# حساب دیفرانسیل و انتگرال

**رابرت آدامز**

## فصل اول

## **"حد و پیوستگی"**

# فهرست کلی

## جلد ۱:



## جلد ۲:

# فهرست تفصیلی

## قواعد مشتق‌گیری

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(cf(x)\right) = cf'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) = f'(x)+g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

## مشتق‌های مقدماتی

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x>0)$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$
$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$$
$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \quad (a>0)$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## اتحادهای مثلثاتی

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

## فرمول درجه دوم

اگر $Ax^2 + Bx + C = 0$ ، آنگاه $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ .

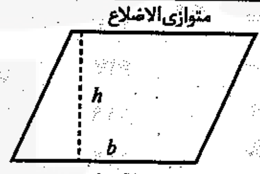
## فرمول‌های هندسی

$A =$ مساحت
$b =$ قاعده
$h =$ ارتفاع
$C =$ محیط
$V =$ حجم
$S =$ مساحت رویه

مثلث

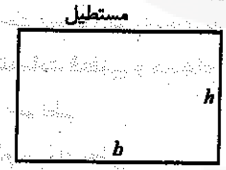
$A = (1/2)bh$

متوازی‌الاضلاع



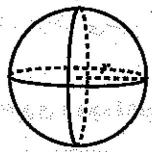
$A = bh$

مستطیل



$A = bh$

کره

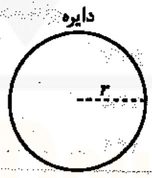


$V = (4/3)\pi r^3$ , $S = 4\pi r^2$

استوانه دایره‌ای

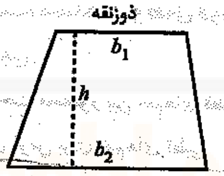
$V = Ah = \pi r^2 h$ , $S = Ch = 2\pi rh$ (دیوار استوانه‌ای)

دایره



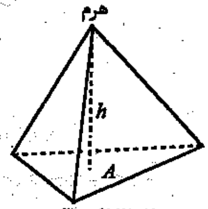
$C = 2\pi r$, $A = \pi r^2$

ذوزنقه



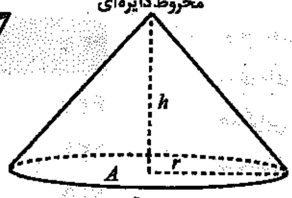
$A = (1/2)(b_1 + b_2)h$

هرم



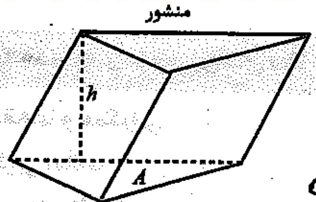
$V = (1/3)Ah$

مخروط دایره‌ای



$V = (1/3)Ah = (1/3)\pi r^2 h$, $S = \pi r(r_2 + h_2)1/2$ (دیوار مخروطی)

منشور



$V = Ah$

# ۱

# حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

در اوایل قرن هفدهم، یوهان کپلر،[1] ریاضیدان آلمانی، مشاهدات نجومی وسیعی را که توسط تیکو براهه[2]، منجم دانمارکی، انجام گرفته بود مورد بررسی قرار داد و به‌این نتیجه رسید که سیارات باید بر مدارهای بیضوی به‌دور خورشید بگردند. او علت این امر را نمی‌دانست. پنجاه سال بعد آیزاک نیوتون[3]، ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی، به این پرسش، پاسخ داد.

چرا سیارات بر مدارهای بیضوی به‌دور خورشید می‌گردند؟ چرا در نیمکرهٔ شمالی، تندبادها مارپیچ‌وار و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنند؟ چگونه می‌توان تأثیر تغییرات نرخ بهره را بر اقتصاد و بازار سهام پیش‌بینی کرد؟ چه وقت ماده‌ای رادیواکتیو تا آن حد واپاشیده می‌شود که دست زدن به‌آن بی‌خطر باشد؟ چگونه جریان‌های گرم اقیانوسی در منطقهٔ استوایی اقیانوس آرام، بر آب و هوای شرق آمریکای شمالی اثر می‌گذارند؟ برای چه مدت، تجمع یک دارو در جریان خون حالت مؤثر خود را حفظ می‌کند؟ امواج رادیویی چگونه در فضا انتشار می‌یابند؟ چرا یک بیماری همه‌گیر در ابتدا بسرعت پخش شده و سپس از سرعت انتقال آن کاسته می‌شود؟ چگونه می‌توانیم مطمئن باشیم پلی که طراحی کرده‌ایم بر اثر توفان تخریب نمی‌شود؟

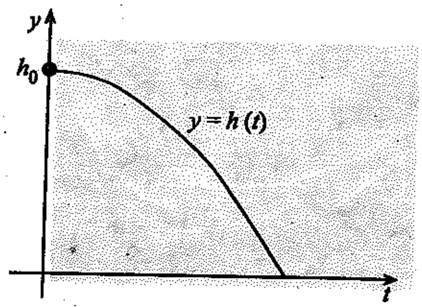
این پرسش‌ها و بسیاری پرسش‌های جالب و مهم دیگر در جهان، مستقیماً با توانایی ما در تجزیه و تحلیل حرکت و چگونگی تغییر کمیت‌ها نسبت به‌زمان یا نسبت به‌یکدیگر ارتباط دارند. جبر و هندسه ابزارهای سودمندی برای توصیف روابط موجود بین کمیت‌های *ایستا* هستند، ولی متضمن مفاهیم مناسب برای توصیف نحوهٔ *تغییر* کمیت‌ها نیستند. برای این منظور، به‌اعمال ریاضی جدیدی نیازمندیم که بتوانند فراتر از اعمال جبریِ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به‌توان رساندن و ریشه گرفتن عمل کنند. همچنین، به‌اعمالی نیاز داریم که بتوانند تغییر کمیت‌های وابسته را اندازه‌گیری کنند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال، ابزارهای توصیف کمّیِ حرکت را به‌دست می‌دهد. این حساب، دو عمل جدید به‌نام‌های *مشتق‌گیری* و *انتگرال‌گیری* را معرفی می‌کند که همانند جمع و تفریق، متقابل یکدیگرند: آنچه مشتق می‌ریسد، انتگرال پنبه می‌کند.

برای مثال، حرکت سنگی را که درحال سقوط است درنظر بگیرید. ارتفاع این سنگ (برحسب متر) $t$ ثانیه پس از رها شدن از ارتفاع $h_0$، تابعی مانند $h(t)$ است که به‌صورت

$$h(t) = h_0 - 4.9t^2$$

1. Johannes Kepler
2. Tycho Brahe
3. Issac Newton




بیان می‌شود. نمودار $y = h(t)$ در شکل روبه‌رو نشان داده شده است. فرایند مشتق‌گیری ما را قادر می‌سازد تابع جدیدی بیابیم که آن را با $h'(t)$ نشان می‌دهیم و **مشتق** $h$ نسبت به $t$ می‌نامیم. این تابع، ***آهنگ تغییر*** ارتفاع سنگ، یعنی **سرعت** سنگ برحسب متر بر ثانیه را نشان می‌دهد:

$$h'(t) = -۹٫۸t$$

برعکس، اگر سرعت سنگ در حال سقوط را به‌صورت تابعی از زمان در اختیار داشته باشیم، انتگرال‌گیری ما را قادر می‌سازد تا تابع ارتفاع، یعنی $h(t)$ را بیابیم.

حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دو ریاضیدان قرن هفدهم، آیزاک نیوتون و گوتفرید ویلهلم لایبنیتس[1]، مستقل از یکدیگر و از دو راه تا حدی متفاوت، ابداع شد. انگیزهٔ نیوتون، علاقه‌اش به‌تحلیل حرکت اجسام متحرک بود. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرالِ خود، توانست قانون‌های حرکت و گرانش را فرمولبندی کند و ***از آنها نتیجه بگیرد*** که سیارات باید بر مدارهای بیضوی به‌دور خورشید بگردند.

بسیاری از «قانون‌های مهم و بنیادی طبیعت» به‌صورت معادله‌هایی که حاوی آهنگ تغییر چند کمیت هستند بیان می‌شوند. این نوع معادله‌ها ***معادله‌های دیفرانسیل*** نام دارند و فنون مطالعه و حل آنها در قلب حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار گرفته‌اند. در مثال مربوط به‌سنگ درحال سقوط، قانون مناسب همان قانون دوم نیوتون برای حرکت است:

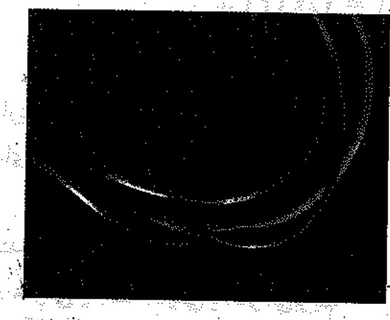
شتاب × جرم = نیرو

**شتاب**، یعنی $-۹٫۸\ \mathrm{m/s^2}$، آهنگ تغییر (یا **مشتق**) سرعت است و این نیز به‌نوبهٔ خود، آهنگ تغییر (یا **مشتق**) تابع ارتفاع است.

بخش وسیعی از ریاضیات به‌طور غیرمستقیم به‌بررسی حرکت مربوط می‌شود. ما ***خط‌ها*** یا ***خم‌ها*** را اشیایی هندسی تلقی می‌کنیم ولی یونانیان باستان آنها را به‌عنوان مسیرهای حرکت نقاط متحرک درنظر می‌گرفتند. با وجود این، مطالعهٔ خم‌ها نیز متضمن مفاهیمی هندسی نظیر تماس و مساحت است. فرایند مشتق‌گیری، ارتباطی تنگاتنگ با مسألهٔ هندسی یافتن خط مماس دارد. به‌همین ترتیب، انتگرال‌گیری مربوط می‌شود به‌مسألهٔ هندسی یافتن مساحت نواحی‌ای که دارای مرز خمیده هستند.

هم مشتق و هم انتگرال با استفاده از عمل ریاضی جدیدی به‌نام **حد** تعریف می‌شوند. مفهوم حد توابع را در فصل ۱ شرح و بسط خواهیم داد و این شروع واقعی حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهد بود. در فصل پیشنیازها (یعنی فصل پ)، بعضی مطالب ضرور دربارهٔ جبر و هندسه راکه برای شرح و بسط حساب دیفرانسیل و انتگرال لازم هستند مرور می‌کنیم.

1. Gottfried Wilhelm Leibniz



# فصل پ
# پیشنیازها

لاک‌پشت[۱] پاسخ داد: «تلوتلو خوردن و به‌خود پیچیدن، البته برای شروع، و شاخه‌های مختلف حساب، بلندپروازی، سرگرمی، زشت‌سازی و تمسخر.»[۲]

**لوییس کارول[۳]**
*آلیس در سرزمین عجایب*

**مقدمه.** این فصل مقدماتی، مروری است بر مهم‌ترین نکاتی که قبل از شروع مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال باید آنها را بدانید. مباحث ارائه شده عبارت‌اند از دستگاه اعداد حقیقی، مختصات دکارتی در صفحه، معادله‌های خط راست، دایره و سهمی، توابع و نمودارهای آنها، و در حالت خاص، چندجمله‌ای‌ها و توابع مثلثاتی.

با توجه به‌معلومات قبلی خود، ممکن است با این مباحث آشنا باشید یا نباشید. اگر آشنا هستید، شاید بخواهید ضمن نگاهی گذرا به‌این مطالب، دانسته‌های خود را در مورد واژه‌های به‌کار رفته تقویت کنید. درغیراین‌صورت باید این فصل را جزءبه‌جزء مورد مطالعه قرار دهید.

## پ.۱ اعداد حقیقی و خط حقیقی

حساب دیفرانسیل و انتگرال، متکی بر ویژگی‌های دستگاه اعداد حقیقی است. **اعداد حقیقی** اعدادی هستند که می‌توان آنها را به‌صورت اعشاری بیان کرد. مثلاً

$$۵ = ۵٫۰۰۰۰۰۰\ldots$$

$$-\frac{۳}{۴} = -۰٫۷۵۰۰۰۰\ldots$$

$$\frac{۱}{۳} = ۰٫۳۳۳۳\ldots$$

---

۱. لاک‌پشت، لاک‌پشت مسخره (Mock Turtle)

۲. واژه‌های ambition، distraction، uglification و derision بر وزن addition، subtraction، multiplication و division. ـ م.

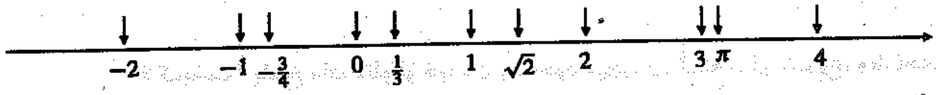
3. Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson) 1832 - 1898

$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ \ldots$

$\pi = ۳/۱۴۱۵۹ \ldots$

در هر مورد، سه نقطهٔ ... به‌این معنی است که رقم‌های اعشاری تا بینهایت ادامه می‌یابند. در سه مورد اول، الگوی نوشتن رقم‌ها آشکار است، یعنی می‌دانیم همهٔ رقم‌های بعد چه هستند. در مورد $\sqrt{۲}$ و $\pi$ هیچ الگویی وجود ندارد.

مطابق شکل پ.۱ ، اعداد حقیقی را می‌توان از نظر هندسی با نقاط یک خط که آن را **خط حقیقی** می‌نامیم، نشان داد. نماد $\mathbb{R}$ را برای نشان دادن دستگاه اعداد حقیقی یا خط حقیقی به کار می‌بریم.




**شکل پ.۱** خط حقیقی

ویژگی‌های دستگاه اعداد حقیقی به‌سه رده تقسیم می‌شوند: ویژگی‌های جبری، ویژگی‌های ترتیبی و کمال. با ***ویژگی‌های جبری*** از قبل آشنایی دارید. صرف‌نظر از جزئیات، ویژگی‌های جبری می‌گویند اعداد حقیقی را می‌توان با هم جمع کرد، از هم کم کرد، در هم ضرب کرد و (به‌استثنای تقسیم بر صفر) بر هم تقسیم کرد تا اعداد حقیقی دیگری تولید شوند و اینکه قواعد معمولی حساب برقرار هستند.

***ویژگی‌های ترتیبی*** اعداد حقیقی، به‌ترتیب قرار گرفتن اعداد حقیقی بر خط حقیقی اشاره دارند. اگر $x$ در طرف چپ $y$ قرار گیرد، می‌گوییم «$x$ کوچکتر از $y$» یا «$y$ بزرگتر از $x$» است. این گزاره‌ها را به‌طور نمادین به‌ترتیب به‌صورت $x < y$ و $y > x$ می‌نویسیم. نابرابری $x \leq y$ به‌این معنی است که یا $x < y$ یا $x = y$.

ویژگی‌های ترتیبی اعداد حقیقی را تحت عنوان ***قواعد نابرابری‌ها*** در زیر خلاصه کرده‌ایم:

**قواعد نابرابری‌ها**

نماد $\Rightarrow$ یعنی «مستلزم... است» یا «نتیجه می‌دهد».

اگر $a$، $b$ و $c$ اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

۱. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

۲. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$

۳. $a < b, c > ۰ \Rightarrow ac < bc$

۴. $a < b, c < ۰ \Rightarrow ac > bc$. در حالت خاص، $-a > -b$

۵. $a > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۰$

۶. $۰ < a < b \Rightarrow \frac{۱}{b} < \frac{۱}{a}$

قواعد ۱ تا ۴ و قاعدهٔ ۶ (به‌ازای $a > ۰$) برای $\leq$ و $\geq$ به‌جای $<$ و $>$ نیز برقرار هستند.

به‌قواعد مربوط به‌ضرب (یا تقسیم) نابرابری‌ها در یک عدد، توجه ویژه مبذول دارید. اگر این عدد مثبت باشد جهت نابرابری حفظ می‌شود؛ اگر این عدد منفی باشد، جهت نابرابری عوض می‌شود.

درک ویژگی ***کمال*** دستگاه اعداد حقیقی، ظریفتر و دشوارتر است. یکی از راه‌های بیان آن به‌صورتی

است که در پی می‌آید: اگر $A$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد که دارای حداقل یک عدد است و اگر عددی حقیقی مانند $y$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x$ متعلق به $A$، $x \le y$، آنگاه یک **کوچکترین** $y$ با این ویژگی وجود دارد. صرف‌نظر از جزئیات، این ویژگی می‌گوید هیچ سوراخ یا شکافی بر خط حقیقی وجود ندارد؛ به‌عبارت دیگر، هر نقطه متناظر است با یک عدد. در ادامهٔ مطالعهٔ خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال، با ویژگی کمال چندان سروکار نخواهیم داشت. در اثبات بعضی از نتایج مهم، بویژه قضیه‌های ۸ و ۹ در فصل ۱، این ویژگی را به‌کار خواهیم برد. (این اثبات‌ها را در پیوست III آورده‌ایم، زیرا معمولاً در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ارائه نمی‌شوند. این نوع اثبات‌ها در دروس پیشرفته‌تر آنالیز ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.) ما فقط هنگام مطالعهٔ دنباله‌ها و سری‌های نامتناهی در فصل ۹، با کاربرد مستقیم ویژگی کمال برخورد می‌کنیم.

مجموعهٔ اعداد حقیقی دارای چند زیرمجموعهٔ خاص مهم است:

(یک) **اعداد طبیعی** یا **اعداد صحیح مثبت**، یعنی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ...

(دو) **اعداد صحیح**، یعنی ۰، ۱±، ۲±، ۳±، ...

(سه) **اعداد گویا**، یعنی اعدادی که می‌توان آنها را به‌صورت کسرهایی نظیر $m/n$ که درآن $m$ و $n$ دو عدد صحیح هستند و $n \neq ۰$، بیان کرد.

اعداد گویا دقیقاً آن اعداد حقیقی‌ای هستند که بسط اعشاری آنها

(آ) یا مختوم است، یعنی به‌دنباله‌ای نامتناهی از صفرها ختم می‌شود، نظیر $۳/۴ = ۰٫۷۵۰۰۰۰\ldots$،

(ب) یا متناوب است، یعنی به‌دنباله‌ای از رقم‌ها که تا بینهایت تکرار می‌شوند ختم می‌شود، نظیر $۲٫۰\overline{۹} = ۲٫۰۹۰۹۰۹\ldots = ۲۳/۱۱$. (نماد بار، یعنی ــ، الگوی رقم‌های تکرارشونده را نشان می‌دهد.)

اعداد حقیقی‌ای را که گویا نیستند ***اعداد گنگ*** می‌نامیم.

**مثال ۱** هریک از دو عدد (آ) $۱٫\overline{۳۲} = ۱٫۳۲۳۲۳۲\ldots$ و (ب) $۰٫۳\overline{۴۰۵} = ۰٫۳۴۰۵۴۰۵۴۰۵\ldots$ را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح بنویسید و به‌این ترتیب نشان دهید که گویا هستند.

**حل.**

(آ) فرض می‌کنیم $x = ۱٫۳۲۳۲۳۲\ldots$. دراین‌صورت $x - ۱ = ۰٫۳۲۳۲۳۲\ldots$ و

$$۱۰۰x = ۱۳۲٫۳۲۳۲۳۲\ldots = ۱۳۲ + ۰٫۳۲۳۲۳۲\ldots = ۱۳۲ + x - ۱$$

بنابراین، $۹۹x = ۱۳۱$ و $x = ۱۳۱/۹۹$.

(ب) فرض می‌کنیم $y = ۰٫۳۴۰۵۴۰۵۴۰۵\ldots$. دراین‌صورت $۱۰y = ۳٫۴۰۵۴۰۵۴۰۵\ldots$ و $۱۰y - ۳ = ۰٫۴۰۵۴۰۵۴۰۵\ldots$. همچنین،

$$۱۰۰۰۰y = ۳۴۰۵٫۴۰۵۴۰۵۴۰۵\ldots = ۳۴۰۵ + ۱۰y - ۳$$

بنابراین، $۹۹۹۰y = ۳۴۰۲$ و $y = ۳۴۰۲/۹۹۹۰ = ۶۳/۱۸۵$. ■

مجموعهٔ اعداد گویا دارای همهٔ ویژگی‌های جبری و ترتیبی اعداد حقیقی است، ولی فاقد ویژگی کمال است. مثلاً عددی گویا وجود ندارد که مجذور آن ۲ بشود. بنابراین، بر «خط گویا» در همان جایی که $\sqrt{۲}$ باید باشد یک «سوراخ» وجود دارد.[1] چون خط حقیقی دارای چنین «سوراخ‌هایی» نیست، چارچوب مناسبی برای مطالعهٔ حد و بنابراین، حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

## بازه‌ها

زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی را وقتی **بازه** می‌نامیم که حاوی حداقل دو عدد و نیز حاوی همهٔ اعداد واقع بین هر دو عنصر خود باشد. مثلاً مجموعهٔ اعداد حقیقی $x$ به‌طوری که $x > ۶$ یک بازه است، ولی مجموعهٔ اعداد حقیقی $y$ به‌طوری که $y \neq ۰$ یک بازه نیست (چرا؟). این مجموعه از دو بازه تشکیل شده است.

فرض می‌کنیم $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند و $a < b$. دراین‌صورت

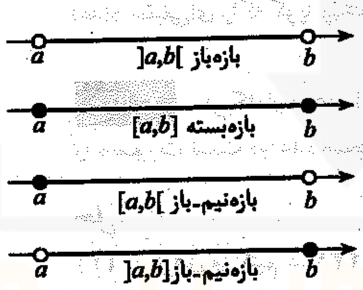
(یک) **بازهٔ باز** $a$ تا $b$ که با $]a\,,b[$ نشان داده می‌شود از همهٔ اعداد حقیقی $x$ تشکیل شده است که در نابرابری‌های $a < x < b$ صدق می‌کنند،

(دو) **بازهٔ بسته** $a$ تا $b$ که با $[a\,,b]$ نشان داده می‌شود از همهٔ اعداد حقیقی $x$ تشکیل شده است که در نابرابری‌های $a \le x \le b$ صدق می‌کنند،

(سه) **بازهٔ نیم ـ باز** $[a\,,b[$ از همهٔ اعداد حقیقی $x$ تشکیل شده است که در نابرابری‌های $a \le x < b$ صدق می‌کنند و

(چهار) **بازهٔ نیم ـ باز** $]a\,,b]$ از همهٔ اعداد حقیقی $x$ تشکیل شده است که در نابرابری‌های $a < x \le b$ صدق می‌کنند.

این بازه‌ها در شکل پ.۲ نشان داده شده‌اند. به‌کاربرد نقاط توخالی برای مشخص کردن نقاط انتهایی‌ای که جزء بازه‌ها نیستند و نقاط توپر برای مشخص کردن نقاط انتهایی‌ای که جزء بازه‌ها هستند توجه داشته باشید. نقاط انتهایی بازه‌ها را **نقاط مرزی** نیز می‌نامیم.



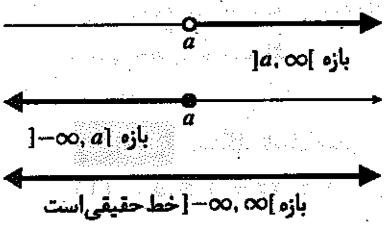
**شکل پ.۲** بازه‌های کراندار

بازه‌های شکل پ.۲ را **بازه‌های کراندار** می‌نامیم. هریک از آنها دارای طول متناهی $b - a$ است. بازه‌ها می‌توانند دارای طول بینهایت نیز باشند. دراین حالت آنها را **بازه‌های بیکران** می‌نامیم. در شکل پ.۳ چند بازه از بازه‌های بیکران را نشان داده‌ایم. توجه داشته باشید که کل خط حقیقی $\mathbb{R}$ نیز یک بازه است که آن را با $]-\infty\,,\infty[$ نشان می‌دهیم. نماد $\infty$ (بینهایت) بیانگر هیچ عدد حقیقی نیست و از

---

۱. چرا $\sqrt{۲}$ گنگ است؟ فرض می‌کنیم برعکس، $\sqrt{۲}$ گویا باشد. دراین‌صورت $\sqrt{۲} = m/n$ که درآن $m$ و $n$ دو عدد صحیح هستند و $n \neq ۰$. می‌توان فرض کرد کسر $m/n$ به «ساده‌ترین صورت» درآمده است، یعنی همهٔ عوامل مشترک $m$ و $n$ ساده شده‌اند. پس $m^۲/n^۲ = ۲$ و از این‌رو، $m^۲ = ۲n^۲$ یک عدد صحیح زوج است. بنابراین، $m$ نیز باید زوج باشد. (مجذور هر عدد صحیح فرد همواره فرد است.) چون $m$ زوج است می‌توانیم بنویسیم $m = ۲k$ که درآن $k$ عددی صحیح است. بدین‌سان، $۴k^۲ = ۲n^۲$ و $n^۲ = ۲k^۲$. عدد صحیح اخیر زوج است، پس $n$ نیز زوج است. این ناقض این فرض است که می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به‌صورت کسر ساده نشدنی $m/n$ بنویسیم؛ $m$ و $n$ نمی‌توانند همزمان زوج باشند. بنابراین، عددی گویا وجود ندارد که مجذور آن ۲ بشود.

این‌رو، هرگز آن را در بازه نمی‌گنجانیم.




**شکل پ.۳** بازه‌های بیکران

**مثال ۲** نامعادله‌های زیر را حل کنید. در هر مورد، مجموعهٔ جواب را برحسب بازه‌ها بیان و آن را رسم کنید.

(آ) $۲x - ۱ > x + ۳$ (ب) $-\frac{x}{۳} \geq ۲x - ۱$

(پ) $\frac{۲}{x-۱} \geq ۵$

*حل.*

(آ)

| | |
|---|---|
| به‌دو طرف، ۱ اضافه می‌کنیم | $۲x - ۱ > x + ۳$ |
| از دو طرف، $x$ را کم می‌کنیم | $۲x > x + ۴$ |
| مجموعهٔ جواب، بازهٔ $]۴, \infty[$ است | $x > ۴$ |

(ب)

| | |
|---|---|
| دو طرف را در ۳− ضرب می‌کنیم | $-\frac{x}{۳} \geq ۲x - ۱$ |
| به‌دو طرف، $۶x$ اضافه می‌کنیم | $x \leq -۶x + ۳$ |
| دو طرف را بر ۷ تقسیم می‌کنیم | $۷x \leq ۳$ |
| مجموعهٔ جواب، بازهٔ $]-\infty, ۳/۷]$ است | $x \leq \frac{۳}{۷}$ |

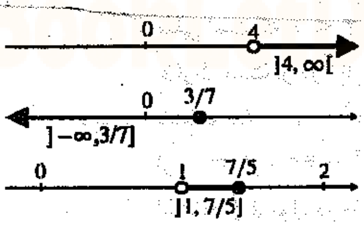
نماد ⇔ یعنی «اگر و فقط اگر» یا «هم‌ارز است با». اگر $A$ و $B$ دو گزاره باشند، آنگاه $A \Leftrightarrow B$ به‌این معنی است که درستی هریک از این دو گزاره مستلزم درستی دیگری است و از این‌رو، یا باید هر دوی آنها درست باشند، یا هر دو نادرست.

(پ) عدد ۵ را به‌طرف چپ می‌بریم و سپس ساده می‌کنیم تا نامعادلهٔ مفروض به‌صورت هم‌ارز زیر درآید:

$$\frac{۲}{x-۱} - ۵ \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{۲ - ۵(x-۱)}{x-۱} \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{۷ - ۵x}{x - ۱} \geq ۰$$

کسر $(۷ - ۵x)/(x - ۱)$ در $x = ۱$ تعریف نشده است و در $x = ۷/۵$ صفر می‌شود. به‌استثنای این دو عدد، این کسر مثبت است هرگاه صورت و مخرج آن هم‌علامت باشند و منفی است هرگاه دارای علامت مخالف هم باشند. آسان‌ترین روش برای تنظیم اطلاعات مربوط به‌علامت، تشکیل جدول زیر است:

| $x$ | | ۱ | | ۷/۵ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۷ - ۵x$ | + | + | + | ۰ | − |
| $x - ۱$ | − | ۰ | + | + | + |
| $(۷ - ۵x)/(x - ۱)$ | − | تعریف نشده | + | ۰ | − |




**شکل پ.۴** بازه‌های مربوط به‌مثال ۲

بدین‌سان، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مفروض عبارت است از بازهٔ $]۱, ۷/۵]$.

گاهی لازم است دستگاهی متشکل از دو یا بیشتر از دو نامعادله راکه باید همزمان برقرار باشند حل کنیم. دراین وضع نیز نخست هر نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و سپس اعدادی را می‌یابیم که متعلق به‌اشتراک مجموعه‌های جواب باشند.

**مثال ۳** دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنید:

(آ) $۵ \leq ۲x + ۱ \leq ۳$ (ب) $۳x - ۱ < ۵x + ۳ \leq ۲x + ۱۵$.

*حل.*

(آ) با استفاده از فن به‌کار رفته در مثال ۲، نامعادلهٔ $۳ \leq ۲x + ۱$ را حل می‌کنیم تا $۲ \leq ۲x$ و سپس $x \geq ۱$ به‌دست آید. به‌همین ترتیب، نامعادلهٔ $۲x + ۱ \leq ۵$ به $۲x \leq ۴$ منجر می‌شود و از این‌رو، $x \leq ۲$. بنابراین، مجموعهٔ جواب دستگاه (آ) عبارت است از بازهٔ بسته $[۱ , ۲]$.

(ب) هر دو نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} ۵x + ۳ \leq ۲x + ۱۵ \\ ۵x - ۲x \leq ۱۵ - ۳ \\ ۳x \leq ۱۲ \\ x \leq ۴ \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{r} ۳x - ۱ < ۵x + ۳ \\ -۱ - ۳ < ۵x - ۳x \\ -۴ < ۲x \\ -۲ < x \end{array}\right\}$$

مجموعهٔ جواب عبارت است از بازهٔ $]-۲ , ۴]$. ■

حل نامعادله‌های درجهٔ دوم به‌حل معادله‌های درجهٔ دوم متناظر بستگی دارد.

**مثال ۴** **نامعادله‌های درجهٔ دوم**

نامعادله‌های (آ) $x^۲ - ۵x + ۶ < ۰$ و (ب) $۲x^۲ + ۱ > ۴x$ را حل کنید.

*حل.*

(آ) سه‌جمله‌ای $x^۲ - ۵x + ۶$ به‌حاصلضرب $(x - ۲)(x - ۳)$ تجزیه می‌شود و این حاصلضرب، منفی است اگر و فقط اگر دقیقاً یکی از عامل‌ها منفی باشد. چون $x - ۳ < x - ۲$، پس حاصلضرب وقتی منفی است که $x - ۳ < ۰$ و $x - ۲ > ۰$. بدین‌سان، باید $x < ۳$ و $x > ۲$. پس مجموعهٔ جواب عبارت است از بازهٔ باز $]۲ , ۳[$.

(ب) نامعادلهٔ $۲x^۲ + ۱ > ۴x$ هم‌ارز است با $۲x^۲ - ۴x + ۱ > ۰$. معادلهٔ درجهٔ دوم متناظر عبارت است از $۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ که به‌صورت $Ax^۲ + Bx + C = ۰$ است و از این‌رو، می‌توان آن را با استفاده از فرمول درجهٔ دوم حل کرد (بخش پ.۶ را ببینید):

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^۲ - ۴AC}}{۲A} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۸}}{۴} = ۱ \pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین، نامعادلهٔ مفروض را می‌توان به‌صورت

$$\left(x-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(x-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)>0$$

بیان کرد. این نامعادله وقتی برقرار است که یا هر دو عامل طرف چپ مثبت یا هردوی آنها منفی باشند. پس یا باید $x<1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ یا باید $x>1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. مجموعهٔ جواب عبارت است از *اجتماع* دو بازه: $\left]-\infty, 1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right[\cup\left]1+\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty\right[$.

---

به‌نماد $\cup$ برای نشان دادن **اجتماع** بازه‌ها توجه داشته باشید. یک عدد حقیقی هنگامی به‌اجتماع چند بازه تعلق دارد که حداقل به‌یکی از آنها تعلق داشته باشد. همچنین، گاهی نیاز داریم **اشتراک** چند بازه را درنظر بگیریم. یک عدد حقیقی هنگامی به‌اشتراک چند بازه تعلق دارد که به **هریک** از آنها تعلق داشته باشد. برای نشان دادن اشتراک، نماد $\cap$ را به‌کار می‌بریم. برای مثال

$$[1,3[\,\cup\,[2,4]=[1,4] \quad \text{در حالی‌که} \quad [1,3[\,\cap\,[2,4]=[2,3[$$

**مثال ۵** نامعادلهٔ $\frac{3}{x-1}<-\frac{2}{x}$ را حل و مجموعهٔ جواب آن را رسم کنید.

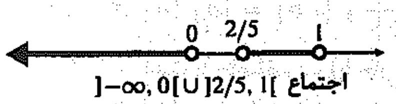
*حل.* میل داریم دو طرف نامعادله را در $x(x-1)$ ضرب کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند، ولی برای این منظور باید سه حالت را درنظر بگیریم (این حالت‌ها کدام‌اند؟). به‌جای این‌کار، جملهٔ طرف راست را به‌چپ می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم تا فقط یک کسر حاصل شود:

$$\frac{3}{x-1}<-\frac{2}{x} \iff \frac{3}{x-1}+\frac{2}{x}<0 \iff \frac{5x-2}{x(x-1)}<0$$

اکنون علامت هریک از سه عاملِ کسر طرف چپ را بررسی می‌کنیم تا معلوم شود چه‌وقت این کسر منفی است:

| $x$ | | $0$ | | $2/5$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{5x-2}{x(x-1)}$ | $-$ | تعریف نشده | $+$ | $0$ | $-$ | تعریف نشده | $+$ |

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مفروض برابر است با اجتماع دو بازه، یعنی $]-\infty, 0[\,\cup\,]2/5, 1[$. شکل پ.۵ را ببینید.




**شکل پ.۵** مجموعهٔ جواب مثال ۵

---

## قدر مطلق

**قدر مطلق** یا **بزرگیِ** عددی مانند $x$ که آن را با $|x|$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم «قدر مطلق $x$»، با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

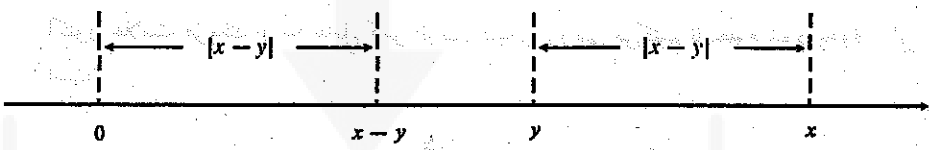
**مثال ۶** $|3| = 3$، $|0| = 0$ و $|-5| = 5$. ∎

ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی $x$، $|x| \geq 0$. همچنین، $|x| = 0$ فقط اگر $x = 0$. به‌نظر عده‌ای، تساوی $|x| = -x$ به‌ازای $x < 0$ گمراه‌کننده است، ولی این تساوی واقعاً درست است زیرا دراین حالت، $-x$ مثبت است. نماد $\sqrt{a}$ همواره ریشهٔ دوم *نامنفی* را نشان می‌دهد و از این‌رو، تعریف دیگر $|x|$ عبارت است از $|x| = \sqrt{x^2}$.

یادآوری این نکته حائز اهمیت است که $\sqrt{a^2} = |a|$. ننویسید $\sqrt{a^2} = a$ مگر اینکه بدانید $a \geq 0$.

از نظر هندسی، $|x|$ فاصلهٔ (نامنفیِ) $x$ تا $0$ بر خط حقیقی را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، $|x - y|$ عبارت است از فاصلهٔ (نامنفیِ) بین نقاط $x$ و $y$ بر خط حقیقی، زیرا این فاصله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $x - y$ از $0$ (شکل پ.۶ را ببینید):

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{اگر } x \geq y \\ y - x & \text{اگر } x < y \end{cases}$$




**شکل پ.۶** فاصلهٔ $x$ از $y$ برابر است با $|x - y|$.

قدرمطلق دارای ویژگی‌های زیر است:

**ویژگی‌های قدرمطلق**

۱. $|-a| = |a|$. هر عدد و قرینه‌اش دارای قدرمطلق یکسان هستند.

۲. $|ab| = |a||b|$ و $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. قدرمطلق حاصلضرب (یا خارج قسمت) دو عدد برابر است با حاصلضرب (یا خارج قسمت) قدرمطلق‌های آنها.

۳. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (نابرابری مثلثی). قدرمطلق مجموع یا تفاضل دو عدد، «کوچکتر است از یا برابر است با» مجموع قدرمطلق‌های آنها.

ویژگی‌های ۱ و ۲ را می‌توان با بررسی حالت‌هایی که $a$ یا $b$ مثبت یا منفی است ثابت کرد. ویژگی سوم از دو ویژگی قبل نتیجه می‌شود، زیرا $\pm ۲ab \leq |۲ab| = ۲|a||b|$. بنابراین،

$$|a \pm b|^۲ = (a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲$$

$$\leq |a|^۲ + ۲|a||b| + |b|^۲ = (|a| + |b|)^۲$$

اکنون اگر ریشهٔ دوم (مثبت) دو طرف را محاسبه کنیم می‌بینیم که $|a \pm b| \leq |a| + |b|$. نتیجهٔ اخیر را به‌این سبب «نابرابری مثلثی» می‌نامیم که بنابر یک حقیقت هندسی، در مثلث طول یک ضلع نمی‌تواند بیشتر از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر باشد. برای مثال، اگر نقاط ۰، $a$ و $b$ واقع بر خط حقیقی را رأس‌های یک مثلث «تباهیده» تلقی کنیم، آنگاه ضلع‌های مثلث دارای طول‌های $|a|$، $|b|$ و $|a - b|$ هستند. مثلث اخیر به‌این سبب تباهیده است که هر سه رأس آن بر یک خط راست قرار گرفته‌اند.

### معادله‌ها و نامعادله‌های حاوی قدرمطلق

معادلهٔ $|x| = D$ (که درآن $D > ۰$) دو جواب دارد، $x = D$ و $x = -D$: دو نقطه بر خط حقیقی که به‌فاصلهٔ $D$ از مبدأ قرار دارند. معادله‌ها و نامعادله‌هایی را که حاوی قدرمطلق هستند می‌توانیم به‌طور جبری به‌این ترتیب حل کنیم که با توجه به‌تعریف قدرمطلق، آنها را به‌حالت‌های گوناگون تقسیم کنیم. ولی اغلب با توجه به‌تعبیر قدرمطلق به‌عنوان فاصله، می‌توان آنها را به‌طور هندسی نیز حل کرد. مثلاً نامعادلهٔ $|x - a| < D$ می‌گوید فاصلهٔ $x$ از $a$ کوچکتر از $D$ است و از این‌رو، باید بین $a - D$ و $a + D$ قرار گیرد (یا $a$ باید بین $x - D$ و $x + D$ قرار گیرد). اگر $D$ عددی مثبت باشد، آنگاه

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert x\rvert = D$ | $\Leftrightarrow$ | $x = D$ یا $x = -D$ |
| $\lvert x\rvert < D$ | $\Leftrightarrow$ | $-D < x < D$ |
| $\lvert x\rvert \leq D$ | $\Leftrightarrow$ | $-D \leq x \leq D$ |
| $\lvert x\rvert > D$ | $\Leftrightarrow$ | $x > D$ یا $x < -D$ |

به‌طور کلی

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert x - a\rvert = D$ | $\Leftrightarrow$ | $x = a + D$ یا $x = a - D$ |
| $\lvert x - a\rvert < D$ | $\Leftrightarrow$ | $a - D < x < a + D$ |
| $\lvert x - a\rvert \leq D$ | $\Leftrightarrow$ | $a - D \leq x \leq a + D$ |
| $\lvert x - a\rvert > D$ | $\Leftrightarrow$ | $x > a + D$ یا $x < a - D$ |

**مثال ۷** نامعادله‌های (آ) $|۲x + ۵| = ۳$ و (ب) $|۳x - ۲| \leq ۱$ را حل کنید.

**حل.**

(آ) می‌دانیم که $|۲x + ۵| = ۳ \Leftrightarrow ۲x + ۵ = \pm ۳$. بدین‌سان، یا $۲x = -۳ - ۵ = -۸$ یا

$۲x = ۳ - ۵ = -۲$ . جواب‌ها عبارت‌اند از $x = -۴$ و $x = -۱$.

(ب) می‌دانیم که $|۳x - ۲| \leq ۱ \Leftrightarrow -۱ \leq ۳x - ۲ \leq ۱$ . این جفت نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳x - ۲ \leq ۱ \\ ۳x \leq ۱ + ۲ \\ x \leq ۱ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} -۱ \leq ۳x - ۲ \\ -۱ + ۲ \leq ۳x \\ ۱/۳ \leq x \end{cases}$$

بدین‌سان، جواب‌ها عبارت‌اند از اعداد بازهٔ $[۱/۳ , ۱]$ .

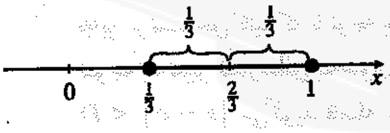
**تذکر.** با توجه به‌تعبیر قدرمطلق به‌عنوان فاصله، قسمت (ب) در مثال ۷ به‌طور هندسی به‌صوت زیر حل می‌شود:

$$|۳x - ۲| = \left|۳\left(x - \frac{۲}{۳}\right)\right| = ۳\left|x - \frac{۲}{۳}\right|$$

بدین‌سان، نامعادلهٔ مفروض می‌گوید $۳\left|x - \frac{۲}{۳}\right| \leq ۱$ یا

$$\left|x - \frac{۲}{۳}\right| \leq \frac{۱}{۳}$$

نابرابری اخیر هم می‌گوید فاصلهٔ $x$ تا $۲/۳$ بیشتر از $۱/۳$ نیست. بنابراین، جواب‌های مطلوب $x$ عبارت‌اند از نقاط بین $۱/۳$ و ۱، به‌انضمام این دو نقطهٔ انتهایی. (شکل پ.۷ را ببینید.)




**شکل پ.۷** مجموعهٔ جواب مثال ۷ (ب)

**مثال ۸** معادلهٔ $|x - ۳| = |x + ۱|$ را حل کنید.

**حل.** این معادله می‌گوید $x$ از ۱− و ۳ به‌یک فاصله است. بنابراین، $x$ وسط پاره‌خط واصل بین ۱− و ۳ است و از این‌رو، $x = (-۱ + ۳)/۲ = ۱$. روش دیگر حل این است که بگوییم $x - ۳ = x + ۱$ یا $x + ۱ = -(x - ۳)$. معادلهٔ اول جواب ندارد و معادلهٔ دوم دارای جواب $x = ۱$ است.

**مثال ۹** کدام مقادیر $x$ در نامعادلهٔ $\left|۵ - \frac{۲}{x}\right| < ۳$ صدق می‌کنند؟

**حل.** داریم

$$\left|۵ - \frac{۲}{x}\right| < ۳ \quad \Leftrightarrow \quad -۳ < ۵ - \frac{۲}{x} < ۳$$

۵ را از هر طرف کم می‌کنیم

$$-۸ < -\frac{۲}{x} < -۲$$

هر طرف را بر ۲− تقسیم می‌کنیم

$$۴ > \frac{۱}{x} > ۱$$

عددها را عکس می‌کنیم

$$\frac{۱}{۴} < x < ۱$$

دراین محاسبات، دستگاهی متشکل از دو نامعادله را، به‌جای تبدیل به‌دو نامعادلهٔ جداگانه نظیر مثال‌های قبل، همزمان حل کردیم. توجه داشته باشید که چگونه در اینجا قواعد گوناگونِ مربوط به‌نابرابری‌ها را به‌کار بردیم. ضرب یک نابرابری در یک عدد منفی، جهت نابرابری را عوض می‌کند. به‌همین ترتیب اگر دو طرف یک نابرابری مثبت باشند و آنها را عکس کنیم جهت نابرابری عوض می‌شود. نامعادلهٔ مفروض به‌ازای همهٔ $x$های متعلق به‌بازهٔ باز ] ۱ , ۱/۴ [ برقرار است. ■

## تمرینات پ.۱

در تمرین‌های ۱ و ۲، عدد گویای مفروض را به‌صورت اعشاریِ متناوب بیان کنید. روی رقم‌های تکراری، نماد بار (‾) بگذارید.

۱. $\frac{۲}{۹}$

۲. $\frac{۱}{۱۱}$

در تمرین‌های ۳ و ۴، بسط اعشاریِ متناوب مفروض را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح ساده نشدنی بیان کنید.

۳. $۰/\overline{۱۲}$

۴. $۳/\overline{۲۷}$

۵. اعداد گویای ۱/۷ ، ۲/۷ ، ۳/۷ و ۴/۷ را به‌صورت اعشاریِ متناوب بیان کنید. (با استفاده از ماشین‌حساب، تا آنجا که ممکن است رقم‌های اعشاری را بنویسید.) آیا الگویی تکراری مشاهده می‌کنید؟ بسط اعشاری ۵/۷ و ۶/۷ را حدس بزنید و حدس خود را بررسی کنید.

۶. آیا ممکن است دو بسط اعشاری مختلف، عدد واحدی را نمایش دهند؟ بسط اعشاری $۰/\overline{۹} = ۰/۹۹۹...$ کدام عدد را نمایش می‌دهد؟

در تمرین‌های ۷ تا ۱۲، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی $x$ را که در شرایط داده شده صدق می‌کنند به‌صورت یک بازه یا اجتماع چند بازه بیان کنید.

۷. $x \geq ۰$ و $x \leq ۵$

۸. $x < ۲$ و $x \geq -۳$

۹. $x > -۵$ یا $x < -۶$

۱۰. $x \leq -۱$

۱۱. $x > -۲$

۱۲. $x < ۴$ یا $x \geq ۲$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۲۶، نامعادلهٔ مفروض را حل کنید و مجموعهٔ جواب را به‌صورت یک بازه یا اجتماع چند بازه ارائه دهید.

۱۳. $-۲x > ۴$

۱۴. $۴x + ۵ \leq ۸$

۱۵. $۵x - ۳ \leq ۷ - ۳x$

۱۶. $\frac{۶ - x}{۴} \geq \frac{۳x - ۴}{۲}$

۱۷. $۳(۲ - x) < ۲(۳ + x)$

۱۸. $x^۲ < ۹$

۱۹. $\frac{۱}{۲ - x} < ۳$

۲۰. $\frac{x + ۱}{x} \geq ۲$

۲۱. $x^۲ - ۲x \leq ۰$

۲۲. $۶x^۲ - ۵x \leq -۱$

۲۳. $x^۳ > ۴x$

۲۴. $x^۲ - x \leq ۲$

۲۵. $\frac{x}{۲} \geq ۱ + \frac{۴}{x}$

۲۶. $\frac{۳}{x - ۱} < \frac{۲}{x + ۱}$

معادله‌های تمرین‌های ۲۷ تا ۳۲ را حل کنید.

۲۷. $|x| = ۳$

۲۸. $|x - ۳| = ۷$

۲۹. $|۲t + ۵| = ۴$

۳۰. $|۱ - t| = ۱$

۳۱. $|۸ - ۳s| = ۹$

۳۲. $\left|\frac{s}{۲} - ۱\right| = ۱$

در تمرین‌های ۳۳ تا ۴۰، بازه‌ای را که با نامعادلهٔ مفروض تعریف شده است بنویسید.

۳۳. $|x| < ۲$

۳۴. $|x| \leq ۲$

۳۵. $|s - ۱| \leq ۲$

۳۶. $|t + ۲| < ۱$

۳۷. $|۳x - ۷| < ۲$

۳۸. $|۲x+۵|<۱$

۳۹. $\left|\frac{x}{۲}-۱\right|\le ۱$

۴۰. $\left|۲-\frac{x}{۲}\right|<\frac{۱}{۲}$

در تمرین‌های ۴۱ و ۴۲، نامعادلهٔ مفروض را با استفاده از تعبیر آن به‌عنوان فاصله بر خط حقیقی حل کنید.

۴۱. $|x+۱|>|x-۳|$

۴۲. $|x-۳|<۲\,|x|$

۴۳. در دام $|-a|=a$ گرفتار نشوید. به‌ازای کدام اعداد حقیقی $a$، این معادله درست است؟ به‌ازای کدام اعداد، این معادله نادرست است؟

۴۴. معادلهٔ $|x-۱|=۱-x$ را حل کنید.

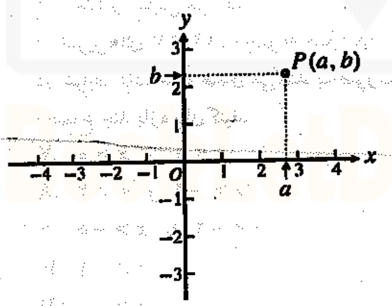
۴۵. نشان دهید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$، نابرابری زیر برقرار است:

$$|a-b|\ge\big||a|-|b|\big|$$

## پ.۲ مختصات دکارتی در صفحه

مکان هر نقطهٔ صفحه را می‌توان نسبت به‌دو خط حقیقی عمود بر هم در صفحه که یکدیگر را در مبدأ خود قطع می‌کنند مشخص کرد. این دو خط را **محورهای مختصات** در صفحه می‌نامیم. معمولاً (ولی نه همیشه) یکی از این محورها را محور $x$ می‌نامیم و آن را افقی رسم می‌کنیم و روی آن، اعداد $x$ به‌طرف راست افزایش می‌یابند. محور دیگر را محور $y$ می‌نامیم و آن را قائم رسم می‌کنیم و روی آن، اعداد $y$ به‌طرف بالا افزایش می‌یابند. نقطهٔ برخورد محورهای مختصات را (یعنی نقطه‌ای که در آن، $x$ و $y$ هر دو صفر هستند) مبدأ می‌نامیم و غالباً آن را با حرف $O$ نشان می‌دهیم.

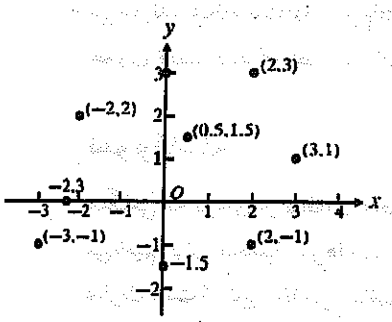
اگر $P$ نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد می‌توانیم از $P$ خطی بر محور $x$ عمود کنیم. اگر $a$ مقدار $x$ در نقطه‌ای باشد که این خط محور $x$ را قطع می‌کند، $a$ را $x$ـ**مختص** $P$ می‌نامیم. به‌همین ترتیب $y$ـ**مختص** $P$ برابر است با مقدار $y$ در نقطه‌ای که خط گذرنده از $P$ و عمود بر محور $y$، محور $y$ را قطع می‌کند. جفت مرتب $(a\,,b)$ را **مختصات دکارتی** نقطهٔ $P$ می‌نامیم. هنگام اشاره به‌نقطه می‌نویسیم $P(a\,,b)$ تا به‌این ترتیب، هم نقطه را نام برده باشیم و هم مختصات آن، یعنی $(a\,,b)$ را. (شکل پ.۸ را ببینید.) توجه داشته باشید که در جفت مرتب $(a\,,b)$، نخست $x$ـ مختص ظاهر می‌شود. جفت‌های مرتب $(a\,,b)$ در تناظر یک به‌یک با نقاط صفحه قرار دارند، به‌این معنی که هر نقطه فقط دارای یک جفت مرتب از مختصات است و هر جفت مرتب از مختصات، فقط یک نقطه را تعیین می‌کند. هر مجموعه از محورهای مختصات و جفت‌های مرتب مختصات را که این محورها تعیین می‌کنند به‌افتخار رنه دکارت[1]، یکی از فیلسوفان قرن هفدهم که مخترع هندسهٔ تحلیلی (یا مختصاتی) بود، یک **دستگاه مختصات دکارتی** در صفحه می‌نامیم. صفحه‌ای که مجهز به چنین دستگاه مختصاتی باشد یک **صفحهٔ دکارتی** نام دارد.




**شکل پ.۸** محورهای مختصات و نقطهٔ $P$ به‌مختصات $(a\,,b)$

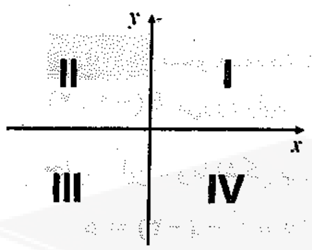
1. Rene′ Descartes

شکل پ.۹ مختصات چند نقطهٔ صفحه را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که همهٔ نقاط محور $x$ دارای $y$ ـ مختصِ صفر هستند. برای نشانگذاری این نقاط معمولاً فقط $x$ ـ مختص آنها را می‌نویسیم. به‌همین ترتیب به‌ازای نقاط محور $y$ داریم $x = ۰$ و می‌توانیم آنها را فقط با $y$ ـ مختصشان نشانگذاری کنیم.




**شکل پ.۹** چند نقطه و مختصات آنها

محورهای مختصات، صفحه را به‌چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هرکدام را یک ربع می‌نامیم. مطابق شکل پ.۱۰، این چهار ناحیه را از I تا IV شماره‌گذاری می‌کنیم. **ربع اول**، ناحیهٔ بالاییِ راست است. هر دو مختص نقاط متعلق به‌این ربع، اعدادی مثبت هستند. در ربع III هر دو مختص، منفی هستند. در ربع II فقط $y$ مثبت است و در ربع IV فقط $x$ مثبت است.




**شکل پ.۱۰** چهار ربع صفحه

## مقیاس محورها

وقتی داده‌ها یا فرمول‌هایی را که واحد اندازه‌گیری متغیرهایشان یکی نیست در صفحهٔ مختصات رسم می‌کنیم، لازم نیست روی هر دو محور، مقیاس واحدی به‌کار ببریم. مثلاً وقتی ارتفاع یک سنگریزهٔ درحال سقوط را نسبت به‌زمان اندازه می‌گیریم دلیلی ندارد که نقاط واقع بر محور ارتفاع و محور زمان که به‌ترتیب، ۱ متر و یک ثانیه را نشان می‌دهند به‌یک فاصله از مبدأ باشند.

