دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

فصل ۴ – ویژگی‌های اعداد صحیح: استقرای ریاضی

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

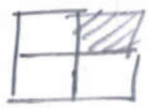
4

Properties of the Integers: Mathematical Induction

صفحه شطرنجی $2^n \times 2^n$ را در نظر بگیرید که یک خانه در گوشه آن حذف شده است . با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید چنین صفحه ی شطرنجی را می توان با قطعه هایی به شکل پوشاند.

تعریف $P(n)$: هر صفحه شطرنجی با ابعاد $2^n \times 2^n$ که یک گوشه آن حذف شده است را می توان با قطعه های پر کرد.

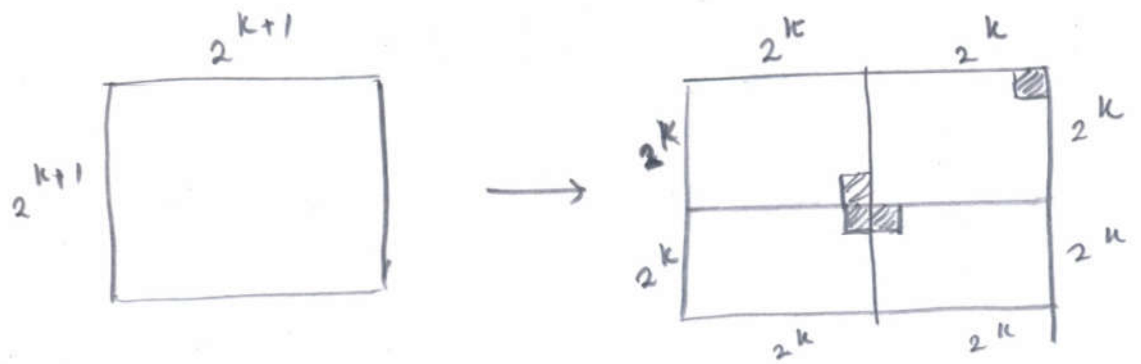
Basis Step:

if $n=1$ $\longrightarrow$  $\Rightarrow$ $P(1)$ is True

Inductive Step:

if $n=k$ $\longrightarrow$ فرض می کنیم $P(k)$ صحیح است.
$k \in \mathbb{Z}^+$

for $n=k+1$ $\longrightarrow$ می توان مربع $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ را بصورت زیر در نظر گرفت:



هر کدام از مربع های فوق را می توان طبق فرض استقرا با قطعات پوشاند بطوریکه یک گوشه آن مربع حذف شده باشد. با چینش مربع های فوق به شکل نشان داده شده مکان های خالی که در دیگر مربع ایجاد می شود را می توان با یک پر کرد. بنابراین تنها جایی که خالی می ماند گوشه بالا سمت راست است . بنابراین $P(k+1)$ نیز صحیح است. آنگاه $\forall n \in \mathbb{Z}^+ . P(n)$

ثابت کنید

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

F_n عدد فیبوناچی n ام است .

$$P(n): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Basis Step: $n=1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$ صحیح است .

Inductive Step: if $n=k \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ و $P(k)$ is True

if $n=k+1 \implies$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \implies P(k+1) \text{ is True}$$

نتیجه: $\quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ . \ P(n)$

ثابت کنید اگر استقرای (ضعیف) ریاضی برقرار باشد، در اینصورت اصل خوش ترتیبی برقرار است.

می دانیم استقرای (ضعیف) ریاضی برقرار است.

فرض کنید مجموعه‌ای همانند S که یک زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{Z}^+$ است داشته باشیم بطوریکه خوش ترتیب نباشد، در اینصورت S فاقد کوچکترین عضو است.

حال گزاره باز $\underbrace{P(n) : i \notin S \text{ for all } i \leq n}$ را تعریف می کنیم.

$P(1)$ درست است چرا که $1 \notin S$ برقرار است (اگر نباشد در اینصورت S کوچکترین عضو دارد)
فرض کنید $P(K)$ برقرار باشد، در اینصورت تمامی اعداد $i \leq K$ در S حضور نخواهند داشت.
حال ثابت می کنیم $P(K+1)$ نیز برقرار است.

$P(K+1)$ برقرار است، اگر برقرار نباشد در اینصورت $K+1 \in S$ خواهد بود، در اینصورت $K+1$ کوچکترین عضو S خواهد شد. بنابراین $P(K+1)$ نیز برقرار است.
پس داریم:

$$\begin{cases} P(1) \text{ is true}, \\ \forall K \geq 1 \,.\, (P(K) \rightarrow P(K+1)) \end{cases}$$

از آنجاییکه می دانیم استقرا برقرار است، بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \,.\, P(n)$$

و این یعنی به ازای تمامی اعداد $\mathbb{Z}^+$، هیچ یک در S عضو نیستند. پس $S = \emptyset$.

