



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

**«Исследование нелинейной
динамики систем
дифференциальных уравнений»**

Часть 2

Студент 315 группы
А. В. Корушкина

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи	2
2 Биологическая интерпретация системы	2
3 Переход к безразмерным параметрам	3
4 Нахождение неподвижных точек системы	4
5 Устойчивость неподвижных точек системы	8
5.1 $\beta = \gamma$	9
5.2 $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$	11
5.3 Случаи с одним фиксированным параметром	12
6 Фазовые портреты системы	13
6.1 $\beta = \gamma$	13
6.2 $\beta = \frac{1}{2}$	16
7 Бифуркация Андронова - Хопфа, предельные циклы системы	19
7.1 $\beta = \gamma$	20
7.2 $\beta = \frac{1}{2}$	22
8 Биологическая интерпретация полученных результатов	24
9 Выводы	25

1 Постановка задачи

Исследовать нелинейную динамику следующей системы с непрерывным временем:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -\frac{cy^2}{B+y} + \frac{dxy}{1+Ax}, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c, B — положительные параметры и $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Нужно:

1. Дать интерпретацию системы.
2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входных параметров. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значения параметров. Результаты представить в виде 'параметрического портрета' системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет системы. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае вычислить первое число Ляпунова. Установить характер цикла (устойчивый, неустойчивый и т.д.).
6. Дать биологическую интерпретацию полученных результатов.

2 Биологическая интерпретация системы

Рассмотрим модель 'хищник - жертва', которая является обобщением классической модели Лотки - Вольтерры.

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{A}(u) - \tilde{B}(u, v), \\ \dot{v} = -\tilde{C}(v) + \tilde{D}(u, v), \end{cases}$$

где u, v — численности жертв и хищников соответственно, $\tilde{A}(u)$ — функция, описывающая размножение жертв при отсутствии хищников, $\tilde{B}(u, v)$ — функция, описывающая выедание жертв хищниками, $\tilde{C}(v)$ — функция, описывающая вымирание хищников при отсутствии жертв, $\tilde{D}(u, v)$ — эффективность потребления жертв хищниками. Значит, что система (1) описывает модель 'хищник - жертва'. В данном случае

$$\tilde{A}(x) = ax, \quad \tilde{B}(x, y) = \frac{bxy}{1+Ax},$$

$$\tilde{C}(y) = \frac{cy^2}{B+y}, \quad \tilde{D}(x, y) = \frac{dxy}{1+Ax}.$$

В качестве аналитических выражений для $\tilde{A}(u)$ выбрана модель Томаса Мальтуса. $\tilde{A}(x) = ax$, где $a > 0$ — скорость роста популяции жертв. Следовательно, в отсутствии хищников

численность жертв неограниченно растет.

$\tilde{B}(u, v)$ характеризует процесс выедания жертв хищниками. Заметим, что данную функцию можно представить в виде:

$$\tilde{B}(u, v) = B_1(u)B_2(v),$$

где $B_1(u)$ — трофическая функция хищника, а $B_2(v)$ описывает зависимость скорости выедания жертвы от плотности популяции хищника.

В нашей задаче $B_1(x) = \frac{bx}{1+Ax}$. По Холлингу ее можно отнести к трофическим функциям второго типа, отражающим явление насыщения хищников: $\lim_{x \rightarrow +\infty} B_1(x) = \frac{b}{A}$, где $b > 0$ — некоторая константа. Таким образом, при фиксированном количестве хищников с ростом популяции жертв число выедания последних не превышает некоторого фиксированного числа.

Из системы (1) можно понять, что $B_2(y) = y$. Функция $B_2(y)$ линейная, следовательно мы рассматриваем ситуацию, когда отсутствует конкуренция хищников за жертв.

Функция $\tilde{C}(y)$ отвечает за вымирание хищников при отсутствии жертв. В данном случае $\tilde{C}(y)$ нелинейно зависит от численности хищников, что говорит нам о том, что при малой численности популяции конкуренция будет достаточно малой.

Функция $\tilde{D}(u, v)$ характеризует пользу, которую получает хищник от потребления жертв. Так же, как и с $\tilde{B}(u, v)$, $\tilde{D}(u, v)$ можно представить в виде: $\tilde{D}(u, v) = D_1(u)D_2(v)$. В нашей задаче $D_1(x) = \frac{dx}{1+Ax}$ (пропорциональная $B_1(x)$) и $D_2(y) = y$. Следовательно, в модели принято предположение о постоянном коэффициенте переработки хищником пищи в собственную биомассу.

3 Переход к безразмерным параметрам

Для системы (1) сделаем стандартную замену переменных:

$$x(t) = Mu(\tau), \quad y(t) = Nv(\tau), \quad t = T\tau,$$

где M, N, T — некоторые постоянные. Учитывая, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{u}(\tau)}{T},$$

где точка обозначает производную по τ , получим, что

$$\begin{cases} \frac{M}{T}\dot{u} = aMu - \frac{bMNuv}{1+MAu}, \\ \frac{N}{T}\dot{v} = -\frac{cN^2v^2}{B+Nv} + \frac{dMNuv}{1+MAu}. \end{cases}$$

Домножая на T и сокращая на M и N первое и второе уравнение соответственно, находим:

$$\begin{cases} \dot{u} = aTu - \frac{bNTuv}{1+MAu}, \\ \dot{v} = -\frac{cNTv^2}{B+Nv} + \frac{dMTuv}{1+MAu}. \end{cases}$$

Положим $aT = 1, MA = 1, N = B$. Значит система (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{\alpha uv}{1+u}, \\ \dot{v} = -\frac{\beta v^2}{1+v} + \frac{\gamma uv}{1+u}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha = \frac{bB}{a} > 0$, $\beta = \frac{c}{a} > 0$, $\gamma = \frac{d}{aA} > 0$, $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$. Значит, чтобы привести систему (1) к (2), необходимо сделать следующую замену переменных:

$$u(\tau) = Ax(t), \quad v(\tau) = \frac{y(t)}{B}, \quad \tau = at.$$

4 Нахождение неподвижных точек системы

Пусть

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3)$$

Определение 1 Позициями равновесия системы (3) называются такие точки фазового пространства u^* , что $f(u^*) = 0$.

Для нахождения неподвижных точек системы (2) решим следующую систему.

$$\begin{cases} u - \frac{\alpha uv}{1+u} = 0, \\ -\frac{\beta v^2}{1+v} + \frac{\gamma uv}{1+u} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} u \left(1 - \frac{\alpha v}{1+u}\right) = 0, \\ v \left(-\frac{\beta v}{1+v} + \frac{\gamma u}{1+u}\right) = 0. \end{cases}$$

Точка $O = (0, 0)$ будет являться решением системы при любых параметрах. Заметим, что точек вида $(0, p)$ и $(p, 0)$, где $p > 0$, нет, так как из того, что $u^* = 0$ следует $v^* = 0$, и наоборот.

Теперь найдем нетривиальное решение.

$$\begin{cases} 1 - \frac{\alpha v}{1+u} = 0, \\ -\frac{\beta v}{1+v} + \frac{\gamma u}{1+u} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha v = 1 + u, \\ -\frac{\beta v}{1+v} + \frac{\gamma u}{1+u} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \alpha v - 1, \\ -\frac{\beta v}{1+v} + \frac{\gamma(\alpha v - 1)}{\alpha v} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} u = \alpha v - 1, \\ -\alpha \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1\right)v^2 + (\alpha - 1)v - 1 = 0. \end{cases}$$

Пусть $l = \frac{\beta}{\gamma}$. Тогда получившуюся систему можно переписать так:

$$\begin{cases} u = \alpha v - 1, \\ -\alpha(l - 1)v^2 + (\alpha - 1)v - 1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $l = 1$, тогда система (4) примет вид:

$$\begin{cases} u = \alpha v - 1, \\ (\alpha - 1)v - 1 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, система (2) будет иметь решение: $(u, v) = \left(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1}\right)$.

Пусть $l \neq 1$, тогда уравнение $-\alpha(l - 1)v^2 + (\alpha - 1)v - 1 = 0$ является квадратным относительно v . Рассмотрим его дискриминант.

$$D = (\alpha - 1)^2 - 4\alpha(l - 1) = (\alpha + 1)^2 - 4\alpha l.$$

- Если $l > \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$, наше уравнение не имеет вещественных корней, так как $D < 0$.

2. Если $l = \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$, что равносильно $D = 0$. Следовательно, система (4) будет иметь единственное решение:

$$\begin{cases} v^* = \frac{1-\alpha}{2\alpha(1-l)}, \\ u^* = \frac{1-\alpha}{2(1-l)} - 1. \end{cases} \iff \begin{cases} v^* = \frac{2}{\alpha-1}, \\ u^* = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}. \end{cases}$$

3. Если $l < \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$ ($D > 0$), то система (4) будет иметь два решения:

$$\begin{cases} v_1^* = \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}, \\ u_1^* = \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1. \end{cases} \quad \begin{cases} v_2^* = \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}, \\ u_2^* = \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1. \end{cases}$$

Теперь нужно найти значения параметров системы, при которых нетривиальное решение системы (2) $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$.

