复习理解课本中最佳陷波滤波器进行图像恢复的过程，请推导出w(x,y)最优解的计算过程，即从公式

$$\frac{\partial\sigma^2(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial\omega(\mathrm{x},\mathrm{y})}=0$$

到

$$\omega(x,y)=\frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)}-\bar{g}(x,y)\bar{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\bar{\eta}^2(x,y)}$$

答：由于

$$\sigma^2(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\{[\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})]-[\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})-\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y}$$

$$=\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\{\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})-\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})[\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})]\}^2$$

则

$$\frac{\partial\sigma^2(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})}=\frac{\partial}{\partial\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})}\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\{\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})-\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})[\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\bar{\eta}(\mathrm{x}$$

由$\frac{\partial\sigma^2(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})}=0$得：

$$w(x,y)=\frac{\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}[\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})-\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})+\overline{\mathrm{g}}(}{\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\left[\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})^2+\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})^2-2\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right]^2}$$

由于

$$\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})=\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\bar{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

$$\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})=\frac{1}{(2\mathrm{a}+1)(2\mathrm{~b}+1)}\sum_{\mathrm{s}=-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{t}=-\mathrm{b}}^{\mathrm{b}}\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

得到

$$\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{\overline{\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})}-\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\eta(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})-\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\bar{\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\bar{\eta}^2(\mathrm{x},\mathrm{y})-2\bar{\eta}^2(\mathrm{x},\mathrm{y})+\eta^2(\mathrm{x}+\mathrm{s},\mathrm{y}+\mathrm{t})}$$
$$=\frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)}-\bar{g}(x,y)\bar{\eta}(x,y)}{\bar{\eta}^2(x,y)-\bar{\eta}^2(x,y)}$$