Q8

a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$= c\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-2|y-x|}\,dy\,dx$

$= c\int e^{-|x|}\int e^{-2|y-x|}\,dy\,dx$

$= c\int e^{-|x|}\,dx$

$= c\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx\right)$

$= c\left([e^{x}]_{-\infty}^{0} + [-e^{-x}]_{0}^{\infty}\right)$

$= c\left((1-0) + (0-(-1))\right)$

$= c(2)$

$\Rightarrow 1 = 2c$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y-x|}\,dy = \int_{-\infty}^{x} e^{-2(-(y-x))}\,dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2(y-x)}\,dy$

$= \int_{-\infty}^{x} e^{2(y-x)}\,dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2(y-x)}\,dy$

$= e^{-2x}\int_{-\infty}^{x} e^{2y}\,dy + e^{2x}\int_{x}^{\infty} e^{-2y}\,dy$

$= e^{-2x}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_{-\infty}^{x} + e^{2x}\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_{x}^{\infty}$

$= e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{2} - 0\right) + e^{2x}\left(0 + \frac{e^{-2x}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$

b) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}e^{-|x|-2|y-x|}}{\frac{1}{2}e^{-|x|}}$

$= e^{-2|y-x|}$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|-2|y-x|}\,dy$

$= \frac{1}{2}e^{-|x|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y-x|}\,dy$

$= \frac{1}{2}e^{-|x|}$

c) $U \sim Exp(2)$ RV V, $P(V=-1) = P(V=1) = \frac{1}{2}$ $U \perp V$ $Z = x + UV$

$P(Z \le z) = P(x + UV \le z)$

$= P(UV \le z - x)$

$= P\left(U \le \frac{z-x}{V}\right)$

$= 1 - e^{-2\left(\frac{z-x}{V}\right)}$

$\frac{d}{dz}\left(1 - e^{-2\left(\frac{z-x}{V}\right)}\right) = 0 - \frac{d}{dz}\left(e^{-2\left(\frac{z-x}{V}\right)}\right)$

$= -e^{-2\left(\frac{z-x}{V}\right)}\left(-2\left(\frac{1}{V}\right)\right)$

Bc $Z > x$ if $V \ge 1$ and $Z < x$ if V=

$p_Z(z) = e^{-2|z-x|}$ which is the same dist as $f_{Y|X}(y|x)$