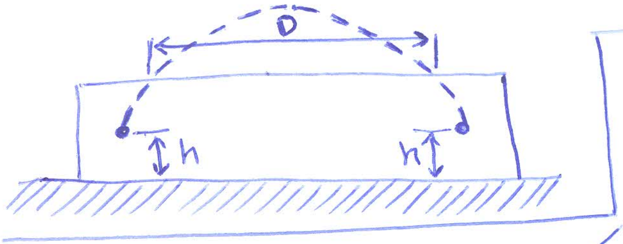
۱. مطابق شکل زیر، به یک توپ بیسبال در ارتفاع $h = 1m$ ضربه‌ای زده شده است. و سپس در همان ارتفاع گرفته شده است. توپ از کنار دیواری می‌گذرد و $1\ s$ پس از پرتاب، رو به بالا و ۴ s بعد، با طی مسافت $D = 50m$، رو به پایین از بالای دیوار می‌گذرد. (الف) فاصله افقی پیموده شده توسط توپ از لحظهٔ ضربه زدن تا لحظهٔ گرفتن، چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویهٔ (نسبت به افق) سرعت توپ درست پس از ضربه زدن چقدر است؟ (ت) ارتفاع دیوار چقدر است؟

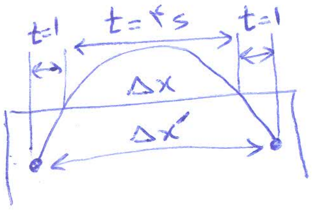


پاسخ:

(الف) ۴ ثانیه طول می‌کشد که مسافت ۵۰ متر را طی کند. بنابراین به کمک معادلات سرعت ثابت مربوط به حرکت افقی توپ، سرعت افقی (v_x) توپ را بدست بیاوریم.

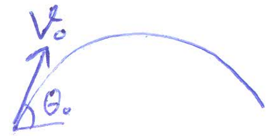
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{D}{t} = \frac{50}{4} = 12.5\ \frac{m}{s}$$

از طرفی زمان کل را داریم $t' = 4+1+1=6$



الف
$$\Delta x' = v_x \Delta t' = 12.5 \times 6 = \underbrace{\boxed{75\ m}}_{\Delta x'}$$

(ب) سرعت اولیه v_0 و θ_0 زاویه پرتاب باید بدست آید.



$v_0 = ?$

$\theta_0 = ?$

اگر v_{0x} و v_{0y} را داشته باشیم، از رابطهٔ $v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}$ بزرگی سرعت اولیه بدست می‌آید.

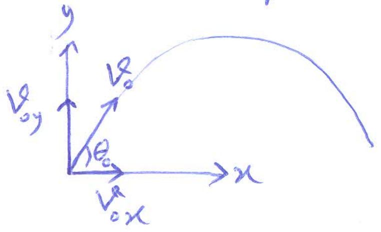
با توجه به اینکه سرعت افقی ثابت است و در قسمت قبل بدست آمد $v_{0x}=12.5\frac{m}{s}$ بنابراین برای v_{0y} از معادله زیر استفاده می‌کنیم و معادله را برای حرکت در انتهای مسیر که $\Delta y=0$ است می‌نویسیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t$$

ب

$$0 = -\frac{1}{2}(9.8)(6)^2 + v_{0y}(6) \Longrightarrow v_{0y} = 29.4\ \frac{m}{s} \qquad v_0=\sqrt{12.5^2+29.4^2} = \boxed{31.9\frac{m}{s}}$$

ب) برای بدست آوردن زاویهٔ پرتاب از رابطهٔ تانژانت معکوس استفاده می‌کنیم.



$$\tan\theta_0 = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{۲۹٫۴}{۱۲٫۵} = ۲٫۳۵$$

رابطهٔ تانژانت معکوس (ریاضیات)

$$\begin{cases} f(x) = \tan x \\ x = \tan^{-1}(f(x)) \end{cases}$$

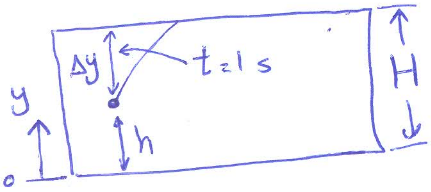
$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\cancel{۲۹٫۴}^{\,۲٫۳۵}}{\cancel{۱۲٫۵}}\right) = \boxed{۶۷^\circ}$$ ب

به کمک ماشین حساب محاسبه کنید

ت) مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ از لحظهٔ پرتاب به لبهٔ دیوار برسد ۱ ثانیه است.

