آمار و احتمال مهندسی

فصل: احتمال

مدرس: مشکانی فراهانی

احتمال و آزمایش

- در احتمال با یک اقدام یا دنباله‌ای از اقدام‌های متوالی برای اجرای آزمایشی که نتیجه آن از قبل معلوم نسیت، سر و کار داریم.
- "آزمایش" به معنی عام ممکن است فرآیندهای ساده مانند اندازه‌گیری مشخصات قطعه‌ای ساخته شده باشد؛ یا عملیاتی پیچیده مانند سنجش تأثیر افزودنی‌های خاص بر مقاومت یک آلیاژ.
- معمولاً ما برای یافتن پاسخ درباره ناشناخته‌ها اقدام به تجربه یا آزمایش می‌کنیم.
- "آزمایش" مجموعه اقدامات و عملیاتی است که برای کشف امری ناشناخته توسط آزمایشگر صورت می‌گیرد.
- در مسائل علمی اغلب اوقات با آزمایش‌هایی مواجه می‌شویم که اگر تحت شرایط مشابهی تکرار شوند، نتایج مختلفی را به دست می‌دهند که نشان‌گر یک عامل اتفاقی در نتیجه آزمایش است.

تعاریف اولیه

- **برآمد**: هر آزمایش پس از اجرا به نتیجه‌ای می‌انجامد که به آن برآمد گویند.

- **آزمایش تصادفی:** آزمایشی است که نتیجه آن بر حسب تصادف یکی از چند برآمد ممکن است، اما از پیش نمی‌توان گفت که کدام برآمد رخ می‌دهد.

- **فضای نمونه:** مجموعه تمام نتایج (برآمدهای) ممکن یک آزمایش تصادفی است. آن را با نماد S نشان می‌دهند.

مثال ۱

- برای آزمایش‌های زیر فضای نمونه را بنویسید.

الف– پرتاب یک سکه

$$S = \{H, T\}$$

ب– پرتاب دو سکه

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ج– تعداد خال‌ها در پرتاب دو تاس

$$S = \{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)\ldots(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶)\}$$

مثال ۱

د- پرتاب یک سکه و سپس یک تاس

$$S=\{(H,۱)(H,۲)\ldots(H,۶)(T,۱)(T,۲)\ldots(T,۶)\}$$

هـ- پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهده یک شیر

$$S=\{H,TH,TTH,TTTH,TTTTH,\ldots\}$$

و- اندازه‌گیری طول عمر یک لامپ (اگر طول عمر حداکثر ۱۰۰۰۰ ساعت باشد)

$$S=[\,۰\,,\,۱۰۰۰۰\,]$$

دسته‌بندی فضای نمونه

۱- فضای نمونه گسسته

- تعداد اعضای آن **شمارش‌پذیر** است.
  - الف- متناهی (تعداد اعضای آن متناهی است) - مثال قسمت ۱ الف،ب،ج،د
  - ب- نامتناهی و شمارش‌پذیر - مثال ۱قسمت هـ

۲- فضای نمونه پیوسته

- اعضای آن به صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی یا ... است. - مثال ۱ قسمت و

پیشامد

- **تعریف:** هر زیر مجموعه مناسب از فضای نمونه را یک پیشامد گویند و آن را با حروف بزرگ لاتین نمایش می‌دهند.

- **رخداد پیشامد:** هر پیشامد زمانی رخ می‌دهد که یکی از برآمدهای متعلق به زیر مجموعه‌ی برآمدهایش رخ دهد.

- S پیشامدی حتمی است که در هر آزمایش حتما رخ می‌دهد.

- $\varnothing$ پیشامدی ناممکن است که هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

روابط بین پیشامدها

- $\overline{A}$ یا A’ پیشامدی شامل همه‌ی برآمدهایی است که در A نیستند.

- **اجتماع** دو پیشامد به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد است. (یا) $\cup$

- **اشتراک** دو پیشامد به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد است. (و) $\cap$

- اگر A و B دارای اشتراک تهی باشند، به معنی آن است که هیچ عضوی وجود ندارد که در هر دو پیشامد باشد. بنابراین هیچ‌گاه آن دو نمی‌توانند با هم رخ دهند. اگر یکی رخ دهد دیگری نمی‌تواند اتفاق بیفتد. چنین پیشامدهایی را "متقابلاً **ناسازگار**" یا "**مجزا**" گویند.

- وقوع A-B به معنای وقوع “فقط A و نه B ” است.

روابط بین پیشامدها

- قانون توزیع‌پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- قانون دمورگان

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

قواعد شمارش

- روش مستقیم برای تعیین تعداد عضوهای یک مجموعه فهرست کردن و شمارش آن‌هاست.

- زمانی که تعداد اعضای مجموعه زیاد باشد، این روش عملی و امکان‌پذیر نیست.

- موضوع آنالیز ترکیبی: یافتن روش مناسب برای تعیین تعداد عضوهای یک مجموعه

قاعده ضرب (اصل اساسی شمارش)

- فرض کنید n عمل به صورت پی‌درپی انجام شود.
- اگر اولین عمل را بتوان به یکی از $m_۱$ راه متمایز انجام داد، برای هر راه انجام عمل اول، عمل دوم را بتوان به یکی از $m_۲$ راه متمایز انجام داد و الی آخر...
- یعنی برای هر $i = ۲, ۳, \ldots, n$ تعداد راه‌های انجام i-امین عمل m_i بستگی به راه انجام $i - ۱$ عمل قبلی نداشته باشد، در آن صورت n عمل مزبور با هم را به $m_۱ m_۲ \ldots m_n$ راه متمایز می‌توان انجام داد.

مثال ۲

- تحت هر یک از شرایط زیر، تعداد اعداد سه رقمی که با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ می‌توان ساخت، تعیین کنید:

الف- بدون تکرار ارقام

$\underline{۴} \times \underline{۵} \times \underline{۵}$

ب- فرد و بدون تکرار ارقام

$\underline{۳} \times \underline{۴} \times \underline{۴}$

ج- بزرگ‌تر از ۳۳۰ و بدون تکرار ارقام

$\underline{۴} \times \underline{۵} \times \underline{۲} \quad + \quad \underline{۴} \times \underline{۲} \times \underline{۱}$

مثال ۳

- اعضای شورای دانشجویی یک دانشگاه متشکل از ۳ دانشجوی سال اول، ۴ دانشجوی سال دوم، ۵ دانشجوی سال سوم و ۲ دانشجوی سال چهارم هستند. اگر بخواهیم یک شورای فرعی چهار نفری که دانشجویان سال‌های مختلف در آن هستند تشکیل دهیم، چند شورای فرعی می‌توان انتخاب کرد؟

- راه‌حل:

$$\underline{۳} \times \underline{۴} \times \underline{۵} \times \underline{۲}$$

مثال ۴

- به چند طریق می‌توان از بین ۴ دانشجوی کامپیوتر و ۵ دانشجوی ریاضـی، دو دانشجو را انتخاب کرد به طوری که نفر اول به عنـوان سـرگروه و نفـر دوم بـه عنوان دستیار باشد و هر دو از یک رشته باشند؟

- راه‌حل:

$$\left(\underline{۴} \times \underline{۳}\right) + \left(\underline{۵} \times \underline{۴}\right)$$

اصل
جمع

جایگشت

- اگر n شیء مختلف داشته باشیم، می‌توانیم این اشیا را به صورت‌های مختلف آرایش دهیم.

- هر آرایش یک جایگشت نامیده می‌شود.

- اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد جایگشت‌ها برابر $n!$ خواهد بود.

مثال ۵

- یک کلاس نظریه احتمال شامل ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر است. پس از برگزاری یک امتحان نمرات آنها مرتب می‌شوند. با فرض این‌که هیچ دو دانشجویی نمره یکسان کسب نکنند. چند حالت ممکن برای مرتب کردن نمرات وجود دارد؟

- راه‌حل:

$$۱۰!$$

مثال ۶

- شخصی ۱۰ کتاب دارد و می‌خواهد آن‌ها را در قفسه کتابخانه خود قرار دهـد. از ۱۰ کتاب، تعداد ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتـاب شـیمی، ۲ کتـاب تـاریخ و یـک کتاب زبان است. اگر این شخص بخواهد کتاب‌های با موضـوع یکسـان را کنـار هم قرار دهد، چند ترتیب ممکن برای قرار دادن کتاب‌ها وجود دارد؟

❋ احتمال پیشامد خواسته شده چه‌قدر است؟

- راه‌حل:

$$n\left(A\right)=\left(۴!\times ۳!\times ۲!\times ۱!\right)\times ۴!$$

$$*\,P\left(A\right)=\frac{\left(۴!\times ۳!\times ۲!\times ۱!\right)\times ۴!}{۱۰!}$$

مثال ۷

- چهار پزشک و پنج مهندس می‌خواهند در یک صف کنار یکدیگر قـرار گیرنـد. مطلوبست تعداد حالاتی که:

الف– مهندس‌ها در یک طرف صف و پزشک‌ها در طرف دیگر صف قرار گیرند.

$$\left(5! \times 4!\right) \times 2!$$

ب– پزشک‌ها و مهندس‌ها یک در میان در صف قرار گیرند.

$$\left(5! \times 4!\right)$$

ج– دو مهندس بخصوص همواره کنار یکدیگر قرار گیرند.

$$8! \times 2!$$

د– دو مهندس بخصوص هیچگاه کنار یکدیگر قرار نگیرند.

