ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

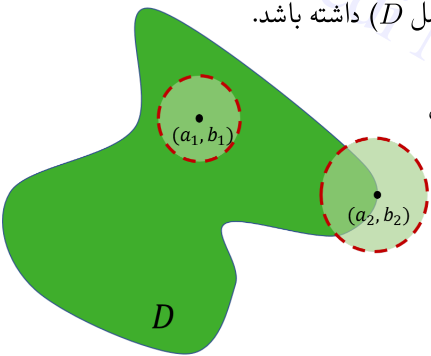
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مشتق توابع چندمتغیره

نقاط درونی و مرزی

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت:

- نقطه‌ی $P \in D$ یک نقطه‌ی درونی D نامیده می‌شود، هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که کاملاً در D قرار گیرد.
- نقطه‌ی $P \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه‌ی مرزی D نامیده می‌شود، هرگاه هر همسایگی از P نقطه‌ای در D و نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n \backslash D$ (مکمل D) داشته باشد.

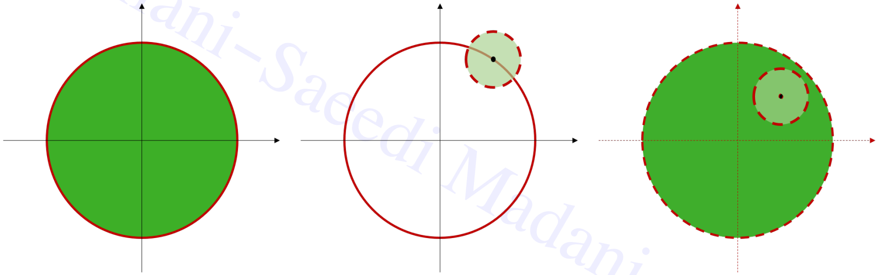


به طور مثال، در شکل مقابل، ناحیه‌ی D، نقطه‌ی درونی (a_1, b_1)، و نقطه‌ی مرزی (a_2, b_2) از آن در $\mathbb{R}^2$ نمایش داده شده‌اند.

درون، مرز، و ناحیه‌های باز و بسته

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت:

- مجموعه‌ی نقاط درونی D، درون D نامیده می‌شود.
- مجموعه‌ی نقاط مرزی D، مرز D نامیده می‌شود.
- ناحیه‌ی D باز نامیده می‌شود، هرگاه هر نقطه‌ی آن یک نقطه‌ی درونی باشد (یعنی D با درون خودش برابر باشد).
- ناحیه‌ی D بسته نامیده می‌شود، هرگاه هر نقطه‌ی مرزی آن در خود D باشد (یعنی مرز D کاملاً در D قرار گیرد).



دیسک یکه‌ی باز:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

مرز دیسک یکه‌ی باز:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
(دایره‌ی یکه)

دیسک یکه‌ی بسته:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

مشتق جزیی

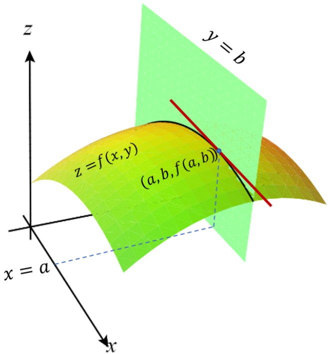
فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع چندمتغیره است. مشتق جزیی مرتبه‌ی اول f نسبت به مؤلفه‌ی iام $(i = 1, \ldots, n)$ در نقطه‌ی درونی $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$، با نماد $f_i(a_1, \ldots, a_n)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

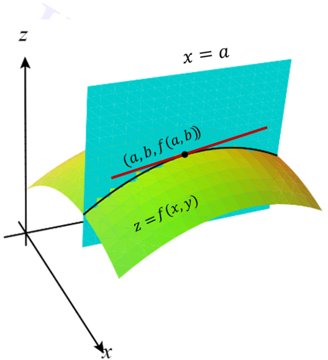
در حالت $n = 2$ و با در نظر گرفتن $P = (a, b)$، داریم:

$$f_1(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_2(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$



شیب خط مماس بر خم فصل مشترک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = b$ در نقطه‌ی $(a, b, f(a, b))$ همان $f_1(a, b)$ است.