از رابطهٔ زیر می‌توانیم فاصلهٔ مکان اولیهٔ توپ تا لبهٔ دیوار را بدست بیاوریم:

$$y - y_0 = -\frac{1}{۲} g t^۲ + v_{0y} t$$



$$H = \Delta y + h = (y - \cancel{y_0}^{\,h}) + h = y$$

$$y_0 = h$$

$$y = H$$

$$\cancel{y}^{\,H} - \cancel{h} = -\frac{1}{۲} g (1)^۲ + ۲۹٫۴\,(1)$$

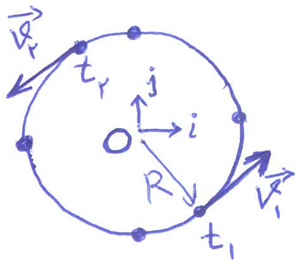
$$H = -\frac{1}{۲} g + ۲۹٫۴ + \cancel{h} = \boxed{۲۵٫۵\ m}$$ ت

۲ فردی که سوار بر چرخ و فلک است حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در لحظهٔ $t_1 = ۲s$ سرعت فرد $\vec{v}_1 = (۳\frac{m}{s})\hat{i} + (۴\frac{m}{s})\hat{j}$ است. که در دستگاه مختصات افقی xy اندازه‌گیری شده است. در لحظهٔ $t_2 = ۵s$ سرعت فرد $\vec{v}_2 = (-۳\frac{m}{s})\hat{i} + (-۴\frac{m}{s})\hat{j}$ است. بزرگی (الف) شتاب مرکزگرای فرد و (ب) شتاب میانگین فرد در بازه زمانی $t_2 - t_1$ چقدر است؟

پاسخ:

$t_1 = ۲s \rightarrow \vec{v}_1 = ۳\hat{i} + ۴\hat{j}$

$t_2 = ۵s \rightarrow \vec{v}_2 = -۳\hat{i} - ۴\hat{j}$



با توجه به مقادیر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ متوجه می‌شویم که فرد در بازه زمانی $t_2 - t_1 = ۳s$ نصف دور را طی کرده است.
بنابراین زمان یک دوره تناوب $T = ۶s$ است.

حرکت دورانی چرخ و فلک یکنواخت است بنابراین فقط شتاب مرکزگرا خواهیم داشت.

از طرفی $v = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵ \ m/s$

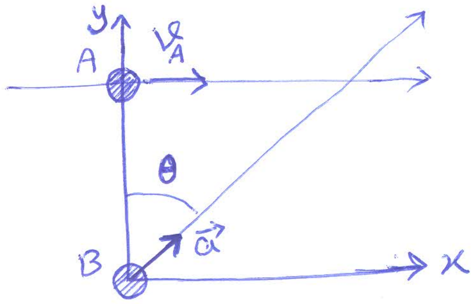
دوره تناوب $T = \frac{۲\pi R}{v} = \frac{۲\pi}{v}\left(\frac{v^۲}{a}\right) \Rightarrow a = \frac{۲\pi v}{T}$

$$a = \frac{۲(۳{,}۱۴)(۵)}{۶} = \boxed{۵{,}۲۴ \ \frac{m}{s^۲}} \quad \text{(الف)}$$

$$\vec{a}_{ave} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{-۳i - ۴j - (۳i + ۴j)}{۵ - ۲} = \frac{-۶i - ۸j}{۳} = -۲\hat{i} - ۲{,}۶۷\hat{j}$$

$$a_{ave} = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۲{,}۶۷)^۲} = \boxed{۳{,}۳۳ \ \frac{m}{s^۲}} \quad \text{(ب)}$$

۳ در شکل زیر، ذره‌ی A در امتداد خط $y=۳۰m$ با سرعت ثابت $\vec{v}$ به بزرگی $۳\frac{m}{s}$ و موازی محور x حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که ذره A از محور y می‌گذرد ذره‌ی B از مبداء با تندی اولیه‌ی صفر و شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $۰٫۴\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. زاویه‌ی θ بین $\vec{a}$ و سوی مثبت محور y که در نتیجه برخورد این دو ذره به وجود می‌آید چقدر است؟



پاسخ: مسئله را تا انتها به صورت پارامتری حل می‌کنیم و سپس به صورت عددی حل می‌کنیم.

