روش های انتگرال گیری :

① روش تغییر متغیر :

اگر g تابعی مشتق پذیر بر (a,b) باشد و $A=g(a)$ و $B=g(b)$ و f بر برد g پیوسته باشد ، آن گاه داریم :

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_A^B f(u)\, du$$

$$\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)\, dx \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \rightsquigarrow u = g(a) = A \\ x = b \rightsquigarrow u = g(b) = B \end{cases}$$

روش تغییر متغیر

مثال $I=\int \tan(x)dx$

$$I=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cos(x) \\ du=-\sin(x)dx \end{array}\right\} \Rightarrow I=-\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx=-\int \frac{du}{u}=-\ln|u|+c$$

$$\rightarrow I=-\ln|\cos(x)|+c=\ln|\sec(x)|+c$$

به طور مشابه نشان دهید: $\int \cot(x)dx=\ln(|\sin(x)|)+c$

مثال :

$$I=\int (\sec\theta)^{m}(tg\theta)^{2k+1}\,d\theta \;;\; \begin{cases} m\geq 1 \\ k\geq 0 \end{cases}$$

حل :

یادآوری $\begin{cases} 1+tg^2\theta=(\sec\theta)^2 \\ (\sec\theta)'=\sec\theta\, tg\theta \end{cases}$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} u=\sec\theta \\ du=\sec\theta\, tg\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I=\int (\sec\theta)^{m-1}\underbrace{(tg\theta)^{2k}}_{(tg^2\theta)^k=(\sec^2\theta-1)^k}\underbrace{\sec\theta\, tg\theta\, d\theta}_{du}$$

$$=\int u^{m-1}(u^2-1)^k\,du$$

$$=\cdots$$

مثال :

$$I = \int (\sec\theta)^{2k} (tg\theta)^m \, d\theta \; ; \begin{cases} k \geq 1 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

حل :

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} u = tg\theta \\ du = (1 + tg^2\theta)\, d\theta = \sec^2\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \underbrace{(\sec\theta)^{2k-2}}_{(1+tg^2\theta)^{k-1} = (\sec^2\theta)^{k-1}} (tg\theta)^m \underbrace{(\sec\theta)^2 \, d\theta}_{du}$$

$$\Rightarrow I = \int (1+u^2)^{k-1} u^m \, du$$

$$= \dots$$

مثال

$$I=\int \sec^4(x)\tan^3(x)dx$$

$$I=\int \sec^2(x)(1+\tan^2(x))\tan^3(x)dx$$

$$\left.\begin{aligned}u&=\tan(x)\\ du&=\sec^2(x)dx\end{aligned}\right\}\to I=\int u^3(1+u^2)du=\int (u^3+u^5)du=\frac{u^4}{4}+\frac{u^6}{6}+c=\frac{\tan^4(x)}{4}+\frac{\tan^6(x)}{6}+c$$

تغییر متغیر مثلثاتی و هذلولوی

$a > 0:$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \to \begin{cases} x = a\sin(\theta) \\ x = a\tanh(\theta) \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \to \begin{cases} x = a\tan(\theta) \\ x = a\sinh(\theta) \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \to \begin{cases} x = a\sec(\theta) \\ x = a\cosh(\theta) \end{cases}$$

تغییر متغیر مثلثاتی

مثال ۱: $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\sin(\theta) \\ dx = 2\cos(\theta)d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow I = \int \frac{(4\sin^2(\theta))(2\cos(\theta))}{\sqrt{4 - 4\sin^2(\theta)}} d\theta = \int \frac{8\sin^2(\theta)\cos(\theta)}{2\cos(\theta)} d\theta$$

$$= 4\int \sin^2(\theta)d\theta = 4\int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = 2\theta - \sin(2\theta) + c$$

$$\rightarrow I = 2\sin^{-1}(\frac{x}{2}) - x\sqrt{1 - \sin^2(\theta)} + c = 2\sin^{-1}(\frac{x}{2}) - x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + c$$

مثال :

$$I=\int \sec x \, dx$$

حل :

$$I = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \right) dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx$$

$$\begin{cases} u = \sec x + \operatorname{tg} x \\ du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)\, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \operatorname{Ln}|u| + C$$

$$= \operatorname{Ln}|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

تغییر متغیر مثلثاتی

مثال ۲:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=2\sec(u)\\ dx=2\sec(u)\tan(u)du\end{array}\right\}\Rightarrow I=\int\frac{2\sec(u)\tan(u)du}{\sqrt{4\sec^2(u)-4}}=\int\sec(u)du=\ln(|\sec(u)+\tan(u)|)+c$$

$$=\ln\left(\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|\right)+c$$

مثال ۳:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\tan(u)\\ dx=\sec^2(u)du\end{array}\right\}\Rightarrow I=\int\frac{\sec^2(u)du}{\sqrt{1+\tan^2(u)}}=\int\sec(u)du=\ln(|\sec(u)+\tan(u)|)+c$$

$$=\ln(|\sqrt{x^2+1}+x|)+c$$

تغییر متغیر هذلولوی

مثال ۴: $I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$

$$\left.\begin{aligned} x &= \sinh(u) \\ dx &= \cosh(u)du \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \int \sqrt{1+\sinh^2(u)}\,\cosh(u)du = \int \cosh^2(u)du = \int \frac{1+\cosh(2u)}{2}du$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\sinh(2u)}{4} + c = \frac{\sinh^{-1}(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + c$$

