Part 3 廠商理論

成本

一、 長期成本

隨堂 1. 已知偉力公司的生產函數為 $q=10L^{0.5}K^{0.5}$，且 w＝r＝10：

(A) 求等成本線方程式。

(B) 求邊際技術替代率函數。

(C) 等產量線會凸向原點嗎？

(D) 求條件要素需求函數。

(E) 求總成本、平均成本與邊際成本函數。

(F) 生產 10 單位的最低成本為多少？

ANS：

(A) C＝10L＋10K

(B) $MRTS_{LK}=K/L$

(C) L↑，K↓時，$MRTS_{LK}$ 下降，故等產量線凸向原點。

(D) $\begin{cases} \dfrac{K}{L}=\dfrac{10}{10} \\ q=10L^{0.5}K^{0.5} \end{cases} \Rightarrow L^*=K^*=0.1q$

(E) TC＝2q，AC＝MC＝2

(F) TC(10)＝2×10＝20

隨堂 2. 已知 w＝r＝1，請將下表空白處填入正確答案：

生產函數	$q=10L^{0.5}K^{0.5}$	q＝2L＋K	q＝Min{2L , K}	q＝Max{2L , K}
TC 函數				
AC 函數				
MC 函數				

ANS：

生產函數	$q=10L^{0.5}K^{0.5}$	q＝2L＋K	q＝Min{2L , K}	q＝Max{2L , K}
TC 函數	0.2q	0.5q	1.5q	0.5q
AC 函數	0.2	0.5	1.5	0.5
MC 函數	0.2	0.5	1.5	0.5

隨堂 3　已知高點公司可向大明研發公司購買下列兩種生產技術來生產產品，其中 A 技術權利金為 40 元、B 技術的權利金為 100 元，而這兩種技術的生產函數為：

技術 A：$q = Min\{L/2, K/4\}$　　技術 B：$q = Min\{L/4, K/2\}$

假設 $w = 1$，$r = 2$。

(A) 求分別購買兩種技術下，高點公司的總成本函數。

(B) 若公司生產 20 單位，應購買哪一種技術？

(C) 若公司生產 40 單位，應購買哪一種技術？

(D) 在產量低於多少時，應購買 A 技術？

（進階）

ANS：

(A) A 技術之成本函數(TC_A)＝生產成本＋權利金成本

生產成本：$q = L/2 = K/4 \Rightarrow L = 2q$，$K = 4q \Rightarrow C = 1 \times 2q + 2 \times 4q = 10q$

$TC_A = 10q + 40$

B 技術之成本函數(TC_B)＝生產成本＋權利金成本

生產成本：$q = L/4 = K/2 \Rightarrow L = 4q$，$K = 2q \Rightarrow C = 1 \times 4q + 2 \times 2q = 8q$

$TC_B = 8q + 100$

(B) $q = 20$，$TC_A = 240$，$TC_B = 260$，故應購買 A 技術。

(C) $q = 40$，$TC_A = 440$，$TC_B = 420$，故應購買 B 技術。

(D) 令 $TC_A < TC_B$，則 $q < 30$，即產量低於 30 單位，應購買 A 技術。

二、　短期成本

隨堂 4　已知偉力公司的生產函數為 $q=10L^{0.5}K^{0.5}$，且 $w=r=10$

但設 K 固定為 K_0，試回答下列問題：

(A) 求短期成本函數、變動成本函數及邊際成本函數。

(B) 如何由(A)的答案反推總成本函數。

ANS：

(A) $q=10L^{0.5}K^{0.5}\rightarrow L^{*}=q^2/100K$

$STC=10L^{*}+10K=(q^2/10K)+10K$

$AC=(q/10K)+(10K/q)$，$MC=(q/5K)$

(B) $\dfrac{\partial STC}{\partial K}=\dfrac{-q^2}{10K^2}+10=0\Rightarrow \tilde{K}=\dfrac{q}{10}$，代入STC函數中：

