数理逻辑教案—本科2001

任世军
哈尔滨工业大学计算机系

2003年10月10日

目录

第一章 命题演算形式系统

命题逻辑研究命题的推理演算. 这一章研究命题的基本概念, 命题连接词, 讨论命题公式, 重言式 以及自然语句的形式化.

§1.1 命题演算的基本概念

1.1.1 命题与联结词

命题是一个能够判断其真假的（非真即假的）陈述句. 有两层意思, 首先命题是一个陈述句, 命令句感叹句疑问句都不是命题. 其次, 这个陈述句所表达的内容可以决定是真还是假, 而且不是真的就是假的. 不能不真又不假, 也不能 即是真又是假. 凡是与实事相符的陈述句（命题）为真语句, 而与实事不相符的陈述句（命题）为假语句. 即命题 有两种可能的取值(又叫真值), 是真或者是假, 并且只能取其中之一. 用T表示真, F表示假. 或者用1表示真, 0表示假. 真、假（T,F或者0,1）又称为真值。

命题概念的举例说明:

1. "雪是白的"是一个陈述句, 可以决定它的真值. 其真值为真. 所以是一个命题.
2. "雪是黑的"是一个陈述句, 可以决定它的真值. 其真值为假. 所以是一个命题.
3. "好大的雪啊"不是陈述句, 所以不是命题.
4. "任何一个大偶数可以表成两个素数之和"(哥德巴赫猜想)是一个陈述句, 或真或假, 是命题.
5. "太阳有第11颗行星"也是命题.
6. $2 + 2 = 5$.
7. 2是素数又是偶数.
8. 陈胜吴广起义之日杭州下雨.
9. 你上哪儿去?

10. 这句话是假的。

11. $x + y < 0$

真值的联结词,

2是素数又是偶数. 即是说2是素数并且2是偶数. 这里的并且称之为真值的联结词.

原子命题(原子),

不含有真值的联结词的命题称之为原子命题(原子).

复合命题. 非原子命题称为复合命题.

复合命题举例:

1. 雪不是白的(并非雪是白的).

2. 今晚我去看朋友或者去看电影.

3. 她不但漂亮而且聪明.

4. 如果我有车,那么我去接你.

5. a是偶素数当且仅当$a = 2$.

原子命题的符号表示：用小写的拉丁字母表示。这些符号表示确定的命题时称为命题常元，表示不确定的命题时称为命题变元。 取值为0，1。t, f表示真值为1，0的命题常元。

1. 命题变项

为了进行逻辑演算, 必须将命题符号化(形式化). 数理逻辑中约定用大写的字母表示命题. 例如可以用 P表示"雪是白的", Q表示"北京是中国的首都"等. 当P表示任一命题时, P就称为命题变项(变元).

由于命题变项表示的是不确定的命题, 所以不能判定其是真还是假. 但是在逻辑推演过程中, 我们认为它 表示的是一个实实在在命题.

2. 简单命题和复合命题

简单命题又称为原子命题. 它不包含任何连接词. 这样的命题不可再分割. 如果再分割就不能成为命题了. 例如"雪是白的而且1+1=2"可以分割成"雪是白的"和"1+1=2"两个命题. 但是"雪是白的"不能再分割. 所以是 原子命题即简单命题. 而"雪是白的而且1+1=2"不是简单命题.

把一个或几个简单命题用联接词(如与,或,非)联结所构成的命题称为复合命题, 也称为分子命题. 复合命题 也是陈述句, 其真值依赖于构成它本身的原子命题的真值以及构成该复合命题的联结词. 命题逻辑讨论的是 多个命题联结而成的复合命题的规律性.

3. 命题联结词和真值表

联结词可以将命题联结起来构成复杂的命题. 命题联结词起的作用如同加减乘除在实数理论中的位置. 这里介绍逻辑联结词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

4 否定词$\neg$

否定词是一个一元联结词, 也称为否定符号. 一个命题P加上否定词就形成了一个新的命题, 记作$\neg P$. 这个新命题是原来命题的否定, 读作非P.