یک تغییر متغیر مناسب دیگر: (مربع کامل کردن)

$$Ax^2+Bx+C \rightsquigarrow u = x + \frac{B}{2A}$$

مثال $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x-1 \\ dx=du \end{array}\right\} \Rightarrow I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{u^2+1}}=\ln\left(\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|\right)+c$$

$$=\ln\left(\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}\right|\right)+c=$$

یک تغییر متغیر مناسب دیگر:

$$\sqrt[n]{ax+b} \rightsquigarrow u^n = ax+b$$

مثال:

$$I=\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$$

حل:

$$\begin{cases} u^3=3x+2 \Rightarrow \underline{x=\frac{u^3-2}{3}} \\ 3u^2\,du=3\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{3}(u^3-2)}{u}\,u^2\,du$$

$$=\frac{1}{3}\int u(u^3-2)\,du$$

$$=\frac{1}{3}\int (u^4-2u)\,du$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5}-u^2\right)+C$$

$$=\dots$$

یک تغییر متغیر مناسب :

این تغییر متغیر، می تواند برای محاسبه ی انتگرال توابع گویا برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مفید باشد.

روش تانژانت نصف قوس

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow x = 2\tan^{-1}(u)$$

$$\rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ \tan(x) = \dfrac{2u}{1-u^2} \end{cases}$$

مثال

$$I=\int\frac{dx}{1+\sin(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\tan(\frac{x}{2}) \\ dx=\frac{2du}{1+u^2} \end{array}\right\}\Rightarrow I=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}=\int\frac{2du}{u^2+2u+1}=\int\frac{2du}{(u+1)^2}$$

$$=\frac{-2}{u+1}+c=\frac{-2}{\tan(\frac{x}{2})+1}+c$$

۲- روش جزء به جزء: فرض کنیم f و g توابع مشتق‌پذیر باشند، لذا داریم:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}u=f(x)\\ v=g(x)\end{array}\right\}\to d(uv)=vdu+udv$$

$$\to uv=\int d(uv)=\int vdu+\int udv\to \int udv=uv-\int vdu$$

تذکر: در این روش باید u و dv مناسب را انتخاب کرد تا جواب انتگرال بدست آید.

مثال $I = \int xe^x dx$

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

مثال $I=\int \ln(x)dx$

$$\begin{cases} u=\ln(x)\rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx\rightarrow v=x \end{cases} \Rightarrow I=\int udv=uv-\int vdu=x\ln(x)-\int x\frac{dx}{x}=x\ln(x)-\int dx$$

$$\Rightarrow I=x\ln(x)-x+c$$

مثال $\int e^x \sin(x)dx$

$$\begin{cases} u_1 = e^x \to du_1 = e^x dx \\ dv_1 = \sin(x)dx \to v_1 = -\cos(x) \end{cases} \Rightarrow I = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)dx$$

$$\begin{cases} u_2 = e^x \to du_2 = e^x dx \\ dv_2 = \cos(x)dx \to v_2 = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow I = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx$$

$$\Rightarrow 2I = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \Rightarrow I = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

مثال: اگر f دوبار مشتق‌پذیر باشد، $f(a)=f(b)=0$ ، آنگاه نشان دهید که

$$I=\int_a^b (x-a)(x-b)\,f''(x)\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx$$

حل :

$$\begin{cases} u=(x-a)(x-b) \longrightarrow du=\big((x-b)+(x-a)\big)\,dx=(2x-a-b)\,dx \\ dv=f''(x)\,dx \longrightarrow v=f'(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\underbrace{\Big((x-a)(x-b)f'(x)\Big)_a^b}_{\text{صفر}} - \int_a^b f'(x)\,(2x-a-b)\,dx$$

$$= 0 - \int_a^b f'(x)\,(2x-a-b)\,dx$$

$$\begin{cases} u=2x-a-b \\ dv=f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2\,dx \\ v=f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -\underbrace{\Big((2x-a-b)f(x)\Big)_a^b}_{\text{صفر}} + 2\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=2\int_a^b f(x)\,dx.$$