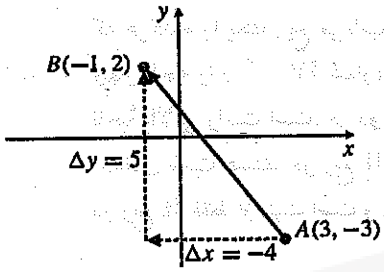
وقتی می‌خواهیم در صفحهٔ مختصات، نمودار توابعی را که متغیرهایشان بیانگر کمیت‌های فیزیکی نیستند نشان دهیم یا وقتی می‌خواهیم شکل‌هایی را به‌منظور مطالعهٔ ویژگی‌های هندسی یا مثلثاتی آنها رسم کنیم، مقیاس‌ها را معمولاً یکی می‌گیریم. دراین وضع، واحد فاصله بر محور افقی و قائم یکسان است. درست مانند نقشهٔ مساحی یا مقیاس نقشه‌ها، پاره‌خط‌هایی که بنابر فرض باید همطول باشند علی‌الاصول این‌طور هستند. همین‌طور زاویه‌هایی که بنابر فرض باید برابر باشند، برابر نیز به‌نظر می‌رسند. بعضی از نتایج هندسی‌ای که بعداً به‌دست می‌آیند، نظیر وابستگیِ موجود بین شیب‌های خطوط عمود بر هم، فقط وقتی معتبرند که مقیاس‌های به‌کار رفته بر هر دو محور مختصات یکی باشند.

ترسیم‌های کامپیوتری، بحث دیگری را تشکیل می‌دهند. مقیاس‌های قائم و افقی در نمودارهایی که توسط ماشین رسم می‌شوند معمولاً متفاوت‌اند و به‌همین سبب دگرگونی‌هایی در فاصله‌ها، شیب‌ها و زاویه‌ها مشاهده می‌شوند. دایره‌ها ممکن است به‌صورت بیضی، مربع‌ها به‌صورت مستطیل یا حتی متوازی‌الاضلاع و زاویه‌های قائمه به‌صورت حاده یا منفرجه ظاهر شوند. دراین شرایط، برای تعبیر آنچه با چشم می‌بینیم باید دقت و احتیاط بسیار مبذول داریم. نرم‌افزارهای کامپیوتریِ دارای کیفیت بالا که برای رسم نمودارهای دکارتی طراحی شده‌اند معمولاً به‌کاربر امکان می‌دهند تا با تنظیم ***نسبت ابعاد*** (یعنی نسبت مقیاس قائم به‌افقی)، مسائل مربوط به‌مقیاس را اصلاح کند. بعضی از نمایشگرهای کامپیوتری نیز این تنظیم را در محدودهٔ کوچکی ممکن

می‌سازند. هنگام استفاده از نرم‌افزار رسم نمودار، سعی کنید پیکربندی نرم‌افزاری / سخت‌افزاری خود را طوری تنظیم کنید که قطرهای افقی و قائم یک دایرهٔ رسم شده برابر به‌نظر برسند.

## نمو و فاصله

هنگامی که ذره‌ای از نقطه‌ای به‌نقطه‌ای دیگر حرکت می‌کند، تغییر خالصِ حاصل در هر مختص آن را نمو می‌نامیم. برای محاسبهٔ نموها باید مختصات نقطهٔ آغاز را از مختصات نقطهٔ پایان کم کنیم. نمو یک متغیر عبارت است از تغییر خالصِ حاصل در مقدار آن متغیر. اگر مقدار $x$ از $x_1$ به $x_2$ تبدیل شود، آنگاه نمو آن عبارت است از $\Delta x = x_2 - x_1$.




**شکل پ.۱۱** نموهای $x$ و $y$

**مثال ۱** نمو مختصات ذره‌ای را که از $A(3, -3)$ به $B(-1, 2)$ می‌رود بیابید.

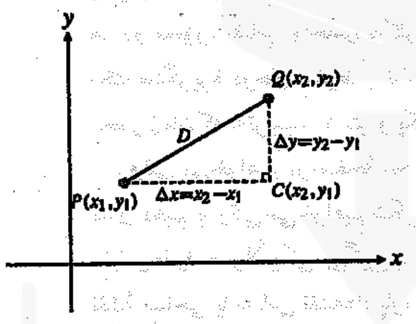
**حل.** این نموها (شکل پ.۱۱ را ببینید) عبارت‌اند از:

$$\Delta x = -1 - 3 = -4, \qquad \Delta y = 2 - (-3) = 5$$

اگر $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند، مطابق شکل پ.۱۲ پاره‌خط $PQ$ عبارت است از وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $PCQ$. ضلع‌های دیگر این مثلث، یعنی $PC$ و $CQ$، به‌ترتیب دارای طول‌های

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| \qquad , \qquad |\Delta y| = |y_2 - y_1|$$

هستند. اینها به‌ترتیب عبارت‌اند از ***فاصلهٔ افقی*** و ***فاصلهٔ قائم*** بین $P$ و $Q$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس، طول $PQ$ برابر است با ریشهٔ دوم مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع دیگر.




**شکل پ.۱۲** فاصلهٔ بین $P$ و $Q$ عبارت است از $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

**فرمول فاصله برای نقاط صفحه**

اگر فاصلهٔ بین نقاط $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ را $D$ بنامیم، آنگاه

$$D = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**مثال ۲** فاصلهٔ بین $A(3, -3)$ و $B(-1, 2)$ در شکل پ.۱۱ (برحسب واحد طول) برابر است با

$$\sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

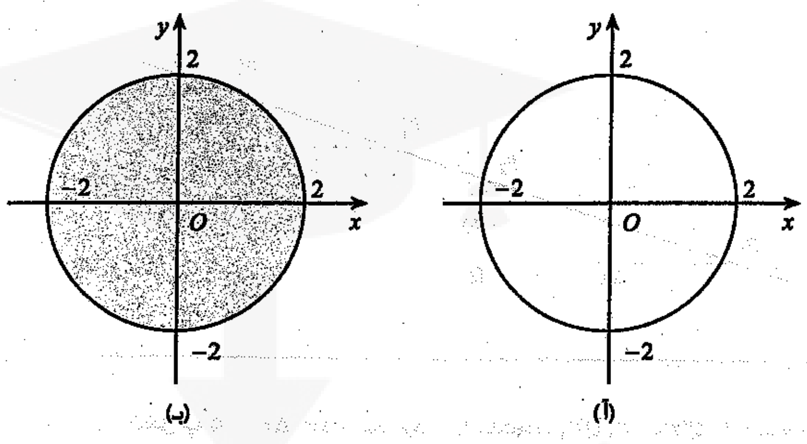
**مثال ۳** فاصلهٔ بین مبدأ $O(\circ , \circ)$ و نقطهٔ $P(x,y)$ برابر است با

$$\sqrt{(x-\circ)^۲+(y-\circ)^۲}=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

## نمودارها

**نمودار** یک معادله (یا یک نامعادله) که حاوی متغیرهای $x$ و $y$ است مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند $P(x,y)$ است که مختصاتشان در معادلهٔ (یا نامعادلهٔ) مفروض صدق می‌کنند.

**مثال ٤** معادلهٔ $x^۲+y^۲=۴$ همهٔ نقاطی مانند $P(x,y)$ را نشان می‌دهد که فاصلهٔ آنها تا مبدأ برابر است با $۲=\sqrt{۴}=\sqrt{x^۲+y^۲}$. این نقاط، روی دایرهٔ به‌مرکز مبدأ و شعاع ۲ قرار دارند. این دایره، نمودار معادلهٔ $x^۲+y^۲=۴$ است. (شکل پ.۱۳(آ) را ببینید.)

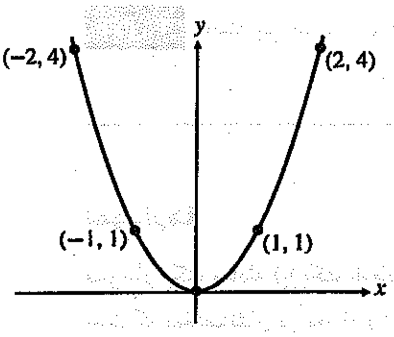



**شکل پ.۱۳** (آ) دایرهٔ $x^۲+y^۲=۴$ (ب) قرص $x^۲+y^۲\leq ۴$

**مثال ۵** نقاط $(x,y)$ که مختصاتشان در نامعادلهٔ $x^۲+y^۲\leq ۴$ صدق می‌کنند همگی به‌فاصلهٔ حداکثر ۲ از مبدأ قرار دارند. بنابراین، نمودار این نامعادله قرص به‌مرکز مبدأ و شعاع ۲ است. (شکل پ.۱۳(ب) را ببینید.)

**مثال ۶** معادلهٔ $y=x^۲$ را درنظر می‌گیریم. بعضی از نقاطی که مختصاتشان در این معادله صدق می‌کنند عبارت‌اند از $(\circ , \circ)$، $(۱ , ۱)$، $(-۱ , ۱)$، $(۲ , ۴)$ و $(-۲ , ۴)$. این نقاط (و همهٔ نقاط دیگری که در این معادله صدق می‌کنند) روی خم هموازی قرار گرفته‌اند که سهمی نام دارد. (شکل پ.۱۴ را ببینید.)

## خط راست



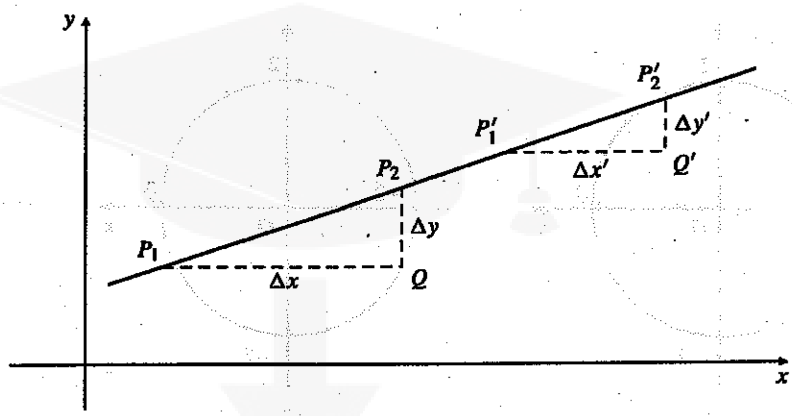

شکل پ.۱۴  سهمی $y = x^۲$

فرض می‌کنیم $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $P_۲(x_۲, y_۲)$ دو نقطه در صفحه باشند. نموهای $\Delta x = x_۲ - x_۱$ و $\Delta y = y_۲ - y_۱$ را به‌ترتیب **رانش** و **خیزش** بین $P_۱$ و $P_۲$ می‌نامیم. هر دو نقطهٔ دلخواه، همواره **خط راست** (یا به‌اختصار، **خط**) یکتایی را که از آن دو می‌گذرد تعیین می‌کنند. این خط را $P_۱P_۲$ می‌نامیم.

هر خط غیرقائم در صفحه دارای این ویژگی است که نسبت

$$m = \frac{\text{خیزش}}{\text{رانش}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $P_۲(x_۲, y_۲)$ متعلق به‌خط، **مقداری یکسان** است. (شکل پ.۱۵ را ببینید.) ثابت $m = \Delta y/\Delta x$ را **شیب** خط غیرقائم می‌نامیم.




**شکل پ.۱۵**  $\Delta y/\Delta x = \Delta y'/\Delta x'$، زیرا مثلث‌های $P_۱QP_۲$ و $P'_۱Q'P'_۲$ متشابه هستند

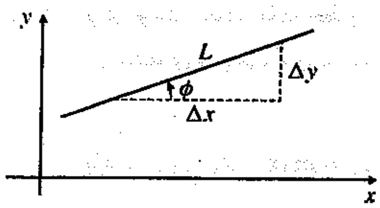
**مثال ۷**  شیب خط گذرنده از $A(۳, -۳)$ و $B(-۱, ۲)$ عبارت است از

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۲ - (-۳)}{-۱ - ۳} = \frac{۵}{-۴} = -\frac{۵}{۴}$$

■

شیب هر خط، فراز و فرود خط و تندی آنها را به‌دست می‌دهد. خطی که دارای شیب مثبت است به‌بالا و طرف راست می‌رود، درحالی‌که خطِ دارای شیب منفی به‌پایین و طرف راست می‌رود. هرچه قدرمطلق شیب بزرگتر باشد، فراز و فرود خط تندتر خواهد بود. چون برای خط قائم، رانش $\Delta x$ صفر است نمی‌توانیم نسبت $m$ را تشکیل دهیم. شیب خط قائم، **تعریف‌نشده** است.

راستای خط را می‌توان با یک زاویه نیز اندازه گرفت. **میل** یک خط عبارت است از کوچکترین زاویهٔ پادساعتگرد از جهت مثبت محور $x$ به‌طرف آن خط. در شکل پ.۱۶، زاویهٔ $\phi$ ( $\phi$ یک حرف الفبای




**شکل پ.۱۶** خط $L$ دارای میل $\phi$ است

یونانی است که «فی» تلفظ می‌شود) میل خط $L$ را نشان می‌دهد. میل هر خط در نابرابری‌های $0^\circ \le \phi < 180^\circ$ صدق می‌کند. میل هر خط افقی برابر $0^\circ$ و میل هر خط قائم برابر $90^\circ$ است.

اگر مقیاس را بر محورها یکسان بگیریم، رابطهٔ بین شیب یک خط غیرقائم و میل آن در شکل پ.۱۶ نشان داده شده است:

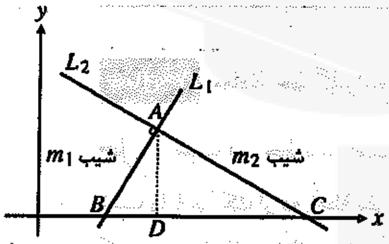
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\phi$$

(تابع مثلثاتی tan را در بخش پ.۷ تعریف خواهیم کرد.)

خطوط موازی، میل یکسان دارند. بنابراین، اگر قائم نباشند شیب آنها نیز یکسان است. برعکس، خطوطی که دارای شیب یکسان هستند، میل یکسان دارند و از این‌رو، موازی‌اند.

اگر دو خط غیرقائم $L_1$ و $L_2$ بر هم عمود باشند شیب‌های آنها، $m_1$ و $m_2$، در رابطهٔ $m_1m_2 = -1$ صدق می‌کنند و از این‌رو، هر یک از این دو شیب برابر است با **قرینهٔ عکس** دیگری:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$




**شکل پ.۱۷** $\Delta ABD$ با $\Delta CAD$ متشابه است

(این نتیجه نیز بر این اساس بنا شده است که مقیاس‌ها بر هر دو محور مختصات یکی هستند.) برای اثبات، با توجه به‌شکل پ.۱۷ می‌بینیم که

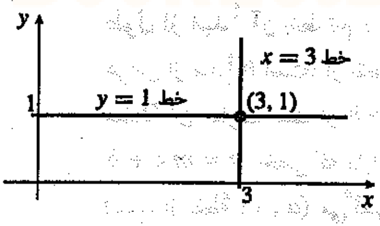
$$m_1 = \frac{AD}{BD}, \quad m_2 = -\frac{AD}{DC}$$

چون $\Delta ABD$ با $\Delta CAD$ متشابه است، داریم $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}$ و از این‌رو،

$$m_1m_2 = \left(\frac{DC}{AD}\right)\left(-\frac{AD}{DC}\right) = -1$$

## معادلهٔ خط

نمودار خط راست و معادلهٔ آن بسیار ساده هستند. $x$ ـ مختص همهٔ نقاط واقع بر خط قائمی که از نقطهٔ $a$ متعلق به‌محور $x$ می‌گذرد، برابر با $a$ است. بدین‌سان، $x = a$ معادلهٔ این خط است. به‌همین ترتیب، $y = b$ معادلهٔ خطی افقی است که محور $y$ را در $b$ قطع می‌کند.




**شکل پ.۱۸** خطوط $y = 1$ و $x = 3$

**مثال ۸** معادله‌های خطوط افقی و قائم گذرنده از نقطهٔ $(3 , 1)$ به‌ترتیب عبارت‌اند از $y = 1$ و $x = 3$ (شکل پ.۱۸ را ببینید).

برای نوشتن معادلهٔ یک خط راست غیرقائم مانند $L$، کافی است شیب آن ($m$) و مختصات نقطه‌ای واقع بر آن مانند $P_1(x_1, y_1)$ را بدانیم. اگر $P(x, y)$ نقطهٔ دلخواه دیگری بر $L$ باشد، آنگاه

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

و از این‌رو، $y - y_1 = m(x - x_1)$ یا

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

معادلهٔ

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

**معادلهٔ نقطه ـ شیب** خطی است که از نقطهٔ $(x_1, y_1)$ می‌گذرد و دارای شیب $m$ است.

**مثال ۹** معادلهٔ خطی را بیابید که دارای شیب $-۲$ است و از نقطهٔ $(۱ , ۴)$ می‌گذرد.

*حل.* در معادلهٔ نقطه ـ شیب خط قرار می‌دهیم $x_1 = ۱$، $y_1 = ۴$ و $m = -۲$. دراین‌صورت $y = -۲(x - ۱) + ۴$ یا

$$y = -۲x + ۶$$ ■

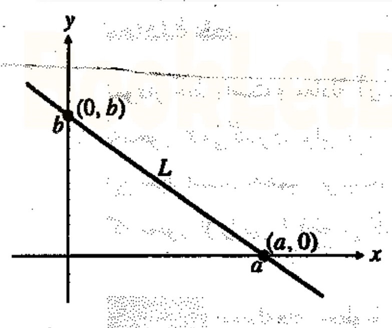
**مثال ۱۰** معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۱ , -۱)$ و $(۳ , ۵)$ را بیابید.

*حل.* شیب این خط برابر است با $m = \frac{۵ - (-۱)}{۳ - ۱} = ۳$. برای نوشتن معادلهٔ خط موردنظر، می‌توانیم این شیب را با هریک از دو نقطهٔ مفروض به‌کار ببریم. اگر $(۱ , -۱)$ را به‌کار ببریم، آنگاه $y = ۳(x - ۱) - ۱$ که به‌صورت $y = ۳x - ۴$ ساده می‌شود.

اگر $(۳ , ۵)$ را به‌کار ببریم، آنگاه $y = ۳(x - ۳) + ۵$ که این نیز به‌صورت $y = ۳x - ۴$ ساده می‌شود. در هر دو مورد، معادلهٔ خط موردنظر عبارت است از $y = ۳x - ۴$. ■

$y$ ـ مختص نقطهٔ برخورد هر خط غیرقائم با محور $y$ را **عرض از مبدأ** آن خط می‌نامیم. (شکل پ.۱۹ را ببینید.) به‌همین ترتیب، $x$ ـ مختص نقطهٔ برخورد هر خط غیرافقی با محور $x$ **طول از مبدأ** آن خط نام دارد. خطی که دارای شیب $m$ و عرض از مبدأ $b$ است، از نقطهٔ $(۰ , b)$ می‌گذرد و از این‌رو، معادلهٔ آن عبارت است از $y = m(x - ۰) + b$ یا به‌اختصار، $y = mx + b$. خطی که دارای شیب $m$ و طول از مبدأ $a$ است، از نقطهٔ $(a , ۰)$ می‌گذرد و از این‌رو، معادلهٔ آن عبارت است از

$$y = m(x - a)$$




**شکل پ.۱۹** خط $L$ دارای طول از مبدأ $a$ و عرض از مبدأ $b$ است

معادلهٔ $y = mx + b$ معادلهٔ شیب ـ عرض از مبدأ خطی است که دارای شیب $m$ و عرض از مبدأ $b$ است.
معادلهٔ $y = m(x - a)$ معادلهٔ شیب ـ طول از مبدأ خطی است که دارای شیب $m$ و طول از مبدأ $a$ است.

**مثال ۱۱** شیب و طول و عرض از مبدأ خطی را که دارای معادلهٔ $۸x + ۵y = ۲۰$ است بیابید.

*حل.* اگر معادله را نسبت به $y$ حل کنیم، آنگاه

$$y = \frac{۲۰ - ۸x}{۵} = -\frac{۸}{۵}x + ۴$$

اگر این را با معادلهٔ کلی شیب ـ عرض از مبدأ خط، یعنی $y = mx + b$، مقایسه کنیم می‌بینیم که شیب خط $m = -۸/۵$ و عرض از مبدأ آن $b = ۴$ است.

برای یافتن طول از مبدأ، در معادله قرار می‌دهیم $y = ۰$ و آن را نسبت به $x$ حل می‌کنیم. دراین‌صورت، $۸x = ۲۰$ یا $x = ۵/۲$. پس، طول از مبدأ $a = ۵/۲$ است. ■

معادلهٔ $Ax + By = C$ را (که درآن $A$ و $B$ با هم صفر نیستند) **صورت کلی یک معادلهٔ خطی** نسبت به $x$ و $y$ می‌نامیم زیرا نمودار آن همواره یک خط راست است و هر خط راست، معادله‌ای به‌این‌صورت دارد.

بسیاری از کمیت‌های مهم به‌وسیلهٔ معادله‌های خطی به‌یکدیگر وابسته‌اند. به‌محض اینکه بدانیم وابستگیِ بین دو متغیر، خطی است می‌توانیم این وابستگی را با استفاده از دو جفت دلخواه از مقادیر متناظر بیابیم، درست همان‌طور که معادلهٔ خط را با استفاده از مختصات دو نقطهٔ آن می‌یابیم.

**مثال ۱۲** وابستگی بین دمای فارنهایت $(F)$ و دمای سانتیگراد $(C)$ با معادله‌ای خطی به‌صورت $F = mC + b$ بیان می‌شود. نقطهٔ انجماد آب $F = ۳۲°$ یا $C = ۰°$ است، درحالی‌که نقطهٔ جوش آن $F = ۲۱۲°$ یا $C = ۱۰۰°$ است. بدین‌سان،

$$۳۲ = ۰m + b, \quad ۲۱۲ = ۱۰۰m + b$$

و از این‌رو، $b = ۳۲$ و $m = \frac{۲۱۲ - ۳۲}{۱۰۰} = \frac{۹}{۵}$. بنابراین، وابستگی یاد شده با معادلهٔ خطی $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ یا

$$C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$$

بیان می‌شود. ■

## تمرینات پ.۲

در تمرین‌های ۱ تا ۴، ذره‌ای از $A$ به $B$ حرکت می‌کند. نمو خالص $\Delta x$ و $\Delta y$ را در مختصات این ذره بیابید. همچنین، فاصلهٔ $A$ از $B$ را محاسبه کنید.

۱. $A(۰, ۳)$ ، $B(۴, ۰)$

۲. $A(-1, 2)$ ، $B(4, -10)$

۳. $A(3, 2)$ ، $B(-1, -2)$

۴. $A(0.5, 3)$ ، $B(2, 3)$

۵. حرکت یک ذره از $A(-2, 3)$ آغاز می‌شود و مختصاتش به‌اندازهٔ $\Delta x = 4$ و $\Delta y = -7$ تغییر می‌کنند. مکان جدید این ذره را بیابید.

۶. ذره‌ای پس از اینکه مختصاتش متحمل نموهای $\Delta x = -5$ و $\Delta y = 1$ می‌شوند به‌نقطهٔ $(-2, -2)$ می‌رسد. حرکت را از کجا آغاز کرده است؟

در تمرین‌های ۷ تا ۱۲، نمودار معادله‌ها و نامعادله‌های مفروض را توصیف کنید.

۷. $x^2 + y^2 = 1$

۸. $x^2 + y^2 = 2$

۹. $x^2 + y^2 \leq 1$

۱۰. $x^2 + y^2 = 0$

۱۱. $y \geq x^2$

۱۲. $y < x^2$

در تمرین‌های ۱۳ و ۱۴، معادلهٔ (آ) خط قائم و (ب) خط افقی گذرنده از نقطهٔ مفروض را بیابید.

۱۳. $(-2, \frac{5}{3})$

۱۴. $(\sqrt{2}, -1.3)$

در تمرین‌های ۱۵ تا ۱۸، معادلهٔ خط گذرنده از $P$ و دارای شیب $m$ را بنویسید.

۱۵. $P(-1, 1)$ ، $m = 1$

۱۶. $P(-2, 2)$ ، $m = \frac{1}{2}$

۱۷. $P(0, b)$ ، $m = 2$

۱۸. $P(a, 0)$ ، $m = -2$

در تمرین‌های ۱۹ و ۲۰، نقطهٔ $P$ روی، بالای یا زیر خط مفروض قرار دارد؟

۱۹. $P(2, 1)$ ، $2x + 3y = 6$

۲۰. $P(3, -1)$ ، $x - 4y = 7$

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۴، معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ مفروض را بنویسید.

۲۱. $(0, 0)$ ، $(2, 3)$

۲۲. $(-2, 1)$ ، $(2, -2)$

۲۳. $(4, 1)$ ، $(-2, 3)$

۲۴. $(-2, 0)$ ، $(0, 2)$

در تمرین‌های ۲۵ و ۲۶، معادلهٔ خطی را بنویسید که دارای شیب $m$ و عرض از مبدأ $b$ است.

۲۵. $m = -2$ ، $b = \sqrt{2}$

۲۶. $m = -\frac{1}{2}$ ، $b = -3$

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۰، طول و عرض از مبدأ خط‌های مفروض را تعیین و نمودار آنها را رسم کنید.

۲۷. $3x + 4y = 12$

۲۸. $x + 2y = -4$

۲۹. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 2$

۳۰. $1.5x - y = -3$

در تمرین‌های ۳۱ و ۳۲، معادلهٔ خطی را بنویسید که از $P$ بگذرد و (آ) با خط مفروض موازی و (ب) بر خط مفروض عمود باشد.

۳۱. $P(2, 1)$ ، $y = x + 2$

۳۲. $P(-2, 2)$ ، $2x + y = 4$

۳۳. نقطهٔ برخورد دو خط $3x + 4y = -6$ و $2x - 3y = 13$ را بیابید.

۳۴. نقطهٔ برخورد دو خط $2x + y = 8$ و $5x - 7y = 1$ را بیابید.

۳۵. **(معادلهٔ طول از مبدأ ـ عرض از مبدأ خط)** اگر خطی نه افقی باشد و نه قائم و از مبدأ نگذرد نشان دهید می‌توان معادلهٔ آن را به‌صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نوشت که درآن $a$ طول از مبدأ و $b$ عرض از مبدأ خط است.

۳۶. طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط به‌معادلهٔ $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۳۷. عرض از مبدأ خط گذرنده از نقاط $(1, 2)$ و $(3, -1)$ را بیابید.

۳۸. خطی از نقاط $(-2, 5)$ و $(k, 1)$ می‌گذرد و دارای طول از مبدأ ۳ است. $k$ را بیابید.

۳۹. هزینهٔ چاپ $x$ نسخه از یک کتاب $C$ دلار است که درآن به‌ازای ثابت‌های معینی مانند $A$ و $B$ داریم $C = Ax + B$. اگر هزینهٔ چاپ ۱۰۰۰۰ نسخه برابر ۵۰۰۰ دلار و هزینهٔ چاپ ۱۵۰۰۰ نسخه برابر ۶۰۰۰ دلار باشد، هزینهٔ چاپ ۱۰۰۰۰۰ نسخه چقدر خواهد بود؟

۴۰. **(مقایسهٔ فارنهایت و سانتیگراد)** در صفحهٔ $FC$، معادلهٔ $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ را رسم کنید (این همان معادلهٔ رابط بین دماهای فارنهایت و سانتیگراد است که در مثال ۱۲ به‌دست آمد). در همین دستگاه مختصات، خط به معادلهٔ $C = F$ را رسم کنید. آیا دمایی هست که درآن، عدد دماسنج سانتیگراد همان عدد دماسنج فارنهایت باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، آن را بیابید.

هندسه

۴۱. با محاسبهٔ طول هر ضلع، نشان دهید مثلثی که رأس‌هایش نقاط $A(2,1)$، $B(6,4)$ و $C(5,-3)$ هستند متساوی‌الساقین است.

۴۲. نشان دهید مثلثی که رأس‌هایش $A(0,0)$، $B(1,\sqrt{3})$ و $C(2,0)$ هستند متساوی‌الاضلاع است.

۴۳. نشان دهید که نقاط $A(2,-1)$، $B(1,3)$ و $C(-3,2)$ سه رأس یک مربع هستند و رأس چهارم را بیابید.

۴۴. مختصات وسط پاره‌خط $P_1P_2$ را که درآن $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ بیابید.

۴۵. مختصات نقطه‌ای از پاره‌خط واصل بین نقاط $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را بیابید که در دو سوم مسیر $P_1$ به $P_2$ قرار دارد.

۴۶. نقطهٔ $P$ روی محور $x$ و نقطهٔ $Q$ روی خط $y=-2x$ قرار دارد و نقطهٔ $(2,1)$ وسط پاره‌خط $PQ$ است. مختصات $P$ را بیابید.

در تمرین‌های ۴۷ و ۴۸، معادلهٔ مفروض را به‌صورت گزاره‌ای دربارهٔ فاصله تعبیر و سپس نمودار آن را رسم کنید.

۴۷. $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$

۴۸. $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

۴۹. به‌ازای کدام مقدار $k$، خط $2x+ky=3$ بر خط $4x+y=1$ عمود است؟ به‌ازای کدام مقدار $k$، این دو خط موازی‌اند؟

۵۰. معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ $(1,2)$ و نقطهٔ برخورد دو خط $x+2y=3$ و $2x-3y=-1$ می‌گذرد.

## پ.۳ نمودار معادلهٔ درجهٔ دوم

این بخش مروری است بر دایره، سهمی، بیضی و هذلولی، یعنی نمودارهایی که با معادله‌های درجهٔ دوم برحسب دو متغیر بیان می‌شوند.

### دایره و قرص

**دایرهٔ به‌مرکز $C$ و شعاع $a$ مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه است که به‌فاصلهٔ $a$ از نقطهٔ $C$ قرار دارند.**

فاصلهٔ نقطهٔ $P(x,y)$ از نقطهٔ $C(h,k)$ برابر است با $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$ و از این‌رو، معادلهٔ دایرهٔ به‌مرکز $C(h,k)$ و شعاع $a>0$ عبارت است از

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=a$$

اگر دو طرف رابطهٔ اخیر را به‌توان دو برسانیم، صورت ساده‌تر معادله به‌دست می‌آید.

**معادلهٔ متعارف دایره**

دایرهٔ به‌مرکز $(h,k)$ و شعاع $a>0$، دارای معادلهٔ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

است. در حالت خاص، معادلهٔ دایرهٔ به‌مرکز مبدأ $(0,0)$ و شعاع $a$ عبارت است از

$$x^2+y^2=a^2$$

**مثال ۱** دایرهٔ به‌مرکز $(3,1)$ و شعاع ۲ (در شکل پ.۲۰) دارای معادلهٔ $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ است. ■

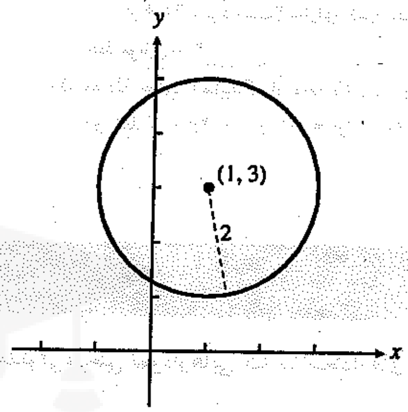
**مثال ۲** مرکز دایرهٔ به‌معادلهٔ $(x+2)^2+(y-1)^2=7$ نقطهٔ $(-2,1)$ و شعاع آن $\sqrt{7}$ است. (شکل پ.۲۱ را ببینید.) ■

اگر در معادلهٔ متعارف $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ پرانتزها را به‌توان برسانیم و مقادیر ثابت را به‌طرف راست ببریم، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

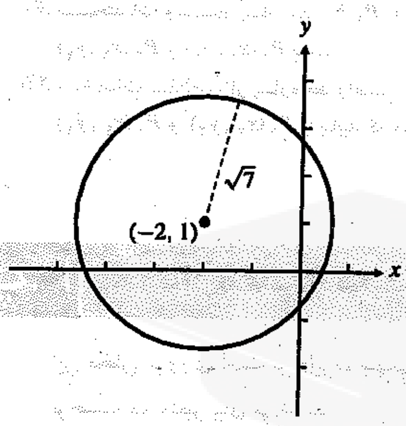
$$x^2-2hx+y^2-2ky=a^2-h^2-k^2$$

هر معادلهٔ درجه دوم به‌صورت

$$x^2+y^2+2ax+2by=c$$




**شکل پ.۲۰** دایرهٔ $(x-1)^2+(y-3)^2=4$




**شکل پ.۲۱** دایرهٔ $(x+2)^2+(y-1)^2=7$

یا نمایشگر یک دایره یا یک نقطه است، یا هیچ نقطه‌ای را نمایش نمی‌دهد. برای تشخیص نمودار این معادله، مجذورهای کاملی در طرف چپ ایجاد می‌کنیم. چون $x^2+2ax$ دو جملهٔ اولِ مجذور کامل $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ را تشکیل می‌دهند، جملهٔ $a^2$ را به‌دو طرف معادلهٔ مفروض اضافه می‌کنیم تا جمله‌های حاوی $x$ مجذور کامل شوند. (توجه داشته باشید که $a^2$ برابر است با **مجذور نصف ضریب** $x$.) به‌همین ترتیب جملهٔ $b^2$ را به‌دو طرف اضافه می‌کنیم تا جمله‌های حاوی $y$ مجذور کامل شوند. اکنون معادلهٔ مفروض به‌صورت

$$(x+a)^2+(y+b)^2=c+a^2+b^2$$

درمی‌آید. اگر $c+a^2+b^2>0$، نمودار موردنظر دایره‌ای به‌مرکز $(-a,-b)$ و شعاع $\sqrt{c+a^2+b^2}$ است. اگر $c+a^2+b^2=0$، نمودار فقط از نقطهٔ $(-a,-b)$ تشکیل شده است. اگر $c+a^2+b^2<0$، هیچ نقطه‌ای روی نمودار وجود ندارد.

**مثال ۳** مرکز و شعاع دایرهٔ $x^2+y^2-4x+6y=3$ را بیابید.

*حل.* مشاهده می‌کنیم که $x^2-4x$ دو جملهٔ اول مجذور کامل $(x-2)^2=x^2-4x+4$ بوده، و $y^2+6y$ دو جملهٔ اول مجذور کامل $(y+3)^2=y^2+6y+9$ است. بنابراین، $4+9$ را به‌دو طرف

معادلهٔ مفروض اضافه می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 3 + 4 + 9$ یا

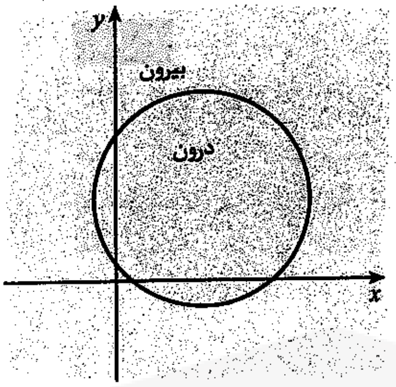
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

این، معادلهٔ دایرهٔ به‌مرکز $(2, -3)$ و شعاع ۴ است.

مجموعهٔ همهٔ نقاط **داخل** یک دایره، **درون** دایره نام دارد. این مجموعه را یک قرص باز نیز می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ نقاط **خارج** دایره، **بیرون** دایره نام دارد. (شکل پ.۲۲ را ببینید.) درون دایره را همراه با خود دایره یک **قرص بسته** یا به‌اختصار، یک **قرص**، می‌نامیم. نامعادلهٔ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 \le a^2$$

قرص به‌مرکز $(h, k)$ و شعاع $|a|$ را نشان می‌دهد.




**شکل پ.۲۲** درون دایره (قسمت تاریکتر) و بیرون دایره (قسمت روشنتر)

**مثال ٤** در هر یک از موارد زیر، نمودار را مشخص کنید:

(آ) $x^2 + 2x + y^2 \le 8$ (ب) $x^2 + 2x + y^2 < 8$

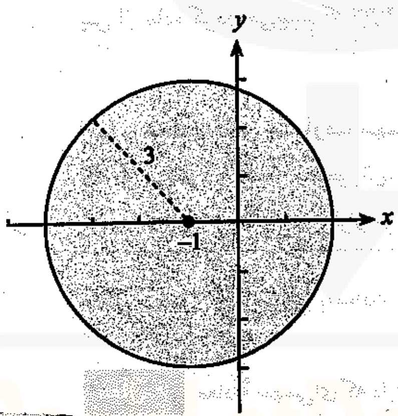
(پ) $x^2 + 2x + y^2 > 8$

**حل.** در معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2x = 8$، می‌توانیم به‌صورت زیر مجذور کامل ایجاد کنیم:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 8 + 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 9$$

بدین‌سان، معادلهٔ مفروض دایرهٔ به‌مرکز $(-1, 0)$ و شعاع ۳ را نمایش می‌دهد. نامعادلهٔ (آ) قرص (بستهٔ) به‌همان مرکز و همان شعاع را نمایش می‌دهد. (شکل پ.۲۳ را ببینید.) نامعادلهٔ (ب) درون دایره (یا قرص باز) را نمایش می‌دهد. نامعادلهٔ (پ) بیرون دایره را نمایش می‌دهد.

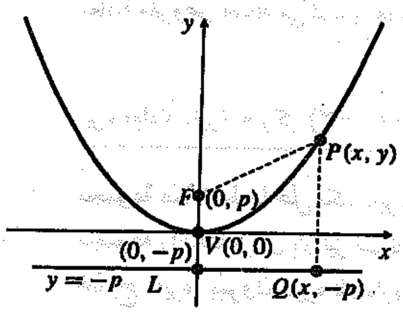



**شکل پ.۲۳** قرص $x^2 + y^2 + 2x \le 8$

## معادلهٔ سهمی

سهمی خمی مسطحه است که نقاطش از یک نقطهٔ ثابت مانند $F$ و یک خط راست ثابت مانند $L$ که از $F$ نمی‌گذرد به‌یک فاصله هستند. نقطهٔ $F$ را کانون و خط $L$ را **خط هادی** سهمی می‌نامیم. خط گذرنده از $F$ و عمود بر $L$ محور سهمی نام دارد. نقطهٔ $V$ محل برخورد محور و سهمی را رأس سهمی می‌نامیم.

مشاهده می‌کنیم که رأس $V$ وسط پاره‌خطی است که یک سرش کانون $F$ و سر دیگرش نزدیکترین نقطهٔ خط هادی به $F$ است. اگر خط هادی، افقی یا قائم باشد و رأس سهمی در مبدأ قرار گیرد، آنگاه سهمی معادلهٔ بسیار ساده‌ای خواهد داشت.




شکل پ.۲۴ سهمی $x^۲ = ۴py$ با کانون $F(۰, p)$ و خط هادی $y = -p$

**مثال ۵** معادلهٔ سهمی‌ای را بیابید که کانون آن $F(۰, p)$ و خط هادی آن $L$ به‌معادلهٔ $y = -p$ باشد.

حل. اگر $P(x, y)$ نقطهٔ دلخواهی از این سهمی باشد، آنگاه (مطابق شکل پ.۲۴) فاصله‌های $P$ از $F$ و از (نزدیکترین نقطهٔ $Q$ متعلق به) $L$ عبارت‌اند از

$$PF = \sqrt{(x-۰)^۲ + (y-p)^۲} = \sqrt{x^۲ + y^۲ - ۲py + p^۲}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^۲ + (y-(-p))^۲} = \sqrt{y^۲ + ۲py + p^۲}$$

چون $P$ روی سهمی است، داریم $PF = PQ$ و از این‌رو، مجذورهای این فاصله‌ها نیز برابرند:

$$x^۲ + y^۲ - ۲py + p^۲ = y^۲ + ۲py + p^۲$$

پس از ساده کردن می‌بینیم که $x^۲ = ۴py$ یا

$$y = \frac{x^۲}{۴p}$$

اینها را **معادله‌های متعارف سهمی** می‌نامیم. شکل پ.۲۴، حالت $p > ۰$ را نشان می‌دهد. سهمی به‌طرف بالا باز می‌شود و نسبت به‌محورش، یعنی محور $y$، متقارن است. اگر $p < ۰$، کانون $(۰, p)$ زیر مبدأ و خط هادی $y = -p$ بالای مبدأ قرار می‌گیرد. دراین حالت، سهمی به‌طرف پایین باز می‌شود و نه به‌طرف بالا. ■

شکل پ.۲۵ چند سهمی به‌معادلهٔ $y = ax^۲$ را به‌ازای مقادیر مثبت و منفی $a$ نشان می‌دهد.

**مثال ۶** معادلهٔ سهمی‌ای که دارای کانون $(۰, ۱)$ و خط هادی $y = -۱$ است عبارت است از $y = x^۲/۴$ یا $x^۲ = ۴y$. (در معادلهٔ متعارف قرار داده‌ایم $p = ۱$.) ■

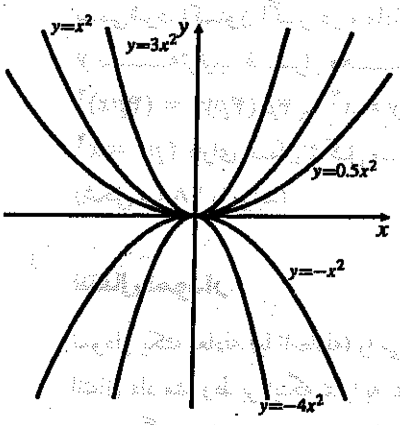
**مثال ۷** کانون و خط هادی سهمی $y = -x^۲$ را بیابید.

حل. معادلهٔ مفروض به‌شرطی با صورت متعارف $y = \frac{x^۲}{۴p}$ مطابقت دارد که $۴p = -۱$. بدین‌سان، $p = -۱/۴$. کانون سهمی $(۰, -۱/۴)$ و خط هادی آن $y = ۱/۴$ است. ■

اگر هنگام حصول معادلهٔ متعارف سهمی، نقش $x$ و $y$ را عوض کنیم، آنگاه معادلهٔ $y^۲ = ۴px$ یا

$$x = \frac{y^{2}}{4p}$$

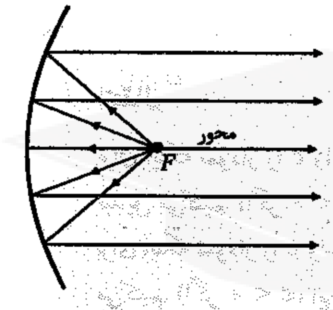
سهمی‌ای را نشان می‌دهد که دارای کانون $(p\,,\,0)$ و خط هادی قائم $x = -p$ است. محور این سهمی، محور $x$ است. ($y^2 = 4px$ و $x = y^2/4p$ را نیز معادله‌های متعارف سهمی می‌نامیم.)




شکل پ.۲۵ چند سهمی به‌معادلهٔ $y = ax^2$

## ویژگی‌های بازتابی سهمی

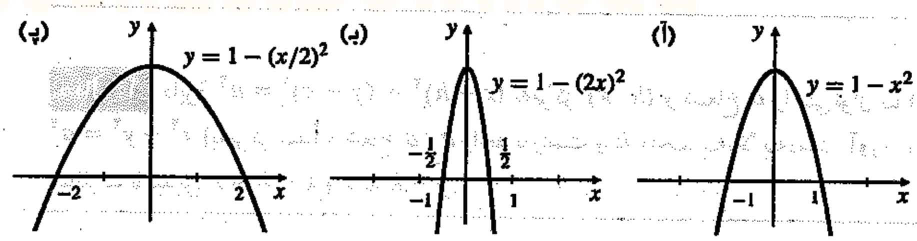
یکی از اصلی‌ترین کاربردهای سهمی، در ساخت بازتابنده‌های نور و امواج رادیویی است. مطابق شکل پ.۲۶، پرتوهای خارج شده از کانون یک سهمی، در امتداد باریکه‌هایی موازی با محور سهمی منعکس می‌شوند. به‌همین ترتیب، همهٔ پرتوهایی که به‌صورت باریکه‌هایی موازی با محور یک سهمی به‌سهمی برخورد می‌کنند، هنگام بازتاب از کانون می‌گذرند. به‌سبب همین ویژگی است که در تلسکوپ‌ها و نورافکن‌ها از آینه‌های سهموی استفاده می‌کنند و آنتن‌های تلسکوپ‌های رادیویی و مایکروویو (یا ریزموج) به‌شکل سهمی هستند. در بخش ۱۰.۸، این ویژگی سهمی‌ها را با دقت بیشتر بررسی خواهیم کرد.



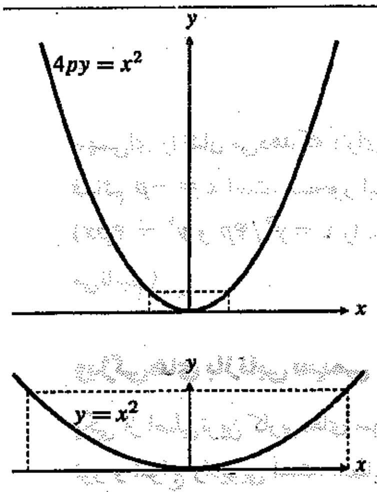

شکل پ.۲۶ بازتاب به‌وسیلهٔ سهمی

## تغییر مقیاس در نمودار

با گذاشتن مضربی از $x$ به‌جای $x$ می‌توان نمودار هر معادله را به‌طور افقی فشرده‌تر یا بازتر کرد. اگر $a$ عددی مثبت باشد و در معادلهٔ مفروض به‌جای $x$ قرار دهیم $ax$ فاصله‌های افقی در نمودار مورد بحث، در عامل $1/a$ ضرب می‌شوند (شکل پ.۲۷ را ببینید). اگر به‌جای $y$ قراردهیم $ay$، فاصله‌های قائم به‌همین ترتیب تغییر می‌کنند. ممکن است از این امر شگفت‌زده شوید که همهٔ سهمی‌ها نیز مانند دایره‌ها شکل‌های هندسی متشابهی هستند. درست است که اندازه‌های متفاوت دارند، ولی شکل همهٔ آنها یکسان است. اگر در معادلهٔ یک خم، مقیاس هر دو مختص $x$ و $y$ را به‌یک مقدار تغییر دهیم *اندازهٔ* خم عوض می‌شود ولی شکل آن عوض




شکل پ.۲۷ تغییر مقیاس افقی: (آ) نمودار $y = 1 - x^2$ (ب) نمودار (آ) به‌طور افقی فشرده‌تر شده است (پ) نمودار (آ) به‌طور افقی بازتر شده است




**شکل پ.۲۸** این دو سهمی متشابه هستند. قسمت‌های داخل مستطیل‌ها را با هم مقایسه کنید

نمی‌شود. اکنون اگر در معادلهٔ $۴py = x^۲$ به‌جای $x$ و $y$ به‌ترتیب قرار دهیم $۴px$ و $۴py$، آنگاه $(۴px)^۲ = ۴p(۴py)$ یا $y = x^۲$. بدین‌سان، سهمی کلی $۴py = x^۲$ دارای همان شکل سهمی خاص $y = x^۲$ است (شکل پ.۲۸ را ببینید).

## انتقال نمودار

نمودار یک معادله (یا نامعادله) را می‌توان $c$ واحد به‌طور افقی انتقال داد مشروط بر اینکه $x$ را به $x - c$ تبدیل کنیم. به‌همین ترتیب اگر $y$ را به $y - c$ تبدیل کنیم، نمودار مورد بحث $c$ واحد به‌طور قائم انتقال می‌یابد.

### انتقال

برای اینکه نمودار را $c$ واحد به‌راست انتقال دهیم در معادله یا نامعادلهٔ مورد بحث، $x$ را به $x - c$ تبدیل می‌کنیم. (اگر $c < ۰$، این انتقال به‌طرف چپ خواهد بود.)

برای اینکه نمودار را $c$ واحد به‌بالا انتقال دهیم در معادله یا نامعادلهٔ مورد بحث، $y$ را به $y - c$ تبدیل می‌کنیم. (اگر $c < ۰$، این انتقال به‌طرف پایین خواهد بود.)

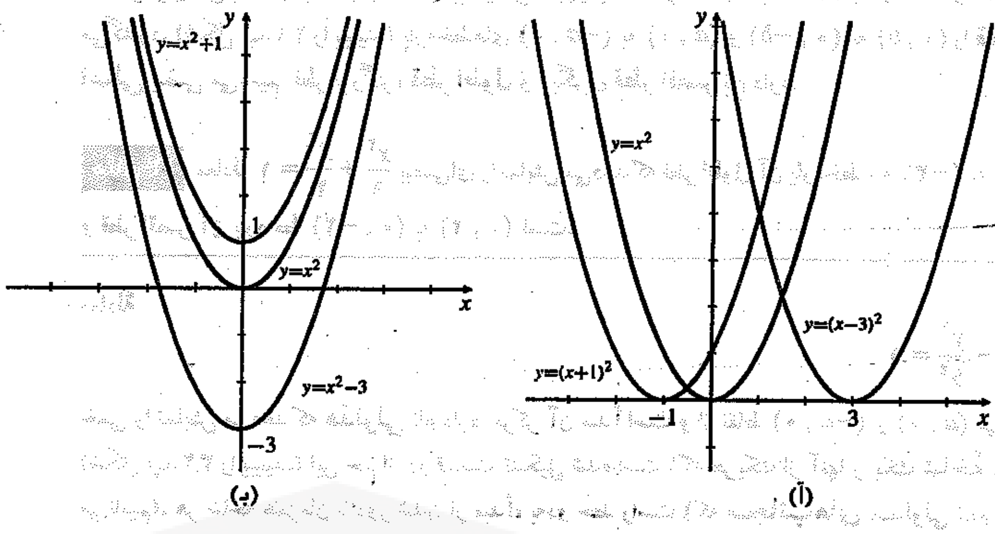
**مثال ۸** نمودار $y = (x - ۳)^۲$ همان سهمی $y = x^۲$ است که ۳ واحد به‌راست انتقال یافته است. نمودار $y = (x + ۱)^۲$ همان سهمی $y = x^۲$ است که ۱ واحد به‌چپ انتقال یافته است. (شکل پ.۲۹(آ) را ببینید.) ■

**مثال ۹** نمودار $y = x^۲ + ۱$ (یعنی $y - ۱ = x^۲$) همان سهمی $y = x^۲$ است که ۱ واحد به‌بالا انتقال یافته است. نمودار $y = x^۲ - ۳$ (یا $y - (-۳) = x^۲$) همان سهمی $y = x^۲$ است که ۳ واحد به‌پایین انتقال یافته است. (شکل پ.۲۹(ب) را ببینید.) ■

**مثال ۱۰** دایرهٔ $(x - h)^۲ + (y - k)^۲ = a^۲$ به‌مرکز $(h, k)$ و شعاع $a$ را می‌توان با انتقال دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ (به‌مرکز مبدأ و شعاع $a$) $h$ واحد به‌راست و $k$ واحد به‌بالا به‌دست آورد. این انتقال‌ها متناظرند با تبدیل $x$ به $x - h$ و $y$ به $y - k$. ■

نمودار $y = ax^۲ + bx + c$ سهمی‌ای است که محورش موازی با محور $y$ است. این سهمی به‌طرف بالا باز می‌شود هرگاه $a > ۰$ و به‌طرف پایین باز می‌شود هرگاه $a < ۰$. با ایجاد مجذور کامل و نوشتن معادله

به‌صورت $y = a(x-h)^2 + k$ می‌توانیم رأس $(h, k)$ را بیابیم.



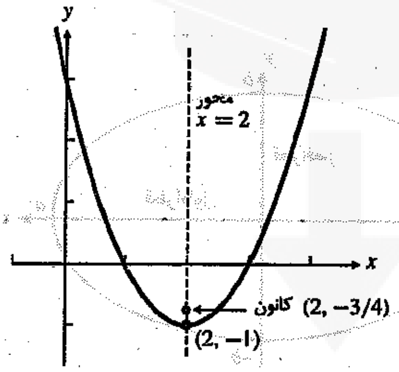

شکل پ.۲۹ (آ) انتقال‌های افقی $y = x^2$ (ب) انتقال‌های قائم $y = x^2$

**مثال ۱۱** نمودار $y = x^2 - 4x + 3$ را توصیف کنید.

*حل.* معادلهٔ $y = x^2 - 4x + 3$ سهمی‌ای را نشان می‌دهد که به‌طرف بالا باز می‌شود. برای یافتن رأس و محور آن، مجذور کامل را ایجاد می‌کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

و از این‌رو، $y - (-1) = (x-2)^2$. این خم همان سهمی $y = x^2$ است که ۲ واحد به‌راست و ۱ واحد به‌بالا انتقال یافته است. بنابراین، رأس آن $(2, -1)$ و محور آن خط $x = 2$ است. چون کانون $y = x^2$ نقطهٔ $(0, 1/4)$ است، کانون سهمی مورد بحث نقطهٔ $(2, (1/4) - 1 + 0)$ یا $(2, -3/4)$ است. (شکل پ.۳۰ را ببینید.) ■




شکل پ.۳۰ سهمی $y = x^2 - 4x + 3$

## بیضی و هذلولی

اگر $a$ و $b$ دو عدد مثبت باشند، معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

خمی را نمایش می‌دهد که آن را بیضی می‌نامیم و تماماً در مستطیل $-a \le x \le a$، $-b \le y \le b$ قرار دارد. (چرا؟) اگر $a = b$، این بیضی همان دایرهٔ به‌مرکز مبدأ و شعاع $a$ است. اگر $a \ne b$، این بیضی از یک دایره با

استفاده از تغییر مقیاسِ هر دو مختص (البته به‌نسبت‌های متفاوت) به‌دست آمده است.

مرکز بیضی بالا در مبدأ قرار دارد و این بیضی از چهار نقطهٔ $(a, 0)$، $(0, b)$، $(-a, 0)$ و $(0, -b)$ می‌گذرد. (شکل پ.۳۱ را ببینید.) پاره‌خط‌های $(-a, 0)$ به $(a, 0)$ و $(0, -b)$ به $(0, b)$ را **قطرهای اصلی** بیضی می‌نامیم. قطر بزرگتر، **قطر اطول** و دیگری **قطر اقصر** نام دارد.