否定词的真值规定如下: 若命题P的真值为真, 那么$\neg P$的真值就为假; 若P的真值为假, 那么 $\neg P$的真值就为真. 与之间的真值关系, 常常使用称作真值表的一种表格来表示. 即

P	$\neg P$
T	F
F	T

或者

P	$\neg P$
1	0
0	1

也可以将上表看作是对$\neg P$的定义, 它表明了$\neg P$的真值如何依赖于P的真值. 真值表描述了 命题之间的真值关系. 直观明了, 当命题变项不多时也很容易建立起来. 真值表是命题逻辑里研究真值 关系的重要工具.

例1.1.1 ”昨天张三去看球赛了”. 该命题用P表示, 于是”昨天张三没去看球赛了”, 该新命题便可用$\neg P$表示.

若昨天张三去看球赛了, 命题P是真的, 那么新命题$\neg P$必然是假的. 反之, 若命题P是假的,那么 $\neg P$就是真的.

例1.1.2 Q:今天是星期三.

$\neg Q$:今天不是星期三.

5 合取词$\wedge$

合取词”$\wedge$”是个二元命题联结词, 也称为合取符号. 将两个命题P,Q联结起来, 构成一个新的 命题$P \wedge Q$, 读作P,Q的合取, 也读作P与Q, 这个新命题的真值与构成它的命题P,Q的 真值间的关系, 由合取词真值表规定出来.

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

该表指出只有当两个命题变项$P = T$, $Q = T$时才有$P \wedge Q = T$, 而P,Q只要有一个为F, 则 $P \wedge Q = F$. 这样$P \wedge Q$可以用来表示P与Q, 或者P并且Q.

例1.1.3 P: 教室里有10名女学生.

Q: 教室里有15名男学生.

于是”教室里有10名女学生并且教室里有15名男学生”便可以由$P \wedge Q$来表示.

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图 1.1: $P \to Q$真值表

6 析取词$\vee$

析取词"$\vee$"是个二元命题联结词, 也称为析取符号. 将两个命题P,Q联结起来, 构成一个新的 命题$P \vee Q$, 读作P,Q的析取, 也读作P或Q, 这个新命题的真值与构成它的命题P,Q的 真值间的关系, 由析取词真值表规定出来.

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

该表指出只有当两个命题变项$P = F$, $Q = F$时才有$P \vee Q = F$, 而P,Q只要有一个为T, 则 $P \vee Q = T$. 这样$P \vee Q$可以用来表示P或Q.

例1.1.4 P: 今天刮风.

Q: 今天下雨.

于是"今天刮风或者今天下雨"便可以由$P \vee Q$来表示.

7 蕴含词$\to$

蕴含词$\to$也是个二元命题联结词, 也称为推断符号. 将两个命题P,Q联结起来, 构成一个新的 命题$P \to Q$, 读作如果P则Q, 也读作P蕴含Q, 如果P那么Q, 其中P称为前件(前项 , 条件), Q称为后件(后项, 结论). 规定只有当P为T, Q为F时, $P \to Q = F$. 除此之外, $P \to Q = T$.

引入$\to$的目的是希望用来描述命题间的推理, 表示因果关系. 实际上图 1.1说明了:

$P \to Q = T$成立的情况下, 若$P = T$必有$Q = T$, 而不会出现$Q = F$. 所以$P \to Q = T$ 体现了P是Q成立的充分条件.

$P \to Q = T$成立的情况下, 若$P = F$可有$Q = T$, 这表明$P \to Q$ 体现了P不是Q成立的必要条件.

图 1.2是$\neg P \vee Q$的真值表. 显然图 1.2和图 1.1是相同的,在

P和Q所有的取值下, $P \to Q$和$\neg P \vee Q$都有相同的真值, 于是可以记做

$$P \to Q = \neg P \vee Q (\text{真值相同的等值命题以等号联结})$$

P	Q	$\neg P \vee Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图 1.2: $\neg P \vee Q$真值表

这也说明$\rightarrow$可由$\neg$,$\vee$来表示, 从逻辑上看"如果P则Q"和"非P或Q" 是等同的两个命题.