$y_A = h = ۳۰\ m$

$v_A = ۳\ \frac{m}{s}$

$v_{0B} = ۰$

شتاب B ثابت است پس می‌توانیم معادلات شتاب ثابت را در جهت x و y به طور جداگانه برای ذره‌ی B بنویسیم.

$$y_B - y_{0B} = \frac{۱}{۲} a_{yB} t^۲ + v_{0yB} t$$ (معادله در جهت y)

معادله را برای زمانی که ذره‌ی B به خط $y_B = h$ می‌رسد بازنویسی می‌کنیم.

$$h - ۰ = \frac{۱}{۲}(a_B \cos\theta) t^۲ + ۰$$

$$h = \frac{۱}{۲} a \cos\theta\ t^۲ \quad (۱)$$

$$x - x_0 = \frac{۱}{۲} a_{xB} t^۲ + v_{0xB} t$$ (معادله در جهت x)

$$x = \frac{۱}{۲} a_B \sin\theta\ t^۲$$

با توجه به اینکه برای حالتی که دو ذره باید به هم برسند می‌توانیم معادله‌ی x را برای هر دو ذره‌ی A و B بنویسیم و برابر هم قرار دهیم. معادله در جهت x برای ذره‌ی A که با سرعت ثابت حرکت می‌کند به صورت $x = v_A t$ است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$v_A \cancel{t} = \frac{۱}{۲} a_B \sin\theta\ t^{\cancel{۲}} \Rightarrow v_A = \frac{۱}{۲} a_B \sin\theta\ t \Rightarrow t = \frac{۲ v_A}{a_B \sin\theta} \quad (۲)$$

معادلهٔ ۲ را در معادلهٔ ۱ جایگذاری می‌کنیم.

$$h = \frac{1}{2} a_B \cos\theta \left(\frac{2 V_A}{a_B \sin\theta} \right)^2$$

$$h = \frac{1}{2} a_B \cos\theta \cdot \frac{4 V_A^2}{a_B^2 \sin^2\theta}$$

از ریاضیات $\Leftarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$h = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \cancel{a_B} V_A^2 \frac{\cos\theta}{a_B^{\cancel{2}} (1 - \cos^2\theta)} \Rightarrow h a_B (1 - \cos^2\theta) = 2 V_A^2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow h a_B - h a_B \cos^2\theta = 2 V_A^2 \cos\theta \Rightarrow \boxed{h a_B \cos^2\theta + 2 V_A^2 \cos\theta - h a_B = 0}$$

معادله درجه دوم

حالت کلی

معادله درجه دوم $\quad a x^2 + b x + c = 0$

حل معادله درجه دوم

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

متغیر معادله $\{ x = \cos\theta$

ضرایب معادله

$$\begin{cases} a = h a_B = 30 \times 0/4 = 12 \\ b = 2 V_A^2 = 2 (3)^2 = 18 \\ c = -h a_B = -30 \times 0/4 = -12 \end{cases}$$

