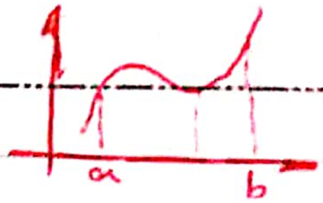


۵) مشتق : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- تعریف : فرض کنید $f: S \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که S شامل یک بازه‌ی شامل a باشد

گوییم f در $x=a$ مشتق پذیر است، هرگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد در این صورت

این حد آن را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم. $y=f(x) \quad y' = \frac{dy}{dx} = D f(a) = D_x f(a)$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- مشتق چپ :

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a)$$

مشتق راست : $(x\to a^+) = f'_+(a)$

خط مماس

معادله خط مماس در $x=a$: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

اگر $f'(a) \neq 0 \to$ شیب خط قائم : $-\frac{1}{f'(a)}$

مثال : ثابت کنید $f(x)=|x|$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{cases} \neq$$

- گزاره : اگر f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه پیوسته نیز می‌باشد.

اثبات : $\lim_{x\to a} f(x) \overset{?}{=} f(a)$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to a} \Big(\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a)} \underbrace{(x - a)}_{\text{صفر}} \Big) = 0$$

گزاره: اگر f و g در x مشتق‌پذیر باشند، آنگاه:

۱. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

۲. $c \in \mathbb{R}$ ، $(cf)' = cf'$

۳. $(f_1 \cdots f_k)'(x) = f_1' f_2 \cdots f_k(x) + f_1 f_2' f_3 \cdots f_k(x) + \cdots + f_1 \cdots f_{k-1} f_k'(x)$

۴. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g(x) - fg'(x)}{(g(x))^2}$

گزاره: اگر $g(x)$ در $x = x_0$ مشتق‌پذیر باشد، و f در $g(x_0)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $fog(x)$ نیز در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x_0) = g'(x_0)\, f'(g(x_0))$$

$$(f(u))' = u' f'(u)$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u'$$

مثال) فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x\sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نشان دهید f در $x\neq 0$ مشتق پذیر است و در $x=0$ مشتق پذیر نیست $\boxed{\text{ولی پیوسته است}}$.

اثبات کردیم قبلا

تعریف مشتق پذیر

اگر $x \neq 0$ $\quad f(x) = x\sin 1/x$

را برای $x\neq 0$ مشتق پذیر

ضرب دو تابع مشتق پذیر ← مشتق پذیر

$\frac{1}{x}$ ✓

$\sin x$ ✓

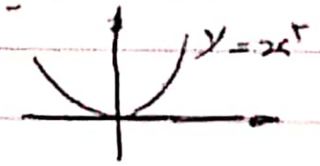
x

اگر $x=0$

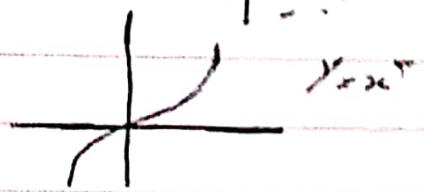
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

حد وجود ندارد تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

* یادآوری: تابع f را زوج گوییم هرگاه برای هر x از دامنه‌اش داشته باشیم $f(-x)=f(x)$



تابع f را فرد گوییم هرگاه برای هر x از دامنه‌اش داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$.



* اگر f زوج (فرد) باشد ← f' فرد (زوج) است

$$f(-x)=f(x) \Rightarrow -f'(-x)=f'(x) \Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$$

$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow -f'(-x)=-f'(x) \Rightarrow f'(-x)=f'(x)$$

تعریف: فرض کنید c نقطه‌ای از دامنه تابع f باشد.

