Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Динамическое программирование и процессы управления»

Задание 1

Студент 415 группы
А. В. Корушкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И.В. Востриков

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть задана система:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, t_1],\\
x(t_0) = x^0 \in \mathcal{X}^0 = \mathcal{E}(x_0, X_0),\\
u(t) \in \mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(q(t), Q(t)),
\end{cases} \tag{1}
$$

,где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Необходимо построить внутренние и внешние эллипсоидальные оценки множества и трубки достижимости системы 1, соответственно нужно найти

1. проекцию множества достижимости на двумерную статическую ось;
2. проекцию множества достижимости на двумерную динамическую ось;
3. проекцию трубки достижимости на трехмерную статическую плоскость;
4. проекцию трубки достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

2 Теоретическое обоснование

Определение 1. *Множество достижимости системы 1 в момент времени t $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0)$ называется объединение всевозможных состоянй системы в данный момент времени.*

$$\mathcal{X}[t] = \bigcup \{x(t) = x(t, t_0, x_0) | x_0 \in \mathcal{X}_0, u(t) \in \mathcal{P}(t)\}.$$

Определение 2. *Трубкой достижимости задачи 1 называется многозначная функция $\mathcal{X}[\cdot] = \mathcal{X}(\cdot, t_0, \mathcal{X}_0)$, другими словами, трубка достижимости на временном отрезке $[t_0, t]$ есть объединение множеств достижимости для $\tau \in [t_0, t]$.*

Воспользовавшись формулой Коши решения линейного дифференциального уравнения, получаем:

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $X(t, \tau)$ (фундаментальная матрица) является решением системы:

$$
\begin{cases}
\frac{dX(t,t_0)}{dt} = A(t)X(t, t_0),\\
X(\tau, \tau) = I.
\end{cases} \tag{2}
$$

Определение 3. *Эллипсоидом $\mathcal{E}$ с центром в точке q и матрицей $Q = Q^T \geq 0$ будем называть выпуклое замкнутое множество с опорной функцией*

$$\rho\left(l|\mathcal{E}(q, Q)\right) =< l, Q > + \sqrt{< l, Ql >}.$$

Свойство 1. $A\mathcal{E}(q, Q) = \mathcal{E}(Aq, AQA^T), \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Доказательство:

$$\rho\left(l|A\mathcal{E}(q, Q)\right) = \rho\left(A^T l|\mathcal{E}(q, Q)\right) =< A^T l, q > + \sqrt{< A^T l, QA^T l >} =$$
$$=< l, Aq > + \sqrt{< l, AQA^T l >} = \rho\left(l|\mathcal{E}(Aq, AQA^T)\right).$$

Следовательно, для множеств достижимости, решение системы 1 вылядит так:

$$\mathcal{X}[t] = X(t,t_0)\mathcal{E}(x_0,X_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)\mathcal{E}(q(\tau),Q(\tau))d\tau,$$

где $X(t,\tau)$ — фундаментальная матрица.

2.1 Внешняя эллипсоидальная оценка суммы

Пусть даны два эллипсоида $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(q_1,Q_1)$ и $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(q_2,Q_2)$. Рассмотрим их сумму и оценим сверху эллипсоидом $\mathcal{E}_+(q_+,Q_+) \supseteq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, который будет касаться суммы в направлении вектора $l^* \in \mathbb{R}^n$, $||l^*|| = 1$.

Удтверждение 1. *$q_+ = q_1 + q_2$ и $Q_+ = (p_1+p_2)\left(\frac{Q_1}{p_1} + \frac{Q_2}{p_2}\right)$, где $p_1, p_2 > 0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Причем, при фиксированном направлении l положим $p_i = \sqrt{<l, Q_i l>}, i = \overline{1,2}$.*

Доказательство. *Выпишем опорную функцию:*

$$\rho(l|\mathcal{E}_+) =< q_1+q_2, l> + \sqrt{\left\langle l, (p_1+p_2)\left(\frac{Q_1}{p_1}+\frac{Q_2}{p_2}\right) l\right\rangle} =$$
$$=< q_1+q_2, l> + \sqrt{<l,Q_1 l> + <l,Q_2 l> + \frac{p_1}{p_2} <l,Q_2 l> + \frac{p_2}{p_1} <l,Q_1 l>} \geq$$
$$\geq \left\{A + B \geq 2\sqrt{AB}\right\} \geq$$
$$\geq< q_1+q_2, l> + \sqrt{<l,Q_1 l> + <l,Q_2 l> + 2<l,Q_2 l>^{\frac{1}{2}}<l,Q_1 l>^{\frac{1}{2}}} \geq=$$
$$=< q_1, l> + \sqrt{<l,Q_1 l>} + <q_2, l> + \sqrt{<l,Q_2 l>} =$$
$$= \rho(l|\mathcal{E}_1) + \rho(l|\mathcal{E}_2) = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1).$$

При $p_i = \sqrt{\langle l, Q_i l\rangle}, i = \overline{1,2}$ неравенство превращается в равенство.

В общем случае, когда число эллипсоидов n больше 2, получаем следующее утверждение.

