جلسه ۱۱ ۲۱ فروردین

(III) معادله فاقد تابع مجهول باشد: $F(x, y') = 0$

حالت

در این حالت باید بتوان معادله را به یکی از دو فرم زیر نوشت:

۱ $y' = f(x) \xrightarrow{\text{جدا پذیر}} y = \int f(x)\,dx + C$

۲ $x = f(y')$

در حالت دوم فرض می‌کنیم $y' = p$ $\left(\frac{dy}{dx} = p\right)$

$$x = f(p) \longrightarrow dx = f'(p)\,dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = f'(p)\,dp$$

$$dy = p f'(p)\,dp \longrightarrow y = \int f'(p)\,p\,dp + C$$

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p)\,dp + C \end{cases}$$ جواب عمومی به فرم پارامتری

Ex.) $x = \ln y' + \sin y'$ معادله دیفرانسیل روبه‌رو را حل کنید:

$y' = p \longrightarrow x = \ln p + \sin p$ $dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$

$dy = p\,dx$ $\frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$

$$dy = (1 + p\cos p)\,dp \xrightarrow{\int} \begin{cases} y = p + p\sin p + \cos p + C \\ x = \ln p + \sin p \end{cases}$$ جواب عمومی

(IV)

معادله $F(x,y,y')$ ممکن است به دو حالت زیر نوشته شود

A) $x=f(y,y') \xrightarrow{y'=p} x=f(y,p) \xrightarrow{d} dx=f_y dy+f_p dp$

B) $y=f(x,y')$

$$\rightarrow \frac{dy}{p}=f_y dy+f_p dp$$

$$\rightarrow \frac{1}{p}=f_y+f_p \, dp/dy$$

از حل این معادله p برحسب y و c محاسبه و حاصل می‌شود

با جایگذاری در رابطه $x=f(y,p)$ جواب عمومی حاصل می‌شود.

A) $x=f(y,y')$

B) $y=f(x,y') \xrightarrow{y'=p} y=f(x,p) \xrightarrow{d} dy=f_x dx+f_p dp$

$$\longrightarrow p\,dx=f_x dx+f_p dp \rightarrow p=f_x+f_p \, dp/dx$$

p برحسب x و c محاسبه و حاصل می‌شود.

با جایگذاری در رابطهٔ $y=f(x,p)$ جواب عمومی حاصل می‌شود.

Ex.) $y=\frac{1}{2}(y')^2+2xy'+x^2$ معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$y=f(x,y') \longrightarrow \underset{dy=p\,dx}{y'=p} \implies y=\frac{1}{2}p^2+2xp+x^2=f(x,p)$$

$$\longrightarrow dy=(2p+2x)\,dx+(p+2x)\,dp \rightarrow p\,dx=(2p+2x)\,dx+(p+2x)\,dp$$

$$\longrightarrow p=(2p+2x)+(p+2x)\,dp/dx \rightarrow (p+2x)\left(1+\frac{dp}{dx}\right)=0 \rightarrow dp/dx=-1$$

$$p=-2x$$

$$dp/dx=-1 \xrightarrow{\int} \boxed{p=-x+c} \xrightarrow[f(x,p)]{\text{جایگذاری در}} y=\frac{1}{2}(c-x)^2+2x(c-x)+x^2$$

$$y=\frac{1}{2}(c^2-2cx+x^2)-x^2+2cx$$

$$\longrightarrow y=\frac{c^2-x^2}{2}+cx$$

نکته: با جایگذاری $p=-2x$ در رابطه $y=f(x,p)$ جواب غیرعادی (منفرد) حاصل می‌شود. $y=-x^2$

page 51

محاسبه جواب غیرعادی مثال قبل طبق قاعده‌ای که قبلاً ذکر شد.

$F(x, y, y') = 0$

$\longrightarrow -y + \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2 = 0 \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = y' + 2x = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

$\rightarrow y' = -2x$

$\rightarrow -y + \frac{(-2x)^2}{2} + 2x(-2x) + x^2 =$

$\rightarrow \Rightarrow y = -x^2$ جواب غیرعادی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت زیر است :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

فرم کلی یک معادله خطی مرتبه n به صورت زیر است :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = r(x)$$

در حالتی که ضرایب $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ توابع ثابت باشند معادله را خطی با ضرایب ثابت گوییم.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$$

$$a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

خطی: با ضرایب متغیر / با ضرایب ثابت

تذکر: اگر $r(x) = 0$ باشد معادله را همگن و در غیر این صورت ناهمگن گوییم.

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$ همگن و خطی با ضرایب متغیر

$y'' + 2y' + \sin x = y$ ناهمگن

مسأله مقدار اولیه IVP دارای دو شرط :

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

$y'' + p(x) + y' + q(x) y = 0$ همگن خطی با ضرایب متغیر

مسئله مقدار مرزی BVP یا دارای دو شرط

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$y'' = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(1) = 1$

$y = c_1 x + c$ شرایط صدق نمی‌کند جواب ندارد!

$y'' = 0 \quad y(-1) = 0 \quad y(1) - 2y'(1) = 0$

$y_1 = c_1 x + c_2 \rightarrow c_2 - c_1 = 0$

$c_1 + c_2 - 2c_1 = 0$

$c_1 = c_2 = c \rightarrow y = c(x+1)$