معادلات مرتبه دوم خطی ناهمگن:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad (1)$$

در بخش قبل با حل معادله همگن آشنا شدیم. یادآوری می کنیم که اگر Y_1 و Y_2 دو جواب معادله ناهمگن (1) باشند آن گاه Y_2-Y_1 یک جواب معادله همگن متناظر است. پس اگر فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله همگن متناظر هستند لذا $c_1, c_2 \in R$ چنان وجود خواهند داشت که:

$$Y_2-Y_1=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow Y_2=c_1y_1+c_2y_2+Y_1$$

در واقع Y_2 می تواند هر جواب دلخواه معادله ناهمگن (1) باشد اگر c_1 و c_2 ثابت هایی دلخواه باشند. لذا به سادگی می توان قضیه زیر را اثبات کرد:

قضیه: جواب عمومی معادله ناهمگن (1) را می توان به فرم زیر نوشت:

$$y=y_h+Y_p=c_1y_1+c_2y_2+Y_p$$

که در آن Y_p یک جواب خصوصی معادله ناهمگن (1) است و $y_h=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی معادله همگن متناظر با (1) است.

قضیه بالا به روشنی بیان می کند که برای حل یک معادله ناهمگن ابتدا باید جواب عمومی معادله همگن متناظر آن را یافت. سپس تنها یک جواب خصوصی از خود معادله ناهمگن را به آن اضافه کرد.

حل معادله همگن در قسمت قبل توضیح داده شد. اکنون دو روش زیر را برای پیدا کردن یک جواب خصوصی معادله ناهمگن (1) معرفی می کنیم:

1) روش تغییر پارامتر

2) روش ضرایب نامعین

۱) روش تغییر پارامتر:

ابتدا فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله همگن متناظر باشند. پس جواب عمومی آن به صورت $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ است.

ایده اصلی روش تغییر پارامتر مبتنی بر تعویض ثابت های c_1 و c_2 با توابع $\mu_1(x)$ و $\mu_2(x)$ است. یعنی در واقع می خواهیم توابع μ_1 و μ_2 را چنان بیابیم که

$$y_p = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \qquad (4)$$

یک جواب خصوصی معادله ناهمگن باشد. ابتدا مشتق y_p را می نویسیم

$$y_p' = \mu_1' y_1 + \mu_1 y_1' + \mu_2' y_2 + \mu_2 y_2'$$

برای سادگی بیشتر بهتر است شرط زیر را اعمال کنیم:

(مجموع جملات شامل مشتق μ_1 و μ_2 را صفر قرار دهید)

$$\mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 = 0 \qquad (5)$$

پس در این صورت داریم:

$$y_p' = \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' \qquad (6)$$

سپس مشتق گیری را مجدد انجام می دهیم:

$$y_p'' = \mu_1' y_1' + \mu_1 y_1'' + \mu_2' y_2' + \mu_2 y_2'' \qquad (7)$$

اکنون روابط (4)، (6) و (7) را در معادله ناهمگن (1) قرار دهید، خواهیم داشت:

$$\mu_1 \left[y_1'' + p y_1' + q y_1 \right] + \mu_2 \left[y_2'' + p y_2' + q y_2 \right] + \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' = g(t)$$

حال با توجه به اینکه توابع y_1 و y_2 جواب معادله همگن متناظر (2) هستند پس عبارت های داخل کروشه هر دو صفر هستند. یعنی داریم:

$$\mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' = g(t) \qquad (8)$$

شرط (5) و معادله (8) تشکیل یک دستگاه می دهند:

$$\begin{cases} \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 = 0 \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' = g \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

دستگاه اخیر را می توان با استفاده از روش کرامر حل کرد. دقت کنید که دترمینان ماتریس ضرایب همان رونسکین جواب های مستقل خطی معادله همگن است. پس:

$$\mu_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{و} \quad \mu_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)}$$

اکنون با انتگرال گیری از این روابط داریم:

$$\mu_1(x) = \int \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx \quad \text{و} \quad \mu_2(x) = -\int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx \qquad (\text{و})$$

و در نهایت $y_p = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ به دست می آید.