$$9! - 8! \times 2!$$

مثال ۸

- یک دست ورق ۵۲ تایی کامل بر زده شده است. در چه تعدادی از حالات ۴ تا آس پشت سر هم قرار می‌گیرند؟

- راه‌حل:

$$n\left(A\right) = ۴۹! \times ۴!$$

قاعده‌ی تعداد جایگشت‌های متمایز

- تعداد جایگشت‌های n شیء که $n_۱$ تای آنها مثل هم، $n_۲$ تا از آنها مثل هم و ... و n_r تای آنها مثل هم هستند، برابر است با

$$\frac{n\,!}{n_۱\,!\;\; n_۲\,!\, \dots\, n_r\,!}$$

مثال ۹

- **الف**– چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه statistics می‌توان نوشت؟
- **ب**– در چه تعداد از این کلمه‌ها هر سه حرف t پشت سر هم هستند؟

- راه‌حل:

$$n\left(A\right)=\frac{۱۰!}{۳!۳!۲!}$$

$$n\left(B\right)=\frac{۸!}{۳!۲!}$$

ترکیب و ترتیب

- اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم از این n شیء فقط r شیء را بدون جایگذاری انتخاب کنیم، به طوری که
- **الف**- اگر ترتیب انتخاب r شیء مهم نباشد، تعداد نمونه‌ها برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$$

- **ب**- اگر ترتیب انتخاب r شیء مهم باشد، برابر است با

$$n\left(n-۱\right)\left(n-۲\right)\left(n-۳\right)\ldots\left(n-r+۱\right)$$

مثال ۱۰

- می‌خواهیم از میان یک گروه ۲۰ نفری یک شورای سه نفره تشکیل دهیم. بـه چند حالت مختلف این کار امکان‌پذیر است؟

- راه‌حل:

$$\binom{۲۰}{۳} = \frac{۲۰!}{۳!(۲۰-۳)!} = \frac{۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸}{۳!} = ۱۱۴۰$$

مثال ۱۱

- **الف**– از یک گروه متشکل از ۵ زن و ۷ مرد چند شورای مختلف ۵ عضوی شامل ۲ زن و ۳ مرد می‌توان انتخاب نمود؟
- **ب**– اگر دو نفر از مردها با یکدیگر خصومت داشته و نخواهند با هم در شورا انتخاب شوند، آنگاه چند شورا می‌توان انتخاب نمود؟

- راه‌حل:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۳} = \frac{۵!}{۲!۳!} \times \frac{۷!}{۳!۴!} = ۱۰ \times ۳۵ = ۳۵۰$$

$$\binom{۵}{۲}\binom{۲}{۰}\binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۲} = \left(۱۰ \times ۱ \times ۱۰\right) + \left(۱۰ \times ۲ \times ۱۰\right) = ۳۰۰$$

مثال ۱۲

- می‌خواهیم از فهرست اسامی ۱۱ بازیکن فوتبال به ترتیب برای انتخاب دروازه‌بان، بک و هاف بک ۳ نام را خارج کنیم، به چند صورت این انتخاب انجام می‌شود؟

- راه‌حل:

$$\underset{Goaler}{\underline{\;۱۱\;}} \times \underset{Back}{\underline{\;۱۰\;}} \times \underset{HalfBack}{\underline{\;۹\;}}$$

قاعده‌ی افراز:

- اگر بخواهیم n شیء را در k طبقه پخش کنیم به طوری که i–امین طبقه، $i = ۱, ۲, \ldots, k$ ، n_i شیء داشته باشد، که در آن $n_۱ + n_۲ + \ldots + n_k = n$ این عمل به

$$\frac{n!}{n_۱!\ n_۲! \ldots n_k!}$$

صورت امکان‌پذیر است.

مثال ۱۳

- **الف**– به چند روش می‌توان ۵ کتاب درسی و ۱۵ کتاب غیر درسی را بین چهار نفر به طور مساوی تقسیم کرد؟
- **ب**– در چند حالت هر نفر دست‌کم یک کتاب درسی دریافت می‌کند؟

- راه‌حل:

$$n\left(A\right)=\frac{۲۰!}{۵!\,۵!\,۵!\,۵!}$$

$$n\left(B\right)=\binom{۴}{۱}\times\frac{۵!}{۲!\,۱!\,۱!\,۱!}\times\frac{۱۵!}{۳!\,۴!\,۴!\,۴!}$$

نکته

- اگر تعداد اشیاء و طبقات مساوی n باشند و در هر طبقه یک شیء قرار دهیم، این عمل به $n!$ صورت ممکن انجام‌پذیر است.

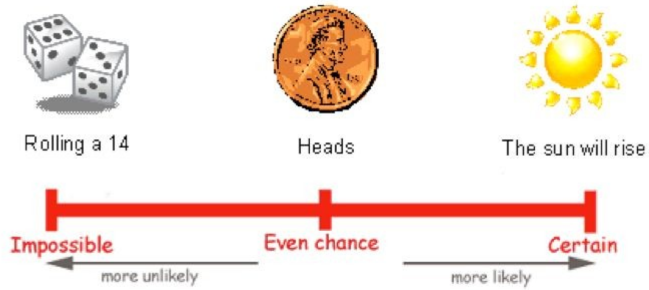
- ترکیب افراز n شیء در دو طبقه است.

r شیء در یک طبقه

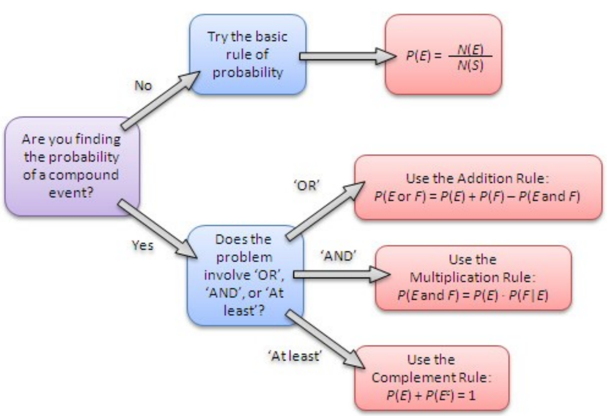
$n-r$ شیء در طبقه دیگر

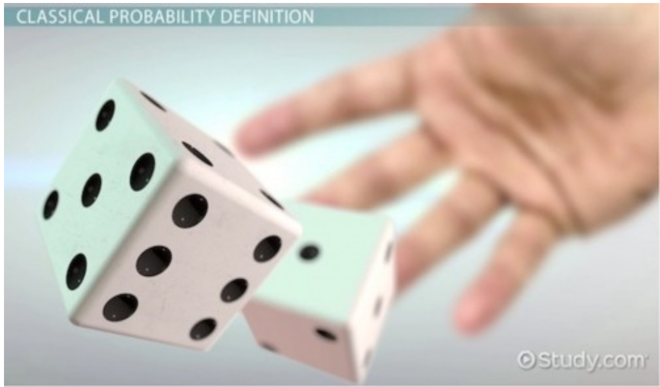
جدول کلی تعداد نمونه‌های r-تایی از یک مجموعه n عضوی

	نامرتب	مرتب
بدون جایگذاری	$\binom{n}{r}$	$\underline{n} \times \underline{n-1} \times \underline{n-2} \times \ldots \times \underline{n-r+1}$
با جایگذاری	$\binom{n+r-1}{r}$	n^r


Rolling a 14
Heads
The sun will rise
Impossible
Even chance
Certain
more unlikely
more likely

احتمال


Are you finding the probability of a compound event?
No
Yes
Try the basic rule of probability
$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}$
Does the problem involve 'OR', 'AND', or 'At least'?
'OR'
Use the Addition Rule: $P(E \text{ or } F) = P(E) + P(F) - P(E \text{ and } F)$
'AND'
Use the Multiplication Rule: $P(E \text{ and } F) = P(E) \cdot P(F|E)$
'At least'
Use the Complement Rule: $P(E) + P(E^c) = 1$


CLASSICAL PROBABILITY DEFINITION
©Study.com

احتمال

- **تعبیر احتمال از دیدگاه فراوانی نسبی**

- احتمال وقوع یک پیشامد به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است.

فرض کنید یک آزمایش تصادفی را n مرتبه تحت شرایط یکسان تکرار کنیم و تعداد دفعاتی که در این n آزمایش پیشامد A به وقوع بپیوندد را با $f_n\left(A\right)$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین $r_n\left(A\right) = \dfrac{f_n\left(A\right)}{n}$ فراوانی نسبی وقوع پیشامد A است.

انتظار داریم که با زیاد شدن تعداد آزمایشات n، $r_n\left(A\right)$ به یک عدد ثابتی نزدیک شود که این عدد ثابت را احتمال وقوع پیشامد A گوییم و آن را با $\mathrm{P(A)}$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$P\left(A\right) = \lim_{n\to\infty} r_n\left(A\right)$$

احتمال

- **تعبیر احتمال در فضای هم‌شانس** (فضای متساوی‌الاحتمال)

اگر رخداد همه‌ی برامدهای فضای نمونه‌ی گسسته S هم‌احتمال باشند، احتمال رخداد هر پیشامد A از این فضا برابر است با نسبت تعداد برامدهای A به تعداد کل برامدها

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات کل}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

اصول احتمال

- مقدار عددی $\mathrm{P(A)}$ را احتمال پیشامد A گویند.

- تابع $\mathrm{P(A)}$ در سه اصل زیر صدق می‌کنند:

۱- برای پیشامد حتمی S داریم: $\mathrm{P(S)=1}$

۲- برای هر پیشامد A از فضای نمونه S داریم: $۰ \le P(A) \le ۱$

۳- اگر $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P\left(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup \ldots\right) = P\left(A_۱\right) + P\left(A_۲\right) + P\left(A_۳\right) + \ldots$$

مثال ۱۴

- سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آوردن حداقل یک شیر را بیابید.

