شروع	پنج‌شنبه، 6 خرداد 1400، 4:10 عصر
وضعیت	پایان‌یافته
پایان	پنج‌شنبه، 6 خرداد 1400، 5:30 عصر
زمان صرف شده	1 ساعت 19 دقیقه
نمره	**16.67** از 20.00 (83٪)

سؤال **1**
درست
نمره 1.00 از 1.00

به چند طریق می‌توان ۲۰ کتاب یکسان را بین ۴ دانش‌آموز مختلف توزیع کرد به‌طوری‌که همواره دو دانش‌آموز مشخص S_1 و S_2 مجموعاً سه کتاب دریافت کنند؟

- 18
- 36
- 72 ✔
- 54

پاسخ درست «72» است.

سؤال **2**

نادرست

نمره -0.33 از 1.00

معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=98$ داده شده است. اگر O برابر با تعداد چهارتایی‌های مرتب از اعداد صحیح مثبت فرد باشد که در این معادله صدق می‌کنند و E نیز برابر با تعداد چهارتایی‌های مرتب از اعداد صحیح مثبت زوج باشد که در این معادله صدق می‌کنند، در این‌صورت کدام دو رابطهٔ زیر بین O و E برقرار است؟

- $E+O=\binom{97}{3}$ و $E\geq O$
- $E+O<\binom{97}{3}$ و $E\geq O$ ✖
- $E+O=\binom{97}{3}$ و $E\leq O$
- $E+O<\binom{97}{3}$ و $E\leq O$

پاسخ درست «

$E+O<\binom{97}{3}$ و $E\leq O$ » است.

سؤال **3**

درست

نمره 1.00 از 1.00

کدام گزینه در مورد نامساوی‌های داده شده زیر صحیح است؟

عبارت اول) $\sum_{k=1}^{100} k\binom{100}{k}<100\times 2^{100}$

عبارت دوم) $\sum_{i=1}^{50}\binom{100}{2i}<2^{50}$

- هر دو عبارت درست هستند.
- هر دو عبارت نادرست هستند.
- عبارت اول درست و عبارت دوم نادرست است. ✔
- عبارت اول نادرست و عبارت دوم درست است.

پاسخ درست «

عبارت اول درست و عبارت دوم نادرست است.» است.

سؤال **4**

درست

نمره 1.00 از 1.00

در یک رأی‌گیری، که به منظور انتخاب یکی از دو نامزد شورای صنفی برگزار می‌گردد، تعداد آراء نامزد اول ۸ و تعداد آراء نامزد دوم ۴ رأی است. به هنگام شمارش، آراء یک‌به‌یک از صندوق استخراج می‌گردد و شمرده می‌شود. به چند طریق می‌توان آراء را طوری از صندوق استخراج کرد که هیچ‌گاه آراء شمرده شده نامزد اول کمتر از آراء شمردهٔ نامزد دوم نباشد؟

- 110
- 55
- 275 ✔
- 330

پاسخ درست «275» است.

سؤال **5**

پاسخ داده نشده

نمره از 1.00

به چند طریق می‌توان اعداد 1 تا 102 را در یک مستطیل 2×51 قرار داد، به‌طوری‌که اعداد واقع در هر ستون از بالا به پایین و اعداد واقع در هر سطر از چپ به راست اکیداً صعودی مرتب شده باشند؟

- $\frac{1}{51}\binom{102}{51}$
- $\frac{1}{51}\binom{102}{52}$
- $\frac{1}{52}\binom{102}{52}$
- $\frac{1}{52}\binom{102}{51}$

پاسخ درست «$\frac{1}{52}\binom{102}{51}$» است.

سؤال 6
درست
نمره 1.00 از 1.00

فرض کنیم $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$ باشد. حال مقادیر N_1، N_2 و N_3 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- N_1 تعداد توابع یک‌به‌یک $f: A \to A$ است که دقیقاً ۶ نقطه ثابت دارند (نقطه $x \in A$ برای تابع f یک نقطه ثابت محسوب می‌شود اگر $f(x)=x$.)
- N_2 تعداد توابع پوشای $f: A \to A-\{1\}$ است.
- N_3 تعداد توابع پوشای $f: A-\{1\} \to A-\{1,2\}$ است.

حال کدام رابطه بین N_1، N_2 و N_3 برقرار است؟

- $N_1 \leq N_2 \leq N_3$
- $N_2 \leq N_1 \leq N_3$
- $N_1 \leq N_3 \leq N_2$ ✔
- $N_3 \leq N_1 \leq N_2$

پاسخ درست « $N_1 \leq N_3 \leq N_2$ » است.

