مروری بر جلسات قبل

فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول: $F(x,y,y')=0$

فرم صریح: $y'=f(x,y)$

فرم دیفرانسیلی: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

دسته بندی معادلات مرتبه اول:

معادلات جدایی پذیر: $M(x)dx=N(y)dy$

معادلات همگن: $y'=f(y/x)$ or $f(x/y)$

$v=y/x$

معادلات تابع خطوط: $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{\bar{a}x+\bar{b}y+\bar{c}}\right)$

معادلات خطی مرتبه اول: $y'+p(x)y=q(x)$

معادلات برنولی: $y'+p(x)y=q(x)y^n$

$v=y^{1-n}$

معادلات ریکاتی: $y'=p(x)y^2+Q(x)y+R(x)$

$y=y_p+\dfrac{1}{z}$

معادلات کامل: $\left[M_y(x,y)=N_x(x,y)\right]$

معادلات غیرکامل: $M_y(x,y)\neq N_x(x,y)$

یافتن عامل انتگرال ساز

مفهوم جواب غیرعادی:

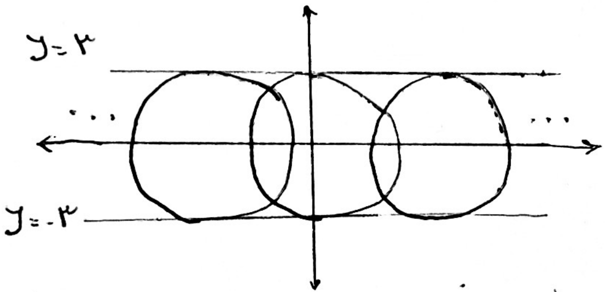
جوابی از معادله دیفرانسیل را نسبت به جواب عمومی آن، غیرعادی می‌نامیم، اگر به ازای هیچ مقدار ثابت دلخواهی نتوان آن را از جواب عمومی به دست آورد.

مثال) به راحتی می‌توان ثابت کرد جواب عمومی معادله $y^2(1+y'^2)=9$ خانواده توابع $(x-c)^2+y^2=9$ است. (چرا؟)

اما این معادله دو جواب خاص دیگر نیز دارد: $y=+3$ و $y=-3$. چراکه به وضوح در معادله صدق می‌کنند. اما این دو جواب به ازای هیچ مقداری از C در خانواده توابع جواب عمومی صدق نمی‌کنند.

چنین جواب‌هایی را جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل می‌خوانیم.

شکل زیر وضعیت جواب‌های عمومی و غیرعادی معادله اخیر را نشان می‌دهد:



در مثال بالا دیدید که یک معادله می‌تواند یک یا چند جواب به غیر از جواب عمومی به دست آمده برای آن نیز داشته باشد، این جواب‌ها همواره مماس بر خانواده جواب‌های عمومی معادله هستند. لذا جواب‌های غیرعادی در مفهوم زیر صدق می‌کنند:

تعریف: منحنی $g(x,y)=0$ را پوش خانواده توابع $f(x,y,c)=0$ می‌نامیم هرگاه این منحنی فقط در یک نقطه مماس به هر یک از اعضای خانواده منحنی‌های مفروض باشد.

برای به دست آوردن پوش یک خانواده منحنی کافیست از آن‌ها نسبت به ثابت C مشتق بگیرید و پارامتر C را از دستگاه زیر حذف کنید

$$\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ f_c(x,y,c)=0 \end{cases}$$

بدیهیست که این دستگاه ممکن است جواب نداشته باشد، یعنی خانواده منحنی f پوش نداشته باشند.

لذا برای به دست آوردن جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل نیز ابتدا جواب عمومی آن را بدست آورد و سپس پوش جواب های عمومی را به روش گفته شده بیابید.

در مثال قبل اگر از خانواده جواب های عمومی نسبت به c مشتق بگیریم داریم:

جواب عمومی $\quad (x-c)^2+y^2=9$

مشتق نسبت به c $\quad -2(x-c)=0$

حذف c از معادلات بالا ساده است چرا که $x=c$ و در نتیجه با جایگذاری در معادله اول داریم $y^2=9$. و این یعنی $y=\pm 3$. که اینها همان جواب های غیرعادی مورد انتظار در مثال قبل است.

تمرین) دوایر با شعاع واحد به مرکز (c,c) روی صفحه xoy را در نظر بگیرید. پوش این خانواده را بیابید.

