آزمون فرض آماری
- آمار و احتمال مهندسی -

مدرس: مشکانی فراهانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲۷ مرداد ۱۴۰۱

آزمون فرض آماری

یک فرض آماری ادعایی در مورد یک یا چند جامعه مورد بررسی است که ممکن است درست یا نادرست باشد؛

به عبارت دیگر فرض آماری یک ادعا یا گزاره در مورد توزیع یک جامعه یا توزیع یک متغیر تصادفی است.

به طور کلی هدف آزمون فرض آماری تعیین این موضوع است که با توجه به اطلاعات به دست آمده از داده‌های نمونه، حدسی که درباره‌ی خصوصیتی از جامعه می‌زنیم به‌طور قوی تأیید می‌شود یا خیر.

فرضیه‌ها

چون ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد، بنابراین دو فرض مکمل در ذهن به‌وجود می‌آید؛
یکی را فرض صفر نامیده و آن را با H_0 نشان داده و دیگری را فرض مقابل گفته و با H_1 نمایش می‌دهیم.

هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق اطلاعات حاصل از نمونه‌ی جمع‌آوری شده از جامعه تأیید کنیم، خلاف آن ادعا را در فرض H_0 و خود آن ادعا را در فرض مقابل H_1 قرار می‌دهیم (جز در یک حالت خاص!).

نکته: فرضی که در آن علامت $=$ وجود دارد را در H_0 قرار می‌دهیم؛ و فرض مخالف آن را در H_1.

در یک مسئله‌ی آزمون فرض، اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 ناسازگار باشد در این صورت فرض H_0 را رد می‌کنیم و در مقابل فرض H_1 را می‌پذیریم.

اگر اطلاعات به دست آمده از نمونه با فرض H_0 سازگار باشد، در این صورت می‌گوییم که اطلاعات به دست آمده از نمونه دلیلی بر رد فرض H_0 ندارد و در حقیقت فرض H_0 را می‌پذیریم.

روش انجام آزمون فرضیه

روش کار چنین است که:

- ابتدا نمونه‌ای از جامعه گرفته
- سپس با توجه به نوع فرض، آماره (ملاک) مناسبی برای فرض انتخاب می‌کنیم
- براساس نتایج حاصل از نمونه مقدار آن را محاسبه می‌کنیم؛
- با توجه به سطح اطمینان مشخص شده، تصمیم‌گیری می‌کنیم که فرض $H_\circ$ را بپذیریم یا رد کنیم.

تعریف آماره آزمون: آماره $T(x_1, \dots, x_n)$ که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن، یک فرض را رد یا قبول می‌کنیم، آماره آزمون گویند.

تعریف ناحیه بحرانی: به مجموعه مقادیری از آماره آزمون که به‌ازای آن فرض H_0 را باید رد کنیم ناحیه بحرانی آزمون گویند و آن را با نماد C نمایش می‌دهند.

متمم ناحیه بحرانی را ناحیه پذیرش می‌نامند.

اگر ناحیه بحرانی C یک آزمون مشخص شود، در این صورت با جمع‌آوری نمونه و محاسبه $T(x_1, \dots, x_n)$ می‌توان آزمون آماری را بدین صورت انجام داد:

اگر $T(x_1, \dots, x_n) \in C$ آن‌گاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت آن را می‌پذیریم.

خطاهای آزمون

۱- ممکن است فرض H_0 درست باشد و ما آن را به اشتباه رد کنیم. این خطا را خطای نوع اول می‌نامند.

۲- ممکن است فرض H_0 نادرست باشد و ما آن را به اشتباه قبول کنیم. این خطا را خطای نوع دوم می‌نامند.

۳- احتمال خطای نوع اول را با α نشان داده و آن را سطح معنی‌داری آزمون می‌گویند:

$$\alpha = P\,(\text{خطای نوع اول}) = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست باشد}).$$

۴- احتمال خطای نوع دوم را با β نشان می‌دهند:

$$\beta = P(\text{خطای نوع دوم}) = P(H_0 \text{ قبول} \mid H_1 \text{ درست باشد}).$$

توان آزمون

احتمال رد کردن فرض H_0 در صورتی که فرض H_1 درست باشد؛ یعنی احتمال رد کردن فرض H_0 به حق را توان آزمون می‌نامند و آن را با β^* نشان می‌دهند:

$$\beta^* = P(H_0 \text{ رد} \mid H_1 \text{ درست باشد}) = 1 - P(H_0 \text{ پذیرش} \mid H_1 \text{ درست باشد}) = 1 - \beta.$$

نکته:

۱- α و β با هم رابطه معکوس دارند.

۲- با افزایش حجم نمونه n، هم α و هم β هر دو کاهش می‌یابند.

* با تغییر دادن ناحیه‌ی بحرانی نمی‌توان هم‌زمان هم خطای نوع اول و هم خطای نوع دوم را کاهش داد. زمانی که یکی را کاهش می‌دهیم، دیگری افزایش می‌یابد. بنابراین باید آن ناحیه‌ای را به عنوان ناحیه بحرانی انتخاب کنیم که با قرار دادن یک حداکثر مقدار برای α بتوان β را تا جایی که ممکن است کاهش داد؛ یا به عبارتی توان آزمون را ماکسیمم کرد.