Удтверждение 2. *Пусть даны $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(q_i,Q_i), i = \overline{1,n}$. Положим $p_i = \sqrt{\langle l, Q_i l\rangle}$. Тогда $\mathcal{E}_+(q_+,Q_+) \supseteq \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$, причем $\rho(l|\mathcal{E}_+) = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n)$, где*

$$q_+ = \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad Q_+ = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{p_i}\right).$$

Другими словами, перебирая всевозможные направления l, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(q_i,Q_i) = \bigcap_{||l||=1} \mathcal{E}_+(l).$$

2.2 Внешняя эллипсоидальная оценка интеграла

Построим внешнюю оценку интеграла

$$I = \mathcal{E}_0(q_0, Q_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) d\tau.$$

Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[t_0, t]$:

$$\Sigma_N = \left\{ \sigma = \frac{t - t_0}{N},\ \ \tau_0 = t_0,\ \ \tau_i = t_0 + \sigma i,\ i = \overline{1, N} \right\}.$$

Соответственно, в наших обозначениях интегральные суммы равны

$$S_N = \mathcal{E}_0(q_0, Q_0) + \sigma \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}(q(\tau_i), Q(\tau_i)).$$

Используя формулу аппроксимирующего эллипсоида:

$$\mathcal{E}(q_+(\Sigma_N), Q_+(\Sigma_N)) \supseteq S_N,$$

$$q_+(\Sigma_N) = q_0 + \sigma \sum_{i=1}^{N} q(\tau_i),$$

$$Q_+(\Sigma_N) = \left(p_0 + \sum_{i=1}^{N} p_i \right) \left(\frac{Q_0}{p_0} + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(\tau_i)}{p_i} \right),$$

где $p_i > 0, i = \overline{0, N}$. Сделаем замену $p_i = \sqrt{< l, Q_i l >}\sigma = p_i' \sigma, , i = \overline{1, N}$ и при $N \longrightarrow \infty$ получим:

$$q_+ = q_0 + \int_{t_0}^{t} q(\tau) d\tau,$$

$$Q_+ = \left(p_0 + \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau \right) \left(\frac{Q_0}{p_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{Q(\tau)}{p(\tau)} d\tau \right),$$

где опорные функции точного множества и оценки равны при $p(\tau) = \sqrt{\langle l, Q(\tau) l \rangle}$.

2.3 Построение внешних эллипсоидальных оценок для множества достижимости

Используя свойство 1 и формулу Коши с учетом начальных условий будем иметь следующее выражение для множества достижимости системы 2:

$$\mathcal{X}[t] = X(t, t_0)\mathcal{E}(x_0, X_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) B(\tau) \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) d\tau =$$

$$= \mathcal{E}(X(t, t_0)x_0, X(t, t_0)X_0 X^T(t, t_0)) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(X(t, \tau)B(\tau)q(\tau), X(t, \tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t, \tau)) d\tau =$$

$$= \mathcal{E}(q_0, Q_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(\tilde{\mathrm{q}}(\tau), \tilde{\mathrm{Q}}(\tau)) d\tau.$$

Таким образом, учитывая предыдущие выкладки, получим оценку

$$\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}\left(X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)q(\tau)d\tau, Q_+\right),$$

где

$$Q_+ = \left(p_0 + \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)\left(\frac{X(t,t_0)X_0X^T(t,t_0)}{p_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)}{p(\tau)}d\tau\right)$$

и при

$$p(\tau) = \sqrt{\langle l, X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)l\rangle},$$

$$p_0(\tau) = \sqrt{\langle l, X(t,t_0)X_0X^T(t,t_0)l\rangle}$$

будет достигаться равенство опорных функций точного множества и оценки. Однако p, p_0 должны зависеть только от τ, поэтому ,сделав замену $l(t) = X^T(t_0,t)l_0,\ l_0 \in S_1^m(0)$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ и используя полугрупповое свойство фундаментальных матриц, получим:

$$p(\tau) = \sqrt{\langle l_0, X(t_0,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t_0,\tau)l_0\rangle},$$

$$p_0(\tau) = \sqrt{\langle l_0, X_0l_0\rangle}.$$

Учитывая все выше сказанное, поиск внешней эллипсоидальной оценки множества достижимости можно свести к решению нескольких дифференциальных уравнений.Введем обозначения:

$$\tilde{A} = p_0 + \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{B} = \frac{X(t,t_0)X_0X^T(t,t_0)}{p_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)}{p(\tau)}d\tau.$$

Тогда Q_+ представимо, как:

$$Q_+ = \tilde{A}\tilde{B}.$$

Продифференцировав данное выражение, получим

$$\frac{\partial Q_+(t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{A}(t)}{\partial t}\tilde{B} + \tilde{A}\frac{\partial \tilde{B}(t)}{\partial t} =$$

$$= p(t)\tilde{B}(t) + \tilde{A}(t)\left(\frac{A(t)X(t,\tau)X_0X^T(t,\tau) + X(t,\tau)X_0X^T(t,\tau)A^T(t)}{p_0} + \frac{B(t)Q(t)B^T(t)}{p(t)}\right) +$$

$$+\tilde{A}(t)\int_{t_0}^{t}\left(\frac{A(t)X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau) + X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)A^T(t)}{p(\tau)}\right)d\tau =$$

$$p(t)\tilde{B}(t) + \tilde{A}(t)\left(A(t)\tilde{B}(t) + \tilde{B}(t)A^T(t) + \frac{B(t)Q(t)B^T(t)}{p(t)}\right) =$$

$$p(t)\tilde{B}(t) + A(t)\tilde{A}(t)\tilde{B}(t) + \tilde{A}(t)\tilde{B}(t)A^T(t) = \tilde{A}(t)\frac{B(t)Q(t)B^T(t)}{p(t)} =$$

$$= p(t)\tilde{B}(t) + A(t)Q_+(t) + Q_+(t)A^T(t) + \tilde{A}(t)\frac{B(t)Q(t)B^T(t)}{p(t)}.$$

