قضیه: "وجود و یکتایی جواب مسائل IVP"

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

در این صورت اگر توابع $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$ در بازه I که شامل نقطه x_0 است پیوسته باشند آنگاه مسئله فوق در I دارای جواب منحصر به فرد است.

Ex.) $(x^2-3x)\,y'' + x\,y' - (x+3)\,y = 0 \quad y(1) = 2\,,\; y'(1) = 1$

بزرگترین بازه‌ای که مسئله فوق در آن دارای جواب است را بیابید:

معادله همگن است و $r(x) = 0$ $\quad p(x) = \dfrac{x}{x^2-3x} \quad q(x) = \dfrac{-(x+3)}{x^2-3x}$

$$\boxed{I = (0,3)}$$

Ex.) بزرگترین بازه‌ای که در آن همان معادله با شرط‌های $\begin{cases} y(4) = 2 \\ y'(4) = 1 \end{cases}$ جواب دارد؟

$I = (3, +\infty)$

قضیه "اصل انطباق یا برهم نهی جواب ها" Superposition

فرض کنیم $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ جواب های معادله دیفرانسیل خطی و همگن

از مرتبه n زیر باشد.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

در این صورت به ازاء هر $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ تابع $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$

نیز جواب معادله فوق است.

(؟) اگر معادله ناهمگن - خطی باشد باز هم اصل بالا صدق می کند؟ $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

اگر جواب های آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشد و فرض کنیم $y = c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جواب باشد:

$$\begin{cases} y' = c_1y_1' + c_2y_2' \\ y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' \end{cases}$$

$$(c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = r(x)$$

اشتباه است و به تناقض رسیدیم

$$c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = c_1r(x) + c_2r(x) = r(x)(c_1 + c_2) \neq r(x)$$

اگر معادله غیرخطی باشد آیا ترکیب خطی $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ جواب معادله است؟

$y'' + p(x)y' + q(x)y^2 = 0 \longrightarrow$ جواب $y_1(x), y_2(x)$

اگر $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جواب باشد در صورت جایگذاری به علت توان 2 عبارت y^2 جملات

اضافه ایجاد کرده و $c_1y_1 + c_2y_2$ جواب نخواهد بود.

تذکر: اصل انطباق تنها برای معادلات دیفرانسیل خطی و همگن صادق است.

استقلال خطی و وابستگی خطی

دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در $[a,b]$ **مستقل خطی** گوییم هرگاه به ازای هر x در این بازه رابطهٔ $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$ نتیجه دهد: $c_1=c_2=0$

در غیر این صورت اگر c_2 و c_1 هردو همزمان صفر نباشند

دو تابع وابسته خطی هستند.

$y_1=-\frac{c_2}{c_1}y_2 \rightsquigarrow \frac{y_1}{y_2}=k$ (ثابت) وابستگی خطی

*

$\frac{y_1}{y_2}=$ تابعی از x استقلال خطی

مثال) توابع $y_1=x$ و $y_2=3x$ روی $\mathbb{R}$ وابسته خطی هستند.

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{3}$ $\quad c_1=-3, c_2=1 \quad -3y_1+y_2=0$

مثال) همچنین توابع $y_1=e^x$ $y_2=e^{2x}$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند.

$c_1e^x+c_2e^{2x}=0 \longrightarrow c_1=c_2=0 \qquad \frac{y_1}{y_2}=e^{-x}$

مثال) توابع $y_1=x|x|$ و $y_2=x^2$ چه وضعیتی دارند؟

$I_1=(0,+\infty)$

روی بازه I_1 یا I_2 وابسته هستند

$I_2=(-\infty,0)$

و روی هر بازه‌ای شامل $x=0$ مستقل خطی هستند.