۱- c را یک نقطه‌ی بحرانی یا منفرد گوییم، هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد

۲- c را یک نقطه‌ی بحرانی گوییم، هرگاه $f'(c)$ صفر باشد

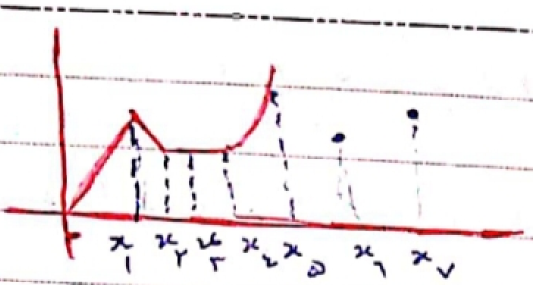
۳- c را یک نقطه‌ی مرزی گوییم، هرگاه هیچ همسایگی حول آن موجود نباشد که در دامنه‌ی f باشد

۴- c را یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق گوییم، هرگاه max یا min مطلق f باشد.

۵- c را یک اکسترمم نسبی یا موضعی گوییم، هرگاه همسایگی مانند $(c-\delta, c+\delta)$ حول c موجود باشد که برای هر x از $D \cap (c-\delta, c+\delta)$ داشته باشیم

$f(x) \le f(c)$ ، max نسبی

$f(x) \ge f(c)$ ، min نسبی



نسبی $min = \{0, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

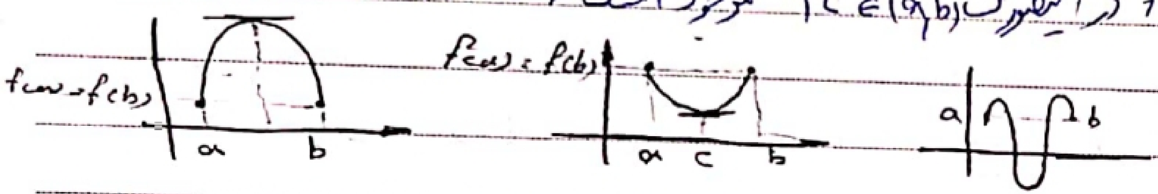
نسبی $max = \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}$

مطلق $max = \{x_5\}$

مطلق $min = \{0\}$

گزاره: فرض کنید f روی بازه $[a,b]$ شامل x_0 تعریف شده باشد. اگر f در $x = x_0$ یک مقدار اکسترمم نسبی داشته باشد، آنگاه x_0 یکی از نقاط تکین یا مرزی یا بحرانی است.

قضیه رول: فرض کنید $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و فرض کنید $f(a)=f(b)$ در اینصورت $c \in (a,b)$ موجود است که $f'(c)=0$.

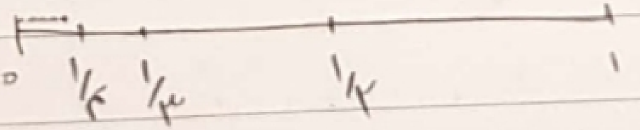


مثال) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ثابت کنید $f'(x)$

در $(0,1)$ بی نهایت ریشه دارد. f در $[0,1]$ پیوسته و در $(0,1)$ مشتق پذیر است

$f(0)=0 \quad f(1)=0$

$n=1,2,3,\dots$



$\forall n\in\mathbb{N}$ f در بازه $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]$ پیوسته و در بازه $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right)$ مشتق پذیر است)

$\forall n\geq 2$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n-1}\right) \overset{\text{رول}}{\Longrightarrow} \exists c\in\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right) : f'(c)=0$

$f(0)=0$

از طرفی c_n ها در بازه های مجزا قرار دارند و متمایزند

با هم فرق دارند ← بی نهایت ریشه برای $f'(x)$ پیدا شد

گزاره: فرض کنید f یک تابع پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشد. اگر f' حداکثر n ریشه داشته باشد آنگاه f حداکثر $n+1$ ریشه دارد.

اثبات: (برهان خلف) فرض کنید f حداقل $n+2$ ریشه داشته باشد، به ترتیب آنها را با $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}$ نامگذاری می‌کنیم. ($f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_{n+2}) = 0$) بر اساس قضیه رول برای هر کدام از این بازه‌های $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ برای $i = 1, 2, \ldots, n+1$ داریم: $\exists c_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1}) : f'(c_i) = 0$

پس به این ترتیب $n+1$ ریشه برای f' پیدا شد که تناقض است.

