روش سری‌های فروبینیوس:

روش سری‌های توانی که در بخش قبل مطرح شد، در همسایگی نقاط عادی معادله دیفرانسیل اعتبار دارد و قابل اجراست. اما متاسفانه در همسایگی نقاط منفرد (تکین) این روش با شکست مواجه می‌شود و در محاسبه ضرایب تساوی‌های فاقد اعتباری حاصل می‌شود که قابل بررسی نیستند. معمولاً جواب‌های معادله حول نقاط تکین رفتارهای غیرعادی از جمله تغییرات بسیار سریع، مقادیر بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک و... دارند و بررسی این جواب‌ها حول نقاط تکین مشکل‌تر و البته با اهمیت‌تر است.

تعریف: فرض کنید x_0 یک نقطه منفرد معادله (1) باشد. x_0 را یک نقطه تکین منظم می‌خوانیم هرگاه توابع

$$(x-x_0)\frac{P(x)}{R(x)} \quad , \quad (x-x_0)^2\frac{Q(x)}{R(x)}$$

در x_0 تحلیلی باشند یعنی دارای بسط تیلور همگرا حول x_0 باشند.

نکته: اگر P و Q و R همگی توابع چندجمله‌ای باشند و $R(x_0)=0$ (یعنی x_0 نقطه تکین باشد) هرگاه حدود

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{P(x)}{R(x)} \quad , \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{Q(x)}{R(x)}$$

هر دو موجود و متناهی باشند، x_0 یک نقطه منفرد منظم معادله است.

مثال: می‌دانیم $x=\pm1$ نقاط تکین معادله لژاندر هستند:

$$(1-x^2)y''-2xy'+k(k+1)y=0$$

برای نقطه $x=+1$:

$$\lim_{x\to1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{1+x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to1}(x-1)^2\frac{k(k+1)}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)k(k+1)}{-(1+x)}=0$$

و لذا $x=+1$ یک نقطه منفرد منظم معادله لژاندر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $x=-1$ نیز یک نقطه منفرد منظم است.

روش سری فروبینیوس ما را پیدا کردن جواب معادله حول نقاط منفرد منتظم یاری می‌کند.

برای شروع معادله کوشی اویلر را به خاطر بیاورید:

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$$

از فصل های قبل دیدیم که با تغییر متغیر متناسب می‌توان این معادله را به معادله ضریب ثابت تبدیل و حل کرد. همانطور که جواب یک معادله ضریب ثابت با جایگذاری مستقیم $y=e^{\lambda x}$ بدست می‌آید در اینجا می‌توان مستقیماً $y=e^{\lambda \ln x}=x^{\lambda}$ قرار داد و معادله را حل کرد. چنین جایگذاری منجر به معادله مشخصه به شکل زیر است:

$$\lambda(\lambda-1)+\alpha\lambda+\beta=0$$

که قاعدتاً جوابهای این معادله جبری، نوع جواب های معادله کشی را مشخص می‌کند.

الف) اگر ریشه ها حقیقی و مختلف باشد آنگاه: $y=c_1|x|^{\lambda_1}+c_2|x|^{\lambda_2}$

ب) " " و مضاعف باشد " : $y=(c_1+c_2\ln|x|)|x|^{\lambda_1}$

ج) " " مختلط باشند آنگاه:

$$y=|x|^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln|x|)+c_2\sin(\beta\ln|x|)\right]$$

حال معادله (۱) را در نظر بگیرید:

$$R(x)y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

و x_0 یک نقطه منفرد منتظم باشد. برای سادگی بیشتر فرض کنید $x_0=0$.

بنابراین $x\frac{P(x)}{R(x)}=xp(x)$ و $x^2\frac{Q(x)}{R(x)}=x^2q(x)$ حول $x_0=0$ بسط تیلور همگرا دارند.

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \quad , \quad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$$

اکنون معادله (۱) را در x^2 ضرب کنید و به صورت زیر بنویسید.

$$x^2y''+x\left[xp(x)\right]y'+\left[x^2q(x)\right]y=0$$

$$x^2y''+x\left[p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\right]y'+\left[q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots\right]y=0$$

اگر همه جملات ضرایب p_n و q_n بجز p_0 و q_0 صفر باشند این معادله همان کشی اویلر است.

