اشکان شکیبا گروه ۱ ۹۹۳۱۰۲۰

تمرینات ۹.۱

۱) الف) ضریب x^{20} در $(1+x+\dots+x^7)^4$ ب) ضریب x^{20} در $(1+x^2+x^4+\dots+x^{20})^2$ ...

... $(1+x+x^2+\dots+x^{20})^2$ پ) ضریب x^{20} در $(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+\dots+x^8)^4$

ت) ضریب x^{30} در $(1+x+x^2+\dots+x^{30})^3(1+x+x^2+\dots+x^{30})(x+x^3+x^5+\dots+x^{29})^4$

۲) الف) $(1+x+x^2+\dots)^5$ ب) $x^5(1+x+x^2+\dots)^5$ پ) $x^{10}(1+x+x^2+\dots)^5$

ت) $(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{25})^4(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{25})$

ث) $(x^{10}+x^{11}+\dots+x^{25})^3(1+x+x^2+\dots+x^{15})^3$

۴) الف) عامل اول: سکه های یک تومانی، عامل دوم: سکه های پنج تومانی

ب) $f(x)=(1+x+x^2+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)$

۵) $a_1+a_2+a_3+a_4=31;\ 0\le a_1,a_2,a_4,\ 0\le a_3\le 10$

ضریب x^{31} در $(1+x+x^2+\dots)^3(1+x+x^2+\dots+x^{10})$ = پاسخ مورد نظر

۶) الف) $(1+ax)(1+bx)(1+cx)\dots(1+rx)(1+sx)(1+tx)$

ب) $(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)\dots(1+tx+t^2x^2+t^3x^3)$

تمرینات ۹.۲

۱) الف) $(x+1)^8$ ب) $(x+1)^7\times 8$ پ) $\frac{1}{x+1}$ ت) $\frac{x^3}{1-x}$

ث) $\frac{6x^3}{x+1}$ ج) $\frac{1}{1-x^2}$ چ) $\frac{1}{1-2x}$ ح) $\frac{x^2}{1-9x}$

۲) الف) $-27, 54, -36, 8, 0, 0, 0, \dots$ ب) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

پ) $0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ ت) $1, -3, 3^2, -3^3, \dots$

ث) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots$ ج) $-10, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \dots$

۳) الف) $g(x)=f(x)-a_3x^3+3x^3$

ب) $g(x)=f(x)-a_3x^3+3x^3-a_7x^7+7x^7$

پ) $g(x)=2f(x)-2a_1x+x-2a_3x^3+3x^3$

ت) $g(x)=2f(x)+\frac{5}{1-x}+(1-2a_1-5)x+(3-2a_3-5)x^3+(7-2a_7-5)x^7$

۹) الف) ۰ ب) $\binom{-3}{12}(-1)^{12}-5\binom{-3}{14}(-1)^{14}=\binom{14}{12}-5\binom{16}{14}$

پ) $\binom{-4}{15}(-1)^{15}+\binom{4}{1}\binom{-4}{14}(-1)^{14}+\binom{4}{2}\binom{-4}{13}(-1)^{13}+\binom{4}{3}\binom{-4}{12}(-1)^{12}+\binom{4}{4}\binom{-4}{11}(-1)^{11}$

۱۰) الف) $(x^3+x^4+\dots)^4=x^{12}(1-x)^{-4}\to$ ضریب x^{12}: $\binom{-4}{12}(-1)^{12}=\binom{15}{12}$

ب) $(x^3+x^4+\dots+x^9)^4=x^{12}(1+x+x^2+\dots+x^6)^4$

ضریب x^{12}: $(-4)\binom{-4}{5}(-1)^5+\binom{-4}{12}(-1)^{12}=\binom{15}{12}-4\binom{8}{5}$

۱۳) $(x+x^2+\dots+x^6)^{12}=x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12}$

ضریب x^{18}: $\binom{-12}{18}(-1)^{18}-\binom{12}{1}\binom{-12}{12}(-1)^{12}+\binom{12}{2}\binom{-12}{6}(-1)^6-\binom{12}{3}\binom{-12}{0}$

$=\binom{29}{18}-\binom{12}{1}\binom{23}{12}+\binom{12}{2}\binom{17}{6}-\binom{12}{3}$ ، پاسخ مورد نظر $=\dfrac{\text{نتیجه حاصل}}{6^{12}=\text{فضای نمونه‌ای}}$

۱۵) $(1+x+x^2+\dots)^3(1+x^2+x^4+\dots)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^3\left(\frac{1}{1+x}\right)$

ضریب x^n: $(-1)^n\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\binom{-2}{n}(-1)^n+\frac{1}{2}\binom{-3}{n}(-1)^n$

۱۶) $(x+x^2+\dots)(x^2+x^3+\dots)^3=x^7\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$

ضریب x^{12}: $\binom{-4}{5}(-1)^5=\binom{8}{5}$

$(x^3+x^4+\dots)(1+x+x^2+\dots+x^5)^3=\frac{x^3}{1-x}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3$

ضریب x^{16}: $\binom{-4}{13}(-1)^{13}-\binom{3}{1}\binom{-4}{7}(-1)^7+\binom{3}{2}\binom{-4}{1}(-1)$

تعداد کل: $\binom{8}{5}\left(\binom{16}{13}-\binom{3}{1}\binom{10}{7}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}\right)$