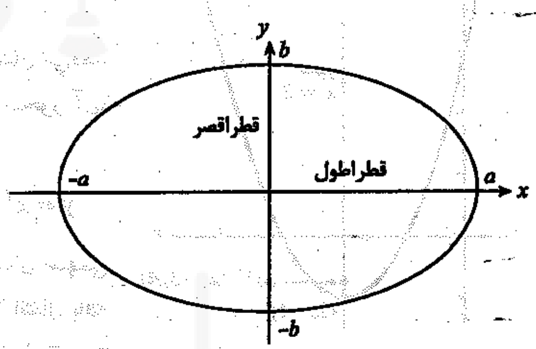
**مثال ۱۲** معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضی‌ای را نمایش می‌دهد که قطر اطول آن پاره‌خط $(-3, 0)$ به $(3, 0)$ و قطر اقصر آن پاره‌خط $(0, -2)$ به $(0, 2)$ است. ■

معادلهٔ

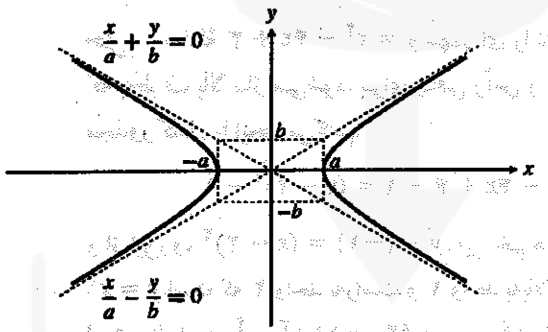
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

خمی را نمایش می‌دهد که **هذلولی** نام دارد. مرکز آن مبدأ است و از نقاط $(-a, 0)$ و $(a, 0)$ می‌گذرد. (شکل پ.۳۲ را ببینید.) این خم از دو قسمت تشکیل شده است (که هریک از آنها را یک **شاخهٔ هذلولی** می‌نامیم). هر شاخه همزمان با دور شدن از مبدأ، به‌دو خط راست (که **مجانب‌های** هذلولی نام دارند) نزدیک می‌شود. معادله‌های این مجانب‌ها عبارت‌اند از

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0, \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

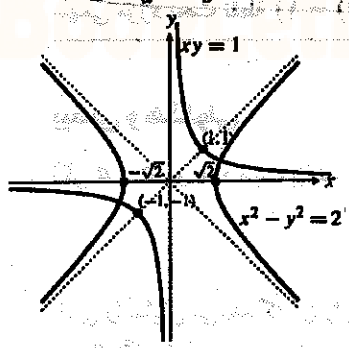



شکل پ.۳۱ بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$




شکل پ.۳۲ هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و مجانب‌هایش

معادلهٔ $xy = 1$ نیز یک هذلولی را نمایش می‌دهد. این هذلولی از نقاط $(-1, -1)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد و محورهای مختصات، مجانب‌های آن هستند. این در حقیقت همان هذلولی $x^2 - y^2 = 2$ است که به‌اندازهٔ $45^\circ$ در جهت پادساعتگرد حول مبدأ دوران یافته است. (شکل پ.۳۳ را ببینید.) هر یک از این هذلولی‌ها را به‌این سبب یک **هذلولی قائم** می‌نامیم که مجانب‌هایش بر هم عمود هستند.




شکل پ.۳۳ دو هذلولی قائم

بیضی و هذلولی را در فصل ۸ با تفصیل بیشتر مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

## تمرینات پ.۳

در تمرین‌های ۱ تا ۴، معادلهٔ دایرهٔ به‌مرکز $C$ و شعاع $r$ را بنویسید.

۱. $C(0,0)$ ، $r=4$

۲. $C(0,2)$ ، $r=2$

۳. $C(-2,0)$ ، $r=3$

۴. $C(3,-4)$ ، $r=5$

در تمرین‌های ۵ تا ۸، مرکز و شعاع دایره‌های مفروض را بیابید.

۵. $x^2+y^2-2x=3$

۶. $x^2+y^2+4y=0$

۷. $x^2+y^2-2x+4y=4$

۸. $x^2+y^2-2x-y+1=0$

در تمرین‌های ۹ تا ۱۶، نواحی‌ای را که به‌وسیلهٔ یک نامعادله یا یک جفت نامعادله تعریف شده‌اند توصیف کنید.

۹. $x^2+y^2>1$

۱۰. $x^2+y^2<4$

۱۱. $(x+1)^2+y^2\le 4$

۱۲. $x^2+(y-2)^2\le 4$

۱۳. $x^2+y^2>1$ ، $x^2+y^2<4$

۱۴. $x^2+y^2\le 4$ ، $(x+2)^2+y^2\le 4$

۱۵. $x^2+y^2<2x$ ، $x^2+y^2<2y$

۱۶. $x^2+y^2-4x+2y>4$ ، $x+y>1$

۱۷. نامعادله‌ای بنویسید که درون دایرهٔ به‌مرکز $(2,-1)$ و شعاع $\sqrt{6}$ را توصیف کند.

۱۸. نامعادله‌ای بنویسید که بیرون دایرهٔ به‌مرکز $(-3,2)$ و شعاع ۴ را توصیف کند.

۱۹. یک جفت نامعادله بنویسید که قسمتی از درون دایرهٔ به‌مرکز $(0,0)$ و شعاع $\sqrt{2}$ را که روی یا در طرف راست خط قائم گذرنده از $(1,0)$ قرار دارد توصیف کنند.

۲۰. یک جفت نامعادله بنویسید که نقاط واقع در خارج دایرهٔ به‌مرکز $(0,0)$ و شعاع ۲ و درون دایرهٔ به‌مرکز $(1,3)$ و گذرنده از مبدأ را توصیف کنند.

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۴ معادلهٔ سهمی‌ای را بنویسید که دارای کانون و خط هادی مفروض باشد.

۲۱. کانون: $(0,4)$ خط هادی: $y=-4$

۲۲. کانون: $(0,-1/2)$ خط هادی: $y=1/2$

۲۳. کانون: $(2,0)$ خط هادی: $x=-2$

۲۴. کانون: $(-1,0)$ خط هادی: $x=1$

در تمرین‌های ۲۵ تا ۲۸، کانون و خط هادی سهمی را بیابید؛ همچنین، نمودار سهمی را همراه با کانون و خط هادی رسم کنید.

۲۵. $y=x^2/2$

۲۶. $y=-x^2$

۲۷. $x=-y^2/4$

۲۸. $x=y^2/16$

۲۹. شکل پ.۳۴ نمودار سهمی $y=x^2$ و چهار نسخه از انتقال یافته‌های آن را نشان می‌دهد. معادلهٔ هر یک از این نسخه‌های انتقال یافته را بنویسید.

۳۰. معادله‌های حاصل از (آ) انتقال افقی خط $y=mx$ به‌گونه‌ای که از نقطهٔ $(a,b)$ بگذرد و (ب) انتقال قائم $y=mx$ به‌گونه‌ای که از $(a,b)$ بگذرد، کدام‌اند؟

در تمرین‌های ۳۱ تا ۳۴ قرار است در نمودار $y=\sqrt{x+1}$، به‌روش مشخص شده تغییر مقیاس دهیم. معادلهٔ نمودار حاصل از تغییر مقیاس را بنویسید.

۳۱. فاصله‌های افقی در ۳ ضرب شوند.

۳۲. فاصله‌های قائم بر ۴ تقسیم شوند.

۳۳. فاصله‌های افقی در ۲/۳ ضرب شوند.

۳۴. فاصله‌های افقی بر ۴ تقسیم و فاصله‌های قائم در ۲ ضرب شوند.

در تمرین‌های ۳۵ تا ۳۸، اگر نمودار معادلهٔ مفروض را به‌روش مشخص شده انتقال دهیم، معادلهٔ نمودار حاصل را بنویسید.

۳۵. $y=1-x^2$ پایین ۱، چپ ۱

۳۶. $x^2+y^2=5$ بالا ۲، چپ ۴

۳۷. $y=(x-1)^2-1$ پایین ۱، راست ۱

۳۸. $y=\sqrt{x}$ پایین ۲، چپ ۴

در تمرین‌های ۳۹ تا ۴۲، نقاط برخورد هر جفت از خم‌های مفروض را بیابید.

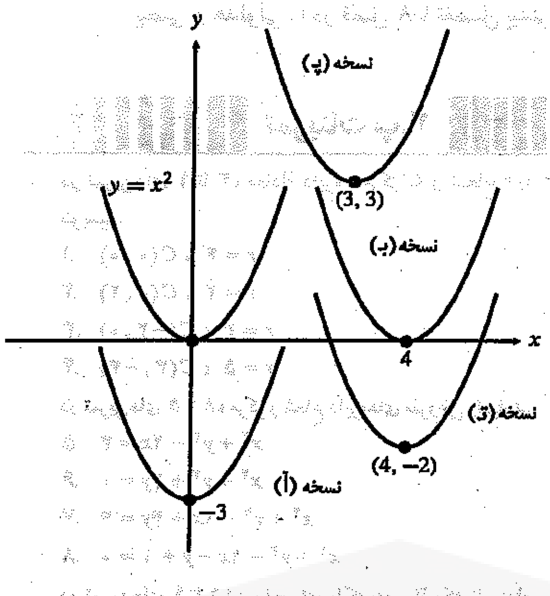
۳۹. $y=x^2+3$ ، $y=3x+1$

۴۰. $y=x^2-6$ ، $y=4x-x^2$

۴۱. $x^2+y^2=25$ ، $3x+4y=0$

۴۲. $2x^2+2y^2=5$ ، $xy=1$

در تمرین‌های ۴۳ تا ۵۰، خمِ دارای معادلهٔ مفروض را نام ببرید و آن را رسم کنید.




شکل پ.۳۴

۴۳. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

۴۴. $9x^2+16y^2=144$

۴۵. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

۴۶. $(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=4$

۴۷. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

۴۸. $x^2-y^2=-1$

۴۹. $xy=-4$

۵۰. $(x-1)(y+2)=1$

۵۱. نمودار معادله‌ای حاوی $x$ و $y$ چگونه تغییر می‌کند درصورتی‌که

(آ) $x$ را به $-x$ تبدیل کنیم؟

(ب) $y$ را به $-y$ تبدیل کنیم؟

۵۲. نمودار معادله‌ای حاوی $x$ و $y$ چگونه تغییر می‌کند درصورتی‌که همزمان $x$ را به $-x$ و $y$ را به $-y$ تبدیل کنیم؟

۵۳. نمودار $|x|+|y|=1$ را رسم کنید.

## پ.۴ تابع و نمودار آن

مساحت یک دایره، به‌شعاع آن وابسته است. دمایی که درآن، آب جوش می‌آید به‌ارتفاع از سطح دریا وابسته است. بهرهٔ سرمایه، به‌مدت زمان سرمایه‌گذاری وابسته است.

هنگامی که کمیتی به کمیت دیگری وابسته است می‌گوییم کمیت اول تابعی از کمیت دوم است. برای مثال، اگر $A$ مساحت دایره و $r$ شعاع آن باشد، $A$ مطابق فرمول

$$A=\pi r^2$$

به $r$ وابسته است و از این‌رو می‌گوییم مساحت، تابع شعاع است. فرمول یاد شده **قاعده‌ای** است که به‌ما می‌گوید چگونه به‌ازای هر ورودیِ ممکن برای مقدار شعاع $r$، خروجی یکتا برای مقدار مساحت $A$ را محاسبه کنیم.

مجموعهٔ همهٔ ورودی‌های ممکن برای مقدار شعاع را **قلمرو** تابع می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ مقادیر خروجی برای مساحت، **بُرد** تابع نام دارد. چون شعاع یا مساحت دایره نمی‌تواند منفی باشد، قلمرو و برد تابع مساحت (دایره) هر دو عبارت‌اند از بازهٔ $[0, \infty[$ متشکل از همهٔ اعداد حقیقی نامنفی.

قلمرو و برد یک تابع ریاضی می‌توانند مجموعه‌هایی از اشیای دلخواه باشند و لازم نیست حتماً از اعداد تشکیل شده باشند. ولی دراین کتاب و در بیشتر موارد، قلمرو و برد توابعی که مورد بحث قرار می‌گیرند مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند.

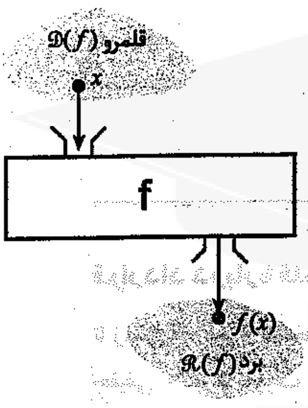
در حساب دیفرانسیل و انتگرال، غالباً می‌خواهیم به‌تابعی کلی اشاره کنیم بدون اینکه فرمول خاصی را مدنظر داشته باشیم. برای نشان دادن اینکه $y$ تابعی از $x$ است می‌نویسیم

$$y = f(x)$$

و می‌خوانیم «$y$ برابر است با اِفِ $x$.» دراین نمادگذاری که منسوب به‌یکی از ریاضیدانان قرن هجدهم به‌نام لئونهارد اویلر[1] است، تابع با نماد $f$ نشان داده می‌شود. همچنین، $x$ که **متغیر مستقل** نام دارد بیانگر مقدار ورودی متعلق به‌قلمرو $f$ است و $y$ که **متغیر وابسته** نام دارد مقدار خروجی متناظر، یعنی $f(x)$، در برد $f$ را نشان می‌دهد.

**تعریف ۱** هر **تابع** مانند $f$ از مجموعهٔ $D$ در مجموعهٔ $S$، قاعده‌ای است که به‌هر عنصر $x$ متعلق به $D$ عنصر **یکتایی** به‌نام $f(x)$ متعلق به $S$ نسبت می‌دهد.

دراین تعریف، $D = \mathcal{D}(f)$ (بخوانید «دیِ $f$») قلمرو تابع $f$ است. برد $f$ که با $\mathcal{R}(f)$ نشان داده می‌شود، آن زیرمجموعه‌ای از $S$ است که از **همهٔ مقادیر** تابع، یعنی از $f(x)$ها، تشکیل شده است. تابع را نوعی ماشین (شکل پ.۳۵) تلقی کنید که وقتی یک مقدار ورودی مانند $x$ متعلق به‌قلمرو را به‌آن می‌دهیم، مقدار خروجی $f(x)$ متعلق به‌برد را تولید می‌کند.



**شکل پ.۳۵** ماشین تابع

روش‌های گوناگونی برای نشان دادن تابع به‌طور نمادین داریم. تابع مجذورکُن که هر عدد حقیقی ورودی $x$ را به‌مجذور آن، یعنی $x^2$، تبدیل می‌کند به‌صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

(آ) با فرمولی نظیر $y = x^2$ که درآن متغیر وابسته‌ای به‌نام $y$ برای مشخص کردن مقدار تابع به‌کار رفته است.

(ب) با فرمولی نظیر $f(x) = x^2$ که درآن برای نامیدن تابع، نمادی تابعی نظیر $f$ به‌کار رفته است.

(پ) با نمادی نظیر $x \longrightarrow x^2$ (نماد اخیر را این‌طور بخوانید: «$x$ به $x^2$ می‌رود.»)

دراین کتاب، برای تعریف تابع معمولاً (آ) یا (ب) را به‌کار می‌بریم. اگر بخواهیم با دقت صحبت کنیم باید تابع را $f$ بنامیم و نه $f(x)$، زیرا نماد اخیر مقدار تابع را در نقطهٔ $x$ نشان می‌دهد. ولی همان‌طور که متداول است غالباً تابع را به‌صورت $f(x)$ بیان می‌کنیم تا به‌این ترتیب متغیری را که تابع به‌آن وابسته است آشکار سازیم. گاهی مناسب است حرف واحدی برای نشان دادن متغیر وابسته و نماد تابع به‌کار رود. مثلاً تابع مساحت دایره را می‌توان به‌صورت‌های $A = f(r) = \pi r^2$ یا $A = A(r) = \pi r^2$ نوشت. درصورت دوم، حرف $A$ برای نشان دادن متغیر وابسته و نامیدن تابع به‌کار رفته است.

**مثال ۱** حجم گوی به‌شعاع $r$، $r \geq 0$، با تابع

1. Leonhard Euler

$$V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

بیان می‌شود. بدین‌سان، حجم گویی که شعاع آن ۳ متر است برابر است با

$$V(۳) = \frac{۴}{۳}\pi (۳)^۳ = ۳۶\pi \, \mathrm{m}^۳$$

ملاحظه می‌کنید که در فرمولِ بیانگر تابع، مقدار مشخص ۳ را به‌جای متغیر $r$ گذاشته‌ایم تا مقدار تابع به‌ازای $r = ۳$ حاصل شود. ■

**مثال ۲** اگر تابع $F$ به‌ازای هر عدد حقیقی $t$ با فرمول $F(t) = ۲t + ۳$ تعریف شود، مقادیر خروجی $F$ متناظر با مقادیر ورودی ۰، ۲، $x + ۲$ و $F(۲)$ را بیابید.

**حل.** در هر حالت، در تعریف $F$ مقدار ورودی مفروض را به‌جای $t$ می‌گذاریم:

$$F(۰) = ۲(۰) + ۳ = ۰ + ۳ = ۳$$

$$F(۲) = ۲(۲) + ۳ = ۴ + ۳ = ۷$$

$$F(x + ۲) = ۲(x + ۲) + ۳ = ۲x + ۷$$

$$F(F(۲)) = F(۷) = ۲(۷) + ۳ = ۱۷$$ ■

## قرارداد دربارهٔ قلمرو

تا زمانی که قلمرو مشخص نشود، تابع واقعاً تعریف نمی‌شود. برای مثال، تابع $f(x) = x^۲$ که به‌ازای هر عدد حقیقی $x \geq ۰$ تعریف شده است با تابع $g(x) = x^۲$ که به‌ازای همهٔ $x$های حقیقی تعریف شده است تفاوت دارد زیرا این دو تابع، با وجود اینکه مقادیر آنها در هر نقطه‌ای که هر دو معین‌اند یکسان هستند، قلمروهای متفاوتی دارند. در فصل‌های ۱ تا ۹، ما با توابع حقیقی سروکار خواهیم داشت (یعنی توابعی که مقادیر ورودی و خروجی آنها اعدادی حقیقی هستند). اگر قلمرو چنین تابعی صریحاً مشخص نشده باشد فرض بر این است که قلمرو، بزرگترین مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که تابع مفروض به‌هر یک از آنها مقداری حقیقی نسبت می‌دهد. بدین‌سان، اگر از تابع $x^۲$ بدون مشخص کردن قلمرو صحبت کنیم، مقصودمان همان تابع $g(x)$ در بالاست.

**قرارداد دربارهٔ قلمرو**

وقتی از تابعی مانند $f$ بدون مشخص کردن قلمرو آن صحبت می‌کنیم، فرض بر این است که قلمرو آن متشکل از همهٔ اعدادی حقیقی مانند $x$ است به‌طوری که مقدار تابع به‌ازای آن، یعنی $f(x)$، عددی حقیقی باشد.

در عمل، غالباً تعیین قلمرو تابعی مانند $f(x)$ که با فرمولی صریح بیان شده است کار آسانی است. فقط باید آن مقادیری از $x$ را کنار بگذاریم که منجر به‌تقسیم بر ۰ یا محاسبهٔ ریشهٔ زوجِ اعداد منفی می‌شوند.

**مثال ۳** **تابع جذر (یا ریشهٔ دوم).** قلمرو $f(x) = \sqrt{x}$ برابر است با بازهٔ $[۰ , \infty[$، زیرا اعداد منفی جذر حقیقی ندارند. داریم $f(۰) = ۰$، $f(۴) = ۲$ و $f(۱۰) \approx ۳٫۱۶۲۲۸$. با وجود اینکه دو عدد وجود دارند که مجذورشان ۴ می‌شود، یعنی ۲− و ۲، ولی فقط یکی از اینها، یعنی ۲، برابر است با جذر ۴. (به‌یاد داشته باشید که تابع، به‌هر مقدار متعلق به‌قلمرواش مقداری *یکتا* نسبت می‌دهد و نمی‌تواند دو مقدار متفاوت به‌یک ورودی نسبت دهد.) **تابع جذر**، یعنی $\sqrt{x}$، همواره جذر *نامنفی* $x$ را نشان می‌دهد. جواب‌های دوگانهٔ معادلهٔ $x^۲ = ۴$ عبارت‌اند از $x = \sqrt{۴} = ۲$ و $x = -\sqrt{۴} = -۲$. ■

**مثال ٤** قلمرو تابع $h(x) = \dfrac{x}{x^۲ - ۴}$ از همهٔ اعداد حقیقی، به‌استثنای $x = -۲$ و $x = ۲$ تشکیل شده است. این قلمرو برحسب بازه‌ها به‌صورت

$$\mathcal{D}(f) = ]-\infty , -۲[ \cup ]-۲ , ۲[ \cup ]۲ , \infty[$$

نوشته می‌شود. قلمرو بیشتر توابعی که با آنها برخورد می‌کنیم یا بازه است یا اجتماعی از بازه‌ها. ■

**مثال ۵** قلمرو $S(t) = \sqrt{۱ - t^۲}$ از همهٔ اعداد حقیقی $t$ به‌طوری که $۱ - t^۲ \geq ۰$ تشکیل شده است. بدین سان، باید $t^۲ \leq ۱$ یا $-۱ \leq t \leq ۱$. این قلمرو عبارت است از بازهٔ $[-۱ , ۱]$. ■

## نمودار تابع

مثلی قدیمی می‌گوید «یک تصویر به‌اندازهٔ هزار واژه ارزش دارد.»[۱] در ریاضیات این مثل یقیناً درست است. رفتار هر تابع را می‌توان با رسم نمودار آن به‌بهترین وجه توصیف کرد.

**نمودار تابع** $f$ همان نمودار *معادلهٔ* $y = f(x)$ است. این نمودار از آن نقاط صفحهٔ دکارتی تشکیل شده است که مختصاتشان، یعنی $(x , y)$، مقادیر ورودی ـ خروجی متناظر برای $f$ هستند. بدین‌سان، $(x , y)$ به‌شرطی بر نمودار $f$ قرار دارد که $x$ متعلق به‌قلمرو $f$ باشد و $y = f(x)$.

رسم نمودار تابعی مانند $f$ گاهی به‌این ترتیب انجام می‌گیرد که به‌ازای چند مقدار $x$ متعلق به‌قلمرو $f$ جدولی از جفت‌های مرتب $(x , f(x))$ را تشکیل می‌دهیم، سپس این نقاط را در صفحه مشخص کرده و آنها را با یک «خم هموار» به‌هم وصل می‌کنیم.

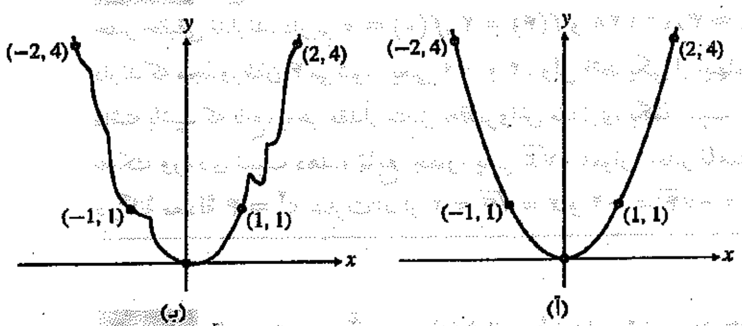
**مثال ۶** نمودار $f(x) = x^۲$ را رسم کنید.

*حل.* جدولی از جفت‌های مرتب $(x , y)$ را که در $y = x^۲$ صدق کنند تشکیل می‌دهیم. (جدول ۱ را ببینید.) اکنون این نقاط را در صفحه مشخص کرده و آنها را با یک خم هموار به‌هم وصل می‌کنیم. (شکل پ.۳۶ (آ) را ببینید.)

۱. مولوی می‌گوید: «آنچه یک دیدن کند ادراک آن     سال‌ها نتوان نمودن با بیان» ـ م.

جدول ۱.

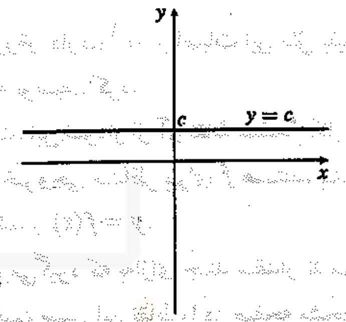
| $x$ | $y=f(x)$ |
|---|---|
| ۲- | ۴ |
| ۱- | ۱ |
| ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ |
| ۲ | ۴ |



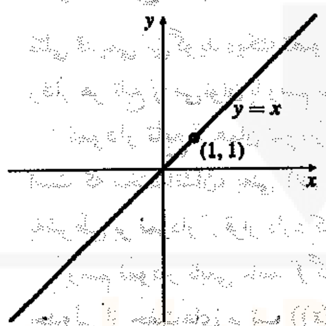

**شکل پ.۳۶**  (آ)  نمودار درست $f(x)=x^{۲}$  (ب)  نمودار نادرست $f(x)=x^{۲}$

چگونه بدانیم که نمودار موردنظر، هموار است و در فضای بین نقاطی که ما مشخص کرده‌ایم دارای پیچ و تاب‌هایی نظیر شکل پ.۳۶ (ب) نیست؟ البته می‌توانیم نقاط بیشتری را طوری رسم کنیم که به‌هم نزدیکتر باشند، ولی باز هم چگونه بدانیم که رفتار نمودار موردنظر در فضای بین نقاط رسم شده چگونه است؟ در فصل ۴ خواهیم دید که حساب دیفرانسیل و انتگرال ابزار سودمندی برای پاسخ دادن به‌این پرسش‌ها به‌دست می‌دهد.

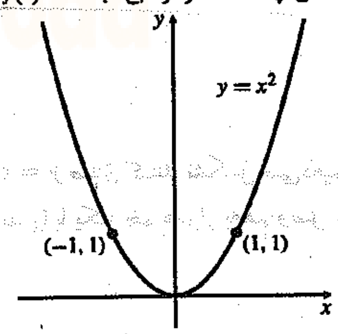
بعضی از توابع به‌کرات در کاربردها پیش می‌آیند و شما باید با نمودار آنها آشنا باشید. بعضی از اینها را در شکل‌های پ.۳۷ تا پ.۴۶ نشان داده‌ایم. با کمی تأمل آنها را مطالعه کنید و به‌خاطر بسپارید. بویژه به‌نمودار **تابع قدرمطلق**، یعنی $f(x)=|x|$ که در شکل پ.۴۶ نشان داده شده است توجه کنید. این نمودار از دو نیمخط $y=-x$ به‌ازای $x<۰$ و $y=x$ به‌ازای $x\geq ۰$ تشکیل شده است.



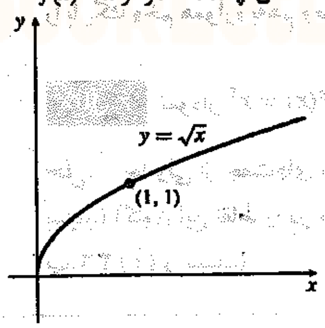

**شکل پ.۳۷**  نمودار تابع ثابت $f(x)=c$



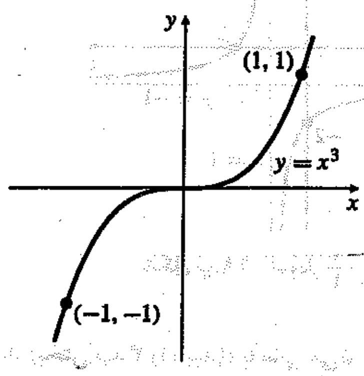

**شکل پ.۳۸**  نمودار $f(x)=x$



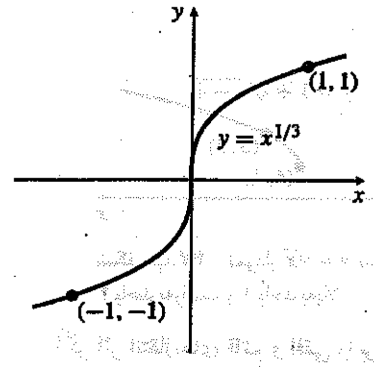

**شکل پ.۳۹**  نمودار $f(x)=x^{۲}$



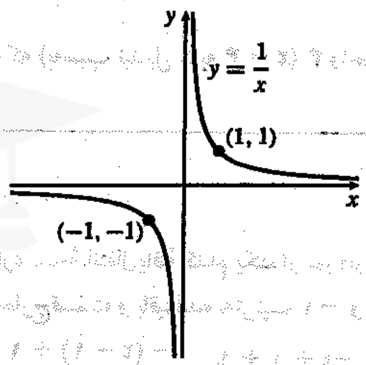

**شکل پ.۴۰**  نمودار $f(x)=\sqrt{x}$



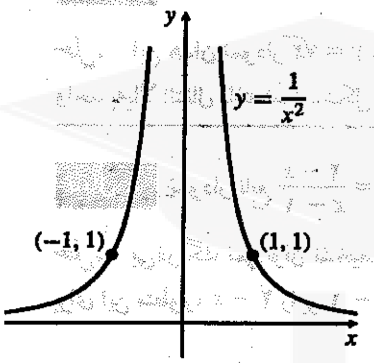

شکل پ.۴۱ نمودار $f(x) = x^3$



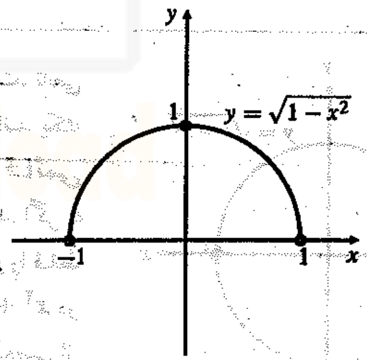

شکل پ.۴۲ نمودار $f(x) = x^{1/3}$



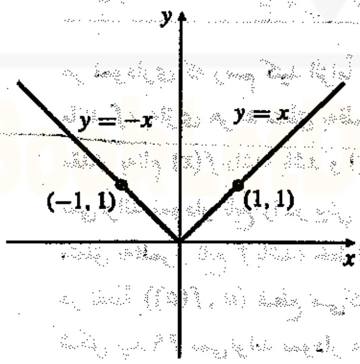

شکل پ.۴۳ نمودار $f(x) = \frac{1}{x}$



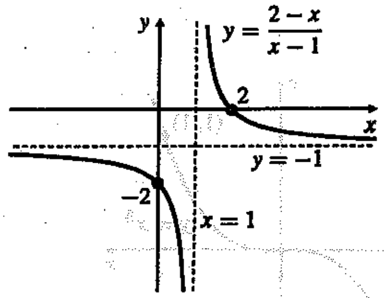

شکل پ.۴۴ نمودار $f(x) = \frac{1}{x^2}$



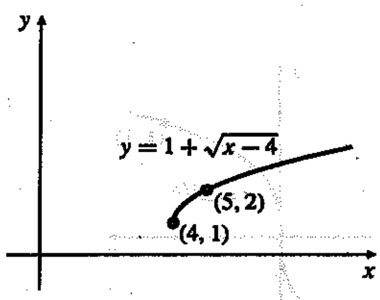

شکل پ.۴۵ نمودار $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$




شکل پ.۴۶ نمودار $f(x) = |x|$




شکل پ.۴۸  نمودار $\frac{۲-x}{x-۱}$




شکل پ.۴۷  نمودار $y=\sqrt{x}$ پس از انتقال ۴ واحد به‌راست و ۱ واحد به‌بالا

اگر اثر انتقال‌های قائم و افقی را بر معادلهٔ نمودارها بدانید (بخش پ.۳ را ببینید)، بآسانی می‌توانید بعضی از نمودارها را که نسخه‌های انتقال‌یافتهٔ نمودارهای واقع در شکل‌های پ.۳۷ تا پ.۴۶ هستند رسم کنید.

**مثال ۷** نمودار $y = ۱ + \sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

*حل.* این همان نمودار $y=\sqrt{x}$ در شکل ۴۰ است که (به‌سبب تبدیل $x$ به $x-۴$) ۴ واحد به‌راست و ۱ واحد به‌بالا انتقال یافته است. شکل پ.۴۷ را ببینید.

**مثال ۸** نمودار تابع $f(x) = \frac{۲-x}{x-۱}$ را رسم کنید.

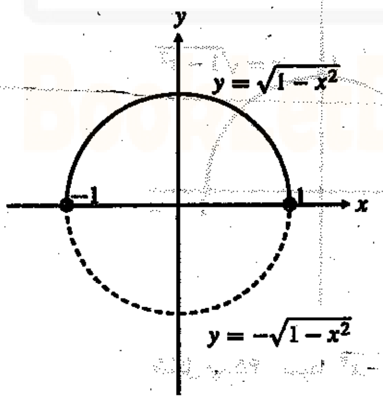
*حل.* بی‌درنگ نمی‌توان تشخیص داد که این نمودار، نسخهٔ انتقال‌یافتهٔ کدام یک از نمودارهای آشناست. برای این منظور، $۲-x$ را بر $x-۱$ تقسیم می‌کنیم. خارج‌قسمت و باقیمانده به‌ترتیب $-۱$ و ۱ می‌شوند:

$$\frac{۲-x}{x-۱} = \frac{-x+۱+۱}{x-۱} = \frac{-(x-۱)+۱}{x-۱} = -۱ + \frac{۱}{x-۱}$$

بدین‌سان، نمودار موردنظر همان نمودار $1/x$ در شکل پ.۴۳ است که ۱ واحد به‌راست و ۱ واحد به‌پایین انتقال یافته است. شکل پ.۴۸ را ببینید.

هر نموداری که رسم کنید الزاماً نمودار یک تابع نیست. تابعی مانند $f$، به‌ازای هر $x$ متعلق به‌قلمرو خود فقط می‌تواند یک مقدار به‌نام $f(x)$ داشته باشد و از این‌رو، هیچ *خط قائمی* نمی‌تواند نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند. اگر $a$ متعلق به‌قلمرو تابع $f$ باشد، خط قائم $x=a$ نمودار $f$ را فقط در نقطهٔ $(a, f(a))$ قطع می‌کند. دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ در شکل پ.۴۹ نمی‌تواند نمودار هیچ تابعی باشد زیرا بعضی از خطوط قائم، آن را در دو نقطه قطع می‌کنند. در حقیقت دایرهٔ مفروض برابر است با اجتماع نمودارهای دو تابع

$$y=\sqrt{۱-x^۲}, \quad y=-\sqrt{۱-x^۲}$$




شکل پ.۴۹  دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ نمودار هیچ تابعی نیست

که به‌ترتیب عبارت‌اند از نیمه‌های بالایی و پایینیِ دایرهٔ مفروض.

## توابع زوج و فرد. تقارن و بازتاب

غالباً اتفاق می‌افتد که نمودار یک تابع، دارای انواع معینی از تقارن است. ساده‌ترین تقارن‌ها، مقادیر تابع را در $x$ و $-x$ به‌هم مربوط می‌سازند.

**تعریف ۲ توابع زوج و فرد**

فرض کنیم به‌ازای هر $x$ متعلق به‌قلمرو $f$، $-x$ نیز متعلق به‌قلمرو باشد. می‌گوییم $f$ **تابعی زوج** است هرگاه به‌ازای هر $x$ متعلق به‌قلمرو $f$،

$$f(-x) = f(x)$$

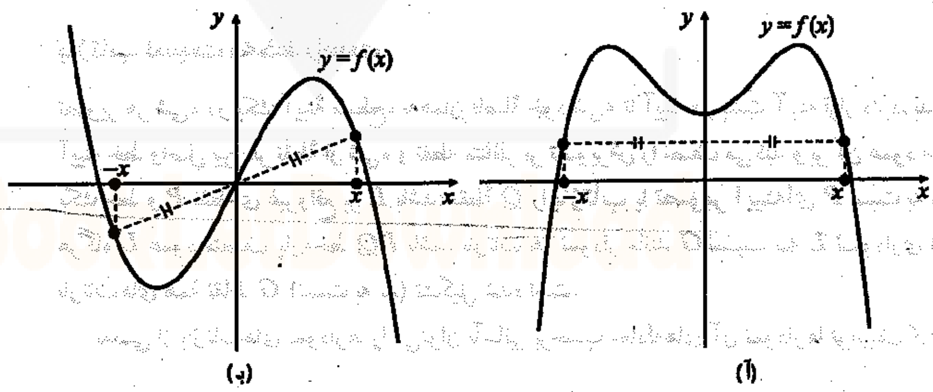
می‌گوییم $f$ **تابعی فرد** است هرگاه به‌ازای هر $x$ متعلق به‌قلمرو $f$،

$$f(-x) = -f(x)$$

نام‌های زوج و فرد از این حقیقت گرفته شده‌اند که توان‌های زوج $x$ نظیر $x^0 = 1$، $x^2$، $x^4$، ... ، $x^{-2}$، $x^{-4}$، ... ، توابعی زوج، و توان‌های فرد $x$ نظیر $x = x^1$، $x^3$، ... ، $x^{-1}$، $x^{-3}$، ... ، توابعی فرد هستند. مثلاً، مشاهده می‌کنیم که $(-x)^4 = x^4$ و $(-x)^{-3} = -x^{-3}$.

چون $(-x)^2 = x^2$، هر تابعی که فقط به $x^2$ بستگی داشته باشد زوج است. برای مثال، تابع قدرمطلق، یعنی $y = |x| = \sqrt{x^2}$، زوج است.

نمودار هر تابع زوج نسبت به محور $y$ متقارن است. هر خط راست افقی که از نقطه‌ای بر نمودار تابع به‌طرف محور $y$ رسم شود و در طرف دیگر محور $y$ به‌همان اندازه ادامه یابد به‌نقطهٔ دیگری از نمودار می‌رسد. (شکل پ.۵۰(آ) را ببینید.)

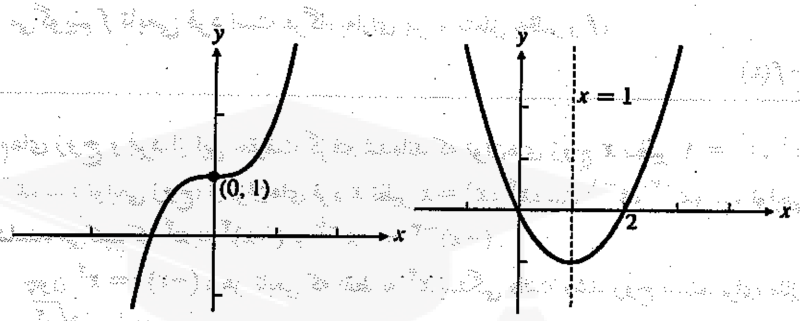



شکل پ.۵۰ (آ) نمودار هر تابع زوج نسبت به‌محور $y$ متقارن است (ب) نمودار هر تابع فرد نسبت به‌مبدأ متقارن است

نمودار هر تابع فرد نسبت به‌مبدأ متقارن است. هر خط راست که از نقطه‌ای بر نمودار تابع به‌طرف مبدأ رسم شود و در طرف دیگر مبدأ به‌همان اندازه ادامه یابد به‌نقطهٔ دیگری از نمودار می‌رسد. اگر تابع فرد $f$ در $x = 0$ معین باشد، مقدار آن در این نقطه صفر است: $f(0) = 0$. (شکل پ.۵۰(ب) را ببینید.)

اگر تابع $f(x)$ زوج (یا فرد) باشد هر مضرب ثابت آن نظیر $2f(x)$ یا $-5f(x)$ نیز زوج (یا فرد) است. مجموع (و تفاضل) توابع زوج، زوج است. مجموع (و تفاضل) توابع فرد، فرد است. مثلاً $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$ زوج است، زیرا برابر است با مجموع سه تابع زوج $3x^4$، $-5x^2$ و $-x^0 = -1$. به‌همین ترتیب $4x^3 - (2/x)$ تابعی فرد است. تابع $g(x) = x^2 - 2x$ مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد است، ولی خودش نه زوج است و نه فرد.

انواع دیگر تقارن نیز امکان‌پذیر هستند. مثلاً تابع $g(x) = x^2 - 2x$ را می‌توان به‌صورت $g(x) = (x-1)^2 - 1$ نوشت. اکنون ملاحظه می‌کنیم که مقادیر $g(1 \pm u)$ برابرند و از این‌رو، نمودار $g$ (شکل پ.۵۱(آ)) نسبت به‌خط قائم $x = 1$ متقارن است. در حقیقت این همان سهمی $y = x^2$ است که ۱ واحد به‌راست و ۱ واحد به‌پایین انتقال یافته است. به‌همین ترتیب نمودار $h(x) = x^3 + 1$ نسبت به‌نقطهٔ $(0, 1)$ متقارن است (شکل پ.۵۱(ب)).




**شکل پ.۵۱** (آ) نمودار $g(x) = x^2 - 2x$ نسبت به $x = 1$ متقارن است (ب) نمودار $h(x) = x^4 + 1$ نسبت به $(0, 1)$ متقارن است

## بازتاب نسبت به‌خط راست

تصویر هر شیء در یک آینهٔ مسطح، به‌همان فاصلهٔ خود شیء تا آینه در پشت آینه قرار دارد. بدین‌سان، این آینه خط واصل بین هر نقطهٔ از شیء و نقطه متناظر بر تصویرش را نصف می‌کند و بر آن عمود است. اگر $L$ یک خط و $P$ نقطه‌ای غیرواقع بر $L$ باشد، نقطهٔ $Q$ را **بازتاب** یا **تصویر آیینه‌ای** $P$ نسبت به $L$ می‌نامیم، هرگاه $L$ عمود منصف پاره‌خط $PQ$ باشد. بازتاب هر نمودار مانند $G$ نسبت به $L$ نموداری است که از بازتاب‌های همهٔ نقاط $G$ (نسبت به $L$) تشکیل شده است.

بعضی از بازتاب‌های نمودارها را می‌توان بآسانی برحسب معادله‌های آن نمودارها توصیف کرد:

### بازتاب نسبت به‌چند خط خاص

۱. اگر در معادله‌ای برحسب $x$ و $y$، $x$ را به $-x$ تبدیل کنیم بازتاب نمودار معادله نسبت به‌محور $y$ به‌دست می‌آید.
۲. اگر در معادله‌ای برحسب $x$ و $y$، $y$ را به $-y$ تبدیل کنیم بازتاب نمودار معادله نسبت به‌محور $x$

به‌دست می‌آید.

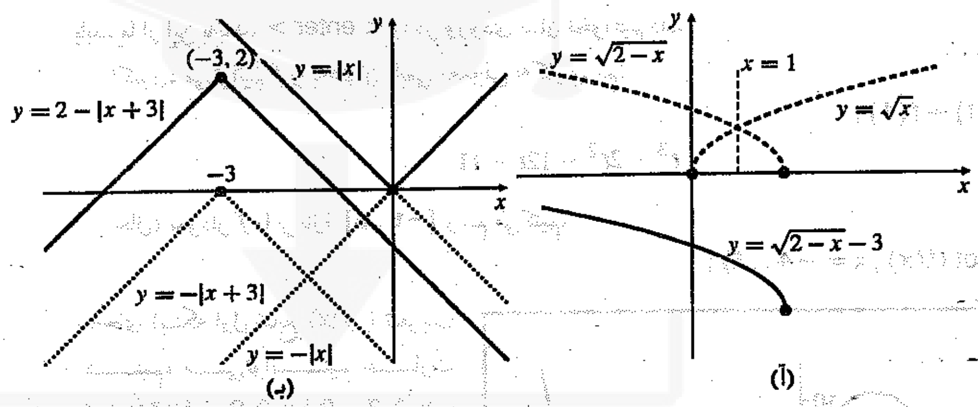
۳. اگر در معادله‌ای برحسب $x$ و $y$، $x$ را به $a - x$ تبدیل کنیم بازتاب نمودار معادله نسبت به‌خط $x = a/۲$ به‌دست می‌آید.

۴. اگر در معادله‌ای برحسب $x$ و $y$، $y$ را به $b - y$ تبدیل کنیم بازتاب نمودار معادله نسبت به‌خط $y = b/۲$ به‌دست می‌آید.

۵. اگر در معادله‌ای برحسب $x$ و $y$، جای $x$ و $y$ را عوض کنیم بازتاب نمودار معادله نسبت به‌خط $y = x$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۹** نمودار $y = \sqrt{۲ - x} - ۳$ را توصیف و رسم کنید.

*حل.* نمودار $y = \sqrt{۲ - x}$ عبارت است از بازتاب نمودار $y = \sqrt{x}$ (شکل پ.۴۰) نسبت به‌خط قائم $x = ۱$. نمودار $y = \sqrt{۲ - x} - ۳$ عبارت است از انتقال یافتهٔ نمودار $y = \sqrt{۲ - x}$، ۳ واحد به‌پایین. شکل پ.۵۲(آ) را ببینید. ■




**شکل پ.۵۲** (آ) ترسیم نمودار $y = \sqrt{۲ - x} - ۳$ (ب) تبدیلاتی که از $y = |x|$ نمودار $y = ۲ - |x + ۳|$ را تولید می‌کنند

**مثال ۱۰** در شکل پ.۵۲(ب)، معادلهٔ نمودار میانی را برحسب تابع قدرمطلق، یعنی $y = |x|$ بیان کنید.

*حل.* نمودار میانی را می‌توانیم این‌طور به‌دست آوریم که نخست بازتاب نمودار $|x|$ (شکل پ.۴۶) را نسبت به‌محور $x$ بیابیم و سپس این بازتاب را ۳ واحد به‌چپ و ۲ واحد به‌بالا انتقال دهیم. بازتاب $y = |x|$ نسبت به‌محور $x$ دارای معادلهٔ $-y = |x|$ یا $y = -|x|$ است. اگر این را ۳ واحد به‌چپ انتقال دهیم $y = -|x + ۳|$ حاصل می‌شود. سرانجام اگر معادلهٔ اخیر را ۲ واحد به‌بالا انتقال دهیم، $y = ۲ - |x + ۳|$ به‌دست می‌آید و این همان معادلهٔ مطلوب است. ■

## تعریف و رسم نمودار توابع با استفاده از میپل (Maple)

بسیاری از محاسبات و رسم نمودارها را که در مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها برخورد می‌کنیم می‌توان با استفاده از یک دستگاه جبری کامپیوتری نظیر میپل یا ماتماتیکا به‌انجام رساند. در جاهای مختلف این کتاب، مثال‌هایی گنجانده‌ایم که نحوهٔ به‌کارگیری میپل را برای انجام چنین وظایفی نشان می‌دهند. (دراین مثال‌ها، میپل ٦ را به‌کار برده‌ایم ولی بیشتر آنها را می‌توان با نسخه‌های قدیمیتر میپل نیز انجام داد.)

کار را با مثالی شروع می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه با استفاده از میپل تابعی را تعریف و سپس نمودار آن را رسم کنیم. ورودی‌ای را که شما در میپل تایپ می‌کنید با استفاده از حروف انگلیسی صاف و جواب میپل را با استفاده از حروف انگلیسی ایتالیک نشان می‌دهیم. می‌خواهیم تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۱۲x + ۱$ را تعریف کنیم.

```
>   f:=x->x^3-2*x^2-12*x+1; < enter >
```

$$f:=x \longrightarrow x^3 - 2x^2 - 12x + 1$$

کاربرد =: به‌این معنی است که می‌خواهیم نماد طرف چپ آن را تعریف کنیم و کاربرد <- قاعدهٔ ساختن $f(x)$ را با شروع از $x$ نشان می‌دهد. همچنین، توجه داشته باشید که میپل برای نشان دادن ضرب و نما به‌ترتیب، ستاره * و کلاه ^ را به‌کار می‌برد. دستورالعمل میپل باید، قبل از فشار دادن دکمهٔ Enter، با نماد ; پایان یابد. ما از این به‌بعد، < enter > را در ورودی نشان نخواهیم داد.

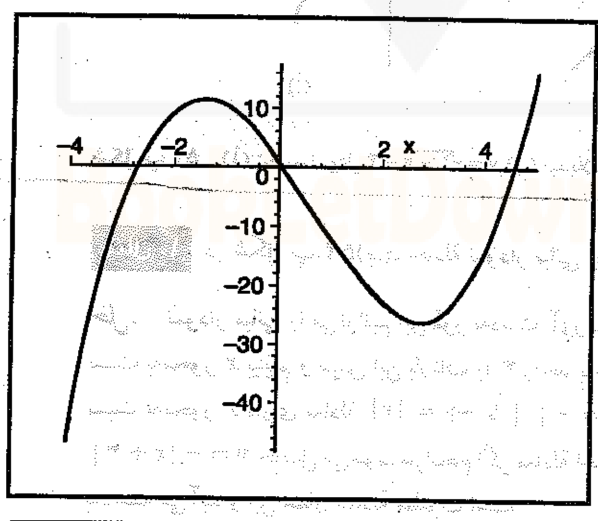
اکنون، می‌توانیم $f$ را به‌عنوان تابعی معمولی به‌کار ببریم:

```
>   f(t) + f(1);
```

$$t^3 - 2t^2 - 12t - 11$$

حال، نمودار $f$ را بر بازهٔ $[-۴, ۵]$ رسم می‌کنیم.

```
>   plot (f(x), x = -4..5);
```




به‌جای اینکه اول تابع $f(x)$ را تعریف کنیم، می‌توانستیم عبارت x ^ 3 - 2 * x ^ 2 - 12 * x + 1 را مستقیماً در دستور ترسیم مشخص کنیم. کاربرد دو نقطه .. برای جدا کردن نقاط انتهایی چپ و راست بازهٔ ترسیم است. می‌توان نقاط دیگری را در دستور ترسیم گنجاند. همهٔ این انتخاب‌ها با واوک[1] از هم جدا می‌شوند. علاوه بر برد مقادیر $x$ (که مورد نیاز است) می‌توانید برد مقادیر $y$ را نیز مشخص کنید. همچنین، اگر می‌خواهید

1. comma

واحد فاصله بر هر دو محور یکسان باشد، می‌توانید scaling = CONSTRAINED را مشخص کنید. (این ایدهٔ بدی برای نمودار $f(x)$ است. چرا؟) دستور اصلاح شده به‌این‌صورت است. (نمودار خروجی را حذف کرده‌ایم.)

```
>   Plot (f(x), x=-4..5, y=-40..30, scaling = CONSTRAINED);
```

## تمرینات پ.۴

در تمرین‌های ۱ تا ۶، قلمرو و برد هر تابع را بیابید.

۱. $f(x) = 1 + x^2$

۲. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

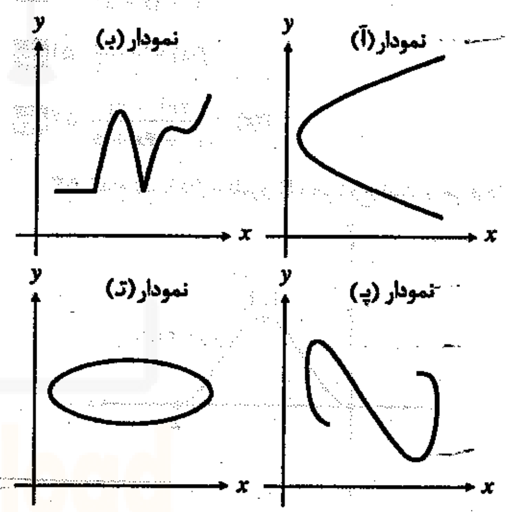
۳. $G(x) = \sqrt{8 - 2x}$

۴. $F(x) = 1/(x - 1)$

۵. $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2 - t}}$

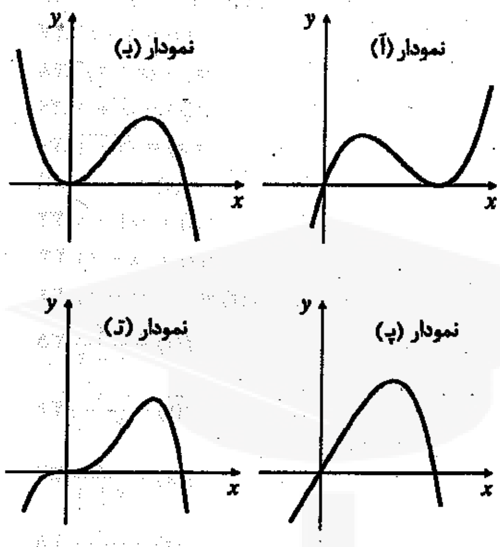
۶. $g(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x - 2}}$

۷. کدام یک از نمودارهای شکل پ.۵۳ نمودار تابعی مانند $y = f(x)$ است؟ چرا؟




شکل پ.۵۳

۸. شکل پ.۵۴ نمودارهای توابع (یک) $x - x^4$، (دو) $x^3 - x^4$، (سه) $x(1 - x)^2$ و (چهار) $x^2 - x^3$ را نشان می‌دهد. کدام نمودار با کدام تابع متناظر است؟




شکل پ.۵۴

در تمرین‌های ۹ و ۱۰، نمودار تابع $f$ را با تشکیل جدول مقادیر $f(x)$ به‌ازای $x = 0$، $x = \pm\frac{1}{2}$، $x = \pm 1$، $x = \pm\frac{3}{2}$ و $x = \pm 2$ رسم کنید.

۹. $f(x) = x^3$

۱۰. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

در تمرین‌های ۱۱ تا ۲۲، تقارن‌های نمودار $f$ (درصورت وجود) کدام‌اند؟ درحالت خاص، $f$ زوج است یا فرد؟

۱۱. $f(x) = x^2 + 1$

۱۲. $f(x) = x^3 + x$

۱۳. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

۱۴. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

۱۵. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

۱۶. $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

۱۷. $f(x) = x^2 - 6x$

۱۸. $f(x) = x^3 - 2$

۱۹. $f(x) = |x^3|$

۲۰. $f(x) = |x + 1|$

۲۱. $f(x) = \sqrt{2x}$

۲۲. $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

در تمرین‌های ۲۳ تا ۳۸، نمودار هر تابع را رسم کنید.

۲۳. $f(x) = -x^2$

۲۴. $f(x) = 1 - x^2$

۲۵. $f(x) = (x-1)^2$

۲۶. $f(x) = (x-1)^2 + 1$

۲۷. $f(x) = 1 - x^3$

۲۸. $f(x) = (x+2)^3$

۲۹. $f(x) = \sqrt{x} + 1$

۳۰. $f(x) = \sqrt{x+1}$

۳۱. $f(x) = -|x|$

۳۲. $f(x) = |x| - 1$

۳۳. $f(x) = |x - 2|$

۳۴. $f(x) = 1 + |x - 2|$

۳۵. $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$

۳۶. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

۳۷. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

۳۸. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

در تمرین‌های ۳۹ تا ۴۶، $f$ تابعی است که قلمرو و برد آن به‌ترتیب عبارت‌اند از $[0, 2]$ و $[0, 1]$ و نمودار آن در شکل پ.۵۵ نشان داده شده است. نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم و قلمرو و برد آنها را مشخص کنید.

۳۹. $f(x) + 2$

۴۰. $f(x) - 1$

۴۱. $f(x + 2)$

۴۲. $f(x - 1)$

۴۳. $-f(x)$

۴۴. $f(-x)$

۴۵. $f(4 - x)$

۴۶. $1 - f(1 - x)$

تعیین برد دقیق توابع، غالباً کار نسبتاً دشواری است. در تمرین‌های ۴۷ و ۴۸، با استفاده از یک ابزار رسم نمودار (نظیر ماشین‌حساب یا کامپیوتر)، نمودار $f$ را رسم و سپس با تمرکز روی نمودار، برد $f$ را با تقریب دو رقم اعشاری تعیین کنید.

۴۷. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 + 2x + 3}$

۴۸. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + x}$

در تمرین‌های ۴۹ تا ۵۲، با استفاده از یک ابزار رسم نمودار، نمودار تابع مفروض را رسم کنید. بررسی کنید آیا نمودار، تقارن دارد یا خیر. این نمودار، نسبت به‌کدام خطوط و / یا نقاط متقارن است؟ کوشش کنید درستی حدس‌های خود را به‌طور جبری ثابت کنید.

