数字图像处理

第九讲 小波变换与图像处理（I）

王伟强

中国科学院大学计算机科学与技术学院

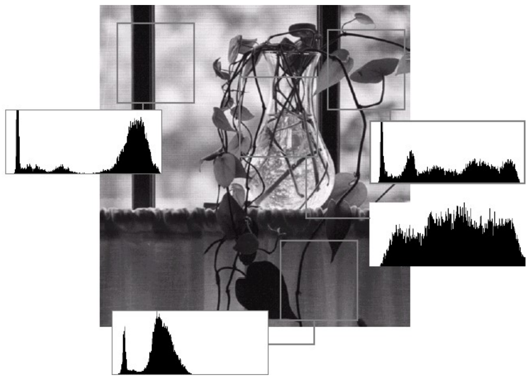
内容大纲

背景

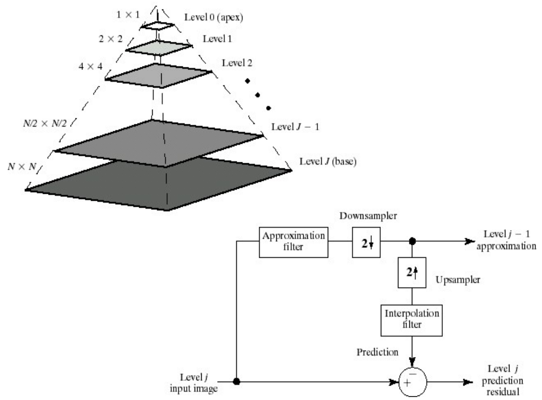
- 尽管傅立叶变换自上世纪50年代以来一直是变换域图像处理的基石，但90年代出现的一种新的变换（小波变换）成为一种新的流行信号处理工具。
- 与傅立叶变换(其基础函数是正弦曲线)不同，小波变换基于一些称作小波的小型波，它具有变化的频率和有限的持续时间。
- 若把图像看作是一个乐谱，小波变换不仅可揭示演奏的音符(或频率)，而且能揭示何时演奏；而傅里叶变换只能提供音符或频率信息。
- 小波变换常与多分辨理论联系在一起。多分辨率理论融合和统一了多个领域的技术，包括信号处理的子带编码、数字语音识别的正交镜像滤波和金字塔形图像处理。

背景

FIGURE 7.1 A natural image and its local histogram variations.



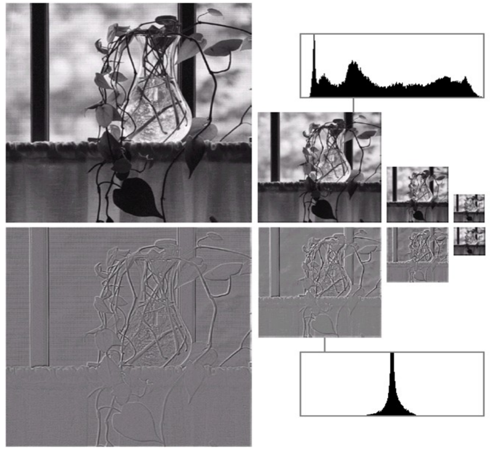
图像金字塔



a
b

FIGURE 7.2 (a) A pyramidal image structure and (b) system block diagram for creating it.

图像金字塔



a
b

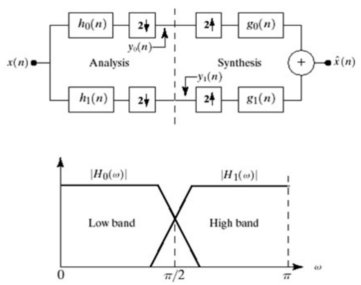
FIGURE 7.3 Two image pyramids and their statistics: (a) a Gaussian (approximation) pyramid and (b) a Laplacian (prediction residual) pyramid.

子带编码

- 子带编码

a
b

FIGURE 7.4 (a) A two-band filter bank for one-dimensional subband coding and decoding, and (b) its spectrum splitting properties.



