارد می‌شود عبارت است از بار کل خازن (t) $Q = Q(t)$ (کولن) در زمان t .

بستگی بار Q و شدت جریان I با رابطه $I = dQ/dt$ مشخص می‌شود.

شدت جریان در مدار مزبور مطابق قانون دوم کیرشهف^۱ صورت می‌گیرد: دیگر مدار بسته، ولتاژ مؤثر با مجموع افتخاهای ولتاژ در بقیه مدارها برابر است.

بنا بر قوانین مقدماتی الکتریسیته می‌دانیم که

$$\text{افت ولتاژ بین دو سر مقاومت} = IR$$

$$\text{افت ولتاژ بین دو سر خازن} = \frac{1}{C}Q$$

$$\text{افت ولتاژ بین دو سر سیم پیچ} = L \frac{dI}{dt}$$

بنابراین

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (1)$$

واحدها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که

$$1 \text{ ولت} = 1 \text{ آمپر} \times 1 \text{ هنر} \times \frac{1 \text{ کولن}}{1 \text{ فاراد}} = \frac{1 \text{ آمپر}}{1 \text{ ثانیه}}$$

چون $I = dQ/dt$ ، می‌توان با جایگذاری I در معادله (۱)، برای Q معادله ناممکن خطی مرتبه دوم زیر را به دست آورد:

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (2)$$

که در آن نقطه‌ها نمایشگر مشتق‌گیری نسبت به t می‌باشند. شرایط اولیه که باید مثل در زمان $t=0$ مشخص گردند، عبارتند از

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0. \quad (3)$$

بدین‌سان باید بار اولیه خازن و شدت جریان اولیه در مدار را بدانیم.

همچنین می‌توان با مشتق‌گیری از معادله (۱) نسبت به t ، و جایگزینی dQ/dt ، معادله دیفرانسیل مرتبه دومی برای جریان I به دست آورد. بدین‌سان

۱. گوستاو کیرشهف (Gustav Kirchhoff)، (۱۸۲۴–۱۸۸۷) فیزیکدان آلمانی است که به سبب پژوهش‌هایش در الکتریسیته (قوانینی که به نام اوست) و تحقیقاتش در طیف‌نگاری مشهور است.

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = E(t) \quad (4)$$

شرايط اوليه اي که بايد مشخص کرد عبارتند از

$$I(0) = I_0, \quad \dot{I}(0) = \dot{I}_0 \quad (5)$$

با توجه به معادله (۱) داريم

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{L} \left[E(0) - RI_0 - \frac{1}{C}Q_0 \right] \quad (6)$$

بدين سان اگر $(0) I$ و $(0) Q$ را مشخص کنيم \dot{I} معين خواهد شد. كميتهای جريان و بار اوليه را می‌توان با دستگاههای فيزيکی اندازه‌گيری کرد، و بدین‌وسيله شرايط اوليه (۳) متناظر به معادله (۲) یا شرايط اوليه (۵) متناظر به معادله (۶) معين می‌گردد.

شهاحت بین اين مسئله مدار الکتریکی و مسئله ارتعاش مکانيکی که قبلاً بحث شد، شایان توجه است. اين نكته در جدول ۲.۳ به وضوح نشان داده شده است. با استفاده از شهاحت بین دو دستگاه می‌توان مسائل ارتعاشات مکانيکی را با ساختن مدار الکتریکی متناظر و اندازه‌گيری بار Q حل کرد. اين مطلب در زمينه کامپيوترهای آنالوگ داراي نقش اساسی است.^۱

جدول ۲.۳

مدار الکتریکی @jozve_iut

دستگاه مکانيکي

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t)$$

Q بار

تغيير مكان u

$I = \dot{Q}$ جريان

سرعت \dot{u}

L القاء

جرم m

R مقاومت

استهلاك c

الستانس $1/C$

ثابت فنر k

ولتاژ مؤثر $E(t)$

نيروي مؤثر $F(t)$

۱. به عنوان مقدمه بسيار ساده‌اي برنظر يه کامپيوترهای آنالوگ کتاب ترويت و راجز (T.D.Truitt and A.E. Rogers) را ببینيد.

واضح است که مسئله کلی مقدار اولیه

$$(7) \quad a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t); \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0.$$

برای یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، حداقل با دو مسئله فیزیکی متاظر قرار می‌گیرد: حرکت یک جرم در ارتباط با یک فنر مرتיעش، و جریان الکتریسیته در یک مدار ساده به صورت سری. در واقع، مسائل فیزیکی دیگر، از قبیل نوسان پیچشی یک میله در ارتباط با یک چرخ لنگر نیز به مسئله مقدار اولیه (7) می‌انجامند. این وضعیت میین یکی از روابط اساسی بین ریاضیات و فیزیک می‌باشد: بسیاری از مسائل فیزیکی، همین‌که به همودت ریاضی فرمول‌بندی شوند، یکسان می‌شوند. بدین‌سان جواب مسائل فیزیکی متعددی را می‌توان از حل تنها یک مسئله ریاضی با تغییر مناسب علامتها به دست آورد.

اکنون معادله (2) را که در آن ولتاژ مؤثر به صورت یک تابع متناوب $E_0 \cos \omega t$ باشد، در نظر می‌گیریم. درست همانند دستگاه جرم-فنر که در بندهای ۱۰۷.۳ و ۲۰۷.۳ بررسی شد، می‌توان به بسط مفاهیم فرکانس طبیعی، استهلاک بحرانی، تشدید، ضربان، جواب گذرا، و جواب حالت دائمی در مورد مدار سری پرداخت. این موضوع در مثال و مسائل زیرآمده است.

مثال. رفتار جواب معادله (2) را هنگامی که $\omega \rightarrow \infty$ و

با فرض $R \neq 0$ بررسی کنید.

نخست، چون C, R, L مثبت‌اند، همه جوابهای معادله همگن متاظر به معادله (2) با $\omega \rightarrow 0$ به صفر می‌گردند (بند ۱۰۷.۳ را بینید). برای تعیین یک جواب خصوصی معادله

$$(8) \quad L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t$$

از روش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم. با جایگزینی

$$(9) \quad Q_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

دیده می‌شود که A و B باید در معادلات زیر صدق کنند

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = E_0$$

$$-\omega RA + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0$$

با تعیین مقادیر A و B و قراردادن آنها در معادله (9) نتیجه می‌شود

$$(10) \quad Q_p(t) = \frac{E_0(1/C - L\omega^2) \cos \omega t + \omega R E_0 \sin \omega t}{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}$$

معادله (10) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Q_p(t) = \frac{E_0 \sin(\omega t + \delta)}{\sqrt{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}} \quad (11)$$

که در آن δ از روابط و $\cos \delta = \omega R / \Delta$ ، $\sin \delta = (1/C - L\omega^2) / \Delta$ داریم و $\Delta = \sqrt{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}$

به دست می‌آید. چون $(Q_c(t) + Q_p(t)) \rightarrow \infty$ و وقتی که $Q = Q_c(t) + Q_p(t) \rightarrow \infty$ در نتیجه وقتی که $\infty \rightarrow \infty$ خواهیم داشت $Q \rightarrow Q_p(t)$. به همین علت اغلب $Q_p(t)$ را جواب حالت دائمی معادله (۸) می‌نامند
هنگامی که بخواهیم جریان حالت دائمی مدار را معین کنیم، کافی است از $Q_p(t)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$I_p(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}. \quad (12)$$

توجه شود که جریان حالت دائمی دارای همان فرکانس ولتاژ مؤثر است. جمله $1 - \omega L$ را که در معادله (۱۲) آمده است (آکتانس^۱ مدار و عبارت $\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$ را اپیدانس^۲ مدار می‌نامند.

مسائل

۱. اگر در یک مدار سری ساده مقاومت نداشدم، نشان دهید که در صورت عدم ولتاژ مؤثر، بار Q روی خازن نسبت به زمان متناسب است و فرکانس آن برابر است با $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. این مقدار را فرکانس طبیعی مدار می‌نامند.

۲. نشان دهید که اگر در مدار مقاومت وجود نداشته و ولتاژ مؤثر به صورت $I \rightarrow \infty$ باشد، آنگاه بار روی خازن هنگامی که $\omega = \sqrt{1/LC}$ باشد وقتی که $R^2 - 4L/C > 0$ نامحدود خواهد شد. این پدیده تشدید است. نشان دهید که ω هرچه باشد بارهای محدود باقی می‌ماند، به شرط آنکه در مدار مقاومتی ولوهر قدر کوچک وجود داشته باشد.

۳. نشان دهید که جواب $LI'' + RI' + (1/C)I = 0$ به صورت زیر است

$$I = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}, \quad R^2 - 4L/C > 0 \quad \text{به ازای } \circ$$

$$= (A + Bt)e^{\lambda t}, \quad R^2 - 4L/C = 0 \quad \text{به ازای } \circ$$

$$= e^{\lambda t}(A \cos \mu t + B \sin \mu t), \quad R^2 - 4L/C < 0 \quad \text{به ازای } \circ$$

مدار متناظر به این سه حالت را به ترتیب استهلاکی شدید، بحرانی، وضعیف می‌نامند.

۴. فرض کنیم مداری به صورت سری شامل یک خودالقا، یک مقاومت و یک خازن، باز باشد، و بار اولیه خازن برابر $Q_0 = 15$ باشد. تغییرات بار و جریان را پس از بسته شدن مدار در هر یک از حالت‌های زیر بیا بید.

$$L = 0.2, \quad C = 10^{-5}, \quad R = 3 \times 10^2 \quad (\text{الف})$$

$$L = 1, \quad C = 4 \times 10^{-6}, \quad R = 10^2 \quad (\text{ب})$$

$$L = 2, \quad C = 10^{-5}, \quad R = 4 \times 10^2 \quad (\text{ج})$$

۵. اگر $2R = L = 10^{-6} \times 10^8$ و $C = 10^{-5}$ فاراد باشد، مقاومت R را طوری تعیین کنید که مدار استهلاکی بحرانی باشد.

۶. مداری به صورت سری شامل یک خازن $10^{-6} \times 10^2$ فاراد، و یک مقاومت $10^3 \times 5$ اهم، و یک خودالقا 1 هنری است. بار اولیه خازن صفر است. اگر یک باطری 12 ولتی را در مدار قرار داده و در $t = 0$ مدار را بیندیم، بار خازن را در 100 ولت $= 10^2$ ثانیه، و بار حالت دائمی را بیا بید.

۷. مطلوب است تعیین جریان حالت دائمی مداری به صورت سری در صورتی که ولتاژ مؤثر، $E = 110 \cos 120\pi t$ ولت، $L = 10^3$ هنری، $R = 3 \times 10^2$ اهم، و $C = 10^{-5} \times 10^2$ فاراد باشد.

۸. در مداری به صورت سری با مقادیر داده شده L ، R ، C و ولتاژ مؤثر $E_0 \cos \omega t$ ، به ازای چه مقدار ω جریان حالت دائمی ماکزیمم خواهد بود؟

۹. اغلب در مسائل مهندسی برق مناسبتر است که $E_0 \cos \omega t$ را به عنوان بخش حقیقی $E_0 e^{j\omega t}$ در نظر بگیرند ($j = \sqrt{-1}$ نماد متداولی در مهندسی برق است). در این صورت به جای معادله (۸) مذکور در متن باید معادله

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = E_0 e^{j\omega t} \quad (\text{یک})$$

را در نظر گرفت، با این قرارداد که پس از پایان محاسبات بخش حقیقی جواب را اختیار کنیم. ۱. فرض کنیم که $R \neq 0$.

۱. استفاده از نماد مختلط برای مسائل مدار الکتریکی به وسیله شادرل ب. اشتاین متن (Charles P. Steinmetz)، (۱۸۶۵-۱۹۲۳) ریاضیدان و مخترع، پایه گذاری شد. استفاده از این نماد سمبولیک در بررسی پدیده‌های جریان متناوب موجب پیشرفت سریع در گسترش تجاری وسائل الکتریکی با جریان متناوب گردید. وی همچنین کشف قانون هیسترزیس می‌باشد و دارای تحقیقات مهمی در بررسی پدیده آذربخش است. در جوانی یک سوسیالیست پرحرارت بود و در ایالات متحده وارد شد و به استخدام شرکتی در آمد که امروز جنرال الکتریک نام دارد.

(الف) نشان دهید که جواب حالت دائمی معادله (یک) عبارت است از

$$Q = \frac{E_0}{j\omega R - \omega^2 L + 1/C} e^{j\omega t}$$

(اهنگی: قرار دهید $Q = A e^{j\omega t}$)

(ب) بدینسان نشان دهید که جریان حالت دائمی عبارت است از

$$I = \frac{E_0}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} e^{j\omega t}$$

(ج) با استفاده از رابطه که در آن $\gamma = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$ و $\alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{j\gamma/2}$

نشان دهید که

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{j(\omega t - \delta)}$$

که در آن $[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{j\gamma/2}$. بالاخره، نشان دهید که بخش حقیقی این عبارت با آنچه در مثال همین‌بند به دست آمده متفاوت است.

(د) اگر ولتاژ مؤثر، $E(t) = E_0 \sin \omega t$ باشد، جربان حالت دائمی چه خواهد بود؟

(ه) پارامتر مختلط $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ را امپدانس مختلط^۱ می‌نامند.

معکوس Z را ادمیتانس^۲ و بخش‌های حقیقی و موهومی $1/Z$ را به ترتیب کندوکتانس^۳ و سوسپیتانس^۴ می‌نامند. مطلوب است تعیین ادمیتانس، کندوکتانس، و سوسپیتانس.

@jozve_iut

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.

در ارتباط با کامپیوترهای آنالوگ دو کتاب زیر معرفی می‌شوند:

Truitt, T. D. and Rogers, A. E., *Basics of Analog Computers*, Rider, New York, 1960.

Jenners, Roger R., *Analog Computation and Simulation: Laboratory Approach*, Allyn and Bacon, Boston, 1965.

درباره ارتعاشات مکانیکی و مدارهای الکتریکی کتابهای بسیاری وجود دارد. کتاب زیر

1. complex impedance

2. admittance

3. conductance

4. susceptance

درباره ارتعاشات مکانیکی کلاسیک است:

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, Mc Graw-Hill, New York, 1947.

دو کتاب زیر جدیدتر و در سطح متوسط هستند.

Thomson, W.T., *Theory of Vibrations with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1972.

Vierck, R. K., *Vibration Analysis*, International, Scranton, Pa., 1967.

کتابی مقدماتی در موضوع مدارهای الکترونیکی در زیر معرفی می‌شود:

Smith, J. R. J., *Circuits, Devices, and Systems*, Second Edition, Wiley, New York, 1976.

سوابیهای جواب معادلات خطی مرتبه دوم

۱۰۴ مقدمه. مروری بر سوابیهای توانی

در فصل ۳ روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت را شرح دادیم. اکنون به بررسی روش‌های حل معادلات خطی مرتبه دوم که ضرایب آنها توابعی از متغیر مستقل است می‌پردازیم. برای این منظور کافی است به بررسی معادله همگن

$$P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (1)$$

پردازیم، زیرا در اینجا نیز برای معادله ناهمگن متناظر می‌توان از همان روش استفاده کرد. طبقه وسیعی از مسائل فیزیک ریاضی به معادلاتی به صورت (۱) می‌انجامد که دارای ضرایب چند جمله‌ای می‌باشند، بد عنوان مثال، معادله بسل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

که در آن v مقدار ثابتی است، و معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

که در آن α مقدار ثابتی است. بدھمین علت، و نیز برای ساده کردن محاسبات جبری نخست به بررسی حالتی می‌پردازیم که در آن توابع P ، Q و R چند جمله‌ای می‌باشند. اما چنانکه خواهیم دید، روش حل مزبور را می‌توان در مورد طبقه‌ای از توابع اعم از چند جمله‌ایها به کار گرفت.

در اینجا P ، Q و R را چند جمله‌ای فرض می‌کنیم، و بعد به بررسی حالتهای عمومیتر می‌پردازیم. همچنین فرض می‌کنیم که می‌خواهیم معادله (۱) را در همسایگی یک نقطه x_0

وجود داشته باشد. روش است که سری به ازای $x = x_0$ همگر است. امکان دارد سری به ازای همه مقادیر x همگر باشد، یا آنکه بذاای برخی از مقادیر x همگر و به ازای مقادیر دیگر واگرای باشد.

۲. سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ را هنگامی در یک نقطه x همگرای مطلق می‌گویند که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$$

همگرای باشد. می‌توان نشان داد که اگر یک سری همگرای مطلق باشد، در این صورت سری مزبور همگرا نیز هست، اما؛ صحبت عکس این مطلب ضروری نیست.

۳. یکی از مفیدترین آزمونها برای همگرایی مطلق یک سری توانی، آزمون نسبت است. اگر به ازای مقدار مشخصی از x داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

در این صورت سری توانی مزبور به ازای مقداری از x به طوری که $l < 1$ همگرای مطلق است، و اگر $l > 1$ ، واگرای است. به ازای $l = 1$ این آزمون نتیجه‌ای به دست نمی‌دهد.

مثال ۱. به ازای چه مقادیری از x سری توانی

@jozve_iut

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x - 2)^n$$

همگرایست؟

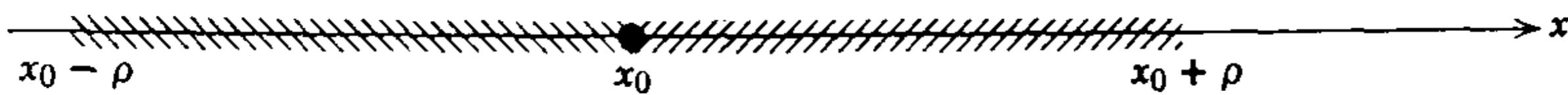
برای این منظور از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x - 2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x - 2)^n} \right| = |x - 2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |x - 2|$$

بنا برگزاره ۳ به ازای $|x - 2| < 1$ سری همگرای مطلق است، و به ازای $|x - 2| > 1$ سری واگرای است. مقادیر x متناظر به $|x - 2| = 1$ عبارتند از $x = 3$ و $x = -1$. سری مزبور به ازای هر یک از این مقادیر x واگرای است، زیرا جمله n ام آن وقتی $\rightarrow \infty$ به صفر نمی‌گراید.

۴. اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ در $x = x_1$ همگرای باشد، به ازای $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ همگرای مطلق است، و اگر در $x = x_1$ واگرای باشد، به ازای $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ نیز واگرای است.

۵. می‌توان عدد $\rho \geqslant 0$ را طوری تعیین کرد که "به ازای $|x - x_0| < \rho$ همگرایی مطلق و به ازای $\rho > 0$ را شاعر همگرایی می‌نامند. هرگاه یک سری در هیچ نقطه، به جز x_0 ، همگرا نباشد، ρ را صفر می‌گیریم؛ هنگامی که سری به ازای همه مقادیر x همگرا باشد، می‌گوییم ρ بینهاست است. فاصله همگرایی را در شکل ۱.۴ با سایه مشخص کرده‌ایم.



شکل ۱.۴

مثال ۲. مطلوب است تعیین شاعر همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^{2^n}}$$

آزمون نسبت را به کار می‌بریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^{2^{n+1}}} \cdot \frac{n^{2^n}}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}.$$

پس سری به ازای $2 < |x+1| < 3$ - همگرایی مطلق است، و به ازای $2 > |x+1|$ واگر است. $\rho = 2$ شاعر همگرایی این سری توانی است. بالاخره، به بررسی نقاط انتهایی فاصله همگرایی می‌پردازیم. در $x = -3$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n^{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

که یک سری همگراست، اما همگرایی مطلق نیست. سری مذبور را در $x = -3$ همگرای مشروط می‌گویند. در $x = 1$ سری به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

در می‌آید که واگر است. خلاصه آنکه، سری مذبور به ازای $1 < x \leqslant -3$ - همگرا، و به ازای $1 < x < -3$ - همگرایی مطلق است، و شاعر همگرایی آن ۲ است.

اگر $(x-x_0)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ به ازای $\rho > 0$ ،

به ترتیب به $f(x)$ و $g(x)$ همگرا باشند، آنگاه به ازای $\rho > |x-x_0|$ نتایج زیر برقرار است.

۶. سریها را می‌توان جمله به جمله جمع و یا تفاضل کرد، و داریم

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$$

۷. سریها را می‌توان به طور صوری ضرب کرد، و

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

که در آن $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ ، بعلاوه، اگر $f(x_0) \neq 0$ ، سریها را می‌توان به طور صوری تقسیم کرد، و

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n$$

هر چند محاسبه d_n تا اندازه‌ای دشوار است. همچنین، امکان دارد که شعاع همگرایی سری توانی خارج قسمت کوچکتر از ρ باشد.

۸. تابع f به ازای $|x - x_0| < \rho$ پیوسته و دارای مشتقهای همه مراتب است. علاوه بر این، f' , f'' , ... را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به جمله سری محاسبه کرد؛ یعنی،

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

وغیره، و هر یک از سریها به ازای $|x - x_0| < \rho$ همگرایی مطابق است.

۹. مقدار a_n از رابطه زیر بدست می‌آید

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

این سری را سری تیلر^۱ تابع f حول $x = x_0$ می‌نامند.

$$10. \text{ اگر تساوی } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \text{ به ازای هر } x \text{ برقرار}$$

باشد، آنگاه $a_n = b_n$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$. به ویژه، اگر به ازای هر x داشته باشیم

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0, \quad \text{آنگاه} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$$

هرگاه تابع f حول $x = x_0$ دارای بسط به سری تیلر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

با شعاع همگرایی $> m$ باشد، آنرا در $x = x_0$ تحلیلی می‌نامند. بنابرگ از اینها برای بالا، اگر f و g در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه $f \pm g$ ، $f \cdot g$ ، f/g (باشرط $f(x_0) \neq 0$) در $x = x_0$ تحلیلی‌اند. نتیجه‌ای که در بند‌های آتی اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد، آن است که هرچند جمله‌ای در هر نقطه تحلیلی است؛ بدینسان مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت (به جز در صفرهای مخرج) چند جمله‌ایها در هر نقطه تحلیلی‌اند.

تعویض اندیس جمع‌بندی. اندیس جمع‌بندی در یک سری پارامتری گنجک است، درست به همان‌گونه که متغیر انتگرال گیری در یک انتگرال معین یک متغیر گنجک است. مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}$$

درست به همان طریق که در انتگرال معین به تعویض متغیر انتگرال گیری می‌پردازیم، در محاسبه جوابهای معادلات دیفرانسیل به صورت سری لازم می‌آید که اندیسهای جمع‌بندی را تعویض کنیم. با چند مثال به توضیح چگونگی تعویض اندیس جمع‌بندی می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots & .1 \\ &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

اندیس شماره‌گذاری را به اندازه ۲ واحد تغییر داده‌ایم ($n \rightarrow n+1$) و از ۲ واحد کمتر شروع کرده‌ایم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_n(x-a)^{n-2} & .2$$

ممکن است بخواهیم این سری را به صورت یک سری با جمله‌ای عمومی $(x-a)^n$ به جای $(x-a)^{n-2}$ بنویسیم. برای این کار مانند مثال پیش اندیس را به اندازه ۲ واحد انتقال می‌دهیم ($n \rightarrow n+2$). خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4)a_{n+2}(x-a)^n$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که جمله‌های این دو سری دقیقاً برابرند.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} & .3$$

نخست x^2 را به داخل علامت جمع بندی می‌بریم، به دست می‌آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1}$$

برای آنکه این سری را به صورت یک سری جدید با جمله عمومی x^{n+r} بنویسیم، اندیس را ۱ واحد تنزل می‌دهیم ($n \rightarrow n-1$) و شماره‌گذاری را از یک جمله بالاتر شروع می‌کنیم. بدین‌سان

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r}$$

در اینجا نیز به آسانی می‌توان تحقیق کرد که جمله‌های این دو سری دقیقاً باهم برابرند.
۴. به عنوان آخرین مثال به بررسی نتیجه حاصل از معادله

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

می‌پردازیم. می‌خواهیم با استفاده از گزاره ۱۵، a_n را بیابیم. برای آنکه ضرایب توانهای مشابه x را برابر قرار دهیم، بهتر است در هر دو سری جمله عمومی مشتمل بر x^n باشد. برای این کار اندیس جمع بندی در طرف اول را با استفاده از دستور $n \rightarrow n+1$ تعویض می‌کنیم، و شماره‌گذاری را یک واحد تنزل می‌دهیم. خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

با برگزاره ۱۵ نتیجه می‌شود که

$$(n+1)a_{n+1} = a_n, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

و یا

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$$

بنابراین

$$a_1 = \frac{1}{1} a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} a_0 = \frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3 \cdot 2!} a_0 = \frac{a_0}{3!}, \dots$$

و به طور کلی

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0, \quad n=1, 2, \dots$$

بدینسان رابطه مزبور همه ضرایب را بر حسب a_0 به دست می‌دهد. علاوه بر این،

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{x^n}{n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که دقیقاً همان $a_0 e^x$ است. در نوشتن سری بالا از قرارداد معمول $1 = !$ استفاده کردہ ایم.

مسائل

۱. شاعع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n \quad (ب)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad (د)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n} \quad (و)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 3)^n \quad (الف)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad (ج)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2} \quad (ه)$$

۲. سری تیلر هر یک از توابع زیر را حول نقطه x_0 بیاورد. شاعع همگرایی آنها را نیز تعیین کنید.

$$e^x, \quad x_0 = 0 \quad (ب)$$

$$x^2, \quad x_0 = -1 \quad (د)$$

$$\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0 \quad (و)$$

$$\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2 \quad (ح)$$

$$\sin x, \quad x_0 = 0 \quad (الف)$$

$$x, \quad x_0 = 1 \quad (ج)$$

$$\ln x, \quad x_0 = 1 \quad (ه)$$

$$\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0 \quad (ز)$$

۳. با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ ، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله اول هر یک از این سریها و ضریب x^n در جمله عمومی را بنویسید.

۴. با فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جمله اول هر یک از این سریها و ضریب x^n در جمله عمومی را بنویسید. نشان دهید که اگر $y = y''$ ، آنگاه $a_1 = a_2 = 0$ دلخواه‌اند، و $a_3 = a_4 = 0$ را بر حسب a_1 و a_2 محاسبه کنید. نشان دهید که $a_n = a_1 / (n+2)(n+1)$

۵. صحت تساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1)a_{n+2} x^n \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}, \quad x > 0 \quad (\text{د})$$

که در آن p یک ثابت، و k و m اعداد صحیح مفروضی می‌باشند.

$$x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \quad (\text{ه})$$

$$+ \beta x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$= [r(r-1) + \alpha r] a_0 x^r + [(r+1)r + \alpha(r+1)] a_1 x^{r+1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)a_n + \alpha(n+r)a_n + \beta a_{n-1}] x^{n+r}, \quad x > 0$$

که در آن r مقدار ثابتی است.
۶. a_n را طوری تعیین کنید که معادله زیر برقرار باشد

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

تابعی را که با سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمایش داده شده است، مشخص کنید.

۲۰۴ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه عادی، بخش اول

در این بند با ذکر چند مثال روش حل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1)$$

را هنگامی که توابع P ، Q و R چندجمله‌ای باشند، توضیح می‌دهیم. می‌خواهیم معادله (۱) را در همسایگی یک نقطه عادی x_0 ، یعنی نقطه‌ای که در آن $P(x_0) \neq 0$ است حل کنیم. چون $P(x_0) \neq 0$ و $P(x_0)$ پیوسته است، در نتیجه یک فاصله حول نقطه x_0 وجود دارد

که در آن P هیچگاه صفر نیست.^۱ در این فاصله $P/Q/P$ و R/P توابعی پیوسته‌اند. بنابراین طبق قضیه وجود و یکتاپی ۲۰۳ معادله (۱) دارای جوابی یکتاپ است که در شرایط اولیه $y = y(x_0)$ ، $y' = y'(x_0)$ با انتخاب دلخواه y و y' صدق می‌کند.

می‌خواهیم برای معادله (۱) جوابهایی به صورت

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (۲)$$

جستجو کنیم، برای این کار باید دو سؤال را بررسی کرد. نخست آنکه آیا می‌توان a_n را به طور صوری به گونه‌ای تعیین کرد که y حاصل از رابطه (۲) در معادله (۱) صدق کند. دوم آنکه آیا سری حاصل واقعاً همگراست، و اگر چنین است، این همگرایی به‌ازای چه مقادیری از $x - x_0$ تحقق می‌یابد. اگر بتوان نشان داد که سری مزبور به‌ازای مشتق‌گیری جمله به جمله را می‌توان توجیه کرد، و بدینسان برای معادله (۱) جوابی ساخته شده است که به‌ازای $|x - x_0| < r$ معتبر خواهد بود.

نکاتی که بیشتر جنبه نظری دارند، مانند شاعع همگرایی سری (۲) را به بند ۱۰۲۰۴ موکول می‌کنیم. در اینجا با فرض وجود جواب طرز تعیین a_n را نشان می‌دهیم. عملیات‌بن روش برای انجام این کار آن است که سری (۲) و مشتقهای آن را به‌جای y ، y' و y'' در معادله (۱) قرار دهیم؛ آنگاه a_n ‌ها را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل مزبور به‌طور صوری برقرار باشد. مثالهای زیراين روش را توضیح می‌دهند. معادلات دیفرانسیلی که عنوان می‌شوند خود از اهمیت بسیاری برخوردارند.

مثال ۱. بحث را با مسئله تعیین سری جواب معادله

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (۳)$$

آغاز می‌کنیم.

همان‌طور که می‌دانیم، دو جواب مستقل خطی این معادله عبارتند از $\cos x$ و $\sin x$. برای ممارست در تعیین سری جواب در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جوابهای $\cos x$ و $\sin x$ را با استفاده از سریهای توانی به دست آورد. در معادله (۳) داریم $P(x) = 0$ ، $Q(x) = 0$ ؛ بنابراین $x = 0$ یک نقطه عادی است. می‌خواهیم جوابی به صورت زیر بیابیم

-
۱. این نکته از لحاظ هندسی واضح است، و می‌توان آن را به‌طور دقیق نیز اثبات کرد.
 ۲. مقصود از اصطلاح «تعیین صوری» آن است که همه محاسبات جبری لازم برای تعیین جواب را بدون آنکه در هرگام مجاز بودن آن را توجیه کنیم انجام دهیم.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

چون جمله به جمله مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n \\ &\quad + (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 2a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} \\ &\quad + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned} \quad (6)$$

با گذاشتن سریهای (۴) و (۶) به جای y و y'' در معادله (۳) بدست می‌آید

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

در مجموع اول، اندیس جمع‌بندی را تعویض می‌کنیم، و به جای n قرار می‌دهیم $n+2$ و بدین‌سان مجموع با اندیس ۰ آغاز می‌شود نه با اندیس ۲. داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

@jozve_iut

و یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

برای اینکه این معادله به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، لازم است که ضریب هریک از توانهای x صفر باشد؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

معادله (۷) را (ابطه بازگشت می‌نامند. طبق این رابطه ضرایب زوج (a_0, a_2, a_4, \dots) و ضرایب فرد (a_1, a_3, a_5, \dots) جداگانه تعیین می‌شوند. داریم

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = +\frac{a_0}{4!},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \dots$$

و به طور کلی، اگر $n = 2k$ ، آنگاه

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

و به همین ترتیب

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_1}{5!},$$

$$a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \dots$$

و به طور کلی، اگر $n = 2k+1$ آنگاه

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

بدینسان سری (۴) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ &= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] \\ &\quad + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned} \quad (10)$$

سری اول دقیقاً سری تیلر $\cos x$ ؛ و سری دوم سری تیلر $\sin x$ است. بدینسان، همان طور که از آغاز انتظار می‌رفت، جواب $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ به دست می‌آید. توجه شود که هیچ قیدی بر a_0 و a_1 ؛ تحمیل نمی‌شود، بنا براین دلخواه‌اند. این نکته برای سری جواب در یک نقطه عادی عمومیت دارد؛ و شگفتی آور نیست. از معادله (۲) دیده می‌شود که مقادیر y و y' در x به ترتیب برایند با a_0 و a_1 . چون شرایط اولیه $y(x_0)$ و $y'(x_0)$ را می‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد، در نتیجه باید a_0 و a_1 دلخواه باقی بمانند تا هنگامی که شرایط اولیه خاصی عنوان شود.

این مثال را با توضیحی به پایان می‌بریم. حل را با آنگاهی به اینکه جوابهای معادله (۳) باید $\cos x$ و $\sin x$ باشند آغاز کردیم. اما فرض کنید که این نکته را نمی‌دانستیم و

معادله (۳) را با روشن سری حل کرده و جواب (۱۰) را به دست آورده‌ایم. با توجه به این مطلب که معادله (۳) در عمل زیاد مطرح می‌شود، ممکن است تصمیم بگیریم که برای این جوابها نام خاصی قابل شویم؛ مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ برای } \sin x \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ برای } \cos x$$

آنگاه درباره خواص این توابع به بررسی پردازیم. نخست، روشن است که $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$ ، $\cos(-x) = \cos x$ ، $\sin(-x) = -\sin x$ ، فرمول دیگری که به آسانی به دست می‌آید عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x \end{aligned}$$

به همین ترتیب، $d(\cos x)/dx = -\sin x$. علاوه بر این، با محاسبه روی سریها، می‌توان همه خواص جبری و تحلیلی معمولی توابع سینوس و کسینوس از قبیل $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را به دست آورد.

نکته جالب آنکه می‌توان این توابع را که در فیزیک ریاضی اهمیت بسیاری دارند به عنوان جوابهای یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ساده که مکرراً به آن برخورد می‌شود، تعریف کرد و خواص آنها را بدون استفاده از مبحثی که در آن محتملاً^۱ این توابع را برای نخستین بار آموختیم، یعنی مثلثات مسطوح به دست آورده دقتاً تابع $\sin x$ را می‌توان به عنوان جواب مسئله مقدار اولیه $y = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \dots$ و به همین نحو، تابع $\cos x$ را به عنوان جواب مسئله مقدار اولیه $y = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \dots$ تعریف کرد. برای تعریف همین توابع می‌توان از مسائل مقدار اولیه دیگر نیز استفاده کرد. مثلاً، مسئله مقدار اولیه غیرخطی $y'' = 1 - y$ را (یعنی $y = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \dots$) معرف تابع $\sin x$ خواهد بود (مسئله ۵ را بینید).

مثال ۲۰. مطلوب است تعیین سری جواب معادله آیری^۲

۱. چنین تحلیلی در بند ۲۴ کتاب

K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Hafner, New York, 1951

آمده است.

۲. سر جورج آیری (Sir George Airy)، (۱۸۰۱–۱۸۹۲) منجم و ریاضیدان انگلیسی، در ۲۵ سالگی استاد ریاضیات کامبریج شد، و از ۱۸۳۵ تا ۱۸۸۱ رئیس رصدخانه گرینویچ بود. یکی از نکات جالب در معادله آیری آن است که به ازای x های منفی، جوابها همانند توابع مثلثاتی نوسانی‌اند، و به ازای x های مثبت یکی از جوابها به طور نمایی صعود می‌کنند، و دیگری به طور نمایی نزول می‌نماید. آیا شما می‌توانید پیش‌بینی این رفتار را توجیه کنید؟

$$y'' = xy, -\infty < x < \infty \quad (11)$$

در این معادله داریم $R(x) = 0$, $P(x) = 0$, $Q(x) = -x$; بنابراین، یک نقطه عادی است. فرض کنیم که

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (12)$$

سری "y" با رابطه (۶) مشخص می‌شود؛ اما، با توضیحی که درمثال قبل آمد، می‌توان آن را به صورت

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad (13)$$

نوشت. با گذاشتن سریهای (۱۲) و (۱۳) به جای y و "y در معادله (۱۱)، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad (14)$$

اکنون، اندیس جمع‌بندی در سری طرف دوم معادله بالا را با قراردادن $n = n-1$ به جای n تغییر داده، و جمع‌بندی را به جای صفر از ۱ آغاز می‌کنیم. بدین‌سان، خواهیم داشت

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$$

در اینجا نیز برای آنکه معادله به ازای همه x ها برقرار باشد، لازم است که ضرایب توانهای متشابه x برابر باشند؛ بنابراین $a_2 = 0$ ، و رابطه بازگشته زیر به دست می‌آید

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

چون a_{n+2} بر حسب a_{n-1} داده می‌شود، بنابراین a ها با گامهای سه واحدی تعیین می‌شوند. بدین‌سان a_2 مقدار a_0 ، و آن به نوبه خود a_4, a_6, \dots ; را تعیین می‌نماید، همچنین a_1 مقدار a_3 ، و آن به نوبه خود مقدار a_5, a_7, \dots ; را تعیین می‌کند، و به همین ترتیب از a_2 مقدار a_4, a_6, \dots باز آن a_8, a_{10}, \dots به دست می‌آید. چون $a_2 = 0$ ، مستقیماً نتیجه می‌شود که $a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 0$.

برای دنباله $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$ در رابطه بازگشت به جای n متولیاً مقادیر ۱، ۴، ۷، ۱۰، ... را قرار می‌دهیم:

$$a_4 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_6 = \frac{a_2}{4 \cdot 5} = \frac{a_0}{(4 \cdot 5)(3 \cdot 2)}, \quad a_8 = \frac{a_4}{(9 \cdot 8)}$$

$$= \frac{a_0}{(9 \cdot 8)(4 \cdot 5)(3 \cdot 2)}, \dots$$

برای این دنباله ضرایب مناسب است فرمولی برای a_{3n} بذای $a_0 = 1, 2, 3, \dots, n$ بنویسیم.
ناتایج بالا فرمول کلی زیر را به دست می‌دهد

$$a_{3n} = \frac{1}{[(3n)(3n-1)][(3n-2)(3n-3)] \cdots [6.5][4.2]} a_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

این عبارت را می‌توان به ترتیب زیر نیز از رابطه بازگشت (۱۵) به دست آورد. نخست با قراردادن $n - 2$ به جای n به دست می‌آید $a_{n-1} = a_{n-3}$; سپس، برای ایجاد ضرایب متناظر با a_0 به جای n در $3n$ را قرار می‌دهیم، در نتیجه

$$(3n)(3n-1)a_{3n} = a_{3n-3}$$

از تکرار این رابطه فرمول بالا برای a_{3n} به دست می‌آید.

برای دنباله $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_7, a_4, \dots, a_1, a_0$ در رابطه بازگشت به جای n متوالیاً مقادیر ۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰ را قرار می‌دهیم:

$$a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \quad a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{(7 \cdot 6)(4 \cdot 3)},$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{10 \cdot 9} = \frac{a_1}{(10 \cdot 9)(7 \cdot 6)(4 \cdot 3)} \dots$$

به همان روش بالا خواهیم داشت

$$a_{3n+1} = \frac{1}{[(3n+1)(3n)][(3n-1)(3n-2)] \cdots [7 \cdot 6][4 \cdot 3]} a_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وجواب معادله آیری عبارت است از

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left[1 + \frac{x^4}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots + \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1) \cdots 3 \cdot 2} + \dots \right] \\ &\quad + a_1 \left[x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-1)(3n-2)(3n-3) \cdots 4 \cdot 3} + \dots \right] \\ &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-2)(3n-3)(3n-4) \cdots 3 \cdot 2} \right] \\ &\quad + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-1)(3n-2)(3n-3) \cdots 4 \cdot 3} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

به علت رشد سریع مخرج جمله‌های سریهای (۱۶)، می‌توان حدس زد که باید شاعع همگرایی آنها بسیار بزرگ باشد. در واقع، چنانکه در بند بعد خواهیم دید هر دو سری به ازای همه مقادیر x همگرا می‌باشند. مسئله ۴ را نیز ببینید.

موقعیاً فرض کنیم که سریهای مزبور به ازای همه مقادیر x همگرا باشند، و توابعی را که با کروشه اول و دوم در رابطه (۱۶) معین می‌شوند، به ترتیب با y_1 و y_2 نشان می‌دهیم. آنگاه، با انتخاب $a_0 = 0$ ، $a_1 = 0$ و بار دیگر با انتخاب $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ ، دیده می‌شود که y_1 و y_2 جوابهای خصوصی معادله (۱۱) می‌باشند. توجه شود که y_1 در شرایط اولیه $y_1(0) = 0$ ، $y_1'(0) = 0$ و y_2 در شرایط اولیه $y_2(0) = 1$ ، $y_2'(0) = 0$ صدق می‌کنند. بدینسان $y_1 \neq y_2$ و در نتیجه y_1 و y_2 مستقل خطی اند. بنابراین جواب عمومی معادله آیری عبارت است از

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad -\infty < x < \infty$$

مثال ۳. برای معادله آیری جوابی بر حسب توانهای $1-x$ بیاید.
نقطه $1 = x$ یک نقطه عادی معادله (۱۱) است، و بدینسان جواب را به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

در نظر می‌گیریم. آنگاه

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n$$

@jozve_iut

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n$$

با قراردادن y و y'' در معادله (۱۱) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad (17)$$

اکنون برای استفاده از برابری ضرایب توانهای متشابه $1-x$ ، باید x ، ضریب y در معادله (۱۱) را نیز بر حسب توانهای $1-x$ بنویسیم؛ یعنی $(1+x-1) = x$. توجه شود که این عبارت دقیقاً سری تیلر x حول $1 = x$ است. آنگاه معادله (۱۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n &= [1+(x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

با تغییر اندیس جمع بندی در سری دوم طرف دوم، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$$

از تساوی ضرایب توانهای مشابه x^n به دست می‌آید

$$2a_2 = a_0$$

$$(3.2) a_3 = a_1 + a_0$$

$$(4.3) a_4 = a_2 + a_1$$

$$(5.4) a_5 = a_3 + a_2$$

⋮

رابطه عمومی بازگشت عبارت است از

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (18)$$

نخستین جمله‌های a_n را بر حسب a_0 و a_1 به دست می‌آوریم

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}$$

⋮

بنابراین

$$y = a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \dots \right] + a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(x-1)^3}{120} + \dots \right] \quad (19)$$

به طور کلی، هنگامی که رابطه بازگشت مانند رابطه (18) دارای سه جمله باشد، تعیین ضرایب سری جواب دشوار خواهد بود. در این مثال فرمول a_n بر حسب a_0 و a_1 را نمی‌توان به فوریت مشخص کرد. اما، در بند ۱۰.۲.۴ خواهیم دید که حتی بدون معلوم بودن فرمول a_n می‌توان ثابت کرد که سریها (19) به ازای همه مقادیر x همگرامی باشند، و علاوه بر این دو جواب مستقل خطی $x=0$ و $x=1$ معادله آبری (11) به دست می‌دهند.

بدینسان

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

جواب عمومی معادله آیری به ازای $x < \infty$ است.

شایان توجه است که اگر بخواهیم برای معادله (۱) جوابی به صورت

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ بیایم، همان‌گونه که در مثال ۳ دیدیم، باید ضرایب $P(x)$ ، $Q(x)$ را بر حسب توانهای $(x - x_0)^n$ بیان کنیم. روش دیگر آنکه با تعویض متغیر $t = x - x_0$ ، معادله دیفرانسیل جدیدی برای y به عنوان تابع t به دست آوریم، و آنگاه برای آن جوابی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ پیدا کنیم. با قراردادن $x - x_0$ به جای t محاسبات را به پایان می‌بریم (مسئله ۳ را بینید).

نکته جالب دیگر آنکه، توابع y_1 و y_2 که با سریهای رابطه (۱۶) مشخص می‌شوند، جوابهای مستقل خطی معادله (۱۱)، به ازای همه مقادیر x ، می‌باشند، و همین مطلب در مورد توابع y_1 و y_2 که با سریهای رابطه (۱۹) معین می‌شوند، نیز صادق است. بنا بر نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه دوم، هر یک از دو تابع نخست را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دو تابع اخیر نوشت، و بر عکس، و این نتیجه را مطمئناً نمی‌توان تنها با بررسی سریها به دست آورد.

مثال ۴. معادله هرمیت^۱ عبارت است از

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (۲۰)$$

که در آنλ یک ثابت است. این معادله در بسیاری از شعب فیزیک ریاضی‌دارای اهمیت است؛ مثلاً، در مکانیک کوانتومی در بررسی معادله شرودینگر^۲ در مورد نوسانگر هارمونیک به معادله هرمیت می‌رسیم.

برای آنکه در همسایگی نقطه عادی $x = 0$ ، جوابی برای معادله (۲۰) بیایم، سریهای (۴)، (۵) و (۱۳) را در معادله (۲۰) به جای y ، y' و y'' قرار می‌دهیم، و از آنجا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_nx^n = 0$$

و با

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0 \quad (۲۱)$$

۱. شارل هرمیت (Charles Hermite) (۱۸۲۲–۱۹۰۱) یکی از ریاضیدانان بر جسته فرانسوی، که تحقیقاتش در زمینه جبر از اهمیت خاصی برخوردار است.

2. Schrödinger (1887–1961)

بنابراین $a_2 = -\lambda a_0 / 2$ ، و رابطه بازگشت عمومی عبارت است از

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n \geq 1 \quad (22)$$

توجه شود که رابطه بازگشت (22) در واقع شامل نتیجه $a_2 = -\lambda a_0 / 2$ که متناظر به $n=0$ است می‌باشد. از رابطه (22) دیده می‌شود که از a_0 مقدار a_2 ، و از a_2 مقدار a_4 و به همین ترتیب سایر ضرایب زوج بددست می‌آیند. ضرایب توانهای فرد a_1, a_3, \dots نیز بر حسب a_1 معین می‌شوند. سری صوری جواب معادله هرمیت عبارت است از

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!} x^6 - \dots \right] \\ &\quad + a_1 \left[x + \frac{(2-\lambda)}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} x^7 + \dots \right] = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \end{aligned} \quad (23)$$

بار دیگر نتایج بند ۱۰.۴، همگرایی این سریها را به ازای همه مقادیر λ ثابت می‌کند. اگر λ یک عدد صحیح زوج نامنفی باشد، یکی از سریهای بالا به صورت یک چند جمله‌ای در می‌آید. بدويژه، به ازای $\lambda = 0, 2, 4, 6, \dots$ ، یک جواب معادله هرمیت به ترتیب عبارت خواهد بود از $1, x, x^2 - 2x^3 - \dots, x^3 - 2x^5 - \dots$. چند جمله‌ای جواب متناظر به $\lambda = 2n$ پس از ضرب در یک ثابت مناسب^۱ به چند جمله‌ای هرمیت $H_{2n}(x)$ موسوم است.

مسائل

۱. به روش صوری، برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، دو جواب مستقل خطی به صورت سری توانی بر حسب x بیابید. رابطه بازگشت را معین کنید.

$$y'' - y = 0, \quad x_0 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1 \quad (\text{ج})$$

۱. معمولاً به این عمل فرمال‌سازی اطلاق می‌شود. ثابت مزبور را اغلب به گونه‌ای انتخاب می‌کنند که جواب در یک نقطه خاص دارای مقدار ویژه‌ای باشد، یا آن که یک انتگرال جواب در فاصله مفروضی دارای مقدار معینی باشد. به عنوان مثال، چند جمله‌ای هرمیت مرتبه n به طور یکتا با این بیان مشخص می‌گردد که یک چند جمله‌ای درجه n است، که جواب معادله هرمیت با $\lambda = 2n$ می‌باشد و در آن ضریب x^n برابر 2^n است.

$$(d) y'' + K^2 x^2 y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k \text{ ثابت}$$

$$(e) (1-x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$$

$$(f) (2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$$

۲. جواب مسئله ۱ (ب) را با شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$ و همچنین با شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 0$ باید.

۳. با تعویض متغیر $t = 1-x$ ، دو سری جواب مستقل خطی بر حسب $1-x$ برای معادله زیر باید

$$y'' + (x-1)^2 y' + (x^2-1)y = 0$$

شان دهید که همین نتیجه را می توان با بسط $1-x^2$ به سری تیلر حول $x=1$ ، وجا یگزینی

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

به دست آورد.

۴. مستقیماً با استفاده از آزمون نسبت، شان دهید که سریهای جواب معادله آبری در حول $x=0$ به ازای همه مقادیر x همگرا می باشند. معادله (۱۶) متن را ببینید.

۵. مسئله مقدار اولیه $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ را با شرط اضافی $y > 0$ در نظر می گیریم. این شرط اضافی برای تعیین جواب به طور یکتا لازم است، زیرا معادله دیفرانسیل فقط شامل مربوعات y و y' می باشد؛ بنابراین اگر $y(x) = \phi(x)$ یک جواب این معادله دیفرانسیل باشد، $\phi(x) = \sin x$ نیز یک جواب خواهد بود. برای این مسئله مقدار اولیه یک سری جواب به صورت

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

باید، و شان دهید که $a_0 = 0$ ، $a_1 = 1$ ، $a_2 = 0$ ، $a_3 = -1/3!$ و $a_n = 0$ برای $n \geq 4$. توجه شود که نخستین دو جمله غیر صفر این سری، دو جمله اول بسط سری تیلر $\sin x$ حول $x=0$ است.

۱۰۴ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه عادی، بخش دوم

در بند پیش مسئله تعیین جوابهای

$$(1) P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

را که در آن P ، Q و R چند جمله‌ای می باشند، در همسایگی یک نقطه عادی x_0 بررسی کردیم. با فرض آنکه معادله (۱) دارای جوابی به صورت $y = \phi(x)$ است، و ϕ دارای بسط تیلر

$$(2) y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

می باشد، که به ازای $\rho > 0$ ، $|x - x_0| < \rho$ ، همگراست، دیده شد که می توان a_n را

مستقیماً با قراردادن سری (۲) به جای x در معادله (۱) تعیین کرد.
اکنون می خواهیم بیشتر که چگونه می توان این گزاره را توجیه کرد که اگر x_0 یک نقطه عادی معادله (۱) باشد، آنگاه جوابها بی به صورت (۲) وجود دارد. علاوه بر این به بررسی شاعع همگرایی این گونه سریها خواهیم پرداخت. با این بررسی تعریف نقطه عادی تعیین خواهد یافت.

اکنون فرض کنیم که معادله (۱) دارای جوابی به صورت (۲) است. روش است که با m بار مشتق گیری از معادله (۲) و قراردادن x_0 به جای x خواهیم داشت

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0)$$

بنا بر این، برای محاسبه a_n در سری (۲)، باید نشان دهیم که می توان $\phi^{(n)}(x_0)$ را به ازای $n=0, 1, 2, \dots$ از معادله دیفرانسیل (۱) به دست آورد.

فرض کنیم که $\phi(x) = y$ جوابی از معادله (۱) است که در شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x_0) = y'_0$ صدق می کند. آنگاه $y_0 = a_0$ و $y'_0 = a_1$. اگر فقط بخواهیم جوابی برای معادله (۱) بیاییم بدون آنکه شرایط اولیه ای مشخص شده باشد، آنگاه a_0 و a_1 مقادیری دلخواه خواهند بود. برای تعیین $\phi^{(n)}(x_0)$ و متناظر آن a_n به ازای $n=2, 3, \dots$ به معادله (۱) برمی گردیم. چون ϕ جوابی از معادله (۱) است، خواهیم داشت

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0$$

در فاصله ای حول x_0 که P در آن صفر نمی شود، می توان این معادله را به صورت زیرنوشت

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \quad (3)$$

که در آن $q(x) = R(x)/P(x)$ و $p(x) = Q(x)/P(x)$. با قراردادن x به جای x در معادله (۳) به دست می آید

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0)$$

بنا بر این a_2 با

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \quad (4)$$

داده می شود. برای تعیین a_3 از معادله (۴) مشتق می گیریم، و به جای x مقدار x_0 را قرار می دهیم، به دست می آید

$$\begin{aligned} 3!a_3 &= \phi'''(x_0) = -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]_{x=x_0} \\ &= -3!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \quad (5)$$

با جایگزینی a_2 از معادله (۴)، a_3 بر حسب a_1 و a_0 به دست می آید. چون P ، Q و R چندجمله ای اند و $P(x_0) \neq 0$ ، همه مشتقهای p و q در x_0 وجود دارند. بنا بر این می توان به مشتق گیری از معادله (۳) تابعیت ادامه داد، و متواتراً ضرائب a_4, a_5, \dots را با جایگزینی x به جای x_0 تعیین کرد.

باشد توجه داشت که خاصیت مهمی که در تعیین a_n به کار رفت، این بود که امکان بینهایت مشتق‌گیری از توابع p و q وجود داشت. به نظر می‌رسید که بتوان فرض اینکه توابع p و q خارج قسمت دوچند جمله‌ای باشند را تخفیف داده، و فقط قید کنیم که در یک همسایگی x_0 بینهایت بار مشتق پذیرند. متأسفانه، این شرط ضعیفتر از آن است که همگرایی سری حاصل برای $\phi(x) = p$ را تأمین کند. اما، شرط کلیتر دیگری برای p و q وجود دارد. براساس آن می‌توان محاسبات بالا را برای a_n انجام داد، و همگرایی سری جواب را نیز اثبات کرد. این شرط آن است که p و q در x_0 تحلیلی باشند، یعنی دارای بسط سری تیلر باشند که در فاصله‌ای حول نقطه x_0 همگرا باشند:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \dots + p_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n \quad (6)$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \dots + q_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n \quad (7)$$

چنانکه در بند ۱.۴ بیان شد، اگر هر یک از توابع p و q خارج قسمت دوچند جمله‌ای باشد، آنگاه دارای بسط‌هایی^۱ به صورت (۶) و (۷) خواهد بود. با این اندیشه می‌توان تعریف نقطه عادی و نقطه غیرعادی معادله (۱) را به صورت زیر تعمیم داد: اگر توابع $p = Q/P$ و $q = R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۱) می‌نامند؛ در غیر این صورت آن را نقطه غیرعادی گویند.

اکنون برگردیم به مسئله فاصله همگرایی سری جواب. یک راه (که چندان هم جالب نیست) آن است که برای هر مسئله سری جواب را محاسبه کرده و سپس با استفاده از آزمونهای همگرایی، شعاع همگرایی سری جواب را تعیین کنیم. خوشبختانه، این سؤال را می‌توان برای طبقه وسیعی از مسائل با قضیه زیر جواب داد.

قضیه ۱.۴ اگر x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۱)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد، یعنی اگر $P = Q/P$ و $R = R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، آنگاه جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (8)$$

که در آن a_0 و a_1 دلخواه، و y_1 و y_2 دوسری جواب مستقل خطی اند که در x_0 تحلیلی باشند. علاوه بر این شعاع همگرایی هر یک از سریهای جواب y_1 و y_2 حداقل برابر نیم

۱. خواننده دقیق محتمله به این نتیجه (صحیح) رسیده است که اگر p به صورت (۶) باشد، در x_0 بینهایت بار مشتق پذیر خواهد بود، اما عکس آن درست نیست. مثالی برای توابعی که بینهایت بار در x_0 مشتق پذیر نند اما دارای بسط سری تیلر نیستند، در مسئله ۸ آمده است.

شعاع همگرایی سریهای p و q نخواهد بود. خواص سریهای جواب با قراردادن سری (۲) به جای لزوم معادله (۱) تعیین می‌شوند.

از صورت سریهای جواب دیده می‌شود که

$$y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + b_2(x - x_0)^n + \dots$$

بنابراین، لزوم جوابی است که در شرایط اولیه $y_2(x_0) = 0$ و $y'_2(x_0) = 0$ لزوم جوابی است که در شرایط اولیه $0 = (x_0)^n$ و $1 = (x_0)^{n+1}$ صدق می‌کند. همچنین توجه شود که با وجود آنکه محاسبه ضرایب با مشتق‌گیری متوالی از معادله دیفرانسیل از لحاظ نظری بسیار عالی است، اما عموماً یک روش محاسباتی عملی نیست. مناسبتر است که سری (۲) را در معادله دیفرانسیل (۱) به جای لزوم قرارداده و مانند مثال قبل ضرایب را طوری تعیین کنیم که معادله دیفرانسیل برقرار باشد.

گرچه اثبات این قضیه دشوار نیست، و آن را به صورتی که تا اندازه‌ای کلیتر است، فوکس^۱ اثبات کرده است، اما در این کتاب قصد انجام این کار را نداریم. آنچه برای هدف ما مهم است، آن است که سری جواب به صورت (۲) وجود دارد، و شعاع همگرایی آن از کوچکترین شعاعهای همگرایی سریهای p و q کوچکتر نخواهد بود؛ بنابراین ما فقط باید آنها را تعیین کنیم.

این کار را به دو طریق می‌توان انجام داد. در اینجا نیز می‌توان مستقیماً سریهای توانی p و q را محاسبه کرد، و با استفاده از آزمونهای همگرایی سریها شعاعهای همگرایی آنها را معین نمود. اما، هنگامی که P ، Q و R چند جمله‌ای باشند، روش آسانتری وجود دارد. در نظریه توابع مختلط اثبات می‌شود که خارج قسمت دوچند جمله‌ای، مثلاً Q/P ، در حول $x = x_0$ اگر $P(x_0) \neq 0$ ، دارای بسط به سری توانی همگرا است. علاوه بر این، با فرض آنکه عوامل مشترک Q و P حذف شده باشند، شعاع همگرایی سری توانی Q/P حول نقطه x_0 دقیقاً برابر است با مسافت x_0 تا نزدیکترین صفر P . در تعیین این مسافت باید توجه داشت که $P(x_0) = 0$ ، ممکن است دارای ریشه‌های مختلط باشد، و آنها را نیز باید ملاحظه داشت.

مثال ۱. شعاع همگرایی سری تیلر تابع $(1+x^2)^{-1}$ را حول $x = x_0$ بیاورد.
می‌دانیم که به ازای $1 < x^2$ تابع $(1+x^2)^{-1}$ دارای بسط سری توانی همگرا به صورت زیر است

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

روشن است که این سری به ازای $x^2 \geqslant 1$ واقع است، زیرا جمله n ام آن به ازای $n \rightarrow \infty$ به صفر می‌نمی‌کند. بنابراین شعاع همگرایی آن عبارت است از $|x| = p$. (این مطلب را می‌توان با آزمون نسبت تحقیق کرد.)

برای تعیین شعاع همگرایی، با استفاده از نظریه‌ای که هم‌اکنون شرح آن گذشت، دیده می‌شود که چند جمله‌ای $x^2 + 1 + \frac{1}{x}$ در $x = 0$ صفر می‌شود؛ و چون مسافت از $x = 0$ در صفحه مختلط برابر است، شعاع همگرایی سری توانی مزبور حول $x = 0$ برابر 1 خواهد بود.

مثال ۲. شعاع همگرایی سری تیلر $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ را حول $x = 0$ ، و حول $x = 1$ بیاورد.

نخست دیده می‌شود که

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

دارای جوابهای $x = 1 \pm i$ است. مسافت از $x = 0$ تا $x = 1 \pm i$ یا $|z - 1|$ در صفحه مختلط برابر $\sqrt{2}$ است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط تابع مزبور به سری تیلر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حول $x = 0$ برابر $\sqrt{2}$ است.

مسافت از $x = 1$ تا $x = 1 \pm i$ یا $|z - 1|$ برابر 1 است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط تابع مزبور به سری تیلر $(1 - x)(1 - x^2)^{-1}$ حول $x = 1$ برابر 1 است. بنابر قضیه ۱۰۴ سریهای جواب معادله آیری در مثالهای ۲ و ۳، و معادله هرمیت در مثال ۴ بند پیش، به ترتیب به ازای همه مقادیر $x = 1 - x$ و x همگرایند، زیرا در این مسائل $P(x) = 1$ و هیچگاه صفر نمی‌شود.

باید تأکید کرد که سری جواب ممکن است به ازای x در دامنه وسیعتری از آنچه قضیه ۱۰۴ معین می‌کند همگرا باشد، بنابراین قضیه در واقع پلت کران پایین برای شعاع همگرایی سری جواب به دست می‌دهد. این مطلب با چند جمله‌ای لزاندر، جواب معادله لزاندر، در مثال زیر توضیح داده می‌شود.

مثال ۳. مطلوب است تعیین یک کران پایین برای شعاع همگرایی سری جواب معادله لزاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

حول $x = 0$ ، α مقداری است ثابت.

چون $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ ، $P(x) = -2x$ ، $Q(x) = 1 - x^2$ چند جمله‌ای می‌باشند، و مسافت صفرهای P ، یعنی $1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2}$ برابر است، بنابراین سری جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به ازای $|x| < |\alpha|$ همگراست، و امکان دارد به ازای مقادیر بزرگتر x نیز همگرا باشد. در واقع، می‌توان نشان داد که اگر α عدد صحیح مثبتی باشد، یکی از سریهای جواب شامل تعداد محدودی جمله خواهد بود، و بنابراین نه فقط به ازای $|x| < |\alpha|$ بلکه به ازای همه مقادیر x همگرا خواهد بود. به عنوان مثال، اگر

$\alpha = 1$ باشد، چند جمله‌ای جواب عبارت است از $x = y$. مسائل ۱۵ تا ۱۶ در پایان این بند را برای بحث کاملتری درباره معادله لژاندر بینید.

مثال ۴. مطلوب است تعیین یک کران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب معادله دیفرانسیل

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \quad (9)$$

$$x = -1/2 \text{ و } x = 0$$

در اینجا نیز، P ، Q و R چند جمله‌ای‌اند، و صفرهای P عبارتند از $i = \pm$. در صفحه مختصّ مسافت از 0 تا \pm برابر 1 ، و از $1/2$ تا \pm برابر $\sqrt{1+1/4} = \sqrt{5}/2$ است. بنابراین در حالت اول سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به ازای $|x| < 1$ همگرایست، و در حالت دوم سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+1/2)^n$ حداقل به ازای $|x+1/2| < \sqrt{5}/2$ همگرایست.

نکته جالبی که درباره معادله (۹) می‌توان بیان کرد، نتیجه‌ای است از قضیه وجود و یکتای ۲.۳ و قضیه ۱.۴ که هم‌اکتسون گذشت. فرض کنیم که شرایط اولیه $y = y_0$ و $y' = y'_0$ داده شده‌اند. چون به ازای هر x داریم $0 \neq 1+x^2 \neq 1$ ، بنابر قضیه ۲.۳ یک جواب یکتا برای این مسئله مقدار اولیه روی $x < -\infty$ وجود دارد. اما از طرف دیگر، قضیه ۱.۴ تنها وجود سری جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارد که جواب یکتا روی فاصله $x < -\infty$ دارد. این را به ازای $1 < x < 1$ تضمین می‌نماید. امکان توانی نباشد که به ازای همه مقادیر x همگرا باشد.

مثال ۵. آیا می‌توان یک سری جواب حول $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل

$$y'' + (\sin x)y' + (1+x^2)y = 0$$

تعیین کرد و اگر چنین است شعاع همگرایی آن را بیابید.

در این معادله دیفرانسیل، $p(x) = \sin x$ و $q(x) = 1+x^2$. با یادآوری از بند ۱.۴ دارای بسط سری تیلر حول $x = 0$ است، و این بسط به ازای همه مقادیر x همگرایست. علاوه بر این، q نیز حول $x = 0$ دارای بسط به سری تیلر است و آن $q(x) = 1+x^2$ می‌باشد، که به ازای همه مقادیر x همگرایست. بدین‌سان یک سری جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با a_0 و a_1 دلخواه وجود خواهد داشت، و به ازای همه مقادیر x همگرا خواهد بود.

مسائل

۱. مطلوب است تعیین $(x_0 \phi''(x_0), \phi'''(x_0))$ به ازای نقطه داده شده x_0 در صورتی که $y = \phi(x)$ یک جواب مسئله مقدار اولیه داده شده باشد.

$$y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' + (1+x)y' + 2(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y'' + x^2 y' + (\sin x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1 \quad (\text{د})$$

در قسمت (د)، $(0 \phi''(0), \phi'''(0))$ را بر حسب a_0 و a_1 بیان کنید.

۲. در هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر یک کران پایین برای شعاع همگرایی سریهای جواب حول نقطه داده شده x_0 بیابید.

$$y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4 \quad (\text{الف})$$

$$(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2 \quad (\text{ج})$$

$$xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1 \quad (\text{د})$$

۳. در هر یک از معادلات دیفرانسیل مسئله ۱ بند ۲۰.۴ یک کران پایین برای شعاع

@jozve_iut

همگرایی سریهای جواب بیابید.

۴. معادله دیفرانسیل چیزیف^۱ عبارت است از

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

که در آن α مقداری است ثابت.

(الف) دو جواب مستقل خطی بر حسب توانهای x به ازای $1 < |\alpha|$ بیابید.

(ب) نشان دهید که اگر α برابر یک عدد صحیح نامنفی n باشد، آنگاه یک چندجمله‌ای جواب از درجه n وجود خواهد داشت. این چندجمله‌ایها را هنگامی که به طور مناسبی یکانی شوند، چندجمله‌ایها چیزیف می‌نامند، و در مسائلی که بخواهند برای توابعی که در فاصله $1 \leqslant x \leqslant 1$ تعریف شده‌اند، تقریب چندجمله‌ای بیانندکار بردهای بسیاری دارند.

(ج) برای هر یک از حالت‌های $\alpha = n = 0, 1, 2, 3$ یک جواب چندجمله‌ای بیابید.

۵. سه جمله اول هر یک از دوسری جواب مستقل خطی معادله

$$y'' + (\sin x)y = 0$$

بر حسب توانهای x ، را بیاورد.

(ا) اهنگی: $\sin x$ را حول $x = 0$ به سری تیلر بسط دهید، و تعداد کافی از جمله‌های آن را که برای محاسبه ضرایب $a_n x^n = y$ لازم است در نظر بگیرید.

۶. سه جمله اول هریک از دوسری جواب مستقل خطی معادله

$$e^x + xy = 0$$

بر حسب توانهای x ، را بیاورد. شاعع همگرایی هریک از سریهای جواب را تعیین کنید.

(ب) اهنگی: e^x یا $x e^{-x}$ را حول $x = 0$ به سری توانی بسط دهید.

۷. اگر بدانیم که x و x^2 جوابهای یک معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

می‌باشند، درباره عادی یا غیرعادی بودن نقطه $x = 0$ چه می‌توان گفت؟

(ج) اهنگی: از قضیه ۲.۳ استفاده کنید، و مقادیر x و x^2 را به ازای $x = 0$ مورد توجه قرار دهید.

۸. برای اثبات آنکه امکان دارد تابعی دریک نقطه بینهاست بار مشتق پذیر باشد، اما در حول این نقطه دارای بسط به سری تیلر نباشد تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

با استفاده از تعریف مشتق به عنوان حد خارج قسمت نموها ثابت کنید که $f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. می‌توان ثابت کرد که f در مبدأ بینهاست بار مشتق پذیر است، و به ازای هر n داریم $f^{(n)}(0) = 0$. بنابراین سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

به ازای همه مقادیر x صفر می‌شود، و تنها در $x = 0$ به $f(x)$ می‌گراید.

۹. روش سریها را که در این بند مورد بحث قرار گرفت می‌توان مستقیماً برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y'' + Q(x)y' + P(x)y = 0$ در نقطه x_0 ، هنگامی که $P = Q/P$ حول نقطه مزبور دارای بسط به سری تیلر باشد به کار برد. چنین نقطه‌ای را نقطه عادی می‌نامند، و علاوه بر این، شاعع همگرایی سری

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حداصل برای شاعع همگرایی سری Q/P خواهد بود. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش

سری بر حسب توانهای x حل کنید، و تحقیق کنید که در هر حالت a دلخواه است. مسائل (ه) و (و) مشتمل بر معادلات دیفرانسیل ناهمگن است، و روش سریها را می‌توان به آسانی در این مورد تعمیم داد.

$$y' - xy = 0 \quad (ب) \quad y' - y = 0 \quad (الف)$$

$$(1-x)y' = y \quad (د) \quad y' = e^{x^2} y, \quad (ج) سه جمله$$

$$y' + xy = 1+x \quad (و) \quad y' - y = x^2 \quad (ه)$$

در صورت امکان، سری جواب را با جوابی که به روشهای فصل ۲ به دست می‌آید مقایسه کنید.