Здесь учитывалось, что $\tilde{A}(t) \in \mathbb{R}^1$. Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_+(t)}{\partial t} = p(t)\tilde{B}(t) + A(t)Q_+(t) + Q_+(t)A^T(t) + \tilde{A}(t)\frac{B(t)Q(t)B^T(t)}{p(t)}, \\ Q_+(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{3}$$

Также заметим, что для $\tilde{A}, \tilde{B}$ можно записать дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{A}(t)}{\partial t} = p(t), \\ \frac{\tilde{B}(t)}{\partial t} = A(t)\tilde{B} + \tilde{B}A^T(t) + \frac{B(t)Q(t)B^T(t)}{p(t)}, \\ \tilde{A}(t_0) = p_0, \\ \tilde{B}(t_0) = \frac{X_0}{p_0} \end{cases} \tag{4}$$

Чтобы найти $X(t,\tau)$, составим соответствующую ей систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial X(t,\tau)}{\partial \tau} = -X(t,\tau)A(\tau), \\ X(t,t) = I. \end{cases} \tag{5}$$

Центр искомого эллипсоида удовлетворяется системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial q_+(t)}{\partial t} = A(t)q_+(t) + B(t)q(t), \\ q_+(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{6}$$

Решая совместно системы (3)-(6) можно получить соответственно матрицу конфигураций $Q_+(t)$ и также центр искомого эллипсоида.

2.4 Внутренняя эллипсоидальная оценка суммы

Пусть даны N эллипсоидов $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}(q_i, Q_i), i = \overline{1,N}$. Не ограничивая общности, положим $q_i = 0, i = \overline{1,N}$. Рассмотрим эллипсоид $\mathcal{E}_- = \mathcal{E}(0, Q_-)$, где

$$Q_- = Q_*^T Q_*,$$

$$Q_* = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^{\frac{1}{2}}.$$

S_i — ортогональная матрица,$i = \overline{1,N}$. Распишем квадрат опорной функции эллипсоида:

$$\rho^2(l|\mathcal{E}_-) =< l, Q_- l >=< Q_* l, Q_* l >= \sum_{i=1}^{n} < l, Q_i l > + \sum_{i \neq j} \left\langle S_i Q_i^{\frac{1}{2}} l, S_j Q_j^{\frac{1}{2}} l \right\rangle \leq$$

$$\leq \{\text{Неравенство Коши - Буняковского}\} \leq \sum_{i=1}^{n} < l, Q_i l > + \sum_{i \neq j} \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}} \langle l, Q_j l\rangle^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \rho^2 \left(l \middle| \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0, Q_i) \right)$$

Так как эллпсоды $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_-$ имеют центры в нуле, их опорные функции неотрицательные, поэтому

$$\mathcal{E}_- \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0, Q_i).$$

При фиксированном l равенство опорных функций достигается (т.е.в момент времени t в направлении $l(t)$ происходит касание границ множества достижимости и соответствующей внутренней оценки) при

$$S_i Q_i^{\frac{1}{2}} l = \lambda_i S_1 Q_1^{\frac{1}{2}} l, \ i = \overline{2, N}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}_+.$$

В качестве унтарной матрицы S_1 возьмем единичную матрицу I, λ_i выберем из условия $||Q_i^{\frac{1}{2}} l|| = ||\lambda_i Q_1^{\frac{1}{2}} l||$:

$$\lambda_i = \frac{< l, Q_i l >^{\frac{1}{2}}}{< l, Q_1 l >^{\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно, существует ортогоальное преобразование, которое переводит вектор $Q_i^{\frac{1}{2}} l$ в $Q_1^{\frac{1}{2}} l$,и, следовательно, существуют нужные нам матрицы S_i. Перебирая всевозможные направленя l получим внутреннюю эллипсоидальную оценку вида

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0, Q_i) = \bigcup_{||l||=1} \mathcal{E}_-(l).$$

Случай с произвольными центрами q_i рассматрваются аналогично.

2.5 Внутренняя эллипсоидальная оценка интеграла

Построим внутреннюю оценку интеграла

$$I = \mathcal{E}_0(q_0, Q_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) d\tau.$$

Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[t_0, t]$:

$$\Sigma_N = \left\{ \sigma = \frac{t - t_0}{N}, \ \ \tau_0 = t_0, \ \ \tau_i = t_0 + \sigma i, \ i = \overline{1, N} \right\}.$$

Соответственно, в наших обозначениях интегральные суммы равны

$$S_N = \mathcal{E}_0(q_0, Q_0) + \sigma \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}(q(\tau_i), Q(\tau_i)).$$

Используя формулу аппроксимирующего эллипсоида:

$$\mathcal{E}(q_-(\Sigma_N), Q_-(\Sigma_N)) \subseteq S_N,$$

$$q_-(\Sigma_N) = q_0 + \sigma \sum_{i=1}^{N} q(\tau_i),$$

$$Q_-(\Sigma_N) = Q_*^T(\Sigma_N) Q_*(\Sigma_N),$$

$$Q_*(\Sigma_N) = S_0 Q_0^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{N} S_i Q_i^{\frac{1}{2}} \sigma.$$

Соответственно, при $N \longrightarrow \infty$ получим:

$$q_-(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} q(\tau) d\tau,$$

$$Q_-(t) = Q_*^T(t) Q_*(t),$$

$$Q_*(t) = S_0 Q_0^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{t} S(\tau) Q(\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

