习题三

切尔诺夫界（两题）

3.1 数值随机算法计算数值 a 的精度可以表示为置信区间 $\Pr[\ x\in[a-\delta,\ a-\delta]\ ]>1-\gamma$。试利用切尔诺夫界为第 2 章计算$\pi$的数值随机算法之一建立置信区间，使得我们可以根据置信水平和置信区间估计所需随机实验的次数。

3.2 QuickSort 排序过程可以视为算法的递归调用过程，因此整个算法的执行过程可以视为一棵递归调用树，算法的每次调用对应树中的一个结点，结点间的边表示直接嵌套的调用关系。在每次调用 QuickSort 时，首先从当前数据子集(记其大小为 s)中随机选择划分元素将当前子集划分为两个子集合；如果划分得到的两个子集的大小均不超过 $2s/3$,则称递归调用树中相应节点为*好结点*，否则称之为*坏结点*。

(a)证明：在任意从树根到叶子的路径上，好结点的数量不超过 $c_1\log_2 n$,其中 c_1 是一个常数；

(b)证明：任意从树根到叶子的路径上所含结点的数量不超过 $c_2\log_2 n$ 的概率至少为 $1-1/n^2$, 其中 c_2 是一个常数；

(c) 从树根到叶子的最长路径上所含结点的数量不超过 $c_2\log_2 n$ 的概率至少为 $1-1/n$, 其中 c_2 是(b)中的常数；

(d)利用 a,b,c 的结论，证明：QuickSort 在 $O(n\log n)$时间内排序 n 个数据对象的概率至少为 $1-1/n$。

鞅(两题)

3.3 设 $X_0=0$, 而 $X_{j+1}(j\geq 0)$是从$[X_j,\ 1]$均匀随机抽取的值, 令 $Y_k=2^k(1-X_k)$。证明：序列 $Y_0,Y_1,\ldots$是一个鞅。

3.4 利用本章所学内容，分析如下随机排序算法的时间复杂性。

输入： n 个不同的值 $x_1,x_2,\ldots,x_n$

输出： $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 排序后的结果

步骤：

1. 从 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 均匀随机抽取 y_1
2. For k=2 To n
3. 　　从$\{x_1,\ldots,x_n\}\backslash\{y_1,y_2,\ldots,y_{k-1}\}$中均匀随机抽取 y_k;
4. 　　If $y_k<y_{k-1}$ Then goto 1;
5. 输出 $y_1,y_2,\ldots,y_n$;