معادله لزاندر. مسائل ۱۵ تا ۱۶ درباره معادله لزاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

است. چنانکه در مثال ۳ بیان شد، نقطه $x=0$ یک نقطه عادی این معادله است، و مسافت مبدأ تا نزدیکترین صفر $x^2 - 1 = P(x) = 1$ برابر ۱ است. بنابراین شاعع همگرایی سری جواب حول $x=0$ حداقل برابر ۱ است. باید توجه داشت که در این معادله تنها لازم است حالت $\alpha < -1$ را در نظر بگیریم، زیرا اگر $\alpha \leq -1$ ، آنگاه با جایگزینی $\alpha = -(1+\gamma)$ که در آن $\alpha \geq \gamma$ است، به معادله لزاندر زیر می‌رسیم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma+1)y = 0$$

۱۰. نشان دهید که دو جواب مستقل خطی معادله لزاندر، به ازای $1 < |\alpha|$ عبارتند از

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\dots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

۱۱. نشان دهید که اگر α ، برابر صفر و یا یک عدد صحیح زوج مثبت $2n$ باشد، سری جواب y به یک چندجمله‌ای از درجه $2n$ تبدیل می‌شود، که تنها شامل توانهای زوج x است. نشان دهید که این چندجمله‌ایها متضاظر به $\alpha = 0, 2, 4, \dots$ عبارتند از

$$1, 1-3x^2, 1-10x^2 + \frac{35}{3}x^4$$

نشان دهید که اگر α ، برابر یک عدد صحیح فرد مثبت $1+2n$ باشد، سری جواب P_n به یک چندجمله‌ای از درجه $1+2n$ که تنها شامل توانهای فرد x است تبدیل می‌شود، و چندجمله‌ایهای متناظر به $\alpha=1, 3, 5$ عبارتند از

$$x, x - \frac{5}{3}x^3, x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$$

۱۲. چندجمله‌ای لزاندر P_n با جواب چندجمله‌ای معادله لزاندر به‌ازای $n=\alpha$ که در شرط $1=P_n(1)$ صدق کند تعریف می‌شود. با استفاده از نتایج مسئله ۱۱، نشان دهید که

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3 - 3x)$$

می‌توان نشان داد که فرمول عمومی آن عبارت است از

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

که در آن $[n/2]$ نمایشگر بزرگترین عدد صحیحی است که از $n/2$ تجاوز نکند. با توجه به عبارت $P_n(x)$ متناظر به مقادیر زوج و فرد n نشان دهید که $P_n(-1) = (-1)^n$.

۱۳. چندجمله‌ای لزاندر در فیزیک ریاضی دارای نقش مهمی است. مثلاً در حل معادله لاپلاس (معادله پتانسیل) در مختصات کروی به معادله

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi$$

بر می‌خوریم که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. نشان دهید که با تعویض متغیر $x = \cos \varphi$ برای تابع $y = f(x) = F(\cos^{-1} x)$ به معادله لزاندر با $\alpha=n$ می‌رسیم.

۱۴. نشان دهید که به ازای $n=0, 1, 2, 3$ چندجمله‌ایهای لزاندر متناظر از

فرمول

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

به دست می‌آیند. این فرمول، که به فرمول رو دریک^۱ معروف است، به ازای همه مقادیر صحیح و مثبت n صادق است.

۱۵. نشان دهید که معادله لزاندر را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که $(1-x^2)P_n'(x)]' = -n(n+1)P_n(x)$ و $(1-x^2)P_m'(x)]' = -m(m+1)P_m(x)$ با ضرب معادله اول در $P_n(x)$ و معادله دوم در $P_m(x)$ ، وسپس با انتگرال گیری جزو به جزو نشان دهید که

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0 \quad n \neq m \quad \text{اگر}$$

این خاصیت چندجمله‌ایهای لزاندر را خاصیت تعامدی می‌نامند. اگر $m=n$ باشد، می‌توان نشان داد که مقدار انتگرال بالا برابر است با $\frac{(2n+1)}{2}$.
۱۶. می‌توان هر چندجمله‌ای درجه n را بر حسب ترکیب خطی از P_1, P_2, \dots, P_n بیان کرد:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$$

با استفاده از نتیجه مسئله ۱۵، نشان دهید که

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_k(x) dx$$

۳.۴ نقاط غیرعادی منظم

در این بند به بررسی معادله

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1)$$

در همسایگی یک نقطه غیرعادی x_0 می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر توابع P, Q و R چندجمله‌ایهایی بدون عامل مشترک باشند، نقاط غیرعادی معادله (۱) نقاطی هستند که به ازای آنها داریم $P(x) = 0$.

مثال ۱. مطلوب است تعیین نقاط غیرعادی و نقاط عادی معادله بسل مرتبه ۲

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (2)$$

روشن است که نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی است، زیرا $P(x) = x^2$ به ازای آن صفر می‌شود. علاوه بر این، اگر معادله (۲) را بر x^2 تقسیم کنیم، ضرایب y' و y در $x_0 = 0$ نامعین خواهند بود. همه نقاط دیگر، نقاط عادی معادله (۲) می‌باشند.

مثال ۲. مطلوب است تعیین نقاط غیرعادی و نقاط عادی معادله لزاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (3)$$

که در آن α مقداری است ثابت.

نقاط غیرعادی عبارتند از صفرهای $x^2 - 1 = P(x) = \pm x$. همه نقاط دیگر نقاط عادی اند.

جوابهای معادله (۱) غالباً در همسایگی یک نقطه غیرعادی x از لحاظ مقدار بسیار بزرگ می‌شوند، و میین تغییرات سریع، یا ویژگیهای بخصوصی می‌باشند. بدینسان رفتار یک دستگاه فیزیکی در تحت چنین معادله‌ای اغلب در همسایگی یک نقطه غیرعادی بسیار جالبتر است. غالباً شرایط غیرعادی هندسی در یک مسئله فیزیکی، از قبیل گوشه‌ها یا لبه‌های تیز، به نقاط غیرعادی در معادله دیفرانسیل متناظر می‌انجامند. نقاط غیرعادی یک معادله دیفرانسیل با آنکه معمولاً تعدادشان اندک است، از لحاظ ریاضی اشکال اصلی جواب را در دامنه‌ای وسیعتر از آنچه در نظر اول می‌توان حدس زد مشخص می‌کنند. بدینسان، در حالی که ممکن است علاقه‌مند باشیم که از این چند نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل اجتناب کنیم، اما در واقع لازم است که جواب را به دقیقترین وجه در این نقاط بررسی کنیم.

متاسفانه، هنگامی که x یک نقطه غیرعادی است از روش‌های بند پیش کاری ساخته نیست، ولازم است که بسطهایی عامتر از بسط به سری تیلر را در نظر بگیریم. این موضوع ذیلاً با معادله دیفرانسیل مذکور در مثال ۳ توضیح داده می‌شود، در این معادله یکی از جوابها $x = 0$ فاقد بسط به سری تیلر است. بدون اطلاع اضافی درباره تغییرات $P/Q/R$ و $P/Q/R$ در همسایگی نقطه غیرعادی، بررسی رفتار جوابهای معادله (۱) در مجاورت $x = 0$ غیرممکن است. امکان دارد که معادله (۱) دارای دو جواب مستقل خطی باشد که وقتی $x \rightarrow 0$ کر انداز باقی بماند، یا آنکه تنها یک جواب کر انداز بماند و دیگری بینهاست شود، یا آنکه وقتی $x \rightarrow 0$ هر دو جواب بینهاست شوند. این موضوع را با مثال‌های زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۳. معادله دیفرانسیل

$$x^2 - 2y - y'' = 0 \quad (4)$$

در $x = 0$ دارای یک نقطه غیرعادی است. با جایگذاری مستقیم می‌توان به آسانی تحقیق کرد که به ازای $y = 0 > x$ یا $y = x^2$ و $y = x/1 = y$ دو جواب مستقل خطی معادله (۴) می‌باشند. بدینسان در هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، جواب عمومی معادله (۴) عبارت خواهد بود از $y = c_1 x^2 + c_2 x^3$. تنها جواب معادله (۴) که وقتی $x \rightarrow 0$ کر انداز می‌باشد عبارت است از $y = c_1 x^2$. در واقع، این جواب در مبدأ تحلیلی است با اینکه اگر معادله (۴) را به صورت متعارف $y = u(x^2) - u''(x^3)$ بنویسیم، تابع $y = u(x^2)$ در $x = 0$ تحلیلی نیست، و نمی‌توان قضیه ۱.۴ را به کار برد. از طرف دیگر، باید توجه داشت که جواب $y = u(x^2)$ در حول مبدأ دارای بسط به سری تیلر نیست (در $x = 0$ تحلیلی نیست)؛ بنابراین، از روش بند ۲.۴ در این حالت کاری ساخته نیست.

مثال ۴. معادله دیفرانسیل

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (5)$$

نیز در $x = 0$ دارای یک نقطه غیرعادی است. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $y_1(x) = x$ و $y_2(x) = x^2$ دو جواب مستقل خطی معادله (5) می‌باشند، و هر دو در $x = 0$ تحلیلی‌اند. با وجود این، نمی‌توان به طرح مسئله مقدار اولیه‌ای با شرایط اولیه در $x = 0$ پرداخت. اعمال شرایط اولیه دلخواه در $x = 0$ غیرممکن است، زیرا هر ترکیب خطی x و x^2 در $x = 0$ برابر صفر است.

می‌توان معادله دیفرانسیلی با یک نقطه غیرعادی x طوری ساخت که هر جواب آن وقتی $x \rightarrow x_0$ بینهاست شود. حتی اگر معادله (1) دارای جوابی نباشد که وقتی $x \rightarrow x_0$ کراندار باقی بماند، اغلب تعیین چگونگی رفتار جوابهای معادله (1) وقتی $x \rightarrow x_0$ دارای اهمیت است؛ مثلاً، آیا y همانند $(x-x_0)^{-1/2}$ یا $|x-x_0|$ ، یا به گونه‌ای دیگر به بینهاست میل می‌کند؟

به منظور آنکه یک نظریه ریاضی ساده مستدل برای حل معادله (1) در همسایگی یک نقطه غیرعادی x_0 ، باید، لازم است بحث را به حالت‌های به اصطلاح «غیرعادی ضعیف» که در آن غیرعادی بودن توابع P/Q و R/P در $x = x_0$ چندان شدید نباشد، محدود کنیم. البته این مفهوم از پیش روشن نیست. اما، بعداً ثابت خواهیم کرد (بند ۱.۵.۴ مسائل ۵ و ۶ را بینید) که اگر P ، Q و R چند جمله‌ای باشند، شرایط مشخصه «غیرعادی ضعیف» عبارتند از متناهی بودن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad (6)$$

@jozve_iut

و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (7)$$

این بدین معنی است که Q/P از $(x-x_0)^{-1}$ و R/P از $(x-x_0)^{-2}$ غیرعادی‌تر نیستند. چنین نقطه‌ای را نقطه غیرعادی منظم معادله (1) می‌نامند. نقطه x_0 در مورد توابعی عامتر از چند جمله‌ایها می‌تواند نقطه غیرعادی منظم معادله (1) باشد، و برای این منظور باید توابع^۱

$$(x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (8)$$

هر دو حول x_0 دارای سری تیلر همگرا باشند، یعنی به عبارت دیگر توابع (8) در $x = x_0$ تحلیلی باشند. از روابط (6) و (7) نتیجه می‌شود که اگر P ، Q و R چند جمله‌ایهاي

۱. توابع داده شده با روابط (8) ممکن است در x_0 معین نباشند، و در این حالت باید مقادیر آنها را در x_0 برابر حد آنها وقتی $x \rightarrow x_0$ گرفت.

مناسبی باشند شرایط مزبور برقرار خواهد بود. هر نقطه غیرعادی معادله (۱) را که نقطه غیرعادی منظم نباشد، نقطه غیرعادی نامنظم معادله (۱) می‌نامند.

در بندهای بعدی چگونگی حل معادله (۱) را در همسایگی یک نقطه غیرعادی منظم مورد بحث قرار می‌دهیم. بحث درباره جوابهای معادله دیفرانسیل در همسایگی نقاط غیرعادی نامنظم از حدود یک کتاب مقدماتی خارج است.

مثال ۵. در مثال ۲ دیدیم که نقاط غیرعادی معادله لزاند

$$y'' + \alpha(\alpha+1)y' - 2x^2y = 0$$

عبارتند از $x=1$. تعیین کنید که آیا این نقاط غیرعادی، منظم‌اند یا نامنظم. نخست به بررسی نقطه $x=1$ می‌پردازیم، و مشاهده می‌کنیم که با تقسیم بر x^2-1 ضرایب y' و y به ترتیب عبارتند از $(1-x)/(1-x^2)$ و $\alpha(\alpha+1)/(1-x^2)$. بدین سان حدود زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1+x} = 1$$

و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0 \end{aligned}$$

چون این حدود متناهی‌اند، نقطه $x=1$ یک نقطه غیرعادی منظم است. به همین طریق می‌توان نشان داد که $x=-1$ نیز یک نقطه غیرعادی منظم است.

مثال ۶. نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل

$$2(x-2)^3xy'' + 3x^2y' + (x-2)y = 0$$

را بیابید و آنها را بر حسب منظم یا نامنظم بودن طبقه بندی کنید.

با تقسیم بر $x^2(x-2)^2$ خواهیم داشت

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2(x-2)x}y = 0$$

بنابراین

$$q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x-2) \quad p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x-2)^2$$

نقاط غیرعادی عبارتند از $x=0$ و $x=2$. $x=0$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3}{2(x-2)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{2x(x-2)} = 0$$

چون این حدود متناهی‌اند، $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم است. در مورد $x=2$ دیده می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)p(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{3}{2(x-2)^2}$$

وجود ندارد؛ بنابراین $x=2$ یک نقطه غیر عادی نامنظم است.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۸ تعیین کنید که آیا هریک از نقاط ۱، ۰ و -۱ برای معادله دیفرانسیل داده شده یک نقطه عادی، یک نقطه غیر عادی منظم، یا یک نقطه غیر عادی نامنظم است.

$$xy'' + (1-x)y' + xy = 0 \quad .1$$

$$x^2(1-x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0 \quad .2$$

$$2x^4(1-x^2)y'' + 2xy' + 2x^2y = 0 \quad .3$$

$$x^2(1-x^2)y'' + \frac{2}{x}y' + 4y = 0 \quad .4$$

$$(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0 \quad .5$$

$$y'' + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2y' + 3(1+x)^2y = 0 \quad .6$$

$$(x+2)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0 \quad .7$$

$$x(1-x^2)^2y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0 \quad .8$$

۹. تعیین کنید که آیا نقطه غیر عادی $x=0$ معادله دیفرانسیل بدل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

یک نقطه غیر عادی منظم یا نامنظم است.

۱۰. برای معادله دیفرانسیل زیر مشخص کنید که آیا نقطه $x=0$ یک نقطه عادی، یک نقطه غیر عادی منظم، یا یک نقطه غیر عادی نامنظم است:

$$xy'' + e^x y' + (2 \cos x)y = 0$$

۱۱. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر مشخص کنید که آیا نقطه $x = 0$ یک نقطه عادی، یک نقطه غیرعادی منظم، یا یک نقطه غیرعادی نامنظم است:

$$x^2 y'' + (e^{-x} \cos x)y' + (e^{-x} - 1)y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - 3(\sin x)y' + (1+x^2)y = 0 \quad (\text{ب})$$

(اهنگی: سریهای توانی e^{-x} و $\sin x$ را بد ترتیب برای قسمتهای (الف) و (ب) در نظر بگیرید.

۱۲. فرض کنیم تابع f که به ازای $x = 0$ با $f(x) = x^{-1} \sin x$ باشد، در $x = 0$ تحلیلی است، نشان دهید که $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل

$$(\sin x)y'' + xy' + 4y = 0$$

یک نقطه غیرعادی منظم و برای معادله دیفرانسیل

$$(x \sin x)y'' + 3y' + xy = 0$$

یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

۱۳. تعاریفی که در بندهای پیش برای نقطه عادی و نقطه غیرعادی منظم داده شد، تنها هنگامی به کار می روند که نقطه $x = 0$ متناهی باشد. در مباحث پیشرفته تر معادلات دیفرانسیل اغلب لازم می آید که نقطه واقع در بینهاست مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور از تعویض متغیر $x = \xi$ استفاده کرده، و معادله حاصل را در $\xi = 0$ بررسی می کنند. نشان دهید که برای معادله دیفرانسیل

$$P(\xi)y'' + Q(\xi)y' + R(\xi)y = 0$$

نقطه واقع در بینهاست یک نقطه عادی است، اگر

$$\frac{1}{P(1/\xi)} \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right], \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

حول $\xi = 0$ دارای بسط به سری تیلر باشد. همچنین نشان دهید که نقطه واقع در بینهاست یک نقطه غیرعادی منظم است، اگر یکی از دوتابع بالا دارای بسط به سری تیلر نباشد، اما توابع

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)} \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right], \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

هردو دارای چنین بسطی باشند.

۱۴. تعیین کنید که آیا برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر نقطه واقع در بینهاست، یک نقطه عادی، یک نقطه غیرعادی منظم، یا یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

(الف) معادله لزاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

(ب) معادله بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

(ج) معادله هرمیت

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

(د) معادله آیری

$$y'' - xy = 0$$

۴.۴ معادلات اویلر

یکی از ساده‌ترین نمونه‌های معادله دیفرانسیلی که دارای یک نقطه غیرعادی منظم باشد، معادله اویلر یا معادله هم‌بعدی

$$L[y] = x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0 \quad (1)$$

است که در آن α و β ثابت‌اند. جز در مواردی که خلاف آن تصریح شود، α و β را حقیقی فرض می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله (1) می‌باشد. چون حل معادله اویلر نمونه بارز حل همه معادلات دیفرانسیل با نقطه غیرعادی منظم است، شایسته است که پیش از بررسی مسئله کلیتر، این معادله را به‌طور دقیق مورد بحث قرار دهیم.

در هر فاصله‌ای که حاوی مبدأ نباشد، معادله (1) دارای یک جواب عمومی به صورت

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

است، که در آن y_1 و y_2 استقلال خطی دارند. برای آسانی نخست فاصله $0 < x$ را در نظر می‌گیریم و بعداً نتایج را به فاصله $0 < x$ تعمیم مسی‌دهیم. نخست، با توجه به $(x^r)' = rx^{r-1}$ و $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$ ، دیده می‌شود که اگر فرض کنیم معادله (1) دارای جوابی به صورت^۱

$$y = x^r \quad (2)$$

است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r F(r) \end{aligned} \quad (3)$$

۱. این فرض همچنین براساس این نکته که معادله دیفرانسیل مرتبه اول اویلر $xy' + ky = 0$ دارای جواب $x^{-k}y = 0$ است، مطرح می‌شود.

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta \quad (4)$$

اگر r یک ریشه معادله درجه دوم باشد، آنگاه $F(r) = 0$ صفر است، و $x^r = y$ یک جواب معادله (1) خواهد بود. ریشه‌های 0 عبارتند از

$$r_1 = \frac{-(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad (5)$$

$$r_2 = \frac{-(\alpha-1) - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}$$

و $(r-r_1)(r-r_2) = F(r) = 0$. عیناً همانند حالت معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت (بند ۵.۳ را ببینید)، باید حالت‌هایی را که در آن $\alpha-1-4\beta > 0$ مشبت، صفر، و منفی است جداگانه بررسی کنیم. در واقع، تمام نظریه‌ای که در این بند عرضه می‌شود، همانند نظریه معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت است، که در آن x^r به جای e^{rx} جایگزین شده است (مسائل ۴ و ۵ را ببینید). تذکر این نکته نیز لازم است که برای حل یک معادله اویلر خاص بسیار آسانتر است که جایگزینی $x^r = y$ را انجام داده، و معادله درجه دوم (۴) را به دست آورد، و ریشه‌های r_1 و r_2 را محاسبه کرد، تا اینکه فرمول عمومی (۵) را حفظ کرد.

حالت ۱. $\alpha-1-4\beta > 0$. در این حالت از روابط (۵) دو ریشه حقیقی مختلف r_1 و r_2 به دست می‌آید. چون به ازای $x^r_1 \neq x^r_2$ و $x^r_1 > 0$ و $x^r_2 < 0$ هیچگاه صفر نمی‌شود، در نتیجه جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \quad x > 0 \quad (6)$$

توجه شود که اگر r عددگویایی نباشد، آنگاه x^r با رابطه $x^r = e^{rx}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱. مطلوب است حل معادله

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0 \quad (7)$$

با قراردادن $x^r = y$ خواهیم داشت

$$x^r(2r^2 + r - 1) = 0$$

$$x^r(2r - 1)(r + 1) = 0$$

بنابراین

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -1$$

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, \quad x > 0 \quad (8)$$

حالت ۲. $\alpha - 1 < \beta < 0$. در این حالت، بنابر روابط (۵)، داریم

$$r_1 = r_2 = -(\alpha - 1)/2$$

و برای معادله دیفرانسیل فقط جواب $x' = L(x)$ به دست می‌آید. جواب دوم را می‌توان باروش کاهش مرتبه به دست آورد، اما به منظور بحثی که در پیش داریم از روش دیگری استفاده می‌کنیم. چون $r_1 = r_2$ ، در نتیجه $F(r) = (r - r_1)^2$. بدینسان در این حالت نه تنها $F(r_1) = 0$ ، بلکه علاوه بر آن $F'(r_1) = 0$. این نکته می‌بین آن است که باید از معادله (۳) نسبت به r مشتق گرفت و آنگاه r را برابر r_1 قرار داد. با مشتق گیری از معادله (۳) نسبت به r داریم

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x'] = \frac{\partial}{\partial r} [x' F(r)]$$

با جایگزینی $F(r)$ و تعریض ترتیب مشتق گیری نسبت به x و r ، و توجه به $\frac{\partial(x')}{\partial r} = x' \ln x$

$$L[x' \ln x] = (r - r_1)^2 x' \ln x + 2(r - r_1)x' \quad (9)$$

طرف دوم معادله (۹) به ازای $r = r_1$ صفر می‌شود؛ در نتیجه

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \quad x > 0 \quad (10)$$

یک جواب دیگر معادله (۱) است. چون x' و $\ln x$ به ازای $x > 0$ مستقل خطی‌اند، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \quad x > 0 \quad (11)$$

مثال ۲. مطلوب است حل معادله

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0 \quad (12)$$

با قراردادن $y = x^r$ خواهیم داشت

$$x^r (r^2 + 4r + 4) = 0$$

از آنجا $r = -2$ ، $r_1 = r_2 = -2$ ، و بنابراین

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \quad x > 0 \quad (13)$$

حالت ۳. $\alpha - 1 < \beta < 0$. در این حالت ریشه‌های r_1 و r_2 مختلط مزدوج

می‌باشند، مثلاً $\mu + i\mu$ و $r_1 = \lambda - i\mu$ و $r_2 = \lambda + i\mu$. در اینجا باید بد توضیح معنای x^r هنگامی که r مختلط است پردازیم. با توجه به آنکه به ازای $x > 0$ و r حقیقی می‌توان نوشت

$$x^r = e^{r \ln x} \quad (14)$$

همین رابطه را می‌توان به عنوان تعریف x^r به ازای r مختلط به کار برد. آنگاه

$$\begin{aligned}
 x^{(\lambda+i\mu)} &= e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} \\
 &= x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\
 &= x^\lambda [\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)], \quad x > 0 \quad (15)
 \end{aligned}$$

چون برای x' به ازای مقادیر مختلف r این تعریف را در نظر بگیریم، می‌توان تحقیق کرد که قوانین معمول جبر و حساب دیفرانسیل درباره آن صدق می‌کند، و بنابراین x' و x'' جوابهای معادله (۱) خواهند بود. جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu} \quad (16)$$

نقص این عبارت در آن است که توابع $x^{\lambda+i\mu}$ و $x^{\lambda-i\mu}$ دارای مقادیر مختلف اند. یادآور می‌شویم که وضعیت مشابهی در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت هنگامی که ریشه‌های معادله مشخصه مختلف بودند، وجود داشت. با استفاده از همان روشی که به کار رفت، دیده می‌شود که قسمتهای حقیقی و موهومی $x^{\lambda+i\mu}$ ،

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \quad \text{و} \quad x^\lambda \sin(\mu \ln x) \quad (17)$$

جوابهای معادله (۱) می‌باشند و دارای استقلال خطی اند. بدینسان برای حالت ریشه‌های مختلف، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \sin(\mu \ln x), \quad x > 0 \quad (18)$$

مثال ۳. مطلوب است حل

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad \dots \quad (19)$$

با قراردادن $x = r$ خواهیم داشت

$$r^2 [r(r-1) + r + 1] = 0$$

از آنجا $r = 0$ ، و جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x), \quad x > 0 \quad (20)$$

اکنون فاصله $0 < x$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا به این اشکال برمی‌خوریم که x' هنگامی که x منفی باشد، و r عدد صحیح نباشد چه معنایی می‌تواند داشته باشد؟ به همین طریق نیز $\ln x$ به ازای $0 < x$ نامعین است. می‌توان نشان داد که جوابهای معادله اویلر که به ازای $0 < x$ به دست آمدند، به ازای $0 < x$ نیز معتبرند، اما عموماً دارای مقادیر مختلف می‌باشند. بدینسان در مثال ۱ جواب $x^{1/2}$ به ازای $0 < x$ موهومی است.

همواره می‌توان برای معادله اویلر (۱) در فاصله $0 < x$ با تعویض متغیر زیر جوابهایی با مقدار حقیقی به دست آورد. گیریم $t = -\ln x$ که در آن $0 < t$ ، و فرارمی‌دهیم $y = u$. بدینسان خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left[-\frac{du}{d\xi} \right] \frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2} \quad (21)$$

و معادله (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha \xi \frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \quad \xi > 0 \quad (22)$$

و این دقیقاً همان مسئله‌ای است که هم‌اکنون حل کردیم؛ از روابط (۶)، (۱۱)، و (۱۸) خواهیم داشت

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1 \xi^\alpha + c_2 \xi^{-\alpha} \\ (c_1 + c_2 \ln \xi) \xi^\alpha \\ c_1 \xi^\lambda \cos(\mu \ln \xi) + c_2 \xi^\lambda \sin(\mu \ln \xi) \end{cases} \quad (23)$$

بر حسب آنکه $\beta - \alpha - 1$ مثبت، صفر، یا منفی باشد. برای آنکه u را بر حسب x به دست آوریم، در روابط (۲۳) به جای ξ باید x را قرار داد.

می‌توان این نتایج را برای $x < 0$ و $x > 0$ به صورت زیر نویسید. به ازای $x > 0$ داریم $x = |x|$ و به ازای $x < 0$ ، $x = -|x|$. بدینسان کافی است که در روابط (۶)، (۱۱)، و (۱۸) به جای x ، $|x|$ را قرار دهیم، تامتناظر به هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد جوابهایی با مقدار حقیقی به دست آورد (مسائل ۶ و ۷ را نیز ببینید). این نتایج در قضیه زیر خلاصه شده‌اند.

@jozve_iut

قضیه ۲۰۴. برای حل معادله اویلر (۱)

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

در هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، قرار دهیم $y = x^r$ ، $y' = x^{r-1}$ و $y'' = x^{r-2}$ دیشهای معادله

$$F(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

(۱) محاسبه می‌کنیم.

اگر دیشهای حقیقی و ناابرای باشند،

$$y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2} \quad (24)$$

اگر دیشهای حقیقی و برابر باشند،

$$y = (c_1 + c_2 \ln |x|) |x|^r \quad (25)$$

اگر دیشهای مختلط باشند،

$$y = |x|^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln |x|) + c_2 \sin(\mu \ln |x|)] \quad (26)$$

که دو آن $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$

در مورد یک معادله اویلر به صورت

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0) y' + \beta y = 0 \quad (27)$$

وضعیت دقیقاً همان است و باید جوابهایی به صورت $y = (x - x_0)^r$ جستجو کرد. جواب عمومی از روابط (۲۴)، (۲۵) یا (۲۶) با قراردادن $(x - x_0)$ به جای x به دست می‌آید. به طریق دیگر، می‌توان معادله (۲۷) را با تعویض متغیر مستقل $x - x_0 = t$ به صورت معادله (۱) درآورد.

به طور کلی در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با نقطه غیرعادی منظم همان وضعیت معادله اویلر را خواهیم داشت. این مسئله را در بند بعد بررسی خواهیم کرد.

مسائل

۱. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم زیر جواب عمومی‌ای را بیابید که در هر فاصله‌ای که شامل نقطه غیرعادی نیست معتبر باشد.

$$x^2 y'' + 4xy' + 4y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + \frac{3}{4}y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$(x-1)^2 y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0 \quad (\text{و})$$

$$x^2 y'' + 6xy' - y = 0 \quad (\text{ز})$$

$$2x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \quad (\text{ح})$$

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad (\text{ط})$$

$$(x-2)^2 y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0 \quad (\text{ئ})$$

$$x^2 y'' + 2xy' + 4y = 0 \quad (\text{ك})$$

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0 \quad (\text{ل})$$

۲. با استفاده از روش کاهش مرتبه نشان دهید که اگر r یک ریشه مکرر معادله $(1-r)x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ باشد، آنگاه x^r و $\ln x^r$ جوابهای معادله

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad x > 0$$

می‌باشند.

۳. مطلوب است تعیین همه مقادیر α که به ازای آنها همه جوابهای

۳. معادله اویلر مرتبه دوم $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ به صفر بگراید.

۴. معادله اویلر مرتبه دوم $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ را می‌توان با تعویض متغیر مناسبی به یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت تبدیل کرد. با توجه به آنکه x در مورد معادله اویلر دارای همان نقش $e^x = (e^x)^r$ متناظر به معادله با ضرایب ثابت است، کاملاً معقول خواهد بود که تعویض متغیر $x = e^z$ یا $z = \ln x$ انجام گیرد. تنها فاصله $x > 0$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$$

(ب) نشان دهید که معادله اویلر به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

اگر r_1 و r_2 ریشه‌های معادله $\alpha - 1 + (r - r_1)(r - r_2) + \beta = 0$ باشد، نشان دهید که

(ج) اگر r_1 و r_2 حقیقی و نابرابر باشند، آنگاه

$$y = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z} = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

(د) اگر r_1 و r_2 برابر باشند، آنگاه

$$y = (c_1 + c_2 z) e^{r_1 z} = (c_1 + c_2 \ln x) x^{r_1}$$

(ه) اگر r_1 و r_2 مختلط مزدوج باشند؛ $r_1 = \lambda + i\mu$ آنگاه

$$y = e^{\lambda z} (c_1 \cos \mu z + c_2 \sin \mu z) = x^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x)].$$

۵. با استفاده از روش مسئله ۴، معادلات دیفرانسیل زیر را به ازای $x > 0$ حل کنید.

$$x^2 y'' - 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' + 7xy' + 5y = x \quad (\text{ج})$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' + xy' + 4y = \sin(\ln x) \quad (\text{ه})$$

$$3x^2 y'' + 12xy' + 9y = 0 \quad (\text{و})$$

۶. نشان دهید که اگر y عبارت $L[y] = x^2 y'' + \alpha xy' + \beta y$ باشد، آنگاه به ازای $x < 0$

$$L[(-x)^r] = (-x)^r F(r)$$

که در آن $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ ریشه‌های

$F(r) = 0$ باشد؛ آنگاه جوابهای مستقل خطی $0 = L[y]$ به ازای $0 < x$ عبارتند از x^r و x^{r+1} .

۷. فرض می‌کنیم که x^r و x^{r+1} جوابهای معادله اویلر باشند که در آن $r_1 \neq r_2$ و $r_1 > r_2$. یک عدد صحیح مثبت است. طبق رابطه (۲۴) جواب عمومی در هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد، عبارت است از $c_1 x^r + c_2 x^{r+1} + c_3 x^{r+2} = y$. نشان دهید که جواب عمومی را می‌توان به صورت $y = k_1 x^r + k_2 x^{r+1} + k_3 x^{r+2}$ نوشت.

(ا) نشان دهید که با انتخاب مناسب ثابت‌ها عبارتهای مذبور به ازای $0 < x$ یکی هستند؛ و با انتخاب ثابت‌های دیگری به ازای $0 < x$ یکی می‌شوند.

۸. اگر ثابت‌های α و β در معادله اویلر $0 = y + \alpha x y' + \beta x^2 y''$ اعداد مختلطی باشند، باز هم امکان دارد که جوابهایی به صورت x^r به دست آورد. اما، عموماً، جوابهای دیگر دارای مقادیر حقیقی نیستند. جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را متناظر با فاصله $0 < x$ بیابید.

$$(الف) 0 = x^r y'' + (1 - i)x y' + 2y \quad (ب) 0 = x^r y'' + 2ix y' - iy \quad (ج) 0 = x^r y'' + x y' - 2iy$$

(د) نشان دهید که مسائل ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶ بند ۳.۵.۱ را بینید.

۴.۵ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی منظم، بخش اول

اکنون به بررسی مسئله حل معادله کلی خطی مرتبه دوم

$$(1) \quad P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

در همسایگی یک نقطه غیرعادی منظم $x = x_0$ می‌پردازیم. برای آسانی فرض می‌کنیم که $x_0 = 0$. اگر $x \neq 0$ ، معادله را می‌توان با قراردادن $z = x - x_0$ به معادله‌ای که نقطه غیرعادی منظم آن در مبدأ باشد تبدیل کرد.

این نکته که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله (۱) است، بدان معنی است که $x p(x) = x^r R(x)$ و $x^r q(x)/P(x) = x^r Q(x)/P(x) = x^r$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ دارای حد متناهی و در $x = 0$ تحلیلی می‌باشد. بدینسان دارای بسطهایی به سری توانی به صورت

$$(2) \quad x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^r q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

می‌باشد، که در یک فاصله $\rho > |x| > 0$ حول مبدأ همگراشند. از لحاظ اهداف نظری مناسب است که معادله (۱) را بر $P(x)$ تقسیم کرده و سپس در x^2 ضرب کنیم، تا به دست آید:

$$(3\text{ الف}) \quad x^2 y'' + x[x p(x)] y' + [x^r q(x)] y = 0$$

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n + \dots)y' + (q_0 + q_1x + \dots + q_nx^n + \dots)y = 0 \quad (3)$$

اگر غیر از

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xQ(x)}{P(x)}, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}$$

همه p_n و q_n ها صفر باشند، آنگاه معادله (۳) به معادله اویلر

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \quad (4)$$

که در بند پیش مورد بحث واقع شد تبدیل می شود. البته در حالت کلی، برخی از p_n و q_n ها، $n \geq 1$ ، صفر نیستند. اما، سرشت اساسی جوابهای معادله (۳) و جوابهای معادله اویلر یکسان اند. وجود جمله های

$$q_1x + \dots + q_nx^n + \dots \quad p_1x + \dots + p_nx^n + \dots$$

فقط محاسبات را پیچیده تر می سازد.

اصولاً بحث را به فاصله $0 < x < \infty$ می توان همانند آنچه در مورد معادله اویلر عمل شد، تعویض متغیر $\xi = -x$ را به کار گرفت، و سپس معادله حاصل را به ازای $0 < \xi < \infty$ حل کرد.

چون ضرایب معادله (۳) همان «ضرایب اویلر» با مضربی از سری توانی می باشند، کاملاً طبیعی است که به جستجوی جوابهایی به صورت «جوابهای اویلر» با مضربی از سری توانی پردازیم:

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (5)$$

آنچه را که در این مرحله از مسئله باید تعیین کنیم، عبارت است از:

۱. مقادیر r که به ازای آنها معادله (۱) دارای جوابی به صورت (۵) است.
۲. رابطه بازگشت a_n ها.

$$\text{۳. شعاع همگرایی سری } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}.$$

چنان که خواهیم دید معادله (۱) همواره دارای حداقل یک جواب به صورت (۵) باشد، و ممکن است جواب دومی متناظر با مقدار دیگری از r می باشد. اگر جواب دومی به صورت (۵) وجود نداشته باشد، جواب دوم درست مانند هنگامی که معادله اویلر دارای ریشه های برابر است، شامل یک جمله لگاریتمی است. البته، از لحاظ نظری، همین که جواب اول را که به صورت (۵) است پیدا کردیم، جواب دومی را می توان به روش کاهش مرتبه به دست آورد. متأسفانه، این روش همواره برای به دست آوردن جواب دومی مناسب نیست؛

و ما در بندهای ۶.۴ و ۷.۴ روش دیگری را عرضه می‌کنیم.

نظریه عمومی این مبحث را فروبنیوس^۱ ریاضیدان آلمانی ارائه کرد، و نسبتاً پیچیده است. ما به معرفی این نظریه نمی‌پردازیم، و در این بند و سه بند آتی فرض می‌کنیم که جوابی به صورت مذبور وجود دارد. به ویژه، فرض می‌کنیم که هرسری توانی موجود در عبارت جواب دارای یک شعاع همگرا بی مخالف صفر است، و توجه خود را به طرز تعیین ضرایب این نوع سری معطوف می‌نماییم.

نخست با مثالی روش فروبنیوس را در حالتی که هر دو جواب به صورت (۵) باشند توضیح می‌دهیم. معادله

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0 \quad (6)$$

را در نظر می‌گیریم. از مقایسه با معادله (۳)، دیده می‌شود که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله (۶) می‌باشد. همچنین از مقایسه با معادلات (۳ الف) و (۳ ب) دیده می‌شود که $x p(x) = -1/2$ و $x^2 q(x) = (1+x)/2$. بدینسان $p_0 = -1/2$ ، $q_0 = 1/2$ ، و همه p_n و q_n های دیگر صفرند. معادله اویلر متناظر عبارت است از

$$2x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (7)$$

اکنون به طور صوری به آزمون جوابی برای معادله (۶) به صورت (۵) بذازای $x > 0$ می‌پردازیم. آنگاه $'y$ و $''y$ به صورت زیر خواهند بود

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} \quad (8)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2} \quad (9)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1+x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} \end{aligned}$$

با توجه به آنکه مجموع سری اخیر را می‌توان به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n}$ نوشت، و جمله‌ها را باهم ترکیب کرد، داریم

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1+x)y &= a_0 [2r(r-1) - r + 1] x^r \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [2(r+n)(r+n-1) - (r+n)+1] a_n + a_{n-1} \right\} x^{r+n} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

چون معادله (۱۰) باید به صورت اتحاد برقرار باشد، ضریب هر توان بد در آن باید صفر باشد. چون $a_0 \neq 0$ است^۱، متناظر با x^r داریم

$$(11) \quad 2r(r-1)-r+1=0 \quad 2r^2-3r+1=0$$

از ضریب x^{r+n} خواهیم داشت

$$[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]a_n+a_{n-1}=0$$

یا

$$(12) \quad a_n = -\frac{1}{2(r+n)^2-2(r+n)+1}a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

معادله (۱۱) را معادله شاخص معادله (۶) می‌نامند. توجه شود که این دقیقاً همان معادله‌ای است که برای معادله اویلر (۷) وابسته به معادله (۶) به دست آوردیم. ریشه‌های آن معرف دو مقدار ممکن برای r است که به ازای آنها امکان داد دجوابهای معادله (۶) به صورت (۵) باشند. با فاکتور گیری معادله (۱۱) خواهیم داشت $0 = (1-r)(1-2r)$; بنابراین ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از

$$(13) \quad r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

از این به بعد، هرگاه ریشه‌های معادله شاخص حقیقی و نامساوی باشند، ریشه بزرگتر را با r_1 نشان می‌دهیم. ریشه‌های معادله شاخص را اغلب نمایهای تکینگی در نقطه غیر عادی منظم مزبور می‌نامند.

معادله (۱۲) برای ضرایب a_n یک رابطه بازگشت به دست می‌دهد. با در نظر گرفتن صورت تجزیه شده معادله شاخص رابطه بازگشت را می‌توان چنین نوشت

$$(14) \quad a_n = \frac{-1}{[2(r+n)-1][(r+n)-1]}a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

به ازای هر ریشه r_1 و r_2 معادله شاخص رابطه بازگشت را به کار می‌گیریم، تا a_n های متناظر تعیین شوند. به ازای $r_1 = r_2 = 1$ خواهیم داشت

۱. با انتخاب $a_0 = 0$ چیزی عاید نمی‌گردد، و این تنها بدان معنی است که سری باید با جمله a_1x^{r+1} یا، اگر $a_1 = 0$ باشد، با جمله a_2x^{r+2} وغیره آغاز شود. فرض کنیم که نخستین جمله مخالف صفر $a_m x^{r+m}$ باشد؛ این هم ارز با آن است که در سری (۵) به جای a_1, a_2, \dots, a_r و به جای a_m را قرار دهیم. در واقع طوری انتخاب شده است که برابر کوچکترین توان x در سری مزبور باشد؛ و $a_0 \neq 0$ را به عنوان ضریب آن در نظر می‌گیریم.

$$a_n = \frac{-1}{(2n+1)n} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

بدینسان

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{(2n+1)n} \cdot \frac{-1}{(2n-1)(n-1)} a_{n-2} \\ &\vdots \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)n(2n-1)(n-1) \cdots (5 \cdot 2)(3 \cdot 1)} a_0 \end{aligned}$$

با دسته‌بندی سازه‌های $n, n-1, \dots, 1$ ، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[(2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3]n!} a_0, \quad n \geq 1 \quad (15)$$

بنا براین یک جواب معادله (۱۴) صرف نظر از ضریب ثابت a_0 ، عبارت است از

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[(2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3]n!} \right], \quad x > 0 \quad (16)$$

برای تعیین همگرایی سری (۱۶) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(2n+2)(n+1)} = 0$$

به ازای هر x . بدینسان شرایط به ازای همه مقادیر x همگرای است.

منتظر باریش دوم $r = r_2 = 1/2$ ، نیز به همان روش عمل می‌کنیم. از معادله (۱۴)

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{2n(n-\frac{1}{2})} a_{n-1} = \frac{-1}{n(2n-1)} a_{n-1} \\ &\vdots \\ &= \frac{-1}{n(2n-1)} \cdot \frac{-1}{(n-1)(2n-2)} a_{n-2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n(2n-1)(n-1)(2n-2) \cdots (2 \cdot 3)(1 \cdot 1)} a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{[(2n-1)(2n-2) \cdots 3 \cdot 1]n!} a_0, \quad n \geq 1 \quad (17) \end{aligned}$$

در اینجا نیز با صرف نظر کردن از ضرب ثابت a_0 ، جواب دوم را به دست می‌آوریم

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1] n!} \right], \quad x > 0 \quad (18)$$

مانند پیش، می‌توان نشان داد که سری موجود در رابطه (18) به ازای همه مقادیر x همگر است. چون جمله‌های اول سریهای جواب y_1 و y_2 به ترتیب x و $x^{1/2}$ می‌باشند، روشن است که جوابها دارای استقلال خطی‌اند. بنابراین جواب عمومی معادله (۶) عبارت است از

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x > 0$$

مثال بالا از جنبه‌های متعددی روش‌نگر است. محاسبات خود را با ردیگر از نقطه نظر کلیتری بررسی کنیم. گیریم

$$\begin{aligned} F(r) &= 2r(r-1) - r + 1 \\ &= (2r-1)(r-1) \end{aligned} \quad (19)$$

بدینسان معادله شاخص عبارت خواهد بود از $F(r) = 0$ ، و رابطه بازگشت (۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$F(r+n)a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1 \quad (20)$$

معادله (۲۰) نمایشگر حالت کلی است به جز آنکه به جای جمله a_{n-1} در حالت کلی یک ترکیب خطی از $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ قرار می‌گیرد. اما، می‌توان در بحث زیر معادله (۲۰) را به عنوان مدل در نظر گرفت، البته با توجه به این نکته که بحث به مثال خاصی که هم‌اکنون تکمیل شد محدود نمی‌گردد.

اشکالات از دو منبع سرچشمه می‌گیرد. نخست، اگر دوربیشه r_1 و r_2 معادله شاخص برابر باشند، در این صورت تنها یک سری جواب به شکل (۵) به دست می‌آید. دوم، این امکان وجود دارد که بذازای ریشه‌های مفروض r_1 یا r_2 نتوان برای یکی از a_n ‌ها معادله (۲۰) را به علت آنکه $F(r+n)$ صفر شود، حل کرد. بیینیم چه وقت این حالت رخ می‌دهد؟ تنها صفرهای $F(r)$ عبارتند از r_1 و r_2 ، و اگر $r_1 < r_2$ آنگاه به ازای هر n بهوضوح داریم $r_2 > r_1 + n > r_1$ و در نتیجه به ازای هر n خواهیم داشت $F(r_1 + n) \neq 0$. بدینسان هیچگاه در محاسبه سری جواب متناظر باریشه بزرگتر معادله شاخص اشکالی پیش نخواهد آمد. از طرف دیگر $F(r_2 + n)$ را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم $r_1 - r_2 = N$ یک عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه به ازای $N = n$ خواهیم داشت

$$F(r_2 + N)a_N + a_{N-1} = 0$$

اما $F(r_2 + N) = F(r_1 + N) = 0$ و نمی‌توان معادله بالا را نسبت به a_N حل کرد، مگر آنکه a_{N-1} نیز صفر باشد، و بنابراین نمی‌توان سری جواب دومی را به دست آورد. در مسائل

کلیتر، چنان که در بند بعد خواهیم دید، رابطه بازگشت بسیار پیچیده‌تر خواهد بود، و حتی هنگامی که $(F + N)$ صفر شود، امکان دارد که بتوان جواب دومی به صورت (۵) متناظر به $r_1 = r_2 = r$ را تعیین کرد. در هر صورت حالتهای $r_1 = r_2 = N$ و $r_1 - r_2 = N$ که در آن N عدد صحیح و مثبتی است، مستلزم دقت خاصی می‌باشد.

در پایان، متد کر می‌شویم که اگر ریشه‌های معادله شاخص مختلط باشند، این نوع اشکالات رخ نمی‌دهد؛ از طرف دیگر جوابهای متناظر به r_1 و r_2 توابعی با مقادیر مختلط از x خواهند بود. اما، درست همانند معادله اویلر، می‌توان با در نظر گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی جوابهای بمقادیر مختلط، جوابهایی بمقادیر حقیقی به دست آورد.

پیش از آنکه به بحث کلی و بررسی حالتهای خاص $r_1 - r_2 = N$ یک N یک عدد صحیح مثبت، پردازیم یک نکته عملی را متد کر می‌شویم. اگر P ، Q ، و R چند جمله‌ای باشند، بسیار بهتر است که به جای معادله (۳) همان معادله (۱) را مستقیماً به کار بگیریم. بدین سان دیگر لازم نیست که $x^2R(x)/P(x)$ و $xQ(x)/P(x)$ به صورت سری توانی بیان شود. مثلا، بسیار آسان‌تر است که معادله

$$x(1+x)y'' + 2y' + xy = 0$$

را در نظر بگیریم، تا اینکه آن را به صورت

$$x^2y'' + x \frac{2}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0$$

نوشته، و سپس $(1+x)/2$ و $(1+x^2)/2$ را بسط دهیم تا به صورت زیر درآید

$$y = x^2y'' + x[x^2 - x^3 + x^4 - \dots]y' + [x^2 - x^3 + x^4 - \dots]y = 0$$

مسائل

۱. نشان دهید که هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر در $x = 0$ دارای یک نقطه غیر عادی منظم است. معادله شاخص، رابطه بازگشت، و ریشه‌های معادله شاخص را بیا بید. سری جواب $(y > x)$ متناظر با ریشه بزرگتر را بیا بید. اگر ریشه‌ها نابرابر باشند، و تفاضل آنها عدد صحیح نباشد، سری جواب متناظر به ریشه کوچکتر را نیز بیا بید.

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$xy'' + y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$xy'' + y' - y = 0 \quad (\text{د})$$

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0 \quad (و)$$

۲. معادله لزاندر از رتبه α عبارت است از

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

جواب این معادله را در مجاورت نقطه عادی $x=0$ در مسائل ۱۵ و ۱۱ بند ۴ . ۲ . ۴ بررسی کردیم. در مثال ۵ بند ۴ . ۳ نشان دادیم که $x=1$ نقاط غیرعادی منظم‌اند. معادله شاخص وریشهای آن را به ازای نقطه $x=1$ تعیین کنید. یک سری جواب بر حسب توانهای $1-x$ به ازای $x > 1$ باید.

(اهمایی): بنویسید $(1-x)^{-1} + x^{-1} + (x-1)^{-1}$. به عبارت دیگر، تعویض متغیر $z = 1-x$ را به کار برد، و سری جواب را بر حسب توانهای z باید.

۳. معادله دیفرانسیل لاگر^۱ عبارت است از

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

نشان دهید که $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است. معادله شاخص، ریشه‌های آن، رابطه بازگشت، و یک جواب $y(x) > 0$ را تعیین کنید. نشان دهید که اگر $m=\lambda$ ، یک عدد صحیح مثبت باشد، این جواب به صورت یک چندجمله‌ای در می‌آید. این چندجمله‌ای را هنگامی که به صورت مناسبی نرمالیزه شده باشد، چندجمله‌ای لاگر، $L_m(x)$ می‌نامند.

۴. معادله بسل از رتبه صفر عبارت است از

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

نشان دهید که $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است؛ و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = r_2 = 0$ ؛ و یک جواب به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n (n!)^2}$$

توجه شود که این سری به ازای هر x ، و نه فقط به ازای $x > 0$ ، همگراست. به ویژه $J_0(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کراندار است. تابع J_0 را تابع بسل نوع اول از رتبه صفر می‌نامند.

۵. با استفاده از روش کاهش مرتبه در مسئله ۴، نشان دهید که جواب دوم معادله بسل رتبه صفر شامل یک جمله لاگاریتمی است.

(اهمایی): اگر $v(x) = J_0(x)$ ، آنگاه

$$y_2(x) = J_0(x) \int^x \frac{ds}{s[J_0(s)]^2}$$

نخستین جمله از سری بسط $[J_0(s)]^2 / s$ را بیاورد.

۶. معادله بسل رتبه یک عبارت است از

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$$

(الف) نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است؛ ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $\omega_1 = 1$ و $\omega_2 = -1$ ؛ و یک جواب به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)! n! 2^n}$$

توجه شود که همانند مسئله ۴، این سری به ازای همه مقادیر x همگراست، و $J_1(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کراندار است. تابع J_1 را تابع بسل نوع اول از رتبه یک می‌نامند.

(ب) نشان دهید که تعیین جواب دومی به صورت

$$x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x > 0$$

غیرممکن است.

۱۰.۵.۴ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی منظم، بخش دوم
اکنون به مسئله کلی تعیین یک جواب معادله

$$x^r y'' + x[x p(x)] y' + [x^r q(x)] y = 0 \quad (1)$$

@jozve_iut

می‌برداریم، که در آن

$$x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{و} \quad x^r q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

و هر دو سری دارای شعاع همگرایی غیر صفرند [معادله (۳) بند ۴.۵ را بینید]. نقطه $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است. برای آسانی نخست فرض می‌کنیم که $x > 0$ ، و به جستجوی جوابی به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (2)$$

می‌برداریم. با جایگزینی در معادله (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_0 r(r-1)x^r + a_1(r+1)r x^{r+1} + \dots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \dots \\ + (p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n + \dots) \\ \times [a_0 r x^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \dots + a_n(r+n)x^{r+n} + \dots] \\ + (q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n + \dots) \end{aligned}$$

$$\times (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \dots + a_n x^{r+n} + \dots) = 0 \quad (3)$$

چون سریها را در یکدیگر ضرب کرده و جمله‌های مشابه را جمع کنیم، داریم

$$\begin{aligned} & a_0 F(r) x^r + [a_1 F(r+1) + a_0 (p_1 r + q_1)] x^{r+1} \\ & + \{a_2 F(r+2) + a_1 (p_2 r + q_2) + a_0 [p_1 (r+1) + q_1]\} x^{r+2} \\ & + \dots + \{a_n F(r+n) + a_{n-1} (p_n r + q_n) + a_0 [p_{n-1} (r+n-1) + q_{n-1}]\} \\ & + \dots + a_0 [p_1 (r+n-1) + q_1] x^{r+n} + \dots = 0 \end{aligned}$$

یا به صورت فشرده‌تر

$$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} = 0 \quad (4)$$

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \quad (5)$$

اگر بنا باشد که معادله (4) متحداً برقرار گردد، باید ضریب هر توان x صفر شود.

چون $a_0 \neq 0$ ، از جمله شامل x معادله شاخص $F(r) = 0$ حاصل می‌شود. بازدیگر تأکید می‌کنیم که معادله شاخص $F(r) = 0$ دقیقاً معادله‌ای است که در تعیین جوابهایی به صورت x برای معادله اویلر $x^2 y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0$ متناظر به معادله (1) به دست می‌آمد. ریشه‌های معادله شاخص را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم، و هنگامی که ریشه‌ها حقیقی باشند فرض می‌کنیم $r_2 \geq r_1$. اگر ریشه‌ها مختلط باشند، این ترتیب مطرح نیست. تنها بازای این مقادیر r می‌توان انتظار داشت که برای معادله (1) جوابهایی به صورت (2) به دست آید.

چون ضریب x^{r+n} را در معادله (4) برابر صفر قرار دهیم، رابطه بازگشت

$$F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad n \geq 1 \quad (6)$$

به دست می‌آید. معادله (6) نشان می‌دهد که عموماً a_n به مقدار r و همه ضرایب پیش از آن a_0, a_1, \dots, a_{n-1} بستگی دارد. علاوه بر این دیده می‌شود که می‌توان متوالیاً a_n, \dots, a_1, a_0 را بر حسب ضرایب سریهای $(x) p(x)$ و $q(x)$ محاسبه کرد، به شرط آنکه $F(r), F(r+1), \dots, F(r+n), \dots, F(r+2)$ صفر نشوند. تنها مقادیر r که به ازای آنها $F(r)$ صفر می‌شود عبارتند از $r = r_1$ و $r = r_2$ ؛ چون $r_1 + n$ به ازای $n \geq 1$ با r_1 یا r_2 برابر نیست، در نتیجه $F(r_1 + n) \neq 0$. بنا بر این همواره می‌توان یک جواب معادله، یعنی

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (7)$$

را تعیین کرد. در اینجا از نماد a_{r_1} استفاده شده است تا نشان دهد که a_n از معادله (۶) به ازای $r_1 = r$ محاسبه گردیده است. علاوه بر این برای تصریح a_n را برابر یک اختیار کرده ایم.

اگر $r_2 \neq r$ نباشد، و $r_1 - r_2 \geq n$ نیز یک عدد صحیح مثبت نباشد، آنگاه $a_{r_2+n} = 0$ به ازای هیچیک از مقادیر $n \geq 1$ برابر r_1 نخواهد بود؛ بنابراین $F(r_2+n) \neq 0$ ، و می‌توان جواب دومی به صورت

$$y_2(x) = x^r \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \quad (8)$$

به دست آورد.

پیش از ادامه بحث، چند نکته را درباره سری جوابهای (۷) و (۸) مذکرمی‌شویم.

سریهای توانی $x^{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n$ در داخل شاعع همگرایی، توابعی هستند که در $x = 0$ تحلیلی‌اند. بنابراین اگر در جوابهای x^r و x^{r_2} تغییرات غیر عادی وجود داشته باشد، با جمله‌های x^r و x^{r_2} که به ترتیب در این توابع تحلیلی ضرب می‌شوند تعیین می‌گردد. دیگر آنکه، برای بدست آوردن جوابهای حقیقی به ازای $x < 0$ ، می‌توان از تبدیل $x = -x$ با $x > 0$ استفاده کرد. همان‌گونه که از بحث پیرامون معادله اویلر برمی‌آید، کافی است به جای x^r در معادله (۷) و x^{r_2} در معادله (۸) به ترتیب $|x|^r$ و $|x|^{r_2}$ بگذاریم. بالاخره، اگر r_1 و r_2 اعداد مختلطی باشند، لزوماً مزدوج‌اند، و $r_2 \neq r_1 + N$. پس می‌توان دوسری جواب به صورت (۲) محاسبه کرد؛ اما، این جوابها توابعی از x با مقادیر مختلط خواهند بود. جوابهای بامقدار حقیقی را می‌توان از قسمتهای حقیقی و موهومی جوابهای مختلط به دست آورد.

اگر $r_1 = r_2$ ، تنها یک جواب به صورت (۲) به دست می‌آید. جواب دوم شامل یک جمله لگاریتمی است. روشی برای تعیین یک جواب دوم در بند ۴.۰.۶ و مثالی در بند ۴.۰.۴ بررسی شده است.

اگر $N = r_1 - r_2$ ، که در آن N عدد صحیح مثبتی است، آنگاه $F(r_2+N) = F(r_1) = 0$ و نمی‌توان $a_{r_2+N} = 0$ از معادله (۶) به دست آورد، مگر آنکه اتفاقاً حاصل جمع موجود در معادله (۶) نیز به ازای $n = N$ صفر شود. اگر چنین باشد، می‌توان نشان داد که a_{r_2} دلخواه است و سری جواب دومی بدست می‌آید؛ در غیر این صورت، تنها یک سری جواب به صورت (۲) خواهیم داشت. در این حالت، جواب دوم شامل یک جمله لگاریتمی است. روش این کار به اختصار در بند ۴.۰.۶، و مثالهایی برای هر دو حالت در بند ۴.۰.۴ مورد بحث قرار می‌گیرد.

مسئله دیگری که باید در نظر داشت، همگرایی سریهایی است که در جواب صوری وجود دارند. همان‌طور که انتظار می‌رود، این موضوع به شاعع همگرایی سریهای توانی x^p و x^q مربوط است. نتایج بحث و نکاتی درباره همگرایی سریهای جواب را

در قضیه زیر خلاصه می کنیم.

قضیه ۴.۳.۴. معادله دیفرانسیل (۱)

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0$$

اگه در آن $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است دنظر می گیریم. آنگاه $xp(x)$ و $x^2q(x)$ دو $x = 0$ تحلیلی اند و دارای بسطهایی به صورت سری توانی

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

می باشد که به ازای $\rho < |x|$ همگراید، و در آن $\rho > r_1$ می نیم شعاعهای همگرایی سریهای توانی $xp(x)$ و $x^2q(x)$ است. فرض کنیم $r_1 < r_2$ (یشهای معادله شاخص

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

باشد، و هنگامی که حقیقی اند، $r_1 \geq r_2$. آنگاه در هر یک از فواصل $0 < x < -\rho$ یا $0 < x < \rho$ یک جواب به صورت

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (9)$$

وجود داده، $a_n(r_1)$ با ابطة بازگشت (۶) که در آن $r = r_1$ و $a_0 = 1$ است داده می شود. اگر $r_2 - r_1$ حفظ یا عدد صحیح مثبتی نباشد، آنگاه درهای از فواصل $0 < x < -\rho$ یا $0 < x < \rho$ ، جواب مستقل خطی دومی به صورت

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \quad (10)$$

وجود داده، $a_n(r_2)$ نیز با ابطة بازگشت (۶) به ازای $1 = r = r_2$ تعیین می شود. سریهای توانی در (۹) و (۱۰) حداقل به ازای $\rho < |x|$ همگرایند.

امکان دارد که سریهای (۹) و (۱۰) دارای شعاعهای همگرایی بزرگتر از ρ باشند؛ اگرچنان باشد، جوابهای (۹) و (۱۰) در فواصل بزرگتر متناظر معتبرند. گرچه اثبات این قضیه از محدوده این متن خارج است، با وجود این می توان چند نکته را مذکور شد. برای تعیین r_1 و r_2 ، ریشهای معادله شاخص، که در این مبحث دارای چنین نقش پراهمیتی هستند، تنها باید p_0 و q_0 را تعیین و سپس معادله $0 = r(r-1) + p_0 r + q_0$ را حل کرد. این ضرایب با

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2q(x) \quad (11)$$

داده می شوند. در عمل، به جای حفظ فرمول بازگشت (۶) برای a_n ، معمولاً سری (۲) را

به جای x در معادله (۱) قرار می‌دهیم، مقادیر r را تعیین کرده و a_n را صریحاً محاسبه می‌کنیم.

در پایان متذکر می‌شویم که اگر $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (12)$$

باشد که در آن P ، Q و R چند جمله‌ای‌اند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} x P(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 Q(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 R(x) = 0$. بدین‌سان

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (13)$$

علاوه بر این، شعاعهای همگرا بی سریهای (۹) و (۱۰) حداقل برابر مسافت مبدأ تا نزدیکترین صفر P می‌باشند.

مثال. چگونگی جوابهای معادله

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

را در همسایگی نقاط غیرعادی بررسی کنید.

با مقایسه این معادله با (۱۲) داریم $Q(x) = 3+x$ ، $P(x) = 2x(1+x)$ و $R(x) = -x$. روشن است که نقاط $x = 0$ و $x = -1$ نقاط غیرعادی‌اند. نقطه $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-x}{2x(1+x)} = 0$$

علاوه بر این از روابط (۱۳) داریم $p_0 = 3/2$ و $q_0 = 0$. بدین‌سان معادله شاخص به صورت $x = r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$ خواهد بود، و ریشه‌های آن عبارتند از $r = 0$ و $r = -1/2$.

چون این ریشه‌ها برابر نیستند و تفاضل آنها نیز برابر یک عدد صحیح نیست، دو جواب مستقل خطی به صورت

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n, \quad y_2(x) = |x|^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{1}{2}\right)x^n \right]$$

به ازای $|x| < 0$ وجود دارد. یک‌کران پایین برای شعاع همگرا بی این سریها است که مسافت از $x = 0$ تا $x = -1$ صفر دیگر $P(x)$ می‌باشد. توجه شود که وقتی $x \rightarrow 0$ جواب y_2 کراندار و در واقع تحلیلی است. از طرف دیگر جواب دوم y_1 وقتی $x \rightarrow 0$ بی‌کران است.

نقطه ۱ $x = -1$ نیز یک نقطه غیر عادی منظم است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0$$

در این حالت $p_0 = 0$ ، $q_0 = 0$ ، $r_0 = 0$ ، بنابراین معادله شاخص $(r-1)-r=0$ می‌باشد. ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = 2$ و $r_2 = 0$. متناظر با ریشه بزرگتر، جوابی به صورت

$$y_1(x) = (x+1)^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n \right]$$

وجود دارد. این سری حداقل بدهازای $|x+1| < 1$ همگر است. چون تفاضل دو ریشه عدد صحیح مشبّتی است، امکان دارد که جواب دوم به صورت

$$y_2(x) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n \right]$$

نمی‌باشد، و بدون بررسی بیشتر چیزی نمی‌توان گفت.

مسائل

@jozve_iut

۱. مطلوب است تعیین همه نقاط غیر عادی منظم هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر. معادله شاخص و نمایهای تکینگی را در هر یک از نقاط غیر عادی منظم بیابید.

$$xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y'' + 4xy' + 6y = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^2 y'' + 2(\sin x)y' - 2y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$2x(x+2)y'' + y' - xy = 0 \quad (\text{و})$$

$$x^2 y'' + \frac{1}{x}(x + \sin x)y' + y = 0 \quad (\text{ز})$$

$$(x+1)^2 y'' + 2(x^2 - 1)y' + 2y = 0 \quad (\text{ح})$$

۲. نشان دهید که

$$x^2 y'' + (\sin x) y' - (\cos x) y = 0$$

دارای یک نقطه غیرعادی منظم در $x = 0$ است، و ریشه‌های معادله شاخص $1 \pm i$ می‌باشند.
نخستین سه جمله غیرصفر سری متناظر به ریشه بزرگتر را بیاورد.

۳. نشان دهید که

$$(\ln x) y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

دارای یک نقطه غیرعادی منظم در $x = 1$ است. ریشه‌های معادله شاخص را در $x = 1$ بیاورد.
نخستین سه جمله غیرصفر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{r+n}$ متناظر به ریشه بزرگتر را تعیین کنید. فرض کنیم $0 < 1-x$. برای شاعع همگرایی این سری چه حدسی می‌توان زد.
۴. مسائل متعددی از فیزیک ریاضی (مثل، معادله شرودینگر برای اتم هیدروژن) به بررسی معادله دیفرانسیل

$$x(1-x)y'' + [y' - (\alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (\text{یک})$$

می‌انجامد، که در آن α ، β و γ مقادیر ثابت‌اند. این معادله به معادله فوق هندسی موسوم است.

(الف) نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از 0 و $\gamma - 1$.

(ب) نشان دهید که $x = 1$ یک نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از 0 و $\gamma - \alpha - \beta$.

(ج) با فرض آنکه $\gamma - 1$ یک عدد صحیح مثبتی نباشد، نشان دهید که در همسایگی $x = 0$ یک جواب معادله (یک) عبارت است از

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} x^2 + \dots$$

برای شاعع همگرایی این سری چه حدسی می‌توان زد.

(د) با فرض آنکه $\gamma - 1$ یک عدد صحیح یا صفر نباشد، نشان دهید که جواب دوم به ازای $1 < x < 0$ عبارت است از

$$y_2(x) = x^{(\gamma-1)} \left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!} x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!} x^2 + \dots \right]$$

(ه) نشان دهید که نقطه واقع در بینهایت، یک نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از α و β . مسئله ۱۳، بند ۳.۴ را بیینید.

۵. معادله دیفرانسیل

$$x^{\gamma}y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

را که در آن $\alpha \neq 0$ و β دو ثابت حقیقی اند در نظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

(ب) نشان دهید که اگر بخواهیم یک جواب به صورت $x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تعیین کنیم،

معادله شاخص خطی خواهد بود، و در نتیجه تنها یک جواب صوری به این شکل وجود خواهد داشت.

۶. معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{\alpha}{x} y' + \frac{\beta}{x^2} y = 0 \quad (\text{یک})$$

را که در آن $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ دو عدد حقیقی اند در نظر می‌گیریم، s و r اعداد صحیح مثبت اند و موقتاً آنها را دلخواه فرض می‌کنیم.

(الف) نشان دهید که اگر $1 < r < s$ یا $r = s$ آنگاه نقطه $x = 0$ یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

(ب) فرض کنیم که بخواهیم برای معادله (یک) جوابی به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad x > 0 \quad (\text{دو})$$

بیابیم. نشان دهید که اگر $r = s = 2$ و $\alpha = 2$ تنها یک مقدار ممکن است که به ازای آن معادله (یک) دارای یک جواب صوری به شکل (دو) باشد.

(ج) نشان دهید که اگر $r = s = 3$ ، معادله (یک) دارای جوابهایی به صورت (دو) نیست.

(د) نشان دهید که ماکزیمم مقادیر s و r که به ازای آنها معادله شاخص بر حسب r درجه دوم است [و بنا بر این می‌توان انتظار داشت که دو جواب به صورت (دو) به دست آید] عبارتند از $r = s = 1$. این دقیقاً همان شرایطی است که «تکینگی ضعیف» یعنی نقطه غیرعادی منظم را از نقطه غیرعادی نامنظم به گونه‌ای که در بند ۳.۴ تعریف شد ندمتمايز می‌سازد. به عنوان تذکر اشاره می‌کنیم که گرچه گاهی می‌توان یک سری صوری جواب به شکل (دو) در نقطه غیرعادی نامنظم به دست آورد، اما این سری ممکن است همگرا نباشد.

۶.۰۴۰ سریهای جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی منظم:

$$N = r_1 - r_2 \quad r_1 = r_2$$

اگرچه در بررسی حالتهایی که در آن r_1 و r_2 ریشه‌های معادله شاخص برابر باشند یا تفاصل آنها $N = r_1 - r_2$ یک عدد صحیح مثبتی باشد، می‌پردازیم. اگر $r_1 = r_2$ ، بنا بر شباهت

با معادله اویلر می‌توان حدس زد که جواب دوم شامل یک جمله لگاریتمی است. هنگامی که تفاضل ریشه‌ها عدد صحیحی است امکان دارد که وضع باز به همین منوال باشد. وضعیت کلی، با در نظر گرفتن حالتی که در آن تفاضل $r_1 - r_2$ برابر عدد صحیح نیست در قضیه زیر خلاصه می‌شود.

قضیه ۴.۶. معادله دیفرانسیل

$$L[y] = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \quad (1)$$

اگه در آن $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است دنظرمی گیریم. آنگاه توابع $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ تحلیلی‌اند و دادای نمایش سری توانی به صورت

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (2)$$

می‌باشد که به ازای $|x| < \rho$ می‌نیم شاعر همگرایی سریهای توانی متفاوت با $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ است. فرض کنیم $r_1 > r_2$ ریشه‌های معادله شاخص

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \quad (3)$$

باشد و هنگامی که حقیقی‌اند قرار می‌دهیم $r_1 \geq r_2 > 0$. آنگاه در هر یک از فواصل $-\rho < x < 0$ و $0 < x < \rho$ دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 به صورت زیر می‌باشد.

۱. اگر $r_1 - r_2$ عدد صحیح یا صفر نباشد، آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad (4\text{ الف})$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_2) x^n \right]. \quad (4\text{ ب})$$

۲. اگر $r_1 = r_2$ آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (5\text{ الف})$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n \quad (5\text{ ب})$$

۳. اگر $N = r_1 - r_2$ یک عدد صحیح ثابت باشد، آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad (6\text{ الف})$$

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n \right]. \quad (6\text{ ب})$$

ضرایب $(a_1, a_n(r_1), b_n(r_1), c_n(r_2))$ دو ثابت r_1 و r_2 می‌توان با گذاشتن جوابهای به صورت سری به جای y در معادله (۱) تعیین کرد. امکان دارد که مقدار ثابت a بواپر حفظ شود. هریک از سریهای y دو ابط (۴)، (۵) و (۶) حداقل به ازای $p < |x|$ همگرا است و معرف تابعی می‌باشد که در $x = 0$ تحلیلی است.

