5. 哈尔变换可以用矩阵的形式表示为：

$$T = HF\mathrm{H}^{\mathrm{T}}$$

其中，$\mathbf{F}$是一个$N \times N$的图像矩阵，$\mathbf{H}$是$N \times N$变换矩阵，$\mathbf{T}$是$N \times N$变换结果。对于哈尔变换，变换矩阵$\mathbf{H}$包含基函数$\mathrm{h_k}(z)$，它们定义在连续闭区间$z \in [0,1], k = 0,1,2 \cdots N-1$，其中$N = 2^{\mathrm{n}}$。为了生成矩阵，定义整数$\mathbf{k}$，即$k = 2^{\mathrm{p}} + q - 1$（这里$0 \le p \le n-1$，当 p=0 时 q=0，或 1；当$p \ne 0$时，$1 \le q \le 2^{\mathrm{p}}$）。可得哈尔基函数为：

$$\mathrm{h_0(z) = h_{00}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}, z \in [0,1]$$

且$\mathrm{h_k(z) = h_{pq}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\begin{cases} 2^{\frac{\mathrm{p}}{2}}, (q-1)/2^{\mathrm{p}} \le z < (q-0.5)/2^{\mathrm{p}} \\ -2^{\frac{\mathrm{p}}{2}}, (q-0.5)/2^{\mathrm{p}} \le z < q/2^{\mathrm{p}} \\ 0, 其它，z \in [0,1] \end{cases}$

N×N 哈尔变换矩阵的第$\mathbf{i}$行包含了元素$\mathrm{h_i}(z)$，其中$z = \frac{0}{\mathrm{N}}, \frac{1}{\mathrm{N}}, \cdots (N-1)/N$。计算当$N = 16$时的$\mathrm{H}_{16}$矩阵。

解：

计算 k、p、q 之间的关系，得到下表：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
q	0	1	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8

计算$h_k(z)$:

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
2 & 2 & -2 & -2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & 2 & -2 & -2 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 2 & 2 & -2 & -2 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 2 & 2 & -2 & -2 \\
2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}
\end{array}\right]$$