

باسمه تعالی

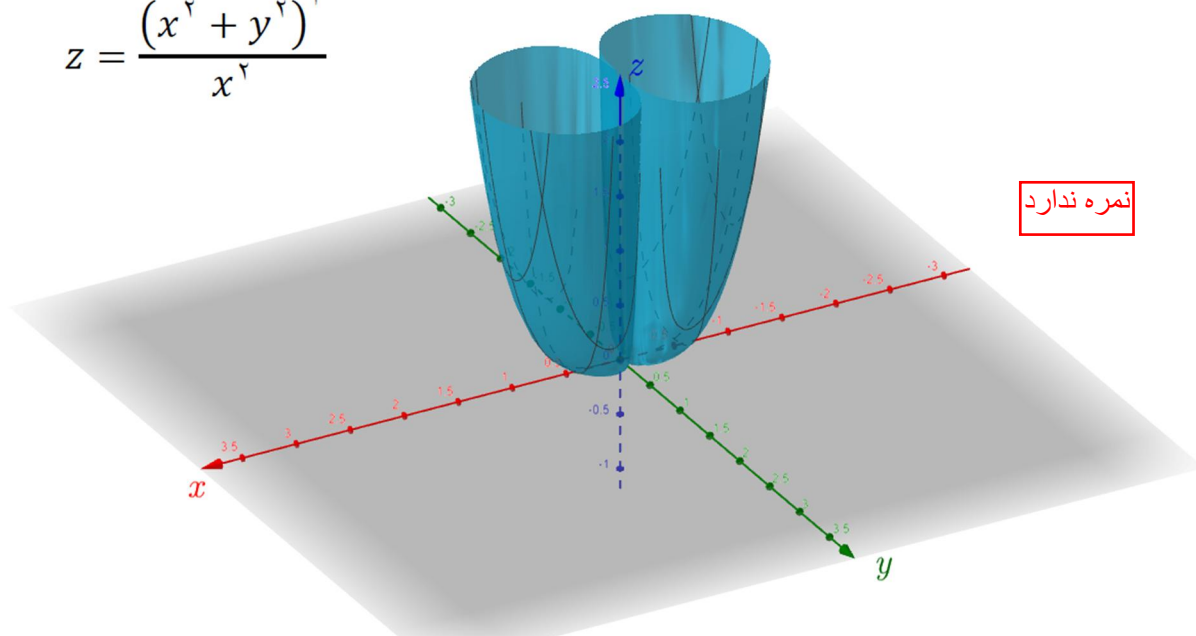
انگتراله‌های دوگانه و سه گانه

حل تمرینهای ریاضی ۲

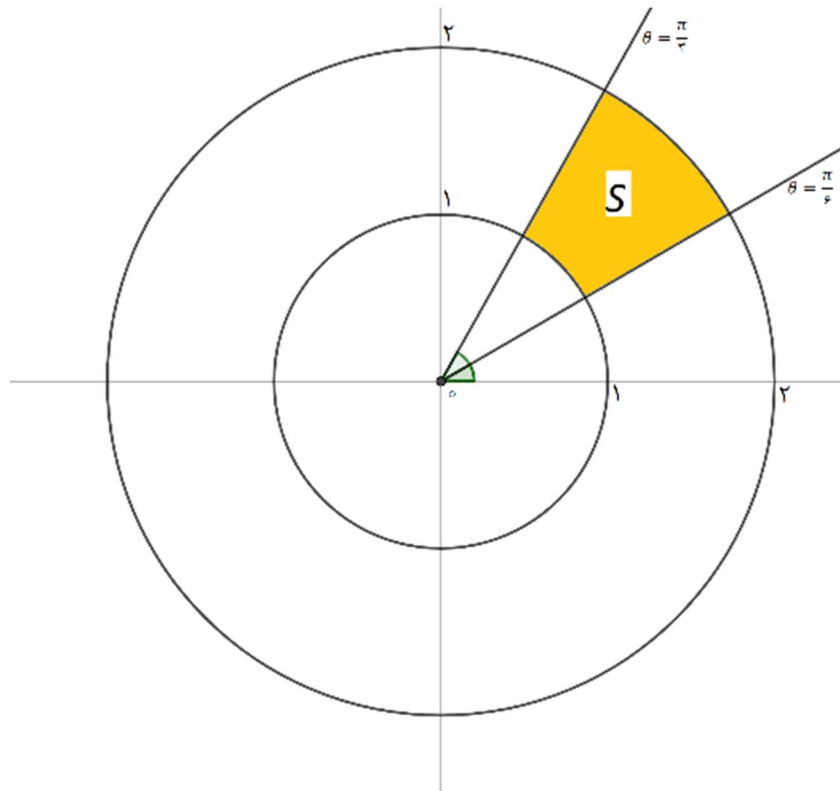
۹- حجم قسمتی از هشتک (یک هشتک) اول فضا را پیدا کنید که از بالا به رویه  $z = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2}$ ، از پایین به صفحه  $z = 0$ ، و از اطراف به صفحات  $y = \sqrt{3}x$  و  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  و استوانه‌های  $x^2 + y^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 = 4$  محدود شده است.

