Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная задача быстродействия»

Задание 1

Студент 315 группы
А. В. Корушкина

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f,\ t \in [t_0, +\infty)$$

Здесь $x, f \in \mathbb{R}^2$,$A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $u \in \mathbb{R}^2$. На значение управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0$ — начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ — целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2 : (x_1 - \alpha)^2 + 9x_2^4 \leq r\};$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + a)^2 + x_2^2 \leq b, (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq b\},\ \ a, b > 0;$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x_1\}.$$

1) Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A, B, f, t_0, r, a, b, x_1, \alpha$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение T, построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна расчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной "оптимальной траектории". Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.

2) В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Теоретическое обоснование

Рассмотрим линейную задачу быстродействия:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f,\ t \in [t_0, t_1],\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u \in \mathcal{P} \in conv\mathbb{R}^2, \tag{2}$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}_0,\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1, \tag{3}$$

$$\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1 \in conv\mathbb{R}^2, \tag{4}$$

$$I(u(t)) = t_1 - t_0 \longrightarrow min \tag{5}$$

Определение 1 *Оптимальной парой называется $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$, удовлетворяющая 1) – 5).*

2.1 Принцип максимума Понтрягина

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина) *Пусть* $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ *— оптимальная пара на* $[t_0, t_1]$*, являющаяся решением задачи быстродействия. Тогда существует функция* $\phi(t)$ *— сопряженная переменная, определенная на* $t \in [t_0, t_1]$*, являющаяся нетривиальным решением системы:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A(t)^T \psi(t) \\ \psi(t_0) = \psi_0 \end{cases}$$

и такая, что выполнены условия:

1) условие максимума

$$< Bu(t)^*, \psi(t) >= \rho(\psi(t)|B\mathcal{P});$$

2) условие трансверсальности на левом конце

$$< \psi(t_0), x(t_0) >= \rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}_0);$$

3) условие трансервальности на правом конце

$$< -\psi(t_1), x(t_1)^* >= \rho(-\psi(t_1)|\mathcal{X}_1).$$

Для решения поставленной задачи необходимо найти опорные функции множеств $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{P}$. Пусть X - евклидово пространство, а $A \subset X$ — его непустое подмножество.

Определение 2 *Опорная функция множества* $A \subset X$ *определена соотношением*

$$\rho(l|A) = \sup_{x \in A} < l, x >, \quad \forall l \in X.$$

Пусть $A \subset X$ — непустое множество. Тогда верны:

Свойство 1 *Положительная однородность*

$$\rho(\alpha l|A) = \alpha\rho(l|A), \ \ \forall \alpha \geq 0$$

Свойство 2 *Опорная функция аддитивна по второму аргументу:*

$$\rho(\cdot|A + B) = \rho(\cdot|A) + \rho(\cdot|B).$$

Свойство 3 *Пусть* $L : X \longrightarrow X$ *— линейный непрерывный оператор. Тогда*

$$\rho(l|LA) = \rho(L^T l|A), \ \ \forall l \in X.$$

2.2 Опорная функция множества $\mathcal{X}_1$.

Множество $\mathcal{X}_1$ состоит из одной точки x_1, поэтому опорная для него функция равна

$$\rho(l|\mathcal{X}_1) =< l, x_1 > .$$

2.3 Опорная функция множества $\mathcal{X}_0$.

$$\mathcal{X}_0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + a)^2 + x_2^2 \le b, (x_1 - a)^2 + x_2^2 \le b\}, \ \ a, b > 0$$

Множество $\mathcal{X}_0$ — пересечение двух кругов радиусами $\sqrt{b}$ с центрами в точках $(\pm a, 0)$. Найдем точки пересечений дуг соответствующих окружностей, для этого нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 + a)^2 + x_2^2 = b \\ (x_1 - a)^2 + x_2^2 = b \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, получаем ,что $x_1 = 0$, и $x_2 = \sqrt{b - a^2}$.
Так как множество симметрично относительно осей Ox_1 и Ox_2, то посчитаем значение опорной функции только при $x_1, x_2 \ge 0$.
Воспользуемся методом множителей Лагранжа.

