فصل ۹ – توابع مولد
بخش اول

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

9

Generating Functions

تمرین ۶ (تمرینات ۱.۹) ص ۵۵۳

به ازای $S=\{a,b,c\}$ ، تابع

$$f(x)=(1+ax)(1+bx)(1+cx)$$
$$=1+ax+bx+cx+abx^2+acx^2+bcx^2+abcx^3$$

را درنظر می‌گیریم. دراینصورت داریم:

- ضریب x^0 برابر با 1 است (برای زیرمجموعهٔ $\emptyset$ از S)
- ضریب x^1 ، برابر با $a+b+c$ است (برای زیرمجموعه‌های $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ از S)
- ضریب x^2 ، برابر با $ab+ac+bc$ است (برای زیرمجموعه‌های $\{a,b\}$ ، $\{a,c\}$ ، $\{b,c\}$ از S).
- ضریب x^3 ، برابر با abc است (برای زیرمجموعهٔ $\{a,b,c\}$ از S)

درنتیجه تابع $f(x)$ ، تابع مولد برای زیرمجموعه‌های S است.

الف) تابع مولد برای زیرمجموعه‌های $S=\{a,b,c,\dots,r,s,t\}$ را بیابید.

ب) پاسخ قسمت الف را برای گزینش‌هایی که در آنها هر عنصر را می‌توان کنار گذاشت یا تا سه بار برگزید را بیابید.

الف)
$$f(x)=(1+ax)(1+bx)(1+cx)\cdots(1+rx)(1+sx)(1+tx)$$

ب)
$$f(x)=(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)\times$$
$$(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)\times$$
$$\vdots$$
$$(1+tx+t^2x^2+t^3x^3)$$

تمرین ۳

(تمرینات ۲.۹ ص ۵۴۳ - بخش ت

$f(x)$ تابع مولد دنباله $a_0, a_1, \ldots$ و $g(x)$ تابع مولد دنباله $b_0, b_1, \ldots$ است، $g(x)$ را برحسب $f(x)$ بیان کنید.

ت) $b_1 = 1$ $b_3 = 3$ $b_7 = 7$ $b_n = 2a_n + 5$ به ازای $n \in \mathbb{N}$

$n \neq 1, 3, 7$

$$g(x) = 2f(x) + 5\underbrace{\left(\frac{1}{1-x}\right)} + \left[1-(2a_1+5)\right]x + \left[3-(2a_3+5)\right]x^3$$

$$+ \left[7-(2a_7+5)\right]x^7$$

تابع مولد

$1, 1, 1, \ldots$

تمرین ۲۳ (تمرینات ۲.۹ ص ۵۴۴ - بخش پ

برای پیچش دو دنباله زیر فرمولی بیابید.

پ) $a_n = 1$ به ازای $0 \leq n \leq 3$، هر $n \geq 4$ $a_n = 0$ $b_0 = 0$ $b_1 = 1$ $b_2 = 2$

$b_3 = 3$ و به ازای هر $n \geq 4$ $b_n = 0$

	a_0	a_1	a_2	a_3				
دنباله‌ی متناظر a $= (a_n)_{n=0}^{\infty}$:	1	1	1	1	0	0	0	……
دنباله‌ی متناظر b $= (b_n)_{n=0}^{\infty}$:	0	1	2	3	0	0	0	……
	b_0	b_1	b_2	b_3				

$$G\left((a_n)_{n=0}^{\infty}\right) \times G\left((b_n)_{n=0}^{\infty}\right) = (1 + x + x^2 + x^3)(x + 2x^2 + 3x^3)$$

$$= x + 3x^2 + 6x^3 + 6x^4 + 5x^5 + 3x^6$$

دنباله‌ی متناظر با پیچش : $0, 1, 3, 6, 6, 5, 3, 0, 0, 0, \ldots$

$\downarrow c_0$ $\downarrow c_1$ $\downarrow c_2$ $\downarrow c_3$ $\downarrow c_4$ $\downarrow c_5$ $\downarrow c_6$