سؤال 7

درست

نمره 1.00 از 1.00

تابع یک‌به‌یک $f:\{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ بیانگر تابعی است که عمل جایگشت را انجام می‌دهد به عبارتی دیگر تابع f، هر یک از اعداد ۱ تا n (از دامنه) را به یکی از مکان‌های ۱ تا n (در بُرد) نسبت می‌دهد، که قرار است عدد انتخاب شده از دامنه در آن مکان قرار گیرد. به عنوان مثال $\mathrm{f}(2) = 4$ به این معنی است که عدد دوم متعلق به دامنه در چهارمین مکان از یک رشتهٔ nتایی قرار می‌گیرد $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

حال، گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

گزاره اول) تعداد جایگشت‌هایی به‌طول n که می‌توان با استفاده از اعداد ۱ تا n ایجاد کرد، برابر است با تعداد کل توابع یک‌به‌یک ممکن همانند f.

گزاره دوم) تعداد پریش‌های n شی مختلف برابر است با تعداد توابعی همانند f که در آن هیچ عضوی همانند $i \in \{1,2,\dots,n\}$ وجود ندارد که به‌ازای آن $f(i) = i$ باشد $(1 \le i \le n)$.

در مورد گزاره‌های ذکر شده کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

- گزارهٔ اول و دوم هر دو درست هستند. ✔
- گزارهٔ اول درست و گزارهٔ دوم نادرست است.
- گزارهٔ اول نادرست و گزارهٔ دوم درست است.
- گزارهٔ اول و دوم هر دو نادرست هستند.

پاسخ درست «
گزارهٔ اول و دوم هر دو درست هستند.» است.

سؤال **8**

درست

نمره 1.00 از 1.00

چه تعدادی از عبارات زیر در مورد دنبالهٔ متناظر با تابع مولد $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ صحیح است؟

عبارت ۱) سه جملهٔ اول (یعنی جملهٔ صفرم، یکم و دوم) مربوط به دنبالهٔ متناظر با تابع $f(x)$ برابر با صفر است.

عبارت ۲) مجموع جملات صفرم تا نهم دنبالهٔ متناظر با تابع $f(x)$، برابر با ۴ است.

عبارت ۳) دنبالهٔ متناظر با تابع $\frac{f(x)}{x^2}$ با صفر شروع می‌گردد.

- 1 مورد
- 2 مورد
- 3 مورد ✔
- صفر مورد

پاسخ درست «3 مورد» است.

سؤال 9
درست
نمره 1.00 از 1.00

فرض کنید تابع مولد $f(x)=\frac{1}{1-x}$ داده شده باشد. اگر فعالیت‌های مجاز بر روی یک تابع داده شده عبارت باشند از

فعالیت ۱) مشتق‌گیری از تابع داده شده

فعالیت ۲) ضرب x در تابع داده شده

انجام کدام توالی از فعالیت‌های مجاز ارائه شده در گزینه‌ها، در نهایت منجر به تولید تابعی می‌گردد که مولد دنبالهٔ (از چپ به راست)

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$$

است؟ (**نکته**: تابع استفاده شده در مرحلهٔ اول، $f(x)$ است. همچنین تابعی که در هر مرحلهٔ بعدی استفاده می‌شود، تابعی است که در مرحلهٔ قبلی به‌دست آمده است.)

- ابتدا فعالیت 1، سپس فعالیت 2، سپس فعالیت 1 ✔
- ابتدا فعالیت 1، سپس فعالیت 2، سپس فعالیت 1، سپس فعالیت 2
- ابتدا فعالیت 2، سپس فعالیت 2، سپس فعالیت 2
- ابتدا فعالیت 2، سپس فعالیت 2، سپس فعالیت 2، سپس فعالیت 1

پاسخ درست »
ابتدا فعالیت 1، سپس فعالیت 2، سپس فعالیت 1» است.

سؤال **10**

درست

نمره 1.00 از 1.00

چه تعداد از عبارات زیر صحیح است؟

عبارت ۱) تعداد افرازهای عدد n به k جمع‌وند برابر است با تعداد افرازهای عدد k به n جمع‌وند.

عبارت ۲) تعداد افرازهای عدد k به n جمع‌وند برابر است با تعداد افرازهای عدد k که در آن بزرگ‌ترین جمع‌وند برابر با n است.

عبارت ۳) تعداد افرازهای عدد $2k$ به k جمع‌وند برابر است با تعداد کل افرازهای عدد k.