حل. تصویر رویه در زیر نشان داده شده است.

$$z = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2}$$



با توجه به توضیحات، تصویر شکل مورد نظر در مسأله بر صفحه  $xy$ ، به صورت زیر خواهد بود.



$$\text{حجم} = \iint_S z \, dx \, dy = \iint_S \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2} \, dx \, dy = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_1^2 \frac{(r^2)^{3/2}}{r^2 \cos^2 \theta} r \, dr \, d\theta$$

تغییر متغیر و نوشتن انتگرال  
در مختصات قطبی با رسم  
شکل بالا یا بدون آن 2 نمره

$$= \left( \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \tan^2 \theta) \, d\theta \right) \left( \int_1^2 r^{\Delta} \, dr \right) = (\tan \theta |_{\pi/6}^{\pi/3}) \left( \frac{r^{\Delta}}{\Delta} \right) \Big|_1^2$$

محاسبات انتگرالها تا  
اینجا 2 نمره

$$= \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( \frac{2^{\Delta}}{\Delta} - \frac{1^{\Delta}}{\Delta} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{63}{6} = 7\sqrt{3} .$$

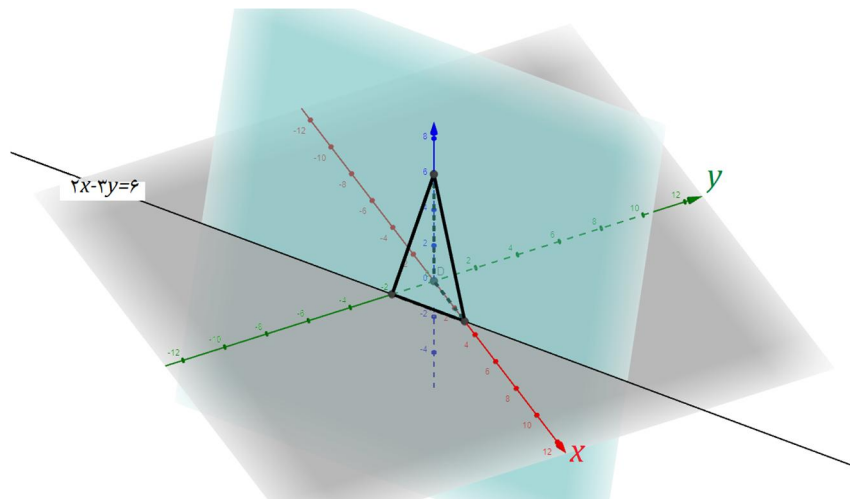
ادامه محاسبات تا آخر حتی اگر  
جواب نهایی درست نباشد 1 نمره

۱۰-  $W$  را ناحیه کراندار محصور با صفحات  $x=0$ ،  $y=0$ ،  $z=0$  و  $2x-3y+z=6$  گرفته ایم. مقدار انتگرال

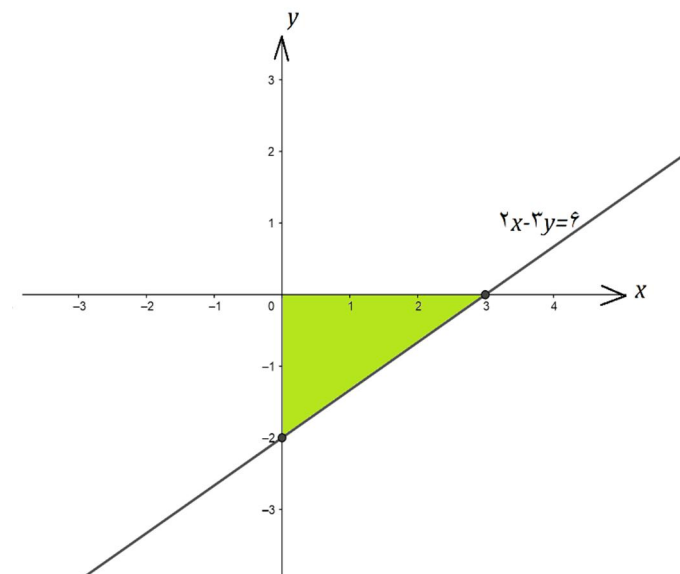
$$\iiint_W y \, dV$$

را حساب کنید.

حل.



اگر به تصویر  $W$  روی صفحه  $xy$  نگاه کنیم، ناحیه مثلثی شکل زیر به دست می آید.



نوشتن حدود انتگرالگیری با رسم شکل یا بدون آن به صورت سه انتگرال معمولی 2 نمره

$$\begin{aligned} \iiint_W y \, dV &= \int_{x=0}^3 \int_{y=\frac{2}{3}(x-3)}^0 \int_{z=0}^{6-2x+3y} y \, dz \, dy \, dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=\frac{2}{3}(x-3)}^0 y (z|_0^{6-2x+3y}) \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^3 \int_{y=\frac{2}{3}(x-3)}^0 y (6-2x+3y) \, dy \, dx = \int_{x=0}^3 (3y^2 - xy^2 + y^3)|_{y=\frac{2}{3}(x-3)}^0 \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 \left( -3 \left( \frac{2}{3} \right)^2 (x-3)^2 + x \left( \frac{2}{3} \right)^2 (x-3)^2 - \left( \frac{2}{3} \right)^3 (x-3)^3 \right) dx \quad \text{محاسبه دو انتگرال معمولی تا اینجا 2 نمره} \\ &= \int_0^3 \left( \left( \frac{2}{3} \right)^2 (x-3)(x-3)^2 - \left( \frac{2}{3} \right)^3 (x-3)^3 \right) dx = \int_0^3 \frac{4}{27} (x-3)^2 dx = \frac{4}{27} \left( \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_0^3 \right) \\ &= -\frac{4}{27} \times \frac{3^3}{3} = -3. \quad \text{محاسبات کامل تا آخر حتی اگر جواب نهایی درست نباشد 1 نمره} \end{aligned}$$