تمرین ۴ (تمرینات ۳.۹) ص ۵۶۸ - بخش ب

تابع مولد را برای تعداد جوابهای صحیح هر یک از معادلات زیر بیابید:

ب) $2w+3x+5y+7z=n$ $\quad 2 \le w \le 4 \le x \le 7 \le y \le 10 \le z$

$$f(x)=\left(x^{(2)2}+x^{(2)3}+x^{(2)4}\right)\left(x^{(3)4}+x^{(3)5}+x^{(3)6}+x^{(3)7}\right)$$
$$\left(x^{(5)7}+x^{(5)8}+x^{(5)9}+x^{(5)10}\right)\left(x^{(7)10}+x^{(7)11}+x^{(7)12}+\cdots\right)$$

اگر در $f(x)$، ضریب x^n را بدست آوریم، در اینصورت این ضریب تعداد افرازهای عدد n را بیان می‌کند که دارای شرایط زیر است:

$2 \le$ تعداد 2 های استفاده شده در افراز ≤ 4

$4 \le$ " " " 3 " ≤ 7

$7 \le$ " " " 5 " ≤ 10

$10 \le$ " " " 7 "

یادآوری: تعداد جوابهای معادله $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر با $p(n)$ است.

تمرین ۱۷ (تمرینات ۲.۹) ص ۵۶۴

در کیسه‌ای ۶ مهره یکسان هست که اعداد ۱ تا ۶ را روی آن نوشته‌ایم. به تعداد دفعات دلخواه مهره‌ای را از کیسه بیرون می‌آوریم، و عدد روی مهره را می‌خوانیم. تحقیق کنید که $(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$ تابع مولد برای تعداد طرق است که مجموع اعداد خوانده شده برابر با n شود. $(n \in \mathbb{N})$

$$f(x) = (1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$$

$$= \left[1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\right]^{-1}$$

حال با استفاده از رابطهٔ زیر داریم:

$$\frac{1}{1-A} = 1+A+A^2+\cdots$$

$f(x) = 1$ هیچ مهره‌ای را بیرون نیاوریم

$+$

$(x+x^2+\cdots+x^6)$ یک بار بیرون آوردن مهره

$+$

$(x+x^2+\cdots+x^6)^2$ دو بار بیرون آوردن مهره

$+$

$\vdots$

$= \cdots + \bigcirc\, x^n + \cdots$

این ضریب نشان دهندهٔ تعداد طرق است که اعداد روی مهره‌های استخراج شده دارای مجموع عدد n شوند.

تمرین ۱۳ (تمرینات ۲.۹) ص ۵۶۳

اگر تاسی را ۱۲ بار بریزیم، احتمال آنکه مجموع اعداد حاصل ۳۰ باشد چقدر است؟

$$f(x) = (x + x^2 + \dots + x^6)^{12} = \dots + A\, x^{30} + \dots$$

پاسخ مسئله

$$f(x) = x^{12}(1 + x + \dots + x^5)^{12} = x^{12} \underbrace{\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12}}$$

باید به دنبال ضریب x^{18} در این بخش بگردیم.

$$\Rightarrow \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12} = (1-x^6)^{12}(1-x)^{-12}$$

$$= \left[\binom{12}{0} + \binom{12}{1}(-x^6) + \binom{12}{2}(-x^6)^2 + \dots + \binom{12}{12}(-x^6)^{12}\right]$$

$$\times$$

$$\left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \binom{-12}{2}(-x)^2 + \dots\dots\right]$$

حال باید ببینیم که چه حاصلضربهایی از ۲ براکت بالایی تشکیل x^{18} می‌دهند:

$$\binom{12}{0}\binom{-12}{18}(-1)^{18} + \binom{12}{1}(-1)\binom{-12}{12}(-1)^{12}$$

$$+ \binom{12}{2}(-1)^2\binom{-12}{6}(-1)^6 + \binom{12}{3}(-1)^3\binom{-12}{0}$$

$$= \binom{29}{18} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{17}{6} - \binom{12}{3}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\text{احتمال} = \frac{A\ \text{ضریب}}{\text{اندازه فضای نمونه}} = \frac{\binom{29}{18} - \binom{12}{1}\binom{23}{12} + \binom{12}{2}\binom{17}{6} - \binom{12}{3}}{6^{12}}$$

