ریاضی عمومی ۲

تهیه و تدوین:

دکتر داریوش کیانی، دکتر سارا سعیدی مدنی، دکتر امیر ساکی

نیم‌سال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

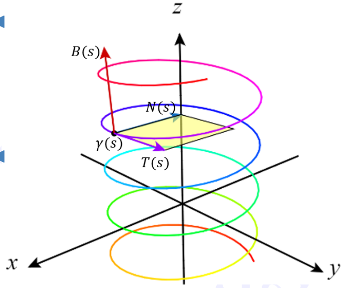
دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

Kiani-Saeedi Madani-Saki

صفحه‌ی بوسان

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. به‌ازای هر $s \in [0, L]$، صفحه‌ی گذرنده از $\gamma(s)$، $T(s)$ و $N(s)$ صفحه‌ی بوسان منحنی در $\gamma(s)$ نامیده می‌شود.

- اگر γ یک منحنی در $\mathbb{R}^2$ باشد، صفحه‌ی بوسان منحنی در هر نقطه از آن منطبق بر صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است.
- وقتی منحنی در $\mathbb{R}^3$ باشد و در یک صفحه قرار نگیرد، صفحه‌ی بوسان در هر نقطه از منحنی ممکن است تغییر کند.
- اگر $\kappa(s) = 0$، آن‌گاه $N(s)$، و از این‌رو $B(s)$ و صفحه‌ی بوسان در $\gamma(s)$ تعریف نمی‌شوند.



- بردار $B(s)$، بردار نرمال صفحه‌ی بوسان γ در $\gamma(s)$ است.

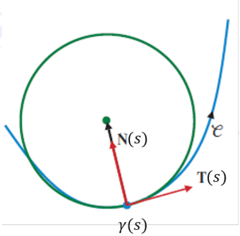
Kiani-Saeedi-Madani-Saki

دایره‌ی بوسان

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای خم $\mathcal{C}$ است. دایره‌ی بوسان در $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$، دایره‌ای است با شعاع $\rho(s)$ که از $\gamma(s)$ می‌گذرد، در صفحه‌ی بوسان $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$ قرار دارد و مرکز آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma_c(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s)$$

- دایره‌ی بوسان در همسایگی $\gamma(s)$ رفتار نزدیکی با رفتار خم دارد.
- اگر $\mathcal{C}$ یک دایره باشد، آن‌گاه دایره‌ی بوسان $\mathcal{C}$ در هر نقطه‌ی $\gamma(s)$ از $\mathcal{C}$ منطبق بر خود $\mathcal{C}$ است.



Kiani-Saeedi Mad

$B'(s)$ با $N(s)$ موازی است.

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است.

- به‌ازای هر $s \in [0, L]$، $B'(s)$ و $B(s)$ بر هم عمودند؛ زیرا $|B(s)| = 1$، و لذا:

$$|B(s)|^2 = 1 \implies B(s).B(s) = 1 \xrightarrow[\text{مشتق‌گیری}]{} 2B(s).B'(s) = 0$$

- به‌ازای هر $s \in [0, L]$، $B'(s)$ و $T(s)$ بر هم عمودند؛ زیرا:

$$B(s) = T(s) \times N(s) \xrightarrow[\text{مشتق‌گیری}]{}$$

$$B'(s) = \underbrace{(T'(s) \times N(s))}_{\text{صفر است؛ چون } N(s)||T'(s)} + (T(s) \times N'(s))$$

پس $B'(s)$ بر $T(s)$ عمود است.