- راه‌حل:

$$S = \left\{HH, HT, TH, TT\right\}$$
$$A = \left\{HH, HT, TH\right\}$$
$$P\left(A\right) = \frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۱۵

- یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آوردن مجموع ۷ را به دست آورید.

- راه‌حل:

$$S=\{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)\dots(۲,۱)(۲,۲)\dots(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶)\}$$
$$A=\{(۱,۶)(۲,۵)(۳,۴)(۴,۳)(۵,۲)(۶,۱)\}$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}$$

مثال ۱۶

- از یک دست کارت ۵۲ تایی هفت کارت را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها شاه باشد، چه‌قدر است؟

- راه‌حل:

$$P\left(\text{حداقل یک شاه}\right) = ۱ - P\left(\text{عدم انتخاب شاه}\right) = ۱ - \frac{\binom{۴۸}{۷}}{\binom{۵۲}{۷}}$$

مثال ۱۷

- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است، ۶ مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شود.

- راه‌حل:

$$P\left(۲R\ ,\ ۱W\right)=\frac{\binom{۵}{۲}^{B}\binom{۳}{۱}^{W}\binom{۴}{۳}^{R}}{\binom{۱۲}{۶}}$$

مثال ۱۸ (فضای نامساوی)

- یک تاس به شکلی است که احتمال آوردن عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد است. احتمال آوردن عدد بزرگ‌تر از ۳ در پرتاب این تاس را بیابید.

- راه‌حل:

$$\begin{array}{l} S=\left\{ ۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,۴\,,\,۵\,,\,۶ \right\} \\ \quad\;\;\downarrow\;\downarrow\;\;\downarrow\;\;\;\downarrow\;\;\;\downarrow\;\;\;\downarrow \\ \quad\;\; p\;\;\; ۲p\; p\;\;\; ۲p\;\;\; p\; ۲p \end{array}$$

$$P\left(S\right)=P\left(\left\{ ۱\right\}\right)+P\left(\left\{ ۲\right\}\right)+\ldots+P\left(\left\{ ۶\right\}\right)=p+۲p+p+۲p+p+۲p=۹p=۱ \quad\Rightarrow\quad p=\frac{۱}{۹}$$

$$A=\left\{ ۴,۵,۶\right\}$$

$$P\left(A\right)=P\left(\left\{ ۴\right\}\right)+P\left(\left\{ ۵\right\}\right)+P\left(\left\{ ۶\right\}\right)=\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

احتمال در فضای نمونه‌ی پیوسته

- در یک حالت خاص، فضای نمونه‌ی پیوسته به صورت یک فاصله‌ی کران‌دار $S = \left[a\ ,\ b\right]$ از اعداد حقیقی (یا یک سطح در فضای دو بعدی و ...) است.
- پیشامدها به صورت یک زیرفاصله یا اجتماعی از زیرفاصله‌ها (یا یک زیرسطح در فضای دو بعدی و ...) هستند.
- در این حالت، احتمال هر پیشامد A را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P(A) = \frac{A \text{ طول زیرفاصله}}{S \text{ طول فاصله}} \qquad P(A) = \frac{A \text{ مساحت ناحیه}}{S \text{ مساحت ناحیه}}$$

مثال ۱۹

- عددی را به تصادف از فاصله‌ی اعداد حقیقی [۲,۵] انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب شده در فاصله‌ی [۳,۴/۵] باشد، چه‌قدر است؟

- راه‌حل:

$$P\left(A\right)=\frac{۴/۵-۳}{۵-۲}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲۰

- از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که فاصله‌ی نقطه‌ی انتخاب شده تا مرکز دایره کمتر از فاصله‌ی آن تا محیط دایره باشد، چه‌قدر است؟

- راه‌حل:

$$P\left(A\right)=\frac{\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}}{\pi R^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

چند قانون احتمال

- اگر A یک پیشامد و $\overline{A}$ متمم آن باشد، آنگاه $P\left(\overline{A}\right) = ۱ - P\left(A\right)$

- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$

- اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$$

- اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه

$$P\left(A - B\right) = P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right)$$

مثال ۲۱

- شخصی که در جایگاه بنزین توقف می‌کند، بازبینی لاستیک‌های ماشین را با احتمال ۰/۱۲، بازبینی روغن ماشین را با احتمال ۰/۲۹ و بازبینی هر دو را با احتمال ۰/۰۷ تقاضا می‌کند. مطلوبست احتمال اینکه

الف– این شخص درخواست بازبینی لاستیک یا روغن ماشینش را داشته باشد، بیابید.

ب– این شخص هیچ کدام از بازبینی‌ها را درخواست نکند، بیابید.

ج– این شخص فقط یکی از دو بازبینی را تقاضا کند.

راه‌حل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۱۲ + ۰/۲۹ - ۰/۰۷ = ۰/۳۴$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - ۰/۳۴ = ۰/۶۶$$

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = ۰/۱۲ + ۰/۲۹ - ۲ \times ۰/۰۷ = ۰/۲۷$$

احتمال شرطی

احتمال شرطی

- فرض کنید به رخ دادن پیشامد B به شرط آنکه پیشامد A قبلاً رخ داده باشد، علاقمندیم. در این صورت با احتمال شرطی B به شرط آنکه A رخ داده باشد، سروکار داریم که آن را با نماد P(B|A) نشان می‌دهند.

- در این وضعیت آن برآمدهایی که در A وجود دارند اهمیت پیدا می‌کنند و برآمدهای خارج از آن نقشی در رخ دادن B نخواهند داشت.

- در این حالت، در واقع A مانند فضای نمونه یک آزمایش جدید عمل می‌کند و B وقتی رخ می‌دهد که یکی از برآمدهای واقع در $A \cap$ رخ دهد.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال ۲۲

- دو تاس سالم را پرتاب کـرده و نتیجـه پرتـاب تـاس اول کـه عـدد ۳ اسـت را مشاهده کرده‌ایم. احتمال این‌که مجموع اعداد دو تاس برابر ۸ باشـد، چـه‌قـدر است؟

- راه‌حل:
- A: پیشامد اینکه در پرتاب تاس اول عدد ۳ ظاهر شود
- B: پیشامد اینکه مجموع پرتاب دو تاس برابر ۸ شود

$$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

$$A = \{(۳,۶)(۳,۵)(۳,۴)(۳,۳)(۳,۲)(۳,۱)\} \Rightarrow n(A) = ۶$$

$$A \cap B = \{(۳,۵)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۱$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۳۶}}{\frac{۶}{۳۶}} = \frac{۱}{۶}$$

مثال ۲۳

- اطلاعات مربوط به سود خالص سالانه‌ی ۱۵۰ شرکت که در چهار صنعت مختلف فعالیت می‌کنند، در جدول زیر آورده شده است. چنان‌چه یکی از شرکت‌ها به تصادف انتخاب شود، مطلوبست احتمال این‌که شرکت انتخابی
- **الف**- در صنعت آلومینیوم فعالیت داشته باشد.
- **ب**- در صنعت نساجی بوده و سودی بیش‌تر از ۵ میلیارد داشته باشد.
- **ج**- در صنعت نساجی مشغول فعالیت باشد در صورتی که بدانیم سودی بیشتر از ۵ میلیارد دارد.

میزان سود	کمتر یا مساوی ۵ میلیارد	بیشتر از ۵ میلیارد	جمع
صنعت نساجی	۱۷	۱۵	۳۲
صنعت آلومینیوم	۳۵	۳۰	۶۵
صنعت مواد غذایی	۲۸	۵	۳۳
صنعت چوب و کاغذ	۱۰	۱۰	۲۰
جمع	۹۰	۶۰	۱۵۰

مثال ۲۳

- راه‌حل:

A: پیشامد اینکه شرکت انتخابی در صنعت آلومینیوم باشد.

B: پیشامد اینکه شرکت انتخابی در صنعت نساجی باشد.

C: پیشامد اینکه شرکت انتخابی سودی بیشتر از ۵ میلیارد داشته باشد.

$$a.\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۵}{۱۵۰}=۰/۴۳$$

$$b.\quad P(B\cap C)=\frac{n(B\cap C)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۱۵۰}=۰/۱$$

$$c.\quad P(B\mid C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{۱۵}{۱۵۰}}{\frac{۶۰}{۱۵۰}}=۰/۲۵$$

مثال ۲۴

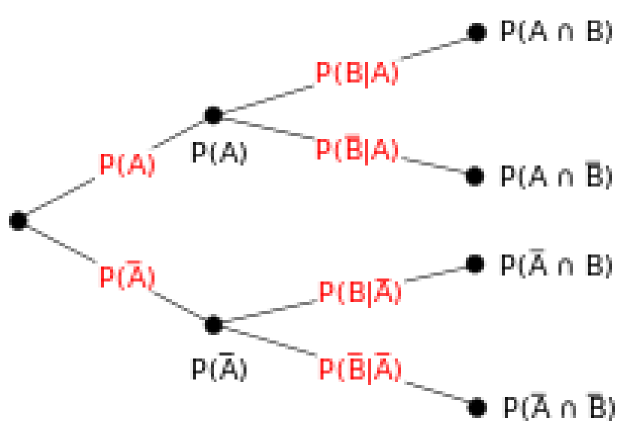
- از جعبه‌ای حاوی ۹ کارت با شماره‌های ۱ تا ۹، دو کارت را به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم که مجموع دو عدد زوج است، احتمال این‌که هر دو عدد فرد باشند، چه‌قدر است؟