子带编码

- Z变换

$$X(z) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$ ，其中z 是一个复变量。

- 信号下采样的Z变换

$$x_{down}(n) = x(2n) \Leftrightarrow X_{down}(z) = \frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})]$$

- 信号上采样的Z变换

$$x^{up}(n) = \begin{cases} x(n/2) & , n = 0, 2, 4, \ldots \\ 0 & , otherwise \end{cases} \Leftrightarrow X^{up}(z) = X(z^2)$$

- 因此，一个信号经下采样与上采样后对应信号的Z变换为

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}[X(z) + X(-z)]$$

其中 $$\begin{cases} \hat{x}(n) = Z^{-1}[\hat{X}(z)] \\ Z^{-1}[\hat{X}(-z)] = (-1)^n \hat{x}(n) \end{cases}$$

子带编码

- 一个双子带编码和解码系统表示为：

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}G_0(z)[H_0(z)X(z)+H_0(-z)X(-z)] \\ &+\frac{1}{2}G_1(z)[H_1(z)X(z)+H_1(-z)X(-z)]\end{aligned}$$

其中滤波器 $h_0(n)$ 的输出由下述变换对定义：

$$h_0(n)*x(n)=\sum_k h_0(n-k)x(k) \Leftrightarrow H_0(z)X(z)$$

- 整理上式，得：

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= \frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)]X(z) \\ &+\frac{1}{2}[H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)]X(-z)\end{aligned}$$

子带编码

- 为了对输入进行无失真重建，我们可施加如下条件：

$$H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)=0$$
$$H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)=2$$

- 可将上式合并为一个矩阵表达形式：

$$[G_0(z)\quad G_1(z)]\mathbf{H}_m(z)=[2\quad 0]$$

其中分析调制矩阵 $H_m(z)$ 为： $\mathbf{H}_m(z)=\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z)\end{bmatrix}$

- 假定 $H_m(z)$ 是非奇异矩阵，可得：

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z)\end{bmatrix}=\frac{2}{det(\mathbf{H}_m(z))}\begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z)\end{bmatrix}$$

完美重建滤波器组(PCFB)的特性

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z)\end{bmatrix}=\frac{2}{det(\mathbf{H}_m(z))}\begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z)\end{bmatrix}$$

- 上式告诉我们 $G_0(z)$ 是 $H_1(-z)$ 的函数， $G_1(z)$ 是 $H_0(-z)$ 的函数。因此分析与合成滤波器是交叉调制的。
- 对于有限脉冲响应滤波器(Finite Pulse Response Filter, FIR)，分析调制矩阵 $\mathbf{H}_m(z)$ 的行列式值是一个纯延时（参考Vetterli and Kovacevic [1995]），即 $det(\mathbf{H}_m(z))=\alpha z^{-(2k+1)}$
- 若我们忽略掉对应 $z^{-(2k+1)}$ 的时间延迟，且令 $\alpha=2$，对最上面的等式的两边取反Z变换，可得

$$g_0(n)=(-1)^n h_1(n)$$
$$g_1(n)=(-1)^{n+1} h_0(n)$$

完美重建滤波器组(PCFB)的特性 ：交叉调制

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z)\end{bmatrix}=\frac{2}{det(\mathbf{H}_m(z))}\begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z)\end{bmatrix} \qquad det(\mathbf{H}_m(z))=\alpha z^{-(2k+1)}$$

- 若令 $\alpha=-2$，则结果表达式的符号取反，这时

$$g_0(n)=(-1)^{n+1} h_1(n)$$
$$g_1(n)=(-1)^n h_0(n)$$

- 因此，有限脉冲响应合成滤波器是分析滤波器的交叉调制版本并且有且只有一个与分析滤波器方向相反。

完美重建滤波器组(PCFB)的特性 ： 双正交性

- 现在我们展示分析和合成滤波器的另一个重要性质 ： 双正交性。
- 令 $P(z)$ 表示低通分析滤波器和合成滤波器传递函数的乘积，有

$$P(z) = G_0(z)H_0(z) = \frac{2}{det(\mathbf{H}_m(z))}H_0(z)H_1(-z)$$

- 由于 $det(\mathbf{H}_m(z)) = -det(\mathbf{H}_m(-z))$ ，乘积 $G_1(z)H_1(z)$ 同样可以被定义为：