1. Если $l = 1$, то решение системы $\left(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1}\right)$ принадлежит \mathbb{R}_+^2 при $\alpha > 1$.
2. Если $l = \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$, то система будет иметь решение вида: $(u^*, v^*) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1}\right)$. Для выполнения условий $u^* > 0$, $v^* > 0$, необходимо, чтобы $\alpha > 1$.
3. Если $l < \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$, то возможны решения:

$$\begin{cases} v_1^* = \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}, \\ u_1^* = \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1. \end{cases} \quad \begin{cases} v_2^* = \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}, \\ u_2^* = \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1. \end{cases}$$

Рассмотрим точку (u_1^*, v_1^*) .

Пусть $f_1(\alpha, l) = v_1^* = \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}$ и $f_2(\alpha, l) = u_1^* = \frac{2l-1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)}$.

Рассмотрим условия, при которых $f_1(\alpha, l) > 0$.

- Если $0 < \alpha < 1$, то $f_1(\alpha, l) > 0$ при $0 < l < 1$.
- Если $\alpha > 1$, то $1 - \alpha + \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha l}$ имеет такой же знак, как и $(1 - l)$. Следовательно, в области $\alpha > 1$, $0 < l < \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$ функция $f_1(\alpha, l)$ будет положительной.

Рассмотрим условия, при которых $f_2(\alpha, l) > 0$.

- Если $l > \frac{\alpha+1}{2}$, то $f_2(\alpha, l) > 0$ при $0 < l < 1$.
- Если $0 < l < \frac{\alpha+1}{2}$, то $2l - 1 - \alpha + \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha l}$ имеет такой же знак, как и $(1 - l)$. Следовательно, в области $\alpha > 0$, $0 < l < \frac{\alpha+1}{2}$ функция $f_2(\alpha, l)$ будет положительной.

Построим соответственно 'карту' знаков функций $f_1(\alpha, l)$ и $f_2(\alpha, l)$.

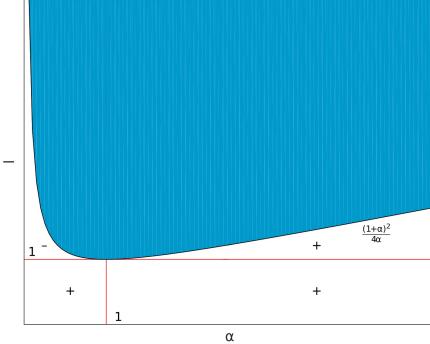


Рис. 1: Знаки функции $f_1(\alpha, l)$

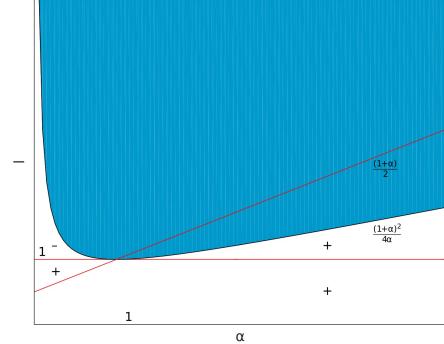


Рис. 2: Знаки функции $f_2(\alpha, l)$

Значит, точка $(u_1^*, v_1^*) \in \mathbb{R}_+^2$ при $0 < l < 1$, $\alpha > 0$ или при $1 < l < \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$, $\alpha > 1$.

Теперь рассмотрим точку (u_2^*, v_2^*) .

Пусть $f_3(\alpha, l) = v_2^* = \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}$ и $f_4(\alpha, l) = u_2^* = \frac{2l-1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)}$. Рассмотрим условия, при которых $f_3(\alpha, l) > 0$.

- (a) Если $\alpha > 1$, то $f_3(\alpha, l) > 0$ при $1 < l < \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$.
- (b) Если $0 < \alpha < 1$, то $1 - \alpha - \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha l}$ имеет другой знак, чем $(1 - l)$. Следовательно, в области $0 < \alpha < 1$, $0 < l < \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$ функция $f_3(\alpha, l)$ будет отрицательной.

Рассмотрим условия, при которых $f_4(\alpha, l) > 0$.

- (a) Если $0 < l < \frac{\alpha+1}{2}$, то $f_2(\alpha, l) > 0$ при $1 < l < \frac{\alpha+1}{2}$, $\alpha > 0$.
- (b) Если $l > \frac{\alpha+1}{2}$, то $2l - 1 - \alpha + \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha l}$ имеет другой знак, чем $(1 - l)$. Следовательно, в области $0 < \alpha < 1$, $\frac{\alpha+1}{2} < l < \frac{\alpha+1}{2}$ функция $f_2(\alpha, l)$ будет отрицательной.

Построим соответственно 'карту' знаков функций $f_3(\alpha, l)$ и $f_4(\alpha, l)$.

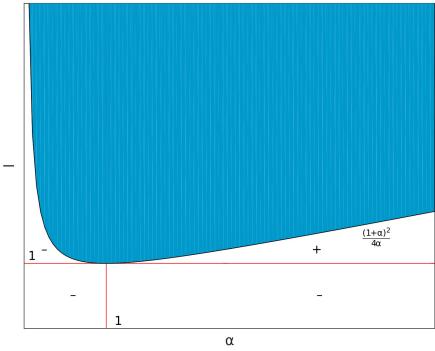


Рис. 3: Знаки функции $f_3(\alpha, l)$

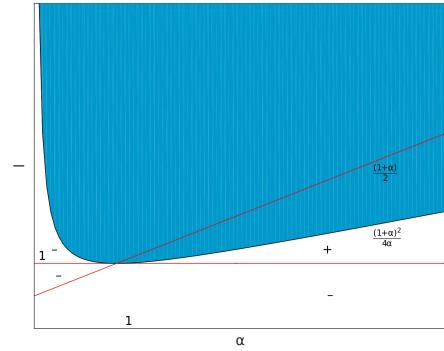
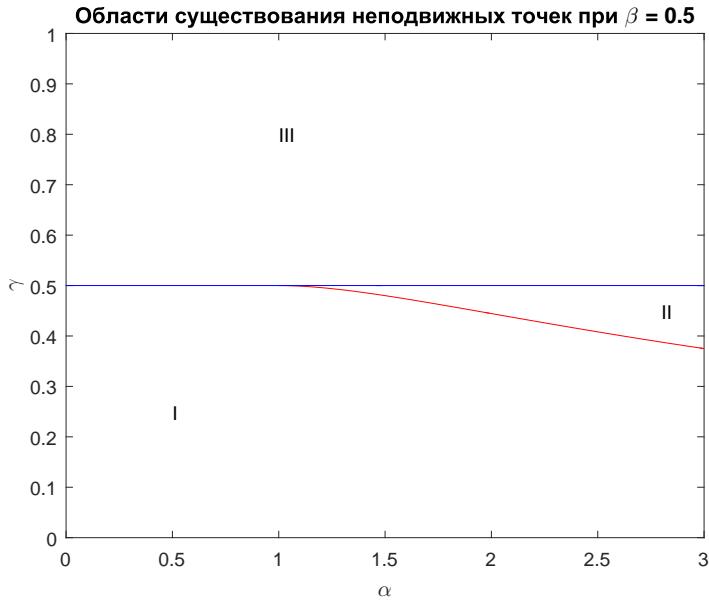


Рис. 4: Знаки функции $f_4(\alpha, l)$

Значит, точка $(u_2^*, v_2^*) \in \mathbb{R}_+^2$ при $1 < l < \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$, $\alpha > 1$.

Следовательно, при фиксированном $\beta = \frac{1}{2}$ можно выделить следующие области существования неподвижных точек системы.



Вывод 1 Система (2) имеет:

1. при $\frac{\beta}{\gamma} = 1$, $\alpha > 1$ две неподвижные точки $O = (0, 0)$ и $(u, v) = \left(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1}\right)$.
2. при $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$, $\alpha > 1$ две неподвижные точки $O = (0, 0)$ и $(u^*, v^*) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1}\right)$.
3. при $0 < \frac{\beta}{\gamma} < 1$, $\alpha > 0$ две неподвижные точки $O = (0, 0)$ и $(u_1^*, v_1^*) = \left(\frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)}\right)$, где $l = \frac{\beta}{\gamma}$ (область III).

4. при $1 < \frac{\beta}{\gamma} < \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$, $\alpha > 1$ три неподвижные точки $O = (0, 0)$,
- $$(u_1^*, v_1^*) = \left(\frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)} \right),$$
- $$(u_2^*, v_2^*) = \left(\frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)} \right),$$
- где $l = \frac{\beta}{\gamma}$ (область II).
5. иначе единственную неподвижную точку $O = (0, 0)$ (область I).

5 Устойчивость неподвижных точек системы

Пусть дана система

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Пусть u^* — ее положение равновесия системы (5), $J(u^*)$ — матрица Якоби функции $f(u)$ в точке u^*, n_+, n_-, n_0 — число собственных значений матрицы $J(u^*)$, учитывая кратность, с положительной, отрицательной и нулевой вещественной частью соответственно.

Определение 2 Положение равновесия динамической системы (5) называется гиперболическим, если $n_0 = 0$, т.е. не существует собственных чисел, расположенных на мнимой оси. Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если $n_+ + n_- \neq 0$.

Теорема 1 (А.М.Ляпунов, А. Пуанкаре) Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия (5). Пусть n_-, n_+ — число собственных значений $J(u^*)$ с отрицательной и положительной вещественной частью соответственно. Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия асимптотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то неустойчиво.