فرض کنید $X \sim N(\mu, ۴)$ باشد و فرض‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۰ \\ H_۱ : \mu = ۱ \end{cases}$$

یک نمونه $X_۱, \dots, X_{۲۵}$ جمع‌آوری شده است. اگر در آزمون $H_۰$ در مقابل $H_۱$ ناحیه بحرانی به صورت $C : \ \{X_۱, \dots, X_{۲۵} \mid \bar{X} > ۰/۴\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول، دوم و توان آزمون را به دست آورید.

راه‌حل:

$$\alpha = P\left(\text{رد فرض صفر} \mid \text{فرض صفر درست باشد}\right) = P\left(\bar{X} > ۰/۴ \mid \mu = ۰\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{۰/۴ - ۰}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z > ۱) = ۱ - P(Z \le ۱) = ۱ - ۰/۸۴۱۳ = ۰/۱۵۸۷$$

$$\beta = P\left(\text{پذیرش فرض صفر} \mid \text{فرض مقابل درست باشد}\right) = P\left(\bar{X} \le ۰/۴ \mid \mu = ۱\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{۰/۴ - ۱}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z \le -۱/۵) = ۰/۰۶۶۸ \quad \Rightarrow \quad \beta^* = ۱ - ۰/۰۶۶۸ =$$

مثال ۲

در مثال قبل اگر ناحیه بحرانی به صورت $C: \ \{X_{۱}, \ldots, X_{۲۵} \mid \bar{X} > c\}$ باشد، مقدار c را چنان تعیین کنید که $\alpha = ۰/۱$ باشد. سپس خطای نوع دوم را به دست آورید.

راه‌حل:

$$
\begin{aligned}
۰/۱ = \alpha = P\left(\text{رد فرض صفر} \mid \text{فرض صفر درست باشد}\right) &= P\left(\bar{X} > c \mid \mu = ۰\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c - ۰}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z > ۲/۵c) \\
&\Rightarrow \quad P(Z \leq ۲/۵c) = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹ \\
&\Rightarrow \quad ۲/۵c = z_{۰/۹} = ۱/۲۸ \\
&\Rightarrow \quad c = ۰/۵۱۲
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta = P\left(\text{پذیرش فرض صفر} \mid \text{فرض مقابل درست باشد}\right) &= P\left(\bar{X} \leq ۰/۵۱۲ \mid \mu = ۱\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{۰/۵۱۲ - ۱}{\frac{۲}{۵}}\right) = P(Z \leq -۱/۲۲) = ۰/۱۱۱۲
\end{aligned}
$$

مثال ۳

برای نوع معینی بتن، طرح جدیدی در نظر گرفته شده است که منجر به افزایش مقاومت آن تا ۵۰۰۰ کیلوگرم در هر سانتی‌متر مربع با انحراف معیار ۱۲۰ می‌شود. برای آزمون فرض $\mu = ۵۰۰۰$ در برابر فرض مقابل $\mu < ۵۰۰۰$، یک نمونه تصادفی از ۵۰ قطعه بتن آزمایش می‌شود. ناحیه بحرانی با $\bar{x} < ۴۹۷۰$ تعریف می‌شود. احتمال ارتکاب خطای نوع اول را پیدا کنید.

راه‌حل:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\text{رد فرض صفر} \mid \text{فرض صفر درست باشد}\right)\\
&= P\left(\bar{X} < ۴۹۷۰ \mid \mu = ۵۰۰۰\right)\\
&= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{۴۹۷۰ - ۵۰۰۰}{\frac{۱۲۰}{\sqrt{۵۰}}}\right)\\
&= P(Z < -۱/۷۷) = ۰/۰۳۸۴
\end{aligned}$$

آزمون‌های یک طرفه و دو طرفه

فرض کنید θ پارامتر مجهول جامعه باشد و بخواهیم آزمون‌هایی در مورد این پارامتر انجام دهیم.

آزمون هر فرض آماری که در آن فرض مقابل یک طرفه باشد، آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. مثل:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

آزمون هر فرض آماری که در آن فرض مقابل دو طرفه باشد را یک آزمون دو طرفه می‌نامند:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

مراحل انجام یک آزمون آماری

۱- تعیین فرض‌های H_0 و H_1

۲- تعیین آماره آزمون مناسب و محاسبه مقدار آن: تعیین آماره بر اساس براورد نقطه‌ای پارامتر مجهول θ انجام می‌شود و محاسبه‌ی مقدار آن بر اساس نمونه‌ی تصادفی مشاهده شده.

۳- تعیین ناحیه بحرانی C: که بر اساس آماره آزمون، فرض مقابل و سطح معنی‌داری α تعیین می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری: اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون در ناحیه بحرانی C قرار گرفت، آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

نمادها

- ○ μ: میانگین جامعه
- • $\bar{X}$: میانگین نمونه

- ○ $\sigma^۲$: واریانس جامعه
- • $S^۲$: واریانس نمونه

- ○ σ: انحراف استاندارد جامعه
- • S: انحراف استاندارد نمونه

- ○• n: حجم نمونه

آزمون فرض برای میانگین جامعه نرمال
μ

آزمون فرض برای میانگین یک جامعه نرمال زمانی که واریانس جامعه معلوم باشد

فرض کنید از یک جامعه با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 یک نمونه‌ی تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی میانگین μ انجام دهیم.