مثال) اگر تابع $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ یک جواب معادله ی $xy'' + 2y' + xy = 0$ باشد، جواب عمومی معادله زیر را بنویسید:

$$xy'' + 2y' + xy = 1$$

جواب) در این مثال ما باید ابتدا جواب عمومی معادله همگن را بیابیم. برای اینکار ابتدا روش کاهش مرتبه را به کار می گیریم تا جواب y_2 از معادله همگن را بیابیم. فراموش نکنید که هر دو معادله را به صورت استاندارد بنویسید:

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$$

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}\, dx = \int \frac{x^2}{\cos^2 x} e^{-\int +\frac{2}{x} dx}\, dx = \int \frac{x^2}{\cos^2 x} e^{-2\ln x}\, dx$$

$$= \int \frac{x^2 . x^{-2}}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x$$

$$\Rightarrow y_2 = V y_1 = \tan x . \frac{\cos x}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

اکنون با در دست داشتن y_1 و y_2 می توانیم جواب خصوصی معادله ناهمگن را با استفاده از فرمول های (۹) بیابیم. فرم استاندارد معادله ناهمگن:

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{1}{x}$$

$$u_1=\int\frac{-y_2 g}{W}dx=\int\frac{-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}dx=\int-\sin x\,dx=\cos x$$

$$u_2=\int\frac{+y_1 g}{W}dx=\int\frac{\frac{\cos x}{x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}dx=\int\cos x\,dx=\sin x$$

محاسبه رونسکین:

$$\boxed{W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x}\\ \frac{-x\sin x-\cos x}{x^2} & \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\end{vmatrix}=\frac{\cos^2 x}{x^2}-\frac{\cos x\sin x}{x^3}+\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin x\cos x}{x^3}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{x^2}}$$

لذا جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p=\cos x\left(\frac{\cos x}{x}\right)+\sin x\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

پس جواب عمومی معادله به فرم زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_1\frac{\cos x}{x}+c_2\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x}$$

۲) روش ضرایب نامعین:

این روش مخصوص معادلات ناهمگن با ضریب ثابت است.

در این روش ابتدا باید فرم جواب خصوصی معادله ناهمگن را حدس زد و ضرایب آن را نامشخص در نظر گرفت سپس با مشتق گیری و جایگذاری در معادله ضرایب را به نحوی یافت که در معادله صدق کند. اگر نتوان ضرایب را بدست آورد یعنی حدس ما اشتباه بوده و باید اصلاح شود.

در عمل حدس فرم جواب ناهمگن تنها برای معادلاتی قابل انجام است که قسمت ناهمگنی آن‌ها چند جمله‌ای، تابع نمایی، سینوس‌ها و یا کسینوس‌ها و یا ترکیبی از این‌ها باشد.

به تجربه حاصل می‌شود که هرگاه در معادله ناهمگن $g(x)$ یک تابع نمایی باشد، حدس مناسب برای y_p نیز تابع نمایی است و اگر g چند جمله‌ای باشد بهتر است y_p را چند جمله‌ای با همان درجه در نظر گرفت و اگر g تابع $\sin\beta x$ یا $\cos\beta x$ بود، y_p را ترکیبی از این دو تابع در نظر بگیریم مناسب است. به علاوه اگر g حاصلضرب این موارد باشد، y_p نیز به همان شکل خواهد بود. قضیه زیر راهنمای مناسبی برای حدس مناسب است که کلیه حالت‌های گفته شده را پوشش می‌دهد:

قضیه: در معادله ضریب ثابت و ناهمگن $ay''+by'+cy=g(x)$ اگر قسمت ناهمگنی به شکل زیر باشد:

$$g(x)=e^{ax}\left(M(x)\sin(qx)+N(x)\cos(qx)\right)$$

که در آن M و N دو چند جمله‌ای هستند و $a,q\in\mathbb{R}$، آن‌گاه معادله یک جواب خصوصی به فرم زیر دارد:

$$y_p(x)=x^m e^{ax}\left(R(x)\sin(qx)+S(x)\cos(qx)\right)$$

که در آن R و S دو چند جمله از درجه حداکثر درجات M و N هستند که ضرایبشان مجهول است و m (توان x) تعداد ریشه‌های برابر با $a+iq$ در معادله مشخصه معادله همگن متناظر است.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بنویسید

$$y''-3y'-4y=4x^2$$

در ابتدا معادله همگن متناظر را حل می کنیم:

$$y''-3y'-4y=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow \underline{\lambda=4}, \underline{\lambda=-1}$$

$$\Rightarrow y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}$$

اکنون برای یافتن جواب خصوصی معادله ناهمگن قرار دهید $g(x)=4x^2$. با مقایسه با صورت قضیه گفته شده داریم:

