۹۹۳۱۰۳۰

اشکان شکیبا

۱) الف)

| شماره خط | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۸ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تعداد دفعات تکرار | $1$ | $n+1$ | $n$ | $n$ | $\sum_{i=0}^{n-1} t_i$ | $\sum_{i=0}^{n-1} t_{i-1}$ | $n$ | $n$ |
| هزینه زمانی | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ | $c_8$ |

$$T(n) = c_1 + (n+1)c_2 + n(c_3 + c_4 + c_7 + c_8)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} t_i c_5 + \sum_{i=0}^{n-1} t_{i-1} c_6 = (c_5 + c_6)\sum_{i=0}^{n-1} t_i + (c_2 + c_3 +$$

$$c_4 + c_7 + c_8)n + (c_1 - c_6 + c_2) = A\sum_{i=0}^{n-1} t_i + Bn + C$$

حال بدترین حالت (از نظر زمانی) را در نظر می‌گیریم و با آن ادامه می‌دهیم:

در بدترین حالت: $\forall i < n : t_i = n - i$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} t_i = \sum_{i=0}^{n-1} n - i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow T(n) = A\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + Bn + C = \frac{A}{2}n^2 + \frac{A+2B}{2}n + C$$

بار دیگر بهترین حالت را در نظر می‌گیریم:

$$T(n) = c_1 + (n+1)c_2 + n c_8$$ (زیرا شرط هیچ‌گاه اجرا نمی‌شود)

$$\Rightarrow T(n) = A'n + B'$$

(در بدترین حالت) پیچیدگی زمانی : $T(n) = \Theta(n^2)$

ب) این الگوریتم اعضای آرایه B را نسبت به محل آنها در آرایه A می‌چیند.
برای مثال اگر عضو $x$ در خانه $i$ اُم A باشد، آن را در آرایه B نیز به خانه
$i$ اُم منتقل می‌کند.

۲) در هر بار اجرای حلقه احتمال چاپ $\frac{1}{i}$ است؛ بنابراین:

$$\text{تعداد دفعات (میانگین)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n - \log 1 = O(\log n)$$

۳) الف)

```
for(int i=0;i<n; i++){
    if (array[i]== T){
        return i;
    }
}
```

ب) اگر مرتب سازی بر اساس خانه i انجام شده باشد داریم:

```
if(arr[i]== T){
   return i;
} if(arr[0]<=T){
   return search(arr, 0,i-1, T);}
return search(arr, i+1, n-1, T);
```

```
int search(int arr[], int l, int h, int k){
    if(h<l){
        return -1;
    }
    int m= (l+h)/2;
    if(k== arr[m]){
        return m;
    }
    if(k>arr[m]){
        return search(arr, m+1, h, k);
    }
    return search(arr, l, m-1, k);
}
```

(ج

$T(n) = T(\frac{n}{۲}) + C$

$T(\frac{n}{۲}) = T(\frac{n}{۴}) + C$ and ---

$\Rightarrow T(n) = \log n + C \in O(\log n)$

۴) الف)

| هزینه | کد |
|---|---|
| $c_1$ | `for(i=1;i<=n;i++)` |
| $c_2$ | `for(j=1;j<=i;j++)` |
| $c_3$ | `if(A[j]>A[j+1])` |
| $c_4$ | `swap(A[j],A[j+1])` |

$$T(n) = n c_1 + \sum_{i=1}^{n} t_i \times c_2 + \sum_{i=1}^{n} t_{i-1} \times (c_3 + c_4)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} t_i = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

بهترین حالت : $T(n) = n c_1 + \frac{n(n-1)}{2}(c_2 + c_3) - 1 = An^2 + Bn + C$

بدترین حالت : $T(n) = n c_1 + \frac{n(n-1)}{2}(c_2 + c_3 + c_4) = A'n^2 + B'n + C'$

$\Rightarrow$ درهردوحالت : $T(n) = O(n^2)$

ب) یک متغیر با مقدار اولیه یک تعریف می کنیم و درصورت ورود به if مقدار آن را صفر می کنیم و در انتهای دستورات حلقه بررسی می کنیم که اگر مقدار متغیر برابر یک بود از حلقه خارج شویم.

a) (۵

$$n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\log_n 10} = 10 \Rightarrow n = \Theta(1)$$

b)

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \times \frac{2}{n-1} \times \dots \times \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} \Rightarrow 0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$$

می‌دانیم: $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

$$\Rightarrow 2^n = o(n!) \Rightarrow n! = \omega(2^n)$$

c)

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow n! = o(n^n)$$

(۶

a) نادرست، مثال نقض: $f(n) = n, g(n) = n^5$

b) نادرست، مثال نقض: $f(n) = 4n, g(n) = n$

c) نادرست، مثال نقض: $f(n) = n^{-7}$

d) درست

$$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq c\, g(n)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n) \Rightarrow c' f(n) \leq g(n) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

e) نادرست، مثال نقض: $f(n) = 3^n$

F) درست

$0 \leq o(f(n)) \leq k f(n)$

$\Rightarrow f(n) \leq o(f(n)) + f(n) \leq (k+1) f(n)$

$\Rightarrow f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

7)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| y | y | n | n | n |
| y | y | n | n | n |
| n | n | y | y | n |
| y | n | y | n | y |
| n | n | y | y | n |
| y | n | y | y | n |
| n | n | y | y | n |
| n | n | y | y | n |
| y | y | n | n | n |