ابتدا آزمون زیر را برای یادگیری نحوه‌ی به‌دست آوردن آماره‌ی آزمون و تعیین ناحیه‌ی بحرانی در نظر بگیرید: فرض کنید بخواهیم فرض زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

در عبارت بالا μ_0 مقداری معلوم است (با توجه به مسئله‌ی مورد نظر مشخص می‌شود).

می‌دانیم بهترین براوردگر نقطه‌ای برای μ عبارتست از: $\bar{X}$

۱- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

برای آزمون مورد نظر اگر براوردگر $\bar{X}$ مقادیر بزرگ را اختیار کند، یعنی $\bar{X} > c$ آن‌گاه فرض $H_\circ$ را رد می‌کنیم.

بنابراین ناحیه‌ی بحرانی آزمون به صورت $\bar{X} > c$ است که در آن c به گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌داری آزمون برابر مقدار مشخص شده‌ی α باشد؛ یعنی

$$\alpha = P(\bar{X} > c \,|\, \mu = \mu_\circ)$$

حال اگر جامعه نرمال باشد، یا آنکه نرمال نبوده اما $n \geq ۳۰$ باشد، آن‌گاه

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(\circ, ۱)$$

برای تعیین c داریم:

$$\alpha = P(\bar{X} > c \,|\, \mu = \mu_\circ) = P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu_\circ}{\sigma/\sqrt{n}}) = P\left(Z > \frac{c - \mu_\circ}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow ۱ - \alpha = P\left(Z \leq \frac{c - \mu_\circ}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c-\mu_{0}}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad c = \mu_{0} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = P\left(\bar{X} > \mu_{0} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_{0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_{0}}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \mid \mu = \mu_{0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C : Z_{0} = \frac{\bar{X}-\mu_{0}}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

آزمون فرضیه میانگین جامعه
حالت الف- واریانس جامعه معلوم

الف-۱ اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 معلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C : Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم. در این مرحله مقدار آماره به دست آمده را با مقادیر بحرانی به دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم؛ اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

مثال ۴

متوسط قد دانشجویان مرد سال اول یک دانشکده ۶۸/۵ اینچ با انحراف معیار ۲/۷ اینچ گزارش شده است. اگر یک نمونه‌ی تصادفی ۵۰ تایی از دانشجویان مرد سال اول فعلی دارای حد متوسط قد ۶۹/۷ اینچ باشد، آیا در سطح معنی‌داری ۰/۰۲ دلیلی برای تصور افزایش در حد متوسط قد وجود دارد؟

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۶۸/۵ \\ H_۱ : \mu > ۶۸/۵ \end{cases}$$

$$Z_۰ = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۶۹/۷ - ۶۸/۵}{\frac{۲/۷}{\sqrt{۵۰}}} = ۳/۱۴$$

$$C : Z_۰ > z_{۱-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad C : ۳/۱۴ > ۲/۰۵$$

$$\alpha = ۰/۰۲ \qquad \Rightarrow \qquad ۱ - \alpha = ۰/۹۸ \qquad \Rightarrow \qquad z_{۰/۹۸} = ۲/۰۵$$

فرض صفر رد می‌شود. یعنی حد متوسط قد تغییر پیدا کرده است.

۲- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

حال می‌خواهیم برای فرضیه زیر آماره آزمون و ناحیه بحرانی بسازیم:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(۰, ۱)$$

$$\alpha = P\left(\bar{X} < c \mid \mu = \mu_۰\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{c - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha = -z_{۱-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad c = \mu_۰ - z_{۱-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = P\left(\bar{X} < \mu_۰ - z_{۱-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_۰\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{۱-\alpha} \mid \mu = \mu_۰\right)$$

$$\Rightarrow \quad C : \quad Z_۰ = \frac{\bar{X} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{۱-\alpha}$$

آزمون فرضیه میانگین جامعه
حالت الف- واریانس جامعه معلوم

الف-۲ اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه $\sigma^۲$ معلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_۰ = \frac{\bar{X}-\mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C : Z_۰ = \frac{\bar{X}-\mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{۱-\alpha}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم. در این مرحله مقدار آماره به دست آمده را با مقادیر بحرانی به دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم؛ اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت $H_۰$ را رد می‌کنیم و در غیر این صورت $H_۰$ را می‌پذیریم.

مثال ۵

وزارت کار و امور اجتماعی مزد روزانه‌ی کارگران کارخانه‌ای را به طور متوسط ۱۳۲ هزار تومان با انحراف معیار ۲۵ هزار تومان تعیین کرده است. اگر کارخانه‌ای به ۴۰ کارگر خود روزانه به طور متوسط ۱۲۲ هزار تومان پرداخت کند، آیا می‌توان این کارخانه را متهم کرد که کمتر از مزد تعیین شده‌ی وزارت کار و امور اجتماعی پرداخت می‌کند؟ (سطح معنی‌داری ۰/۰۵)

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 132 \\ H_1 : \mu < 132 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{122 - 132}{\frac{25}{\sqrt{40}}} = -2/53$$

$$C : Z_0 < -z_{1-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad C : -2/53 < -1/645$$

$$\alpha = 0/05 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \alpha = 0/95 \qquad \Rightarrow \qquad z_{0/95} = 1/645$$

فرض صفر رد می‌شود. یعنی می‌توان این کارخانه را متهم کرد که کمتر از مزد تعیین شده‌ی وزارت کار پرداخت می‌کند.