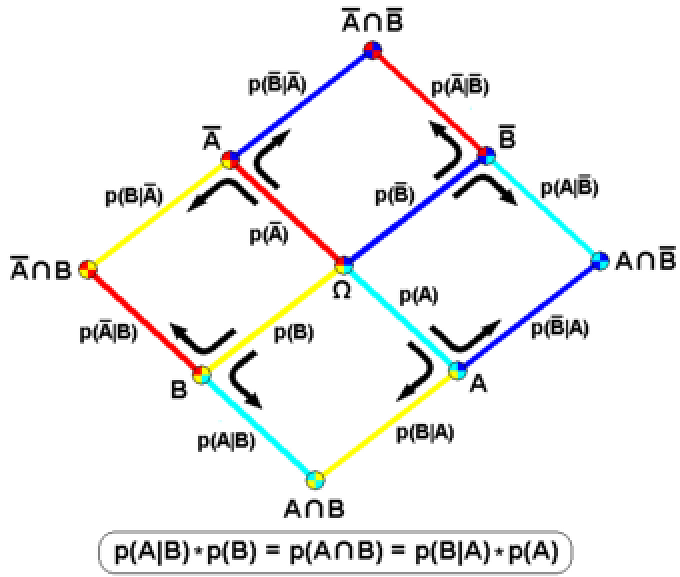
- راه‌حل:

$$P\left(\text{مجموع زوج}\right) = P\left(\text{هر دو فرد}\right) + P\left(\text{هر دو زوج}\right) = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۲}} + \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۲۰ + ۱۲}{۷۲}$$

$$P\left(\text{هر دو فرد} \middle| \text{مجموع زوج}\right) = \frac{\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۲}}}{\frac{۳۲}{۷۲}} = \frac{۲۰}{۳۲} = \frac{۵}{۸}$$

قانون ضرب‌پذیری





قانون ضرب‌پذیری

- استفاده از رابطه‌ی احتمال شرطی برای محاسبه $P(A \cap B)$ مفید است. اگر طرفین رابطه‌ی احتمال شرطی را در $P(A)$ ضرب کنیم، به دست می‌آوریم:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

یعنی احتمال وقوع توأم پیشامدهای A و B برابر است با حاصل‌ضرب احتمال A در احتمال شرطی B وقتی A رخ داده است.

قانون ضرب‌پذیری

- قانون ضرب‌پذیری را برای محاسبه احتمال وقـوع تـوأم چنـدین پیشـامد می‌توان تعمیم داد.

- **قضیه:** اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بتواننـد همزمـان اتفـاق بیفتند $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ ، آنگاه

$$
\begin{aligned}
& P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n\right) \\
& \quad = P\left(A_1\right) P\left(A_2 \mid A_1\right) P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) \ldots P\left(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

مثال ۲۵

- از یک دسته ورق ۵۲ تایی، دو کارت به تصادف، به ترتیب و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که

الف- کارت اول بی‌بی پیک و کارت دوم سرباز پیک باشد.

ب- کارت اول بی‌بی پیک و کارت دوم سرباز باشد.

ج- کارت اول بی‌بی پیک و کارت دوم نیز بی‌بی باشد.

- راه‌حل

$$a.\quad P(BP_{۱} \cap SP_{۲}) = P\left(BP_{۱}\right)P\left(SP_{۲} \mid BP_{۱}\right) = \frac{۱}{۵۲} \times \frac{۱}{۵۱}$$

$$b.\quad P(BP_{۱} \cap S_{۲}) = P\left(BP_{۱}\right)P\left(S_{۲} \mid BP_{۱}\right) = \frac{۱}{۵۲} \times \frac{۴}{۵۱}$$

$$c.\quad P(BP_{۱} \cap B_{۲}) = P\left(BP_{۱}\right)P\left(B_{۲} \mid BP_{۱}\right) = \frac{۱}{۵۲} \times \frac{۳}{۵۱}$$

مثال ۲۶

- جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. اگر سه مهره به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم، مطلوبست احتمال این‌که

الف– مهره انتخابی اول قرمز، دومی سفید و سومی قرمز باشد.

ب– دو مهره قرمز و یک مهره سفید انتخاب شود.

ج– هر سه مهره از یک رنگ باشند.

- راه‌حل:

$$a.\quad P(R_۱\cap W_۲\cap R_۳)=P\left(R_۱\right)P\left(W_۲\mid R_۱\right)P\left(R_۳\mid R_۱\cap W_۲\right)=\frac{۲}{۹}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۷}$$

$$b.\quad P(۲R\cap ۱\,W)=\frac{\binom{۲}{۲}^{R}\binom{۳}{۱}^{W}}{\binom{۹}{۳}}$$

$$c.\quad P\left(۳\,W\right)+P\left(۳B\right)=\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}$$

مثال ۲۷

- فرض کنید ۵ فیوز سالم و ۲ فیوز معیوب در هم شده‌اند. برای یافتن فیوزهای معیوب آنها را به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری امتحان می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که

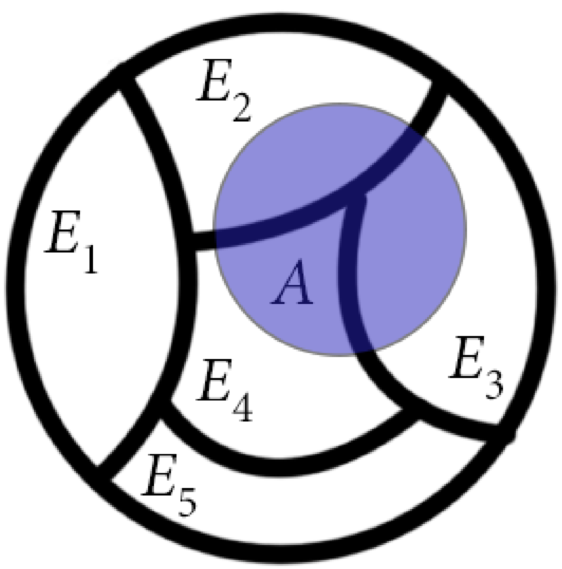
الف– هر دو فیوز معیوب را در دو امتحان اول پیدا کنیم.

ب– هر دو فیوز معیوب را دقیقاً پس از سه امتحان اول پیدا کنیم.

$$a.\quad P\left(M_۱ \cap M_۲\right) = P\left(M_۱\right) P\left(M_۲ \mid M_۱\right) = \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۶}{۱}}$$

$$\begin{aligned} & P\left(M_۱ \cap S_۲ \cap M_۳\right) + P\left(S_۱ \cap M_۲ \cap M_۳\right) \\ &= P\left(M_۱\right) P\left(S_۲ \mid M_۱\right) P\left(M_۳ \mid M_۱ \cap S_۲\right) + P\left(S_۱\right) P\left(M_۲ \mid S_۱\right) P\left(M_۳ \mid S_۱ \cap M_۲\right) \\ &= \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۶}{۱}} \times \frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۱}} + \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}} \times \frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۱}} \end{aligned}$$

قانون احتمال کل



قانون احتمال کل

- **تعریف افراز**
- فرض کنید $\{B_1,\dots,B_n\}$ مجموعه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ی یک آزمایش S باشند. اگر پیشامدهای $B_1,\dots,B_n$ دو به دو ناسازگار و $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی $\{B_1,\dots,B_n\}$ را یک افراز از فضای نمونه‌ی S گویند.

- گاهی محاسبه احتمال پیشامدی مانند A مستقیماً امکان‌پذیر نیست؛ اما برای پیشامدی مانند B محاسبه احتمال‌های $P(A \mid B_1),\dots,P(A \mid B_n)$ امکان‌پذیر است.

- **قضیه**: فرض کنید $\{B_1,\dots,B_n\}$ افرازی از فضای نمونه‌ی یک آزمایش باشند. اگر برای مقادیر $i=1,\dots,n$ ، $P(B_i)>0$ باشد، آن‌گاه برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ی S داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

مثال ۲۸

- شرکت بیمه‌ای برای مشتریان خود ۳۵٪ اتومبیل‌ها را از آژانس I و ۶۵٪ اتومبیل‌ها را از آژانس II کرایه می‌کند. اگر ۸٪ اتومبیل‌های آژانس I و ۵٪ اتومبیل‌های آژانس II در طول کرایه از کار باز بمانند. احتمال این‌که اتومبیلی که بوسیله این شرکت بیمه کرایه شده است از کار باز بماند، چه‌قدر است؟

- راه‌حل:
- A: پیشامد اینکه اتومبیل کرایه شده خراب شود
- B1: پیشامد اینکه اتومبیل کرایه شده از آژانس I باشد
- B2: پیشامد اینکه اتومبیل کرایه شده از آژانس II باشد

$$P(A) = P(A \mid B_۱)P(B_۱) + P(A \mid B_۲)P(B_۲)$$
$$= (۰/۰۸ \times ۰/۳۵) + (۰/۰۵ \times ۰/۶۵)$$