حالی را که در آن $r_1 - r_2$ عدد صحیحی نیست در بند ۱۰.۵.۴ بررسی کردیم. در اینجا به حالاتی $r_1 = r_2$ و $N = r_1 - r_2$ می‌پردازیم، و فرض می‌کنیم که $x > 0$. جوابهای با مقدار حقیقی به ازای $x = 0$ را می‌توان مانند پیش با قرار دادن $x = -x$ به دست آورد.

$r_1 = r_2$ روش تعیین جواب دوم اساساً همان است که در تعیین جواب دوم معادله اویلر (بند ۴.۴ را بینید) هنگامی که ریشه‌های معادله شاخص برابر بودند به کار گرفتیم. برای معادله (۱) جوابی به صورت

$$y = \phi(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^r \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \quad (7)$$

جستجو می‌کنیم، برای تأکید این نکته که ϕ به انتخاب r بستگی دارد نوشتند ایم $y = \phi(r, x)$ اگر سریهای (۲) را به جای $p(x)$ و $q(x)$ قرار دهیم، با محاسبه 'رو' و 'ر' از رابطه (۷) و جایگزینی آنها در معادله و بالاخره دسته‌بندی جمله‌ها داریم (روابط (۳) و (۴) بند ۱۰.۴ را بینید)

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= x^r a_0 F(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} \right. \\ &\quad \left. + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \quad (9)$$

اگر ریشه‌های معادله شاخص هردو برابر r باشند، یک جواب را می‌توان با قراردادن r به جای r و انتخاب a_n به طوری که هر جمله سری رابطه (۸) صفر شود به دست آورد.

برای تعیین جواب دوم r را به عنوان متغیر پیوسته‌ای در نظر می‌گیریم، و a_n را به صورت تابعی از r به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که ضریب x^{r+n} ، $n \geq 1$ در رابطه (۸) صفر شود. آنگاه با فرض $a_0 = 1$ $F(r+n) \neq 0$ خواهیم داشت

$$a_n(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(r+n)}, \quad n \geq 1 \quad (10)$$

با انتخاب این مقدار برای $a_n(r)$ به ازای $n \geq 1$ رابطه (۸) به صورت ساده زیردرمی‌آید

$$L[\phi](r, x) = a_0 x' F(r) \quad (11)$$

چون r_1 ریشه مضاعف $F(r)$ است، از رابطه (۹) نتیجه می‌شود که $F(r) = (r - r_1)^2$ با قراردادن $r = r_1$ در رابطه (۱۱) خواهیم داشت $L[\phi](r_1, x) = 0$ ؛ بنا بر این، همان‌گونه که از پیش می‌دانستیم

$$y_1(x) = \phi(r_1, x) = x'^1 \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad x > 0 \quad (12)$$

یک جواب معادله (۱) است. اما نکته مهمتر آنکه، از رابطه (۱۱) درست مانند آنچه در مورد معادله اویلر داشتیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1, x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r} [x'(r - r_1)^2] \Big|_{r=r_1} \\ &= a_0 [(r - r_1)^2 x' \ln x + 2(r - r_1)x'] \Big|_{r=r_1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

بنا بر این، جواب دوم معادله (۱) عبارت است از

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\partial \phi(r, x)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ x' \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n \right] \right\} \Big|_{r=r_1} \\ &= (x'^1 \ln x) \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] + x'^1 \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n \\ &= y_1(x) \ln x + x'^1 \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن $a'_n(r_1)$ نمایشگر مقدار da_n/dr در $r = r_1$ است و $a_n(r)$ با رابطه (۱۰) مشخص می‌گردد.

توجه شود که علاوه بر فرضهایی که قبل اذتیم، در اینجا فرض کرده‌ایم که می‌توان از سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n$ جمله به جمله نسبت به x مشتق گرفت. علاوه بر این، تعیین $(a'_n(r_1))$ موضوع ساده‌ای نیست؛ ولیکن، تعیین دو جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با نقطه غیرعادی منظم نیز مسئله ساده‌ای نیست.

به طور خلاصه، برای تعیین جواب دوم در حالت $r_2 = r_1$ سه روش وجود دارد. نخست، می‌توان مستقیماً $b_n(r_1)$ را با جایگزینی عبارت (۵ ب) در معادله (۱) به جای y محاسبه کرد. دوم، می‌توان برای محاسبه $b_n(r_1) = a'_n(r_1)$ نخست $a_n(r)$ و سپس $a'_n(r_1)$ را تعیین کرد. توجه شود که در محاسبه جواب اول لازم است که $a_n(r_1)$ معلوم باشد، بنا بر این مناسب‌تر است که عبارت کلی $a_n(r)$ را محاسبه کرد و هر دو عبارت $(a'_n(r_1))$ و $(a_n(r_1))$

را از آن به دست آورد. هنگامی که فقط چند جمله از سری (r_2) ضروری است، یا عبارت $a_n(r)$ بسیار پیچیده و یا محاسبه آن دشوار است، روش نخست ممکن است مناسبتر باشد. روش سوم همان روش کاهش مرتبه است، اما در آن ناگزیر به استفاده از سرینها خواهیم بود.

$N = r_1 - r_2$. در این حالت بحث تفصیلی درباره به دست آوردن عبارت (ع ب) برای جواب دوم بسیار پیچیده‌تر است و به آن نمی‌پردازیم. اما، متذکر می‌شویم که اگر فرض کنیم $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_2+n}$ از رابطه (۱۵) دشوار باشد، زیرا

$$F(r+N) = (r+N-r_1)(r+N-r_2) = (r-r_2)(r+N-r_2)$$

به ازای $r=r_2$ صفر می‌شود. برای رفع این دشواری $a_n(r)$ را که می‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد، برابر $r=r_2$ می‌گیریم. آنگاه هر یک از $a_n(r)$ با $r=r_2$ متناسب خواهد شد، بنابراین در صورت کسر رابطه (۱۵) سازه $r=r_2$ وجود خواهد داشت، و با سازه متناظر در مخرج که به ازای $N=n$ به وجود می‌آید ساده می‌شود. با تحلیلی مشابه آنچه در حالت $r=r_2$ داشتیم به این نتیجه می‌رسیم که جواب به صورت (ع ب) است و در آن

$$c_n(r_2) = \left. \frac{d}{dr} [(r-r_2)a_n(r)] \right|_{r=r_2}, \quad n=1, 2, \dots \quad (15)$$

از رابطه (۱۵) با قراردادن $r=r_2$ و $a_n(r)=r-r_2$

$$a = \lim_{r \rightarrow r_2} (r-r_2)a_n(r) \quad (16)$$

به دست می‌آید. اگر $a_n(r_2)$ متناهی باشد، آنگاه $a=0$ و در $r=r_2$ جمله لگاریتمی وجود نخواهد داشت. این روش در کتاب کادینگتون^۱ (فصل ۴) بررسی شده است.

در عمل بهترین راه برای تعیین آن که آیا a در جواب دوم صفر است یا نه آن است که ببینیم آیا می‌توان $a_n(r)$ متناظر به $r=r_2$ را محاسبه و $a_n(r_2)$ را تعیین کرد؟ اگرچنان باشد مشکل دیگری نداریم، و گرنه، باید از عبارت (ع ب) با $a \neq 0$ استفاده کرد.

به طور خلاصه، در حالت $N=r_1 - r_2$ نیز برای تعیین جواب دوم سه روش موجود است. نخست، می‌توان a و $c_n(r_2)$ را مستقیماً با جایگزینی عبارت (ع ب) به جای r در معادله (۱) محاسبه کرد. دوم، می‌توان (r_2) و $c_n(r_2)$ موجود در رابطه (ع ب) را با استفاده از فرمولهای (۱۵) و (۱۶) محاسبه کرد. اگر این روش در نظر گرفته شود، باید در محاسبه جواب متناظر به $r=r_1$ فرمول کلی $a_n(r)$ را به دست آورد و نه اینکه فقط به محاسبه $a_n(r_1)$ اکتفا کرد. روش سوم همان روش کاهش مرتبه است.

در بند دیگر سه مثال می‌آوریم تا حالاتی که $N=r_1 - r_2$ ، $r_1=r_2$ با $a=0$ و $N=r_1 - r_2$ با $a \neq 0$ را توضیح دهد.

۷.۴۰ معادله بسل

در این بند به بررسی سه حالت خاص معادله بسل

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

که در آن x مقداری است ثابت می‌پردازیم، تا نظریه‌ای را که در بند ۶.۶ مورد بحث قرار گرفت توضیح دهد. روشن است که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم می‌باشد. برای سهولت تنها به بررسی حالت $x > 0$ می‌پردازیم.

معادله بسل رتبه صفر. این مثال حالتی را که در آن ریشه‌های معادله شاخص برابرند توضیح می‌دهد. با قراردادن $y = u$ در معادله (۱) به دست می‌آید

$$(2) \quad L[y] = x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

با جایگزینی

$$(3) \quad y = \phi(r, x) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

داریم

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0 [r(r-1) + r] x^r + a_1 [(r+1)r + (r+1)] x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] + a_{n-2}\} x^{r+n} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ریشه‌های معادله شاخص $r_1 = r_2 = 0$ عبارتند از $F(r) = r(r-1) + r = 0$; بنابراین حالت برابری دو ریشه است. رابطه بازگشت عبارت از

$$(5) \quad a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)(n+r-1) + (n+r)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \quad n \geq 2$$

برای تعیین $(x)y$ قرار می‌دهیم $r = 0$. آنگاه از رابطه (۴) نتیجه می‌شود که برای آنکه ضریب x^{r+1} صفر شود، باید a_1 را برابر صفر انتخاب کرد. بنابراین از رابطه (۵) داریم

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$$

علاوه بر این

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

با قراردادن $n = 2m$ داریم

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

بدینسان

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{4},$$

$$a_4(0) = -\frac{a_2(0)}{(2 \cdot 2)^2} = +\frac{a_0}{(2 \cdot 2)^2 \cdot 2^2} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2^2}$$

$$a_6(0) = -\frac{a_4(0)}{(2 \cdot 3)^2} = -\frac{a_0}{(2 \cdot 3)^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot (3 \cdot 2)^2}$$

⋮
⋮

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

بنابراین

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad x > 0. \quad (7)$$

تابعی را که در کروشه است تابع بدل نوع اول از دنبه حفر، می‌نامند، و با $y_1(x)$ نشان می‌دهند. از قضیه ۴.۴ نتیجه می‌شود که این سری بدازای همه مقادیر x همگراست، و $y_1(x)$ در این مثال (x) را با محاسبه a_n تعیین حواهیم کرد. روش دیگر که در آن تنها باید عبارت (۵ ب) بند ۴.۶ را در معادله (۲) فراداد، و سپس b_r را تعیین کرد، در مسئله ۷ بحث شده است. نخست از ضریب x^{r+1} در رابطه (۴) دیده می‌شود که $a'_r(r) = (r+1)^2 a_r(r)$. در نتیجه نه تنها $a'_r(0) = 0$ بلکه نیز $a'_r(0) = 0$. به آسانی از رابطه بازگشت (۵) نتیجه می‌شود که

$$a'_r(0) = a'_1(0) = \dots = a'_{2n+1}(0) = \dots = 0$$

بنابراین تنها باید به محاسبه $a'_{2m}(0)$ از رابطه (۵)

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(2m+r)^2, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

پرداخت. بنابراین

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(2+r)^2}$$

$$a_4(r) = \frac{a_2(r)}{(4+r)^2} = +\frac{a_0}{(4+r)^2 (2+r)^2}$$

$$a_r(r) = -\frac{a_r}{(r+r)^2} = -\frac{a_0}{(r+r)^2(r+r)^2(r+r)^2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2 \dots (2+r)^2}, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

(۸)

محاسبه $a'_{2m}(r)$ را می‌توان با توجه به نکته زیر به آسانترین وجه انجام داد. اگر

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n},$$

آنگاه

$$f'(x) = \beta_1(x-\alpha_1)^{\beta_1-1}[(x-\alpha_2)^{\beta_2} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n}]$$

$$+ \beta_2(x-\alpha_2)^{\beta_2-1}[(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_3)^{\beta_3} \dots (x-\alpha_n)^{\beta_n}] + \dots$$

بنابراین به ازای x مخالف با $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}$$

بدینسان، از رابطه (۸) داریم

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -\left(\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \dots + \frac{1}{2+r}\right)$$

و با قراردادن $r=0$ داریم

$$a'_{2m}(0) = -\left[\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2(m-2)} + \dots + \frac{1}{2}\right] a_{2m}(0)$$

با جایگزینی $a_{2m}(0)$ از رابطه ۶، و با قراردادن

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \quad (9)$$

سرانجام به دست می‌آید

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

جواب دوم معادله بدل درجه صفر با قراردادن $a_0 = 1$ و جایگزینی (x_1, y_1) و

$a'_m(x) = b_m(x)$ در رابطه (۵ ب) بند ۴.۶ به دست می‌آید. داریم

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0 \quad (11)$$

به جای y_2 ، جواب دوم عموماً به صورت یک ترکیب خطی از J_0 و y_1 اختیار می‌شود. این تابع را، تابع بسل نوع دوم از رتبه صفر می‌نامند، و با Y_0 نشان می‌دهند. مطابق با کتاب کاسون^۱ (فصل ۱۲) تعریف می‌کنیم.^۲

$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)] \quad (12)$$

در اینجا γ یک مقدار ثابت است، که به ثابت اویلر-ماسکرونی^۳ مشهور است؛ و با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \approx 0.5772 \quad (13)$$

با جایگزینی $y_2(x)$ در رابطه (۱۲)، خواهیم داشت

$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{\pi} \right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right], \quad x > 0 \quad (14)$$

جواب عمومی معادله بسل رتبه صفر به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

توجه شود که چون وقتی $x \rightarrow 0$ داریم $J_0(x) \rightarrow 1$ و $Y_0(x) \rightarrow \infty$ در $x = 0$ غیرعادی لگاریتمی است؛ یعنی، هنگامی که با مقادیر مثبت $x \rightarrow 0$ ، تغییرات $(Y_0(x)) / \ln x$ ایست. بدینسان اگر همان طور که اغلب اتفاق می‌افتد بخواهیم جوابهایی از معادله بسل رتبه صفر را که در مبدأ متناهی باشند بیابیم، باید از Y_0 صرف نظر کنیم. نمودارهای توابع J_0 و Y_0 در شکل ۲۰.۴ نشان داده شده‌اند.

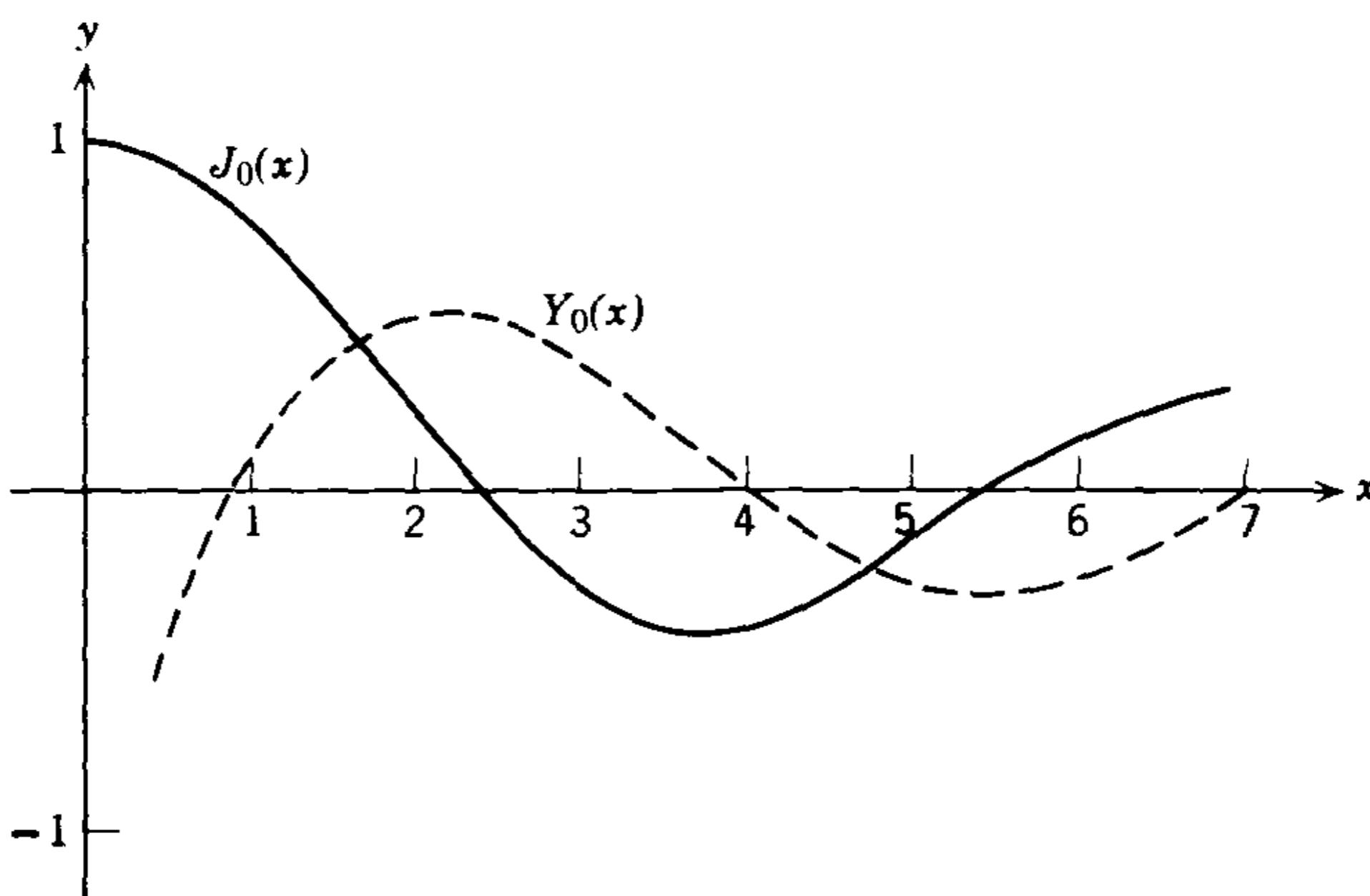
این نکته جالب را با توجه به شکل ۲۰.۴ می‌توان دریافت که به ازای مقادیر بزرگ x هر دو تابع $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ نوسانی‌اند. این کیفیت را می‌توان از معادله اصلی پیش‌بینی کرد؛ و در واقع برای جوابهای معادله بسل رتبه ۰ برقرار است. اگر معادله (۱) را بر x تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right) y = 0$$

1. Copson

۲. مؤلفین دیگر تعاریف دیگری برای Y_0 به کار می‌برند. آنچه در اینجا برای Y_0 انتخاب شد به عنوان تابع و بن (Weber)، (۱۸۴۲-۱۹۱۳) نیز مشهور است.

3. Máscheroni (1750-1800)



شکل ۲۰.۴ توابع بسل رتبه صفر.

به ازای مقادیر بزرگ x ، می‌توان حدس زد که جمله‌های $y(x/1)$ و $y(x^2/2)$ کوچک‌اند و بنابراین می‌توان از آنها صرف نظر کرد. در صورت صحت حدس فوق، معادله بسل رتبه ۰ را می‌توان با

$$y'' + y = 0$$

تقریب زد. جوابهای این معادله عبارتند از $\cos x$ و $\sin x$; بدین‌سان می‌توان پیش‌بینی کرد که جوابهای معادله بسل به ازای مقادیر بزرگ x با ترکیب‌های خطی $\cos x$ و $\sin x$ مشابه‌اند. این نکته از آن جهت که تابع بسل نوسانی‌اند درست است؛ اما از جنبه‌های دیگر درست نیست. به ازای مقادیر بزرگ x توابع J و Y هنگامی که x افزایش یابد مستهلك می‌شوند؛ بدويژه، می‌توان ثابت کرد که وقتی $x \rightarrow \infty$ تغییرات تابع $(x)J$ همانند $(\pi/4 - x)^{1/2} \cos(\pi/2 x)$ است. این نکته را نمی‌توان از معادله $y'' + y = 0$ استنباط کرد. بدین‌سان معادله $y'' + y = 0$ تقریب مناسبی از معادله بسل به ازای مقادیر بزرگ x به دست نمی‌دهد. جوابهای این دو معادله دارای ویژگی‌های مشترکی می‌باشند، اما تفاوت‌های بارزی نیز دارند. باید به جوابهای معادله بسل رتبه ۰ اکه در ذیل مورد بحث قرار گرفته‌اند نیز توجه داشت.

معادله بسل رتبه $1/2$. این مثالی است برای حالتی که در آن تفاضل ریشه‌های معادله شاخص عدد صحیح مشتبی است، اما جواب دوم شامل جمله لگاریتمی نیست. با قراردادن $z = x^{1/2}$ در معادله (۱) داریم

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (15)$$

اگرسری (۳) را به جای $y = \phi(r, x)$ بگذاریم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4} \right] a_n x^{r+n} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4} \right] a_1 x^{r+1} \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n + a_{n-1} \right\} x^{r+n} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_2 = -1/2$ ، $r_1 = 1/2$ ؛ بنابراین تفاضل ریشه‌ها برابر یک عدد صحیح است. رابطه بازگشت عبارت است از

$$\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n = -a_{n-1}, \quad n \geq 2 \tag{17}$$

از ضریب x^{r+1} در رابطه (16)، $a_1 = 0$ متناظر به ریشه بزرگتر $r_1 = 1/2$ بدست می‌آید. بنابراین، از رابطه (17) نتیجه می‌شود که

$$a_2 = a_4 = \dots = a_{2m+1} = \dots = 0$$

علاوه براین، به ازای $r = 1/2$ داریم

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(n+1)}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

@jozve_iut

یا با قراردادن $n = 2m$

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-1}}{(2m+1)2m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

بدینسان

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 2} = -\frac{a_0}{2!}$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{a_0}{5!}$$

⋮

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{18}$$

بنابراین، با قراردادن $a_0 = 1$ داریم

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} \right] \\ &= x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

سری توانی موجود در رابطه (۱۹) دقیقاً سری تیلر $\sin x$ است؛ بنابراین یک جواب معادله بدل رتبه $1/2$ عبارت است از $x^{-1/2} \sin x$. تابع بدل نوع اول رتبه $1/2$ ، $J_{1/2}$ را با $y_1(x)^{1/2}/\pi^{1/2}$ تعریف می‌کنند. بدین‌سان

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x, \quad x > 0 \quad (20)$$

منتظر به ریشه $-1/2 = r_2 - r_1 = N$ امکان دارد محاسبه a_1 با اشکال موافق شود، زیرا a_0 و a_1 صفر نند، و بنابراین می‌توان ضرایب a_0 و a_1 را به طور دلخواه انتخاب کرد. آنگاه می‌توان منتظر به a_n از رابطه بازگشت (۱۷) مقادیر a_2, a_4, \dots و منتظر به a_1 مقادیر a_3, a_5, \dots را به دست آورد. بنابراین جواب دوم شامل جمله لگاریتمی نیست. خواهانده به عنوان تمرین نشان خواهد داد که به ریشه $-1/2 = r$ از رابطه (۱۷) داریم

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

@jozve_iut

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

بنابراین

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2} \left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{1/2}}, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (21)$$

جمله دوم طرف دوم معادله مضری از $(x)_1 y$ است. جواب دوم مستقل خطی معادله بدل رتبه $1/2$ را معمولاً منتظر با $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ اختیار می‌کنند و با $J_{-1/2}$ نشان می‌دهند. بدین‌سان

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \quad x > 0 \quad (22)$$

جواب عمومی معادله (۱۵) عبارت است از $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$. این مثال میان حالتی است که در آن تفاضل ریشه‌های معادله شاخص عدد صحیح مشتبی است و جواب دوم شامل یک جملهٔ لگاریتمی است. با قراردادن $v = u$ در معادله (۱) داریم

$$L[y] = x^v y'' + x y' + (x^v - 1)y = 0 \quad (23)$$

اگر به جای $y = \phi(r, x)$ سری (۳) را قرارداده و جمله‌ها را مانند مثالهای پیش‌دسته بندی کنیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= a_0(r^v - 1)x' + a_1[(r+1)^v - 1]x^{v+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^v - 1]a_n + a_{n-1}\} x^{v+n} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$. رابطهٔ بازگشت چنین است

$$[(r+n)^v - 1]a_n(r) = -a_{n-1}(r) \quad n \geq 2 \quad (25)$$

متناظر به ریشهٔ بزرگتر $r = r$ رابطهٔ بازگشت عبارت است از

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

از ضریب x^{v+1} در رابطهٔ (۲۴) دیده می‌شود که $a_1 = 0$ و از رابطهٔ بازگشت نتیجه می‌شود که $a_2 = a_4 = \dots = 0$. به ازای مقادیر زوج n قرار از می‌دهیم؛ آنگاه

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^m(m+1)m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

بنابراین

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(2)(1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^4(3)(2)} = +\frac{a_0}{2^4(3 \cdot 2)(2 \cdot 1)} = \frac{a_0}{2^4 3! 2!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^6(4)(3)} = -\frac{a_0}{2^6 4! 3!}$$

⋮

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

با $a = 1$ خواهیم داشت

$$y_1(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m+1)! m!} \quad (27)$$

تابع بدل نوع اول رتبه یک را معمولاً برابر y_1 می‌گیرند و با J نشان می‌دهند:

$$J_1(x) = \frac{1}{2} y_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m+1)! m!} \quad (28)$$

این سری بهازای همه مقادیر x همگرای مطلق است؛ بنابراین تابع J بهازای همه مقادیر x معین است.

برای تعیین جواب دوم معادله بدل رتبه یک، به توضیح روش جایگزینی مستقیم می‌پردازیم. محاسبات دشوار است، و نمی‌توان توقع داشت دانشجویانی که ورزیدگی ندارند محاسبات مشابه را به طور کامل انجام دهند. اما، دانشجویی تواند a و چند ضریب نخستین c_n را از رابطه (۲۹) بدست آورد. بنابر قضیه ۴.۴ فرض می‌کنیم که

$$y_2(x) = a J_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right], \quad x > 0 \quad (29)$$

با محاسبه $(x)^y$ و $(x)^y$ ، و جایگزینی در معادله (۲۳)، و با استفاده از این نکته که جواب معادله (۲۳) است به دست می‌آید

$$2ax J'_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \quad (30)$$

که در آن $a = 1$. با جایگزینی $J_1(x)$ از رابطه (۲۸)، و افزایش اندیس جمع‌بندی دوسری، و برخی محاسبات جبری خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0] x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)c_{n+1} + c_{n-1}] x^n \\ = -a \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1) x^{2m+1}}{2^{2m} (m+1)! m!} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

از رابطه (۳۱) نخست دیده می‌شود که $a = -c_1 = 0$ و $c_1 = -c_0$. سپس با توجه بداینکه در طرف دوم تنها توانهای فرد x وجود دارد، نتیجه می‌شود که ضرایب توانهای زوج x در طرف اول باید صفر باشند. بدینسان، $c_2 = c_4 = \dots = 0$ داریم $c_1 = c_3 = \dots = 0$. متناظر به توانهای فرد x رابطه بازگشت زیر را بدست می‌آوریم (با قراردادن $n = 2m+1$) در سری طرف اول رابطه (۳۱))

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

با قراردادن $m=1$ در رابطه (32) بدست می‌آید

$$(32-1) c_4 + c_2 = (-1)^3 / (2^4 \cdot 2!) \quad (32-1)$$

توجه شود که c_2 را می‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد، و سپس c_4 را از این معادله به دست آورد. همچنین توجه شود که در معادله متناظر به ضریب x^2 ، c_2 در x^2 ضرب شده است، و همین معادله برای تعیین c_2 به کار رفت. اینکه c_2 دلخواه است چندان تعجب آور نیست، زیرا c_2 ضریب x^2 در عبارت $\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$ است. در نتیجه، c_2 فقط مضربی از J_1 را ایجاد می‌کند؛ و c_2 تنها با تقریب مضربی از J_1 معین می‌شود. برطبق آنچه در عمل متداول است قرار می‌دهیم $c_2 = 1/2^2$. آنگاه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2!} \left[\frac{3}{2} + 1 \right] = \frac{-1}{2^4 2!} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 \right] \\ &= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!} (H_2 + H_1) \end{aligned}$$

جواب رابطه بازگشت (32) عبارت است از

$$c_{2m} = \frac{(-1)(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m! (m-1)!}, \quad m=1, 2, \dots$$

با در نظر گرفتن $H_0 = 0$. البته اثبات این مطلب کارآسانی نیست (و انتظارهم نداریم که دانشجو این محاسبات را انجام دهد). بدینسان

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + \frac{1}{x} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m! (m-1)!} x^{2m} \right], \quad x > 0 \quad (33)$$

محاسبه $y_2(x)$ با استفاده از روش دیگر [روابط (15) و (16) بند ۴.۶ را بینید] که در آن به تعیین c_n بردازیم اندکی آسانتر است. بدويژه با این روش فرمول کلی c_{2m} بدون نیاز به حل رابطه بازگشت (32) بدست می‌آید (مسئله ۸ را بینید). از این لحاظ ممکن است خواننده علاقهمند باشد که محاسبات جواب دوم معادله بسل رتبه صفر را که در متن و مسئله ۷ آمده است با یکدیگر مقایسه کند.

جواب دوم معادله (23)، تابع بسل نوع دوم رتبه یک یعنی J_1 ، رامعمولاً به صورت یک ترکیب خطی از J_0 و J_2 انتخاب می‌کنند. طبق کتاب کاپسون (فصل ۱۲)، J_1 به صورت

زیر تعریف می شود

$$Y_1(x) = \frac{1}{\pi} [-y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_1(x)] \quad (34)$$

که در آن γ با رابطه (۱۳) تعریف شده است. جواب عمومی معادله (۲۳) بذارای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$$

توجه شود که J_1 در $x = 0$ تحلیلی است، اما جواب دوم Y_1 وقتی $x \rightarrow 0$ همانند $x^{1/2}$ کران می شود.

مسائل

۱. نشان دهید که هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر در $x = 0$ دارای یک نقطه غیرعادی منظم است، و دو جواب مستقل خطی آن را بذارای $x > 0$ تعیین کنید.

$$(a) x^2 y'' + 3x y' + (1+x)y = 0 \quad (b) x^2 y'' + 2x y' + x y = 0$$

$$(c) x^2 y'' + 4x y' + (2+x)y = 0 \quad (d) x^2 y'' + x y' + 2x y = 0$$

۲. دو جواب مستقل خطی معادله بدل رتبه $2/3$ زیر را بیابید

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) y = 0, \quad x > 0$$

۳. نشان دهید که معادله بدل رتبه $1/2$

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \quad x > 0$$

را با تعویض تابع $v(x) = x^{-1/2} u(x)$ می توان به معادله

$$v'' + v = 0$$

ساده کرد. از اینجا نتیجه بگیرید که جوابهای معادله بدل رتبه $1/2$ عبارتند از $y_1(x) = x^{-1/2} \cos x$ و $y_2(x) = x^{-1/2} \sin x$.

۴. مستقیماً نشان دهید که سری $J_1(x)$ رابطه (۷)، بذارای همه مقادیر x همگرای مطلق است.

۵. مستقیماً نشان دهید که سری $J_1(x)$ رابطه (۲۸)، بذارای همه مقادیر x همگرای مطلق است و $J_1'(x) = -J_1(x)$.

۶. معادله بسل رتبه ν

$$x^{\nu}y'' + xy' + (x^{\nu} - \nu^2)y = 0, \quad x > 0$$

راکه در آن ν حقیقی و بزرگتر از صفر است در نظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهید که $y = x^{\nu}$ یک نقطه غیرعادی منظم است، و ریشه‌های معادله شاخص عبارتند از ν و $-\nu$.

(ب) نشان دهید که یک جواب متناظر به ریشه بزرگتر ν عبارت است از

$$y_1(x) = x^{\nu} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)(m+\nu-1)\dots(2+\nu)(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu m} \right]$$

(ج) نشان دهید که اگر ν عدد صحیح نباشد جواب دوم عبارت است از

$$y_2(x) = x^{-\nu} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)(m-\nu-1)\dots(2-\nu)(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu m} \right]$$

توجه شود که $y_1(x)$ در $x=0$ تحلیلی است، و $y_2(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ بی‌کران است.

(د) با استفاده از روش‌های مستقیم تحقیق کنید که سریهای موجود در عبارتهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به ازای همه مقادیر x همگراشند. همچنین تحقیق کنید که y_2 تنها با شرط آنکه ν عدد صحیح نباشد یک جواب است.

۷. در این بند نشان دادیم که یک جواب معادله بسل رتبه صفر،

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

عبارة است از $J_0(x)$ که از رابطه (۷) با $a_0 = 1$ بدست می‌آید. بنابر قضیه ۴.۴ بدانای $x > 0$. جواب دوم به صورت

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

است.

(الف) نشان دهید که

$$(یک) L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ'_0(x)$$

(ب) با جایگزینی سری $J_0(x)$ در رابطه (یک)، نشان دهید که

$$b_1 x + 2b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad (\text{دو})$$

(ج) توجه شود که در طرف دوم رابطه (دو) تنها توانهای زوج x وجود دارد. نشان

دھید که $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \dots = 0$ و

$$(2n)!b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n \frac{(2n)}{2^{2n}(n!)^2}, \quad n=2, 3, 4, \dots$$

و نتیجه بگیرید که

$$b_4 = \frac{-1}{2^{242}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{و} \quad b_6 = \frac{1}{2^{24242}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

جواب عمومی رابطه بازگشت مزبور عبارت است از $(-1)^{n+1} H_n / 2^{2n} (n!)^2$. با جایگزینی b_n در عبارت $y_2(x)$ جوابی را که در رابطه (۱۱) داده شده است به دست می آوریم.

۸. برای معادله بدل رتبه یک جواب دومی با محاسبه $(r_2) c_n$ و a از رابطه (۶ب) بند ۴.۶، براساس فرمولهای (۱۵) و (۱۶) همان بند بیاید. چند راهنمایی لازم در جریان این محاسبات را ذیلاً بیان می کنیم. نخست، با استفاده از رابطه (۲۴) نشان دھید که $c_0 = (-1) a_0$. آنگاه نشان دھید که $c_1 = (-1) a_1$ و با توجه به رابطه بازگشت، $c_n = 0$ است. بالاخره، با استفاده از رابطه (۲۵) نشان دھید که

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+r+1)(2m+r-1)(2m+r-3)\dots(r+3)(r+1)}$$

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1} (H_m - H_{m-1}) / 2^{2m} m! (m-1), \quad m=1, 2, 3, \dots$$

را محاسبه کنید.

۹. با تعویض مناسب متغیرها اغلب می توان یک معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر را به معادله بدل از رتبه ۲ تبدیل کرد. به عنوان مثال، نشان دھید که یک جواب

$$x^2 y'' + \left(\alpha^2 \beta^2 x^2 \beta + \frac{1}{4} - \alpha^2 \beta^2\right) y = 0, \quad x > 0$$

عبارت است از $y = x^{1/2} f(\alpha x^\beta)$ که در آن f یک جواب معادله بدل از رتبه ۲ است.

۱۰. با استفاده از نتیجه مسئله ۹ نشان دھید که جواب عمومی معادله آیری

$$y'' - xy = 0, \quad x > 0$$

عبارت است از $[c_1 f_1(\frac{2}{3} i x^{3/2}) + c_2 f_2(\frac{2}{3} i x^{3/2})]$ که در آن f_1 و f_2 دو جواب مستقل خطی معادله بدل از رتبه $\frac{1}{3}$ می باشند.

۱۱. می توان نشان داد که J دارای بینهایت صفر در $x > 0$ است. به ویژه،

حل کنیم، اغلب اما نه همواره، شرایط اولیه نیز در همین نقطه مشخص شده‌اند. اگر توابع P ، Q و R دارای سازه مشترک $x - x_0$ باشند، فرض می‌شود که از معادله (۱) این سازه مشترک را حذف کرد. بنابراین اگر $P(x_0) = Q(x_0) = R(x_0)$ صفر نیست. جواب معادله (۱) در یک فاصله شامل x_0 تا اندازه‌ای به تغییرات P در این فاصله وابسته است. بدويژه، اگر P در این فاصله صفر نشود، می‌توان با تقسیم معادله (۱) بر $P(x)$ آن را به صورت

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

درآورد، که در آن $p(x) = Q(x)/P(x)$ و $q(x) = R(x)/P(x)$ توابعی پیوسته‌اند. بنابراین با توجه به قضیه ۲.۳ وجود یک جواب تضمین می‌شود. در بندهای ۲۰۴ و ۱۲۰۴ به بررسی جواب معادله (۱) در همسایگی یک نقطه x_0 که در آن $P(x_0) \neq 0$ است می‌پردازیم. چنین نقطه‌ای را برای معادله (۱) یک نقطه عادی می‌نامند. از طرف دیگر هنگامی که $P(x_0) = 0$ باشد، قضیه ۲.۳ را نمی‌توان به کار برد، زیرا $p(x_0)$ و یا $q(x_0)$ به ازای $x \rightarrow x_0$ نامحدود خواهد شد. چنین نقطه‌ای را برای معادله (۱) یک نقطه غیرعادی یا نقطه تکین می‌نامند. بندهای ۳۰۴ تا ۷۰۴ به تعیین جواب‌های معادله (۱) در همسایگی یک نقطه غیرعادی اختصاص دارند.

در هر حالت روش حل مبتنی بر این اندیشه است که بر را به صورت یک سری توانی بر حسب $x - x_0$ بنویسیم که در آن x_0 یک نقطه مشخص است. گرچه ممکن است در نظر اول تعیین جواب‌های معادله دیفرانسیل به صورت سری، یا سری جلوه کند، اما از لحاظ محاسبات این روش می‌تواند آسانترین راه برای حل این معادله دیفرانسیل باشد. در واقع، جداول $\sin x$ و $\cos x$ (جواب‌های $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$) را می‌توان با استفاده از سری تیلر آنها حول x_0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (0! = 1) \quad (3)$$

و یا سریهای مشابه محاسبه کرد.

چون در این فصل سریها را بسیار زیاد به کار خواهیم برد، شایسته است به اختصار و بدون اثبات نتایجی از سریها و بدويژه سریهای توانی را بیان کنیم.

۱. سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ را هنگامی در نقطه x_0 همگرا گویند، که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x - x_0)^n$$

سه صفر نخستین تقریباً برابرند با $2\pi 405$, $2\pi 520$, $8\pi 653$ و $8\pi 654$ (شکل ۲.۴ را بینید). صفرهای J را با $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ نشان می‌دهند، درنتیجه

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید که $J_0(\lambda_j x) = y$ در معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_j^2 y = 0, \quad x > 0$$

صدق می‌کند. از آنجا نشان دهید که

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) J_0(\lambda_j x) dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

این خاصیت مهم $(J_0(\lambda_i x))$, به عنوان خاصیت تعامد معروف است، و در حل مسائل مقادیر مرزی مفید واقع می‌شود (بند ۵.۱۱ و ۶.۱۱ را بینید).

(اهمایی): معادله دیفرانسیل $(J_0(\lambda_i x))$ را بنویسید، آن را در $x J_0(\lambda_j x)$ ضرب کرده و از $x J_0(\lambda_i x)$ برابر معادله دیفرانسیل $(J_0(\lambda_j x))$ تفاضل کنید، سپس از ۰ تا ۱ انتگرال بگیرید.

مراجع

@jozve_iut

Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford University, Oxford, 1935.

برای اثبات قضیه‌های ۱.۴، ۳.۴، و ۴.۴ را می‌توانید به کتابهای متوسط یا پیشرفته‌تر به عنوان مثال فصل ۳ و ۴ کادینگن، یا فصل ۳ و ۴ کتاب زیر را بینید:

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations*, Second ed., Macmillan, New York, 1964.

برای بحث درباره نقطه درینها یت، که در مسئله ۱۳ بند ۳.۴ مطرح شده است همین کتابها را بینید. بررسی جوابهای در مجاورت نقطه غیرعادی غیرمنظم یکی از مباحث پیشرفته‌تر است؛ بحث مختصری در این باره در فصل ۵ کتاب زیر آمده است:

Coddington, E. A. and Levinson, N. ; *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

برای بحث کاملتر درباره معادله بسل، معادله لزاندر و بسیاری از معادلات دیگر را که نام برده‌ایم، به کتابهای پیشرفته‌تر معادلات دیفرانسیل، روش‌های ریاضیات کاربسته و توابع مخصوص رجوع کنید. کتاب زیر به موضوع توابع مخصوص از قبیل چندجمله‌ایهای لزاندر، توابع بسل وغیره می‌پردازد.

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics*, Holt, New York, 1961.



معادلات خطی مرتبه بالاتر

۱.۰ مقدمه

در این فصل نظریه معادلات خطی مرتبه دوم را که در فصل ۳ شرح دادیم به معادلات خطی مرتبه بالاتر تعمیم می‌دهیم. یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n معادله‌ای است به صورت

$$P_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x) \quad (1)$$

در اینجا جز مواردی که خلاف آن تصریح شود، فرض می‌کنیم که توابع P_0, \dots, P_n و G روی یک فاصله $\beta < x < \alpha$ تابعی با مقدار حقیقی و پیوسته‌اند، و P_0 هیچگاه در این فاصله صفر نمی‌شود. آنگاه با تقسیم معادله (۱) بر $P_0(x)$ بدست می‌آید

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x)y = g(x) \quad (2)$$

که در آن، با استفاده از همان نمادهای فصل ۳، عملگر دیفرانسیل خطی L را تعریف کرده‌ایم. نظریه ریاضی وابسته به معادله (۲) کاملاً شبیه نظریه معادلات خطی مرتبه دوم است؛ به همین سبب اغلب تنها به بیان نتایج در مورد معادلات خطی مرتبه n اکتفا می‌کنیم. بر این اغلب نتایج نیز مشابه بر این مربوط به معادله خطی مرتبه دوم است، و آنها را معمولاً به عنوان تمرین به خواننده واگذار کرده‌ایم.

نخست با توجه به آنکه معادله (۲) شامل مشتق n ام با نسبت به x است، حل معادله (۲) به طور کلی مستلزم n انتگرال گیری خواهد بود. هر یک از این انتگرال گیریها مقدار ثابت دلخواهی را وارد می‌کند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که برای تعیین یک جواب یکتا لازم باشد که n شرط اولیه، مثلاً

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0 \quad (3)$$

مشخص شود، x_0 می‌تواند هر نقطه‌ای از فاصله $\alpha < x < \beta$ باشد، و $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ مجموعه مفروضی از ثابت‌های حقیقی است. موضوع وجود چنین جواب و یکتا بی آن با قضیه وجود و یکتا بی زیر اثبات می‌گردد.

قضیه ۱۰.۵. اگر توابع p_1, p_2, \dots, p_n و g در فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه یک و تنها یک تابع $y = \phi(x)$ دارد که در معادله (۲) صدق کند.

اثبات این قضیه را در اینجا نمی‌آوریم؛ اما، به این نکته توجه خواهیم کرد که اگر توابع p_1, p_2, \dots, p_n ثابت باشند، جواب معادله (۲) را که در شرایط (۳) صدق کند به طور واقعی می‌توان ساخت (بندهای ۳۰.۵-۳۰.۵ را ببینید). گرچه در این حالت جوابی را می‌شناسیم، اما بی استفاده از قضیه ۱۰.۵ از یکتا بی آن بی اطلاعیم. اثبات کامل قضیه را می‌توان در کتاب اینس (بند ۳۲.۳) یا کتاب کادینگتون (فصل ۶) پیدا کرد. همانند حالت متناظر به مسئله مرتبه دوم، نخست به بحث پیرامون مسئله حل معادله همگن یا متمم

@jozve_iut

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (4)$$

می‌پردازیم. نظریه عمومی معادله همگن (۴) در بند ۲۰.۵ و روش حل آن به هنگامی که p_i ها ثابت باشند در بند ۳۰.۵ مورد بحث قرار گرفته است. سپس به مسئله تعیین یک جواب خصوصی برای معادله ناهمگن (۲) می‌پردازیم. روش ضرایب نامعین و روش تغییر پارامترها برای تعیین یک جواب خصوصی معادله (۲) در بندهای ۴۰.۵ و ۵۰.۵ به ترتیب مورد بحث قرار خواهند گرفت.

مسائل

۱. با فرض آنکه توابع p_1, \dots, p_n روی فاصله‌ای شامل مبدأ پیوسته‌اند، و $y = \phi(x)$ یک جواب مسئله مقدار اولیه

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0,$$

$$y(0) = y_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}_0$$

است، (ϕ) را تعیین کنید. نشان دهید که اگر p_1, \dots, p_n در $x = 0$ مشتق پذیر

باشد، آنگاه $\phi^{(n+1)}$ را می‌توان بر حسب داده‌های اولیه تعیین کرد.
۲۰ مشابه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم می‌توان انتظار داشت که اگر f واجد شرایط مناسبی باشد، معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

دارای جوابی است که شامل n ثابت دلخواه است. بر عکس می‌توان ثابت کرد که یک خانواده از توابع که شامل n ثابت دلخواه باشد، جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام است. با حذف ثابت‌های c_1, \dots, c_n معادله دیفرانسیلی را که هریک از توابع زیر در آن صدق می‌کند بیا بید.

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \sin x \quad (\text{الف})$$

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} \quad (\text{ج})$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (\text{د})$$

$$y = x + c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \quad (\text{ه})$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sinh x + c_4 \cosh x \quad (\text{و})$$

۳۰ برای هریک از معادلات خطی زیر فوایدی را تعیین کنید که وجود جواب در آن مسلم باشد.

@jozve_iut

$$y^{iv} + 4y'' + 3y = x \quad (\text{الف})$$

$$xy''' + (\sin x)y'' + 3y = \cos x \quad (\text{ب})$$

$$x(x-1)y^{iv} + e^x y'' + 4x^2 y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y''' + xy'' + x^2 y' + x^3 y = \ln x \quad (\text{د})$$

۲۰۵ نظریه عمومی معادلات خطی مرتبه n ام

اگر توابع y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

باشد، مستقیماً از محاسبه نتیجه می‌شود که ترکیب خطی

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (2)$$

که در آن c_1, \dots, c_n ثابت‌های دلخواه‌اند، نیز یک جواب معادله (1) است. طبعاً این سؤال

طرح می شود که آیا هر جواب معادله (۱) را می توان به صورت یک ترکیب خطی از y_1, y_2, \dots, y_n بیان کرد. جواب این سؤال هنگامی مثبت است که شرایط اولیه

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0 \quad (3)$$

هر چند باشد، بتوان ثابتی c_1, \dots, c_n را طوری انتخاب کرد که ترکیب خطی (۲) در شرایط اولیه مزبور صدق کند. صریحاً آنکه، به ازای هر انتخاب x در $\alpha < x < \beta$ و هر انتخاب $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ باید بتوان c_1, \dots, c_n را طوری تعیین کرد که معادلات

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + \dots + c_n y'_n(x_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ c_1 y^{(n-1)}_1(x_0) + \dots + c_n y^{(n-1)}_n(x_0) &= y^{(n-1)}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

برقرار باشد. معادلات (۴) را می توان همواره نسبت به ثابتی c_1, \dots, c_n حل کرد به شرط آنکه دترمینان ضرایب صفر نشود. از طرف دیگر، اگر دترمینان ضرایب صفر شود، همواره می توان مقادیر $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ را طوری انتخاب کرد که دستگاه معادلات (۴) دارای جواب نباشد. بنابراین یک شرط لازم و کافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (۴) به ازای مقادیر دلخواه $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ آن است که رونسکین

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}_1 & y^{(n-1)}_2 & \dots & y^{(n-1)}_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

در $x = x_0$ صفر نشود. چون x_0 می تواند هر نقطه ای در فاصله $\alpha < x < \beta$ باشد، لازم و کافی است که (y_1, y_2, \dots, y_n) در هیچ نقطه ای از فاصله مزبور صفر نشود. درست همانند آنچه در معادله خطی مرتبه دوم بیان شد، می توان نشان داد که اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای معادله (۱) باشند، آنگاه (y_1, y_2, \dots, y_n) $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ روی فاصله $\alpha < x < \beta$ یا متعدد صفر است ویسا هیچگاه صفر نمی شود (مسئله ۲ را بیینید). بدینسان قضیه زیر نتیجه می شود.

قضیه ۲۰۵ اگر توابع p_1, p_2, \dots, p_n دوی فاصله باز $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، و توابع y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای معادله (۱) باشند، و اگر حداقل دویک نقطه از $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم $y(x) \neq (y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ آنگاه هر جواب معادله (۱) را می توان به صورت یک ترکیب خطی از جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n بیان کرد.

چنین مجموعه‌ای از جوابهای y_1, y_2, \dots, y_n معادله (۱) را یک مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) می‌نامند. وجود مجموعه اساسی جوابها دقیقاً به همان روش مربوط به معادله خطی مرتبه دوم اثبات می‌شود (قضیه ۷.۳ را ببینید). چون همه جوابهای معادله (۱) به صورت (۲) می‌باشند، معمولاً هر ترکیب خطی دلخواه از یک مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) را جواب عمومی می‌نامند.

بحث استقلال خطی را که در بند ۳.۳ آمد می‌توان نیز تعمیم داد. توابع y_1, \dots, y_n را هنگامی روی $\beta < x < \alpha$ مستقل خطی گویند که برای ثابت‌های c_1, \dots, c_n نتوان مقادیر (بجز $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$) تعیین کرد بدگونه‌ای که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (6)$$

اگر y_1, \dots, y_n جوابهای معادله (۱) باشند، می‌توان نشان داد که يك شرط لازم و کافی برای استقلال خطی آنها عبارت است از آن که $L(y_1, \dots, y_n)$ روی $\alpha < x < \beta$ صفر نشود (مسئله ۳ را ببینید). بدین‌سان توابعی که یک مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) را تشکیل می‌دهند دارای استقلال خطی‌اند، و هر مجموعه از n جواب مستقل خطی معادله (۱) تشکیل یک مجموعه اساسی جوابهای معادله (۱) را می‌دهند.

مسئله ناهمگن. اکنون به بررسی معادله ناهمگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = g(x) \quad (7)$$

می‌پردازیم. اگر y_1, \dots, y_n دو جواب خصوصی معادله (۷) باشند، از خطی بودن عملگر L مستقیماً نتیجه می‌شود که $[y_1 - y_2] = g - g = 0$. بنا بر این تفاضل هر دو جواب معادله ناهمگن (۷) یک جواب معادله همگن (۱) است. چون هر جواب معادله همگن را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از یک مجموعه اساسی جوابهای y_1, \dots, y_n بیان کرد، در نتیجه هر جواب معادله (۷) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} y &= y_p(x) + y_n(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x) \end{aligned} \quad (8)$$

نوشت، که در آن y_p یک جواب معادله ناهمگن (۷) است. ترکیب خطی (۸) را معمولاً جواب عمومی معادله ناهمگن (۷) می‌نامند.

نخستین مسئله آن است که یک مجموعه اساسی از جوابهای y_1, \dots, y_n را پیابیم. اگر ضرایب معادله ثابت باشند، این مسئله بسیار آسان است؛ و در بند بعد مورد بحث قرار می‌گیرد. اگر ضرایب ثابت نباشند، لازم می‌آید که از روش‌های عددی (فصل ۸) و یا روش‌های سری مشابه آنچه در مورد معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به کار رفت

استفاده کنیم.

در خاتمه، می‌توان نشان داد که در مورد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n ام می‌توان از روش کاهش مرتبه نیز استفاده کرد. بدین‌سان اگر y یک جواب معادله (۱) باشد، جایگزینی $y(x)$ به $y = y_1 + \dots + y_n$ برای y منجر می‌گردد (مسائل ۷ و ۸ را بینید). متناظر با $y_1 + \dots + y_n$ جواب مستقل خطی y_1, \dots, y_n از معادله‌ای که مرتبه آن کاهش یافته است، یک مجموعه اساسی جوابهای y_1, \dots, y_n می‌باشد، می‌توان مجدداً با استفاده از روش کاهش مرتبه یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه $n-2$ به دست آورد، و با ادامه این کار به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول رسید. اما، در عمل روش کاهش مرتبه به ندرت برای معادلات بالاتر از مرتبه دوم مفید واقع می‌شود. اگر $n \geq 3$ ، معادله کاهش یافته حداقل از مرتبه دوم است، و فقط در موارد استثنایی حل این معادله از معادله اصلی آسانتر است. از طرف دیگر، چنان‌که در بند ۴.۳ دیدیم، اگر $n=2$ ، معادله کاهش یافته از مرتبه اول است، و در نتیجه تسهیلات قابل ملاحظه‌ای فراهم می‌شود.

مسائل

۱. تحقیق کنید که عملگر دیفرانسیلی L که با

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

تعریف می‌شود، یک عملگر دیفرانسیلی خطی است. یعنی، نشان دهید که

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

که در آن توابع y_1 و y_2 n بار مشتق پذیرند و c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی می‌باشند. بدین‌سان، نشان دهید که اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای $L[y] = 0$ باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_n y_n + \dots + c_1 y_1 = 0$ نیز یک جواب $L[y] = 0$ است.

۲. در بند ۴.۳ نشان دادیم که $(y_1, y_2)W$ رونسکیین دو جواب

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

نوشت، که در آن c مقدار ثابتی است. به‌طور کلیتر، می‌توان نشان داد که اگر y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ بدانای $\alpha < x < \beta$ باشند، آنگاه

۱. بحث روش‌های سری برای معادلات مرتبه بالاتر را می‌توان در کتاب اینس (فصل ۱۶) یا کادینکتون و لوینسون (Levinson)، (فصل ۴) دید.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = c \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

این رابطه به اتحاد آبل معروف است. برای اثبات این نتیجه به ازای $n=3$ می‌توان به ترتیب زیر عمل کرد.

(الف) نشان دهید که

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{که در آن } W(y_1, y_2, y_3) = W$$

(اهمایی): مشتق یک دترمینان ۳ در ۳ برابر است با مجموع ۳ دترمینان ۳ در ۳ که در آنها به ترتیب از سطرهای اول، دوم، و سوم مشتق‌گیری شده است.

(ب) با جایگزینی y_1, y_2, y_3 از معادله دیفرانسیل، سطر اول را در p_3 ، سطر دوم را در p_2 ضرب کرده، و آنها را با سطر آخر جمع کنید تا به دست آید

$$W' = -p_1 W$$

نتیجه مطلوب از این معادله حاصل می‌شود. اثبات حالت کلی نیز به طریق مشابه انجام می‌گیرد. چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی‌شود، این نتیجه نشان می‌دهد که (y_1, y_2, \dots, y_n) روی $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ با متعدد با صفر است و یا هیچگاه صفر نمی‌شود. ۳. هدف این مسئله آن است که نشان دهیم که اگر (y_1, y_2, \dots, y_n) روی $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ مستقل خطی اند؛ و اگر مستقل خطی بوده و جوابهای

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta \quad (\text{یک})$$

باشند، آنگاه (y_1, y_2, \dots, y_n) روی $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ هیچگاه صفر نیست.

(الف) فرض کنیم که (y_1, y_2, \dots, y_n) روی $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ با متعدد با صفر نباشد. برای اثبات استقلال خطی y_1, y_2, \dots, y_n باید نشان دهیم که تعیین ثابت‌های c_1, c_2, \dots, c_n (که همه آنها صفر نباشند) به‌طوری که به ازای هر x در $\alpha < x < \beta$ داشته باشیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (\text{دو})$$

غیرممکن است. با در نظر گرفتن معادلات حاصل از مشتقهای اول، دوم، ...، و $(1-n)$ ام معادله (دو) در نقطه‌ای که $0 \neq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ نشان دهید که همه c_i ها باید صفر باشند، تا معادله (دو) برقرار باشد. بنا بر این y_1, y_2, \dots, y_n مستقل خطی اند. (ب) فرض کنیم که y_1, y_2, \dots, y_n جوابهای مستقل خطی معادله (یک) باشند.

برای اثبات آنکه (y_1, y_2, \dots, y_n) هیچگاه روی $\alpha < x < \beta$ صفر نیست، فرض می‌کنیم که $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$. و نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد.

(ا) اهنایی: اگر $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0$ آنگاه جواب ناصرفی برای معادله (یک) وجود دارد که در x_0 در شرایط اولیه $y^{(n-1)} = y^{(n-2)} = \dots = y' = y'' = \dots = y^{(n-1)} = 0$ صدق می‌کند؛ آنگاه از قضیه وجود ویکتاوی استفاده کنید.

۴. تحقیق کنید که توابع داده شده جوابهای معادله دیفرانسیل مرتبه اند، و رونسکین جوابها را محاسبه کنید.

$$y''' + y' = 0; \quad 1, \cos x, \sin x \quad (\text{الف})$$

$$y^{\text{iv}} + y'' = 0; \quad 1, x, \cos x, \sin x \quad (\text{ب})$$

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; \quad e^x, e^{-x}, e^{-2x} \quad (\text{ج})$$

$$y^{\text{iv}} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, x, e^{-x}, xe^{-x} \quad (\text{د})$$

$$xy''' - y'' = 0; \quad 1, x, x^2 \quad (\text{ه})$$

۵. نشان دهید که به ازای هر x داریم $W(1, \sin^2 x, \cos 2x) = 0$. آیا این نتیجه را می‌توانید مستقیماً بدون محاسبه رونسکین اثبات کنید.

۶. فرض کنیم عملگر دیفرانسیلی L با

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y$$

که در آن a_0, a_1, \dots, a_n ثابت‌هایی حقیقی است تعریف شده‌است. مطلوب است محاسبه $L[e^{rx}]$ ؛ $L[x^n]$ ؛ $L(x)$ با.

(ج) برای معادله $y''' + 4y'' - 5y' + 4y = 0$ چهار جواب باید. آیا فکر می‌کنید که این چهار جواب یک مجموعه اساسی تشکیل می‌دهند؟ چرا؟

۷. نشان دهید که اگر y_1, y_2 یک جواب

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$$

باشد، آنگاه از جایگزینی $y_1(x)v(x) = y$ معادله خطی مرتبه دوم زیر برای v حاصل می‌شود

$$y_1''' + (3y_1'' + p_1y_1')v'' + (3y_1' + 2p_1y_1 + p_2y_1)v' = 0$$

۸. با استفاده از روش کاهش مرتبه، معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0, \quad x > 0; \quad (\text{ب})$$

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^3$$

۳.۵ معادلات همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n ام

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

را که در آن a_0, a_1, \dots, a_n ثابت‌هایی حقیقی‌اند در نظر می‌گیریم. طبعاً می‌توان براساس شناختی که از معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت داریم، پیش‌بینی کرد که $y = e^{rx}$ به ازای مقادیر مناسبی از r یک جواب معادله (1) خواهد بود. در واقع، به ازای هر r داریم

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) \\ &= e^{rx} Z(r) \end{aligned} \quad (2)$$

به ازای مقادیری از r که داشته باشیم $L[e^{rx}] = 0$ ، خواهیم داشت $Z(r) = 0$ و $y = e^{rx}$ یک جواب معادله (1) است. چندجمله‌ای $Z(r)$ را چندجمله‌ای مشخصه یا چندجمله‌ای معین و معادله $0 = Z(r)$ را معادله مشخصه یا معادله معین معادله دیفرانسیل (1) می‌نامند. هر چندجمله‌ای درجه n دارای n صفر است، مثلاً r_1, r_2, \dots, r_n ; بنابراین می‌توان چندجمله‌ای مشخصه را به صورت زیر نوشت

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n) \quad (3)$$

ریشه‌های حقیقی و نابرابر. اگر ریشه‌های معادله مشخصه حقیقی باشند، و هیچ دو تای آنها مساوی نباشد، آنگاه برای معادله (1)، n جواب متمایز $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ را خواهیم داشت. برای اثبات آن که در این حالت جواب عمومی معادله (1) به صورت

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (4)$$

است، باید نشان دهیم که توابع $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ روی فاصله $x < \infty - \infty$ مستقل خطی‌اند. نشان می‌دهیم که فرض بستگی خطی آنها به تناقض می‌انجامد. گیریم ثابت‌های c_1, c_2, \dots, c_n وجود داشته باشند به‌طوری که همه آنها صفر نباشند و به ازای هر x در $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} = 0$ داشته باشیم. با ضرب در $e^{-r_1 x}$ داریم $c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + \dots + c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$ ، با مشتق‌گیری، به دست می‌آید

$$(r_2 - r_1)c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + (r_3 - r_1)c_3 e^{(r_3 - r_1)x} + \dots + (r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$$

به ازای $\infty < x < \infty - \infty$. با ضرب رابطه اخیر در $e^{(r_2 - r_1)x}$ و مشتق‌گیری خواهیم داشت

$$(r_3 - r_2)(r_4 - r_1)c_4 e^{(r_4 - r_1)x} + \dots + (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$$

به ازای $x < \infty$. چون به همین طریق ادامه دهیم، سرانجام به دست می آید

$$(r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \dots (r_n - r_1) c_n e^{(r_n - r_{n-1})x} = 0 \quad (5)$$

به ازای $x < \infty$. چون تابع نمایی صفر نمی شود و $c_n \neq 0$ ، ناگراند، درنتیجه به دست می آید $c_{n-1} = c_{n-2} = \dots = c_1 = 0$. بدینسان $y = c_n e^{r_n x} + c_{n-1} e^{r_{n-1} x} + \dots + c_2 e^{r_2 x} + c_1 e^{r_1 x}$ و، با همان روش بالا خطي $e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}$ تناقض دارد.

ریشه‌های مختلط. اگر معادله مشخصه دارای ریشه‌های مختلط باشد، این ریشه‌ها از جفت‌های مزدوج، $\mu \pm i\lambda$ ، تشکیل می شود، زیرا ضرایب a_0, \dots, a_n اعداد حقیقی‌اند. با شرط آنکه هیچ یک از ریشه‌ها مکور نباشد، جواب عمومی معادله (۱) همچنان بد صورت^۱ (۴) است. اما، بدینمان روش معادله مرتبه دوم (بند ۱۰.۳) به جای جوابهای با مقدار $x^{(\mu+i\lambda)} e^{\lambda x}$ و $x^{(\mu-i\lambda)} e^{-\lambda x}$ معمولاً از جوابهای با مقدار حقیقی

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \sin \mu x \quad (6)$$

که بخش‌های حقیقی و موهومی $x^{(\lambda+i\mu)} e^{\lambda x}$ می باشند استفاده می شود. بدینسان، حتی هنگامی که برخی از ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشند، باز هم می توان جواب عمومی معادله (۱) را بد صورت یک ترکیب خطی از جوابهای با مقدار حقیقی بیان کرد.

مثال ۱. جواب عمومی

$$@jozve_iut y^{(iv)} - y = 0 \quad (7)$$

را بیا بید.

چون به جای y قرار دهیم $y^{(iv)} - y = 0$ به دست می آید

$$r^4 - 1 = (r^2 + 1)(r^2 - 1) = 0$$

ریشه‌ها عبارتند از $1, -1, i, -i$ ؛ بنابراین جواب عمومی معادله (۷) چنین است

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

ریشه‌های مکرر. اگر ریشه‌های معادله مشخصه متایز نباشند، یعنی، اگر برخی از ریشه‌ها مکرر باشند، آنگاه روشی است که جواب (۴) جواب عمومی معادله (۱) نیست. چنانکه دیدیم اگر r ریشه مکرری برای معادله خطی مرتبه دوم $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ باشد، آنگاه دو جواب مستقل خطی بد صورت $x e^{rx}$ و $x^2 e^{rx}$ به دست می آمد، منطقاً می توان حادس زد که اگر یک ریشه $r = Z$ ، مثلاً $r = 2$ ، ۳ بار تکرار شود ($s \leq n$) آنگاه

۱. استقلال خطی جوابهای $x e^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^n e^{rx}$ در حالت های حقیقی بیان شد، نتیجه می گردد. از تعیین استدلالی که هم‌اکنون در حالت های حقیقی بیان شد، نتیجه می گردد.

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{s-1} e^{rx} \quad (8)$$

جوابهای معادله (۱) باشند. برای اثبات این موضوع، باید توجه داشت که اگر یک ریشه مرتبه s چندجمله‌ای $Z(r)$ باشد، آنگاه معادله (۲) را می‌توان به‌ازای همه مقادیر r به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx} a_0 (r - r_1)^s (r - r_{s+1}) \dots (r - r_n) \\ &= e^{rx} (r - r_1)^s H(r) \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن $H(r_1) \neq 0$. سپس از رابطه $\frac{\partial e^{rx}}{\partial r} = xe^{rx}$ و جابه‌جا‌بی پذیری مشتق‌گیریهای e^{rx} نسبت به x و r استفاده می‌کنیم. بدین‌سان با مشتق‌گیری از رابطه (۹) نسبت x به دست می‌آید

$$L[xe^{rx}] = e^{rx} [x(r - r_1)^s H(r) + s(r - r_1)^{s-1} H(r) + (r - r_1)^s H'(r)] \quad (10)$$

چون $s \geq 2$ ، طرف دوم رابطه (۱۰) به‌ازای $r = r_1$ صفر می‌شود و بنابراین xe^{rx} نیز یک جواب معادله (۱) است. اگر $s \geq 3$ ؛ بار دیگر نسبت به r از رابطه (۱۰) مشتق می‌گیریم و قرار می‌دهیم $r = r_1$ ، بدین‌سان ثابت می‌شود که $x^2 e^{rx}$. نیز یک جواب معادله (۱) است. این روش را می‌توان تا $1-s$ بار مشتق‌گیری ادامه داد و نتیجه مطلوب را به‌دست آورد. توجه شود که مشتق s ام طرف دوم رابطه (۹) به‌ازای $r = r_1$ صفر نمی‌شود، زیرا s امین مشتق $(r - r_1)^s H(r_1)$ ثابت است و $H(r_1) \neq 0$. منطقاً می‌توان حدس زد که $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{s-1} e^{rx}$ مستقل خطی‌اند، و ما آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

بالاخره، اگر پک ریشه مختلط $\lambda + i\mu$ باشد. متناظر با این s جوابهای با مقدار مختلط می‌توانیم s جواب s بار تکرار خواهد شد. متوجه با این s جوابهای با مقدار مختلط می‌توانیم s جواب با مقدار حقیقی بیا بیم، برای این‌کار کافی است توجه شود که بخش‌های حقیقی و موهومی

$$e^{(\lambda+i\mu)x}, xe^{(\lambda+i\mu)x}, \dots, x^{s-1} e^{(\lambda+i\mu)x}$$

نیز جوابهای مستقل خطی‌اند:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} \cos \mu x, & \quad e^{\lambda x} \sin \mu x, \quad xe^{\lambda x} \cos \mu x, \quad xe^{\lambda x} \sin \mu x, \\ & \dots, x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad x^{s-1} e^{\lambda x} \sin \mu x \end{aligned}$$

بدین‌سان جواب عمومی معادله (۱) را همواره می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از n جواب با مقدار حقیقی نوشت. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۲. جواب عمومی

$$y''' + 2y'' + y = 0 \quad (11)$$

را بیا بید.

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$$

که دارای ریشه‌های $i, -i, i, -i$ ، و جواب عمومی معادله (۱۱) چنین است

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

برای تعیین ریشه‌های معادله مشخصه اغلب لازم می‌آید که به محاسبه ریشه‌های سوم، چهارم، و حتی ریشه‌های مراتب بالاتر یک عدد مختلط پردازیم. این کار معمولاً با استفاده از فرمول اویلر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ، و قواعد جبری که در بند ۱.۵.۳ آمد به آسانترین وجه صورت می‌گیرد. این موضوع درمثال زیر و همچنین در مسائل ۱ و ۲ مورد بحث قرار می‌گیرد.

مثال ۳۰. جواب عمومی

$$y^{iv} + y = 0 \quad (12)$$

را بیاورد.

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 + 1 = 0$$

در این حالت چندجمله‌ای مذبور به آسانی تجزیه نمی‌شود. باید به محاسبه ریشه چهارم پردازیم. در اینجا $1 - i$ را به عنوان عدد مختلط $z_0 = 1 + 0i$ در نظر می‌گیریم. قدر مطلق آن

$\sqrt[4]{2}$

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}$$

علاوه بر این، زاویه مذبور تنها با تقریب مضربی از 2π معین می‌گردد. بدینسان

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i \sin(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

که در آن m برابر صفر یا هر عدد صحیح مثبت یا منفی است. بدینسان

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

ریشه‌های چهارم $1 - i$ به ترتیب با قراردادن

$$m = 0, 1, 2, 3$$

به دست می‌آیند، و عبارتند از

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که به ازای هر مقدار دیگر m یکی از همین چهار ریشه حاصل می‌شود. مثلاً، متناظر با $m = \sqrt{2}/(1+i)$ خواهیم داشت. جواب عمومی معادله (۱۲) عبارت است از

$$y = e^{x/\sqrt{2}} \left(c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-x/\sqrt{2}} \left(c_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

در خاتمه مذکور می‌شویم که مسئله تعیین ریشه‌های $Z(r) = 0$ هنگامی که $n > 2$ و نتوان آنها را با بررسی یا روش ساده آزمون و خطابه دست آورد، مستلزم استفاده از روش‌های عددی است. گرچه برای ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای درجه سوم و چهارم فرمولهای مشابه فرمول معادله درجه دوم وجود دارد، اما برای $n > 4$ فرمولی^۱ در دست نیست؛ حتی در مورد معادلات چندجمله‌ای درجه سوم و چهارم معمولاً^۲ کاربرد روش‌های عددی مناسبتر است.

