فصل اول. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

فرم کلی معادله مرتبه اول به صورت زیر است

$$① \quad F(x,y,y')=0$$

و می تواند به معادله های ۲ و ۳ نیز ظاهر شود

$$② \quad y'=f(x,y) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}$$

$$③ \quad M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

یک معادله مرتبه اول خطی نیز به فرم استاندارد زیر است؛ منظور از استاندارد یعنی ضریب بالاترین مرتبه مشتق یک باشد.

$$④ \quad y'+p(x)y=q(x)$$

قضیه وجود و یکتایی

مساله خطی: هرگاه p و q بر بازه $I: \alpha<t<\beta$ شامل x_0 پیوسته باشند آن گاه تابع منحصر به فردی وجود خواهد داشت که جواب مساله مقدار اولیه زیر در بازه I باشد.

$$y'+p(x)y=q(x), \qquad y(x_0)=y_0$$

مساله غیرخطی: فرض کنید f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک مستطیل شامل (t_0,y_0) پیوسته باشد. در این صورت در یک همسایگی از t_0 جواب منحصر به فردی از مساله مقدار اولیه زیر وجود دارد

$$y'=f(t,y), \quad y(t_0)=y_0$$

در ادامه فصل برخی دسته های خاص از معادلات مرتبه اول را بررسی می کنیم و روش حل هر یک را بیان می کنیم.

۱) معادلات جداشدنی (تفکیک پذیر)

هر معادله ای که بتوان آن را به شکل $f(x)dx=g(y)dy$ نوشت معادله جداشدنی است. یعنی اگر بتوان متغیر مستقل و وابسته را به صورت تفکیک شده در دو طرف معادله آورد معادله جداشدنی است. حل چنین معادلاتی کار پیچیده ای نیست کافیست از دو طرف معادله جدا شده نسبت به متغیرهای مربوطه انتگرال گیری کنیم.

مثال:

الف) $y' = \dfrac{x^2}{1-y^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \Rightarrow (1-y^2)dy = x^2 dx \xrightarrow{\int} y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

ب) $(x-1)\tan y\, dx + x^2 e^{-x} dy = 0$

$$(x-1)\tan y\, dx = -x^2 e^{-x} dy \Rightarrow \frac{x-1}{x^2 e^{-x}} dx = \frac{-1}{\tan y} dy$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) e^x dx = -\int \cot y\, dy \Rightarrow \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} - \int \frac{1}{x^2} e^x dx = -\int \frac{\cos y}{\sin y} dy$$

$$\frac{1}{x} e^x - \cancel{\int -\frac{1}{x^2} e^x dx} - \cancel{\int \frac{1}{x^2} e^x dx} = -\ln|\sin y| + C \Rightarrow \frac{e^x}{x} + \ln|\sin y| = C$$

۲) معادلات همگن:

تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم هرگاه به ازای هر $t>0$ و هر (x,y) داشته باشیم:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را همگن می‌خوانیم هرگاه توابع M و N همگن و هم درجه باشند. و یا معادل آن $y' = f(x,y)$ را همگن می‌خوانیم هرگاه f تابعی همگن از درجه صفر باشد.

به عنوان مثال تابع $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$ یک تابع همگن مرتبه صفر است چرا که

$$f(tx,ty) = \frac{t^3x^3 + t^3y^3}{tx\, t^2y^2} = \frac{\cancel{t^3}(x^3+y^3)}{\cancel{t^3}(xy^2)} = f(x,y)$$

دقت کنید که صورت و مخرج توابعی همگن از درجه سوم هستند ولی f همگن مرتبه صفر است.

لذا معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$ یک معادله همگن مرتبه اول نام دارد.

نکته: برای حل یک معادله همگن مرتبه اول از تغییر متغیر $v = \dfrac{y}{x}$ (و یا گاهی $v = \dfrac{x}{y}$) استفاده کنید. دقت کنید که v همانند y تابعی از x است و همچنین داریم:

$$v=\frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = vx \\ y' = v + xv' \quad \text{or} \quad dy = v\,dx + x\,dv \end{cases}$$

با تغییر متغیر گفته شده معادله همگن به یک معادله جداشدنی برحسب x و v تبدیل می‌شود.