تمرین) آیا خانواده توابع $y=x^2+c$ پوش دارند؟

تمرین) ثابت کنید $y=cx-c^2$ جواب عمومی معادله $y=xy'-y'^2$ است. آیا این معادله جواب دیگری هم دارد؟

معادلات مرتبه اول خاص:

در تمام این بخش از $y'=p$ استفاده می‌کنیم.

۱) معادلات قابل حل نسبت به y: $y=f(x,y')$

در این حالت بنویسید $y=f(x,p)$ و از طرفین معادله نسبت به x مشتق بگیرید. داریم:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}p'$$

معادله اخیر را حل کنید و جواب آن را به صورت $\varphi(x,p,c)=0$ بنویسید. جواب عمومی معادله از حل دستگاه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases} y=f(x,p) \\ \varphi(x,p,c)=0 \end{cases}$$

در واقع تنها در موارد معدودی می‌توان p را از معادله بالا حذف کرد و جواب را به فرم $g(x,y)=0$ نوشت. در صورتی که حذف p امکان پذیر نباشد سعی می‌کنیم جواب را به صورت یک منحنی پارامتری برحسب p بنویسیم یعنی $x=g_1(p)$ و $y=g_2(p)$

مثال)

$$y=y'+x(y'-1)$$

قرار دهید $y'=p$ و نسبت به x مشتق بگیرید:

$$y=p+xp-x$$

$$p=p'+p+xp'-1 \Rightarrow (1+x)p'=1 \Rightarrow p'=\frac{1}{1+x} \Rightarrow dp=\frac{dx}{1+x}$$

$$\Rightarrow p=\ln|1+x|+c \quad \text{or} \quad p=\ln|c(1+x)|$$

با جایگذاری p در معادله اصلی داریم

$$y=\ln|c(1+x)|\cdot[1+x]-x$$

در این مثال امکان بدست آوردن فرم صریح جواب وجود داشت. اکنون به مثال بعد دقت کنید که در آن جواب به صورت یک تابع پارامتری بیان خواهد شد:

مثال) $y=(y')^2-xy'$

$$y=p^2-xp \xrightarrow[y'=p]{\text{مشتق نسبت به } x} p=2pp'-p-xp' \Rightarrow 2p=(2p-x)p'$$

$$\Rightarrow \underbrace{2p}_{M}\,dx+\underbrace{(x-2p)}_{N}\,dp=0$$

این یک معادله غیرکامل با عامل انتگرال ساز برحسب p است.

$$\begin{cases} M_p=2 \\ N_x=1 \end{cases} \Rightarrow M_p\neq N_x \Rightarrow \text{غیرکامل}$$

$$Q=\frac{M_p-N_x}{-M}=\frac{2-1}{-2p}=\frac{-1}{2p} \Rightarrow \mu=e^{\int Q(p)dp}=e^{\int -\frac{1}{2p}dp}=e^{-\frac{1}{2}\ln p}=\frac{1}{\sqrt{p}}$$

با ضرب عامل انتگرال ساز در معادله اخیر خواهیم داشت:

$$2\sqrt{p}\,dx+\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-2\sqrt{p}\right)dp=0$$

$$\begin{cases} \varphi_x=2\sqrt{p} \\ \varphi_p=\frac{x}{\sqrt{p}}-2\sqrt{p} \end{cases} \Rightarrow \varphi=\int 2\sqrt{p}\,dx=2\sqrt{p}\,x+C(p) \Rightarrow \varphi_p=\frac{1}{\sqrt{p}}x+C'(p)$$

$$\Rightarrow C'(p)=-2\sqrt{p} \Rightarrow C(p)=-\frac{4}{3}p^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi=2\sqrt{p}\,x-\frac{4}{3}p\sqrt{p}=c_1}$$

خب بدیهی است که محاسبه صریح p از این جواب و جایگذاری در معادله اصلی کار ساده‌ای نیست. لذا به جای آن سعی می‌کنیم x و y را برحسب پارامتر p به صورت یک منحنی پارامتری بیان کنیم:

$$\begin{cases} y=p^2-xp \\ 2\sqrt{p}\,x-\frac{4}{3}p\sqrt{p}=c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}p-\frac{c}{\sqrt{p}} \\ y=p^2-\left(\frac{2}{3}p-\frac{c}{\sqrt{p}}\right)p=\frac{p^2}{3}+c\sqrt{p} \end{cases}$$

نکته: این معادله یک جواب غیر عادی نیز دارد: $y=0$!