هرچند در حالت کلی اینگونه نیست اما می توان در بامسئله ویژگی های اصلی جواب معادله با ویژگی های جواب کشی اویلر متناظر یکسان است. از طرفی چون ضرایب معادله حاصلضرب ضرایب معادله کشی در یک سری توانی هستند طبیعی است که جواب این معادله را به صورت حاصلضرب جواب معادله کشی در یک سری توانی در نظر گرفت

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0$$

نتیجه نهایی این جایگذاری در قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه: فرض کنید $x=0$ یک نقطه تکین منظم معادله (۱) باشد. فرض کنید r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

باشد که در آن $\alpha = \lim_{x \to 0} x \frac{P(x)}{R(x)}$ و $\beta = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{Q(x)}{R(x)}$ باشد و $r_2 \leq r_1$. در این صورت همواره یکی از جواب های معادله (۱) به صورت زیر است:

$$y_1 = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (r_1 \text{ ریشه بزرگتر است})$$

به علاوه جواب دوم مستقل خطی به فرم زیر خواهد بود:

الف) اگر $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ در آن صورت:

$$y_2 = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (b_0 \neq 0)$$

ب) اگر $r_1 = r_2 = 0$ در آن صورت:

$$y_2 = y_1 \ln|x| + |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

پ) اگر $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ در آن صورت:

$$y_2 = C y_1 \ln|x| + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

اگر R شعاع همگرایی سری های توانی مربوط به $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ باشد در آن صورت جواب های مطرح شده در $0 < |x-0| < R$ همگرا هستند.

در عمل ضرایب a_n و b_n در سری های مذکور را با جایگذاری این فرم ها در معادله می‌توان یافت. معمولاً محاسبه b_n ها به مراتب مشکل تر است. در بعضی حالات خاص می‌توان بعد از به دست آوردن جواب اول به روش فروبنیوس، جواب دوم را با روش کاهش مرتبه محاسبه نمود.

در حالت (الف) که $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$، بهتر است ضرایب a_n و b_n را با $a_n(r_1)$ و $a_n(r_2)$ نشان دهیم. چون ساختار سری ها مشابه است، پس با یک بار جایگذاری $a_n(r)$ در سری جواب و جایگذاری آن در معادله می‌توان فرم کلی برای آن یافت و سپس هر دو جواب را با جایگذاری $r=r_1$ و $r=r_2$ به دست آورد.

در حالت (ب) که $r_1 - r_2 = 0$ است، می‌توان ثابت کرد که

$$b_n = \frac{\partial}{\partial r} a_n(r)\Big|_{r=r_1} = a_n'(r_1)$$

همچنین در حالت (پ) که $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ است نیز داریم:

$$b_n = \frac{\partial}{\partial r}\Big[(r-r_2)a_n(r)\Big]\Big|_{r=r_2} \quad \text{و} \quad C = \lim_{r\to r_2} (r-r_2)\, a_N(r)$$

که در آن $a_n(r)$ همان ضرایب a_n در جواب اول هستند که به عنوان تابعی از r محاسبه شده‌اند و قرار داده‌ایم $a_0=1$. همچنین $N = r_1 - r_2$.

تعریف ۱ – سری‌های به‌صورت (۲)، سری‌های فروبنیوس و روش یافتن جواب‌های معادلات با استفاده از این سری‌ها، روش فروبنیوس نامیده می‌شود.

مثال ۱ – جواب عمومی معادله‌ی

$$۲x^۲y'' + x(۲x - ۱)y' + y = ۰ \tag{۱۱}$$

را در مجاورت نقطه‌ی $x_۰ = ۰$ به‌دست آورید.

حل – داریم $P(x) = \frac{۲x-۱}{۲x}$ و $Q(x) = \frac{۱}{۲x^۲}$، و این توابع در $x_۰ = ۰$ تحلیلی نیستند. پس، $x_۰ = ۰$ یک نقطه‌ی تکین معادله است. از آن‌جا که

$$xP(x) = -\frac{۱}{۲} + x \ \ , \ \ x^۲Q(x) = \frac{۱}{۲} \tag{۱۲}$$

هردو در همه جا تحلیلی اند، پس $x_۰ = ۰$ یک نقطه‌ی تکین منظم معادله است. با توجه به بسط‌های (۴) و (۵)، از روابط (۱۲) نتیجه می‌شود که $p_۰ = -\frac{۱}{۲}$ و $q_۰ = \frac{۱}{۲}$. بنابراین، معادله‌ی شاخص در این‌جا چنین است

$$r(r-۱) - \frac{۱}{۲}\,r + \frac{۱}{۲} = ۰$$

ریشه‌های معادله‌ی شاخص عبارتند از $r_۱ = ۱$ و $r_۲ = \frac{۱}{۲}$، و تفاضل ریشه‌ها یک عدد صحیح نیست. پس، معادله دارای دو جواب مستقل خطی به‌صورت سری‌های فروبنیوس است. ابتدا جواب متناظر با $r_۱ = ۱$ را به‌دست می‌آوریم. این جواب به‌صورت زیر است

$$y = x\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱}$$

داریم

$$y' = \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^n \ \ , \ \ y'' = \sum_{n=۰}^{\infty} n(n+۱)a_n x^{n-۱}$$