$$\mathcal{L} = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \lambda((x_1 + a)^2 + x_2^2 - b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = l_1 + 2\lambda(x_1 + a) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = l_2 + 2\lambda x_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (x_1 + a)^2 + x_2^2 - b = 0 \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем , что $x_1 = -a - \frac{l_1}{2\lambda}$ и $x_2 = -\frac{l_2}{2\lambda}$. Подставляем выражения в третье уравнение и находим соответствующие λ.

$$\frac{l_1^2}{4\lambda^2} + \frac{l_2^2}{4\lambda^2} = b$$

$$\frac{1}{2\lambda} = \pm\sqrt{\frac{b}{l_1^2 + l_2^2}}$$

Нам необходимо максимизировать $l_1 x_1 + l_2 x_2$, поэтому выбираем λ с минусом. Следовательно получаем вектор, на котором достигается максимум значения функционала.

$$x_1^* = l_1\sqrt{\frac{b}{l_1^2 + l_2^2}} - a$$

$$x_2^* = l_2\sqrt{\frac{b}{l_1^2 + l_2^2}}$$

Так как мы рассматриваем первую четверть, то найдем соответсвующие ограничения на l_1, l_2 (из нашего предположения они положительны). Известно, что $x_1^*, x_2^* \ge 0$, следовательно,

$$\begin{cases} l_1\sqrt{\frac{b}{l_1^2 + l_2^2}} - a \ge 0 \\ l_2\sqrt{\frac{b}{l_1^2 + l_2^2}} \ge 0 \end{cases}$$

Исходя из этого, получаем

$$\begin{cases} \frac{l_2^2}{l_1^2} \le \frac{b - a^2}{a^2} \\ l_2 > 0. \end{cases}$$

Следовательно, при таких ограничениях, опорная функция к этому множеству будет равна $\sqrt{b(l_1^2+l_2^2)} - l_1 a$. Иначе, при $\frac{l_2^2}{l_1^2} > \frac{b-a^2}{a^2}$ максимум будет такой же, что и при направлении $(0, l_2)$ в точке $(0, \sqrt{b-a^2})$. Значит, опорная функция при данных ограничениях равна $\sqrt{b-a^2} l_2$.
Если $l_2 = 0$, то максимум наблюдается в точке $(\sqrt{b}-a, 0)$, и опорная функция такая же, как и при первых ограничения, подставляя вместо l_2 ноль.
В силу симметрии опорная функция для $\mathcal{X}_0$ равна

$$\rho(l|\mathcal{X}_0) = \begin{cases} \sqrt{b(l_1^2+l_2^2)} - |l_1| a, & \frac{l_2^2}{l_1^2} \leq \frac{b-a^2}{a^2}, \\ \sqrt{b-a^2}|l_2|, & l_2^2 > \frac{b-a^2}{a^2} l_1^2, \end{cases}$$

2.4 Опорная функция множества $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2 : (x_1 - \alpha)^2 + 9x_2^4 \leq r\}$$

Заметим, что множество $\mathcal{P}$ можно представить в виде $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, где $\mathcal{P}_1 = (\alpha, 0)$ и $\mathcal{P}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2 : x_1^2 + 9x_2^4 \leq r\}$. Следовательно, используя свойство опорных функций, получаем :

$$\rho(l|\mathcal{P}) = \rho(l|\mathcal{P}_1) + \rho(l|\mathcal{P}_2).$$

1) По определению находим опорную функцию для $\mathcal{P}_1$:

$$\rho(l|\mathcal{P}_1) = \alpha l_1.$$

2) Воспользуемся методом множителей Лагранжа.

