Đại học Khoa học Tự nhiên
Đại học Quốc gia TP. HCM

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
LỚP 19CTT4

Kiểm tra kết thúc học phần môn Thực hành Toán tổ hợp

Họ và tên: Bùi Ngọc Thảo Vy
MSSV: 19120729

Ngày 05/07/2021

Mục lục

1 Bài 1

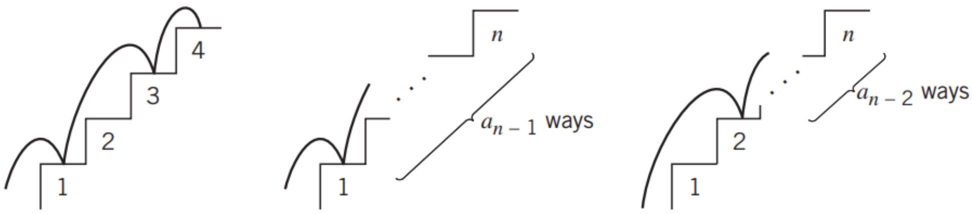
1.1 Câu A: Lên cầu thang

Đề bài: Một cầu thang có n bậc, mỗi lần bước có thể bước lên 1 bậc hay 2 bậc. Có bao nhiêu cách đi hết cầu thang này? (đây chính là dãy Fibonaxi)

- Gọi a_n là số cách bước lên cầu thang có n bậc.
- Do một lần có thể bước lên 1 hoặc 2 bậc nên ta có 2 cách để bước lên bậc thang thứ n:

- Từ bậc $n-1$
- Từ bậc $n-2$

- Với mỗi cách, ta lần lượt có a_{n-1} và a_{n-2} cách.



- Theo nguyên lý cộng, ta có:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

- Để bước lên bậc thang thứ 1, ta có 1 cách $\Rightarrow a_1 = 1$
- Để bước lên bậc thang thứ 2, ta có 2 cách $\Rightarrow a_2 = 2$
- Mà, ta lại có $a_2 = a_0 + a_1 \Leftrightarrow a_0 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 & = a_1 = 1; a_2 = 2 \end{cases}$$

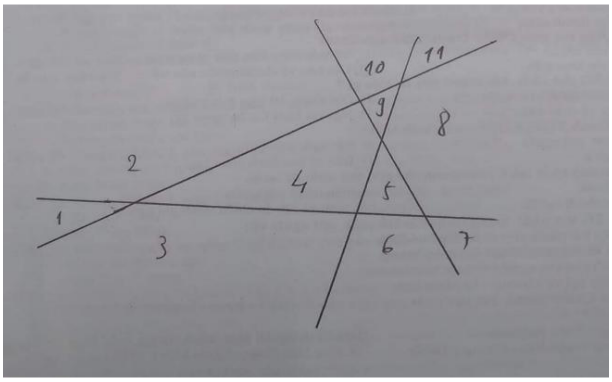
- Sử dụng Maple để giải hệ thức đệ quy, ta được:

```
f := rsolve({a(0) = 1, a(1) = 1, a(n) = a(n-1) + a(n-2)}, a(n)): simplify(f)
```

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n$$

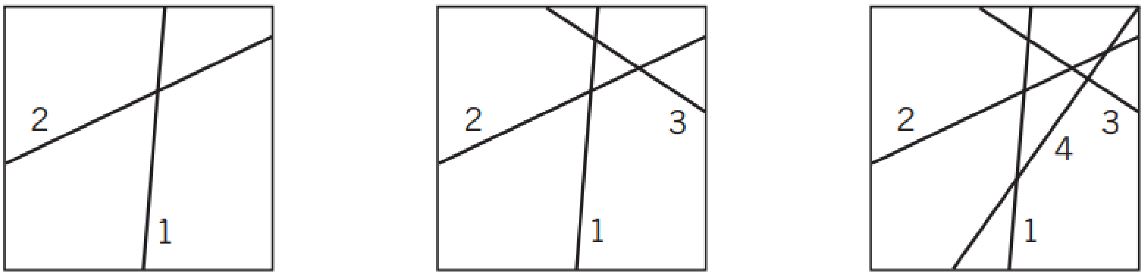
1.2 Câu B: Chia mặt phẳng

Đề bài: Tìm số miền tối đa có thể có khi chia mặt phẳng bởi n đường thẳng.