بنابراین مجموعه‌ای ناتهی همانند S وجود ندارد که فاقد کوچکترین عضو باشد.
یعنی هر مجموعه ناتهی از $\mathbb{Z}^+$ انتخاب کنیم تنها کوچکترین عضو دارد و این یعنی اصل خوش ترتیبی برقرار است.

ثابت کنید اگر استقرای قوی ریاضی برقرار باشد درانصورت استقرای ضعیف نیز برقرار است .

فرض کنید $P(n)$ یک گزاره باز باشد

درانصورت چون میدانیم استقرای قوی ریاضی برقرار است ، بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{l} P(1) \text{ is true} \\ \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+ .\ P(1) \land P(2) \land \dots \land P(k) \longrightarrow P(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ .\ P(n)$$

حال تعریف می‌کنیم : $Q(n) = P(1) \land P(2) \land \dots \land P(n)$

بدیهی است که $\underbrace{\forall n .\ P(n)}_{\text{I}} \Leftrightarrow \underbrace{\forall n .\ Q(n)}_{\text{II}}$ یعنی به جای اثبات طرف I با

استقرای قوی ، سعی می‌کنیم II را با استقرای ضعیف اثبات کنیم . پس داریم :

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) \text{ is true} \\ \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+ .\ Q(k) \longrightarrow P(k+1) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) \text{ is true} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+ .\ Q(k) \rightarrow Q(k) \land P(k+1) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) \text{ is true} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+ .\ Q(k) \rightarrow Q(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ .\ Q(n)$$

تمرین ۱۷ - بخش ۲.۴ - ص ۲۳۵

ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$$

Basis Step: $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \frac{F_0}{2^1} = 0 \\ \displaystyle 1 - \frac{F_3}{2^1} = 1 - \frac{2}{2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

تساوی بالا برای $n=1$ برقرار است.

Inductive Step: for $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k}$$

فرض می‌کنیم برقرار است.

for $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i}\right) + \frac{F_k}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k} + \frac{F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{2F_{k+2} - F_k}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{k+2} + F_{k+2} - F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{F_{k+2} + F_{k+1}}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{k+3}}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{(k+1)+2}}{2^{k+1}}$$

بنابراین: $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$

تمرین ۱۹ - بخش ۲.۴ - صفحه ۲۳۵

اگر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید که $5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$

نکته :

Fibonacci Numbers

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

Lucas Numbers

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} & n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

Basis Step:

$$\begin{cases} n=0 & 5F_2 = L_4 - L_0 = 5 \\ n=1 & 5F_3 = L_5 - L_1 = 10 \end{cases}$$

حالت‌های برقرار است.

Inductive Step: for $n \leq k$ $\quad 5F_{k+2} = L_{k+4} - L_k$ فرض می‌کنیم برقرار است.

for $n = k+1$

$$\begin{aligned} 5F_{(k+1)+2} &= 5\left(F_{k+2} + F_{k+1}\right) \\ &= 5\left(F_{k+2}\right) + 5\left(F_{k+1}\right) \\ &= \left(L_{k+4} - L_k\right) + \left(L_{k+3} - L_{k-1}\right) \\ &= \left(L_{k+3} + L_{k+4}\right) - \left(L_{k-1} + L_k\right) \\ &= L_{k+5} - L_{k+1} \\ &= L_{(k+1)+4} - L_{(k+1)} \end{aligned}$$

بنابراین :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$$

- اگر $f: A \to A$ تابعی دلخواه باشد ثابت کنید برای هر $m, n \in \mathbb{Z}^+$ داریم $(f^m \circ f^n = f^n \circ f^m)$

Double Induction (استقرای دوگانه)

- ابتدا $m=1$ ، استقرا روی n می‌زنیم. و سپس استقرا روی m می‌زنیم.

$m=1$ $\Longrightarrow$ For $n=1$ the result is true.

$$f^1 \circ f^1 = f^1 \circ f^1$$

$\Rightarrow$ for $n=k$ $\quad f \circ f^k = f^k \circ f$ $\quad$ فرض می‌کنیم برای $n=k$ درست باشد

در $f \circ f^{k+1}$ را در نظر بگیرید:

$$f \circ f^{k+1} = f \circ (f \circ f^k) = f(f^k \circ f) = (f \circ f^k) \circ f = f^{k+1} \circ f$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f \circ f^n = f^n \circ f \quad \Longleftarrow$ نتیجه

حال فرض کنید برای $t \geq 1$ این عبارت برقرار باشد

$$t \geq 1 \quad f^t \circ f^n = f^n \circ f^t$$

حالا در مورد $f^{t+1} \circ f^n$ بحث می‌کنیم:

$$f^{t+1} \circ f^n = (f \circ f^t) \circ f^n = f \circ (f^t \circ f^n) = f \circ (f^n \circ f^t)$$
$$= (f \circ f^n) \circ f^t = (f^n \circ f) \circ f^t = f^n \circ (f \circ f^t)$$
$$= f^n \circ f^{t+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \quad f^m \circ f^n = f^n \circ f^m}$$