۳- آماره آزمون و ناحیه بحرانی

حال می‌خواهیم برای فرضیه زیر آماره آزمون و ناحیه بحرانی بسازیم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$\alpha = P\left(\bar{X} < c_1 \ \text{یا}\ \bar{X} > c_2 \mid \mu = \mu_0\right)$$

$$1 - \alpha = P\left(c_1 \leq \bar{X} \leq c_2 \mid \mu = \mu_0\right) = P\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \Rightarrow \quad \bar{X} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ c_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \Rightarrow \quad \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C: \quad Z_0 = \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

آزمون فرضیه میانگین جامعه
حالت الف- واریانس جامعه معلوم

الف-۳ اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^{2} معلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم. در این مرحله مقدار آماره به دست آمده را با مقادیر بحرانی به دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم؛ اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

مثال ۶

یک کارخانه‌ی تولید کننده‌ی لامپ‌های روشنایی لامپ‌هایی تولید می‌کند که طول عمر آن‌ها از توزیع نرمال با متوسط عمر ۸۰۰ ساعت و انحراف معیار ۴۰ ساعت پیروی می‌کند. می‌خواهیم آزمون $\mu = ۸۰۰$ را در مقابل $\mu \neq ۸۰۰$ انجام دهیم. اگر یک نمونه‌ی تصادفی ۲۵ تایی از آن لامپ‌ها دارای حد متوسط عمر ۷۸۸ ساعت باشند، آزمون گفته شده را در سطح معنی‌داری ۰/۰۴ انجام دهید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۸۰۰ \\ H_۱ : \mu \neq ۸۰۰ \end{cases}$$

$$Z_۰ = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۷۸۸ - ۸۰۰}{\frac{۴۰}{\sqrt{۲۵}}} = -۱/۵$$

$$C : |Z_۰| > z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \qquad \Rightarrow \qquad C : |-۱/۵| \ngtr ۲/۰۵$$

$$\alpha = ۰/۰۴ \qquad \Rightarrow \qquad ۱ - \frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۸ \qquad \Rightarrow \qquad z_{۰/۹۸} = ۲/۰۵$$

فرض صفر رد نمی‌شود.

آزمون فرضیه میانگین جامعه
حالت الف- واریانس جامعه معلوم (همه فرضیه‌ها)

اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه $\sigma^۲$ معلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu > \mu_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu \neq \mu_۰ \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $Z_۰ = \frac{\bar{X}-\mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu > \mu_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu \neq \mu_۰ \end{cases}$$

$$C : Z_۰ > z_{۱-\alpha} \qquad C : Z_۰ < -z_{۱-\alpha} \qquad C : |Z_۰| > z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم.

لامپ‌های تلویزیون موجود در بازار دارای میانگین طول عمر ۱۲۰۰ ساعت با انحراف معیار ۳۰۰ ساعت هستند. کارخانه‌ای لامپ جدیدی تولید کرده و مدعی شده که میانگین عمر لامپ‌های ساخت کارخانه‌اش بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت است. برای بررسی این ادعا یک نمونه ۱۰۰ تایی را انتخاب کرده و میانگین طول عمر ۱۲۶۵ ساعت به دست آمده است. آیا با ادعای صاحب کارخانه موافق هستید؟ (سطح معنی‌داری ۰/۰۱)

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۱۲۰۰ \\ H_۱ : \mu > ۱۲۰۰ \end{cases}$$

$$Z_۰ = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۱۲۶۵ - ۱۲۰۰}{\frac{۳۰۰}{\sqrt{۱۰۰}}} = ۲/۱۷$$

$$C : Z_۰ > z_{۱-\alpha} \quad \Rightarrow \quad C : ۲/۱۷ \not> ۲/۳۳$$

$$\alpha = ۰/۰۱ \quad \Rightarrow \quad ۱ - \alpha = ۰/۹۹ \quad \Rightarrow \quad z_{۰/۹۹} = ۲/۳۳$$

فرض صفر رد نمی‌شود. یعنی ادعای صاحب کارخانه رد می‌شود.