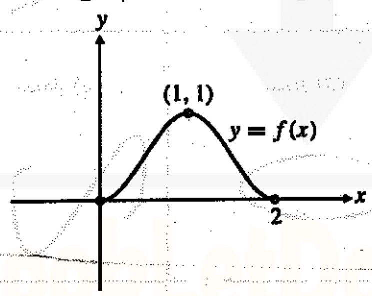
۴۹. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1$

۵۰. $f(x) = \dfrac{3 - 2x + x^2}{2 - 2x + x^2}$

۵۱. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

۵۲. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 5}$

۵۳. کدام تابع $f(x)$ با قلمرو $\mathbb{R}$، هم زوج است و هم فرد؟




شکل پ.۵۵

## پ.۵ ترکیب‌کردن توابع برای ساختن توابع جدید

برای ساختن توابع جدید، می‌توان توابع مفروض را به‌روش‌های گوناگون با هم ترکیب کرد. دراین بخش،

ترکیب‌هایی را که از

(آ) به‌کارگیری اعمال جبری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع،

(ب) محاسبهٔ تابع مرکب یا تابع تابع و

(پ) چسباندنِ توابع معین بر قلمروهای جداگانه به‌یکدیگر،

به‌دست می‌آیند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## مجموع، تفاضل، حاصلضرب، خارج‌قسمت و ضرب در اعداد

مانند اعداد، می‌توان توابع را با هم جمع، از هم تفریق، در هم ضرب و بر هم تقسیم کرد (در مورد اخیر، به‌شرطی که مخرج هرگز صفر نشود) تا توابع جدید تولید شوند.

**تعریف ۳ اعمال چهارگانه با توابع**

اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند، به‌ازای هر $x$ای که متعلق به‌قلمروهای هر دو تابع $f$ و $g$ باشد، توابع $f+g$، $f-g$، $fg$ و $f/g$ را با فرمول‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0$$

حالت خاصی از قاعدهٔ ضرب توابع نشان می‌دهد چگونه می‌توان توابع را در ثابت‌ها ضرب کرد. اگر $c$ عددی حقیقی باشد، آنگاه تابع $cf$ به‌ازای هر $x$ متعلق به‌قلمرو $f$ با فرمول $(cf)(x) = cf(x)$ تعریف می‌شود.

**مثال ۱** شکل پ.۵۶(آ) نمودارهای $f(x) = x^2$، $g(x) = x - 1$ و مجموع آنها، یعنی $(f+g)(x) = x^2 + x - 1$ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که در هر نقطهٔ $x$، ارتفاع نمودار $f+g$ برابر است با مجموع ارتفاع‌های نمودارهای $f$ و $g$ در آن نقطه. ■

**مثال ۲** شکل پ.۵۶(ب) نمودارهای $f(x) = 2 - x^2$ و $g(x) = (0.5)f(x)$ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنید که در هر نقطهٔ $x$، ارتفاع نمودار $g$ نصف ارتفاع نمودار $f$ در آن نقطه است. ■

**مثال ۳** توابع $f$ و $g$ با فرمول‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ تعریف شده‌اند. فرمول‌هایی برای مقادیر $3f$، $f+g$، $f-g$، $fg$، $f/g$ و $g/f$ در نقطهٔ $x$ بیابید و قلمرو هر یک از این توابع را مشخص کنید.

*حل.* اطلاعات موردنظر را در جدول ۲ گرد آورده‌ایم:

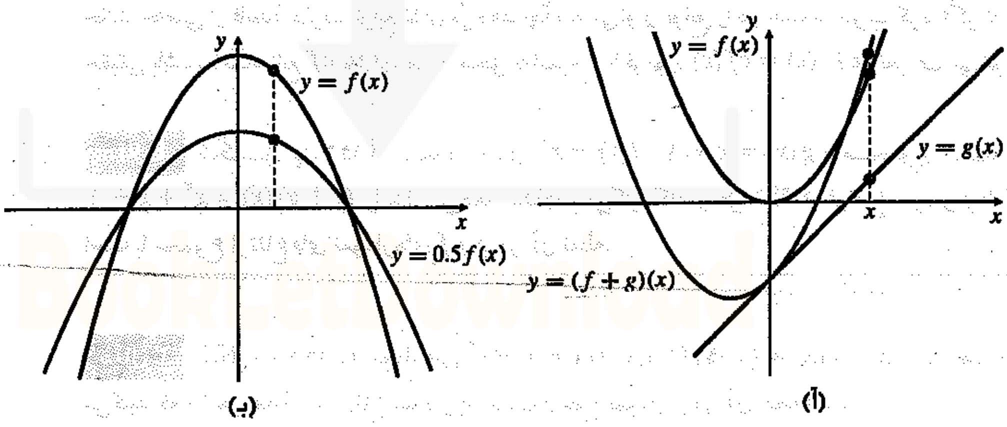
**جدول ۲.** اعمال چهارگانه با $f$ و $g$ و قلمروهای آنها

| تابع | فرمول | قلمرو |
|---|---|---|
| $f$ | $f(x)=\sqrt{x}$ | $[0\,,\infty[$ |
| $g$ | $g(x)=\sqrt{1-x}$ | $]-\infty\,,1]$ |
| $3f$ | $(3f)(x)=3\sqrt{x}$ | $[0\,,\infty[$ |
| $f+g$ | $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ | $[0\,,1]$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$ | $[0\,,1]$ |
| $fg$ | $(fg)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$ | $[0\,,1]$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ | $[0\,,1[$ |
| $\frac{g}{f}$ | $\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ | $]0\,,1]$ |

ملاحظه می‌کنیم که برای بیشترِ توابع حاصل، قلمرو برابر است با

$$[0\,,\infty[\,\cap\,]-\infty\,,1]=[0\,,1]$$

یعنی اشتراک قلمروهای $f$ و $g$. ولی قلمروهای دو خارج‌قسمت $f/g$ و $g/f$ را باید باز هم بیشتر به‌گونه‌ای محدود می‌کردیم که نقاط صفرکنندهٔ مخرج حذف شوند. ■




**شکل پ.۵۶** (آ) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ (ب) $g(x)=(0.5)f(x)$

## تابع مرکب

روش دیگری هم هست که با استفاده از آن می‌توان دو تابع را با هم ترکیب کرد تا تابع جدیدی به‌دست آید.

**تعریف ۴** **تابع مرکب**

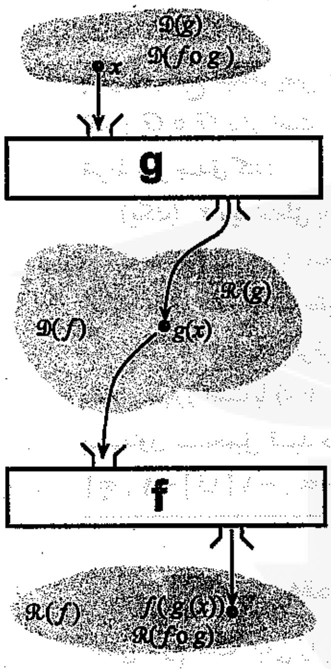
اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند، تابع مرکب $f \circ g$ با

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

تعریف می‌شود. قلمرو $f \circ g$ از آن $x$هایی متعلق به‌قلمرو $g$ تشکیل شده است که به‌ازای آنها $g(x)$ به‌قلمرو $f$ تعلق دارد. در حالت خاص اگر برد $g$ در قلمرو $f$ قرار داشته باشد، آنگاه قلمرو $f \circ g$ همان قلمرو $g$ است.

مطابق شکل پ.۵۷، تشکیل $f \circ g$ هم‌ارز است با چیدن «ماشین تابع» $g$ و «ماشین تابع» $f$ در یک «خط تولید» به‌گونه‌ای که خروجی $g$ ورودی $f$ بشود.

هنگام محاسبهٔ $f \circ g(x) = f(g(x))$، نخست $g(x)$ و سپس اِفِ نتیجه را به‌دست می‌آوریم. $g$ را تابع درونی و $f$ را تابع بیرونیِ تابع مرکب می‌نامیم. البته می‌توانیم تابع مرکب $g \circ f(x) = g(f(x))$ را نیز تشکیل دهیم که دراین‌صورت $f$ تابع درونی است، یعنی تابعی که اول باید محاسبه شود، و $g$ تابع بیرونی است، یعنی تابعی که باید دست آخر محاسبه شود. همان‌طور که مثال بعد نشان می‌دهد، $f \circ g$ و $g \circ f$ معمولاً متفاوت هستند.




شکل پ.۵۷ $f \circ g(x) = f(g(x))$

**مثال ۴** با فرض $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x + 1$، توابع مرکب $f \circ g(x)$، $g \circ f(x)$، $f \circ f(x)$ و $g \circ g(x)$ را محاسبه و قلمرو هر یک را مشخص کنید.

**حل.** باز هم نتایج را در یک جدول گردآوری می‌کنیم.

**جدول ۳.** ترکیب‌های $f$ و $g$ و قلمروهای آنها

| تابع | فرمول | قلمرو |
|---|---|---|
| $f$ | $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0, \infty[$ |
| $g$ | $g(x) = x + 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f \circ g$ | $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$ | $[-1, \infty[$ |
| $g \circ f$ | $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$ | $[0, \infty[$ |
| $f \circ f$ | $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$ | $[0, \infty[$ |
| $g \circ g$ | $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$ | $\mathbb{R}$ |

مثلاً برای اینکه ببینیم چرا قلمرو $f \circ g$ برابر است با $[-1, \infty[$، مشاهده می‌کنیم که $g(x) = x + 1$ به‌ازای همهٔ $x$های حقیقی معین است، ولی فقط وقتی به‌قلمرو $f$ تعلق دارد که $x + 1 \geq 0$ یا $x \geq -1$. ■

**مثال ۵** اگر $G(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$، $G \circ G(x)$ را محاسبه و قلمرو آن را مشخص کنید.

*حل.* ملاحظه می‌کنیم که

$$G \circ G(x) = G(G(x)) = G\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{1 + x - 1 + x}{1 + x + 1 - x} = x$$

با توجه به‌تابع نتیجه، یعنی $x$ که به‌ازای همهٔ $x$های حقیقی معین است، ممکن است وسوسه شویم و بگوییم قلمرو $G \circ G$ برابر است با $\mathbb{R}$. این ادعا نادرست است! برای اینکه $x$ متعلق به‌قلمرو $G \circ G$ باشد باید در دو شرط زیر صدق کند:

(یک) $x$ باید متعلق به‌قلمرو $G$ باشد،

(دو) $G(x)$ باید متعلق به‌قلمرو $G$ باشد.

قلمرو $G$ از همهٔ اعداد حقیقی، جز $x = -1$ تشکیل شده است. اگر $x = -1$ را از قلمرو $G \circ G$ کنار بگذاریم، شرط (یک) برقرار می‌شود. اکنون مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ $G(x) = -1$ جواب ندارد، زیرا این معادله هم‌ارز است با $1 - x = -(1 + x)$ یا $1 = -1$. بنابراین، همهٔ اعداد $G(x)$ به‌قلمرو $G$ تعلق دارند و بدون تحمیل قید دیگری بر $x$، شرط (دو) برقرار است. قلمرو $G \circ G$ عبارت است از $]-\infty, -1[ \cup ]-1, \infty[$، یعنی همهٔ اعداد حقیقی جز $-1$. ■

## توابعی که قطعه به‌قطعه تعریف شده‌اند

گاهی لازم است تابعی را بر قسمت‌های مختلف قلمرواش با فرمول‌های مختلف تعریف کنیم. یکی از این مثال‌ها تابع قدرمطلق است:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

چند مثال دیگر در زیر می‌آوریم. (توجه داشته باشید چگونه با استفاده از نقاط توپر و توخالی بر نمودارهای آنها به‌ترتیب نشان می‌دهیم کدام نقاط انتهایی به‌کدام قسمت نمودار تعلق دارند یا ندارند.)

**مثال ۶** **تابع هویساید**[1]. تابع هویساید (یا تابع پله‌ای یکه)، شکل پ.۵۸، با فرمول

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

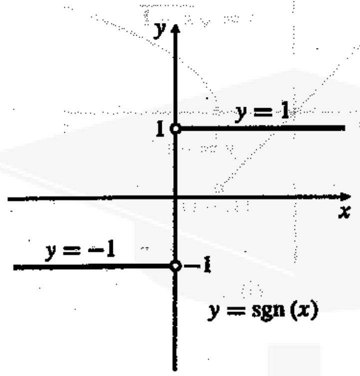
1. O. Heaviside

تعریف می‌شود. به‌عنوان مثال، برای مدل‌سازی ولتاژی که توسط یک باتری یک ولتی به‌یک مدار اعمال می‌شود تابع $H(t)$ را به‌کار می‌بریم (البته مشروط بر اینکه کلید واقع در مدار در لحظهٔ $t = ۰$ بسته شود). ■

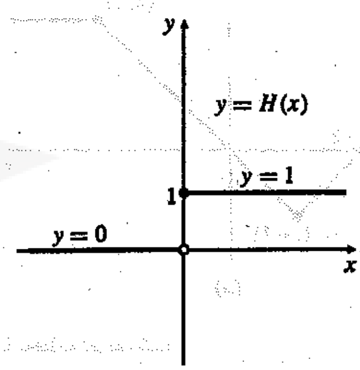
**مثال ۷** **تابع علامت.** تابع علامت، شکل پ.۵۹، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \text{ اگر } \\ -۱ & x < ۰ \text{ اگر } \\ \text{تعریف نشده} & x = ۰ \text{ اگر } \end{cases}$$

مقدار $\operatorname{sgn}(x)$ نشان‌دهندهٔ این است که $x$ مثبت یا منفی است. چون ۰ نه مثبت است و نه منفی، $\operatorname{sgn}(۰)$ تعریف نشده است. تابع علامت، تابعی فرد است. ■




**شکل پ.۵۹** تابع علامت




**شکل پ.۵۸** تابع هویساید

**مثال ۸** تابع

$$f(x) = \begin{cases} (x+۱)^۲ & x < -۱ \\ -x & -۱ \le x < ۱ \\ \sqrt{x-۱} & x \ge ۱ \end{cases}$$

بر کل خط حقیقی معین است ولی به‌ازای $x$های مختلف، مقادیر آن با سه فرمول مختلف بیان شده‌اند. نمودار این تابع در شکل پ.۶۰(آ) نشان داده شده است. ■

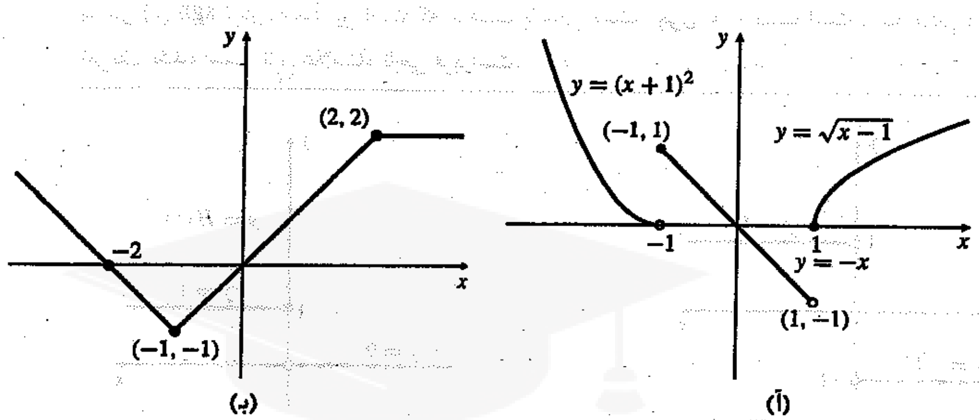
**مثال ۹** فرمولی برای تابع $g(x)$ که نمودارش در شکل پ.۶۰(ب) آمده است بیابید.

***حل.*** این نمودار از سه قسمت که به‌سه خط تعلق دارند تشکیل شده است. به‌ازای $x < -۱$، خط موردنظر دارای شیب $-۱$ و طول از مبدأ $-۲$ است و از این‌رو، معادلهٔ آن $y = -(x+۲)$ است. قسمت میانی، عبارت است از $y = x$ به‌ازای $-۱ \le x \le ۲$. قسمت راست، عبارت است از $y = ۲$ به‌ازای $x > ۲$. بنابراین،

می‌توان نوشت

$$g(x) = \begin{cases} -(x+۲) & x < -۱ \\ x & -۱ \leq x \leq ۲ \\ ۲ & x > ۲ \end{cases}$$

برخلاف مثال قبل، در اینجا این نکته حائز اهمیت نیست که برای تعریف $g(-۱)$ کدام یک از دو فرمول ممکن را به‌کار ببریم، زیرا هر دوی آنها مقداری یکسان به‌دست می‌دهند. این نکته در مورد $g(۲)$ نیز درست است. ■




**شکل پ.۶۰** توابع قطعه به‌قطعه تعریف شده

دو تابع زیر را می‌توان بر هر بازهٔ واقع بین دو عدد صحیح متوالی با فرمول‌های مختلف تعریف کرد، ولی ما راه آسانتری را برای تعریف آنها به‌کار می‌بریم.

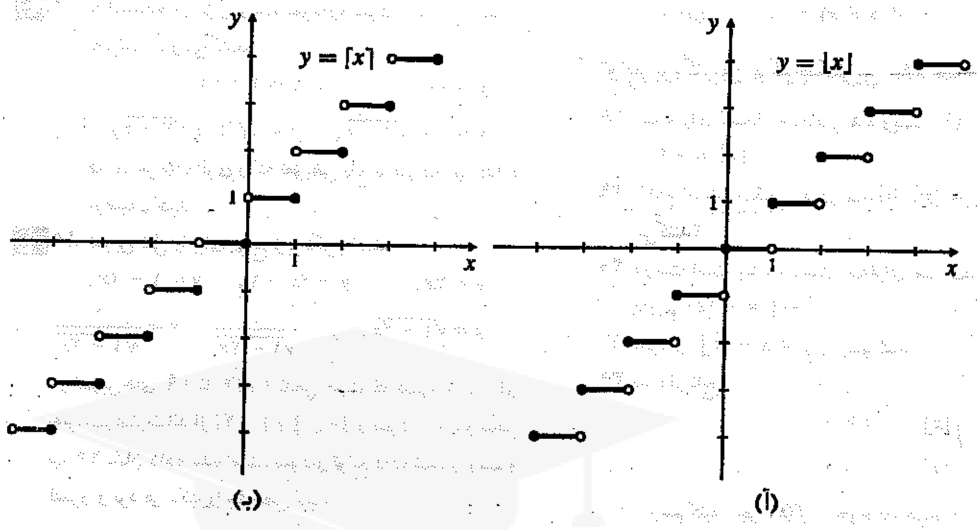
**مثال ۱۰** **تابع بزرگترین عدد صحیح.** تابعی که مقدارش به‌ازای هر عدد $x$ برابر است با **بزرگترین عدد صحیح** *(کوچکتر از یا برابر با)* $x$، **تابع بزرگترین عدد صحیح** یا **تابع مقدارگرد شدهٔ نقصانی**[1] نام دارد. این تابع را با $\lfloor x \rfloor$ نشان می‌دهیم. بعضی از کتاب‌ها نماد $[x]$ یا $[[x]]$ را به‌کار می‌برند. نمودار $y = \lfloor x \rfloor$ در شکل پ.۶۱(آ) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنیم که

$$\lfloor -۱/۲ \rfloor = -۲, \quad \lfloor ۰ \rfloor = ۰, \quad \lfloor ۱/۹ \rfloor = ۱, \quad \lfloor ۲/۴ \rfloor = ۲,$$
$$\lfloor -۲ \rfloor = -۲, \quad \lfloor -۰/۳ \rfloor = -۱, \quad \lfloor ۰/۲ \rfloor = ۰, \quad \lfloor ۲ \rfloor = ۲,$$
■

**مثال ۱۱** **تابع کوچکترین عدد صحیح.** تابعی که مقدارش به‌ازای هر عدد $x$ برابر است با کوچکترین

۱. یا تابع جزء صحیح

**عدد صحیح «بزرگتر از یا برابر با» $x$، تابع کوچکترین عدد صحیح یا تابع مقدار گرد شدهٔ اضافی** نام دارد. این تابع را با $\lceil x \rceil$ نشان می‌دهیم. نمودار این تابع در شکل پ.۶۱(ب) نشان داده شده است. برای مثال، به‌ازای مقادیر مثبت $x$ این تابع بیانگر هزینهٔ توقف اتومبیل به‌مدت $x$ ساعت در پارکینگی است که برای هر ساعت یا کمتر از آن باید ۱ دلار پرداخت شود. ■




**شکل پ.۶۱** (آ) تابع بزرگترین عدد صحیح (ب) تابع کوچکترین عدد صحیح

## تمرینات پ.۵

در تمرین‌های ۱ و ۲، قلمرو توابع $f+g$، $f-g$، $fg$، $f/g$ و $g/f$ را بیابید و فرمول هر یک از این توابع را ارائه کنید.

۱. $f(x) = x$، $g(x) = \sqrt{x-1}$

۲. $f(x) = \sqrt{1-x}$، $g(x) = \sqrt{1+x}$

نمودارهای توابع تمرین‌های ۳ تا ۶ را با استفاده از ترکیب نمودارهای توابع ساده‌تری که این توابع را ساخته‌اند رسم کنید.

۳. $x - x^2$

۴. $x^3 - x$

۵. $x + |x|$

۶. $|x| + |x-2|$

۷. اگر $f(x) = x + 5$ و $g(x) = x^2 - 3$، مقادیر زیر را بیابید:

(آ) $f \circ g(0)$ (ب) $g(f(0))$

(پ) $f(g(x))$ (ت) $g \circ f(x)$

(ث) $f \circ f(-5)$ (ج) $g(g(2))$

(چ) $f(f(x))$ (ح) $g \circ g(x)$

در تمرین‌های ۸ تا ۱۰، توابع مرکب

(آ) $f \circ f(x)$ (ب) $f \circ g(x)$

(پ) $g \circ f(x)$ (ت) $g \circ g(x)$

را تشکیل دهید و قلمرو هر یک را مشخص کنید.

۸. $f(x) = 2/x$، $g(x) = x/(1-x)$

۹. $f(x) = 1/(1-x)$، $g(x) = \sqrt{x-1}$

۱۰. $f(x) = (x+1)/(x-1)$، $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$

درایه‌های مفقود در جدول ۴ را بیابید (تمرین‌های ۱۱ تا ۱۶).

**جدول ۴.**

| | $f(x)$ | $g(x)$ | $f \circ g(x)$ |
|---|---|---|---|
| ۱۱. | $x^2$ | $x+1$ | |
| ۱۲. | | $x+4$ | $x$ |

| | | |
|---|---|---|
| ۱۳. | $\lvert x\rvert$ | $\sqrt{x}$ |
| ۱۴. | $۲x+۳$ | $x^{۱/۳}$ |
| ۱۵. | $x$ | $(x+۱)/x$ |
| ۱۶. | $۱/x^۲$ | $x-۱$ |

۱۷. با استفاده از ابزار ترسیم نمودار، نمودار توابع زیر را به‌ترتیب بررسی کنید:

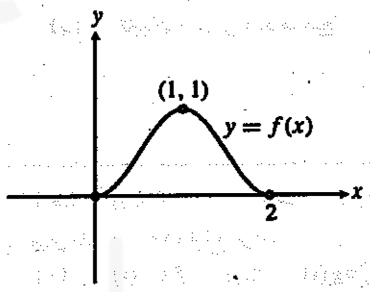
$$y=\sqrt{x},\qquad y=۲+\sqrt{x}$$
$$y=۲+\sqrt{۳+x},\qquad y=۱/(۲+\sqrt{۳+x})$$

در هر مرحله، اثری را که تعویض تابع بر نمودار می‌گذارد توصیف کنید.

۱۸. تمرین قبل را برای توابع زیر تکرار کنید.

$$y=۲x,\qquad y=۲x-۱,\qquad y=۱-۲x,$$
$$y=\sqrt{۱-۲x},\quad y=\frac{۱}{\sqrt{۱-۲x}},\quad y=\frac{۱}{\sqrt{۱-۲x}}-۱$$

در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۴، $f$ تابعی است که قلمرو و برد آن به‌ترتیب عبارت‌اند از $[۰,۲]$ و $[۰,۱]$ و نمودار آن در شکل پ.۶۲ نشان داده شده است. نمودار توابع داده شده را رسم و قلمرو و برد هر یک را مشخص کنید.




شکل پ.۶۲

۱۹. $۲f(x)$

۲۰. $-(۱/۲)f(x)$

۲۱. $f(۲x)$

۲۲. $f(x/۳)$

۲۳. $۱+f(-x/۲)$

۲۴. $۲f((x-۱)/۲)$

در تمرین‌های ۲۵ و ۲۶، نمودار توابع مفروض را رسم کنید.

۲۵. $$f(x)=\begin{cases} x & ۰\le x\le ۱\\ ۲-x & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

۲۶. $$g(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ۰\le x\le ۱\\ ۲-x & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

۲۷. در هر یک از موارد زیر، ثابت‌های $A$ و $B$ را طوری تعیین کنید که تابع $F(x)=Ax+B$ در شرط مفروض صدق کند:

(آ) به‌ازای هر $x$، $F\circ F(x)=F(x)$.

(ب) به‌ازای هر $x$، $F\circ F(x)=x$.

## توابع بزرگترین و کوچکترین عدد صحیح

۲۸. بـه‌ازای کـدام مـقادیر $x$ داریـم (آ) $\lfloor x\rfloor=۰$ و (ب) $\lceil x\rceil=۰$ ؟

۲۹. کدام اعداد حقیقی $x$ در معادلهٔ $\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil$ صدق می‌کنند؟

۳۰. درست است یـا نـادرست: بـه‌ازای هـر عـدد حـقیقی $x$ داریم $\lceil -x\rceil=-\lfloor x\rfloor$ ؟

۳۱. نمودار $y=x-\lfloor x\rfloor$ را رسم کنید.

۳۲. نمودار تابع

$$f(x)=\begin{cases}\lfloor x\rfloor & x\ge ۰\\ \lceil x\rceil & x<۰\end{cases}$$

را رسم کنید. چرا $f(x)$ را جزء صحیح $x$ می‌نامیم؟

## توابع زوج و فرد

۳۳. فرض کنیم $f$ تـابعی زوج و $g$ تـابعی فـرد بـاشد و هـر دوی آنها بر کل خط حقیقی $\mathbb{R}$ معین باشند. کدام یک از توابع زیر زوج و کدام یک فرد است؟

$$f+g,\ fg,\ f/g,\ g/f,\ f^۲=ff,\ g^۲=gg$$
$$f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f,\ g\circ g$$

۳۴. اگر تابع $f$ همزمان زوج و فرد باشد، نشان دهید که در هر نقطهٔ قلمرو آن داریم $f(x)=۰$.

۳۵. تابع $f$ بـه‌گونه‌ای است کـه قـلمروش نسبت بـه‌مبدأ متقارن است، یعنی به‌ازای هر $x$ متعلق به‌قلمرو $f$، $-x$ نیز به آن تعلق دارد.

(آ) نشان دهید که $f$ مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد است، یعنی داریم

$$f(x)=E(x)+O(x)$$

کـه درآن $E$ تـابعی زوج و $O$ تـابعی فـرد است. [راهنمایی: قرار دهید $E(x)=(f(x)+f(-x))/۲$. نشـان دهـید کـه $E(-x)=E(x)$ و از ایـن‌رو، $E$ زوج است. سـپس، نشـان دهـید کـه

$O(x) = f(x) - E(x)$ فرد است.]

(ب) نشان دهید فقط به‌یک روش می‌توان $f$ را به‌صورت به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. [راهنمایی: یک روش در قسمت (آ) ارائه شده است. اگر در عین حال $f(x)=E_1(x)+O_1(x)$ که در آن $E_1$ زوج و $O_1$ فرد است، نشان دهید که $E - E_1 = O_1 - O$ و سپس با استفاده از تمرین ۳۴ نشان دهید که $E = E_1$ و $O = O_1$.]

## پ.۶ چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا

چندجمله‌ای‌ها ساده‌ترین توابعی هستند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها برخورد می‌کنیم. هر چندجمله‌ای، مجموع جمله‌هایی است که هر یک از آنها مضرب ثابتی از یک توان صحیح نامنفیِ متغیر مستقل است:

**تعریف ۵** هر چندجمله‌ای تابعی مانند $P$ است که مقدارش در $x$ عبارت است از

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

که در آن $a_n$، $a_{n-1}$، ...، $a_2$، $a_1$ و $a_0$، به‌نام **ضرایب** چندجمله‌ای، ثابت هستند و به‌ازای $n > 0$ داریم $a_n \neq 0$. عدد $n$، یعنی درجهٔ بالاترین توان $x$ در چندجمله‌ای را **درجهٔ چندجمله‌ای** می‌نامیم. (درجهٔ چندجمله‌ای صفر تعریف نشده است.)

برای مثال،

| | |
|---|---|
| $3$ | یک چند جمله‌ای درجهٔ ۰ است. |
| $2 - x$ | یک چندجمله‌ای درجهٔ ۱ است. |
| $2x^3 - 17x + 1$ | یک چندجمله‌ای درجهٔ ۳ است. |

به‌طور کلی فرض براین است که چندجمله‌ای‌های مورد بحث، *چندجمله‌ای‌هایی حقیقی* هستند، یعنی ضرایب آنها اعدادی حقیقی‌اند و نه اعداد کلّیِ مختلط. از این گذشته، ضرایب چندجمله‌ای‌ها غالباً اعدادی صحیح یا گویا خواهند بود. در مطالعهٔ توابع، چندجمله‌ای‌ها تا حدی نقشی نظیر نقش اعداد صحیح دُر مطالعهٔ اعداد را بازی می‌کنند. مثلاً درست همان‌طور که از جمع، تفریق یا ضرب دو عدد صحیح همواره عددی صحیح به‌دست می‌آید، از جمع، تفریق یا ضرب دو چندجمله‌ای نیز همواره یک چند جمله‌ای حاصل می‌شود. از جمع یا تفریق دو چندجمله‌ای، یک چند جمله‌ای به‌دست می‌آید که درجه‌اش از بیشترین درجهٔ این دو چندجمله‌ای بیشتر نیست. از ضرب دو چندجمله‌ای با درجه‌های $m$ و $n$، یک چندجمله‌ای با درجهٔ $m + n$ به‌دست می‌آید. مثلاً، در ضرب

$$(x^2 + 1)(x^3 - x - 2) = x^5 - 2x^2 - x - 2$$

عوامل ضرب دارای درجه‌های ۲ و ۳ هستند و از این‌رو، حاصلضرب دارای درجهٔ ۵ است.

درست همان‌طور که خارج قسمت دو عدد صحیح غالباً عددی صحیح نیست و عدد گویا نام دارد، خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای نیز غالباً یک چندجمله‌ای نیست و **تابع گویا** نامیده می‌شود.

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$$ تابعی گویاست.

وقتی عددی طبیعی مانند $a$ را بر عدد طبیعی کوچکتری مانند $b$ تقسیم می‌کنیم، خارج‌قسمت صحیحی مانند $q$ و باقیماندهٔ صحیحی مانند $r$، $0 \le r < b$، به‌دست می‌آوریم و از این‌رو، می‌توانیم کسر $a/b$ را (به‌طور یکتا) به‌صورت مجموع عدد صحیح $q$ و کسر دیگری بنویسیم که صورت کسر اخیر (یعنی همان باقیماندهٔ $r$) کوچکتر از مخرج، یعنی $b$ است. برای مثال

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$ در اینجا خارج‌قسمت برابر ۲ و باقیمانده برابر ۱ است.

به‌طور مشابهی اگر $A_m$ و $B_n$ دو چندجمله‌ای با درجه‌های به‌ترتیب $m$ و $n$ باشند و $m > n$، می‌توانیم تابع گویای $A_m/B_n$ را (به‌طور یکتا) به‌صورت مجموع یک چندجمله‌ای $Q_{m-n}$ با درجهٔ $m-n$ و تابع گویای دیگری مانند $R_k/B_n$ بنویسیم که در کسر اخیر، چندجمله‌ای صورت یعنی $R_k$ (که همان باقیماندهٔ تقسیم $A_m$ بر $B_n$ است) یا صفر است یا درجه‌اش، $k$، کوچکتر از $n$ است:

$$\frac{A_m(x)}{B_n(x)} = Q_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{B_n(x)} \qquad \text{(الگوریتم تقسیم)}$$

خارج‌قسمت و باقیمانده را معمولاً با استفاده از «عمل تقسیم» یا روشی هم‌ارز با آن محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۱** الگوریتم تقسیم را برای $\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$ بنویسید.

**حل.** روش **I**. با استفاده از عمل تقسیم می‌بینیم که

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\,3x^2 & +\,3x & +\,4 & x^2 + 1 \\
\cline{5-5}
 & & & & 2x - 3 \\
2x^3 & & +\,2x & & \\
\cline{1-4}
 & -3x^2 & +\,x & +\,4 & \\
 & -3x^2 & & -\,3 & \\
\cline{1-4}
 & & x & +\,7 &
\end{array}$$

بدین سان،

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}$$

خارج‌قسمت و باقیمانده به‌ترتیب عبارت‌اند از $2x - 3$ و $x + 7$.

روش **II**. با افزودن و کم کردن جمله‌های مناسبی درصورت به‌طوری که عامل $x^2 + 1$ آشکار شود، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
&2x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \\
&= 2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 + 3x + 4 - 2x + 3 \\
&= 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) + x + 7
\end{aligned}$$

و درنتیجه، بی‌درنگ ملاحظه می‌شود که

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}$$

■

## ریشه‌ها و عامل‌ها

عدد $r$ را یک ریشهٔ چندجمله‌ای $P$ می‌نامیم هرگاه $P(r) = 0$. برای مثال، چندجمله‌ای $P(x) = x^3 - 4x$ دارای سه ریشهٔ ۰، ۲ و ۲− است. در حقیقت اگر هر یک از این سه عدد را به‌جای $x$ قرار دهیم می‌بینیم که $P(x)$ صفر می‌شود. قضیهٔ بنیادی جبر (پیوست II را ببینید[1]) می‌گوید هر چندجمله‌ایِ دارای درجهٔ حداقل ۱، ریشه دارد (گرچه ممکن است این ریشه عددی مختلط باشد). مثلاً چندجمله‌ای خطی (یعنی درجه اول) $ax + b$ دارای ریشهٔ $-b/a$ است، زیرا $a(-b/a) + b = 0$. چندجمله‌ای ثابت (یعنی چندجمله‌ای دارای درجهٔ صفر) نمی‌تواند ریشه داشته باشد مگر اینکه چندجمله‌ای صفر باشد؛ در این وضع، همهٔ عددها ریشه‌های آن هستند.

یک چندجمله‌ای حقیقی الزاماً دارای ریشهٔ حقیقی نیست؛ چندجمله‌ای $x^2 + 4$ به‌ازای هیچ عدد حقیقی $x$ صفر نمی‌شود، ولی اگر $x$ برابر باشد با یکی از دو عدد مختلط $2i$ یا $-2i$ که در آن $i$ واحد موهومی است و در رابطهٔ $i^2 = -1$ صدق می‌کند، $x^2 + 4$ صفر می‌شود. (برای بحث پیرامون اعداد مختلط، پیوست I را ببینید.[2]) اعداد $2i$ و $-2i$ مزدوج مختلط یکدیگر هستند. ریشه‌های مختلط چندجمله‌ای‌های حقیقی، دو به‌دو مزدوج یکدیگر هستند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، اغلب سودمند است چندجمله‌ای‌ها را به‌حاصلضرب چندجمله‌ای‌های درجهٔ کمتر و بویژه درجهٔ ۱ یا ۲ (یعنی چندجمله‌ای‌های خطی و درجهٔ دوم) تجزیه کنیم. قضیهٔ بعد، ارتباط بین عوامل خطی و ریشه‌ها را آشکار می‌سازد.

**قضیهٔ ۱ قضیهٔ تجزیه**

عدد $r$ یک ریشهٔ چندجمله‌ای $P$ با درجهٔ حداقل ۱ است اگر و فقط اگر $x - r$ یک عامل $P(x)$ باشد.

**اثبات.** بنا بر الگوریتم تقسیم، یک چندجمله‌ای مانند $Q$ با درجهٔ یک واحد کمتر از درجهٔ $P$ و یک چندجمله‌ای با درجهٔ ۰ (یعنی ثابتی مانند $c$) هست به‌طوری که

$$\frac{P(x)}{x - r} = Q(x) + \frac{c}{x - r}$$

بدین‌سان، $P(x) = (x - r)Q(x) + c$ و $P(r) = 0$ اگر و فقط اگر $c = 0$. در این وضع، $P(x) = (x - r)Q(x)$ و $x - r$ یک عامل $P(x)$ است.

●

از قضیهٔ ۱ و قضیهٔ بنیادی جبر نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌ای درجهٔ $n \geq 1$ دارای $n$ ریشه است. (اگر $P$ دارای درجهٔ $n \geq 2$ باشد، آنگاه $P$ ریشه‌ای مانند $r$ دارد و $P(x) = (x - r)Q(x)$ که در آن، $Q(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ $n - 1 \geq 1$ است و این چندجمله‌ای نیز به‌نوبهٔ خود دارای ریشه است و الی آخر.) البته

[1] و [2]. پیوست‌ها در پایان جلد دوم آمده‌اند.

ریشه‌های یک چندجمله‌ای الزاماً متفاوت نیستند. چندجمله‌ای $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$ دارای چهار ریشه است؛ یکی از آنها ۰ است و سه تای دیگر برابر با ۱ هستند. می‌گوییم ریشهٔ ۱ دارای **چندگانگی** ۳ است زیرا از تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)^3$ نیز باقیمانده‌ای به‌دست نمی‌آید.

اگر چندجمله‌ای حقیقی $P$ دارای ریشهٔ مختلط $r_1=u+iv$ باشد که در آن $u$ و $v$ حقیقی هستند و $v\neq 0$، آنگاه همان‌طور که در بالا متذکر شدیم مزدوج مختلط $r_1$، یعنی $r_2=u-iv$، نیز یک ریشهٔ $P$ خواهد بود. (علاوه بر این، چندگانگی $r_1$ و $r_2$ یکسان است.) بدین‌سان، هم $x-u-iv$ و هم $x-u+iv$ عامل‌های $P(x)$ هستند و از این‌رو، حاصلضرب آنها یعنی

$$(x-u-iv)(x-u+iv)=(x-u)^2+v^2=x^2-2ux+u^2+v^2$$

که یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم و بدون ریشهٔ حقیقی است نیز یک عامل $P(x)$ است. در نتیجه، هر چندجمله‌ای حقیقی را می‌توان به‌حاصلضرب عوامل خطی حقیقی (شاید مکرر) و عوامل درجهٔ دوم حقیقی (شاید مکرر) و بدون ریشهٔ حقیقی، تجزیه کرد.

**مثال ۲** درجهٔ $P(x)=x^3(x^2+2x+5)^2$ چند است؟ ریشه‌های $P$ و چندگانگی هر یک از آنها را بیابید.

*حل.* اگر $P$ را بسط دهیم، بالاترین توان $x$ که در بسط حضور دارد عبارت است از $x^3(x^2)^2=x^7$. پس درجهٔ $P$ برابر است با ۷. عامل $x^3=(x-0)^3$ نشان می‌دهد که ۰ یک ریشهٔ $P$ با چندگانگی ۳ است. چهار ریشهٔ دیگر عبارت‌اند از ریشه‌های $x^2+2x+5$ که هر یک از آنها دارای چندگانگی ۲ است. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}[x^2+2x+5]^2&=[(x+1)^2+4]^2\\&=[(x+1+2i)(x+1-2i)]^2\end{aligned}$$

بنابراین، هفت ریشهٔ $P$ عبارت‌اند از

$$\left.\begin{array}{ll}0,0,0 & \text{۰ دارای چندگانگی ۳ است،}\\ -1-2i,-1-2i & -1-2i \text{ دارای چندگانگی ۲ است،}\\ -1+2i,-1+2i & -1+2i \text{ دارای چندگانگی ۲ است.}\end{array}\right\}$$

## ریشه‌ها و عوامل چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم

فرمول مشهوری برای یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم در اختیار داریم.

**فرمول درجهٔ دوم**

هر دو جواب معادلهٔ درجهٔ دوم

$$Ax^2+Bx+C=0$$

که در آن $A$، $B$ و $C$ سه ثابت هستند و $A \neq 0$، عبارت‌اند از

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

برای اثبات، معادله را بر $A$ تقسیم و سپس با جمله‌های حاوی $x$ مجذور کامل ایجاد می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

$$x^2 + \frac{2B}{2A}x + \frac{B^2}{4A^2} = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

$$x + \frac{B}{2A} = \pm\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

کمیت $D = B^2 - 4AC$ را که در فرمول بالا زیر رادیکال ظاهر شده است مبین معادله یا چندجمله‌ای درجهٔ دوم مورد بحث می‌نامیم. ماهیت ریشه‌های این معادله به‌علامت این مبین بستگی دارد.

(آ) اگر $D > 0$، آنگاه به‌ازای ثابتی حقیقی مانند $k$ داریم $D = k^2$ و معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض دارای دو ریشهٔ متمایز $(-B+k)/2A$ و $(-B-k)/2A$ است.

(ب) اگر $D = 0$، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض فقط دارای ریشهٔ $\frac{-B}{2A}$ با چندگانگی ۲ است. (این ریشه را ریشهٔ **مضاعف** می‌نامیم.)

(پ) اگر $D < 0$، آنگاه به‌ازای ثابتی حقیقی مانند $k$ داریم $D = -k^2$ و معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض دارای دو ریشهٔ مزدوج مختلط $(-B+ki)/2A$ و $(-B-ki)/2A$ است.

**مثال ۳** ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم زیر را بیابید و سپس آنها را به‌حاصلضرب عوامل خطی تجزیه کنید:

(آ) $x^2 + x - 1$ (ب) $9x^2 - 6x + 1$ (پ) $2x^2 + x + 1$

**حل.** در هر مورد با استفاده از فرمول درجهٔ دوم، ریشه‌های معادله را می‌یابیم:

(آ) $A = 1$، $B = 1$ و $C = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

(ب) $A = 9$، $B = -6$ و $C = 1$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{(ریشهٔ مضاعف)}$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$$

(پ) $A = ۲$، $B = ۱$ و $C = ۱$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۸}}{۴} = -\frac{۱}{۴} \pm \frac{\sqrt{۷}}{۴} i$$

$$۲x^۲ + x + ۱ = ۲\left(x + \frac{۱}{۴} - \frac{\sqrt{۷}}{۴} i\right)\left(x + \frac{۱}{۴} + \frac{\sqrt{۷}}{۴} i\right)$$

■

**تذکر.** فرمول‌هایی نیز برای محاسبهٔ دقیق ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۳ و درجهٔ ۴ در اختیار داریم، ولی این فرمول‌ها برخلاف فرمول درجهٔ دوم که در بالا ارائه شد بسیار پیچیده هستند و تقریباً هرگز به‌کار نمی‌روند. در عوض، حساب دیفرانسیل و انتگرال ابزارهای بسیار توانا و در عین‌حال سهل‌الوصولی را برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها (و حتی جواب‌های معادله‌های بسیار کلّیتر از آنها) با هر درجهٔ دلخواه از دقت در اختیار ما می‌گذارد.

## چند تجزیهٔ دیگر

بعضی از چندجمله‌ای‌های درجهٔ چهار یا بیشتر را می‌توان با استفاده از حدس و بررسی (حداقل به‌صورت جزئی) به‌حاصلضرب عوامل تجزیه کرد. چند نمونهٔ ساده در زیر می‌آوریم:

(آ) عامل مشترک: $ax^۲ + bx = x(ax + b)$

(ب) تفاضل دو مجذور: $x^۲ - a^۲ = (x - a)(x + a)$

(پ) تفاضل دو مکعب: $(x^۳ - a^۳) = (x - a)(x^۲ + ax + a^۲)$

(ت) به‌طور کلی، تفاضل دو توان $n$ام که در آن $n$ عدد طبیعی دلخواهی است:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-۱} + ax^{n-۲} + a^۲x^{n-۳} + \ldots + a^{n-۲}x + a^{n-۱})$$

ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی $n$، $x - a$ یک عامل $x^n - a^n$ است.

(ث) همچنین، اگر $n$ یک **عدد طبیعی فرد** باشد، آنگاه $x + a$ یک عامل $x^n + a^n$ است. مثلاً

$$x^۳ + a^۳ = (x + a)(x^۲ - ax + a^۲)$$

$$x^۵ + a^۵ = (x + a)(x^۴ - ax^۳ + a^۲x^۲ - a^۳x + a^۴)$$

سرانجام، روشی مبتنی بر آزمون و خطا برای تجزیهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم را که گاهی *تجزیهٔ سه‌جمله‌ای* می‌نامیم ارائه می‌کنیم. چون

$$(x + p)(x + q) = x^۲ + (p + q)x + pq\,,$$

$$(x - p)(x - q) = x^۲ - (p + q)x + pq\,,$$

$$(x + p)(x - q) = x^۲ + (p - q)x + pq$$

گاهی می‌توانیم با جست‌وجوی آن عوامل $|C|$ که مجموع یا تفاضلشان $B$ بشود، عوامل $x^۲ + Bx + C$ را بیابیم. به‌طور کلی، گاهی می‌توانیم با جست‌وجوی عوامل $a$ و $c$ برای $A$ و عوامل $b$ و $d$ برای $C$ به‌طوری که $ad + bc = B$، تجزیهٔ

$$Ax^2 + Bx + C = (ax+b)(cx+d)$$

را بنویسیم. البته اگر این روش به‌کار نیاید، همواره می‌توانیم با استفاده از فرمول درجهٔ دوم، ریشه‌ها و بنابراین، عوامل چندجمله‌ای درجهٔ دوم را بیابیم.

**مثال ٤**

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$    $p=3$ ، $q=2$ ، $pq=6$ ، $p+q=5$

$x^2 + 7x + 6 = (x+6)(x+1)$    $p=6$ ، $q=1$ ، $pq=6$ ، $p+q=7$

$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$    $p=3$ ، $q=-2$ ، $pq=-6$ ، $p+q=1$

$2x^2 + x - 10 = (2x+5)(x-2)$    $a=2$ ، $b=5$ ، $c=1$ ، $d=-2$

$ac=2$ ، $bd=-10$ ، $ad+bc=1$ ■

**مثال ۵** ریشه‌های چندجمله‌ای‌های زیر را بیابید:

(آ) $x^3 - x^2 - 4x + 4$    (ب) $x^4 + 3x^2 - 4$    (پ) $x^5 - x^4 - x^2 + x$

*حل.* (آ) یکی از عامل‌های مشترک به‌روشنی مشاهده می‌شود:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

ریشه‌ها عبارت‌اند از ۱، ۲ و ۲−.

(ب) این یک سه‌جمله‌ای برحسب $x^2$ است و تجزیهٔ آن آسان است:

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2+4)(x^2-1) = (x+2i)(x-2i)(x+1)(x-1)$$

ریشه‌ها عبارت‌اند از ۱، ۱−، $2i$ و $-2i$.

(پ) کار را با تجزیه‌های آشکار شروع می‌کنیم:

$$x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x^4 - x^3 - x + 1) = x(x-1)(x^3-1)$$
$$= x(x-1)^2(x^2+x+1)$$

بدین‌سان، ۰ یک ریشهٔ ساده و ۱ یک ریشهٔ مضاعف است. ریشه‌های دیگر را باید از عامل درجهٔ دوم $x^2 + x + 1$ به‌دست آورد. این عامل را نمی‌توان بآسانی با حدس و بررسی تجزیه کرد و از این‌رو، فرمول درجهٔ دوم را به‌کار می‌بریم:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$ ■

## تمرینات پ.۶

در تمرین‌های ۱ تا ۱۲، ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها را بیابید. اگر ریشه‌ای تکراری باشد، چندگانگی آن را مشخص کنید. همچنین، هرچند جمله‌ای را به‌صورت حاصلضرب عوامل خطی بنویسید.

۱. $x^2 + 7x + 10$

۲. $x^2 - 3x - 10$

۳. $x^2 + 2x + 2$

۴. $x^2 - 6x + 13$

۵. $16x^4 - 8x^2 + 1$

۶. $x^4 + 6x^3 + 9x^2$

۷. $x^3 + 1$

۸. $x^4 - 1$

۹. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

۱۰. $x^5 - x^4 - 16x + 16$

۱۱. $x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$

۱۲. $x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۶، تابع گویای مفروض را به‌صورت مجموع یک چندجمله‌ای و یک تابع گویای دیگر که صورت آن یا صفر باشد یا دارای درجهٔ کمتر از مخرج، بیان کنید.

۱۳. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$

۱۴. $\dfrac{x^2}{x^2 + 5x + 3}$

۱۵. $\dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$

۱۶. $\dfrac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2 + 1}$

۱۷. اگر $P$ یک چندجمله‌ای با درجهٔ مثبت باشد، نشان دهید که $x - 1$ یک عامل $P$ است اگر و فقط اگر مجموع ضرایب $P$ صفر شود.

۱۸. ضرایب یک چندجمله‌ای در کدام شرط باید صدق کنند تا $x + 1$ یک عامل این چندجمله‌ای باشد؟

* ۱۹. مزدوج مختلط عدد مختلطی مانند $z = u + iv$ (که درآن $u$ و $v$ دو عدد حقیقی هستند) عبارت است از عددمختلط $\bar{z} = u - iv$. درپیوست I ثابت خواهیم کرد که مزدوج مختلط مجموع (یا حاصلضرب) چند عدد مختلط برابر است با مجموع (یا حاصلضرب) مزدوج‌های مختلط آن اعداد. با استفاده از این حقیقت ثابت کنید که اگر $z = u+iv$ یک ریشهٔ مختلط چندجمله‌ای حقیقی $P$ باشد، مزدوج $z$ یعنی $\bar{z}$ نیز یک ریشهٔ $P$ است.

* ۲۰. درادامهٔ تمرین قبل، نشان دهید که اگر $z = u + iv$ (که درآن $u$ و $v$ دو عدد حقیقی هستند) یک ریشهٔ مختلط چندجمله‌ای حقیقی $P$ باشد، آنگاه $P$ دارای عامل درجهٔ دوم حقیقی $x^2 - 2ux + u^2 + v^2$ است.

* ۲۱. با استفاده از تمرین ۲۰ نشان دهید که اگر $z = u + iv$ (که در آن $u$ و $v$ دو عدد حقیقی هستند) یک ریشهٔ مختلط چندجمله‌ای حقیقی $P$ باشد، آنگاه $z$ و $\bar{z}$ به‌عنوان ریشه‌های $P$ دارای چندگانگی یکسان هستند.

## پ.۷ توابع مثلثاتی

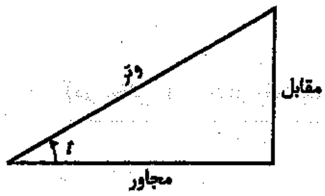
بیشتر اشخاص نخستین بار این تعریفِ $\cos t$ و $\sin t$ را فرا می‌گیرند که نسبت اضلاعی از یک مثلث قائم‌الزاویه هستند که یکی از زاویه‌های حادهٔ آن $t$ است. اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ حادهٔ آن $t$ است دو ضلع زاویهٔ قائمه را مطابق شکل پ.۶۳، «مجاور» و «مقابل» بنامیم، آنگاه

$$\cos t = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \quad , \quad \sin t = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \qquad (*)$$

این نسبت‌ها فقط به‌زاویهٔ $t$ بستگی دارند و نه به‌مثلث قائم‌الزاویهٔ خاصی که $t$ یک زاویهٔ آن است، زیرا همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ حادهٔ آنها $t$ است متشابه هستند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، ما به‌تعریف کلّیتری از $\cos t$ و $\sin t$ به‌عنوان توابعی که به‌ازای همهٔ

*اعداد حقیقی* $t$ (و نه فقط زاویه‌های حاده) معین باشند نیاز داریم.
تعریف‌های مطلوب را، به‌جای مثلث، برحسب دایره تنظیم می‌کنیم.




شکل پ.۶۳ $\cos t = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ و $\sin t = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

فرض می‌کنیم $C$ دایرهٔ به‌مرکز مبدأ $O$ و شعاع ۱ باشد. معادلهٔ این دایره عبارت است از $x^2+y^2=1$. فرض می‌کنیم $A$ نقطهٔ $(1,0)$ باشد که بر این دایره قرار دارد. به‌ازای هر عدد حقیقی $t$، نقطهٔ متعلق به $C$ و به‌فاصلهٔ $|t|$ از $A$ را $P_t$ می‌نامیم با این شرط که فاصله‌یابی انجام گرفته در امتداد $C$، به‌ازای $t>0$ در جهت پادساعتگرد و به‌ازای $t<0$ در جهت ساعتگرد باشد. برای مثال، چون محیط $C$ برابر است با $2\pi$، نقطهٔ $P_{\pi/2}$ به‌اندازهٔ ربع محیط $C$ در جهت پادساعتگرد از $A$ فاصله دارد. این همان نقطهٔ $(0,1)$ است.

ما طول کمان، یعنی $t$ را برای اندازه‌گیری زاویهٔ $AOP_t$ به‌کار خواهیم برد. شکل پ.۶۴ را ببینید.

**تعریف ۶** اندازهٔ زاویهٔ $AOP_t$ برحسب رادیان برابر است با $t$:

$$\angle AOP_t = t \text{ رادیان}$$

البته ما بیشتر عادت کرده‌ایم که زاویه‌ها را برحسب درجه اندازه بگیریم. چون $P_\pi$ همان نقطهٔ $(-1,0)$ است که به‌فاصلهٔ نصف محیط $C$ (یعنی $\pi$ واحد طول) از $A$ قرار گرفته است، داریم

$$\pi \text{ رادیان} = 180^\circ$$

برای تبدیل درجه به‌رادیان، آن را در $\pi/180$ ضرب می‌کنیم. برای تبدیل رادیان به‌درجه، آن را در $180/\pi$ ضرب می‌کنیم.

**قرارداد دربارهٔ زاویه**

در حساب دیفرانسیل و انتگرال فرض بر این است که همهٔ زاویه‌ها برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شوند مگر اینکه درجه یا هر واحد دیگری صریحاً بیان شود. وقتی از زاویهٔ $\pi/3$ صحبت می‌کنیم مقصودمان $\pi/3$ رادیان است (که برابر است با $60^\circ$) و نه $\pi/3$ درجه.

**مثال ۱** **طول کمان و مساحت قطاع.** کمانی از دایرهٔ به‌شعاع $r$ مقابل یک زاویهٔ مرکزی $t$ قرار دارد. طول این کمان و مساحت قطاعی را که بین این کمان و مرکز دایره است بیابید.