Матрица Якоби для системы (2) равна:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha v}{(1+u)^2} & -\frac{\alpha u}{1+u} \\ \frac{\gamma v}{(1+u)^2} & \frac{\gamma u}{1+u} - \frac{\beta(2v+v^2)}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу Якоби в точке $O = (0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Точка $(0, 0)$ не является гиперболической, вывод об устойчивости нельзя сделать на основе линеаризации в окрестности положения равновесия, скорость сходимости решений к положению равновесия будет не экспоненциальной.

Матрица Якоби для точек (u^*, v^*) решения системы (4). Пользуясь тем, что $u^* = \alpha v^* - 1$, $\frac{\gamma u^*}{1+u^*} = \frac{\beta v^*}{1+v^*}$ и также заметив, что $\frac{1}{1+u^*} = 1 - \frac{u^*}{\alpha v^*}$, получим:

$$\begin{aligned} J(u^*, v^*) &= \begin{pmatrix} \frac{u^*}{\alpha v^*} & -\frac{u^*}{v^*} \\ \frac{\gamma}{\alpha} \left(1 - \frac{u^*}{\alpha v^*}\right) & -\frac{\beta v^*}{(1+v^*)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^*}{\alpha v^*} & -\frac{u^*}{v^*} \\ \frac{\gamma}{\alpha} \left(1 - \frac{u^*}{\alpha v^*}\right) & -\frac{\beta v^*}{1+v^*} + \frac{\beta(v^*)^2}{(1+v^*)^2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u^*}{\alpha v^*} & -\frac{u^*}{v^*} \\ \frac{\gamma}{\alpha} \left(1 - \frac{u^*}{\alpha v^*}\right) & -\frac{\gamma u^*}{\alpha v^*} + \frac{\gamma^2(u^*)^2}{\beta(\alpha v^*)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Положим $k = \frac{u^*}{\alpha v^*}$. Следовательно, в новых обозначениях

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} k & -\alpha k \\ \frac{\gamma}{\alpha}(1-k) & -\gamma k + \frac{\gamma^2}{\beta}k^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Рассмотрим собственные значения λ_1 и λ_2 , которые являются корнями характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} J + \det J = 0,$$

где

$$\operatorname{tr} J = (1-\gamma)k + \frac{\gamma^2 k^2}{\beta},$$

$$\det J = k(-2\gamma k + \frac{\gamma^2 k^2}{\beta} + \gamma).$$

Следовательно,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} J \pm \sqrt{(\operatorname{tr} J)^2 - 4 \det J}}{2}.$$

5.1 $\beta = \gamma$

Пусть $\gamma = \beta$, тогда при $\alpha > 1$ существует точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$

Следовательно, при данных параметрах:

$$\operatorname{tr} J = (1-\beta)k + \beta k^2,$$

$$\det J = k(-2\beta k + \beta k^2 + \beta) = k\beta(k-1)^2 > 0, \forall k > 0.$$

Так как $\det J > 0$, следовательно, точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$ не является седловой точкой.

Учитывая, что $k = \frac{1}{\alpha}$, рассмотрим

$$D = (\operatorname{tr} J)^2 - 4\det J = \left(\frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} \right)^2 - 4\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 =$$

$$= \frac{((1-\beta)\alpha + \beta)^2}{\alpha^4} - \frac{4\beta}{\alpha^3}(1-\alpha)^2 = \frac{((1-\beta)\alpha + \beta)^2 - 4\beta\alpha(1-\alpha)^2}{\alpha^4}.$$

Видим, что знак D зависит от знака числителя.

$$D_1 = ((1-\beta)\alpha + \beta)^2 - 4\beta\alpha(1-\alpha)^2 = (1-\beta)^2\alpha^2 + 2(1-\beta)\alpha\beta + \beta^2 - 4\beta\alpha + 8\beta\alpha^2 - 4\beta\alpha^3 =$$

$$= \beta^2(\alpha-1)^2 + 2\beta(-2\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha) + \alpha^2$$

Получили квадратное относительно β уравнение.

Его дискриминант (поделенный на 4) равен $\alpha^2(\alpha-1)^2(2\alpha-1)^2 - \alpha^2(\alpha-1)^2 = 4\alpha^3(\alpha-1)^3$.

Учитывая, что $\alpha > 1$, получаем, что

$$\beta_{1,2} = \frac{\alpha(2\alpha-1) \pm 2\alpha\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}{\alpha-1} = \frac{\alpha(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha-1})^2}{\alpha-1},$$

причем $\beta_1\beta_2 > 0$ и $\beta_1 + \beta_2 > 0$ (следует из теоремы Виета для квадратного трехчлена). Заметим, что $\beta_1 < \frac{\alpha}{\alpha-1} < \beta_2$. Следовательно,

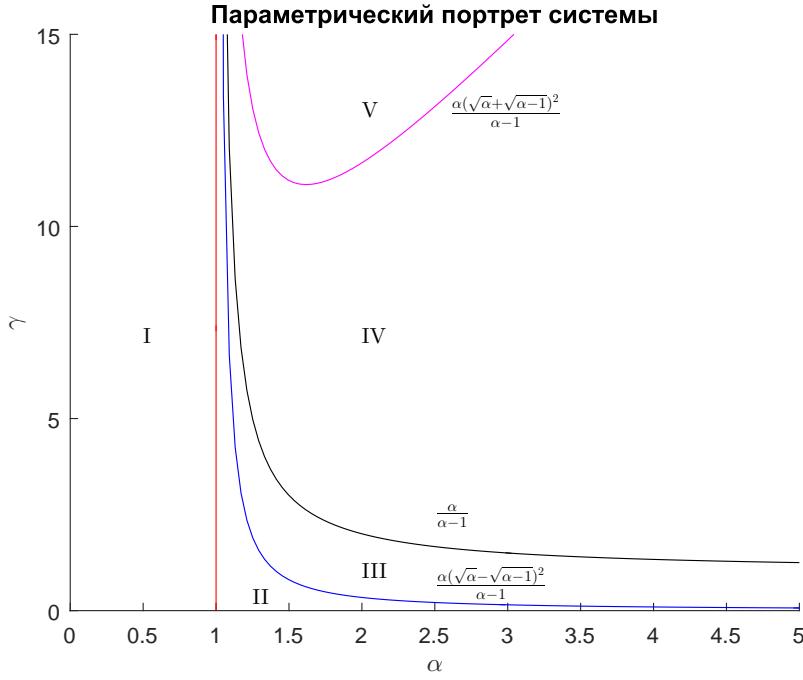
1. при $0 < \beta < \beta_1$ и $\beta > \beta_2$, $D > 0$;
2. при $\beta = \beta_1$ или $\beta = \beta_2$, $D = 0$;
3. при $\beta_1 < \beta < \beta_2$, $D < 0$.

Рассмотрим $\text{tr}J = \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{(1-\beta)\alpha+\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha-\beta(\alpha-1)}{\alpha^2}$. Значит, $\text{tr}J > 0$ при $\beta < \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\text{tr}J = 0$ при $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\text{tr}J < 0$ при $\beta > \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Таким образом, точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$, возникающая при $\gamma = \beta$, $\alpha > 1$,

1. при $0 < \beta < \beta_1$ является неустойчивым узлом, так как $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, $D > 0$, т.е. λ_1 , λ_2 — положительные числа;
2. при $\beta = \beta_1$ является неустойчивым вырожденным узлом, так как $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ и размерность $\ker(J - \lambda I) = 1$;
3. при $\beta_1 < \beta < \frac{\alpha}{\alpha-1}$ является неустойчивым фокусом, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{Re}(\lambda_1) = 2\text{Re}(\lambda_2) > 0$, $D < 0$, т.е. λ_1 , λ_2 — комплексные числа с положительными вещественными частями;
4. при $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ является центром, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{Re}(\lambda_1) = 2\text{Re}(\lambda_2) = 0$, $D < 0$, т.е. λ_1 , λ_2 — чисто мнимые комплексные числа;
5. при $\frac{\alpha}{\alpha-1} < \beta < \beta_2$ является устойчивым фокусом, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{Re}(\lambda_1) = 2\text{Re}(\lambda_2) < 0$, $D < 0$, т.е. λ_1 , λ_2 — комплексные числа с отрицательными вещественными частями;
6. при $\beta = \beta_2$ является устойчивым вырожденным узлом, так как $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ и размерность $\ker(J - \lambda I) = 1$;
7. при $\beta > \beta_2$ является устойчивым узлом, так как $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, $D > 0$, т.е. λ_1 , λ_2 — отрицательные числа;

Следовательно, параметрический портрет системы (для случая $\gamma = \beta$) будет выглядеть следующим образом:



Во всех областях есть точка $(0, 0)$, которая не является гиперболической, и также

1. в области I — нет других неподвижных точек.
2. в области II — неподвижная точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$, которая является неустойчивым узлом.
3. в области III — неподвижная точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$, которая является неустойчивым фокусом.
4. в области IV — неподвижная точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$, которая является устойчивым фокусом.
5. в области V — неподвижная точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$, которая является устойчивым узлом.

$$5.2 \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$$

Пусть $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$, $\alpha > 1$, тогда существует неподвижная точка $(u^*, v^*) = (\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1})$. В наших обозначениях $k = \frac{\alpha+1}{2\alpha}$. Из (6) следует, что

$$\operatorname{tr} J = (1 - \gamma)k + \frac{\gamma^2 k^2}{\beta} = (1 - \gamma)\frac{\alpha + 1}{2\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha + 1 - \gamma\alpha + \gamma}{2\alpha},$$

$$\det J = k(-2\gamma k + \frac{\gamma^2 k^2}{\beta} + \gamma) = \frac{\alpha + 1}{2\alpha}(-\gamma\frac{\alpha + 1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \gamma) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} J}{2} = \frac{\alpha + 1 - \gamma\alpha + \gamma}{4\alpha}$.

