4、高斯型低通滤波器在频域中的传递函数是 $H(u, v) = Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$,根据二维傅里叶性质，证明空间域的相应滤波器形式为 $h(x, y) = A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$ （这些闭合形式只适用于连续变量情况。）

在证明中假设已经知道如下结论：函数e^(-π(x^2+y^2))的傅立叶变换为e^(-π(u^2+v^2))

解：

已知 $e^{-\pi(x^2+y^2)} = \mathrm{IDFT}(e^{-\pi(u^2+v^2)})$

由傅里叶的伸缩性质 $f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$：

令 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

即 $\mathrm{u} = \sqrt{2\pi}\sigma\mathrm{U}, \mathrm{v} = \sqrt{2\pi}\sigma\mathrm{V}$

即有 $\mathrm{f(x, y)} = \mathrm{IDFT}\left(\mathrm{Ae}^{-(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2)/2\sigma^2}\right) = \mathrm{A}2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-\pi 2\sigma^2(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}$