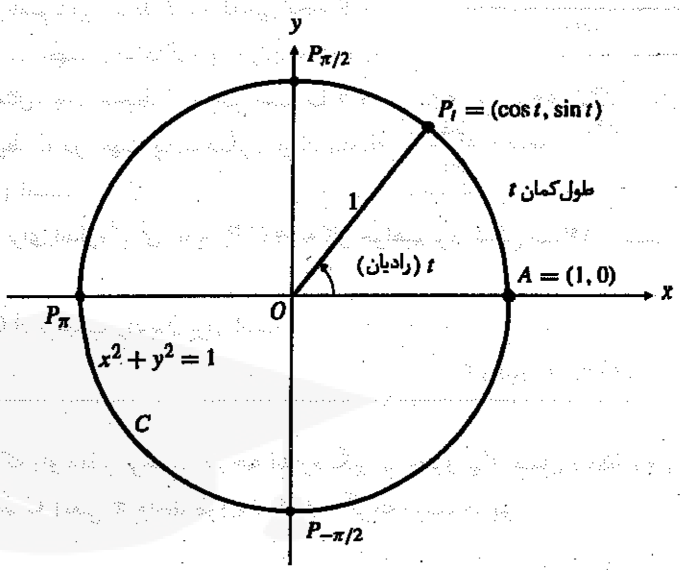
*حل.* اگر طول کمان را $s$ بنامیم، آنگاه نسبت $s$ به‌محیط دایره (یعنی $2\pi r$) با نسبت زاویهٔ $t$ به‌یک دور کامل $2\pi$ رادیان (یا $360^\circ$) برابراست. بدین‌سان،

$$s = \frac{t}{2\pi}(2\pi r) = rt$$

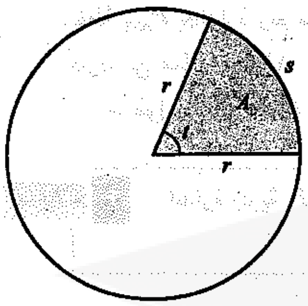
به‌همین ترتیب اگر مساحت قطاع مورد بحث را $A$ بنامیم (شکل پ.۶۵)، آنگاه نسبت $A$ به‌مساحت کل دایره (یعنی $\pi r^2$) نیز با نسبت $t$ به‌یک دور کاملِ $2\pi$ رادیان برابر خواهد بود

$$A = \frac{t}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{r^2 t}{2}$$

(در بخش ۱.۱ نشان خواهیم داد که مساحت دایرهٔ به‌شعاع $r$ برابر است با $\pi r^2$.) ■




**شکل پ.۶۴** اگر طول کمان $AP_t$ برابر باشد با $t$ واحد، آنگاه زاویهٔ $AOP_t$ برابر است با $t$ رادیان




**شکل پ.۶۵** طول کمان، $s = rt$؛ مساحت قطاع، $A = \frac{r^2 t}{2}$

با استفاده از روش توصیف شده در بالا می‌توانیم به‌ازای هر عدد حقیقی $t$، مثبت یا منفی، نقطهٔ متناظر، یعنی $P_t$ را بیابیم. $\cos t$ و $\sin t$ را مختصات $P_t$ تعریف می‌کنیم. (شکل پ.۶۶ را ببینید.)

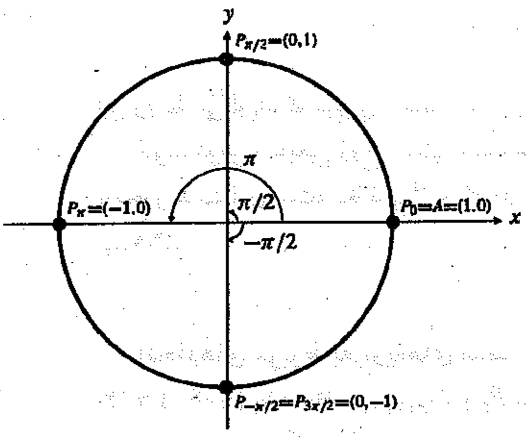
**تعریف ۷ کوسینوس و سینوس**

به‌ازای هر عدد حقیقی $t$، کوسینوس $t$ (به‌اختصار $\cos t$) و سینوس $t$ (به‌اختصار $\sin t$) به‌ترتیب عبارت‌اند از $x$ ـ مختص و $y$ ـ مختص نقطهٔ $P_t$.

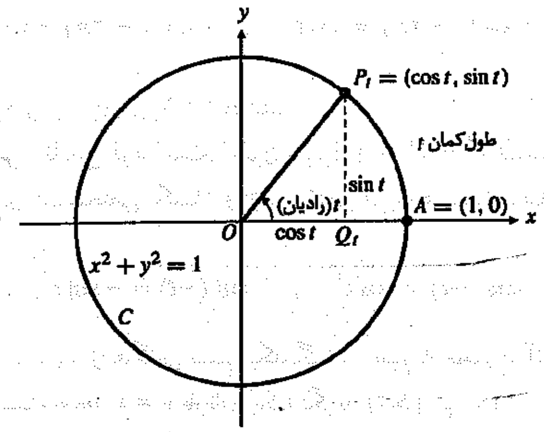
$\cos t = P_t$ مختص ـ $x$

$\sin t = P_t$ مختص ـ $y$

با توجه به‌نحوهٔ تعریف، غالباً کوسینوس و سینوس را **توابع دایره‌ای** می‌نامیم. توجه داشته باشید که این تعریف‌ها با تعریف‌هایی که قبلاً برای زاویهٔ حاده ارائه کردیم یکی هستند. (فرمول‌های (*) در آغاز این بخش را ببینید.) مثلث مورد بحث عبارت است از $P_tOQ_t$ در شکل پ.۶۶.




شکل پ.۶۷ چند زاویهٔ خاص




شکل پ.۶۶ مختصات $P_t$ عبارت‌اند از $(\cos t, \sin t)$

**مثال ۲** با بررسی مختصات $P_\circ = A$، $P_{\pi/۲}$، $P_\pi$ و $P_{۳\pi/۲} = P_{-\pi/۲}$ در شکل پ.۶۷، مقادیر زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos \circ = ۱ \qquad \cos\frac{\pi}{۲} = \circ \qquad \cos \pi = -۱ \qquad \cos\left(\frac{-\pi}{۲}\right) = \cos\frac{۳\pi}{۲} = \circ$$

$$\sin \circ = \circ \qquad \sin\frac{\pi}{۲} = ۱ \qquad \sin \pi = \circ \qquad \sin\left(\frac{-\pi}{۲}\right) = \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱$$

## چند اتحاد سودمند

بسیاری از ویژگی‌های مهم $\cos t$ و $\sin t$ از این حقیقت نتیجه می‌شوند که این دو، عبارت‌اند از مختصات نقطهٔ $P_t$ که متعلق به‌دایرهٔ $C$ به‌معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ است.

**برد کوسینوس و سینوس.** به‌ازای هر عدد حقیقی $t$ داریم

$$-۱ \leq \cos t \leq ۱ \quad , \quad -۱ \leq \sin t \leq ۱$$

**اتحاد فیثاغورس.** مختصات نقطهٔ $P_t$، یعنی $x = \cos t$ و $y = \sin t$، باید در معادلهٔ دایره صدق کنند. بنابراین، به‌ازای هر عدد حقیقی $t$ داریم

$$\cos^۲ t + \sin^۲ t = ۱$$

(توجه داشته باشید که $\cos^۲ t$ یعنی $(\cos t)^۲$ و نه $\cos(\cos t)$. این نمادگذاری نامناسبی است، ولی در همهٔ متون ریاضی به‌کار می‌رود و از این‌رو، باید به‌آن عادت کنید!)

**تناوب.** چون محیط $C$ برابر است با $۲\pi$، افزودن $۲\pi$ به $t$ سبب می‌شود که نقطهٔ $P_t$ یک دور کامل روی $C$ بزند و به‌جای اول خود بازگردد، یعنی $P_{t+۲\pi} = P_t$. بدین‌سان، به‌ازای هر $t$ داریم

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \quad , \quad \sin(t + 2\pi) = \sin t$$

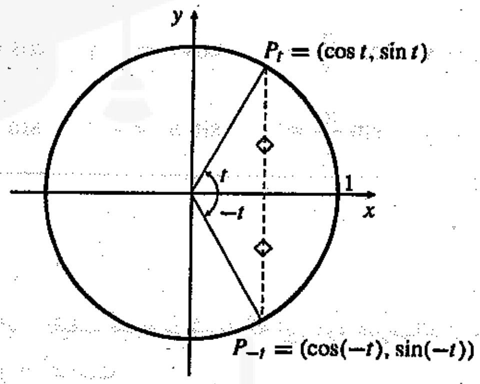
این روابط می‌گویند کوسینوس و سینوس، **دوره‌ای** و دارای دورهٔ $2\pi$ هستند.

**کوسینوس، تابعی زوج است. سینوس، تابعی فرد است.** چون دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ نسبت به‌محور $x$ متقارن است، نقاط $P_{-t}$ و $P_t$ دارای $x$ ـ مختص یکسان و $y$ ـ مختص قرینه هستند (شکل پ.۶۸).

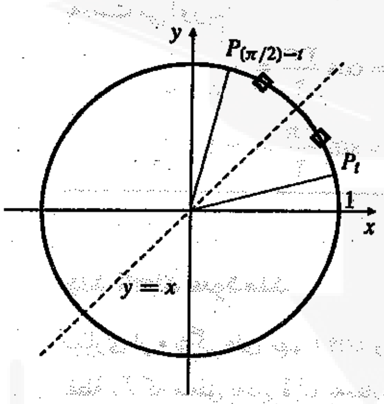
$$\cos(-t) = \cos t \quad , \quad \sin(-t) = -\sin t$$

**اتحادهای مربوط به‌زاویه‌های متمم.** دو زاویه را هنگامی متمم (یکدیگر) می‌نامیم که مجموع آنها $\pi/2$ (یا $90°$) باشد. نقاط $P_{(\pi/2)-t}$ و $P_t$ نسبت به‌خط $y = x$ بازتاب یکدیگرند (شکل پ.۶۹) و از این‌رو، $x$ ـ مختص یکی برابر است با $y$ ـ مختص دیگری و برعکس. بدین‌سان،

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$




**شکل پ.۶۸** $\cos(-t) = \cos t$
$\sin(-t) = -\sin t$



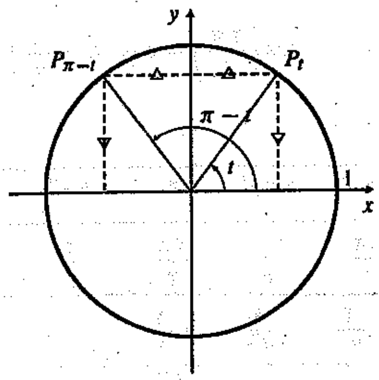

**شکل پ.۶۹** $\cos((\pi/2) - t) = \sin t$
$\sin((\pi/2) - t) = \cos t$

**اتحادهای مربوط به‌زاویه‌های مکمل.** دو زاویه را هنگامی مکمل (یکدیگر) می‌نامیم که مجموع آنها $\pi$ (یا $180°$) باشد. چون دایرهٔ مورد بحث نسبت به‌محور $y$ متقارن است، نقاط $P_{\pi-t}$ و $P_t$ دارای $y$ ـ مختص یکسان و $x$ ـ مختص قرینه هستند. (شکل پ.۷۰ را ببینید.) بدین‌سان،

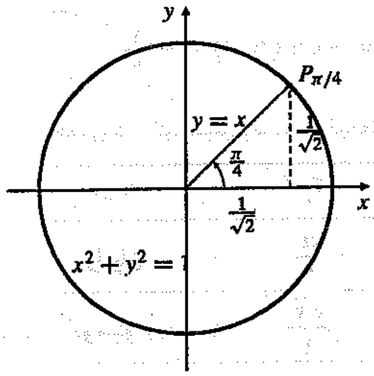
$$\cos(\pi - t) = -\cos t \quad , \quad \sin(\pi - t) = \sin t$$

## چند زاویهٔ خاص

**مثال ۳** سینوس و کوسینوس $\frac{\pi}{4}$ (یعنی $45°$) را بیابید.




شکل پ.۷۰ $\cos(\pi - t) = -\cos t$
$\sin(\pi - t) = \sin t$



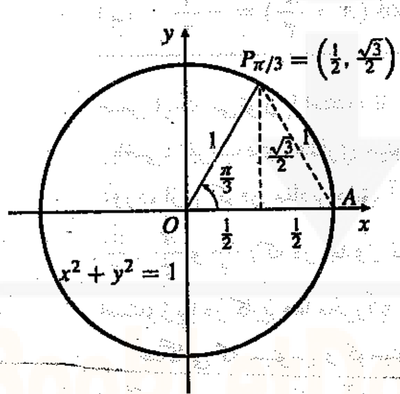

شکل پ.۷۱ $\sin\frac{\pi}{۴} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

**حل.** نقطهٔ $P_{\pi/۴}$ در ربع اول و بر خط $x = y$ قرار دارد. برای یافتن مختصات آن، در معادلهٔ دایره (یعنی $x^۲ + y^۲ = ۱$) قرار می‌دهیم $y = x$. در نتیجه، $۲x^۲ = ۱$ . بدین‌سان، $x = y = ۱/\sqrt{۲}$ (شکل پ.۷۱ را ببینید) و از این‌رو،

$$\cos(۴۵^\circ) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad , \quad \sin(۴۵^\circ) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

■

**مثال ٤** مقادیر سینوس و کوسینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$ (یا $۶۰^\circ$) و $\pi/۶$ (یا $۳۰^\circ$) را بیابید.




شکل پ.۷۲ $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$
$\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

**حل.** نقاط $P_{\pi/۳}$، $O(۰, ۰)$ و $A(۱, ۰)$ سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۱ هستند (شکل پ.۷۲ را ببینید). بدین‌سان، $x$ ـ مختص $P_{\pi/۳}$ برابر است با $۱/۲$ و $y$ ـ مختص آن برابر است با $\sqrt{۱ - (۱/۲)^۲} = \sqrt{۳}/۲$. پس

$$\cos(۶۰^\circ) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲},$$
$$\sin(۶۰^\circ) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون $\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۶}$، از اتحادهای مربوط به‌زاویه‌های متمم نتیجه می‌شود که

$$\cos(۳۰^\circ) = \cos\frac{\pi}{۶} = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \quad \sin(۳۰^\circ) = \sin\frac{\pi}{۶} = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

■

جدول ۵ حاوی مقادیر کوسینوس و سینوس مضرب‌های $۳۰^\circ$ و $۴۵^\circ$ که بین $۰^\circ$ و $۱۸۰^\circ$ قرار دارند، است. مقادیر متناظر با $۱۲۰^\circ$، $۱۳۵^\circ$ و $۱۵۰^\circ$ را با استفاده از اتحادهای مربوط به‌زاویه‌های مکمل تعیین کرده‌ایم.

مثلاً

$$\cos(۱۲۰^\circ) = \cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\cos(۶۰^\circ) = -\frac{۱}{۲}$$

**جدول ۵.** کوسینوس و سینوس زاویه‌های خاص

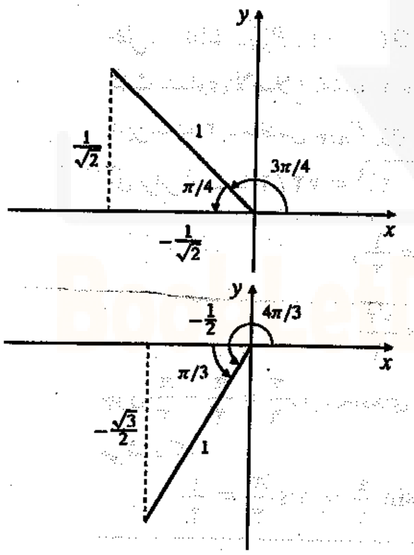
| درجه | ۰ | $۳۰^\circ$ | $۴۵^\circ$ | $۶۰^\circ$ | $۹۰^\circ$ | $۱۲۰^\circ$ | $۱۳۵^\circ$ | $۱۵۰^\circ$ | $۱۸۰^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رادیان | ۰ | $\frac{\pi}{۶}$ | $\frac{\pi}{۴}$ | $\frac{\pi}{۳}$ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\frac{۲\pi}{۳}$ | $\frac{۳\pi}{۴}$ | $\frac{۵\pi}{۶}$ | $\pi$ |
| کوسینوس | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | $-\frac{۱}{۲}$ | $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ | $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $-۱$ |
| سینوس | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ |

**مثال ۵** مقادیر (آ) $\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)$ و (ب) $\cos\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)$ را بیابید.

*حل.* در نواحی‌ای که این زاویه‌ها قرار گرفته‌اند می‌توانیم مثلث‌های مناسب رسم کنیم تا مقادیر مطلوب را به‌دست آوریم. شکل پ.۷۳ را ببینید.

(آ) $\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

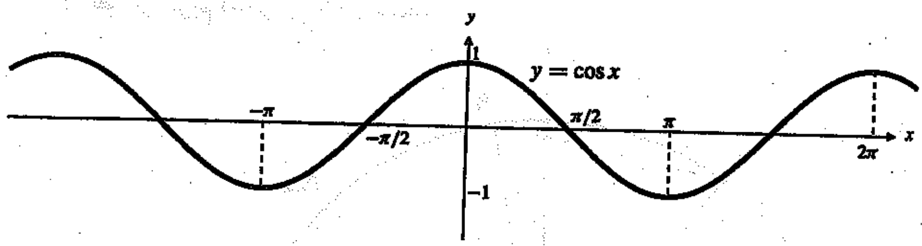
(ب) $\cos\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}$ ■



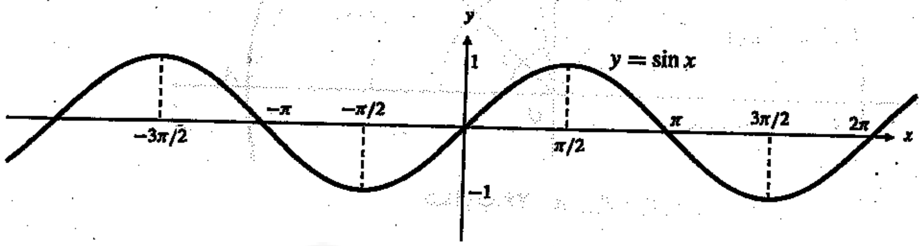

**شکل پ.۷۳** کاربرد مثلث‌های مناسب برای یافتن مقادیر توابع مثلثاتی به‌ازای زاویه‌های خاص

ضمن اینکه می‌توان با استفاده از ماشین حساب یا جدول‌های ریاضی، تقریب‌های اعشاریِ سینوس و کوسینوس را به‌دست آورد، از بر کردن مقادیر دقیق آنها به‌ازای زاویه‌های ۰، $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ (که در جدول قبل ارائه شدند) امری سودمند است، زیرا در کاربردها مکرراً با آنها برخورد می‌کنیم.

هنگامی که سینوس و کوسینوس را به‌عنوان تابع درنظر می‌گیریم، متغیری را که به‌آن وابسته‌اند می‌توانیم با هر حرف دلخواهی غیر از $t$ نیز نشان دهیم (مثلاً حرف $x$ که در توابع دیگر نیز به‌کار گرفته می‌شود). نمودارهای $\cos x$ و $\sin x$ در شکل‌های پ.۷۴ و پ.۷۵ نشان داده شده‌اند. در هر دو نمودار، قسمتی که بین $x = ۰$ و $x = ۲\pi$ قرار دارد تا بینهایت در چپ و راست تکرار می‌شود. مشاهده می‌کنیم که نمودار $\sin x$ همان نمودار $\cos x$ است که به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ به‌راست انتقال یافته است.




شکل پ.۷۴ نمودار $\cos x$




شکل پ.۷۵ نمودار $\sin x$

**مطلب زیر را به‌خاطر بسپارید!**

هنگامی که می‌خواهید مقادیر توابع مثلثاتی را با استفاده از ماشین‌حساب محاسبه کنید، مطمئن شوید که واحد مناسب را برای زاویه انتخاب کرده‌اید: درجه یا رادیان.

## فرمول‌های جمع

فرمول‌های زیر به‌ما امکان می‌دهند تا کوسینوس و سینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه را برحسب کوسینوس و سینوس آن زاویه‌ها تعیین کنیم.

**قضیهٔ ۱ فرمول‌های جمع برای کوسینوس و سینوس**

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

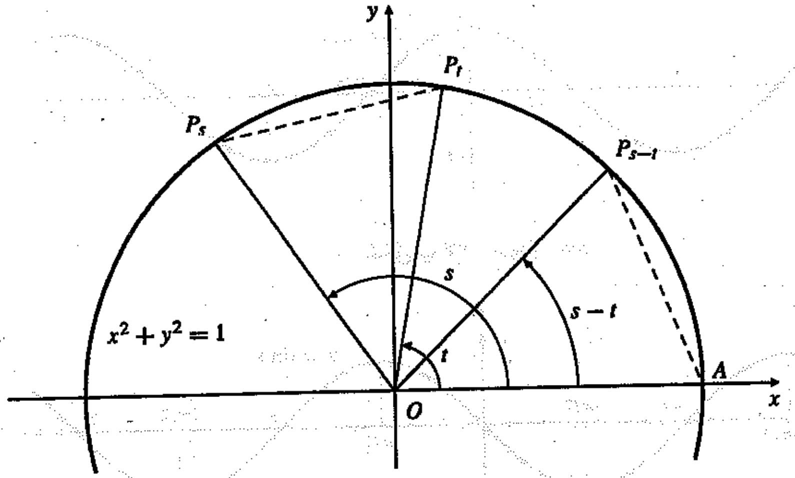
$$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$$

$$\sin(s-t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t$$

***اثبات.*** فرمول سوم را به‌صورت زیر ثابت می‌کنیم: فرض کنیم $s$ و $t$ دو عدد حقیقی باشند و نقاط زیر را

در نظر می‌گیریم (شکل پ.۷۶ را ببینید):




شکل پ.۷۶ $P_sP_t = P_{s-t}A$

$$P_t = (\cos t\,,\sin t) \qquad P_{s-t} = (\cos(s-t)\,,\sin(s-t))$$

$$P_s = (\cos s\,,\sin s) \qquad A = (۱\,,۰)$$

چون هر یک از زاویه‌های $P_tOP_s$ و $AOP_{s-t}$ برابر است با $s-t$ رادیان، فاصلهٔ $P_sP_t$ برابر است با $P_{s-t}A$. بنابراین، $(P_sP_t)^۲ = (P_{s-t}A)^۲$. این فاصله‌های مجذور شده را برحسب مختصات بیان می‌کنیم و سپس دوجمله‌ای‌ها را به‌توان دو می‌رسانیم:

$$(\cos s - \cos t)^۲ + (\sin s - \sin t)^۲ = (\cos(s-t) - ۱)^۲ + \sin^۲(s-t)$$

بنابراین

$$\cos^۲ s - ۲\cos s\cos t + \cos^۲ t + \sin^۲ s - ۲\sin s\sin t + \sin^۲ t$$
$$= \cos^۲(s-t) - ۲\cos(s-t) + ۱ + \sin^۲(s-t)$$

چون به‌ازای هر $x$ داریم $\cos^۲ x + \sin^۲ x = ۱$، تساوی بالا تبدیل می‌شود به

$$\cos(s-t) = \cos s\cos t + \sin s\sin t$$

اگر در فرمول بالا به‌جای $t$ قرار دهیم $-t$ و به‌یاد آوریم که $\cos(-t) = \cos t$ و $\sin(-t) = -\sin t$، آنگاه

$$\cos(s+t) = \cos s\cos t - \sin s\sin t$$

اکنون برای به‌دست آوردن فرمول‌های جمع برای سینوس، می‌توان فرمول‌های مربوط به‌زاویه‌های متمم را به‌کار برد:

$$\sin(s+t) = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - (s+t)\right)$$
$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{۲} - s\right) - t\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{۲} - s\right)\cos t + \sin\left(\frac{\pi}{۲} - s\right)\sin t$$
$$= \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

باز هم فرمول دوم از تبدیل $t$ به $-t$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۶** مقدار $\cos ۱۵° = \cos\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$ را بیابید.

**حل.**

$$\cos\frac{\pi}{۱۲} = \cos\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴} + \sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴}$$
$$= \left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}$$

از فرمول‌های جمع، در حالت خاص، چند فرمول سودمند به‌نام **فرمول‌های مربوط به‌دو برابر زاویه** را به‌دست می‌آوریم. اگر در فرمول‌های $\sin(s+t)$ و $\cos(s+t)$ قرار دهیم $s = t$، آنگاه

$$\sin ۲t = ۲\sin t\cos t,$$
$$\cos ۲t = \cos^۲ t - \sin^۲ t$$
$$= ۲\cos^۲ t - ۱ \qquad (\text{با استفاده از } \sin^۲ t + \cos^۲ t = ۱)$$
$$= ۱ - ۲\sin^۲ t$$

اگر دو معادلهٔ اخیر را نسبت به $\cos^۲ t$ و $\sin^۲ t$ حل کنیم، می‌بینیم که

$$\cos^۲ t = \frac{۱+\cos ۲t}{۲}, \qquad \sin^۲ t = \frac{۱-\cos ۲t}{۲}$$

فرمول‌های اخیر را گاهی **فرمول‌های مربوط به‌نصف زاویه** می‌نامیم، زیرا با استفاده از آنها مقادیر توابع مثلثاتی به‌ازای نصف زاویهٔ $۲t$ (یعنی $t$) بیان می‌شوند. در آینده، هنگام محاسبهٔ تابع اولیهٔ توان‌های $\cos x$ و $\sin x$ خواهیم دید که اینها فرمول‌های سودمندی هستند.

## توابع مثلثاتی دیگر

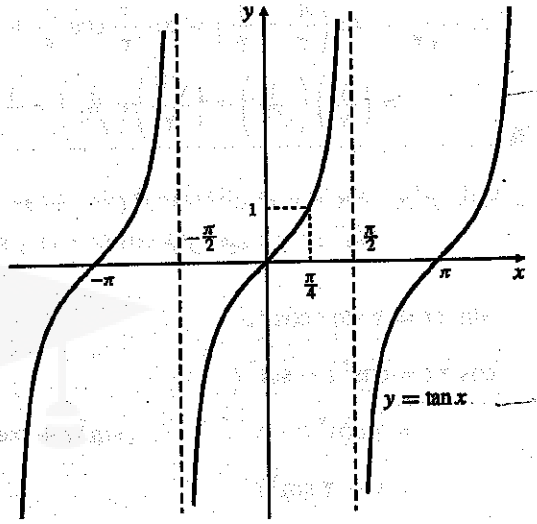
چهار تابع مثلثاتی دیگر داریم که برحسب کوسینوس و سینوس تعریف می‌شوند و عبارت‌اند از تانژانت (tan)، کوتانژانت (cot)، سکانت (sec) و کوسکانت (csc). نمودارهای این چهار تابع در شکل‌های پ.۷۷ تا پ.۸۰ نشان داده شده‌اند.

**تعریف ۷** تانژانت، کوتانژانت، سکانت و کوسکانت

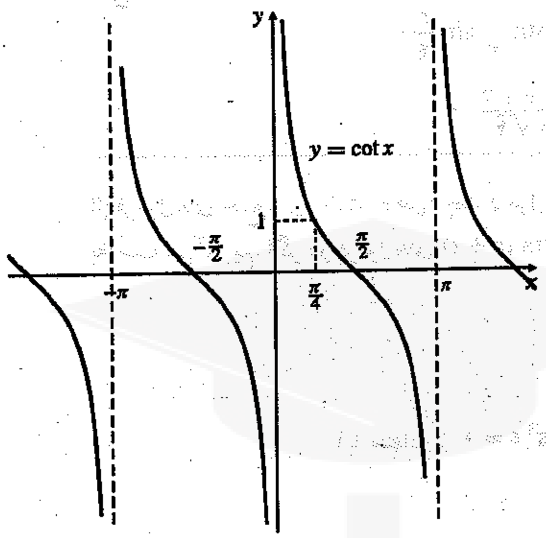
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{۱}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{۱}{\tan t} \qquad \csc t = \frac{۱}{\sin t}$$

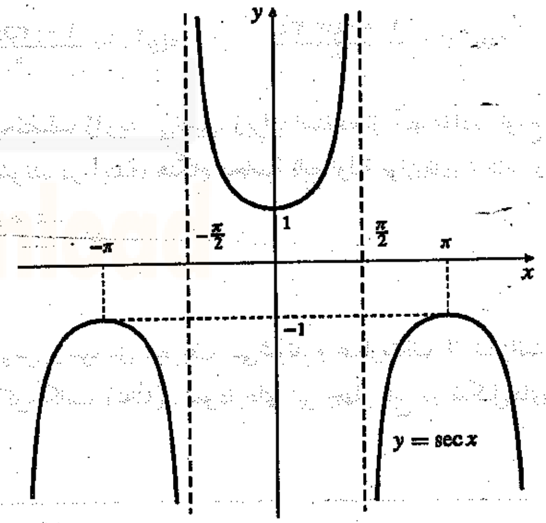
مشاهده می‌کنیم که هر یک از این توابع در نقاطی که تابع مخرج صفر می‌شود نـامعین است (و نـمودار آن به‌خطی قائم نزدیک می‌شود). همچنین، مشاهده می‌کنیم که توابع تانژانت، کوتانژانت و کوسکانت فرد هستند و تابع سکانت زوج است. چون به‌ازای هر $x$ داریم ۱ $\leq |\sin x|$ و ۱ $\leq |\cos x|$ ، پس بـه‌ازای $x$هـای متعلق به‌قلمروهایشان، ۱ $\geq |\csc x|$ و ۱ $\geq |\sec x|$ .



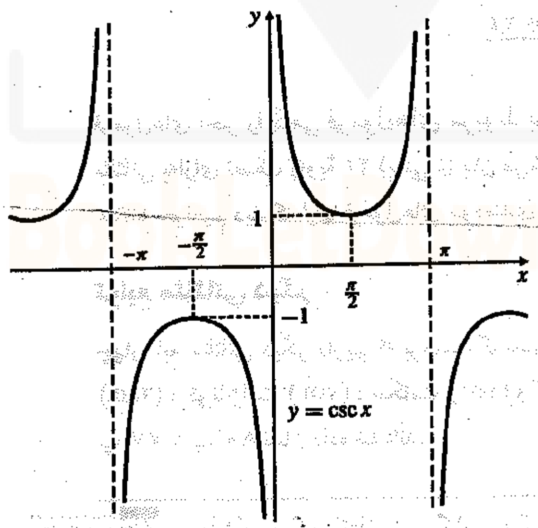

شکل پ.۷۷ نمودار $\tan x$



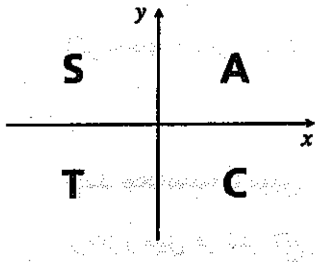

شکل پ.۷۸ نمودار $\cot x$




شکل پ.۷۹ نمودار $\sec x$




شکل پ.۸۰ نمودار $\csc x$




شکل پ.۸۱ قاعدهٔ CAST

سه تابع سینوس، کوسینوس و تانژانت را **توابع مثلثاتی اصلی** می‌نامیم، درحالی‌که عکس آنها، یعنی کوسکانت، سکانت و کوتانژانت، **توابع مثلثاتی فرعی** نام دارند. ماشین‌های حساب معمولاً محاسبات مربوط به‌توابع اصلی را اجرا می‌کنند. شما می‌توانید با استفاده از دکمهٔ وارونیاب، مقادیر متناظرِ توابع فرعی را بیابید. شکل پ.۸۱ نشان‌دهندهٔ الگوی سودمندی به‌نام «قاعدهٔ CAST» است که حافظه را برای از بر کردن علامت توابع مثلثاتی اصلی یاری می‌دهد. در ربع اول که با $A$ نشانگذاری شده است، هر سه مثبت هستند. از این سه، فقط سینوس در ربع دوم، یعنی $S$، مثبت است. در ربع سوم، یعنی T، فقط تانژانت مثبت است. سرانجام در ربع چهارم، C، فقط کوسینوس مثبت است.

**مثال ۷** سینوس و تانژانت زاویهٔ $\theta$ متعلق به $\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ را با فرض $\cos\theta = -\frac{۱}{۳}$ بیابید.

**حل.** با توجه به‌اتحاد فیثاغورس $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ ملاحظه می‌کنیم که $\sin^۲\theta = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹}$، پس

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{۸}{۹}} = \pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

چون $\theta$ باید متعلق به $[\pi, ۳\pi/۲]$ باشد، پس $\theta$ زاویه‌ای در ربع سوم است. بنابراین، سینوس آن منفی است. در نتیجه،

$$\sin\theta = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{-۱}{۳}} = ۲\sqrt{۲}$$

■

توابع سکانت و کوسکانت مانند کوسینوس و سینوس، دوره‌ای با دورهٔ $۲\pi$ هستند، درحالی‌که دورهٔ تانژانت و کوتانژانت برابر است با $\pi$، زیرا

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi}{\cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

تقسیم دو طرف اتحاد فیثاغورس $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ به‌ترتیب بر $\cos^۲ x$ و $\sin^۲ x$ ما را به‌دوصورت سودمند دیگر از همان اتحاد هدایت می‌کند:

$$۱ + \tan^۲ x = \sec^۲ x \quad , \quad ۱ + \cot^۲ x = \csc^۲ x$$

فرمول‌های جمع برای تانژانت و کوتانژانت را می‌توان از فرمول‌های جمع برای سینوس و کوسینوس به‌دست آورد. مثلاً

$$\tan(s+t) = \frac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)} = \frac{\sin s\cos t + \cos s\sin t}{\cos s\cos t - \sin s\sin t}$$

اگر صورت و مخرج کسر طرف راست را بر $\cos s\cos t$ تقسیم کنیم، آنگاه

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{۱ - \tan s \tan t}$$

اگر به‌جای $t$ قرار دهیم $-t$، می‌بینیم که

$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{۱ + \tan s \tan t}$$

## چند محاسبه با میپل

نرم‌افزار میپل هر شش تابع مثلثاتی را می‌شناسد و می‌تواند مقادیر آنها را محاسبه کند و کارهای دیگری نیز با آنها انجام دهد. ضمناً در میپل فرض بر این است که در توابع مثلثاتی، متغیر برحسب رادیان است.

```
>    evalf (sin (30)) ; evalf (sin (Pi/6)) ;
```

$$-0.9880316241$$

$$0.5000000000$$

توجه داشته باشید که میپل ثابت Pi (با حرف بزرگ P) را می‌شناسد. تابع evalf ( ) متغیر را به‌عددی اعشاری با ممیز شناور و متشکل از ۱۰ رقم با معنی تبدیل می‌کند. (با تعریف مقدار جدیدی برای متغیر Digits می‌توان میزان این دقت را تغییر داد.) بدون این تابع، سینوس ۳۰ رادیان محاسبه نمی‌شود، زیرا عددی صحیح نیست.

```
>    Digits : = 20 ; evalf (100*Pi) ; sin (30) ;
```

$$Digits := 20$$

$$314.15926535897932385$$

$$\sin(30)$$

غالباً سودمند است توابع مثلثاتی چند برابر یک زاویه را برحسب توان‌های سینوس و کوسینوس آن زاویه بسط دهیم و برعکس.

```
>    expand (sin (5*x)) ;
```

$$16\sin(x)\cos(x)^4 - 12\sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x)$$

```
>    combine ((cos (x)) ^ 5, trig) ;
```

$$\frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$$

توابع مثلثاتی دیگر را می‌توان به‌عبارت‌هایی حاوی سینوس و کوسینوس تبدیل کرد.

```
>    convert (tan (4*x) * (sec (4*x)) ^ 2, sincos) ; combine (%, trig) ;
```

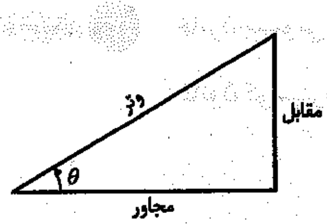
$$\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)^3}$$

$$4\frac{\sin(4x)}{\cos(12x) + 3\cos(4x)}$$

در دستور اخیر، نماد % به‌نتیجهٔ محاسبهٔ قبل از خود ارجاع می‌دهد.

## مروری بر مثلثات

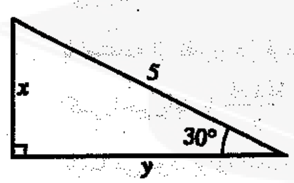
توابع مثلثاتی به‌این سبب این‌طور نامیده می‌شوند که غالباً با استفاده از آنها می‌توان روابط بین اضلاع و زوایای مثلث را بیان کرد. همان‌گونه که در آغاز این بخش مشاهده کردیم، اگر $\theta$ یکی از زاویه‌های حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، می‌توان توابع مثلثاتی $\theta$ را به‌صورت نسبت اضلاع بیان کرد:



شکل پ.۸۲

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

**مثال ۸** در مثلث شکل پ.۸۳، اضلاع مجهول $x$ و $y$ را بیابید.



شکل پ.۸۳

*حل.* در اینجا $x$ ضلع مقابل و $y$ ضلع مجاور زاویهٔ $۳۰°$ است. وتر مثلث برابر است با ۵ واحد. بدین‌سان،

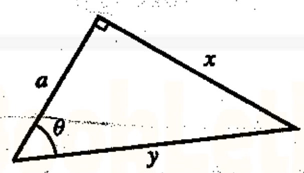
$$\frac{x}{۵} = \sin ۳۰° = \frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{y}{۵} = \cos ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

و از این‌رو

$$x = \frac{۵}{۲} \quad , \quad y = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

■

**مثال ۹** در مثلث شکل پ.۸۴، اضلاع $x$ و $y$ را برحسب ضلع $a$ و زاویهٔ $\theta$ بیان کنید.



شکل پ.۸۴

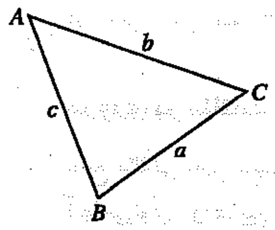
*حل.* $x$ ضلع مقابل زاویهٔ $\theta$، $y$ وتر و $a$ ضلع مجاور $\theta$ است. بدین‌سان،

$$\frac{x}{a} = \tan\theta \quad , \quad \frac{a}{y} = \cos\theta$$

بنابراین، $x = a\tan\theta$ و $y = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$.

■

هنگام بررسی مثلث‌های کلی (و نه لزوماً قائم‌الزاویه) غالباً بهتر است رأس‌ها را با حرف بزرگ نشانگذاری کنیم که در عین‌حال زاویه‌های واقع در آن رأس‌ها را نیز نشان می‌دهند. همین‌طور اضلاع مقابل به‌رأس‌ها را با حروف کوچک متناظر نامگذاری می‌کنیم. شکل پ.۸۵ را ببینید. در یک مثلث دلخواه $ABC$، روابط بین




**شکل پ.۸۵** در این مثلث، ضلع‌ها متناظر با زاویه‌های مقابل نامگذاری شده‌اند

اضلاع $a$، $b$ و $c$ و زاویه‌های مقابل آنها، یعنی $A$، $B$ و $C$، با فرمول‌های زیر به‌نام **قانون سینوس‌ها** و **قانون کوسینوس‌ها** بیان می‌شوند.

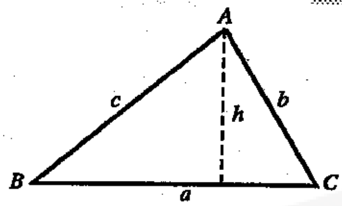
**قضیهٔ ۲**

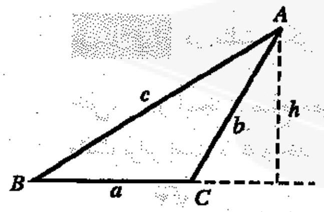
قانون سینوس‌ها: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

قانون کوسینوس‌ها: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$




**شکل پ.۸۶**

***اثبات.*** شکل پ.۸۶ را ببینید. فرض کنیم $h$ طول ارتفاع نظیر رأس $A$ (و وارد بر ضلع $BC$) باشد. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ حاصل (و درصورت لزوم با استفاده از $\sin(\pi - t) = \sin t$) می‌بینیم که $c\sin B = h = b\sin C$. بدین‌سان، $\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$. با استفاده از تقارن در فرمول‌ها (یا با رسم یک ارتفاع دیگر)، دو کسر اخیر باید با $\dfrac{\sin A}{a}$ برابر باشند. به‌این ترتیب قضیهٔ سینوس‌ها ثابت می‌شود. برای اثبات قانون کوسینوس‌ها، مشاهده می‌کنیم که

$$c^2 = \begin{cases} h^2 + (a - b\cos C)^2 & \text{اگر } C \le \frac{\pi}{2} \\ h^2 + (a + b\cos(\pi - C))^2 & \text{اگر } C > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= h^2 + (a - b\cos C)^2 \qquad (\text{زیرا } \cos(\pi - C) = -\cos C)$$

$$= b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

صورت‌های دیگر قانون کوسینوس‌ها نیز به‌طور مشابهی ثابت می‌شوند.

**مثال ۱** در مثلثی داریم $a = 2$، $b = 3$ و $C = 40^\circ$. ضلع $c$ و سینوس زاویهٔ $B$ را بیابید.

***حل.*** بنابر صورت سوم قانون کوسینوس‌ها:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4 + 9 - 12\cos 40^\circ \approx 13 - 12 \times ۰٫۷۶۶ = ۳٫۸۰۸$$

پس، ضلع $c$ تقریباً $\sqrt{۳٫۸۰۸} = ۱٫۹۵۱$ واحد طول است. اکنون با استفاده از قانون سینوس‌ها می‌بینیم که

$$\sin B = b\frac{\sin C}{c} \approx 3 \times \frac{\sin 40^\circ}{1{,}951} \approx \frac{3 \times 0{,}6428}{1{,}951} \approx 0{,}988$$
■

هر مثلث با یکی از مجموعه داده‌های زیر (که متناظرند با حالت‌های متداولِ همنهشتیِ مثلث‌ها در هندسهٔ کلاسیک) به‌طور یکتا تعیین می‌شود:

۱. دو ضلع و زاویهٔ بین آنها (برای نمونه، مثال ۱۰).
۲. سه ضلع (به‌طوری که هیچ یک از آنها از مجموع دو ضلع دیگر بیشتر نباشد).
۳. دو زاویه و یک ضلع.
۴. در مثلث قائم‌الزاویه، وتر و یک ضلع دیگر.

در هر یک از این حالت‌ها همواره می‌توانید با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس یا قوانین سینوس‌ها و کوسینوس‌ها و این حقیقت که مجموع سه زاویهٔ هر مثلث برابر است با $180^\circ$ (یا $\pi$ رادیان)، اضلاع و زاویه‌های مجهول را بیابید.

یک مثلث به‌وسیلهٔ دو ضلع و زاویه‌ای که بین آنها قرار ندارد به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود. در حقیقت با این داده‌ها ممکن است چنین مثلثی وجود نداشته باشد، یا فقط یک مثلث قائم‌الزاویه بتوان ساخت یا دو مثلث وجود داشته باشند.

**مثال ۱۱** در مثلث $ABC$ داریم $\angle B = 30^\circ$، $b = 2$ و $c = 3$. ضلع $a$ را بیابید.

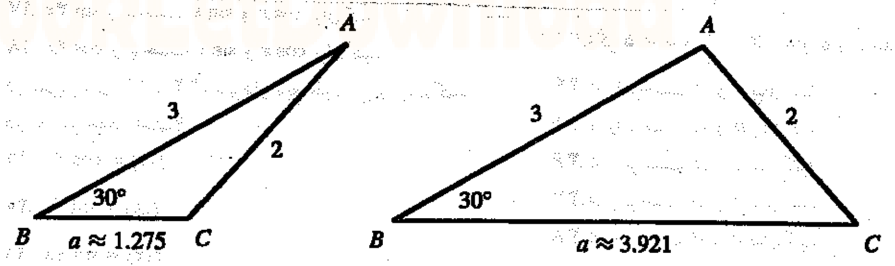
*حل.* این یکی از حالت‌های مبهم است. بنابر قانون کوسینوس‌ها،

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow 4 = a^2 + 9 - 6a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

بنابراین، $a$ باید در معادلهٔ $a^2 - 3\sqrt{3}\,a + 5 = 0$ صدق کند. اگر این معادله را با استفاده از فرمول درجهٔ دوم حل کنیم، آنگاه

$$a = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 20}}{2} \approx 1{,}275 \quad , \quad 3{,}921$$

مطابق شکل پ.۸۷ دو مثلث با داده‌های مفروض وجود دارند.
■




**شکل پ.۸۷** دو مثلث که در آنها $b = 2$، $c = 3$ و $B = 30^\circ$

## تمرینات پ.۷

در تمرین‌های ۱ تا ۶، با استفاده از فرمول‌های گوناگون ارائه شده در این بخش، مقادیر خواسته شده را بدون به‌کارگیری جدول یا ماشین‌حساب بیابید.

۱. $\cos \frac{3\pi}{4}$

۲. $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

۳. $\sin \frac{2\pi}{3}$

۴. $\sin \frac{7\pi}{12}$

۵. $\cos \frac{5\pi}{12}$

۶. $\sin \frac{11\pi}{12}$

در تمرین‌ها ۷ تا ۱۲، عبارت‌های مفروض را برحسب $\sin x$ و $\cos x$ بیان کنید.

۷. $\cos(\pi + x)$

۸. $\sin(2\pi - x)$

۹. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

۱۰. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

۱۱. $\tan x + \cot x$

۱۲. $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۶، اتحادهای داده شده را ثابت کنید.

۱۳. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

۱۴. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$

۱۵. $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{x}{2}$

۱۶. $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \sec 2x - \tan 2x$

۱۷. $\sin 3x$ را برحسب $\sin x$ و $\cos x$ بیان کنید.

۱۸. $\cos 3x$ را برحسب $\sin x$ و $\cos x$ بیان کنید.

در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۲، نمودار تابع مفروض را رسم کنید. دورهٔ تابع چقدر است؟

۱۹. $f(x) = \cos 2x$

۲۰. $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

۲۱. $f(x) = \sin \pi x$

۲۲. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$

۲۳. نمودار $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ را رسم کنید.

۲۴. نمودار $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ را رسم کنید.

در تمرین‌های ۲۵ تا ۳۰، یکی از سه کمیت $\sin\theta$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ مفروض است. دو کمیت دیگر را با توجه به‌بازهٔ مشخص شده برای $\theta$ بیابید.

۲۵. $\sin\theta = \frac{3}{5}$، $\theta$ متعلق به $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

۲۶. $\tan\theta = 2$، $\theta$ متعلق به $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

۲۷. $\cos\theta = \frac{1}{3}$، $\theta$ متعلق به $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$

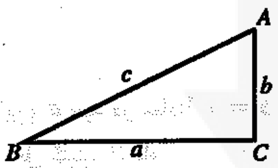
۲۸. $\cos\theta = \frac{-5}{13}$، $\theta$ متعلق به $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

۲۹. $\sin\theta = \frac{-1}{2}$، $\theta$ متعلق به $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

۳۰. $\tan\theta = \frac{1}{2}$، $\theta$ متعلق به $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

### مروری بر مثلثات

در تمرین‌های ۳۱ تا ۴۲، مثلث $ABC$ در رأس $C$ زاویهٔ قائمه دارد. اضلاع مقابل زاویه‌های $A$، $B$ و $C$ به‌ترتیب عبارت‌اند از $a$، $b$ و $c$. (شکل پ.۸۸ را ببینید).




شکل پ.۸۸

۳۱. اگر $c = 2$ و $B = \frac{\pi}{3}$، $a$ و $b$ را بیابید.

۳۲. اگر $b = 2$ و $B = \frac{\pi}{3}$، $a$ و $c$ را بیابید.

۳۳. اگر $a = 5$ و $B = \frac{\pi}{6}$، $b$ و $c$ را بیابید.

۳۴. $a$ را برحسب $A$ و $c$ بیان کنید.

۳۵. $a$ را برحسب $A$ و $b$ بیان کنید.

۳۶. $a$ را برحسب $B$ و $c$ بیان کنید.

۳۷. $a$ را برحسب $B$ و $b$ بیان کنید.

۳۸. $c$ را برحسب $A$ و $a$ بیان کنید.

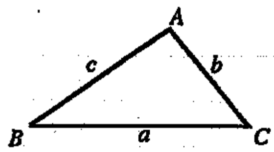
۳۹. $c$ را برحسب $A$ و $b$ بیان کنید.

۴۰. $\sin A$ را برحسب $a$ و $c$ بیان کنید.

۴۱. $\sin A$ را برحسب $b$ و $c$ بیان کنید.

۴۲. $\sin A$ را برحسب $a$ و $b$ بیان کنید.

در تمرین‌های ۴۳ تا ۵۰، $ABC$ مثلث دلخواهی با اضلاع $a$، $b$ و $c$ است که به‌ترتیب مقابل زاویه‌های $A$، $B$ و $C$ هستند. (شکل پ.۸۹ را ببینید.) کمیت‌های خواسته شده را بیابید. درصورت لزوم، از جدول یا ماشین‌حساب استفاده کنید.




شکل پ.۸۹

۴۳. اگر $a = 4$، $b = 3$ و $A = \frac{\pi}{4}$، $\sin B$ را بیابید.

۴۴. اگر $a = 2$، $b = 2$ و $c = 3$، $\cos A$ را بیابید.

۴۵. اگر $a = 2$، $b = 3$ و $c = 4$، $\sin B$ را بیابید.

۴۶. اگر $a = 2$، $b = 3$ و $C = \frac{\pi}{4}$، $c$ را بیابید.

۴۷. اگر $c = 3$، $A = \frac{\pi}{4}$ و $B = \frac{\pi}{3}$، $a$ را بیابید.

۴۸. اگر $a = 2$، $b = 3$ و $C = 35°$، $c$ را بیابید.

۴۹. اگر $a = 4$، $B = 40°$ و $C = 70°$، $b$ را بیابید.

۵۰. اگر $a = 1$، $b = \sqrt{2}$ و $A = 30°$، $c$ را بیابید. (مسأله دو جواب دارد.)

۵۱. انتهای بالای یک دیرک قائم، نقطهٔ $T$، با دو سیم کشیده به‌دو نقطهٔ $B$ و $C$ روی زمین وصل شده است و فاصلهٔ نقطهٔ $C$ تا پای دیرک ۱۰ متر کمتر از فاصلهٔ نقطهٔ $B$ تا پای دیرک است. اگر سیم‌های $BT$ و $CT$ با افق به‌ترتیب زاویه‌های ۳۵° و ۵۰° بسازند. ارتفاع دیرک چقدر است؟

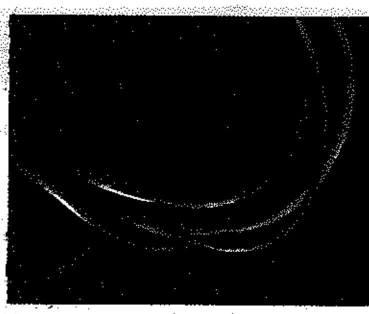
۵۲. دو ناظر که در نقاط $A$ و $B$ و به‌فاصلهٔ ۲ کیلومتر از یکدیگر قرار دارند، همزمان صعود یک بالون را به‌ترتیب تحت زاویه‌های ۴۰° و ۷۰° مشاهده می‌کنند. اگر این بالون مستقیماً بالای نقطه‌ای از پاره‌خط $AB$ باشد، ارتفاع آن را بیابید.

۵۳. نشان دهید که مساحت مثلث $ABC$ برابر است با

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

* ۵۴. نشان دهید که مساحت مثلث $ABC$ برابر است با $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ که در آن $s = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است.

**تذکر.** در سرتاسر کتاب، نماد * نشان می‌دهد که تمرین مورد نظر تا حدی دشوارتر و / یا نظری‌تر از بیشتر تمرین‌هاست.



# فصل ۱
# حد و پیوستگی

**هر جسمی، حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را روی خط راست حفظ می‌کند، مگر اینکه تحت تأثیر نیرو یا نیروهایی، مجبور به‌تغییر آن حالت شود.**

آیزاک نیوتون[۱]
*اصول ریاضیات*[۲]

**فقط زمانی که لایبنیتس و نیوتون با کشف حساب دیفرانسیل به‌تاریکی دیرپایی که مفهوم بینهایت را فراگرفته بود پایان دادند و مفهوم پیوسته و تغییر پیوسته را آشکارا بیان کردند، کاربرد ثمربخش و وسیع مفاهیم جدید مکانیک رو به‌پیشرفت گذاشت.**

هرمان فون هلمهولتس[۳]

*مقدمه.* حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توصیف چگونگیِ تغییر کمیت‌ها ابداع شده است و دارای دو فرایند اساسی است که متقابل یکدیگرند:

- ***مشتق‌گیری،*** برای یافتن آهنگ تغییر تابع مفروض و
- ***انتگرال‌گیری،*** برای یافتن تابعی که دارای آهنگ تغییر مفروض است.

هر دو فرایند، بر مفهوم بنیادی حد توابع متکی هستند. همین ایدهٔ حد است که حساب دیفرانسیل و انتگرال را از جبر، هندسه و مثلثات که برای توصیف وضعیت‌های ساکن سودمندند، متمایز می‌سازد.

در این فصل، مفهوم حد را معرفی می‌کنیم و بعضی از ویژگی‌های آن را شرح و بسط می‌دهیم. نخست ببینیم چگونه در تعدادی از مسائل اساسی، مفهوم حد پیش می‌آید.

1. Issac Newton 1642 - 1727 2. Principia Mathematica
3. Hermann von Helmholtz 1821 - 1894

## ۱.۱ مثال‌هایی دربارهٔ سرعت، آهنگ رشد و مساحت

در این بخش، تعدادی مثال دربارهٔ پدیده‌هایی می‌آوریم که در آنها مفهوم حد به‌طور طبیعی پیش می‌آید.

### سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مکان هر شیء متحرک، تابعی از زمان است. سرعت متوسط شیء متحرک در یک بازهٔ زمانی با تقسیم تغییر مکان شیء بر طول بازهٔ زمانی به‌دست می‌آید.

**مثال ۱** **(سرعت متوسط یک سنگریزهٔ در حال سقوط)** آزمایش‌های فیزیکی نشان می‌دهند که اگر سنگریزه‌ای از حالت سکون در نزدیکی سطح زمین رها شود، در $t$ ثانیهٔ نخست به‌اندازهٔ $y = ۴/۹ t^۲$ متر سقوط می‌کند.