مثال ۸

تعداد زیادی از بیماران مبتلا به یک بیماری خاص را گردآوری کرده و گزارش کرده‌اند که مدت زمان درمان بیماری به روش استاندارد دارای میانگین ۱۵ روز و انحراف معیار ۳ روز است. ادعا شده که یک روش جدید می‌تواند مدت زمان درمان را کاهش دهد؛ در حالی که انحراف معیار درمان همان ۳ روز است. برای روش جدید درمان را روی ۷۰ بیمار آزمایش کرده و میانگین مدت درمان ۱۴ روز شده است. آیا روش جدید روش بهتری است؟ (سطح معنی‌داری ۰/۰۲۵)

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_{\circ} : \mu = ۱۵ \\ H_{۱} : \mu < ۱۵ \end{cases}$$

$$Z_{\circ} = \frac{\bar{x} - \mu_{\circ}}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{۱۴ - ۱۵}{\frac{۳}{\sqrt{۷۰}}} = -۲/۷۸۹$$

$$C : Z_{\circ} < -z_{۱-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad C : -۲/۷۸۹ < -۱/۹۶$$

$$\alpha = ۰/۰۲۵ \qquad \Rightarrow \qquad ۱ - \alpha = ۰/۹۷۵ \qquad \Rightarrow \qquad z_{۰/۹۷۵} = ۱/۹۶$$

فرض صفر رد می‌شود. یعنی می‌توان نتیجه گرفت که روش درمان جدید روش بهتری است.

آزمون فرض میانگین جامعه
حالت ب- واریانس جامعه نامعلوم باشد

فرض کنید از یک جامعه با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول $\sigma^۲$ یک نمونه‌ی تصادفی $X_۱, \dots, X_n$ انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی میانگین μ انجام دهیم.

از آنجا که توزیع t- ستیودنت یک توزیع متقارن است، نحوه‌ی به دست آوردن آماره‌ی آزمون و تعیین ناحیه‌ی بحرانی شبیه به حالت الف است؛ با این تفاوت که

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-۱)}$$

بنابراین آماره‌ی آزمون برابر است با:

$$T_۰ = \frac{\bar{X} - \mu_۰}{s/\sqrt{n}}$$

آزمون فرض میانگین جامعه
حالت ب- واریانس جامعه نامعلوم باشد

اگر بخواهیم فرضیه‌ای در رابطه با میانگین یک جامعه μ را آزمون کنیم، در حالتی که واریانس جامعه σ^2 نامعلوم است،

۱- فرضیه‌ها را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

۲- آماره‌ی آزمون $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ را محاسبه کرده

۳- بر اساس فرضیه‌ی مورد نظر ناحیه‌ی بحرانی را نوشته

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$C : |T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)} \qquad C : T_0 < -t_{1-\alpha,(n-1)} \qquad C : T_0 > t_{1-\alpha,(n-1)}$$

۴- در نهایت بر اساس ناحیه‌ی بحرانی نتیجه‌گیری می‌کنیم.

مثال ۹

اداره بهداشت یک شهر می‌خواهد تعیین کند که آیا میانگین تعداد باکتری‌ها در واحد حجم آب شهر از سطح ایمنی یعنی ۲۰۰ بیشتر است یا خیر. برای این منظور پژوهش‌گران ۱۰ نمونه از آب را گردآوری کرده و مشاهده کرده‌اند که میانگین تعداد باکتری‌ها ۱۹۴/۸ و انحراف معیار آن‌ها ۱۳/۱۴ بوده است. با فرض اینکه این داده‌ها از جامعه‌ای با توزیع نرمال به دست آمده‌اند، در سطح معنی‌داری ۰/۰۱ آزمون کنید آیا داده‌ها دلیلی بر نگرانی است؟

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 200 \\ H_1 : \mu > 200 \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{194/8 - 200}{\frac{13/14}{\sqrt{10}}} = -1/25$$

$$C : T_0 > t_{1-\alpha,(n-1)} \qquad \Rightarrow \qquad C : -1/25 \not> 2/82$$

$$\alpha = 0/01 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \alpha = 0/99 \qquad \Rightarrow \qquad t_{0/99,(10-1)} = 2/82$$

فرض صفر رد نمی‌شود. یعنی نگرانی اداره بهداشت بی‌مورد است.

مثال ۱۰

یک ماشین خودکار قطعات یدکی را به قطر متوسط ۲۵ میلیمتر بر طبق توزیع نرمال می‌سازد. برای اینکه معلوم شود ماشین کار خود را به خوبی انجام می‌دهد یا خیر، نمونه‌ای به حجم ۱۰ قطعه انتخاب شده است که میانگین قطر قطعات نمونه ۲۵/۰۲ با انحراف معیار ۰/۰۲۴ میلیمتر به دست آمده است. درستی کار ماشین را درسطح معنی‌داری ۱۰ درصد آزمون نمایید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۲۵ \\ H_۱ : \mu \neq ۲۵ \end{cases}$$

$$T_۰ = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{s/\sqrt{n}} = \frac{۲۵/۰۲ - ۲۵}{\frac{۰/۰۲۴}{\sqrt{۱۰}}} = ۲/۶۴$$

$$C : |T_۰| > t_{۱-\frac{\alpha}{۲},(n-۱)} \quad \Rightarrow \quad C : |۲/۶۴| > ۱/۸۳$$

$$\alpha = ۰/۱ \quad \Rightarrow \quad ۱ - \frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۵ \quad \Rightarrow \quad t_{۰/۹۵,(۱۰-۱)} = ۱/۸۳$$

فرض صفر رد می‌شود؛ یعنی ماشین درست کار نمی‌کند.