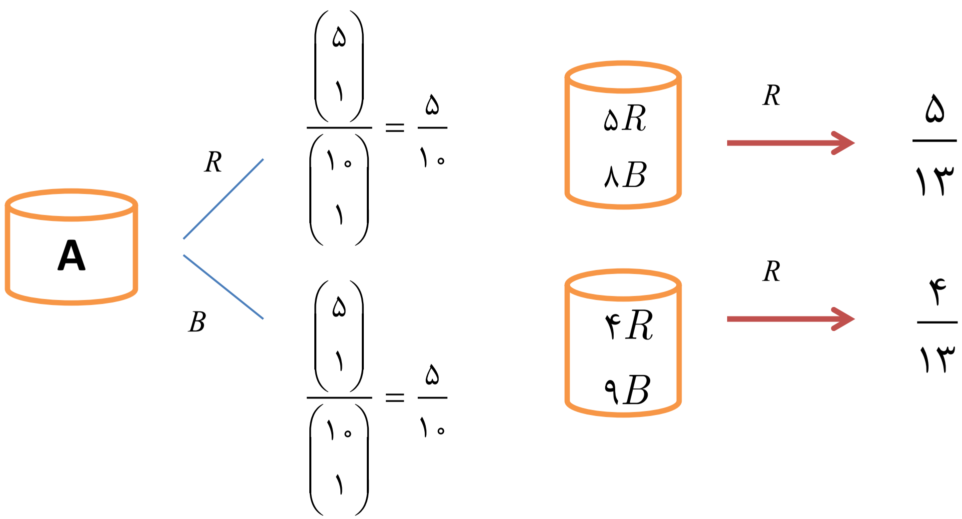
مثال ۲۹

- در کارخانه‌ای کارگران در سه شیفت صبح، عصر و شب کار می‌کنند. آمار نشان می‌دهد که به ترتیب ۴۰٪ ، ۴۰٪ و ۲۰٪ از تولیدات توسط شیفت‌های صبح، عصر و شب تولید می‌شود و به ترتیب ۵٪ ، ۱۰٪ و ۲۰٪ از تولیدات شیفت‌های صبح، عصر و شب معیوب هستند. از انبار این کارخانه کالایی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال سالم بودن این کالا چه‌قدر است؟
- A: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده معیوب باشد
- B1: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده تولید شیفت صبح باشد
- B2: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده تولید شیفت عصر باشد
- B3: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده تولید شیفت شب باشد

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \mid B_۱)P(B_۱) + P(A \mid B_۲)P(B_۲) + P(A \mid B_۳)P(B_۳) \\
&= (۰/۰۵ \times ۰/۴۰) + (۰/۱۰ \times ۰/۴۰) + (۰/۲۰ \times ۰/۲۰) \\
\Rightarrow \quad & P(Salem) = P(\overline{A}) = ۱ - P(A)
\end{aligned}
$$

مثال ۳۰

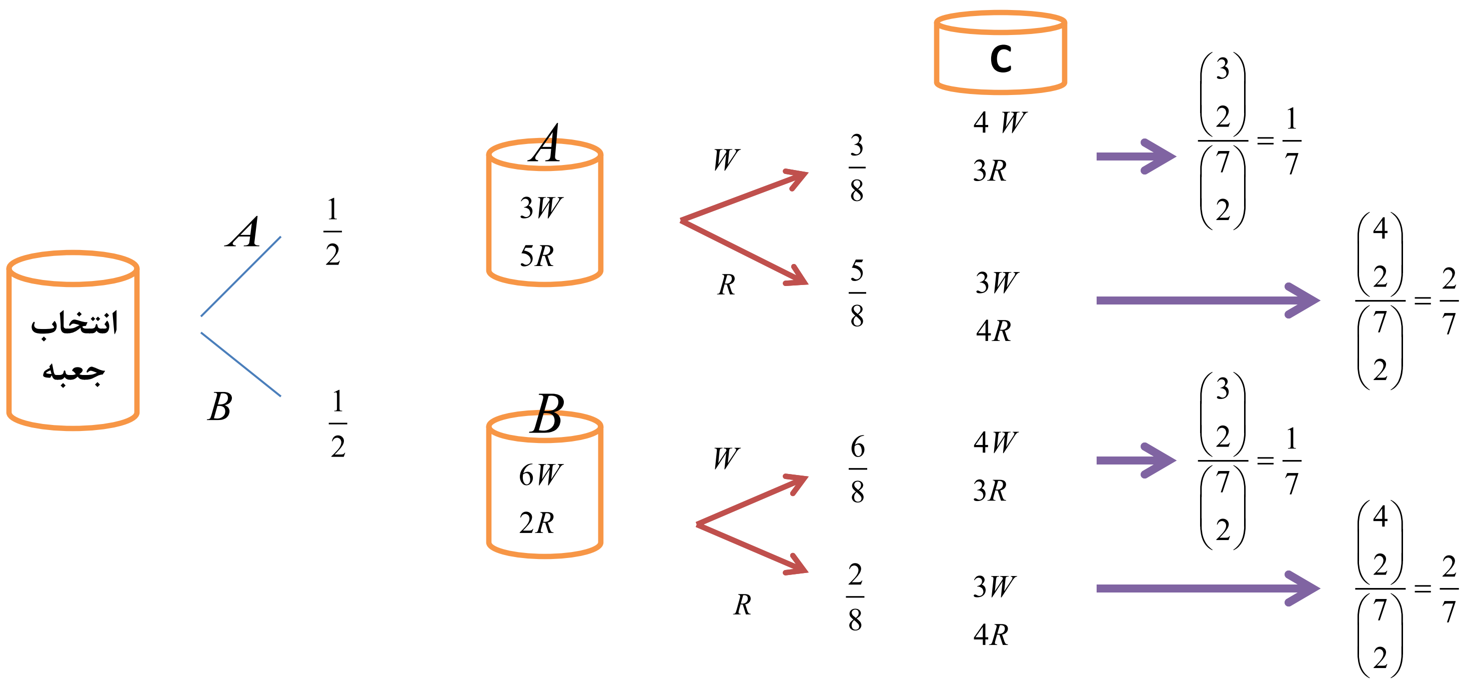
- در ظرف A ۵ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی سیاه، در ظرف B ۴ مهره‌ی قرمز و ۸ مهره‌ی سیاه وجود دارد. یک مهره از A خارج می‌کنیم و در B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از B خارج می‌کنیم، احتمال قرمز بودن آن چه‌قدر است؟



$$P(R_۲) = P(R_۱)P(R_۲ \mid R_۱) + P(B_۱)P(R_۲ \mid B_۱)$$
$$= \left(\frac{۵}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۳}\right) + \left(\frac{۵}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۳}\right)$$

مثال ۳۱

- جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است. یک جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم و بدون توجه به رنگش در جعبه سوم C قرار می‌دهیم که خود شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. سپس از جعبه C دو مهره خارج می‌کنیم. احتمال قرمز بودن این دو مهره را بیابید.



$$P\left(R_C\right)=\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۷}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۲}{۷}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۸}\times\frac{۱}{۷}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۸}\times\frac{۲}{۷}\right)$$

مثال ۳۲ – الف

- در ظرفی سه نوع فلاش دوربین عکاسی وجود دارد. احتمال این‌که فلاش نوع ۱ بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند برابر با ۰/۷ و این احتمال برای فلاش‌های نوع ۲ و ۳ به ترتیب برابر با ۰/۴ و ۰/۳ است. فرض کنید ۲۰ درصد از فلاش‌های موجود در ظرف از نوع ۱، ۳۰ درصد از نوع ۲ و ۵۰ درصد از نوع ۳ باشد. یک فلاش از ظرف انتخاب می‌شود،

الف- مطلوبست احتمال این‌که فلاش انتخاب شده بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند.

- A: پیشامد اینکه کالای انتخاب شده بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند
- B1: پیشامد اینکه فلاش انتخاب شده از نوع ۱ باشد
- B2: پیشامد اینکه فلاش انتخاب شده از نوع ۲ باشد
- B3: پیشامد اینکه فلاش انتخاب شده از نوع ۳ باشد

$$P(A) = P(A \mid B_۱)P(B_۱) + P(A \mid B_۲)P(B_۲) + P(A \mid B_۳)P(B_۳)$$
$$= (۰/۷ \times ۰/۲۰) + (۰/۴ \times ۰/۳۰) + (۰/۳ \times ۰/۵۰)$$

مثال ۳۲ – ب

- در ظرفی سه نوع فلاش دوربین عکاسی وجود دارد. احتمال این‌که فلاش نوع ۱ بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند برابر با ۰/۷ و این احتمال برای فلاش‌های نوع ۲ و ۳ به ترتیب برابر با ۰/۴ و ۰/۳ است. فرض کنید ۲۰ درصد از فلاش‌های موجود در ظرف از نوع ۱، ۳۰ درصد از نوع ۲ و ۵۰ درصد از نوع ۳ باشد. یک فلاش از ظرف انتخاب می‌شود،

ب- اگر فلاش انتخاب شده بیش از ۱۰۰ ساعت کار کند، احتمال این‌که این فلاش از نوع دوم باشد، چه‌قدر است؟

$$P\left(B_{۲} \mid A\right)=\frac{P\left(A \cap B_{۲}\right)}{P\left(A\right)}$$

$$=\frac{P\left(A \mid B_{۲}\right)P\left(B_{۲}\right)}{P\left(A \mid B_{۱}\right)P\left(B_{۱}\right)+P\left(A \mid B_{۲}\right)P\left(B_{۲}\right)+P\left(A \mid B_{۳}\right)P\left(B_{۳}\right)}$$

$$=\frac{۰/۴ \times ۰/۳۰}{\left(۰/۷\times ۰/۲۰\right)+\left(۰/۴\times ۰/۳۰\right)+\left(۰/۳\times ۰/۵۰\right)}$$

فرمول بیز

Prior Probability

Likelihood of the evidence 'E' if the Hypothesis 'H' is true

$$P(H|E) = \frac{P(H) * P(E|H)}{P(E)}$$

Posterior Probability of 'H' given the evidence

Priori probability that the evidence itself is true

فرمول بیز

- **قضیه**: فرض کنید $\{B_1,\dots,B_n\}$ افرازی از فضای نمونه‌ی یک آزمـایش باشــند. اگـر برای مقادیر $i=1,\dots,n$ $P(B_i)>0,$ باشد، آن‌گاه برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ی S داریم:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A\cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A\mid B_i)}$$

- زمانی که عملی اتفاق افتاده باشد و نتیجه‌ی آن معلوم باشد و بخواهیم منشأ آن را پیدا کنیم، از فرمول بیز استفاده می‌شود.