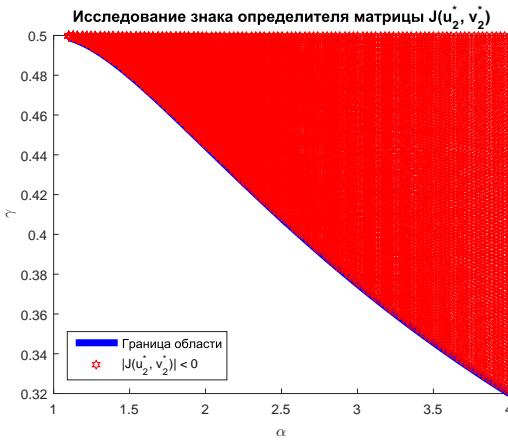
Значит, если $0 < \gamma < \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ точка $(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1})$ будет являться вырожденным неустойчивым узлом, а при $\gamma > \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ — вырожденным устойчивым.

5.3 Случаи с одним фиксированным параметром

Положим $\beta = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим точку $M = (u_2^*, v_2^*) = \left(\frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)} \right)$, где $l = \frac{1}{2\gamma}$.

Численно можно показать, что в области $\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} < \gamma < \frac{1}{2}$, $\alpha > 1$ все точки вида (u_2^*, v_2^*) будут являться седлами. Действительно, определитель матрицы Якоби в точке (u_2^*, v_2^*) при данных ограничениях на параметры будет отрицательным. Чтобы убедиться в этом, приведем график зависимости знака определителя от γ , α .



Таким образом, при $\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} < \gamma < \frac{1}{2}$, $\alpha > 1$ точка $\left(\frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)} \right)$ является седлом.

Рассмотрим точку $K = \left(\frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)} \right)$, где $l = \frac{1}{2\gamma}$. При различных параметрах данная точка будет иметь различный характер устойчивости. Численно можно найти значения параметров γ , α , при которых неподвижную точку можно отнести к соответствующему классу: устойчивый или неустойчивый узел, устойчивый или неустойчивый фокус и т.д.. Получим следующую картину:

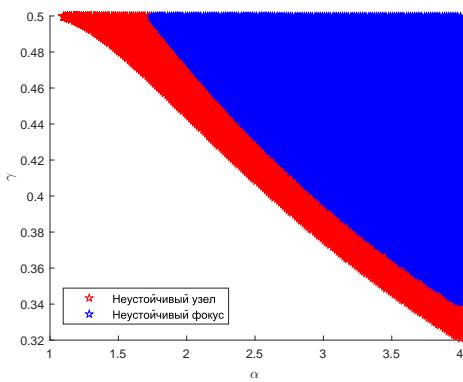


Рис. 5: $\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} < \gamma < \frac{1}{2}$, $\alpha > 1$

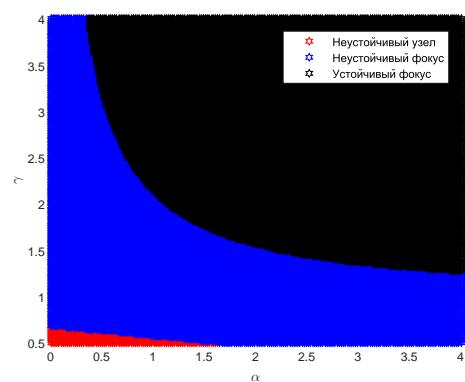
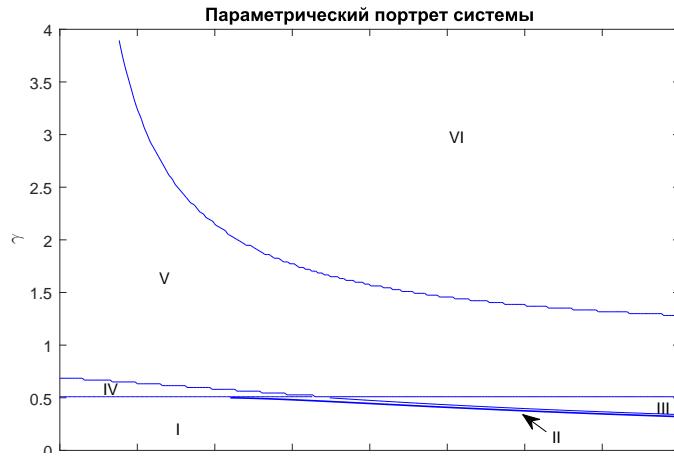


Рис. 6: $\gamma > \frac{1}{2}$, $\alpha > 0$

Таким образом параметрический портрет системы будет выглядеть следующим образом:



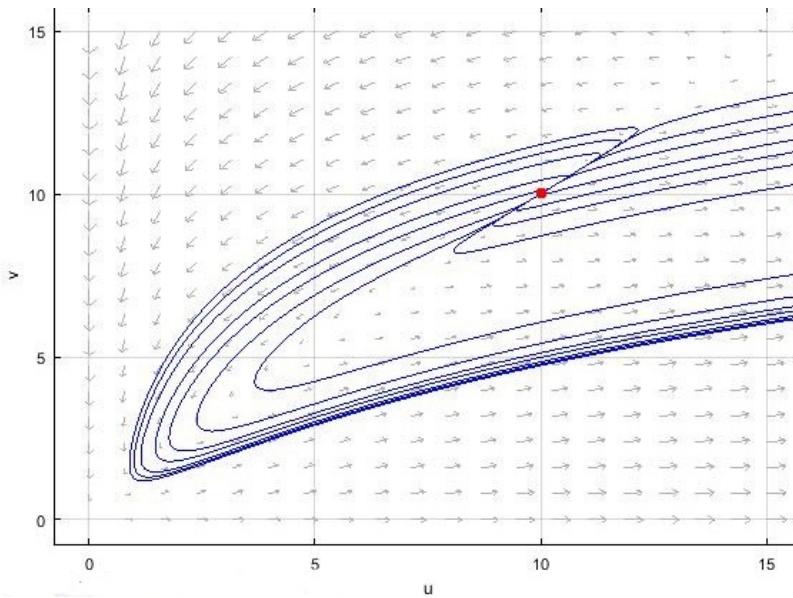
С учетом полученных результатов построим таблицу типов особых точек.

Область	M	K	O
I	не существует	несуществует	существует
II	седло	неуст. узел	существует
III	седло	неуст. фокус	существует
IV	не существует	неуст. узел	существует
V	не существует	неуст. фокус	существует
VI	не существует	уст.фокус	существует

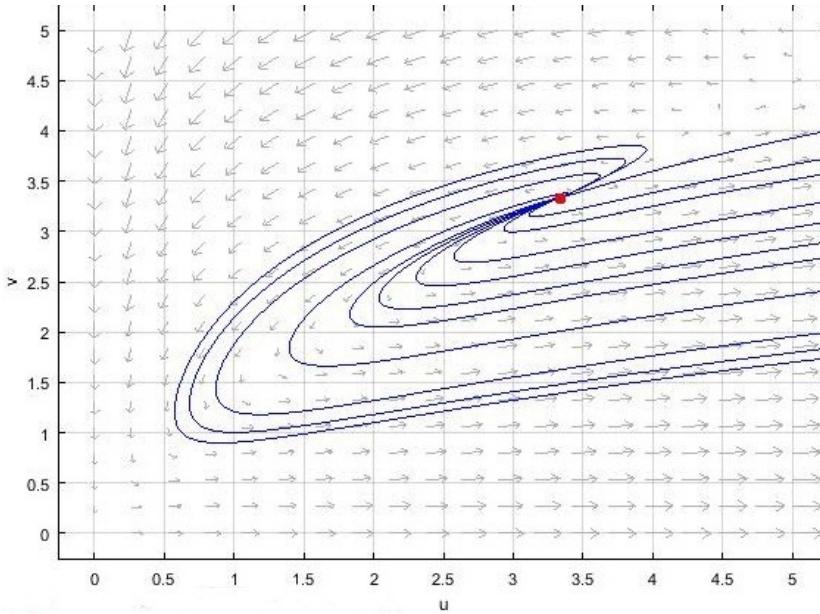
6 Фазовые портреты системы

6.1 $\beta = \gamma$

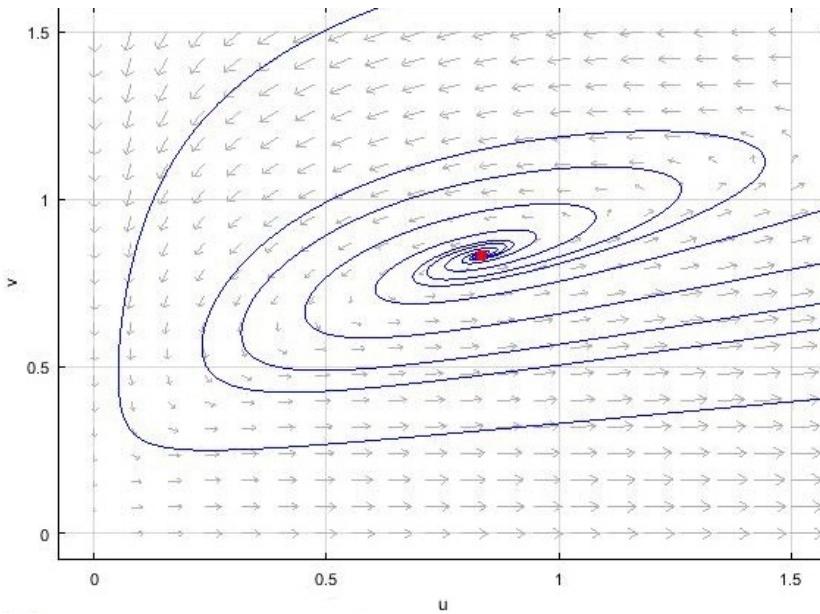
Область II: неустойчивый узел, $\alpha = 1.1$, $\beta = \gamma = 4$



