4、假设课本中给出完美重建滤波器的正交族对应的三个滤波器间的关系式是正确的，并以此为基础，推导 $h_0, h_1$的关系。

解：

根据输入的无失真重建，经过整理变换后得到

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(Z) \end{bmatrix} = \frac{2}{|H_m(z)|}\begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix}$$

对于FIR滤波器，调制矩阵的行列式是一个纯延时，即 $|\mathrm{H_m(z)}| = \alpha z^{-(2k+1)}$ ，因此交叉调制的准确形式是 $\alpha$ 的函数，$z^{-(2k+1)}$ 可以被认为是任意的，因为只会改变滤波器的群延时。下面在 $\alpha$ 取2或-2时进行下述讨论：

$\alpha$=2:

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n), \quad g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n), \quad g_1(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n)$$

所以：

$$\begin{aligned} & g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n) = (-1)^n (-1)^{2K-1-n} h_1(2K-1-n) \\ & \Rightarrow h_0(n) = (-1)^{2K-n} h_1(2K-1-n) = (-1)^n h_1(2K-1-n) \end{aligned}$$

$\alpha$=-2：

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n), \quad g_1(n) = (-1)^n h_0(n), \quad g_1(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n)$$

所以：

$$\begin{aligned} & g_1(n) = (-1)^n h_0(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n) = (-1)^n (-1)^{2K-n} h_1(2K-1-n) \\ & \Rightarrow h_0(n) = (-1)^{2K-n} h_1(2K-1-n) = (-1)^n h_1(2K-1-n) \end{aligned}$$

综上，

$$h_0(n) = (-1)^n h_1(2K-1-n)$$