数字图像处理

II

王伟强

中国科学院大学计算机科学与技术学院

内容大纲

尺度函数

- 现在考虑由平方可积函数通过整数平移和二进制尺度缩放构成的函数 $\varphi_{j,k}(x)$ 组成的展开函数集合，即
$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$$
其中 $j, k \in \mathbf{Z}$ 且 $\varphi_{j,k}(x) \in L^2(R)$。
- 此时 k 决定了 $\varphi_{j,k}(x)$ 在x轴上的位置， j 决定了 $\varphi_{j,k}(x)$ 的宽度，即沿x轴的宽或者窄的程度，而 $2^{j/2}$ 控制其高度或者幅度。
- $\varphi_{j,k}(x)$ 被称为尺度函数。通过选择适当的 $\varphi(x)$，$\{\varphi_{j,k}(x)\}$可以张成跨度 $L^2(R)$，即所有可测量的平方可积函数的集合。

尺度函数

- 为 j 赋一个定值，即 $j = j_0$ ，则展开函数集合$\{\varphi_{j_0,k}(x)\}$是$\{\varphi_{j,k}(x)\}$ 的一个子集。我们将该子空间定义为：
$$V_{j_0} = \overline{Span\{\varphi_{j_0,k}(x)\}}$$
- 由于 V_{j_0} 是不同 k 值对应函数集 $\varphi_{j_0,k}(x)$ 的一个跨度， 如果 $f(x) \in V_{j_0}$，则它可写成：
$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_{j_0,k}(x)$$
- 一般地，对于特定的j，我们将对应的子空间表示为
$$V_j = \overline{Span\{\varphi_{j,k}(x)\}}$$
- 我们将在下面的例子中看到：增加 j 将增加 V_j 的大小，允许将具有刻画较小变化或较细细节函数包含在该子空间中。

一个例子

- 考虑单位高度、单位宽度的尺度函数(Haar [1910])

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

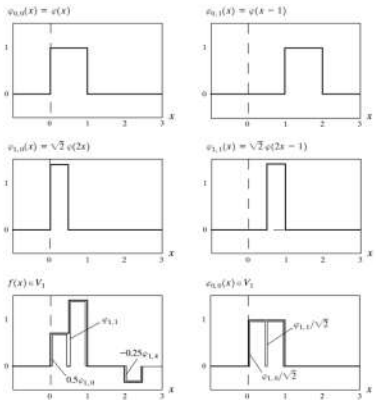


FIGURE 7.9 Haar scaling functions in V_0 in V_1.

多分辨率分析的四个基本要求

- 尺度函数对它的整数平移对应的函数是正交的。
  - ✓ 哈尔函数被称为是紧支撑的，意味着除了称为支撑域有限区间外，函数值都为0。
  - ✓ 必须注意，当尺度函数的支撑域大于1时，整数平移函数间的正交性将变得更加难于被满足。
- 低尺度尺度函数张成的子空间包含于高尺度尺度函数张成的子空间内。

$$V_{-\infty} \subset ... \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_\infty$$

- 唯一包含在所有 V_j 中的函数是 $f(x) = 0$。

$$V_{-\infty} = 0$$

- 任何函数都可以以任意精度表示。

$$V_\infty = L^2(R)$$

尺度函数系数

- 子空间 V_j 的展开函数可以被表述为子空间 V_{j+1}的展开函数的加权和：

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \varphi_{j+1,n}(x)$$

- 将变量 α 改写成 $h_\varphi(n)$，上式变成：

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n h_\varphi(n) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{(j+1)}x - n)$$

- 由于 $\varphi(x) = \varphi_{0,0}(x)$，可得到更简单的无下标表达式：

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)}$$

该式中 $h_\varphi(n)$ 称为尺度函数系数，h_φ 为尺度向量。该等式被称为精细化方程、MRA方程或者扩张方程。它表示任意子空间的展开函数都可以从它们自身的双分辨率副本中得到，即从相邻较高分辨率空间中得到。

尺度函数的例子

- 哈尔函数的尺度函数系数为：

$$h_\varphi(0) = h_\varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- 因此MRA方程为：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2}\varphi(2x)] + \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2}\varphi(2x-1)]$$

- 化简可得：

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$$

小波函数

- 给定了尺度函数，能够定义对应的小波函数$\psi(x)$。利用它的整数平移及其二进制尺度缩放所构造的函数集，可以张成相邻两尺度子空间的差异，即 V_j 与 V_{j+1}。
- 定义小波集合 $\psi_{j,k}(x)$ ：

$$\boxed{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)}$$

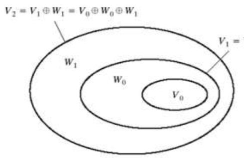


FIGURE 7.11 The relationship between scaling and wavelet function spaces.