با جایگزین کردن y و مشتق‌های آن در (۱۱)، به‌دست می‌آوریم

$$۲\sum_{n=۰}^{\infty} n(n+۱)a_n x^{n+۱} + ۲\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۲} - \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱} = ۰$$

یا با یکسان سازی نماها، داریم

$$۲\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)(n+۲)a_{n+۱}x^{n+۲} + ۲\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۲} - \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۲)a_{n+۱}x^{n+۲}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2}=0$$

اگر ضرایب قوای مختلف x را مساوی صفر قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$a_{n+1}=\frac{-2a_n}{2n+3} \quad n=0,1,\ldots \tag{13}$$

از (۱۳) خواهیم داشت

$$a_1=-\frac{2}{3}a_0 \ , \ a_2=-\frac{2}{5}a_1=\frac{2^2}{3.5}a_0 \ , \ a_3=\frac{-2^3}{3.5.7}a_0 \ ,\ldots$$

بنابراین، یک جواب معادله چنین است

$$y_1(x)=a_0x\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{2^2}{3.5}x^2-\frac{2^3}{3.5.7}x^3+\ldots\right)$$

که $a_0 \neq 0$، یک ثابت دلخواه است. به‌ازای $a_0=1$، یک جواب معادله عبارت است از

$$y_1(x)=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{1.3.5\ldots(2n+1)}x^n\right) \tag{14}$$

این جواب بنابر قضیه‌ی ۱، برای $0<x<\infty$ معتبر است.

حال جواب متناظر با $r_2=\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم. این جواب به‌صورت زیر است

$$y=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}$$

داریم

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_nx^{n-\frac{1}{2}} \ , \ y''=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)a_nx^{n-\frac{3}{2}}$$

این جواب را در معادله‌ی (۱۱) قرار می‌دهیم. پس از ساده‌سازی، فرمول بازگشتی زیر را خواهیم داشت

$$a_{n+1}=\frac{-a_n}{n+1} \quad n=0,1,\ldots$$

از این‌جا داریم

$$a_1=-a_0 \ , \ a_2=-\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{2} \ , \ a_3=-\frac{a_2}{3}=\frac{-a_0}{3!}$$

و به‌طور کلی

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} a_0$$

بنابراین، جواب دوم با انتخاب $a_0 = 1$ چنین است

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots \right)$$

یا

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \qquad (15)$$

این جواب نیز برای $0 < x < \infty$ معتبر است. جواب‌ها در (۱۴) و (۱۵) مستقل خطی‌اند، و از این رو جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند.

مثال ۲ – برای معادله‌ی زیر دو جواب در مجاورت نقطه‌ی تکین $x_0 = 0$ پیدا کنید که مستقل خطی باشند.

$$x^2 y'' - (x + 2) y = 0 \qquad (16)$$

حل – در این‌جا داریم $P(x) \equiv 0$ و $Q(x) = \frac{-(x+2)}{x^2}$، و $x_0 = 0$ یک نقطه‌ی تکین منظم معادله است. از آن جا که

$$xP(x) \equiv 0 \quad , \quad x^2 Q(x) = -2 - x$$

پس، $p_0 = 0$ و $q_0 = -2$، و معادله‌ی شاخص عبارت است از

$$r^2 - r - 2 = 0$$

و ریشه‌های آن $r_1 = 2$ و $r_1 = -1$ هستند.
بنا به‌قضیه‌ی ۱، یک جواب معادله (به‌ازای ریشه‌ی بزرگتر معادله‌ی شاخص) به‌شکل زیر است

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

داریم

$$y_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+1}\quad,\quad y_1''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_nx^n$$

با جایگزین کردن $y_1(x)$ در (۱۶)، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_nx^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+3)a_{n+1}-2a_{n+1}-a_n\right]x^{n+3}=0$$

از این‌جا فرمول بازگشتی زیر نتیجه می‌شود

$$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+4)}\,a_n\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

با انتخاب $a_0=1$، داریم

$$a_1=\frac{1}{4}\quad,\quad a_2=\frac{1}{40},\ldots$$

پس، یک جواب (۱۶) چنین است

$$y_1(x)=x^2+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{40}+\ldots \tag{۱۷}$$

این جواب برای $x>0$ معتبر است.