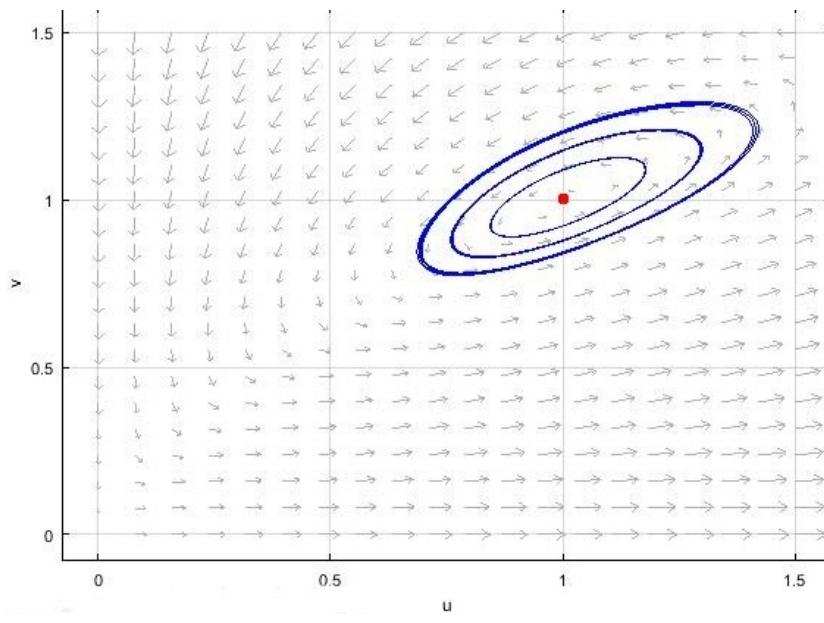
Неустойчивый вырожденный узел, $\alpha = 1.3$, $\beta = \gamma = 1.5210$



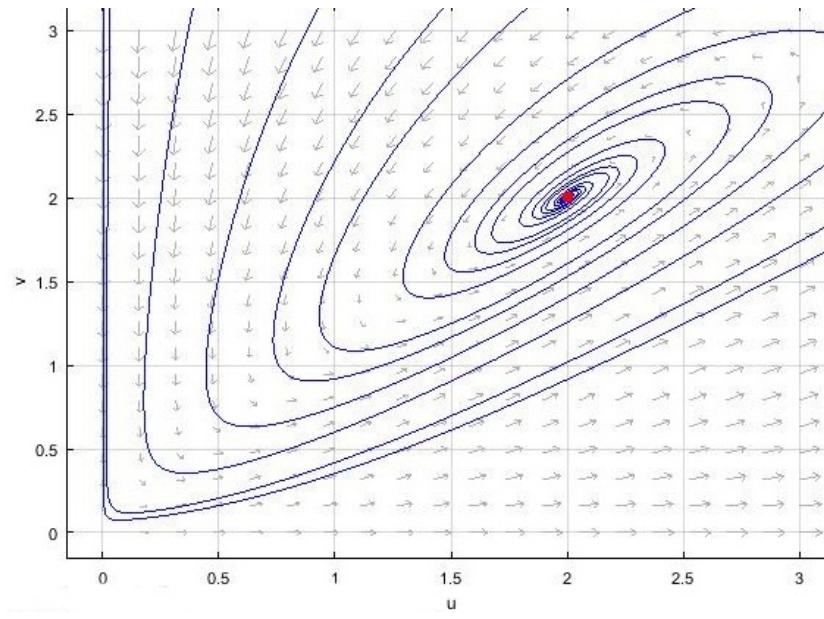
Область III: неустойчивый фокус, $\alpha = 2.2$, $\beta = \gamma = 1$



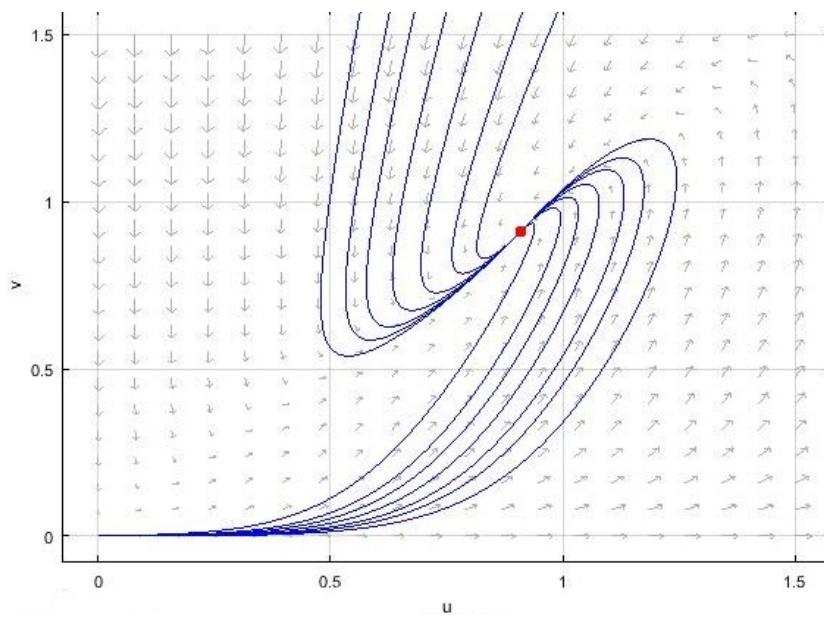
Центр: $\alpha = \beta = \gamma = 2$



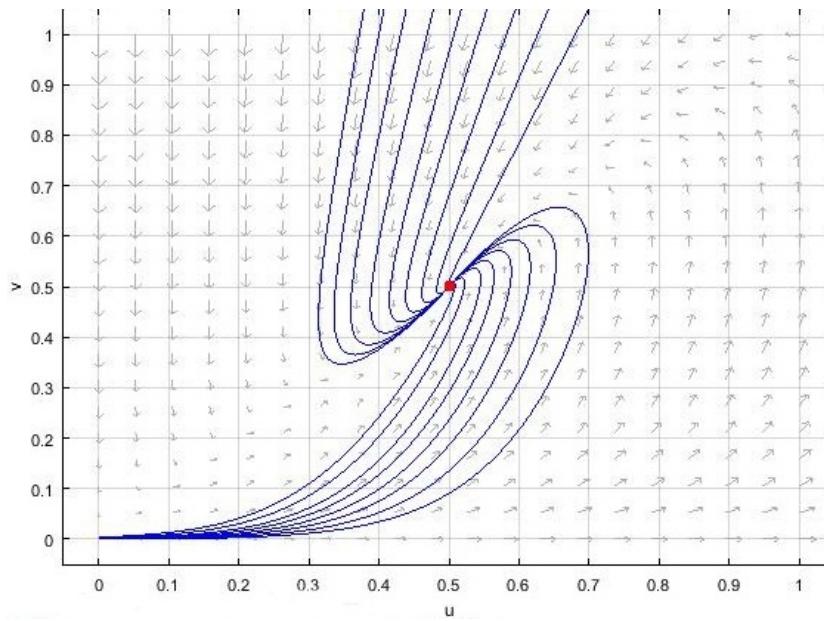
Область IV: устойчивый фокус, $\alpha = 1.5$, $\beta = \gamma = 4$