$$G_1(z)H_1(z) = P(-z) = G_0(-z)H_0(-z)$$

- 因此，$G_1(z)H_1(z) = \frac{-2}{det(\mathbf{H}_m(z))}H_0(-z)H_1(z) = P(-z)$ 。如果我们将其代入完美重建方程的第二个约束等式，可得：

$$G_0(z)H_0(z) + G_0(-z)H_0(-z) = 2$$

完美重建滤波器组(PCFB)的特性 ： 双正交性

- 对于等式 $G_1(z)H_1(z) = P(-z) = G_0(-z)H_0(-z)$ 的两边进行反Z变换可得：

$$\sum_k g_0(k)h_0(n-k) + (-1)^n \sum_k g_0(k)h_0(n-k) = 2\delta(n)$$

- 由于奇次方项相互抵消，上式可化简为

$$\sum_k g_0(k)h_0(2n-k) =< g_0(k), h_0(2n-k) >= \delta(n)$$

- 同理可得： $< g_1(k), h_1(2n-k) >= \delta(n)$

$$< g_0(k), h_1(2n-k) >= 0$$

$$< g_1(k), h_0(2n-k) >= 0$$

- 我们还可以得到更具普遍意义的表达式：

$$< h_i(2n-k), g_j(k) >= \delta(i-j)\delta(n) \qquad i,j = \{0,1\}$$

完美重建滤波器组(PCFB)的特性 ： 双正交性

- 满足下式条件的滤波器组称为具有双正交性：

$$< h_i(2n-k), g_j(k) >= \delta(i-j)\delta(n) \qquad i,j = \{0,1\}$$

- 所有两频段实系数的完美重建滤波器组的分析和综合滤波器的冲激响应服从双正交约束。
- 双正交FIR滤波器的例子包括双正交spline族(Cohen, Daubechies和Feauveau[1992])和双正交coiflet族 (Tian 和 wells[1995])。

完美重建滤波器组(PCFB)的通解

- PCFB的通解由下表给出：

Filter	QMF	CQF	Orthonormal
$H_0(z)$	$H_0^2(z) - H_0^2(-z) = 2$	$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0^2(-z)H_0(-z^{-1}) = 2$	$G_0(z^{-1})$
$H_1(z)$	$H_0(-z)$	$z^{-1}H_0(-z^{-1})$	$G_1(z^{-1})$
$G_0(z)$	$H_0(z)$	$H_0(z^{-1})$	$G_0(z)G_0(z^{-1}) + G_0(-z)G_0(-z^{-1}) = 2$
$G_1(z)$	$-H_0(-z)$	$zH_0(-z)$	$-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})$

TABLE 7.1 Perfect reconstruction filter families.

- 虽然它们都满足双正交要求，但各自的求解方式不同，定义的可完美重建的滤波器类也不同。
- 每个类中都根据一定规格设计了一个“原型”滤波器，而其他滤波器由原型计算产生。

完美重建滤波器组(PCFB)的通解

- 表7.1是来自滤波器组文献的经典结果。正交镜像滤波器(QMF) 和共轭正交滤波器 (CQF)，正交滤波器均被用于后面快速小波变换的开发。
- 除了双正交性外，完美重建滤波器组的正交性定义为：

$$< g_i(n), g_j(n+2m) >= \delta(i-j)\delta(m) \quad i,j=\{0,1\}$$

- 可见，G_1与低通综合滤波器G_0的联系在于调制、时域反转或奇数平移。此外， H_1 和 H_0 分别是相应综合滤波器 G_0 和 G_1 的时域反转。

Orthonormal
$G_0(z^{-1})$
$G_1(z^{-1})$
$G_0(z)G_0(z^{-1}) + G_0(-z)G_0(-z^{-1}) = 2$
$-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})$

TABLE 7.1 Perfect reconstruction filter families.