$a=0$, $q=0$ $\quad M(x)\equiv 0 \quad N(x)\equiv 4x^2$ و $a+iq=0 \Rightarrow m=0$

پس طبق قضیه فرم جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(x)=x^0e^{0x}\left(R(x)\sin(0)+S(x)\cos(0)\right)=S(x)$$

که $S(x)$ هم باید یک چندجمله ای درجه دوم باشد (طبق قضیه). پس

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

اکنون برای محاسبه ضرایب کافیست دوبار از y_p مشتق بگیرید و در معادله اصلی قرار دهید.

$$(2A)-3(2Ax+B)-4(Ax^2+Bx+C)=4x^2$$

$$(-4A)x^2+(-6A-4B)x+(2A-3B-4C)=4x^2$$

از تساوی ضرایب در دو طرف معادله داریم:

$$\begin{cases}-4A=4 \Rightarrow \boxed{A=-1}\\ -6A-4B=0 \Rightarrow 6-4B=0 \Rightarrow \boxed{B=3/2}\\ 2A-3B-4C=0 \Rightarrow -4-4C=0 \Rightarrow \boxed{C=-1}\end{cases} \Rightarrow y_p=-x^2+\tfrac{3}{2}x-1$$

به سادگی می توان جواب بودن y_p را امتحان کرد. در نهایت جواب عمومی معادله:

$$y=y_h+y_p=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}-x^2+\tfrac{3}{2}x-1$$

مثال: یک جواب خصوصی برای معادله زیر بیابید:

$$y''-3y'+2y=2e^{2x}(1-x)$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \underline{\lambda_1=1}\ ,\ \underline{\lambda_2=2}$$

$$g(x)=e^{2x}(2-2x) \Rightarrow a=2\ ,\ q=0 \quad M\equiv 0 \quad N(x)=2-2x$$

$$a+iq=2 \Rightarrow m=1$$

پس فرم جواب خصوصی به شکل زیر است:

$$y_p(x)=xe^{2x}(S(x))$$

$S(x)$ درجه یک با ضرایب مجهول است:

$$y_p(x)=xe^{2x}(Ax+B)=e^{2x}(Ax^2+Bx)$$

اکنون برای به دست آوردن ضرایب کافیست مشتق بگیرید و در معادله اصلی جایگذاری کنید (تمرین)

مثال: فرم جواب خصوصی معادله زیر را بیابید:

$$y''+y=x\sin x$$

$$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \underline{\lambda=\pm i} \Rightarrow y_h=\cancel{e^{0x}}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

از آن جا که $g(x)=x\sin x$ پس می توان نتیجه گرفت:

$$a=0\ ,\ q=1\ ,\ M(x)=x\ ,\ N(x)\equiv 0 \Rightarrow a+iq=i \Rightarrow m=1$$

پس فرم جواب خصوصی به شکل زیر است:

$$y_p(x)=x^1\cancel{e^{0x}}(S(x)\sin x+R(x)\cos x)$$

که R چندجمله ای های درجه یک با ضرایب نامشخص هستند:

$$y_p(x)=(Ax^2+Bx)\sin x+(Cx^2+Dx)\cos x.$$

یک نکته: اگر در معادله ناهمگن (1) قسمت ناهمگنی و جمع چندتابع باشند می توان جواب خصوصی را برای هر تابع به صورت مجزا محاسبه نمود و در نهایت جواب خصوصی نهایی مجموع این جواب های خصوصی خواهد بود.

مثال: فقط فرم جواب خصوصی معادله زیر را بیابید:

$$y''+y'=x^2+x\sinh x+xe^{2x}$$

$$y''+y'=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)=0 \Rightarrow \underline{\lambda=0} \text{ or } \underline{\lambda=-1}$$

(1) $y''+y'=x^2$:

$a=0,\ q=0,\ M\equiv 0,\ N(x)=x^2,\ a+iq=0 \Rightarrow m=1$

$$y_{p_1}=x(Ax^2+Bx+C)$$

دقت کنید: $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$:

(2) $y''+y'=\dfrac{xe^x}{2}$:

$a=1\quad q=0\quad M\equiv 0\quad N(x)\equiv\dfrac{x}{2}\quad a+iq=1 \Rightarrow m=0$

$$y_{p_2}=e^x(Dx+E)$$

(3) $y''+y'=\dfrac{-xe^{-x}}{2}$:

$a=-1\quad q=0\quad M\equiv 0\quad N(x)=\dfrac{-x}{2}\quad a+iq=-1 \Rightarrow m=+1$

$$y_{p_3}=xe^{-x}(Fx+G)$$

(4) $y''+y'=xe^{2x}$

$a=2\quad q=0\quad M\equiv 0\quad N(x)=x,\ a+iq=2 \Rightarrow m=0$

$$y_{p_4}=e^{2x}(Hx+I)$$

و در نهایت داریم:

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}=\cdots$$

معادلات مرتبه بالاتر:

اغلب نتایج بخش‌های قبل قابل تعمیم برای معادلاتی با مرتبه بالاتر از دو هستند.