$$TC=STC(K=\tilde{K})=\frac{q^2}{10\times(q/10)}+10\frac{q}{10}=q+q=2q$$

隨堂 5. 當產量為 20 單位時，AC 與 AVC 的差為 10 元。請問當產量為 40 單位時，AC 與 AVC 的差為多少？

ANS：

$q=20$，$AC-AVC=AFC=10\rightarrow FC=AFC\times q=10\times 20=200$

$q=40$，$AC-AVC=AFC=FC/q=200/40=5$

隨堂 6. 已知邊際成本函數為 $MC=10q$，且固定成本為 100 元，求產量為 10 單位下之總成本？

ANS：

$$VC(10)=\int_0^{10}10q\,dq=5q^2\Big|_0^{10}=500\text{ ，}TC=VC+FC=500+100=600$$

隨堂 7. 假設短期成本函數為 $TC = q^3 - 12q^2 + q + 50$，且短期下的變動要素為勞動。回答下列問題：

(A) $q = 10$ 之 AFC＝？

(B) 產量為多少時，AVC＝MC？

(C) 產量超過多少時，AP_L 開始遞減？

(D) 產量超過多少時，MP_L 開始遞減？

ANS：

(A) $AFC = FC/q = 50/10 = 5$

(B) $AVC = q^2 - 12q + 1 \rightarrow dAVC/dq = 2q - 12 = 0 \rightarrow q = 6$

(C) 根據生產與成本的對偶性，知道當 AVC 遞增時，AP_L 遞減，故答案為 $q \geqq 6$。

(D) $MC = 3q^2 - 24q + 1 \rightarrow dMC/dq = 6q - 24 = 0 \rightarrow q = 4$，根據生產與成本的對偶性，知道當 MC 遞增時，$MP_L$ 遞減，故答案為 $q \geqq 4$。

三、 其他議題

短期生產成本

假設某家自動化生產的光碟機製造廠，目前共有四條生產線生產光碟機，每條生產線的機械設備費用為 25 百萬元，使用一年後即無殘值，而所僱用的工程師年薪為 1 百萬元，該製造商的生產函數如下：

$$L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}=Q$$

則廠商短期下(一年以內)的生產成本為(以百萬元為單位)：

$$STC=1\cdot L+25\cdot\overline{K}=L+25\cdot 4=L+100$$

製造商短期生產函數為：

$$L^{\frac{1}{2}}\overline{K}^{\frac{1}{2}}=2L^{\frac{1}{2}}=Q$$

$$L=\frac{1}{4}Q^{2}$$

因此廠商短期的生產成本可改寫為：

$$STC=\frac{1}{4}Q^{2}+100$$

其中，變動成本(TVC)為$\frac{1}{4}Q^{2}$，固定成本(TFC)為100。

其平均成本(SAC)與邊際成本(SMC)分別為：

$$SAC=\frac{STC}{Q}=\frac{1}{4}Q+\frac{100}{Q}$$

$$SMC=\frac{dSTC}{dQ}=\frac{1}{2}Q$$

當 SMC 與 SAC 相交時：

$$SAC=\frac{1}{4}Q+\frac{100}{Q}=SMC=\frac{1}{2}Q$$

$$Q=20$$

而 SAC 的最低點為：

$$\frac{dSAC}{dQ}=\frac{1}{4}-\frac{100}{Q^{2}}=0$$

$$Q = 20$$

我們可以觀察到 *SMC* 與 *SAC* 的交點正好為 *SAC* 的最低點。

長期生產決策

假設某家自動化生產的光碟機製造廠，目前共有四條生產線生產光碟機，每條生產線的機械設備費用為 25 百萬元，使用一年後即無殘值，而所僱用的工程師年薪為 1 百萬元，該製造商的生產函數(Q 單位為百萬)如下：

$$L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = Q$$

如果該製造商衡量今年度的存貨與訂單成長情形，擬訂下年度的生產計劃為 10 百萬台光碟機，且在今年會計年度結束時，四條生產線並無任何殘值，廠商可以決定重開生產線數目以因應其生產計劃，則該廠商之長期生產決策(一年以上)為：

$$Min\ \ C = 1 \cdot L + 25 \cdot K$$

$$\text{s.t.}\quad L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = Q = 10$$

根據生產最適條件：

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{1}{25}$$

$$L = 25K$$

代回等產量限制線：

$$L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 5K = Q = 10$$

$$K = \frac{Q}{5} = 2$$

$$L = 5Q = 50$$

可以得到該製造商未來一年只需要開兩條生產線與僱用五十名工程師便可以達到預期的生產目標。

從最適解的求解過程中，我們可以發現要素投入量與產量的關係為：

$$K = \frac{Q}{5}$$

$$L = 5Q$$

代回成本函數：

$$C = 1 \cdot L + 25 \cdot K = 1 \cdot (5Q) + 25 \cdot \left(\frac{Q}{5}\right) = 10Q$$