مثال ۱۱

یک کارخانه‌ی مواد شیمیایی به گونه‌ای طراحی شده که روزانه به طور متوسط ۸۰۰ تن محصول داشته باشد. در ۵ روز متوالی این کارخانه به ترتیب ۷۹۳، ۷۹۰، ۸۰۵، ۷۸۵ و ۸۰۲ تن محصول داشته است. با فرض نرمال بودن میزان محصول، آیا این داده‌ها نشان دهنده‌ی کاهش در حد متوسط میزان محصول کارخانه است؟ $(\alpha = ۰/۰۵)$

راه‌حل: حد متوسط میزان محصول کارخانه کاهش نیافته است، زیرا:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۸۰۰ \\ H_۱ : \mu < ۸۰۰ \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{۷۹۳ + \cdots + ۸۰۲}{۵} = ۷۹۵$$

$$s^۲ = \frac{۱}{۵-۱}\left[(۷۹۳ - ۷۹۵)^۲ + \cdots + (۸۰۲ - ۷۹۵)^۲\right] = ۶۹/۵$$

$$T_۰ = \frac{\bar{x} - \mu_۰}{s/\sqrt{n}} = \frac{۷۹۵ - ۸۰۰}{\sqrt{\frac{۶۹/۵}{۵}}} = -۱/۳۴$$

$$C : T_۰ < -t_{۱-\alpha,(n-۱)} \qquad \Rightarrow \qquad C : -۱/۳۴ \not< -۲/۱۳$$

$$\alpha = ۰/۰۵ \qquad \Rightarrow \qquad ۱ - \alpha = ۰/۹۵ \qquad \Rightarrow \qquad t_{۰/۹۵,(۵-۱)} = ۲/۱۳$$

آزمون فرض روی نسبت در یک جامعه

آزمون فرض روی نسبت موفقیت‌ها

در برخی از بررسی‌های آماری نسبتی از اعضای جامعه p که دارای خصوصیت معینی هستند، مد نظر است.

این مطالعات مشاهده‌ای بر روی یک متغیر دو ارزشی (مثل: زن و مرد - شهری و روستایی - موافق و مخالف) انجام می‌شود.

از آن‌جا که متغیر مورد مطالعه تنها دو ارزش دارد، هر یک از اعضای جامعه در یکی از دو ارزش قرار می‌گیرند.

نسبت موفقیت‌ها (افراد/اشیاء مورد نظر و سوال شده) را با p و نسبت افراد/اشیائی که در موفقیت قرار نمی‌گیرند را با q نشان می‌دهیم.

برای بررسی این نسبت p نمونه تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ را از جامعه جمع‌آوری می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر عضو } i\text{-ام نمونه دارای خصوصیت معین باشد} \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

قرار می‌دهیم: $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$؛ که در آن X تعدادی اعضای نمونه است که دارای خصوصیت معین هستند؛ پس $X \sim Bin(n, p)$

آزمون فرض روی نسبت موفقیت‌ها

بهترین براوردگر نقطه‌ای برای p عبارت است از: $\frac{X}{n}$

اگر حجم نمونه n بزرگ باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه حد مرکزی توزیع $\frac{X-np}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

فرض کنید بخواهیم یکی از فرض‌های زیر را بر اساس یافته‌های یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n که از یک جامعه با نسبت موفقیت p استخراج شده است، در سطح معنی‌داری α آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

آزمون فرض روی نسبت در یک جامعه

مراحل انجام آزمون فرضیه‌های مربوط به نسبت واریانس دو جامعه نرمال به صورت زیر است:

۱- نوشتن فرضیه‌های آزمون (شبیه به مرحله ۳)

۲- محاسبه آماره آزمون $Z_0 = \frac{X-np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$

۳- تعیین ناحیه بحرانی (دقیقاً شبیه نواحی بحرانی آزمون‌های مربوط به μ)

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad C : Z_0 > z_{1-\alpha} \qquad C : Z_0 < -z_{1-\alpha}$$

۴- نتیجه‌گیری بر مبنای مرحله ۳

مثال ۱۲

پزشکی مدعی شده است که بیش از ۷۰ درصد از بیماران قلبی با دارویی که اخیراً کشف شده است، بهبود می‌یابند. اگر در یک نمونه ۱۵۰ تایی از بیماران قلبی، ۸۰ بیمار با این دارو بهبود یابند، در سطح معنی‌داری ۱ درصد ادعای پزشک را آزمون کنید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_۰ : p = ۰/۷ \\ H_۱ : p > ۰/۷ \end{cases}$$

$$Z_۰ = \frac{X - np_۰}{\sqrt{np_۰q_۰}} = \frac{۸۰ - (۱۵۰ \times ۰/۷)}{\sqrt{۱۵۰ \times ۰/۷ \times ۰/۳}} = -۴/۴۵$$

$$C : Z_۰ > z_{۱-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad -۴/۴۵ \not> ۲/۳۳$$

$$\alpha = ۰/۰۱ \quad \Rightarrow \quad ۱ - \alpha = ۰/۹۹ \quad \Rightarrow \quad z_{۰/۹۹} = ۲/۳۳$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی ادعای پزشک رد می‌شود.