2.6 Построение внутренних эллипсодальных оценок для множества достижимости

Используя свойство 1 и формулу Коши с учетом начальных условий будем иметь следующее выражение для множества достижимости системы 2:

$$\mathcal{X}[t] = X(t, t_0)\mathcal{E}(x_0, X_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) B(\tau) \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) d\tau =$$

$$= \mathcal{E}(X(t, t_0)x_0, X(t, t_0) X_0 X^T(t, t_0)) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(X(t, \tau) B(\tau) q(\tau), X(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) X^T(t, \tau)) d\tau =$$

$$= \mathcal{E}(q_0, Q_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(\tilde{\mathrm{q}}(\tau), \tilde{\mathrm{Q}}(\tau)) d\tau.$$

Таким образом, учитывая предыдущие выкладки, получим оценку

$$\mathcal{E}_- = \mathcal{E}\left(X(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) B(\tau) q(\tau) d\tau, Q_- \right),$$

$$Q_- = Q_*^T(t) Q_*(t),$$

где

$$Q_*(t) = S_0 [X(t, t_0) X_0 X^T(t, t_0)]^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{t} S(\tau) [X(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) X^T(t, \tau)]^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Будем предполагать, что $m = n$. Если это не так:

1. $m > n$. Система является переопределенной и смысловой нагрузки не несет, поэтому данный случай исключается из рассмотрения.

2. $m < n$. К матрице $B(t)$ можно приписать $n - m$ нулевых столбцов, а $\mathcal{E}(q(t), Q(t))$ можно дополнить до n - мерного эллипсоида.

Таким образом,

$$Q_*(t) = S_0 X_0^{\frac{1}{2}} X^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) X^T(t,\tau) d\tau.$$

Чтобы происходило касание границ множества достижимости и внутренней эллипсоидальной оценки, нужно:
для любого фиксированного времени t и $\tau \in [t_0, t]$

$$\lambda(t,\tau) S_0(t) X_0^{\frac{1}{2}} X^T(t,t_0) l(t) = S(t,\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) X^T(t,\tau) l(t).$$

Положим $l(t) = X^T(t_0,t) l_0,\ l_0 \in S_1^m(0)$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$. Тогда, взяв $S_0 = I$, получим, что матрица S и λ зависят только от τ. Следовательно,

$$\lambda(\tau) X_0^{\frac{1}{2}} l_0 = S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) X^T(t_0,\tau) l_0. \qquad (7)$$

Так как ортогональные преобразования сохраняют длины векторов, то

$$||\lambda(\tau)|| = \frac{||Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) X^T(t_0,\tau)||}{||X_0^{\frac{1}{2}} l_0||}.$$

Зафиксируем некоторое $l_0 \in \pi$, π — плоскость, образованная векторами (l_1, l_2), вводимыми пользователем. Учитывая (7) и то, что $\lambda_i = \frac{<l, Q_i l>^{\frac{1}{2}}}{<l, Q_1 l>^{\frac{1}{2}}}$, получим для матрицы $S(\tau)$:

$$S(\tau) \cdot \tilde{a}(\tau) = \tilde{b}(\tau),$$

где

$$\tilde{a}(\tau) = Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) X^T(t_0,\tau) l_0,$$

$$\tilde{b}(\tau) = \frac{< l_0, X(t_0,\tau) B(\tau) Q B^T(\tau) X^T(t_0,\tau) l_0 >^{\frac{1}{2}}}{< l_0, X_0 l_0 >^{\frac{1}{2}}} X_0^{\frac{1}{2}} l_0 = \frac{||\tilde{a}(\tau)||}{||X_0^{\frac{1}{2}} l_0||} X_0^{\frac{1}{2}} l_0.$$

Чтобы найти ортогональные матрицы $S(\tau)$, воспользуемся сингулярным разложением матрицы A.

Определение 4. *Сингулярным называется разложение произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}n \times n$ в произведение диагональной и двух ортогональных матриц:*

$$A = FDU,$$

где

$$\{D\}_{i,j} = 0, \quad i \neq j, \qquad FF^T = F^T F = UU^T = U^T U = I.$$

Теорема 1. *Сингулярное разложение $A = FDU$ существует для любой комплексной прямоугольной матрицы A. Если A вещественная, то матрицы F и U также можно выбрать вещественными.*

Теорема 2. *Для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, таких, что $||a|| = ||b||$, существует матрица ортогонального преобразования, переводящего a в b.*

Доказательство. *Сингулярно разложим вектора a и b:*

$$a = F_a D_a u_a, \qquad b = F_b D_b u_b.$$

Здесь F_a, F_b — ортогональные матрицы порядка $n \times n$;

$$D_a = (\lambda_a, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_a \neq 0; \quad u_a \in \{-1, 1\};$$

$$D_b = (\lambda_b, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_b \neq 0; \quad u_b \in \{-1, 1\}.$$

Таким образом, получаем:

$$F_b = F_b I = F_b F_a^T F_a,$$

$$D_b = D_a \frac{\lambda_b}{\lambda_a}$$

и

$$u_b = u_b \cdot 1 = u_b \left(\frac{u_a}{u_b} \cdot \frac{u_b}{u_a} \right) = u_a \cdot \frac{u_b}{u_a},$$

откуда

$$b = F_b D_b u_b = F_b F_a^T \cdot F_a D_a u_a \cdot \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a} \cdot \frac{u_b}{u_a} \right) =$$

$$= F_b F_a^T a \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a} \cdot \frac{u_b}{u_a} \right) = \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a} \frac{u_b}{u_a} F_b F_a^T \right) a.$$

Кроме того, в силу требования $||a|| = ||b||$ и утверждения, что произведение ортогональных матриц - ортогонально:

$$\left| \frac{\lambda_b}{\lambda_a} \frac{u_b}{u_a} \right| = 1,$$

т.е. полученная матрица перехода $\dfrac{\lambda_b}{\lambda_a} \dfrac{u_b}{u_a} F_b F_a^T$ — действительно является ортогональной матрицей. Таким образом, сформулированный алгоритм нахождения ортогональный матриц $S(\tau)$ корректен.