اگر ثابت‌های a_0, a_1, \dots, a_n در معادله (۱) اعداد مختلط باشند، جواب معادله (۱) همچنان به صورت (۴) است. اما در این حالت، ریشه‌های معادله مشخصه عموماً اعداد مختلط‌اند؛ و دیگر محقق نیست که مزدوج یک ریشه باز هم یک ریشه باشد. جوابهای متناظر توابعی با مقدار مختلط خواهند بود.

مسائل

۱. هر یک از اعداد مختلط زیر را به صورت

$$R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta} \quad \dots$$

بیان کنید. توجه شود که تساوی $e^{i(\theta + 2m\pi)} = e^{i\theta}$ ، به ازای

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

برقرار است.

- | | | | | | |
|-------|----------------|-----|------------------|-----|---------|
| (الف) | $i + \sqrt{3}$ | (ج) | $-1 + i\sqrt{3}$ | (ب) | $1 + i$ |
| (د) | $\sqrt{3} - i$ | (ه) | $-1 - i$ | (و) | $-i$ |

۲. مطلوب است محاسبه ریشه‌های تعیین شده هر یک از اعداد مختلط زیر با توجه به

۱. فرمول حل معادله درجه سوم را معمولاً به کارданو (Cardano)، (۱۵۰۱-۱۵۷۶) و فرمول معادله درجه چهارم را به شاگردش فراری (Ferrari)، (۱۵۲۲-۱۵۶۵) نسبت می‌دهند. این نکته را که ریشه‌های یک معادله جبری کلی از درجه بالاتر از چهار را نمی‌توان با فرمولی که تنها شامل عملیات گویا (جمع، ضرب، وغیره) واستخراج ریشه باشد بیان کرد آبل و گالوا (Galois)، (۱۸۱۱-۱۸۳۲) اثبات کردند. برای بحث روش‌های معادلات جبری می‌توان به کتاب اوسپنسکی (Uspensky) مراجعه کرد.

$e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$ به ازای هر عدد صحیح m ، و

$$[e^{i(\theta+2m\pi)}]^{1/n} = e^{i[(\theta+2m\pi)/n]} = \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)$$

(یکی از صور فرمول دومو آور، مسئله ۱۲، بند ۱۰.۳)

$$(1-i)^{1/2} \quad (\text{ب}) \quad 1^{1/2} \quad (\text{الف})$$

$$\left[2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{د}) \quad 1^{1/4} \quad (\text{ج})$$

در هر یک از مسائل ۳ تا ۱۳ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید.

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad .۳$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad .۴$$

$$2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0 \quad .۵$$

$$y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0 \quad .۶$$

$$y^{vi} + y = 0 \quad .۷$$

$$y^{iv} - 5y'' + 4y = 0 \quad .۸$$

$$y^{vi} - 3y^{iv} + 3y'' - y = 0 \quad .۹$$

$$y^{vi} - y'' = 0 \quad .۱۰$$

$$y^v - 3y^{iv} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0 \quad .۱۱$$

$$y^{iv} - 8y' = 0 \quad .۱۲$$

$$y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0 \quad .۱۳$$

۱۴. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y''' + y' = 0 ; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$$

۱۵. نشان دهید که جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y^{iv} - y = 0$$

را می‌توان به صورت

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cosh x + c_4 \sinh x$$

نوشت. جوابی را که در شرایط اولیه $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$ صدق می‌کند بیابید. چرا استفاده از $\cosh x$ و $\sinh x$ مناسب‌تر از e^x و e^{-x} است؟

مسائل ۱۶ تا ۱۹ درباره معادله اویلر مرتبه n است.

* ۱۶*. معادله اویلر مرتبه n یا معادله متعددالبعد عبارت است از

$$L[y] = x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (\text{یک})$$

که در آن $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثابت‌های حقیقی‌اند. فقط فاصله $x > 0$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که $L[x^r] = x^r F(r)$ که در آن

$$F(r) = r(r-1)\dots(r-n+1) + a_1[r(r-1)\dots(r-n+2)]$$

$$+ \dots + a_{n-1}r + a_n$$

یک چندجمله‌ای از درجه n بر حسب r است. توابع $x^r, x^{r-1}, \dots, x^{r-n}$ متناظر با ریشه‌های r_1, r_2, \dots, r_n معادله $F(r) = 0$ جواب‌های معادله (یک) می‌باشند.

(ب) نشان دهید که اگر r یک ریشه مکرر مرتبه s معادله $F(r) = 0$ باشد، آنگاه $x^r, x^{r-1}, \dots, x^{r-s}$ جواب‌های معادله (یک) می‌باشند.

هنگامی که ریشه‌های $F(r) = 0$ مختلط باشند، می‌توان جواب‌هایی با مقدار حقیقی به همان روش که در مورد معادله اویلر مرتبه دوم شرح داده شد به دست آورد. بند ۴۰۴ را ببینید.

* ۱۷*. با استفاده از نتایج مسئله ۱۶ جواب عمومی هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید. تنها فاصله $x > 0$ را در نظر بگیرید.

$$x^3 y''' + x^3 y'' - 2x y' + 2y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^3 y''' + x y' - y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + x y' - y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x^4 y''' + 5x^3 y'' + 7x^2 y'' + 8x y' = 0 \quad (\text{د})$$

$$x^3 y''' + x^3 y'' = 0 \quad (\text{ه})$$

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' - 2x y' - 4y = 0 \quad (\text{و})$$

* ۱۸*. برای تعیین کشش روی یک کره بسیار کوچک به شاعع a که در جریان یک سیال غلیظ واقع شده باشد، لازم می‌آید که معادله دیفرانسیل

$$\rho^3 f''''(\rho) + 8\rho^2 f'''(\rho) + 8\rho f''(\rho) - 8f'(\rho) = 0, \quad \rho > a$$

را حل کنیم، که در آن ρ مسافت از مرکز کره است. توجه شود که این یک معادله اویلر

بر حسب f' است و با استفاده از نتایج مسئله ۱۶، نشان دهید که جواب عمومی عبارت است از

$$f(\rho) = \frac{A}{\rho^4} + \frac{B}{\rho^2} + C + D\rho^2$$

که در آن A, B, C و D ثابت‌اند. نشان دهید که جوابی که در شرایط مرزی $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ و $f'''(a) = 0$ (سرعت در ∞) وقتی $\rho \rightarrow \infty$ صدق می‌کند، عبارت است از $U = Ua^4/2\rho^3 - 3Ua/2\rho + U$. فرمول کشش روی کره (فرمول استوکس) به صورت $U = 4\pi\mu a/6\rho^3$ در می‌آید، که در آن μ ضریب غلظت سیال است. ر. ا. میلیکان^۱ در آزمایش مشهور خود برای اندازه‌گیری بار الکترون از این نتیجه استفاده کرده است. مسئله ۹ بند ۱۰.۲ را نیز ببینید.

۱۹*. نشان دهید که به ازای $x > 0$ ، با تعویض متغیر e^{-x} معادله اویلر مرتبه سوم $a_3y + a_2xy' + a_1x^2y'' + a_0x^3y''' = 0$ به صورت ساده یک معادله خطی مرتبه سوم با ضرایب ثابت در می‌آید. این تبدیل معادله اویلر مرتبه n را نیز به صورت یک معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت در می‌آورد. مسئله ۱۷ (ب) را با این روش حل کنید.

۲۰*. تشخیص این نکته که آیا همه جوابهای یک معادله خطی همگن به ازای $x > 0$ به سمت صفر می‌گرایند یا نه، اغلب در کار بردهای مهندسی مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر پاسخ این پرسش مثبت باشد، معادله را پایداری مجانی نامند. هنگامی که x نمایشگر زمان و y پاسخ یک دستگاه فیزیکی باشد، شرط پایداری مجانی معادله دیفرانسیل بدان معنی است که شرط اولیه هرچه باشد، پاسخ دستگاه بدآن بالاخره با یعنیها پیش‌شدن x به صفر می‌گراید. در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ ، در بند ۱۷.۳ (بند ۱۵.۱.۵.۳ مسئله ۱۵ را نیز ببینید) ثابت شد که شرط کافی برای پایداری مجانی آن است که a_0, a_1 و a_2 مثبت باشند. به طور کلیتر معادله

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \quad (\text{یک})$$

که در آن a_0, a_1, \dots, a_n حقیقی‌اند، پایدار مجانی است، اگر بخش حقیقی همه ریشه‌های معادله مشخصه منفی باشند. در این باره هورویتس^۲ یک شرط لازم و کافی به دست آورده است. به ازای $n=4$ ، ملاک پایداری هورویتس را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: معادله (یک) پایدار مجانی است، اگر، و فقط، اگر به ازای $x > 0$,

$$\begin{array}{c|cc} a_1 & a_1 & a_0 \\ \hline a_1 & a_1 & a_0 \\ a_2 & a_2 & a_1 \\ \hline & a_2 & a_1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \hline a_2 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{array}$$

همه مثبت باشند. به ازای $n=3$ ، این شرط تنها در باره سه عبارت نخست با $a_3=0$ ، و به ازای $n=2$ در باره دو عبارت نخست با $a_2=0$ اعمال می‌شود. بحث کامل ملاک پایداری هر دویس را می‌توان در کتاب گیلمن^۱ (فصل ۶، مقاله ۲۶) یافت.

پایداری مجانبی هر یک از معادلات زیر را بررسی کنید، و در صورت امکان، صحبت نتیجه خود را با محاسبه جواب عمومی تحقیق کنید.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y''' - y = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y''' + y'' - y' + y = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y^{iv} + 2y'' + y = 0 \quad (\text{د})$$

$$y''' + 0y'' + 1y' + 2y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$y''' + 2y'' + 0y' + 2y = 0 \quad (\text{و})$$

۴.۵ روش ضرایب نامعین

برای معادله خطی مرتبه n ام ناهمگن با ضرایب ثابت

$$(1) L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x)$$

هنگامی که $(x)g$ به صورت مناسبی باشد، می‌توان با روش ضرایب نامعین یک جواب خصوصی به دست آورد. گرچه روش ضرایب نامعین یکی از کلیت روش تغییر پارامترها که در بند بعد شرح داده شده است نمی‌باشد، اما هرگاه قابل اجرا باشد بسیار آسانتر است. درست همانند معادله خطی مرتبه دوم، روشن است که اگر عملکر دیفرانسیلی خطی L بر یک چندجمله‌ای $A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0$ ، یا تابع نمایی e^{ax} ، یا تابع سینوسی $\sin \beta x$ ، یا تابع کسینوسی $\cos \beta x$ اثر کند، نتیجه به ترتیب یک چندجمله‌ای، یک تابع نمایی، یا یک ترکیب خطی از توابع سینوسی و کسینوسی خواهد بود. بنابراین اگر $(x)g$ به صورت مجموع چندجمله‌ایها، توابع نمایی، توابع سینوسی و کسینوسی، یا حتی حاصل ضرب این نوع توابع باشد، می‌توان امیدوار بود که $(x)g$ را با انتخاب ترکیب مناسبی از چندجمله‌ایها، توابع نمایی و... با تعدادی ضریب ثابت نامعین به دست آورد. ثابت‌ها به گونه‌ای تعیین خواهند شد که معادله (۱) برقرار گردد.

نخست به بررسی حالتی که $(x)g$ یک چندجمله‌ای درجه m

$$(2) g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

است می‌پردازیم. b_0, b_1, \dots, b_m ثابت‌های مفروض‌اند. جواب خصوصی را می‌توان

طبعاً به صورت

$$y_p(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m \quad (3)$$

در نظر گرفت. با جایگزینی y در معادله (۱) و مساوی قراردادن توانهای مشابه x ، از جمله‌های شامل x^m حاصل می‌شود $A_0 A_m = b$. اگر $A_0 A_m \neq b$ ، خواهیم داشت $A_m = b / A_0$. ثابت‌های A_1, \dots, A_{m-1} نیز از ضرایب جمله‌های شامل $x^m, x^{m-1}, \dots, x^2, x$ تعیین می‌شوند.

اگر $A_0 = 0$ ، یعنی، اگر مقدار ثابتی جواب معادله همگن باشد، معادله بالا را نمی‌توان بر حسب A_0 حل کرد؛ در این حالت لازم است که $y_p(x)$ به صورت یک چندجمله‌ای از درجه $m+1$ فرض کنیم، تا در $[x]_p^m y$ جمله‌ای بدست آید که با $b x^m$ برابری کند. البته، ازومی ندارد که در عبارت $[x]_p^m y$ مقدار ثابتی منظور کنیم. به طور کلیتر به آسانی می‌توان تحقیق کرد که اگر صفر یک ریشه مرتبه s چندجمله‌ای مشخصه باشد در این صورت x, x^2, \dots, x^{s-1} جوابهای معادله همگن‌اند، آنگاه صورت مناسب برای $y_p(x)$ عبارت است از

$$y_p(x) = x^s (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \quad (4)$$

به عنوان مسئله دیگر فرض کنیم که $g(x)$ به صورت

$$g(x) = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \quad (5)$$

باشد، آنگاه می‌توان انتظار داشت که $[x]_p^m y$ به صورت

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \quad (6)$$

باشد، به شرط آنکه $e^{\alpha x}$ جواب معادله همگن نباشد. اگر α یک ریشه مرتبه s چندجمله‌ای مشخصه باشد، صورت مناسب برای $y_p(x)$ عبارت است از

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \quad (7)$$

برای اثبات این نتایج می‌توان همانند معادله ناهمگن خطی مرتبه دوم با جایگزینی $(x) = e^{\alpha x} u$ مسئله را به حالت قبل تبدیل کرد. تابع u باید در یک معادله ناهمگن خطی مرتبه n با ضرایب ثابت صدق کند، جمله ناهمگن دقیقاً چندجمله‌ای (۲) است (مسئله ۱۸ را بینید).

به طریق مشابه، اگر $g(x)$ به صورت

$$g(x) = e^{\alpha x} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases} \quad (8)$$

باشد، آنگاه صورت مناسبی برای $y_p(x)$ ، بشرط آنکه $\alpha + i\beta$ ریشه معادله مشخصه نباشد، چنین است

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m) \cos \beta x + e^{\alpha x} (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m) \sin \beta x \quad (9)$$

اگر $\alpha + i\beta$ یک ریشه مکرر مرتبه s معادله مشخصه باشد، آنگاه لزوماً باید طرف دوم معادله (۹) را در x^s ضرب کرد.

این نتایج در جدول ۱۰.۵ خلاصه شده است.

جدول ۱۰.۵

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$	$x^s (A_0 x^m + \dots + A_m)$
$P_m(x) e^{\alpha x}$	$x^s (A_0 x^m + \dots + A_m) e^{\alpha x}$
$P_m(x) e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s [(A_0 x^m + \dots + A_m) e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_0 x^m + \dots + B_m) e^{\alpha x} \sin \beta x]$

در اینجا g کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که به ازای آن هر جمله $(x)^s$ از هر جمله تابع مکمل $(x)_p$ متمایز است.

اگر $(x)g$ مجموع جمله‌هایی به صورت (۲)، (۵) و (۸) باشد، معمولاً آسانتر است که جواب خصوصی متناظر به هر یک از جمله‌های $(x)^s$ را جداگانه محاسبه کرد. بنابر اصل انتطاق (چون معادله دیفرانسیل مزبور خطی است)، جواب خصوصی مسئله کلی برابر با حاصل جمع جوابهای خصوصی مسائل جزئی متناظر است. این مطلب در مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال. یک جواب خصوصی

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x} \quad (10)$$

را بیایید.

نخست معادله همگن را حل می‌کنیم. معادله مشخصه $0 = r^3 - 4r = r(r-2)(r+2)$ است، و ریشه‌های آن عبارتند از $0, \pm 2$ ؛ بنابراین

$$y_c(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

با استفاده از اصل انتطاق، می‌توان جواب خصوصی معادله (۱۰) را به صورت مجموع جوابهای خصوصی متناظر با معادلات دیفرانسیل

$$y''' - 4y' = x, \quad y''' - 4y' = 3 \cos x, \quad y''' - 4y' = e^{-2x}$$

نوشت. حدس اولیه برای یک جواب خصوصی، y_p ، معادله اول $A_0x + A_1$ است؛ اما چون معادله همگن دارای جواب ثابتی است، دو جمله‌ای مزبور را در x ضرب می‌کنیم. بدین‌سان

$$y_{p1}(x) = x(A_0x + A_1).$$

برای معادله دوم

$$y_{p2}(x) = B \cos x + C \sin x$$

را در نظر می‌گیریم، و به تغییر این حدس اولیه نیازی نیست، زیرا $\cos x$ و $\sin x$ جواب معادله همگن نیستند. بالاخره، برای معادله سوم، چون e^{-2x} یک جواب معادله همگن است، فرض می‌کنیم که

$$y_{p3}(x) = Exe^{-2x}$$

ثابت‌ها با جایگزینی در معادلات دیفرانسیل متناظر تعیین می‌شوند؛ عبارت‌ند از

$$A_0 = -\frac{1}{\lambda}, \quad A_1 = 0, \quad B = 0, \quad C = -\frac{3}{5}, \quad E = \frac{1}{\lambda}$$

بنا بر این یک جواب خصوصی معادله (۱۰) عبارت است از

$$y_p(x) = -\frac{1}{\lambda}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{\lambda}xe^{-2x}$$

از روش ضرایب نامعین می‌توان در هر مورد که امکان حدس صورت صحیح (x) و وجود داشته باشد استفاده کرد. اما، معمولاً این کار به جز در مورد معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت که در آن جمله‌های ناهمگن از نوع جمله‌های فوق الذکر باشند، غیرممکن است. برای مسائل پیچیده‌تر می‌توان از روش تغییر پارامترها که در بند بعد آمده است استفاده کرد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۱ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیا بیند. در مواردی که مشخص شده است، جوابی را بیا بیند که در شرایط اولیه داده شده صدق کند.

$$y''' + 4y' = x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \quad .1$$

$$y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3 \quad .2$$

$$y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x \quad .3$$

$$y''' - y' = 2 \sin x \quad .4$$

$$y^{iv} + 2y'' + y = 3x + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1 \quad .5$$

$$y^{iv} - 4y'' = x^2 + e^x \quad .6$$

$$y^{iv} + 2y'' + y = 3 + \cos 2x \quad .7$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{3}{4} \quad .8$$

$$y^{vi} + y''' = x \quad .9$$

$$y^{iv} + y''' = \sin 2x \quad .10$$

$$y^{iv} - y = 3x + \cos x \quad .11$$

در هر یک از مسائل ۱۲ تا ۱۷ صورت مناسبی برای $y(x)$ به منظور استفاده از روش ضرایب نامعین بیایید. محاسبه ضرایب لزومی ندارد.

$$y''' - 2y'' + y' = x^2 + 2e^x \quad .12$$

$$y''' - y' = xe^{-x} + 2 \cos x \quad .13$$

$$y^{iv} - 2y'' + y = e^x + \sin x \quad .14$$

$$y^{iv} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x \sin x \quad .15$$

$$y^{iv} + 4y'' = \sin 2x + xe^x + 4 \quad .16$$

$$y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x} \sin x \quad .17$$

۱۸. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام ناهمگن

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x)$$

را که در آن a_0, \dots, a_n ثابت‌اند در نظر می‌گیریم. تحقیق کنید که اگر $g(x)$ به صورت

$$e^{\alpha x}(b_0 x^n + \dots + b_m)$$

باشد، آنگاه با جایگزینی $y = e^{\alpha x} u(x)$ معادله بالا به صورت

$$t_0 u^{(n)} + t_1 u^{(n-1)} + \dots + t_n u = b_0 x^n + \dots + b_m$$

در می‌آید، که در آن t_0, \dots, t_n ثابت‌اند. t_0 و t_n را بر حسب a_i ها و α تعیین کنید. بدین‌سان مسئله تعیین یک جواب خصوصی معادله اصلی به مسئله ساده تعیین جواب خصوصی یک معادله با ضرایب ثابت که در آن جمله ناهمگن یک چندجمله‌ای است تبدیل می‌شود.

۵.۵ روش تغییر پارامترها

روش تغییر پارامترها برای تعیین یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام ناهمگن

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \quad (1)$$

مستقیماً تعمیم نظریه‌ای است که در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بیان شد (بند ۲.۶.۳ را ببینید). چنان‌که گذشت، برای استفاده از روش تغییر پارامترها، لازم است نخست معادله دیفرانسیل همگن متناظر را حل کنیم. این کار عموماً دشوار است، مگر آنکه ضرایب ثابت باشند. با وجود این روش تغییر پارامترها به‌مفهومی که ذیلاً بیان می‌شود از روش ضرایب نامعین عامتر است. روش ضرایب نامعین را معمولاً می‌توان فقط در باره معادلات با ضرایب ثابت و طبقه محدودی از توابع y بدکار گرفت؛ در مورد معادلات با ضرایب ثابت، معادله همگن را می‌توان حل کرد و از آنجا یک جواب خصوصی متناظر به y تابع پیوسته y با استفاده از روش تغییر پارامترها به دست آورد. اکنون فرض کنیم که یک مجموعه اساسی جوابهای u_1, u_2, \dots, u_n از معادله همگن معلوم باشد. آنگاه

$$y_c(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) \quad (2)$$

روش تغییر پارامترها برای تعیین یک جواب خصوصی معادله (1) مبتنی بر آن است که بتوان n تابع u_1, u_2, \dots, u_n را به‌گونه‌ای تعیین کرد که $(x)^p y$ به صورت

$$y_p(x) = u_1(x)u_1(x) + u_2(x)u_2(x) + \dots + u_n(x)u_n(x) \quad (3)$$

باشد. چون باید y تابع را تعیین کنیم، لازم است که y شرط مشخص گردد. روشن است که یکی از آنها آن است که y در معادله (1) صدق کند. $1-n$ شرط دیگر به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که محاسبات آسان گردد. از آنجا که اگر تعیین y به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر برای u_1, u_2, \dots, u_n منجر گردد، نمی‌توان انتظار داشت که سهولتی در محاسبات به وجود آید، طبعاً باید شرایطی اعمال کرد که در نتیجه جمله‌ها بی که منجر به مشتقهای بالاتر u_i می‌گردند حذف شوند. از معادله (3) به دست می‌آید

$$y_p = (u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + \dots + u_n u'_n) + (u'_1 u_1 + u'_2 u_2 + \dots + u'_n u_n) \quad (4)$$

بدین‌سان نخستین شرطی که بر u_i ‌ها اعمال می‌کنیم آن است که

$$u'_1 u_1 + u'_2 u_2 + \dots + u'_n u_n = 0 \quad (5)$$

با ادامه این روش به‌طرز مشابه مشتقهای u_i تا مرتبه $1-n$ به صورت

$$y_p^{(m)} = u_1 u_1^{(m)} + u_2 u_2^{(m)} + \dots + u_n u_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

و $1-n$ شرط زیر برای توابع u_1, u_2, \dots, u_n حاصل می‌گردد:

$$u'_1 y_1^{(m-1)} + u'_2 y_2^{(m-1)} + \dots + u'_n y_n^{(m-1)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7)$$

مشتق مرتبه m ام y_p عبارت است از

$$y_p^{(n)} = (u'_1 y_1^{(n)} + \dots + u'_n y_n^{(n)}) + (u'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)}) \quad (8)$$

بالاخره، این شرط را که y_p جواب معادله (1) باشد اعمال می کنیم. با جایگزینی مشتقهای y از روابط (6) و (8)، و دسته بندی جمله ها، و استفاده از روابط $L[y_i] = 0$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

$$u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u'_n y_n^{(n-1)} = g \quad (9)$$

معادله (9)، همراه با $1 - n$ معادله (7)، یک دستگاه معادلات ناهمگن خطی برای u'_1, u'_2, \dots, u'_n تشکیل می دهد:

$$\begin{aligned} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \dots + y_n u'_n &= 0, \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \dots + y'_n u'_n &= 0, \\ y''_1 u'_1 + y''_2 u'_2 + \dots + y''_n u'_n &= 0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}_1 u'_1 + \dots + y^{(n-1)}_n u'_n &= g. \end{aligned} \quad (10)$$

شرط کافی برای وجود جواب دستگاه معادلات (10) آن است که دترمینان ضرایب به ازای هر مقدار x مخالف صفر باشد. اما، دترمینان ضرایب دقیقاً همان $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ است، و هیچگاه صفر نمی شوند، زیرا y_1, \dots, y_n جوابهای مستقل خطی معادله همگن می باشند. بنابراین می توان u'_1, \dots, u'_n را معین کرد. با استفاده از دستور کرامر، دیده می شود که جواب دستگاه (10) عبارت است از

$$u'_m(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

که در آن $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ دترمینان حاصل از $W(x)$ با قراردادن ستون $(1, 1, \dots, 1)$ به جای ستون m است، تا آین نماد جواب خصوصی معادله (1) عبارت است از

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^n y_m(x) \int^x \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)} dt, \quad (12)$$

با وجود آنکه این روش ساده است، اما مسئله محاسباتی تعیین (x) از رابطه (12) به ازای $n > 2$ آسان نیست. محاسبات را می توان تا اندازه ای با استفاده از اتحاد آبل:

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = c \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right].$$

ساده نمود (مسئله ۲ بند ۵.۲ را ببینید). ثابت کرد امی توان با محاسبه y_1, y_2, \dots, y_n در یک نقطه انتخابی مناسب تعیین کرد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۳ با استفاده از روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل داده شده بباید.

$$y''' + y' = \tan x, \quad 0 < x < \pi/2 \quad .1$$

$$y''' - y' = x \quad .2$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x} \quad .3$$

۴. مطلوب است تعیین یک جواب خصوصی معادله

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x y' + 2y = 2x^4, \quad x > 0$$

در صورتی که بدانیم x, x^2 و x^4 جوابهای معادله همگن متناظرند.

۵. برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$y''' - y'' + y' - y = g(x)$$

فرمولی که شامل چند انتگرال باشد، بباید.

۶. برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$\underline{y} = g(x)$$

فرمولی که شامل چند انتگرال باشد، بباید.

(اهنگی): توابع $\cosh x, \sinh x, \cos x, \sin x$ تشکیل یک مجموعه اساسی جوابهای معادله همگن را می‌دهند.

۷. برای جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

$$x^5 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = g(x), \quad x > 0$$

فرمولی که شامل چند انتگرال باشد، بباید.

(اهنگی): تحقیق کنید که جوابهای معادله همگن عبارتند از x, x^2, x^3 و x^5 .

مراجع

Coddington, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential*

۶

تبدیل لاپلاس

۱.۶ مقدمه. تعریف تبدیل لاپلاس

یکی از ابزارهای بسیار مفید برای حل معادلات دیفرانسیل خطی تبدیلات انتگرالی است.

@jozve_iut

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt \quad (1)$$

که تابع مفروض f را با انتگرال گیری به یک تابع دیگر F تبدیل می‌کند. تابع F را مبدل f ، و تابع K را هسته تبدیل می‌نامند. طرح کلمی آن است که با استفاده از رابطه (۱) مسئله مربوط به f را به یک مسئله ساده‌تر مربوط به F تبدیل کرده و این مسئله ساده‌تر را حل نمود و سپس تابع مطلوب f را با استفاده از مبدل آن، F به دست آورد. با انتخاب یک هسته مناسب K و حدود انتگرال گیری α و β ، اغلب می‌توان مسئله متضمن یک معادله دیفرانسیل خطی را به‌طور اساسی ساده کرد. برخی از تبدیلات انتگرالی دارای کاربردهای فراوانی می‌باشند، و هریک از آنها برای گونه‌هایی از مسائل مناسب‌اند.

در این فصل به بررسی خواص تبدیل لاپلاس^۱ و برخی از کاربردهای آن می‌پردازیم.

۱. پ.س. لاپلاس (P.S. Laplace)، (۱۷۴۹-۱۸۲۷) یکی از بنزرنگترین ریاضی‌دانان فرانسوی است، که به‌سبب پژوهشهاش در نجوم، احتمالات، و مکانیک شهرت یافته است. وی رابطه (۲) را در ۱۷۸۲، مورد مطالعه قرارداد، اما فنوونی که در این فصل بیان شده‌اند مدتها بعد و عمده‌تاً توسط اولیور هویسайд (Oliver Heaviside)، (۱۸۵۰-۱۹۲۵) تکامل یافته‌اند.

این تبدیل به طریق زیر تعریف می‌شود. گیریم $f(t)$ بدهازای $t \geq 0$ معین باشد، و فرض کنیم که f در شرایطی که بعداً بیان می‌شود صدق کند. در این صورت مبدل f در تبدیل لاپلاس، که آن را با $\{f(t)\}_s$ یا $F(s)$ نشان خواهیم داد، با تساوی زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

هسته این تبدیل $e^{-st} K(s, t)$ است، و به ویژه به معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت وابسته است. این تبدیل بخصوص در حل مسائلی که جمله‌های ناهمگن آنها دارای طبیعت ضربه‌ای یا ناپیوستگی می‌باشند سودمند است. در مورد این قبیل مسائل اعمال روشهایی که در پیش بیان شد نسبتاً دشوار است، و متضمن آن است که جوابهایی را که در فواصل متفاوت معتبرند بهم پیوندیم. در تحلیل مدارها که جمله‌های ضربه‌ای یا ناپیوسته فراوانند، تبدیل لاپلاس به ویژه بسیار با ارزش است، اما در کاربردهای دیگر نیز واجد اهمیت است.

چون تبدیل لاپلاس با انتگرالی روی دامنه صفر تا بینها یت تعریف می‌شود، مناسب است که نخست برخی از خواص اساسی این گونه انتگرال‌ها را یادآوری کنیم. بدولاً متذکر می‌شویم که هر انتگرال روی فاصله بی کران را انتگرال ناسره می‌نامند، و به صورت حد انتگرال‌هایی که روی فواصل متناهی تعیین شده‌اند تعریف می‌شود؛ بدینسان

$$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t) dt \quad (3)$$

که در آن A عدد حقیقی مثبتی است. اگر انتگرال از 0 تا A بدهازای هر $a > A$ وجود داشته باشد، و اگر وقتی $\infty \rightarrow A$ حد وجود داشته باشد، آنگاه می‌گویند انتگرال ناسره به این مقدار حدی همگراست. در غیر این صورت گوییم انتگرال داگراست و یا وجود ندارد. مثال‌های زیر هردو حالت را توضیح می‌دهد.

مثال ۱. فرض کنیم $f(t) = e^{ct}$ ، که در آن c یک عدد غیر صفر ثابت است.

آنگاه

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ct} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{ct}}{c} \Big|_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{c} (e^{cA} - 1). \end{aligned}$$

در نتیجه انتگرال ناسره همگراست اگر $c < 0$ ، و واگراست اگر $c > 0$. تابع زیر علامت انتگرال برابر واحد است، و باز هم انتگرال واگراست.

مثال ۲. فرض کنیم $f(t) = 1/t$ ، $t \geq 1$. آنگاه

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A.$$

چون $\lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$ ، انتگرال ناسره واگر است.

مثال ۳. فرض کنیم $f(t) = t^{-p}$ ، که در آن p یک عدد ثابت و $p \neq 1$ است؛ حالت $p = 1$ در مثال ۲ بررسی شد. آنگاه

$$\int_1^\infty t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1).$$

وقتی $A \rightarrow \infty$ ، $A^{1-p} \rightarrow 0$ اگر $1 > p$ ، اما $A^{1-p} \rightarrow \infty$ اگر $1 < p$. بنابراین $\int_1^\infty t^{-p} dt$ به ازای $1 > p$ همگر است، اما (با احتساب نتیجه مثال ۲) به ازای $1 < p$ واگر است. این نتایج مشابه نتایج مربوط به سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ می باشند.

پیش از بحث درباره وجود $\int_a^\infty f(t) dt$ ، باید به تعریف چند اصطلاح پردازیم. تابع f را روی فاصله $\alpha \leq t \leq \beta$ پیوسته قطعه‌ای نامند، اگر بتوان این فاصله را با تعدادی متناهی از نقاط

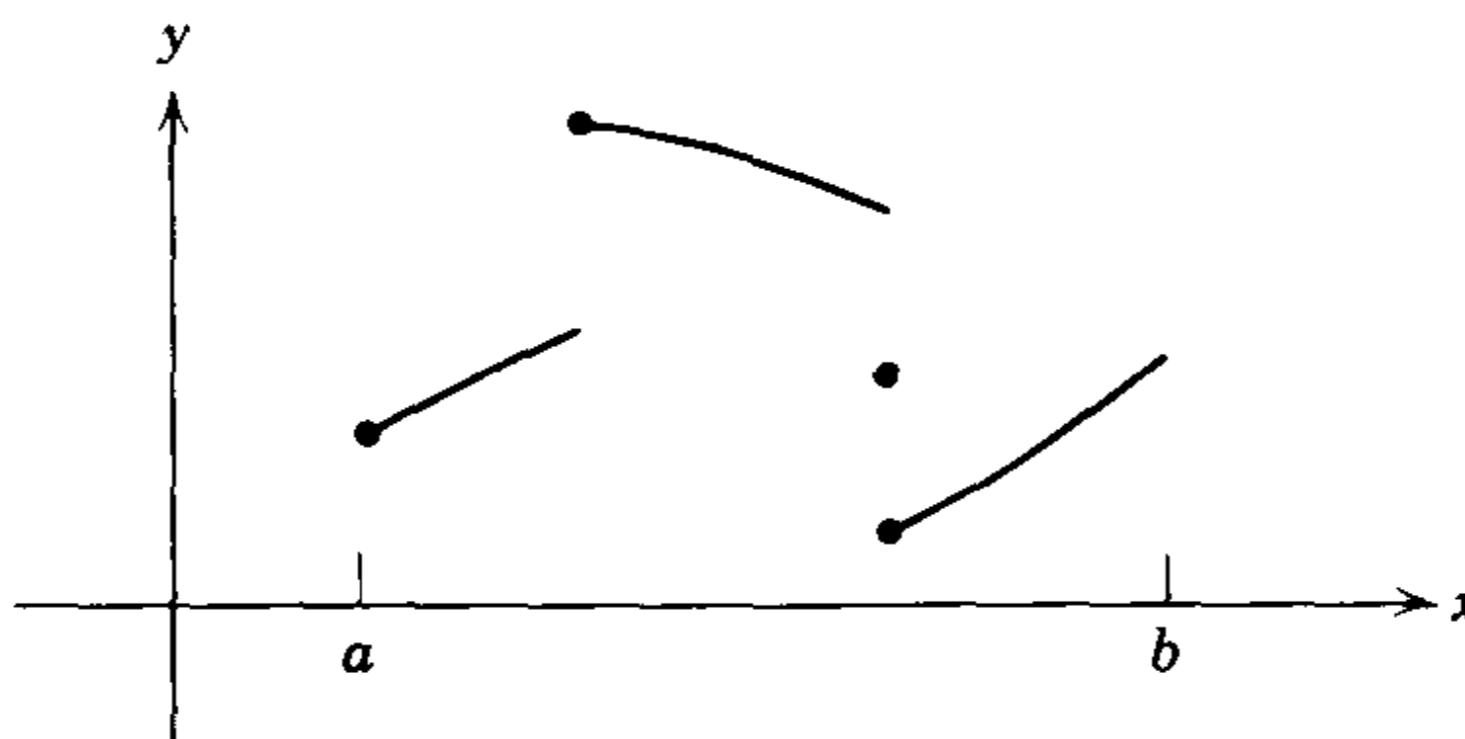
$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

طوری تقسیم کرد که

۱. f روی هر زیرفاصله $t_i < t < t_{i+1}$ پیوسته باشد؛
۲. هنگامی که نقطه‌ای از داخل هر زیرفاصله به نقاط انتهایی آن میل کند، f دارای حد متناهی باشد.

به عبارت دیگر، f در $\alpha \leq t \leq \beta$ پیوسته قطعه‌ای است اگر به جز تعدادی متناهی ناپیوستگی جهشی، در این فاصله پیوسته باشد. اگر f روی $\alpha \leq t \leq \beta$ پیوسته باشد، $\alpha < t < \beta$ ، $\alpha < t \leq \beta$ پیوسته قطعه‌ای باشد، آنگاه f را روی $t \geq \alpha$ پیوسته قطعه‌ای نامند. در شکل ۱.۶ مثالی از تابع پیوسته قطعه‌ای نشان داده شده است.

اگر f روی فاصله $A \leq t \leq a$ پیوسته قطعه‌ای باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که $\int_a^A f(t) dt$ وجود دارد. بنابراین، اگر f به ازای $a \leq t \leq A$ پیوسته قطعه‌ای باشد، آنگاه $\int_a^A f(t) dt$ به ازای هر $A > a$ وجود خواهد داشت. اما، چنان‌که در مثالهای بالا دیده شد، پیوستگی قطعه‌ای برای تأمین همگرایی انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(t) dt$ کافی نیست.



شکل ۱۰۶ یک تابع پیوسته قطعه‌ای.

اگر به آسانی نتوان انتگرال f را بر حسب توابع مقدماتی به دست آورد، استفاده از تعریف همگرایی انتگرال $\int_a^{\infty} f(t) dt$ ممکن است دشوار باشد. در اغلب موارد قضیه مقایسه زیر که نظیر قضیه مشابه آن در سریهای است، مناسبترین روش آزمون همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره را به دست می‌دهد.

قضیه ۱۰۶. فرض کنیم f به ازای $a \leq t$ پیوسته قطعه‌ای باشد، اگر به ازای یک ثابت مثبت M دوی $t \geq a$ داشته باشیم $|f(t)| \leq g(t)$ ، و اگر $g(t) dt$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^{\infty} f(t) dt$ نیز همگراست. از طرف دیگر، اگر به ازای $M \geq t$ داشته باشیم $f(t) \geq g(t) \geq 0$ ، و اگر $f(t) dt$ باشد، آنگاه $\int_M^{\infty} f(t) dt$ نیز واگراست.

اثبات این قضیه را که مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال است در اینجا نمی‌آوریم. اما، با مقایسه مساحتها که با $\int_M^{\infty} |f(t)| dt$ و $\int_M^{\infty} g(t) dt$ نموده می‌شوند می‌توان آن را توجیه کرد. مفیدترین توابع برای مقایسه عبارتند از e^{-t} و $t^{-\mu}$ ، که آنها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ بررسی کردیم.

اکنون بار دیگر مبدل لاپلاس $\{f(t)\}$ یا $(s)F$ را که با رابطه (۲) هنگامی که انتگرال ناسره مذبور همگرا باشد معین می‌گردد، مورد توجه قرار می‌دهیم. در حالت کلی، پارامتری، می‌تواند مختلط باشد، اما در این بحث کافی است تنها مقادیر حقیقی s را بررسی کنیم. بنا بر بحثی که درباره انتگرالها عنوان شد، تابع f باید در شرایطی صدق کند تا F مبدل لاپلاس آن وجود داشته باشد. مفیدترین و ساده‌ترین این شرایط در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۱۰۷. فرض کنیم که
(یک) f دوی فاصله $A \leq t \leq 0$ به ازای هر A مثبت پیوسته قطعه‌ای باشد؛

(دو) به ازای $t \geq M$ داشته باشیم $|f(t)| \leq ke^{at}$. در این نامساوی $M > a, k$ اعداد حقیقی ثابت‌اند، و لزوماً $M > a$ مثبت‌اند.
آنگاه مبدل لاپلاس $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ، که با رابطه (۲) تعریف شد، به ازای $s > a$ وجود دارد.

برای اثبات این قضیه تنها لازم است نشان دهیم که انتگرال موجود در رابطه (۲) به ازای $s > a$ همگراست. انتگرال ناسرة مزبور را به دو بخش تقسیم می‌کنیم

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (4)$$

نخستین انتگرال در طرف دوم رابطه (۴) بنابر فرض (یک) قضیه وجود دارد؛ بنابراین وجود $F(s)$ بستگی به همگرایی انتگرال دوم خواهد داشت. بنابر فرض (دو) به ازای $t \geq M$

$$|e^{-st} f(t)| \leq ke^{-st} e^{at} = ke^{(a-s)t},$$

و بدین‌سان، بنا بر قضیه ۱.۶، اگر $\int_M^\infty e^{(a-s)t} dt$ وجود دارد، با مراععه به مثال ۱ و قراردادن $s - a$ به جای t ، دیده می‌شود که این انتگرال هنگامی که $a - s < 0$ همگراست و قضیه ۲.۶ ثابت می‌شود.

در این فصل، تنها توابعی را که در شرایط قضیه ۲.۶ صدق کنند در نظر می‌گیریم، مگر آن که خلاف آن تصریح شود. این نوع توابع را پیوسته قطعه‌ای، و از دقبه نهایی وقتی $t \rightarrow \infty$ می‌نامند. مبدل لاپلاس برخی از توابع مقدارهای مهم در مثالهای زیرداده شده است.

مثال ۴. گیریم ۱. آنگاه

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

مثال ۵. گیریم ۲. آنگاه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a \end{aligned}$$

مثال ۶. گیریم ۳. آنگاه

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt, \quad s > 0$$

چون

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \sin at dt,$$

با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st} \cos at}{a} \Big|_0^A - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos at dt \right] \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt. \end{aligned}$$

باردیگر از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s). \end{aligned}$$

بنابراین، با حل معادله نسبت به $F(s)$ داریم

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

@jozve_iut

اکنون فرض کنیم که f_1 و f_2 دو تابعی باشند که مبدل لاپلاس آنها به ترتیب به ازای a_1 و a_2 و $s > a_2 > a_1$ وجود داشته باشد. آنگاه، بداعزای s بزرگتر از ماکریم a_1 و a_2 داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt, \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad (5)$$

رابطه (5) میین آن است که تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است. این خاصیت فوق العاده مهم است، و ما در آینده از آن استفاده فراوانی خواهیم کرد

مسائل

۱. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. در هر حالت تعیین کنید که آیا تابع f روی فاصله $3 \leq t \leq 1$ پیوسته یا پیوسته قطعه‌ای است و یا هیچ‌گدام

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (\text{د})$$

۲. مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

(الف) t^n (ب) t^a (ج) t^a که در آن n عدد صحیح مشتبی است.

۳. مبدل لاپلاس $f(t) = \cos at$ را که در آن a ثابتی است حقیقی بیابید.

۴. با توجه به روابط ۲ و $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ مبدل لاپلاس $\sinh bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2i$ را بیابید؛ a و b ثابت‌های حقیقی‌اند.

۵. با توجه به روابط ۲ و $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2i$ و $\sin bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$ مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید؛ a و b ثابت‌های حقیقی‌اند.

$\sinh bt$ (ب) $\cosh bt$ (الف)

$e^{at} \sinh bt$ (د) $e^{at} \cosh bt$ (ج)

۶. با توجه به روابط ۲ و $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2i$ و $\sin bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$ و با فرض آنکه فرمولهای مقدماتی انتگرال‌گیری به این حالت تمییم می‌یابند، مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید؛ a و b ثابت‌های حقیقی‌اند.

$\cos bt$ (الف) $\sin bt$ (الف)

$e^{at} \cos bt$ (د) $e^{at} \sin bt$ (ج)

۷. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را

باید؛ n یک عدد صحیح مثبت و a ثابتی حقیقی است.

$t \cosh at$	(ج)	$t \sin at$	(ب)	te^{at}	(الف)
$t^n \sinh at$	(م)	$t^n \sin at$	(ک)	$t^n e^{at}$	(د)

۷. مطلوب است تعیین همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرالهای زیر:

$$\int_1^\infty t^{-2} e^t dt \quad (ج) \quad \int_0^\infty te^{-t} dt \quad (ب) \quad \int_0^\infty (t^2 + 1)^{-1} dt \quad (الف)$$

۸. فرض کنیم که f و f' به ازای $0 \leq t$ پیوسته و وقتی $\infty \rightarrow t$ از رتبه نمایی باشند. با انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان دهید که اگر $\{f(t)\}_{t=0}^\infty = F(s)$ آنگاه $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. در واقع این نتیجه تحت شرایط ضعیفتری نیز همانند آنچه در قضیه ۴.۶ بیان شد صادق است.

۹. تابع گاما. تابع گاما را با $\Gamma(p)$ نشان داده و با انتگرال

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx \quad (یک)$$

تعریف می‌کنند. این انتگرال به ازای همه مقادیر p درینهاست همگرایی. به ازای $p < 0$ نیز یک انتگرال ناسره است، زیرا وقتی $0 \rightarrow x$ تابع زیر علامت انتگرال بی‌کران می‌شود. اما، می‌توان نشان داد که این انتگرال در $x = 0$ به ازای $1 - p$ همگرای است.

$$\text{(الف) نشان دهید که به ازای } p > 0 \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

(ب) اگر p برابر عدد صحیح مثبت n باشد، نشان دهید که

$$\Gamma(n+1) = n!$$

جون $\Gamma(p)$ به ازای مقادیر ناصحیح p نیز معین است، این تابع تعمیمی از تابع فاکتوریل را برای مقادیر ناصحیح متغیر مستقل به دست می‌دهد.

$$\text{(ج) نشان دهید که به ازای } p > 0 \quad p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$$

بدینسان اگر مقادیر $\Gamma(p)$ در یک فاصله به طول واحد، مثلاً $1 \leq p \leq 2$ معلوم باشد، می‌توان به ازای همه مقادیر مثبت p ، $\Gamma(p)$ را تعیین کرد. می‌توان نشان داد که $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(3/2) = 1/2 \cdot \Gamma(1/2)$ را بیاند.

(د) نشان دهید که $\Gamma(1) = 1$ و درنتیجه با تعریف $1 = 1! = 1$ سازگار است.

۱۰. مبدل لاپلاس t^p را که در آن $\mathcal{L}\{t^p\} = p$ است در نظر می‌گیریم.
 (الف) با مراجعه به مسئله ۹، نشان دهید که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^p\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^p dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-sx} x^p dx \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

(ب) اگر p برابر عدد صحیح مثبت n باشد، نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

(ج) نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad s > 0.$$

می‌توان نشان داد که

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$$

(د) نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}, \quad s > 0.$$

۲۰. حل مسائل مقدار اولیه

در این بند نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان مسائل مقدار اولیه را در مورد معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت حل کرد. کارایی تبدیل لاپلاس در این مورد اساساً مبتنی بر این نکته است که مبدل از به طریق ساده‌ای با مبدل از مرتبط می‌گردد. توضیح این ارتباط در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۳۰.۶. فرض کنیم که دو هر فاصله $A \leq t \leq b$ قابع در پیوسته و از پیوسته قطعه‌ای باشد. علاوه بر این فرض کنیم که ثابت‌های a, K, M وجود دارند به طوری که

به ازای $t \geq M$ داشته باشیم " آنگاه $|f(t)| \leq Ke^{at}$ بازی $a > s$ وجود دارد، و علاوه براین

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (1)$$

برای اثبات این قضیه انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt$$

اگر نقاط ناپیوستگی f' در فاصله $A \leq t \leq 0$ را با t_1, t_2, \dots, t_n نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots \\ &\quad + \int_{t_n}^A e^{-st} f'(t) dt \end{aligned}$$

با انتگرال گیری جزء به جزء هر یک از جمله‌های طرف دوم به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^A \\ &\quad + s \left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

چون f پیوسته است، جمله‌های شامل t_1, t_2, \dots, t_n حذف می‌شوند. از ترکیب انتگرال‌ها به دست می‌آید

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

هنگامی که $s > a$ ، وقتی $A \rightarrow \infty$ داریم 0 . بنابراین، به ازای $s > a$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

و قضیه ثابت می‌شود.

اگر f' و f'' در همان شرایطی که در قضیه ۳.۶ به ترتیب برای f و f' منظور شد صدق کنند، آنگاه مبدل لاپلاس f'' نیز به ازای $a > s$ وجود دارد و با رابطه زیر معین می‌شود

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad (2)$$

در واقع، اگر f و مشتقهای آن در شرایط مناسبی صدق کنند، با کاربردهای متوالی این قضیه می‌توان عبارتی برای مبدل $(^n)f$ مشتق n ام f به دست آورد. این مطلب در نتیجه زیر آمده است.

نتیجه. فرض کنیم که در هر فاصله $A \leq t \leq 0$ توابع $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ پیوسته و $(^n)f$ پیوسته قطعه‌ای باشد. علاوه بر این فرض کنیم که ثابت‌های K, M, a وجود داشته باشند به طوری که به ازای $t \geq M$ $|f(t)| \leq Ke^{at}$ ، $|f'(t)| \leq Ke^{at}$ ، \dots ، $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$. آنگاه $\{(^n)f\}$ به ازای $a > s$ وجود دارد و با ابطة ذیو معین می‌شود

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

اکنون طرز استفاده از تبدیل لاپلاس را برای حل مسائل مقدار اولیه بیان می‌کنیم.

نخست معادله دیفرانسیل

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (4)$$

و شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (5)$$

را در نظر می‌گیریم.

این مسئله ساده به آسانی با روش‌های بند ۵.۳ حل می‌شود. معادله مشخصه آن عبارت است از

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \therefore r_1 = 2, \quad r_2 = -1 \quad (6)$$

و در نتیجه جواب عمومی معادله (۴) چنین است

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \quad (7)$$

شرط اولیه (۵) مستلزم آن است که $c_1 = \frac{2}{3}$ ؛ بنابراین $-c_1 + 2c_2 = 0$ ، $c_1 + c_2 = 1$ ؛ و بدینسان جواب مسئله مقدار اولیه (۴) و (۵) عبارت است از

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \quad (8)$$

اکنون همین مسئله را به وسیله تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم. برای این‌منظور باید فرض کنیم که مسئله دارای یک جواب $\phi = y$ است و نخستین دو مشتق آن در شرایط نتیجه بالا صدق می‌کنند. آنگاه، با اعمال تبدیل لاپلاس در مورد معادله (۴) خواهیم داشت

$$\mathcal{L}\{y'' - y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (9)$$

در اینجا از خطی بودن تبدیل استفاده شده، مبدل مجموع به صورت حاصل جمع

مبدلها نوشته شده است. با استفاده از نتیجه بالا $\{''y\} = \{y'\}$ و $\{y'\} = \{y(0)\}$ را بر حسب $\{y\}$ بیان می کنیم، و معادله (۹) به صورت زیر در می آید

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s \mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2 \mathcal{L}\{y\} = 0$$

یا

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0 \quad (10)$$

که در آن $\{y\} = Y(s)$. چون از شرایط اولیه (۵) مقادیر $y(0)$ و $y'(0)$ را در معادله (۱۰) جایگزین کرده و آن را نسبت به $Y(s)$ حل کنیم، به دست می آید

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \quad (11)$$

بدینسان برای $Y(s)$ که مبدل لاپلاس جواب مسئله مقدار اولیه یعنی $y(0) = \phi(t)$ است، عبارتی به دست آورده ایم. برای تعیین تابع ϕ باید تابعی را بیابیم که مبدل لاپلاس آن برابر $Y(s)$ که با رابطه (۱۱) داده شده است، باشد.

این کار را در این حالت می توان به آسانی با بسط طرف دوم رابطه (۱۱) به کسرهای ساده انجام داد. بدینسان

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} \quad (12)$$

بالاخره، با توجه به نتیجه مثال ۵ بند ۶.۱، دیده می شود که مبدل $\frac{1}{3}e^{2t}$ برابر $\frac{1}{s-2}$ است؛ به همین طریق $\frac{2}{3}e^{-t}$ دارای مبدل $\frac{2}{s+1}$ است. بنابراین، با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس،

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

دارای مبدل (۱۲) است. این همان جوابی است که قبلاً با روش دیگری به دست آمد. گرچه در این مسئله ساده از به کار گرفتن تبدیل لاپلاس مزیت خاصی حاصل نمی شود، با وجود این می توان برخی از ویژگیهای اساسی روش تبدیل را خاطر نشان کرد. نخست آنکه، $(s)Y$ مبدل تابع مجهول $\phi(t) = y$ از حل یک معادله جبری، معادله (۱۰)، و نه یک معادله دیفرانسیل به دست می آید. دیگر آنکه مستقیماً جوابی به دست می آید که هم در شرایط اولیه (۵) و هم در معادله دیفرانسیل (۴) صدق می کند. بدینسان مسئله تعیین مقادیر مناسب برای ثابت های دلخواه جواب عمومی مطرح نمی گردد. برای خواندن این نکته نیز قابل توجه است که ضریب $(s)Y$ در معادله (۱۰) دقیقاً همان چندجمله ای موجود در معادله

مشخصه (۶) است؛ و در واقع همیشه چنین است. چون استفاده از بسط (۵) \mathcal{Y} به کسرهای ساده برای تعیین (۶) ϕ مستلزم تجزیه چند جمله‌ای می‌باشد، بنا بر این به کار گرفتن تبدیل لاپلاس ما را از تعیین ریشه‌های معادله مشخصه بی نیاز نمی‌کند. در مورد معادلاتی که مرتبه آنها بالاتر از دو است امکان دارد که این یک مسئله جبری دشواری باشد، به ویژه اگر ریشه‌ها گنگ یا مختلط باشند.

دشواری اصلی در حل مسائل مقدار اولیه به روش تبدیل همان مسئله تعیین تابع $y = \phi(t)$ متناظر با مبدل $(s)\mathcal{Y}$ است. این مسئله را مسئله عکس تبدیل لاپلاس می‌نامند؛ (۶) ϕ مبدل معکوس متناظر به $(s)\mathcal{Y}$ ، و روش تعیین (۶) ϕ از $(s)\mathcal{Y}$ «تبدیل معکوس» نامیده می‌شود. برای نشان دادن مبدل معکوس $(s)\mathcal{Y}$ از علامت $\{(s)\mathcal{Y}\}^{-1}$ استفاده می‌کنیم. برای تبدیل معکوس لاپلاس فرمول کلی وجود دارد، اما به کار گرفتن آن مستلزم اطلاعاتی از مبحث توابع مختلط است و آن را در این کتاب مطرح نمی‌کنیم. اما، با وجود این می‌توان بسیاری از خواص مهم تبدیل لاپلاس، و حل بسیاری از مسائل جالب را، بدون استفاده از توابع مختلط به دست آورد.

در حل مسئله مقدار اولیه (۴) و (۵) این سؤال را که آیا جز تابعی که با رابطه (۸) داده شده است توابع دیگری که دارای همان مبدل (۱۲) باشند وجود دارد؟ مطرح نکردیم. در واقع، می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی پیوسته با مبدل لاپلاس F باشد، آنگاه تابع پیوسته دیگری که دارای همان مبدل باشد وجود ندارد. به عبارت دیگر، اساساً بین توابع و مبدل لاپلاس آنها یک تناظر یک به یک وجود دارد. این نکته گردآوری جدولی از مبدل‌های توابع متداول و معکوس آنها را مطرح می‌کند (جدول ۱.۶ را بینید).^۱ درستون دوم مبدل توابع متناظر در ستون اول مندرج است. مهتر آنکه توابع ستون اول مبدل معکوس توابع متناظر درستون دوم می‌باشند. بدین‌سان، مثلاً اگر مبدل جواب معادله دیفرانسیلی معلوم باشد، خود جواب را غالب می‌توان به سادگی با مراعتمه به جدول پیدا کرد. برخی از عناصر جدول ۱.۶ به عنوان مثال مورد استفاده قرار گرفتند و برخی به عنوان مسئله در بند ۱.۶ مطرح می‌گردند، مابقی را بعداً در همین فصل بررسی می‌کنیم. ستون سوم این جدول جایی را که در آن اشتغال مبدل مزبور را می‌توان یافت نشان می‌دهد.

اغلب، یک مبدل لاپلاس $(s)F$ را می‌توان به صورت مجموع چند جمله نوشت

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad (12)$$

فرض کنیم که $\{F_1(s)\}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}, \dots, \{F_n(s)\}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\{f_n(s)\}$. آنگاه تابع

$$f(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$$

دارای مبدل لاپلاس $(s)F$ است. بنا بر خاصیت یکتاًی فوق الذکر تابع پیوسته دیگری که دارای همین مبدل باشد وجود ندارد. بدین‌سان

۱. جداول مفصلتری نیز در دسترس است. هنابع پایانی این فصل را بینید.

جدول ۱.۶ مبدل‌های لاپلاس توابع مقدماتی

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	توجه
۱	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	بند ۱.۶؛ مثال ۴
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	بند ۱.۶؛ مثال ۵
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > a$	بند ۱.۶؛ مثال ۶
$t^n, n = \text{عدد صحيح مثبت}$	$\left. \begin{array}{l} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0 \\ \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0 \end{array} \right\}$	بند ۱.۶؛ مسئله ۱۰
$t^p, p > -1$		
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	بند ۱.۶؛ مسئله ۳
$\sinh at$	$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a \\ \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a \end{array} \right\}$	بند ۱.۶؛ مسئله ۴
$\cosh at$		
$e^{at} \sin bt$	$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a \\ \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a \end{array} \right\}$	بند ۱.۶؛ مسئله ۵
$e^{at} \cos bt$		
$t^n e^{at}, n = \text{عدد صحيح مثبت}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	بند ۱.۶؛ مسئله ۶
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	۳.۶
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	۳.۶
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	۳.۶
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	بند ۳.۶؛ مسئله ۴
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	۵.۶
$\delta(t-c)$	e^{-cs}	۴.۶
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	۲.۶
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	بند ۲.۶؛ مسئله ۱۶

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \quad (14)$$

یعنی، عکس تبدیل لاپلاس نیز یک عملگر خطی است.
در بسیاری از مسائل به آسانی می‌توان این خاصیت را به کار گرفت و مبدل مفروض را به مجموع توابعی که مبدل معکوس آنها معلوم است یا از جدول می‌توان به دست آورد تجزیه کرد. بسط به کسرهای ساده در این مورد دارای اهمیت خاصی است، حالت کلی آن را در مسئله ۱۹ آورده‌ایم. خواص مفید دیگر تبدیل لاپلاس را بعداً در این فصل بیان می‌کنیم.

برای توضیح بیشتر در مورد روش حل مسائل مقدار اولیه به وسیله تبدیل لاپلاس به مثال زیر توجه شود.

مثال. مطلوب است تعیین جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = \sin 2t \quad (15)$$

که در شرایط اولیه زیر صدق کند

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (16)$$

فرض می‌کنیم که این مسئله مقدار اولیه جوابی به صورت $y(t) = \phi$ باشد، که با نخستین دو مشتق خود در شرایط نتیجه قضیه ۳.۶ صدق می‌کند. آنگاه، مبدل لاپلاس معادله دیفرانسیل مذبور را به دست می‌آوریم، خواهیم داشت

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

که در آن مبدل $\sin 2t$ را از جدول ۱.۶ به دست آورده‌ایم. چون به جای $y(0)$ و $y'(0)$ مقادیر آنها را از شرایط اولیه قرارداده و معادله را بر حسب $Y(s)$ حل کنیم، به دست می‌آید

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$Y(s)$ را با استفاده از کسرهای ساده می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4}$$

با تعیین ثابت‌های a, b, c و d خواهیم داشت

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{3}}{s^2 + 1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 4}$$

با استفاده از مثال ۶ بند ۱.۶، یا جدول ۱.۶، نتیجه می‌شود که

$$y = \phi(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \quad (17)$$

خواننده باید توجه داشته باشد که برای حل یک معادله دیفرانسیل مانند معادله (۱۵)، به وسیله تبدیل لاپلاس، از آندا فرض می‌کنیم که جواب $\phi(t) = y$ دادای مبدل $Y(s)$ است. به محض آنکه جواب به دست آمد، صحبت این فرض تأیید می‌شود. به عنوان مثال، عبارت طرف دوم رابطه (۱۷) بدوضوح در شرایط نتیجه قضیه ۳.۶ به ازای $n=2$ صدق می‌کند. علاوه بر این، این مثال نشان می‌دهد که مسائل ناهمگن دقیقاً به همان طریق معادلات همگن حل می‌شوند؛ ولازم نیست که معادلات همگن و ناهمگن را به صورتی که در فصل ۳ حل شد جداگانه حل کرد. این یکی از مزایای تبدیل لاپلاس است، و نیز، جوابی که در شرایط اولیه صدق کند مستقیماً به دست می‌آید، بی‌آنکه قبل از تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل پردازیم.

مهمنترین کاربردهای مقدماتی تبدیل لاپلاس را می‌توان در بررسی ارتعاشات مکانیکی و تحلیل مدارهای الکتریکی مشاهده کرد؛ معادلات مربوطه را به ترتیب در بندهای ۷.۳ و ۸.۳ به دست آوردیم. یک دستگاه ارتعاشگر فنر-جرم دارای معادله حرکت

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t) \quad (18)$$

است که در آن m جرم، c ضریب کاهش، k ثابت فنر، و $F(t)$ نیروی مؤثر خارجی است. معادله یک مدار الکتریکی مشکل از مقاومت R ، ضریب القایی L ، و خازن C (یعنی یک مدار RLC) عبارت است از

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad (19)$$

که در آن $Q(t)$ بار خازن و $E(t)$ ولتاژ مؤثر است. معادله (۱۹) را بر حسب جریان $I(t) = dQ(t)/dt$ می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}(t) \quad (20)$$

باید برای u ، Q و I شرایط اولیه مناسبی در نظر گرفت.

چنانکه قبل از بند ۸.۳ متذکر شدیم معادله (۱۸) مربوط به دستگاه فنر-جرم و معادلات (۱۹) یا (۲۰) برای مدار الکتریکی از لحاظ ریاضی متعدد و یکسانند، تنها اختلاف در تعبیر ثابتها و متغیرهای موجود در آنها می‌باشد. مسائل فیزیکی دیگری نیز به همین معادله دیفرانسیل منجر می‌گردند. بدین سان هنگامی که مسئله ریاضی حل شد، جواب آن را می‌توان بر حسب هر یک از مسائل فیزیکی منتظر که مورد توجه باشد تعبیر کرد.

در مسائل این بند و بند های دیگر این فصل مسائل مقدار اولیه متعددی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت آمده است. بسیاری از آنها را می توان به عنوان مدل های دستگاه های فیزیکی خاصی تعبیر کرد، اما عموماً ما به تصریح این نکته نمی پردازیم.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۵ با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

$$y'' - y' - 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad (1)$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3)$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (4)$$

$$y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1 \quad (5)$$

$$y^{iv} - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0 \quad (6)$$

$$y'' - 2y' - 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + \omega^2 y = \cos 2t, \quad \omega^2 \neq 4; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (8)$$

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (9)$$

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (10)$$

در هر یک از مسائل ۱۱ و ۱۲ مبدل لاپلاس $\{y\}(s) = Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید. برای تعیین عکس مبدلها روشی در بند ۳.۶ خواهد آمد.

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \pi \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (11)$$

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (12)$$

۱۳. مبدل لاپلاس برخی از توابع را می توان به آسانی از بسط به سری تیلر به دست آورد.

(الف) با استفاده از سری تیلر تابع $\sin t$,

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

و با فرض آنکه مبدل لاپلاس این سری را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 1$$

(ب) گیریم

$$f(t) = \begin{cases} (\sin t)/t, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

سری تیلر تابع f را حول $t = 0$ بیاورد. با فرض آنکه مبدل لاپلاس این تابع را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctg \frac{1}{s}, \quad s > 1$$

(ج) تابع بسل نوع اول از رتبه صفر J_0 دارای سری تیلر زیر است (بند ٧.٤ را بینید)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

با فرض آنکه مبدل‌های لاپلاس زیر را بتوان جمله به جمله محاسبه کرد، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \quad s > 1$$

و

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s} e^{-1/4s}, \quad s > 0$$

مسائل ۱۴ تا ۱۷ مربوط به مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس می‌باشند.

۱۴. گیریم

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

می‌توان ثابت کرد که اگر f در شرایط قضیه ٢.٦ صدق کند، مشتق‌گیری از عبارت زیر علامت انتگرال نسبت به پارامتر s به ازای $s > a$ معجاز است.

(الف) نشان دهید که

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$$

(ب) نشان دهید که

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$$

بدینسان مشتق مبدل لاپلاس، متناظر با ضرب تابع اصلی در t^n است.

۱۵. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۴، مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را باید.

(الف) $f(t) = t^n e^{at}$ ، که در آن a ثابتی حقیقی و n عدد صحیح مثبتی است.
 (ب) $f(t) = t^n \sin t$.

(ج) $f(t) = t^n$ ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است.

۱۶. معادله بسل رتبه صفر

$$ty'' + y' + ty = 0$$

را در نظر می‌گیریم. در بند ۳.۴ دیده شد که $y = t$ یک نقطه غیرعادی منظم این معادله است، و بنا بر این امکان دارد که جوابها وقتی $0 \rightarrow t$ بی‌کران شوند. اکنون بررسی کنیم که آیا جوابهایی وجود دارد که خود و مشتقهای آنها در $0 = t$ متناهی باقی بمانند. با فرض آنکه چنین جواب $\phi = y$ وجود داشته باشد، قرار می‌دهیم $\{(\phi(t))\} = \mathcal{L}(Y(s))$.

(الف) نشان دهید که $Y(s)$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = 0$$

(ب) نشان دهید که $Y(s) = c(1+s^2)^{-1/2}$ ثابت دلخواهی است.

(ج) با بسط $(1+s^2)^{-1/2}$ به یک سری دوجمله‌ای که به ازای $s > 1$ معتبر باشد، و با فرض آنکه بتوان مبدل معکوس را جمله به جمله محاسبه کرد نشان دهید که

$$y = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = c J_0(t)$$

که در آن J_0 تابع بسل نوع اول رتبه صفر است. توجه شود که $1 = (0)_0 J_0$ ، و مشتقهای همه مراتب J_0 در $0 = t$ متناهی هستند. در بند ۷.۴ نشان داده شد که جواب دوم این معادله وقتی $0 \rightarrow t$ بی‌کران می‌شود.

۱۷. در هریک از مسائل مقدار اولیه زیر جواب را با $\phi(t) = y$ نشان می‌دهیم، با استفاده از نتایج مسئله ۱۴ معادله دیفرانسیلی را که $\{(\phi(t))\} = \mathcal{L}(Y(s))$ در آن صدق می‌کند باید.

$$y'' + ty = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{معادله آبری}) \quad (\text{الف})$$

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{معادله لزاندر}) \quad (\text{ب})$$

توجه شود که معادله دیفرانسیل مربوط به $(s)Y$ در قسمت (الف) مرتبه اول است، اما در قسمت (ب) از مرتبه دوم می‌باشد. این بدان علت است که معادله قسمت (الف) حداًکثر دارای توان اول t است، درحالی که در قسمت (ب) دارای توان دوم t^2 می‌باشد. این نکته میان آن است که تبدیل لاپلاس اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر مفید نیست، مگر آنکه همه ضرایب حداًکثر توابعی خطی از متغیر مستقل باشند.