$$\mathcal{L} = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \lambda(x_1^2 + 9x_2^4 - r)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = l_1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = l_2 + 36\lambda x_2^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^2 + 9x_2^4 - r = 0 \end{cases}$$

Пусть $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$. Из системы выражаем x_1, λ через x_2 и подставляем в уравнение для границы. Получаем :

$$\left(18\frac{l_1}{l_2}\right)^2 x_2^6 + 9x_2^4 - r = 0$$

Пусть $k = x_2^2$.
Исследуем функцию от новой переменной

$$f(k) = \left(18\frac{l_1}{l_2}\right)^2 k^3 + 9k^2 - r,\ k > 0$$

.
Так как $f'(k) = 3\left(18\frac{l_1}{l_2}\right)^2 k^2 + 18k > 0, \forall k > 0$, то функция $f(k)$, при данных ограничениях возрастает. Заметим, что $f(0) = -r < 0$ и $f\left(\frac{\sqrt{r}}{3}\right) = \left(18\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \frac{\sqrt{r}^3}{27} >$

0. Следовательно, существует и единственный корень $k_0 \in (0, \frac{\sqrt{r}}{3})$, который можно вычислить численно в процессе работы программы. Тогда:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{18 l_1 x_2^3}{l_2}, \\ x_2^* = \sqrt{k_0} sgn(l_2) \end{cases}$$

Если $l_1 = 0$, тогда $x_1^* = 0$. Подставляя x_1^* в граничное уравнение, находим $x_2^* = \sqrt[4]{\frac{r}{9}} sgn(l_2)$.
Если $l_2 = 0$, тогда $x_2^* = 0$. Следовательно, $x_1^* = \sqrt{r} sgn(l_1)$.
Значит, с учетом первого пункта получаем:

- При $l_1, l_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{18 l_1 x_2^3}{l_2} + \alpha, \\ x_2^* = \sqrt{k_0} sgn(l_2) \end{cases}$$

- При $l_1 \cdot l_2 = 0$:

$$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{r} sgn(l_1) + \alpha, \\ x_2^* = \sqrt[4]{\dfrac{r}{9}} sgn(l_2) \end{cases}$$

3 Описание численного алгоритма

В силу автономности системы можно произвольно выбрать конечный момент ($T = T_{max}$) и решать задачу в обратном времени. Следовательно, можно сделать замену переменных $t = -k$, значит, задача в новых переменных будет сформулирована так:

$$\dot{y} = -Ay(k) - Bv(k) - f, k \in [k_0, k_1],$$

$$y(k_0) = x_1, y(k_1) \in \mathcal{X}_0, v \in \mathcal{P},$$

$$T - t_0 \longrightarrow min,$$

где

$$k_0 = -T, k_1 = -t_0,$$

$$y(k) = x(-t), v(k) = u(-t).$$

1. Проверяем, находится ли точка x_1 в $\mathcal{X}_0$. Если $x_1 \in \mathcal{X}_0$, то $t_1 = 0$.

2. Перебор значений $\psi(k_0)$ по единичной окружности.Так как никаких ограничений на $\psi(k_0)$ нет, то будем перебирать их по окружности единичного радиуса. Число точек на окружности вынесено в пользовательский интерфейс.

3. Для каждого такого вектора будем решать задачу Коши для системы в обратном времени на отрезке $[k_0, k_1]$. Соответственно, с начальным условием - $(x_1, \psi(k_0))^T$. Для решения данной системы дифференциальных уравнений используем инструменты **Matlab** с помощью функции **ode45**, которая использует метод Рунге-Кутта четвертого порядка, где точность определяется параметрами **Reltol** и **Abstol**.

4. Нахождение "оптимального"управления, соответствующего решению сопряженной задачи, нахождение "оптимальной"траектории.