Продифференцируем выражение для Q_*:

$$\frac{\partial Q_*(t)}{\partial t} = X_0^{\frac{1}{2}} (A(t) X(t, t_0))^T + \int_{t_0}^{t} S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) (A(t) X(t, \tau))^T d\tau + S(t) Q^{\frac{1}{2}}(t) B^T(t) =$$

$$= \left(X_0^{\frac{1}{2}} X^T(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) B^T(\tau) X^T(t, \tau) d\tau \right) A^T(t) + S(t) Q^{\frac{1}{2}}(t) B^T(t) =$$

$$= Q_*(t) A^T(t) + S(t) Q^{\frac{1}{2}}(t) B^T(t).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_*(t)}{\partial t} = Q_*(t) A^T(t) + S(t) Q^{\frac{1}{2}}(t) B^T(t), \\ Q_*(t_0) = X_0^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{8}$$

По матрице $Q_*(t)$ построим матрицу конфигураций $Q_- = Q_*^T Q_*$ для $\mathcal{E}_-$. Причем,центр искомого эллипсоида удовлетворяется системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial q_+(t)}{\partial t} = A(t) q_+(t) + B(t) q(t), \\ q_+(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{9}$$

Произведя перебор векторов $l_0 \in \pi$ получим внутреннюю оценку.

3 Программная реализация алгоритма

Пользователь задает направления (l_1, l_2) , образующие плоскость, на которую проектируются внешние или внутренние оценки.

3.1 Построение проекции трубки достижимости на статическую плоскость

1. Зададим некоторую временную сетку на $[t_0, t]$.

2. Будем строить проекции множества множества достижимости в каждый момент времени. Для каждого фиксированного момента времени будем перебирать направляющие векторы l по двумерной сфере, расположенной в статической плоскости, образованной векторами (l_1, l_2). Для каждого такого направления будем строить внешнюю эллипсоидальную оценку, опорная точка которой в направлении l совпадает с опорной точкой множества достижимости в том же направлении. Полученную опорную точку будем проектировать на статическую плоскость.

Статическая плоскость задаётся двумя неколлинеарными векторами l_1 и l_2. Для удобства, построим в статической плоскости ортонормированный базис e_1, e_2, проводя ортогонализацию векторов l_1 и l_2:

$$e_1 = \frac{l_1}{||l_1||},$$
$$e^* = l_2 - < l_2, e_1 > e_1,$$
$$e_2 = \frac{e^*}{||e^*||}.$$

Параметризуем сферу:

$$\begin{cases} l = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha, \\ \alpha \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Итак, для каждого вектора l, вычисляем $q^+(\tau)$ и $Q^+(\tau)$, а также опорную точку e_0. Проектируем это точку на статическую плоскость следующим образом:

$$pr_{e_1} e_0 = < e_0, e_1 >,$$

$$pr_{e_2} e_0 = < e_0, e_2 > .$$

3.2 Построение проекции трубки достижимости на динамическую плоскость

Как и ранее, зададим некоторую временную сетку на $[t_0, t]$. Динамическая плоскость также задаётся двумя неколлинеарными векторами l_1 и l_2. Алгоритм построения аналогичен проектированию на статическую плоскость. В каждый момент времени будем строить проекцию множества достижимости на двумерную плоскость, но задаваемую векторами:

$$h_1(\tau) = X^T(t_0, \tau) l_1,$$
$$h_2(\tau) = X^T(t_0, \tau) l_2.$$

4 Результаты работы программы

4.1 Пример 1

Рассмотрим систему, в которой:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad T = 1, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Построим трубку достижимости на отрезке времени $t \in [0, 1]$ и проекции оценок на плоскость в момент T.
Проекция множества достижимости на двумерную статическую ось в момент времени T.

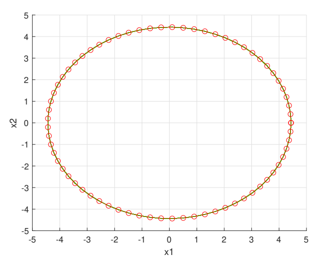

Рис. 1: Внешняя оценка.

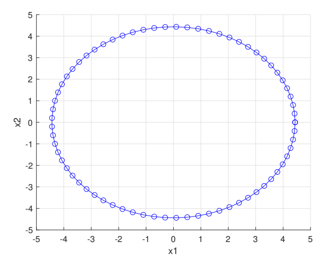

Рис. 2: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную статическую плоскость.

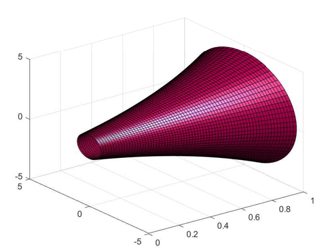

Рис. 3: Внешняя оценка.

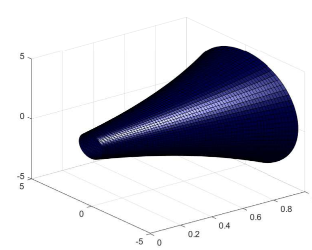

Рис. 4: Внутренняя оценка.

