۹۹۳۱۰۳۰ اشکان شکیبا

۵) الف) تعریف می‌کنیم $u=(u_1,u_2)$؛ بنابراین

$$D_u f(a,b)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+hu_1,b+hu_2)}{h}=\begin{cases}\lim_{h\to 0^+}\frac{hu_1(2b+1+hu_2)}{h} & ;|u_1|\leq|u_2|\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{-hu_1(2b+1+hu_2)}{h} & ;|u_1|>|u_2|\end{cases}$$

$$=\begin{cases}u_1(2b+1) & ;|u_1|\leq|u_2|\\ -u_1(2b+1) & ;|u_1|>|u_2|\end{cases}$$

$$b=3\Rightarrow\quad D_u f(a,b)=\begin{cases}7u_1 & ;|u_1|\leq|u_2|\\ -7u_1 & ;|u_1|>|u_2|\end{cases}$$

ب) می‌دانیم اگر تابع در $(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد، $D_u f(a,b)=\nabla f(a,b)\,u$؛ بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h(2b+1)}{h}=-2b-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=0$$

پس برای هر بردار $u$ داریم: $D_u f(a,b)=(-2b-1,0)\cdot(u_1,u_2)=u_1(-2b-1)$

اما در قسمت الف دیدیم که این رابطه برای همه بردارها برقرار نیست، پس تابع در $(a,b)$ مشتق‌پذیر نیست