- 类似于尺度函数，我们可以定义小波函数子空间：

$$W_j = \overline{Span_k\{\psi_{j,k}(x)\}}$$

- 注意：如果 $f(x) \in W_j$ ，我们有：

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

尺度子空间和小波子空间的关系

- 尺度和小波函数子空间的关系可由下式描述：

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

其中 $\oplus$ 表示空间并集（类似于集合并集）？？

- V_{j+1} 中 V_j 的正交补集是 W_j ，且 V_j 中的所有成员对于 W_j 中的所有成员都正交，即

$$\langle \varphi_{j,k}(x), \psi_{j,l}(x) \rangle = 0$$

对任意 $j, k, l \in \mathbf{Z}$

- 现在可将所有可测度的平方可积函数空间表示如下：

$$L^2(R) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots$$

or

$$L^2(R) = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots$$

or

$$L^2(R) = \ldots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots$$

小波函数

- 另外，我们有一般性的结果：

$$L^2(R) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \ldots$$

其中j_0 为任意的起始尺度

- 由于小波空间存在于由相邻较高分辨率尺度函数张成的空间中，所以任何小波函数可以表示成平移的双倍分辨率尺度函数的加权和：

$$\boxed{\psi(x) = \sum_n h_\psi(n)\sqrt{2}\varphi(2x-n)}$$

其中 $h_\psi(n)$ 称为小波函数系数，h_ψ 称为小波向量。

- 利用小波函数与尺度函数构成正交补空间，以及整数平移小波函数彼此正交的条件，可以证明尺度向量与小波向量指尖具有如下关系：

$$\boxed{h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(2k-1-n)}$$

小波函数示例

- 对于哈尔小波，对应的小波向量是

$h_\psi(0) = (-1)^0 h_\varphi(1-0) = 1/\sqrt{2}$ and
$h_\psi(1) = (-1)^1 h_\varphi(1-1) = -1/\sqrt{2}$,

- 因此，哈尔小波方程是:

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$$

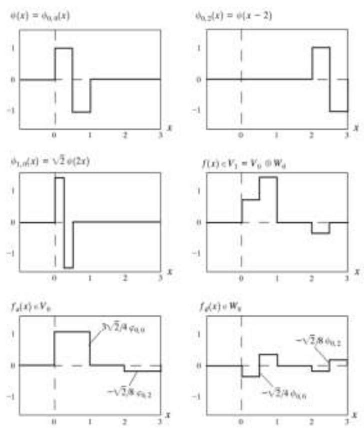


FIGURE 7.12 Haar wavelet functions in W_0 and W_1.

内容大纲

一维小波变换

- 对于函数 $f(x)$，我们利用尺度函数与小波函数对其展开表示：

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k)\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d_j(k)\psi_{j,k}(x)$$

其中 j_0 是任意起始尺度。$c_{j_0}(k)$ 通常称为近似或尺度系数，$d_j(k)$ 称为细节或小波系数。

- 如果展开函数形成了一个正交基或者紧框架（通常情况下是这样的），展开系数计算如下：

$$c_{j_0}(k) =< f(x), \varphi_{j_0,k}(x) >= \int f(x)\varphi_{j_0,k}(x)dx$$

$$d_j(k) =< f(x), \psi_{j,k}(x) >= \int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$$

一维小波变换示例

- 考虑如下简单函数 $y = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

使用哈尔小波计算展开系数来表示它。

解：令 $j_0 = 0$，我们有

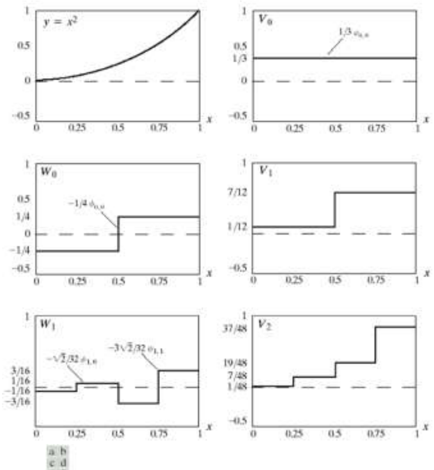
$$c_0(0) = \int_0^1 x^2\varphi_{0,0}(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2\psi_{0,0}(x)dx = \int_0^{0.5} x^2dx - \int_{0.5}^1 x^2dx = -\frac{1}{4}$$

$$d_1(0) = \int_0^1 x^2\psi_{1,0}(x)dx = \int_0^{0.25} x^2\sqrt{2}dx - \int_{0.25}^{0.5} x^2\sqrt{2}dx = -\frac{\sqrt{2}}{32}$$

$$d_1(1) = \int_0^1 x^2\psi_{1,1}(x)dx = \int_{0.5}^{0.75} x^2\sqrt{2}dx - \int_{0.75}^{1} x^2\sqrt{2}dx = -\frac{3\sqrt{2}}{32}$$

