

Part 3 廠商理論

生產

短期生產函數

隨堂 1. 請將下表空白處填滿：

K	L	q	AP _L	AP _K	MP _L
20	0	0			
20	5	20			
20	10	43			
20	15	57			
20	20	67			
20	25		3		

ANS :

K	L	q	AP _L	AP _K	MP _L
20	0	0	*	*	*
20	5	20	4	1	4
20	10	43	4.3	2.15	4.6
20	15	57	3.8	2.85	2.8
20	20	67	3.35	3.35	2
20	25	75	3	3.75	1.6

隨堂 2. 已知生產函數為 $q = 21L + 9L^2 - L^3$ ，試問：

(A) L 大於多少時，MP_L 開始遞減？

(B) L 等於多少時，TP 達最大？

(C) L 大於多少時，AP_L 開始遞減？

ANS :

(A) $MP_L = 21 + 18L - 3L^2 \rightarrow dMP_L / dL = 18 - 6L = 0 \rightarrow L = 3$

(B) 令 $MP_L = 0 \rightarrow L = 7$

(C) $AP_L = 21 + 9L - L^2 \rightarrow dAP_L / dL = 9 - 2L = 0 \rightarrow L = 4.5$

等產量曲線（長期）

隨堂 4. 若已知大龍公司僱用 10 個工人與 5 台機器時，工人的邊際產量為 5，生產量為 500 單位。請問資本的邊際產量為多少？

ANS :

$$500 = 10 \times 5 + 5 \times MP_K \rightarrow MP_K = 90$$

隨堂 5 請根據下列生產行為之敘述，寫出所對應之生產函數：

(A) 老王種桃子，可完全用 A 廠牌的肥料或完全用 B 廠牌的肥料，也可以混合著用。且已知每增加 1 單位 A 肥料會產生 5 個桃子，每增加 1 單位 B 肥料會產生 10 個桃子，而且這兩種肥料均不會影響另一種肥料之功效。

(B) 老楊生產麵包時，一定需要 2 個麵包師傅，搭配 1 台烤箱。

ANS :

$$(A) q = 5A + 10B$$

$$(B) q = \min\{L/2, K\}$$

請計算下列生產函數的替代彈性

$$(a) F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \quad (b) F(K, L) = 2K + L$$

$$\text{解答： 替代彈性 } \sigma = \frac{\% \Delta(K/L)}{\% \Delta MRTS_{LK}} = \frac{\Delta(K/L)}{\Delta MRTS_{LK}} \cdot \frac{MRTS_{LK}}{(K/L)}$$

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K}, MP_L = \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}, MP_K = \frac{1}{2} L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}$$

$$(a) MRTS_{LK} = \frac{K}{L}, \frac{\Delta(K/L)}{\Delta MRTS_{LK}} = 1$$

$$\sigma = 1 \times \frac{MRTS_{LK}}{(K/L)} = 1$$

$$(b) MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } \Delta MRTS_{LK} = 0$$

因為 $MRTS_{LK}$ 為一固定常數，所以

$$\sigma = \frac{\Delta(K/L)}{\Delta MRTS_{LK}} = \frac{MRTS_{LK}}{K/L} = \frac{\% \Delta(K/L)}{0} = \infty$$

Example 7: Cobb-Douglas 生產函數：

$$Q = f(L, K) = L^\alpha K^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$$

①產出彈性

勞動平均產量與勞動邊際產量為：

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^\alpha K^\beta}{L} = L^{\alpha-1} K^\beta$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1} K^\beta$$

同理，資本平均產量與資本邊際產量為：

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{L^\alpha K^\beta}{K} = L^\alpha K^{\beta-1}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta L^\alpha K^{\beta-1}$$

勞動產出彈性為：

$$\varepsilon^L = \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^\beta}{L^{\alpha-1} K^\beta} = \alpha$$

資本產出彈性為：

$$\varepsilon^K = \frac{MP_K}{AP_K} = \frac{\beta L^\alpha K^{\beta-1}}{L^\alpha K^{\beta-1}} = \beta$$

②生產力彈性

勞動與資本要素同時增加 ϕ 倍對生產函數的影響：

$$Q = f(\phi L, \phi K) = \phi^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta$$

生產力彈性為：

$$\varepsilon^\phi = \frac{\frac{dQ}{d\phi}}{\frac{Q}{\phi}} = \frac{\frac{dQ}{d\phi}}{\frac{Q}{\phi}} = \frac{(\alpha + \beta) \phi^{\alpha+\beta-1} L^\alpha K^\beta}{\frac{\phi^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta}{\phi}} = \alpha + \beta$$