شیب خط مماس بر خم فصل مشترک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $x = a$ در نقطه‌ی $(a, b, f(a, b))$ همان $f_2(a, b)$ است.

مثال

فرض کنید $f(x,y) = x^2 \sin(y)$. در این صورت، $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ را بیابید.

پاسخ:

داریم:

$$f_1(x,y) = x \text{ مشتق جزیی } f \text{ نسبت به } = 2x\sin(y)$$

$$f_2(x,y) = y \text{ مشتق جزیی } f \text{ نسبت به } = x^2\cos(y)$$

نمادگذاری:

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ یک نقطه‌ی درونی است. در این صورت، به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، مشتق جزیی اول نسبت به مؤلفه‌ی i–ام در P را با نمادهای زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f_i(a_1, \ldots, a_n) &= f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, \ldots, a_n) = D_i f(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

توجه:

همه‌ی قواعد متعارف مشتق گیری در توابع تک‌متغیره‌ی اسکالر که در ریاضی ۱ دیده‌ایم، مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ترکیب با یك تابع تك‌متغیره‌ی اسکالر، برای مشتقات جزئی توابع چندمتغیره نیز برقرارند.

مثال

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همه‌جا مشتق‌پذیر است. نشان دهید که $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

پاسخ:

فرض کنید که $g:D\to\mathbb{R}$ به صورت $g(x,y)=\dfrac{x}{y}$ تعریف می‌شود، که در آن $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$. داریم $z(x,y)=f(g(x,y))$. پس:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(g(x,y))=\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\right)f'(g(x,y))=\frac{1}{y}f'(g(x,y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(g(x,y))=\left(\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\right)f'(g(x,y))=-\frac{x}{y^2}f'(g(x,y))$$

بنابراین، داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}f'(g(x,y))-\frac{x}{y}f'(g(x,y))=0$$

توجه:

برخلاف توابع تک‌متغیره، وجود مشتقات جزیی یک تابع چندمتغیره، پیوستگی آن تابع را نتیجه نمی‌دهد.

مثال

نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست، اما مشتقات جزیی اول آن در مبدأ وجود دارند.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-2xy}{x-y} & ,x\neq y\\ 0 & ,x=y\end{cases}$$

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- مسیر $x=0$:

واضح است که تابع f روی این مسیر برابر با 0 است.

- مسیر $y=\frac{x-x^3}{1-2x}$ به‌ازای $x<\frac{1}{2}$ (حاصل از برابر قرار دادن صورت و مخرج):

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,\frac{x-x^3}{1-2x}\right)=1$$

بنابراین، f در مبدأ پیوسته نیست.

توجه: می‌توانستیم مسیر $y=x+\frac{x^2}{2}$ را نیز در نظر بگیریم (حد تابع روی این مسیر برابر با 4 می‌شود).

ادامه‌ی مثال

حال، نشان می‌دهیم که $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ به صورت زیر موجود هستند:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-0}{h-0} - 0}{h} = 0$$

$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-0}{0-h} - 0}{h} = 0$$

مثال

فرض کنید تابع $f(x, y, z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. در مورد پیوستگی f و وجود مشتقات جزیی اول آن در مبدأ بحث کنید. آیا $f_1(x, y, z)$ تابعی پیوسته است؟

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر بگیرید:

- هر مسیر صفحه‌ی $x = 0$ (مثل $x = y = 0$):
واضح است که تابع f روی این مسیر برابر با 0 است.
- مسیر $x = y = z$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4+x^4}=\frac{1}{3}$$

بنابراین، f در مبدأ پیوسته نیست.

ادامه‌ی مثال

حال، مشتقات جزیی اول f را در مبدأ بررسی می‌کنیم:

$$f_1(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4+0+0} - 0}{h} = 0$$

به طور مشابه، می‌توان دید که $f_2(0,0,0) = f_3(0,0,0) = 0$.