تذکر: مفهوم استقلال خطی و وابستگی خطی را می‌توان برای بیشتر از ۲ تابع تعریف کرد

توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$

در $[a,b]$ مستقل خطی گوییم

هرگاه رابطهٔ $c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$

نتیجه دهد $c_1=c_2=\dots=c_n=0$

در غیر این صورت اگر c_1 تا c_n همزمان صفر نباشند توابع فوق را وابسته خطی گوییم.

مثال) چه وضعیتی دارند؟ $y_1 = 2x \quad y_2 = -x \quad y_3 = e^x$

وابسته خطی هستند: $c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 0$

$y_1 = 0 \quad y_2 = e^x \quad y_3 = e^{2x}$

وابسته $c_1 =$ عدد دلخواه غیرصفر $\quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0$

نکته: تابع $y=0$ با توابع دیگر وابسته خطی می سازد. زیرا ضریبش غیرصفر می تواند باشد.

مثلاً: $y_1 = 0,\ y_2 = f(x) \rightarrow c_1 = 1 \quad c_2 = 0$

تعریف "رونسکین یا دترمینان رونسکی" wronskian

$$\underbrace{W(y_1, y_2)(x_0)}_{W(x_0)} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)$$

$2x^2$

به طور مشابه رونسکین توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ در x_0 با رابطه زیر تعریف می شود.

$$W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0), & y_2(x_0), & \dots, & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0), & y_2'(x_0), & \dots, & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0), & y_2^{(n-1)}(x_0), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$W(2x, -x)(x) = \begin{vmatrix} 2x & -x \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ حدس می زنیم رونسکین توابع وابسته صفر

$$W(e^x, e^{2x})(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

و توابع مستقل غیرصفر است.

تذکر) اگر f و g در بازه I مشتق پذیر باشند آنگاه f و g در این بازه وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر $\forall x \in I ; w(f,g)(x)=0$

فرض کنیم f و g در I وابسته خطی هستند. در این صورت $f(x)=Kg(x)$ در نتیجه

$$w(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Kg(x) & g(x) \\ Kg'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0 \quad \forall x \in I$$

بالعکس فرض می‌کنیم $\forall x \in I ; w(f,g)=0$ در نتیجه:

$$f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=0 \xrightarrow[g\neq 0]{f\neq 0} \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)} \xrightarrow{\int dx} f(x)=cg(x)$$

وابستگی خطی

$$\ln^{f(x)}=\ln^{cg(x)}$$

برای n تابع نیز به همین صورت ...

تمرین) اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌ها معادله دیفرانسیل زیر باشند

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

آنگاه رونسکین y_1 و y_2 عبارت است از

$$w(y_1,y_2)(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$$ «فرمول آبل»

که در آن C ثابتی مستقل از x است.

(؟) رابطه بالا را اثبات کنید.

تذکر: رونسکین کلاً صفر است یا هیچ‌گاه صفر نخواهد شد.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ← خطی و همگن ← $y = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب معادله است

$y_1(x)$ $y_2(x)$ جواب ها ؟ اما جواب عمومی آن نیست لزوماً!

اگر y_1 و y_2 وابسته خطی باشند مثلاً $y_2 = \alpha y_1$ در نتیجه $y = c^* y_1$

از آنجا که معادله مرتبه ۲ بوده پس جواب عمومی آن دارای ۲ ثابت عددی است ولی $y = c^* y_1$

یک ثابت عددی دارد پس جواب عمومی نخواهد داشت

پس باید ۲ جواب مستقل پیدا کنیم یا اگر مرتبه n بود؛ n جواب مستقل بیابیم

تذکر: اگر $y_1, \ldots, y_n$ ، n جواب برای معادله دیفرانسیل خطی و همگن

از مرتبه n زیر باشند:

$$y^{(n)} + (a_{n-1}(x))\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

آنگاه طبق اصل انطباق $y^* = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ نیز جواب مسئله است

اما این جواب در حالت کلی جواب عمومی نیز نمی باشد و تنها در صورتی که n تابع

مستقل خطی باشند آنگاه $y^* = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ جواب عمومی معادله است.