تعریف: عبارت جبری $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ که در آن

$a_n\neq 0, a_i\in\mathbb{C}(0\leq i\leq n)$، یک چندجمله‌ای مختلط از درجه‌ی n می‌نامیم.

قضیه‌ی اساسی جبر: هر چندجمله‌ای درجه‌ی n به شکل فوق روی مجموعه اعداد مختلط، دقیقاً n ریشه(با احتساب تکرار ریشه‌ها) دارد.

* ریشه های اعداد مختلط :

فرض کنید w یک عدد مختلط باشد. در این صورت ، z را یک ریشه ی n اُم w نامیم ، هرگاه داشته باشیم :

$$z^n = w$$

اگر $w = re^{i\theta}$ و $z = se^{i\alpha}$ ، آنگاه داریم :

$$s^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^n = r \\ \text{و} \\ e^{in\alpha} = e^{i\theta} \rightsquigarrow \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^n = r \\ \cos(n\alpha) = \cos\theta \\ \sin(n\alpha) = \sin\theta \end{cases}$$

s, r حقیقی و نامنفی اند.

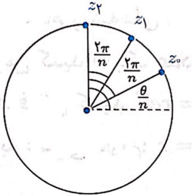
$$\Rightarrow \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt[n]{r} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

پس ریشه های n اُم متمایز w عبارتند از:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad ; k = 0, 1, \dots, n-1}$$

ریشه‌های n ام $w = re^{i\theta}$ روی دایره به شعاع $\sqrt[n]{r}$ حول مبدأ به صورت شکل زیر قرار دارند:



مثال: ریشه های سوم $8i$ را بیابید:

حل:

$$z = 8i = 8e^{i\pi/2} \rightarrow |z| = 8$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad ; \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2e^{i\pi/6}, \quad z_1 = 2e^{i\left(\pi/6 + 2\pi/3\right)},$$

$$z_2 = 2e^{i\left(\pi/6 + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

- **مثال**: مقدار z را چنان بیابید که

$$(1+i\sqrt{3})z^8-(1-i\sqrt{3})=0$$

حل: کافی است ریشه های هشتم $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ را بیابیم،

زیرا: $z^8=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$.

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}\right)} \quad ; \quad k=0,1,\dots,7$$

مثال: مطلوبست ریشه های سوم عدد مختلط $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$.

حل:

$$z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{0\ -4i}{4}=-i$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{3\pi}{6}\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$$

; $k=0,1,2$

ریشه های nاُم واحد :

اگر $z=1$ ، آن گاه ریشه های nاُم آن را با ω_k

نمایش می دهیم و داریم :

$$\boxed{\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad ; \quad k=0,1,\dots,n-1}$$

زیرا : $|z|=1 \; , \; \theta=0$.

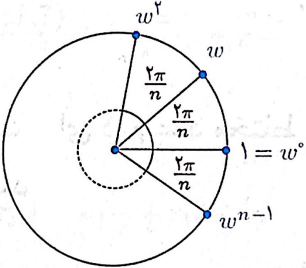
$$\Rightarrow \omega_0 = 1 \; , \; \omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \; , \; \omega_2 = e^{\frac{4\pi i}{n}} \; , \; \dots \; , \; \omega_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$$

اگر قرار دهیم $\omega = \omega_1$ ، آن گاه داریم :

$$\omega_0 = \omega^0 = 1 \; , \; \omega_1 = \omega \; , \; \omega_2 = \omega^2 \; , \; \dots \; , \; \omega_{n-1} = \omega^{n-1}$$

یعنی ، برای هر $k=0,1,\dots,n-1$ ، $\omega_k = \omega^k$.

ریشه‌های n ام واحد، رئوس یک n ضلعی منتظم روی دایره واحدند به طوری که یکی از رئوس آن $(۱,۰)$ می‌باشد.



- مثال : مطلوبست ریشه های چهارم واحد :

حل :

$$\omega_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i} \quad ; \; k = 0,1,2,3$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 1 \; , \; \omega_1 = e^{\frac{\pi i}{2}} = i \; , \; \omega_2 = e^{i\pi} = -1 \; , \; \omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

- مثال : مطلوبست ریشه های پنجم واحد :

$$\omega_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad ; \quad k = 0,1,2,3,4$$

$$\omega_0 = 1 \; , \; \omega_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \; , \; \omega_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \; ,$$

$$\omega_3 = e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)} \; , \; \omega_4 = e^{i\left(\frac{8\pi}{5}\right)}$$

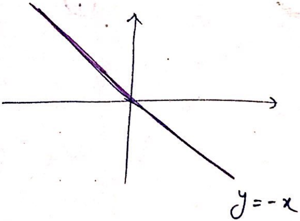
- مکان هندسی :

- $\boxed{\text{مثال}}$: مکان هندسی نقاط در $\mathbb{R}^2$ را بیابید که $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$.

حل :

$$z = x + iy \rightsquigarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = x \\ \operatorname{Im} z = y \end{cases} \longrightarrow x + y = 0$$

$\Rightarrow \quad y = -x \longrightarrow$ نیمساز ربع دوم و چهارم



مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ را (متناظر z) بیابید که $Re\left(\frac{1}{1+z}\right)=2$.

حل:

$$z=x+iy \Rightarrow 1+z=(1+x)+iy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1}=\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}-i\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

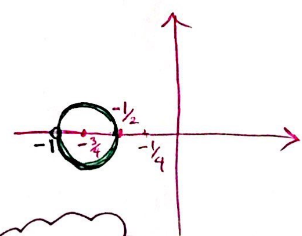
$$Re\left(\frac{1}{1+z}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow 1+x=2(1+x)^2+2y^2=2+2x^2+4x+2y^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(x+\tfrac{3}{4}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{16}}$$



مکان هندسی: دایره به مرکز $(-\frac{3}{4},0)$ و شعاع $\frac{1}{4}$، «به جز نقطه $(-1,0)$».