$$12 x^2 + 18 x - 12 = 0$$

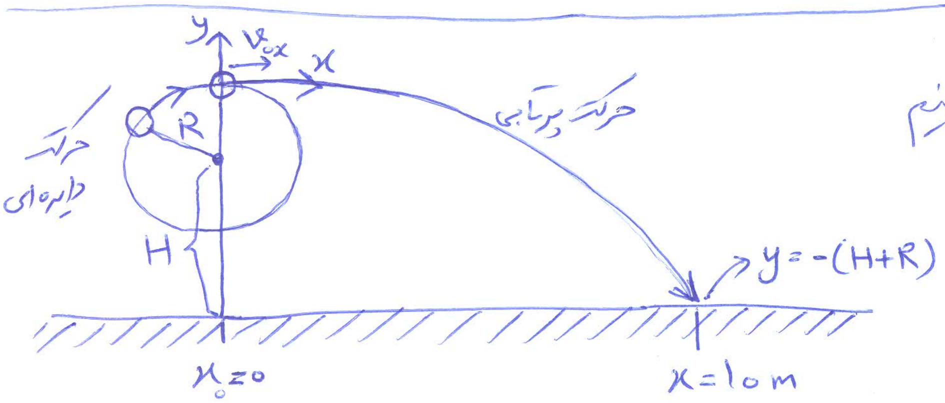
$$\Delta = 18^2 - 4(12)(-12) =$$

$$x_{1,2} = \ldots$$

$$x = \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ}$$

۴ بچه‌ای سنگی را به وسیله‌ی ریسمانی به طول $R=1.5\,m$ در یک دایره‌ی افقی که به اندازه $H=2m$ بالاتر از سطح زمین است، می‌چرخاند. ریسمان پاره و سنگ به طور افقی رها می‌شود و پس از طی یک مسافت افقی به طول $x=10m$، با زمین برخورد می‌کند. بزرگی شتاب مرکزگرای سنگ (a) در هنگام حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

پاسخ: شکل مقابل را رسم می‌کنیم



سنگ در ابتدا در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، اما هنگامی که طناب پاره می‌شود، سنگ حرکت پرتابی انجام می‌دهد. برای محاسبه‌ی شتاب مرکزگرای سنگ حول نقطه‌ی دوران باید از رابطه‌ی $a=\frac{v^2}{R}$ استفاده کنیم. در این رابطه، v سرعت دورانی (مماسی) سنگ است که با سرعت اولیه‌ی سنگ در لحظه‌ی پاره شدن طناب برابر است. بنابراین اگر بتوانیم از قسمت حرکت پرتابی، سرعت اولیه در لحظه‌ی پاره شدن طناب را پیدا کنیم در این صورت می‌توانیم شتاب مرکزگرا را از رابطه‌ی $a=\frac{v^2}{R}$ بدست آوریم.

معادله‌ی در جهت y در حرکت پرتابی $\Big\}$ $y-y_0=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t \Rightarrow -(H+R)-0=-\frac{1}{2}gt^2+(0)t$

$$\Rightarrow +(H+R)=+\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2(H+R)}{g}}$$

معادله در جهت x در حرکت پرتابی سرعت ثابت $\Big\}$ $v_{0x}=x/t=x\sqrt{\frac{g}{2(H+R)}} \Rightarrow v_{0x}$ در حرکت پرتابی $=v$ در حرکت دایره‌ای

شتاب مرکزگرا در حرکت دایره‌ای $\Big\}$ $a=\boxed{\frac{v^2}{R}=\frac{x^2 g}{2(H+R)R}}$

مثال) کشتی A به اندازه $y_{AB}=4\ km$ در شمال و $x_{AB}=2,5\ km$ در شرق کشتی B واقع است. کشتی A دارای سرعت ثابت $v_A=22\ km/h$ به طرف جنوب و کشتی B دارای سرعت $v_B=40\ \frac{km}{h}$ در جهت $\theta=37^\circ$ شمال شرق است.

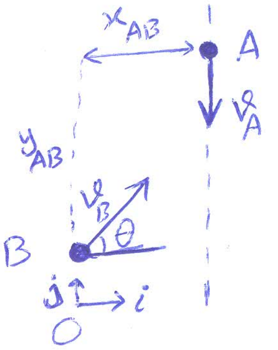
(الف) سرعت A نسبت به B بر حسب نمادگذاری بردار یکه و با در نظر گرفتن $\hat{i}$ به طرف شرق چیست؟

(ب) عبارتی برای مکان A نسبت به B بر حسب تابعی از t بنویسید که در آن $t=0$ زمانی است که کشتی‌ها در مکان‌های بالا هستند.