تمرین ۸ (تمرینات تکمیلی) ص ۵۷۹

به ازای اعداد صحیح $n, k \geq 0$ فرض می‌کنیم

- P_1 تعداد افرازهای n باشد.
- P_2 تعداد افرازهایی از $2n+k$ باشد که در آنها $n+k$ بزرگترین جمعوند است.
- P_3 تعداد افرازهایی از $2n+k$ باشد که دقیقاً $n+k$ جمعوند دارد.

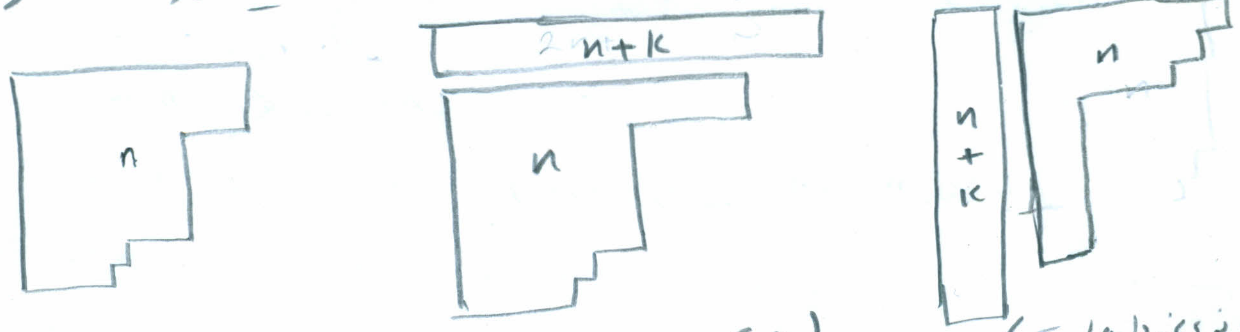
با استفاده از نمودار فرز، ثابت کنید $P_1 = P_2$ ، $P_2 = P_3$ و بنابراین نتیجه بگیرید که به ازای هر k تعداد افرازهایی از $2n+k$ که دقیقاً $n+k$ جمعوند دارند یکسان است.

به شکل‌های زیر توجه کنید

یک افراز n با نمودار فرز

یک افراز $2n+k$ با نمودار فرز که در آن $n+k$ بزرگترین جمعوند است.

یک افراز $2n+k$ با نمودار فرز که دارای دقیقاً $n+k$ جمعوند است



(P_1 : تعداد این نوع نمودارهاست)

(P_2 تعداد این نوع نمودارهاست)

(P_3 تعداد این نوع نمودارهاست)

به ازای هر افراز n در نمودار فرز می‌توان $n+k$ نقطه بالایش قرار داد و به یکی از نمودارهای فرز با $n+k$ به عنوان بزرگترین جمعوند رسید. اگر هم نموداری با بزرگترین جمعوند $n+k$ در اختیار داشتیم می‌توان سطر اولش را حذف کرد و به نموداری که افراز n است برسیم. بنابراین