Вырожденный устойчивый узел, $\alpha = 2.2$, $\beta = \gamma = 12.1910$

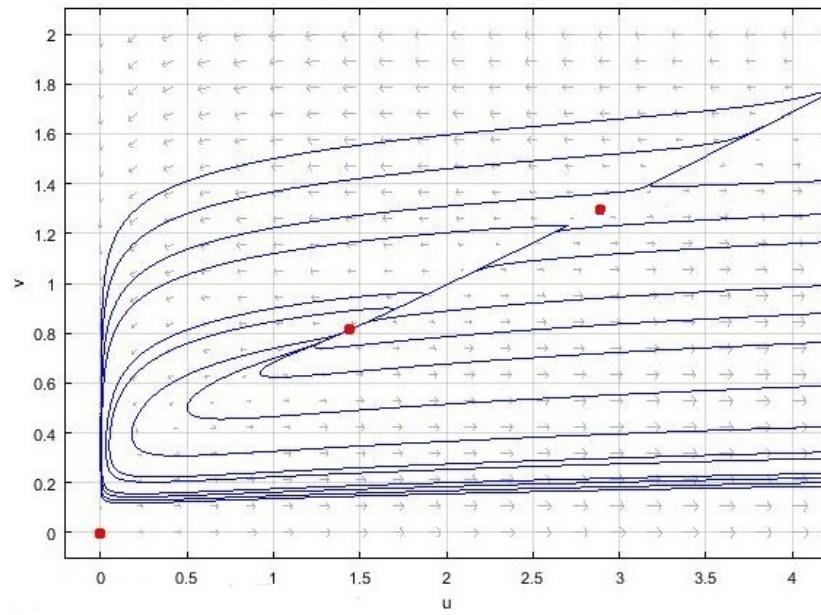


Область V: устойчивый узел, $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 15$

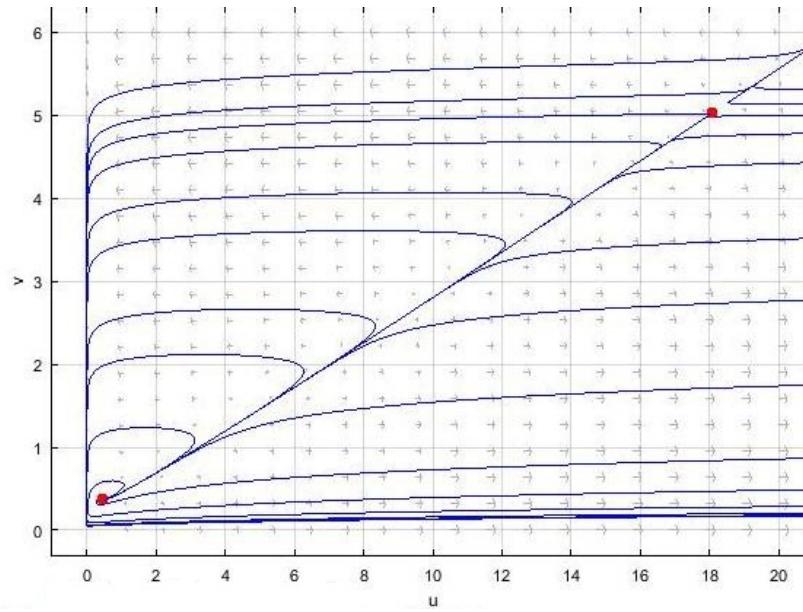


6.2 $\beta = \frac{1}{2}$

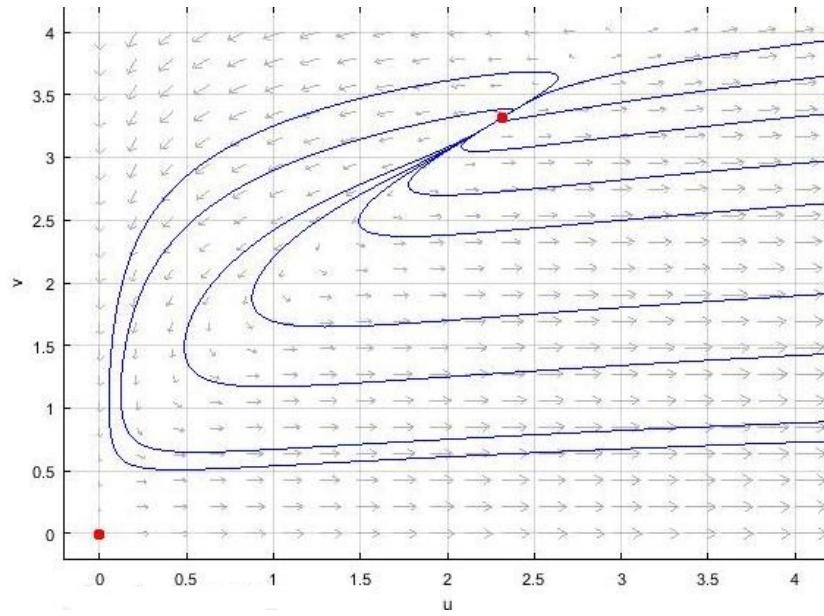
Область II: неустойчивый узел и седло, $\alpha = 3$, $\gamma = 0.38$



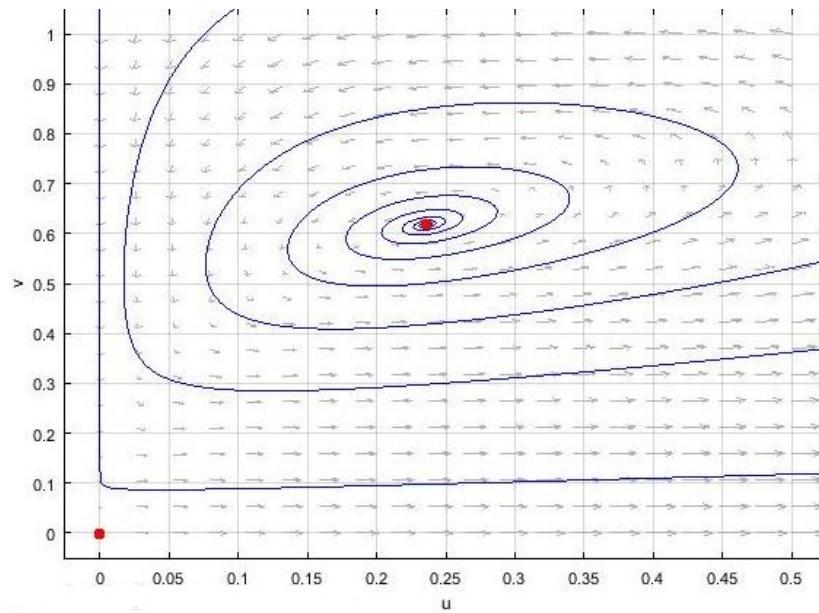
Область III: неустойчивый фокус и седло, $\alpha = 3.8$, $\gamma = 0.44$



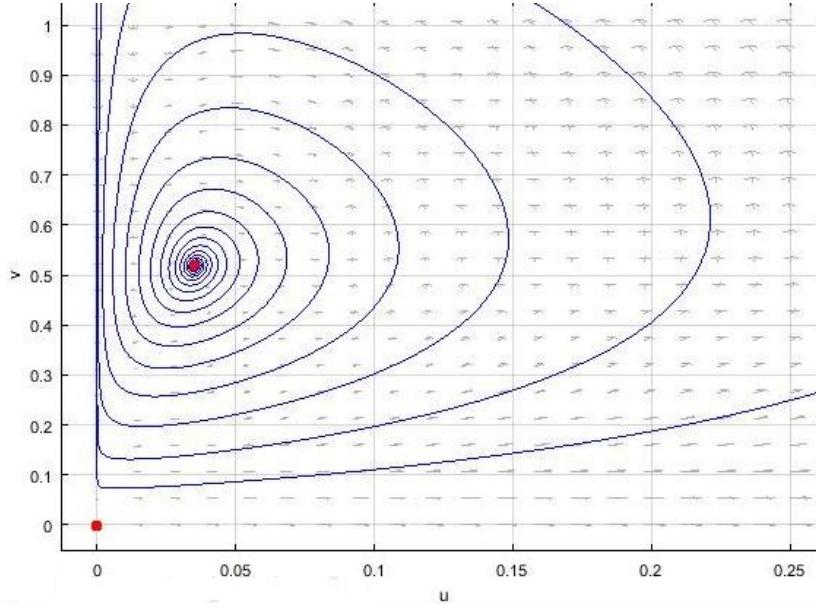
Область IV: неустойчивый узел, $\alpha = 1$, $\gamma = 0.55$



Область V: неустойчивый фокус, $\alpha = 2$, $\gamma = 1$



Область VI: устойчивый фокус, $\alpha = 2$, $\gamma = 5$



7 Бифуркация Андронова - Хопфа, предельные циклы системы

Определение 3 Замкнутую траекторию $\gamma(u_0)$ системы (4) будем называть предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых орбит.

Определение 4 Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре - Андронова - Хопфа или бифуркацией рождения цикла.

Теорема 2 Любая двумерная однопараметрическая система $\dot{u} = f(u; \alpha)$, имеющая при достаточно малых $|\alpha|$ положение равновесия $u = 0$ с собственными числами $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ и удовлетворяющая условиям невырожденности

$$\left. \frac{d\mu(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \neq 0, \quad (7)$$

$$l_1(0) \neq 0, \quad (8)$$

здесь

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega_0 g_{21}(0)),$$

в окрестности начала координат локально топологически эквивалентна одной из двух динамических систем

$$\dot{v}_1 = \alpha v_1 - v_2 + \operatorname{sign} l_1(0) v_1(v_1^2 + v_2^2),$$

$$\dot{v}_2 = v_1 + \alpha v_2 + \operatorname{sign} l_1(0) v_2(v_1^2 + v_2^2),$$

здесь

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \left. < p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) > \right|_{z=\bar{z}=0},$$

$q(\alpha)$ — собственный вектор матрицы $A(\alpha)$, отвечающий собственному значению λ ,
 $p(\alpha)$ — собственный вектор матрицы $A^T(\alpha)$, отвечающей собственному значению $\bar{\lambda}$,
учитывая, что $\dot{u} = A(\alpha)u + F(u; \alpha)$.

