مقدمه : مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل

هر معادله شامل مشتقات توابع مجهول را معادله دیفرانسیل می خوانیم. اگر معادله ای رابطه بین یک متغیر مستقل و یک تابع (متغیر وابسته) و مشتقات آن را ارائه کند، معادله دیفرانسیل معمولی نام دارد. رابطه ای که شامل یک تابع و بیش از یک متغیر مستقل و مشتقات جزئی آن تابع باشد معادله دیفرانسیل جزئی نام دارد.

$x^2y' + 4y = \sin x$ معادله دیفرانسیل معمولی $\rightarrow y=y(x)$

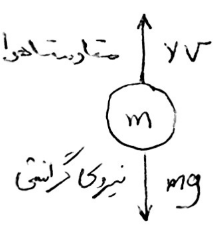
$(y'')^4 + 2y' - xy^3 = y^2 + x^2$ $\rightarrow y=y(x)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + ku = 0$ معادله دیفرانسیل جزئی $\rightarrow u=u(x,y)$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}(x,y)$

هدف این درس مطالعه در خصوص روش های حل معادله دیفرانسیل معمولی است.

مدل بندی بسیاری از پدیده های فیزیکی و طبیعی منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی می گردد.

مثال: جسمی به جرم m از ارتفاعی در حال سقوط است. سرعت اولیه آن معلوم و مقاومت هوا ضریبی از سرعت جسم در هر لحظه است.



قانون دوم نیوتن می گوید $F=ma$ و می دانیم که a با v با رابطه $a=\frac{dv}{dt}$ ارتباط دارد. همچنین در هر لحظه دو نیرو به جسم وارد می شود، اولی نیروی جاذبه زمین و دومی نیروی مقاومت هوا که عکس هم عمل می کنند، لذا

$$F=ma$$

$$mg - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$

در معادله اخیر m و g و γ همگی معلوم‌اند و مجهول مساله v و (قاعدتاً $\frac{dv}{dt}$) است. پس در واقع ما سرعت جسم در هر لحظه را به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی مدل کرده ایم.

مثال: (معادله رشد و زوال جمعیت) فرض کنید جمعیت گونه‌ای خاص در یک منطقه را به صورت تابعی از زمان t در نظر بگیریم و با $P(t)$ نمایش دهیم. اگر عامل کنترلی مانند شکارچی در منطقه نباشد، به طور طبیعی آهنگ رشد جمعیت متناسب با جمعیت فعلی خواهد بود یعنی

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

که در آن r عامل تناسب رشد یا زوال جمعیتی است که عددی ثابت است. این یک معادله دیفرانسیل معمولی است که حل آن ساده است. تنها تابع ریاضی که مشتق آن ضریبی از خودش باشد تابع نمایی است پس $P = Ce^{rt}$. C یک ثابت اختیاری است.

حال اگر یک عامل کنترلی مانند بیماری یا شکارچی در این منطقه ظاهر شود و مقدار ثابتی از جمعیت در واحد زمان را از بین ببرد داریم

$$\frac{dP}{dt} = rP - k$$

که حل این مسأله به سادگی معادله قبل نیست.

تبیین جواب معادله دیفرانسیل:

پس هدف ما در حل یک معادله دیفرانسیل معمولی یافتن همه توابعی است که خود و مشتقاتشان در معادله مورد نظر صدق کنند. معمولاً جواب معادله دیفرانسیل یک یا چند خانواده از توابع هستند که اختلافشان در ثابت‌های اختیاری است (مانند مثال قبل).

مثال: معادله رشد و زوال زیر را ببینید:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}P - 450$$

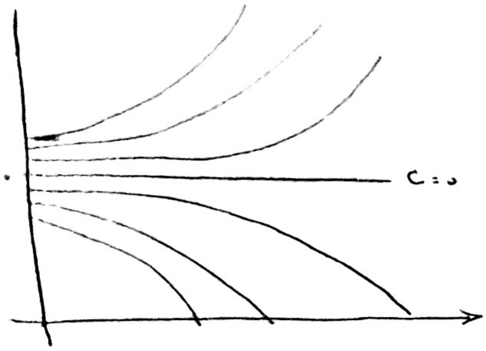
$$\frac{dP}{dt} = \frac{P-900}{2} \Rightarrow \frac{dP/dt}{P-900} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\ln|P-900|\right) = \frac{1}{2}$$

چراکه $\frac{d}{dt}\left[\ln(u(t))\right] = \frac{u'(t)}{u(t)}$. اکنون از دو طرف انتگرال بگیرید:

$$\ln|P-900| = \frac{t}{2} + C \Rightarrow |P-900| = e^{t/2+C} = e^{t/2}\cdot e^{C}$$

$$|P-900| = C_1 e^{t/2} \Rightarrow P-900 = \pm C_1 e^{t/2} \Rightarrow \boxed{P = 900 + C_2 e^{t/2}}$$

توجه کنید که $C_2 = \pm e^{C}$ یک ثابت اختیاری است. اکنون جواب های معادله را به ازای برخی C ها رسم می کنیم:



می بینیم جواب ها به صورت دسته توابعی نمایی هستند که به ازای مقادیر مختلف C رسم شده اند.