۲) معادلات قابل حل نسبت به x : $x=f(y,y')$

این حالت مشابه قبل است با این تفاوت که مشتق گیری نسبت به y انجام می شود.

مثال)

$$y = 3y'x + 6(y'y)^2$$

قرار دهید $p=y'$ و نسبت به y مشتق بگیرید:

$$x = \frac{y}{3p} - 2py^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3p - 3\frac{dp}{dy}y}{(3p)^2} - 2\frac{dp}{dy}y^2 - 4py$$

$$\boxed{y'=p \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{3p} - \frac{y}{3p^2}\frac{dp}{dy} - 2y^2\frac{dp}{dy} - 4py$$

برای سادگی دو طرف را در $3p^2$ ضرب کنید:

$$3p - p + y\frac{dp}{dy} + 6y^2p^2\frac{dp}{dy} + 12p^3y = 0$$

$$y\frac{dp}{dy}(1+6yp^2) + 2p + 12p^3y = 0 \Rightarrow (1+6yp^2)\left(y\frac{dp}{dy}+2p\right) = 0 \quad (1)$$

از معادله $2p + y\frac{dp}{dy} = 0$ خواهیم داشت: $\frac{2p}{dp} = \frac{-y}{dy}$ و در نتیجه:

$$\frac{dp}{p} = \frac{-2}{y}dy \Rightarrow \ln p = -2\ln y + \ln c \Rightarrow \ln p = \ln c y^{-2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{c}{y^2}}$$

نتیجه حاصل را در معادله اصلی جایگذاری کنید:

$$x = \frac{y}{3\,c/y^2} + \frac{2c}{y^2}y^2 \Rightarrow x = \frac{y^3}{3c} + 2c \Rightarrow y^3 = 3cx + 6c^2 \quad (2)$$

نکته: این معادله هم یک جواب غیرعادی دارد. به دو روش می توان این جواب غیرعادی را بدست آورد: اول اینکه از معادله $1+6yp^2=0$ مجدداً p را محاسبه کنید و در معادله اصلی قرار دهید. دوم اینکه پوش جواب عمومی حاصل را محاسبه کنید.

در هر دو حالت به یک جواب خواهید رسید: $8x^3+3y^2=0$.

۳) معادله فاقد x ، $f(y,y')=0$

قرار دهید $y'=p$. در حالت ساده ممکن است معادله بر حسب y قابل حل باشد. در این حالت با مشتق گیری نسبت به x یک معادله جدا شدنی بر حسب x و p به وجود خواهد آمد.

مثال)

$$y=\sin y'-y'\cos y'$$

$$y=\sin p-p\cos p \Rightarrow p=(\cos p-\cos p+p\sin p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow dx=\sin p\,dp$$

$$\Rightarrow x+C=-\cos p$$

نتیجه حاصل را در معادله اصلی جایگذاری کنید:

$$y=\sqrt{1-(C+x)^2}+(C+x)\cos^{-1}(-C-x)$$

نکته: $y=0$ جواب غیرعادی است.

اما در حالت کلی اگر معادله بر حسب y و y' قابل حل نباشد شاید تغییر متغیر و استفاده از پارامتر دیگری بتواند راهگشا باشد. قرار دهید $y=\varphi(t)$ و $y'=p=\frac{dy}{dx}=\psi(t)$
در آن صورت:

$$\begin{cases} dy=\varphi'(t)\,dt \\ dy=p\,dx=\psi(t)\,dx \end{cases} \Rightarrow dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$$

که یک معادله جداشدنی است.

مثال)

$$y^{2/5}+(y')^{2/5}=1$$

$$\begin{cases} y=\cos^5\theta & \Rightarrow dy=-5\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta \\ y'=p=\sin^5\theta & \Rightarrow dy=\sin^5\theta\,dx \end{cases} \Rightarrow dx=\frac{-5\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta}{\sin^5\theta}$$

$$dx=-5\cot^4\theta\,d\theta \Rightarrow x=\int -5\cot^4\theta\,d\theta=5\left(\frac{\cot^3\theta}{3}-\cot\theta-\theta\right)+C$$

در نهایت جواب معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=5\left(\frac{\cot^3\theta}{3}-\cot\theta-\theta\right)+C \\ y=\cos^5\theta \end{cases}$$