حال، ضابطه‌ی $f_1(x,y,z)$ را به‌دست می‌آوریم و پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم. به‌ازای $(x,y,z) \neq (0,0,0)$، داریم:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= \frac{(y^2z)(x^4+y^4+z^4) - (4x^3)(xy^2z)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \\ &= \frac{(y^2z)(-3x^4+y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \end{aligned}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، ضابطه‌ی $f_1(x,y,z)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_1(x,y,z)=\begin{cases}\frac{(y^2z)(-3x^4+y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2} & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

مسیر $x=y=z$ را در نظر بگیرید. روی این مسیر، داریم:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x,x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(-3x^4+x^4+x^4)}{(x^4+x^4+x^4)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{x^7}{9x^8}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{9x}$$

$$=\begin{cases}-\infty & ,(x\to 0^+)\\ +\infty & ,(x\to 0^-)\end{cases}$$

بنابراین، $f_1(x,y,z)$ در مبدأ پیوسته نیست.

مشتقات جزیی مرتبه‌های بالاتر

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ یک نقطه‌ی درونی است. در این صورت، تعریف می‌کنیم:

$$\text{مشتق جزیی دوم نسبت به مؤلفه‌ی } i\text{–ام} = (f_i)_i \, (a_1, \ldots, a_n) = (f_{x_i})_{x_i} \, (a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1, \ldots, a_n)$$

در این صورت، به شکلی مختصر، از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{مشتق جزیی دوم نسبت به مؤلفه‌ی } i\text{–ام} = f_{ii}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_i x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a_1, \ldots, a_n)$$

مشتقات جزیی مرتبه‌های بالاتر

هم‌چنین، در حالت کلی به‌ازای عدد صحیح و مثبت $l \geq 2$، تعریف می‌کنیم:

$$\left(f_{\underbrace{i\cdots i}_{\text{بار-}(l-1)}}\right)_i (a_1,\ldots,a_n) = \text{مشتق جزیی } l\text{–ام نسبت به مؤلفه‌ی } i\text{–ام}$$

$$= \left(f_{\underbrace{x_i\cdots x_i}_{\text{بار-}(l-1)}}\right)_{x_i} (a_1,\ldots,a_n)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_i^{l-1}}\right)(a_1,\ldots,a_n)$$

در این صورت، به شکلی مختصر، از نمادگذاری‌های زیر به منظور نمایش مشتق جزیی l–ام نسبت به مؤلفه‌ی i–ام استفاده می‌کنیم:

$$f_{\underbrace{i\cdots i}_{\text{بار-}l}}(a_1,\ldots,a_n) = f_{\underbrace{x_i\cdots x_i}_{\text{بار-}l}}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^l f}{\partial x_i^l}(a_1,\ldots,a_n)$$

مشتقات جزیی مخلوط:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1, \ldots, a_n)$$

مشتق جزیی بالا را با نمادهای زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$f_{ij}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_i x_j}(a_1, \ldots, a_n)$$

به طور مشابه، مشتقات جزیی مخلوط دیگر، مانند نمونه‌ی زیر قابل تعریف هستند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) &:= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)(a_1, \ldots, a_n)\\ &= f_{122}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_1 x_2 x_2}(a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

مثال

فرض کنید $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x,y,z,w) = xyzw^3$ تعریف می‌شود. در این صورت، f_{xyzw} و f_{xwzy} را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z,w) = yzw^3 \\ f_{xy}(x,y,z,w) = zw^3 \\ f_{xyz}(x,y,z,w) = w^3 \\ f_{xyzw}(x,y,z,w) = 3w^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y,z,w) = yzw^3 \\ f_{xw}(x,y,z,w) = 3yzw^2 \\ f_{xwz}(x,y,z,w) = 3yw^2 \\ f_{xwzy}(x,y,z,w) = 3w^2 \end{cases}$$