۱۸) ضریب x^n: $\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n=\frac{(1+2n-2)(1+2n-4)\cdots(1+2)(1)}{n!}2^n$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(5)(3)(1)(2^n)(n!)}{n!\,n!}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\binom{2n}{n}$$

۲۲) الف)

I) $c_0=a_0b_0=1,\ c_1=a_0b_1+a_1b_0=2,\ c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=3$

$c_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=4$

II) $c_0=1,\ c_1=3,\ c_2=7,\ c_3=15$ III) $c_0=1,\ c_1=2,\ c_2=3,\ c_3=4$

ب) I) $c_n=n+1$ II) $c_n=1+2+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$

III) $c_0=1,\ c_1=2,\ c_2=3,\ \forall n\geq 3: c_n=4$

۲۳) الف)

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(0+x+2x^2+\dots)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$$

$c_0=0,\ c_1=1,\ c_2=3,\ c_3=6,\ c_4=10,\ \forall n\geq 5: c_n=5n-10$

ب) $(1-x+x^2-\dots)(1-x+x^2-\dots)=\frac{1}{(1+x)^2}\Rightarrow c_n=\binom{-2}{n}=(-1)^n\binom{n+1}{n}=(-1)^n(n+1)$

پ) $(1+x+x^2+x^3)(0+x+2x^2+3x^3)=0+x+(1+2)x^2+(1+2+3)x^3+\dots+3x^6$

بنابراین دنباله ۰، ۱، ۳، ۶، ۶، ۵، ۳، ۰، ۰، ۰، ... حاصل پیچش دنباله‌های ۱، ۱، ۱، ۱، ۰، ۰، ۰، ... و ۰، ۱، ۲، ۳، ۰، ۰، ... است.

تمرینات ۹.۳

۱) $7,\ 6+1,\ 5+2,\ 5+1+1,\ 4+3,\ 4+2+1,\ 4+1+1+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2,$
$3+2+1+1,\ 3+1+1+1+1,\ 2+2+2+1,\ 2+2+1+1+1,\ 2+1+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1+1$

۴) الف) $\frac{1}{1-t^2}\,\frac{1}{1-t^3}\,\frac{1}{1-t^5}\,\frac{1}{1-t^7}$ ب) $\frac{1}{1-t^2}\,\frac{t^{12}}{1-t^3}\,\frac{t^{20}}{1-t^5}\,\frac{t^{35}}{1-t^7}$

پ) $(t^4+t^6+t^8)(t^{12}+t^{15}+\dots+t^{21})(t^{35}+t^{40}+\dots+t^{50})(t^{70}+t^{77}+t^{84}+\dots)$

۷) تابع مولد تعداد افرازهای بدون جمعوند ضریب ۳: $g(x)=\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^4}\,\frac{1}{1-x^5}\,\frac{1}{1-x^7}\cdots$

تابع مولد تعداد افرازهای بدون جمعوند تکراری: $f(x)=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)\cdots$

$$=\frac{1-x^3}{1-x}\,\frac{1-x^6}{1-x^2}\,\frac{1-x^9}{1-x^3}\,\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\cdots=g(x)$$

۸) تابع مولد تعداد افرازهای بدون جمع‌وند ضریب ۴: $f(x)=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^6}\frac{1}{1-x^7}\frac{1}{1-x^9}\cdots$

تابع مولد تعداد افرازهای بدون جمع‌وند زوج تکراری: $g(x)=\frac{1}{1-x}(1+x^2)\frac{1}{1-x^3}(1+x^4)\frac{1}{1-x^5}(1+x^6)\cdots$

$$=\frac{1}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^6}\cdots=f(x)$$

تمرینات تکمیلی

۲) $f(x)=x^{50}(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})^{10}$

ضریب x^{83} = ضریب x^{33} در $\left(\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\right)^{10}$ $=\binom{20}{11}-\binom{10}{1}\binom{15}{6}+\binom{10}{2}\binom{10}{1}$

۶) پاسخ مورد نظر = ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ در $\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4$ $=4^{10}-\binom{4}{1}10\times3^9+\binom{4}{2}10\times9\times2^8-\binom{4}{3}10\times9\times8$

۷) الف) $g(x)$ تابع $1, 5, 5\times7, 5\times7\times9, \ldots$ است $\Rightarrow$ $(1-2x)^{-\frac{5}{2}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{5\times7\times9\times\cdots\times(3+2r)}{r!}x^r$

ب) $(1-ax)^b=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-r+1)}{r!}(-ax)^r=1-abx+b(b-1)\frac{a^2x^2}{2!}+\cdots$

می‌بینیم که $-ab=7$ و $b(b-1)a^2=77$، بنابراین داریم $a=4$ و $b=\frac{-7}{4}$

۸) به ازای هر افراز n، یک سطر $n+k$ نقطه‌ای در بالای نمودار فرزر اضافه می‌کنیم. به نمودار فرزر $2n+k$ می‌رسیم که $n+k$ بزرگترین جمع‌وند است. بنابراین $P_1=P_2$، پس نمودار فرزر هر افراز P_2، نمودار افراز P_3 را حاصل می‌شود و برعکس؛ بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۹) $\forall n\in\mathbb{N}: (1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$

$$\Rightarrow n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

به ازای $x=1$: $n(1+1)^{n-1}=n(2^{n-1})=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$

۱۰) $f(x)=(1+x)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6+x^9)\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k^2}x^i$