Проекция множества достижимости на двумерную динамическую ось в момент времени T.

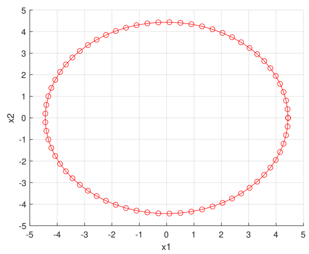

Рис. 5: Внешняя оценка.

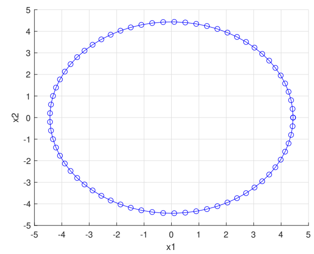

Рис. 6: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

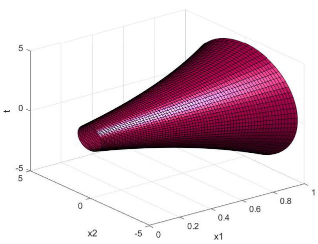

Рис. 7: Внешняя оценка.

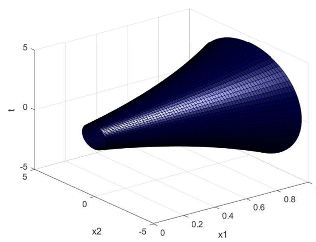

Рис. 8: Внутренняя оценка.

4.2 Пример 2 с нулевой матрицей A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos(10t) & \sin(10t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad T = 5, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проекция множества достижимости на двумерную статическую ось в момент времени T.

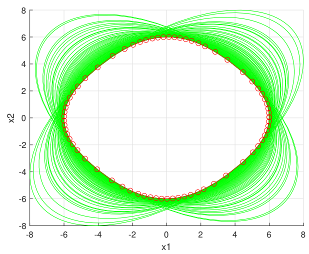

Рис. 9: Внешняя оценка.

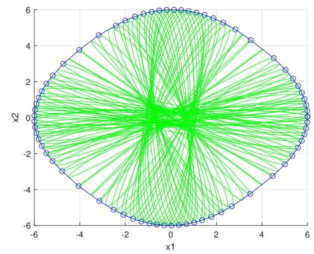

Рис. 10: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную статическую плоскость.

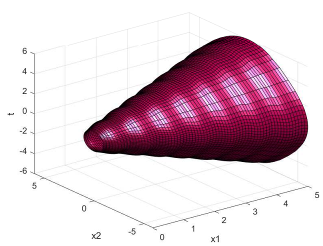

Рис. 11: Внешняя оценка.

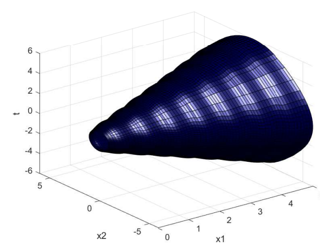

Рис. 12: Внутренняя оценка.

Проекция множества достижимости на двумерную динамическую ось в момент времени T.

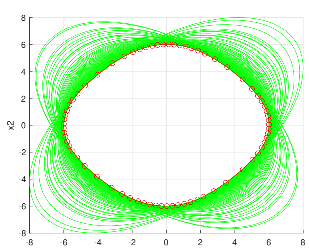

Рис. 13: Внешняя оценка.

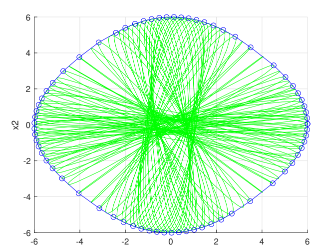

Рис. 14: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

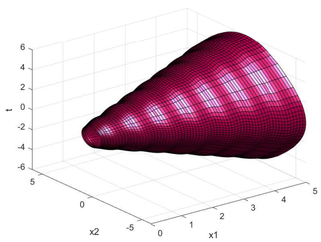

Рис. 15: Внешняя оценка.

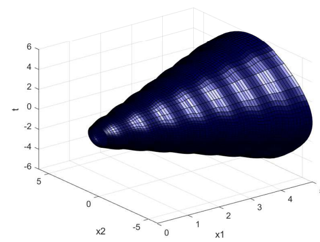

Рис. 16: Внутренняя оценка.

4.3 Пример 3 с нулевой матрицей B

Так как матрица B — вырожденная, то регуляризуем ее (малое шевеление, $\varepsilon = 1e - 15$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad T = 1, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проекция множества достижимости на двумерную статическую ось в момент времени T.

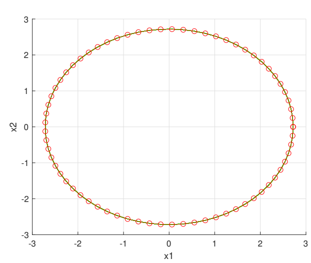

Рис. 17: Внешняя оценка.

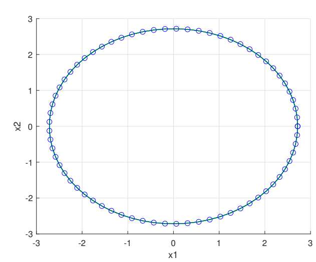

Рис. 18: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную статическую плоскость.

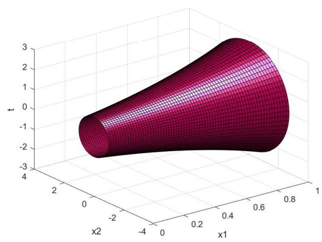

Рис. 19: Внешняя оценка.