مثال:

$$2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$$

به وضوح معادله همگن است چون M و N همگن از مرتبه ۲ هستند. پس تغییر متغیر گفته شده را به کار می‌بریم:

$$2x(xv)\,dx + (x^2v^2 - 3x^2)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$2x^2v\,dx + x^2v^3\,dx - 3x^2v\,dx + x^3v^2\,dv - 3x^3\,dv = 0$$

$$(2v + v^3 - 3v)\,dx + x(v^2 - 3)\,dv = 0 \Rightarrow$$

و در نتیجه معادله جداشدنی است:

$$\frac{dx}{x} = \frac{3 - v^2}{v^3 - v}\,dv$$

$$\ln|x| = \int \frac{3 - v^2}{\underbrace{v^3 - v}_{v(v-1)(v+1)}}\,dv = \int \frac{-3}{v} + \frac{1}{v-1} + \frac{1}{v+1}\,dv$$

$$\ln|x| = -3\ln|v| + \ln|v-1| + \ln|v+1| + \ln c$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{c(v^2-1)}{v^3}\right| \Rightarrow x = \frac{c(v^2-1)}{v^3}$$

و در انتها تغییر متغیر را به حالت اول برگردانید:

$$x = \frac{c\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)}{\frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow y^3 = c(y^2 - x^2)$$

۳) معادلاتی به شکل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

برای چنین معادلاتی که f تابعی از یک هموگرافیک است سه حالت مجزا را در نظر می‌گیریم.

حالت اول) اگر $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ ، این یعنی دو خط متقاطع هستند، فرض کنید محل تقاطع آن‌ها (α, β) باشد. در آن صورت تغییر متغیر زیر معادله را به معادله همگن تبدیل می‌کند.

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

در واقع این تغییر متغیر مانند این است که مرکز مختصات را به محل تلاقی دو خط انتقال داده باشیم که خطوط حاصل عرض از مبدا صفر خواهند داشت و معادله همگن می‌شود.

حالت دوم) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ یعنی دو خط موازی باشند، در این حالت قرار دهید

$$u = ax + by \Rightarrow du = a\,dx + b\,dy \quad \text{or} \quad u' = a + by'$$

با این تغییر متغیر معادله جدا شدنی بر حسب u و x خواهد بود.

حالت سوم) اگر $a' = b' = 0$ یعنی $y' = f(ax+by+c)$ و f تابعی از یک خط است

در این حالت تغییر متغیر زیر معادله را به سادگی جدا شدنی می‌کند

$$u = ax + by + c \Rightarrow u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{1}{b}(u' - a)$$

مثال:

$$(2x + y - 4)dx + (2y - x + 7)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 4}{x - 2y - 7} \qquad \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow \text{حالت اول} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta) = (3, -2)$$

محل تلاقی

$$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{2(X+3) + (Y-2) - 4}{(X+3) - 2(Y-2) - 7} = \frac{2X + Y}{X - 2Y} \rightarrow \text{همگن}$$

$$\begin{cases} Y = XV \quad \text{و} \\ Y' = V + XV' \end{cases} \Rightarrow V + XV' = \frac{2X + XV}{X - 2XV} \Rightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{2+V}{1-2V} - V = \frac{2 + V - V + 2V^2}{1 - 2V}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{1 - 2V}{2V^2 + 2}dV \Rightarrow \ln(X) = \frac{1}{2}\int \frac{1-2V}{V^2+1}dV = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dV}{V^2+1} - \int \frac{2V}{V^2+1}dV\right)$$

$$\ln|X| = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(V) - \ln(V^2+1)\right) + c$$

و در انتها هر دو تغییر متغیر به کار رفته را به حالت اول برگردانید تا جواب اصلی حاصل شود.