- بنابراین، $B'(s)$ با $N(s)$ موازی است.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

تاب

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک خم و $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ نمایش پارامتری آن بر حسب طول قوس است، طوری که به‌ازای هر $s \in [0, L]$، $\kappa(s) \neq 0$. از آنجا که $B'(s)$ و $N(s)$ موازی هستند، به‌ازای هر s، اسکالر $\tau(s)$ وجود دارد که

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

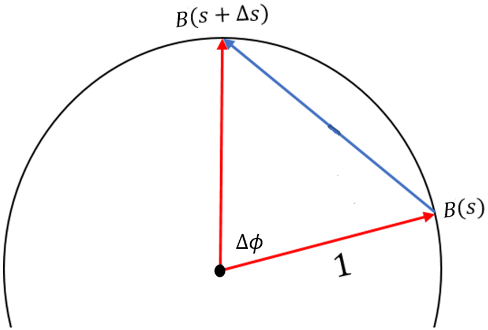
در این صورت، $\tau(s)$ را تاب $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$ می‌نامیم.

- تاب خم $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$، به طور شهودی میزان پیچش خم را حول $\gamma(s)$ نشان می‌دهد. به عبارتی، $\tau(s)$، معیاری به منظور نشان‌دادن میزان ناکامی خم حول $\gamma(s)$ در قرارگرفتن در یک صفحه است.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

- با استدلالی مشابه با آنچه برای $T(s)$ انجام دادیم، می‌توان دید که

$$|\tau(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta B}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d}{ds}\phi(s) \right|$$



- منحنی γ را **مسطح** یا **مسطحه** گوییم، هرگاه به‌ازای هر s، داشته باشیم $\tau(s) = 0$.

مثال

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک خم است. نشان دهید که اگر به‌ازای هر $s \in [0, L]$ داشته باشیم $\tau(s) = 0$، آنگاه خم در یک صفحه قرار دارد (راهنمایی: نشان دهید که خم در صفحه‌ی گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار نرمال $B(0)$ قرار دارد).

پاسخ:

توجه کنید که معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار نرمال $B(0)$ به صورت زیر است:

$$B(0).\left((x, y, z) - \gamma(0)\right) = 0$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر $s \in [0, L]$، داریم:

$$B(0).\left(\gamma(s) - \gamma(0)\right) = 0$$

از آنجا که به‌ازای هر s، $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ و $\tau(s) = 0$، داریم $B'(s) = 0$، که نتیجه می‌دهد B ثابت است؛ یعنی به‌ازای هر s، داریم $B(s) = B(0)$.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

حال، تعریف می‌کنیم:

$$f : [0, L] \to \mathbb{R}, \quad f(s) = B(0).\left(\gamma(s) - \gamma(0)\right)$$

کافی است نشان دهیم که f تابعی ثابت با مقدار 0 است. داریم:

$$f'(s) = B(0).\gamma'(s) = B(s).\gamma'(s) = B(s).T(s) = 0$$

بنابراین، f تابعی ثابت است. از این‌رو، داریم:

$$\forall\ s \in [0, L], \ \ f(s) = f(0) = B(0).\left(\gamma(0) - \gamma(0)\right) = 0$$

پس، خم γ در صفحه‌ی گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار نرمال $B(0)$ (یعنی صفحه‌ی بوسان خم در $\gamma(0)$) قرار دارد.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

مارپیچ مستدیر زیر را در نظر بگیرید، که در آن $c = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $a, b > 0$. مطلوب است انحنا، تاب، و هم‌چنین بردارهای کنج فرنه در هر نقطه‌ی $r(s)$ از منحنی.

$$r(s) = a\cos(cs)i + a\sin(cs)j + bcsk,$$

پاسخ: داریم:

$$T(s) = r'(s) = -ac\sin(cs)i + ac\cos(cs)j + bck$$

و از این‌رو:

$$T'(s) = -ac^2\cos(cs)i - ac^2\sin(cs)j$$
$$\kappa(s) = |T'(s)| = ac^2 = \frac{a}{a^2+b^2}$$
$$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = -\cos(cs)i - \sin(cs)j$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -ac\sin(cs) & +ac\cos(cs) & bc \\ -\cos(cs) & -\sin(cs) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= bc\sin(cs)i - bc\cos(cs)j + ack$$