(آ) سرعت متوسط این سنگریزه در ۲ ثانیهٔ نخست چقدر است؟

(ب) سرعت متوسط این سنگریزه از $t = ۱$ تا $t = ۲$ چقدر است؟

*حل.* سرعت متوسط سنگریزهٔ در حال سقوط در هر بازهٔ زمانی نظیر $[t_۱ , t_۲]$ برابر است با نمو فاصلهٔ پیموده شده، یعنی $\Delta y$، تقسیم بر طول بازهٔ زمانی، یعنی $\Delta t$:

$$[t_۱ , t_۲] \text{ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی } = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۴/۹ t_۲^۲ - ۴/۹ t_۱^۲}{t_۲ - t_۱}$$

(آ) در ۲ ثانیهٔ نخست (یعنی در بازهٔ زمانی $[۰ , ۲]$)، سرعت متوسط برابر است با

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۴/۹ (۲^۲) - ۴/۹ (۰^۲)}{۲ - ۰} = ۹/۸ \text{ m/s}$$

(ب) در بازهٔ زمانی $[۱ , ۲]$ سرعت متوسط برابر است با

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۴/۹ (۲^۲) - ۴/۹ (۱^۲)}{۲ - ۱} = ۱۴/۷ \text{ m/s}$$

■

**مثال ۲** سرعت سنگریزهٔ مثال ۱، (آ) در لحظهٔ $t = ۱$ و (ب) در لحظهٔ $t = ۲$ چقدر است؟

*حل.* سرعت متوسط را در هر بازهٔ زمانی می‌توانیم محاسبه کنیم، ولی این مسأله در پی یافتن **سرعت لحظه‌ای** در لحظهٔ مفروض است. اگر سنگریزهٔ در حال سقوط مجهز به‌یک سرعت‌سنج باشد، در لحظهٔ $t = ۱$ چه عددی را نشان می‌دهد؟ برای پاسخ دادن، نخست سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $[۱ , ۱ + h]$ که نقطهٔ آغازی آن $t = ۱$ و طول آن $h$ است، می‌نویسیم:

$$[۱ , ۱ + h] \text{ سرعت متوسط در } = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۴/۹ (۱ + h)^۲ - ۴/۹ (۱^۲)}{h}$$

برای محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای در $t = ۱$، نمی‌توانیم در این عبارت قرار دهیم $h = ۰$، زیرا تقسیم بر صفر مجاز نیست. ولی می‌توانیم سرعت متوسط را در بازه‌های زمانی کوتاه و کوتاهتر محاسبه کنیم و ببینیم این سرعت‌ها به‌عدد معینی نزدیک می‌شوند یا خیر. جدول ۱، مقادیر $\Delta y/\Delta t$ را به‌ازای چند مقدار $h$ که به‌صفر نزدیک می‌شوند نشان می‌دهد. در حقیقت به‌نظر می‌رسد بتدریج که طول بازهٔ زمانی به‌صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود، این سرعت‌های متوسط نیز به ۹٫۸ متر بر ثانیه نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. اکنون این احساس پدید می‌آید که یک ثانیه پس از رها شدن، سنگریزهٔ مفروض با آهنگ ۹٫۸ متر بر ثانیه در حال سقوط است.

به‌همین ترتیب، جدول ۲، مقادیر سرعت متوسط را در بازه‌های زمانی $[۲, ۲+h]$، با نقطهٔ آغازی ۲، که کوتاه و کوتاهتر می‌شوند نشان می‌دهد. با توجه به‌این مقادیر، این احساس پدید می‌آید که دو ثانیه پس از رها شدن، سنگریزهٔ مفروض با آهنگ ۱۹٫۶ متر بر ثانیه در حال سقوط است.

**جدول ۱.** سرعت متوسط در $[۱, ۱+h]$

| $h$ | $\Delta y/\Delta t$ |
|---|---|
| ۱ | ۱۴٫۷۰۰۰ |
| ۰٫۱ | ۱۰٫۲۹۰۰ |
| ۰٫۰۱ | ۹٫۸۴۹۰ |
| ۰٫۰۰۱ | ۹٫۸۰۴۹ |
| ۰٫۰۰۰۱ | ۹٫۸۰۰۵ |

**جدول ۲.** سرعت متوسط در $[۲, ۲+h]$

| $h$ | $\Delta y/\Delta t$ |
|---|---|
| ۱ | ۲۴٫۵۰۰۰ |
| ۰٫۱ | ۲۰٫۰۹۰۰ |
| ۰٫۰۱ | ۱۹٫۶۴۹۰ |
| ۰٫۰۰۱ | ۱۹٫۶۰۴۹ |
| ۰٫۰۰۰۱ | ۱۹٫۶۰۰۵ |

در مثال ۲، سرعت متوسط سنگریزهٔ در حال سقوط در بازهٔ $[t, t+h]$ برابر است با

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۴٫۹\,(t+h)^۲ - ۴٫۹\,t^۲}{h}$$

برای یافتن سرعت لحظه‌ای (که معمولاً آن را **سرعت** می‌نامیم) در لحظه‌های $t = ۱$ و $t = ۲$، مقادیر این سرعت متوسط را در بازه‌های زمانی‌ای که طول آنها، یعنی $h$، کوچک و کوچکتر می‌شد بررسی می‌کردیم. در حقیقت بتدریج که $h$ به‌صفر نزدیک می‌شد در پی یافتن **حد سرعت متوسط** بودیم. این مطلب را به‌طور نمادین به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$t \text{ سرعت در لحظهٔ } = \lim_{h\to ۰} \frac{۴٫۹\,(t+h)^۲ - ۴٫۹\,t^۲}{h}$$

نماد «$\lim_{h\to ۰}\ldots$» را این‌طور بخوانید: «حد ... وقتی $h$ به‌صفر میل می‌کند.» برای یافتن حد کسر اخیر نمی‌توانیم صرفاً قرار دهیم $h = ۰$، زیرا این کار متضمن تقسیم بر صفر است. برای یافتن حد، نخست عبارت مربوط به‌سرعت متوسط را با استفاده از اعمال جبری ساده می‌کنیم.

**مثال ۳** عبارت $(t+h)^۲$ را که درصورت کسر مربوط به‌سرعت متوسط سنگریزه در بازهٔ زمانی

$[t, t+h]$ پدید آمد بسط دهید و نتیجه را ساده کنید. سپس سرعت سنگریزهٔ در حال سقوط را در لحظهٔ $t$ مستقیماً، یعنی بدون تشکیل جدول مقادیر برای سرعت متوسط، بیابید.

حل. سرعت متوسط در $[t, t+h]$ عبارت است از

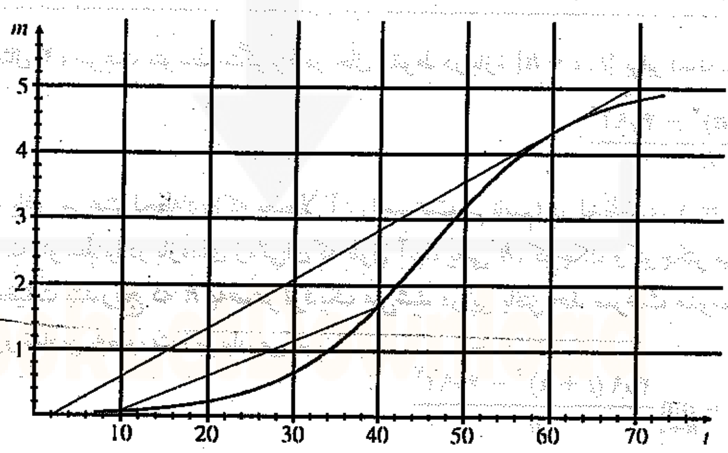
$$\frac{۴/۹\,(t+h)^۲ - ۴/۹\,t^۲}{h} = \frac{۴/۹\,(t^۲ + ۲th + h^۲ - t^۲)}{h}$$

$$= \frac{۴/۹\,(۲th + h^۲)}{h} = ۹/۸t + ۴/۹h$$

ملاحظه می‌شود که صورت نهایی عبارتِ مربوط به‌سرعت متوسط، متضمن تقسیم بر $h$ نیست. وقتی $h$ به ۰ میل می‌کند، این عبارت به $۹/۸t + ۴/۹\,(۰) = ۹/۸t$ میل می‌کند. بدین‌سان، سرعت سنگریزهٔ در حال سقوط، $t$ ثانیه پس از رها شدن، $۹/۸t$ متر بر ثانیه است. در حالت خاص، سرعت در $t = ۱$ و $t = ۲$ به‌ترتیب برابر است با ۹/۸ و ۱۹/۶ متر بر ثانیه. ■

## رشد کشت جلبک

در یک تجربهٔ آزمایشگاهی و در یک دورهٔ ۷۴ روزهٔ کشت جلبک، مقدار جلبک موجود را با استفاده از سطحی که این کشت روی تیغهٔ میکروسکوپ، برحسب میلیمتر مربع، اشغال کرده بود اندازه گرفتیم. مطابق شکل ۱.۱، این اندازه‌ها (یعنی $m$ها) را نسبت به‌زمان $t$ (برحسب روز) در یک دستگاه مختصات مشخص و سپس نقاط حاصل را با یک خم هموار مانند $m = f(t)$ به‌هم وصل کردیم.




شکل ۱.۱ مقدار جلبک موجود، $m$، در یک کشت جلبک پس از $t$ روز

ملاحظه می‌کنیم که مقدار جلبک در روز دهم در حدود ۰/۱ میلیمتر مربع بود و در روز چهلم به‌حدود ۱/۷ میلیمتر مربع رشد کرد، یعنی افزایشی معادل $۱/۶ = ۰/۱ - ۱/۷$ میلیمتر مربع در مدت $۳۰ = ۱۰ - ۴۰$ روز. بنابراین، آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانیِ روز دهم تا روز چهلم (برحسب میلیمتر مربع بر روز) برابر است با

$$\frac{1/7 - 0/1}{40 - 10} = \frac{1/6}{30} \approx 0/053 \, \frac{\mathrm{mm}^2}{\text{روز}}$$

این آهنگ متوسط، دقیقاً عبارت است از شیب خطی که نقاط متناظر با $t = 10$ و $t = 40$ واقع بر نمودار $m = f(t)$ را به‌هم وصل می‌کند. به‌همین ترتیب آهنگ متوسط رشد مقدار جلبک در هر بازهٔ زمانی را می‌توان با محاسبهٔ شیب خط واصل بین نقاطی از خم یاد شده که متناظر با دو انتهای بازهٔ زمانی هستند، تعیین کرد. این خطوط را **خطوط قاطع** خم می‌نامیم.

**مثال ٤** رشد مقدار جلبک در روز شصتم با چه سرعتی انجام می‌گیرد؟

*حل.* برای پاسخ دادن به‌این پرسش، می‌توانیم آهنگ متوسط رشد را در بازه‌های زمانی کوتاه و کوتاهترِ حول روز شصتم اندازه بگیریم. خطوط قاطع متناظر نیز کوتاه و کوتاهتر می‌شوند، ولی شیب‌های آنها به حد معینی میل می‌کنند که عبارت است از شیب **خط مماس** بر نمودار $m = f(t)$ در نقطهٔ مربوط به $t = 60$. این خط مماس در شکل ۱.۱ رسم شده است. به‌نظر می‌رسد که این مماس از نقاط $(2, 0)$ و $(69, 5)$ نیز می‌گذرد و از این‌رو، شیب آن برابر است با

$$\frac{5 - 0}{69 - 2} \approx 0/0746 \, \frac{\mathrm{mm}^2}{\text{روز}}$$

این همان آهنگ رشد مقدار جلبکِ مورد بحث در روز شصتم است. ■

## مساحت دایره

همهٔ دایره‌ها اشکال هندسی متشابهی هستند، یعنی شکل همهٔ آنها یکسان است و فقط اندازه‌های آنها متفاوت هستند. نسبت محیط به‌قطر (یعنی دو برابر شعاع) برای همهٔ دایره‌ها مقداری واحد است. اگر $C$ محیط دایره و $r$ شعاع آن را نشان دهد، آنگاه عدد $\pi$ را برابر با این نسبت ثابت تعریف می‌کنیم:

$$C = 2\pi r \quad \text{یا} \quad \frac{C}{2r} = \pi$$

در مدرسه آموخته‌ایم که اگر $A$ مساحت دایره باشد، آنگاه $A$ برابر است با همین عدد $\pi$ ضرب در مجذور شعاع:

$$A = \pi r^2$$

چگونه می‌توان این فرمول مساحت را از فرمول محیط که همان تعریف $\pi$ است، استنتاج کرد؟

پاسخ این پرسش در این امر نهفته است که دایره را «حد» چندضلعی‌های منتظم تلقی کنیم، ضمن اینکه این چندضلعی‌ها به‌نوبهٔ خود از مثلث، یعنی شکلی که مقدار زیادی از هندسه‌اش را می‌شناسیم، ساخته شده‌اند.

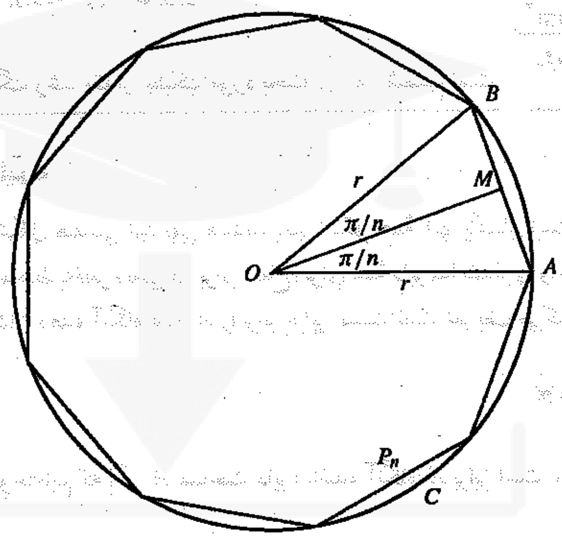
فرض کنیم $n$ ضلعی منتظمی در دایره‌ای به‌شعاع $r$ محاط شده باشد. (شکل ۲.۱ را ببینید.) محیط و مساحت این چندضلعی، یعنی $P_n$ و $A_n$، به‌ترتیب از محیط و مساحت دایره، یعنی $C$ و $A$، کوچکترند. ولی اگر $n$ بزرگ باشد، $P_n$ به $C$ **نزدیک** است و $A_n$ به $A$. (در حقیقت دایرهٔ شکل ۲.۱، ۱۸۰ ضلعی منتظمی است که به‌وسیلهٔ کامپیوتر رسم شده است و هر ضلع آن روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی ۲ درجه‌ای قرار دارد.)

تمیز دادن این ۱۸۰ ضلعی منتظم از یک دایرهٔ واقعی بسیار دشوار است.) انتظار داریم که وقتی $n$ بزرگ و بزرگتر می‌شود و به‌بینهایت میل می‌کند، $P_n$ به‌حد $C$ و $A_n$ به‌حد $A$ میل کند.

هر $n$ ضلعی منتظم برابر است با اجتماع $n$ مثلث ناهمپوش، همنهشت و متساوی‌الساقین که نقطهٔ $O$، مرکز $n$ ضلعی، رأس مشترک آنهاست. یکی از این مثلث‌ها، یعنی $\Delta OAB$، در شکل ۲.۱ نشان داده شده است. چون کل زاویهٔ حول نقطهٔ $O$ برابر است با $2\pi$ رادیان (البته با توجه به‌این فرض که دایرهٔ به‌شعاع ۱، محیطی برابر با $2\pi$ دارد)، زاویهٔ $AOB$ برابراست با $2\pi/n$ رادیان. اگر $M$ وسط $AB$ باشد، $OM$ زاویهٔ $AOB$ را نصف می‌کند. با استفاده از مثلثات مقدماتی می‌توانیم طول $AB$ و مساحت مثلث $OAB$ را برحسب شعاع دایره، یعنی $r$، بنویسیم:

$$|AB| = 2\,|AM| = 2r\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\text{مساحت } OAB = \frac{1}{2}|AB|\,|OM| = \frac{1}{2}\left(2r\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(r\cos\frac{\pi}{n}\right)$$
$$= r^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$




شکل ۲.۱ یک $n$ ضلعی منتظم محاط در دایره

محیط و مساحت $n$ ضلعی بالا، یعنی $P_n$ و $A_n$، $n$ برابر این عبارت‌ها هستند:

$$P_n = 2rn\sin\frac{\pi}{n} \quad , \quad A_n = r^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

از معادلهٔ اول داریم $rn\sin(\pi/n) = P_n/2$. اگر این را در معادلهٔ دوم بگذاریم، به‌دست می‌آوریم

$$A_n = \left(\frac{P_n}{2}\right) r\cos\frac{\pi}{n}$$

وقتی $n$ بزرگ می‌شود زاویهٔ $AOM = \pi/n$ به‌صفر میل می‌کند و از این‌رو، کوسینوس آن، یعنی $\cos(\pi/n) = |OM|/|OA|$، به ۱ میل می‌کند. چون با بزرگ شدن $n$، $P_n$ به $C = 2\pi r$ میل می‌کند

پس عبارت $A_n$ به $(1)r(2\pi r/2)$، یعنی $\pi r^2$، میل می‌کند و به‌این ترتیب فرمول مساحت دایره حاصل می‌شود.

## تمرینات ۱.۱

تمرین‌های ۱ تا ۴ به شیئی اشاره دارند که بر محور $x$ به گونه‌ای حرکت می‌کند که مکان آن پس از $t$ ثانیه، $x = t^2$ متر در طرف راست مبدأ است.

۱. سرعت متوسط شیء را در بازهٔ زمانی $[t, t+h]$ بیابید.

۲. جدولی رسم کنید که سرعت متوسط شیء را در بازهٔ زمانی $[2, 2+h]$، متناظر با مقادیر ۱، ۰٫۱، ۰٫۰۱، ۰٫۰۰۱ و ۰٫۰۰۰۱ ثانیه برای $h$، به‌دست دهد.

۳. با استفاده از نتایج تمرین ۲، سرعت لحظه‌ای شیء را در $t = 2$ حدس بزنید.

۴. سرعت متوسط در $[2, 2+h]$ را محاسبه کنید و سپس با استفاده از مثال ۳، حد آن را وقتی $h$ به ۰ میل می‌کند بیابید و به‌این ترتیب حدس خود (در تمرین ۴) را تأیید کنید.

تمرین‌های ۵ تا ۸ به‌شیئی اشاره دارند که بر محور $x$ به‌گونه‌ای حرکت می‌کند که پس از $t$ ثانیه به‌مکان $x = 3t^2 - 12t + 1$ متر می‌رسد.

۵. سرعت متوسط ذرهٔ متحرک را در بازه‌های زمانی $[1, 2]$، $[2, 3]$ و $[1, 3]$ بیابید.

۶. با استفاده از روش مثال ۳، سرعت ذره را در $t = 1$، $t = 2$ و $t = 3$ بیابید.

۷. جهت حرکت ذره در لحظه‌های $t = 1$، $t = 2$ و $t = 3$ کدام است؟

۸. نشان دهید که به‌ازای هر عدد مثبت $k$، سرعت متوسط این ذره در بازهٔ زمانی $[t-k, t+k]$ برابر است با سرعت آن در لحظهٔ $t$.

در تمرین‌های ۹ تا ۱۱، وزنه‌ای که به‌انتهای یک فنر آویزان است به‌گونه‌ای بالا و پایین می‌رود که ارتفاع آن پس از $t$ ثانیه برابر است با $y$ فوت و $y = 2 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$.

۹. نمودار $y$ را به‌عنوان تابعی از $t$ رسم کنید. ارتفاع این وزنه پس از $t = 1$ ثانیه چقدر است؟ جهت حرکت این وزنه در این لحظه کدام است؟

۱۰. سرعت متوسط این وزنه در بازه‌های زمانی $[1, 2]$، $[1, 1٫1]$، $[1, 1٫01]$ و $[1, 1٫001]$ چقدر است؟

۱۱. با استفاده از نتایج تمرین ۱۰، سرعت وزنه را در لحظهٔ $t = 1$ تخمین بزنید. معنی علامت پاسختان چیست؟

تمرین‌های ۱۲ و ۱۳ به‌مقدار جلبک در شکل ۱.۱ اشاره دارند.

۱۲. به‌طور تقریبی، رشد مقدار جلبک در روز بیستم با چه سرعتی انجام می‌گیرد؟

۱۳. تقریباً در کدام روز، این مقدار جلبک دارای سریعترین رشد است؟

۱۴. سود یک شرکت کوچک برای هر یک از پنج سال اول فعالیت آن در جدول ۳ ارائه شده است:

**جدول ۳.**

| سال | سود (هر واحد، ۱۰۰۰ دلار) |
|---|---|
| ۲۰۰۰ | ۶ |
| ۲۰۰۱ | ۲۷ |
| ۲۰۰۲ | ۶۲ |
| ۲۰۰۳ | ۱۱۱ |
| ۲۰۰۴ | ۱۷۴ |

(آ) نقاطی رسم کنید که سود را به‌صورت تابعی از سال نشان دهد و سپس این نقاط را با یک خم هموار به‌هم وصل کنید.

(ب) آهنگ متوسط افزایش سود بین ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴ چقدر است؟

(پ) با استفاده از نمودار رسم شده، آهنگ افزایش سود در ۲۰۰۲ را تخمین بزنید.

## ۲.۱ حد توابع

برای اینکه صحبت دربارهٔ آهنگ تغییر، خط مماس و مساحت محصور در خم‌ها معنی‌دار بشود باید فرایند

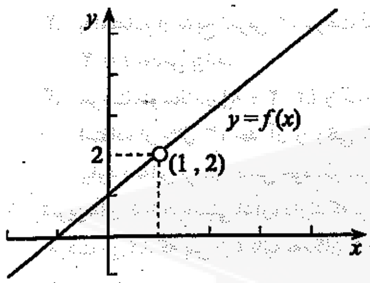
حدگیری را مورد بررسی قرار دهیم. در حقیقت مفهوم حد، شالوده و اساس شرح و بسط حساب دیفرانسیل و انتگرال است. قبل از ارائهٔ تعریف حد، چند مثال دیگر می‌آوریم.

**مثال ۱** رفتار تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$ را در نزدیکی $x = ۱$ توصیف کنید.

*حل.* ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ به‌ازای هر عدد حقیقی $x$، جز $x = ۱$، معین است (زیرا تقسیم بر صفر مجاز نیست). به‌ازای هر $x \neq ۱$ می‌توانیم با تجزیهٔ صورت و سپس حذف عامل مشترک، عبارت $f(x)$ را ساده کنیم:

$$f(x) = \frac{(x - ۱)(x + ۱)}{x - ۱} = x + ۱ \quad , \quad x \neq ۱$$

نمودار $f$ خط راست $y = x + ۱$ است که یک نقطهٔ آن، یعنی نقطهٔ $(۱ , ۲)$، حذف شده است. این نقطهٔ حذف شده را در نمودار شکل ۳.۱ با یک «سوراخ» نشان داده‌ایم. با وجود اینکه $f(۱)$ معین نیست، روشن است که با انتخاب $x$های **به‌قدر کافی نزدیک به** $x$ می‌توانیم مقدار $f(x)$ را **هر قدر بخواهیم به ۲ نزدیک** کنیم. بنابراین، می‌گوییم وقتی $x$ به ۱ میل می‌کند $f(x)$ بدلخواه به ۲ نزدیک می‌شود یا به‌عبارت ساده‌تر، وقتی $x$ به ۱ میل می‌کند، $f(x)$ **به‌حد** ۲ میل می‌کند.




شکل ۳.۱ نمودار $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$

دراین وضع می‌نویسیم

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = ۲ \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to ۱} f(x) = ۲$$

■

**مثال ۲** وقتی $x$ به‌صفر میل می‌کند چه وضعی برای تابع $g(x) = (۱ + x^۲)^{۱/x^۲}$ روی می‌دهد؟

*حل.* تابع $g(x)$ در $x = ۰$ معین نیست. در حقیقت فعلاً به‌نظر نمی‌رسد که این تابع به‌ازای $x$هایی که مجذورشان عدد گویا نیست معین باشد. (یادآور می‌شویم که اگر $m$ و $n > ۰$ دو عدد صحیح باشند و $r = m/n$، آنگاه $x^r$ یعنی ریشهٔ $n$ام $x^m$.) موقتاً مسألهٔ تصمیم‌گیری دربارهٔ معنی $g(x)$ را در حالتی که $x^۲$ گنگ است کنار می‌گذاریم و فقط مقادیر گویای $x$ را درنظر می‌گیریم. برای ساده‌تر کردن عبارت $g(x)$ روشی بدیهی نظیر مثال ۱ وجود ندارد. ولی می‌توانیم با استفاده از یک ماشین‌حساب، مقادیر تقریبی $g(x)$ را به‌ازای چند مقدار گویای $x$ و نزدیک به ۰ بیابیم. (مقادیر واقع در جدول ۴ را به‌کمک یک ماشین‌حساب به‌دست آورده‌ایم.)

به‌استثنای آخرین مقدار جدول، به‌نظر می‌رسد که وقتی $x$ به ۰ نزدیک و نزدیکتر می‌شود مقادیر $g(x)$ به‌عددی مانند ۲٫۷۱۸۲۸ میل می‌کنند. در بخش ۴.۳ نشان خواهیم داد که

$$\lim_{x \to ۰} g(x) = \lim_{x \to ۰} (۱ + x^۲)^{۱/x^۲} = e = ۲٫۷\ ۱۸۲۸\ ۱۸۲۸\ ۴۵\ ۹۰\ ۴۵ \ldots$$

بتدریج برایتان آشکار می‌شود که $e$ عدد بسیار مهمی در ریاضیات است.

مشاهده می‌کنیم که آخرین عدد واقع در جدول روبه‌رو، نادرست است. علت این است که ماشین‌حساب توانایی تمیزدادن $1{,}0000000001 = (1{,}00001)^2 + 1$ را از ۱ نداشت و از این‌رو، عدد $1^{10{,}000{,}000{,}000}$ را که برابر با ۱ است، محاسبه کرد. وقتی برای محاسبهٔ عبارتی از ماشین‌حساب یا کامپیوتر استفاده می‌کنید، همواره تأثیر خطاهای گرد شده را مدنظر داشته باشید. در مواردی نظیر مورد حاضر، این نوع تأثیرات می‌توانند فاجعه‌آمیز باشند.

جدول ۴.

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $\pm 1{,}0$ | ۲٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ |
| $\pm 0{,}1$ | ۲٫۷۰۴۸ ۱۳۸۲۹ |
| $\pm 0{,}01$ | ۲٫۷۱۸۱ ۴۵۹۲۷ |
| $\pm 0{,}001$ | ۲٫۷۱۸۲ ۸۰۴۶۹ |
| $\pm 0{,}0001$ | ۲٫۷۱۸۲ ۸۱۸۱۵ |
| $\pm 0{,}00001$ | ۱٫۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ |

مثال‌های بالا و مثال‌های بخش ۱.۱ الهام‌بخش تعریف **غیرصوری** زیر برای حد هستند.

**تعریف ۱ تعریف غیرصوری حد**

اگر $f(x)$ به‌ازای همهٔ $x$های نزدیک به $a$، جز شاید در خود $a$، معین باشد و بتوانیم با انتخاب $x$های به‌قدر کافی نزدیک به $a$، $f(x)$ را هر قدر بخواهیم به‌عدد $L$ نزدیک کنیم، می‌گوییم وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند تابع $f$ به‌حد $L$ میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

این تعریفی **غیرصوری** است به‌این سبب که عبارت‌های **هر قدر نزدیک که بخواهیم** و **به‌قدر کافی نزدیک**، نادقیق هستند. یعنی معنی آنها به‌چارچوب بحث بستگی دارد. برای یک کارگر فنی که پیستون می‌سازد، **به‌قدر کافی نزدیک** یعنی **با تقریب چند هزارم اینچ**. برای اخترشناسی که کهکشان‌های دوردست را مطالعه می‌کند، **به‌قدر کافی نزدیک** یعنی **با تقریب چند هزار سال نوری**. درحالی‌که برای تشخیص و محاسبهٔ حد توابع مشخص، تعریف باید به‌قدر کافی روشن باشد. اگر بخواهیم دربارهٔ حد، قضیه‌هایی نظیر قضیه‌های ۲ تا ۴ (که در ادامهٔ این بخش بیان خواهند شد) **ثابت** کنیم به‌تعریف «صوری» دقیقتری از حد نیاز داریم. این تعریف را در بخش ۵.۱ ارائه می‌کنیم.

**مثال ۳** مطلوب است (آ) $\lim_{x\to a} x$ و (ب) $\lim_{x\to a} c$ (که در آن $c$ یک ثابت است).

*حل.* قسمت (آ) به‌زبان معمولی می‌پرسد: وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند، $x$ به‌چه میل می‌کند؟ پاسخ قطعاً $a$ است.

$$\lim_{x\to a} x = a$$

به‌همین ترتیب قسمت (ب) می‌پرسد: وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند، $c$ به‌چه میل می‌کند؟ در اینجا پاسخ این است که $c$ به $c$ میل می‌کند؛ چیزی نیست که از خود $c$ به $c$ نزدیکتر باشد.

$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال ۳ نشان می‌دهد که گاهی برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$ فقط کافی است $f(a)$ را محاسبه کنیم. این حالت وقتی روی می‌دهد که $f(x)$ در بازهٔ بازی حاوی $x = a$ معین باشد و نمودار آن بدون پارگی از نقطهٔ $(a, f(a))$ بگذرد. مثال بعد راه‌های متعددی را نشان می‌دهد که می‌توان با استفاده از اعمال جبری، $\lim_{x\to a} f(x)$ را در حالت‌هایی که $f(a)$ تعریف نشده است محاسبه کرد. وضعیت اخیر معمولاً زمانی روی می‌دهد که $f(x)$ یک کسر باشد و مخرج آن در $x = a$ صفر شود.

**مثال ٤** حدهای زیر را محاسبه کنید:

(آ) $\lim_{x\to -۲} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x^۲ + ۵x + ٦}$، (ب) $\lim_{x\to a} \dfrac{\frac{۱}{x} - \frac{۱}{a}}{x - a}$ و (پ) $\lim_{x\to ۴} \dfrac{\sqrt{x} - ۲}{x^۲ - ۱٦}$.

*حل.* هر یک از این حدها حاوی کسری است که صورت و مخرجش، هر دو، در نقطه‌ای که قرار است حد را محاسبه کنیم صفر می‌شوند.

(آ) این کسر در $x = -۲$ نامعین است

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲ + x - ۲}{x^۲ + ۵x + ٦}$$

صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم (بخش پ.٦ را ببینید).

$$= \lim_{x\to -۲} \frac{(x + ۲)(x - ۱)}{(x + ۲)(x + ۳)}$$

عامل مشترک را حذف می‌کنیم

$$= \lim_{x\to -۲} \frac{x - ۱}{x + ۳}$$

برای محاسبهٔ این حد، به‌جای $x$ قرار می‌دهیم $-۲$

$$= \frac{-۲ - ۱}{-۲ + ۳} = -۳$$

(ب) این کسر در $x = a$ نامعین است

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{۱}{x} - \frac{۱}{a}}{x - a}$$

صورت را ساده می‌کنیم

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a}$$

عامل مشترک را حذف می‌کنیم

$$= \lim_{x\to a} \frac{-(x - a)}{ax(x - a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-۱}{ax} = -\frac{۱}{a^۲}$$

(پ) این کسر در $x = ۴$ نامعین است

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x} - ۲}{x^۲ - ۱٦}$$

صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{(\sqrt{x} - ۲)(\sqrt{x} + ۲)}{(x^۲ - ۱٦)(\sqrt{x} + ۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{x - ۴}{(x - ۴)(x + ۴)(\sqrt{x} + ۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{۱}{(x + ۴)(\sqrt{x} + ۲)} = \frac{۱}{(۴ + ۴)(۲ + ۲)} = \frac{۱}{۳۲}$$

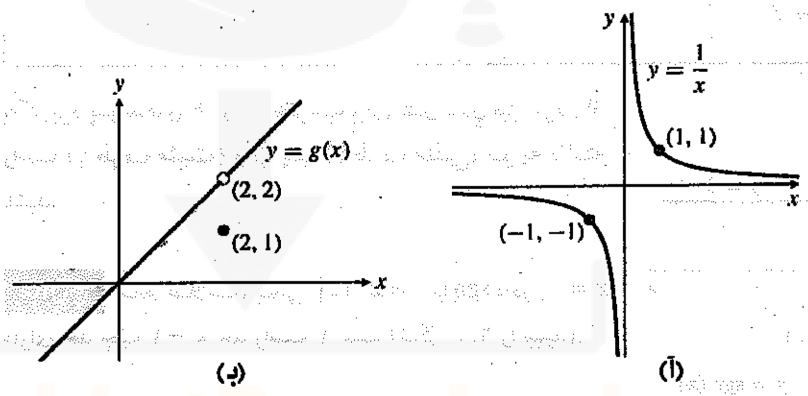
ممکن است تابع $f$ در هر دو طرف $x = a$ معین باشد و با وجود این در $x = a$ حد نداشته باشد. مثلاً تابع $f(x) = ۱/x$ وقتی $x$ به ۰ میل می‌کند حد ندارد. مطابق شکل ۴.۱(آ)، وقتی $x$ به ۰ میل می‌کند قدر مطلق مقادیر $۱/x$ بینهایت بزرگ می‌شود. عددی مانند $L$ وجود ندارد که این مقادیر به‌آن میل کنند.

مثال زیر نشان می‌دهد حتی اگر $f(x)$ در $x = a$ معین باشد، حد $f(x)$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند ممکن است با $f(a)$ برابر نباشد.

**توجه**

همواره به‌یاد داشته باشید که وجود $\lim_{x\to a} f(x)$ نیازمند وجود $f(a)$ نیست و حتی اگر $f(a)$ وجود داشته باشد مقدار این حد به $f(a)$ بستگی ندارد. حد بالا فقط به‌مقادیر $f(x)$ در نزدیکی‌های $a$، و نه خود $a$، بستگی دارد.

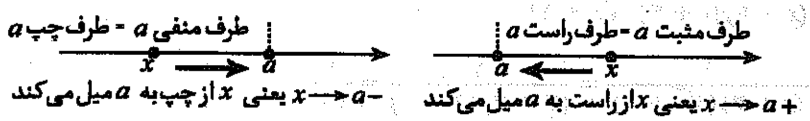
**مثال ۵** فرض کنیم $g(x) = \begin{cases} x & x \neq ۲ \\ ۱ & x = ۲ \end{cases}$. (شکل ۴.۱(ب) را ببینید.) دراین‌صورت $\lim_{x\to ۲} g(x) = \lim_{x\to ۲} x = ۲$، با وجود اینکه $g(۲) = ۱$.




شکل ۴.۱ (آ) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x}$ وجود ندارد (ب) $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۲$، ولی $g(۲) = ۱$

## حدود یکطرفه

حد، یکتاست، یعنی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} f(x) = M$، آنگاه $L = M$. (تمرین ۳۱ در بخش ۵.۱ را ببینید.) با وجود اینکه تابعی مانند $f$ فقط می‌تواند یک حد در نقطهٔ مفروض داشته باشد اغلب سودمند است بتوانیم رفتار توابعی را توصیف کنیم که وقتی $x$ از این طرف یا آن طرف به $a$ میل می‌کند، به‌عددهای مختلف میل می‌کنند. (شکل ۵.۱ را ببینید.)




**شکل ۵.۱** میل کردن از یک طرف

**تعریف ۲ تعریف غیرصوری حدهای چپ و راست**

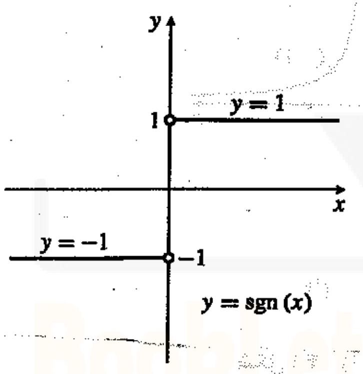
اگر $f(x)$ در بازه‌ای نظیر $]b, a[$ که در طرف چپ $x = a$ قرار دارد معین باشد و با انتخاب $x$ در طرف چپ $a$ و به‌قدر کافی نزدیک به $a$ بتوانیم $f(x)$ را هر قدر بخواهیم به $L$ نزدیک کنیم، می‌گوییم $f(x)$ در $x = a$ دارای **حد چپ** $L$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L$$

اگر $f(x)$ در بازه‌ای نظیر $]a, b[$ که در طرف راست $x = a$ قرار دارد معین باشد و با انتخاب $x$ در طرف راست $a$ و به‌قدر کافی نزدیک به $a$ بتوانیم $f(x)$ را هر قدر بخواهیم به $L$ نزدیک کنیم، می‌گوییم $f(x)$ در $x = a$ دارای **حد راست** $L$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

به کاربرد پسوندهای $+$ و $-$ به‌ترتیب برای نشان دادنِ میل کردن از راست (یا طرف مثبت) و از چپ (یا طرف منفی) توجه داشته باشید.




**شکل ۶.۱** $\lim_{x \to ۰} \operatorname{sgn}(x)$ وجود ندارد، زیرا $\lim_{x \to ۰-} \operatorname{sgn}(x) = -۱$ و $\lim_{x \to ۰+} \operatorname{sgn}(x) = ۱$

**مثال ۶** تابع علامت، یعنی $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$، در $x = ۰$ دارای حد چپ $-۱$ و حد راست ۱ است (شکل ۶.۱ را ببینید):

$$\lim_{x \to ۰-} \operatorname{sgn}(x) = -۱ \quad , \quad \lim_{x \to ۰+} \operatorname{sgn}(x) = ۱$$

زیرا وقتی $x$ منفی است و به ۰ میل می‌کند، مقادیر $\operatorname{sgn}(x)$ به $-۱$ میل می‌کنند (و در حقیقت این مقادیر *برابرند* با $-۱$) و وقتی $x$ مثبت است و به ۰ میل می‌کند، مقادیر تابع به ۱ میل می‌کنند. چون این حدهای چپ و راست برابر نیستند، $\lim_{x \to ۰} \operatorname{sgn}(x)$ *وجود ندارد*. ■

همان‌گونه که در مثال ۶ اشاره شد، وابستگی بین حد معمولی (یا دوطرفه) و حدهای یک‌طرفه را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

**قضیهٔ ۱** **وابستگی بین حدهای یکطرفه و دوطرفه**

تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای حد $L$ است اگر و فقط اگر در این نقطه دارای حد چپ و راست باشد و این دو حد یکطرفه برابر باشند با $L$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

**مثال ۷** اگر $f(x) = \dfrac{|x-۲|}{x^۲+x-۶}$، مطلوب است $\lim_{x\to ۲^+} f(x)$، $\lim_{x\to ۲^-} f(x)$ و $\lim_{x\to ۲} f(x)$.

*حل.* ملاحظه می‌کنیم که

$$|x-۲| = \begin{cases} x-۲ & \text{اگر } x>۲ \\ -(x-۲) & \text{اگر } x<۲ \end{cases}$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)}{x^۲+x-۶} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)}{(x-۲)(x+۳)} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۱}{x+۳} = -\frac{۱}{۵}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{x^۲+x-۶} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{(x-۲)(x+۳)} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۱}{x+۳} = \frac{۱}{۵}$$

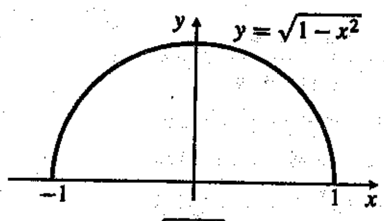
چون $\lim_{x\to ۲^+} f(x) \neq \lim_{x\to ۲^-} f(x)$، حد $\lim_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد. ■

**مثال ۸** تابع $g(x) = \sqrt{۱-x^۲}$ در $x = -۱$ و $x = ۱$ دارای کدام حدهای یکطرفه است؟

*حل.* قلمرو $g$ عبارت است از $[-۱, ۱]$ و از این‌رو، $g(x)$ فقط در طرف راست $x = -۱$ و فقط در طرف چپ $x = ۱$ معین است. مطابق شکل ۷.۱،

$$\lim_{x\to -۱^+} g(x) = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-} g(x) = ۰$$

$g(x)$ در $x = -۱$ حد چپ و لذا حد ندارد. به‌همین ترتیب در $x = ۱$ حد راست و لذا حد ندارد. ■




شکل ۷.۱ تابع $\sqrt{۱-x^۲}$ در $-۱$ دارای حد راست ۰ و در ۱ دارای حد چپ ۰ است

## قواعد محاسبهٔ حد

با در دست داشتن چند حد مقدماتی، قضیه‌هایی که در زیر می‌آیند محاسبهٔ حد و حدهای یکطرفهٔ بسیاری از توابع را آسانتر می‌کنند. این قضیه‌ها را در اینجا ثابت نمی‌کنیم. (بخش ۵.۱ را ببینید.)

## قضیهٔ ۲ قواعد حد

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ و $c$ یک ثابت باشد، آنگاه

۱. حد مجموع: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$

۲. حد تفاضل: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M$

۳. حد حاصلضرب: $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=LM$

۴. حد مضرب: $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=kL$

۵. حد خارج‌قسمت: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ ، (با فرض $M\neq ۰$)

اگر $m$ عددی صحیح و $n$ عددی طبیعی باشد، آنگاه

۶. حد تابع توانی: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\frac{m}{n}}=L^{\frac{m}{n}}$

مشروط بر اینکه وقتی $n$ زوج است $L>۰$ و وقتی $m<۰$ داشته باشیم $L\neq ۰$.

اگر در بازه‌ای که $a$ یک نقطهٔ درونی آن است داشته باشیم $f(x)\leq g(x)$، آنگاه

۷. ترتیب حفظ می‌شود: $L\leq M$

قواعد ۱ تا ۶ برای حدهای راست و چپ نیز معتبرند. قاعدهٔ ۷ نیز به‌شرطی معتبر است که بر بازهٔ بازی در طرف مناسب $a$ داشته باشیم $f(x)\leq g(x)$.

قسمت ۱ در قضیهٔ ۲ به‌زبان ساده می‌گوید حد مجموع توابع برابر است با مجموع حدهای آنها. به‌همین ترتیب، قسمت ۵ می‌گوید حد خارج‌قسمت دو تابع برابر است با خارج‌قسمت حدهای آنها، مشروط بر اینکه حد مخرج صفر نباشد. کوشش کنید قسمت‌های دیگر را نیز با استفاده از واژه‌های مناسب بیان کنید.

می‌توانیم با استفاده از حدهای (آ) $\lim\limits_{x\to a} c=c$ (که در آن $c$ یک ثابت است) و (ب) $\lim\limits_{x\to a} x=a$ که در مثال ۳ ملاحظه شدند همراه با قسمت‌های مختلف قضیهٔ ۲، حد ترکیب‌های گوناگون توابع را محاسبه کنیم.

**مثال ۹** مطلوب است (آ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^۲+x+۴}{x^۳-۲x^۲+۷}$ و (ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{۲x+۱}$.

**حل.**

(آ) عبارت $\dfrac{x^۲+x+۴}{x^۳-۲x^۲+۷}$ از ترکیب توابع مقدماتی $x$ و $c$ ($c$ ثابت) با استفاده از اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم ساخته شده است. قضیهٔ ۲ اطمینان می‌دهد که حد این ترکیب برابر است با ترکیب مشابه $a$ و $c$ (که عبارت‌اند از حد توابع مقدماتی) مشروط بر اینکه حد مخرج صفر نشود. بدین‌سان، با فرض $a^۳-۲a^۲+۷\neq ۰$ داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{x^۲+x+۴}{x^۳-۲x^۲+۷}=\frac{a^۲+a+۴}{a^۳-۲a^۲+۷}$$

(ب) استدلالی مشابه قسمت (آ) نشان می‌دهد که $\lim_{x\to ۲}(۲x+۱) = ۲(۲)+۱ = ۵$. اکنون قاعدهٔ حد تابع توانی (قسمت ٦ در قضیهٔ ۲) اطمینان می‌دهد که

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{۲x+۱} = \sqrt{۵}$$

■

قضیهٔ زیر بی‌درنگ از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود. (برای بحث پیرامون چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا، بخش پ.٦ را ببینید.)

**قضیهٔ ۳ حد چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا**

۱. اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای و $a$ عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه

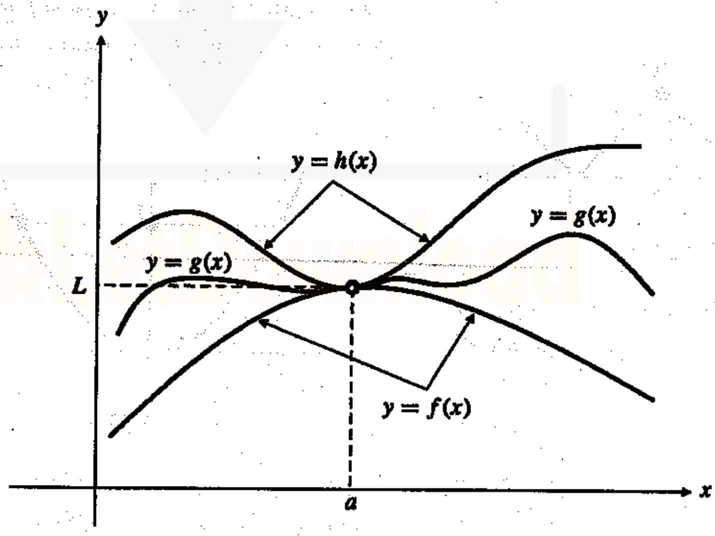
$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

۲. اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(a) \neq ۰$، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

### قضیهٔ فشار

قضیهٔ زیر ما را قادر می‌سازد تا چند حد بسیار مهم را در فصل‌های بعد ثابت کنیم. این قضیه را به‌این سبب قضیهٔ فشار می‌نامیم که به‌تابعی مانند $g$ اشاره دارد که مقادیرش بین مقادیر دو تابع دیگر، $f$ و $h$ قرار دارند و این دو تابع در نقطه‌ای مانند $a$ دارای حد یکسان $L$ هستند. چون مقادیر $g$ بین مقادیر دو تابعی گرفتار شده‌اند که به $L$ میل می‌کنند، خودشان نیز باید به $L$ میل کنند. (شکل ۸.۱ را ببینید.)




**شکل ۸.۱** نمودار $g$ بین نمودارهای $f$ و $h$ قرار دارد

## قضیهٔ ٤ قضیهٔ فشار

فرض کنیم به‌ازای هر $x$ متعلق به‌بازهٔ بازی حاوی $a$، جز شاید در خود $x = a$، داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. همچنین، فرض کنیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

دراین‌صورت $\lim_{x\to a} g(x) = L$. گزاره‌های مشابهی نیز برای حدهای چپ و راست داریم.

**مثال ۱۰** با این فرض که به‌ازای هر $x \neq ۰$ داشته باشیم $۳ - x^۲ \leq u(x) \leq ۳ + x^۲$، مطلوب است $\lim_{x\to ۰} u(x)$.

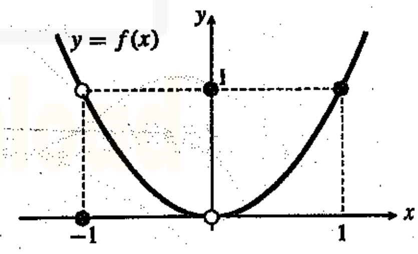
*حل.* چون $\lim_{x\to ۰} (۳ - x^۲) = ۳$ و $\lim_{x\to ۰} (۳ + x^۲) = ۳$، از قضیهٔ فشار نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to ۰} u(x) = ۳$.

**مثال ۱۱** نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a} |f(x)| = ۰$، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$.

*حل.* چون $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ و هر دو تابع $|f(x)|$ و $-|f(x)|$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند دارای حد ۰ هستند، $f(x)$ نیز بنابر قضیهٔ فشار دارای حد ۰ است.

## تمرینات ۲.۱

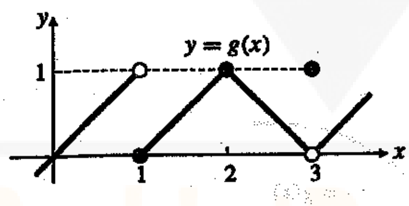
۱. برای تابع $f$ که نمودارش در شکل ۹.۱ نشان داده شده است، مطلوب است (آ) $\lim_{x\to -۱} f(x)$، (ب) $\lim_{x\to ۰} f(x)$ و (پ) $\lim_{x\to ۱} f(x)$.




شکل ۹.۱

۲. برای تابع $y = g(x)$ که نمودارش در شکل ۱۰.۱ رسم شده است، هریک از حدهای زیر را بیابید یا توضیح دهید چرا وجود ندارد.

(آ) $\lim_{x\to ۱} g(x)$، (ب) $\lim_{x\to ۲} g(x)$ و (پ) $\lim_{x\to ۳} g(x)$




شکل ۱۰.۱

در تمرین‌های ۳ تا ٦، حد یکطرفهٔ خواسته شده را برای تابع $g$ که نمودارش در شکل ۱۰.۱ داده شده است بیابید.

۳. $\lim_{x\to ۱^-} g(x)$

۴. $\lim_{x\to ۱^+} g(x)$

۵. $\lim_{x\to ۱^+} g(x)$

۶. $\lim_{x\to ۳^-} g(x)$

در تمرین‌های ۷ تا ۳۶، حد را محاسبه کنید یا توضیح دهید چرا وجود ندارد.

۷. $\lim\limits_{x\to ۴}(x^{۲}-۴x+۱)$

۸. $\lim\limits_{x\to ۲}۳(۱-x)(۲-x)$

۹. $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x+۳}{x+۶}$

۱۰. $\lim\limits_{t\to -۴}\dfrac{t^{۲}}{۴-t}$

۱۱. $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{x+۱}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{x+۱}$

۱۳. $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۶x+۹}{x^{۲}-۹}$

۱۴. $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}-۴}$

۱۵. $\lim\limits_{h\to ۲}\dfrac{۱}{۴-h^{۲}}$

۱۶. $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{۳h+۴h^{۲}}{h^{۲}-h^{۳}}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to ۹}\dfrac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}$

۱۸. $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{\sqrt{۴+h}-۲}{h}$

۱۹. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(x-\pi)^{۲}}{\pi x}$

۲۰. $\lim\limits_{x\to -۲}|x-۲|$

۲۱. $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$

۲۲. $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$

۲۳. $\lim\limits_{t\to ۱}\dfrac{t^{۲}-۱}{t^{۲}-۲t+۱}$

۲۴. $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{۴-۴x+x^{۲}}}{x-۲}$

۲۵. $\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{t}{\sqrt{۴+t}-\sqrt{۴-t}}$

۲۶. $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{\sqrt{x+۳}-۲}$

۲۷. $\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{t^{۲}+۳t}{(t+۲)^{۲}-(t-۲)^{۲}}$

۲۸. $\lim\limits_{s\to ۰}\dfrac{(s+۱)^{۲}-(s-۱)^{۲}}{s}$

۲۹. $\lim\limits_{y\to ۱}\dfrac{y-۴\sqrt{y}+۳}{y^{۲}-۱}$

۳۰. $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x^{۳}+۱}{x+۱}$

۳۱. $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۴}-۱۶}{x^{۳}-۸}$

۳۲. $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^{۲/۳}-۴}{x^{۱/۳}-۲}$

۳۳. $\lim\limits_{x\to ۲}\left(\dfrac{۱}{x-۲}-\dfrac{۴}{x^{۲}-۴}\right)$

۳۴. $\lim\limits_{x\to ۲}\left(\dfrac{۱}{x-۲}-\dfrac{۱}{x^{۲}-۴}\right)$

۳۵. $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۲+x^{۲}}-\sqrt{۲-x^{۲}}}{x^{۲}}$

۳۶. $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مکرراً با حد $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ مواجه می‌شویم. (می‌توانید حدس بزنید چرا؟) برای توابع $f$ در تمرین‌های ۳۷ تا ۴۲، این حد را محاسبه کنید.

۳۷. $f(x)=x^{۲}$

۳۸. $f(x)=x^{۳}$

۳۹. $f(x)=\dfrac{۱}{x}$

۴۰. $f(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}}$

۴۱. $f(x)=\sqrt{x}$

۴۲. $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x}}$

با بررسی نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ در بخش پ.۷، حدهای خواسته شده در تمرین‌های ۴۳ تا ۴۶ را تعیین کنید.

۴۳. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\sin x$

۴۴. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\cos x$

۴۵. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\cos x$

۴۶. $\lim\limits_{x\to \frac{۲\pi}{۳}}\sin x$

۴۷. به‌ازای دنباله‌ای از مقادیر $x$ که به ۰ میل می‌کنند، نظیر ۱ر۰±، ۰۱ر۰±، ۰۰۱ر۰±، ۰۰۰۱ر۰±، و ۰۰۰۰۱ر۰±، جدول مقادیر $f(x)=(\sin x)/x$ را تشکیل دهید. پس از حصول اطمینان از اینکه ماشین‌حسابتان در وضعیت *رادیان* قرار دارد و نه در وضعیت درجه، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)$ را حدس بزنید.

۴۸. تمرین ۴۷ را برای $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ تکرار کنید.

در تمرین‌های ۴۹ تا ۶۰، حد یکطرفهٔ خواسته شده را بیابید یا توضیح دهید چرا وجود ندارد.

۴۹. $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{2-x}$

۵۰. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{2-x}$

۵۱. $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{2-x}$

۵۲. $\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{2-x}$

۵۳. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^3-x}$

۵۴. $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x^3-x}$

۵۵. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3-x}$

۵۶. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2-x^4}$

۵۷. $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{|x-a|}{x^2-a^2}$

۵۸. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{|x-a|}{x^2-a^2}$

۵۹. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|x+2|}$

۶۰. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{|x+2|}$

در تمرین‌های ۶۱ تا ۶۴، با فرض

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \le -1 \\ x^2+1 & -1 < x \le 0 \\ (x+\pi)^2 & x > 0 \end{cases}$$

حدهای خواسته شده را بیابید.

۶۱. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

۶۲. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

۶۳. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

۶۴. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

۶۵. با فرض $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = -3$، حدهای زیر را بیابید:

(آ) $\lim\limits_{x\to 4}\left(g(x)+3\right)$ (ب) $\lim\limits_{x\to 4} xf(x)$

(پ) $\lim\limits_{x\to 4}\left(g(x)\right)^2$ (ت) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

۶۶. با فرض $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 4$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -2$، حدهای زیر را بیابید:

(آ) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ (ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$

(پ) $\lim\limits_{x\to a} 4g(x)$ (ت) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

۶۷. اگر $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

۶۸. اگر $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -2$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

## کاربرد ابزار ترسیم برای یافتن حد

با استفاده از ماشین‌حساب یا نرم‌افزار کامپیوتری برای رسم نمودار، می‌توان حدها را حداقل به‌طور تقریبی محاسبه کرد. برای این منظور کافی است پنجرهٔ ترسیم را طوری روی نمودار «متمرکز» کنید که قسمت‌های کوچک و کوچکتری از آن را در نزدیکی‌های نقطه‌ای که بناست حد را بیابیم، نشان دهد. حدهای زیر را با استفاده از فنون نموداری بیابید. هرجا تصور می‌کنید موجه است، پاسخ دقیق بیاورید. درغیراین‌صورت، پاسخ درست را تا ۴ رقم اعشاری محاسبه کنید. هنگام بررسی توابع مثلثاتی، مطمئن شوید که ماشین‌حساب یا نرم‌افزارتان در وضعیت رادیان قرار دارد.