قضیه: هر معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n با ضرایب پیوسته در بازه I تنها و تنها یک جواب در بازه I خواهد داشت که در شرایط اولیه زیر صدق کند

$$y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y_1\ ,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

قضیه: معادله همگن خطی مرتبه n زیر را در نظر بگیرید

$$y^{n}+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y'+P_0(x)y=0$$

اگر همه ضرایب P_iها در بازه I پیوسته باشند و $y_1\ ,\ \dots\ ,\ y_n$ جواب‌های مستقل خطی از این معادله باشند آن‌گاه هر جواب معادله را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از y_iها نوشت

$$y_h=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n.$$

قضیه: معادله ناهمگن خطی مرتبه n زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{n}+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y'+P_0(x)y=g(x)$$

که همه ضرایب پیوسته اند. فرض کنید y_p یک جواب خصوصی آن باشد و y_h جواب عمومی معادله همگن متناظر. در آن صورت جواب عمومی معادله به صورت زیر است

$$y=y_h+y_p$$

معادلات ضریب ثابت مرتبه بالاتر:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_i \in R$$

مشابه حالت قبل می‌توان گفت معادله مشخصه این معادله به فرم زیر است:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

اگر λ یک ریشه حقیقی معادله با تکرار k باشد k جواب متناظر آن برای معادله عبارتند از:

$$x^j e^{\lambda x},\quad j=0,1,2,\dots,k-1 \qquad \Rightarrow e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}$$

اگر $\lambda=\alpha\pm i\beta$ دو ریشه مختلط معادله مشخصه با تکرار k باشند جواب های متناظر در معادله عبارتند از:

$$x^j e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^j e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad j=0,1,\dots,k-1$$

همه جواب های بالا مستقل از همند. لذا همواره جواب عمومی معادله ضریب ثابت را می‌توان با این توابع ساخت.

مثال: $\left(D^n y = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}\right)$

$$(D^6 - D^5 + 2D^4 - 2D^3)y = 0$$

معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$\lambda^6-\lambda^5+2\lambda^4-2\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda(\lambda^2+2)-\lambda^2-2)=0$$

$$\lambda^3(\lambda-1)(\lambda^2+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \quad \lambda_4=1 \quad \lambda_5=+\sqrt{2}i \quad \lambda_6=-\sqrt{2}i$$

بنابراین جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y_h = c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}+c_3x^2e^{0x}+c_4e^{x}+e^{0x}(c_5\cos\sqrt{2}x+c_6\sin\sqrt{2}x)$$

$$= c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}+c_5\cos(\sqrt{2}x)+c_6\sin(\sqrt{2}x)$$

تمرین) جواب عمومی معادله زیر را بیابید:

$$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0$$

جواب خصوصی معادلات ناهمگن مرتبه بالاتر:

روش ضرایب نامعین بدون هیچ کم و کاستی در معادلات مرتبه nام نیز قابل اجراست.

روش تغییر پارامتر نیز با توجه به اثبات ارائه شده، قابل تعمیم به معادلات مرتبه بالاتر است.

با روندی مشابه آن چه در معادلات مرتبه دوم گذشته، می‌توان ثابت کرد اگر $y_1, \ldots, y_n$ جواب‌های معادله همگن متناظر باشند، یک جواب خصوصی معادله به شکل

$$y_p = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_n y_n$$

است که در آن

$$\mu_m = \int \frac{g(x)\, W_m(x)}{W(x)}\, dx \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

در اینجا نماد $W(x)$ همان رونسکین y_1 تا y_n است و نماد W_m دترمینان حاصل از تعویض ستون mام W با ستون $(0, 0, \ldots, 0, 1)^t$ است.

(رجوع کنید به قاعده کرامر).

تمرین) جواب عمومی معادله $y''' + y' = \tan x$ را بیابید.