(پ) در چه زمانی فاصله بین کشتی‌ها کمترین مقدار است؟

(ت) این کمترین فاصله چقدر است؟

(الف)



$$\vec{v}_{AB} = v_{x_{AB}}\hat{i} + v_{y_{AB}}\hat{j}$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

دو روش برای تعیین $\vec{v}_{AB}$

$$\vec{v}_A = -v_A\hat{j}$$

$$\vec{v}_B = v_B\cos\theta\,\hat{i} + v_B\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_{AB} = -v_A\hat{j} - [v_B\cos\theta\,\hat{i} + v_B\sin\theta\,\hat{j}]$$

$$\boxed{\vec{v}_{AB} = (-v_B\cos\theta)\hat{i} + (-v_B\sin\theta - v_A)\hat{j}}$$ الف

با جایگذاری اعداد $\vec{v}_{AB} = -32\hat{i} - 46\hat{j}$

(ب) از طریق انتگرال گیری از مؤلفه‌های سرعت نسبی می‌توانیم مکان نسبی را بدست آورد.

$$\vec{r}_{AB} - \vec{r}_{0_{AB}} = \int \vec{v}_{AB}\,dt = \int [(-v_B\cos\theta)\hat{i} + (-v_B\sin\theta - v_A)\hat{j}]\,dt$$

ب

$$\boxed{\vec{r}_{AB} = (x_{AB} - v_B t\cos\theta)\hat{i} + (y_{0_{AB}} - (v_B\sin\theta + v_A)t)\hat{j}}$$

با عدد گذاری معادله مقابل، $\vec{r}_{AB}$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\vec{r}_{AB} = (2,5 - 32t)\hat{i} + (4 - 46t)\hat{j}$$

پ) بزرگی فاصله بین دو کشتی از رابطه فیثاغورث بدست می آید:

$$|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2} = \sqrt{(x_{o_{AB}} - v_B t\cos\theta)^2 + (y_{o_{AB}} - (v_B\sin\theta + v_A)t)^2}$$

برای محاسبه کمترین مقدار فاصله r_{AB}، از رابطه بالا نسبت به t مشتق می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم

$$\frac{dr_{AB}}{dt} = 0$$

مشتق توابع رادیکالی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{U} \quad , \quad U = g(x) \\ f'(x) = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}_{AB}| = \frac{U'}{2\sqrt{U}} = 0 \quad \Rightarrow U' = 0$$

$$U = (x_{o_{AB}} - v_B t\cos\theta)^2 + (y_{o_{AB}} - (v_B\sin\theta + v_A)t)^2$$

$$U' = 2(x_{o_{AB}} - v_B t\cos\theta)(-v_B\cos\theta) + 2(y_{o_{AB}} - (v_B\sin\theta + v_A)t)(-(v_B\sin\theta + v_A))$$

$$U' = 0 \Rightarrow x_{o_{AB}}(-v_B\cos\theta) + (v_B^2\cos^2\theta)t - y_{o_{AB}} v_B\sin\theta - y_{o_{AB}} v_A + (v_B\sin\theta + v_A)(v_B\sin\theta + v_A)t = 0$$

با عدد گذاری رابطه بالا به مقدار $t = 0/084\ h$ ساعت می رسیم.

ت) با جایگذاری $t = 0/084$ در رابطه $|\vec{r}_{AB}|$ مقدار کمترین فاصله بدست می آید.

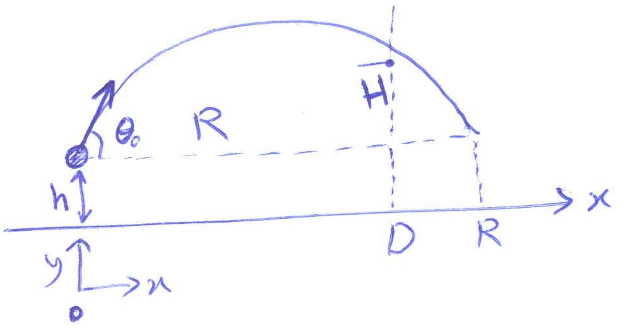
٦

ضربه زننده توپ در بازی بیسبال، به توپ پرتاب شده‌ای که مرکزش $h=1.22\,m$ بالای سطح زمین است ضربه می‌زند. زاویه جدا شدن توپ $\theta_0=45^\circ$، برد افقی آن (پس از بازگشت به سطح ارتفاع پرتاب) $R=107\,m$ است.