۶۹. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

۷۰. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

۷۱. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}$

۷۲. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

۷۳. نمودار هر سه تابع $y = x\sin(1/x)$، $y = x$ و $y = -x$ را به‌ازای $-0{,}2 \le x \le 0{,}2$ و $-0{,}2 \le y \le 0{,}2$ در یک دستگاه مختصات واحد رسم کنید. رفتار $f(x) = x\sin(1/x)$ را در نزدیکی $x = 0$ توصیف کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وجود دارد؟ اگر پاسخ مثبت است، مقدار آن چقدر است؟ آیا قبل از رسم نمودار، می‌توانستید این مقدار را پیش‌بینی کنید؟ چرا؟

## کاربرد قضیهٔ فشار

۷۴. اگر به‌ازای $-1 \le x \le 1$ داشته باشیم $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**۷۵.** اگر به‌ازای هر $x$ داشته باشیم $2-x^2 \le g(x) \le 2\cos x$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

**۷۶.** (آ) خم‌های $y=x^2$ و $y=x^4$ را در یک دستگاه مختصات واحد رسم کنید. این دو خم در کجا یکدیگر را قطع می‌کنند؟

(ب) تابع $f(x)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x^2 \le f(x) \le x^4 & \text{اگر } x<-1 \text{ یا } x>1 \\ x^4 \le f(x) \le x^2 & \text{اگر } -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

مطلوب است (یک) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$، (دو) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و (سه) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

**۷۷.** در کدام بازه‌ها داریم $x^3 < x^{1/3}$؟ در کدام بازه‌ها داریم $x^3 > x^{1/3}$؟ اگر نمودار $y=h(x)$ همواره بین نمودارهای $y=x^{1/3}$ و $y=x^3$ قرار داشته باشد، به‌ازای کدام اعداد حقیقی $a$ می‌توانید مقدار $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ را تعیین کنید؟ به‌ازای هر یک از این مقادیر $a$، حد یاد شده را بیابید.

***۷۸.** قلمرو $x\sin\frac{1}{x}$ کدام است؟ مطلوب است $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

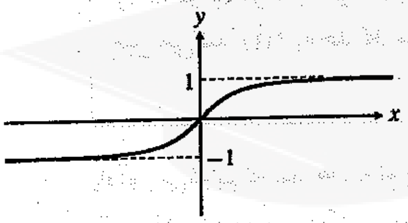
***۷۹.** به‌ازای هر $x$ فرض کنیم $|f(x)| \le g(x)$. اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، دربارهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ چه حکمی می‌کنید؟ اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=3$ چطور؟

## ۱.۳ حد در بینهایت و حد بینهایت

دراین بخش، مفهوم حد را به‌گونه‌ای گسترش می‌دهیم تا دو وضعیت زیر را که مشمول تعاریف حد و حدهای یکطرفه در بخش قبل نمی‌شوند پوشش دهد:

(یک) حد در بینهایت، جایی که $x$ با مقادیر مثبت یا منفی بدلخواه بزرگ می‌شود.

(دو) حد بینهایت که در حقیقت به‌هیچ‌وجه حد نیست ولی نمادگذاری سودمندی برای توصیف رفتار توابعی است که مقادیرشان بدلخواه بزرگ می‌شوند (مثبت یا منفی).




شکل ۱۱.۱ نمودار $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

جدول ۵.

| $x$ | $f(x)=x/\sqrt{x^2+1}$ |
|---|---|
| −۱۰۰۰ | −۰٫۹۹۹۹۹۹۵ |
| −۱۰۰ | −۰٫۹۹۹۹۵۰۰ |
| −۱۰ | −۰٫۹۹۵۰۳۷۲ |
| −۱ | −۰٫۷۰۷۱۰۶۸ |
| ۰ | ۰٫۰۰۰۰۰۰۰ |
| ۱ | ۰٫۷۰۷۱۰۶۸ |
| ۱۰ | ۰٫۹۹۵۰۳۷۲ |
| ۱۰۰ | ۰٫۹۹۹۹۵۰۰ |
| ۱۰۰۰ | ۰٫۹۹۹۹۹۹۵ |

### حد در بینهایت

تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را که نمودارش در شکل ۱۱.۱ رسم شده است، درنظر می‌گیریم. بعضی از مقادیر این تابع را (که به‌هفت رقم اعشاری گرد شده‌اند) در جدول ۵ آورده‌ایم. وقتی $x$ مقادیر مثبتِ بزرگ و بزرگتر را اختیار می‌کند مقادیر $f(x)$ به ۱ میل می‌کنند، درحالی‌که وقتی $x$ مقادیر منفی را به‌گونه‌ای اختیار می‌کند که قدرمطلق آنها بزرگ و بزرگتر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $-1$ میل می‌کنند. این رفتار را به‌این‌صورت بیان می‌کنیم که

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$: «وقتی $x$ به‌بینهایت میل می‌کند، $f(x)$ به ۱ میل می‌کند.»

$-1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$: «وقتی $x$ به‌منفیِ بینهایت میل می‌کند، $f(x)$ به $-1$ میل می‌کند.»
نمودار $f$، این رفتار حدی را به‌این‌صورت آشکار می‌سازد که وقتی $x$ در طرف راست و چپ، بسیار دور می‌رود این نمودار به‌ترتیب به‌خط‌های افقی $y = 1$ و $y = -1$ نزدیک می‌شود. این خط‌ها را **مجانب‌های افقی** نمودار می‌نامیم. به‌طور کلی اگر خمی ضمن دور شدنِ بسیار از مبدأ به‌خطی راست نزدیک شود این خط را یک **مجانب** خم می‌نامیم.

**تعریف ۳ حد در بینهایت و منفیِ بینهایت (تعریف غیرصوری)**

اگر تابع $f$ بر بازه‌ای نظیر $]a, \infty[$ معین باشد و با انتخاب $x$های به‌قدر کافی بزرگ بتوانیم هر قدر بخواهیم $f(x)$ را به‌عدد $L$ نزدیک کنیم، می‌گوییم **وقتی $x$ به‌بینهایت میل می‌کند $f(x)$ به‌حد $L$ میل می‌کند** و می‌نویسیم

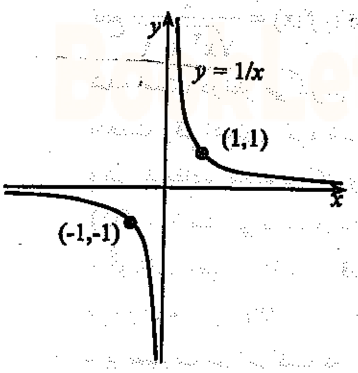
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

اگر $f$ بر بازه‌ای نظیر $]-\infty, b[$ معین باشد و با انتخاب $x$های منفی و از نظر قدرمطلق به‌قدر کافی بزرگ بتوانیم هر قدر بخواهیم $f(x)$ را به‌عدد $M$ نزدیک کنیم، می‌گوییم **وقتی $x$ به‌منفیِ بینهایت میل می‌کند $f(x)$ به‌حد $M$ میل می‌کند** و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

یادآور می‌شویم که نماد $\infty$، به‌نام **بینهایت**، عددی حقیقی را نمایش **نمی‌دهد**. در حساب نمی‌توانیم $\infty$ را نظیر یک عدد معمولی به‌کار ببریم، ولی می‌توانیم عبارت «به $\infty$ میل می‌کند» را به‌این معنی به‌کار ببریم که «بدلخواه، با مقادیر مثبت بزرگ می‌شود». به‌همین ترتیب عبارت «به $-\infty$ میل می‌کند» به‌این معنی است که «بدلخواه، با مقادیر منفی بزرگ می‌شود».

**مثال ۱** در شکل ۱۲.۱ می‌توان دید که $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. محور $x$ مجانب افقی نمودار $y = 1/x$ است. ■




شکل ۱۲.۱ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

قضیه‌های بخش ۲.۱ مشابه مناسبی برای حد در بینهایت یا حد در منفیِ بینهایت دارند. بویژه از مثال بالا و قاعدهٔ ضرب برای حد نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت مانند $n$ داریم $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x^n = 0$. این حقیقت را در مثال‌های زیر به‌کار خواهیم برد. مثال ۲ نشان می‌دهد چگونه می‌توان با استفاده از اعمال جبری و بدون توسل به‌تشکیل جدولِ مقادیر یا رسم نمودار (نظیر آنچه در بالا انجام دادیم) حد تابع $x/\sqrt{x^2+1}$ را در $\pm\infty$ به‌دست آورد.

**مثال ۲** مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

درصورتی که $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$.

*حل.* عبارت $f(x)$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم: (یادآور می‌شویم که $\sqrt{x^۲} = |x|$)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^۲\left(۱ + \frac{۱}{x^۲}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x^۲}\sqrt{۱ + \frac{۱}{x^۲}}}$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{۱ + \frac{۱}{x^۲}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{۱ + \frac{۱}{x^۲}}}$$

(توجه دارید که $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$)

وقتی $x$ به $\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، عامل $\sqrt{۱ + (۱/x^۲)}$ به ۱ میل می‌کند و از این‌رو به‌ازای $x \longrightarrow \pm\infty$، $f(x)$ و $\operatorname{sgn}(x)$ دارای حد یکسان هستند. بنابراین (شکل ۱۱.۱ را ببینید.)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱$$

■

## حد در بینهایت برای توابع گویا

تنها چندجمله‌ای‌هایی که در $\pm\infty$ حد دارند عبارت‌اند از چندجمله‌ای‌های ثابت، یعنی $P(x) = c$. وضعیت برای توابع گویا جالبتر است. یادآور می‌شویم که هر تابع گویا خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای است. مثال‌های زیر نشان می‌دهند چگونه این نوع توابع را به‌صورتی درآوریم که حدهای آنها در بینهایت و منفیِ بینهایت (درصورت وجود) آشکار بشوند. راه انجام این کار عبارت است از **تقسیم صورت و مخرج بر بالاترین توان $x$ که در مخرج حضور دارد.** حدهای یک تابع گویا در بینهایت و منفیِ بینهایت، یا هر دو وجود دارند و برابرند یا هیچ‌کدام وجود ندارند.

**مثال ۳** (درجهٔ صورت و مخرج یکسان است) مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{۲x^۲ - x + ۳}{۳x^۲ + ۵}$.

*حل.* صورت و مخرج را بر $x^۲$، یعنی بالاترین توان $x$ که در مخرج حضور دارد، تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲ - x + ۳}{۳x^۲ + ۵} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲ - \left(\frac{۱}{x}\right) + \left(\frac{۳}{x^۲}\right)}{۳ + \left(\frac{۵}{x^۲}\right)} = \frac{۲ - ۰ + ۰}{۳ + ۰} = \frac{۲}{۳}$$

■

**مثال ٤** (درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر است) مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{۵x + ۲}{۲x^۳ - ۱}$.

**حل.** صورت و مخرج را بر بالاترین توان $x$ که در مخرج حضور دارد، یعنی $x^{۳}$، تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x+۲}{۲x^{۳}-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\frac{۵}{x^{۲}}\right)+\left(\frac{۲}{x^{۳}}\right)}{۲-\left(\frac{۱}{x^{۳}}\right)}=\frac{۰+۰}{۲-۰}=۰$$

■

رفتار حدی توابع گویا را در بینهایت و منفیِ بینهایت به‌صورت روبه‌رو خلاصه می‌کنیم.

فن به‌کار رفته در مثال‌های قبل را می‌توان در مورد انواع کلیتر توابع نیز به‌کار برد. تابعی که در مثال زیر آورده‌ایم گویا نیست و حدگیری مستقیم نیز به‌عبارت بی‌معنی $\infty - \infty$ منجر می‌شود، درحالی‌که با گویا کردن صورت، دشواری‌ها برطرف می‌شوند.

**حد توابع گویا در $\pm\infty$**

فرض کنیم $P_m(x) = a_m x^m + \ldots + a_۰$ و $Q_n(x) = b_n x^n + \ldots + b_۰$ دو چندجمله‌ای با درجه‌های به‌ترتیب $m$ و $n$ باشند که درنتیجه، $a_m \neq ۰$ و $b_n \neq ۰$. دراین‌صورت

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

(آ) برابر است با صفر هرگاه $m < n$،

(ب) برابر است با $\frac{a_m}{b_n}$ هرگاه $m = n$ و

(پ) وجود ندارد هرگاه $m > n$.

**مثال ۵** مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^{۲}+x}-x)$.

**حل.** در اینجا می‌خواهیم حد تفاضل دو تابعی را محاسبه کنیم که هر یک از آنها وقتی $x$ به‌بینهایت افزایش می‌یابد بدلخواه بزرگ می‌شود. عبارت مفروض را با ضرب صورت و مخرج (که برابر است با ۱) در عبارت مزدوج صورت، یعنی $\sqrt{x^{۲}+x}+x$، گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^{۲}+x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^{۲}+x}-x)(\sqrt{x^{۲}+x}+x)}{\sqrt{x^{۲}+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}+x-x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

(در اینجا $\sqrt{x^{۲}}=x$، زیرا به‌ازای $x\longrightarrow\infty$ داریم $x>۰$.)

■

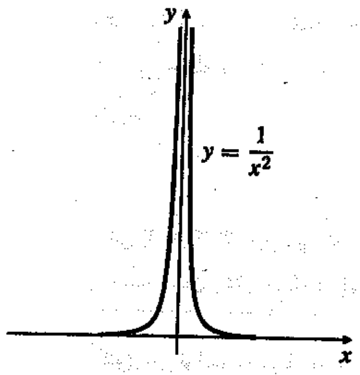
**تذکر.** بررسی حد $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}+x}-x)$ به‌ظرافت مثال قبل نیست. چون به‌ازای $x\longrightarrow-\infty$ داریم $-x>۰$، پس $\sqrt{x^{۲}+x}-x>\sqrt{x^{۲}+x}$ و می‌دانیم که $\sqrt{x^{۲}+x}$ به‌ازای $x\longrightarrow-\infty$ بدلخواه بزرگ می‌شود. درنتیجه، حد یاد شده وجود ندارد.

## حد بینهایت

وقتی مقادیر تابعی بدلخواه بزرگ می‌شوند می‌توانیم بگوییم این تابع دارای حد بینهایت است. چون بینهایت،

عدد نیست، در حقیقت حد بینهایت به‌هیچ‌وجه حد به‌حساب نمی‌آید، ولی این مفهوم راهی را برای توصیف رفتار توابعی که بدلخواه مثبتِ بزرگ یا منفیِ بزرگ می‌شوند به‌دست می‌دهد. با چند مثال این اصطلاح روشنتر می‌شود.

**مثال ۶** **(حد بینهایت دوطرفه)** رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ را در نزدیکی $x = 0$ توصیف کنید.



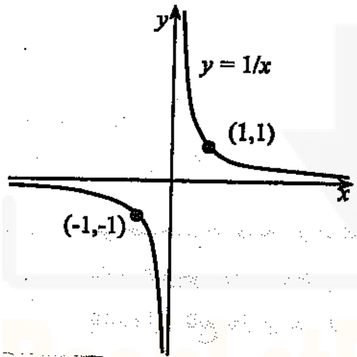

شکل ۱۳.۱ نمودار $y = \frac{1}{x^2}$

*حل.* وقتی $x$ از این طرف یا آن طرف به $0$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ مثبت هستند و بزرگ و بزرگتر می‌شوند (شکل ۱۳.۱ را ببینید) و از این‌رو، حد $f(x)$ وقتی $x$ به $0$ میل می‌کند **وجود ندارد**. با وجود این بهتر است رفتار $f$ را در نزدیکی $0$ این‌طور توصیف کنیم که بگوییم وقتی $x$ به‌صفر میل می‌کند $f(x)$ به $\infty$ میل می‌کند. می‌نویسیم

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

توجه داشته باشید که این نحوهٔ نوشتن به‌این معنی **نیست** که $\lim_{x\to 0} 1/x^2$ **وجود دارد**، بلکه به‌این معنی است که این حد **وجود ندارد** *زیرا* $1/x^2$ **در نزدیکی** $x = 0$ **بدلخواه بزرگ می‌شود**. ملاحظه می‌کنید که وقتی $x$ به $0$ میل می‌کند نمودار $f$ به‌محور $y$ نزدیک می‌شود. محور $y$ **مجانب قائم** این نمودار است. ■

**مثال ۷** **(حد بینهایت یکطرفه)** رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نزدیکی $x = 0$ توصیف کنید. (شکل ۱۴.۱ را ببینید.)




شکل ۱۴.۱ $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ ، $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$

*حل.* وقتی $x$ از راست به $0$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ اعداد مثبت بزرگ و بزرگتر می‌شوند و از این‌رو، می‌گوییم $f$ در $x = 0$ دارای حد راست بینهایت است:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$$

به‌همین ترتیب وقتی $x$ از چپ به $0$ میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ اعداد منفی بزرگ و بزرگتر می‌شوند و از این‌رو، $f$ در $x = 0$ دارای حد چپ $-\infty$ است:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$$

گزاره‌های بالا نمی‌گویند که حدهای یکطرفه **وجود دارند**. این حدها وجود ندارند، زیرا $\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند. چون این حدهای یکطرفه، حتی به‌عنوان نمادهای بینهایت، برابر نیستند، آنچه می‌توان دربارهٔ حد دوطرفهٔ $\lim_{x\to 0} f(x)$ گفت این است که این حد وجود ندارد. ■

**مثال ۸** (رفتار چندجمله‌ای‌ها در بینهایت)

(آ) $\lim\limits_{x\to\infty}(۳x^۳-x^۲+۲)=\infty$ (ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(۳x^۳-x^۲+۲)=-\infty$

(پ) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^۴-۵x^۳-x)=\infty$ (ت) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۴-۵x^۳-x)=\infty$

وقتی $|x|$ بزرگ می‌شود، جملهٔ دارای بالاترین درجهٔ چندجمله‌ای بر جمله‌های دیگر غالب است و از این‌رو، حد این جمله در $\infty$ و $-\infty$ حد کل چندجمله‌ای را تعیین می‌کند. برای چندجمله‌ای قسمت‌های (آ) و (ب) داریم

$$۳x^۳-x^۲+۲=۳x^۳\left(۱-\frac{۱}{۳x}+\frac{۲}{۳x^۳}\right)$$

وقتی $x$ به $\pm\infty$ میل می‌کند عامل واقع بین دو پرانتز به ۱ میل می‌کند و در نتیجه، رفتار این چندجمله‌ای درست همان رفتار جملهٔ دارای بالاترین درجه، یعنی $۳x^۳$ خواهد بود. ■

اکنون می‌توانیم دربارهٔ حد در بینهایتِ تابعی گویا که درجهٔ صورت آن بیشتر از درجهٔ مخرج است کمی بیشتر صحبت کنیم. قبلاً در همین بخش گفتیم این حد وجود *ندارد*. این درست است؛ ولی همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد می‌توانیم نمادهای $\infty$ یا $-\infty$ را به‌این نوع حدها نسبت دهیم.

**مثال ۹** (توابع گویایی که در آنها درجهٔ صورت بیشتر است) مطلوب است $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^۳+۱}{x^۲+۱}$.

*حل.* صورت و مخرج را بر $x^۲$، یعنی بالاترین توان $x$ در مخرج، تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳+۱}{x^۲+۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{۱}{x^۲}}{۱+\frac{۱}{x^۲}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{۱}{x^۲}\right)}{۱}=\infty$$

■

هر چندجمله‌ای درجهٔ $n>۰$ مانند $Q(x)$ دارای حداکثر $n$ *صفر* است، یعنی حداکثر $n$ عدد حقیقی مختلف مانند $r$ وجود دارند به‌طوری که $Q(r)=۰$. اگر $Q(x)$ مخرج تابع گویایی مانند $R(x)=P(x)/Q(x)$ باشد، این تابع به‌ازای هر $x$، جز در صفرهای $Q$ که تعدادشان متناهی است، معین است. در هر یک از این صفرها، تابع $R(x)$ ممکن است دارای حد، حد بینهایت یا حدهای بینهایت یکطرفه باشد. در زیر چند مثال می‌آوریم.

**مثال ۱۰**

(آ) $$\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)^۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)^۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{x+۲}=۰$$

(ب) $$\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۴}$$

(پ) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=-\infty$ (زیرا این کسر به‌ازای $x > 2$ و نزدیک ۲، منفی است.)

(ت) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\infty$ (زیرا این کسر به‌ازای $x < 2$ و نزدیک ۲، مثبت است.)

(ث) حد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ وجود ندارد.

(ج) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$

در قسمت‌های (آ) و (ب) تأثیر $x = 2$، یعنی یکی از صفرهای مخرج، خنثی می‌شود زیرا صورت نیز به‌ازای $x = 2$ صفر است و از این‌رو، حد متناهی داریم. در قسمت (ج) این ادعا دیگر درست نیست، زیرا صورت در $x = 2$ فقط یک بار صفر می‌شود، درحالی‌که مخرج در این نقطه سه بار صفر می‌شود. ■

## کاربرد میپل در محاسبهٔ حد

دستور limit در میپل را می‌توان بآسانی برای محاسبهٔ حد، حدهای یکطرفه، حد در بینهایت و حد بینهایت به‌کار برد. دستورالعمل محاسبهٔ حدهای

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\quad \lim_{x\to \infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to a^-}\frac{x^2-a^2}{|x-a|},\quad \lim_{x\to a^+}\frac{x^2-a^2}{|x-a|}$$

به‌صورت زیر است:

```
> limit((x^2-4)/(x^2-5*x+6), x=2);
                    -4
> limit(x*sin(x)/(1-cos(x)), x=0);
                    2
> limit(x/sqrt(x^2+1), x=-infinity);
                    -1
> limit(x/sqrt(x^2+1), x=infinity);
                    1
> limit(1/x, x=0); limit(1/x, x=0, left);
                    تعریف نشده
                    -∞
> limit((x^2-a^2)/(abs(x-a)), x=a, left);
                    -2a
> limit((x^2-a^2)/(abs(x-a)), x=a, right);
                    2a
```

## تمرینات ۳.۱

در تمرین‌های ۱ تا ۱۰، حد را بیابید.

۱. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{۲x-۳}$

۲. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^۲-۴}$

۳. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{۳x^۳-۵x^۲+۷}{۸+۲x-۵x^۳}$

۴. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^۲-۲}{x-x^۲}$

۵. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^۲+۳}{x^۳+۲}$

۶. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^۲+\sin x}{x^۲+\cos x}$

۷. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{۳x+۲\sqrt{x}}{۱-x}$

۸. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{۲x-۱}{\sqrt{۳x^۲+x+۱}}$

۹. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x-۱}{\sqrt{۳x^۲+x+۱}}$

۱۰. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x-۵}{|۳x+۲|}$

در تمرین‌های ۱۱ تا ۳۲، حد خواسته شده را محاسبه کنید. اگر این حد وجود ندارد، آیا $\infty$ است یا $-\infty$ یا هیچ‌کدام؟

۱۱. $\lim\limits_{x\to۳} \frac{۱}{۳-x}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to۳} \frac{۱}{(۳-x)^۲}$

۱۳. $\lim\limits_{x\to۳-} \frac{۱}{۳-x}$

۱۴. $\lim\limits_{x\to۳+} \frac{۱}{۳-x}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to-\frac{۵}{۲}} \frac{۲x+۵}{۵x+۲}$

۱۶. $\lim\limits_{x\to-\frac{۲}{۵}} \frac{۲x+۵}{۵x+۲}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to-(\frac{۲}{۵})-} \frac{۲x+۵}{۵x+۲}$

۱۸. $\lim\limits_{x\to-(\frac{۲}{۵})+} \frac{۲x+۵}{۵x+۲}$

۱۹. $\lim\limits_{x\to۲+} \frac{x}{(۲-x)^۳}$

۲۰. $\lim\limits_{x\to۱-} \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۲۱. $\lim\limits_{x\to۱+} \frac{۱}{|x-۱|}$

۲۲. $\lim\limits_{x\to۱-} \frac{۱}{|x-۱|}$

۲۳. $\lim\limits_{x\to۲} \frac{x-۳}{x^۲-۴x+۴}$

۲۴. $\lim\limits_{x\to۱+} \frac{\sqrt{x^۲-x}}{x-x^۲}$

۲۵. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+x^۳+x^۵}{۱+x^۲+x^۳}$

۲۶. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^۳+۳}{x^۲+۲}$

* ۲۷. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x+۱}\,(۱-\sqrt{۲x+۳})}{۷-۶x+۴x^۲}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^۲}{x+۱}-\frac{x^۲}{x-۱}\right)$

* ۲۹. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۲x}\right)$

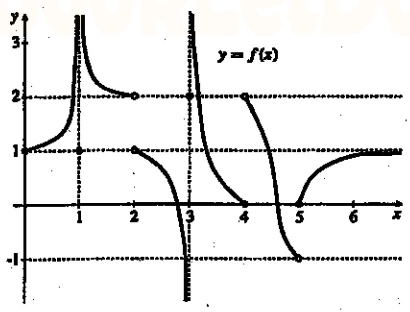
* ۳۰. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۲x}\right)$

۳۱. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۲x}-x}$

۳۲. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۲x}-x}$

۳۳. مجانب‌های افقی $y=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۲x}-x}$ کدام‌اند؟ مجانب‌های قائم آن کدام‌اند؟

۳۴. مجانب‌های افقی و قائم $y=\frac{۲x-۵}{|۳x+۲|}$ کدام‌اند؟




شکل ۱۵.۱

تابع $f$ که نمودارش در شکل ۱۵.۱ نشان داده شده است دارای قلمرو $[0, \infty[$ است. در تمرین‌های ۳۵ تا ۴۵، حدهای خواسته شده در مورد $f$ را بیابید.

۳۵. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

۳۶. $\lim_{x\to 1} f(x)$

۳۷. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

۳۸. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

۳۹. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

۴۰. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

۴۱. $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

۴۲. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

۴۳. $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

۴۴. $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

۴۵. $\lim_{x\to \infty} f(x)$

۴۶. مجانب‌های نمودار واقع در شکل ۱۵.۱ کدام‌اند؟

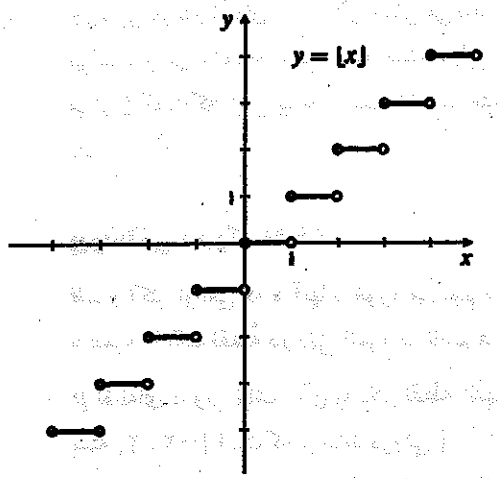
تمرین‌های ۴۷ تا ۵۲ مربوط می‌شوند به‌تابع بزرگترین عدد صحیح، یعنی $[x]$ که نمودار آن در شکل ۱۶.۱ رسم شده است. حد خواسته شده را بیابید یا توضیح دهید چرا این حد وجود ندارد.

۴۷. $\lim_{x\to 3^+} [x]$

۴۸. $\lim_{x\to 3^-} [x]$

۴۹. $\lim_{x\to 3} [x]$

۵۰. $\lim_{x\to 2.5} [x]$




شکل ۱۶.۱

۵۱. $\lim_{x\to 0^+} [2-x]$

۵۲. $\lim_{x\to -3^-} [x]$

۵۳. هزینهٔ توقف اتومبیل در یک پارکینگ برای هر ساعت یا کمتر از آن برابر است با ۱٫۵ دلار. نمودار تابع $C(t)$ را که بیانگر هزینهٔ توقف برای $t$ ساعت است رسم کنید. به‌ازای کدام مقادیر $t$، $C(t)$ حد دارد؟ به‌ازای عدد دلخواه $t_0 > 0$، مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{t\to t_0^-} C(t)$ و $\lim_{t\to t_0^+} C(t)$.

۵۴. اگر $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$، مطلوب است $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ درصورتی که (آ) $f$ زوج و (ب) $f$ فرد باشد.

۵۵. اگر $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$، مطلوب است محاسبهٔ

(آ) $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

(پ) $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$ (ت) $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$

## ۴.۱ پیوستگی

اتومبیلی که در یک بزرگراه در حال حرکت است فاصله‌اش از نقطهٔ آغاز حرکت به‌گونه‌ای پیوسته به‌زمان بستگی دارد، به‌این معنی که در بازه‌های زمانی کوتاه، تغییرات این فاصله کوچک است. ولی همهٔ این کمیت‌ها به این طریق تغییر نمی‌کنند. وقتی اتومبیلی را در یک پارکینگ که نرخ آن برابر است با «۲ دلار برای یک ساعت یا کمتر»، پارک می‌کنید هزینهٔ توقف در ساعت اول همان ۲ دلار است، ولی به‌محض پایان یافتن ساعت

اول، این هزینه ناگهان به ۴ دلار جهش می‌کند. می‌گوییم تابعی که هزینهٔ توقف را به‌مدت زمان توقف وابسته می‌کند، رأس ساعت‌ها **ناپیوسته** است. دراین بخش، پیوستگی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم چگونه می‌توان گفت که تابعی پیوسته است یا نه. همچنین، چند ویژگی مهم توابع پیوسته را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

## پیوستگی در یک نقطه

قلمرو اکثر توابعی که با آنها برخورد می‌کنیم یا بازه هستند یا اجتماع تعدادی بازهٔ جدا از هم. نقطهٔ $P$ متعلق به‌قلمرو را یک **نقطهٔ درونی** قلمرو می‌نامیم هرگاه این نقطه به‌بازهٔ **بازی** واقع در قلمرو تعلق داشته باشد. اگر $p$ نقطه‌ای درونی نباشد، آن را یک **نقطهٔ انتهایی** قلمرو می‌نامیم. مثلاً قلمرو تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ بازهٔ بستهٔ $[-2, 2]$ است که از نقاط درونی $]-2, 2[$، نقطهٔ انتهایی چپ $-2$ و نقطهٔ انتهایی راست $2$ تشکیل شده است. قلمرو تابع $g(x) = 1/x$ اجتماع بازه‌های باز $]-\infty, 0[$ و $]0, \infty[$ است و تماماً از نقاط درونی تشکیل شده است. توجه داشته باشید که گرچه $0$ یک نقطهٔ انتهایی هر یک از این دو بازه است، ولی متعلق به‌قلمرو $g$ نیست.

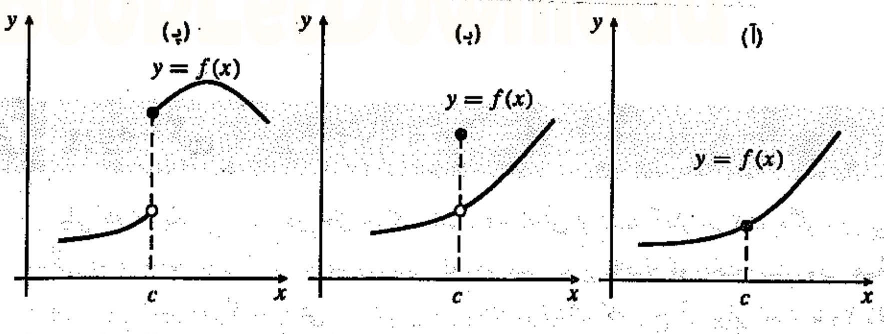
**تعریف ٤** **پیوستگی در یک نقطهٔ درونی**

می‌گوییم تابع $f$ در $c$، یک نقطهٔ درونی قلمرو خود، **پیوسته** است هرگاه

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

اگر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود نباشد یا موجود باشد ولی با $f(c)$ برابر نباشد، می‌گوییم $f$ در $c$ **ناپیوسته** است.

اگر توجه خود را به‌نمودارها معطوف کنیم، $f$ در نقطهٔ درونی $c$ هنگامی پیوسته است که نمودار آن در نقطهٔ $(c, f(c))$ پارگی نداشته باشد. به‌عبارت دیگر بتوانیم بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، نمودار آن را هنگام گذر از این نقطه رسم کنیم. شکل ۱۷.۱ را درنظر بگیرید. در قسمت (آ)، $f$ در $c$ پیوسته است. در قسمت (ب)، $f$ در $c$ ناپیوسته است، زیرا $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. در قسمت (پ)، $f$ در $c$ ناپیوسته است، زیرا $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد. در هر دو قسمت (ب) و (پ)، نمودار $f$ در $x = c$ پارگی دارد.




**شکل ۱۷.۱** (آ) $f$ در $c$ پیوسته است (ب) $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ (پ) $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد

با وجود اینکه یک تابع نمی‌تواند در نقاط انتهایی قلمرو خود حد داشته باشد، ولی می‌تواند در این نقاط دارای حد یکطرفه باشد. اکنون تعریف پیوستگی را گسترش می‌دهیم تا این وضعیت‌ها را نیز پوشش دهد.

**تعریف ۵** **پیوستگی راست و چپ**

می‌گوییم $f$ در $c$ از راست پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

می‌گوییم $f$ در $c$ از چپ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

**مثال ۱** تابع هویساید $H(x)$ که نمودارش در شکل ۱۸.۱ نشان داده شده است در هر نقطهٔ $x$ غیر از صفر پیوسته است. در ۰ از راست پیوسته است ولی از چپ پیوسته نیست.

وابستگی بین پیوستگی و پیوستگی‌های یکطرفه را در قضیهٔ زیر آورده‌ایم.

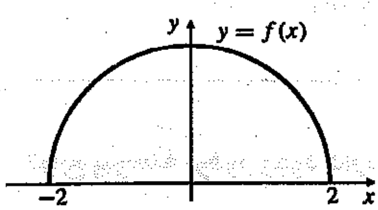
**قضیه ۵** تابع $f$ در $c$ پیوسته است اگر و فقط اگر در $c$ هم از راست پیوسته باشد و هم از چپ.

**تعریف ۶** **پیوستگی در نقاط انتهایی**

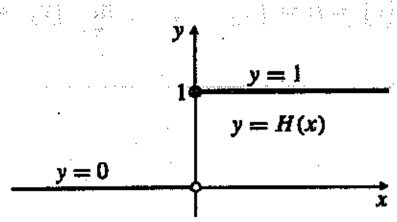
اگر $c$ یک نقطهٔ انتهایی چپ قلمرو $f$ باشد می‌گوییم $f$ در $c$ پیوسته است هرگاه در $c$ از راست پیوسته باشد.

اگر $c$ یک نقطهٔ انتهایی راست قلمرو $f$ باشد می‌گوییم $f$ در $c$ پیوسته است هرگاه در $c$ از چپ پیوسته باشد.

**مثال ۲** قلمرو تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ بازهٔ $[-2 , 2]$ است. $f$ در نقطهٔ انتهایی راست ۲ پیوسته است زیرا در آنجا از چپ پیوسته است، یعنی به‌این سبب که $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 = f(2)$. $f$ در نقطهٔ انتهایی چپ ۲− پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$. البته $f$ در هر نقطهٔ درونی قلمرواش نیز پیوسته است. اگر $-2 < c < 2$، آنگاه $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \sqrt{4 - c^2} = f(c)$. (شکل ۱۹.۱ را ببینید.)




شکل ۱۹.۱ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ در هر نقطهٔ قلمرواش پیوسته است




شکل ۱۸.۱ تابع هویساید

## پیوستگی بر بازه‌ها

مفهوم پیوستگی در یک نقطه را تعریف کردیم. مهمتر از آن، مفهوم پیوستگی بر بازه‌هاست.

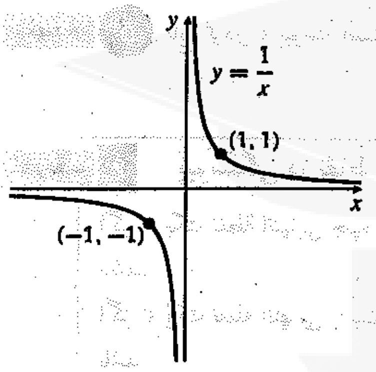
**تعریف ۷ پیوستگی بر بازه‌ها**

می‌گوییم تابع $f$ بر بازهٔ $I$ پیوسته است هرگاه $f$ در هر نقطهٔ $I$ پیوسته باشد. می‌گوییم $f$ تابعی پیوسته است هرگاه $f$ در هر نقطهٔ قلمرواش پیوسته باشد.

**مثال ۳** تابع $f(x) = \sqrt{x}$ تابعی پیوسته است. قلمرو این تابع $[\circ, \infty[$ است. این تابع در نقطهٔ انتهایی چپ، یعنی $\circ$، پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است. همچنین، $f$ در هر نقطهٔ $c > \circ$ پیوسته است زیرا $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

■

**مثال ٤** تابع $g(x) = ۱/x$ نیز تابعی پیوسته است. در وهلهٔ اول ممکن است به‌این سبب که نمودار تابع در $x = \circ$ پاره شده است این ادعا نادرست به‌نظر برسد. (شکل ۲۰.۱ را ببینید.) ولی نقطهٔ $\circ$ متعلق به‌قلمرو $g$ نیست و از این‌رو، ترجیح می‌دهیم بگوییم $g$ در این نقطه نامعین است تا بگوییم ناپیوسته است. (بعضی از مؤلفان دراین وضع می‌گویند $g$ در $x = \circ$ ناپیوسته است.) اگر بنا باشد $g(\circ)$ را برابر با عدد معینی مثلاً $\circ$ تعریف کنیم، دراین‌صورت خواهیم گفت $g(x)$ در $\circ$ ناپیوسته است. به‌هیچ وجه نمی‌توان $g(\circ)$ را طوری تعریف کرد که $g$ در $\circ$ پیوسته بشود.




شکل ۲۰.۱ $\frac{1}{x}$ بر قلمرو خود پیوسته است

■

**مثال ۵** تابع بزرگترین عدد صحیح، یعنی $\lfloor x \rfloor$، بر هر بازهٔ $[n, n+۱[$ که در آن $n$ عددی صحیح است، پیوسته است. (شکل ۱٦.۱ را ببینید.) این تابع در هر عدد صحیح $n$ از راست پیوسته و از چپ ناپیوسته است و از این‌رو، در اعداد صحیح ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to n+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor \quad , \quad \lim_{x\to n-} \lfloor x \rfloor = n - ۱ \neq n = \lfloor n \rfloor$$

■

## توابع پیوسته بوفور وجود دارند

توابع زیر، هر جا معین باشند پیوسته‌اند:

(آ) چندجمله‌ای‌ها

(ب) توابع گویا
(پ) توان‌های گویای $x$، یعنی $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$
(ت) توابع سینوس، کوسینوس، تانژانت، سکانت، کوسکانت و کوتانژانت که در بخش پ.۷ تعریف شدند.
(ث) تابع قدرمطلق، یعنی $|x|$.

قضیهٔ ۳ در بخش ۲.۱ به‌ما اطمینان می‌دهد که هر چندجمله‌ای در هر نقطهٔ خط حقیقی و هر تابع گویا در هر نقطهٔ قلمرو خود (که متشکل است از همهٔ اعداد حقیقی جز تعدادی متناهی از آنها که مخرج را صفر می‌کنند) پیوسته است. اگر $m$ و $n \neq 0$ دو عدد صحیح باشند، تابع $x^{m/n}$ به‌ازای هر عدد مثبت $x$ معین است. البته اگر $n$ فرد باشد، این تابع به‌ازای هر عدد منفی $x$ نیز معین است. قلمرو تابع $x^{m/n}$ حاوی ۰ است اگر و فقط اگر $m/n \geq 0$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد اگر اعمال جبری گوناگون را بر توابع پیوسته اعمال کنیم، توابع حاصل نیز پیوسته‌اند.

### قضیه ۶ اعمال گوناگون بر توابع پیوسته

اگر توابع $f$ و $g$ بر بازه‌ای که حاوی $c$ است معین و در $c$ پیوسته باشند، آنگاه توابع زیر نیز در $c$ پیوسته‌اند:

۱. مجموع $f+g$ و تفاضل $f-g$،
۲. حاصلضرب $fg$،
۳. مضرب ثابت $f$، یعنی $kf$ که در آن $k$ عددی دلخواه است،
۴. خارج‌قسمت $f/g$ (مشروط بر اینکه $g(c) \neq 0$) و
۵. ریشهٔ $n$ ام، یعنی $(f(x))^{1/n}$، مشروط بر اینکه به‌ازای $n$های زوج داشته باشیم $f(c) > 0$.

اثبات با استفاده از قواعدِ گوناگون حد که در قضیهٔ ۲ در بخش ۲.۱ ارائه شدند، انجام می‌پذیرد. مثلاً

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = f(c)+g(c)$$

و از این‌رو، $f+g$ پیوسته است.

### قضیه ۷ ترکیب دو تابع پیوسته تابعی پیوسته است

اگر $f(g(x))$ بر بازه‌ای که حاوی $c$ است معین و $f$ در $L$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to c} g(x) = L$، آنگاه

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

در حالت خاص، اگر $g$ در $c$ پیوسته باشد (که در نتیجه، $L = g(c)$) آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ نیز در $c$ پیوسته است و

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

(تمرین ۳۷ در بخش ۵.۱ را ببینید.)

**مثال ۶** توابع زیر در هر نقطهٔ قلمرو خود پیوسته‌اند:

(آ) $3x^2 - 2x$ (ب) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ (پ) $|x^2-1|$

(ت) $\sqrt{x}$ (ث) $\sqrt{x^2-2x-5}$ (ج) $\dfrac{|x|}{\sqrt{|x+2|}}$

## گسترش پیوسته و ناپیوستگی‌های رفع شدنی

همان‌طور که در بخش ۲.۱ دیدیم یک تابع گویا می‌تواند حتی در نقطه‌ای که مخرج را صفر می‌کند دارای حد باشد. اگر $f(c)$ معین نباشد ولی $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، می‌توانیم تابع جدیدی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ متعلق به قلمرو } f \text{ باشد} \\ L & \text{اگر } x = c \end{cases}$$

$F(x)$ در $x = c$ پیوسته است. این تابع را **گسترش پیوستهٔ** $f(x)$ به $x = c$ می‌نامیم. اگر $f$ گویا باشد، گسترش‌های پیوستهٔ $f$ را معمولاً با حذف عوامل مشترک صورت و مخرج به‌دست می‌آوریم.

**مثال ۷** نشان دهید که $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ گسترش پیوسته‌ای به $x = 1$ دارد و این گسترش را بیابید.

*حل.* گرچه $f(1)$ معین نیست ولی به‌ازای $x \neq 1$ داریم

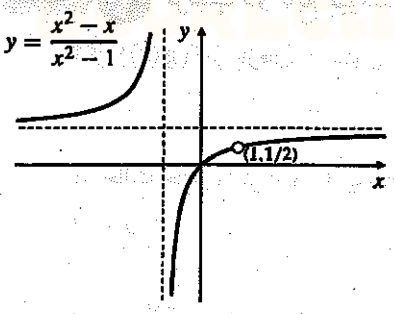
$$f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$$

تابع

$$F(x) = \frac{x}{x+1}$$

به‌ازای $x \neq 1$ برابر است با $f(x)$ و در عین‌حال در $x = 1$ پیوسته است و مقدارش در این نقطه $\frac{1}{2}$ است. نمودار $f$ در شکل ۲۱.۱ نشان داده شده است. گسترش پیوستهٔ $f(x)$ به $x = 1$ عبارت است از $F(x)$. نمودار $F(x)$ همان نمودار $f(x)$ است، با این تفاوت که در $(1, 1/2)$ سوراخ ندارد.

اگر تابع $f$ در نقطه‌ای مانند $a$ نامعین یا ناپیوسته باشد ولی بتوان آن را **فقط در نقطهٔ** $a$ به‌گونه‌ای تعریف (یا مجدداً تعریف) کرد که در آنجا پیوسته بشود، می‌گوییم $f$ در $a$ یک **ناپیوستگی رفع‌شدنی** دارد. تابع $f$ در مثال بالا یک ناپیوستگی رفع‌شدنی در $x = 1$ دارد. برای رفع آن، تعریف می‌کنیم $f(1) = 1/2$.



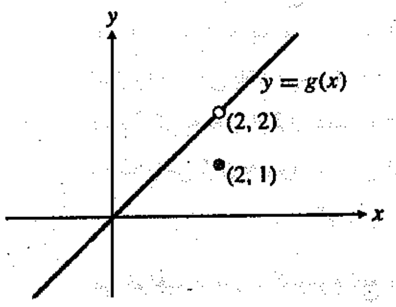

**شکل ۲۱.۱** این تابع، گسترش پیوسته به $x = 1$ دارد

**مثال ۸** تابع $g(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ در $x = 2$ دارای

یک ناپیوستگی رفع‌شدنی است. برای رفع آن، $g(2)$ را مجدداً تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $g(2) = 2$. (شکل ۲۲.۱ را ببینید.)

## توابع پیوستهٔ معین بر بازه‌های بستهٔ کراندار

توابع پیوسته‌ای که بر *بازه‌های بستهٔ کراندار* معین‌اند ویژگی‌های خاصی دارند و به‌همین سبب در ریاضیات و کاربردهای آن بسیار سودمند هستند. دو ویژگی از این ویژگی‌ها را در اینجا مورد بحث قرار می‌دهیم. گرچه این ویژگی‌ها ممکن است بدیهی به‌نظر بیایند، ولی بسیار ظریفتر و هوشمندانه‌تر از نتایجی هستند که قبلاً و در همین فصل دربارهٔ حد بیان شده‌اند. برای اثبات آنها (که در پیوست III آمده است[1]) مطالعهٔ دقیق پیامدهای ویژگی کمالِ اعداد حقیقی لازم است.




**شکل ۲۲.۱** تابع $g$ در نقطهٔ ۲ ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد

ویژگی اول می‌گوید تابعی مانند $f(x)$ که بر بازهٔ بستهٔ کرانداری مانند $[a , b]$ معین است حتماً دارای **مقدار ماکسیموم مطلق و مقدار مینیموم مطلق** است. به‌عبارت دیگر مقادیر $f(x)$ به‌ازای همهٔ نقاط این بازه بین مقادیر $f(x)$ به‌ازای دو نقطهٔ خاص این بازه قرار دارند. نمودار چنین $f$ ای دارای بالاترین و پایین‌ترین نقطه است.

**قضیهٔ ۸** قضیهٔ ماکس ـ مین

اگر $f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ کراندار $[a , b]$ معین باشد، دو عدد $p$ و $q$ متعلق به $[a , b]$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $x$ متعلق به $[a , b]$،

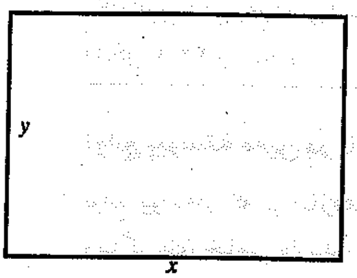
$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

بدین‌سان، $f$ دارای (مقدار) مینیموم مطلق $m = f(p)$ و (مقدار) ماکسیموم مطلق $M = f(q)$ است که به‌ترتیب در $p$ و $q$ اختیار می‌شوند.

بسیاری ازمسائل مهم ریاضیات و کاربردهای آن منجر می‌شوند به‌یافتن مقادیر ماکسیموم و مینیموم توابع. برای حل این نوع مسائل، حساب دیفرانسیل و انتگرال تعدادی ابزار بسیار سودمند در اختیار ما می‌گذارد. توجه داشته باشید که قضیهٔ قبل صرفاً حکم می‌کند مقادیر ماکسیموم و مینیموم *وجود دارند*، ولی این قضیه به‌ما نمی‌گوید چگونه آنها را بیابیم. در فصل ۴ به‌شرح و بسط فنون محاسبهٔ مقادیر ماکسیموم و مینیموم توابع خواهیم پرداخت. موقتاً می‌توانیم تعدادی مسألهٔ ساده دربارهٔ ماکسیموم و مینیموم را که حاوی توابع درجهٔ دوم هستند با استفاده از ایجاد مجذور کامل و بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کنیم.

**مثال ۹** بیشترین مساحت یک ناحیهٔ مستطیلی شکل که محیط آن ۲۰۰ متر باشد کدام است؟

۱. پیوست‌های این کتاب در پایان جلد دوم آورده شده‌اند.




شکل ۲۳.۱ محوطهٔ مستطیلی شکل: مساحت $= xy$، محیط $= ۲x + ۲y$

*حل.* اگر اضلاع این ناحیه $x$ متر و $y$ متر باشند (شکل ۲۳.۱)، آنگاه محیط و مساحت آن به‌ترتیب برابرند با $P = ۲x + ۲y$ (متر) و $A = xy$ (متر مربع). با توجه به $P = ۲۰۰$، می‌بینیم که $x + y = ۱۰۰$ یا $y = ۱۰۰ - x$. چون هیچ‌یک از اضلاع نمی‌تواند منفی باشد، پس $x$ به‌بازهٔ بستهٔ کراندار $[۰ , ۱۰۰]$ تعلق دارد. اگر به‌جای $y$ قرار دهیم $۱۰۰ - x$، آنگاه مساحت مورد بحث را می‌توان به‌صورت تابعی از $x$ بیان کرد:

$$A = x(۱۰۰ - x) = ۱۰۰x - x^۲$$

می‌خواهیم مقدار ماکسیموم تابع درجهٔ دوم $A(x) = ۱۰۰x - x^۲$ را بر بازهٔ $[۰ , ۱۰۰]$ بیابیم. قضیهٔ ۸ به‌ما اطمینان می‌دهد که این ماکسیموم وجود دارد.

برای یافتن ماکسیموم یاد شده، در تابع $A(x)$ مجذور کامل ایجاد می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که $x^۲ - ۱۰۰x$ دو جملهٔ اول اتحاد $x^۲ - ۱۰۰x + ۲۵۰۰ = (x - ۵۰)^۲$ است. بدین‌سان،

$$A(x) = ۲۵۰۰ - (x - ۵۰)^۲$$

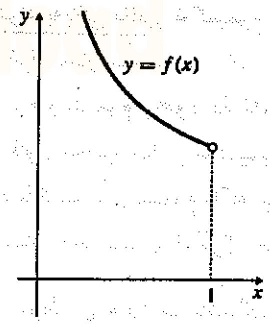
اکنون مشاهده می‌کنیم که $A(۵۰) = ۲۵۰۰$ و به‌ازای $x \neq ۵۰$ داریم $A(x) < ۲۵۰۰$، زیرا در این حالت باید عدد مثبت $(x - ۵۰)^۲$ را از ۲۵۰۰ کم کنیم. بنابراین، مقدار ماکسیموم $A(x)$ برابر است با ۲۵۰۰. وسیعترین محوطه، ۲۵۰۰ متر مربع مساحت دارد و شکل آن مربعی به‌ابعاد $x = y = ۵۰$ متر است. ■

از قضیهٔ ۸ نتیجه می‌شود که هر تابع پیوستهٔ معین بر یک بازهٔ بستهٔ کراندار، تابعی **کراندار** است، یعنی نمی‌تواند مقادیر مثبت یا منفیِ بدلخواه بزرگ اختیار کند. به‌عبارت دیگر عددی مانند $K$ هست به‌طوری که $|f(x)| \leq K$ یا

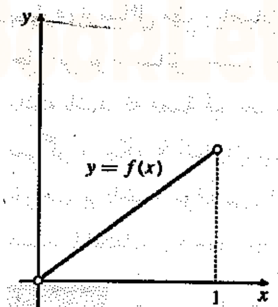
$$-K \leq f(x) \leq K$$

در حقیقت می‌توانیم از دو عدد $|f(p)|$ و $|f(q)|$ عدد بزرگتر را $K$ اختیار کنیم.

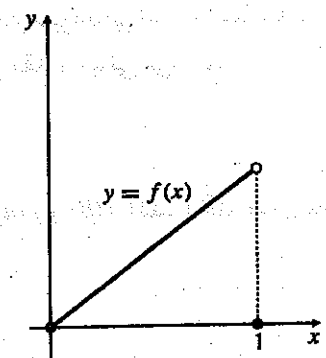
اگر تابع $f$ پیوسته یا بازه بسته نباشد، نتایج قضیهٔ ۸ الزاماً درست نیستند. برای اینکه ببینید چگونه ممکن است این نتایج نادرست باشند به‌شکل‌های ۲۴.۱ تا ۲۷.۱ مراجعه کنید.



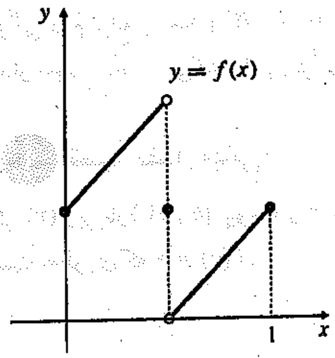

**شکل ۲۴.۱** $f(x) = ۱/x$ بر بازهٔ باز $]۰ , ۱[$ پیوسته است. این تابع کراندار نیست و مقدار ماکسیموم و مینیموم ندارد




**شکل ۲۵.۱** $f(x) = x$ بر بازهٔ باز $]۰ , ۱[$ پیوسته است. این تابع کراندار است ولی نه مقدار ماکسیموم دارد و نه مقدار مینیموم




**شکل ۲۶.۱** این تابع بر بازهٔ بستهٔ کراندار [۰ , ۱] معین است، ولی در نقطهٔ انتهایی $x = ۱$ ناپیوسته است. مقدار مینیمم دارد، ولی مقدار ماکسیموم ندارد



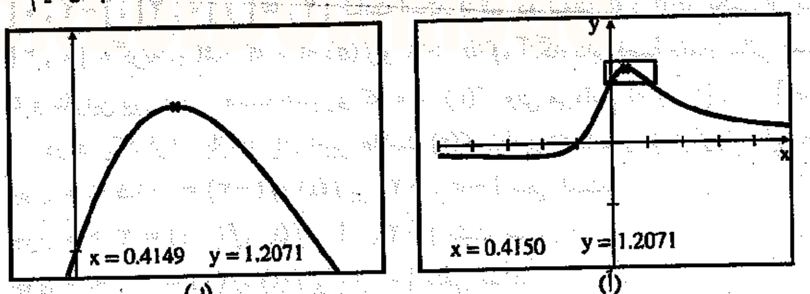

**شکل ۲۷.۱** این تابع در یک نقطهٔ درونی قلمرو خود، یعنی بازهٔ بستهٔ کراندار [۰ , ۱]، ناپیوسته است. این تابع کراندار است، ولی نه مقدار ماکسیموم دارد و نه مقدار مینیمم

## یافتن ماکسیموم و مینیموم از روی نمودار

**تذکر.** با استفاده از ابزار ترسیم نمودار می‌توان مقادیر ماکسیموم و مینیموم توابع را بر بازه‌هایی که پیوسته‌اند یافت. بویژه امکانات "zoom box" و "trace" که در ماشین‌حساب‌های رسام وجود دارند سودمند هستند. شکل ۲۸.۱(آ) نمودار

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

را روی پنجرهٔ $-5 \le x \le 5$ ، $-2 \le y \le 2$ نشان می‌دهد. به‌نظر می‌رسد که $f$ مقدار ماکسیموم خود را نزدیک $x = 0.5$ و مقدار مینیموم خود را نزدیک $x = -2.5$ اختیار می‌کند. شکل ۲۸.۱(ب) که تمام صفحه را پر کرده است، بزرگ شدهٔ قسمتی از شکل (آ) را نشان می‌دهد که در یک مستطیل (به‌نام zoom box) محصور شده است. ردیابی این خم تا بالاترین نقطه، برآورد دقیقتری از مقدار ماکسیموم در اختیار ما می‌گذارد و نشان می‌دهد مقدار ماکسیموم $f(x)$ در $x = 0.4149$ حاصل می‌شود و تا ۴ رقم اعشاری برابر است با $1.2071$. تمرکز بیشتر به‌ما امکان می‌دهد تا به‌هر درجه از دقت که بخواهیم دست‌یابیم.



