عملگر مجموع‌یابی
The Summation Operator

- با استفاده از عملگر مجموع‌یابی می‌توان از تابع مولد معمولی برای دنبالهٔ a_0، a_1، a_2 و... به تابع مولد معمولی برای دنبالهٔ a_0، a_0+a_1، $a_0+a_1+a_2$، ... رسید.

تابع مولد روبه‌رو را در نظر بگیرید:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$f(x)\cdot\frac{1}{1-x} = [a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots][1 + x + x^2 + x^3 + \cdots]$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots$$

به تابع $\frac{1}{1-x}$ دراصطلاح عملگر مجموع‌یابی گفته می‌شود.

مثال

- تابع مولدی را پیدا کنید که ضریب x^n در آن، بیانگر حاصل جمع مربعات اعداد 0 تا n باشد ($0^2+1^2+...+n^2$) . سپس از روی این تابع مولد، برای حاصل جمع مربعات، فرمولی بر حسب n پیدا کنید.

- با توجه به آن‌چه که در جلسهٔ پیشین دیدیم دنبالهٔ متناظر با مجموع مربعات (شروع شونده از 0^2) برابر است با: $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

با ضرب تابع مولد مذکور در عملگر مجموع‌یابی داریم:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\frac{1}{(1-x)} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

لذا تابع مولد مسئله تابع $\frac{x(x+1)}{(1-x)^4}$ است.

مثال – ادامه

حال باید ضریب x^n را در تابع مولد به‌دست آمده بیابیم:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = (x+x^2)(1-x)^{-4} = (x+x^2)\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \cdots\right]$$

در این‌صورت ضریب x^n برابر است با:

$$\binom{-4}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{-4}{n-2}(-1)^{n-2}$$

$$= (-1)^{n-1}\binom{4+(n-1)-1}{n-1}(-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}\binom{4+(n-2)-1}{n-2}(-1)^{n-2}$$

$$= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}$$

$$= \frac{1}{6}[(n+2)(n+1)(n) + (n+1)(n)(n-1)] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$