- Z变换的另外两个重要性质

$$x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1}), \quad x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(z)$$

完美重建滤波器组(PCFB)的通解

- 从表7.1的第3列的各个等式两边取反Z变换，可得

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n)$$

$$h_i(n) = g_i(2K-1-n), i=\{0,1\}$$

其中 h_0, h_1, g_0, g_1 是所定义的正交滤波器的单位脉冲响应。

Orthonormal
$G_0(z^{-1})$
$G_1(z^{-1})$
$G_0(z)G_0(z^{-1}) + G_0(-z)G_0(-z^{-1}) = 2$
$-z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})$

TABLE 7.1 Perfect reconstruction filter families.

- 正交滤波器的例子包括有 Smith与Barnwell滤波器，Daubechies滤波器等

用于图像的二维子带滤波器

- 表 7.1 中的一维滤波器也可用于图像处理的二维可分离滤波器。

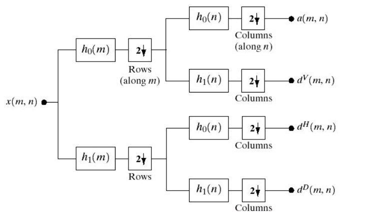
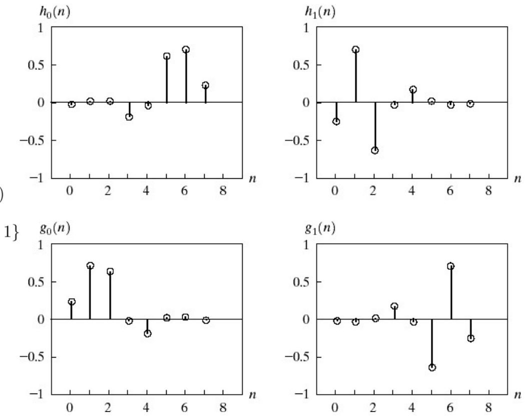


FIGURE 7.5 A two-dimensional, four-band filter bank for subband image coding.

- 图7.5中滤波后的输出结果 $a(m,n), d^V(m,n), d^H(m,n)$ 和 $d^D(m,n)$ 分别称为图像的近似值子带、垂直细节子带、水平细节子带和对角线细节子带。
- 一个或者多个这样的子带可被进一步分为4个更小的子带，以此类推。

完美重建滤波器的例子： Daubechies正交滤波器

FIGURE 7.6 The impulse responses of four 8-tap Daubechies orthonormal filters.



$$g_1(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n)$$

$$h_i(n) = g_i(2K-1-n), i=\{0,1\}$$

完美重建滤波器的例子： 花瓶图像的四子带分解

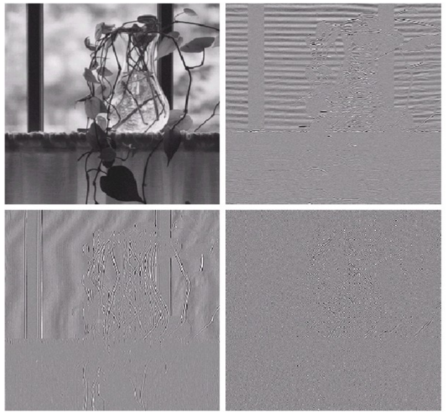


FIGURE 7.7 A four-band split of the vase in Fig. 7.1 using the subband coding system of Fig. 7.5.

哈尔变换

- 哈尔变换(Haar Transform)的基函数是众所周知的最古老也最简单的正交小波。
- 哈尔变换本身具有对称性和可分离性，可以用下述矩阵形式表达：

$$\mathbf{T} = \mathbf{HFH}^{\mathrm{T}}$$

其中 F 是一个$N \times N$图像矩阵，H 是 $N \times N$ 的变换矩阵，T是 换的结果矩阵。

- 变换矩阵 H 包含哈尔基函数 $h_k(z)$，它们定义在连续闭区间 $z \in [0,1]$ 上，其中 $k = 0, ..., N-1$ 且 $N = 2^n$ 。
- 为了生成矩阵H ，定义整数 $k = 2^p + q - 1$ ，这里 $0 \le p \le n-1$ 且当 p=0 时，q=0 or 1；当 $p \neq 0$ 时，$1 \le q \le 2^p$ 。则哈尔基函数