或是經由勞動產出彈性與資本產出彈性的關係求解：

$$\varepsilon^\phi = \varepsilon^L + \varepsilon^K = \alpha + \beta$$

③替代彈性

邊際技術替代率為：

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha L^{\alpha-1} K^\beta}{\beta L^\alpha K^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L}$$

替代彈性為：

$$\varepsilon^{LK} = \frac{d \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d \ln(MRTS)} = \frac{d \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + d \ln\left(\frac{K}{L}\right)} = 1$$

因為 α 與 β 均為固定的常數，並不隨資本勞動比的變動而變動，故上式可以化簡。可以發現 **Cobb-Douglas** 形式生產函數，其替代彈性恆為一，並不因 α 與 β 的變動而有所改變。

隨堂 8. 請將下表空白處填入正確數字：

生產函數	$q=5LK$	$q=2L+3K$	$q = \text{Min}\{L, K\}$	$q=(0.2L^{-0.5}+0.8K^{-0.5})^{-2}$
邊際產量				
邊際技術替代率				
規模報酬				
產量彈性				
生產力彈性				
替代彈性				

ANS：

生產函數	$q=5LK$	$q=2L+3K$	$q = \text{Min}\{L, K\}$	$q=(0.2L^{-0.5}+0.8K^{-0.5})^{-2}$
邊際產量	$MP_L=5K$ $MP_K=5L$	$MP_L=2$ $MP_K=3$	折點無法微分	$MP_L = 0.2(\Delta)^{-3} L^{-1.5}$ $MP_K = 0.8(\Delta)^{-3} K^{-1.5}$ $\Delta=0.2L^{-0.5}+0.8K^{-0.5}$
邊際技術替代率	K/L	$2/3$	$1, 0, \infty$	$0.25\left(\frac{K}{L}\right)^{1.5}$
規模報酬	IRS	CRS	CRS	CRS
產量彈性	$\epsilon_L=\epsilon_K=1$	$\epsilon_L = \frac{2L}{2L+3K}$ $\epsilon_K = \frac{3K}{2L+3K}$	折點無法微分	$\epsilon_L = \frac{0.2L^{-0.5}}{\Delta}$ $\epsilon_K = \frac{0.8K^{-0.5}}{\Delta}$
生產力彈性	2	1	1	1
替代彈性	1	∞	0	$2/3$

投入與產出間的關係變化

隨堂 9 假設生產函數的型式為 $Q = 3K + 2L$ 。其中， K 為資本， L 為勞動，而 Q 為產出。考慮生產函數三個敘述：

- (1) 函數呈現固定規模報酬。
- (2) 函數呈現資本與勞動的邊際生產力遞減。
- (3) 函數呈現固定的技術替代率。

請選出正確的敘述

ANS: (1)和(3)正確，(2)不正確。

若 K 和 L 同時增加 λ 倍，成為 λK 和 λL ，則生產函數 $Q = 3K + 2L$

可寫成 $F(\lambda K, \lambda L) = 3(\lambda K) + 2(\lambda L) = \lambda(3K + 2L) = \lambda Q$

從上述得知，產出也增加 λ 倍，故生產函數為固定規模報酬。(1)為正確。

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = 2, MP_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K} = 3$$

所以 MP_L 和 MP_K 皆為固定，並沒有邊際產量遞減現象，(2)並不正確。

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{2}{3}$$

邊際技術替代率為一固定值，(3)是正確的。

隨堂 10 請判斷下列生產函數規模報酬的屬性：

(A) $q = (L^\alpha + K^\alpha)^\beta$

(B) $\ln q = 5 + 0.5 \ln L + 0.2 \ln K$

(C) $q = [\text{Min}\{aL, bK\}]^\alpha$

ANS :

(A) $F(\lambda L, \lambda K) = [(\lambda L)^\alpha + (\lambda K)^\alpha]^\beta = \lambda^{\alpha\beta} q$

$\alpha\beta = 1$: CRS , $\alpha\beta > 1$: IRS , $\alpha\beta < 1$: DRS

(B) 左右取「e」，得： $q = e^5 L^{0.5} K^{0.2} \Rightarrow$ DRS

(C) $F(\lambda L, \lambda K) = [\text{Min}(a\lambda L, b\lambda K)]^\alpha = \lambda^\alpha q$

$\alpha = 1$: CRS , $\alpha > 1$: IRS , $\alpha < 1$: DRS

