مثال: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $M = \max |f'|$ روی (a,b)، در این صورت نشان دهید که برای هر $x_1, x_2 \in [a,b]$ داریم: $|f(x_2) - f(x_1)| \le M|x_2 - x_1|$

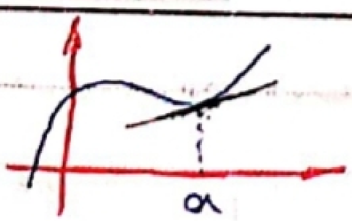
از قضیه مقدار میانگین برای f روی بازه‌های $[x_1, x_2]$ (با فرض $x_1 < x_2$) داریم:

$$\exists\, c \in (x_1, x_2) : \quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \longrightarrow |f'(c)| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\le M}\,|x_2 - x_1| \le M|x_2 - x_1|$$

Year. Month. Day. Subject:

- تقریب خطی:



معادله خط مماس $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

برای xهای در نزدیکی نقطه $x = a$: $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$

مثال: مقدار $\sqrt{26}$ را تقریب بزنید.

$f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

در نزدیکی $a = 25$: $\sqrt{x} \simeq 5 + \frac{1}{10}(x-25) \xrightarrow{x=26} \sqrt{26} \simeq 5 + 0/1(26-25) = 5/1$

مثال، مطلوب است مقدار تقریبی $\sin(\frac{\pi}{2}\sin(\frac{1}{100}))$.

$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\cdot\sin x)$; $a = 0$ $\quad x = \frac{1}{100}$

$f'(x) = (\frac{\pi}{2}\cdot\cos x)\cos(\frac{\pi}{2}\sin x)$ $\quad y \simeq 0/1$

$\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\sin(0/01)) = f(0/01) \simeq \frac{\pi}{2}(0/01) = \frac{\pi}{200}$

دیفرانسیل :

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta(x)$$

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}\,dx$$

مثال :

$$y = f(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow dy = \cos x \, dx$$

,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \cos x$$

- یادآوری : تابع f را با دامنه D_f در نظر بگیرید.

• f را صعودی گوییم هرگاه اگر $x_1, x_2 \in D_f$ ، $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(نزولی) $(f(x_1) \geq f(x_2))$

• f را اکیداً صعودی (صعودی اکید) گوییم، هرگاه اگر $x_1, x_2 \in D_f$ و $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
(اکیداً نزولی) (نزولی اکید) $(f(x_1) > f(x_2))$

- گزاره : اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه داریم:

۱- اگر برای هر x از (a,b) ، $f'(x) > 0$ ، آنگاه f بر این بازه اکیداً صعودی است. $(f'(x) \geq 0)$ (صعودی)

۲- اگر برای هر x از (a,b) ، $f'(x) < 0$ ، آنگاه f بر این بازه اکیداً نزولی است. $(f'(x) \leq 0)$ (نزولی)

آزمون مشتق اول)

۱) فرض کنید f در $x=x_0$ پیوسته باشد x_0 نقطه انتهایی

نباشد : در اینصورت)

الف) اگر بازه‌ای مثل (a,b) حول $x=x_0$ وجود داشته باشد

$f'(x)<0$

به ازای هر $x\in(a,x_0)$ $f'(x)>0$ و به ازای هر $x\in(x_0,b)$

$f'(x)>0$

min نسبی

$f'(x)<0$ آنگاه f در $x=x_0$ یک max نسبی دارد.

۲) اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و روی (a,b) مشتق پذیر

باشد آنگاه :

الف) اگر برای هر $x \in (a,b)$ ، $f'(x)>0$ $\leftarrow$ a min نسبی

〃 $f'(x)<0$ $\leftarrow$ a max نسبی

ب) اگر برای هر $x \in (a,b)$ ، $f'(x)>0$ $\leftarrow$ b max نسبی

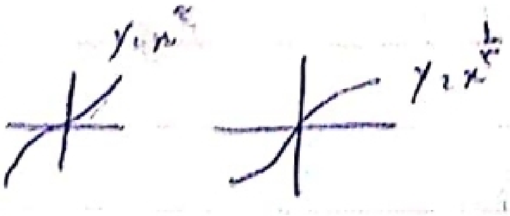
〃 $f'(x)<0$ $\leftarrow$ b min نسبی

تعریف: f بر بازه‌ی باز I مقعر به بالا (مقعر به پایین) گفته می‌شود، هرگاه بر این بازه f' اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد.

تعریف: نقطه‌ای $x=c$ را یک نقطه‌ی عطف برای نمودار $y=f(x)$ گوییم هرگاه:

1. نمودار f در $x=c$ خط مماس داشته باشد

2. نمودار f در $x=c$ تغییر تقعر داشته باشد



- گزاره :

۱. اگر در بازه I ، $f''(x) > 0$ ، f رو به بالا مقعر است.

۲. " " " " ، $f''(x) < 0$ ، f رو به پایین مقعر است.

۳. اگر f در به ازای x نقطه عطف باشد و $f''(x)$ موجود باشد، آنگاه $f''(x)=0$.

- آزمون مشتق دوم :

۱. اگر $f'(x)=0$ ، $f''(x)<0$ ← x ، $\max$ نسبی

۲. اگر " ، $f''(x)>0$ ← x ، $\min$ نسبی

۳. " " " ، $f''(x)=0$ ← نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت ($\max$ نسبی یا $\min$ نسبی یا عطف)

- قضیه (قاعده اول هوپیتال) :

اگر f و g در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشند و به ازای هر $x\in(a,b)$ ، $g'(x)\neq 0$ و

$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آنگاه $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

مثال:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(در صورت قضیه، $x \to a^+$ را می‌توان با $x\to b^-$ ، $x\to c$ ، $a<c<b$ ،

$x\to -\infty$ ، $x\to +\infty$ نیز جایگزین نمود و بعلاوه L می‌تواند عددی متناهی یا $\pm\infty$ باشد.)

- قضیه (قاعدهٔ دوم هوپیتال):

اگر f و g بر (a,b) مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to a^+} g(x)=\pm\infty$ و $g'(x)\neq 0$ بر (a,b) و $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آنگاه $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

- مثال: فرض کنید f بر بازهٔ باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد و $a\in I$ ، نشان دهید

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$$

f'' پیوسته نیست پس نمی‌توان پیش رفت

$$A \overset{hop}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h} \overset{hop}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{(-h)}\right)=\frac{1}{2}(2f''(a))=f''(a)$$

- مشتق تابع معکوس: $f: D_f \longrightarrow R_f$

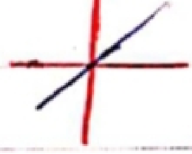
اگر f یک به یک باشد، آنگاه f وارون دارد که آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

$D_{f^{-1}} = R_f$

$R_{f^{-1}} = D_f$

$y = f(x) \longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$ / $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(x)) = x$

$(f^{-1})^{-1} = f$



- گزاره: اگر $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک به یک و مشتق‌پذیر باشد و $y = f^{-1}(x)$، آنگاه این تابع نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f'(x) \neq 0$

نمادگذاری :

$y = f(x)$

$\rightarrow y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = Df(x) = D_x f(x).$

$y'' = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = D_x^2 f(x) = D_x^2 y.$

$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = D_x^n y = D_x^n f(x).$