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & (q-1)/2^p \le z \le (q-0.5)/2^p \\ -2^{p/2}, & (q-0.5)/2^p \le z \le q/2^p \\ 0, & otherwise, z \in [0,1] \end{cases}$$

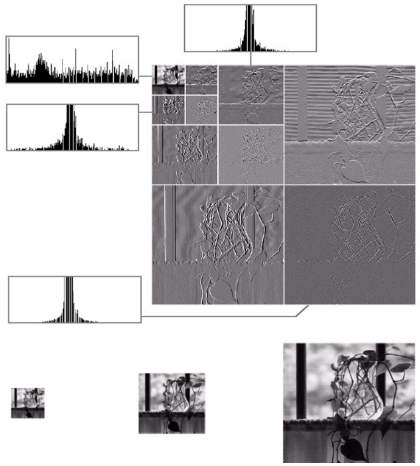
哈尔变换

- 当N=8时，对应的 k, q, p 值为：

K	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0	0	1	1	2	2	2	2
Q	0	1	1	2	1	2	3	4

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

采用哈尔基函数的离散小波变换



a
b c d

FIGURE 7.8 (a) A discrete wavelet transform using Haar basis functions. Its local histogram variations are also shown; (b)–(d) Several different approximations (64 × 64, 128 × 128, and 256 × 256) that can be obtained from (a).

多分辨率分析（Multi-resolution analysis ,MRA）

- 在多分辨率展开(MRA)中，尺度函数被用于建立某一函数或图像的一系列近似值，而被称为小波的函数用于对相邻近似值之间的差异进行编码。
- 信号或函数 $f(x)$ 常可分解为一系列展开函数的线性组合，即

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

- 如果这种展开是唯一的，也就是说对任何指定的 $f(x)$，只有一个系数序列与之相对应，则 $\varphi_k(x)$ 称为基函数，展开序列 $\{\varphi_k(x)\}$ 称为可表示的函数类的基。
- 可被表示的函数组成了一个函数空间，称为展开集合的闭合跨度，表示为：

$$V = \overline{Span_k\{\varphi_k(x)\}}$$

多分辨率分析：序列展开

- 对于任意函数空间 V 及其相应的展开函数集合 $\{\varphi_k(x)\}$，都存在一个对偶函数集 $\{\tilde{\varphi}_k(x)\}$，通过计算其和 $f(x)$ 的积分可得到系数 $\{\alpha_k\}$，即

$$\alpha_k = < \tilde{\varphi}_k(x), f(x) > = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x) dx$$

- $\{\alpha_k\}$ 系数的计算包含了三种情况。
  - 情况1：如果展开函数构成了V的一个正交基，即

$$< \varphi_j(x), \varphi_k(x) > = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

则基与它的对偶相等，因此

$$\alpha_k = < \varphi_k(x), f(x) >$$

多分辨率分析：序列展开

- 情况2：如果展开函数本身不正交， 而是V 的正交基，即

$$< \varphi_j(x), \varphi_k(x) > = 0, j \neq k$$

但基函数与其对偶是双正交的，即

$$< \varphi_j(x), \widetilde{\varphi_k}(x) > = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

那么

$$\alpha_k = < \tilde{\varphi}_k(x), f(x) >$$

多分辨率分析：序列展开

- 情况3：如果展开函数集对 V 来说不是函数基，那么对于任一函数 $f(x) \in V$，都存在不止一个系数集 $\{\varphi_k(x)\}$ 实现对其展开表示。这样的展开函数及其对偶称为超完备的或者冗余的。它们组成了一个框架，其中：

$$A\|f(x)\|^2 \leq \sum_k | < \varphi_k(x), f(x) > |^2 \leq B\|f(x)\|^2$$

对于某个 $A > 0, B < \infty$ 且 $f(x) \in V$

- $\alpha_k = < \varphi_k(x), f(x) >$ 与 $\alpha_k = < \tilde{\varphi}_k(x), f(x) >$ 都可以用于寻找框架下的展开表示系数。
- 若 $A = B$，则展开集称为紧致框架，这时可证明它具有如下形式：

$$f(x) = \frac{1}{A} \sum_k < \varphi_k(x), f(x) > \varphi_k(x)$$