(الف) آیا توپ از مانعی به بلندی $H=7.32\,m$ که به فاصله افقی $D=97.5\,m$ از نقطه پرتاب است عبور می‌کند؟

(ب) وقتی که توپ به مانع رسید، فاصله بین بالای مانع و مرکز توپ چقدر است؟

پاسخ:



$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\theta_0}}$$

حال به کمک معادله مسیر ارتفاع را بدست می‌آوریم.

$$y=x\tan\theta_0-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2+y_0$$

$$y=D\tan\theta_0-\frac{g}{2\left(\frac{Rg}{\sin 2\theta_0}\right)\cos^2\theta_0}\cdot D^2+h$$

$$y=D\tan\theta_0-\frac{g\,2\sin\theta_0\cos\theta_0}{2Rg\cos^2\theta_0}\cdot D^2+h$$

الف: حل پارامتری

الف: حل عددی

$$y=D\tan\theta_0-\frac{\tan\theta_0}{R}D^2+h=\boxed{D\tan\theta_0\left(1-\frac{D}{R}\right)+h}=9.86\,m$$

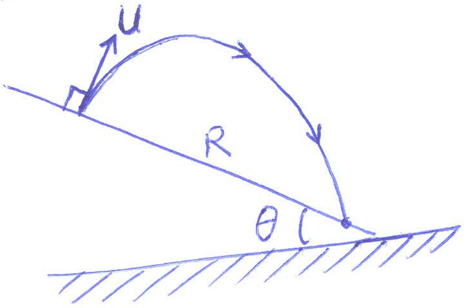
در نتیجه می‌بینیم که $y>H$ و توپ از مانع عبور می‌کند.

ب) فاصله توپ از بالای مانع برابر $h'=y-H=2.54\,m$ است

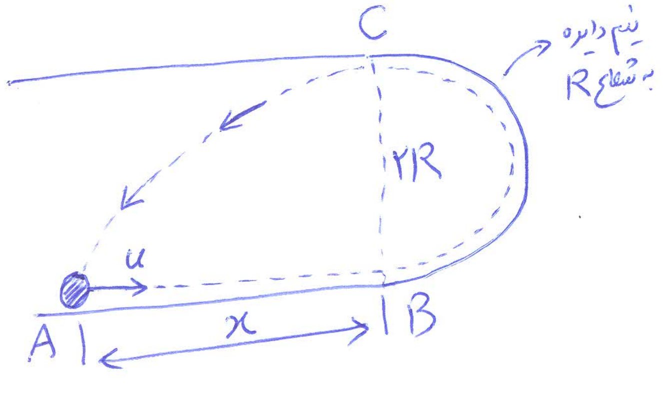
$$h'=y-H=9.86-7.32=\boxed{2.54\,m}$$ ب

تمرین

۱. پرتابه‌ای با سرعت u تحت زاویه قائم نسبت به یک سطح شیبدار شلیک می‌شود. در حالیکه زاویه سطح شیبدار با امتداد افق θ می‌باشد، رابطه‌ای بیابید که مسافت R را تا نقطه برخورد در امتداد سطح شیبدار بیان کند.



۲. شخصی توپ کوچکی را از محل A روی زمین می‌غلتاند. اگر $x = ۳R$ باشد، تعیین کنید سرعت پرتاب u را به گونه‌ای که توپ پس از طی مسیر ABC از نقطه C به صورت پرتابه‌ای به نقطه A بازگردد.



۳. یک پرتابه ۲ ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین به اندازه ۶۰ m افقی و ۵۰ m عمودی از نقطه پرتاب جابه‌جا شده است. در لحظه‌ای که پرتابه به ارتفاع بیشینه خود از سطح زمین می‌رسد، چه مسافتی را به طور افقی از نقطه پرتاب طی کرده است؟