- Gọi a_n là số mặt phẳng tối đa có thể có khi chia mặt phẳng bởi n đường thẳng.
- Đầu tiên, chúng ta khảo sát số miền tối đa có thể có đối với các giá trị n đường thẳng ban đầu như sau:

- Với 0 đường đẳng ($n = 0$), ta thu được 1 mặt phẳng $\Rightarrow a_0 = 1$
- Với 1 đường đẳng ($n = 1$), ta thu được 2 mặt phẳng $\Rightarrow a_1 = 2$
- Với 2 đường thẳng ($n = 2$), ta thu được 4 mặt phẳng $\Rightarrow a_2 = 4$
- Với 3 đường thẳng ($n = 3$), ta thu được 7 mặt phẳng $\Rightarrow a_3 = 7$



- Như vậy, ta được dãy như sau:

$$a_n = a_{n-1} + a_n$$

- Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} a_n & = a_{n-1} + n \\ a_0 & = 1; a_1 = 2 \end{cases}$$

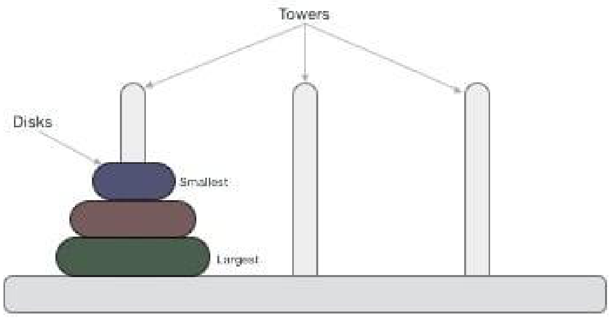
- Sử dụng Maple để giải hệ thức đệ quy, ta được:

```
f := rsolve({a(0) = 1, a(1) = 2, a(n) = a(n-1) + n}, a(n)): simplify(f)
```

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

1.3 Câu C: Tháp Hà Nội

Đề bài: Có 3 cột 1,2 và 3. Có n đĩa nằm ở cột 1 được sắp xếp theo bán kính nhỏ dần từ dưới lên trên. Tìm số lần tối thiểu để chuyển tất cả n đĩa này sang cột khác sao cho thỏa mãn quy tắc: đĩa có bán kính nhỏ hơn luôn nằm ở trên.



- Gọi a_n là số lần tối thiểu để chuyển tất cả n đĩa này sang cột khác sao cho thỏa mãn quy tắc: đĩa có bán kính nhỏ hơn luôn nằm ở trên.
- Để chuyển n đĩa từ cột 1 sang cột 2:

- Chuyển n đĩa từ cột 1 sang cột 3 $\Rightarrow$ Có a_{n-1} cách.
- Chuyển đĩa lớn nhất từ cột 1 sang cột 2 $\Rightarrow$ Có 1 cách.
- Chuyển các đĩa còn lại từ cột 3 về cột 1 $\Rightarrow$ Có a_{n-1} cách.

- Theo nguyên lý cộng, ta có:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

- Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 &= 1 \end{cases}$$

- Sử dụng Maple để giải hệ thức đệ quy, ta được:

```
f := rsolve({a(1) = 1, a(n) = 2a(n-1) + 1}, a(n)): simplify(f)
```

$$a_n = 2^n - 1$$

2 Bài 2

2.1 Câu A: Lãi suất ngân hàng

Đề bài: Ngân hàng Fe-credit (thật ra là cho vay nặng lãi) trả lãi suất 4% mỗi năm từ số tiền tiết kiệm (lãi kép). Tìm quan hệ đệ quy của số tiền rút ra sau n năm trong 2 trường hợp sau đây:

I) Gửi vào 1000$ và lấy ra sau n năm.
II) Gửi vào 100$ mỗi cuối năm.

2.1.1 Gửi vào 1000$ và lấy ra sau n năm

2.1.2 Gửi vào 100$ và lấy ra sau n năm

2.2 Câu B

Đề bài: Có bao nhiêu cách tổ hợp n $ theo các tờ tiền có mệnh giá là 1$, 5$ và 10$. Có quan tâm đến thứ tự của các mệnh giá.

2.3 Câu C: Dãy con bị cấm

Đề bài: Tìm quan hệ đệ quy cho a_n, số chuỗi tam phân có độ dài n mà không xuất hiện chuỗi con "012".

3 Bài 3

Sử dụng maple để giải quyết 2 bài toán sau đây:

3.1 Câu A

Đề bài: Tính tổng $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + ... + n.(n+1).(n+2).(n+3)$

3.2 Câu B

Đề bài: Tìm số các phân hoạch của số nguyên 10 dựa vào hàm sinh.

4 Bài 4

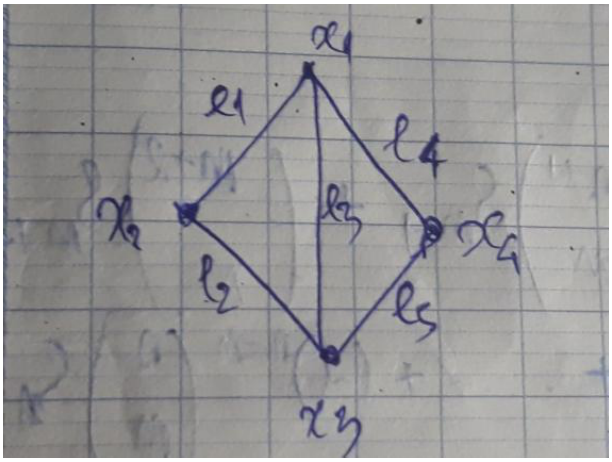
Đề bài: Gọi A_n là số cách sắp xếp các số nguyên từ 1 đến n sau cho số nguyên i không nằm liền sau số nguyên $i+1$ (với $i = 1, ..., n-1$). Và Dn là số các xáo trộn của tập hợp các số nguyên từ 1 đến n. Chứng minh rằng $A_n = D_n + D_{n-1}$