5. Для контроля попадания траектории в множество $\mathcal{X}_0$ используется **Events function**, в которой проверяется неравенство

$$\begin{cases} (x_1 + a)^2 + x_2^2 \leq b, \\ (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq b \end{cases} \tag{6}$$

   В случае попадания - сравниваем время быстродействия с минимальным и запоминаем, если оно таковым является.

6. Проверка условия трансверсальности по формуле:

$$\Delta = \left| < -\psi(t_0), x(t_0) > - \rho(-\psi(t_0)|\mathcal{X}_0) \right|.$$

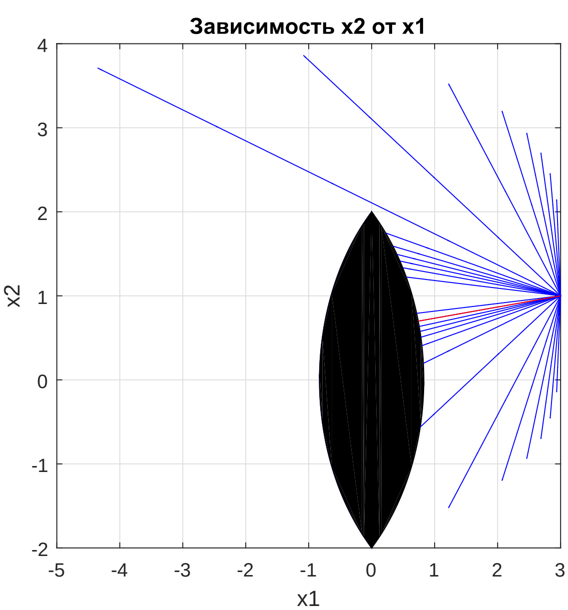
   При этом, вектор $\psi(t_0)$ нужно ортонормировать.

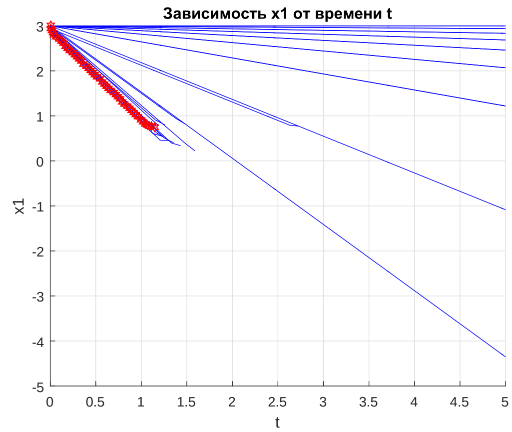
7. Для уточнения решения в программе реализовано два режима: глобального и локального улучшения решения. При выборе глобального улучшения пользователем изменяются **Reltol, Abstol**, шаг перебора для $\psi(t_1)$, где t_1 - минимальное время, посчитанное до этого этапа. При локальном улучшении находится угол α, соответствующей оптимальной траектории и перебираются углы в окрестности α, с меньшим шагом разбиения $d\psi$.