一维小波变换示例



一维离散小波变换

- 小波序列展开将一个连续变量函数映射成一个系数序列。如果待展开函数是一个数字序列，就像连续函数的抽样值，获得最终系数的计算就称为离散小波变换(DWT)。
- 离散小波变换对的计算过程定义如下：

$$W_\varphi(j_0,k)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_x f(x)\varphi_{j_0,k}(x)$$
$$W_\psi(j,k)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_x f(x)\psi_{j,k}(x)$$

其中 $j\geq j_0$ ，另外反变换为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_k W_\varphi(j_0,k)\varphi_{j_0,k}(x)+\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k W_\psi(j_0,k)\psi_{j,k}(x)$$

这里，$f(x),\varphi_{j_0,k}(x)$ 与 $\psi_{j,k}(x)$ 是离散变量 $x=0,1,\ldots,M-1$ 的函数

一维离散小波变换计算的例子

- 考虑四点的离散函数：
  $f(0)=1,f(1)=4,f(2)=-3,\ f(3)=0$ 。我们将使用哈尔尺度和小波函数，并假定四个采样值分布在基函数的支撑域[0，1]上。
  取 $j_0=0$ ，离散小波变换系数可通过下式计算：

$$W_\varphi(0,0)=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{3}f(x)\varphi_{0,0}(x)=\frac{1}{2}[1\cdot1+4\cdot1-3\cdot1+0\cdot1]=1$$
$$W_\psi(0,0)=\frac{1}{2}[1\cdot1+4\cdot1-3\cdot(-1)+0\cdot(-1)]=4$$
$$W_\psi(1,0)=\frac{1}{2}[1\cdot\sqrt{2}+4\cdot(-\sqrt{2})-3\cdot0+0\cdot0]=-1.5\sqrt{2}$$
$$W_\psi(1,1)=\frac{1}{2}[1\cdot0+4\cdot0-3\cdot\sqrt{2}+0\cdot(-\sqrt{2})]=-1.5\sqrt{2}$$

- 接下来我们通过反变换来重建原来的函数：

$$f(x)=\frac{1}{2}[W_\varphi(0,0)\varphi_{0,0}(x)+W_\psi(0,0)\psi_{0,0}(x)++W_\psi(1,0)\psi_{1,0}(x)+W_\psi(1,1)\psi_{1,1}(x)]$$
$$f(0)=\frac{1}{2}[1\cdot1+4\cdot1-1.5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1.5\sqrt{2}\cdot0]=1$$

一维连续小波变换

- 连续的平方可积函数 $f(x)$ 的连续小波变换与实数值的小波 $\psi(x)$的关系如下

$$W_\psi(s,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi_{s,\tau}(x)dx$$

其中 $\psi_{s,\tau}(x)=\frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{x-\tau}{s})$ ，s 和 τ 分别称为尺度和平移参数

- 给定 $W_\psi(s,\tau)$，$f(x)$ 可以通过连续小波反变换求得：

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_\psi(s,\tau)\frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2}d\tau ds$$

其中 $C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Psi(u)|^2}{|u|}du$ ，$\Psi(u)$ 是 $\psi(x)$ 的傅立叶变换

连续与离散小波变换的比较

- 连续变换参数 τ 替代了整数平移参数 k 。
- 连续尺度参数 s 与二进制尺度参数 2^j 成类似反比关系。
- 连续小波变换类似于序列展开或离散小波变换，只是开始尺度 $j_0=-\infty$ 因此函数表示中只包含小波项。
- 与离散小波变换相似，连续小波变换可以看做产生一个变换系数的集合 $W_\psi(s,\tau)$，它度量了 $f(x)$ 和基函数集 $\psi_{s,\tau}(x)$ 的相似性。 但是，在连续情况下两个集合都是无穷的。

连续小波变换的例子： 墨西哥草帽小波

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\pi^{-1/4})(1 - x^2)e^{x^2/2}$$

- 由于其独特波形而得名。
- 它与高斯概率函数的二阶导数成正比，均值为零，是紧支撑的。
- 虽然满足连续可逆变换存在的容许性要求，但没有相关的尺度函数，且变换不能产生正交分析。
- 它最显著的特性是它的对称性和显示表达的存在性。

连续小波变换的例子： 墨西哥草帽小波

- 下图中连续一维函数是两个墨西哥草帽小波的和：

$$f(x) = \psi_{1,10}(x) + \psi_{6,80}(x)$$

a b
c d

FIGURE 7.14 The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous one-dimensional function (a).