В случаях $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}$ и $\beta = \frac{1}{2}$, $\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} < \gamma < \frac{1}{2}$ собственные числа не являются чисто мнимыми, поэтому бифуркация Андронова-Хопфа не наблюдается. Рассмотрим те сценарии, в которых она может появиться.

7.1 $\beta = \gamma$

Из исследования точек равновесия при условии, что $\gamma = \beta$, $\alpha > 1$, следует, что собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, появляются при $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Соответственно, точка равновесия при заданных параметрах $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$ является центром, причем, при переходе из области III в область IV параметрического портрета системы происходит смена неустойчивого фокуса на устойчивый.

Рассмотрим матрицу Якоби в точке $(u, v) = (\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$ и при $\beta = \gamma$, $\alpha > 1$:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -1 \\ \frac{\beta}{\alpha}(1 - \frac{1}{\alpha}) & -\beta\frac{1}{\alpha} + \beta\frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Отсюда $\text{tr}J = \frac{1}{\alpha} - \beta\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$, $\det J = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) > 0$. Таким образом, при $\beta > \frac{\alpha}{\alpha-1}$, положение равновесия асимптотически устойчиво. Если $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \beta_{cr}$, то $\text{tr}J = 0$, $\det J = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ — выполняются условия бифуркации Андронова-Хопфа.

Проверим, первое из условий невырожденности:

$$\frac{d\mu(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{2}\text{tr}J \Big|_{\beta=\beta_{cr}} = \frac{1-\alpha}{2\alpha^2} \neq 0$$

Для того, чтобы вычислить первую ляпуновскую величину, зафиксируем значение параметра $\beta = \beta_{cr}$. Выполним сдвиг координат с помощью введения новых переменных, чтобы точка $(\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1})$ перешла в начало координат:

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{1}{\alpha-1}, \\ v &= y + \frac{1}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, в новых координатах получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{\alpha(x + \frac{1}{\alpha-1})(y + \frac{1}{\alpha-1})}{1+x+\frac{1}{\alpha-1}}, \\ \dot{y} = -\frac{\alpha(y + \frac{1}{\alpha-1})^2}{(\alpha-1)(1+y+\frac{1}{\alpha-1})} + \frac{\alpha(x + \frac{1}{\alpha-1})(y + \frac{1}{\alpha-1})}{(\alpha-1)(1+x+\frac{1}{\alpha-1})}. \end{cases}$$

Приведем систему к виду $\dot{u} = A(\alpha)u + F(u; \alpha)$, где

$$A(\alpha) = J(u, v)|_{\beta=\beta_{cr}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -1 \\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы $\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} i$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\alpha}x - y + \left[y + \frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}x - \frac{\alpha(x+\frac{1}{\alpha-1})(y+\frac{1}{\alpha-1})}{1+x+\frac{1}{\alpha-1}} \right], \\ \dot{y} = \frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{\alpha}y + \left[\frac{1}{\alpha}y - \frac{1}{\alpha}x - \frac{\alpha(y+\frac{1}{\alpha-1})^2}{(\alpha-1)(1+y+\frac{1}{\alpha-1})} + \frac{\alpha(x+\frac{1}{\alpha-1})(y+\frac{1}{\alpha-1})}{(\alpha-1)(1+x+\frac{1}{\alpha-1})} \right], \end{cases}$$

где

$$F(x, y; \alpha) = \begin{pmatrix} y + \frac{\alpha-1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{\alpha(x+\frac{1}{\alpha-1})(y+\frac{1}{\alpha-1})}{1+x+\frac{1}{\alpha-1}} \\ \frac{1}{\alpha}y - \frac{1}{\alpha}x - \frac{\alpha(y+\frac{1}{\alpha-1})^2}{(\alpha-1)(1+y+\frac{1}{\alpha-1})} + \frac{\alpha(x+\frac{1}{\alpha-1})(y+\frac{1}{\alpha-1})}{(\alpha-1)(1+x+\frac{1}{\alpha-1})} \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы $q(\alpha)$ и $p(\alpha)$ матриц $A(\alpha)$ и $A^T(\alpha)$, отвечающие собственным значениям $\lambda = \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} i$ и $\bar{\lambda} = -\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} i$ соответственно. Пусть $q(\alpha) = (q_1; q_2)$, $p(\alpha) = (p_1; p_2)$. Тогда:

$$\begin{cases} q_1 - (1 + \sqrt{\alpha-1}i)q_2 = 0, \\ (1 + \sqrt{\alpha-1}i)p_1 + p_2 = 0, \\ \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что векторы $q(\alpha) = (\frac{\sqrt{\alpha-1}-i}{2\sqrt{\alpha-1}}; -\frac{i}{2\sqrt{\alpha-1}})$ и $p(\alpha) = (1; -1 - \sqrt{\alpha-1}i)$ удовлетворяют нашей системе.

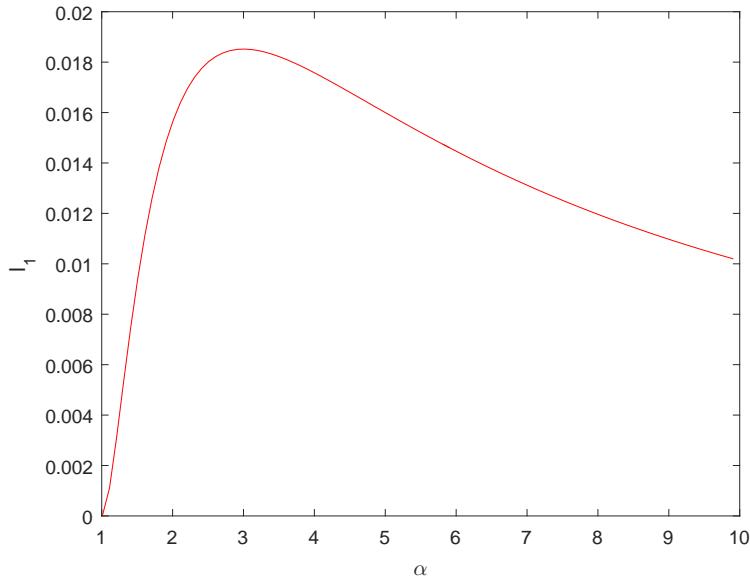
Определим комплекснозначную функцию:

$$G(z, w) = \langle p, F(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2) \rangle$$

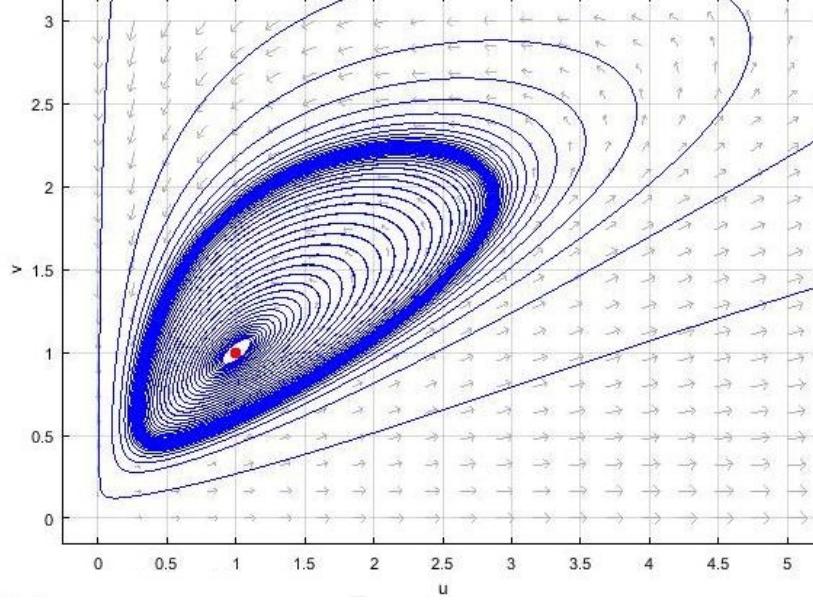
и вычислим соответственно коэффициенты $g_{20} = G_{zz}$, $g_{11} = G_{zw}$, $g_{21} = G_{zzw}$ с помощью функции **diff(f, n)**. Найдем первую ляпуновскую величину:

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}).$$

На графике изображено поведение первой ляпуновской величины l_1 от параметра α .



В данном случае первая ляпуновская величина положительная, следовательно возникает субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа (происходит 'жесткая' потеря устойчивости). Следовательно, если мы нарисуем фазовый портрет системы в обратном времени, то получим устойчивый предельный цикл.



Бифуркация рождения цикла $\beta = \gamma = 2.08, \alpha = 2$

7.2 $\beta = \frac{1}{2}$

Из исследования неподвижных точек при дополнительных ограничениях на параметры $\gamma > \frac{1}{2}, \alpha > 0$ при переходе из области (V) в (VI) неподвижная точка $K = (u_1^*, v_1^*) = \left(\frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2(1-l)} - 1, \frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha l}}{2\alpha(1-l)} \right)$, где $l = \frac{1}{2\gamma}$ меняет характер устойчивости : из неустойчивого фокуса становится устойчивым.