5 Bài 5

Đề bài: Hàm euler $p(n)$ = số các số nguyên từ 1 đến n và nguyên tố cùng nhau với n. Sử dụng nguyên lý bù trừ để tính $p(n)$ dựa vào phân tích của n ra thừa số nguyên tố. Áp dụng: tính $p(100)$.

6 Bài 6: Đa thức sắc tố đồ thị(chromatic polynomial)

Đề bài: Cho đồ thị G đơn, vô hướng như hình bên dưới. Sử dụng nguyên lý bù trừ để tính số cách tô màu 4 đỉnh của đồ thị với n màu cho trước sao cho các đỉnh kề nhau được tô bởi các màu khác nhau. (đỉnh là x_i, cạnh là e_i)

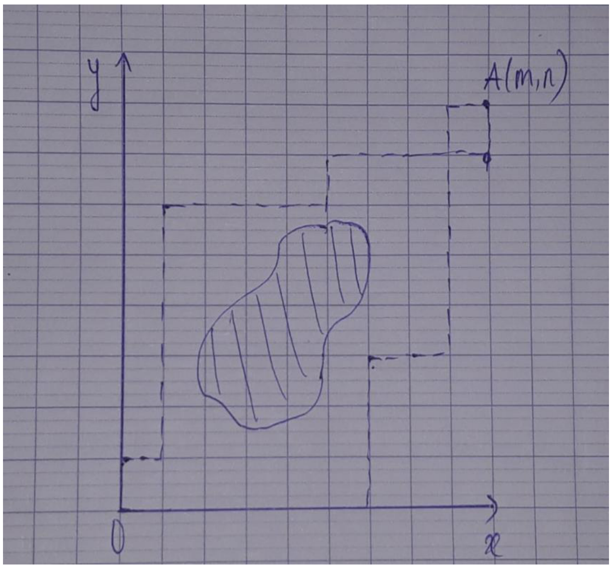


7 Bài 7

Đề bài: Chứng minh rằng số cây khung của đồ thị đầy đủ K_n là n^{n-2}. (với $n > 1$).

8 Bài 8: Bài toán đường đi tránh vũng nước

Đề bài: Tìm thuật toán để giải quyết bài toán sau đây: Xét góc phần tư thứ I của hệ trục tọa độ Oxy với các lưới nguyên (giống như giấy tập có ô), có một vũng nước S (là một tập hợp các điểm nguyên nằm trong I). (với $n > 1$).



8.1 Câu A

Đề bài: A)Tìm số đường đi từ O đến A tránh vũng nước S biết mỗi lần đi, chỉ được lên trên 1 đơn vị hoặc qua phải 1 đơn vị.

8.2 Câu B

Đề bài: B)Có nhận xét gì về số đường đi như vậy nếu vũng nước S không tồn tại.

9 Bài 9

Đề bài: Xét bài toán trên, tính số đường đi từ O đến A(n,n) và S là nửa mặt phẳng phía trên OA không kể bờ.

10 Bài 10

Đề bài: Cho một hình chữ nhật mxn. C là một bàn cờ nằm trong HCN này và C' là phần còn lại của C trong HCN đó. Chứng minh rằng $R(x, C') = x^n.R(1/x, C)$. Gợi ý: bt 15/351 quyển Applied Combinatorics.

11 Bài 11: Định lý thặng dư Trung Hoa

Đề bài: Trước khi tiến hành thi học kì, toàn bộ sinh viên đh khtn bắt buộc phải được lấy mẫu tầm soát covid. Để biết chính xác có bao nhiêu sinh viên tham gia, chúng ta làm như sau (nhanh hơn và chính xác hơn việc đếm rất nhiều). Đầu tiên cho sinh viên tập trung trong khuôn viên trường là hình vuông cạnh 100m, để đảm bảo an toàn nên các bạn sinh viên đứng cách đều nhau. Lấy một ô đơn vị làm mẫu có kích thước 20m x 20m, ta dự đoán được trong đó có khoảng từ 490 đến 500 sinh viên. Sau đó chúng ta sẽ cho tất cả sinh viên xếp thành các hàng 5,7 và 11. Trong mỗi lần xếp như vậy, số sinh viên dư ra lần lượt là 0,4 và 3. Hãy tính chính xác số lượng sinh viên. (bởi vì dù chỉ 1 người chưa được tầm soát cũng rất nguy hiểm)