تمرینات ۱.۸

۲) الف) $\binom{4+19-1}{19}=\binom{22}{19}$ ب) $\binom{22}{19}-4\binom{14}{11}+6\binom{6}{3}$

اشکان شکیبا ۹۹۳۱۰۳۰

پ) $13 = x_1+x_2+x_3+x_4$ که داریم: $(x_3, x_4 \geq 0)$

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}) = \binom{16}{13} - 2\binom{10}{7} - \binom{9}{6} - \binom{11}{8} + 2\binom{5}{2} + 2\binom{4}{1} + 2$$

۳)

$C_1: IN,\ C_2: NI,\ C_3: IO,\ C_4: OI,\ C_5: NO,\ C_6: ON$

$$\rightarrow N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}\,\overline{C_5}\,\overline{C_6}) = S_0 - S_1 + S_2 = \frac{11!}{2!^3} - \binom{6}{1}\left(\frac{9!}{2!^2}\right) + \frac{6\times 7!}{2!}$$

۵) $x_{(\text{مبنای } 10)} = x_1x_2\ldots x_7 \Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_7 = 31 \quad (0 \le x_i \le 9)$

$$\Rightarrow N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\ldots\overline{C_7}) = \binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}\binom{7}{1}$$

۶) الف)

$x_1+x_2+\ldots+x_{12} = 80 \quad (0 \le x_i \le 15)$

$$\Rightarrow \text{پاسخ مورد نظر} = \binom{91}{80} - \binom{12}{1}\binom{75}{64} + \binom{12}{2}\binom{59}{48} - \binom{12}{3}\binom{43}{32} + \binom{12}{4}\binom{27}{16} - \binom{12}{5}\binom{11}{0}$$

ب)

$x_1+x_2+\ldots+x_{12} = 16 \quad (0 \le x_i \le 3)$

$$\Rightarrow \text{پاسخ مورد نظر} = \binom{27}{16} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{19}{8} - \binom{12}{3}\binom{15}{4} + \binom{12}{4}\binom{11}{0}$$

۱۱)

$$\frac{6^8 - 5^8\binom{6}{1} + 4^8\binom{6}{2} - 3^8\binom{6}{3} + 2^8\binom{6}{2} - 1^8\binom{6}{1}}{6^8}$$

۱۶) C_i: حضور دوست iام؛ بنابراین:

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\ldots\overline{C_7}) = 84 - 35\binom{7}{1} + 16\binom{7}{2} - 8\binom{7}{3} + 4\binom{7}{4} - 2\binom{7}{5} + 1\binom{7}{6} + 0\binom{7}{7}$$

که این حاصل برابر صفر است، بنابراین ریحانه هیچگاه تنها نبوده است.

تمرینات ۲.۸

۳) الف) $C_1: E,\ C_2: N,\ C_3: O,\ C_4: R,\ C_5 = S$

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\ldots\overline{C_5}) = \frac{14!}{2!^5} - \binom{5}{1}\frac{13!}{2!^4} + \binom{5}{2}\frac{12!}{2!^3} - \binom{5}{3}\frac{11!}{2!^2}$$

$$+\binom{۵}{۴}\frac{۱۰!}{۲!}-\binom{۵}{۵}\frac{۹!}{۱!}$$

ب) $$E_{۲}=\binom{۵}{۲}\frac{۱۲!}{۲!^{۳}}-\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}\frac{۱۱!}{۲!^{۲}}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۴}\frac{۱۰!}{۲!}-\binom{۵}{۳}\frac{۹!}{۱!}\binom{۵}{۵}$$

پ) $$L_{۳}=\binom{۵}{۳}\frac{۱۱!}{۲!^{۲}}-\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۴}\frac{۱۰!}{۲!}+\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۵}\frac{۹!}{۱!}$$

۴) با استفاده از عدد استرلینگ نوع دوم:

$$E_{۳}=\binom{۷}{۴}۴!\ S(۱۰,۴)$$

$$L_{۳}=\binom{۷}{۳}۴^{۱۰}-\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۴}۳^{۱۰}+\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۵}۲^{۱۰}-\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۶}۱^{۱۰}$$

۷) الف) $$N(\bar{C}_{۱}\bar{C}_{۲}\bar{C}_{۳}\bar{C}_{۴})=\binom{۵۲}{۱۳}-\binom{۴}{۱}\binom{۳۹}{۱۳}+\binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳}-\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}$$

$$\frac{N(\bar{C}_{۱}\bar{C}_{۲}\bar{C}_{۳}\bar{C}_{۴})}{\binom{۵۲}{۱۳}}=$$ پاسخ مورد نظر ←

ب) $$E_{۱}=\binom{۴}{۱}\binom{۳۹}{۱۳}-۲\binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳}+۳\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}\rightarrow$$ پاسخ مورد نظر $$=\frac{E_{۱}}{\binom{۵۲}{۱۳}}$$

پ) $$E_{۲}=\binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳}-۳\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}\rightarrow$$ پاسخ مورد نظر $$=\frac{E_{۲}}{\binom{۵۲}{۱۳}}$$

۸) ب) $$L_{t-1}=L_t+E_{t-1}\ ,\quad E_{t-1}=S_{t-1}-tS_t$$

پ) $$L_{t-1}=L_t+E_{t-1}=S_t+S_{t-1}-tS_t=S_{t-1}-(t-1)S_t$$
$$=S_{t-1}-\binom{t-1}{t-2}S_t$$