عبارت ۴) تعداد افرازهای عدد $3k$ به $2k$ جمع‌وند برابر است با تعداد کل افرازهای عدد k

- 1 مورد
- 2 مورد
- 3 مورد ✔
- 4 مورد

پاسخ درست « 3 مورد» است.

سؤال **11**

پاسخ داده نشده

نمره از 1.00

اگر a_n ضریب x^n در حاصل عبارت $\left(\prod_{i=1}^{37}\frac{1}{1-x^i}\right)-\left(\prod_{i=1}^{36}\frac{1}{1-x^i}\right)$ باشد، و داشته باشیم $a_n > 0$. چند مورد از عبارات زیر همواره صحیح است؟ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

عبارت ۱) n حتماً عددی اول است.

عبارت ۲) n حتماً از عدد ۳۶ بزرگ‌تر است.

عبارت ۳) n حتماً عددی بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

- هیچکدام از عبارات داده شده همواره صحیح نیست.
- 1 مورد
- 2 مورد
- 3 مورد

پاسخ درست « 1 مورد» است.

سؤال 12
درست
نمره 1.00 از 1.00

تعداد اعداد ۱۶ رقمی که در آن مجاز هستیم فقط از ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم و در عین حال هر یک از این ارقام دست‌کم یک بار به‌کار رفته باشد برابر است با:

- ضریب x^{16} در تابع مولد $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^5$
- ضریب $\frac{x^{16}}{16!}$ در تابع مولد $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^5$
- ضریب $\frac{x^{16}}{16!}$ در تابع مولد $(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^5$ ✔
- ضریب x^{16} در تابع مولد $(x + x^2 + x^3 + \cdots)^5$

پاسخ درست «
ضریب $\frac{x^{16}}{16!}$ در تابع مولد $(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^5$ » است.

سؤال 13
درست
نمره 1.00 از 1.00

اگر p، q و r گزاره‌های اتمی باشند و به‌تصادف به هر یک از این گزاره‌های اتمی یکی از ارزش‌های 0 یا 1 را نسبت دهیم. احتمال این‌که، گزارهٔ $p \wedge ((q \vee r) \wedge ((p \to q) \to r))$ ارزش درستی داشته باشد، چقدر است؟ (در مورد هر گزارهٔ اتمی، احتمال انتساب هر یک از ارزش‌های 0 یا 1 به آن برابر با $\frac{1}{2}$ است.)

- 0.750
- 0.875
- 0.250 ✔
- 1.000

پاسخ درست «
0.250» است.

سؤال **14**

درست

نمره 1.00 از 1.00

کدام گزینه ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \to (q \vee (\neg p))$ برحسب ارزش‌های اتم‌های آن را به‌درستی بیان می‌کند؟

(p و q گزاره‌های اتمی هستند و v تابع ارزش‌گذاری پایه به‌صورت $v: \{p, q\} \to \{0,1\}$ است.)

- ارزش گزاره داده شده، همواره برابر با یک است. ✔
- $(1 - v(p)v(q)).(1 - v(q))$
- $(1 - v(p)).(1 - v(q))$
- ارزش گزاره داده شده، همواره برابر با صفر است.

پاسخ درست «ارزش گزاره داده شده، همواره برابر با یک است. » است.

سؤال **15**

درست

نمره 1.00 از 1.00

چه تعداد از گزاره‌های زیر گزاره‌های همیشه درست ($Tautology$) هستند؟

(p، q، r و s گزاره‌های اتمی هستند.)

گزارهٔ یک) $(\neg r) \to (p \vee (\neg(s \wedge r)))$

گزارهٔ دو) $(\neg(p \to r)) \to (\neg((\neg p) \to r))$

گزارهٔ سه) $((((p \to q) \to q) \to p) \to p)$

- 3 مورد
- 2 مورد
- 1 مورد ✔
- صفر مورد

پاسخ درست «1 مورد» است.

سؤال 16
درست
نمره 1.00 از 1.00

اگر p، q، r و s گزاره‌های اتمی باشند، کدام‌یک از ارزش‌دهی‌های مطرح شده در گزینه‌های زیر یک مثال نقض برای استدلال داده شده محسوب می‌گردد؟

p
$p \to \neg r$
$p \to (q \vee \neg r)$
$\neg q \vee \neg s$

$\therefore \neg s \to q$

- $p: 1, q: 1, r: 1, s: 1$
- $p: 1, q: 0, r: 1, s: 0$
- $p: 1, q: 0, r: 0, s: 0$
- $p: 1, q: 1, r: 0, s: 0$

پاسخ درست « $p: 1, q: 0, r: 0, s: 0$ » است.

