3、观察如下所示图像。右边的图像这样得到：(a)在原始图像左边乘以(-1)^(x+y)；(b) 计算离散傅里叶变换(DFT); (c) 对变换取复共轭; (d) 计算傅里叶反变换; (d) 结果的实部再乘以(-1)^(x+y)。(用数学方法解释为什么会产生右图的效果。)

(a) $f_a(x, y) = (-1)^{(x+y)} f(x, y)$

(b) $\mathrm{DFT}(f_a(x, y)) = \mathrm{DFT}(e^{j\pi(x+y)} f(x, y)) = \mathrm{DFT}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\mathrm{u}0\mathrm{x}/\mathrm{M}+\mathrm{v}0\mathrm{y}/\mathrm{N})} f(x, y)) = F\ (\ u - M/2, y - N/2\ )$

(c)由共轭对称性：$\mathrm{F}^*\left(\mathrm{u} - \frac{\mathrm{M}}{2}, \mathrm{v} - \frac{\mathrm{N}}{2}\right) = \mathrm{F}\left(-\left(\mathrm{u} - \frac{\mathrm{M}}{2}\right), -\left(\mathrm{v} - \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\right)$

(d)由傅里叶的伸缩性质 $f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$：

$\mathrm{IDFT}\left(\mathrm{F}\left(-\left(\mathrm{u} - \frac{\mathrm{M}}{2}\right), -\left(\mathrm{v} - \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\right)\right) = (-1)^{-(\mathrm{x}+\mathrm{y})}\mathrm{f}(-\mathrm{x}, -\mathrm{y})$

(e)结果：$f(x, y) = (-1)^{x+y}(-1)^{-(x+y)} f(-x, -y) = f(-x, -y)$

即相对于原图中心对称。