مثال ۳۳

- فرض کنید ۴۰٪ افراد یک شهر را مـردان و ۶۰٪ آنـان را زنـان تشـکیل دهنـد. همچنین فرض کنید ۵۰٪ از مردان و ۳۰٪ از زنان سیگاری باشند. اگر شخصـی از بین افراد سیگاری به تصادف انتخاب شود، احتمال این‌کـه ایـن شـخص مـرد باشد، چه‌قدر است؟

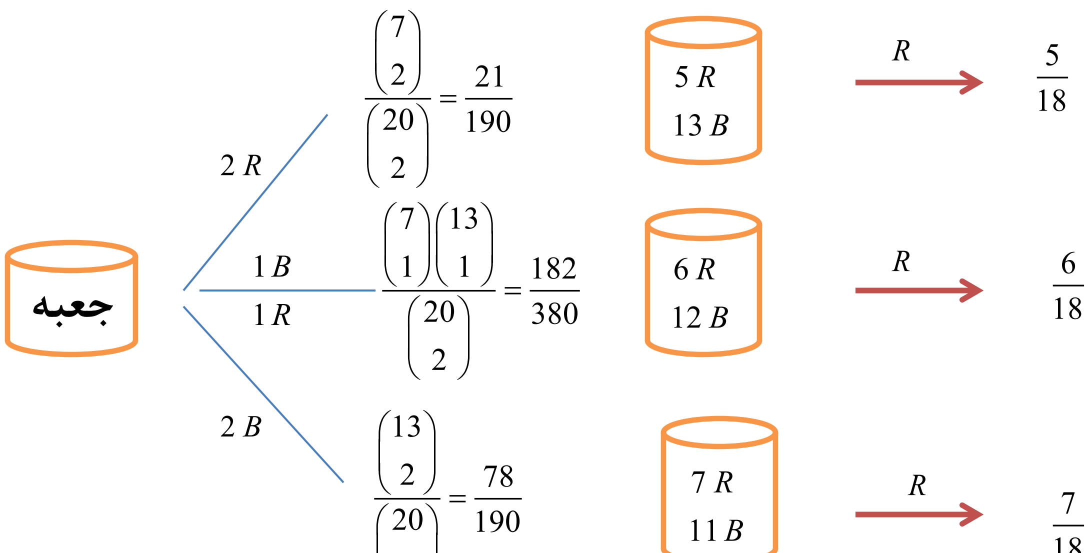
- A: پیشامد اینکه شخص انتخاب شده سیگاری باشد.
- B1: پیشامد اینکه شخص انتخاب شده مرد باشد.
- B2: پیشامد اینکه شخص انتخاب شده زن باشد.

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)}$$

$$= \frac{۰/۵۰ \times ۰/۴۰}{(۰/۵۰ \times ۰/۴۰) + (۰/۳۰ \times ۰/۶۰)}$$

مثال ۳۴

- جعبه‌ای شامل ۷ مهره قرمز و ۱۳ مهره آبی است. دو مهره را به تصادف خارج کرده و آنها را بدون توجه به رنگشان کنار می‌گذاریم. اگر سومین مهره‌ای که به تصادف بیرون می‌آوریم قرمز باشد، احتمال این‌که هر دو مهره اول آبی باشند، چه‌قدر است؟

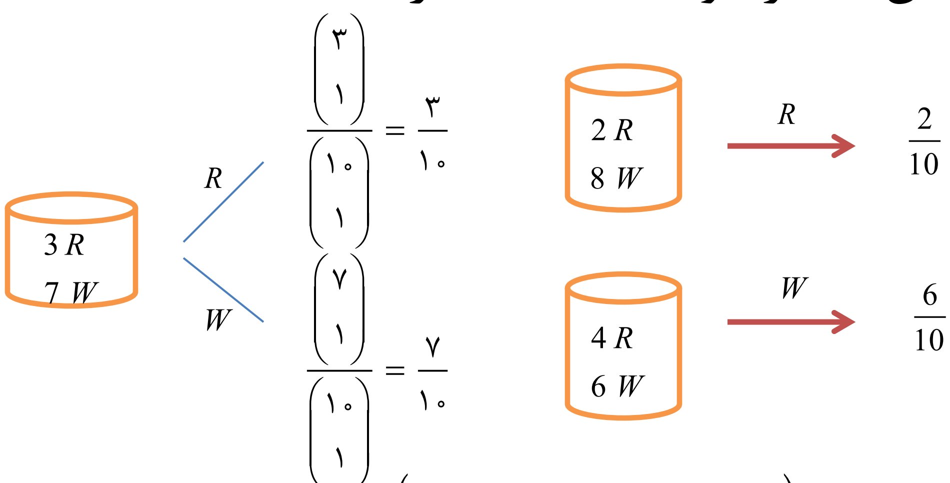


$$P(۲B_۱ \mid R_۲) = \frac{P(۲B_۱)P(R_۲ \mid ۲B_۱)}{P(۲R_۱)P(R_۲ \mid ۲R_۱) + P(۱B \,\&\, ۱R)P(R_۲ \mid ۱B \,\&\, ۱R) + P(۲B_۱)P(R_۲ \mid ۲B_۱)}$$

$$= \frac{\frac{۷۸}{۱۹۰} \times \frac{۷}{۱۸}}{\left(\frac{۲۱}{۱۹۰} \times \frac{۵}{۱۸}\right) + \left(\frac{۱۸۲}{۳۸۰} \times \frac{۶}{۱۸}\right) + \left(\frac{۷۸}{۱۹۰} \times \frac{۷}{۱۸}\right)}$$

مثال ۳۵

- یک ظرف شامل ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. یک مهره از ظرف خارج می‌کنیم و هر رنگی که باشد مهره دیگری از رنگ مخالف آن در ظرف قرار می‌دهیم. سپس مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر این مهره با مهره قبلی که به دست آمده بود هم رنگ باشد، احتمال این‌که هر دو سفید باشند را بیابید.

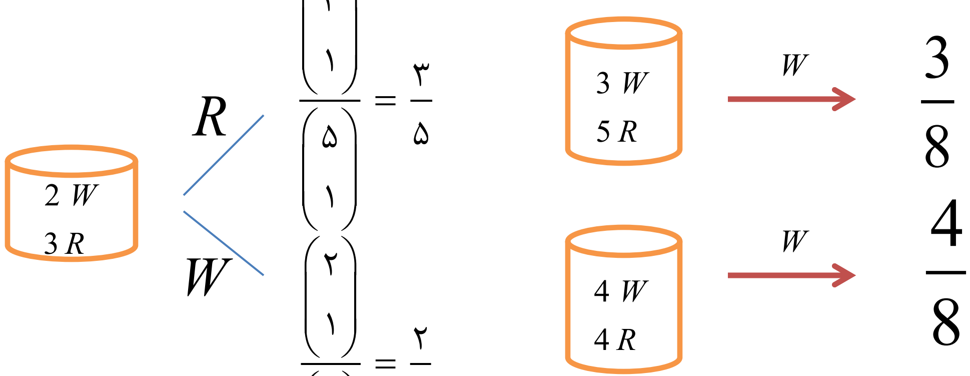


$$P(۲W \mid same\ color) = \frac{P(۲W \cap \ldots olor)}{P(same\ color)} = \frac{P(W_۱)P(W_۲ \mid W_۱)}{P(R_۱)P(R_۲ \mid R_۱) + P(W_۱)P(W_۲ \mid W_۱)}$$

$$= \frac{\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰}}{\left(\frac{۳}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰}\right) + \left(\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰}\right)}$$

مثال ۳۶

- دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است و جعبه دوم شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره با چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم می‌اندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم. مطلوب است
- الف- احتمال این‌که مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد.



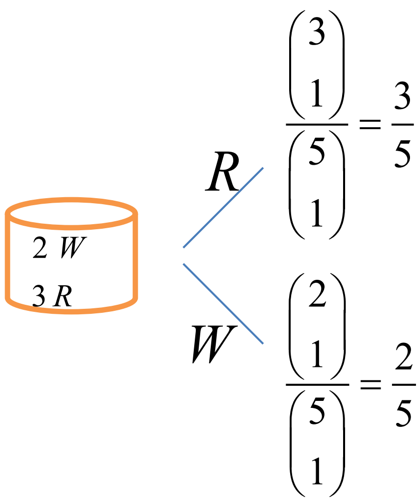
$$\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۵}{۱}} = \frac{۳}{۵} \qquad \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۱}} = \frac{۲}{۵}$$

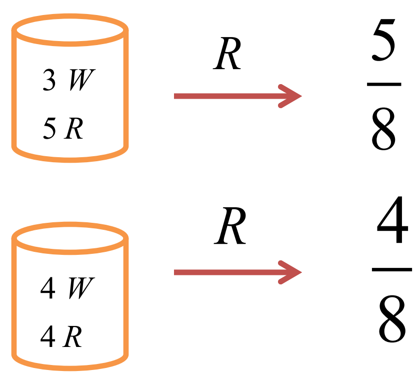
$$P\left(W_{۲}\right) = P\left(R_{۱}\right) P\left(W_{۲} \mid R_{۱}\right) + P\left(W_{۱}\right) P\left(W_{۲} \mid W_{۱}\right)$$

$$= \left(\frac{۳}{۵} \times \frac{۳}{۸}\right) + \left(\frac{۲}{۵} \times \frac{۴}{۸}\right)$$

مثال ۳۷

- دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است و جعبه دوم شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره با چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم می‌اندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم. ب- اگر مهره خارج شده از جعبه دوم قرمز باشد، احتمال این‌که مهره خارج شده از جعبه اول سفید بوده باشد را بیابید.





