賽局理論與應用

1. 已知大華與中央兩家百貨公司，每個月月初都有「打折」與「不打折」兩個策略可選擇。其償付矩陣如下表所示：

		中央	
		打折	不打折
大華	打折	8，8	12，4
	不打折	4，12	10，10

(A) 兩家公司是否存在優勢策略？
(B) 若在只玩一次的單純遊戲中，Nash 均衡解為何？
(C) 在上題中的均衡解下，是否滿足 Pareto 效率？
(D) 如果兩家公司私下協商本月的行銷措施，其勾結解為何？
(E) 上題中的解是否會安定？

ANS：

(A) 存在，兩公司的優勢策略均為「打折」。
(B)（打折，打折）＝（8 , 8）。
(C) 不符合，因為（不打折，不打折）的兩公司報酬均優於（打折，打折）。
(D)（不打折，不打折）＝（10 , 10）
(E) 不安定，因為兩家公司均會想背叛對方，如大華公司認為中央公司會信守承諾，則他會偷偷打折以增加 2 元利潤；同理，中央公司也會如此做。

延續上面之償付矩陣，回答下列問題：
(A) 若兩公司的協議效力只及於這個月，請問兩家公司的理性選擇為何？
(B) 若兩公司的協議效力只及於今年（12 個月），請問兩家公司的理性選擇為何？
(C) 若兩公司的協議「永遠」不打折，請問在何種情形下，兩家公司會遵守承諾？

ANS：

(A) 兩公司均會違背承諾，故解為（打折，打折）＝（8, ,8）。
(B) 兩公司每個月都會違背承諾，故解為（打折，打折）＝（8 , 8）。
(C) 遵守協議之利潤為 ： $\pi^*=10+\frac{10}{1+r}+\frac{10}{(1+r)^2}+L=10\frac{1+r}{r}$

違背協議之利潤為 ： $\tilde{\pi}=12+\frac{8}{1+r}+\frac{8}{(1+r)^2}+L=12+\frac{8}{r}$

當 $\pi^*>\tilde{\pi}\Leftrightarrow$ 可解得 $r<100\%$ ： 雙方會遵守協議。

2. 假設 A 與 B 兩家筆記型電腦公司均在考慮是否要生產 19 吋螢幕，兩家廠商的償付矩陣如下：

		B	
		生產	不生產
A	生產	10，10	15，12
	不生產	12，15	8，8

(A) 此遊戲有 Nash 均衡嗎？如果有，為何？

(B) 如果 A 是領導廠商，B 是跟隨廠商，其解為何？符合先動者優勢嗎？

ANS：

(A)

		B	
		生產	不生產
A	生產	10，10	15，$\boxed{12}$
	不生產	12，$\boxed{15}$	8，8

有兩個 Nash 均衡，為：(生產，不生產)、(不生產，生產)。

(B) A 公司先選擇「生產」，則 B 公司必然選擇「不生產」，則解為（生產，不生產）＝(15 , 12)，可看出先做決策的 A 公司可以獲得較高的利潤，所以符合先動者優勢。

延續上面之償付矩陣，請問若採取混合策略時，在 Nash 均衡下，兩家廠商的預期報酬為多少？

ANS：

令 p 表示 A 公司採取「生產」策略之機率；(1－p)表示採取「不生產」策略之機率。令 q 表示 B 公司採取「生產」策略之機率；(1－q)表示採取「不生產」策略之機率。

令E_A（生產）$=E_A$（不生產）

$$\Leftrightarrow q(10)+(1-q)15=q(12)+(1-q)8 \Leftrightarrow q^*=\frac{7}{9}$$

令E_B（生產）$=E_B$（不生產）

$$\Leftrightarrow p(10)+(1-p)15=p(12)+(1-p)8 \Leftrightarrow p^*=\frac{7}{9}$$

A 與 B 公司的報酬同為：

$$\frac{7}{9}\left(\frac{7}{9}\times 10+\frac{2}{9}\times 15\right)+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\times 12+\frac{2}{9}\times 8\right)=\frac{100}{9}$$

補充：重複無限次賽局均衡

假設市場上有 A、B 兩家廠商以 Bertrand 方式從事寡占競爭，雙方的定價與利潤分別為：

$$P_A = P_B = MC$$
$$\pi_A = \pi_B = 0$$

如果 A 廠商想要打破目前超額水準為零的局面，向 B 廠商提出一同合作來增加彼此利潤的提案，只要 B 廠商願意合作，雙方便能一同享有獨占定價的利潤，即：

$$P_A = P_B = P_m$$

$$\pi_A^c = \pi_B^c = \frac{\pi_m}{2}$$

但是在合作的情形下，如果有一家偷偷的把價格降低一點，便能擁有所有的市場利潤，但另一家則無法享受任何超額利潤，因此背叛的廠商所獲得的利潤為：

$$\pi^u = \pi_m - \Delta\pi$$

其中 $\Delta\pi$ 為背叛廠商因價格下降而減少獲得的利潤，由於假設價格下降的幅度相當的小，因此可以假設：

$$\Delta\pi \to 0$$
$$\Rightarrow \pi^u = \pi_m$$

雙方單期賽局的報酬矩陣為：

A 廠商 \ B 廠商	合作	不合作
合作	$\left(\frac{\pi_m}{2}, \frac{\pi_m}{2}\right)$	$(0, \pi_m)$
不合作	$(\pi_m, 0)$	$(0,0)$

然而，在單期下的賽局 Nash 均衡為(不合作,不合作)，因此如果只考慮合作一期的情形下，A、B 兩家廠商都有誘因選擇背叛對方而回到原先無超額利潤的情形。

然而如果將合作的期間拉長到無限期的情形下，是否有誘因合作呢？

AB 兩家廠商的合作協定如下：『一旦同意後便開始「永久性」的合作，一同享有市場中的超額利潤，但如果任何一方違反合作的協定時，從下一期開始便「永久性」地回復到 Bertrand 競爭狀態，且絕無轉圜的餘地。』

在考量是否有背叛的誘因時，不合作的利益為背叛當期所得到對方應得的利潤：

$$R = \frac{\pi_m}{2}$$

不合作的成本為未來各期中因背叛對方而減少得到的利潤：

$$C = \frac{\pi_m}{2} \cdot \frac{1}{(1+r)} + \frac{\pi_m}{2} \cdot \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{\pi_m}{2} \cdot \frac{1}{(1+r)^3} + \dots\dots\dots$$

$$= \frac{\pi_m}{2} \cdot \frac{\frac{1}{(1+r)}}{1 - \frac{1}{(1+r)}}$$

$$= \frac{\pi_m}{2} \cdot \frac{1}{r}$$

如果背叛協定可以多獲得的單期利益大於未來少賺得的利潤時，則任何一方會選擇背叛協定來增加自己的利潤：

$$R = \frac{\pi_m}{2} > C = \frac{\pi_m}{2} \cdot \frac{1}{r}$$

$$r > 1$$

亦即，除非在折現率 $r > 1$ 的情形下，廠商才有可能選擇違反合作協定，由於 $r > 1$ 發生的可能性不大，因此在未來折現率不超過 1 的情形下，可以預期雙方會永久性的持續保持合作。