در کالجی براورد شده است که کمتر از ۲۵ درصد دانشجویان با دوچرخه به کلاس می‌آیند. اگر در یک نمونه‌ی تصادفی از ۹۰ دانشجوی کالج، ۲۸ نفر با دوچرخه به کلاس بیایند، آیا می‌توان گفت که این براورد معتبر است؟ سطح معنی‌داری ۰/۰۵ را به کار ببرید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_{۰} : p = ۰/۲۵ \\ H_{۱} : p < ۰/۲۵ \end{cases}$$

$$Z_{۰} = \frac{X - np_{۰}}{\sqrt{np_{۰}q_{۰}}} = \frac{۲۸ - (۹۰ \times ۰/۲۵)}{\sqrt{۹۰ \times ۰/۲۵ \times ۰/۷۵}} = ۱/۳۴$$

$$C : Z_{۰} < -z_{۱-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad ۱/۳۴ \not< -۱/۶۴۵$$

$$\alpha = ۰/۰۵ \quad \Rightarrow \quad ۱ - \alpha = ۰/۹۵ \quad \Rightarrow \quad z_{۰/۹۵} = ۱/۶۴۵$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی درصد دانشجویانی که با دوچرخه به کالج می‌آیند کمتر از ۰/۲۵ نیست.

مثال ۱۴

اعتقاد بر این است که ۶۰ درصد از ساکنان ناحیه‌ای موافق با لایحه‌ی ضمیمه‌سازی آن به شهر مجاور هستند. اگر ۱۱۰ نفر از یک نمونه ۲۰۰ نفری موافق با لایحه‌ی مزبور باشند، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ سطح معنی‌داری ۰/۰۵ را به کار بگیرید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0/6 \\ H_1 : p \neq 0/6 \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} = \frac{110 - (200 \times 0/6)}{\sqrt{200 \times 0/6 \times 0/4}} = -1/44$$

$$C : |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad |-1/44| \not> 1/96$$

$$\alpha = 0/05 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975 \quad \Rightarrow \quad z_{0/975} = 1/96$$

فرض صفر رد نمی‌شود؛ یعنی درصد افرادی که با لایحه موافق هستند، با ۰/۶ اختلافی ندارد.

آزمون فرض برای واریانس جامعه‌ی نرمال σ^2

آزمون فرض برای واریانس جامعه

فرض کنید از یک جامعه‌ی نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم $\sigma^۲$ نمونه‌ی تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ به اندازه‌ی n انتخاب کرده باشیم و بخواهیم آزمون‌هایی روی $\sigma^۲$ انجام دهیم.

فرض کنید بخواهیم فرض زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ < \sigma_۰^۲ \end{cases}$$

می‌دانیم که براوردگر مناسب برای $\sigma^۲$ عبارت است از: $S^۲$

با توجه به فرض مقابل، ناحیه‌ی بحرانی به صورت $S^۲ < c$ است که در آن c به گونه‌ای تعیین می‌شود که سطح معنی‌داری آزمون α باشد: $\alpha = P(S^۲ < c \mid \sigma^۲ = \sigma_۰^۲)$

از طرفی می‌دانیم: $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)}$

آماره آزمون و ناحیه بحرانی
ب

$$\alpha = P\left(S^۲ < c \mid \sigma^۲ = \sigma_۰^۲\right)$$

$$= P\left(\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} < \frac{(n-۱)c}{\sigma_۰^۲} \mid \sigma^۲ = \sigma_۰^۲\right) = P\left(\chi^۲_{(n-۱)} < \frac{(n-۱)c}{\sigma_۰^۲}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-۱)c}{\sigma_۰^۲} = \chi^۲_{\alpha,(n-۱)}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{\sigma_۰^۲}{n-۱}\chi^۲_{\alpha,(n-۱)}$$

$$\Rightarrow \quad C:\ X_۰^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma_۰^۲} < \chi^۲_{\alpha,(n-۱)}$$

فرضیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی به صورت $S^2 < c_1$ یا $S^2 > c_2$ است:

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left(S^2 < c_1 \;\text{یا}\; S^2 > c_2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\ &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \;\text{یا}\; \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\ &= P\left(\chi^2_{(n-1)} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \;\text{یا}\; \chi^2_{(n-1)} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\ &\Rightarrow \quad 1-\alpha = P\left(\frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(n-1)} < \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2}\right) \end{aligned}$$

آماره آزمون و ناحیه بحرانی
ج

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \qquad \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \qquad c_2 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad C:\ X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \quad \text{یا} \quad X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}$$

مراحل انجام آزمون فرضیه‌های مربوط به واریانس یک جامعه‌ی نرمال به ترتیب زیر است:

۱- نوشتن فرضیه‌ی آزمون (شبیه به مرحله‌ی ۳)
۲- محاسبه‌ی آماره‌ی آزمون $X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$
۳- تعیین ناحیه‌ی بحرانی

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

$C : X_0^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$ یا $X_0^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$C : X_0^2 > \chi^2_{1-\alpha,(n-1)}$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$C : X_0^2 < \chi^2_{\alpha,(n-1)}$$

۴- نتیجه‌گیری بر مبنای مرحله‌ی ۳

مثال ۱۵

یک تولید کننده‌ی قطعات پیش‌ساخته مدعی است که انحراف معیار مقاومت محصولات او برابر ۱۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع است. یک نمونه‌ی تصادفی ۱۰ تایی از این محصولات نتایج $\bar{x} = ۳۱۲$ و $s^۲ = ۱۹۵$ را داده است. اگر اندازه‌ی مقاومت این محصولات دارای توزیع نرمال باشند، آیا نتایج به دست آمده با ادعای تولید کننده سازگار است؟ سطح معنی‌داری را ۰/۰۵ در نظر بگیرید.