مثال) نشان دهید $x^2 = x\sin x + \cos x$ دقیقاً دارای دو ریشه است؟

تعریف کنید (f پیوسته است) $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$ (ضرب دو تابع پیوسته)

(مشتق پذیر است)

$f(0) = -1 < 0$ در بازه‌ی $[-2\pi, 0]$

$f(2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0$ و بازه $[0, 2\pi]$ $\Rightarrow \exists c, c'$ وجود

$f(-2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0$ که $f(c) = f(c') = 0$

f حداقل دو ریشه‌ی متمایز دارد

$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = 2x - x\cos x = x(\underbrace{2-\cos x}_{\neq 0})$

$x = 0$

$f'(x)$ حداکثر یک ریشه دارد و $f'(0) = 0$.

$f'(\alpha) = f'(\alpha') = 0$ رول رول

$x_0 \quad x_1 \quad x_2$

$f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = 0$

حال اگر f بیش از دو ریشه داشته باشد طبق قضیه رول f' حداقل دو ریشه ی

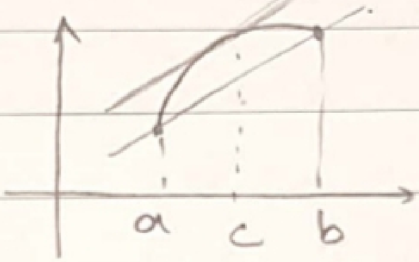
تناقض پیدا خواهد کرد که در تناقض است f حداکثر دو ریشه دارد

$\Leftarrow$ f دقیقا دو ریشه دارد.

قضیه مقدار میانگین: اگر f تابعی پیوسته باشد روی [a,b]

و مشتق پذیر روی (a,b) باشد آنگاه $c \in (a,b)$ ای موجود است که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



بین a , b

نتیجه: اگر f تابعی پیوسته روی [a,b] و مشتق پذیر روی (a,b)

باشد و به ازای هر $x\in(a,b)$ $f'(x)=0$ آنگاه f ثابت است.

(برهان خلف)

فرض کنید $x_1 , x_2 \in (a,b)$ که $f(x_1) \neq f(x_2)$

قضیه مقدار میانگین $\longrightarrow$ $\exists c \in (x_1,x_2): f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$ ✗

نتیجه: فرض کنید f و g دو تابع پیوسته روی [a,b] و روی (a,b) مشتق پذیر

است به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)=g'(x)$

آنگاه $f(x)=g(x)+C$.

$C\in\mathbb{R}$ موجود است

تعریف می‌کنیم $h(x)=f(x)-g(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی

(a,b) مشتق‌پذیر است $\overset{\text{فرض}}{:}$ $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

$\forall x\in(a,b) \xrightarrow[\text{از نتیجه قبل}]{} h(x)=c$ ($c\in\mathbb{R}$ موجود است)

$$f(x)-g(x)=c \Rightarrow f(x)=g(x)+c$$

مثال) به ازای هر $x>0$ نشان دهید $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$

$$f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2} \overset{?}{>} 0$$

فرض کنید $x_0>0$ دلخواه باشد. $[0,x_0]$ را در نظر بگیریم $f(x_0)\overset{?}{>}0$

$$\exists \underset{\text{مقدار میانگین}}{c}\in(0,x_0): \frac{f(x_0)-\overset{0}{f(0)}}{x_0}=f'(c)=c-\sin c$$

$$f'(x)=x-\sin x$$

می‌دانیم $\sin c<c$ ؛ $c>0$ $\xrightarrow{\text{زیرا}}$ >0

$$\frac{f(x_0)}{x_0}=c-\sin c \quad >0 \Rightarrow f(x_0)>0$$