۴) معادله فاقد y ، $f(x,y')=0$

با توجه به حالات قبل توضیح این حالت را کامل کنید

تمرین) $x(y')^2=e^{1/y'}$

ه) معادله کلرو:

معادله کلرو یک معادله مرتبه‌ی یک به فرم زیر است

$$y = xy' + f(y')$$

باز هم برای این معادله قرار دهید $p = y'$ و نسبت به x مشتق بگیرید:

$$y = xp + f(p) \Rightarrow p = p + xp' + f'(p)\,p'$$

$$p'(x + f'(p)) = 0 \Rightarrow p' = 0 \quad or \quad x + f'(p) = 0$$

از $p' = 0$ نتیجه می‌شود $p = c$ و با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$y = cx + f(c)$$

که در واقع یک دسته خط در صفحه است. همچنین اگر $x + f'(p) = 0$ خواهیم داشت:

$$x = -f'(p)$$

جایگذاری در معادله اصلی داریم $y = -pf'(p) + f(p)$ پس منحنی

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

نیز یک جواب معادله است و البته خط نیست یعنی در جواب عمومی صدق نمی‌کند.
پس این جواب یک جواب غیرعادی است.

مثال) معادله $y = y'x - y'^2$ را در نظر بگیرید. به وضوح یک معادله کلرو است
و جواب عمومی آن $y = cx - c^2$ است. اکنون از این خانواده نسبت به c مشتق
بگیرید. داریم $0 = x - 2c$ و با حذف c از این معادله و معادله اصلی داریم

$$y = x^2/4$$

که جواب غیرعادی معادله است

تمرین) تحقیق کنید آیا معادله کلرو می‌تواند جواب دیگری که ناپیوسته باشد)
داشته باشد؟

مسیرهای متعامد:

خانواده منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم خانواده‌ای از منحنی‌ها به صورت $g(x,y,c)=0$ چنان بیابیم که در هر نقطه تلاقی یکی از اعضای f و یکی از اعضای g، دو منحنی بر هم عمود باشند. در این صورت دو خانواده مسیرهای متعامد بر یکدیگر نامیده می‌شوند.

بدین منظور، ابتدا معادله دیفرانسیلی به شکل $F(x,y,y')=0$ چنان بیابید که f جواب آن باشد. سپس به جای y' قرار دهید $-\frac{1}{y'}$. اکنون معادله دیفرانسیلی به صورت $F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ داریم که جواب عمومی آن همان خانواده g خواهد بود.

مثال: مسیرهای متعامد بر دوایر $x^2+y^2=2cx$ را بیابید.

ابتدا با مشتق‌گیری نسبت به x و حذف c از دو معادله یک معادله دیفرانسیل می‌سازیم

$$2x+2yy'=2c$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\underbrace{(2x+2yy')}_{2c}x \Rightarrow x^2-y^2+2xyy'=0$$

اکنون به جای y' بنویسید $-\frac{1}{y'}$:

$$x^2-y^2+2xy\left(-\frac{1}{y'}\right)=0 \Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

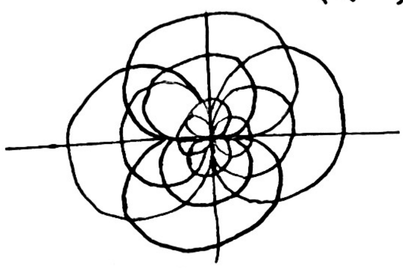
سپس معادله اخیر را حل کنید: (این معادله یک معادله همگن است)

$$y=xv,\quad y'=v+xv' \Rightarrow v+xv'=\frac{2v}{1-v^2} \Rightarrow \frac{x}{dx}dv=\frac{2v}{1-v^2}-v$$

$$\frac{x}{dx}dv=\frac{v+v^3}{1-v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{1-v^2}{v(1+v^2)}dv \Rightarrow \ln|x|=\int \frac{1}{v}+\frac{-2v}{1+v^2}dv$$

$$\ln|x|=\ln|v|-\ln|1+v^2|+\ln|c_1| \Rightarrow x=\frac{c_1 v}{1+v^2} \Rightarrow x=\frac{c_1 y/x}{1+y^2/x^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{c_1 yx}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=c_1 y$$



$\Rightarrow x^2+y^2=2ky \rightarrow$ دوایر قرمز شکل