2、请根据课本中Z变换的定义，证明如下结论。

(1)若 $x(n)$ 的Z变换为 $X(z)$ ，则 $(-1)^n x(n)$ 的Z变换为 $X(-z)$

(2) 若 $x(n)$ 的Z变换为 $X(z)$ ，$x(-n)$ 的Z变换为 $X(1/z)$

(3) 若 $x(n)$ 的Z变换为 $X(z)$ ，课本280页公式7.1.2

$$x_{\text{down}}(n) = x(2n) \Leftrightarrow X_{\text{down}}(z) = \frac{1}{2}\left[X\left(z^{1/2}\right) + X\left(-z^{1/2}\right)\right]$$

解：

(1)已知 $x(n)$ 的Z-变换如下：

$$\mathrm{X(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(n)z^{-n}}$$

则 $(-1)^n x(n)$的Z-变换如下：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{(-1)^n x(n) z^{-n}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{(-1)^{-n} x(n) z^{-n}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(n)(-z)^{-n}} = \mathrm{X(-z)}$$

(2) $x(-n)$ 的Z-变换如下：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[x(-n)]z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty}[x(m)]z^{m} = \sum_{-\infty}^{\infty}[x(m)]\left(z^{-1}\right)^{-m} = \sum_{-\infty}^{\infty}[x(n)]\left(z^{-1}\right)^{-n}$$

即其z变换为$X(z^{-1})$

(3)$\sum_{-\infty}^{\infty} x(2n)z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m)z^{-\frac{m}{2}}$,此时m为偶数，取 $x(m) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^m)\, x(m)$

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} x(m)z^{-\frac{m}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1 + (-1)^m)\, x(m)z^{-\frac{m}{2}} \\
&= \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(m)z^{-\frac{m}{2}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^m x(m)z^{-\frac{m}{2}} \\
&= \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(m)z^{-\frac{m}{2}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(m)\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)^{-m} \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\left[X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]
\end{aligned}$$