۴) معادلات خطی مرتبه اول:

$$y'+p(x)y=q(x)$$

تابع $\mu(x)$ را در دو طرف معادله ضرب کنید

$$\mu(x)y'+\underline{\mu(x)p(x)}y=\mu(x)q(x)$$

فرض کنید μ طوری انتخاب شود که $\mu(x)p(x)=\mu'(x)$ در این صورت

$$\mu y'+\mu' y=\mu q$$

$$(\mu y)'=\mu q \Rightarrow \mu y=\int \mu q\,dx \Rightarrow y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)dx\right]$$

ولذا معادله حل شده است. پس تنها کافیست تابع μ به طور مناسب گشته شده انتخاب شود

$$\mu p=\mu' \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=p(x) \overset{\int}{\Rightarrow} \ln|\mu(x)|=\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

روش گفته شده به وضوح اثباتی برای وجود و یکتایی جواب معادله خطی نیز است و در عین حال یک روش کوتاه برای حل معادله خطی مرتبه اول پیشنهاد می دهد:

برای حل معادله خطی مرتبه اول ابتدا تابع μ که به آن فاکتور انتگرال ساز می گوییم را با فرمول زیر به دست آورید:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

و سپس جواب نهایی را با جایگذاری μ در فرمول زیر بدست آورید:

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)dx+C\right]$$

ثابت دلخواه C تنها برای تاکید اضافه شده است.

مثال:

$$xy'+2y=4x^2 \qquad y(1)=2$$

در نظر بگیرید که معادله را حتما به فرم استاندارد بنویسید

$$y'+\underbrace{\frac{2}{x}}_{p}y=\underbrace{4x}_{q} \qquad y(1)=2$$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\int x^2 \cdot 4x\,dx + C\right] \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{4x^4}{4} + C\right] \Rightarrow y(x) = \frac{4x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

این جواب عمومی معادله است، شرط اولیه $y(1)=2$ را اعمال کنید تا مقدار C بدست آید:

$$2 = y(1) = \frac{1}{1} + C \Rightarrow \boxed{C=1} \Rightarrow y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

که جواب خصوصی مورد نظر است

۵) معادله برنولی:

فرم استاندارد معادله برنولی به صورت زیر است:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

این معادله یک معادله غیرخطی است (تنها اگر $y=0$ یا $y=1$ باشد معادله خطی است)

اما با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را به معادله خطی تبدیل کرد. قرار دهید:

$$\begin{cases} v = y^{1-n} \\ v' = (1-n)y'y^{-n} \end{cases}$$

البته بهتر است قبل از اعمال تغییر متغیر، دو طرف معادله را در عبارت $(1-n)y^{-n}$ ضرب کنید تا کار جایگذاری ساده‌تر شود.

مثال:

$$xy' + y = y^2 \ln x \qquad n=2 \rightarrow \begin{cases} v = y^{-1} \\ v' = -y'y^{-2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-y^{-2})} x(-y'y^{-2}) - y^{-1} = -\ln x \Rightarrow xv' - v = -\ln x$$

$$v' - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x}\ln x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x\left[\int -\frac{1}{x^2}\ln x\,dx + C\right] = x\left[\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx + C\right]$$

$$v(x) = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C \Rightarrow \frac{1}{y(x)} = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$$

۶) معادله ریکاتی:

یک دسته از معادلات مرتبه اول غیرخطی اما پرکاربرد هستند که فرم کلی آن به شکل زیر است:

$$y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$$

اگر $P \equiv 0$ معادله خطی است و اگر $R \equiv 0$ معادله از نوع برنولی است. اما در غیر این صورت حل این معادله بسیار مشکل است. در واقع اگر اطلاعات دیگری نداشته باشیم حل آن غیرممکن است. در حالت کلی اگر یک جواب خصوصی از معادله مانند $y_p(x)$ در دست باشد می توان به وسیله آن جواب عمومی معادله را یافت. روش این کار به این صورت است که از تغییر متغیر $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}$ استفاده می کنیم. با این تغییر معادله تبدیل به یک معادله خطی نسبت به z خواهد شد که قابل حل است.

مثال: اگر $y_1 = -4x+1$ یک جواب خصوصی معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را بیابید.

$$y' = y^2 + 8xy + 16x^2 - 5$$

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = -4x + 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2} = -4 - \frac{z'}{z^2}$$

$$-4 - \frac{z'}{z^2} = \left(16x^2 + 1 + \frac{1}{z^2} - 8x + \frac{2}{z} - \frac{8x}{z}\right) + 8x\left(-4x + 1 + \frac{1}{z}\right) + 16x^2 - 5$$

خطی

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} \xrightarrow{\times z^2} -z' = 1 + 2z \Rightarrow z' + 2z = -1$$

$$\mu = e^{\int 2\,dx} = e^{2x} \Rightarrow z(x) = e^{-2x}\left[\int -e^{+2x}\,dx + C\right] = e^{-2x}\left[-\frac{1}{2}e^{+2x} + C\right]$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} + Ce^{-2x} \Rightarrow \boxed{y = -4x + 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + Ce^{-2x}}}$$