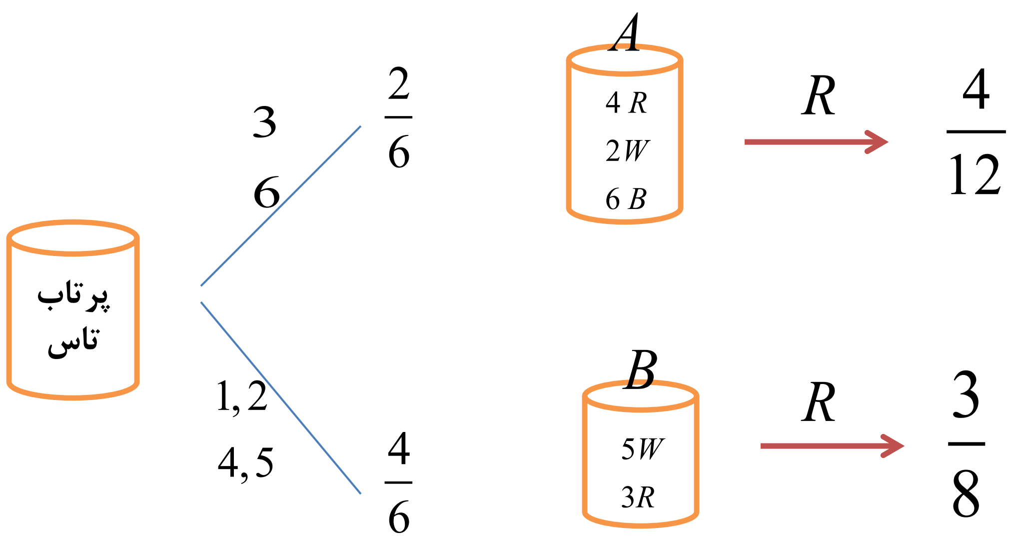
$$P\left(W_۱ \mid R_۲\right) = \frac{P\left(W_۱\right)P\left(R_۲ \mid W_۱\right)}{P\left(R_۱\right)P\left(R_۲ \mid R_۱\right) + P\left(W_۱\right)P\left(R_۲ \mid W_۱\right)}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۵} \times \frac{۴}{۸}}{\left(\frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۸}\right) + \left(\frac{۲}{۵} \times \frac{۴}{۸}\right)}$$

مثال ۳۸

- جعبه A شامل ۴ توپ قرمز، ۲ توپ سفید و ۶ توپ سیاه و جعبه B شامل ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سفید است. تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر مضرب ۳ ظاهر شود، یک توپ از جعبه A و در غیر این صورت یک توپ از جعبه B برمی‌داریم. اگر این توپ قرمز باشد، احتمال اینکه در پرتاب تاس مضرب ۳ ظاهر شده باشد، چه‌قدر است؟

- **راه‌حل:**
- A: پیشامد اینکه مضرب ۳ ظاهر شود
- B: پیشامد اینکه مضرب ۳ ظاهر نشود



$$P(A_۱ \mid R_۲) = \frac{P(A_۱)P(R_۲ \mid A_۱)}{P(A_۱)P(R_۲ \mid A_۱) + P(B_۱)P(R_۲ \mid B_۱)} = \frac{\frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۱۲}}{\left(\frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۱۲}\right) + \left(\frac{۴}{۶} \times \frac{۳}{۸}\right)}$$

استقلال

پیشامدهای مستقل

- استقلال دو پیشامد A و B بدین مفهوم است که رخ دادن یا رخ ندادن یکی در رخ دادن یا رخ ندادن دیگری مؤثر نیست. به عبارت دیگر، اطلاع از رخداد یکی باعث تغییر در احتمال رخداد دیگری نمی‌شود.

- در نتیجه هر یک از احتمال‌های شرطی P(A|B)، P(B|A) و ... به احتمال‌های ساده تبدیل می‌شوند؛ یعنی

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B) \qquad : \;\Rightarrow \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(\overline{A} \mid B) = P(\overline{A})$$

پیشامدهای مستقل

- **تعریف:** دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل گویند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

در غیر این صورت A و B را دو پیشامد وابسته گوییم.

نکته

- دو پیشامد در صورتی **ناسازگار** هستند که نتوانند همزمان اتفاق بیفتند.
- دو پیشامد در صورتی **مستقل** هستند که بتوانند همزمان اتفـاق بیفتنـد اما تأثیری روی یکدیگر نداشته باشند.

- حال اگر دو پیشامد بخواهند **هم ناسازگار و هم مســتقل** باشــند آنگـاه بایــد $P(A \cap B) = 0$ و $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ یــا بایــد $P(A)=0$ یــا $P(B)=0$ باشد.

- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه پیشـامدهای A و $\overline{B}$ هــم مستقل خواهند بود.

مثال ۳۹

- یک ایستگاه آتش‌نشانی دارای دو ماشین آتش‌نشان است که به طور مستقل کار می‌کنند و احتمال این‌که یک ماشین آتش‌نشان در موقع نیاز موجود باشد ۰/۹۹ است. احتمال این‌که موقع نیاز **حداقل یکی** از این دو ماشین موجود باشد را بیابید.

- راه‌حل

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= ۰/۹۹ + ۰/۹۹ - (۰/۹۹ \times ۰/۹۹) \end{aligned}$$

مثال ۴۰

- ظرف A شامل ۳ توپ قرمز و ۳ توپ سیاه است. ظرف B شامل ۴ تـوپ قرمز و ۶ توپ سیاه است. اگر یک توپ به تصـادف از هـر ظـرف انتخـاب کنیم، احتمال این‌که توپ‌ها از یک رنگ باشند، چه‌قدر است؟

- راه‌حل

$$P\left(same\ color\right) = P\left(both \quad \mathrm{R}\right) + P\left(both \quad B\right)$$

$$= \left[\frac{۳}{۶} \quad \times \quad \frac{۴}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳}{۶} \quad \times \quad \frac{۶}{۱۰}\right]$$

مثال ۴۱

- سکه سالمی را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده شود و سپس توقف می‌کنیم.

الف- احتمال این‌که تعداد فردی پرتاب لازم باشد، چه‌قدر است؟

ب- احتمال این‌که حداقل ۷ پرتاب لازم باشد، چه‌قدر است؟

- راه‌حل:

$$S=\left\{H,TH,TTH,TTTH,TTTTH,\ldots\right\}$$

$$P\left\{H\right\}=\frac{۱}{۲}\quad P\left\{TH\right\}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\quad P\left\{TTH\right\}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\quad P\left\{TTTH\right\}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$

$$a)\quad P\left(Odd\right)=P\left\{H\right\}+P\left\{TTH\right\}+P\left\{TTTTH\right\}+\ldots$$

$$=\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}+\ldots=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

$$b)\quad P\left(Throws\geq ۷\right)=P\left\{TTTTTTH\right\}+P\left\{TTTTTTTH\right\}+\ldots$$

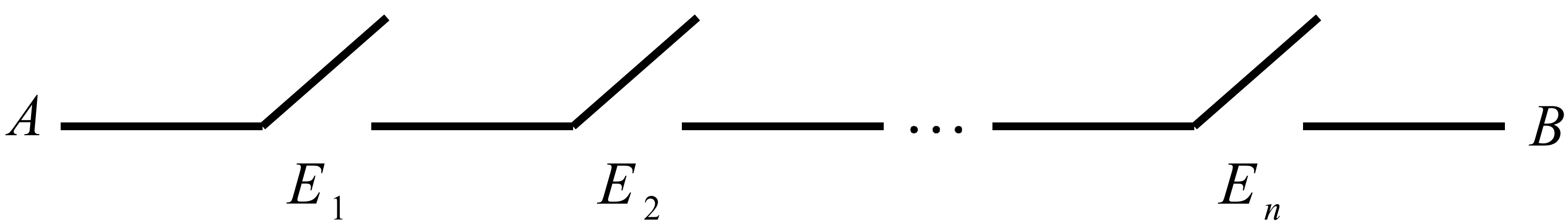
$$=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸}+\ldots=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷}}{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}$$