سؤال 17
درست
نمره 1.00 از 1.00

کدام گزینه عبارت زیر را به زبان منطق مرتبهٔ اول به درستی بیان می‌کند؟
"هر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، زیرمجموعه‌ای دارد که دست‌کم یک عدد گویا در آن وجود دارد"
($\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ اعداد حقیقی و گویا هستند.)

- $\forall A. (A \subseteq \mathbb{R} \wedge \exists B. ((B \subseteq A) \to (B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset)))$
- $\forall A. (A \subseteq \mathbb{R} \wedge \exists B. ((B \subseteq A) \wedge (B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset)))$
- $\forall A. (A \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall B. ((B \subseteq A) \wedge (B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset)))$
- $\forall A. (A \subseteq \mathbb{R} \to \exists B. ((B \subseteq A) \wedge (B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset)))$

پاسخ درست « $\forall A. (A \subseteq \mathbb{R} \to \exists B. ((B \subseteq A) \wedge (B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset)))$ » است.

سؤال **18**

درست

نمره 1.00 از 1.00

فرض کنید عالم سخن تمامی متغیرهای استفاده شده در عبارت زیر اعداد حقیقی بازهٔ $[1,2)$ باشد. در این‌صورت، کدام گزینه عبارت زیر را به‌درستی به زبان طبیعی بیان می‌کند؟

$$\exists a. \forall x. [(\lfloor x \rfloor = a) \land \forall b. ((\lfloor x \rfloor = b) \rightarrow a = b)]$$

- تمامی اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[1,2)$ ، جزء صحیح دارند.
- جزء صحیح تمامی اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[1,2)$ ، عددی یکتاست. ✔
- تمامی اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[1,2)$ ، حداکثر دو جزء صحیح دارند.
- تمامی اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[1,2)$ ، دست‌کم دو جزء صحیح دارند.

پاسخ درست »
جزء صحیح تمامی اعداد حقیقی متعلق به بازهٔ $[1,2)$ ، عددی یکتاست. « است.

سؤال **19**

درست

نمره 1.00 از 1.00

با فرض این‌که عالم سخن متغیرهای استفاده شده اعداد طبیعی (که از عدد ۱ شروع می‌شود) باشد و همچنین گزارهٔ باز $P(x)$ بیان‌گر این باشد که "x یک عدد طبیعی *اول است*".
کدام گزینه صحیح‌ترین توصیف را در مورد عبارت منطق مرتبهٔ اول
$\forall x. \exists y. ((y > x) \land (P(y) \land P(y+2)))$ بیان می‌کند؟

- دست کم دو عدد اول وجود دارند که اختلاف آنها با یکدیگر 2 واحد است.
- بیشمار جفت عدد طبیعی اول وجود دارند که اختلاف آنها با یکدیگر دقیقاً 2 واحد است. ✔
- عددی وجود دارد که از تمامی اعداد بزرگتر است و پس از آن یک جفت اعداد طبیعی اول که اختلاف آنها دو واحد است وجود دارد.
- بیشمار جفت عدد طبیعی اول وجود دارند که اختلاف آنها با یکدیگر بیش از یک واحد است.

پاسخ درست »
بیشمار جفت عدد طبیعی اول وجود دارند که اختلاف آنها با یکدیگر دقیقاً 2 واحد است.« است.

سؤال 20
درست
نمره 1.00 از 1.00

کدام دسته از گزاره‌های باز ذکر شده در گزینه‌ها می‌تواند به عنوان مثال نقضی برای استلزام منطقی زیر تلقی گردد؟ $\forall x.\big(p(x) \lor q(x)\big) \Rightarrow (\forall x. p(x)) \lor (\forall x. q(x))$
(عالم سخن برای کلیه متغیرها، $\mathbb{Z}^+$ است.)

- $\mathrm{p(x)}$: x مضرب عدد ۳ است / $\mathrm{q(x)}$: x زوج است.
- $\mathrm{p(x)}$: x عددی زوج است / $\mathrm{q(x)}$: x عددی فرد است. ✔
- $\mathrm{p(x)}$: x عددی مثبت است / $\mathrm{q(x)}$: $2x$ عددی مثبت است.
- $\mathrm{p(x)}$: x عددی اول است / $\mathrm{q(x)}$: x عددی مرکب است.

پاسخ درست « $\mathrm{p(x)}$: x عددی زوج است / $\mathrm{q(x)}$: x عددی فرد است. » است.