۷) معادله کامل :

یک تابع ضمنی به صورت $\varphi(x,y)=c$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که در این حالت مشتق متغیر y به صورت زیر است :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}$$

φ_x و φ_y مشتق‌های جزئی φ به ترتیب نسبت به مولفه اول و دوم هستند. پس :

$$\varphi_x(x,y)dx+\varphi_y(x,y)dy=0$$

لذا برای حل معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

کافی است تابع φ را چنان بیابیم که

$$\begin{cases}\varphi_x(x,y)=M(x,y)\\ \varphi_y(x,y)=N(x,y)\end{cases} \qquad (2)$$

اولین سوالی که پیش می‌آید این است که آیا برای هر M و N دلخواه همچنان φ وجود دارد؟ متاسفانه خیر. قضیه زیر شرطی را که برای وجود φ لازم است بیان می‌کند.

هر معادله (۱) که بتوان تابع φ با شرایط (2) را یافت معادله <u>کامل</u> نام دارد.

قضیه : فرض کنید در معادله (۱)، M و N و M_y و N_x همگی در ناحیه R به شکل $\alpha<x<\beta,\ \gamma<y<\delta$ پیوسته باشند. در این صورت این معادله کامل است اگر و فقط اگر در هر نقطه R داشته باشیم :

$$M_y(x,y)=N_x(x,y) \qquad (3)$$

این شرط را شرط کامل بودن معادله می‌خوانیم.

اثبات (اشاره) : اگر تابع φ در شرایط (2) صدق کند، آنگاه با محاسبه N_x و M_y از (2) داریم

$$\begin{cases}\varphi_{xy}(x,y)=M_y(x,y)\\ \varphi_{yx}(x,y)=N_x(x,y)\end{cases}$$

با توجه به اینکه N_x و M_y طبق فرض پیوسته‌اند، لذا بنا بر قضیه‌ای در ریاضیات عمومی $\varphi_{xy}\equiv\varphi_{yx}$ و لذا شرط (3) برقرار است.

اثبات برگشت: اکنون فرض کنید M و N در شرط (3) صدق می‌کنند. می‌خواهیم ثابت کنیم φ وجود دارد که در شرایط (2) صدق کند و معادله کامل شود. φ را به صورت زیر می‌سازیم:

ابتدا از معادله اول (2) نسبت به x انتگرال بگیرید:

$$\varphi_x(x,y)=M(x,y) \xRightarrow{\int \dots dx} \varphi(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y) \qquad (4)$$

دقت کنید h تابعی دلخواه برحسب y است یعنی نسبت به x ثابت است و نقش ثابت انتگرال‌گیری (نسبت به x) را بازی می‌کند. اکنون از معادله (4) نسبت به y مشتق بگیرید:

$$\varphi_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+h'(y)=\int M_y(x,y)dx+h'(y) \qquad (5)$$

خب حالا کافیست معادله (5) را با معادله دوم (2) یعنی $\varphi_y(x,y)=N(x,y)$ مقایسه کنیم، داریم:

$$N(x,y)=\int M_y(x,y)dx+h'(y)$$

$h'(y)$ را بدست آورید و با انتگرال‌گیری برحسب y، h را محاسبه کنید:

$$h(y)=\int\left[N(x,y)-\int M_y(x,y)dx\right]dy \qquad (6)$$

اکنون (6) را در (4) جایگذاری کنید تا φ مورد نظر ساخته شود:

$$\varphi(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\int M_y(x,y)dx\right]dy.$$

اثباتی که در بالا ارائه شده است، در واقع یک روش حل برای معادله کامل نیز ارائه می‌کند. برای حل یک معادله مرتبه اول ابتدا شرط کامل بودن را چک کنید. در صورت تایید کامل بودن با روش موجود در اثبات بازگشت، تابع φ مورد نظر را تولید کنید. در آن صورت $\varphi(x,y)=C$ جواب معادله مورد نظر است.