可從成本函數中計算出：

$$AC = MC = 10$$

可知該製造商的生產行為屬於固定長期平均成本，並不隨產量的增減而使平均成本有所變動。

長期與短期生產決策的關係

假設某家自動化生產的光碟機製造廠，目前共有四條生產線生產光碟機，每條生產線的機械設備費用為 25 百萬元，使用一年後即無殘值，而所僱用的工程師年薪為 1 百萬元，該製造商的生產函數(Q 單位為百萬)如下：

$$L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = Q$$

如果該製造商衡量今年度的存貨與訂單成長情形，擬訂下年度的生產計劃為 10 百萬台光碟機，若生產線無法變更時，為達到生產計劃：

$$L^{\frac{1}{2}} \overline{K}^{\frac{1}{2}} = 2L^{\frac{1}{2}} = Q = 10$$

$$\Rightarrow L = 25$$

短期總成本為：

$$STC = 1 \cdot 25 + 25 \cdot 4 = 125$$

如果廠商可以決定重開生產線數目以因應其生產計劃，則該廠商之長期生產決策(一年以上)為：

$$K = \frac{Q}{5} = 2$$

$$L = 5Q = 50$$

長期總成本為：

$$C = 1 \cdot 50 + 25 \cdot 2 = 100 < STC$$

在生產相同的產量下，長期所決定的最適生產要素組合，其生產成本會比短期決策來得低。因為在短期決策下，受限於既有的生產線數目，廠商被迫使用在長期之下並非最適生產要素組合，除非一開始給定的生產線數目即為長期最適數量，否則都會產生較高的總成本。

技術進步對生產決策的影響

假設光碟製造商之長期生產決策為：

$$Min\ \ C = 1 \cdot L + 25 \cdot K$$

$$\text{s.t.} \quad L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = Q$$

根據生產最適條件：

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{1}{25}$$

$$L = 25K$$

代回等產量限制線：

$$L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = 5K = Q$$

$$K = \frac{Q}{5}$$

$$L = 5Q$$

代回成本函數：

$$C = 1 \cdot L + 25 \cdot K = 10Q$$

如果光碟製造技術有了重大的突破，使廠商全面提升生產效率，因此生產函數變更為：

$$2L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = Q$$

長期生產決策為：

$$Min\ \ C = 1 \cdot L + 25 \cdot K$$

$$\text{s.t.} \quad 2L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = Q$$

根據生產最適條件：

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{1}{25}$$

$$L = 25K$$

代回等產量限制線：

$$2L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = 10K = Q$$

$$K = \frac{Q}{10}$$

$$L = \frac{5}{2}Q$$

代回成本函數：

$$C = 1 \cdot L + 25 \cdot K = 5Q$$

可以發現生產技術的提升，使得生產相同產量的要素投入只為先前的一半，也因此使得生產成本下降。

利潤極大化

假設光碟製造商之長期生產函數為：

$$L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = Q$$

廠商使用要素成本函數為：

$$\mathrm{T}C = 1 \cdot L + 25 \cdot K$$

光碟製造商之長期生產決策為：

$$Min\ \ \mathrm{TC} = 1 \cdot L + 25 \cdot K$$

$$\text{s.t.} \quad L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = Q$$

根據生產最適條件：

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{1}{25}$$

$$L = 25K$$

代回等產量限制線：

$$K = \frac{Q}{5}$$

$$L = 5Q$$

代回成本函數：

$$TC = 1 \cdot L + 25 \cdot K = 10Q$$

如果該光碟機廠商所面臨的需求函數為：

$$P = 210 - 2Q$$

則廠商追求利潤極大化決策為：

$$Max \quad \pi = TR(Q) - TC(Q) = (210 - 2Q)Q - 10Q$$

根據利潤極大化條件：

$$MR = 210 - 4Q = MC = 10$$
$$\Rightarrow Q = 50$$
$$P = 110$$

代回最適要素投入：

$$K = \frac{Q}{5} = 10$$
$$L = 5Q = 250$$

我們可以發現廠商追求的最終目的為利潤的極大，因此在作生產決策時，應先考量自己所面臨的市場需求與生產成本後，決定最適生產量$(Q = 50)$來達到利潤極大化的目標，之後，再以此生產量作為生產目標，決定最適的生產要素組合$(L = 250, K = 10)$，以求取生產成本的極小化。