蕴含词$\rightarrow$与自然用语"如果$\cdots$那么$\cdots$"有一致的一面, 可以表示因果关系. 然而,P和Q是无关的命题时逻辑上也可以讨论$P \rightarrow Q$. 并且$P = F$则$P \rightarrow Q = T$. 这在自然语言中就不大合适.

介绍一下真值函数。

1.1.2 命题公式及其真值

命题公式是命题逻辑讨论的对象, 而由命题常元，命题变项和命题联结词可以构成任意多的复合命题, 它们是否都有意 义呢, 只有一个命题联结词的命题当然是有意义的. 由两个命题联结词构成的命题至少意义不明确. 可以加括号来解决这个问题.

命题公式的定义:

1. 命题常元和命题变元是公式.称为原子公式。
2. 如果A是公式, 那么$\neg A$也是合适公式.
3. 如果A,B是合适公式, 那么$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$,$(A \leftrightarrow B)$ 也是合适公式.
4. 当且仅当经过有限次的使用(1)(2)(3)所组成的符号串才是合适公式

这是一个递归的定义. 在定义中用到了所要定义的概念. 条件(4)是指明了那些公式的界定范围. 即那些是合适公式, 那些不是合适公式.

如果判断一个公式是否是合适公式. 需要反复的应用定义. 这样就得到一个公式的形成过程.

优先级: 优先级的顺序按照 $\neg$, $\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$的排列顺序来规定. 这样在书写的时候, 就可以把一些括号省略掉. 例如$(P \rightarrow (Q \vee R))$ 就可以写成$P \rightarrow (Q \vee R)$ 或者$P \rightarrow Q \vee R$.

以后把命题公式简称为公式.

如果命题公式A中含有命题变元$p_1, p_2, \cdots, p_n$。则记公式A为$A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$。对任意给定的 $p_1, p_2, \cdots, p_n$的一种取值情况，称为指派，A均有一个确定的真值。

当A在指派α下取值真时，称α弄真A, 表示为$\alpha(A) = 1$，反之，称α弄假A,表示为$\alpha(A) = 0$。

在给出一个公式是一个永真式定义以前先给出一个例子来说明永真式的含义。

求出公式$\neg p \to (q \vee r)$的真值表。

定义1.1.1 公式A称为永真式或者重言式，如果对于任意指派α，α均弄真A（$\alpha(A) = 1$）。公式A称为可满足的 如果存在指派α，α均弄真A（$\alpha(A) = 1$），否则称A为不可满足的，或者永假的。

验证下面的永真式：

T1:$A \vee \neg A$

T2:$A \to (B \to A)$

T3:$A \to (A \vee B)$

T4:$(A \wedge B) \to A, (A \wedge B) \to B$

T5:$A \wedge (A \to B) \to B$

T6:$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

T7:$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

T8:$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$

T9:$A \vee A \leftrightarrow A$

T10:$A \wedge A \leftrightarrow A$

T11:$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

T12:$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

T13:$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

T14:$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

T15:$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

T16:$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$

T17:$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

T18:$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to C)$

T19:$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

T20:$A \vee t \leftrightarrow t, A \wedge t \leftrightarrow A, A \vee f \leftrightarrow A, A \wedge f \leftrightarrow f$

定义1.1.2 称公式A逻辑蕴含(logic imply)公式B，记为$A \Rightarrow B$，如果所有弄真A的指派也都弄真公式B；称 公式集合Γ逻辑蕴含公式B，记为$\Gamma \Rightarrow B$，如果弄真Γ中所有公式的 指派也都弄真公式B。

可以证明$A \Rightarrow B$当且仅当$A \to B$是一个重言式。

当$\Gamma = \{A\}$的时候$\Gamma \Rightarrow B$就是$A \Rightarrow B$；如果$\Gamma = \phi$，那么 $\Gamma \Rightarrow B$可以表示为$\Rightarrow B$。有定义可知$\Rightarrow B$当且仅当B是一 个永真式。