مثال:

$$(y\cos x+2xe^y)+(\sin x+x^2e^y-1)y'=0$$

$$(\underbrace{y\cos x+2xe^y}_{M})dx+(\underbrace{\sin x+x^2e^y-1}_{N})dy=0$$

ابتدا شرط کامل بودن را چک کنید:

$$\left.\begin{array}{l} M_y = \cos x + 2xe^y \\ N_x = \cos x + 2xe^y \end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$$ معادله کامل است

پس طبق قضیه تابع φ چنان موجود است که:

$$\begin{cases} \varphi_x = M = y\cos x + 2xe^y & (1) \\ \varphi_y = N = \sin x + x^2 e^y - 1 & (2) \end{cases}$$

ابتدا از معادله اول نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\varphi(x,y) = \int \varphi_x(x,y)\,dx = \int y\cos x + 2xe^y\,dx = y\sin x + x^2 e^y + h(y) \quad (3)$$

از این نتیجه نسبت به y مشتق بگیرید:

$$\varphi_y(x,y) = \sin x + x^2 e^y + h'(y)$$

این نتیجه را با فرمول (2) مقایسه کنید:

$$h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y + C$$

h حاصل را در (3) جایگذاری کنید، جواب معادله به صورت زیر است:

$$\varphi(x,y) = y\sin x + x^2 e^y - y = C$$

برای اطمینان از درستی جواب کافیست از تابع φ نسبت به x و y مشتق بگیرید و با M و N معادله مطابقت دهید.

۸) معادلات غیرکامل:

در بخش قبل با روش حل یک معادله کامل آشنا شدیم. هر معادله ای که در شرط کامل بودن صدق نکند، یعنی $M_y \neq N_x$ را یک معادله غیرکامل می خوانیم.

ایده حل یک معادله غیرکامل مشابه روشی است که برای حل معادله مرتبه اول خطی به کار رفت. معادله غیرکامل زیر را در نظر بگیرید:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

می خواهیم تابع $\mu(x,y)$ را چنان بیابیم و در دو طرف معادله ضرب کنیم که حاصل یک معادله کامل شود. یعنی معادله زیر کامل باشد:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \qquad (2)$$

بنا بر شرط کامل بودن باید:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \Rightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\Rightarrow \mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \qquad (3)$$

پس μ باید از رابطه (3) حاصل شود، اما معادله (3) یک معادله مشتقات جزئی است و حل آن به مراتب از حل معادله دیفرانسیل معمولی (1) پیچیده تر است و در عمل غیرممکن است. تنها در حالت های خاصی می توان اقدام به حل معادله (3) و پیدا کردن μ مناسب کرد.

الف) اگر فاکتور انتگرال ساز μ تنها تابعی از x باشد، $\mu_y = 0$ و لذا از (3) داریم:

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} \xrightarrow{\int} \ln|\mu(x)| = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx$$

و در نتیجه:

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}$$

عکس مطلب نیز صادق است یعنی اگر $\frac{M_y - N_x}{N}$ تنها تابعی از x باشد، آن گاه μ نیز تنها تابعی از x است و از فرمول بالا محاسبه می شود. (در واقع این شرط لازم و کافی است)

ب) اگر فاکتور انتگرال ساز μ تنها تابعی از y باشد، $\mu_x = 0$ و لذا از (3) داریم:

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{-M} \xRightarrow{\int} \ln|\mu(y)| = \int \frac{M_y - N_x}{-M} dy$$

$$\boxed{\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}}$$

همچنین اگر $\frac{M_y - N_x}{-M}$ تنها تابعی از y باشد پس μ نیز تنها تابعی از y است و از رابطه فوق تا حاصل می‌شود.

پ) اگر فاکتور انتگرال ساز تابعی از $Z = g(x,y)$ باشد؛ در آن صورت بنابر قاعده زنجیره‌ای مشتق‌ها از (3) داریم:

$$\mu(M_y - N_x) = \mu_z Z_x N - \mu_z Z_y M$$

$$\frac{\mu_z}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{Z_x N - Z_y M} \Rightarrow \boxed{\mu(Z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{Z_x N - Z_y M} dZ}}$$

و مانند قبل اگر عبارت $\frac{M_y - N_x}{Z_x N - Z_y M}$ تنها تابعی از Z باشد پس μ نیز تنها تابعی از Z است و از رابطه بالا محاسبه می‌شود.

