(IV) معادله کلرو clairaut

فرم کلی معادله به صورت روبرو است : $y = xy' + f(y')$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم $y' = p$ در اینصورت $\boxed{y = xp + f(p)}$ رابطه*

$$\xrightarrow{d/dx} \overset{p}{y'} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}f'(p) \rightarrow x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}f'(p) = 0$$

جواب عمومی

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x + f'(p)\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \ (\text{ثابت}) \xrightarrow{*} y_g = cx + f(c) \\ x = -f'(c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = cx + f(c) \end{cases} \rightarrow$$

با حذف c جواب غیرعادی معادله کلرو را بدست می‌آوریم.

Ex.) $y = xy' + \frac{1}{y'}$ جواب عمومی و غیرعادی معادله روبرو را بدست آورید.

پاسخ $\Leftarrow$ $y = cx + \frac{1}{c}$, $y^2 = 4x$

راه حل : $y' = p \rightarrow y = px + \frac{1}{p} \xrightarrow{d/dx} p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \rightarrow \boxed{y = cx + \frac{1}{c}} \\ x = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

$$y = cx + \frac{1}{c} \rightarrow y^2 = c^2x^2 + \frac{1}{c^2} + 2x = x + x + 2x = 4x \rightarrow \boxed{y^2 = 4x}$$

تذکر: برای یافتن جواب غیرعادی معادله $F(x,y,y')$ کافیست:

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases} \longrightarrow$$ با حذف y' جواب غیرعادی بدست می‌آید.

مثلاً: معادله کلرو $y=xy'+f(y') \rightarrow y-xy'-f(y')=0 \quad F(x,y,y')=0$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \longrightarrow -x-f'(y')=0$$

if $y'=p$

$$\begin{cases} y=xp+f(p) \\ x=-f'(p) \end{cases} \xrightarrow{p=c}$$ با حذف p جواب غیرعادی بدست می‌آید.

Ex.) (I) $1+(y')^2=\dfrac{1}{y^2} \rightarrow \begin{cases} 1+(y')^2-\dfrac{1}{y^2}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'=0 \end{cases} \xrightarrow[y'=0]{} y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$

چک می‌کنیم در معادله اصلی صدق می‌کند یا خیر... $y=\pm 1$ در معادله صدق می‌کند.

حل کل معادله: $y'^2=\dfrac{1-y^2}{y^2} \longrightarrow y'=\pm\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \longrightarrow \ldots$

Ex.) (II) $(y'^2)(1-y)^2 = 2-y$

$$\begin{cases} (y')^2(1-y)^2 + y - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{y=2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y'(1-y)^2 = 0 \longrightarrow \boxed{y'=0} \end{cases}$$

$(y=2, y'=0)$ جواب غیرعادی

$y=1 \to$ در معادله صدق نمی‌کند. $\times$

؟) چرا معادلات خطی جواب غیرعادی ندارند؟ $y'+p(x)y=q(x)$

$$y' = q(x) - p(x)y \xrightarrow{d/dy'} (y''=1) \neq (0)$$

در حالت کلی معادلاتی که $y'=f(x,y)$ باشند جواب غیرعادی ندارند.

بررسی چند حالت خاص در حل $F(x,y,y')=0$

I) (معادله فاقد x و y باشد) $F(y')=0$

با فرض اینکه معادله $F(x)=0$ دارای یک ریشه حقیقی مانند α باشد می‌توان نوشت:

$$y'=\alpha \to y=\alpha x + c \to \alpha = \frac{y-c}{x}$$

$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ جواب عمومی

Ex.) $(y')^3 - 3(y')^2 + y' = 1 \longrightarrow x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0 \longrightarrow \left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + \frac{y-c}{x} - 1 = 0$

جواب عمومی

page 48

(II) معادله فاقد متغیر مستقل باشد) $F(y, y')=0$

در این حالت باید بتوانیم معادله را به یکی از دو فرم زیر بنویسید.

حالت

(۱) $y' = f(y) \longrightarrow \dfrac{dy}{f(y)} = dx \xrightarrow{\int}$ جدا پذیر $\displaystyle\int \frac{dy}{f(y)} = x + C$ جواب عمومی

(۲) $y = f(y')$

$$\begin{cases} y' = p \longrightarrow y = f(p) \xrightarrow{d} dy = f'(p)\,dp \longrightarrow \\ dy = p\,dx \end{cases}$$

$$\longrightarrow dx = \frac{f'(p)\,dp}{p}$$

$$\xrightarrow{\int} x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = f(p) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(p)\,dp}{p} + c \end{cases} \longrightarrow$$ باحذف p جواب عمومی حاصل می‌شود.

Ex.) $y = (y')^2 e^{y'}$

$$\begin{cases} y' = p \longrightarrow y = p^2 e^p \longrightarrow dy = (2p+p^2)e^p\,dp \rightarrow p\,dx = (2p+p^2)e^p\,dp \\ dy = p\,dx \end{cases}$$

$\longrightarrow \begin{cases} dx = (2+p)\,e^p\,dp & \text{حالت ۱} \\ p = 0 \rightarrow y = 0 & \text{جواب غیرعادی حالت ۲} \end{cases}$

$\xrightarrow{\int} \begin{cases} x = (p+1)e^p + c \\ y = p^2 e^p \end{cases} \longrightarrow$ (جواب عمومی به فرم پارامتری)