1、以下列基本要素计算二元组 $[3,2]^T$ 的扩展系数并写出对应的扩展：

（a）以二元实数集合 R^2 为基础的 $\varphi_0=[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^T$ 和 $\varphi_1=[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]^T$

（b）以 R^2 为基的 $\varphi_0=[1,0]^T$, $\varphi_1=[1,1]^T$ 和它的对偶$\bar{\varphi}_0=[1,-1]^T$, $\bar{\varphi}_1=[0,1]^T$

（c）以 R^2 为基的 $\varphi_0=[1,0]^T$, $\varphi_1=[-1/2,\sqrt{3}/2]^T$ 和 $\varphi_2=[-1/2,-\sqrt{3}/2]^T$, 以及它们的对偶 $\bar{\varphi}_i=2\varphi_i/3$.

解：

（a） 由于展开函数 φ_0 与 φ_1 构成正交基。

根据公式：$\alpha_k=\langle\varphi_k(x),f(x)\rangle$ 可得展开系数：

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\\&=\frac{5\sqrt{2}}{2}\\\alpha_1&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

可使得：

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{2}}{2}\varphi_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_1&=\frac{5\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=f.\end{aligned}$$

（b）由于展开函数 φ_0 与 φ_1 构成双正交。

根据公式：$\alpha_k=\langle\widetilde{\varphi}_k(x),f(x)\rangle$, 展开系数为：

$$\alpha_0=\left\langle\tilde{\varphi}_0{}^T,f\right\rangle=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=1$$

$$\alpha_1=\left\langle\tilde{\varphi}_1{}^T,f\right\rangle=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=2$$

可使得：

$$\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=f$$

(c)展开函数集对 R^2 来说不是函数基，这样的展开函数及其对偶是超完备（冗余）的，因此，$\alpha_k=\langle\widetilde{\varphi}_k(x),f(x)\rangle$ 与 $\alpha_k=\langle\varphi_k(x),f(x)\rangle$ 都可以，求得：

$$\alpha_0=\left\langle\tilde{\varphi}_0{}^T,f\right\rangle=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3$$

$$\alpha_1 = \left\langle \tilde{\varphi}_1{}^T, f \right\rangle = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -3/2 + \sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \left\langle \tilde{\varphi}_1{}^T, f \right\rangle = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -3/2 - \sqrt{3}$$