Матрица Якоби для данного случая в точке K будет иметь следующий вид:

$$J(u_1^*, v_1^*) = \begin{pmatrix} k & -\alpha k \\ \frac{\gamma}{\alpha}(1-k) & -\gamma k + 2\gamma^2 k^2 \end{pmatrix},$$

где $k = \frac{u_1^*}{\alpha v_1^*}$.

Следовательно, $\text{tr}J = k(1 - \gamma) + 2\gamma^2 k^2$. При $k = \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}$ след равняется 0. Заметим, что это возможно, только при $\gamma > 1$ (в силу положительности k). Определитель матрицы Якоби при условии, что $k = k_{cr} = \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}$ равен $\det J = k_{cr} (2(\gamma k_{cr} - \frac{1}{2})^2 + \gamma - \frac{1}{2}) > 0$, при $\gamma > 1$. Следовательно, выполняются условия бифуркации Андронова-Хопфа.

Проверим условие невырожденность:

$$\frac{d\mu(k)}{dk} = \frac{1}{2} \text{tr}J \Big|_{k=k_{cr}} = \frac{1}{2}(1 - \gamma + 2(\gamma - 1)) \neq 0,$$

при $\gamma > 1$.

Для того, чтобы вычислить первую ляпуновскую величину, зафиксируем значение параметра $\alpha = \alpha_{cr} = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^3 - 3\gamma^2 + 2\gamma - 1}$ (параметр α_{cr} был найден численно из уравнения

$\frac{u_1^*}{\alpha v_1^*} = \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}$). Выполним сдвиг координат с помощью введения новых переменных:

$$u = x + u_1^*(\alpha_{cr}),$$

$$v = y + v_1^*(\alpha_{cr}).$$

Дальше будем считать, что $u_1^* = u_1^*(\alpha_{cr})$, $v_1^* = v_1^*(\alpha_{cr})$.

Следовательно, в новых координатах получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u_1^* - \frac{\alpha_{cr}(x+u_1^*)(y+v_1^*)}{1+x+u_1^*}, \\ \dot{y} = -\frac{(y+v_1^*)^2}{2(1+y+v_1^*)} + \frac{\gamma(x+u_1^*)(y+v_1^*)}{(1+x+u_1^*)}. \end{cases}$$

Приведем систему к виду $\dot{u} = A(\gamma)u + F(u; \gamma)$, где

$$A(\gamma) = J(u, v)|_{\alpha=\alpha_{cr}} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2\gamma^2} & -\alpha_{cr} \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2} \\ \frac{\gamma}{\alpha_{cr}}(1 - \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2}) & -\frac{(\gamma-1)}{2\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2} \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\det A_i}$. Это определение корректно в силу положительности определителя матрицы Якоби на критическом множестве.

Следовательно,

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}x - \alpha_{cr} \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2}y + F_1(x, y; \gamma), \\ \dot{y} = \frac{\gamma}{\alpha_{cr}}(1 - \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2})x - \frac{(\gamma-1)}{2\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2}y + F_2(x, y; \gamma), \end{cases}$$

где

$$F(x, y; \gamma) = \begin{pmatrix} F_1(x, y; \gamma) \\ F_2(x, y; \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u_1^* - \frac{\alpha_{cr}(x+u_1^*)(y+v_1^*)}{1+x+u_1^*} - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}x + \alpha_{cr} \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2}y \\ \frac{\gamma(x+u_1^*)(y+v_1^*)}{(1+x+u_1^*)} - \frac{(y+v_1^*)^2}{2(1+y+v_1^*)} - \frac{\gamma}{\alpha_{cr}}(1 - \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2})x + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma} - \frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2}y \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы $q(\gamma)$, $p(\gamma)$ матриц $A(\gamma)$ и $A^T(\gamma)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = \lambda = \sqrt{\det A_i}$ и $\lambda_2 = -\lambda$ соответственно. Значит, с учетом нормировки, нам необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (\frac{\gamma-1}{2\gamma^2} - \lambda)q_1 - \alpha_{cr} \frac{(\gamma-1)}{2\gamma^2}q_2 = 0, \\ (\frac{\gamma-1}{2\gamma^2} + \lambda)p_1 + \frac{\gamma}{\alpha_{cr}}(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2})p_2 = 0, \\ \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 1. \end{cases}$$

Решениями данной системы будут векторы

$$p(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\alpha_{cr}}(k_{cr} - 1); k_{cr} + \lambda \right),$$

$$q(\gamma) = \left(\frac{\alpha_{cr}k_{cr}}{k_{cr} - \lambda}q_2; \left(\gamma(k_{cr} - 1) \frac{k_{cr}}{k_{cr} - \lambda} + k_{cr} - \lambda \right)^{-1} \right),$$

где $k_{cr} = \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}$.

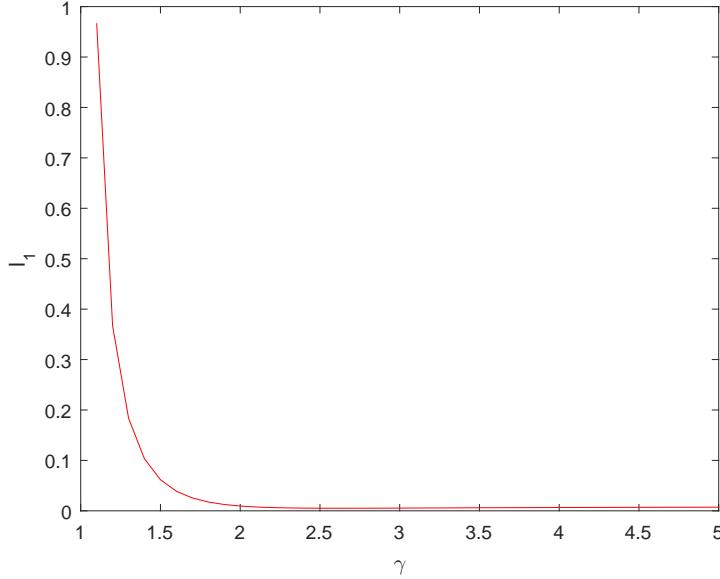
Так же, как и в предыдущем случае, определим комплекснозначную функцию:

$$G(z, w) = \langle p, F(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2) \rangle$$

и найдем соответственно коэффициенты $g_{20} = G_{zz}$, $g_{11} = G_{zw}$, $g_{21} = G_{zzw}$ с помощью функции `diff(f, n)`. Найдем первую ляпуновскую величину:

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}).$$

На графике изображено поведение первой ляпуновской величины l_1 от параметра γ .



Таким образом, численно получен результат такой же, как и в случае $\beta = \gamma$.

8 Биологическая интерпретация полученных результатов

Исходная система имела вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -\frac{cy^2}{B+y} + \frac{dxy}{1+Ax}, \end{cases}$$

где a, b, c, B — положительные параметры и $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

После замены переменных:

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{\alpha uv}{1+u}, \\ \dot{v} = -\frac{\beta v^2}{1+v} + \frac{\gamma uv}{1+u}, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{bB}{a} > 0$, $\beta = \frac{c}{a} > 0$, $\gamma = \frac{d}{aA} > 0$, $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$.

В новой задаче параметр α учитывает B . Чем B больше (при увеличении данного параметра уменьшается скорость смертности хищников при отсутствии жертв), тем большее влияние оказывается на смертность жертв.

Параметры β , γ , как и в изначальной постановке, являются коэффициентами смертности хищников и полезности жертв для последних соответственно. Причем они обратно пропорциональны характеристике пополнения популяции, так как в новых переменных она исчезает из списка параметров, то ее необходимо учесть в них, чтобы не нарушилась

смысловая нагрузка в биологической интерпретации.

Случай $\beta = \gamma$, то есть $c = \frac{d}{A}$, можно описать следующим образом. Чем больше пользы приносят жертвы хищникам, тем выше коэффициент смертности последних при отсутствии популяции жертв. Такую ситуацию можно рассматривать, так как она не противоречит законам природы.

В областях (IV) и (V) при ограничении $\beta = \gamma$ и в области (VI) при фиксированном параметре $\beta = \frac{1}{2}$ появляется асимптотически устойчивое положение равновесия, то есть произойдет равновесное сосуществование хищников и жертв (при достаточно близких к точке равновесия начальных значениях). В остальных областях все положения равновесия являются неустойчивыми, то есть в зависимости от начальных условий возможна вероятность вымирания видов либо ,наоборот, сосуществования хищников и жертв в достаточно долгий период времени.

9 Выводы

В данной работе была исследована на нелинейную динамику системы 'хищник-жертва' с непрерывным временем. Для данной системы были найдены неподвижные точки при различных значениях на параметры и проанализирована (если положение равновесия было гиперболическим) их устойчивость.

Был построен параметрический портрет системы при фиксированном значении одного из параметров и при нефиксированном значении, но с зависимостью от других коэффициентов, который позволил выделить области устойчивости и неустойчивости неподвижных точек.

Была исследована возможность появления бифуркации Андронова-Хопфа и проанализировано ее поведение.

Также была дана биологическая интерпретация полученных результатов.

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.