مثال: معادله روبرو را حل کنید:

$$\underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(2xy - e^{-2y})}_{N}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 1 \\ N_x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow$$ معادله کامل نیست

از طرفی عبارت

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1 - 2y}{-y} = -\frac{1}{y} + 2$$

تنها تابعی از y است و طبق قسمت (ب) گفته شده μ نیز تنها تابعی از y است و

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y} + 2\, dy} = e^{-\ln y + 2y} = e^{\ln\frac{1}{y}} \cdot e^{2y} = \frac{1}{y} e^{2y}$$

پس می‌توان با ضرب μ به دست آمده در دو طرف معادله، آن را کامل کرد.

$$\underbrace{e^{2y}}_{\bar{M}}dx+(\underbrace{2xe^{2y}-\frac{1}{y}}_{\bar{N}})dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{M}_y=2e^{2y}\\ \bar{N}_x=2e^{2y}\end{array}\right\}\Rightarrow \bar{M}_y=\bar{N}_x \Rightarrow$$ معادله کامل شد.

پس با روش گفته شده در بخش معادلات کامل می‌توان معادله اخیر را حل کرد. (به عهده دانشجو)

مثال: اگر معادله زیر عامل انتگرال‌ساز را برحسب $z=xy$ داشته باشد جواب عمومی آن را بیابید.

$$(2x+yx^2-y^2)dx+(x^3-xy-1)dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l}M_y=x^2-2y\\ N_x=3x^2-y\end{array}\right\}\Rightarrow$$ معادله کامل نیست ، $z_x=y$, $z_y=x$

$$Q=\frac{M_y-N_x}{z_xN-z_yM}=\frac{x^2-2y-3x^2+y}{y(x^3-xy-1)-x(2x+yx^2-y^2)}=\frac{-2x^2-y}{-y-2x^2}=1$$

پس می‌توان گفت Q تابعی از z است (تابع ثابت). لذا μ نیز تابعی از z است و

$$\mu(z)=e^{\int Q(z)dz}=e^{\int 1dz}=e^{z}=e^{xy}$$

اکنون عامل انتگرال‌ساز را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم و معادله کامل حاصل را حل می‌کنیم. (به عهده دانشجو).

مثال: اگر معادله $ydx+(x^3y-x)dy=0$ عامل انتگرال‌ساز به شکل $x^\alpha y^\beta$ داشته باشد، جواب عمومی معادله را بنویسید.

(به تفاوت صورت سوال و مثال قبل دقت کنید)

کافیست دو طرف معادله را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب کنیم و شرط کامل بودن را چک کنیم:

$$x^\alpha y^{\beta+1}dx+(x^{\alpha+3}y^{\beta+1}-x^{\alpha+1}y^\beta)dy=0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= (\beta+1)\,x^{\alpha}y^{\beta} \\ N_x &= (\alpha+3)\,x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - (\alpha+1)\,x^{\alpha}y^{\beta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\beta+1)\,x^{\alpha}y^{\beta} = (\alpha+3)\,x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - (\alpha+1)\,x^{\alpha}y^{\beta}$$

به وضوح برای برقراری تساوی بالا باید ضرایب جملات با درجه یکسان در دو طرف معادله با هم برابر باشند یعنی

$$\begin{cases} \beta+1 = -(\alpha+1) \\ 0 = \alpha+3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha=-3}$$

$$\beta+1=2 \Rightarrow \boxed{\beta=1}$$

پس در مراجع $\mu = x^{-3}y$ است. (ادامه حل به عهده دانشجو)

یافتن عامل انتگرال ساز به روش جستجو

گاهی اوقات دسته بندی مناسب جملات یک معادله کمک شایانی در حل معادله می کند. فرمول های زیر می توانند راهگشا باشند.

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy \qquad d(x^2+y^2) = 2(x\,dx + y\,dy)$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \qquad d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$$

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad d\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$d\left(\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{2(x\,dx + y\,dy)}{x^2+y^2} \qquad d\left(\sin^{-1}(x/y)\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$$x\,dy - y\,dx = x^5\,dx + x^3y^2\,dx$$

کافیست از عبارت سمت راست x^3dx فاکتور بگیرید و بعد دو طرف را بر x^2+y^2 تقسیم کنید.

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = x^3\,dx \Rightarrow d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = d\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{x^4}{4} + C$$