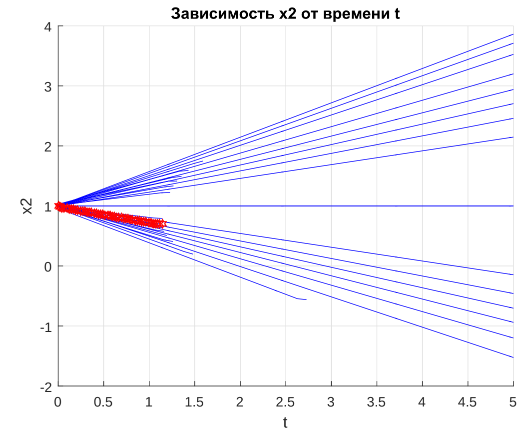
4 Примеры

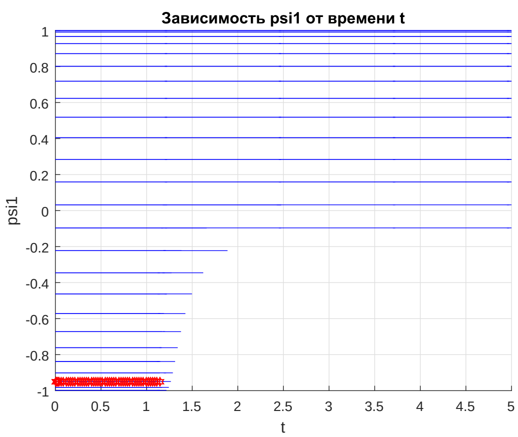
4.1 Пример № 1

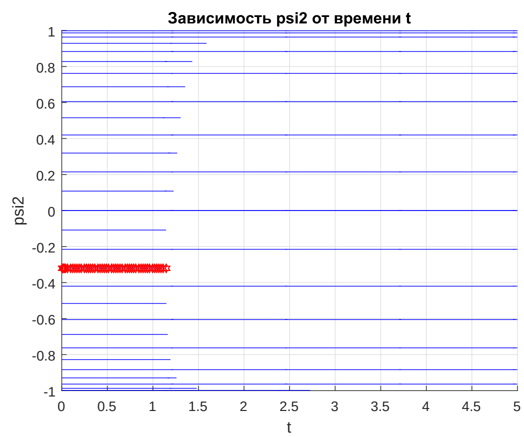
Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_0 = 0, a = 2, b = 8, \alpha = 1, r = 1, N = 50$. В результате работы программы получаем $T = 1.1421$, погрешность выполнения условия трансверсальности $\Delta = 0.0070$. Приведем соответствующие графики.

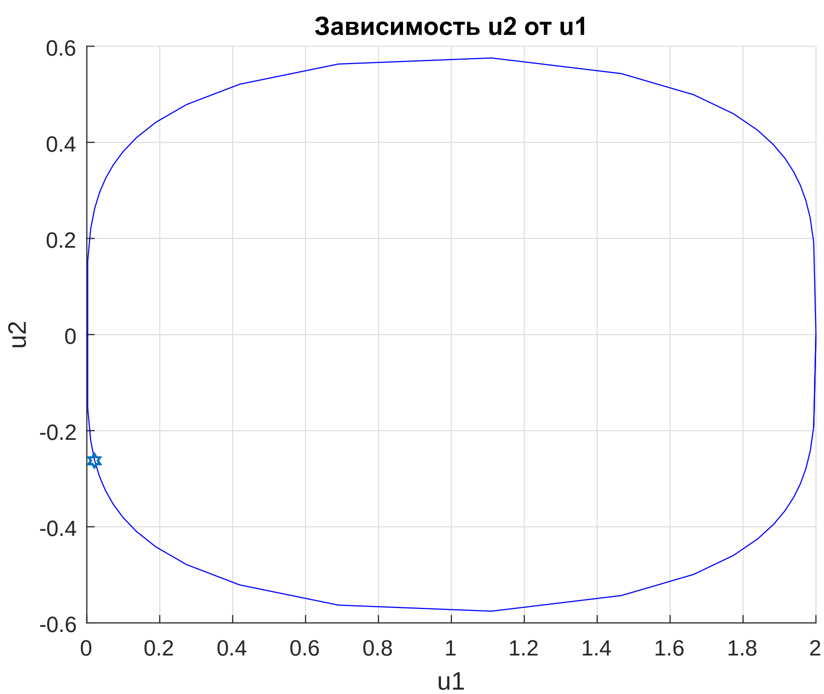



Зависимость x1 от времени t
x1
t


Зависимость x2 от времени t
x2
t


Зависимость psi1 от времени t
psi1
t


Зависимость psi2 от времени t
psi2
t


Зависимость u2 от u1
u2
u1

Список литературы

[1] Рублев И. В., Лекции по курсу: Оптимальное управление, 2017

[2] Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2014.