۱۸. فرض کنیم که

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

اگر $(G(s)$ و $F(s)$ به ترتیب مبدل‌های لاپلاس $(t)g$ و f باشند، نشان دهید که

$$G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

۱۹. در این مسئله نشان می‌دهیم که چگونه به طور کلی با استفاده از بسط به کسرهای ساده می‌توان عکس مبدل‌های لاپلاس را محاسبه کرد. فرض کنیم که

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

که در آن $Q(s)$ یک چند جمله‌ای از درجه n با صفرهای متمایز r_1, r_2, \dots, r_n و $P(s)$ یک چند جمله‌ای از درجه کمتر از n است. در این حالت می‌توان نشان داد که $(s)F(s)/Q(s)$ دارای بسطی به کسرهای ساده به صورت زیر است

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \dots + \frac{A_n}{s - r_n} \quad (\text{یک})$$

که در آن باید ضرایب A_1, \dots, A_n را تعیین کرد.
(الف) نشان دهید که

$$A_k = \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{دو})$$

(اهمایی): یک روش برای این کار آن است که رابطه (یک) را در $s - r_k$ ضرب کنیم و سپس حد آن را وقتی $r_k \rightarrow s$ بیایم.
(ب) نشان دهید که

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t} \quad (\text{سه})$$

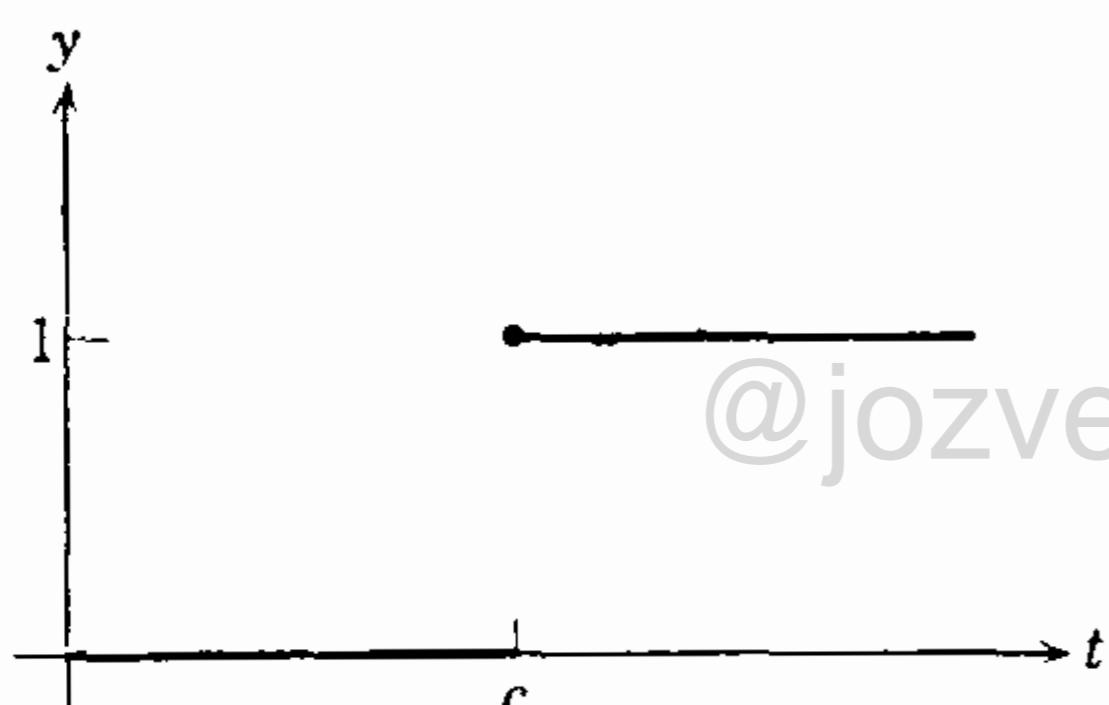
۳.۶ توابع پله‌ای

در بند ۲.۶ روش کلی حل مسائل مقدار اولیه با استفاده از تبدیل لاپلاس مطرح شد. برخی از جالبترین کاربردهای مقدماتی روش تبدیل را در حل معادلات دیفرانسیل خطی با توابع نیروی ناپیوسته یا ضربه‌ای می‌توان ملاحظه کرد. این نوع معادلات اغلب در تحلیل جریان در مدارهای الکتریکی یا ارتعاشات دستگاههای مکانیکی مطرح می‌شود. در این بند و بند‌های بعدی به بررسی برخی دیگر از خواص تبدیل لاپلاس که در حل این نوع مسائل مفید هستند می‌پردازیم. جز در مواردی که خلاف آن تصریح شود ذیلاً همه توابع را پیوسته قطعه‌ای و از رتبه نمایی فرض می‌کنیم، تا بدینسان مبدل لاپلاس آنها حداقل به ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ σ وجود داشته باشد.

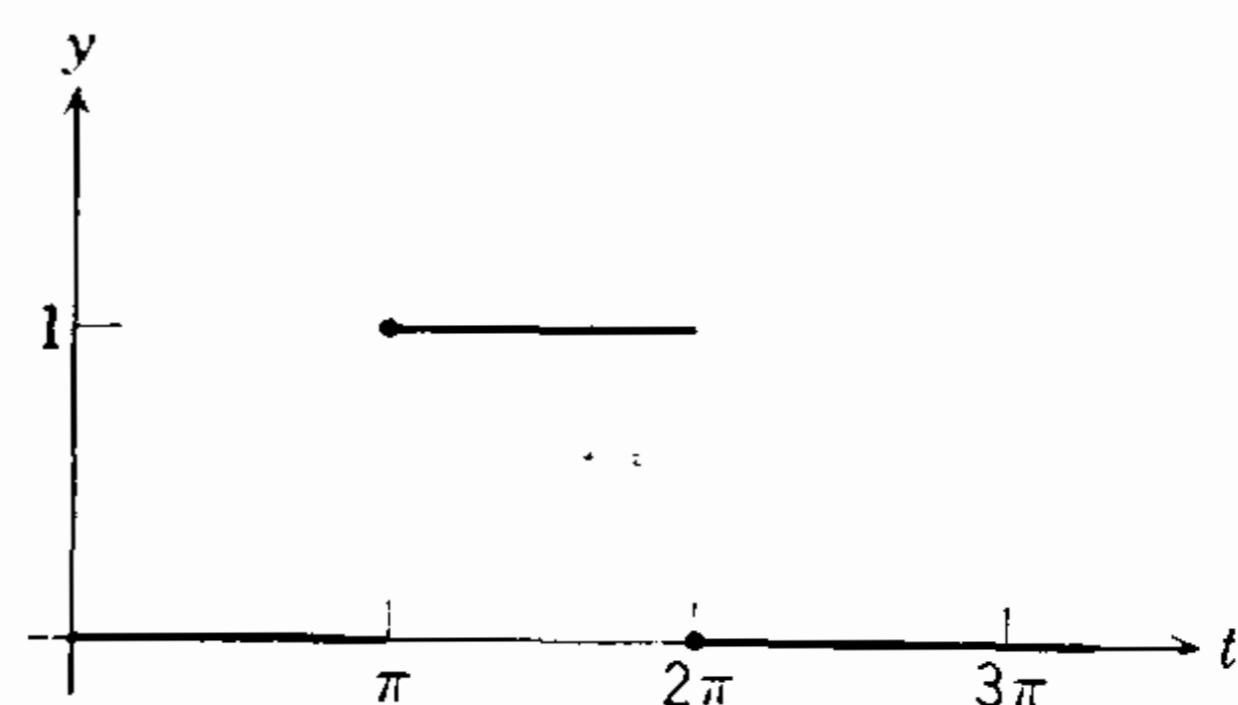
برای بررسی دقیق توابعی که دارای ناپیوستگی‌های جهشی می‌باشند، شناخت تابعی موسوم به تابع پله‌ای یکه بسیار مفید است. این تابع که آن را با $u_c(t)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases} \quad (1)$$

نمودار تابع $y = u_c(t)$ در شکل ۲.۶ نشان داده شده است.



$$y = u_c(t).$$



$$y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t).$$

شکل ۳.۶ ۲.۶

شکل ۲.۶

مثال ۱. نمودار تابع $y = h(t)$ را که در آن

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \quad t \geq 0$$

است رسم کنید.

بنابر تعریف $u_c(t)$ در رابطه (۱) داریم

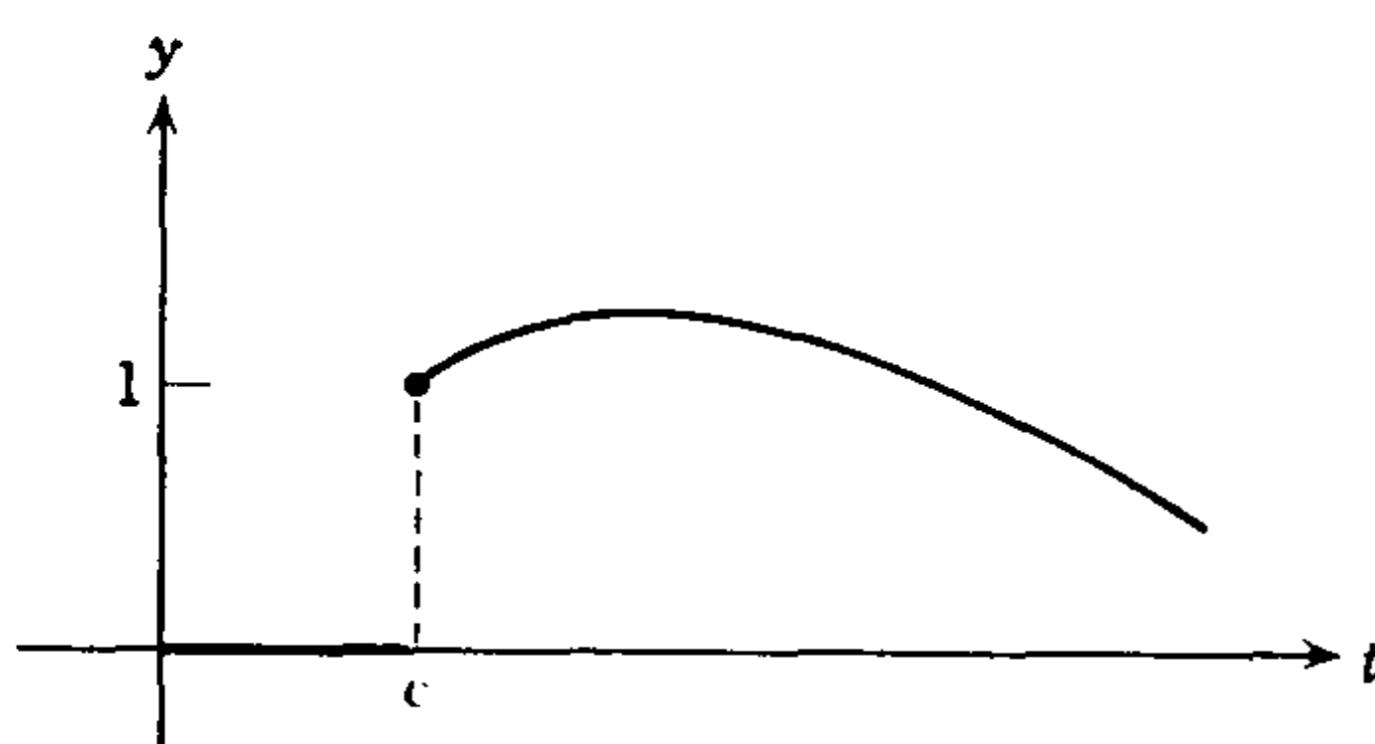
$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty \end{cases}$$

بدینسان نمودار $y = h(t)$ مطابق شکل ۴.۶ است.

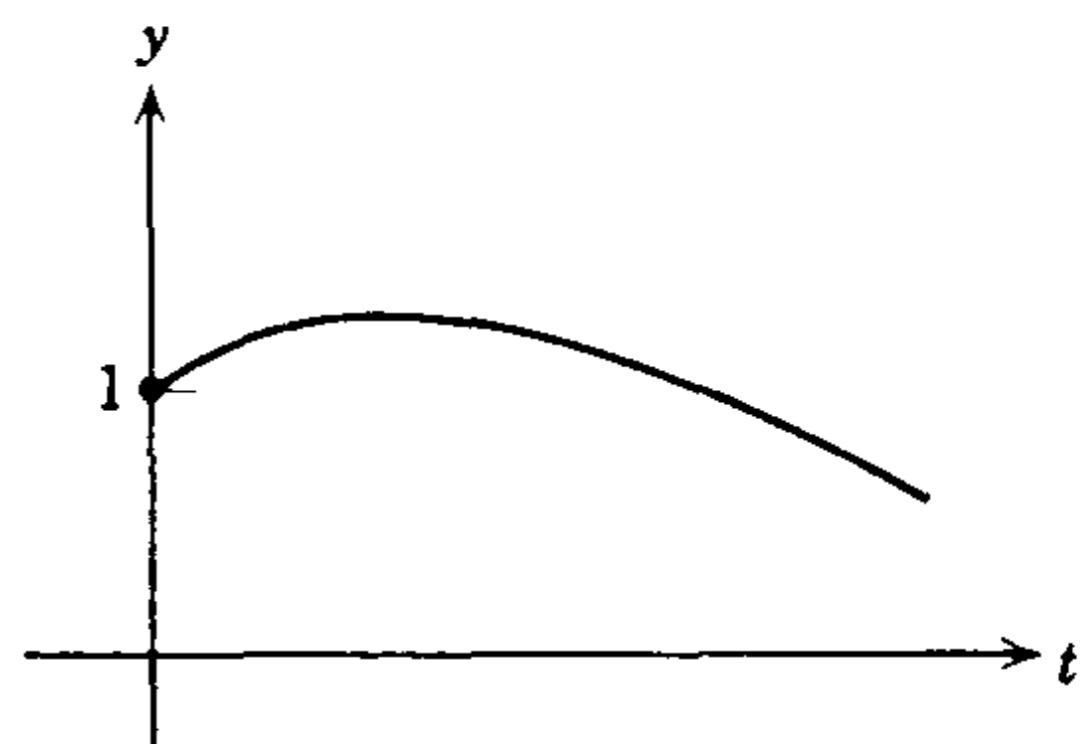
تابع پله‌ای یکه u_c را می‌توان برای انتقال به مسافت c به طرف راست یک تابع مفروض f ، با حوزه $t \geq 0$ ، به کار گرفت. به عنوان مثال، تابع زیر

$$y = u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

نمایشگر انتقال تابع f به مسافت c در جهت مثبت t می‌باشد (شکل ۴.۶ را بینید).



(ب) $y = u_c(t)f(t - c)$.



(الف) $y = f(t)$.

شکل ۴.۶

مبدل لاپلاس u_c به آسانی تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-sc}}{s}, \quad s > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

تابع پله‌ای یکه به علت رابطه موجود بین مبدل $f(t)$ و مبدل انتقال یافته آن (c) ذیلاً بیان می‌شود، در مبحث تبدیل لاپلاس دارای اهمیت ویژه‌ای است.

قضیه ۴.۶. اگر $\{f(t)\}$ به ازای $s > 0$ وجود داشته باشد، و اگر یک ثابت هشت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s), \quad s > a \quad (3)$$

عكس، اگر $\{F(s)\}$ آنگاه

$$u_c(t)f(t - c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} \quad (4)$$

برای اثبات قضیه ۴.۶ کافی است مبدل $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}$ را محاسبه کنیم

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt$$

$$= \int_c^\infty e^{-st} f(t-c) dt$$

با تعویض متغیر $t-c = \xi$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s} f(\xi) d\xi = e^{-cs} \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \\ &= e^{-cs} F(s) \end{aligned}$$

بدینسان رابطه (۳) اثبات شد؛ رابطه (۴) از اعمال تبدیل عکس به دو طرف رابطه (۳) نتیجه می‌شود.

مثال ساده‌ای برای این قضیه از قراردادن $f(t) = 1$ به دست می‌آید. با توجه به $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ ، مستقیماً از رابطه (۳) داریم $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. این نتیجه با رابطه (۲) مطابقت دارد. مثالهای ۲ و ۳ علاوه بر این نشان می‌دهند که چگونه از قضیه ۴.۶ می‌توان در محاسبه مبدلها و عکس مبدلها استفاده کرد.

مثال ۲. اگر تابع f به صورت

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \sin t + \cos t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

تعریف شده باشد، $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بایا بیاید.
دیده می‌شود که $f(t) = \sin t + g(t)$ ، که در آن

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ \cos t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

بدینسان

$$g(t) = u_{2\pi}(t) \cos(t - 2\pi)$$

و

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t) \cos(t - 2\pi)\} \\ &= \mathcal{L}\{\sin t\} + e^{-2\pi s} \mathcal{L}\{\cos t\} \end{aligned}$$

با جایگزینی مبدل‌های $\cos t$ و $\sin t$ به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1 + se^{-\pi s}}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

خوانندگان باید این روش را با محاسبه مستقیم $\{(i)\mathcal{L}\{f(t)\}\}$ براساس تعریف مقایسه کنند.

. مثال ۳. مطلوب است مبدل معکوس

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$$

بنا بر خطی بودن تبدیل معکوس خواهیم داشت

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t - 2)\end{aligned}$$

تابع f را نیز می‌توان به صورت زیرنوشت

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

قضیه زیر شامل خاصیت بسیار مفید دیگری از تبدیل لاپلاس است که از لحاظی نظری خاصیت مذکور در قضیه ۴.۶ آست.

قضیه ۵.۶. اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ به ازای $s \geq 0$ وجود داشته و c یک ثابت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s - c), \quad s > a + c \quad (5)$$

برعکس، اگر $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ، آنگاه

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - c)\} \quad (6)$$

بنا بر قضیه ۵.۶، ضرب $f(t)$ در e^{ct} موجب انتقال مبدل $F(s)$ به مسافت c درجهت مثبت s می‌گردد، و برعکس. اثبات این قضیه تنها مستلزم محاسبه $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$ است. بدینسان

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) dt \\ &= F(s - c)\end{aligned}$$

که همان رابطه (۵) است. قید $a+c > d$ از آنجا نتیجه می‌شود که بنا بر فرض (دو) قضیه ۶.۲ داریم $|f(t)| \leq ke^{(a+c)t}$; بنا بر این $|e^{at}f(t)| \leq ke^{(a+c)t}$. رابطه (۶) از مبدل معکوس رابطه (۵) نتیجه می‌گردد، و اثبات کامل می‌شود.

کاربرد اصلی قضیه ۶.۵ در محاسبه برخی از مبدل‌های معکوس است، چنانکه در مثال ۴ توضیح داده شده است.

مثال ۴. مطلوب است مبدل معکوس

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$$

با جدا کردن مربع کامل موجود در مخرج، می‌توان نوشت

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2)$$

که در آن $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$ ، $f(t) = \sin t$ ، از قضیه ۶.۵ نتیجه می‌شود که

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^t \sin t$$

نتایج این بند اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل مفید است، بهویژه معادلاتی که شامل توابع نیروی ناپیوسته‌اند. بند بعد بهمثالي برای توضیح این نکته اختصاص یافته است.

مسائل

۱. نمودار هریک از توابع زیر را در فاصله $0 \leq t \leq 2\pi$ رسم کنید.

$$(a) u_1(t) + 2u_2(t) - 6u_3(t)$$

$$(b) (t-2)u_2(t) - (t+2)u_3(t)$$

$$(c) f(t) = t^2, f(t-\pi)u_{\pi}(t)$$

$$(d) f(t) = \sin t, f(t-2)u_2(t)$$

$$(e) f(t) = (t-1)u_1(t)$$

$$(f) f(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$$

۲. مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = u_1(t) + 2u_2(t) - 6u_4(t) \quad (\text{د})$$

$$f(t) = (t-2)u_2(t) - (t-4)u_4(t) \quad (\text{ه})$$

$$f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \geq 0 \quad (\text{و})$$

۳. مبدل لاپلاس معکوس هر یک از توابع زیر را باید.

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2} \quad (\text{ب}) \quad F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2 - 4} \quad (\text{د}) \quad F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2} \quad (\text{ج})$$

$$F(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s} \quad (\text{و}) \quad F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3} \quad (\text{ه})$$

۴. فرض کنیم که $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ به ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشد.

(الف) نشان دهید که اگر c ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > ca$$

(ب) نشان دهید که اگر k ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

(ج) نشان دهید که اگر a و b مقادیر ثابت باشند و $a > 0$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a} e^{-bt/a} f\left(\frac{t}{a}\right)$$

۵. با استفاده از نتایج مسئله ۴، مبدل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیر را بایا بید.

$$F(s) = \frac{2s+1}{4s^2+4s+5} \quad (\text{ب})$$

$$F(s) = \frac{2^{n+1} n!}{s^{n+1}} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{e^2 e^{-4s}}{2s-1} \quad (\text{د})$$

$$F(s) = \frac{1}{9s^2 - 12s + 3} \quad (\text{ج})$$

۶. تبدیل لاپلاس هریک از توابع زیر را بایا بید. در قسمت (د) فرض می‌کنیم که انتگرال گیری جمله به جمله از سری مجاز باشد.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t) = 1 - u_1(t) + \dots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k(t) \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(t) \quad (\text{د})$$

۷. گیریم f در $f(t+T) = f(t)$ و علاوهً مثبت T صدق کند؛ f را متناوب با دورهٔ تناوب T روی $0 \leq t < \infty$ می‌نمایند. نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

۸. با استفاده از نتیجهٔ مسئله ۷ مبدل لاپلاس هریک از توابع زیر را بایا بید.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(t+2) = f(t)$$

$$f(t+2) = f(t)$$

شکل ۶.۶ را بیینید.

با مسئله ۶ (د) مقایسه کنید.

$$f(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi \quad (\text{د})$$

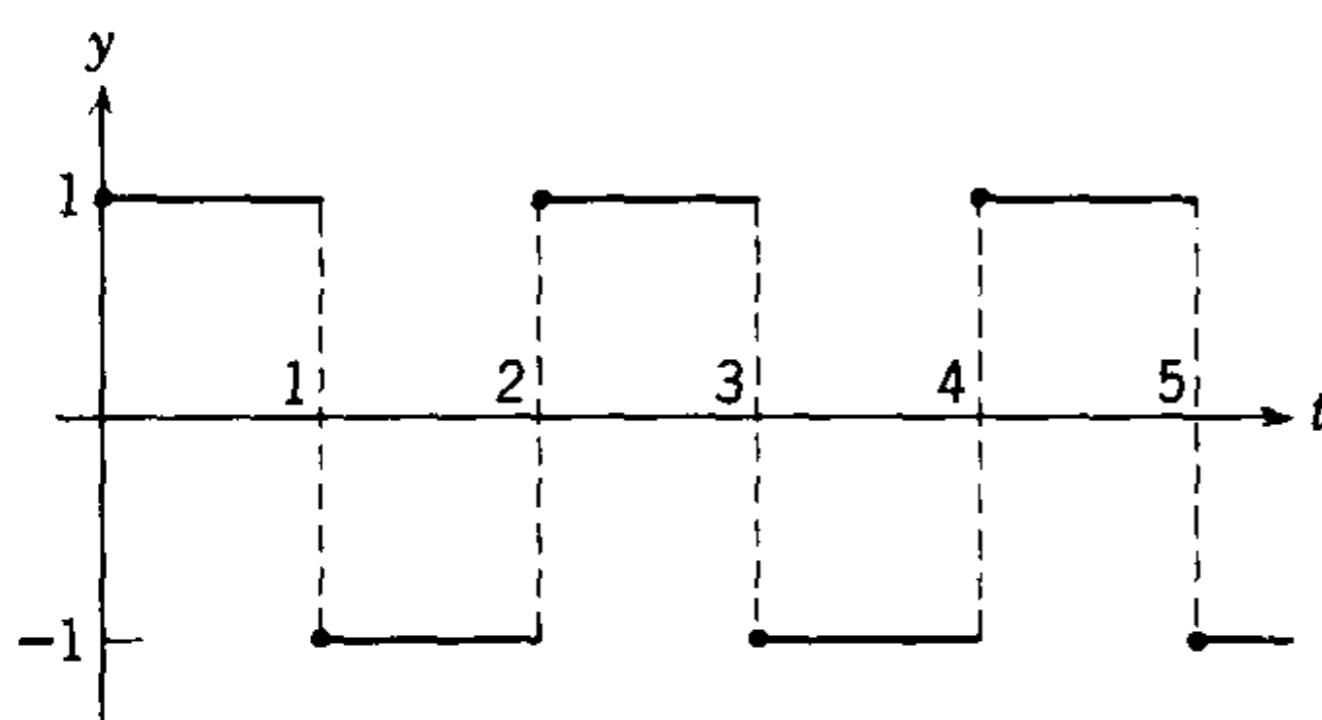
$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < 1 \quad (\text{ج})$$

$$f(t+\pi) = f(t)$$

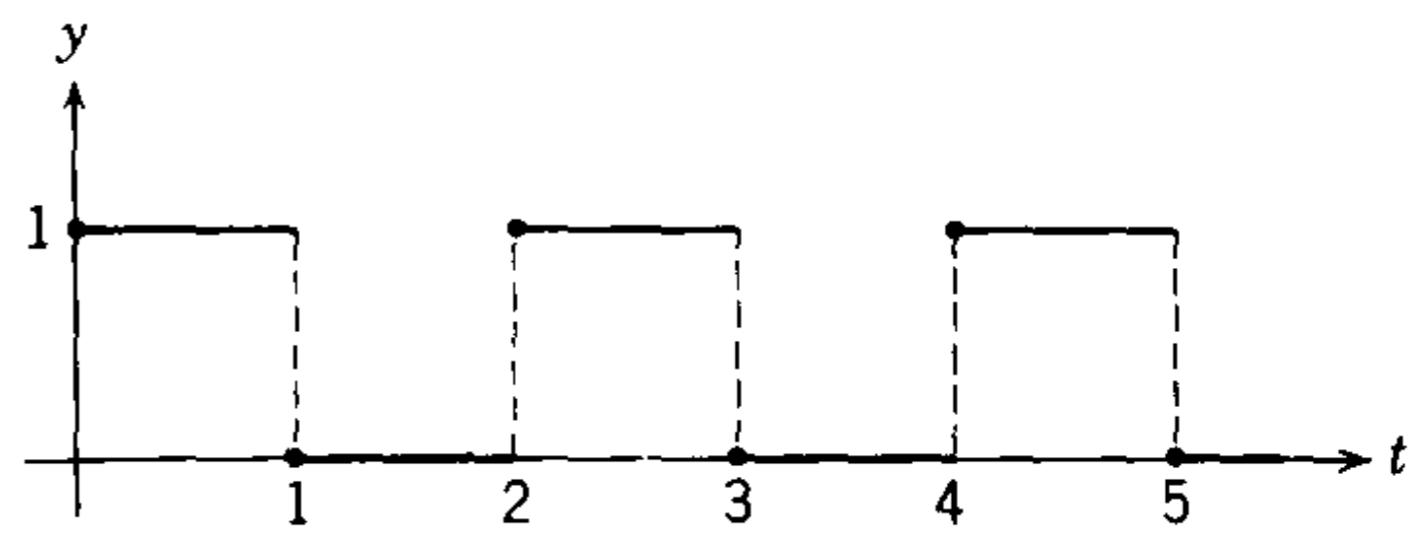
$$f(t+1) = f(t)$$

شکل ۶.۶ را بیینید.

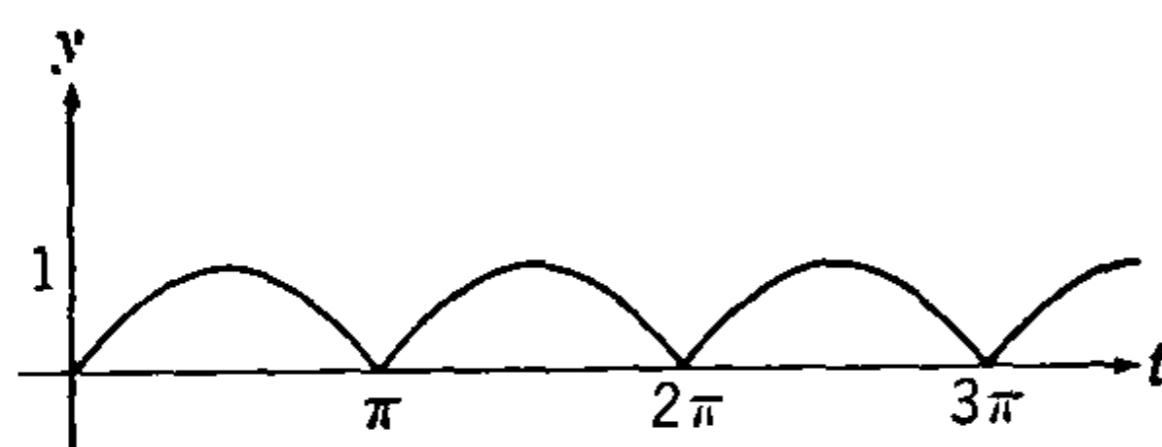
شکل ۷.۶ را بیینید.



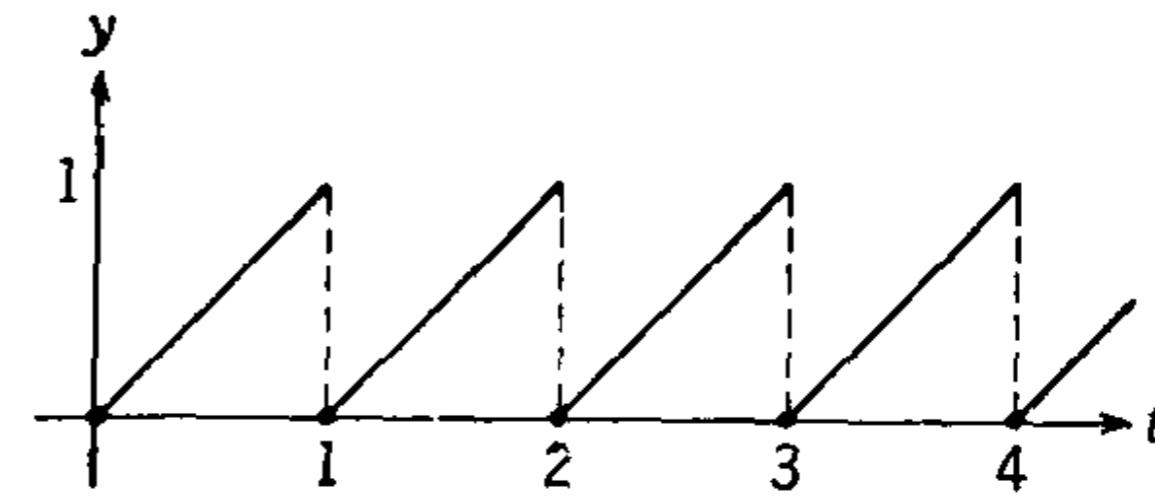
شکل ۶.۶ موج مربعی.



شکل ۵.۶ موج مربعی.



شکل ۸.۶ موج سینوسی یکتارفه.



شکل ۷.۶ موج دندانه‌ای.

۹۰. (الف) اگر $f(t) = 1 - u_1(t)$ ، مطلوب است $\mathcal{L}\{f(t)\}$; با مسئله ۶ (الف) مقایسه کنید. نمودار $y = f(t)$ را رسم کنید.

(ب) گیریم $\int_0^t f(\xi) d\xi = g(t)$ ، که در آن f تابعی است که در قسمت (الف) تعریف شد. نمودار $y = g(t)$ را رسم کنید، و $\mathcal{L}\{g(t)\}$ را بیابید.

(ج) گیریم $(1 - u_1(t))g(t) = h(t)$ ، که در آن h تابعی است که در قسمت

(ب) تعریف شده است. نمودار $y = h(t)$ را رسم کنید، و $\mathcal{L}\{h(t)\}$ را بیابید.

۱۰۰. تابع p را که به صورت زیر تعریف شده است در نظر می‌گیریم

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad p(t+2) = p(t)$$

(الف) نمودار $y = p(t)$ را رسم کنید.

(ب) با استفاده از نتیجه مسئله ۷، $\mathcal{L}\{p(t)\}$ را که در آن p ادامه تناوبی تابع h در مسئله ۹ (ج) است بیابید.

(ج) با استفاده از قضیه ۳.۶، $\mathcal{L}\{p(t)\}$ مبدل لاپلاس

$$p(t) = \int_0^t f(t) dt$$

را که در آن f تابع مسئله ۸ (ب) است بیابید.

۱۰.۳.۶ یک معادله دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته اکنون توجه خود را به یک مسئله نموده که متضمن یک تابع نیروی ناپیوسته (جمله ناهمگن) است معطوف می‌کنیم. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 4y = h(t) \quad (1)$$

را که در آن

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi, \quad t \geq 2\pi \end{cases} \quad (2)$$

(شکل ۳.۶ صفحه ۳۰۹ را ببینید) در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم که شرایط اولیه عبارتند از

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3)$$

به عنوان مثال باز یک خازن در یک مدار الکتریکی ساده‌که شامل مقاومت نباشد و ولتاژ اعمال شده به صورت (۲) باشد از این مسئله تعییت می‌کند. همچنین، لز می‌تواند نماشگر پاسخ یک نوسانگر هماهنگ نامیرا تحت نیروی اعمال شده $h(t)$ باشد.

قبل از آنکه مبدل معادله (۱) را بدست آوریم مناسبتر است که $h(t)$ را به صورت

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) \quad (4)$$

(مثال ۱ بند ۳.۶ را ببینید) بنویسیم. بدینسان مبدل لاپلاس معادله (۱) عبارت است از

@jozve_iut

$$(s^2 + 4)Y(s) - sy(0) - y'(0) = \mathcal{L}\{u_\pi(t)\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\}$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

با در نظر گرفتن مقادیر اولیه (۳) و استخراج $Y(s)$ ، به دست می‌آید

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)} \quad (5)$$

برای پیدا کردن $y = \phi(t)$ باشد جمله به جمله از طرف دوم رابطه (۵) مبدل معکوس گرفت. بنابر جدول ۱.۶ مبدل معکوس جمله اول چنین است

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2t \quad (6)$$

برای محاسبه مبدل معکوس جمله دوم دیده می‌شود که بنابر قضیه ۴.۶ داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right\} = u_\pi(t)g(t-\pi)$$

که در آن

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$$

با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده، داریم

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

و بنابر جدول ۱.۶

$$g(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

بدینسان

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}u_\pi(t)[1 - \cos 2(t-\pi)] \quad (7)$$

و به همین طریق برای جمله سوم داریم

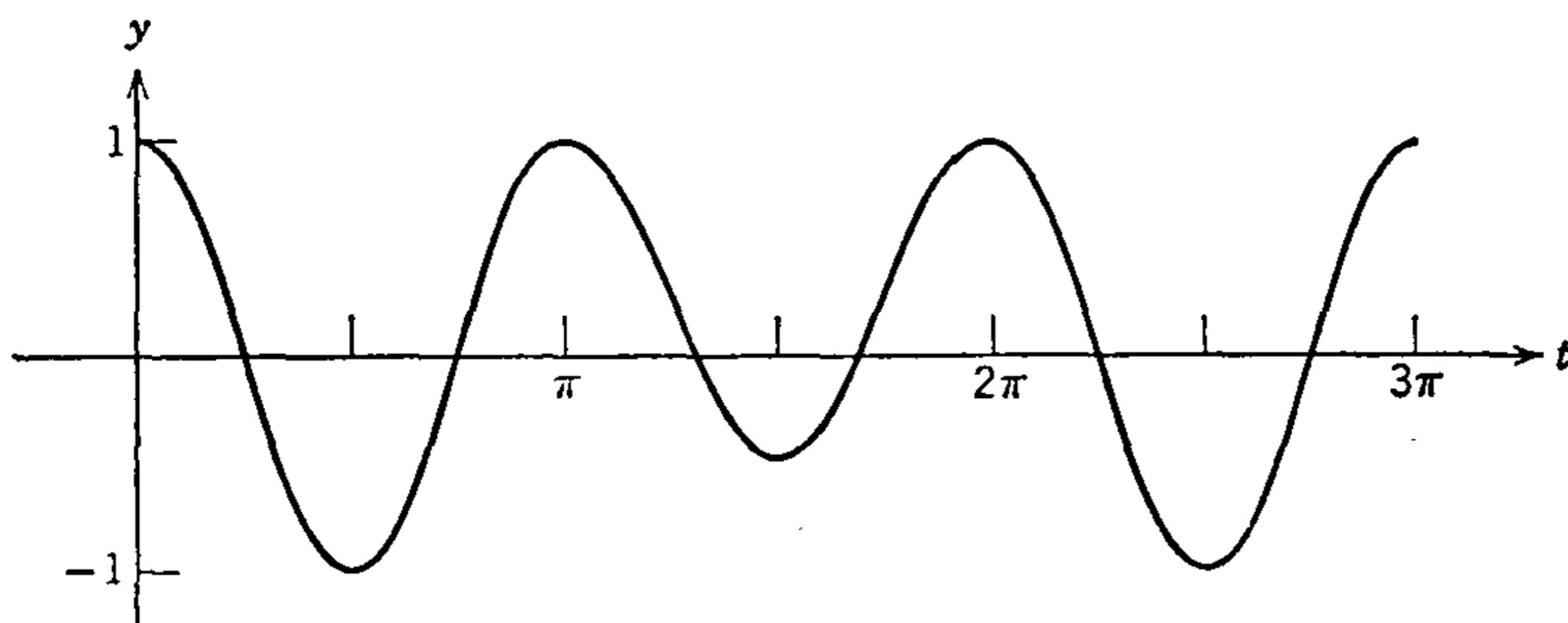
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1 - \cos 2(t-2\pi)] \quad (8)$$

بالاخره با توجه به روابط (۶)، (۷) و (۸) به دست می‌آید

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$= \cos 2t + \frac{1}{4}u_\pi(t)[1 - \cos 2(t-\pi)] - \frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1 - \cos 2(t-2\pi)] \quad (9)$$

نمودار $y = \phi(t)$ در شکل ۹.۶ رسم شده است.



شکل ۹.۶ جواب مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲)، (۳).

توجه شود که جمله‌های دوم و سوم طرف دوم رابطه (۹) به ترتیب به ازای $t < \pi$ و $\pi < t < 2\pi$ صفرند. اگر $\phi(t)$ را بدون استفاده از توابع پلهای یکه u_π و $u_{2\pi}$ بنویسیم، آنگاه

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < \pi \\ \frac{3}{4} \cos 2t + \frac{1}{4}, & \pi \leq t < 2\pi \\ \cos 2t, & 2\pi \leq t < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

مسئله مقدار اولیه که در اینجا بررسی شد، شامل یک معادله دیفرانسیل با تابع نیرو است که دارای یک ناپیوستگی جهشی می‌باشد. بنابراین کاملاً در محدوده قضیه اساسی وجود یکتا بیان نمی‌گیرد. بدینسان تعجبی ندارد که جواب $\phi(t) = y$ که با رابطه (۱۰) بیان شده است با وجود آنکه به ازای $0 < t < \pi$ پیوسته و دارای مشتق اول پیوسته است در نقاط $\pi = t = 2\pi$ که تابع نیروی h دارای ناپیوستگی جهشی است دارای مشتق دوم نباشد. بنابر رابطه (۱۰) داریم

$$\phi''(t) = \begin{cases} -4 \cos 2t, & 0 < t < \pi, \\ -3 \cos 2t, & \pi < t < 2\pi, \\ -4 \cos 2t, & 2\pi < t < \infty. \end{cases}$$

مثلاً در همسایگی $\pi = t$ ، وقتی از چپ $\pi \rightarrow t$ ، داریم $-4 \rightarrow \phi''(t)$ ، اما وقتی از راست $\pi \rightarrow t$ ، خواهیم داشت $-3 \rightarrow \phi''(t)$. بدینسان ϕ در $\pi = t$ دارای یک ناپیوستگی جهشی است، و در $2\pi = t$ نیز وضعیت به همین منوال است. این ناپیوستگیها ناشی از ناپیوستگی تابع نیرو در این نقاط است.
اکنون معادله خطی مرتبه دوم کلی

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (11)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن p و q روی یک فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند؛ اما g روی این فاصله تنها پیوسته قطعه‌ای است. اگر $\psi(t) = y$ یک جواب معادله (۱۱) باشد، آنگاه ψ و ψ' روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند، اما ψ همانند g و در همان نقاط دارای ناپیوستگی جهشی خواهد بود. همین نکته در مورد معادلات از مرتبه بالاتر نیز صادق است؛ بالاترین مشتق جواب که در معادله دیفرانسیل وجود دارد، همانند تابع نیرو، در همان نقاط دارای ناپیوستگی‌های جهشی است، اما جواب و مشتقهای پایینتر حتی در این نقاط پیوسته خواهد بود. روش دیگر برای حل مسئله مقدار اولیه (۱)، (۲)، و (۳) آن است که معادله دیفرانسیل را در سه فاصله جداگانه $0 < t < \pi$ ، $\pi < t < 2\pi$ ، $2\pi < t$ حل کنیم. در فاصله اول، ثابتی دلخواه موجود در جواب عمومی به گونه‌ای انتخاب

می‌شوند که در شرایط اولیه صدق کنند. در فاصله دوم ثابتها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که ϕ و مشتق آن $'\phi$ در $t = \pi$ پیوسته باشند. توجه شود که محدودیت تعداد ثابتها مانع از آن است که قید پیوستگی " ϕ در این نقطه را نیز اعمال کنیم. به همین طریق، در فاصله سوم ثابتها به گونه‌ای تعیین می‌شوند که ϕ و $'\phi$ در $t = 2\pi$ پیوسته باشند. همین روش کلی را می‌توان در مسائل دیگری که دارای توابع نیروی پیوسته قطعه‌ای‌اند به کار برد. اما، همین که موضوع از لحاظ نظری کامل شد، معمولاً آسانتر است که با استفاده از تبدیل لاپلاس این نوع مسائل را یکجا حل کرد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۷ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیا بیند.

$$y'' + y = f(t); \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq t < \infty \end{cases} \quad .1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' + 2y' + 2y = h(t); \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \quad t \geq 2\pi \end{cases} \quad .2$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' + 4y = \sin t - u_{\pi}(t) \sin(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .3$$

$$y'' + 4y = \sin t + u_{\pi}(t) \sin(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .4$$

$$y'' + 2y' + y = f(t); \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \quad .5$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' + 3y' + 2y = u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .6$$

$$y'' + y = u_{\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad .7$$

* ۸. گیریم تابع f به صورت

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

تعریف شده است و به ازای دیگر مقادیر مثبت t داشته باشیم ($f(t+2\pi) = f(t)$. یعنی، f متناوب و با دوره تناوب 2π است (مسئله ۷ بند ۳.۶ را بینید). مطلوب است تعیین جواب مسئله مقدار اولیه زیر

$$y'' + y = f(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

* ۹. فرض کنیم که تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

(الف) $\{(t)f\}_0^\infty$ را بیابید.

(ب) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' + 4y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

۴.۶ توابع ضربه‌ای

در برخی از کاربردها لازم می‌آید که پذیوهای با ماهیت ضربه‌ای را بررسی کنیم، به عنوان مثال، ولتاژها یا نیروهای بسیار بزرگی که در فواصل زمانی بسیار کوتاه اثر می‌کنند. این نوع مسائل اغلب به معادلات دیفرانسیلی به صورت

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (1)$$

می‌انجامند که در آن $g(t)$ در طول یک فاصله کوتاه $t_0 < t < t_0 + \tau$ دارای مقدار بزرگی است و به ازای مقادیر دیگر t صفر است. انتگرال $I(\tau)$ ، که با

$$I(\tau) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} g(t) dt \quad (2)$$

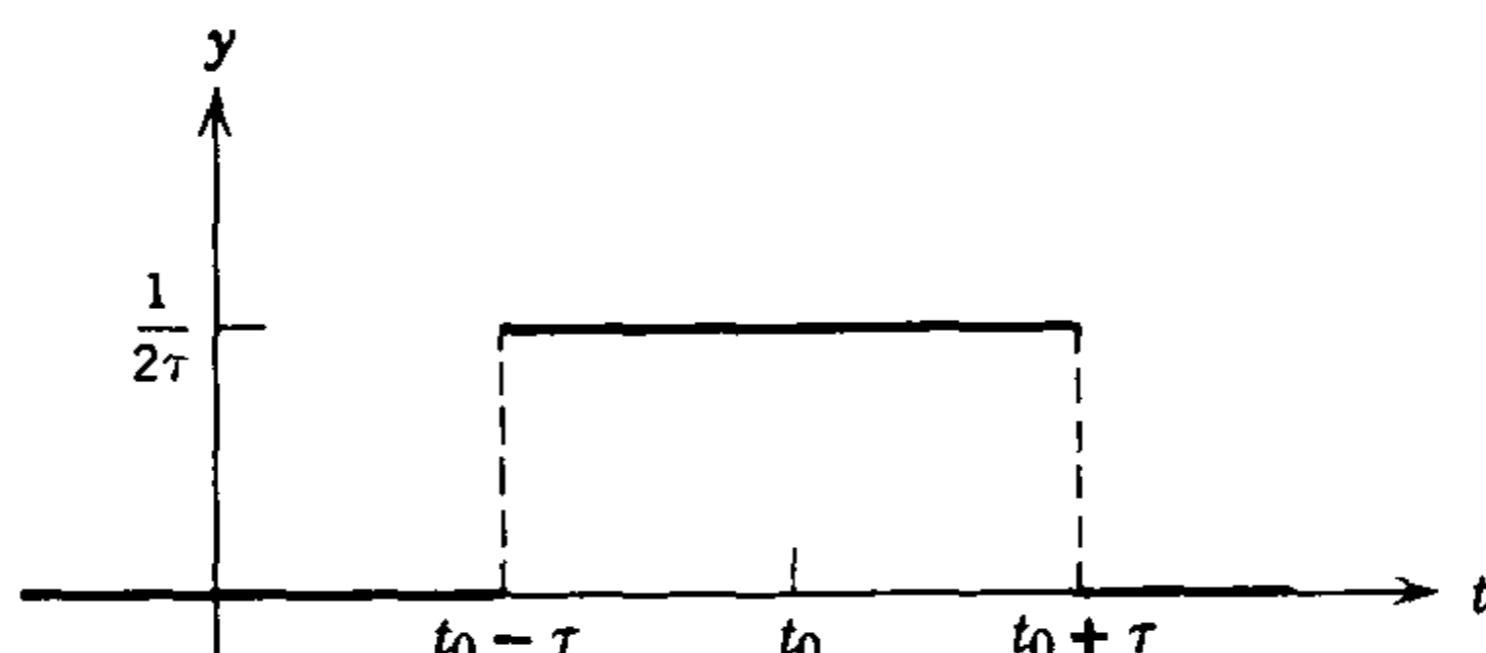
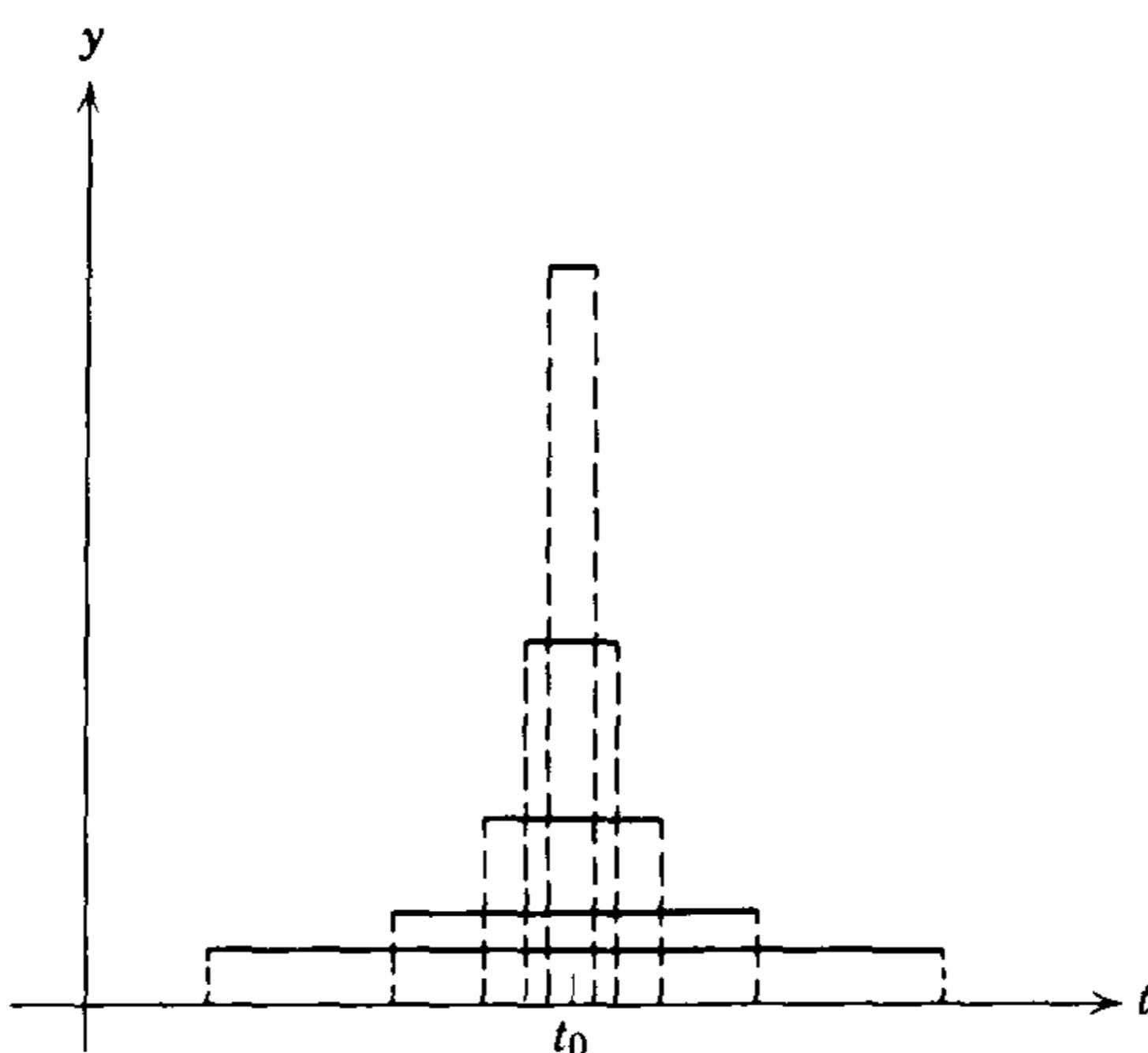
تعریف می‌شود، و چون در خارج فاصله $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ داریم $g(t) = 0$ بنا بر این

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt, \quad (3)$$

نمایشگر اندازه شدت تابع نیرو است. در یک دستگاه مکانیکی که $g(t)$ نیرو است، در این صورت $I(\tau)$ ضربه کل نیروی $g(t)$ در فاصله زمانی $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ است. به همین نحو، اگر در نمایشگر جریان در یک مدار الکتریکی و $g(t)$ مشتق زمانی ولتاژ باشد، آنگاه $I(\tau)$ نمایشگر ولتاژ کل است که در طول فاصله $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ روی مدار اثر می‌کند. به ویژه، فرض کنیم $g(t)$ برابر صفر، و $g(t)$ به صورت

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau \\ 0, & t \leq -\tau \text{ یا } t \geq \tau \end{cases} \quad (4)$$

باشد که در آن τ ثابت مثبت کوچکی است (شکل ۱۰.۶ را بیینید). بنا بر رابطه (۲) یا (۳) مستقیماً نتیجه می‌شود که در این حالت مادامی که $\tau \neq 0$ ، داریم $I(\tau) = 1$ و مستقل از مقدار τ می‌باشد. اکنون با بررسی تأثیر تابع نیروی d_τ روی فواصل زمانی که بتدریج کوتاهتر می‌شوند؛ یعنی، با قید $0 \rightarrow \tau$ چنانکه در شکل ۱۱.۶ نشان داده شده است

شکل ۱۰.۶ $d_r(t)$ 

شکل ۱۱.۶

@jozve_iut

به تجزید d_r می پردازیم. در نتیجه این عمل حدگیری خواهیم داشت

$$\lim_{r \rightarrow 0} d_r(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (5)$$

علاوه بر این، چون به ازای هر $0 < \tau$ داریم $I(\tau) = 1$ ، در نتیجه

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = 1 \quad (6)$$

روابط (۵) و (۶) را می توان برای تعریف یک «تابع ضربه یکه» ایده‌آل δ به کار گرفت، که یک ضربه با اندازه واحد در $t = 0$ وارد می کند، اما به ازای همه مقادیر دیگر t برابر صفر است. یعنی، «تابع» δ با خواص زیر تعریف می شود

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (8)$$

دشن است که هیچ تابع معمولی از آن نوع که در آنالیز مقدماتی بررسی شده‌اند در هر

دو رابطه (۷) و (۸) صدق نمی‌کند. «تابع» δ که با این روابط تعریف شد نمونه‌ای است از آنچه توابع تعمیم‌یافته‌نامیده می‌شود و معمولاً آن را «تابع دلتای» دیراک^۱ می‌نامند. اغلب مناسبتر است که توابع نیروی ضربه‌ای را بوسیله تابع دیراک نمایش دهیم. چون $\delta(t)$ متناظر با ضربه واحد در $t = t_0$ است، یک ضربه واحد در نقطه لخواه $t = t_0$ با $\delta(t - t_0)$ بیان می‌شود. از روابط (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0. \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (10)$$

تابع دلتا در شرایط قضیه ۲.۶ صادق نیست، اما با وجود این مبدل لاپلاس آن را می‌توان به طور صوری تعریف کرد. چون $\delta(t)$ به عنوان حد $d_\tau(t)$ به ازای $\tau \rightarrow 0$ تعریف شده است، طبیعی است که مبدل لاپلاس δ نیز به طریق مشابه با حد مبدل d_τ تعریف شود. به ویژه، فرض می‌کنیم که $t > t_0$ باشد، و $\{ \delta(t - t_0) \}$ را با معادله

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} \quad (11)$$

تعریف می‌کنیم. برای محاسبه حد موجود در رابطه (۱۱) نخست دلیله می‌شود که اگر $\tau < t_0$ ، که در واقع چون $\tau \rightarrow 0$ شرط مزبور بالاخره برقرار می‌شود، آنگاه $t_0 - \tau > 0$. چون $d_\tau(t - t_0)$ تنها روی فاصله $t_0 - \tau$ تا $t_0 + \tau$ مخالف صفر است، داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} &= \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt \end{aligned}$$

چون به جای $d_\tau(t - t_0)$ مقدار آن را از رابطه (۴) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} &= \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} dt = -\frac{1}{2\tau s} e^{-st} \Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau} \\ &= \frac{1}{2\tau s} e^{-st_0} (e^{s\tau} - e^{-s\tau}) \end{aligned}$$

یا

۱. پل. آ. م. دیراک (Paul A. M. Dirac) (۱۹۰۲-) به خاطر تحقیقاتش در مکانیک کوانتیک در ۱۹۳۳ [همراه با ارولین شرودینگر (Erwin Schrödinger)] به دریافت جایزه نوبل نائل گردید.

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0} \quad (12)$$

خارج قسمت $\sinh s\tau / s\tau$ وقتی $\tau \rightarrow 0$ مبهم است، اما حد آن را می‌توان با استفاده از قاعده هوبیتال محاسبه کرد. داریم

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s \cosh s\tau}{s} = 1$$

آنگاه از معادله (11) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \quad (13)$$

چون رابطه (13) به ازای هر $t > t_0$ برقرار است، می‌توان $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ را از رابطه (13) با $t \rightarrow t_0$ تعریف کرد؛ بدینسان

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} e^{-st_0} = 1 \quad (14)$$

به روش مشابه می‌توان انتگرال حاصل ضرب تابع دلتا و هر تابع پیوسته f را تعریف کرد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0) f(t) dt \quad (15)$$

با استفاده از تعریف $d_\tau(t)$ ، $d_\tau(t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t) dt$ و قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرالها، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0) f(t) dt &= \frac{1}{2\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\tau} \cdot 2\tau \cdot f(t^*) = f(t^*) \end{aligned}$$

که در آن $t^* = t_0 + \tau$. بنابراین وقتی $t \rightarrow t_0$ ، $\tau \rightarrow 0$ ، و از رابطه (15) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad (16)$$

اغلب هنگامی که با مسائل ضربهای سروکار داریم، تابع دلتا را برای سهولت وارد کرده، و روی آن به طور صوری همانند یک تابع معمولی عمل می‌کنیم. این نکته را در مثال زیر توضیح می‌دهیم. اما باید توجه داشت که توجیه نهایی این قبیل روشها باید بر تحلیل دقیق عملیات حدگیری مزبور مبتنی باشد. در این مورد نظریه ریاضی متفقی تکامل یافته است، اما دشوارتر از آن است که در اینجا مورد بحث فرار گیرد.

مثال. جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (17)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (18)$$

را بیابید.

این مسئله مقدار اولیه ممکن است در بررسی یک مدار الکتریکی که در آن یک ولتاژ ضربه‌ای واحد در زمان $\pi = t$ اعمال شده است مطرح گردد.

برای حل مسئله مزبور مبدل لاپلاس معادله دیفرانسیل را به دست می‌آوریم

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = e^{-\pi s}$$

که در آن شرایط اولیه (18) به کار رفته‌اند. بدینسان

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} = e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \quad (19)$$

بنا بر قضیه ۴.۶ یا از جدول ۱.۶

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right\} = e^{-t} \sin t \quad (20)$$

بدینسان، بنا بر قضیه ۴.۶ داریم

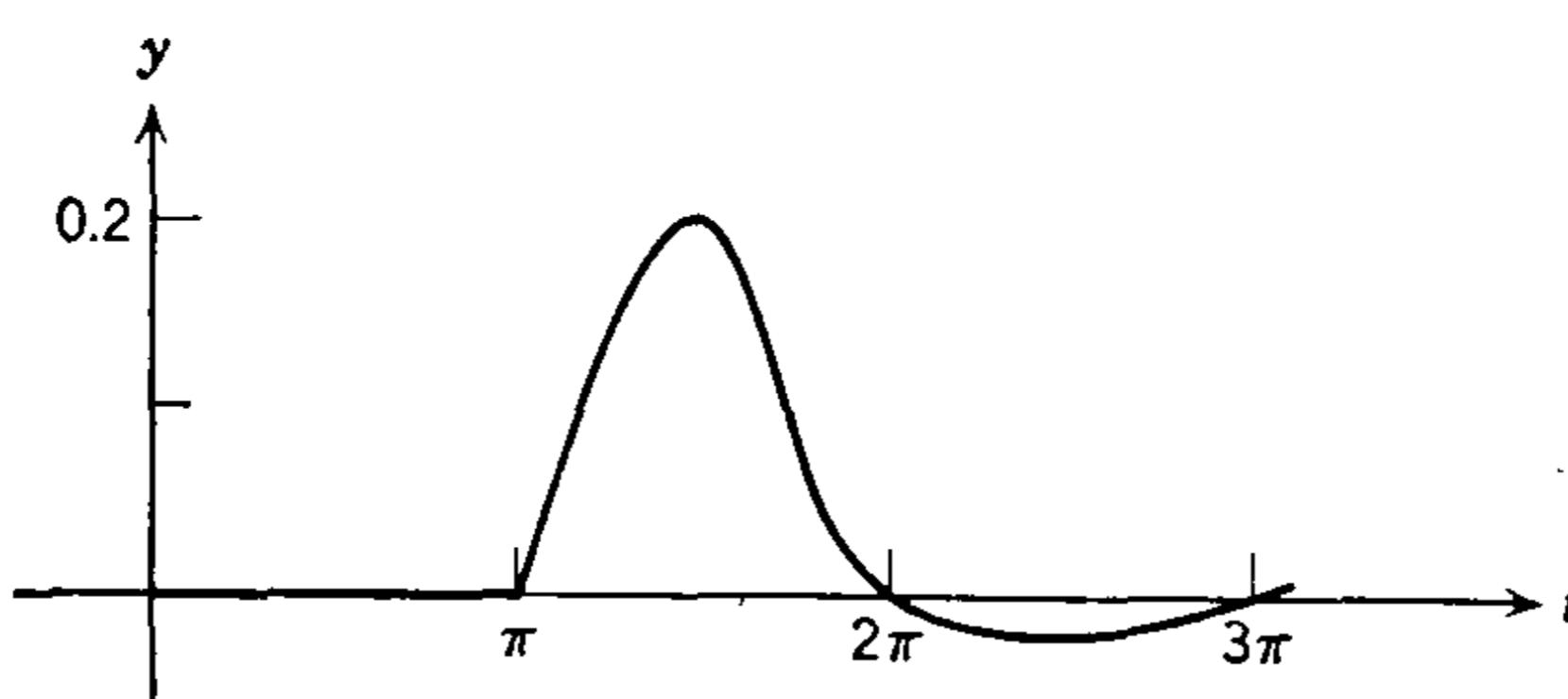
$$y = \mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} = u_{\pi}(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) \quad (21)$$

که جواب صوری مسئله مزبور است. می‌توان y را به صورت زیر نوشت

$$y = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi), & t \geq \pi \end{cases} \quad (22)$$

نمودار تابع (22) در شکل ۱۲.۶ نشان داده شده است.

چون در $t = 0$ شرایط اولیه همگن‌اند، و تحریک خارجی $t = \pi$ وجود ندارد،



شکل ۱۲.۶ جواب مسئله مقدار اولیه (17) و (18)

در فاصله $\pi < t < \infty$ پاسخی وجود نخواهد داشت. ضر به در $\pi = t$ پاسخی ایجاد می‌کند که به طور نامحدود ادامه دارد، گرچه به طور نمایی، در صورت فقدان تحریک خارجی دیگر، مستهلك می‌شود. توجه به این نکته نیز جالب است که پاسخ در $\pi = t$ علی‌رغم ماهیت غیرعادی تابع نیرو در این نقطه، پیوسته است، اما شیب جواب در این نقطه دارای یک ناپیوستگی جهشی است، و مشتق دوم آن در این نقطه تعریف نشده است. این لازمه معادله دیفرانسیل (۱۷) است زیرا وجود نقطه غیرعادی در یک طرف آن باید با یک نقطه غیرعادی در طرف دیگر توازن یابد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۷ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را با استفاده از تبدیل لاپلاس بیابید.

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (1)$$

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3)$$

$$y'' - y = 2\delta(t - 1); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (4)$$

$$y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (5)$$

$$y'' + \omega^2 y = \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (7)$$

*۸. (الف) با استفاده از روش تغییر پارامترها نشان دهید که جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

عبارت است از

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$$

(ب) نشان دهید که اگر $f(t) = \delta(t - \pi)$. آنگاه جواب قسمت (الف) به صورت زیر ساده می‌شود

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)$$

که با رابطه (۲۱) متن تطبیق می‌کند.

۵.۶ انتگرال تلفیقی

گاهی می‌توان یک مبدل لاپلاس $(H(s))$ را به صورت حاصل‌ضرب دو مبدل دیگر $(F(s))$ و $(G(s))$ که به ترتیب با توابع f و g متناظرند بیان کرد. در این حالت، ممکن است انتظار داشته باشیم که $(H(s))$ مبدل حاصل‌ضرب f و g باشد. اما، چنین نیست؛ به عبارت دیگر، مبدل لاپلاس حاصل‌ضرب معمولی دو تابع، حاصل‌ضرب مبدل آنها نیست. لیکن از طرف دیگر، اگر یک «ضرب تعمیم‌یافته» مناسبی تعریف کنیم وضعیت تغییر می‌کند، و به صورتی که در قضیه زیر بیان شده است در می‌آید.

قضیه ۵.۶. اگر $\{f(t)\}$ و $\{G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\}$ هردو به‌ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشند، آنگاه

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad s > a \quad (1)$$

که در آن

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

تابع h از تلفیق f و g می‌نامند؛ انتگرالهای موجود در رابطه (۲) نیز انتگرالهای تلفیقی می‌نامند.

تساوی دو انتگرال رابطه (۲) از تعویض متغیر $\tau = t - \tau$ در انتگرال اول نتیجه می‌شود. پیش از آنکه به اثبات قضیه پردازیم نکاتی را درباره انتگرال تلفیقی بیان می‌کنیم. طبق این قضیه، مبدل تلفیق دو تابع (و نه مبدل حاصل‌ضرب معمولی آنها) با حاصل‌ضرب مبدل‌های آنها برابر است. به منظور تأکید این نکته که انتگرال تلفیقی را می‌توان به عنوان یک «ضرب تعمیم‌یافته» تلقی کرد قرار می‌دهند

$$h(t) = (f * g)(t) \quad (3)$$

به‌ویژه، علامت $(f * g)(t)$ نمایشگر نخستین انتگرال موجود در رابطه (۲) است. تلفیق $g * f$ دارای بسیاری از خواص ضرب معمولی است. به عنوان مثال، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$f * g = g * f \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی}) \quad (4)$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{خاصیت توزیع‌پذیری}) \quad (5)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری}) \quad (6)$$

$$f * 0 = 0 * f = 0 \quad (7)$$

اثبات این خواص به خواننده واگذار می‌شود. اما، ضرب معمولی دارای خواص دیگری

است که انتگرال تلفیقی واجد آنها نمی باشد. به عنوان مثال، معمولاً $f * 1$ با f برابر نیست. برای اثبات کافی است توجه شود که

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot 1 d\tau = \int_0^t f(t - \tau) d\tau$$

و مثلًا اگر $f(t) = \cos t$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} (f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t - \tau) d\tau = -\sin(t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\sin 0 + \sin t \\ &= \sin t \end{aligned}$$

روشن است که، $(f * 1)(t) \neq f(t)$. به همین نحو، نامنفی بودن $f * f$ ممکن است صادق نباشد. برای مثال مسئله ۳ را بینید.

در کاربردهای گوناگونی که در آن رفتار دستگاه در لحظه t نه تنها به وضعیت آن در لحظه 0 بستگی دارد، بلکه به گذشته آن نیز وابسته است به انتگرالهای تلفیقی برمی خوریم. این نوع دستگاهها را گاهی دستگاههای وراثتی می نامند و در زمینه های مختلفی از قبیل انتقال نترونی، کشسانی-چسب، و بررسی ازدیاد جمعیتها مطرح می شود. اکنون برگردیم به اثبات قضیه ۶.۶، نخست دیده می شود که اگر

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta$$

آنگاه

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta \quad (8)$$

چون تابع زیر علامت انتگرال اول به متغیر انتگرالگیری دومین انتگرال بستگی ندارد، می توان $F(s)G(s)$ را به صورت انتگرال مکرر نوشت،

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-s(\xi + \eta)} f(\xi) d\xi \quad (9)$$

این عبارت را می توان با تعویض متغیر به صورت ساده تری درآورد. نخست به ازای η ی ثابت قرار می دهیم $\eta = t - \xi$ ، آنگاه انتگرال بر حسب ξ در رابطه (۹) به انتگرالی

بر حسب t بدل می شود؛ بدینسان

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_\eta^\infty e^{-st} f(t-\eta) dt \quad (10)$$

سپس با قراردادن $\tau = t - \eta$ ؛ رابطه (10) به صورت زیر درمی آید

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt \quad (11)$$

انتگرال طرف دوم رابطه (11) دربخشی از صفحه ۱۷ که آن را در شکل ۱۳.۶ سایه زده ایم و تا بینهایت ادامه دارد محاسبه می شود. با فرض آنکه بتوان ترتیب انتگرال گیری را معکوس کرد داریم

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (12)$$

یا

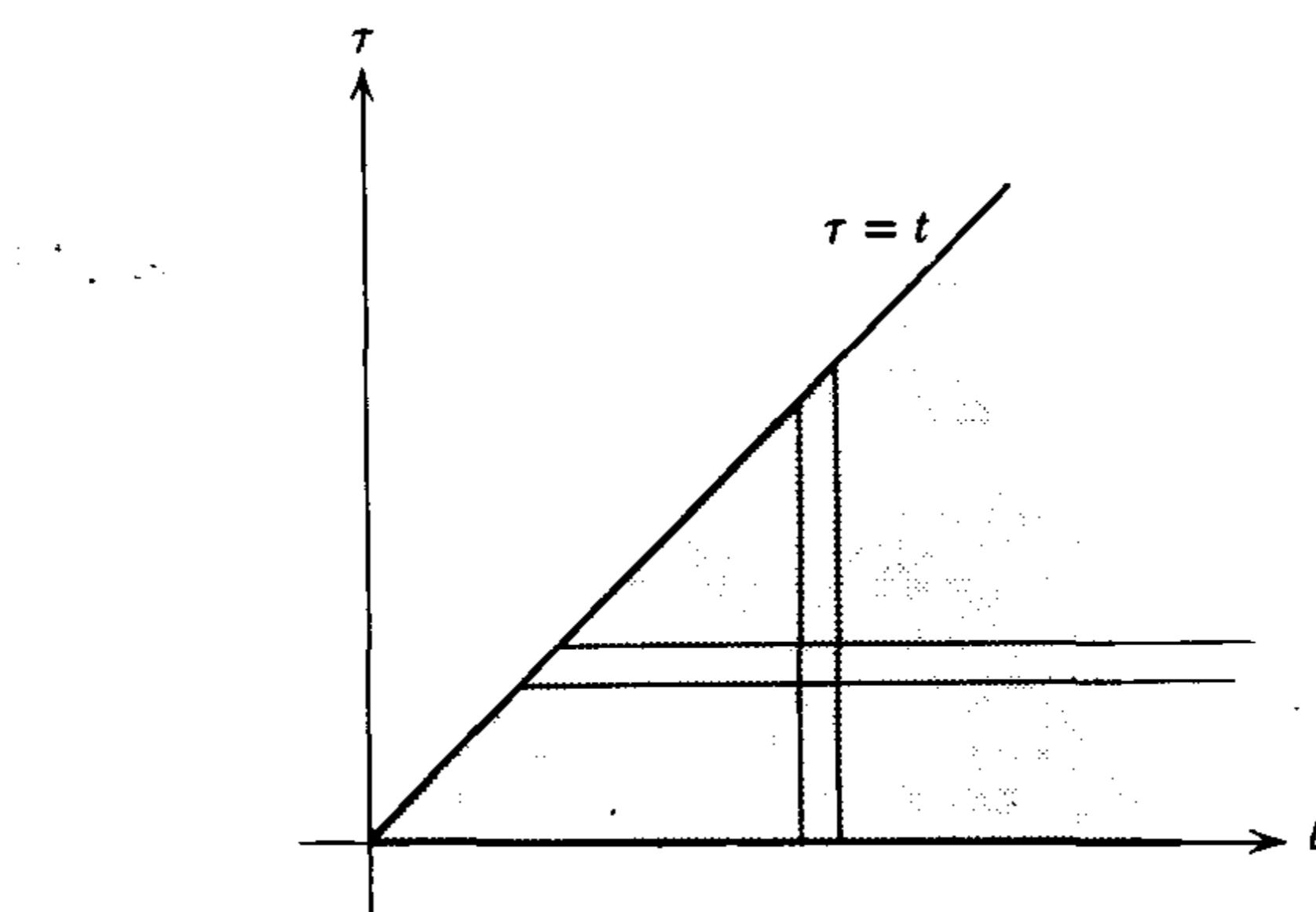
$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt \\ &= \mathcal{L}\{h(t)\} \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن $h(t)$ به وسیله رابطه (۲) تعریف شده است. بدینسان اثبات قضیه ۱۳.۶ پایان می یابد.