مدارهای سری

- در مدارهای سری احتمال برقراری ارتباط بـین دو نقطـه برابـر اسـت بـا احتمال برقراری همه‌ی مدارهای بین آن دو نقطه:

$$P(connection) = P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$$

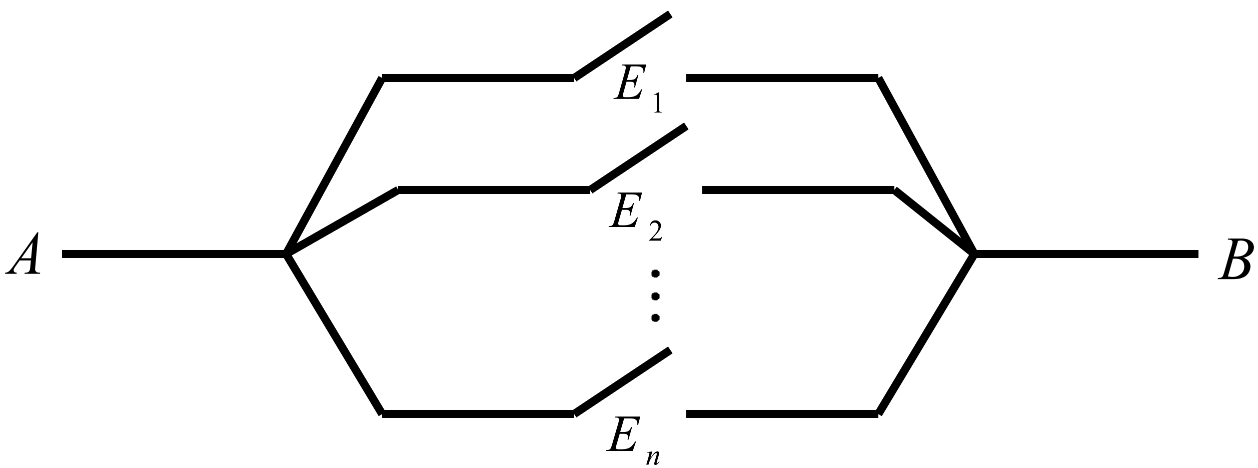
$$P(no\ connection) = 1 - P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = 1 - \left(p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n\right)$$



مدارهای موازی

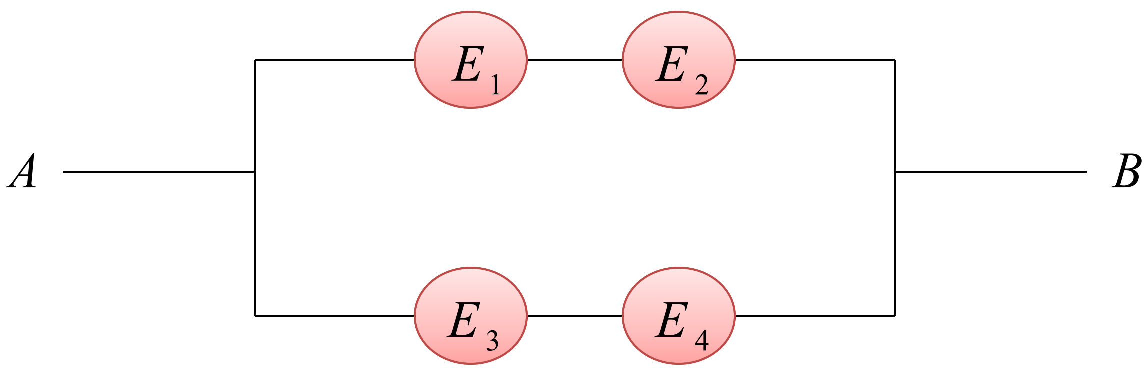
- در مدارهای موازی احتمال عدم برقراری ارتباط بین دو نقطه برابر اسـت با احتمال قطع تمام مدارهای بین آن دو نقطه:

$$P(connection) = P(E_{۱} \cup E_{۲} \cup \ldots \cup E_{n})$$
$$P(no\ connection) = P(\overline{E_{۱}} \cap \overline{E_{۲}} \cap \ldots \cap \overline{E_{n}}) = \left(۱ - p_{۱}\right) \times \left(۱ \times p_{۲}\right) \times \cdots \times \left(۱ - p_{n}\right)$$



مثال ۴۲ - الف

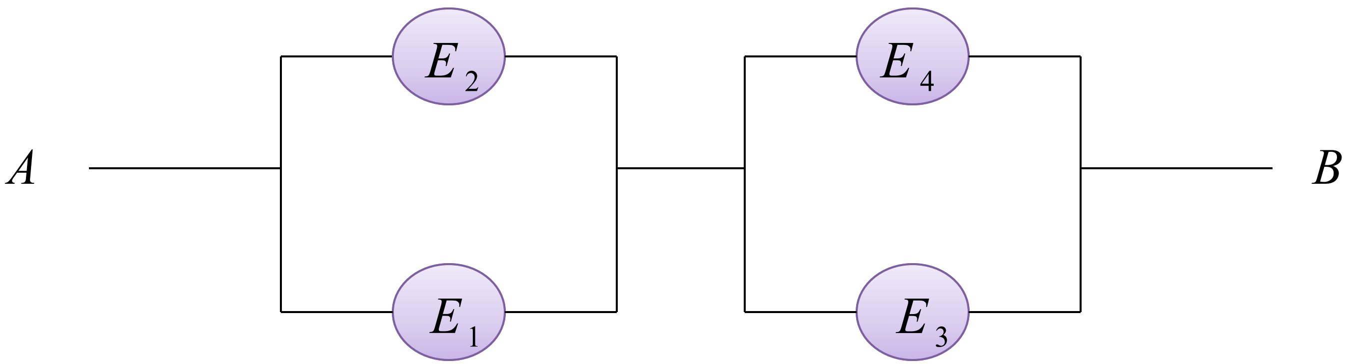
- سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید در هر یـک از سیســتم‌هـا اجـزا مستقل از یکدیگر کار می‌کنند و احتمال سالم بودن هر جزء p است. احتمـال کارکرد هر سیستم را حساب کنید.



$$
\begin{aligned}
P\left[\left(E_1 \cap E_2\right) \cup \left(E_3 \cap E_4\right)\right] &= P\left(E_1 \cap E_2\right) + P\left(E_3 \cap E_4\right) - P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right) \\
&= P\left(E_1\right)P\left(E_2\right) + P\left(E_3\right)P\left(E_4\right) - P\left(E_1\right)P\left(E_2\right)P\left(E_3\right)P\left(E_4\right) \\
&= \left(p \times p\right) + \left(p \times p\right) - \left(p \times p \times p \times p\right) \\
&= p^2\left(2 - p^2\right)
\end{aligned}
$$

مثال ۴۲ – ب

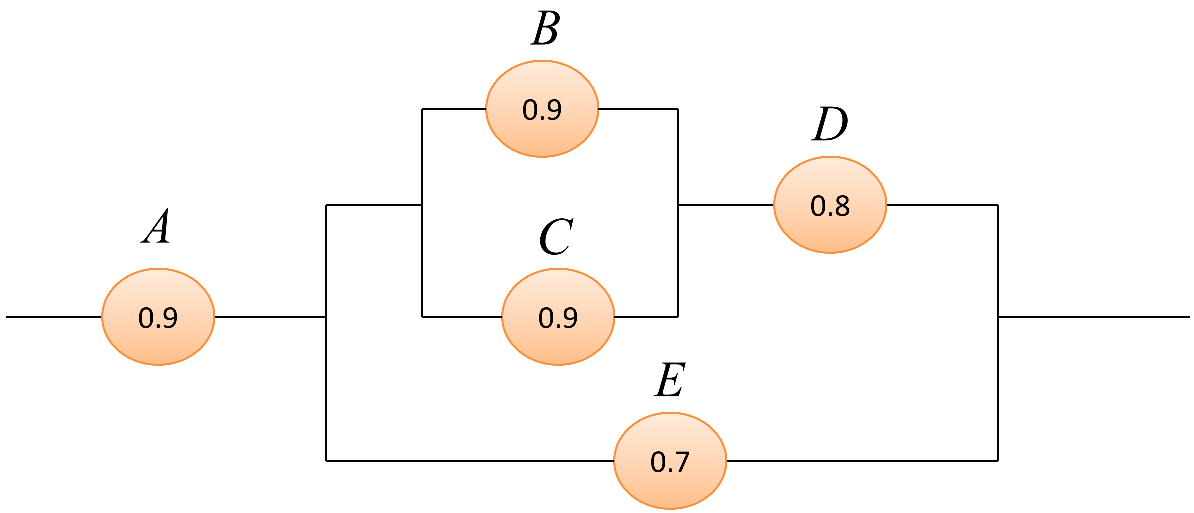
- ...



$$
\begin{aligned}
P\left[\left(E_{۱}\cup E_{۲}\right)\cap\left(E_{۳}\cup E_{۴}\right)\right] &= P\left(E_{۱}\cup E_{۲}\right)\times P\left(E_{۳}\cup E_{۴}\right)\\
&=\left[P\left(E_{۱}\right)+P\left(E_{۲}\right)-P\left(E_{۱}\cap E_{۲}\right)\right]\times\left[P\left(E_{۳}\right)+P\left(E_{۴}\right)-P\left(E_{۳}\cap E_{۴}\right)\right]\\
&=\left(p+p-p\times p\right)\times\left(p+p-p\times p\right)\\
&=p^{۲}\left(۲-p\right)^{۲}
\end{aligned}
$$

مثال ۴۲ – ج

- ...



$$P(F)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=۰/۹+۰/۹-(۰/۹\times ۰/۹)=۰/۹۹$$

$$P(G)=P(F\cap D)=P(F)P(D)=۰/۹۹\times ۰/۸=۰/۷۹۲$$

$$P(H)=P(G\cup E)=P(G)+P(E)-P(G\cap E)=۰/۷۹۲+۰/۷-(۰/۷۹۲\times ۰/۷)=۰/۹۳۷۶$$

$$P(A\cap H)=P(A)P(H)=۰/۹\times ۰/۹۳۷۶=۰/۸۴۳۸$$