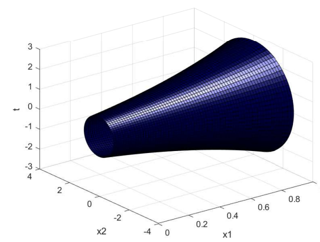

Рис. 20: Внутренняя оценка.

Проекция множества достижимости на двумерную динамическую ось в момент времени T.

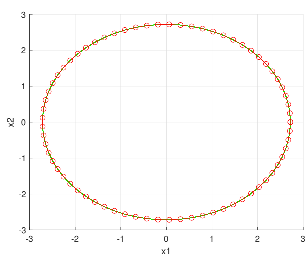

Рис. 21: Внешняя оценка.

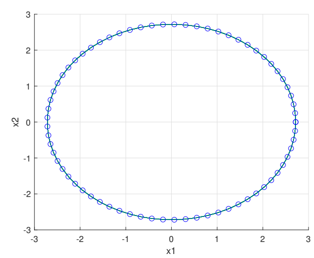

Рис. 22: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

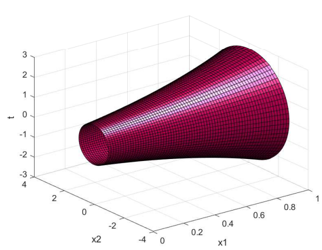

Рис. 23: Внешняя оценка.

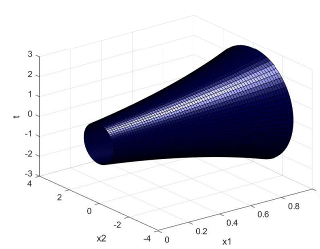

Рис. 24: Внутренняя оценка.

4.4 Пример 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 70 & 1 & 0.05 \\ 0.01 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad T = 1, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проекция множества достижимости на двумерную статическую ось в момент времени T.

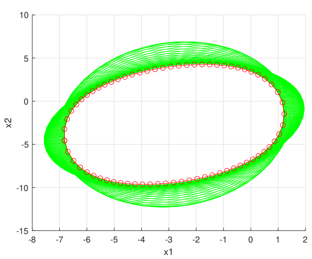

Рис. 25: Внешняя оценка.

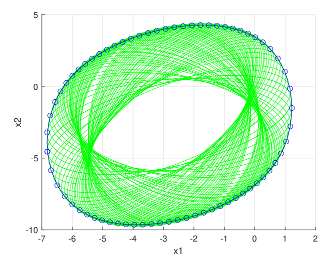

Рис. 26: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную статическую плоскость.

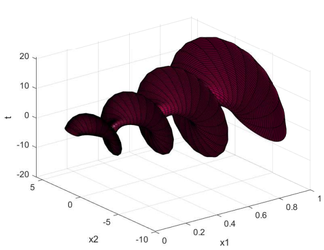

Рис. 27: Внешняя оценка.

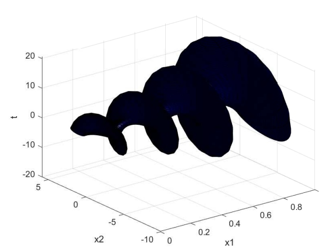

Рис. 28: Внутренняя оценка.

Проекция множества достижимости на двумерную динамическую ось в момент времени T.

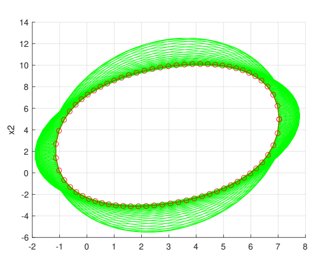

Рис. 29: Внешняя оценка.

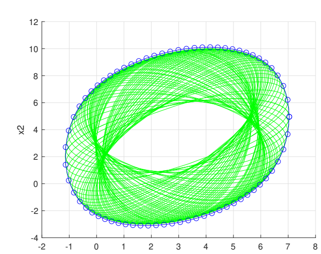

Рис. 30: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

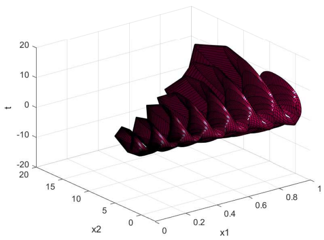

Рис. 31: Внешняя оценка.

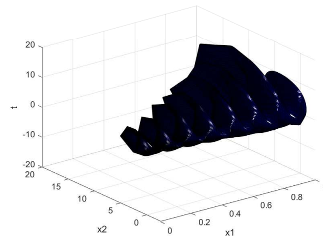

Рис. 32: Внутренняя оценка.

4.5 Пример 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5t^2 \\ -4t & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0.1, \quad T = 1, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проекция множества достижимости на двумерную статическую ось в момент времени T.

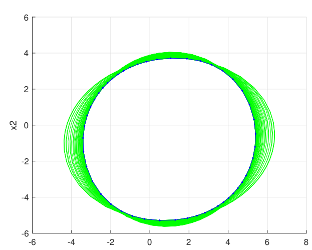

Рис. 33: Внешняя оценка.

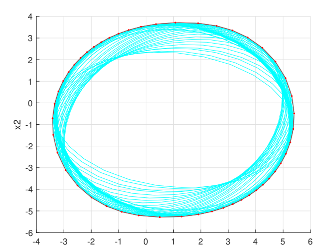

Рис. 34: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную статическую плоскость.