@jozve_iut

مثال. مطلوب است تعیین بدل معکوس

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$$



شکل ۱۳.۶

به آسانی می‌توان $H(s)$ را به عنوان حاصل ضرب s^{-2} و $a/(s^2+a^2)$ تلقی کرد، که طبق جدول ۱.۶، به ترتیب مبدل‌های t و $\sin at$ می‌باشند. بدین‌سان، بنا بر قضیه ۶.۶، مبدل معکوس $H(s)$ عبارت است از

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau) \sin a\tau d\tau = \frac{at - \sin at}{a^2}$$

خواهد می‌تواند نشان دهد که اگر برای $h(t)$ شق دیگر

$$h(t) = \int_0^t \tau \sin a(t-\tau) d\tau$$

را انتخاب کنیم به همین نتیجه می‌رسیم و رابطه (۲) در این حالت تأیید می‌گردد.

مسائل

۱. خواص جابه‌جایی، توزیع پذیری، و شرکت پذیری انتگرال تلفیقی را اثبات کنید.

$$f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2 \quad (\text{ب}) \quad f*g = g*f \quad (\text{الف})$$

$$f*(g*h) = (f*g)*h \quad (\text{ج})$$

۲. مثال دیگری به‌جز آنچه در متن آمده است بیان دهد $(f*(1))t$ لزوماً با $f(t)$ برابر نیست.

۳. با استفاده از مثال $f(t) = \sin t$ نشان دهید که $f*f$ لزوماً نامنفی نیست.

@jozve_rut

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau \quad (\text{لف})$$

$$f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^\tau d\tau \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \cos \tau d\tau \quad (\text{د})$$

۵. با استفاده از قضیه تلفیق مبدل معکوس لاپلاس هریک از توابع زیر را بیان دهد.

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)} \quad (\text{ب}) \quad F(s) = \frac{1}{s^4(s^2+1)} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{G(s)}{s^2+1} \quad (\text{د}) \quad F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} \quad (\text{ج})$$

۶. مطلوب است تعیین جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

که در آن $f(t) = 1 - u_{2\pi}(t)$

۷. مطلوب است تعیین جواب مسئله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

که در آن α مقداری است ثابت.

۸. معادله

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi) d\xi = f(t)$$

را که در آن توابع f و k معلوم، و ϕ مجهول است در نظر می‌گیریم. چون تابع مجهول ϕ در زیر علامت انتگرال است، معادله مزبور را معادله انتگرالی می‌نامند؛ به ویژه، این معادله به طبقه‌ای از معادلات انتگرالی تعلق دارد که به معادلات انتگرالی ولترای مشهورند. با اگرفتن مبدل لاپلاس از معادله انتگرالی مزبور، برای $\{\phi\}$ عبارتی بر حسب $\{f\}$ و $\{k\}$ مبدل‌های توابع معلوم f و k به دست می‌آید. مبدل معکوس $\{\phi\}$ جواب معادله انتگرالی داده شده است.

۹. معادله انتگرالی ولترای (مسئله ۸ را بینید)

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi) d\xi = \sin 2t$$

را در نظر می‌گیریم.

(الف) نشان دهید که اگر تابع u به گونه‌ای باشد که $u''(t) = \phi(t)$ ، آنگاه

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = \sin 2t$$

(ب) نشان دهید که معادله انتگرالی مزبور با مسئله مقدار اولیه

$$u''(t) + u(t) = \sin 2t; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

هم ارز است.

(ج) معادله انتگرالی مزبور را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

(د) مسئله مقدار اولیه قسمت (ب) را حل کنید، و تحقیق کنید که جواب همان است که در قسمت (ج) به دست آمد.

۱۰۰. توتوکرون^۲ (خم همزمان). یکی از مسائل جالب در تاریخ ریاضیات مسئله

تعیین توتوکرون است: خمی که هرگاه یک نقطه مادی روی آن تنها در اثر نیروی ثقل بلغزد، زمان لازم برای رسیدن آن به پاییترین نقطه خم مستقل از نقطه آغاز حرکت باشد. برای ساختن آونگی که تناوب آن از دامنه نوسان مستقل باشد به این مسئله بخوازند. توتوکرون را در ۱۶۷۳ کریستیان هویگنس^۱ با روش‌های هندسی به دست آورد، و بعداً لاینیتز و یاکوب برنولی آن را با روش تحلیلی به دست آوردن. روش برنولی (در ۱۶۹۵) یکی از نخستین مواردی بود که در آن صریحاً به حل یک معادله دیفرانسیل اقدام شد.

خم مزبور در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده است. نقطه آغازی $P(a, b)$ به نقطه انتهایی $(0, 0)$ با کمان C متصل شده است. طول کمان s را از مبدأ اندازه می‌گیریم، و $f(y)$ میزان تغییرات s را بر حسب y نشان می‌دهد:

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{یک})$$

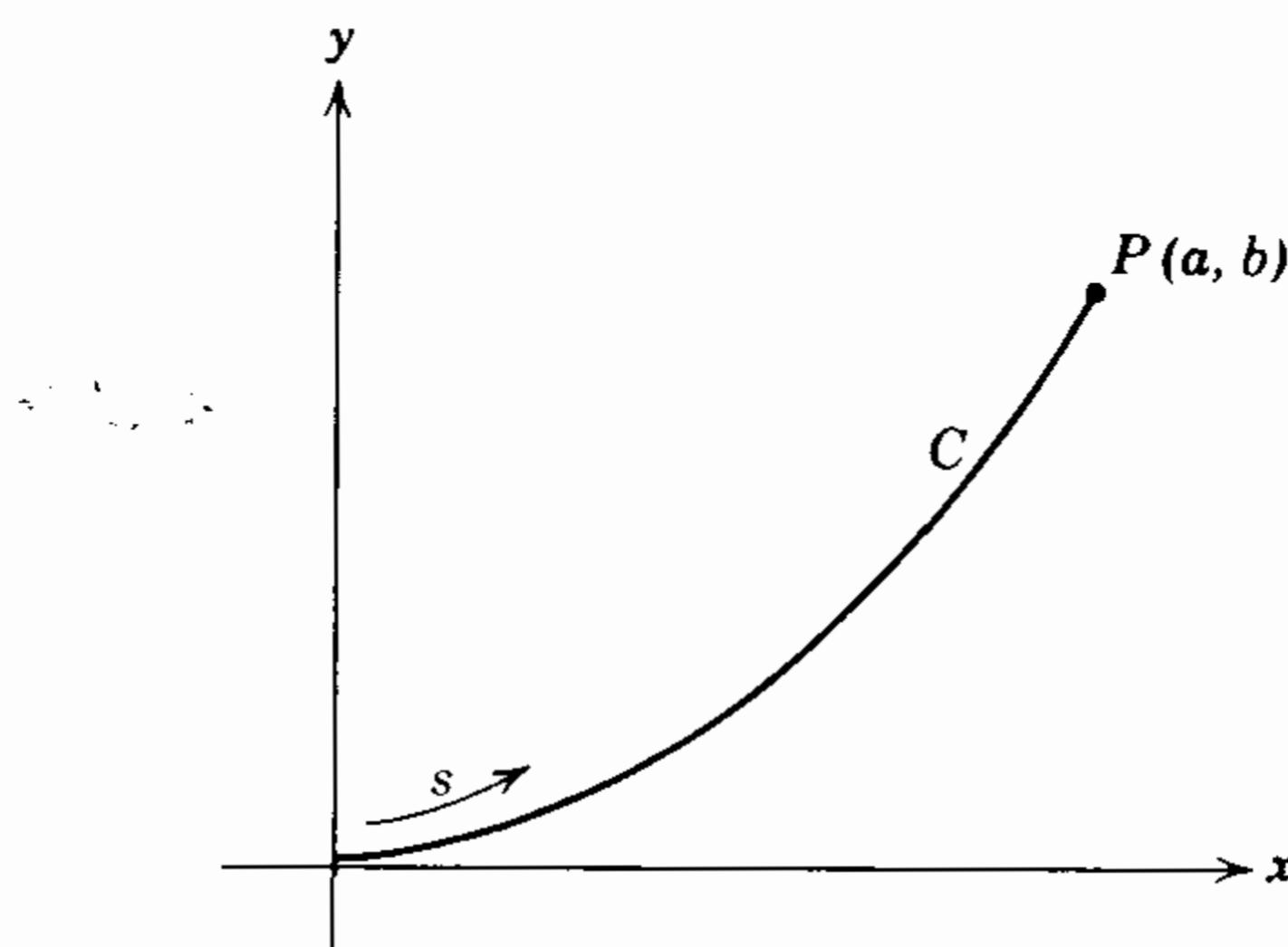
آنگاه $T(b)$ زمان لازم برای رسیدن P به مبدأ با استفاده از اصل بقاء انرژی به صورت زیر به دست می‌آید

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy \quad (\text{دو})$$

(الف) فرض کنیم که b هرچه باشد، $T(b) = T_0$ مقداری است ثابت. از معادله (دو) تبدیل لاپلاس بگیرید، و با استفاده از قضیه تلفیق نشان دهید که

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot \frac{T_0}{\sqrt{s}}; \quad (\text{سه})$$

آنگاه نشان دهید که



شکل ۱۴.۶

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g} T_0}{\pi \sqrt{y}} \quad (چهار)$$

(ا) هنماهی: مسئله ۱۵ بند ۱.۶ را بینید.

(ب) با ترکیب معادلات (یک) و (چهار)، نشان دهید که

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}} \quad (\ پنج)$$

$$\text{که در آن } \alpha = gT_0^2 / \pi^2$$

(ج) با استفاده از تعویض متغیر $y = 2\alpha \sin^2(\theta/2)$ برای حل معادله (پنج) نشان دهید که

$$x = \alpha(\theta + \sin \theta), \quad y = \alpha(1 - \cos \theta) \quad (\text{شش})$$

معادلات (شش) نمایشگر معادلات پارامتری یک سیکلوئید است. بدینسان تو تو کرون کمانی از سیکلوئید است.

۶.۶ بحث کلی و خلاصه

در نخاتمه این فصل، به اختصار برخی از جنبه‌های کلیتر روش تبدیل را مورد بحث قرار می‌دهیم. مسئله مقدار اولیه‌ای را که مشتمل بر معادله دیفرانسیل

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (۱)$$

است و a ، b و c ثابت‌های حقیقی و f تابع معلومی است همراه با شرایط اولیه

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (۲)$$

در نظر می‌گیریم.

مبدل لاپلاس معادله (۱) عبارت است از

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y(0) - ay'(0) = F(s) \quad (۳)$$

که در آن $Y(s)$ و $F(s)$ به ترتیب مبدل‌های y و $f(t)$ می‌باشند. با استفاده از شرایط اولیه (۲) واستخراج $Y(s)$ ، به دست می‌آید

$$Y(s) = \frac{F(s) + (as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c} \quad (۴)$$

بدینسان می‌توان $Y(s)$ را به عنوان حاصل ضرب توابع

$$H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1} \quad (۵)$$

و

$$(6) \quad G(s) = F(s) + (as + b)y_0 + ay'_0$$

تصور کرد. تابع نخست، H ، کاملاً به وسیله خواص دستگاه مورد بررسی مشخص می‌گردد، و می‌توان آن را تابع دستگاه نامید. در مورد یک مدار الکتریکی معمولاً تابع $Z(s) = 1/sH(s)$ را امپدانس^۱ مدار می‌نامند. تابع دوم، G ، به تابع نیرو و شرایط اولیه بستگی دارد و می‌توان آن را تابع تحریک نامید. علاوه بر این، تابع تحریک نیز از دو جزء تشکیل شده است: تابع F ، که مبدل تابع نیروی f است، و تابع $(as + b)y_0 + ay'_0$ که به شرایط اولیه بستگی دارد.

در اینجا این وسوسه پیش می‌آید که بنویسیم

$$(7) \quad Y(s) = H(s)G(s)$$

و، با استفاده از قضیه تلفیق جواب معادلات (۱) و (۲) را به صورت زیر به دست آوریم

$$(8) \quad y = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau) d\tau$$

اما، تابع $(as + b)y_0 + ay'_0$ نمی‌تواند مبدل لاپلاس یک تابع معمولی باشد.^۲ در نتیجه، باید $Y(s)$ را به صورت زیر نوشت

$$(9) \quad Y(s) = H(s)F(s) + \frac{(as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c}$$

@jozve_iut

از آنها

$$(10) \quad y = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau) d\tau + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c} \right\}$$

به مجرد آنکه مقادیر a ، b و c داده شوند، مبدل معکوس موجود در رابطه (۱۰) را می‌توان از جدول ۱.۶ یا با استفاده از روش کسرهای ساده تعیین کرد. با استفاده از خطی بودن تبدیل معکوس، معادله (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(11) \quad y = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau) d\tau + y_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{as + b}{as^2 + bs + c} \right\} + y'_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{as^2 + bs + c} \right\}$$

1. impedance

۱.۲ اگر چنین بود وقتی $\rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کرد (مسئله ۱ بند ۱.۶ را ببینید). اما، می‌توان این تابع را به عنوان مبدل ترکیبی از تابع دلتا و «مشتق» آن تعبیر کرد.

وچون قرار دهیم

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{as+b}{as^2+bs+c} \right\}, \quad y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{as^2+bs+c} \right\} \quad (12)$$

خواهیم داشت

$$y = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + y_0 y_1(t) + y'_0 y_2(t) \quad (13)$$

نخستین جمله طرف دوم رابطه (13) پاسخ دستگاه را به تابع نیروی f نشان می‌دهد. بنا بر اصول اطلاعات فصل ۳ این یک جواب خصوصی معادله ناهمگن (1) است. جملات دیگر طرف دوم رابطه (13) پاسخ دستگاه با شرایط اولیه را نمایش می‌دهد. اگر y و y' را بعنوان ثابت‌های دلخواه تلقی کنیم، این جمله‌ها متضمن تابع مکمل، یعنی جواب عمومی معادله همگن متناظر با معادله (1) می‌باشند.

مراجع

کتابهای زیر درباره تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن حاوی اطلاعات بیشتری هستند.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1958.

Doetsch, Gustave, *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, Van Nostrand, London, 1967.

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

McLachlan, N. W., *Modern Operational Calculus*, Dover, New York, 1962.

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 1971.

هریک از کتابهای فوق شامل یک جدول تبدیلات است. جداول مفصلتری نیز وجود دارند؛ بعنوان مثال، کتابهای زیر را ببینید:

Erdelyi, A. (editor), *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.

Roberts, G. E. and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms*, Saunders, Philadelphia, 1966.

در کتاب زیر بحث مفصلتری درباره توابع تعمیم یافته آمده است:

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, 1958.

دستگاههای معادلات موتّبه اول

۱.۷ مقدمه

این فصل به بررسی دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی اختصاص دارد. در مسائلی که مشتمل بر چند تابع از یک متغیر مستقل می‌باشند، طبعاً چنان نوع دستگاهها بر می‌خوریم. در اینجا توابع را با x_1, x_2, x_3, \dots و متغیر مستقل را با t نشان می‌دهیم. مشتق‌گیری نسبت به t را با علامت پریم نمایش می‌دهیم.

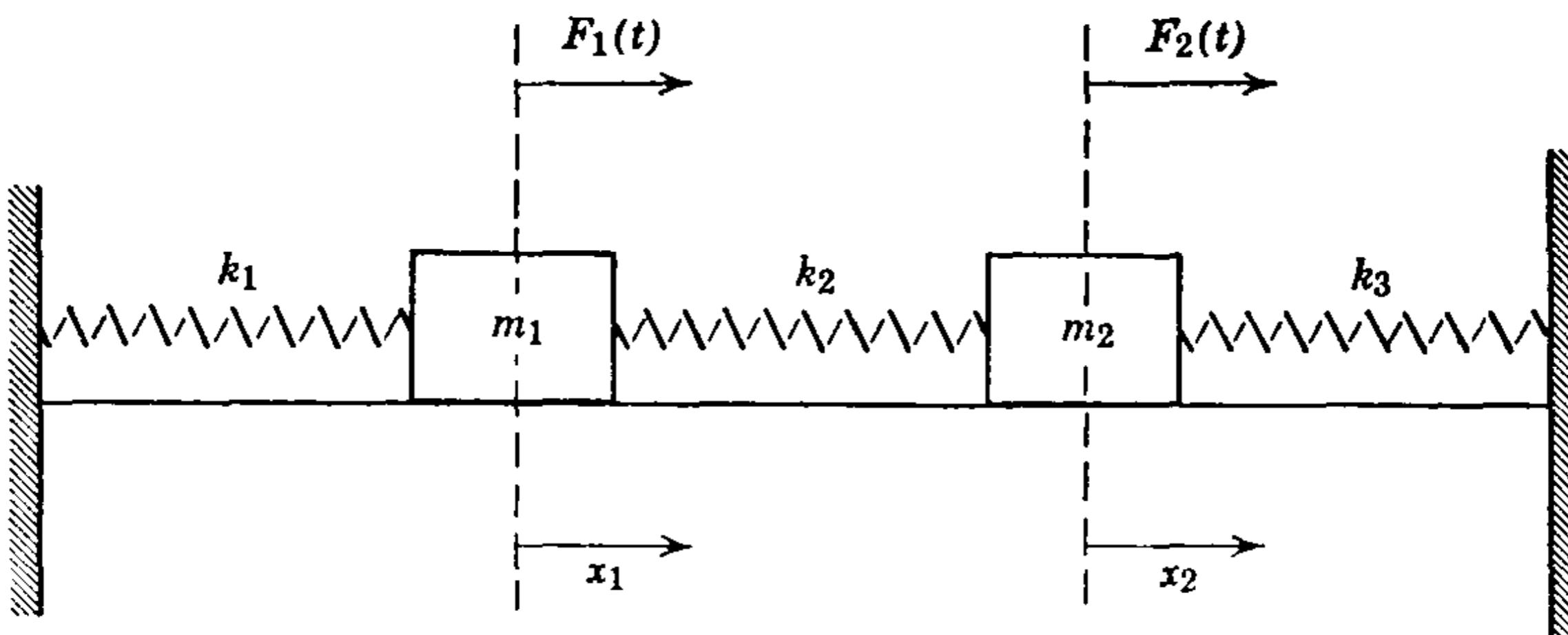
به عنوان مثال، حرکت یک نقطه مادی در فضای سه بعدی از قانون نیوتون

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x_1}{dt^2} &= F_1\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right), \\ m \frac{d^2x_2}{dt^2} &= F_2\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right), \\ m \frac{d^2x_3}{dt^2} &= F_3\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

پیروی می‌کند، که در آن m جرم نقطه مادی؛ x_1, x_2 و x_3 مختصات فضایی آن؛ و F_1, F_2 و F_3 نیروهای وارد بر آن به ترتیب در راستاهای x_1, x_2 و x_3 است. اگر مثلاً نقطه مذبور نمایشگر یک سفینه فضایی باشد، آنگاه F_1, F_2 و F_3 مشتمل است بر نیروهای

جازبه که از اجرام سماوی مجاور بر سفینه وارد می‌شوند، و نیروهایی که به وسیله دستگاه محرکه ایجاد می‌گردند، و علاوه بر این اگر در جو زمین باشد، نیروهای مقاوم را نیز شامل است.

به عنوان مثال دیگر، دستگاه متشکل از فنر- جرم را که در شکل ۱.۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم.



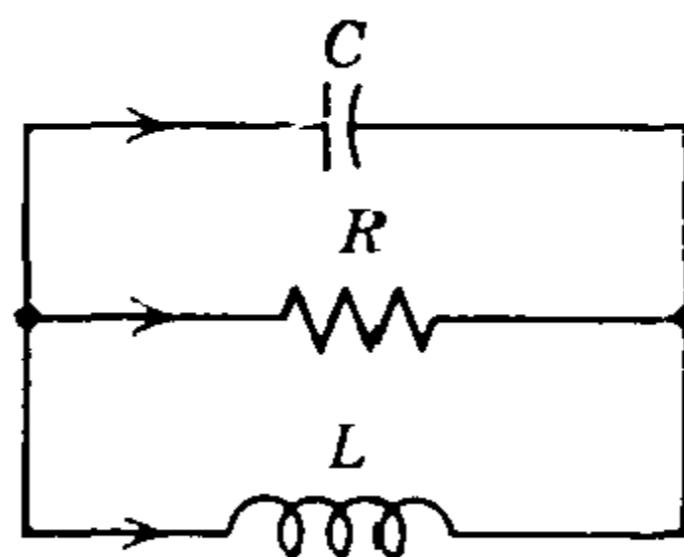
شکل ۱.۷ یک دستگاه فنر- جرم با دو درجه آزادی

دو جرم مزبور روی سطحی بدون اصطکاک تحت تأثیر نیروهای خارجی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ حرکت می‌کنند، و به سه فنر که ثابت‌های آنها به ترتیب k_1 ، k_2 و k_3 است مقیدند. با استدلالی مشابه آنچه در بند ۷.۳ داشتیم برای x_1 و x_2 ، مختصات دو جرم مزبور معادلات زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_1(x_1 - x_2) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_2 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

در مسئله ۶ چگونگی به دست آوردن معادلات (۲) طرح شده است. به عنوان مثال دیگر، مدار موازی RLC را که در شکل ۲.۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. اگر V افت ولتاژ خازن و I جریان در خودالقا باشد، آنگاه بنا بر بند ۸.۳ و مسئله ۷ این بند، می‌توان نشان داد که ولتاژ و جریان در این مدار مطابق با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}, \end{aligned} \quad (3)$$



شکل ۲۰.۷ یک مدار موازی شامل خازن، مقاومت و القایی

انجام می‌گیرد که در آن L ضریب القایی، C ظرفیت، و R مقاومت است. به عنوان مثال آخر مسئله شکارگر- طعمه را که یکی از مسائل اساسی اکولوژی ریاضی است بیان می‌کنیم. فرض کنیم (t) H و (t) P در زمان t جمعیت دو نوع جانور را نشان دهد که یکی از آنها (P) از نوع دیگر (H) تغذیه می‌کند. بدینسان مثال، (t) P و (t) H می‌توانند به ترتیب نمایشگر تعداد روばاهای خاردار خورده می‌شوند) در یک ماهیهای خاردار و ماهیهای قرمز (که به وسیله ماهیهای خاردار خورده می‌شوند) در یک پرکه باشد. بدون وجود طعمه‌ها، شکارگران کاهش می‌یابند و بدون شکارگران، طعمه‌ها افزایش می‌یابند. برای بررسی کیفیت حفظ توازن اکولوژیکی در محیطی که هر دونوع وجود داشته باشند در سال ۱۹۲۵ لوتكا و ولتر^۱ یک مدل ریاضی مطرح کردند. این مدل از دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= a_1 H - b_1 H P, \\ \frac{dP}{dt} &= -a_2 P + b_2 H P \end{aligned} \quad (۴)$$

تشکیل می‌گردد که در آن ضریب a_1 میزان مواليد جمعیت H ؛ و a_2 میزان مرگ و میر جمعیت P است. b_1 و b_2 ضرایب تأثیر متقابل بین شکارگر و طعمه می‌باشند. معادلاتی به شکل (۴) را گاهی معادلات شکارگر- طعمه می‌نامند. در بند ۵.۹ به بررسی دقیق آنها خواهیم پرداخت.

مثالهای دیگری از دستگاههای معادلات دیفرانسیل مربوط به مذکورهای الکترونیکی در مسائل پایان بند آمده است. ارتباط مهمی بین معادله دیفرانسیل از مرتبه دلخواه و دستگاه معادلات وجود دارد. در واقع، یک معادله مرتبه n

۱. آلفرد ج. لوتكا (Alfred J. Lotka)، (۱۸۸۰-۱۹۴۹) یک بیوفیزیکدان آمریکایی بود. ویتو ولتر (Vito Volterra)، (۱۸۶۰-۱۹۴۰) ریاضیدان ایتالیایی بیشتر به خاطر پژوهشهاش در معادلات انتگرالی شهرت دارد (مسئله ۸ بند ۵.۶ را ببینید). وی نیز یکی از بنیانگذاران نظریه جدید انتگرالگیری و آنالیز تابعی است.

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5)$$

را همواره می‌توان به یک دستگاه شامل n معادله مرتبه اول که دارای شکل خاصی است تبدیل کرد. برای اثبات متغیرهای x_1, x_2, \dots, x_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'', \dots, x_n = y^{(n-1)} \quad (6)$$

آنگاه به آسانی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \end{aligned} \quad (7)$$

وازمعادله (5)

$$x'_n = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8)$$

معادلات (7) و (8) حالت خاصی از دستگاه کلیتر زیر است

$$\begin{aligned} x'_1 &= F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 &= F_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (9)$$

به طریق مشابه می‌توان دستگاههای (1) و (2) را نیز به دستگاههای مرتبه اول به صورت (9) تبدیل کرد، که به ترتیب شامل شش و چهار معادله خواهند بود. دستگاههای (3) و (4) خود به صورت (9) هستند. در واقع، دستگاههای بد صورت (9) تقریباً شامل تمام حالتهای جالب می‌باشند، و در نتیجه بخش اعظم نظریه پیشرفت‌تر معادلات دیفرانسیل به این نوع دستگاهها اختصاص یافته است.

دستگاه معادلات (9) را هنگامی روی فاصله $\alpha < t < \beta$ دارای جواب گویند که یک مجموعه از n تابع

$$x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$$

وجود داشته باشد، که در تمام نقاط $\alpha < t < \beta$ مشتق پذیر بوده و در دستگاه (9) به ازای همه نقاط این فاصله صدق کنند. علاوه بر دستگاه معادلات دیفرانسیل مفروض، ممکن است شرایط اولیه‌ای به صورت زیر نیز داده شده باشد

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \quad (10)$$

که در آن β مقدار خاصی از α واقع در $\alpha < \beta < \gamma$ است، و اعداد x_1, \dots, x_n از پیش تعیین شده‌اند. معادلات دیفرانسیل (۹) و شرایط اولیه (۱۰) با هم تشکیل یک مسئله مقدار اولیه می‌دهند.

به منظور آنکه برای مسئله مقدار اولیه (۹) و (۱۰) یک جواب یکتا تضمین شود، لازم است بر توابع F_1, F_2, \dots, F_n شرایطی اعمال گردد. قضیه زیر مشابه قضایای وجود و یکتا بی جواب درمورد معادلات مرتبه اول و دوم است که بهتر تیپ در قضایای ۲۰۲ و ۱۰۳ آمده است.

قضیه ۱۰۷. فرض کنیم هر یک از توابع F_1, \dots, F_n و مشتقهای جزئی $\partial F_1 / \partial x_1, \dots, \partial F_n / \partial x_n, \dots, \partial^2 F_1 / \partial x_1^2, \dots, \partial^2 F_n / \partial x_n^2$ در یک ناحیه R ، از فضای x_1, \dots, x_n ، که شامل نقطه $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ باشد پیوسته است. آنگاه یک فاصله $h < |t - t_0|$ وجود داده که در آن دستگاه معادلات دیفرانسیل (۹) دارای جواب یکتا $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ است، که دشرایط اولیه (۱۰) نیز صدق می‌کند.

این قضیه را می‌توان با تعمیم استدلال مذکور در بند ۱۱۰۲ ثابت کرد، اما در اینجا به بیان آن نمی‌پردازیم. اما، به این نکته توجه شود که درباره مشتقهای جزئی توابع F_1, F_2, \dots, F_n نسبت به t در فرض قضیه چیزی بیان نشده است. علاوه بر این در قسمت حکم، طول ۲۶، فاصله‌ای که در آن جواب وجود دارد، دقیقاً مشخص نیست، و در برخی از حالاتها ممکن است بسیار کوتاه باشد. بالاخره، شرایط مذکور برای تأمین نتیجه کافی انسد نه لازم و قضیه به کلیترین صورتی که می‌شناسیم بیان نشده است.

اگر هر یک از توابع F_1, \dots, F_n در معادلات (۹) تابعی خطی از متغیرهای x_1, \dots, x_n باشند، آنگاه دستگاه معادلات مزبور را خطی می‌نماید. در غیر این صورت ناخطي است. بدینسان کلیترین دستگاه n معادله خطی مرتبه اول به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (11)$$

اگر هر یک از توابع g_1, \dots, g_n متحداً برابر صفر باشند، آنگاه دستگاه (۱۱) را همگن می‌نامند؛ در غیر این صورت ناهمگن است. ملاحظه شود که دستگاه‌های (۲) و (۳) هردو خطی‌اند؛ دستگاه (۲) ناهمگن است مگر آنکه $F_1(t) = F_2(t) = 0$ ، اما دستگاه (۳) همگن است. دستگاه (۴) ناخطي است. دستگاه (۱) بسته به نوع توابع F_1, F_2, \dots, F_n خطی است و یا ناخطي.

درمورد دستگاه خطی (۱۱) قضیه وجود و یکتا بی ساده‌تر و دارای نتیجه‌ای قویتر است، و مشابه قضایای ۱۰۲ و ۱۰۳ می‌باشد.

قضیه ۲۰۷. اگر توابع $p_{11}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ دوی فاصله باز $\alpha < t < \beta$

که شامل نقطه $t=0$ است، پیوسته باشند، آنگاه یک جواب یکتا i $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۱) وجود دارد، که در شرایط (۱۰) حدق می‌کند. این جواب در تمام فاصله $\alpha < t < \beta$ معتبر است.

توجه شود که برخلاف وضعیت دستگاه ناخطی، وجود یکتا i جواب دستگاه خطی در تمام فاصله‌ای که در آن فرضها صادق‌اند محقق است. علاوه بر این، درمورد یک دستگاه خطی مقادیر اولیه x_1^0, \dots, x_n^0 در $t=0$ کاملاً دلخواه‌اند، درحالی که برای حالت ناخطی نقطه اولیه باید در ناحیه R که در قضیه ۱.۷ تعریف شد واقع باشد.

این فصل به دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول اختصاص دارد (دستگاههای ناخطی را در ضمن فصول ۸ و ۹ مورد بحث قرار خواهیم داد). با به کار گرفتن برخی از نتایج نظریه ماتریسها مطالب به سودمندترین وجه بیان می‌شود، و از آغاز بند ۳.۷، بقیه این فصل مبتنی بر استفاده از ماتریسها است. نکات لازم درباره ماتریسها را در بند ۳.۷ و ۴.۷ خلاصه کرده‌ایم. برای خوانندگانی که کاملاً با نظریه ماتریسها بیگانه‌اند، بند ۴.۷ شامل بخشی از روش‌های مقدماتی حذف است که با آن می‌توان دستگاه معادلات را به یک معادله از مرتبه بالاتر تبدیل کرد. این روش اساس مناسبی برای بحث کلی دستگاههای خطی فراهم نمی‌کند، اما گاهی به عنوان وسیله حل دستگاههای دو یا سه معادله‌ای کاملاً مفید است.

مسائل

۱. هریک از دستگاههای (۱) و (۲) را به یک دستگاه معادلات مرتبه اول به صورت (۹) تبدیل کنید.
۲. مسئله مقدار اولیه

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0$$

را در نظر می‌گیریم. این مسئله را به یک مسئله مقدار اولیه متشکل از دو معادله خطی مرتبه اول تبدیل کنید.

۳. نشان دهید که اگر $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ و g_1, g_2 مقادیری ثابت باشند، و a_{21} و a_{12} توأم صفر نباشند، و اگر توابع g_1 و g_2 مشتق پذیر باشند، آنگاه مسئله مقدار اولیه زیر را

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0$$

۴. می‌توان به یک مسئله مقدار اولیه درمورد یک معادله مرتبه دوم تبدیل کرد. آیا می‌توان همین روش را هنگامی که a_{11}, \dots, a_{22} توابعی از t باشند اجرا کرد؟

۴. دستگاه خطی همگن

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y$$

$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y$$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ دو جواب دستگاه مذکور باشند، آنگاه

$$x = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

نیز به ازای ثابت‌های دلخواه c_1 و c_2 یک جواب است. این خاصیت همان اصل انتظام است.

۵. فرض کنیم $y_1(t)$ و $y_2(t)$ دو جواب دستگاه خطی ناهمگن زیر باشند

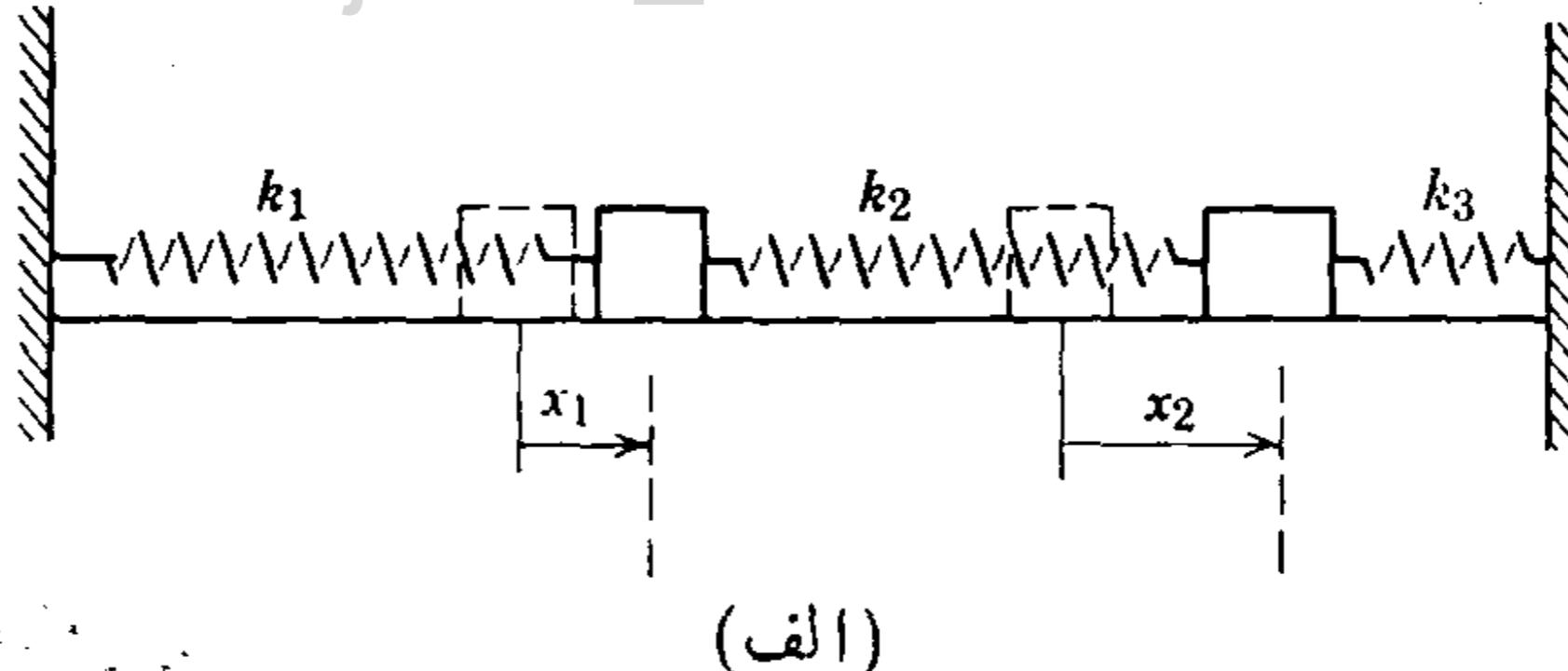
$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t)$$

$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t)$$

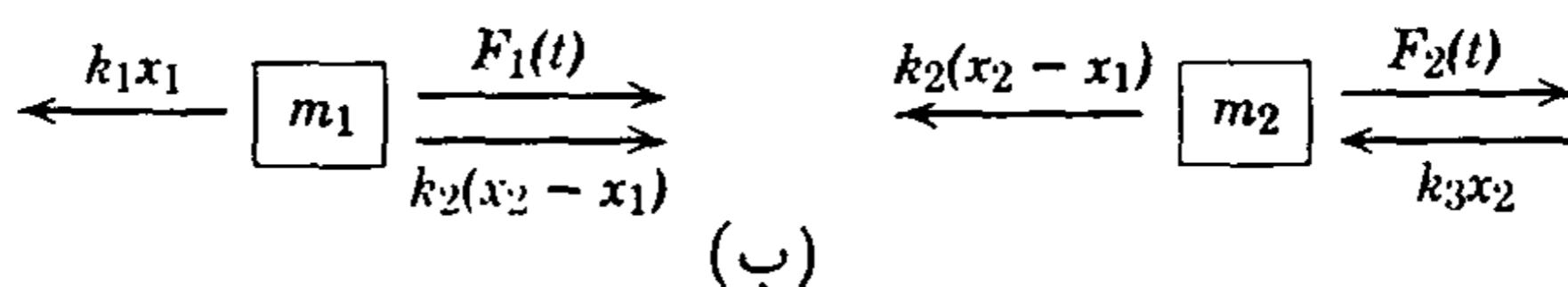
نشان دهید که $y = y_1(t) - y_2(t)$ یک جواب دستگاه همگن متناظر است.

۶. معادلات (۲) را می‌توان با ترسیم یک نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر بر هر جرم در آن نشان داده شده است، به دست آورد. شکل ۳.۷ (الف) این وضعیت را هنگامی که تغییر مکانهای x_1 و x_2 مربوط به هر دو جرم مثبت‌اند (به طرف راست) و $x_2 > x_1$ نشان می‌دهد. فترهای ۱ و ۲ منبسط گردیده و فتر ۳ منقبض شده است و بدین‌سان نیروهایی پدید آمده است که در شکل ۳.۷ (ب) دیده می‌شود. با استفاده از قانون نیوتون (معادلات (۲) را به دست آورید).

@jozve_iut



(الف)



(ب)

شکل ۳.۷

مدارهای الکترونیکی. نظریه مدارهای الکترونیکی، مانند آنچه در شکل ۲.۷ نشان داده شده است، متشکل از خودالقاها، مقاومتها، و خازنهای برق‌وانین کیوشف مبتنی

است: (۱) جریان خالص در هر گره (یا اتصال) صفر است، (۲) افت خالص ولتاژ در طول هر حلقه بسته صفر است. علاوه بر قوانین کیرشهف روابط بین جریان I بر حسب آمپر و افت ولتاژ V بر حسب ولت در هر یک از اجزاء مدار به صورت زیر وجود دارد

$$\text{مقاومت بر حسب اهم} \quad V = RI; \quad R = \frac{V}{I}$$

$$\text{ظرفیت بر حسب فاراد} \quad C = \frac{dV}{dt}; \quad C = \frac{I}{V}$$

$$\text{ضریب القا بر حسب هنری} \quad L = \frac{dI}{dt}; \quad L = \frac{V}{I}$$

قوانین کیرشهف و رابطه جریان-ولتاژ برای هر جزء مدار یک دستگاه جبری و معادلات دیفرانسیل فراهم می‌سازد و بدین وسیله ولتاژ و جریان را می‌توان در سراسر مدار تعیین کرد. مسائل ۷ تا ۹ این روش را توضیح می‌دهند.

۷. مداری را که در شکل ۲.۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. جریان در خازن، مقاومت، والقایی را به ترتیب با I_1 ، I_2 و I_3 وافت ولتاژهای متناظر را با V_1 ، V_2 و V_3 نشان می‌دهیم. جهت مثبت جریانها وافت ولتاژها را به دلخواه انتخاب کرده‌ایم و آنها را با پیکان نشان داده‌ایم.

(الف) با اعمال قانون دوم کیرشهف در مورد حلقه فوکانی مدار مزبور نشان دهید که

$$V_1 - V_2 = 0 \quad (\text{یک})$$

و به طریق مشابه

$$V_2 - V_3 = 0 \quad (\text{دو})$$

(ب) با اعمال قانون اول کیرشهف در مورد یکی از دو گره مدار، نشان دهید که

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{سه})$$

(ج) با استفاده از رابطه جریان-ولتاژ در هر یک از اجزاء مدار معادلات زیر را به دست آورید

$$CV'_1 = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad LI'_3 = V_3 \quad (\text{چهار})$$

(د) با حذف V_2 ، I_2 و I_3 در معادلات (یک) تا (چهار) روابط زیر را به دست آورید

$$CV'_1 = -I_2 - \frac{V_1}{R}, \quad LI'_3 = V_1 \quad (\text{پنج})$$

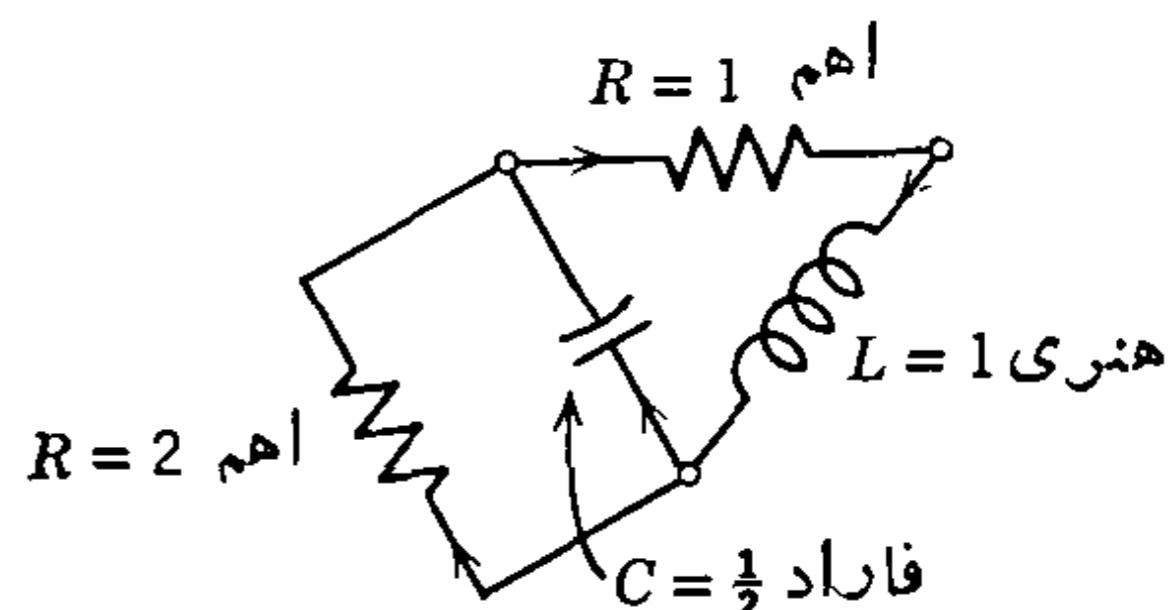
چنان‌که دیده می‌شود اگر از اندیشهای معادلات (پنج) صرف نظر کنیم، آنگاه دستگاه (۳)ی

متن حاصل می‌گردد.

۸. مداری را که در شکل ۴.۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. با استفاده از روشی که در مسئله ۷ طرح شد، نشان دهید که جریان I در خودالقا و ولتاژ V در حافظه معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$\frac{dI}{dt} = -I - V,$$

$$\frac{dV}{dt} = 2I - V.$$



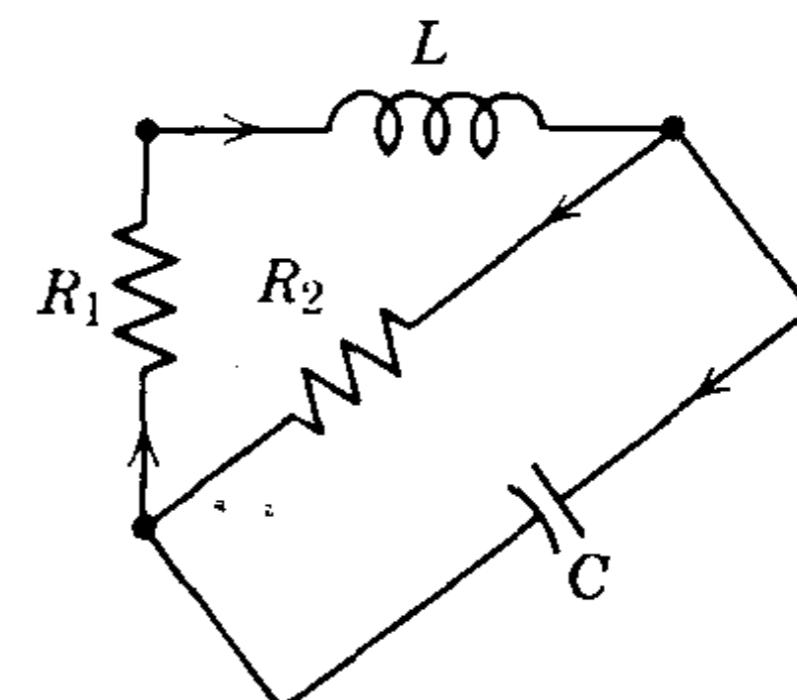
شکل ۴.۷

۹. مداری را که در شکل ۵.۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. با استفاده از روشی که در مسئله ۷ طرح شد، نشان دهید که جریان I در خودالقا و ولتاژ V در حافظه معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$L \frac{dI}{dt} = -R_1 I - V,$$

$$C \frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$

@jozve_iut



شکل ۵.۷

۲۰۷ حل دستگاههای خطی با روش حذفی

ابتدا بی ترین روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت همانا روش مستقیم حذف است. یعنی، به منظور به دست آوردن یک معادله از مرتبه بالاتر که فقط شامل یک تابع مجهول باشد، متواالیاً به حذف توابع می پردازیم. پس از حل این معادله توابع دیگر را می توان به ترتیب خود به دست آورد.

این روش در مورد دستگاههایی که تنها از دو یا سه معادله مرتبه اول تشکیل شده‌اند کاملاً کارگر است، این روش را می‌توان در مورد دستگاههای خواه ناهمگن خواه همگن به کار برد، در مورد برخی از مسائل شامل دستگاههای معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر نیز سودمند است. اما روش حذف برای بحث نظری و برای حل دستگاههای بزرگتر مناسب نیست.

برای توضیح روش حذف دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 \\ x'_2 &= 4x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. معادله اول را نسبت به x_2 حل می‌کنیم

$$x_2 = x'_1 - x_1 \quad (2)$$

در نتیجه $x'_2 = x'_1 - x_1$ ، و از معادله دوم پس از ساده کردن به دست می‌آید

$$x''_1 - 2x'_1 - 3x_1 = 0 \quad (3)$$

جواب عمومی معادله (۳) عبارت است از

$$x_1 = \phi_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \quad (4)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهند. از معادله (۲) فوراً نتیجه می‌شود که

$$x_2 = \phi_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} \quad (5)$$

جواب دستگاه (۱) مشتمل از معادلات (۴) و (۵) شامل دو ثابت دلخواه است. به آسانی ثابت می‌شود که می‌توان ثابت‌های مزبور را به ازای شرایط اولیه داده شده در هر نقطه تعیین کرد. بنابراین هر جواب دستگاه (۱) را می‌توان به ازای مقادیر مناسب c_1 و c_2 به صورت (۴) و (۵) نوشت. بدینسان معادلات (۴) و (۵) جواب عمومی دستگاه (۱) را تشکیل می‌دهند. خواننده می‌تواند تحقیق کند که اگر به جای x_2 تابع x_1 را از معادلات (۱) حذف کنیم باز هم همین جواب به دست می‌آید.

@jozve_iut

همین روش را می‌توان در مورد دستگاه ناهمگن

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 + g_1(t) \\ x'_2 &= 4x_1 + x_2 + g_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

به کار برد. تنها اختلاف آن است که در اینجا $(x'_1 - x_1) - g_1 = x'_2 - x_2 = g_2$ ، و معادله مرتبه دوم (۳) مربوط به x_1 به صورت یک معادله ناهمگن در می‌آید.

چنان‌که در پیش گفته شد، روش حذف را می‌توان برای حل دستگاههای معادلات مرتبه بالاتر نیز به کار گرفت. این قبیل دستگاهها طبعاً در کاربردهای مختلف مطرح می‌شود؛ همچنین وقتی روش حذف را در مورد دستگاهی که پیش از دو معادله مرتبه اول دارد به کار گیریم به این نوع دستگاهها بر می‌خوریم.

بدینسان دستگاه

$$\begin{aligned} L_1[x_1] + L_2[x_2] &= g_1(t) \\ L_3[x_1] + L_4[x_2] &= g_2(t) \end{aligned} \quad (7)$$

را در نظر می‌گیریم. L_1 ، L_2 ، L_3 و L_4 عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب ثابت

می‌باشند، و لزومی ندارد که از مرتبه اول باشند، و g_1 و g_2 توابعی مفروضند. مثلاً، فرض کنیم که L_1 عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم

$$L_1[x] = ax'' + bx' + cx \quad (8)$$

باشد. برای آسانی قرار می‌دهیم $D = d/dt$ ، و معادله (8) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$L_1[x] = (aD^2 + bD + c)x \quad (9)$$

قبل از ادامه بحث لازم است به بررسی معنی عباراتی از قبیل $L_2 L_1[x]$ که معرف اعمال متوالی عملگرهای L_1 و L_2 به تابع x است پردازیم. به عنوان مثال فرض کنیم که

$$L_1[x] = (aD + b)x \quad (10)$$

و

$$L_2[x] = (cD + d)x \quad (11)$$

که در آن a, b, c, d مقادیر ثابت‌اند. آنگاه $L_2 L_1[x]$ به صورت زیر تعیین می‌گردد

$$\begin{aligned} L_2 L_1[x] &= cD[(aD + b)x] + d[(aD + b)x] \\ &= caD^2x + cbDx + daDx + dbx \\ &= [caD^2 + (cb + da)D + db]x \end{aligned} \quad (12)$$

توجه شود که معادله (12) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L_2 L_1[x] = [(cD + d)(aD + b)]x \quad (13)$$

که در هنگام بسط طرف دوم با D همانند یک کمیت جبری عمل می‌شود. به طریق مشابه

$$\begin{aligned} L_1 L_2[x] &= aD[(cD + d)x] + b[cD + d)x] \\ &= [acD^2 + (ad + bc)D + bd]x \end{aligned} \quad (14)$$

از معادلات (12) و (14) بهوضوح دیده می‌شود که

$$L_2 L_1[x] = L_1 L_2[x] \quad (15)$$

یعنی، L_1 و L_2 خاصیت جابه‌جایی دارند. می‌توان نشان داد که خاصیت جابه‌جایی نه تنها در مورد عملگرهای L_1 و L_2 که با روابط (10) و (11) تعریف شده‌اند بلکه برای هر دو عملگر خطی دیفرانسیلی L_1 و L_2 که دارای ضرایب ثابت (واز هر مرتبه‌ای) باشند برقرار است. از طرف دیگر، عملگرها با ضرایب متغیر عموماً دارای خاصیت جابه‌جایی نیستند (مسئله ۲۲).

به دستگاه (7) بر می‌گردیم، به آسانی می‌توان یکی از دو تابع x_1 یا x_2 را حذف

کرد. برای حذف x_1 کافی است L_3 را به معادله اول، L_1 را بدمعادله دوم، اعمال کرده و آنگاه اولی را از دومی کم کنیم. بدینسان

$$L_3 L_1[x_1] + L_3 L_2[x_2] = L_3[g_1] \quad (16)$$

$$L_1 L_3[x_1] + L_1 L_4[x_2] = L_1[g_2] \quad (17)$$

واز تفریق معادله (16) از معادله (17) به دست می آید

$$L_1 L_4[x_2] - L_3 L_2[x_2] = L_1[g_2] - L_3[g_1] \quad (18)$$

معادله (18) شامل x_1 نیست و می توان آن را با روش‌های معمول حل کرد. همین‌که x_2 از معادله (18) به دست آمد، x_1 را می توان با حل هریک از معادلات (7) تعیین کرد. امکان دیگر نخست حذف x_2 با روش مشابه از دستگاه است. توجه شود که برای استفاده از این روش لازم است توابع g_1 و g_2 به قدر کافی دارای مشتق باشند تا بتوان عبارتهای $L_1[g_2]$ و $L_2[g_1]$ موجود در معادله (18) را محاسبه کرد.

به طور کلی، تعدادی ثابت‌های زاید در طول این روش وارد می‌شوند. در حل معادله (18)، تعداد ثابت‌های دلخواه موجود در جواب x_2 برابر با مرتبه^۱ عملکر $L_1 L_4 - L_3 L_2$ خواهد بود. ثابت‌های اضافی در هنگام تعیین x_1 با حل یکی از معادلات (7)، وارد می‌شوند. تعیین روابط بین ثابت‌ها و حذف ثابت‌های زاید، با جایگزینی x_1 و x_2 در معادله دیگر (7) که برای یافتن x_2 به کار نرفته است انجام می‌گیرد. این نکته را در مثال زیر توضیح داده‌ایم. این مسئله را که چه تعداد ثابت‌های دلخواه باید در جواب عمومی دستگاه (7) وجود داشته باشد می‌توان به طریق زیر جواب گفت. اگر دستگاه (7) ساده شده و به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل شود، آنگاه تعداد ثابت‌های مستقل در جواب عمومی برابر با تعداد معادلات دستگاه خواهد بود. این نکته در بند ۵.۷ اثبات می‌شود. با حذف x_2 ، یک معادله به دست می‌آید که مرتبه آن همان مرتبه عملکر $L_1 L_4 - L_3 L_2$ است. این معادله اخیر را می‌توان به نوبه خود به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کرد که تعداد ثابت‌های مرتبه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ برابر باشد. بدین‌سان منطقاً می‌توان انتظار داشت که تعداد ثابت‌های مستقل دلخواه در جواب عمومی دستگاه (7) برابر با مرتبه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ باشد، مشروط به آنکه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ صفر نباشد، و صحت این حدس را می‌توان اثبات کرد. با استفاده از این مطلب می‌توان صحت تعداد ثابت‌های دلخواه موجود در جواب نهایی را امتحان کرد. این نتیجه را می‌توان به دستگاههای بزرگتر معادلات تعمیم داد (مسئله ۲۳ را ببینید).

۱. مقصود از مرتبه $L_1 L_4 - L_3 L_2$ بزرگترین مرتبه مشتق موجود در آن است. اگر $L_1 L_4 - L_3 L_2$ صفر باشد، دستگاه (7) را تبیهگن نامند. در این حالت ممکن است تعداد جواب‌ها نامتناهی و یا صفر باشد، بر حسب آنکه طرف دوم معادله (18) صفر شود یا نه (مسائل ۱۸ تا ۲۱ را ببینید). این وضعیت همانند وضعیت یک دستگاه معادلات جبری خطی است که در میان ضرایب آن صفر باشد.

مثال. مطلوب است تعیین جواب عمومی دستگاه زیر

$$(x_1'' + x_1' - x_1) + (x_2'' - 3x_2' + 2x_2) = 0 \quad (19)$$

$$(x_1' + 2x_1) + (2x_2' - 4x_2) = 0 \quad (20)$$

در این حالت $L_2[x_2] = (D^2 - 3D + 2)x_2$ ، $L_1[x_1] = (D^2 + D - 1)x_1$ ، $L_4[x_2] = (2D - 4)x_2$ ، و $L_3[x_1] = (D + 2)x_1$. با اعمال L_4 و L_3 به ترتیب به معادلات (۱۹) و (۲۰)، و تفریق نتایج، خواهیم داشت

$$(L_1 L_4 - L_3 L_2)[x_2] = [(D^2 + D - 1)(2D - 4) - (D + 2)(D^2 - 3D + 2)]x_2 = 0$$

یا

$$(D^3 - D^2 - 2D)x_2 = 0 \quad (21)$$

بدینسان جواب عمومی دستگاه (۱۹)، (۲۰) باید شامل سه ثابت دلخواه باشد. جواب عمومی معادله (۲۱) چنین است

$$x_2 = \phi_2(t) = c_1 + c_2 e^{t^2} + c_3 e^{-t^2} \quad (22)$$

با جایگزینی این عبارت بهجای x_2 در معادله (۲۰) خواهیم داشت

$$x_1' + 2x_1 = 4c_1 + 6c_2 e^{t^2} + 6c_3 e^{-t^2} \quad (23)$$

که جواب عمومی آن عبارت است از

$$x_1 = \phi_1(t) = 2c_1 + 6c_2 e^{t^2} + c_3 e^{-2t^2} \quad (24)$$

برای حذف ثابت‌های زاید، x_1 و x_2 را در معادله (۱۹) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید $c_3 = 0$. توجه شود که اگر x_2 را در معادله (۱۹) قرار می‌دادیم و سپس از حل معادله مرتبه دوم حاصل x_1 را به دست می‌آوردیم، دو ثابت اضافی، بهجای یکی، وارد می‌شد. این ثابت‌های اضافی با جایگزینی x_1 و x_2 در معادله (۲۰) حذف خواهند شد.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۱ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید.

$$x_1' = x_1 + x_2 \quad .1$$

$$x_2' = 4x_1 - 2x_2 \quad .2$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + 2e^t \quad .3$$

$$x_2' = 4x_1 + x_2 - e^t \quad .4$$

$$x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \sin 2t, \quad x_1(0) = 0 \quad .\cdot ۳$$

$$x_1' = x_1 - 2x_2 + t, \quad x_1(0) = 1 \quad .\cdot ۴$$

$$x_1' = x_1 - x_2 - t^2 \quad .\cdot ۵$$

$$x_1' = x_1 + 3x_2 + 2t \quad .\cdot ۶$$

$$x_1' = 2x_1 - 4x_2 + e^t, \quad x_1(0) = 1 \quad .\cdot ۷$$

$$x_1' = x_1 - x_2 - e^t, \quad x_1(0) = -1 \quad .\cdot ۸$$

$$x_1' = 4x_1 - 2x_2 + 2t \quad .\cdot ۹$$

$$x_1' = \lambda x_1 - 4x_2 + 1 \quad .\cdot ۱۰$$

$$x_1' = 2x_1 - 2x_2 - e^{-t} \sin t \quad .\cdot ۱۱$$

$$x_1' = 2x_1 - x_2 + 2e^{-t} \cos t \quad .\cdot ۱۲$$

$$x_1' = x_1 - 5x_2, \quad x_1(0) = 1 \quad .\cdot ۱۳$$

$$x_1' = 2x_1 - 5x_2, \quad x_2(0) = 0 \quad .\cdot ۱۴$$

$$x_1' = x_1 \quad .\cdot ۱۵$$

$$x_2' = -x_2 + \sqrt{2}x_3 \quad @jozve_iut$$

$$x_3' = \sqrt{2}x_2 \quad .\cdot ۱۶$$

$$x_1' = x_1 - x_2 + 4x_3 \quad .\cdot ۱۷$$

$$x_2' = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad .\cdot ۱۸$$

$$x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3 \quad .\cdot ۱۹$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \quad .\cdot ۲۰$$

$$x_2' = 2x_1 + x_2 - x_3 \quad .\cdot ۲۱$$

$$x_3' = -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 \quad .\cdot ۲۲$$

۱۲. مسئله‌ای را که با معادلات (۱۹) و (۲۰) درمثال طرح شد با جایگزینی x_2 از رابطه (۲۲) درمعادله (۱۹) حل کنید.

در هر یک از مسائل ۱۳ تا ۱۷ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید. توجه شود که در جواب عمومی به تعداد لازم، ثابت‌های دلخواه موجود باشد.

$$(D^2 - 3D + 2)x_1 + (D - 1)x_2 = 0 \quad .13$$

$$(D - 2)x_1 + (D + 1)x_2 = 0$$

$$(2D + 1)x_1 + Dx_2 = t \quad .14$$

$$(D - 1)x_1 + Dx_2 = 2$$

$$(D^2 - 4D + 4)x_1 + 3Dx_2 = 1 \quad .15$$

$$(D - 2)x_1 + (D + 2)x_2 = 0$$

$$D^2x_1 + (D + 1)x_2 = 0 \quad .16$$

$$(D - 1)x_1 + x_2 = \sin t$$

$$(D^2 - 4D + 4)x_1 + (D^2 + 2D)x_2 = 0 \quad .17$$

$$(D^2 - 2D)x_1 + (D^2 + 4D + 4)x_2 = 0$$

در هر یک از مسائل ۱۸ تا ۲۱ نشان دهید که دستگاه معادلات داده شده تبھگن است.
با اقدام به حل دستگاه مشخص کنید که آیا دستگاه فاقد جواب است یا دارای بینهایت
جواب می‌باشد.

$$Dx_1 + (D + 1)x_2 = t \quad .18$$

$$Dx_1 + (D + 1)x_2 = t + 2$$

$$(D + 2)x_1 + (D + 2)x_2 = e^{2t} \quad .19$$

$$(D - 2)x_1 + (D - 2)x_2 = e^{-2t} \quad u = x_1 + x_2$$

$$(D^2 - 1)x_1 + (D - 1)x_2 = \sin t \quad .20$$

$$(D + 1)x_1 + x_2 = 2e^t$$

$$(D^2 + 2D + 2)x_1 + (D^2 + 2D)x_2 = 0 \quad .21$$

$$(D + 1)x_1 + Dx_2 = 0$$

۲۲. عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب متغیر عموماً خاصیت جابه‌جایی ندارند.
عملگرهای

$$L_1[x] = x' + tx, \quad L_2[x] = x' + t^2x$$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که

$$L_1 L_2[x] = L_1 \{L_2[x]\} = x'' + (t^3 + t)x' + (2t + t^3)x$$

$$L_2 L_1[x] = L_2 \{L_1[x]\} = x'' + (t+t^2)x' + (1+t^3)x$$

از آنجا

$$L_1 L_2[x] \neq L_2 L_1[x]$$

۴۳. دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$L_{11}[x_1] + L_{12}[x_2] + L_{13}[x_3] = g_1(t)$$

$$L_{21}[x_1] + L_{22}[x_2] + L_{23}[x_3] = g_2(t)$$

$$L_{31}[x_1] + L_{32}[x_2] + L_{33}[x_3] = g_3(t)$$

که در آن L_{11}, \dots, L_{33} عملگرهای خطی دیفرانسیلی با ضرایب ثابت‌اند، اما لزوماً از مرتبه اول نیستند. می‌توان نشان داد که مرتبه این دستگاه، یعنی، تعداد ثابت‌های دلخواه موجود در جواب عمومی، برابر است با مرتبه عملگر L که با

$$L = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شود. در محاسبه این دترمینان، L_{11}, \dots, L_{33} را به عنوان چندجمله‌ای از عملگر D در نظر می‌گیریم و به طور صوری از روش بسط دترمینان استفاده می‌کنیم.

@jozve_iut

$$(D^2 + 1)x_1 + (D^2 + 2)x_2 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$(D - 1)x_2 + (D^2 - 2)x_3 = 0$$

$$D^2 x_1 - (D^2 + 1)x_3 = 0$$

$$(D + 1)x_1 + Dx_2 + (D^2 + 1)x_3 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(D^2 + 2D + 2)x_1 + (D - 1)x_2 + (D + 2)x_3 = 2te^t$$

$$(D - 2)x_1 + (D + 2)x_2 + (D^2 + 3D)x_3 = te^{2t}$$

۳۰۷. یادآوری مبحث ماتریسها

گرچه روش حذف که در بند اخیر مورد بحث قرار گرفت اغلب برای حل دستگاههای خطی معادلات دیفرانسیل که تعداد معادلات آنها ازدک باشد، رضایت‌بخش است اما هنگامی که با دستگاههای بزرگتر سروکار پیدا کنیم استفاده از این روش دشوار می‌گردد. نکته مهمتر آنکه روش مزبور مبانی مناسبی برای بسط منطقی نظریه وابسته به این نوع معادلات را به دست

نمی‌دهد. به این دو دلیل لازم است برخی از نتایج ماتریسی مربوط به مسئله مقدار اولیه را درمورد یک دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل به کار ببریم. به منظور سهولت مراجعه در این دو بند خلاصه^۱ نکاتی را که خواننده بعداً بدانها نیاز خواهد داشت می‌آوریم. فرض برآن است که خواننده با مبحث دترمینان و طرز محاسبه آنها آشناست.

ماتریسها را با حروف بزرگ سیاه A, B, C, \dots و گاهی با حروف بزرگ سیاه یونانی Φ, Ψ, \dots نشان خواهیم داد. یک ماتریس A از یک جدول مستطیلی اعداد یا عناصر تشکیل می‌شود که در m سطر و n ستون مرتب شده‌اند، یعنی،

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

را یک ماتریس $m \times n$ می‌نامیم. گرچه بعداً در این فصل عناصر برخی از ماتریسها را اعداد حقیقی می‌گیریم، اما در این بند امکان آن را که عناصر ماتریس اعداد مختلط باشند در نظر گرفته‌ایم. عنصر واقع در سطر i و ستون j را با a_{ij} نشان می‌دهند، اندیس اول نمایشگر سطر و اندیس دوم نمایشگر ستون آن است. گاهی علامت (a_{ij}) برای نشان‌دادن ماتریس با عنصر عمومی a_{ij} به کار رفته است.

به هر ماتریس A یک ماتریس A^T موسوم به ترانهاده A که از تعویض سطرها و ستونها به یکدیگر حاصل می‌شود متناظر است. بدینسان، اگر $(a_{ij}) = A$ ، آنگاه $(a_{ji}) = A^T$. همچنین، مزدوج عدد مختلط a_{ij} را با \bar{a}_{ij} نشان می‌گیریم. این ماتریس حاصل از A با تبدیل هر عنصر a_{ij} به مزدوجش \bar{a}_{ij} را با \bar{A} نشان می‌دهند. ماتریس \bar{A} را مزدوج A می‌نامند، و نیز لازم می‌آید که ترانهاده ماتریس مزدوج \bar{A}^T را در نظر بگیریم. این ماتریس را المعاوی A^* می‌نامند و با A^* نشان می‌دهند.

به عنوان مثال، فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}$$

۱. اسامی برخی از کتب جبر ماتریسی را به عنوان نمونه در پایان این فصل آورده‌ایم.

انواع خاصی از ماتریسها که در اینجا بیشتر مورد توجه اند عبارتند از: ماتریسهای مربع، یعنی ماتریسهایی که تعداد سطرها و ستونهای آنها برابر است، $m=n$; بردارها (یا بردارهای ستونی)، که می‌توان آنها را به عنوان ماتریسهای $1 \times n$ ، یعنی ماتریسهایی که تنها دارای یک ستون اند تلقی کرد. ماتریسهای مربع را که n سطر و n ستون دارند، ماتریسهای رسمت n می‌گویند. بردارهای (ستونی) را با حروف کوچک سیاه x, y, z, \dots, n نشان می‌دهیم. \mathbf{X}^T ترانهاده یک بردار ستونی $1 \times n$ ، یک بردار سطري $n \times 1$ است؛ یعنی، ماتریسی است مشکل از یک سطر که عناصر آن همان عناصر \mathbf{X} در موضع‌های متناظر می‌باشد.

خواص جبری

۱. تساوی. \mathbf{A} و \mathbf{B} ، دوماتریس $m \times n$ را هنگامی مساوی گویند که عناصر متناظر آنها با هم مساوی باشد؛ یعنی، هنگامی که به ازای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij}$.
۲. صفر. نماد 0 برای نمایش ماتریس یا برداری که هر یک از عناصر آن صفر است به کار می‌رود.
۳. جمع. مجموع دوماتریس $m \times n$ با ماتریسی تعریف می‌شود که هر عنصر آن مجموع دو عنصر متناظر است:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad (2)$$

بنا بر این تعریف، جمع ماتریسی جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (3)$$

۴. خوب‌دیگر عدد. ضرب ماتریس \mathbf{A} در یک عدد مخلوط α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \quad (4)$$

قانونهای توزیع پذیری

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A} \quad (5)$$

- برای این نوع ضرب برقرارند. به ویژه، منفی \mathbf{A} که آن را با $-\mathbf{A}$ نشان می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \quad (6)$$

۵. تفاضل. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ تفاضل دوماتریس $m \times n$ با

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (7)$$

تعریف می‌شود. بدینسان

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}) \quad (8)$$

که مشابه رابطه (۲) است.