بنابراین، داریم:

$$B'(s) = bc^2\cos(cs)i + bc^2\sin(cs)j = -bc^2 N(s)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\tau(s) = bc^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

فرمول‌های فرنه

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}T(s) = \kappa(s)N(s) \\ \dfrac{d}{ds}N(s) = ? \\ \dfrac{d}{ds}B(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

Madani-Saeedi Madani-Saki

N' بر حسب T و B

منحنی $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{aligned} N'(s) &= (B(s) \times T(s))' = \big(B'(s) \times T(s)\big) + \big(B(s) \times T'(s)\big) \\ &= ((-\tau(s)N(s)) \times T(s)) + (B(s) \times (\kappa(s)N(s))) \\ &= \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \end{aligned}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

فرمول‌های فرنه

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}T(s) = \kappa(s)N(s) \\ \dfrac{d}{ds}N(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \\ \dfrac{d}{ds}B(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

صورت ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

شتاب قائم و مماسی

فرض کنید $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. داریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\mathrm{v}(t)}{\nu(t)} \implies \mathrm{v}(t) = \nu(t)T(t) \xRightarrow[\text{مشتق‌گیری}]{}$$

$$a(t) = \nu'(t)T(t) + \nu(t)T'(t)$$

توجه می‌کنیم که:

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d}{dt}T(\alpha(s)) = \frac{d}{ds}T(\alpha(s))\frac{d}{dt}s(t)$$
$$= (\kappa(\alpha(s))N(\alpha(s)))\,\nu(t) = \kappa(t)N(t)\nu(t)$$

بنابراین، اگر:

$$\text{شتاب مماسی} = a_T(t) = \nu'(t), \quad \text{شتاب قائم} = a_N(t) = \kappa(t)(\nu(t))^2$$

آنگاه داریم:

$$a(t) = \nu'(t)T(t) + \kappa(t)(\nu(t))^2N(t) = a_T(t)T(t) + a_N(t)N(t)$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

قضیه

فرض کنید که $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک خم پارامتری با پارامتر دل‌خواه است. داریم

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}, \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \,.\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

Kiani-Saeedi-Madani-Saki

اثبات:

◄ $N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$:

داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(t) &= \frac{d}{dt}T(\alpha(s)) = \frac{d}{ds}T(\alpha(s))\frac{d}{dt}s(t)\\ &= \left(\kappa(\alpha(s))N(\alpha(s))\right)\nu(t) = \kappa(t)N(t)\nu(t)\end{aligned}$$

بنابراین:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\kappa(t)\nu(t)}$$

که نتیجه می‌دهد $N(t)$ مضرب اسکالر مثبتی از $T'(t)$ است. بنابراین، از آنجا که $N(t)$ یکه است، داریم:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

◄ $B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}$:

داریم:

$$a(t)=\nu'(t)T(t)+\kappa(t)(\nu(t))^2N(t)$$

حال، دو طرف را در $\mathrm{v}(t)$ ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\mathrm{v}(t)\times a(t)=\nu'(t)(\mathrm{v}(t)\times T(t))+\kappa(t)(\nu(t))^2(\mathrm{v}(t)\times N(t))$$

توجه کنید که $T(t)$ و $\mathrm{v}(t)$ موازی هستند، و لذا $0=\mathrm{v}(t)\times T(t)$. از آنجا که $T(t)=\frac{\mathrm{v}(t)}{\nu(t)}$، داریم:

$$\mathrm{v}(t)\times a(t)=\kappa(t)(\nu(t))^3(T(t)\times N(t))=\kappa(t)(\nu(t))^3B(t)$$

پس، $B(t)$ مضرب اسکالر مثبتی از $\mathrm{v}(t)\times a(t)$ است. حال، از آنجا که $B(t)$ یکه است، داریم:

$$B(t)=\frac{\mathrm{v}(t)\times a(t)}{|\mathrm{v}(t)\times a(t)|}=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

- $\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$:

در اسلاید قبل نشان دادیم که:

$$\mathrm{v}(t) \times a(t) = \kappa(t)(\nu(t))^3 B(t)$$

حال اگر از دو طرف نرم بگیریم، داریم:

$$|\mathrm{v}(t) \times a(t)| = |\kappa(t)(\nu(t))^3 B(t)| = \kappa(t)\nu(t)^3$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathrm{v}(t) \times a(t)|}{\nu(t)^3} = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

Kiani–Saeedi Madani–Saki

تمرین

فرمول ادعایی برای تاب در قضیه‌ی اخیر را ثابت کنید؛ یعنی نشان دهید که

$$\tau(t) = \frac{\left(\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right) .\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

انحنای یک خط در $\mathbb{R}^3$ را در هر نقطه از آن بیابید.

پاسخ: فرض کنید l یک خط در $\mathbb{R}^3$ است و $P_0 = (a, b, c) \in l$. فرض کنید $u = (u_1, u_2, u_3)$ بردار هادی l است. در این صورت، یک نمایش پارامتری برای l به صورت زیر است:

$$\gamma(t) = P_0 + tu = (a + tu_1, b + tu_2, c + tu_3)$$

بنابراین، داریم $\gamma'(t) = u$، که نتیجه می‌دهد $\gamma''(t) = 0$. از این‌رو، می‌توان نوشت:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = 0$$

- توجه می‌کنیم که انحنای یک خم در یک نقطه‌ی P از آن را می‌توان میزان انحراف خم (در اطراف P) از خط مماس در P تصور کرد.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

مثال

انحنا، تاب و کنج فرنه را در یک نقطه‌ی دل‌خواه از منحنی زیر بیابید:

$$r(t) = (t+\cos(t))i + (t-\cos(t))j + \sqrt{2}\sin(t)k$$

پاسخ:

$$r'(t) = (1-\sin(t))i + (1+\sin(t))j + \sqrt{2}\cos(t)k$$

$$r''(t) = -\cos(t)i + \cos(t)j - \sqrt{2}\sin(t)k$$

$$r'''(t) = \sin(t)i - \sin(t)j - \sqrt{2}\cos(t)k$$

$$r'(t)\times r''(t) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1-\sin(t) & 1+\sin(t) & \sqrt{2}\cos(t) \\ -\cos(t) & \cos(t) & -\sqrt{2}\sin(t)\end{bmatrix}$$

$$= -\sqrt{2}(1+\sin(t))i - \sqrt{2}(1-\sin(t))i + 2\cos(t)k$$

Kian-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

همچنین، داریم:

$$|r'(t)| = 2, \qquad |r'(t) \times r''(t)| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{1}{2}\Big((1-\sin(t))i + (1+\sin(t))j + \sqrt{2}\cos(t)k\Big)$$

$$B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|} = -\frac{1+\sin(t)}{2}i - \frac{1-\sin(t)}{2}j + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}k$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -\frac{1+\sin(t)}{2} & \frac{\sin(t)-1}{2} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sin(t)}{2} & \frac{1+\sin(t)}{2} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)i + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)j - \sin(t)k$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

ادامه‌ی مثال

در نهایت، داریم:

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(r'(t) \times r''(t)).r'''(t) = -2\sqrt{2}$$

$$\tau(t) = \frac{(r'(t) \times r''(t)).r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki

نتیجه (انحنای نمودار یک تابع اسکالر یک متغیره)

انحنای نمودار تابع اسکالر یک متغیره‌ی $y = f(x)$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اثبات: نمودار $y = f(x)$ دارای نمایش پارامتری $r(x) = (x, f(x))$ است. داریم:

$$r'(x) = (1, f'(x)), \quad r''(x) = (0, f''(x)) \implies$$

$$r'(x) \times r''(x) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, f''(x))$$

پس، داریم:

$$\kappa(x) = \frac{|r'(x) \times r''(x)|}{|r'(x)|^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Kiani-Saeedi Madani-Saki