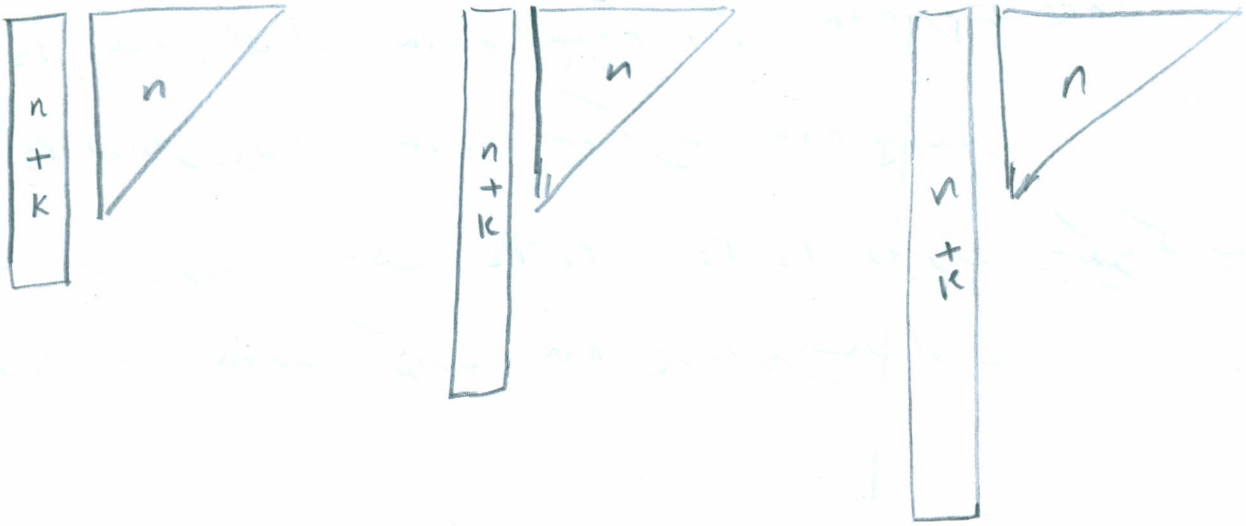
$P_1 = P_2$ (I)

این دو نمودار ترانهش یکدیگر هستند

و می‌دانیم بین هر نمودار فرز و ترانهش آن تناظر یک به یک وجود دارد بنابراین: $P_2 = P_3$

(II)

اما در ادامه از ما خواسته شده است تا ثابت کنیم به ازای هر k، تعداد افرازهای از $2n+k$ که دقیقاً $n+k$ جمع وند دارند، یکسان است.



با توجه به اینکه $P_1=P_3$ است لذا تعداد افرازهای $2n+k$ که دقیقاً دارای $n+k$ جمع وند است با تعداد افرازهای n برابر است. و این امر مستقل از k است.

<u>مثال</u>: $n=10 \Rightarrow 2n+k$

$k=1 \Rightarrow 21$ (تعداد افرازهای 21 با 11 جمع وند)

$k=2 \Rightarrow 22$ (تعداد افرازهای 22 با 12 جمع وند)

$k=3 \Rightarrow 23$ (تعداد افرازهای 23 با 13 جمع وند)

هر سه با هم برابرند.

نکته اضافی: به ازای $n,k \in N$ ، $n \leq k$ رابطه زیر برقرار است:

$$p(n+k, k) = p(2n, n) = p(n)$$

تمرین ۱۸ (تمرینات ۲۹) ص ۵۶۴

نشان دهید که $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ دنباله $\binom{2n}{n}$ $n\in\mathbb{N}$ را تولید می‌کند.

طبق مثال ۹.۹ در صفحه ۵۵۷ کتاب درسی، به ازای هر عدد حقیقی n داریم:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r$$

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(-4x)^r$$

بنابراین ضریب جمله x^n در $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ برابر است با:

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n$$

$$=\frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(\frac{2n-1}{2})\,(-1)^n}{n!}(-4)^n$$

$$=\frac{1\times3\times5\times\cdots(2n-1)}{n!}2^n=\frac{1\times3\times5\times\cdots(2n-1)\times2^n\times n!}{n!\times n!}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$=\binom{2n}{n}$$

پس ضریب جمله x^n در بسط $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ برابر است با $\binom{2n}{n}$

نکته: در اثبات فوق از رابطه زیر استفاده شده است:

$$1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times2^n\times n!$$

$$=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)(2\times4\times6\times\cdots\times2n)=(2n)!$$