۶. ضرب. \mathbf{AB} حاصل ضرب دو ماتریس هنگامی معین است که تعداد ستونهای سازه اول با تعداد سطرهای سازه دوم برابر باشد. اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} به ترتیب ماتریسهای $m \times n$ و $n \times r$ باشند، آنگاه حاصل ضرب $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ یک ماتریس $m \times r$ است. عنصر سطر i ام و ستون j ام \mathbf{C} از ضرب هر عنصر سطر i ام \mathbf{A} در عنصر متناظر ستون j ام \mathbf{B} و جمع حاصل ضربها به دست می‌آید. بدطور نمادی،

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (9)$$

با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که ضرب ماتریسی در قانون شرکت پذیری

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (10)$$

وقانون توزیع پذیری

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (11)$$

صدق می‌کند. اما، به طور کلی ضرب ماتریسی جایه‌جایی نیست. برای آنکه هر دو حاصل ضرب \mathbf{AB} و \mathbf{BA} وجود داشته باشند، لازم است که \mathbf{A} و \mathbf{B} ماتریسهای مربعی و هم‌رتبه باشند. حتی در این حالت لزومی ندارد که این دو حاصل ضرب برابر باشند، بدینسان معمولاً

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (12)$$

مثال ۱. برای توضیح ضرب ماتریسهای، ویژه‌یاز این نکته که ضرب ماتریسی لزوماً جایه‌جایی نیست، ماتریسهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

بنا بر تعریف ضرب که با رابطه (۹) بیان شد، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 2+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

به همین طریق، خواهیم داشت

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

روشن است که، $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

۷. ضرب بردارها. ضرب ماتریسها را به صورتی که در بالا بیان شد می‌توان به عنوان حالت خاص هنگامی که ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{B} به ترتیب $n \times 1$ و $1 \times n$ یعنی بردارهای سطری و ستونی باشند بدکار گرفت. اگر این بردارها را با \mathbf{x}^T و \mathbf{y} نشان دهیم خواهیم داشت

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (13)$$

حاصل این عمل یک عدد (مختلط) است، و مستقیماً از رابطه (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^T (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z}, \quad (\alpha \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \alpha (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (\alpha \mathbf{y}) \quad (14)$$

برای بردارها ضرب دیگری وجود دارد، که بسیار مفید است و به ازای هر دو بردار که تعداد مؤلفه‌های آنها یکی باشد معین است. این حاصل ضرب را با (\mathbf{x}, \mathbf{y}) نشان می‌دهند و آن را ضرب داخلی یا اسکالر می‌نامند، و با

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (15)$$

تعریف می‌شود. حاصل ضرب اسکالر نیز یک عدد (مختلط) است، و از مقایسه روابط (۱۳) و (۱۵) دیده می‌شود که

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} \quad (16)$$

از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (17)$$

$$(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) = \bar{\alpha} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

توجه شود که حتی اگر بردار \mathbf{x} دارای عناصری با قسمتهای موهومی نااصر باشد، از ضرب اسکالری \mathbf{x} در خودش یک عدد حقیقی نامنفی حاصل می‌شود،

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (18)$$

اگر $0 = (x, y)$ ، آنگاه بردارهای x و y را متعامد گویند. مثلاً، بردارهای یکه i, j, k در هندسه برداری سه بعدی یک مجموعه متعامد را تشکیل می دهند. از طرف دیگر، امکان دارد که حاصل ضرب ماتریسی

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (19)$$

یک عدد حقیقی نباشد. اگر همه مؤلفه های سازه دوم در روابط (۱۳) و (۱۵) حقیقی باشند، آنگاه هر دو حاصل ضرب برابرند، و به همان ضرب نقطه ای که معمولاً در متون هندسی و فیزیکی با $n=3$ برخورد می شود تبدیل می گردند. به عنوان مثال، فرض کنیم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(2) = 4+3i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2+7i,$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 2+2i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7$$

۸. واحد. واحد ضربی، یا به طور ساده ماتریس واحد \mathbf{I} با

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

معین می شود. بنابر تعریف ضرب ماتریسی به ازای هر ماتریس (مربع) \mathbf{A} داریم

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \quad (21)$$

بنابراین اگر یکی از ماتریسها ماتریس واحد باشد خاصیت جابه جایی برقرار می شود. ۹. واحد. به منظور آنکه در مورد ماتریسهای مربع عملی نظریه تقسیم اعداد تعریف کنیم، لازم است متناظر به هر ماتریس \mathbf{A} یک ماتریس دیگر \mathbf{B} تعیین کنیم به طوری که

$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ، \mathbf{A} ماتریس واحد است. اگر \mathbf{B} وجود داشته باشد، آن را وارون ضربی، یا به طور ساده وارون \mathbf{A} می‌نامند، و می‌نویسند $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. می‌توان نشان داد که اگر \mathbf{A}^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (22)$$

به عبارت دیگر، ضرب بین ماتریس و وارونش جا به جایی است. اگر \mathbf{A} دارای وارون ضربی \mathbf{A}^{-1} باشد، آنگاه \mathbf{A} را عادی گویند؛ و گرنه \mathbf{A} را غیرعادی نامند. برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} از \mathbf{A} ، با فرض آنکه وجود داشته باشد، روش‌های گوناگونی در دست است. یکی از روشها مبتنی بر استفاده از دترمینانهاست. بهر عنصر a_{ij} از ماتریس مفروض یک مینور M_{ij} متناظر می‌شود که دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر زام و ستون زام ماتریس اصلی، یعنی، سطر و ستونی که شامل a_{ij} می‌باشند به دست می‌آید. همچنین به هر عنصر a_{ij} یک همسازه C_{ij} متناظر است که با معادله

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (23)$$

تعریف می‌شود. اگر $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ ، آنگاه می‌توان نشان داد که عنصر عمومی b_{ij} عبارت است از

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}} \quad (24)$$

گرچه رابطه (24) برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} چندان کارآمد نیست، اما شرطی را که باید \mathbf{A} در آن صدق کند تا دارای وارون باشد روشی می‌کند. ذلیل واقع، این شرط هم لازم است وهم کافی: یک ماتریس عادی است اگر، و فقط، اگر $\det \mathbf{A} \neq 0$. اگر $\det \mathbf{A} = 0$ ، آنگاه \mathbf{A} غیرعادی است.

روش دیگری که معمولاً برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} مناسب‌تر است مبتنی بر استفاده از اعمال سطحی مقدماتی است. این اعمال برسه نوعند:

۱. تعویض دو سطر با هم.
۲. ضرب یک سطر در اسکالری نا صفر.
۳. اضافه کردن هر ضربی از یک سطر به سطر دیگر.

هر ماتریس عادی \mathbf{A} را می‌توان با دنباله منظمی از این عملیات به واحد \mathbf{I} تبدیل کرد.

۱. به ازای مقادیر بزرگ n تعداد ضربهای لازم برای محاسبه \mathbf{A}^{-1} با استفاده از رابطه (24) متناسب با n^3 است. اگر شخص روش‌های کارآمد‌تری از قبیل روش تحویل سطحی را که ذیلاً بیان می‌شود به کار گیرد تعداد ضربهای فقط با n^2 متناسب است. حتی به ازای مقادیر کوچک n (مانند $n=4$)، روش دترمینانی برای محاسبه وارون چندان اقتصادی نیست، و روش تحویل سطحها مرجع است.

می‌توان نشان داد که اگر همان دنباله عملیات روی I انجام گیرد آنرا به A^{-1} تبدیل می‌کند. این تبدیل را معمولاً تحویل سطحی نامند. مثال زیر این روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۲. مطلوب است تعیین وارون

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ماتریس A را می‌توان با دنباله عملیات زیر به I تبدیل کرد. نتیجه هر مرحله در ستون سمت چپ دیده می‌شود

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(الف) برای صفر کردن عناصر ستون اول واقع در زیر قطر، (-۳) برابر سطر اول را به سطر دوم و (-۲) برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) برای آنکه عنصر قطری واقع در ستون دوم برابر یک شود، سطر دوم را در $1/2$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(ج) برای آنکه عناصر غیر قطری در ستون دوم صفر شوند، سطر دوم را با سطر اول جمع می‌کنیم و (-۴) برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(د) برای آنکه عنصر قطری ستون سوم برابر یک شود سطر سوم را در $(1/5)-$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ه) برای آنکه عناصر غیر قطری ستون سوم صفر شوند، (-۳/۲) سطر سوم را به سطر اول و (-۵/۲) سطر سوم را به سطر دوم می‌افزاییم.

اگر این دنباله عملیات را به همین ترتیب روی I انجام دهیم، متوالیاً ماتریس‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

آخرین ماتریس، A^{-1} است، این نتیجه را می‌توان مستقیماً با ضرب آن در A تحقیق کرد.

این مثال بدان سبب که عنصر واقع در گوشه چپ فوقانی در ماتریس اصلی A برابر یک بود ($a_{11} = 1$) اندکی ساده شد. اگر چنین نباشد آنگاه نخستین گام آن است که سطر اول را در $1/a_{11}$ ضرب کنیم تا عنصر مزبور به یک بدل شود، البته هنگامی که $a_{11} \neq 0$. اگر $a_{11} = 0$ ، آنگاه سطر اول را با یک سطر دیگر تعویض می‌کنیم تا قبل از شروع عملیات فوق در بالای ستون چپ عنصری ناصف قرار داشته باشد.

توابع ماتریسی. گاهی لازم است به بررسی بردارها یا ماتریس‌هایی که عناصر آنها توابعی از متغیر حقیقی t هستند پیردازیم، به ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

ماتریس $\mathbf{A}(t)$ را در $t = t_0$ یا روی فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته گویند اگر هر یک از عناصر \mathbf{A} در نقطه t یا روی فاصله مزبور تابعی پیوسته باشد. به همین نحو، $(\mathbf{A}(t))$ را مشتق‌پذیر گویند اگر هر یک از عناصر آن مشتق‌پذیر باشد، و مشتق آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right) \quad (26)$$

یعنی، هر عنصر $d\mathbf{A}/dt$ مشتق عنصر متناظر \mathbf{A} است. به همین طریق انتگرال یک ماتریس تابعی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b \mathbf{A}(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right) \quad (27)$$

مثلاً، اگر

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi \mathbf{A}(t) dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

بسیاری از قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان به آسانی به توابع ماتریسی تعمیم داد؛ به ویژه

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{CA}) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (28)$$

که در آن \mathbf{C} یک ماتریس ثابت است.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B} \quad (30)$$

در روابط (۲۸) و (۳۰) باید توجه داشت که ترتیب عوامل ضرب تغییر نکند. تعاریفی که با روابط (۲۶) و (۲۷) بیان شد به عنوان حالت خاص در مورد بردارها نیز به کار می‌روند.

مسائل

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۰۱}$$

مطلوب است

$$\cdot \mathbf{BA} \quad (d) \quad \cdot \mathbf{AB} \quad (c) \quad \cdot \mathbf{A} - 4\mathbf{B} \quad (b) \quad \cdot 2\mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۰۲}$$

مطلوب است

$$\cdot \mathbf{BA} \quad (d) \quad \cdot \mathbf{AB} \quad (c) \quad \cdot 3\mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (b) \quad \cdot \mathbf{A} - 2\mathbf{B} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۰۳}$$

مطلوب است

$$\cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T \quad (d) \quad \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (c) \quad \cdot \mathbf{B}^T \quad (b) \quad \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۰۴}$$

@jozve_iut

مطلوب است

$$\cdot \mathbf{A}^* \quad (\text{الف}) \quad \cdot \overline{\mathbf{A}} \quad (\text{ب}) \quad \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{ج})$$

$$\cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۰۵}$$

تحقيق کنید که $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

$$\cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{اگر ۱.۰۶}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تحقیق کنید که

$$(A+B)+C = A+(B+C) \quad (ب) \quad (AB)C = A(BC) \quad (الف)$$

$$. A(B+C) = AB+AC \quad (ج)$$

۷. هر یک از قواعد زیر را در مورد جبر ماتریسی ثابت کنید:

$$A+(B+C) = (A+B)+C \quad (ب) \quad A+B = B+A \quad (الف)$$

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \quad (د) \quad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad (ج)$$

$$A(B+C) = AB+AC \quad (و) \quad A(BC) = (AB)C \quad (ه)$$

۸. اگر $y = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ و $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$ مطلوب است

$$\cdot (y, y), (x, y), (y^T y), (x^T y) \quad (الف)$$

۹. اگر $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ و $x = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ نشان دهید که

$$@jozve_fut \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \quad (ب) \quad (x^T y = y^T x) \quad (الف)$$

در هر یک از مسائل ۱۰ تا ۱۹ وارون ماتریس داده شده را محاسبه کنید یا نشان دهید که غیر عادی است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad .12 \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad .11 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad .10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad .14 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .13$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .16 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .15$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 18 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 17$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot 19$$

- ۰.۲۰ ثابت کنید که اگر A عادی باشد، آنگاه A^{-1} یکتاست؛ یعنی، نشان دهید که نمی‌توان دوماً تریس متمایز B و C را طوری تعیین کرد که $I = AC$ و $I = AB$.
- ۰.۲۱ ثابت کنید که اگر A عادی باشد، آنگاه $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ؛ یعنی، ضرب هر ماتریس عادی در وارون آن جایه‌جایی است.

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \text{ اگر } \cdot 0.22$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 2e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

مطلوب است

$$\cdot \int_0^1 A(t) dt \quad (د) \quad , \frac{dA}{dt} \quad (ج) \quad , AB \quad (ب) \quad , A + 2B \quad (الف)$$

در هر یک از مسائل ۰.۲۳ تا ۰.۲۵ تحقیق کنید که بردار داده شده در معادله دیفرانسیل متناظر صدق می‌کند.

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \quad , x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x \cdot 0.23$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t \quad , x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \cdot 0.24$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad ۲۵$$

در هر یک از مسائل ۲۶ و ۲۷ تحقیق کنید که ماتریس داده شده در معادله دیفرانسیل متناظر صدق می‌کند.

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{2t} \\ -4e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi. \quad ۲۶$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{2t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{2t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi. \quad ۲۷$$

۴.۷ دستگاههای معادلات جبری خطی؛ استقلال خطی، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه

در این بند برخی از نتایج جبر خطی را که برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی دارای اهمیت‌اند یادآوری می‌کنیم. اثبات برخی از این نتایج آسان و برخی دشوار است؛ اما چون هدف ما تنها تلخیص اطلاعات مفیدی به صورت فشرده است، به اثبات هیچ یک از آنها نمی‌پردازیم. همه نتایج این بند برچند نکته اساسی درباره جواب دستگاههای معادلات جبری خطی مبتنی است.

دستگاههای معادلات جبری خطی. مجموعه‌ای از دستگاههای n معادله جبری خطی n متغیری

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \quad (1)$$

را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

که در آن \mathbf{A} ماتریس $n \times n$ ، و بردار \mathbf{b} داده شده‌اند و باید مؤلفه‌های \mathbf{x} را تعیین کرد. اگر $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، دستگاه را همگن؛ و غریزه ناهمگن نامند. دو دستگاه که دقیقاً دارای یک مجموعه جواب باشند دستگاههای همان‌نامیده می‌شوند.

اگر \mathbf{A} ماتریس ضرایب، عادی باشد، یعنی، اگر $\det \mathbf{A}$ صفر نباشد، آنگاه دستگاه (۲)

دارای جوابی یکنایت است. چون A عادی است، A^{-1} وجود دارد، و می‌توان جواب را با ضرب A^{-1} از چپ در هر دو طرف معادله (۲) به دست آورد؛ بدینسان

$$x = A^{-1}b. \quad (3)$$

به‌ویژه، مسئله دستگاه همگن $0 = Ax = b$ در معادله (۲)، تنها دارای جواب بدهیهی $x = 0$ است.

از طرف دیگر، اگر A غیرعادی باشد، یعنی، اگر $\det A$ صفر باشد، آنگاه جواب معادله (۲) یا وجود ندارد یا وجود دارد اما یکتا نیست. چون A غیرعادی است، A^{-1} وجود ندارد، بنابراین رابطه (۳) دیگر برقرار نیست. دستگاه همگن

$$Ax = 0 \quad (4)$$

علاوه بر جواب بدهیهی صفر دارای بینهایت جواب ناصفر است. وضعیت درمورد دستگاه ناهمگن (۲) دشوارتر است. این دستگاه دارای جواب نیست مگر آنکه بردار b در شرط دیگری، که به هیچ وجه لزوم آن بدهیهی نیست، صدق کند. این شرط عبارت است از آنکه رابطه

$$(b, y) = 0 \quad (5)$$

به‌ازای هر بردار y که در $0 = A^*y$ صدق کند برقرار باشد، A^* ماتریس الحقیقی A است. اگر شرط (۵) برقرار باشد، آنگاه دستگاه (۲) دارای (بینهایت) جواب است. هر یک از این جوابها به صورت

$$x = x^{(0)} + \xi, \quad (6)$$

است که در آن $x^{(0)}$ یک جواب خصوصی معادله (۲) و ξ جوابی از دستگاه همگن (۴) است. شباهت بین رابطه (۶) و جواب معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن، رابطه (۴) بند ۳.۶ شایان توجه است؛ $x^{(0)}$ و ξ به ترتیب با جواب خصوصی μ و جواب مکمل ν متناظرند. اثبات برخی از گزاره‌های فوق در مسائل ۲۱ تا ۲۵ طرح شده است.

گرچه رابطه (۳)، حداقل هنگامی که A عادی باشد، فرمول فشرده‌ای برای جواب معادله (۲) است، اما اغلب آسانتر است که معادله (۲) را با استفاده از عملیات مقدماتی سطري به دستگاه همارز بسیار ساده‌تری تبدیل کرد که جواب آن را بتوان به آسانی به دست آورد. به‌ویژه، ممکن است بخواهیم ماتریس ضرایب را به یک ماتریس مثلثی تبدیل کنیم؛ یعنی، ماتریسی بیاییم که عناصر واقع در زیر قطر اصلی همه صفر باشند. مثال زیر این روش را توضیح می‌دهد.

مثال ۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned} \quad (7)$$

مناسب است که معادلات (۷) را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

این معادله با عنصر ماتریس ضریب و بردار طرف دوم معادله (۸) مشخص می‌شود، به ویژه، مقدار و محل هر یک از عناصر به دست می‌آید. بدینسان می‌توان از آنها صرف نظر کرد و به اختصار نوشت

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 : & 7 \\ -1 & 1 & -2 : & -5 \\ 2 & -1 & -1 : & 4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ماتریس (۹) را ماتریس افزوده دستگاه (۷) می‌نامند. خط نقطه‌چین جانشین علامتهای تساوی است و می‌گوییم ماتریس را افزایش می‌کنند. اکنون به انجام عملیات مقدماتی سطحی روی ماتریس (۹) به منظور صفر کردن عناصر قسمت پایین چپ ماتریس مزبور می‌پردازیم. باید توجه داشت که عملیات مقدماتی سطحی روی ماتریس (۹) با عملیات مجاز روی دستگاه معادلات (۷) متناظر است. هرگام را در زیر توضیح داده‌ایم، و نتیجه در طرف چپ نوشته شده است.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 : & 7 \\ 0 & -1 & 1 : & 2 \\ 0 & 3 & -7 : & -10 \end{pmatrix}$$

(الف) سطر اول را به سطر دوم و
(۲) برابر سطر اول را به سطر سوم
می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 : & 7 \\ 0 & 1 & -1 : & -2 \\ 0 & 3 & -7 : & -10 \end{pmatrix}$$

(ب) سطر دوم را در (۱) ضرب
می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 : & 7 \\ 0 & 1 & -1 : & -2 \\ 0 & 0 & -4 : & -4 \end{pmatrix}$$

(ج) (۳) برابر سطر دوم را به سطر
سوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 : & 7 \\ 0 & 1 & -1 : & -2 \\ 0 & 0 & 1 : & 1 \end{pmatrix}$$

(د) سطر سوم را به (۴) تقسیم
می‌کنیم.

ما تریسی که بدینسان به دست آمد با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= -2, \\ x_3 &= 1, \end{aligned} \quad (10)$$

منتظر است واین دستگاه با دستگاه اصلی (۷) هم ارز است. باید توجه داشت که ضرایب معادلات (۱۰) تشکیل یک ماتریس مثلثی می‌دهند. از آخرین معادله دستگاه (۱۰) داریم $x_3 = 1$ ، از دومین معادله $x_2 = -2 + x_3 = -2 + 1 = -1$ ، و از اولین معادله

$$x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 7 + 2(-1) - 3(1) = 2$$

بدینسان داریم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که جواب دستگاه (۷) یا (۸) داده شده است.

این روش برای حل دستگاههای همگن و دستگاههایی که تعداد معادلات آنها با تعداد معجهولات مساوی نباشد نیز مفید است.

استقلال خطی. هنگامی که یند مجموعه‌ای از k بردار $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ بستگی خطی دارند که بتوان مجموعه اعداد (مخالف) c_1, \dots, c_k را که حداقل یکی از آنها ناصفر باشد طوری تعیین کرد که

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (11)$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ بستگی خطی دارند اگر یک رابطه خطی بین آنها باشد. از طرف دیگر، اگر تنها مجموعه c_1, \dots, c_k که بداعای آن معادله (۱۱) برقرار گردد $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ باشد، آنگاه $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ را مستقل خطی گویند.

اکنون مجموعه n بردار را که هریک دارای n مؤلفه است در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x_i^{(j)} = x_{ij}$ مؤلفه زام بردار $\mathbf{x}^{(j)}$ باشد، و فرض کنیم $\mathbf{X} = (x_{ij})$. آنگاه معادله (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \dots + x_n^{(1)}c_n \\ \vdots \\ x_1^{(n)}c_1 + \dots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \dots + x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + \dots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (12)$$

اگر $\det \mathbf{X} \neq 0$ ، آنگاه تنها جواب معادله (۱۲) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ است، اما اگر

جوابهای ناصرفی وجود دارد. بدینسان مجموعه بردارهای $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ مستقل خطی اند اگر، و فقط اگر، $\det \mathbf{X} \neq 0$.

مثال ۲. تعیین کنید که آیا بردارهای

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (13)$$

مستقل خطی اند یا نه. اگر مستقل خطی نیستند یک رابطه خطی بین آنها باید.
برای بررسی استقلال خطی $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)},$ و $\mathbf{X}^{(3)}$ به محاسبه $\det(x_{ij})$ که ستونهای آن به ترتیب مؤلفه‌های $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)},$ و $\mathbf{X}^{(3)}$ می‌باشند می‌پردازیم.

بدینسان

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

و محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که این دترمینان صفر است. بدینسان $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)},$ و $\mathbf{X}^{(3)}$ مستقل خطی نیستند و ثابت‌های $c_1, c_2,$ و c_3 را می‌توان طوری تعیین کرد که

$$c_1 \mathbf{X}^{(1)} + c_2 \mathbf{X}^{(2)} + c_3 \mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

معادله (۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

و آن را با عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array} \right) \quad (16)$$

مانند مثال ۱ حل کرد.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array} \right)$$

(الف) (-۲) برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم و سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

(ب) سطر دوم را بر ۳ — تقسیم می کنیم؛ آنگاه (۵—) برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع می کنیم.

بدینسان دستگاه هم ارز

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0 \\ c_2 - 3c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

به دست می آید. از معادله دوم (۱۷) داریم $c_2 = 3c_3$ ، و از معادله اول حاصل می شود $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. بدینسان c_1 و c_2 را بر حسب c_3 به دست آورده ایم و دلخواه باقی می ماند. اگر برای سهولت قرار دهیم $c_3 = 1$ ، $c_2 = 3$ و $c_1 = -2$. در این حالت رابطه مطلوب (۱۴) به صورت زیر درمی آید

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = 0$$

در بسیاری موارد مفید است که ستونها یا سطرهای ماتریس \mathbf{A} را به عنوان بردار در نظر بگیریم. این بردارهای ستونی (یا سطری) مستقل خطی اند اگر، و فقط اگر، $\det \mathbf{A} \neq 0$. علاوه بر این، اگر $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ، آنگاه می توان نشان داد که $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. بنا بر این، اگر ستونها یا سطرهای هر دو ماتریس \mathbf{A} و \mathbf{B} مستقل خطی باشند، آنگاه ستونها یا سطرهای \mathbf{C} نیز مستقل خطی اند.

اکنون به تعیین مقایی استقلال و عدم استقلال خطی درمورد مجموعه‌ای از توابع برداری $(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, (t)\mathbf{x}^{(k)}$ که روی فاصله $\alpha < t < \beta$ معین اند می پردازیم. بردارهای $(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, (t)\mathbf{x}^{(k)}$ را روی فاصله $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی گویند اگر ثابت‌های c_1, \dots, c_k را که همگی صفر نباشند بتوان طوری تعیین کرد که به ازای هر t در فاصله مزبور $0 = (t)\mathbf{x}^{(1)} + \dots + (t)\mathbf{x}^{(k)}$. در غیر این صورت، $(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, (t)\mathbf{x}^{(k)}$ را مستقل خطی گویند. توجه شود که اگر $(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, (t)\mathbf{x}^{(k)}$ روی فاصله‌ای وابسته خطی باشند، در هر نقطه فاصله مزبور وابسته خطی اند. اما، اگر $(t)\mathbf{x}^{(1)}, \dots, (t)\mathbf{x}^{(k)}$ روی فاصله‌ای مستقل خطی باشند، در هر نقطه فاصله مزبور ممکن است مستقل خطی یا وابسته خطی باشند؛ در واقع امکان دارد در هر نقطه وابسته خطی باشند، اما مجموعه‌های ثابت‌ها در نقاط متفاوت مختلف باشند. به عنوان مثال مسئله ۹ را بینید.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه. معادله

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (18)$$

را می توان به عنوان یک تبدیل خطی که هر بردار مفروض \mathbf{x} را به بردار جدید \mathbf{y} می نگارد (یا تبدیل می کند) در نظر گرفت. بردارهایی که به مضاربی از خود تبدیل می شوند در بسیاری

کار بردها نقش مهمی ایفا می‌کنند.^۱ برای تعیین چنین بردارهایی قرار می‌دهیم $y = \lambda x$ ، که در آن اسکالر λ ضریب تناسب است، و به جستجوی جوابهای معادلات

$$Ax = \lambda x \quad (19)$$

یا

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (20)$$

می‌پردازیم. معادله اخیر دارای جوابهای ناصفر است اگر، و فقط اگر، λ به گونه‌ای تعیین شود که

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \quad (21)$$

مقادیر λ که در معادله (21) صدق می‌کنند مقادیر ویژه ماتریس A نام دارند، و جوابهای معادله (19) یا (20) که به ازای این مقادیر λ به دست می‌آیند بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه مزبور نامیده می‌شوند. بردارهای ویژه با تقریب یک ثابت ضربی دلخواه تعیین می‌گردند، اگر این ثابت را به نحوی مشخص کنیم، آنگاه بردارهای ویژه مزبور را نهال شده نامند. اغلب مناسب است که بردار ویژه x با قید $x^T x = 1$ نرمال شود. در برخی موارد ممکن است بخواهیم یکی از مؤلفه‌ها برابر واحد باشد.

چون معادله (21) یک معادله چندجمله‌ای از درجه n بر حسب λ است، n مقدار ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ وجود دارد که برخی از آنها ممکن است مکرر باشند. اگر یک مقدار ویژه m بار به عنوان ریشه معادله (21) ظاهر شود، آنگاه گفته می‌شود که مقدار ویژه مزبور دارای مرتبه تکرار m است. هر مقدار ویژه حداقل دارای یک بردار ویژه متناظر است، و هر مقدار ویژه که دارای مرتبه تکرار m باشد ممکن است دارای q بردار ویژه مستقل خطی باشد، به طوری که

$$1 \leq q \leq m. \quad (22)$$

حالی را که در آن q کوچکتر از m است ذیلاً، با مثال ۳ توضیح داده‌ایم. اگر همه مقادیر ویژه یک ماتریس A ساده باشند (یعنی مرتبه تکرارشان یک باشد)، آنگاه می‌توان نشان داد که n بردار ویژه A ، به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار، مستقل خطی‌اند. از طرف دیگر، اگر A دارای یک یا چند مقدار ویژه مکرر باشد، آنگاه ممکن است تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی ماتریس A از n کمتر باشد، زیرا به ازای هر مقدار ویژه مکرر ممکن است داشته باشیم $q < m$. این نکته بعداً در حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل ایجاد مشکلاتی می‌کند.

مثال ۳. مطلوب است تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

۱. به عنوان مثال، در تعیین محورهای اصلی استرین یا استرین یک جسم کشسان، و در تعیین مدهای ارتعاش آزاد دستگاه کنسرواتیو با تعداد درجات آزادی محدود به این مسئله برمی‌خوریم.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

مقادیر ویژه λ و بردارهای ویژه \mathbf{x} در معادله $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، یا

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه عبارتند از ریشه‌های معادله

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0. \quad (25)$$

بدینسان دو مقدار ویژه مذبور عبارتند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 2$ ؛ یعنی، مقدار ویژه ۲ دارای مرتبه تکرار دو است.

برای تعیین بردارهای ویژه باید به معادله (۲۴) برگردیم و در آن به جای λ مقدار ۲ را منظور کنیم. از آنجا

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

بدین ترتیب تنها یک شرط $x_1 + x_2 = 0$ حاصل می‌شود، که x_2 را بر حسب x_1 یا بر عکس معین می‌کند. اگر $x_1 = c$ ، آنگاه $x_2 = -c$ و بردار ویژه $\mathbf{x}^{(1)}$ چنین است

$$\mathbf{x}^{(1)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

معمولًاً پس از تعیین بردارهای ویژه از ثابت دلخواه c صرف نظر می‌کنیم؛ بدینسان به جای رابطه (۲۷) می‌نویسیم

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

وبه خاطر می‌سپاریم که هر ضرب این بردار نیز یک بردار ویژه است. توجه شود که تنها یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه مضاعف مذبور به دست آمد.

مثال ۴. مطلوب است تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

مقادیر ویژه λ و بردارهای ویژه \mathbf{x} در معادله $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، یا

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

صدق می‌کنند. مقادیر ویژه عبارتند از ریشه‌های معادله

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \quad (31)$$

از حل معادله (31)، مثلاً با آزمون وخطا، سه ریشه به دست می‌آید که عبارتند از $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = -1$ ، و $\lambda_3 = -1$. بدین‌سان ۲ یک مقدار ویژه ساده، و -1 مقدار ویژه‌ای با مرتبه تکرار دو است.

برای تعیین بردار ویژه $\mathbf{x}^{(1)}$ متضایر به مقدار ویژه $\lambda_1 = 2$ در معادله (30)؛ به دستگاه زیر می‌رسیم

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

می‌توان آن را با عملیات مقدماتی سطری به دستگاه هم‌ارز

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

ساده کرد. از حل این دستگاه بردار ویژه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

به ازای $\lambda = -1$ ، معادلات (۳۵) فوراً به یک معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (35)$$

تبدیل می‌شوند. بدین‌سان برای دو کمیت از سه کمیت x_1, x_2, x_3 می‌توان مقادیر دلخواهی انتخاب کرد و سومی را از معادله (۳۵) به دست آورد. مثلاً، اگر $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$ ، آنگاه $x_3 = -1$ و

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

یک بردار ویژه است. هر ضرب $\mathbf{X}^{(2)}$ نیز یک بردار ویژه است، اما بردار ویژه مستقل دوم را می‌توان با انتخاب مقادیر دیگری برای x_1 و x_2 مثل $x_1 = 1$ و $x_2 = 0$ به دست آورد. در اینجا نیز $x_3 = -1$ و

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

یک بردار ویژه است که با $\mathbf{X}^{(2)}$ بستگی خطی ندارد. بنابراین در این مثال دو بردار ویژه مستقل خطی به مقدار ویژه مضاعف متناظر قرار گرفته است.

@jzve_iut

طبقهٔ خاص مهمی از ماتریسها، موسوم به ماتریس‌های هرمیتی یا خودالحاقی عبارتند از ماتریس‌هایی که در $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ صدق می‌کنند؛ یعنی، $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. ماتریس‌های هرمیتی شامل ماتریس‌های متفاوت حقیقی می‌باشند؛ یعنی، ماتریس‌هایی که دارای عناصر حقیقی‌اند و به ازای آنها $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. این ماتریس‌ها زیر‌طبقه‌ای از ماتریس‌های هرمیتی تشکیل می‌دهند. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های هرمیتی دارای خواص مفید‌تر هستند.

۱. همه مقادیر ویژه حقیقی‌اند.
۲. مرتبه تکرار مقادیر ویژه هرچه باشد همواره یک مجموعهٔ کامل از n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد.
۳. اگر $\mathbf{X}^{(1)}$ و $\mathbf{X}^{(2)}$ دو بردار ویژه متناظر به دو مقدار ویژه متمایز باشند، آنگاه $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ بدین‌سان، اگر همه مقادیر ویژه ساده باشند، آنگاه بردارهای ویژه متناظر تشکیل یک مجموعهٔ بردارهای متعامد می‌دهند.
۴. متناظر با هر مقدار ویژه با مرتبه تکرار m ، می‌توان m بردار ویژه دو به دو متعامد انتخاب کرد. بدین‌سان مجموعهٔ کامل n بردار ویژه را همواره می‌توان طوری انتخاب کرد که هم متعامد و هم مستقل خطی باشند.

مثال ۴ بالا شامل یک ماتریس متقابن حقیقی است و خواص ۱، ۲ و ۳ را توضیح می‌دهد، اما با انتخابی که برای $\mathbf{X}^{(2)}$ و $\mathbf{X}^{(3)}$ کردیم خاصیت ۴ برقرار نیست. اما، همواره می‌توان $\mathbf{X}^{(2)}$ و $\mathbf{X}^{(3)}$ را طوری انتخاب کرد که $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(3)}$. مثلاً امکان داشت بردارهای ویژه متناظر به مقدار ویژه $\lambda = -1$ (در مثال ۴) را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال ۳ نشان می‌دهد که اگر ماتریس هرمیتی نباشد، ومقدار ویژه مکرر باشد، آنگاه امکان دارد با کمبود بردارهای ویژه مواجه شویم. اثبات گزاره‌های ۱ و ۳ در مسائل ۲۹ تا ۲۷ تا طرح شده است.

در حل دستگاههای معادلات جبری و موارد دیگری گاهی لازم می‌آید که ماتریس مفروضی را به صورت قطری درآوریم، یعنی، ماتریسی که تنها روی قطر دارای عناصر ناصفر باشد. برای انجام این کار می‌توان از بردارهای ویژه استفاده کرد. فرض کنیم که \mathbf{A} دارای یک مجموعه کامل n بردار ویژه مستقل خطی باشد (خواه \mathbf{A} هرمیتی باشد خواهد نباشد). این بردارهای ویژه را با $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ و مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ نشان می‌دهیم، ماتریس \mathbf{T} را که ستونهای آن از بردارهای ویژه $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ تشکیل شده‌اند در نظر می‌گیریم. چون ستونهای \mathbf{T} بردارهای مستقل خطی‌اند، $\det \mathbf{T} \neq 0$ ؛ بنابراین \mathbf{T}^{-1} عادی است و $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ وجود دارد. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که ستونهای ماتریس \mathbf{AT} دقیقاً از بردارهای $\mathbf{AX}^{(1)}, \dots, \mathbf{AX}^{(n)}$ تشکیل شده‌اند. چون $\mathbf{AT} = \mathbf{A}\mathbf{T}$ ، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \dots & \lambda_n x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} & \dots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}, \quad (38)$$

که در آن

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (39)$$

یک ماتریس قطری است که عناصر قطری آن همان مقادیر ویژه \mathbf{A} می‌باشند. از رابطه (۳۸)

نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D} \quad (40)$$

بدینسان، اگر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه \mathbf{A} معلوم باشند، \mathbf{A} را می‌توان با روشی که در رابطه (۴۰) بیان شده است به یک ماتریس قطری تبدیل کرد. این روش به تبدیل تشا بهی موسوم است، و رابطه (۴۰) معادل با آن است که بگوییم \mathbf{A} با ماتریس قطری \mathbf{D} هتشابه است. به عبارت دیگر می‌توان گفت \mathbf{A} قطری شدنی است. در بقیه این فصل امکان قطری کردن ماتریسها دارای اهمیت شایانی است.

اگر \mathbf{A} هرمیتی باشد، آنگاه تعیین \mathbf{T}^{-1} بسیار ساده است. بردارهای ویژه $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$ ماتریس \mathbf{A} را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای هر i با $\mathbf{x}^{(i)}$ نرمال شده و متعامد باشد. آنگاه به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$ ؛ به عبارت دیگر، وارون \mathbf{T} همان ماتریس الحاقی آن (ترانهاده مزدوج مختلط آن) است.

بالاخره، مذکور می‌شویم که اگر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی ماتریس \mathbf{A} از n کمتر باشد، آنگاه نمی‌توان ماتریس \mathbf{T} را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$. در این حالت، \mathbf{A} با یک ماتریس قطری هتشابه نیست، به عبارت دیگر قطری شدنی نیست.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۵ دستگاه معادلات داده شده را حل کنید، یا نشان دهید که دارای جواب نیست.

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$	0.1	$x_1 - x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$		$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$		$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$	0.2	$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$		$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$		$x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$
		$x_1 - x_3 = 0$
		$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$
		$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

۶. تعیین کنید که آیا مجموعه بردارهای زیر مستقل خطی‌اند. اگر وابسته خطی باشند، رابطه خطی بین آنها را بیابید. بردارها را از لحاظ صرفه‌جویی درجا به صورت

سطری نوشته ایم، اما می توان آنها را به صورت بردارهای ستونی در نظر گرفت؛ یعنی، به جای بردارها می توان از ترانهاده آنها استفاده کرد.

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1), \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-2, 0, -1, 3)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1), \quad (\text{د})$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 2)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0,), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1), \quad (\text{ه})$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$$

۷. فرض کنیم که بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ هریک دارای n مؤلفه باشند و $n < m$. نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ وابسته خطی اند.

۸. تعیین کنید که آیا هریک از مجموعه بردارهای زیر به ازای $-\infty < t < \infty$ مستقل خطی اند. اگر وابسته خطی باشند، رابطه خطی بین آنها را پیدا کنید. مانند مسئله ۶ برای صرفه جویی در جا بردارها را به صورت سطری نوشته ایم.

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t}), \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \sin t, \sin t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (\sin t, 2 \sin t). \quad (\text{ب})$$

۹. فرض کنیم

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ در هر نقطه از فاصله $1 \leq t \leq 0$ وابسته خطی اند. با وجود این، نشان دهید که $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ روی $1 \leq t \leq 0$ مستقل خطی اند.

در هر یک از مسائل ۱۰ تا ۱۹ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس داده شده را بیابید.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot 12 \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot 11 \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot 15 \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot 14 \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot 13$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot 17 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 16$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot 19 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot 18$$

۲۰. به ازای هر ماتریس داده شده A ، ماتریس T را طوری تعیین کنید که $T^{-1}AT = D$ که در آن D یک ماتریس قطری است.
- (الف) A ماتریس مسئله ۱۵ است.
- (ب) A ماتریس مسئله ۱۱ است.
- (ج) A ماتریس مسئله ۱۴ است.

مسائل ۲۱ تا ۲۵ مربوط به حل $AX = b$ در حالت $\det A = 0$ است.

۲۱. فرض کنیم که به ازای ماتریس داده شده A ، بردار نااصفر X وجود دارد به طوری که $AX = 0$. نشان دهید که بردار نااصفر y نیز وجود دارد به طوری که $A^*y = 0$.

۲۲. نشان دهید که به ازای هر بردار x و y داریم $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

۲۳. فرض کنیم که $\det A = 0$ ، اما $AX = b$ دارای جواب باشد. نشان دهید که $(b, y) = 0$ ، که در آن y هر جواب 0 است. درستی این گزاره را درباره مجموعه معادلات مسئله ۳ تحقیق کنید.

داهنمایی: از نتیجه مسئله ۲۲ استفاده کنید.

۲۴. فرض کنیم که $\det A = 0$ و $x^{(0)}$ یک جواب $AX = b$ است. نشان دهید که اگر ξ یک جواب $A\xi = 0$ و α ثابت دلخواهی باشد، آنگاه $x = x^{(0)} + \alpha\xi$ نیز یک جواب $AX = b$ است.

۲۵*. فرض کنیم که $\det A = 0$ ، و y یک جواب $A^*y = 0$ باشد. نشان دهید که اگر $(b, y) = 0$ ، آنگاه $AX = b$ دارای جواب است. توجه شود که این گزاره عکس مسئله ۲۳ است؛ صورت جواب در مسئله ۲۴ داده شده است.

۲۶. ثابت کنید که $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه A است اگر، و فقط اگر، A غیرعادی باشد.

۲۷. ثابت کنید که اگر A هرمیتی باشد، آنگاه $(Ax, y) = (x, Ay)$ ، که در آن x و y بردارهای دلخواه اند.

۲۸. در این مسئله نشان می‌دهیم که مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی A حقیقی اند.

گیریم \mathbf{X} یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد.

(الف) نشان دهید که $(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}) = (\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X})$. (اوهنمایی: مسئله ۲۷ را بینید.)

(ب) نشان دهید که $\lambda(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \bar{\lambda}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$. (اوهنمایی: توجه شود که $\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$.)

(ج) نشان دهید که $\lambda = \bar{\lambda}$; یعنی، مقدار ویژه λ حقیقی است.

۲۹. نشان دهید که اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی \mathbf{A} باشند، و اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، آنگاه بردارهای ویژه متناظر $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ متعامدند.

(اوهنمایی: با استفاده از نتایج مسائل ۲۷ و ۲۸ نشان دهید که $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.)

۵. نظریه اساسی دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول

نظریه عمومی دستگاه n معادله خطی مرتبه اول

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t), \end{aligned} \quad (1)$$

دقیقاً همانند نظریه یک معادله خطی مرتبه n است. از این رو در این بند با پیروی از همان خطوط کلی بندهای ۲۰.۳، ۲۰.۴ و ۲۰.۵ بحث می‌پردازیم. برای آنکه دستگاه (۱) را به بهترین وجه بررسی کنیم، آن را با نماد ماتریسی می‌نویسیم. یعنی، توابع $x_1 = \phi_1(t)$ ، \dots ، $x_n = \phi_n(t)$ را به عنوان مؤلفه‌های بردار $\mathbf{x} = \Phi(t)$ در نظر می‌گیریم؛ به همین نحو $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ عناصر یک ماتریس $\mathbf{P}(t)$ ، $n \times n$ می‌باشند. بدینسان معادله (۱) به صورت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (2)$$

در می‌آید.

کاربرد بردارها و ماتریسها نه تنها موجب صرفه‌جویی بزرگی درجا و تسهیل محاسبات می‌شود، بلکه شباهت بین یک دستگاه معادلات و یک معادله (اسکالر) تنها را نهاده پان می‌سازد. بردار $\mathbf{x} = \Phi(t)$ را هنگامی جواب معادله (۲) نامند که مؤلفه‌های آن در دستگاه معادلات (۱) صدق کند. در سراسر این بند فرض برآن است که \mathbf{P} و \mathbf{g} روی فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته‌اند؛ یعنی، هر یک از توابع اسکالر $p_{11}, \dots, p_{nn}, \dots, g_1, \dots, g_n$ روی فاصله مذبور پیوسته‌اند. بنا بر قضیه ۲.۷، این شرط برای وجود جواب معادله (۲) روی فاصله $\alpha < t < \beta$ کافی است.

مناسبتر است که نخست معادله همگن

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (3)$$

را که از معادله (۲) به ازای $\mathbf{g}(t) = 0$ بدست می‌آید بررسی کنیم. همینکه معادله همگن حل

شد، با استفاده از روش تغییر پارامترها می‌توان معادله ناهمگن (۲) را حل کرد؛ در بند ۱۵.۷ به این موضوع می‌پردازیم. برای نمایش جوابهای خاص دستگاه (۳) از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \dots \quad (4)$$

توجه شود که $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ نمایشگر مؤلفه i ام از جواب زام $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ است. نکات اصلی در خصوص ساختمان جوابهای دستگاه (۳) در قضایای ۳.۷ تا ۳.۶ بیان شده است. این قضایا کاملاً شبیه قضایای منتظر در بندهای ۳.۳، ۲.۳، و ۲.۵ می‌باشند؛ برخی از برها نها را به عنوان تمرین به خواندن و اگذار کرده ایم.

قضیه ۳.۷. اگر توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشند، آنگاه ترکیب خطی $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ نیز به ازای ثابت‌های دلخواه c_1 و c_2 یک جواب است.

این همان اصل انطباق است؛ و به آسانی با مشتق‌گیری از $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ و با استفاده از این نکته که $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در معادله (۳) صدق می‌کنند اثبات می‌شود. با استفاده مکرر از قضیه ۳.۷ به این نتیجه می‌رسیم که اگر $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ جوابهای معادله (۳) باشند، آنگاه

@jozve_iut

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \quad (5)$$

نیز به ازای ثابت‌های دلخواه c_1, \dots, c_k یک جواب است. به عنوان مثال می‌توان تحقیق کرد که

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{rt} \\ 2e^{rt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{rt}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (6)$$

در معادله

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (7)$$

صدق می‌کند. طبق قضیه ۳.۷

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{rt} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

نیز در معادله (۷) صدق می‌کند. این جواب دستگاه (۷) را در بند ۲.۷ با روش حذفی به دست آوردهیم.

چنانکه در بالا اشاره کردیم، با استفاده مکرر از قضیه ۳.۷ نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی متناهی از جوابهای معادله (۳) نیز یک جواب است. اکنون این مسئله پیش می‌آید که آیا تمام جوابهای معادله (۳) را می‌توان بدین طریق به دست آورد. از قیاس با موارد پیش می‌توان حدس زد که برای دستگاه مرتبه n ام (۳) کافی است ترکیب‌های خطی n جواب را که درست انتخاب شده باشند تشکیل داد. بنا بر این فرض می‌کنیم که $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ ، n جواب دستگاه مرتبه n ام (۳) باشند، و ماتریس (t) $\mathbf{X}(t)$ را که ستونهای آن بردارهای $(t) \mathbf{X}^{(1)}, \dots, (t) \mathbf{X}^{(n)}$ می‌باشند در نظر می‌گیریم؛

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

بردارهای ستونی $\mathbf{X}(t)$ ، همان‌طور که در بند ۴.۷ دیدیم، به ازای مقدار داده شده t مستقل خطی‌اند اگر، و فقط اگر، به ازای این مقدار t ، $\det \mathbf{X} \neq 0$. این دترمینان را رونسکین n جواب $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ می‌نامند و با $[W[\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}]]$ نشان می‌دهند؛ یعنی

$$W[\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}] = \det \mathbf{X} \quad (10)$$

بنا بر این جوابهای $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ در یک نقطه مستقل خطی‌اند اگر، و فقط اگر، در آن $W[\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}]$ صفر نباشد.

قضیه ۴.۷. اگر توابع بردادی $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ به ازای هر نقطه فاصله $\alpha < t < \beta$ جوابهای مستقل خطی دستگاه (۳) باشند، آنگاه هر جواب $(t) \Phi(t) = \mathbf{X}$ دستگاه (۳) را می‌توان به جهودت ترکیب خطی از $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ دقیقاً به یک طریق بیان کرد.

$$\Phi(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t) \quad (11)$$

پیش از اثبات قضیه ۴.۷، توجه شود که طبق قضیه ۳.۷ همه عبارتهای به شکل (۱۱) جوابهای دستگاه (۳) می‌باشند، و بنا بر قضیه ۴.۷ همه جوابهای معادله (۳) را می‌توان به صورت (۱۱) نوشت. اگر ثابت‌های c_1, \dots, c_n را دلخواه تلقی کنیم، آنگاه رابطه (۱۱) شامل تمام جوابهای دستگاه (۳) می‌باشد، و معمولاً آن را جواب عمومی می‌نامند. هر مجموعه $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ از جوابهای معادله (۳) را که در هر نقطه فاصله $\alpha < t < \beta$ مستقل خطی باشند یک مجموعه اساسی جوابها در این فاصله می‌نامند.

برای اثبات قضیه ۴.۷ نشان می‌دهیم که هر جواب داده شده معادله (۳) مانند Φ به ازای مقادیر مناسب c_1, \dots, c_n به صورت

$$\Phi(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t)$$

نوشته می‌شود. فرض کنیم که $t_0 = t$ نقطه‌ای در فاصله $\alpha < t < \beta$ باشد و فرض کنیم $(t_0) = \Phi(\xi)$. اکنون می‌خواهیم بدانیم که آیا جوابی به صورت

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t_0)$$

وجود دارد که در همان شرط اولیه $\xi = \Phi(t)$ نیز صدق کند. یعنی، می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان مقادیر c_1, \dots, c_n را طوری تعیین کرد که

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \xi \quad (12)$$

یا به صورت اسکالری

$$c_1 x_{11}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) = \xi_1, \\ \vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) = \xi_n. \quad (13)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه معادلات (13) دارای جواب یکتاوی c_1, \dots, c_n باشند، دقیقاً آن است که دترمینان ضرایب که همان رونسکین $[W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]]$ در نقطه $t_0 = t$ است مخالف صفر باشد. فرض آنکه $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ در سراسر $\alpha < t < \beta$ مستقل خطی اند متضمن آن است که $[W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]]$ در $t_0 = t$ صفر نیست، و بنابراین جوابی (یکتاوی) برای معادله (3) به صورت $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ وجود دارد که در شرط اولیه (12) نیز صدق می‌کند. بنابر قسمت یکتاوی قضیه ۷.۰.۷ این جواب همان $(t) = \Phi(\xi)$ است، و از این رو $(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ همان مطلوبی که باید اثبات می‌شد.

قضیه ۷.۰.۷. اگر $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ جوابهای معادله (3) در فاصله $\alpha < t < \beta$ باشند، آنگاه دو این فاصله $[W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]]$ یا متعدد با صفر است یا هیچگاه صفر نمی‌شود.

اهمیت قضیه ۷.۰.۷ در این است که ما را از ضرورت بررسی $[W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]]$ در همه نقاط فاصله مورد توجه معاف می‌کند، و موجب می‌شود که بتوان فقط با محاسبه رونسکین در یک نقطه مناسب در فاصله مزبور، تعیین کرد که آیا $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ یک مجموعه اساسی جواب تشکیل می‌دهند یا نه.

برای اثبات قضیه ۷.۰.۷ نخست نشان می‌دهیم که رونسکین $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ در معادله دیفرانسیل (مسئله ۲ را بینید)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn})W. \quad (14)$$

صدق می‌کند. بنابراین W یک تابع نمایی است، و مدعای قضیه فوراً نتیجه می‌شود. عبارت

W که با حل معادله (۱۴) بدست می‌آید به فرمول آبل موسوم است؛ به شباخت این معادله با معادله (۱۳) بند ۲۰.۳ توجه شود.

طريق دیگر، برای اثبات قضیه ۷.۵ این است که نشان دهیم اگر n جواب $(1), \dots, X^{(n)}$ معادله (۳) در یک نقطه $\beta < t < \alpha$ وابسته خطی باشند، آنگاه باید در هر نقطه یک نقطه مستقل خطی باشند باید در هر نقطه فاصله مزبور مستقل خطی باشند.

قضیه زیر میین آن است که همواره دستگاه (۳) حداقل دارای یک مجموعه اساسی جواب است.

قضیه ۷.۶. فرض کنیم

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وعلاوه بر این گیریم $(1), \dots, X^{(n)}$ جوابهای دستگاه (۳) باشندکه به ترتیب در شرایط اولیه

$$X^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \dots, X^{(n)}(t_0) = e^{(n)} \quad (15)$$

صدق می‌کنند، $\beta < t < \alpha$ است. آنگاه $(1), \dots, X^{(n)}$ یک مجموعه اساسی جواب دستگاه (۳) است.

برای اثبات این قضیه، توجه شود که قضیه ۷.۷ وجود و یکتاپی جوابهای $(1), \dots, X^{(n)}$ را که در قضیه ۷.۶ آمده است تأمین می‌کند. به آسانی می‌توان دید که رونسکین این جوابها برای $t = t_0$ برابر یک است؛ بنا بر این $(1), \dots, X^{(n)}$ یک مجموعه اساسی جواب است.

همینکه یک مجموعه اساسی جواب به دست آمد مجموعه‌های دیگر را می‌توان با تشکیل ترکیب‌های خطی (مستقل) مجموعه اول ایجاد کرد. از لحاظ نظری ساده‌ترین مجموعه همان است که قضیه ۷.۶ به دست می‌دهد.

خلاصه آنکه، هر مجموعه n جواب مستقل خطی دستگاه (۳) تشکیل یک مجموعه اساسی جواب می‌دهد. تحت شرایطی که در این بند بیان شد، این قبیل مجموعه‌های اساسی همواره وجود دارند، و هر جواب دستگاه (۳) را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از هر مجموعه اساسی جواب نمایش داد.

مسئل

۱. با استفاده از جبر ماتریسی، درستی گزاره ذیل قضیه ۷.۳ را به ازای مقدار صحیح دلخواه k اثبات کنید.

۲. در این مسئله به طرح اثباتی برای قضیه ۷.۵ در حالت $2 = n$ می پردازیم. فرض کنیم $(1) \mathbf{X}$ و $(2) \mathbf{X}$ به ازای $\alpha < t < \beta$ جوابهای معادله (۳) و W رونسکین (1) و $(2) \mathbf{X}$ باشد.

(الف) نشان دهید که

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

(ب) با استفاده از معادله (۳)، نشان دهید که

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

(ج) $W(t)$ را با حل معادله دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (ب) بیابید. با استفاده از این عبارت نتیجه مذکور در قضیه ۷.۵ را به دست آورید.

*(د) این روش را طوری تعمیم دهید که قضیه ۷.۵ را به ازای مقدار دلخواه n اثبات کند.

۳. نشان دهید که رونسکین دو مجموعه اساسی جواب دستگاه (۳) حداقل می توانند در یک ضریب ثابت تفاوت داشته باشند. (اهمایی: از معادله (۱۴) استفاده کنید.)

۴. اگر $y = x_1$ و $x_2 = y'$ ، آنگاه معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (\text{یک})$$

با دستگاه

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{aligned} \quad (\text{دو})$$

متناظر است. نشان دهید که اگر $(1) \mathbf{X}$ و $(2) \mathbf{X}$ یک مجموعه اساسی جواب معادلات (دو)، و $(1) \mathbf{y}$ و $(2) \mathbf{y}$ یک مجموعه اساسی جواب معادله (یک) باشند، آنگاه $[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}]$ که در آن c مقدار ثابت ناصرف است.

(اهمایی: $(t)^{(1)} \mathbf{y}$ و $(t)^{(2)} \mathbf{y}$ باید ترکیبهای خطی $(t)x_{11}$ و $(t)x_{12}$ باشند.)

۵. نشان دهید که جواب عمومی $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ برابر مجموع یک جواب

خصوصی $\mathbf{X}^{(p)}$ این معادله و جواب عمومی $\mathbf{X}^{(c)}$ مربوط به معادله همگن متناظر است.

۶. بردارهای $\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ و $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) رونسکین $\mathbf{X}^{(1)}$ و $\mathbf{X}^{(2)}$ را حساب کنید.

(ب) $\mathbf{X}^{(1)}$ و $\mathbf{X}^{(2)}$ درجه فاصله‌هایی مستقل خطی اند؟

(ج) درباره ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل همگنی که $\mathbf{X}^{(1)}$ و $\mathbf{X}^{(2)}$ در آن صدق می‌کنند چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(د) این دستگاه معادلات را بیابید و نتایج قسمت (ب) را تحقیق کنید.

۷. بردارهای $\begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ و $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید، و به همان

سؤالات مسئله ۶ پاسخ دهید.

دو مسئله زیر روش دیگری برای اثبات قضیه ۴.۷ به دست می‌دهند.

۸. فرض کنیم که $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(m)}$ جوابهای $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ روی فاصله $\alpha < t < \beta$ باشند. فرض کنیم که \mathbf{P} پیوسته است و گیریم t نقطه دلخواهی در فاصله مزبور باشد. نشان دهید که $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(m)}$ به ازای $\alpha < t < \beta$ وابسته خطی اند اگر (و فقط اگر) $\mathbf{X}^{(1)}(t_0), \dots, \mathbf{X}^{(m)}(t_0)$ وابسته خطی باشند. به عبارت دیگر، $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(m)}$ روی فاصله (α, β) وابسته خطی اند اگر در نقاطی از این فاصله وابسته خطی باشند.

(ا) اینجا می‌توان ثابت‌های c_1, \dots, c_m را طوری تعیین کرد که

$$\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_m \mathbf{X}^{(m)}(t) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_m \mathbf{X}^{(m)}(t)$$

و با استفاده از قضیه یکتاپی نشان دهید که به ازای هر t در $\alpha < t < \beta$ داریم $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$.

۹. فرض کنیم $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ جوابهای مستقل خطی معادله $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ باشند، که در آن \mathbf{P} روی $\alpha < t < \beta$ پیوسته است.

(الف) نشان دهید که هر جواب $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ را می‌توان با انتخاب مناسب ثابت‌های

c_n, \dots, c_1 به صورت زیرنوشت

$$\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t)$$

(ا) اینجا می‌توان ثابت‌های c_1, \dots, c_n را طوری تعیین کرد که $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ باشد.

(ب) نشان دهید که عبارت متناظر با جواب $\mathbf{z}(t)$ در قسمت (الف) یکتاست؛

یعنی، اگر

$$\mathbf{z}(t) = k_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + k_n \mathbf{X}^{(n)}(t)$$

$$k_n = c_n, \dots, k_1 = c_1$$

آنگاه

(ا) هنمایی: نشان دهید که بدازای هر t در $\alpha < t < \beta$ داریم

$$(k_1 - c_1)x^{(1)}(t) + \dots + (k_n - c_n)x^{(n)}(t) = 0$$

واز استقلال خطی $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ استفاده کنید.

۶.۷ دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

در این بند مقدمتاً به بررسی طرز ساختن جواب عمومی دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت یعنی، دستگاهی به صورت

$$x' = Ax \quad (1)$$

را که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ است می‌پردازیم. همانند روش حل معادلات خطی مرتبه دوم در بند ۵.۳، برای معادله (۱) جوابهایی به صورت

$$x = \xi e^{\lambda t} \quad (2)$$

در نظر می‌گیریم که در آن r و بردار ثابت ξ باید تعیین شوند. چون x را از رابطه (۲) در دستگاه (۱) قرار دهیم به دست می‌آید

$$r\xi e^{\lambda t} = A\xi e^{\lambda t}.$$

با حذف سازه اسکالری ناصرف $e^{\lambda t}$ داریم $A\xi = r\xi$ یا

$$(A - rI)\xi = 0, \quad (3)$$

که در آن I ماتریس واحد $n \times n$ است. بدینسان، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) باید دستگاه معادلات جبری (۳) را حل کرد. این دقیقاً همان مسئله تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A است. بنا بر این بردار x که بارابطه (۲) داده شده است، هنگامی جواب معادله (۱) است که r مقدار ویژه ماتریس ضرایب A و ξ بردار ویژه متناظر با آن باشد.

مثال ۱. مطلوب است جواب عمومی دستگاه

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x. \quad (4)$$

فرض کنیم که $x = \xi e^{\lambda t}$ با قراردادن x در معادله (۴)، به دستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

می‌رسیم. دستگاه معادلات (۵) دارای جواب ناصفراست اگر، و فقط اگر، دترمینان ضرایب صفر شود. بدینسان مقادیر مطلوب را از معادله

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 \\ = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad (6)$$

به دست می‌آید. معادله (۶) دارای ریشه‌های $r_1 = 3$ و $r_2 = -1$ است که همان مقادیر ویژه ماتریس ضرایب در معادله (۴) می‌باشند. اگر $r = 3$. آنگاه دستگاه (۵) به یک معادله

$$-2x_1 + x_2 = 0 \quad (7)$$

تبدیل می‌شود. بدینسان $x_2 = 2x_1$ و بردار ویژه متناظر با $r_1 = 3$ را می‌توان به صورت

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

اختیار کرد. به همین ترتیب، متناظر با $r_2 = -1$ داریم $x_2 = -2x_1$ ، بنابراین بردار ویژه عبارت است از

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

متناظرًا جوابهای معادله دیفرانسیل عبارتند از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{rt}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (10)$$

رونسکین این جوابها عبارت است از

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{rt} & e^{-t} \\ 2e^{rt} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t} \quad (11)$$

که هیچگاه صفر نمی‌شود. بنابراین جوابهای $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ تشکیل یک مجموعه اساسی می‌دهند، و جواب عمومی دستگاه (۴) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{rt} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (12)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه‌اند. این با جوابی که در بند ۲.۷ باروش حذف یا فتیم یکی است.

در مورد دستگاه عمومی (۱) نیز همانند مثال بالا عمل می‌کنیم. برای تعیین جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه \mathbf{A} را از دستگاه جبری متناظر (۳) به دست آورد. مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (که لزومی ندارد همه آنها متفاوت باشند) ریشه‌های معادله چند جمله‌ای

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0 \quad (13)$$

هستند. ماهیت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر، ماهیت جواب عمومی دستگاه (۱) را تعیین می‌کند.

دستگاههای هرمیتی. ساده‌ترین حالت آن است که \mathbf{A} یک ماتریس هرمیتی باشد. چنان‌که در بند ۴.۷ بیان شد، مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ در این حالت همه حقیقی‌اند. علاوه بر این، حتی هنگامی که برخی از مقادیر ویژه مکرر باشند، همواره یک مجموعه متشکل از n بردار ویژه مستقل خطی $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ وجود دارد. بنابراین جوابهای متناظر دستگاه دیفرانسیلی (۱) عبارتند از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}. \quad (14)$$

برای اثبات آنکه این جوابها تشکیل یک مجموعه اساسی می‌دهند، به محاسبه رونسکین می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} @jozve_iut \\ W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi_n^{(1)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{(n)} e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

نخست دیله می‌شود که تابع نمایی مزبور هیچگاه صفر نیست. دیگر آنکه، چون بردارهای ویژه $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ مستقل خطی‌اند، در ترمینان موجود در جمله آخر معادله (۱۵) نیز هیچگاه صفر نیست. در نتیجه رونسکین $(1)[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}] = W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ هیچگاه صفر نیست، و بنابراین $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ تشکیل یک مجموعه اساسی جواب می‌دهند. بدین‌سان هنگامی که \mathbf{A} ماتریس هرمیتی باشد، جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}. \quad (16)$$

طبقه‌مهماز از ماتریسهای هر میتی را ماتریسهای متقارن حقیقی تشکیل می‌دهند. اگر A متقارن و حقیقی باشد، آنگاه بردارهای ویژه (ξ_1, \dots, ξ_n) و همچنین مقادیر ویژه (r_1, \dots, r_n) همه حقیقی‌اند. بنا بر این جواهایی که بارابطه (14) داده شده‌اند توابعی با مقادیر حقیقی‌اند. اما، اگر ماتریس هر میتی A حقیقی نباشد، آنگاه عموماً بردارهای ویژه دارای قسمتهای موهومی ناصفرند، و جواهای (14) توابعی با مقادیر مختلف‌اند.

مثال ۲. مطلوب است تعیین جواب عمومی

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (17)$$

ماتریس ضرایب در معادله (17) متقارن و حقیقی است، بنا بر این می‌توان به همان روشی که در بالا بیان شد عمل کرد. فرض $\mathbf{x} = \xi e^{\lambda t}$ به دستگاه جبری زیر می‌انجامد

$$\begin{pmatrix} 1-r & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

مقادیر ویژه در معادله

$$\begin{vmatrix} 1-r & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-r \end{vmatrix} = (1-r)(-1-r) - 3 = r^2 - 4 = 0 \quad (19)$$

صدق می‌کنند. بدین‌سان $r_1 = 2$ و $r_2 = -2$. به ازای $r = 2$ ، معادله (18) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

بنا بر این $\xi_2 = \sqrt{3}\xi_1$ و ξ_1 بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه $r_1 = 2$ را می‌توان به صورت

$$\xi^{(1)} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

اختیار کرد. به همین طریق، متناظر به مقدار ویژه $r_2 = -2$ داریم $\xi_2 = -\sqrt{3}\xi_1$ ، بنا بر این بردار ویژه عبارت است از

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

بدینسان جواب عمومی معادله (۱۷) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{rt} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-rt} \quad (23)$$

مثال ۳. مطلوب است تعیین جواب عمومی

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (24)$$

در اینجا نیز دیده می‌شود که ماتریس ضرایب متقابن و حقیقی است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس را در مثال ۴ بند ۴.۷ یافته‌یم،

$$r_1 = 2; \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$r_2 = -1, \quad r_3 = -1; \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

بنابراین یک مجموعه اساسی جواب معادله (۲۶) عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (27)$$

وجواب عمومی چنین است

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (28)$$

این مثال، میین این نکته است که حتی هنگامی که یکی از مقادیر ویژه ($r = -1$) مضاعف

باشد، باز هم امکان دارد بتوان دوبردار ویژه مستقل خطی (2) و (3) به دست آورد و در نتیجه جواب عمومی (28) را ساخت.

دستگاههای ناهمیتی. اگر ماتریس ضرایب A در دستگاه (1)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$$

هرمیتی نباشد، آنگاه تعیین جواب پیچیده ترمی شود. نخست فرض کنیم که A حقیقی است. در این صورت برای مقادیر ویژه A سه حالت وجود دارد:

۱. همه مقادیر ویژه حقیقی و متمایزند.
۲. برخی از مقادیر ویژه به صورت زوجهای مختلط مزدوج‌اند.
۳. برخی از مقادیر ویژه مکررند.

در حالت اول به اشکالی برنمی‌خوریم. متناظر بدھر مقدار ویژه تنها یک بردار ویژه حقیقی مستقل خطی وجود دارد، و در نتیجه n جواب مستقل خطی به صورت (14) به دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی باز هم به وسیله معادله (16) داده می‌شود که در آن \dots, \mathbf{x}_n همه متمایز فرض شده‌اند. مثال ۱ بالا این حالت را توضیح می‌دهد.

اگر برخی از مقادیر ویژه به صورت زوجهای مختلط مزدوج باشند، آنگاه باز هم n جواب مستقل خطی به صورت (14) وجود دارد، به شرط آنکه همه مقادیر ویژه متمایز باشند. البته، جوابهای حاصل از مقادیر ویژه مختلط توابعی با مقدار مختلط‌اند. اما، همانند بند ۱۰.۵.۳، می‌توان یک مجموعه کامل جواب، با مقدار حقیقی به دست آورد. این موضوع را در بند ۷.۰.۷ بررسی می‌کنیم..

هنگامی که مقدار ویژه‌ای مکرر باشد بادشواریهای مهمتری مواجه می‌شویم. در این حالت امکان دارد تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر، کوچکتر از مرتبه تکرار مقدار ویژه مزبور باشد، مانند مثال ۳ بند ۴.۷. در این حالت تعداد جوابهای مستقل خطی به صورت e^{rx} از n کوچکتر است و برای ساختن یک مجموعه اساسی جواب لازم می‌آید که جوابهایی به صورت دیگر جستجو کنیم. این وضعیت تا اندازه‌ای مشابه حالتی از معادله خطی مرتبه n رام با ضرایب ثابت است که در آن بدارای یک ریشه مکرر معادله مشخصه جوابهایی به صورت $x^k e^{rx}, x^k e^{rx}, \dots$ مکرر را در بند ۸.۰.۷ بررسی می‌کنیم.

بالاخره، اگر A مختلط باشد، اما هرمیتی نباشد، در این صورت لزومی ندارد که مقادیر ویژه مختلط به صورت زوجهای مزدوج باشند، و بردارهای ویژه نیز معمولاً مختلط‌اند حتی اگر مقدار ویژه متناظر حقیقی باشد. هنگامی که مقادیر ویژه متمایز باشند جوابهای معادله دیفرانسیل (1) باز هم به صورت (14) خواهند بود، اما، عموماً همه جوابها توابعی با مقدار مختلط‌اند.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۵ جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را باید پیدا کرد.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 2 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 4 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 6 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 5$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 8 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 7$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 10 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 9$$

در هر یک از مسائل ۱۱ تا ۱۴ مسئله مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

@jozve_iut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \cdot 11$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdot 12$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdot 13$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \cdot 14$$

۱۵. دستگاه $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ نظیر معادله اویلر مرتبه دوم است (بند ۴.۴). فرض کنیم که $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ که در آن \mathbf{x} یک بردار ثابت است، نشان دهید که r و \mathbf{x} باید در $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ باشد.

صدق کنند؛ و نیز نشان دهید که برای پیدا کردن جوابهای نا صفر معادله دیفرانسیل مزبور باید ریشه معادله مشخصه $\det(A - rI) = 0$ باشد.

با توجه به مسئله ۱۵، دستگاه معادلات هر یک از مسائل ۱۶ تا ۱۹ را حل کنید. فرض کنید که $r_1 > r_2 > 0$.

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 17 \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 16$$

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 19 \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \cdot 18$$

۲۰. دستگاه مرتبه دوم $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $r_1 \neq r_2$ ، جواب عمومی عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$$

به شرط آنکه $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ مستقل خطی باشند. در این مسئله می‌خواهیم استقلال خطی $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ را با اثبات آنکه فرض بستگی خطی آنها به تناقض می‌انجامد نشان دهیم.

