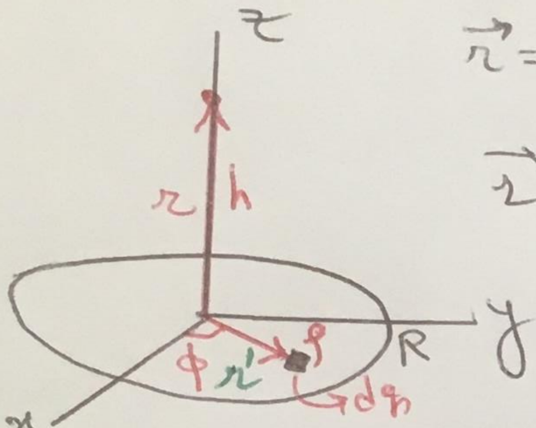
فیزیک عمومی ۲

قانون کولن (ادامه)

مسئله: بار الکتریکی سطحی با چگالی ثابت σ روی یک دیسک نازک دایره‌ای و عایق به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای واقع بر محور عمودی دیسک و به فاصله h از مرکز دیسک بدست آورید.



$$\vec{r}=h\vec{k}\,,\qquad \vec{r}\,'=\rho\cos\phi\,\vec{i}+\rho\sin\phi\,\vec{j}$$

$$\vec{r}-\vec{r}\,'=-\rho\cos\phi\,\vec{i}-\rho\sin\phi\,\vec{j}+h\vec{k}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{\rho^2+h^2}\,,\qquad dq=\sigma\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\phi$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\cdot d\rho\cdot d\phi(-\rho\cos\phi\,\vec{i}-\rho\sin\phi\,\vec{j}+h\vec{k})}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow\vec{E}=\frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\vec{i}\int_0^R\frac{\rho^2\cdot d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\phi\cdot d\phi}_{\text{صفر}}$$

$$-\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\vec{j}\int_0^R\frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\phi\cdot d\phi}_{\text{صفر}}+\frac{\sigma\cdot h}{4\pi\varepsilon_0}\vec{k}\int_0^R\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma \cdot h}{2\varepsilon_0}\vec{k}\int_0^R \frac{\rho \cdot d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot h}{2\varepsilon_0}\vec{k}\left(\frac{-1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right)\Bigg|_0^R \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\vec{k} \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)}$$

حالت خاص 1: صفحه نامحدود با چگالی بار سطحی ثابت σ : $(R \to \infty)$:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

حالت خاص 2: محاسبه میدان برای نقاط دور دست: $(h \gg R) \Leftarrow \frac{R}{h} \ll 1$

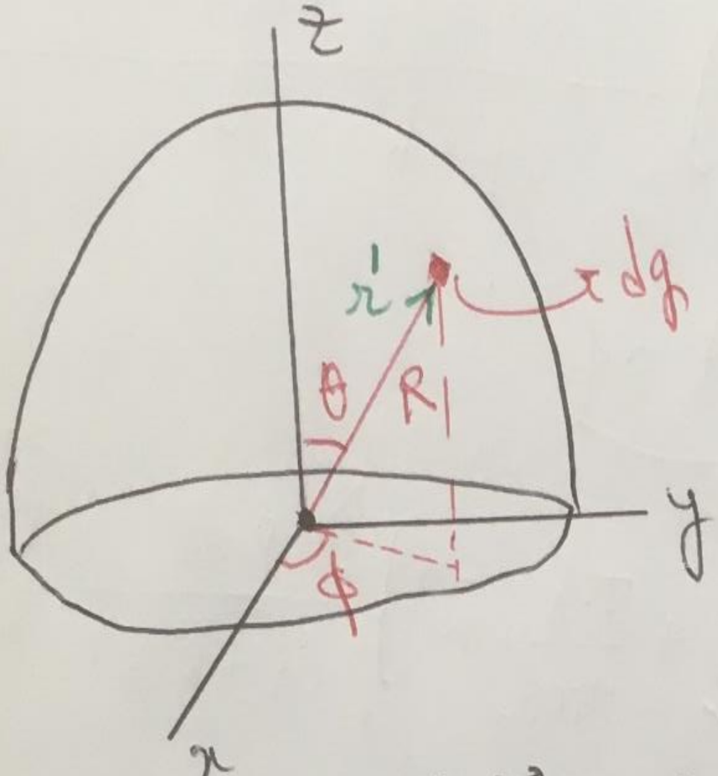
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{h\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1+\frac{R^2}{h^2}\right)^{-1/2}\right) \Rightarrow$$

$$E_z \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{h^2}+\dots\right)\right) \Rightarrow E_z \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2}{2h^2} = \frac{\sigma \cdot R^2}{4\varepsilon_0 h^2} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$E_z \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$

مسئله: بار الکتریکی سطحی با چگالی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \sin\theta$ روی پوسته عایق نیمکره به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مرکز نیمکره (سه مختصات) حساب کنید.



$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}' = R\sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + R\sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + R\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R\sin\theta\cos\phi\,\vec{i} - R\sin\theta\sin\phi\,\vec{j} - R\cos\theta\,\vec{k}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = R \quad , \quad dq = \sigma_0 \sin\theta \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \cdot d\phi$$

$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq(\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec E = \frac{\sigma_0 \cdot R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sin^2\theta \cdot d\theta \cdot d\phi\,(-R\sin\theta\cos\phi\,\vec i - R\sin\theta\sin\phi\,\vec j - R\cos\theta\,\vec K)}{R^3}$$

$$\Rightarrow \vec E = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec i\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi}_{\text{صفر}} - \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec j\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\phi\, d\phi}_{\text{صفر}}$$

$$-\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec K\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\phi \Rightarrow$$

$$\vec E = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec K \cdot \frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2} \times 2\pi \Rightarrow \vec E = \frac{-\sigma_0}{6\varepsilon_0}\vec K$$