例如：$\Rightarrow A \vee \neg A, A \Rightarrow A \vee B, \{A, A \to B\} \Rightarrow B$。

定义1.1.3 称公式A逻辑等价公式B，记为$A \Leftrightarrow B$，如果$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow A$;

可以证明$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是一个重言式。

证明: $A \leftrightarrow B$是一个重言式，所以对于任意的指派α，$\alpha(A \leftrightarrow B) = 1$，从而若$\alpha(A) = 1$必有$\alpha(B) = 1$， 也就是$A \Rightarrow B$；同理如果$\alpha(B) = 1$则$\alpha(A) = 1$，也就是$B \Rightarrow A$；从而 $A \Leftrightarrow B$。 □

于是我们有以下的等价式：

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A, A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B, A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C$

定理1.1 设A是含有命题变元p的永真式，那么将A中p的所有出现均代换为命题公式B， 所得公式（称为A的代入实例）仍为永真式。

这个定理称为代入原理。

定理1.2 设命题公式A含有子公式C（C为A中符号串，且C为命题公式），如果$C \Leftrightarrow D$， 那么将A中的子公式C的某些出现（未必全部）用D替换后所得公式B满足$A \Leftrightarrow B$。

这个定理称为替换原理。

定理1.3 逻辑蕴含关系具有自反性，反对称性，和传递性；从而是一个序关系。逻辑等价关系具有自反性， 对称性和传递性，从而是一个等价关系。

1.1.3 范式

逻辑等价关系是一个等价关系，所以可以根据等价关系对公式的集合进行分类。在每一个等价类中我们可以 找出一个规范的形式，称为范式。

定义1.1.4 命题公式B称为命题公式A的合取范式（conjunctive(disjunctive) normal form），如果$B \Leftrightarrow A$， 并且B呈如下形式:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m (C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$$

其中$C_i (i = 1, 2, \cdots, m)$称为$B$的子句它们形如$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n)$，$L_j (j = 1, 2, \cdots, n)$为原子公式或者原子公式的否定。称 L_j为子句的文字。

定理1.4 对任意公式ϕ，均可以做出它的合取（析取）范式。

证明: 对任意公式ϕ，均可按照如下的方式做出它的合取（析取）范式。

（1）利用逻辑等价式$A \to B \Rightarrow \neg A \vee B, A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$的代入实例，对公式$\phi$的 子公式作替换，消去其中的连接词$\to, \leftrightarrow$，得到公式$\phi', \phi' \Leftrightarrow \phi$。

（2）利用逻辑等价式$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$的代入实例，对公式$\phi'$的 子公式作替换，使得否定词深入到原子公式的前面，得到公式$\phi'', \phi'' \Leftrightarrow \phi'$。

（3）利用逻辑等价式$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$的代入实例，对公式$\phi''$的 子公式作替换，消除$\neg\neg$，得到公式$\phi''', \phi''' \Leftrightarrow \phi''$。

（4）利用逻辑等价式$A \vee (B \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$等的代入实例，对公式$\phi'''$的 子公式作替换，得到公式$\phi$的合取（析取）范式。这里可能永到其它的等价式对公式进行化简。 □

例1.1.5 做出$(p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$的合取范式和析取范式。

解答: $(p\wedge q) \to (\neg q\wedge r) \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee(\neg q\wedge r) \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee(\neg q\wedge r) \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r) \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r) \Leftrightarrow (\neg p)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q)\vee(\neg q\wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

定义1.1.5 命题公式B称为命题公式A的主合取（析取）范式（major conjunctive(disjunctive) normal form），如果

（1）B是A的合取（析取）范式;

（2）B中的每一个字句均有A中的命题变元，常元（不同于t, f）的全部出现，且仅出现一次。

例1.1.6 做出$(p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$的主合取范式和析取范式。

解答: $(p\wedge q) \to (\neg q\wedge r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee(r\wedge\neg r) \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