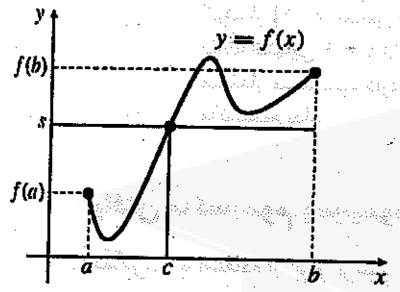

**شکل ۲۸.۱** با استفاده از "zoom box"، قسمتی از خم (آ) را در نزدیکی مقدار ماکسیموم به‌گونه‌ای بزرگ می‌کنیم که، بدون تبدیل خم به‌خطی راست، تمام صفحهٔ (ب) را پر کند

ویژگی دوم توابع پیوسته‌ای که بر بازه‌های بستهٔ کراندار معین‌اند این است که همهٔ مقادیر حقیقیِ واقع بین هر دو مقدار خود را اختیار می‌کنند. این ویژگی را **ویژگی مقدار میانی** می‌نامیم.

**قضیهٔ ۹ قضیهٔ مقدار میانی**

اگر $f(x)$ بر بازهٔ $[a\,,b]$ پیوسته و $s$ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه عددی مانند $c$ متعلق به $[a\,,b]$ هست به‌طوری که $f(c)=s$.

در حالت خاص، هر تابع پیوسته‌ای که بر یک بازهٔ بستهٔ کراندار معین باشد همهٔ مقادیر بین مینیموم و ماکسیموم خود را (که به‌ترتیب $m$ و $M$ می‌نامیم) اختیار می‌کند و از این‌رو، برد آن نیز یک بازهٔ بستهٔ کراندار، یعنی $[m\,,M]$ است.




**شکل ۲۹.۱** تابع پیوستهٔ $f$ مقدار $s$ را در نقطه‌ای مانند $c$ بین $a$ و $b$ اختیار می‌کند

شکل ۲۹.۱ وضعیت قضیهٔ ۹ را نشان می‌دهد. نقاط $(a\,,f(a))$ و $(b\,,f(b))$ در دو طرف خط افقی $y=s$ قرار دارند. چون نمودار $y=f(x)$ بدون پارگی است، برای رفتن از نقطهٔ اول به‌نقطهٔ دوم باید این خط را قطع کند. در شکل، این نمودار فقط یک بار، به‌ازای $x=c$، خط افقی $y=s$ را قطع می‌کند. اگر خط $y=s$ کمی بالاتر باشد، سه نقطهٔ تقاطع با خم خواهد داشت و از این‌رو، سه مقدار ممکن برای $c$ وجود دارد.

قضیهٔ ۹ دلیلی بر این امر است که چرا نمودار تابعی که بر بازه‌ای نظیر $I$ پیوسته است نمی‌تواند پارگی داشته باشد. نمودار باید همبند باشد، یعنی یک تکه، بدون پارگی و جهش.

**مثال ۱۰** بازه‌هایی را بیابید که $f(x)=x^{3}-4x$ بر آنها مثبت یا منفی است.

*حل.* چون $f(x)=x(x^{2}-4)=x(x-2)(x+2)$، پس $f(x)$ فقط در $x=0$، $x=2$ و $x=-2$ صفر می‌شود. چون $f$ بر کل خط حقیقی پیوسته است، علامت آن بر هر یک از بازه‌های $]-\infty\,,-2[$، $]-2\,,0[$، $]0\,,2[$ و $]2\,,\infty[$ ثابت است. (اگر دو نقطهٔ $a$ و $b$ در یکی از این بازه‌ها، مثلاً در $]0\,,2[$ به‌گونه‌ای باشند که $f(a)<0$ و $f(b)>0$، آنگاه بنابر قضیهٔ مقدار میانی عددی مانند $c$ بین $a$ و $b$ و بنابراین بین $0$ و $2$ هست به‌طوری که $f(c)=0$. ولی می‌دانیم که $f$ در $]0\,,2[$ صفر ندارد.)

در هر یک از این بازه‌ها برای تعیین علامت $f(x)$ نقطه‌ای انتخاب و مقدار $f$ را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

چون $f(-3)=-15<0$، $f(x)$ بر $]-\infty\,,-2[$ منفی است.

چون $f(-1)=3>0$، $f(x)$ بر $]-2\,,0[$ مثبت است.

چون $f(1)=-3<0$، $f(x)$ بر $]0\,,2[$ منفی است.

چون $f(3)=15>0$، $f(x)$ بر $]2\,,\infty[$ مثبت است. ■

## یافتن ریشه‌های معادله‌ها

بعضی از ابزارهای سودمندِ فراوانی که حساب دیفرانسیل و انتگرال در اختیار ما می‌گذارد این امکان را فراهم می‌آورند تا جواب‌های معادله‌هایی را که به‌صورت $f(x) = 0$ هستند تا هر درجه از تقریب که بخواهیم محاسبه کنیم. هر چنین جوابی را یک ریشهٔ معادله یا یک صفر تابع $f$ می‌نامیم. استفاده از این ابزارها نیازمندِ اطلاع قبلی از این امر است که معادلهٔ مورد بحث حتماً در بازه‌ای جواب دارد. قضیهٔ مقدار میانی می‌تواند این نوع اطلاعات را به‌دست دهد.

**مثال ۱۱** نشان دهید که معادلهٔ $x^3 - x - 1$ در بازهٔ $[1, 2]$ جواب دارد.

*حل.* تابع $f(x) = x^3 - x - 1$ یک چندجمله‌ای است و از این‌رو، همه جا پیوسته است. ملاحظه می‌کنیم که $f(1) = -1$ و $f(2) = 5$. چون ۰ بین ۱− و ۵ قرار دارد، قضیهٔ مقدار میانی اطمینان می‌دهد که عددی مانند $c$ متعلق به $[1, 2]$ هست به‌طوری که $f(c) = 0$. ■

یکی از روش‌های یافتن صفرِ تابعی که پیوسته است و علامتش در یک بازه عوض می‌شود این است که این بازه را چندین بار نصف کنیم و هر بار نیمه‌ای از بازهٔ قبل را که $f$ در دو انتهای آن دو علامت مخالف دارد و از این‌رو حاوی ریشه است انتخاب کنیم. این روش تا اندازه‌ای کند است. مثلاً اگر طول بازهٔ اصلی ۱ باشد بعد از ۱۱ بار نصف کردن به‌بازه‌ای به‌طول کمتر از ۰٫۰۰۰۵ می‌رسیم (زیرا $\frac{1}{0.0005} = 2000 < 2^{11}$) و بدین‌سان تازه مطمئن می‌شویم که ریشه را فقط تا سه رقم اعشاری درست یافته‌ایم. ولی در عوض، این روش نیازمند سخت‌افزار گرافیکی نیست و بآسانی توسط ماشین‌حساب قابل اجراست، البته ترجیحاً ماشین‌حسابی که بتوان فرمول تابع را در آن برنامه‌ریزی کرد.

**مثال ۱۲** (روش نصف کردن) معادلهٔ $x^3 - x - 1$ در مثال ۱۱ را با استفاده از نصف کردن‌های متوالی تا سه رقم اعشاری حل کنید.

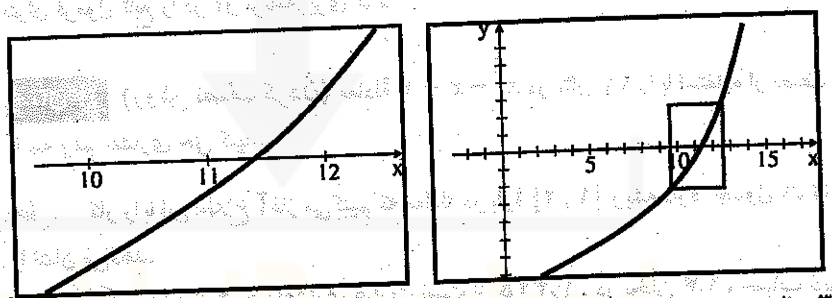
*حل.* کار را با این اطلاع آغاز می‌کنیم که معادله در بازهٔ $[1, 2]$ ریشه دارد. جدول ۶، نتایج نصف کردن‌ها را نشان می‌دهد.

ریشهٔ گرد شده تا ۳ رقم اعشاری عبارت است از ۱٫۳۲۵ . در بخش ۶.۴، حساب دیفرانسیل و انتگرال روش‌هایی سریعتر از آنچه در بالا ارائه شد برای حل معادلات در اختیار ما می‌گذارد. ■

با استفاده از ابزار رسم نمودار می‌توانید معادله‌ای نظیر $f(x) = 0$ را حل کنید. نمودار $f(x)$ را بر بازه‌ای به‌قدر کافی بزرگ که بتوان صفرهایش را در آن تشخیص داد، رسم کنید. سپس هر بار یکی از صفرها را برگزینید و با بزرگ کردنِ مداوم قسمتی از پنجرهٔ نظاره‌گر در نزدیکی‌های آن صفر، روی آن متمرکز شوید تا کل پنجرهٔ نظاره‌گر را پر کند. (شکل ۱۰.۳۰ را ببینید.) این حالت را حفظ کنید تا زمانی که بتوانید صفر مورد بحث را با هر تعداد رقم اعشاری که بخواهید (یا ماشین‌حساب یا کامپیوتر اجازه دهد) تخمین بزنید.

**جدول ۶.** روش نصف کردن برای $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

| وسط بازه | بازه‌ای که ریشه در آن است | $f(x)$ | $x$ | شمارهٔ نصف کردن |
|---|---|---|---|---|
| | | −۱ | ۱ | |
| ۱٫۵ | [۱ , ۲] | ۵ | ۲ | |
| ۱٫۲۵ | [۱ , ۱٫۵] | ۰٫۸۷۵۰ | ۱٫۵ | ۱ |
| ۱٫۳۷۵ | [۱٫۲۵ , ۱٫۵] | −۰٫۲۹۶۹ | ۱٫۲۵ | ۲ |
| ۱٫۳۱۲۵ | [۱٫۲۵ , ۱٫۳۷۵] | ۰٫۲۲۴۶ | ۱٫۳۷۵ | ۳ |
| ۱٫۳۴۳۸ | [۱٫۳۱۲۵ , ۱٫۳۷۵] | −۰٫۰۵۱۵ | ۱٫۳۱۲۵ | ۴ |
| ۱٫۳۲۸۲ | [۱٫۳۱۲۵ , ۱٫۳۴۳۸] | ۰٫۰۸۲۶ | ۱٫۳۴۳۸ | ۵ |
| ۱٫۳۲۰۴ | [۱٫۳۱۲۵ , ۱٫۳۲۸۲] | ۰٫۰۱۴۷ | ۱٫۳۲۸۲ | ۶ |
| ۱٫۳۲۴۳ | [۱٫۳۲۰۴ , ۱٫۳۲۸۲] | −۰٫۰۱۸۶ | ۱٫۳۲۰۴ | ۷ |
| ۱٫۳۲۶۳ | [۱٫۳۲۴۳ , ۱٫۳۲۸۲] | −۰٫۰۰۱۸ | ۱٫۳۲۴۳ | ۸ |
| ۱٫۳۲۵۳ | [۱٫۳۲۴۳ , ۱٫۳۲۶۳] | ۰٫۰۰۶۵ | ۱٫۳۲۶۳ | ۹ |
| ۱٫۳۲۴۸ | [۱٫۳۲۴۳ , ۱٫۳۲۵۳] | ۰٫۰۰۲۵ | ۱٫۳۲۵۳ | ۱۰ |
| ۱٫۳۲۴۶ | [۱٫۳۲۴۳ , ۱٫۳۲۴۸] | ۰٫۰۰۰۳ | ۱٫۳۲۴۸ | ۱۱ |
| | [۱٫۳۲۴۶ , ۱٫۳۲۴۸] | −۰٫۰۰۰۷ | ۱٫۳۲۴۶ | ۱۲ |




**شکل ۳۰.۱** تابع رسم شده در پنجرهٔ سمت راست دارای ریشه‌ای بین ۱۱ و ۱۲ است. مستطیل کوچک (یعنی zoom box) را طوری بزرگ کرده‌ایم که در پنجرهٔ سمت چپ، صفحه را پر کند و این امکان می‌دهد که ریشه را در حدود ۱۱٫۴ تخمین بزنیم. بزرگ کردن‌های متوالی، دقت بیشتری به‌دست می‌دهند

در بسیاری از ماشین‌حساب‌های برنامه‌پذیر و بسته‌های نرم‌افزارهای جبر کامپیوتری، دستورهایی برای حل معادله‌ها گنجانده شده است. مثلاً می‌توان دستور fsolve میپل را برای یافتن ریشهٔ حقیقی $x^3 - x - 1 = 0$ که در [۱ , ۲] قرار دارد به‌کار برد. (مثال ۱۱ را ببینید.)

```
> fsolve (x ^ 3-x-1 = 0 , x = 1..2) ;
                         1.324717957
```

**تذکر.** قضیهٔ ماکس ـ مین و قضیهٔ مقدار میانی، دو مثال از قضیه‌هایی هستند که ریاضیدانان آنها را **قضیه‌های وجودی** می‌نامند. این نوع قضیه‌ها بر وجود چیزی حکم می‌کنند بدون اینکه نحوهٔ یافتن آن را ارائه دهند. گاهی دانشجویان از این امر شکوه دارند که چرا ریاضیدانان بیش از اندازه نگران این هستند که آیا مسأله‌ای جواب دارد یا نه، ولی به‌اندازهٔ کافی نگران یافتن این جواب نیستند. استدلال دانشجویان این است که: «اگر بتوانیم جواب مسأله‌ای را محاسبه کنیم، دراین‌صورت نباید به‌هیچ‌وجه دربارهٔ وجود جواب نگران باشیم». ولی این منطق نادرستی است. فرض کنید این مسأله را مطرح کنیم که: «بزرگترین عدد صحیح مثبت را بیابید.» البته این مسأله دارای جواب نیست. بزرگترین عدد صحیح مثبت وجود ندارد به‌این دلیل که می‌توانیم به‌هر عدد صحیح ۱ واحد اضافه کنیم تا عدد صحیح بزرگتری به‌دست آید. با وجود این فرض کنیم نکتهٔ اخیر را فراموش کرده‌ایم و می‌خواهیم جواب را محاسبه کنیم. می‌توانیم روند زیر را در پیش بگیریم:

فرض کنیم $N$ بزرگترین عدد صحیح مثبت باشد.

چون ۱ یک عدد صحیح مثبت است، باید $N \geq 1$.

چون $N^2$ یک عدد صحیح مثبت است نمی‌تواند از بزرگترین عدد صحیح مثبت بیشتر باشد.

بنابراین، $N^2 \leq N$ و از این‌رو، $N^2 - N \leq 0$.

بدین‌سان، $N(N-1) \leq 0$ و باید $N - 1 \leq 0$.

بنابراین، $N \leq 1$.

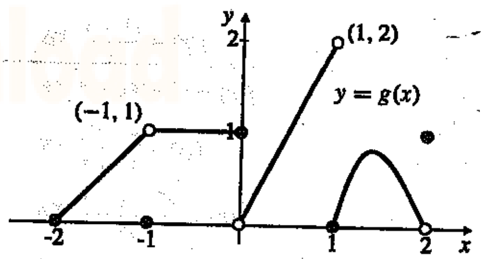
همچنین، می‌دانیم که $N \geq 1$. پس $N = 1$.

به‌این ترتیب، ۱ بزرگترین عدد صحیح مثبت است.

تنها خطایی که مرتکب شده‌ایم، پذیرفتن این فرض (در سطر اول) است که مسأله جواب دارد. یکی از دلایل اینکه ریاضیدانان به‌اثبات قضیه‌های وجودی می‌پردازند اجتناب از گرفتاری در این نوع دشواری‌های منطقی است.

## تمرینات ۴.۱

در تمرین‌های ۱ تا ۳، $g$ تابعی معین بر $[-2, 2]$ است که نمودار آن در شکل ۳۱.۱ نشان داده شده است.




شکل ۳۱.۱

۱. در هر یک از نقاط ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ کدام حکم در مورد $g$ درست است؟ (آ) پیوسته، (ب) از چپ پیوسته، (پ) از راست پیوسته و (ت) ناپیوسته.

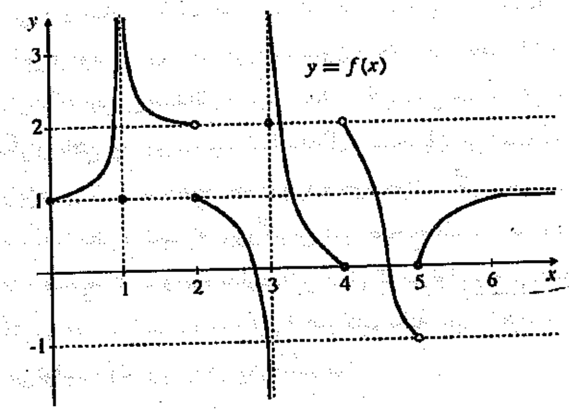
۲. تابع $g$ در کدام نقاط قلمرواش ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد و در هر یک از این نقاط چگونه باید $g$ را مجدداً تعریف کنیم تا در آنجا پیوسته بشود؟

۳. آیا $g$ بر $[-2, 2]$ ماکسیموم مطلق دارد؟ مینیموم مطلق چطور؟

۴. تابع $f$ که نمودارش در شکل ۳۲.۱ نشان داده شده است درکدام نقاط ناپیوسته است؟ درکدام‌یک از این نقاط از چپ پیوسته است؟ و درکدام یک از راست؟

۵. آیا می‌توان تابع شکل ۳۲.۱ را در نقطهٔ $x = 1$ مجدداً طوری تعریف کرد که در آنجا پیوسته بشود؟

۶. تابع $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ در $x = 0$ نه پیوسته است و نه ناپیوسته. چطور چنین چیزی امکان‌پذیر است؟




**شکل ۳۲.۱**

در تمرین‌های ۷ تا ۱۲، بگویید تابع مفروض در کدام نقاط قلمرو خود پیوسته، در کدام نقاط از چپ یا از راست پیوسته و در کدام نقاط ناپیوسته است.

۷. $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

۸. $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$

۹. $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۱۰. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 0{,}987 & x > 1 \end{cases}$

۱۱. تابع کوچکترین عدد صحیح $\lceil x \rceil$ که در مثال ۱۱ در بخش پ.۵ معرفی شد.

۱۲. تابع هزینهٔ $C(t)$ که در تمرین ۵۳ در بخش ۳.۱ معرفی شد.

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۶، تابع مفروض را چگونه در نقطهٔ داده شده تعریف کنیم تا در آنجا پیوسته بشود؟ فرمول گسترش پیوسته به‌این نقطه را بنویسید.

۱۳. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ در $x = 2$

۱۴. $\dfrac{1 + t^3}{1 - t^2}$ در $t = -1$

۱۵. $\dfrac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - t - 6}$ در $t = 3$

۱۶. $\dfrac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$ در $\sqrt{2}$

۱۷. عدد $k$ را به‌گونه‌ای بیابید که $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ k - x^2 & x > 2 \end{cases}$ تابعی پیوسته بشود.

۱۸. عدد $m$ را به‌گونه‌ای بیابید که تابع $g(x) = \begin{cases} x - m & x < 3 \\ 1 - mx & x \geq 3 \end{cases}$ به‌ازای هر $x$ پیوسته بشود.

۱۹. آیا تابع $x^2$ بر بازهٔ باز $-1 < x < 1$ ماکسیموم مطلق دارد؟ مینیموم مطلق چطور؟ توضیح دهید.

۲۰. تابع هویساید در مثال ۱ بر بازهٔ $[-1, 1]$ دارای ماکسیموم و مینیموم مطلق است، ولی بر این بازه پیوسته نیست. آیا این ناقض قضیهٔ ماکس ـ مین است؟ چرا؟

تمرین‌های ۲۱ تا ۲۴ دربارهٔ یافتن مقادیر ماکسیموم و مینیموم توابع هستند. همهٔ آنها را می‌توان با روش به‌کار رفته در مثال ۹ حل کرد.

۲۱. مجموع دو عدد نامنفی ۸ است. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصلضرب آنها کدام است؟

۲۲. مجموع دو عدد نامنفی ۸ است. (آ) کوچکترین و (ب) بزرگترین مقدار ممکن برای مجموع مجذورهای آنها کدام است؟

۲۳. یک شرکت نرم‌افزاری تخمین می‌زند که اگر $x$ برنامه‌نویس را روی پروژه‌ای به‌کار گمارد، می‌تواند محصول جدیدی را در $T$ روز که در آن

$$T = 100 - 30x + 3x^2$$

ارائه کند. این شرکت باید چند برنامه‌نویس را به‌کار گمارد تا محصول جدید در اسرع وقت کامل شود؟

۲۴. یک سازندهٔ میز تحریر برای ارسال محموله‌ای متشکل از $x$ میز به‌انبار، $245x - 30x^2 + x^3$ دلار هزینه می‌کند. برای اینکه میانگین هزینهٔ حمل‌ونقل برای هر میز تحریر به‌حداقل برسد، این شرکت باید در هر محموله چند میز بنگجاند؟

در تمرین‌های ۲۵ تا ۲۸، بازه‌هایی را بیابید که تابع $f(x)$ بر آنها مثبت یا منفی است.

۲۵. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

۲۶. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

۲۷. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

۲۸. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3}$

۲۹. نشان دهید که $f(x) = x^3 + x - 1$ بین $x = 0$ و $x = 1$ صفر دارد.

۳۰. نشان دهید که معادلهٔ $x^3 - 15x + 1 = 0$ سه جواب در بازهٔ $[-4, 4]$ دارد.

۳۱. نشان دهید که تابع $F(x) = (x-a)^۲(x-b)^۲ + x$ مقدار $(a+b)/۲$ را در نقطه‌ای مانند $x$ اختیار می‌کند.

۳۲. (یک قضیهٔ نقطهٔ ثابت) فرض کنیم $f$ بر بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ پیوسته باشد و به‌ازای هر $x$ متعلق به $[۰, ۱]$، $۰ \leq f(x) \leq ۱$. نشان دهید که عددی مانند $c$ متعلق به $[۰, ۱]$ هست به‌طوری که $f(c) = c$. ($c$ را یک نقطهٔ ثابتِ تابع $f$ می‌نامیم.) راهنمایی: اگر $f(۰) = ۰$ یا $f(۱) = ۱$، کار تمام است. درغیراین‌صورت، قضیهٔ مقدار میانی را دربارهٔ $g(x) = f(x) - x$ به‌کار ببرید.

۳۳. اگر تابع زوج $f$ در $x = ۰$ از راست پیوسته باشد، نشان دهید که دراین نقطه پیوسته است.

۳۴. اگر تابع فرد $f$ در $x = ۰$ از راست پیوسته باشد، نشان دهید که دراین نقطه پیوسته است و $f(۰) = ۰$.

در تمرین‌های ۳۵ تا ۳۸، با استفاده از ابزار رسم، مقادیر ماکسیموم و مینیموم توابع و نقاط متناظر با آنها را بیابید. در هر مورد، جواب‌ها را تا ۳ رقم اعشاری به‌دست آورید.

۳۵. $f(x) = \dfrac{x^۲ - ۲x}{x^۴ + ۱}$ بر $[-۵, ۵]$

۳۶. $f(x) = \dfrac{\sin x}{۶ + x}$ بر $[-\pi, \pi]$

۳۷. $f(x) = x^۲ + \dfrac{۴}{x}$ بر $[۱, ۳]$

۳۸. $f(x) = \sin(\pi x) + x(\cos(\pi x) + ۱)$ بر $[۰, ۱]$

در تمرین‌های ۳۹ و ۴۰، با استفاده از ابزار رسم نمودار یا ماشین‌حساب برنامه‌پذیر و با به‌کارگیری روش نصف کردن، معادله‌های داده شده را تا ۳ رقم اعشاری حل کنید. در نخستین گام کوشش کنید بازهٔ کوچکی را که مطمئناً شامل یک ریشه باشد حدس بزنید.

۳۹. $x^۳ + x - ۱ = ۰$

۴۰. $\cos x - x = ۰$

معادله‌های ۴۱ و ۴۲ را با استفاده از دستور fsolve میپل حل کنید.

۴۱. $\sin x + ۱ - x^۲ = ۰$ (دو ریشه)

۴۲. $x^۴ - x - ۱ = ۰$ (دو ریشه)

۴۳. در نرم‌افزار میپل، تفاوت بین دو دستور

```
fsolve (f,x) , solve (f,x)
```

و

```
evalf (solve (f,x))
```

را که در آن

```
f := x ^ 3-x-1 = 0
```

مورد بررسی قرار دهید. توجه داشته باشید که در اینجا هیچ بازه‌ای برای $x$ مشخص نشده است.

## ۵.۱ تعریف صوری حد[1]

تعریف غیرصوری حد که در بخش ۲.۱ ارائه شد به‌قدر کافی دقیق نیست که بتوان با استفاده از آن، نتایجی نظیر قضیه‌های ۲ تا ۴ در بخش ۲.۱ را ثابت کرد. تعریف صوری دقیقتر حد، بر ایدهٔ کنترل ورودی $x$ برای تابع $f$ به‌گونه‌ای بنا شده است که خروجی $f(x)$ در بازهٔ مشخصی قرار گیرد.

**مثال ۱** می‌دانیم که مساحت هر قرص به‌شعاع $r$ سانتیمتر، برابر است با $A = \pi r^۲$ سانتیمتر مربع. از یک کارگر فنی خواسته شده است که قرص فلزی مستدیری به‌مساحت $۴۰۰\pi$ سانتیمتر مربع، با خطای قابل تحمل $۵ \pm$ سانتیمتر مربع بسازد. این کارگر فنی برای انجام این مقصود، تا چه میزان باید شعاع قرص را به ۲۰ سانتیمتر نزدیک بگیرد؟

**حل.** این کارگر فنی می‌خواهد که $|\pi r^۲ - ۴۰۰\pi| < ۵$، یعنی

$$۴۰۰\pi - ۵ < \pi r^۲ < ۴۰۰\pi + ۵$$

---

۱. مطالب این بخش اختیاری هستند.

یا به‌عبارت دیگر،

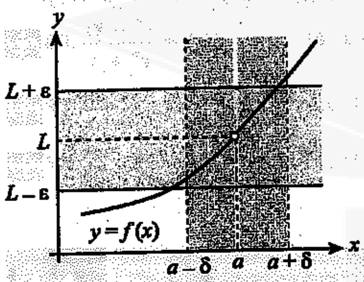
$$\sqrt{۴۰۰ - (۵/\pi)} < r < \sqrt{۴۰۰ + (۵/\pi)}$$
$$۱۹٫۹۶۰۱۷ < r < ۲۰٫۰۳۹۷۵$$

بدین‌سان، این کارگر فنی نیازمند این است که $|r - ۲۰| < ۰٫۰۳۹۷۵$، یعنی برای اینکه مساحت قرص در محدودهٔ تحمل خطا قرار گیرد باید مطمئن شود که اختلاف شعاع قرص و ۲۰ سانتیمتر، کمتر از ۰٫۴ میلیمتر است.

■

هنگامی که می‌گوییم وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند $f(x)$ دارای حد $L$ است، در حقیقت این نکته را بیان می‌کنیم که با انتخاب $x$ **به‌قدرکافی نزدیک به** $a$ (ولی نه مساوی با $a$)، می‌توان با اطمینان **خطای** $|f(x) - L|$ را از هر میزان اعلام شده، هر اندازه هم کوچک باشد، کمتر کرد. مرسوم است که برای نشان دادن اندازهٔ **خطای** مجاز، حرف الفبای یونانی $\varepsilon$ (اپسیلون) به‌کار رود. برای **تفاضل** $x - a$، حرف الفبای یونانی $\delta$ (دلتا) به‌کار می‌رود که نشان می‌دهد چه میزان باید $x$ به $a$ نزدیک باشد تا مطمئن شویم خطا قابل تحمل است. اینها حروفی هستند که کوشی[1] و وایرشتراس[2] در قرن نوزدهم در کارهای خود دربارهٔ حد و پیوستگی (که کارهای پیشاهنگ در این زمینه محسوب می‌شوند) مورد استفاده قرار دادند.

اگر $\varepsilon$ عدد مثبت دلخواهی، **هر اندازه هم کوچک** باشد باید با مقید کردن $x$ **به‌قدرکافی نزدیک** به $a$ (ولی نه مساوی با $a$) بتوانیم تضمین کنیم که $|f(x) - L| < \varepsilon$. به‌قدر کافی نزدیک، یعنی چقدر نزدیک؟ کافی است که فاصلهٔ $x$ تا $a$، یعنی $|x - a|$، از عدد مثبتی مانند $\delta$ که به $\varepsilon$ وابسته است کوچکتر باشد. (شکل ۳۳.۱ را ببینید.) اگر بتوانیم به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ چنین $\delta$ ای بیابیم، آنگاه مجازیم نتیجه بگیریم که $\lim_{x\to a} f(x) = L$.




**شکل ۳۳.۱** اگر $x \neq a$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$

**تعریف ۸ تعریف صوری حد**

می‌گوییم وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند $f(x)$ به‌حد $L$ میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

به‌ازای هر عدد $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$، وابسته به $\varepsilon$، وجود داشته باشد به‌طوری که $۰ < |x - a| < \delta$ مستلزم $|f(x) - L| < \varepsilon$ باشد.

تعریف صوری حد به‌ما نمی‌گوید چگونه حد تابع را بیابیم، بلکه ما را قادر می‌سازد تا در مورد درستی حدی که حدس زده‌ایم تحقیق کنیم. مثال‌های زیر نشان می‌دهند چگونه با استفاده از این تعریف می‌توان گزاره‌های

1. A. L. Cauchy
2. K. Weierstrass

مربوط به‌حد توابع مشخص را ثابت کرد. مثال اول، اثبات صوری دو حدی است که در مثال ۳ در بخش ۲.۱ به‌دست آوردیم.

**مثال ۲** (دو حد مهم) ثابت کنید که (آ) $\lim_{x\to a} x = a$ و (ب) به‌ازای هر ثابت $k$، $\lim_{x\to a} k = k$.

*حل.*

(آ) فرض کنیم $\varepsilon > 0$. باید $\delta > 0$ را به‌گونه‌ای بیابیم که $0 < |x-a| < \delta$ مستلزم $|x-a| < \varepsilon$ باشد. روشن است که اگر انتخاب کنیم $\delta = \varepsilon$، استلزام بالا برقرار می‌شود. به‌این ترتیب ثابت کردیم که $\lim_{x\to a} x = a$.

(ب) فرض کنیم $\varepsilon > 0$. باید $\delta > 0$ را به‌گونه‌ای بیابیم که $0 < |x-a| < \delta$ مستلزم $|k-k| < \varepsilon$ باشد. چون $k-k=0$، می‌توانیم $\delta$ را هر عدد مثبت دلخواه بگیریم و استلزام بالا برقرار می‌شود. به‌این ترتیب ثابت کردیم که $\lim_{x\to a} k = k$. ■

**مثال ۳** ثابت کنید که $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

*حل.* در اینجا $a=2$ و $L=4$. فرض کنیم عدد مثبت $\varepsilon$ داده شده باشد. می‌خواهیم $\delta > 0$ را به‌گونه‌ای بیابیم که اگر $0 < |x-2| < \delta$، آنگاه $|f(x)-4| < \varepsilon$. ملاحظه می‌کنیم که

$$|f(x)-4| = |x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$$

می‌خواهیم عبارت اخیر از $\varepsilon$ کوچکتر باشد. با انتخاب $\delta$ای مناسب می‌توانیم عامل $|x-2|$ را هر قدر بخواهیم کوچک کنیم، ولی باید عامل $|x+2|$ را به‌گونه‌ای کنترل کنیم که خیلی بزرگ نشود. اگر نخست فرض کنیم $\delta \le 1$ و سپس بخواهیم $|x-2| < \delta$، آنگاه

$$|x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$$
$$\Rightarrow |x+2| < 5$$

بنابراین، اگر $|x-2| < \delta \le 1$،

$$|f(x)-4| < 5\,|x-2|$$

ولی نابرابری $5\,|x-2| < \varepsilon$ هنگامی برقرار است که $|x-2| < \varepsilon/5$. به‌این ترتیب اگر انتخاب کنیم $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$، یعنی مینیموم دو عدد ۱ و $\varepsilon/5$ را $\delta$ بگیریم، آنگاه از $|x-2| < \delta$ نتیجه می‌شود که

$$|f(x)-4| < 5\,|x-2| < 5 \times \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

این ثابت می‌کند که $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. ■

## کاربرد تعریف حد در اثبات قضیه‌ها

برای تحقیق در مورد درستی حدهایی نظیر دو مثال بالا معمولاً به‌تعریف صوری حد متوسل نمی‌شویم. به‌جای آن، قضیه‌های کلی دربارهٔ حد، بویژه قضیه‌های ۲ تا ۴ در بخش ۲.۱ را به‌کار می‌بریم. البته اثبات آن قضیه‌ها با استفاده از تعریف انجام می‌پذیرد. برای مثال، قسمت ۱ در قضیهٔ ۲، یعنی **قاعدهٔ مجموع** را ثابت می‌کنیم.

**مثال ۴** **(اثبات قاعدهٔ حد مجموع)** اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$، ثابت کنید که $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+M$.

*حل.* فرض کنیم $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم عدد مثبتی مانند $\delta$ به‌گونه‌ای بیابیم که

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(f(x)+g(x)) - (L+M)| < \varepsilon$$

ملاحظه می‌شود که

جمله‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم

$$|(f(x)+g(x)) - (L+M)|$$
$$= |(f(x)-L) + (g(x)-M)|$$

(نابرابری مثلثی را به‌کار می‌بریم: $|a+b| \le |a| + |b|$.)

$$\le |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

چون $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\varepsilon/2$ عددی مثبت است، عددی مانند $\delta_1 > 0$ هست به‌طوری که

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

به‌همین ترتیب چون $\lim_{x\to a} g(x) = M$، عددی مانند $\delta_2 > 0$ هست به‌طوری که

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. اگر $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه $0 < |x-a| < \delta_1$ و $0 < |x-a| < \delta_2$ و از این‌رو، $|f(x)-L| < \varepsilon/2$ و $|g(x)-M| < \varepsilon/2$. بنابراین،

$$|(f(x)+g(x)) - (L+M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

این نشان می‌دهد که $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+M$.

■

## انواع دیگر حد

با ایجاد تغییرات مناسب در تعریف صوری حد می‌توان تعریف دقیق حدهای یکطرفه، حد در بینهایت و حد بینهایت را ارائه کرد. بعضی از این تعریف‌ها را در اینجا می‌آوریم و تنظیم بقیه را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

**تعریف ۹** **حد راست**

می‌گوییم $f(x)$ در $a$ دارای حد راست $L$ است و می‌نویسیم

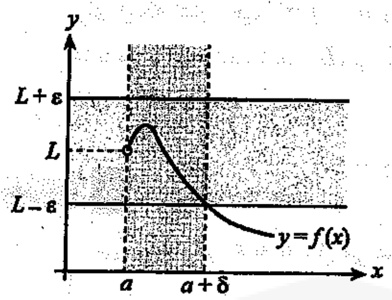
$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$

هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

به‌ازای هر عدد $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$، وابسته به $\varepsilon$، وجود دارد به‌طوری که اگر $a < x < a + \delta$، آنگاه $x$ متعلق به‌قلمرو $f$ است و

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

توجه داشته باشید چگونه شرط $0 < |x - a| < \delta$، ارائه شده در تعریف حد، در تعریف حد راست به‌صورت $a < x < a + \delta$ درمی‌آید (شکل ۳۴.۱). تعریف حد چپ نیز به‌طور مشابهی فرمولبندی می‌شود.




شکل ۳۴.۱ اگر $a < x < a + \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$

**مثال ۵** نشان دهید که $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$.

**حل.** فرض کنیم $\varepsilon > 0$. اگر $x > 0$، آنگاه $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x}$. می‌توانیم تضمین کنیم نابرابری $\sqrt{x} < \varepsilon$ وقتی برقرار می‌شود که $x < \varepsilon^2$. بدین‌سان، با انتخاب $\delta = \varepsilon^2$ شرط واقع در تعریف حد تحقق می‌یابد:

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

بنابراین، $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$. ■

وقتی ادعا می‌کنیم که $f$ در بینهایت دارای حد $L$ است باید بتوانیم تضمین کنیم که می‌شود خطای $|f(x) - L|$ را از هر عدد مثبت دلخواه $\varepsilon$ کوچکتر کرد مشروط بر اینکه $x$ **به‌قدر کافی بزرگ** باشد، یعنی به‌ازای عدد مثبتی مانند $R$ و وابسته به $\varepsilon$، $x > R$.

**تعریف ۱۰ حد در بینهایت**

می‌گوییم وقتی $x$ به‌بینهایت میل می‌کند $f(x)$ به‌حد $L$ میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

به‌ازای هر عدد $\varepsilon > 0$ عددی مانند $R$، وابسته به $\varepsilon$، هست به‌طوری که اگر $x > R$ آنگاه $x$ متعلق به‌قلمرو $f$ است و

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

از خواننده می‌خواهیم تعریف مشابه برای حد در منفی بینهایت را فرمولبندی کند.

**مثال ۶** نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

*حل.* فرض کنیم عدد مثبت $\varepsilon$ داده شده باشد. به‌ازای $x > 0$ داریم

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

مشروط بر اینکه $x > 1/\varepsilon$. بنابراین، به‌ازای $R = 1/\varepsilon$ شرط واقع در تعریف حد برقرار می‌شود. به‌این ترتیب ثابت کردیم که $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x = 0$.

■

برای اینکه نشان دهیم $f(x)$ در $a$ دارای حد بینهایت است باید بتوانیم تضمین کنیم که می‌شود $f(x)$ را از هر عدد مثبت داده شده (نظیر $B$) بزرگتر کرد مشروط بر اینکه $x$ متعلق به‌بازه‌ای به‌قدر کافی کوچک به‌مرکز $a$ باشد و البته $x \neq a$.

**تعریف ۱۱ حد بینهایت**

می‌گوییم وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند $f(x)$ به‌بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

هرگاه به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت $B$ بتوانیم عدد مثبتی مانند $\delta$، وابسته به $B$، به‌گونه‌ای بیابیم که اگر $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه $x$ متعلق به‌قلمرو $f$ است و

$$f(x) > B$$

کوشش کنید تعریف متناظر برای مفهوم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ را فرمولبندی کنید. سپس کوشش کنید با انجام تغییرات لازم در هر دو تعریف، حدهای یکطرفهٔ بینهایت و حد بینهایت در بینهایت را تعریف کنید.

**مثال ۷** تحقیق کنید که $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

*حل.* فرض کنیم $B$ عدد مثبت دلخواهی باشد. داریم $\frac{1}{x^2} > B$ مشروط بر اینکه $x^2 < 1/B$. اگر انتخاب کنیم $\delta = 1/\sqrt{B}$، آنگاه

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad x^2 < \delta^2 = \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > B$$

بنابراین، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

■

## تمرینات ۵.۱

۱. طول یک میلهٔ فلزی ($L$) برحسب دمای $T$ (که واحد آن درجهٔ سانتیگراد است) به‌صورت $L = 39{,}6 + 0{,}025T$ سانتیمتر بیان می‌شود. دمای میله را در کدام محدوده نگهداریم تا طول آن در محدودهٔ $\pm 1$ میلیمتر حول ۴۰ سانتیمتر حفظ شود؟

۲. برای طول یال یک مکعب مقوایی، بیشترین خطای قابل تحمل حول ۲۰ سانتیمتر چقدر باشد تا حجم آن در محدودهٔ $\pm 1{,}2\ \%$ حول ۸۰۰۰ سانتیمتر مکعب قرار گیرد؟

در تمرین‌های ۳ تا ۶، $x$ را در کدام بازه محدود کنیم تا $f(x)$

به‌فاصلهٔ کمتر از $\varepsilon$ از عدد $L$ قرار گیرد؟

۳. $f(x) = ۲x - ۱$، $L = ۳$، $\varepsilon = ۰٫۰۲$

۴. $f(x) = x^۲$، $L = ۴$، $\varepsilon = ۰٫۱$

۵. $f(x) = \sqrt{x}$، $L = ۱$، $\varepsilon = ۰٫۱$

۶. $f(x) = ۱/x$، $L = -۲$، $\varepsilon = ۰٫۰۱$

در تمرین‌های ۷ تا ۱۰، عدد $\delta > ۰$ را به‌گونه‌ای بیابید که اگر $|x-a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L|$ کوچکتر از عدد داده شدهٔ $\varepsilon > ۰$ بشود.

۷. $f(x) = ۳x + ۱$، $a = ۲$، $L = ۷$، $\varepsilon = ۰٫۰۳$

۸. $f(x) = \sqrt{۲x + ۳}$، $a = ۳$، $L = ۳$، $\varepsilon = ۰٫۰۱$

۹. $f(x) = x^۳$، $a = ۲$، $L = ۸$، $\varepsilon = ۰٫۲$

۱۰. $f(x) = ۱/(x + ۱)$، $a = ۰$، $L = ۱$، $\varepsilon = ۰٫۰۵$

در تمرین‌های ۱۱ تا ۲۰، درستی حدهای داده شده را با استفاده از تعریف صوری حد ثابت کنید.

۱۱. $\lim_{x\to ۱} (۳x + ۱) = ۴$

۱۲. $\lim_{x\to ۲} (۵ - ۲x) = ۱$

۱۳. $\lim_{x\to ۰} x^۲ = ۰$

۱۴. $\lim_{x\to ۲} \frac{x - ۲}{۱ + x^۲} = ۰$

۱۵. $\lim_{x\to ۱/۲} \frac{۱ - ۴x^۲}{۱ - ۲x} = ۲$

۱۶. $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲ + ۲x}{x + ۲} = -۲$

۱۷. $\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{x + ۱} = \frac{۱}{۲}$

۱۸. $\lim_{x\to -۱} \frac{x + ۱}{x^۲ - ۱} = -\frac{۱}{۲}$

۱۹. $\lim_{x\to ۱} \sqrt{x} = ۱$

۲۰. $\lim_{x\to ۲} x^۳ = ۸$

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۶، تعریف صوری حدهای بیان شده را ارائه کنید.

۲۱. $\lim_{x\to a-} f(x) = L$

۲۲. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$

۲۳. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

۲۴. $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

۲۵. $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$

۲۶. $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۰، درستی حدهای داده شده را با استفاده از تعریف صوری انواع حد ثابت کنید.

۲۷. $\lim_{x\to ۱+} \frac{۱}{x - ۱} = \infty$

۲۸. $\lim_{x\to ۱-} \frac{۱}{x - ۱} = -\infty$

۲۹. $\lim_{x\to \infty} \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}} = ۰$

۳۰. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x} = \infty$

## اثبات قضیه‌ها با استفاده از تعریف حد

* ۳۱. ثابت کنید که حد، یکتاست. یعنی اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} f(x) = M$، ثابت کنید که $L = M$. *راهنمایی:* فرض کنید $L \neq M$ و قرار دهید $\varepsilon = |L - M|/۲$.

* ۳۲. اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M$، نشان دهید که عددی مانند $\delta > ۰$ هست به‌طوری که

$$۰ < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| < ۱ + |M|$$

(*راهنمایی:* در تعریف حد قرار دهید $\varepsilon = ۱$.) حکم بالا می‌گوید اگر $g$ در نقطه‌ای دارای حد باشد، آنگاه $g$ در نزدیکی‌های آن نقطه کراندار است.

۳۳. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$، ثابت کنید که $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$ (قاعدهٔ ضرب در قضیهٔ ۲).
*راهنمایی:* مثال ۴ را دوباره بخوانید. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و بنویسید

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| \\
&= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\
&= |(f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M)| \\
&\leq |(f(x) - L)g(x)| + |L(g(x) - M)| \\
&= |g(x)|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|
\end{aligned}$$

اکنون کوشش کنید تا با انتخاب $x$ به‌قدر کافی نزدیک به $a$، هر جملهٔ سطر آخر کوچکتر از $\varepsilon/۲$ بشود. برای این منظور، به‌نتیجهٔ تمرین ۳۲ نیاز دارید.

* ۳۴. اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $M \neq ۰$، نشان دهید که عددی مانند $\delta > ۰$ هست به‌طوری که

$$۰ < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| > \frac{|M|}{۲}$$

* ۳۵. اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $M \neq 0$، نشان دهید که

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

*راهنمایی:* به‌نتیجهٔ تمرین ۳۴ نیاز دارید.

۳۶. با استفاده از گزاره‌های ثابت شده در تمرین‌های ۳۳ و ۳۵، قاعدهٔ خارج‌قسمت (یعنی قسمت ۵ در قضیهٔ ۲) را ثابت کنید: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ که در آن $M \neq 0$، آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

* ۳۷. با دو بار استفاده از تعریف حد، قضیهٔ ۷ در بخش ۴.۱ را ثابت کنید؛ یعنی اگر $f$ در $L$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to c} g(x) = L$، آنگاه

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

* ۳۸. قضیهٔ فشار (یعنی قضیهٔ ۴ در بخش ۲.۱) را ثابت کنید.

*راهنمایی:* اگر $f(x) \le g(x) \le h(x)$، آنگاه

$$\begin{aligned}
|g(x) - L| &= |g(x) - f(x) + f(x) - L| \\
&\le |g(x) - f(x)| + |f(x) - L| \\
&\le |h(x) - f(x)| + |f(x) - L| \\
&= |h(x) - L - (f(x) - L)| + |f(x) - L| \\
&\le |h(x) - L| + |f(x) - L| + |f(x) - L|
\end{aligned}$$

اکنون می‌توانید هر جملهٔ عبارت اخیر را از $\varepsilon/3$ کوچکتر کنید و به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

## مرور فصل

### ایده‌های اصلی

● **معنی جمله‌ها و عبارت‌های زیر چیست؟**

◇ آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ بر $[a, b]$

◇ آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در $x = a$

◇ $\lim_{x\to a} f(x) = L$

◇ $\lim_{x\to a+} f(x) = L$، $\lim_{x\to a-} f(x) = L$

◇ $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$، $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$

◇ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$، $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$

◇ $f$ در $c$ پیوسته است.

◇ $f$ در $c$ از چپ (یا راست) پیوسته است

◇ $f$ گسترش پیوسته به $c$ دارد.

◇ $f$ تابعی پیوسته است.

◇ $f$ مقادیر ماکسیموم و مینیموم خود بر بازهٔ $I$ را اختیار می‌کند.

◇ $f$ بر بازهٔ $I$ کراندار است.

◇ $f$ بر بازهٔ $I$ دارای ویژگی مقدار میانی است.

● **هر تعداد «قاعده دربارهٔ حد» می‌دانید بیان کنید.**

● **تابع پیوسته‌ای که قلمرواش یک بازهٔ بستهٔ کراندار است دارای کدام ویژگی‌هاست؟**

● **چگونه می‌توانید صفرها (یعنی ریشه‌ها)ی یک تابع پیوسته را بیابید؟**

### تمرینات دوره‌ای

۱. آهنگ متوسط تغییر $x^3$ را بر $[1, 3]$ بیابید.

۲. آهنگ متوسط تغییر $1/x$ را بر $[-2, -1]$ بیابید.

۳. آهنگ تغییر $x^3$ را در $x = 2$ بیابید.

۴. آهنگ تغییر $1/x$ را در $x = -3/2$ بیابید.

در تمرین‌های ۵ تا ۳۰ حد را بیابید یا توضیح دهید چرا حد وجود ندارد.

۵. $\lim_{x\to 1} (x^2 - 4x + 7)$

۶. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{1 - x^2}$

۷. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1 - x^2}$

۸. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

۹. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

۱۰. $\lim_{x\to 2-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

۱۱. $\lim_{x\to -2+} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

۱۳. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

۱۴. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\sqrt{x+3h}-\sqrt{x}}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x-x^2}$

۱۶. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x-x^2}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-x^2}$

۱۸. $\lim\limits_{x\to 1-}\sqrt{x-x^2}$

۱۹. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-x^2}{3x^2-x-1}$

۲۰. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+100}{x^2+3}$

۲۱. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+4}$

۲۲. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4}{x^2-4}$

۲۳. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

۲۴. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

۲۵. $\lim\limits_{x\to \infty}\sin x$

۲۶. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos x}{x}$

۲۷. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^2}$

۲۹. $\lim\limits_{x\to -\infty}[x+\sqrt{x^2-4x+1}]$

۳۰. $\lim\limits_{x\to \infty}[x+\sqrt{x^2-4x+1}]$

در تمرین‌های ۳۱ تا ۳۸، تابع $f$ در کدام نقاط قلمرو خود ناپیوسته است؟ $f$ دراین نقاط از چپ پیوسته است یا از راست؟ در تمرین‌های ۳۵ و ۳۶، $H$ تابع هویساید را نشان می‌دهد، یعنی $H(x)=1$ هرگاه $x\geq 0$ و $H(x)=0$ هرگاه $x<0$.

۳۱. $f(x)=x^3-4x^2+1$

۳۲. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

۳۳. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>2 \\ x & x\leq 2\end{cases}$

۳۴. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ x & x\leq 1\end{cases}$

۳۵. $f(x)=H(x-1)$

۳۶. $f(x)=H(9-x^2)$

۳۷. $f(x)=|x|+|x+1|$

۳۸. $f(x)=\begin{cases} |x|/|x+1| & x\neq -1 \\ 1 & x=-1\end{cases}$

## مسائل مبارزطلب

۱. نشان دهید که آهنگ متوسط تغییر تابع $x^3$ بر بازهٔ $[a,b]$ که در آن $0<a<b$، برابر است با آهنگ لحظه‌ای تغییر $x^3$ در $x=\sqrt{(a^2+ab+b^2)/3}$. این نقطه در طرف چپ نقطهٔ $(a+b)/2$، یعنی وسط بازهٔ $[a,b]$ قرار دارد یا در طرف راست آن؟

۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x-1|-|x+1|}$.

۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|}$.

۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{x^{1/3}-4}{x^{1/2}-8}$.

۵. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt[3]{7+x}-2}$.

۶. معادلهٔ $ax^2+2x-1=0$، که درآن $a$ یک ثابت است، دارای دو ریشه است هرگاه $a>-1$ و $a\neq 0$:

$$r_+(a)=\frac{-1+\sqrt{1+a}}{a},\quad r_-(a)=\frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}$$

(آ) اگر $a\longrightarrow 0$، چه وضعی برای ریشهٔ $r_-(a)$ روی می‌دهد؟

(ب) برای $a$ مقادیر ۱، ۰٫۱، ۰٫۰۱، ... را اختیار کند و حدس بزنید به‌ازای $a\longrightarrow 0$ چه وضعی برای ریشهٔ $r_+(a)$ روی می‌دهد؟ به‌ازای مقادیری نظیر $a=10^{-8}$، دقت محدود ماشین‌حساب نتایج جالبی به‌دست می‌دهد. چه روی می‌دهد و چرا؟

(پ) با استفاده از اتحاد

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

حد $\lim_{a\to 0^+} r_+(a)$ را دقیقاً محاسبه کنید.

۷. درست یا نادرست؟ اگر درست است دلیل بیاورید و اگر نادرست است مثال نقض ارائه کنید.

(آ) اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ وجود ندارد.

(ب) اگر هیچ یک از دو حد $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ وجود ندارد.

(پ) اگر $f$ در $a$ پیوسته باشد، $|f|$ نیز در $a$ پیوسته است.

(ت) اگر $|f|$ در $a$ پیوسته باشد، $f$ نیز در $a$ پیوسته است.

(ث) اگر به‌ازای هر $x$ متعلق به‌بازه‌ای حول $a$ داشته باشیم $f(x) < g(x)$ و هر دو حد $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود داشته باشند، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.

۸. (آ) اگر $f$ بر بازهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ تابعی پیوسته باشد، نشان دهید که $R(f)$ بازه‌ای بسته است.

(ب) اگر $D(f)$ بازهٔ بازی مانند $]a\,,b[$ باشد، چه حالت‌هایی ممکن است برای $R(f)$ پیش آید؟

۹. تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$ را درنظر می‌گیریم. همهٔ نقاط ناپیوستگی $f$ را بیابید. آیا $f$ در این نقاط، حدهای یکطرفه دارد؟ اگر پاسخ مثبت است، آنها را بیابید.

۱۰. مقدار مینیموم $f(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$ را بر بازهٔ $]0\,,1[$ بیابید. توضیح دهید از کجا می‌دانید مینیموم حتماً وجود دارد.

* ۱۱. (آ) فرض کنیم $f$ تابعی پیوسته بر بازهٔ $[0\,,1]$ باشد و $f(0)=f(1)$. نشان دهید که به‌ازای نقطه‌ای مانند $a\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ داریم $f(a)=f\left(a+\frac{1}{2}\right)$. *راهنمایی:* قرار دهید $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)$ و قضیهٔ مقدار میانی را به‌کار ببرید.

(ب) اگر $n$ عدد صحیحی بزرگتر از ۲ باشد، نشان دهید که به‌ازای نقطه‌ای مانند $a\in\left[0\,,1-\frac{1}{n}\right]$ داریم $f(a)=f\left(a+\frac{1}{n}\right)$.

# "پایان فصل اول"