این جواب ها را جواب عمومی معادله می خوانیم که شامل تعداد نامتناهی جواب معادله هست که در یک ثابت دلخواه با هم اختلاف دارند.

اگر علاقه‌مند باشیم یک جواب یکتا برای مساله داشته باشیم باید شرط دیگری به مساله اضافه کنیم. به عنوان مثال فرض کنید جمعیت اولیه (لحظه $t=0$) برابر با ۸۵۰ باشد آن گاه باید

$$P(0) = 850$$

با توجه به جواب عمومی معادله

$$P(t) = 900 + Ce^{t/2}$$

$$P(0) = 900 + C \Rightarrow C = -50$$

ولذا جواب معادله با شرط اضافی گفته شده به صورت زیر است

$$P(t) = 900 - 50e^{t/2}$$

که یک تابع است. شرط اضافه شده را شرط اولیه می نامیم. معادله دیفرانسیل به همراه یک شرط اولیه را مساله مقدار اولیه می نامیم و جواب به دست آمده برای آن را یک جواب خصوصی معادله می خوانیم.

تشکیل یک معادله دیفرانسیل

فرض کنید خانواده ای از توابع مشخص شده اند و ما می خواهیم معادله دیفرانسیلی بنویسیم که این خانواده جوابش باشد (فرایند عکس حل یک معادله). کافیست با مشتق گیری متوالی به تعداد ثابت های اختیاری موجود در توابع و حذف آن ها با استفاده از معادلات حاصل، به معادله دیفرانسیل مورد نظر برسیم.

مثال: معادله دیفرانسیلی بنویسید که جواب آن دوایری در صفحه با شعاع واحد باشد.
یعنی می خواهیم معادله ای بیابیم که جواب آن به صورت زیر است:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1$$

این توابع دو ثابت اختیاری a و b دارند. پس دو بار نسبت به x مشتق بگیرید (توجه کنید که $y=y(x)$)

$$\cancel{2}(x-a)+\cancel{2}y'(y-b)=0$$

$$1+y''(y-b)+(y')^2=0 \Rightarrow y-b=\frac{-(1+(y')^2)}{y''}$$

$$x-a=\frac{y'(1+(y')^2)}{y''}$$

با جایگذاری نتایج حاصل در معادله اصلی داریم:

$$\frac{(y')^2(1+(y')^2)^2}{(y'')^2}+\frac{(1+(y')^2)^2}{(y'')^2}=1$$

$$(1+(y')^2)^2((y')^2+1)=(y'')^2 \Rightarrow (1+(y')^2)^3=(y'')^2$$

که معادله اخیر یک معادله دیفرانسیل است.

دسته بندی معادلات:

بالاترین مرتبه مشتق در یک معادله را مرتبه آن معادله می خوانیم
به عنوان مثال جواب مثال قبل یک معادله مرتبه دوم است.
فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی n به صورت زیر است:

$$F(x, y(x), y', y'', \dots, y^{(n)})=0$$

به اینا فرم، فرم ضمنی معادله می گوییم. اگر به هر نحوی بتوان بالاترین مرتبه مشتق را نسبت به دیگر مجهولات نشان داد، فرم صریح معادله حاصل می شود:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

اگر بتوان معادله دیفرانسیلی را برحسب تابع مجهول و مشتقاتش به صورت یک چندجمله‌ای نوشت، آن‌گاه توان مربوط به بالاترین مرتبه مشتق را درجه آن معادله می‌خوانیم:

$(y'')^4 + x^5 y'' - x^2 y^2 y' = \ln x$ معادله مرتبه دوم با درجه چهار

معادله دیفرانسیل مرتبه nام را خطی می‌خوانیم هرگاه F تابعی خطی نسبت به مجهولات y و y' و ... و $y^{(n)}$ باشد. یعنی فرم کلی معادله به صورت زیر باشد:

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$$

دقت کنید که معادله نسبت به مجهولات خطی است، نسبت به x لزومی ندارد خطی باشد

$y'' + 4x^2 y' + (4x-5)^{3/2} y = \ln x$ معادله خطی مرتبه دوم

$(\sin x) y'' + x y' - \sqrt{x}\, y = 0$ " "

$y y'' + x^2 y' = 3x \sin x$ معادله غیرخطی

$\sin(xy) + y'' - 4xy' = 0$ معادله غیرخطی