$(p\wedge q) \to (\neg q\wedge r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q \Leftrightarrow (\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg q\wedge(r\vee\neg r)) \Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q)\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$。

命题1.1.1 对于一个命题公式的任何一个指派，这个指派可以弄假一个子句，这个子句 包含命题公式中的所有命题变元且只包含一次。在这类子句中，这个指派不能弄假任何其它的子句， 从而弄真所有其它的子句。

命题1.1.2 对于一个公式的任何一个弄假指派，则有该命题公式的一个主合取范式中的一个合取项，使得这一个指派 弄假这个合取项，并且只弄假这个合取项。

通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派（例如由$p \wedge \neg q \wedge \neg r$，就可以 直接写出弄假指派$(0,1,1)$），因为弄假一个公式的合取项必弄假该公式。

命题1.1.3 通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派，这就是公式的所有弄假指派。

1. 对于一个指派而言它或者弄假公式中的一个合取项，从而弄假该公式。或者它不能弄假任何合取项， 从而不能弄假该公式。（一个公式的指派是对公式中所有命题变元的一个赋值，所以该公式的一个弄假指派 或者弄假该公式主合取范式的一个合取项，或者弄真该公式主合取范式的一个合取项）。这样我们可以 根据主合取范式的合取项写出公式的弄假指派。

2. 如果除此之外还有一个公式的弄假指派，我们可以根据这个弄假指派写出一个包含相应命题变元的 子句，使得这个指派弄假该子句。我们说这个子句是命题公式的主合取范式的一个合取项。因为这个弄假指派 只能弄假主合取范式中的这个子句，不能弄假其它的子句。例如$(1,1,1,0)$是一个弄假指派，则$\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$必是公式的主合取范式中的一个元素。否则$(1,1,1,0)$不弄假 主合取范式中的任何合取式，从而不弄假该公式，矛盾。

命题1.1.4 如果已知公式的所有弄假指派，则可以写出该公式的主合取范式。

按照刚才说过的方式，由弄假指派可以写出一个子句，以所有这些子句作为合取项做成一个主合取范式。 我们说这就是该公式的主合取范式。

因为对于任意一个指派α，如果α就是其中的一个弄假指派，则α弄假公式，当然也 弄假我们做好的这个主合取范式。如果α不是其中的一个弄假指派，则α不弄假公式（因为 所有的弄假指派都拿来了），从而弄真公式。当然，此时α也不弄假我们的合取范式，因为它不能 弄假任何合取项（这里的合取项是通过上面的所有弄假指派做出来的，不包含这个指派α）。

同样道理，我们有

命题1.1.5 可以通过公式的主析取范式写出公式所有的弄真指派。由公式的所有弄真指派可以写出该公式的 主析取范式。

定理1.5 n元命题公式的全体可以划分为2^{2^n}个等价类，每一类中的公式相互逻辑等价，都等价于 它们公共的主合取范式（主析取范式）。

证明: n个命题变元的真值表必有2^n行（2^n种可能的指派），对于每一行（每一种指派）， 公式有两种可能的取值情况。从而n个命题变元的互不相同的真值表应该有2^{2^n}个。每一个真值表 的弄假指派（弄真指派）对应于公式的一个主合取范式（主析取范式）。因此具有同样真值表的公式 都等价于这一主合取范式（主析取范式），定理得证。 □

1.1.4 联结词的扩充与归约

由上面的讨论知n个命题变元的不同的真值表共有2^{2^n}个所以可以定义$2^{2^1}=4$个一元命题联结词 和$2^{2^2}=16$个二元命题联结词。表1给出了四个所有的一元命题联结词，

p	$\Delta_1(p)$	$\Delta_2(p)$	$\Delta_3(p)$	$\Delta_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

其中Δ_1，Δ_4为常联结词，Δ_2为幺联结词， Δ_3为否定词。

$$\Delta_1(p)\Leftrightarrow f,\Delta_4(p)\Leftrightarrow t,\Delta_2(p)\Leftrightarrow p,\Delta_3(p)\Leftrightarrow\neg p$$