(الف) توجه شود که $(A - r_1 I)\xi^{(1)} = 0$ و $(A - r_2 I)\xi^{(2)} = 0$ صدق می‌کنند.

$$(A - r_2 I)\xi^{(1)} = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$$

(ج) فرض کنیم که $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ وابسته خطی اند. آنگاه $0 = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}$ و حداقل یکی از مقادیر c_1 و c_2 صفر نیست؛ فرض کنیم $c_1 \neq 0$. نشان دهید که

$$(A - r_2 I)(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = 0.$$

و نیز نشان دهید که

$$(A - r_2 I)(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\xi^{(1)}$$

بنابراین $c_1 = 0$ ، که یک تناقض است. در نتیجه $\xi^{(1)}$ و $\xi^{(2)}$ مستقل خطی اند.

(د) استدلال قسمت (ج) را برای اثبات حالتی که c_1 برابر صفر و c_2 مخالف صفر است تغییر دهید.

(ه) استدلال مشابهی برای حالت $n=3$ طرح کنید؛ توجه شود که این روش را می‌توان به مقدار دلخواه n تعمیم داد.

۲۱. معادله

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{یک})$$

را که در آن a ، b و c ثابت‌اند در نظر می‌گیریم. در فصل ۳ نشان داده شد که جواب عمومی بستگی به ریشه‌های معادله مشخصه

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{دو})$$

دارد.

(الف) معادله (یک) را با قراردادن $y = x_1, x_2 = y'$ به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید. دستگاه معادلات $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ را که در آن $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ صدق می‌کند، بیا بیند.

(ب) معادله‌ای بیا بیند که مقادیر ویژه ماتریس ضرایب \mathbf{A} در قسمت (الف) را به دست دهد. توجه شود که این معادله درست همان معادله مشخصه (دو) متناظر به معادله (یک) است. ۰.۲۲ در این مسئله طرز استفاده از روش کاهش مرتبه را برای دستگاههای معادلات نشان می‌دهیم. این روش در مورد دستگاههایی که دارای یک مجموعه کامل جواب به صورت $\mathbf{y} e^{rt}$ نیستند به کار می‌رود. دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{یک})$$

را در نظر می‌گیریم.

(الف) تحقیق کنید که $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ در معادله دیفرانسیل داده شده صدق می‌کند.

(ب) متغیر وابسته جدیدی با تبدیل

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (\text{دو})$$

در نظر می‌گیریم. توجه شود که این تبدیل از ماتریس واحد با قراردادن جواب معلوم به جای ستون دوم آن به دست آمده است. با جایگذاری \mathbf{x} در معادله (یک) نشان دهید که \mathbf{y} در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (\text{دو})$$

(ج) معادله (دو) را حل کنید و نشان دهید که

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{چهار})$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه‌اند.

(د) با استفاده از معادله (دو)، نشان دهید که

$$\mathbf{x} = -\frac{c_1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (\text{پنج})$$

جمله اول یک جواب مستقل دیگر معادله (یک) است. این همان روش کاهش مرتبه است که درباره دستگاه معادلات مرتبه دوم اعمال می شود.

در مسائل ۲۳ و ۲۴ با استفاده از روش کاهش مرتبه (مسئله ۲۲) دستگاه معادلات داده شده را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .24 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .23$$

مدارهای الکتریکی. مسائل ۲۵ و ۲۶ درباره مدار الکتریکی مذکور در مسئله ۹ بند ۱.۷ می باشند که برای آن دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به دست آمد

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{یک})$$

(الف) مطلوب است تعیین جواب عمومی معادله (یک) در صورتی که اهم ۱ = ۱، اهم $R_1 = ۳/۵$ ، هانری ۲ = L، و فاراد ۳ = C = ۲/۳.

(ب) نشان دهید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، مقادیر اولیه (۰) I و (۰) V هر چه باشند

$$.V(t) \rightarrow ۰ \quad I(t) \rightarrow ۰$$

۲۶. دستگاه معادلات دیفرانسیل (یک) بالا را در نظر می گیریم.

(الف) مطلوب است تعیین شرطی که R_1 ، R_2 ، C و L باشد در آن صدق کنند تا مقادیر ویژه ماتریس ضرایب حقیقی و متمایز باشند.

(ب) اگر شرطی که در قسمت (الف) به دست آمد برقرار باشد، نشان دهید که هر دو مقدار ویژه منفی اند. آنگاه نشان دهید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، شرایط اولیه هر چه باشند

$$.V(t) \rightarrow ۰ \quad I(t) \rightarrow ۰$$

*(ج). اگر شرطی که در قسمت (الف) به دست آمد برقرار نباشد، آنگاه مقادیر ویژه یا مختلط اند یا مکرر. آیا فکر می کنید که در این حالتها نیز وقتی $t \rightarrow \infty$ خواهیم داشت

$$.V(t) \rightarrow ۰ \quad I(t) \rightarrow ?$$

(اهمایی): یکی از راه حلها برای قسمت (ج) آن است که دستگاه (یک) را به یک معادله مرتبه دوم تبدیل کنیم. در بندهای ۷.۷ و ۸.۷ نیز به بحث درباره مقادیر ویژه مختلط و مکرر می پردازیم.

۷.۷ مقادیر ویژه مختلط

در این بند نیز به بررسی دستگاه n معادله خطی همگن با ضرایب ثابت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

می پردازیم و فرض می کنیم که در آن ماتریس ضرایب \mathbf{A} حقیقی باشد. اگر بخواهیم جوابهایی به صورت " $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ " پیدا کنیم، آنگاه همانند بند ۷.۶ نتیجه می شود که r باید یک مقدار ویژه ماتریس ضرایب \mathbf{A} و ξ بردار ویژه متناظر باشد. توجه شود که مقادیر ویژه r_1, r_2, \dots, r_n ماتریس \mathbf{A} ریشه های معادله

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \quad (2)$$

هستند و بردارهای ویژه متناظر در

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = 0 \quad (3)$$

صدق می کنند.

اگر \mathbf{A} حقیقی باشد، آنگاه ضرایب معادله چند جمله‌ای (۲) حقیقی‌اند و مقادیر ویژه مختلط باید به صورت زوجهای مزدوج باشند. مثلاً، اگر $r_1 = \lambda + i\mu$ ، که در آن λ و μ حقیقی‌اند، یک مقدار ویژه \mathbf{A} باشد، آنگاه $r_2 = \lambda - i\mu$ نیز یک مقدار ویژه است. علاوه بر این بردارهای ویژه $(1)\xi$ و $(2)\xi$ نیز مختلط مزدوج‌اند. برای اثبات این نکته، فرض کنیم که r_1 و $(1)\xi$ در

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = 0 \quad (4)$$

صدق کنند. چون از این معادله مزدوج مختلط بگیریم، با نویجه به آنکه \mathbf{A} و \mathbf{I} با مقادیر حقیقی‌اند، خواهیم داشت

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = 0 \quad (5)$$

که در آن r_2 و $(1)\xi$ به ترتیب مزدوجهای مختلط r_1 و $(1)\xi$ ‌اند. به عبارت دیگر، r_2 نیز یک مقدار ویژه، و $(1)\xi = (2)\xi$ بردار ویژه متناظر با آن است. جوابهای

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{r_1 t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi^{(2)}e^{r_2 t} \quad (6)$$

که بدینسان برای معادله دیفرانسیل (۱) به دست می آیند نیز مزدوج یکدیگرند. بنابراین، با تعمیم قضیه ۹.۳ در مورد دستگاهها (که به آسانی انجام می گیرد) می توان دو جواب با مقدار حقیقی برای معادله (۱) متناظر با مقادیر ویژه r_1 و r_2 با محاسبه قسمتهای حقیقی و موهومی $(1)\mathbf{x}(t)$ یا $(2)\mathbf{x}(t)$ که باروابط (۶) داده شده‌اند به دست آورد.

اگر قراردهیم $\mathbf{b} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ که در آن \mathbf{a} و \mathbf{b} حقیقی‌اند، آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t) \end{aligned} \quad (7)$$

باجدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ به دست می‌آید

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + i e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \quad (8)$$

اگر قراردهیم $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ آنگاه بردارهای

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t), \quad (9\text{ الف})$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \quad (9\text{ ب})$$

جوابهای با مقدار حقیقی معادله (1) خواهند بود. می‌توان نشان داد که \mathbf{u} و \mathbf{v} جوابهای مستقل خطی اند (مسئله ۱۳ را ببینید).

به عنوان مثال، فرض کنیم که $r_1 = \lambda - i\mu$, $r_2 = \lambda + i\mu$ ، و ریشه‌های دیگر، r_n, \dots, r_m همه حقیقی و متمایزند. اگر بردارهای ویژه متناظر را به صورت

$$\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \xi^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$$

در نظر بگیریم، آنگاه جواب عمومی معادله (1) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t} \quad (10)$$

که در آن $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ روابط (9) داده شده‌اند. باید توجه داشت که این تحلیل تنها هنگامی که ماتریس ضرایب \mathbf{A} در معادله (1) حقیقی باشد قابل اجراست، زیرا تنها در این حالت مقادیر ویژه مختلط و بردارهای ویژه متناظر به صورت زوجهای مزدوج می‌باشند.

مثال ۱. مطلوب است تعیین یک مجموعه اساسی جوابهای با مقدار حقیقی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (11)$$

با فرض

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt} \quad (12)$$

به دستگاه معادلات جبری

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

می‌رسیم که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه \mathbf{A} را معین می‌کند. معادله مشخصه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0 \quad (14)$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از $r_1 = -1 + i$ و $r_2 = -1 - i$. از معادله (13) با محاسبه ساده‌ای بردارهای ویژه متناظر بدست می‌آیند

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \quad (15)$$

بنابراین یک مجموعه اساسی جواب دستگاه (۱۱) چنین است

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t} \quad (16)$$

برای تعیین یک مجموعه جواب با مقدار حقیقی، باید قسمتهای حقیقی و موهومی $\mathbf{x}^{(1)}$ یا $\mathbf{x}^{(2)}$ را به دست آوریم. در واقع

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} \quad (18)$$

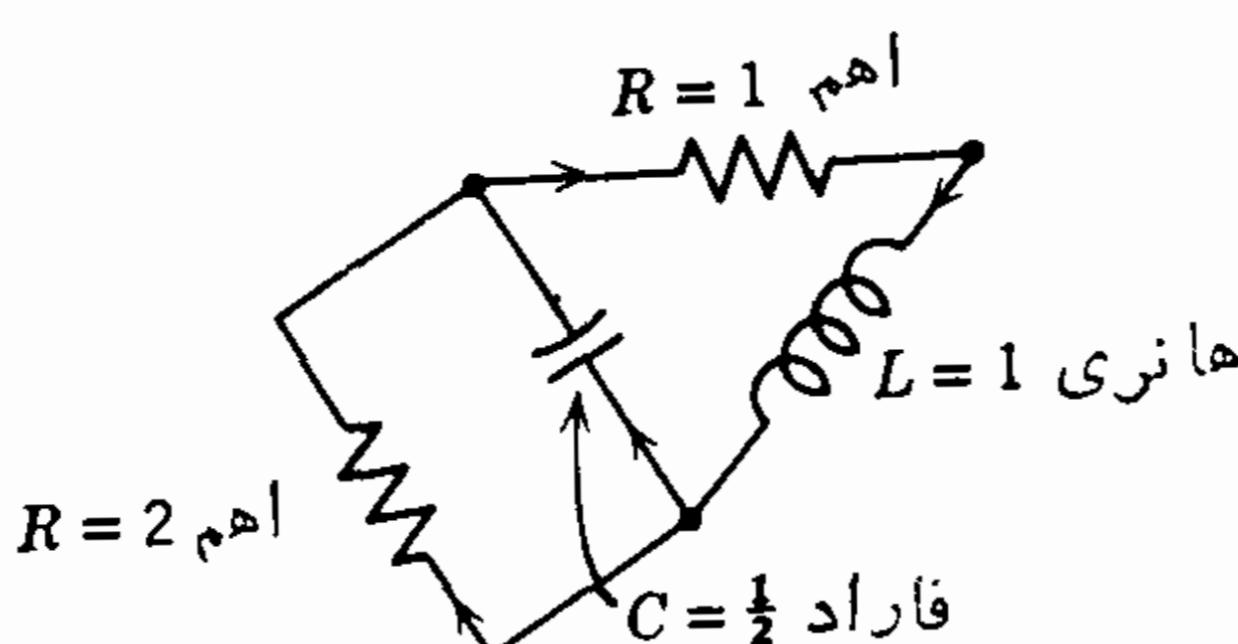
یک مجموعه جواب با مقدار حقیقی معادله (۱۱) می‌باشد. برای تحقیق آنکه $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ مستقل خطی‌اند به محاسبه رونسکین آنها می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ e^{-t}(2 \cos t + \sin t) & e^{-t}(-\cos t + 2 \sin t) \end{vmatrix} \\ &= e^{-2t} (-\cos^2 t + 2 \sin t \cos t - 2 \sin^2 t \cos t - \sin^2 t) \\ &= -e^{-2t}. \end{aligned}$$

چون این رونسکین هیچگاه صفر نیست، نتیجه می‌شود که $\mathbf{u}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ یک مجموعه اساسی جواب (با مقدار حقیقی) برای دستگاه (۱۱) تشکیل می‌دهند.

مثال ۲. مدار الکتریکی که در شکل ۷.۶ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (19)$$



شکل ۶.۷

بیان می شود که در آن I جریان در خودالقا، و V افت ولتاژین دو سرخازن است. این معادلات در مسئله ۸ بند ۱.۷ به دست آمد. فرض کنیم که در زمان $t=0$ جریان برابر ۱ آمپر و ولتاژ برابر ۲ ولت باشد. $(t)I$ و $(t)V$ را بر حسب زمان بیابید.
اگر فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \xi e^{rt} \quad (20)$$

معادلات جبری زیر به دست می آید

$$\begin{pmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

مقادیر ویژه از شرط زیر تعیین می شوند

@jozve_iut

$$\begin{vmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 3 = 0 \quad (22)$$

بدینسان $r_2 = -1 - \sqrt{2}i$ و $r_1 = -1 + \sqrt{2}i$. بردارهای ویژه متناظر از معادله (۲۱) به دست می آیند

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} \quad (23)$$

بدینسان بردارهای ویژه به صورت $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$ هستند، که در آن

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

اگر همانند مثال ۱ عمل کنیم، یا از فرمولهای (۹) استفاده شود، جوابهای با مقدار حقیقی

مستقل خطی زیر برای دستگاه (۱۹) عاید می‌شود:

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin \sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix}. \quad (25)$$

بنا بر این جواب عمومی دستگاه (۱۹) عبارت است از

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin \sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix}. \quad (26)$$

با اعمال شرایط اولیه

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

خواهیم داشت

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

بدینسان $c_1 = 1$ و $c_2 = -\sqrt{2}$. با منظور کردن این مقادیر به جای c_1 و c_2 در رابطه (۲۶) جواب مسئله مزبور معین می‌شود.

@jozve_iut

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۶، جواب عمومی دستگاه معادلات را بر حسب توابعی با مقدار حقیقی بیان کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .2 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .4 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .6 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .5$$

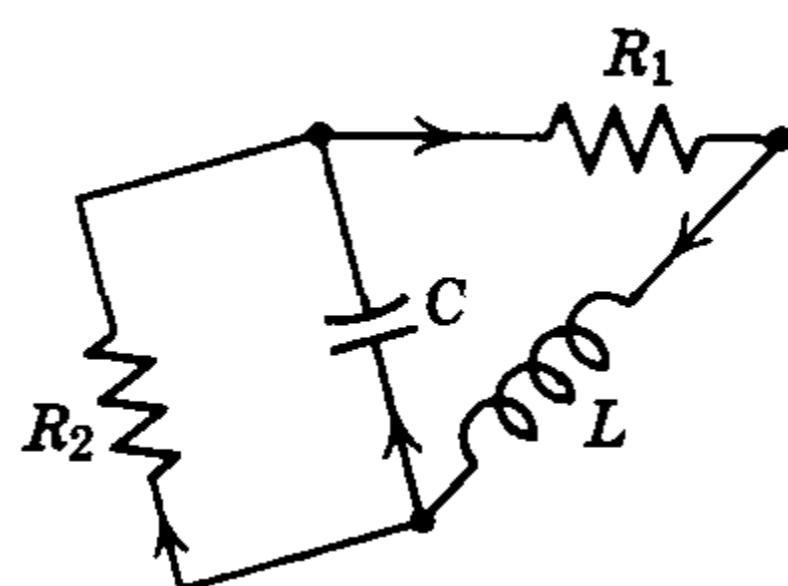
در هر یک از مسائل ۷ و ۸ جواب مسئله مقدار اولیه را بیابید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .7$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad .8$$

در هر یک از مسائل ۹ و ۱۰ دستگاه معادلات را با روشن مسئله ۱۵ بند ۶.۷ حل کنید.
فرض کنید که $t > 0$.

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .10 \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .9$$



شکل ۷.۷

۱۱. مدار الکتریکی را که در شکل ۷.۷ نشان داده شده در نظر می‌گیریم. فرض کنیم
که $A_{\text{هم}} = ۴$ ، $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$ فاراد، $C = \frac{1}{8}$ فاراد و هنری $L = ۸$

(الف) نشان دهید که این مدار با دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر بیان می‌شود

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{یک})$$

که در آن I جریان در خودالقا، و V افت ولتاژ بین دوسر خازن است.
(اهنگی: مسئله ۷ بند ۱.۷ را ببینید).

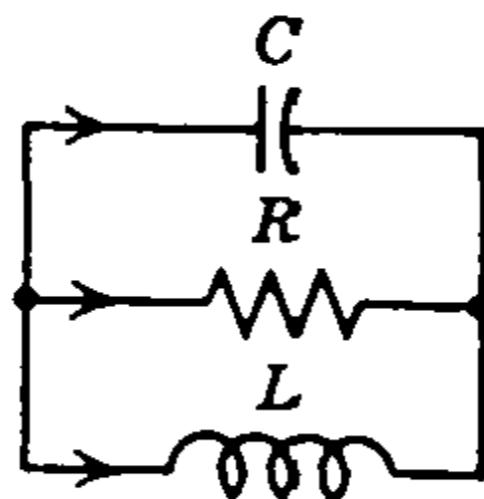
(ب) جواب عمومی معادلات (یک) را بر حسب توابعی با مقدار حقیقی بیابید.

(ج) مطلوب است تعیین $(t)I$ و $(t)V$ اگر آمپر $2 = (0)I$ و ولت $3 = (0)V$.

(د) مقادیر حدی $(t)I$ و $(t)V$ را وقتی $\rightarrow \infty$ تعیین کنید. آیا این مقادیر حدی به شرط اولیه بستگی دارند؟

۱۲. مدار الکتریکی که در شکل ۸.۷ نمایش داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{یک})$$



شکل ۸.۷

بیان می‌شود که در آن I جریان در خودالقاو ۷۶۷ ولتاژ بین دوسرخازن است. این معادلات دیفرانسیل را در مسئله ۷ بند ۱.۷ به دست آوردم.

(الف) نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس ضرایب، حقیقی و متمایزند اگر $L > 4R^2C$ و مزدوج مختلط‌اند اگر $L < 4R^2C$.

(ب) فرض کنیم که اهم $1 = R$ ، فاراد $\frac{1}{2} = C$ ، و هنری $1 = L$. جواب عمومی دستگاه (یک) را در این حالت بیاورد.

(ج) مطلوب است تعیین $(t)I$ و $(t)V$ اگر آمپر $2 = (0)I$ و ولت $1 = (0)V$.

(د) برای مدار قسمت (ب) مقادیر حدی $(t)I$ و $(t)V$ را وقتی $t \rightarrow \infty$ بیاورد. آیا این مقادیر حدی به شرایط اولیه بستگی دارند؟

۱۳. در این مسئله طرز اثبات استقلال خطی $(t)u$ و $(t)v$ را که در فرمولهای (۹)

داده شده‌اند نشان می‌دهیم.

(الف) فرض کنیم $\lambda + i\mu = r_1 + i\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ یک زوج مقدار ویژه مزدوج A ، ماتریس ضرایب معادله (۱) باشد؛ و $a + ib = a - i\bar{b}$ و $\bar{a} + i\bar{b} = \bar{a} - i\bar{b}$ بردارهای ویژه متناظر را نشان دهند. یادآور می‌شویم که در بند ۴.۷ بیان شد که اگر $r_1 \neq \bar{r}_1$ ، آنگاه a و b مستقل خطی‌اند. با محاسبه رونسکین (1) و (1) نشان دهید که a و b نیز مستقل خطی‌اند.

(ب) با محاسبه رونسکین $(t)u$ و $(t)v$ ، و با استفاده از این نکته که a و b مستقل خطی‌اند نشان دهید که $(t)u$ و $(t)v$ مستقل خطی‌اند.

۸.۷ مقادیر ویژه مکرر

بحث درباره دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

را با بررسی حالتی که در آن ماتریس \mathbf{A} دارای مقدار ویژه مکرر باشد به پایان می برمیم. این بحث نیز هنگامی که \mathbf{A} حقیقی یا مختلط باشد معتبر است. اگر $r = k$ یک ریشه مکرر مرتبه k ام معادله دترمینانی

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0 \quad (2)$$

باشد، آنگاه r را یک مقدار ویژه مرتبه k ماتریس \mathbf{A} می نامند. در اینجا دو حالت پیش می آید: یا به ازای r ، k بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد یا تعداد این بردارهای ویژه از k کمتر است. این حالتها را در مثالهای ۳ و ۴ بند ۴.۷ دیدیم، در مثال ۴ متناظر به یک مقدار ویژه مضاعف دو بردار ویژه مستقل خطی وجود داشت، اما در مثال ۳ به مقدار ویژه مضاعف تنها یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر قرار گرفت.

در حالت اول، اگر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر به مقدار ویژه r با مرتبه تکرار k را با $e^{(1)}, \dots, e^{(k)}$ نشان دهیم، آنگاه $e^{(1)}e^{(r)}, \dots, e^{(k)}e^{(r)} = e^{(k+r)}$ جواب مستقل خطی معادله (۱) خواهند بود. بدینسان در این حالت مکرر بودن مقدار ویژه $r = k$ تأثیری ندارد و همچنان یک مجموعه اساسی جواب برای معادله (۱) به صورت $e^{(k+r)}$ وجود دارد. این حالت همواره هنگامی که ماتریس ضرایب \mathbf{A} هرمیتی باشد پیش می آید.

اما، اگر ماتریس ضرایب هرمیتی نباشد، آنگاه امکان دارد تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر به r از k کمتر باشد، و در این صورت تعداد جوابهای معادله (۱) به شکل $e^{(k+r)}$ که به مقدار ویژه مزبور متناظرند از k کمتر است. بنابراین، برای ساختن جواب عمومی معادله (۱) لازم است جوابهای دیگری به شکل متفاوتی پیدا کرد. با درنظر گرفتن نتایج پیش در مورد معادلات خطی مرتبه ۲ام، طبیعی است جوابهای دیگری که شامل حاصل ضرب توابع چندجمله‌ای و نمایی باشند جستجو کنیم. نخست به ذکر مثالی می پردازیم.

مثال . مطلوب است تعیین یک مجموعه اساسی جواب دستگاه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

با فرض $e^{(k+r)} = \mathbf{x}$ از معادله (۳) به دست می آید

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(k+1)} \\ e^{(k+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

در نتیجه مقادیر ویژه \mathbf{A} عبارتند از $r_1 = r_2 = r = 2$. به ازای این مقدار r ، از معادلات (۴) نتیجه می شود که $0 = e^{(k+2)} + e^{(k+1)}$. بنابراین متناظر با مقدار ویژه مضاعف مزبور تنها یک بردار

ویژه ζ وجود دارد که با $(1 - \zeta)^T = \zeta$ معین می‌گردد. بدینسان یک جواب دستگاه (۳) عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\zeta t}, \quad (5)$$

وجواب دیگری به صورت $\mathbf{x} = \eta t e^{\zeta t}$ وجود ندارد. طبیعی است جواب دوم دستگاه (۳) را به صورت

$$\mathbf{x} = \eta t e^{\zeta t} \quad (6)$$

در نظر بگیریم، که در آن η یک بردار ثابت است. با گذاشتن \mathbf{x} در معادله (۳) داریم

$$2\eta t e^{\zeta t} + \eta e^{\zeta t} - A\eta t e^{\zeta t} = 0. \quad (7)$$

برای آنکه رابطه (۷) به ازای همه مقادیر t برقرار باشد لازم است که ضرایب $t e^{\zeta t}$ و $e^{\zeta t}$ صفر باشند. از جمله $e^{\zeta t}$ نتیجه می‌شود که

$$\eta = 0. \quad (8)$$

پنا براین دستگاه (۳) دارای جواب مخالف صفری به صورت (۶) نیست. وجود جمله‌های $t e^{\zeta t}$ و $e^{\zeta t}$ در رابطه (۷) نشان می‌دهد که جواب دوم علاوه بر $\eta t e^{\zeta t}$ باید شامل جمله‌ای به صورت $\zeta e^{\zeta t}$ باشد؛ بدعبارت دیگر لازم است که فرض کنیم

$$\mathbf{x} = \eta t e^{\zeta t} + \zeta e^{\zeta t} \quad (9)$$

که در آن η و ζ بردارهای ثابت‌اند. با قراردادن این عبارت به جای \mathbf{x} در معادله (۳) داریم

$$2\eta t e^{\zeta t} + (\eta + 2\zeta) e^{\zeta t} = A(\eta t e^{\zeta t} + \zeta e^{\zeta t}) \quad (10)$$

با برآوردادن ضرایب $t e^{\zeta t}$ و $e^{\zeta t}$ در دو طرف رابطه (۱۰) برای تعیین η و ζ شرایط زیر عاید می‌شود

$$(A - 2I)\eta = 0, \quad (11)$$

و

$$(A - 2I)\zeta = \eta. \quad (12)$$

معادله (۱۱) هنگامی برقرار است که η بردار ویژه ماتریس A متناظر به مقدار ویژه $\zeta = 2$ باشد، یعنی، $(1 - \zeta)^T = \eta^T$. چون $\det(A - 2I)$ صفر است، ممکن است گمان رود که معادله (۱۲) را نمی‌توان حل کرد. اما، این حدس لزوماً درست نیست زیرا معادله (۱۲) را می‌توان به ازای برخی از بردارهای η حل کرد. برای این منظور η باید در شرط $(\eta, y) = 0$ به ازای هر جواب y از معادله $(A^* - 2I)y = 0$ برسانی تحقق

این شرط آسان است؛ و آن را در مسئله ۱۵ مطرح کرده‌ایم. جواب معادله (۱۲) یکتا نیست زیرا می‌تواند شامل هر ضرب دلخواه η باشد. از حل معادله (۱۲) به دست می‌آید

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

که در آن k ثابتی دلخواه است. با قراردادن η و γ در معادله (۹) داریم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (14)$$

آخرین جمله در رابطه (۱۴) فقط ضربی از جواب اول $(t)\mathbf{X}^{(1)}$ است، و می‌توان از آن صرف نظر کرد، اما دو جمله اول جواب جدیدی را تشکیل می‌دهند

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (15)$$

محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که $(t)\mathbf{X}^{(2)}(t) = -e^{4t}$ و $\mathbf{W}[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}](t) = -e^{4t}$ ، و بنا بر این $(1)\mathbf{X}^{(1)}$ و $(2)\mathbf{X}^{(2)}$ برای دستگاه (۳) یک مجموعه اساسی جواب را تشکیل می‌دهند. جواب عمومی عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{X}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

ازمثال بالایک وجود تمايز بین دستگاه دو معادله مرتبه اول و یک معادله مرتبه دوم آشکار می‌گردد. چنان‌که می‌دانیم برای یک معادله خطی مرتبه دوم که معادله مشخصه آن دارای ریشه مکرر $r_1 = r_2$ باشد، در جواب دوم به جمله $ce^{r_1 t}$ نیازی نیست، زیرا ضربی از جواب اول است. از طرف دیگر، در مورد دستگاه دو معادله مرتبه اول، جمله $e^{r_1 t}$ در رابطه (۹) به ازای $r_1 = r_2$ ضربی از جواب اول $te^{r_1 t}$ نیست مگر آنکه γ با η بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه r_1 متناسب باشد و چون معمولاً چنین نیست، جمله $e^{r_1 t}$ را باید حفظ کرد.

همین روش را می‌توان در حالت کلی به کار گرفت. دستگاه (۱) را در نظر گرفته و فرض کنیم که $\rho = r$ یک مقدار ویژه مضاعف \mathbf{A} باشد، که تنها یک بردار ویژه ξ با آن متناظراست. آنگاه

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t} \quad (17)$$

با فرض آنکه ξ در

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I}) \xi = 0 \quad (18)$$

صدق کند یک جواب است [همانند رابطه (۵)]. با همان روشی که در مثال به کار رفت، جواب دوم به صورت

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \quad (19)$$

به دست می‌آید [همانند رابطه (۱۵)] که در آن ξ در معادله (۱۸) صدق می‌کند و η از

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\eta = \xi \quad (20)$$

حاصل می‌شود. به آسانی ثابت می‌شود که می‌توان معادله (۲۰) را همواره بر حسب η حل کرد، حتی اگر $\det(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I}) = 0$.

هنگامی که $\rho = r$ مقدار ویژه ماتریس \mathbf{A} دارای مرتبه تکرار بزرگتر از دو باشد، آنگاه تنوع حالتها افزایش می‌یابد. این موضوع را می‌توان با درنظر گرفتن مقدار ویژه‌ای با مرتبه تکرار سه توضیح داد. نخست فرض کنیم که مقدار ویژه سه‌گانه $\rho = r$ دارای سه بردار ویژه مستقل خطی $(1)\xi, (2)\eta, (3)\zeta$ باشد. در این حالت مجموعه جوابهای مستقل متناظر عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi^{(2)} e^{\rho t}, \mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi^{(3)} e^{\rho t}. \quad (21)$$

اکنون فرض کنیم که متناظر به مقدار ویژه سه‌گانه $\rho = r$ تنها یک بردار ویژه مستقل خطی وجود داشته باشد. آنگاه نخستین جواب با رابطه (۱۷)، دومین جواب با رابطه (۱۹)، و سومین جواب به صورت زیر تعیین می‌گردد

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi \frac{t^2}{2!} e^{\rho t} + \eta t e^{\rho t} + \zeta e^{\rho t} \quad (22)$$

که در آن ξ در معادله (۱۸) و η در معادله (۲۰) صدق می‌کند، و ζ از

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\zeta = \eta \quad (23)$$

به دست می‌آید. در اینجا نیز حل معادله (۲۳) بر حسب ζ همواره امکان دارد. آخرین حالت آنکه تنها دو بردار ویژه مستقل خطی $(1)\xi$ و $(2)\eta$ با مقدار ویژه $\rho = r$ متناظر قرار گیرد. در این صورت دو جواب دستگاه (۱) عبارتند از

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi^{(2)} e^{\rho t} \quad (24)$$

جواب سوم به صورت

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \quad (25)$$

است که در آن ξ در معادله (۱۸) صدق می‌کند و η جوابی از معادله (۲۰) است. در اینجا لازم است که ξ را به صورت یک ترکیب خطی $(1)\xi$ و $(2)\eta$ طوری انتخاب کرد که معادله

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\eta = \xi \quad (26)$$

قابل حل باشد. اگر قرار دهیم

$$\xi = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} \quad (27)$$

آنگاه باید c_1 و c_2 را طوری انتخاب کرد که به ازای هر y که در $(A^* - \rho I)y = 0$ صدق کند، داشته باشیم $0 = (\xi, y)$. به ازای این انتخاب ξ می‌توان ξ را از معادله (۲۶) به دست آورد. جوابهای $(t)^{(1)} X^{(1)}, (t)^{(2)} X^{(2)}$ و $(t)^{(3)} X^{(3)}$ که باروابط (۲۴) و (۲۵) تعیین می‌شوند در این حالت یک مجموعه جوابهای مستقل متناظر به مقدار ویژه $\rho = r$ را تشکیل می‌دهند. برای توضیح ومثال این حالت مسئله ۱۱ را بینید.

روشن است که اگر مقدار ویژه‌ای دارای مرتبه تکرار بالاتری باشد، آنگاه ممکن است وضعیت از این هم پیچیده‌تر گردد. به عنوان مثال، اگر $\rho = r$ مقدار ویژه‌ای از مرتبه تکرار چهار باشد، آنگاه باید حالت‌های مختلفی را بر حسب آنکه چهار، سه، دو، یا یک بردار ویژه مستقل خطی وجود داشته باشد در نظر گرفت. می‌توان حالت کلی مسائلی را که دارای مقادیر ویژه مکررند مورد بررسی قرارداد، اما این کار متضمن مباحث پیشرفتدای از نظریه ماتریسها است و خارج از محدوده این کتاب است. ما توجه خود را به فنون محاسباتی لازم برای تعیین مجموعه اساسی جواب در مواردی که مرتبه تکرار مقادیر ویژه از سه تجاوز نکند متوجه کنیم.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۴ جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید.

@jozve_iut

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x \quad .2 \qquad x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x \quad .1$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad .4 \qquad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad .3$$

در هر یک از مسائل ۵ و ۶ جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .5$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -20 \end{pmatrix} \quad .6$$

۷. نشان دهید $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ریشه سه‌گانه معادله مشخصه دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

است و سه جواب مستقل خطی برای آن باید.

در هر یک از مسائل ۸ و ۹ دستگاه معادلات داده شده را با روش مسئله ۱۵ بند ۶.۷ حل کنید. فرض کنیم که $t > 0$.

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \text{.9} \qquad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \text{.8}$$

۱۰. دستگاه معادلات مذکور در مثال متن را در نظر می‌گیریم،

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

این دستگاه متناظر به مقدار ویژه مضاعف $\lambda = 2$ دارای یک بردار ویژه η است که با $(1, -1)^T$ داده می‌شود.

(الف) نشان دهید که همه جوابهای $\mathbf{y} = (\mathbf{A}^* - 2\mathbf{I})\mathbf{y} = 0$ به صورت $(1, 1)$ باشند، که در آن c ثابت دلخواهی است.

(ب) نشان دهید که به ازای همه \mathbf{y} ها که در قسمت (الف) به دست آمد داریم $(\eta, \mathbf{y}) = 0$.

(ج) دستگاه $\mathbf{y} = \mathbf{y} - (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{y}$ را حل کرده، نشان دهید که \mathbf{y} باید به صورتی که در رابطه (۱۳) متن آمده است باشد.

۱۱. در این مسئله به بیان طرز عمل در حالتی که متناظر به مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم تنها دوبردار ویژه وجود داشته باشد می‌پردازیم. دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{یک})$$

(الف) نشان دهید که $\lambda = 1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس ضرایب \mathbf{A} است، و تنها دوبردار ویژه مستقل خطی وجود دارد

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{دو})$$

برای معادله (یک) دو جواب مستقل خطی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ بیا بید.

(ب) برای تعیین جواب سوم قراردهید

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \xi_1 e^t + \xi_2 e^t \quad (\text{سه})$$

ونشان دهید که ξ_1 و ξ_2 باید در معادلات زیر صدق کنند

$$(A - I)\xi_1 = 0 \quad (\text{چهار})$$

$$(A - I)\xi_2 = \xi_1 \quad (\text{پنج})$$

(ج) نشان دهید $\xi_1 + c_2 \xi_2 = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ ، که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهند، عمومی‌ترین جواب معادله (چهار) است. برای حل معادله (پنج) لازم است که c_1 و c_2 را طوری انتخاب کنیم که ξ_1 به همه جوابهای دستگاه الحاقی $(A^* - I)y = 0$ متعامد باشد. A^* را تعیین کنید و نشان دهید که جواب عمومی دستگاه الحاقی عبارت است از

$$y = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{شش})$$

که در آن α و β ثابت‌های دلخواهند.

(د) (ξ_1, y) را حساب کرده و تحقیق کنید که تنها اگر $c_1 = c_2 = 0$ این مقدار به ازای همه مقادیر α و β برابر صفر است. برای آسانی $c_1 = c_2 = 2$ انتخاب کنید. آنگاه

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{هفت})$$

(ه) برای ξ_1 مقداری را که بارابطه (هفت) داده شده است در نظر گرفته معادله (پنج) را حل کنید و نشان دهید که

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\text{هشت})$$

k_1 و k_2 ثابت‌های دلخواهند. با استفاده از روابط (هفت) و (هشت) برای معادله (یک) سومین جواب مستقل خطی $(1)^{(3)} \mathbf{X}$ را بایا بید.

۱۲. نشان دهید که همه جوابهای دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

وقتی $\infty \rightarrow t$ به‌سوی صفر می‌گرایند اگر، فقط اگر، $a+d < 0$ و $ad - bc > 0$. این نتیجه را با نتیجه مسئله ۱۵ بند ۱.۵.۳ مقایسه کنید.

۱۳. بار دیگر مدار الکتریکی مسئله ۱۲ بند ۷.۷ را در نظر می‌گیریم. این مدار با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

بیان می‌شود.

(الف) نشان دهید که مقادیر ویژه آن حقیقی و برابرند اگر $L = 4R^2C$.

(ب) فرض کنیم که اهم $R = 1$ ، فاراد $C = 1$ و هنری $L = 4$ و نیز آمپر $I(0) = 1$ و ولت $V(0) = 2$ و $I(t) \cdot V(t) = 0$ را بیا بید.

@jozve_lut

۹.۷ ماتریس‌های اساسی

نظریه دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی را می‌توان با به کار گرفتن مفهوم ماتریس اساسی گسترش بیشتری داد. در بند بعدی که به تعمیم روش تغییر پارامترها در مورد دستگاههای معادلات خطی مرتبه اول می‌پردازیم این مفهوم اهمیت ویژه‌ای خواهد داشت. فرض کنیم که $(1)^{(1)}, \dots, (1)^{(n)} \mathbf{X}$ یک مجموعه اساسی جواب معادله

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (1)$$

را روی فاصله $\alpha < t < \beta$ تشکیل دهند. آنگاه ماتریس

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

که ستونهای آن بردارهای $(1)^{(1)}, \dots, (1)^{(n)} \mathbf{X}$ می‌باشند، ماتریس اساسی دستگاه (۱) نامیده

می‌شود. توجه شود که هر ماتریس اساسی یک ماتریس عادی است، زیرا ستونهای آن بردارهای مستقل خطی‌اند.

مثال ۱. مطلوب است تعیین یک ماتریس اساسی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

در بند ۶.۷ دیده شد که

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{rt} \\ 2e^{rt} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (4)$$

جوابهای مستقل خطی معادله (۳) می‌باشند. بدین‌سان یک ماتریس اساسی دستگاه (۳) عبارت است از

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{rt} & e^{-t} \\ 2e^{rt} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (5)$$

جواب یک مسئله مقدار اولیه را می‌توان به‌طور بسیار فشرده بر حسب ماتریس اساسی نوشت. جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) \quad (6)$$

یا، بر حسب $\Psi(t)$

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \mathbf{c} \quad (7)$$

که در آن \mathbf{c} بردار ثابتی با مؤلفه‌های دلخواه c_1, \dots, c_n است. هنگامی که مسئله مقدار اولیه از معادله دیفرانسیل (۱) و شرط اولیه

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (8)$$

تشکیل شده باشد که در آن \mathbf{x} نقطه مفروضی در $\alpha < t < \beta$ و $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ بردار اولیه داده شده است، تنها لازم است که بردار \mathbf{c} موجود در رابطه (۷) را طوری تعیین کرد که شرط اولیه (۸) برقرار باشد. از این‌رو \mathbf{c} باید در

$$\Psi(t_0) \mathbf{c} = \mathbf{x}^0 \quad (9)$$

صدق کند. بنابراین، چون $\Psi(t)$ عادی است،

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0) \mathbf{x}^0 \quad (10)$$

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{x}^{\circ} \quad (11)$$

جواب مسئله مقدار اولیه مزبور است. اما باید تأکید کرد که برای حل مسئله مقدار اولیه معمولاً بهتر است معادله (۹) را به روش ساده کردن سطحی حل کرد، و \mathbf{C} را به دست آورده در معادله (۷) قرار داد، به جای اینکه $(t_0)^{-1} \Psi$ را مستقیماً محاسبه کرده واز معادله (۱۱) استفاده کنیم.

گاهی آسانتر است که از ماتریس اساسی خاصی که با $\Phi(t)$ نشان داده می‌شود استفاده کرد، ستونهای این ماتریس همان بردارهای $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ مذکور در قضیه ۶.۷ بند ۵.۷ می‌باشند. علاوه بر معادله دیفرانسیل (۱) این بردارها در شرایط اولیه

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)} \quad (12)$$

صدق می‌کنند، که در آن $\mathbf{e}^{(j)}$ بردار یکه مذکور در قضیه ۶.۷ است، مؤلفه زام آن یک و مؤلفه‌های دیگر آن صفرند. بدینسان $\Phi(t)$ دارای این ویژگی است که

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (13)$$

ما همواره نماد Φ را برای نمایش ماتریس اساسی که در شرط اولیه (۱۳) صدق کند اختصاص می‌دهیم، و هر گاه مقصود یک ماتریس اساسی دلخواه باشد از نماد Ψ استفاده می‌کنیم. جواب مسئله مقدار اولیه (۱) و (۸) بر حسب $\Phi(t)$ حتی دارای ظاهری ساده‌تر است؛ چون $\mathbf{I} = (t_0)^{-1} \Phi$ ، از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{x} = \Phi(t) \mathbf{x}^{\circ} \quad (14)$$

گرچه ماتریس اساسی $\Phi(t)$ غالباً از $\Psi(t)$ پیچیده‌تر است، اما هنگامی که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را باید مکرراً با چندین شرایط اولیه متفاوت حل کرد بسیار سودمند است. این وضعیت متناظر به یک دستگاه فیزیکی است که می‌تواند در چندین حالت اولیه متفاوت آغاز به کار کند. اگر ماتریس اساسی $\Phi(t)$ تعیین شده باشد، آنگاه جواب متناظر به هر مجموعه شرایط اولیه را می‌توان تنها با ضرب ماتریسی چنانکه در رابطه (۱۴) مشخص شده است به دست آورد. بدینسان ماتریس $\Phi(t)$ نمایشگر تبدیل شرایط اولیه \mathbf{x}° به جواب $\Phi(t) \mathbf{x}^{\circ}$ در زمان دلخواه است. از مقایسه روابط (۱۱) و (۱۴) دیده می‌شود که

$$\Phi(t) \Psi(t) = \Psi(t_0) \Phi(t_0). \quad (15)$$

مثال ۰۲. برای دستگاه (۳)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

که درمثال ۱ مورد بحث قرار گرفت، ماتریس اساسی Φ را طوری تعیین کنید که $I = \Phi(0)$ ستونهای Φ عبارتند از جوابهای معادله (۳) که در شرایط اولیه زیر صدق کنند

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

چون جواب عمومی معادله (۳) عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{rt} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-rt}$$

می‌توان با انتخاب $c_1 = c_2 = 1/2$ ، جوابی را به دست آورد که در نخستین شرط اولیه صدق کند؛ به همین ترتیب جوابی که در شرط اولیه دوم صدق کند با انتخاب $c_1 = \frac{1}{4}$ و

$c_2 = -\frac{1}{4}$ تعیین می‌شود. بنابراین

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{rt} + \frac{1}{2}e^{-rt} & \frac{1}{4}e^{rt} - \frac{1}{4}e^{-rt} \\ e^{rt} - e^{-rt} & \frac{1}{2}e^{rt} + \frac{1}{2}e^{-rt} \end{pmatrix} \quad (16)$$

توجه شود که عنصرهای $\Phi(t)$ از عناصرهای ماتریس اساسی (t) که با رابطه (۵) داده شده است پیچیده‌ترند؛ اما، اکنون به آسانی می‌توان جواب متناظر به هر دسته شرایط اولیه را تعیین کرد.

اکنون بار دیگر دستگاه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} \quad (17)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن \mathbf{A} یک ماتریس ثابت است که می‌تواند حقیقی نباشد. قبل از دو روش حل این گونه دستگاهها را بیان کردیم: در بند ۲.۷ روش حذفی، و در بند ۲.۶ با فرض آنکه $e^t = \mathbf{x}$. در اینجا می‌خواهیم علاوه بر آنها نظر دیگری را مطرح کنیم. علت اساسی دشواری دستگاه معادلات آن است که معادلات معمولاً بهم هر تبطیخ اند؛ به عبارت دیگر، برخی از معادلات یا همه آنها شامل بیش از یک تابع، شاید هم شامل همه توابع باشند. این حالت هنگامی اتفاق می‌افتد که ماتریس ضرایب \mathbf{A} قطری نباشد. بنابراین معادلات دستگاه را به جای آنکه متوالیاً حل کنیم باید توأماً حل کرد. از اینجا نتیجه می‌شود که یک راه حل دستگاه معادلات آن است که آن را به یک دستگاه هم ارز نامرتبط تبدیل کنیم که در آن هر معادله فقط شامل یک تابع باشد. این عمل متناظر با آن است که ماتریس ضرایب \mathbf{A} را به یک ماتریس قطری تبدیل کنیم.

براساس نتایج مذکور در بند ۲.۷، هرگاه \mathbf{A} دارای یک دستهٔ کامل n بردار ویژه

مستقل خطی باشد می‌توان این تبدیل را انجام داد. اگر $(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$ بردارهای ویژه متناظر به مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ماتریس \mathbf{A} باشند و \mathbf{T} ماتریس تبدیلی باشد که ستونهای آن $(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$ باشند، آنگاه

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & \mathbf{x}^{(1)} & \mathbf{x}^{(2)} & \dots & \mathbf{x}^{(n)} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (18)$$

چون تابع جدید \mathbf{y} را با رابطه

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} \quad (19)$$

تعریف کنیم، از معادله (۱۷) داریم

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (20)$$

یا

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}. \quad (21)$$

بنابر رابطه (۲۰) بند ۴۰.۷

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

یک ماتریس قطری است که عناصرهای قطری آن همان مقادیر ویژه \mathbf{A} می‌باشند. بدینسان \mathbf{y}' در دستگاه معادلات نامرتبه زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} \quad (23)$$

که ماتریس اساسی آن عبارت است از ماتریس قطری

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

ماتریس اساسی \mathbf{Q} مربوط به دستگاه (۱۷) را می‌توان با تبدیل (۱۹) از \mathbf{Q} به دست آورد،

$$\Psi = \mathbf{T}\mathbf{Q} \quad (25)$$

یعنی،

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(1)} e^{r_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{(n)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix} \quad (26)$$

معادله (۲۶) همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آمد. این روش قطری کردن هیچ امتیاز محاسباتی بر روش مذکور در بند ۷.۶ ندارد، زیرا در هر دو حالت لازم است که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل را به دست آورد. با وجود این شایان توجه است که مسئله حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با مسئله قطری کردن ماتریس، از نظر ریاضی یکی است.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۵ ماتریس اساسی دستگاه معادلات داده شده را بیابید. در هر مورد ماتریس اساسی $\Phi(t)$ را نیز که در $\mathbf{I} = \Phi(t)\Phi^{-1}$ صدق می‌کند به دست آورید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .2 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .4 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .6 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .5$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .8 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .7$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .10 \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad .9$$

۱۱. با استفاده از تعریف $\Phi(t)$ و $\Phi'(t)$ که در این بند آمد، نشان دهید که

$$\Phi'(t) = \Phi(t)A$$

۱۲. روش تقریبات متواالی (بند ۱۱.۲ را بینید) را می‌توان در مورد دستگاه معادلات نیز به کار برد. در این مسئله به طور صوری طرز استفاده از آن را در مورد دستگاههای

خطی با ضرایب ثابت نشان می‌دهیم. مسئله مقدار اولیۀ

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\eta} \quad (\text{یک})$$

را که در آن \mathbf{A} یک ماتریس ثابت، و $\boldsymbol{\eta}$ بردار مفروضی است در نظر می‌گیریم.

(الف) فرض کنیم که برای معادله (یک) یک جواب $\Phi(t)$ وجود دارد، نشان دهید که $\Phi(t)$ باید در معادله انتگرالی زیر صدق کند

$$\Phi(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_0^t \mathbf{A}\Phi(s) ds \quad (\text{دو})$$

(ب) با تقریب اولیۀ $\Phi(0) = \boldsymbol{\eta}$ آغاز کرده آن را به جای (s) در طرف دوم معادله (دو) قرار دهید و تقریب جدید $\Phi(1)$ را به دست آورید. نشان دهید که

$$\Phi(1) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\boldsymbol{\eta} \quad (\text{سه})$$

(ج) این روش را تکرار کرده عبارت (سه) را به جای (s) در طرف دوم معادله

(دو) بگذارید تا تقریب جدید $\Phi(2)$ به دست آید. نشان دهید که

$$\Phi(2) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} \right) \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{چهار})$$

(د) با ادامۀ این روش دنباله تقریبات $\Phi(0), \Phi(1), \Phi(2), \dots, \Phi(n), \dots$ را به دست آورید. با استفاده نشان دهید که

$$\Phi(n) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} \right) \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{پنج})$$

(ه) مجموعی که در رابطه (پنج) وجود دارد، یک جمع ماتریسی است. می‌توان نشان داد که هر مؤلفه این مجموع هنگامی که $n \rightarrow \infty$ همگرایست، و بنابراین می‌توان ماتریس $\mathbf{M}(t)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$\mathbf{M}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} \right) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}. \quad (\text{شش})$$

با فرض آنکه مشتق گیری جمله به جمله جایز باشد، نشان دهید که $\mathbf{M}(t)$ در

$\mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$ ، $\mathbf{M}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ صدق می‌کند. بدینسان نشان دهید که $\mathbf{M}(t) = \Phi(t)$

(و) سری (شش) شبیه به سری نمایی است. بدینسان طبیعی است که نماد $e^{\mathbf{At}}$ را برای این مجموع پذیریم:

$$e^{\mathbf{At}} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad (\text{هفت})$$

نشان دهید که جواب مسئله مقدار اولیه (یک) را می‌توان به صورت $\mathbf{X} = e^{At}\Phi(\mathbf{I})$ نوشت.

* ۱۳. فرض کنیم $(\mathbf{I} - \Phi)$ نمایشگر یک ماتریس اساسی است که در $\Phi' = A\Phi - I$ صدق می‌کند. همان‌طور که در مسئله ۱۲ دیده شد می‌توان آن را با e^{At} نمایش داد. در این مسئله نشان می‌دهیم که Φ واقعاً دارای خواص جبری اصلی تابع نمایی است.

(الف) نشان دهید که $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$; یعنی $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$.

(اهمایی): نشان دهید که اگر s ثابت و t متغیر باشد، آنگاه $\Phi(t+s)\Phi(s)$ و $\Phi(t+s)\Phi(t)$ هردو در مسئله مقدار اولیه $\mathbf{Z}(0) = \Phi(s)$ ، $\mathbf{Z}'(0) = A\mathbf{Z}(0)$ صدق می‌کنند.

(ب) نشان دهید که $\Phi(-t) = \Phi(t)^{-1}$ ، یا $e^{At}e^{A(-t)} = I$ و از این‌رو $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.

(ج) نشان دهید که $\Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

۱۰.۷ دستگاههای خطی ناهمگن

در این بند به اختصار روش‌های حل دستگاههای خطی ناهمگن را مورد بحث قرار می‌دهیم. بحث را با دستگاههایی به صورت

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (1)$$

آغاز می‌کنیم که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ قطری شدنی است و $\mathbf{g}(t)$ به ازای $\alpha < t < \beta$ پیوسته است. در اینجا به روش مذکور در پایان بند ۹.۷ عمل می‌کنیم. ماتریسی را که ستونهای آن $(1), (2), \dots, (n)$ بردارهای ویژه ماتریس A باشد با T نمایش داده و تابع جدید \mathbf{y} را با

$$\mathbf{x} = T\mathbf{y} \quad \dots \quad (2)$$

تعریف می‌کنیم.

آنگاه با جایگزینی \mathbf{x} در معادله (۱) داریم

$$T\mathbf{y}' = A(T\mathbf{y}) + \mathbf{g}(t)$$

از ضرب در T^{-1} نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= (T^{-1}AT)\mathbf{y} + T^{-1}\mathbf{g}(t) \\ &= D\mathbf{y} + h(t) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $(T^{-1}\mathbf{g}(t))_i = T^{-1}\mathbf{g}(t)_i$ و D ماتریسی است قطری که عناصرهای قطری آن r_1, \dots, r_n مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند که به همان ترتیب بردارهای ویژه متناظر $(1), (2), \dots, (n)$ درستونهای T قرار گرفته‌اند. معادله (۳) یک دستگاه مشکل از n معادله نامربوط بر حسب $(1), (2), \dots, (n)$ می‌باشد؛ در نتیجه می‌توان هر معادله را جداگانه حل کرد. صورت اسکالری معادله (۳) عبارت است از

@jozve_iut

$$y'_j(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

که در آن $h_j(t)$ یک ترکیب خطی از $(t), g_1(t), \dots, g_n(t)$ است. معادله (۴) یک معادله خطی مرتبه اول است و می‌توان آن را با روش بند ۱.۲ حل کرد. در واقع، داریم

$$y_j(t) = e^{r_j t} \int_{t_0}^t e^{-r_j s} h_j(s) ds + c_j e^{r_j t}, \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

که در آن c_j ثابت دلخواهی است. بالاخره، \mathbf{x} جواب معادله (۱) از رابطه (۲) عاید می‌شود.

مثال. جواب عمومی دستگاه

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (6)$$

را دروی فاصله $0 < t$ بیاید.

چون همانند بند ۶.۷ عمل کنیم دیده می‌شود که مقادیر ویژه ماتریس ضریب برابرند با $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -5$ ، و بردارهای ویژه متاظر عبارتند از

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

پیش از آنکه به تشکیل \mathbf{T} ماتریس بردارهای ویژه پردازیم، یادآوری می‌کنیم که سرانجام باید \mathbf{T}^{-1} را نیز به دست آورد. ماتریس \mathbf{T} حقيقی و متفاوت است، بنابراین می‌توان از نتیجه مذکور در پایان بند ۶.۷ استفاده کرد: اگر بردارهای ویژه \mathbf{A} یکانی باشند، یعنی $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ آنگاه \mathbf{T}^{-1} با \mathbf{T}^* ماتریس وابسته آن و چون \mathbf{T} حقيقی است با \mathbf{T}^* یعنی با ترانهاده آن برابر است. بدینسان، با یکانی کردن (۷) و (۲) داریم

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

چون قرار دهیم $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ و آن را در معادله (۶) بگذاریم، دستگاه معادلات زیر برای تابع جدید \mathbf{y} به دست می‌آید:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5t^{-1} + 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

بدینسان

$$y'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{t} + 8 \right), \quad y'_2 = -5y_2 + \frac{4}{\sqrt{5}} \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 \ln t + 8t + c_1 \\ \frac{4}{5} + c_2 e^{-5t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

بالاخره

$$x = Ty = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{c}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \hat{c}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} \quad (12)$$

دو جمله آخر در جواب (12) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر را تشکیل می‌دهند. سه جمله نخست جواب خصوصی دستگاه ناهمگن مزبور است. بدینسان جوابی که در اینجا به دست آمد دارای همان ساختمان بنیادی است که در فصول ۳ و ۵ برای معادلات اسکالری خطی به دست آمد.

اکنون به مسائل کلیتری که در آنها ماتریس ضرایب ثابت نیست و یا قطری پذیر نمی‌باشد، برمی‌گردیم. فرض کنیم

$$x' = P(t)x + g(t) \quad (13)$$

که در آن $P(t)$ و $g(t)$ روی $t < \alpha < \beta$ پیوسته‌اند. فرض کنیم ماتریس اساسی $\Psi(t)$ مربوط به دستگاه همگن متناظر

$$\Psi(t)x' = P(t)x \quad (14)$$

را یافته‌ایم. با استفاده از روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی، و درنتیجه جواب عمومی دستگاه ناهمگن (13) را به دست می‌آوریم.

چون جواب عمومی دستگاه همگن (14) به صورت $C\Psi(t)$ است، طبعاً می‌توان همانند بند ۲.۶.۳ عمل کسرد، و با گذاردن تابع برداری $u(t)$ به جای بردار ثابت C به جستجوی جوابی برای دستگاه ناهمگن (13) پرداخت. بدینسان، قرار می‌دهیم

$$x = \Psi(t)u(t) \quad (15)$$

که در آن $u(t)$ برداری است که باید تعیین شود. با مشتق‌گیری از x که با رابطه (15) داده شده است و توجه به معادله (13) داریم

$$\Psi'(t)u(t) + \Psi(t)u'(t) = P(t)\Psi(t)u(t) + g(t) \quad (16)$$

چون $\Psi(t)$ ماتریس اساسی است، $\Psi'(t)u(t) = P(t)\Psi(t)u(t)$ ، و بنابراین معادله (16) به صورت ساده زیر درمی‌آید

$$\Psi(t)u'(t) = g(t) \quad (17)$$

چون $(t)\Psi$ روی هر فاصله‌ای که \mathbf{P} پیوسته باشد عادی است بنا بر این $(t)^{-1}\Psi$ وجوددارد، و از آنجا

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \quad (18)$$

بدینسان هر بردار از ردۀ بردارهایی را که در معادله (18) صدق می‌کنند می‌توان به عنوان بردار $(t)\mathbf{u}$ انتخاب کرد؛ این بردارها با تقریب یک (بردار) ثابت دلخواه جمعی معین می‌شوند؛ از این‌رو $(t)\mathbf{u}$ را با

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds + \mathbf{c}, \quad (19)$$

نشان می‌دهیم که در آن بردار ثابت \mathbf{c} دلخواه است. بالاخره، با گذاشتن $(t)\mathbf{u}$ در رابطه (15) ، \mathbf{x} جواب دستگاه (13) به دست می‌آید:

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_0^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (20)$$

چون \mathbf{c} دلخواه است، هر شرط اولیه در نقطه $t=0$ را می‌توان با انتخاب مناسب \mathbf{c} برقرار کرد. بدینسان، عبارتی که با رابطه (20) داده شده است شامل هرجواب دستگاه (13) می‌باشد و بنا بر این جواب عمومی معادله (13) است. توجه شود که جمله اول طرف دوم رابطه (20) جواب عمومی دستگاه همگن متناظر (14) است، و جمله دوم یک جواب خصوصی خود معادله (13) می‌باشد.

اکنون مسئله مقدار اولیه مشتمل بر معادله (13) و شرط اولیه

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (21)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر به عنوان جواب خصوصی در رابطه (20) جوابی را انتخاب کنیم که به ازای $t=t_0$ برابر صفر باشد، جواب این مسئله را به ساده‌ترین وجه می‌توان نوشت. برای این منظور حد پایین انتگرال موجود در رابطه (20) را برابر t_0 می‌گیریم، بدینسان جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (22)$$

شرط اولیه (21) نیز با انتخاب

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \quad (23)$$

برقرار می‌گردد. بنا بر این

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (24)$$

جواب مسئله مقدار اولیه است. بار دیگر، متذکر می‌شویم که گرچه استفاده از Ψ^{-1} برای

نوشتن جوابهای (۲۰) و (۲۴) مفید است، اما معمولاً در حالتها خاص بهتر است که معادلات لازم را با روش ساده کردن سطحی حل کنیم به جای اینکه $\Phi^{-1}\Phi(t)$ را محاسبه کرده و در رابطه‌های (۲۰) و (۲۴) جایگزین کنیم.

جواب (۲۴) را می‌توان با استفاده از ماتریس اساسی $(t)\Phi$ که در شرط $\Phi(t_0)=\mathbf{I}$ صدق می‌کند به صورت ساده‌تری درآورد. در این حالت داریم

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (25)$$

هنگامی که ماتریس ضرایب $(t)\Phi$ ماتریسی ثابت باشد رابطه (۲۵) را می‌توان بازهم ساده‌تر کرد (مسئله ۱۳ را بینید).

در برخی از حالتها برای تعیین جواب خصوصی دستگاه ناهمگن (۱۳) آسانتر است که از روش ضرایب نامعین استفاده کنیم. در این روش، جواب را به صورت مناسبی که در آن همه یا برخی از ضرایب نامشخصند در نظر گرفته و سپس ضرایب را به گونه‌ای تعیین می‌کنند که در معادله دیفرانسیل صدق کند. عملاً، این روش تنها هنگامی قابل استفاده است که ماتریس ضرایب Φ ماتریسی ثابت و مؤلفه‌های \mathbf{g} توابع چندجمله‌ای، نمایی، یا سینوسی، یا مجموع حاصل ضربهای این توابع باشند. تنها در این حالتها می‌توان صورت صحیح جواب را به آسانی وطبق قواعدی پیش‌بینی کرد. روش انتخاب صورت جواب ذاتاً همان است که در بند ۱.۶.۳ در مورد معادلات خطی مرتبه دوم بیان شد. تفاوت اساسی آنها را می‌توان در حالتی که جمله ناهمگن به صورت $te^{\lambda t}$ است و λ یک ریشه ساده معادله مشخصه باشد مشاهده کرد. در این شرایط، به جای آنکه جواب را به صورت $a_1 te^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t}$ فرض کنیم لازم است عبارت $a_1 te^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t}$ را در نظر بگیریم و دوگذاردن ذر معادله دیفرانسیل، a_1 و a_0 را تعیین کنیم.

مسائل

در هر یک از مسائل ۱ تا ۷ دستگاه داده شده را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad .1$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix} \quad .2$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad .3$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix} \quad .4$$

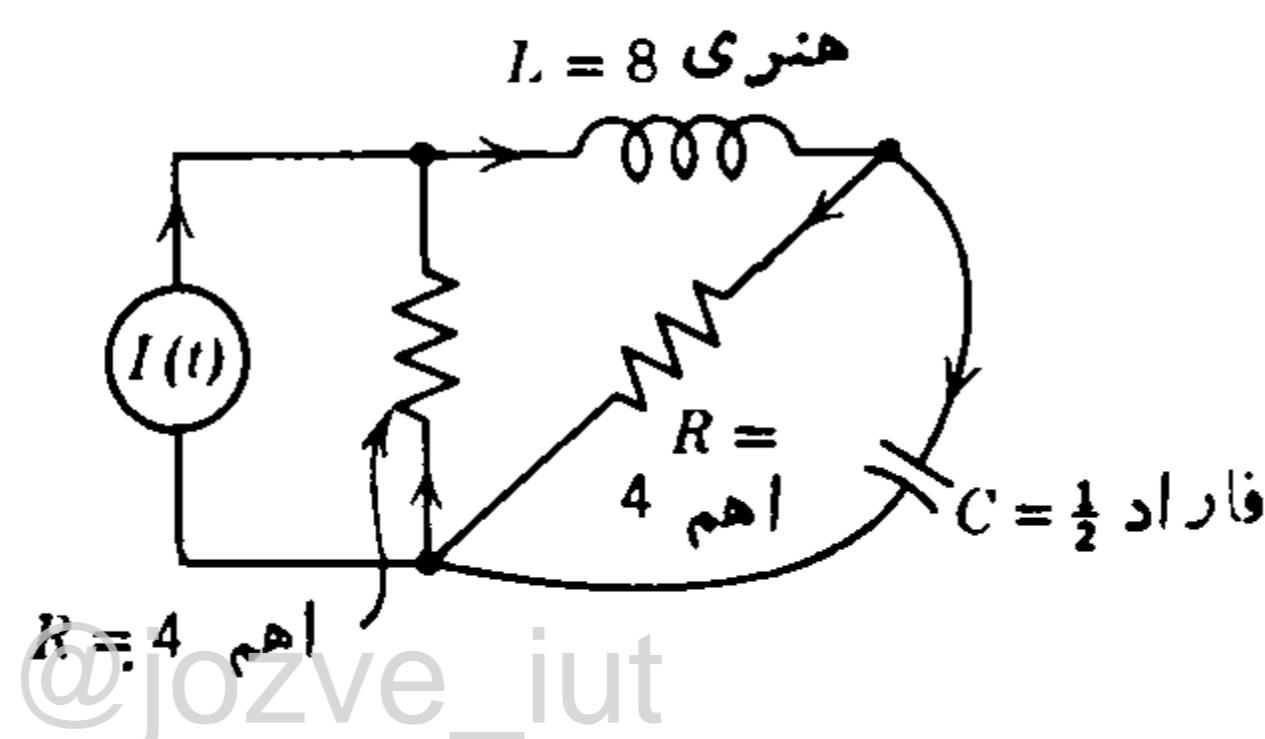
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-2} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad .5$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi \quad .6$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi \quad .7$$

۸. مدار الکتریکی که در شکل ۹.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t) \quad (\text{یک})$$



شکل ۹.۷

بیان شده است که در آن x_1 جریان در سیم پیچ، و x_2 افت ولتاژ بین دوسر خازن، و $I(t)$ جریان واردہ از منبع خارجی است.

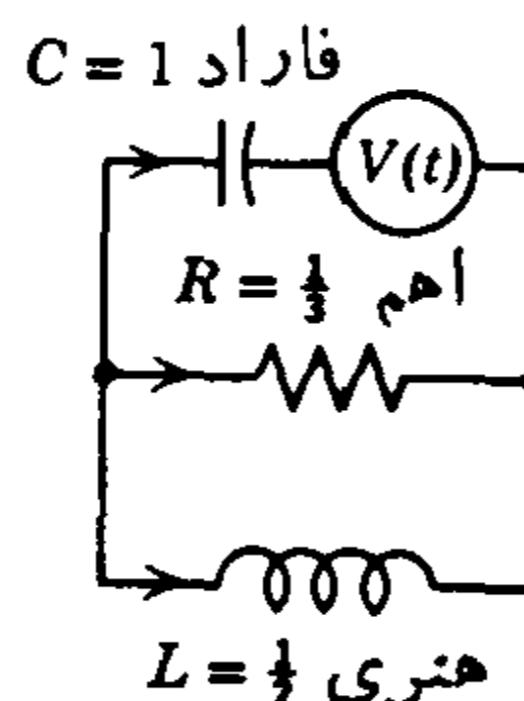
(الف) ماتریس اساسی (۱) را برای دستگاه همگن متناظر به معادلات (یک) بیا بید. به مسئله ۱۱ بند ۷.۷ رجوع شود.

(ب) اگر $I(t) = e^{-t/2}$ ، جواب دستگاه (یک) را که در شرط اولیه $\mathbf{x}(0) = 0$ نیز صدق کند بیا بید.

۹. مدار الکتریکی که در شکل ۱۰.۷ نشان داده شده است با دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} V(t) \quad (\text{یک})$$

که در آن x_1 جریان در خودالقا، و x_2 افت ولتاژ بین دوسر خازن، و $V(t)$ ولتاژ واردہ



شکل ۱۰.۷

از منبع خارجی است.

(الف) ماتریس اساسی $(\mathbf{A})^{\text{پ}}$ را برای دستگاه همگن متناظر به معادلات (یک) بیا بید.

(ب) با فرض

$$V(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

جواب دستگاه (یک) را که در شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ صدق می کند بیا بید.

در هر یک از مسائل ۱۰ و ۱۱ تحقیق کنید که بردار داده شده جواب عمومی دستگاه همگن متناظر است، و سپس دستگاه ناهمگن را حل کنید. $t > 1$ فرض شود.

$$\mathbf{t}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1} \quad .10$$

$$\mathbf{t}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \quad .11$$

۱۲. نشان دهید که جواب عمومی دستگاه $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ را می توان به صورت $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(p)}(t) + \mathbf{x}^{(c)}(t)$ بیان کرد، که در آن $\mathbf{x}^{(c)}$ جواب عمومی دستگاه همگن متناظر، و $\mathbf{x}^{(p)}$ یک جواب دستگاه ناهمگن داده شده است.

۱۳. مسئله مقدار اولیه

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

را در نظر می گیریم.

(الف) با مراجعه به مسئله ۱۳ (ج) بند ۹.۷ نشان دهید که

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{g}(s) ds.$$

(ب) همچنین نشان دهید که

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{g}(s) ds$$

۱۴. با استفاده از روش ضرایب نامعین جواب عمومی هریک از دستگاههای زیر را بیابید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad (\text{ب})$$

مراجع

کتب ذیل نمونهای است از کتابهای بسیار زیادی که اخیراً درباره ماتریسها و جبر خطی انتشار یافته است:

Campbell, H. G., *Linear Algebra with Applications*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1971.

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra*, Macmillan, New York, 1970.

Noble, B., *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

Schneider, H. and Barker, G. P., *Matrices and Linear Algebra*, Holt, New York, 1968.

Stewart, F. M., *Introduction to Linear Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1963.

Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1976.

Williams, G., *Computational Linear Algebra with Models*, Allyn and Bacon, Boston, 1975.

در موضوع شبکه‌های الکتریکی کتب زیادی وجود دارد، کتاب ذیر نمونهای از آنها است:

Bose, A. G. and Stevens, K. N., *Introductory Network Theory*, Harper and Row, New York, 1965.