تمرین ۱۸- (تمرینات ۴-۱) - ص ۲۲۱

به ازای $m, r \in \mathbb{Z}^+$ فرض کنیم S_1, S_2 دو مجموعه باشند بطوریکه $|S_1| = m$ و $|S_2| = r$ باشد.
و همچنین فرض می‌کنیم S_1 و S_2 بصورت صعودی مرتب شده باشند. می‌توان اثبات کرد که
می‌توان عناصر S_1 و S_2 را با انجام حداکثر $m+r-1$ مقایسه یکجا به ترتیب افزایشی نوشت.
حال فرض کنید مجموعه‌ای مانند S داریم بطوریکه $|S| = 2^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$.
ثابت کنید تعداد مقایسه‌های لازم برای قراردادن عناصر S به ترتیب افزایشی از $n \cdot 2^n$ تجاوز نمی‌کند.

$P(n)$: در مجموعه‌ای با اندازهٔ 2^n $(n \in \mathbb{Z}^+)$، تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب سازی افزایشی آن، از $n \cdot 2^n$ بیشتر نیست.

$\boxed{\text{Basis Step}}$: $n = 1 \Rightarrow 2^1$: تعداد اعضا $\Rightarrow$ تعداد مقایسه‌های لازم : $1 < 1 \times 2^1$
$\Rightarrow P(1)$ is True

$\boxed{\text{Inductive Step}}$: if $n = k \Rightarrow P(k)$ is True فرض می‌کنیم:

for $n = k+1 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2$

S_1: حاوی 2^k عضو ، S_2: حاوی 2^k عضو

برای مرتب سازی این عناصر ، برای مرتب سازی این عناصر

$$K \cdot 2^K + K \cdot 2^k + \underbrace{(2^k + 2^k - 1)}_{\text{تعداد مقایسه‌ها برای ادغام}}$$

$$= 2 \cdot K \cdot 2^k + (2^{K+1} - 1) = 2^{K+1} \times K + 2^{K+1} - 1 = (K+1)\, 2^{K+1} - 1 < (K+1)\, 2^{K+1}$$

بنابراین $P(K+1)$ نیز درست است پس: $\forall n \in \mathbb{Z}^+.\ P(n)$

مثال

ثابت کنید تعداد $composition$های هر عدد $n \in \mathbb{Z}^+$ برابر است با 2^{n-1}.

اثبات به‌وسیله استقرای ریاضی انجام می‌شود.

$S(n)$: تعداد $composition$های عدد n برابر است با: 2^{n-1}

- *Basis Step*: تعداد $composition$های عدد ۱ برابر با $2^{1-1} = 1$ است، بنابراین گزاره $S(1)$ برقرار است.

- *Inductive Step*: فرض کنید برای هر عدد $k \in \mathbb{Z}^+$، گزاره $S(k)$ برقرار باشد، و تعداد $composition$های عدد k برابر با 2^{k-1} باشد.

حال باید ثابت کنیم $S(k+1)$ نیز برقرار است. به عبارتی دیگر باید نشان دهیم، تعداد $composition$های عدد $k+1$ برابر است با: 2^k

مثال - ادامه

- ادامهٔ *Inductive Step*: حال می‌توان *composition*های عدد $k+1$ را به دو مجموعه افراز نمود:

- *composition*هایی که به جمع‌وندی بزرگتر از یک ختم می‌شوند. با کم کردن یک واحدی آخرین جمع‌وند به یک *composition* عدد k به‌دست می‌آید.

- *composition*هایی که به جمع‌وندی برابر با یک ختم می‌شوند. با حذف آخرین جمع‌وند به یک *composition* عدد k به‌دست می‌آید.

با در نظر گرفتن دو مورد بالا، به این نتیجه می‌رسیم که در صورتی‌که *composition*های عدد k را داشته باشیم، می‌توانیم یک جمع‌وند ۱ را به انتهای هر یک از این *composition*ها ضمیمه نماییم؛ و یا این‌که عدد ۱ را با آخرین جمع‌وند مربوط به *composition* عدد k جمع کنیم. این بدین مفهوم است که تعداد *composition*های عدد $k+1$ دو برابر تعداد *composition*های عدد k است.

درنتیجه از درستی $S(k)$ به درستی $S(k+1)$ رسیدیم.

$(n=1)$	1		$(n=4)$	$(1')$	4
				$(2')$	$1+3$
$(n=2)$	2			$(3')$	$2+2$
	$1+1$			$(4')$	$1+1+2$
$(n=3)$	(1)	3		$(1'')$	$3+1$
	(2)	$1+2$		$(2'')$	$1+2+1$
	(3)	$2+1$		$(3'')$	$2+1+1$
	(4)	$1+1+1$		$(4'')$	$1+1+1+1$

بنابراین $S(n)$ برای $n \in \mathbb{Z}^+$، برقرار است.