قضیه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع است و $P = (a,b) \in D$ یک نقطه‌ی درونی است. در این صورت، اگر f، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک همسایگی P در D، و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در P پیوسته باشند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

در حالت کلی، فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ یک نقطه‌ی درونی است. هم‌چنین، فرض کنید دو مشتق جزیی مخلوط m–ام تابع f در نقطه‌ی P، با مشتق‌گیری‌های یکسان و با ترتیب‌های مختلف باشند. اگر این مشتقات جزیی در P پیوسته باشند، و به‌علاوه f و همه‌ی مشتقات جزیی آن از مرتبه‌ی کم‌تر از m در یک همسایگی از P در D، پیوسته باشند، آن‌گاه دو مشتق جزیی مخلوط یادشده در P برابر هستند.

※ در مثال قبل، با در نظرگرفتن $f(x,y,z,w) = xyzw^3$، دیدیم که

$$f_{xyzw}(x,y,z,w) = f_{xwzy}(x,y,z,w) = 3w^2$$

توجه کنید که f یک چندجمله‌ای است و روی $\mathbb{R}^n$ مشتقات جزیی f از هر مرتبه‌ای وجود دارند و پیوسته هستند. پس، بنابر قضیه‌ی قبل، صرفاً با محاسبه‌ی $f_{xyzw}(x,y,z,w)$ می‌توانستیم نتیجه بگیریم که $f_{xwzy}(x,y,z,w) = f_{xyzw}(x,y,z,w)$.

※ در صورتی که شرایط قضیه‌ی قبل برقرار نباشند، ممکن است با تغییر ترتیب مشتق‌گیری، به نتایج متفاوتی برسیم (مثال بعدی چنین شرایطی را نشان می‌دهد).

مثال

فرض کنید f به صورت زیر تعریف شده است. نشان دهید که f_1، f_2، f_{12} و f_{21} در $(0,0)$ موجود هستند؛ اما $f_{12}(0,0) \neq f_{21}(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

پاسخ: داریم:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0} - 0}{h} = 0$$

به طور مشابه، می‌توان دید که $f_2(0,0) = 0$. به‌ازای $(x,y) \neq (0,0)$، داریم:

$$f_1(x,y) = \frac{4x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_2(x,y) = -\frac{4xy^2}{x^2+y^2} + \frac{2x(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ادامه‌ی مثال

بنابراین، داریم:

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{4x^2y}{x^2+y^2}-\frac{2y(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases}-\frac{4xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2x(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حال، داریم:

$$f_{12}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_1(0,h)-f_1(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{0+h^2}-\frac{2h(0-h^2)^2}{(0+h^2)^2}}{h}=-2$$

$$f_{21}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{0}{h^2+0}+\frac{2h(h^2-0)^2}{(h^2+0)^2}}{h}=2$$

بنابراین، $f_{12}(0,0)\neq f_{21}(0,0)$.

ادامه‌ی مثال

توجه:

⁎ با استفاده از مختصات قطبی به‌سادگی می‌توان دید که توابع f، f_1 و f_2 در نقطه $(0,0)$ پیوسته هستند. از طرفی، از ضابطه‌های این توابع، واضح است که در هر نقطه‌ی دیگر از $\mathbb{R}^2$ پیوسته هستند. بنابراین این توابع روی کل $\mathbb{R}^2$ پیوسته هستند.

ادامه‌ی مثال

ادامه‌ی توجه:

※ تابع f_{12} در $(0,0)$ پیوسته نیست؛ زیرا داریم:

$$f_{12}(x,y)=\begin{cases}\frac{2(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6)}{(x^2+y^2)^3} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ -2 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

◄ مسیر $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} f_{12}(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2(0+0-0-y^6)}{(0+y^2)^3}=\lim_{y\to 0}\frac{-2y^6}{y^6}=-2$$

◄ مسیر $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f_{12}(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{2(x^6+0-0-0)}{(x^2+0)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^6}{x^6}=2$$

بنابراین، شرایط قضیه‌ی قبل برقرار نیست.