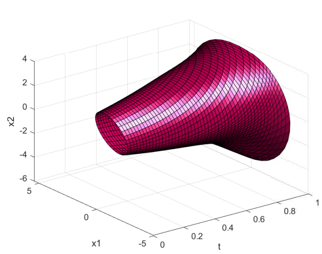

Рис. 35: Внешняя оценка.

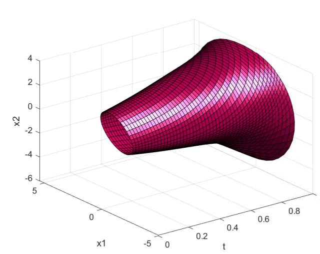

Рис. 36: Внутренняя оценка.

Проекция множества достижимости на двумерную динамическую ось в момент времени T.

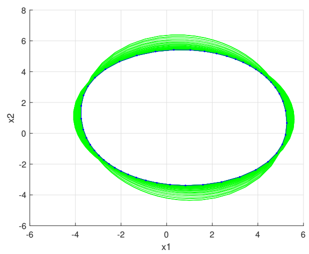

Рис. 37: Внешняя оценка.

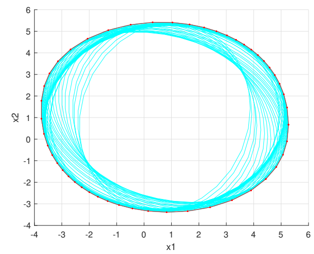

Рис. 38: Внутренняя оценка.

Проекция трубки достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

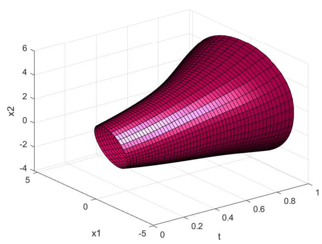

Рис. 39: Внешняя оценка.

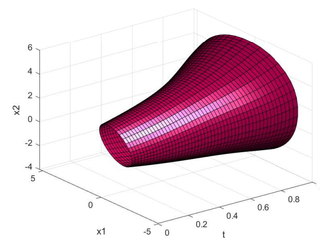

Рис. 40: Внутренняя оценка.

Сечения трубки достижимости на трехмерную статическую и динамическую плоскость.

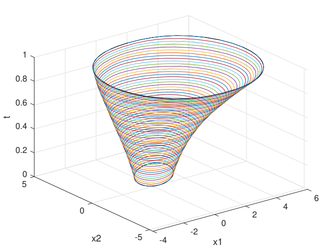

Рис. 41: Статическая плоскость.

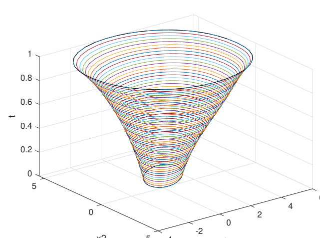

Рис. 42: Динамическая плоскость.

Проекции внешней и внутренней трубки, а также оригинального множества достижимости на трехмерную статическую плоскость.

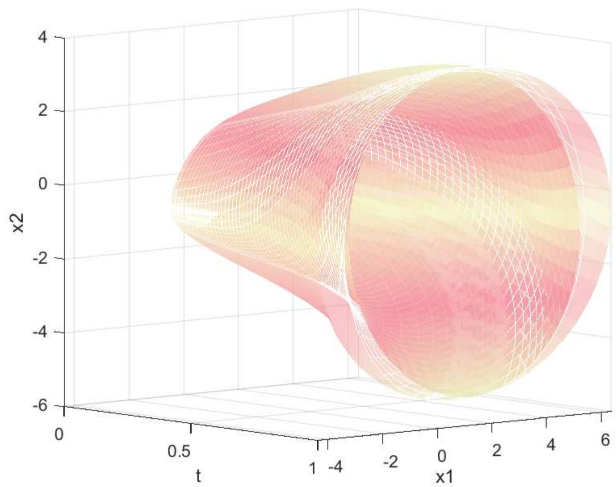

Рис. 43: Внешняя и внутренняя оценка множества достижимости, а также само оригинальное множество

Проекции внешней и внутренней трубки, а также оригинального множества достижимости на трехмерную динамическую плоскость.

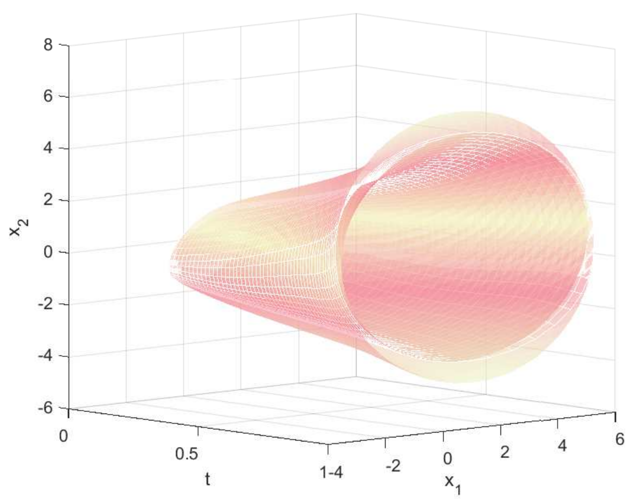

Рис. 44: Внешняя и внутренняя оценка множества достижимости, а также само оригинальное множество

Список литературы

[1] Kurzhanskiy A. A., Varaiya P.,Ellipsoidal Toolbox, 2006.

[2] Куржанский А. Б., Лекции по курсу: Динамическое программирование и системы управления, 2018.