ت) $$L_m=L_{m+1}+E_m$$

ث) $$L_k=L_{k+1}+E_k=\left(S_{k+1}-\binom{k+1}{k}S_{k+2}+\dots+(-1)^{t-k-1}\binom{t-1}{k}S_t\right)$$
$$+\left(S_k-\binom{k+1}{1}S_{k+1}+\dots+(-1)^{t-k}\binom{t}{t-k}S_t\right)\Rightarrow$$ حکم اثبات می‌شود

تمرینات ۳.۸

۵) الف) $7! - d_7 = 7! - 7!e^{-1}$ ب) $d_{26} = 26!e^{-1}$

۹) $10!\, d_{10} = 10!\,(10!\,e^{-1}) = 10!^2 e^{-1}$

۱۰) الف) I) $\frac{d_n}{n!}$ II) $\frac{n\, d_{n-1}}{n!}$ III) $1-\frac{d_n}{n!}$ IV) $\frac{\binom{n}{2} d_{n-2}}{n!}$

ب) I) e^{-1} II) e^{-1} III) $1-e^{-1}$ IV) $\frac{1}{2!}\times e^{-1}$

۱۱) الف) $(d_{10})^2$

ب) C_i: نفر iاُم وسایلش را بگیرد

$$N(\bar C_1 \bar C_2 \cdots \bar C_{10}) = 10!^2 - \binom{10}{1}9!^2 + \binom{10}{2}8!^2 - \cdots + (-1)^{10}\binom{10}{10}0!^2$$

۱۳) تعداد جایگشت‌های ۱، ۲، ...، n برابر است با $n!$ $(n\in\mathbb{N})$؛ هر یک شامل k عنصر پریشان و $n-k$ عنصر ثابت هستند. انتخاب عناصر ثابت $\binom{n}{n-k}$ حالت دارد و عناصر دیگر را می‌توان به d_k حالت پریشان کرد؛ بنابراین $\binom{n}{n-k}d_k = \binom{n}{k}d_k$ جایگشت داریم که $n-k$ عنصر ثابت و k عنصر پریشان دارند. با تغییر k از صفر تا n، همه جایگشت‌ها را به دست می‌آوریم؛ پس می‌توان رابطه صورت سوال را به عنوان $n!$ در نظر گرفت.

۱۴) الف) C_i: وقوع الگوی $i\,(i+1)$

$$N(C_i) = (n-1)!\ ,\quad N(C_iC_j) = (n-2)! \to N(C_1C_2\cdots C_{n-1}) = (n-(n-1))!$$

$$N(\bar C_1\bar C_2\cdots\bar C_{n-1}) = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-(n-1))!$$

ب)

$$d_n + d_{n-1} = \left(n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!\right) + \left((n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}((n-1)-(n-1))!\right)$$

۱۵) $\binom{n}{0}(n-1)! - \binom{n}{1}(n-2)! + \binom{n}{2}(n-3)! - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}$

تمرینات تکمیلی

۲) $n = n_1 n_2 \dots n_6 \ (0 \le n_i \le 9) \to n_1 + n_2 + \dots + n_7 = 37$

$(0 \le n_1, n_2, \dots, n_6 \le 9 ;\ 0 \le n_7 \le 37) \to N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_6) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6$

$= \binom{43}{37} - \binom{6}{1}\binom{33}{27} + \binom{6}{2}\binom{23}{17} - \binom{6}{3}\binom{13}{7}$

۵) c_i: وقوع $i(i+1)$

$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_8) = 8! - \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6! - \dots + (-1)^7\binom{8}{7}1!$

۶) الف) c_i: همرنگی دیوار i و $i+1$

$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_5) = k^5 - \binom{5}{1}k^4 + \binom{5}{2}k^3 - \dots - \binom{5}{5}k$

ب) $k = 1, 2 \to$ نتیجه فوق $= 0$, $k = 3 \to$ نتیجه فوق $= 30$

پ) $k^6 - \binom{6}{1}k^5 + \binom{6}{2}k^4 - \dots + \binom{6}{6}k \to k = 1 \to$ نتیجه $= 0$, $k = 2 \to$ نتیجه $= 2$

۸) $E_m = S_m - \binom{m+1}{m}S_{m+1} + \binom{m+2}{m}S_{m+2} - \dots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}S_n$

$\to S_i = \binom{n}{i}\binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\binom{s-2r}{r}\dots\binom{s-(i-1)r}{r}(n-i)^{s-ir}$

$\Rightarrow \binom{s}{r}\binom{s-r}{r}\binom{s-2r}{r}\dots\binom{s-(i-1)r}{r} = \frac{s!}{(s-ir)!(r!)^i}$

$(-1)^{i-m}\binom{i}{m}S_i = (-1)^m \frac{n!s!}{m!}\left((-1)^i(n-i)^{s-ir} \div (i-m)!(n-i)!(s-ir)!\,r!^i\right)$

$\Rightarrow E_m = (-1)^m \frac{n!s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} (-1)^i \frac{(n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!\,r!^i}$

۱۱) الف) $\binom{n-m}{r-m} = \binom{n-m}{n-r}$

ب) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_n\}$

c_i: عدم حضور a_i در r شی

$\Rightarrow N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_m) = \binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r}$