از آن‌جا که r_1-r_2 صحیح است، جواب دوم به‌شکل زیر می‌باشد

$$y_2(x)=Cy_1(x)\ln x+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

برای یافتن ضرایب b_n و C، به‌جای $y_1(x)$ از (۱۷) قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$y_2(x)=C\left(x^2+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{40}+\ldots\right)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-1} \tag{۱۸}$$

داریم

$$y_2'(x)=C\left(2x+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{10}x^3+\ldots\right)\ln x+C\left(x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{40}+\ldots\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)b_n x^{n-2}$$

و

$$y_2''(x)=C\left(2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{10}x^2+\ldots\right)\ln x+C\left(2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{10}x^2+\ldots\right)$$

$$+C\left(1+\frac{x}{2}+\frac{3}{40}x^2+\ldots\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-2}$$

با جانشین کردن $y_2(x)$ در معادله (۱۶)، پس از ساده‌سازی خواهیم داشت

$$(-b_0-2b_1)+(-b_1-2b_2)x+(3C-b_2)x^2+\ldots=0$$

اگر ضرایب این سری را برابر صفر قرار دهیم، آن‌گاه با انتخاب $b_0=1$، به‌دست می‌آوریم

$$b_1=-\frac{1}{2}\quad,\quad b_2=\frac{1}{4}\quad,\ldots,C=\frac{1}{12}$$

پس، جواب دیگر معادله‌ی (۱۶) چنین است

$$y_2(x)=\frac{1}{12}\left(x^2+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{40}+\ldots\right)\ln x+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\ldots\right)$$

این جواب نیز برای $x>0$ معتبر می‌باشد.

تذکر ۱ــ از آن‌جا که در سری توانی (۴)، p_0 در حقیقت مقدار تابع پیوسته‌ی $xP(x)$ در $x=0$ می‌باشد، و همین‌طور در (۵) q_0 مقدار $x^2Q(x)$ در $x=0$، است، پس این دو کمیت را به‌صورت زیر نیز می‌توان محاسبه نمود:

$$p_0=\lim_{x\to 0}xP(x)\quad,\quad q_0=\lim_{x\to 0}x^2Q(x)$$

مثال ۳ ــ برای معادله‌ی زیر دو جواب در مجاورت نقطه‌ی تکین $x_0=-1$ به‌دست آورید.

$$x(x+1)y''+(3x+2)y'+y=0 \tag{۱۹}$$

حل ــ واضح است که $x_0=-1$ نقطه تکین منظم است. قرار می‌دهیم $t=1+x$. با این تعویض متغیر، معادله (۱۹) به‌صورت زیر در می آید

$$t(t-1)\frac{d^2y}{dt^2}+(3t-1)\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{۲۰}$$

اکنون برای معادله‌ی (۲۰)، دو جواب در مجاورت نقطه‌ی تکین $t_\circ = \circ$ به‌دست می‌آوریم. داریم

$$p_\circ = \lim_{t\to\circ} t\,\frac{۳t-۱}{t(t-۱)} = ۱ \quad , \quad q_\circ = \lim_{t\to\circ} t^۲\,\frac{۱}{t(t-۱)} = \circ$$

پس، معادله‌ی شاخص چنین است

$$r(r-۱)+r=\circ \quad \Rightarrow r_۱ = r_۲ = \circ$$

جواب متناظر با $r_۱ = \circ$ را به‌دست می‌آوریم. این جواب به‌صورت $y = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n t^n$ است. داریم

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n t^{n-۱} \quad , \quad \frac{d^۲y}{dt^۲} = \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱) a_n t^{n-۲}$$

در معادله‌ی (۲۰) قرار می‌دهیم. پس از ساده‌سازی، معادله‌ی بازگشتی زیر به‌دست می‌آید

$$a_{n+۱} = a_n \ , \ n = \circ, ۱, \ldots$$

پس،

$$a_\circ = a_۱ = a_۲ = \ldots$$

و جواب معادله‌ی (۲۰) عبارت است از

$$y = a_\circ(۱ + t + t^۲ + \ldots)$$

یا چون $t = x + ۱$، جواب معادله‌ی (۱۹) در مجاورت نقطه‌ی تکین $x_\circ = -۱$ چنین است

$$y = a_\circ \left[۱ + (x+۱) + (x+۱)^۲ + \ldots\right] \qquad (۲۱)$$

این جواب برای $\circ < |x+۱| < ۱$، یا برای x هایی که در مجموعه‌ی $(-۲,-۱) \cup (-۱,\circ)$ قرار دارند، معتبر است. در این‌صورت، با محاسبه‌ی مجموع سری (۲۱)، خواهیم داشت

$$y = a_\circ \frac{۱}{۱-(x+۱)} = \frac{-a_\circ}{x}$$

پس، با انتخاب $a_\circ = -۱$، یک جواب (۱۹) عبارت است از

$$y_۱ = \frac{۱}{x}$$