تمرین تحویلی شماره ۱۱

مقدار کار انجام شده توسط میدان برداری

$$F(x,y)=(x^2-x+y^2,\,2xy-ye^y)$$

در امتداد خم

$$r(t)=(2cost,\sqrt{7}sin2t)$$

از $t=0$ تا $t=\pi$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$P=x^2-x+y^2 \qquad \text{و} \qquad Q=2xy-ye^y \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ (۱ نمره)

لذا میدان F شرط لازم پایستاری را دارد. به دنبال تابع پتانسیل φ می گردیم.

$$\begin{aligned}
\varphi_x=x^2-x+y^2 \quad &\Rightarrow \quad \int\varphi_x dx=\int(x^2-x+y^2)dx\\
&\Rightarrow \quad \varphi=\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^2}{2}+xy^2+C(y) \qquad (*)
\end{aligned}$$ (۱ نمره)

$$\begin{aligned}
\varphi_y=2xy-ye^y \quad &\Rightarrow \quad 2xy-ye^y=2xy+C'(y)\\
&\Rightarrow \quad C'(y)=-ye^y
\end{aligned}$$ (۱ نمره)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad C(y)=\int -ye^y dy=e^y(1-y)+c\\
&\Rightarrow \quad \varphi=\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^2}{2}+xy^2+e^y(1-y)+c
\end{aligned}$$

پس میدان F پایستار است.

$$\begin{aligned}
A&=r(0)=(2,0)\\
B&=r(\pi)=(-2,0)
\end{aligned}$$ (۱ نمره)

$$\begin{aligned}
\int_C F.dr&=\varphi(B)-\varphi(A)=\varphi(-2,0)-\varphi(2,0)\\
&=(-\tfrac{8}{3}-2+1+c)-(\tfrac{8}{3}-2+1+c)=-\tfrac{16}{3}
\end{aligned}$$ (۱ نمره)