راه‌حل: نتایج با ادعای تولیدکننده سازگار است، زیرا:

$$\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = ۱۰۰ \\ H_۱ : \sigma^۲ \neq ۱۰۰ \end{cases}$$

$$X_۰^۲ = \frac{(n-۱)\, s^۲}{\sigma_۰^۲} = \frac{(۱۰-۱)\times ۱۹۵}{۱۰۰} = ۱۷/۵۵$$

$$C: \;\; X_۰^۲ < \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲},(n-۱)} \;\text{ یا }\; X_۰^۲ > \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲},(n-۱)} \quad \Rightarrow \quad ۱۷/۵۵ \not< ۲/۷ \;\text{ یا }\; ۱۷/۵۵ \not> ۱۹$$

$$\alpha = ۰/۰۵ \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{۲} = ۰/۰۲۵ \quad \Rightarrow \quad \chi^۲_{۰/۰۲۵,(۹)} = ۲/۷$$

$$۱-\frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۷۵ \quad \Rightarrow \quad \chi^۲_{۰/۹۷۵,(۹)} = ۱۹$$

مثال ۱۶

یک مدرس ریاضی آزمون جدیدی را پیشنهاد داده است که برای تعیین میزان دانش ریاضی دانشجویان تازه وارد به کار می‌رود. آزمون‌های قدیمی دارای واریانس حداقل ۱۰۰ هستند و این مدرس ادعا دارد روش او مؤثر است (یعنی واریانس را کاهش می‌دهد). اگر ۲۰ دانشجو به روش جدید امتحان دهند و نمره‌های زیر را بیاورند، ادعای این مدرس را در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ آزمون کنید. فرض کنید نمره‌ها دارای توزیع نرمال هستند.

۸۹ ۶۸ ۵۳ ۹۰ ۵۰ ۷۵ ۶۵ ۷۰ ۵۰ ۸۸ ۶۷ ۷۵ ۹۲ ۴۸ ۵۲ ۹۱ ۶۴ ۷۳ ۸۰ ۷۰

راه‌حل: فرض H_0 رد نمی‌شود. به عبارتی روش جدید روش مؤثری نیست، زیرا:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 100 \\ H_1 : \sigma^2 < 100 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{70 + \cdots + 89}{20} = 70/5$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20-1}\left\{(70 - 70/5)^2 + \cdots + (89 - 70/5)^2\right\} = 217/63$$

$$X_0^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\times 217/63}{100} = 41/35$$

$$C : X_0^2 < \chi^2_{\alpha,(n-1)} \quad \Rightarrow \quad 41/35 \not< 10/1$$

$$\alpha = 0/05 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{0/05,(19)} = 10/1$$

مثال ۱۷

متوسط درجه حرارت سالانه یک شهر از میانگین متوسط درجه حرارت پانزدهمین روز هر سال اندازه گیری می‌شود. انحراف معیار درجه حرارت سالانه شهری در یک دوره صد ساله ۱۶ درجه فارنهایت بوده است. در مدت ۱۵ سال گذشته انحراف استاندارد درجه حرارت سالانه را محاسبه کرده‌اند که برابر ۱۸ درجه فارنهایت بوده است. آیا این اطلاعات دلیلی بر این دارد انحراف معیار درجه حرارت سالانه این شهر از انحراف معیار درجه حرارت سابق شهر بیشتر است؟ $\alpha = ۰/۰۱$

راه‌حل:

$$\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = ۱۶^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ > ۱۶^۲ \end{cases}$$

$$X_۰^۲ = \frac{(n-۱)\, s^۲}{\sigma_۰^۲} = \frac{(۱۵-۱)\times ۱۸^۲}{۱۶^۲} = ۱۷/۷۲$$

$$C : X_۰^۲ > \chi^۲_{۱-\alpha,(n-۱)} \quad \Rightarrow \quad ۱۷/۷۲ \not> ۲۹/۱$$

$$\alpha = ۰/۰۱ \qquad \Rightarrow \qquad \chi^۲_{۰/۹۹,(۱۴)} = ۲۹/۱$$

پس فرض صفر رد نمی شود؛ یعنی انحراف معیار درجه حرارت سالانه این شهر نسبت به سابق بیشتر نشده است.

رابطه آزمون فرض و فاصله اطمینان

در آزمون فرضیه زیر ناحیه رد فرض صفر به صورت $C: |Z_0| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تعریف شد؛ که در آن $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

پس ناحیه پذیرش فرض صفر به صورت $C': |Z_0| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تعریف می‌شود:

$$C': \quad |Z_0| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad C': \quad \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$C': \quad -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$C': \quad \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

این همان فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ ٪ برای μ است که در فصل قبل داشتیم.

- ناحیه پذیرش فرض صفر همان فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی است.
- اگر μ_0 در داخل فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ ٪ قرار گیرد، فرد صفر را می‌پذیریم؛ در غیراین‌صورت آن را رد