表2给出了所有的16个二元命题联结词。分别标记为$*_1,*_2,\cdots,*_{16}$，我们有下面的 等价式

$$p*_1q\Leftrightarrow f,p*_{16}q\Leftrightarrow t,\text{即}*_1,*_{16}\text{为常联结词}$$

$$p*_4q\Leftrightarrow p,p*_6q\Leftrightarrow q,\text{即}*_4,*_6\text{为投影联结词}$$

$$p*_{13}q\Leftrightarrow\neg p,p*_{11}q\Leftrightarrow\neg q,\text{即}*_{13},*_{11}\text{为二元否定词}$$

$$p*_9q\Leftrightarrow\neg(p\vee q),*_9\text{称为或非词，用记号}\downarrow\text{表示，即}p\downarrow q\Leftrightarrow\neg(p\vee q)$$

$$p*_{15}q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q),*_{15}\text{称为与非词，用记号}\uparrow\text{表示，即}p\uparrow q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$$

$$p*_3q\Leftrightarrow\neg(p\to q),p*_5q\Leftrightarrow\neg(q\to p),\text{即}*_3,*_5\text{为蕴含否定词，可以表示为}\not\to$$

$p*_7q\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q),*_7$称为异或词，用记号$V^-$（或者$\oplus$）表示， 即

$$pV^-q\Leftrightarrow p\oplus q\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)$$

p	q	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$*_9$	$*_{10}$	$*_{11}$	$*_{12}$	$*_{13}$	$*_{14}$	$*_{15}$	$*_{16}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

除此之外，$*_2$为$\wedge$，$*_8$为$\vee$，$*_{12},*_{14}$为$\to$， $*_{10}$为$\leftrightarrow$。

上述讨论表明，1.联结词可以扩充。2.不增加变元不会有实质性的改变，因为它们都可以有先前定义的五个 联结词表示出来。

定义1.1.6 称n元 联 结 词h是 由m个 联 结 词$g_1,g_2,\cdots,g_m$可 表 示 的 ， 如果$h(p_1,\cdots,p_n)\Leftrightarrow A$， 而$A$中所含的联结词仅取自$g_1,g_2,\cdots,g_m$。

我们说

命题1.1.6 任何一个一元、二元联结词都可以通过$\neg, \vee, \wedge$表示出来。

证明: 第一种方法。 对于一元的连接词有

$$\Delta_1(p) \Leftrightarrow f, \Delta_4(p) \Leftrightarrow t, \Delta_2(p) \Leftrightarrow p, \Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p$$

对于二元的连接词有 $p *_1 q \Leftrightarrow f, p *_2 q \Leftrightarrow p \wedge q, p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \to q), p *_4 q \Leftrightarrow p, p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \to p), p *_6 q \Leftrightarrow q, p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q), p *_8 q \Leftrightarrow p \vee q, p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q), p *_{10} q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p), p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q, p *_{12} q \Leftrightarrow q \to p, p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p, p *_{14} q \Leftrightarrow p \to q, p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q), p *_{16} q \Leftrightarrow t$ □

证明: 第二种方法。任何一个一元或者二元联结词可以是一个命题公式，通过真值表可以求出它的主合取范式， 由于主合取范式中只含有$\neg, \vee, \wedge$，所以任何一个一元、二元联结词都可以通过 $\neg, \vee, \wedge$表示出来。 □

通过前面讲的方法写出$*_4$的主合取范式有$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$。用等价式化简有$p *_4 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow q \vee f \Leftrightarrow q$。

对于$*_7$我们有，$p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \Leftrightarrow \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$。

定义1.1.7 当联结词组$\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$可表示所有一元、二元联结词时，称其为完备联结词组。

上面的命题指出$\{\neg, \vee, \wedge\}$是一个完备联结词组。

命题1.1.7 $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$都是完备联结词组。

证明: $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$， $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$。 □

命题1.1.8 $\{\neg, \to\}$和$\{\Delta_1, \to\}$都是完备联结词组。

证明: $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \to q)$， $\neg p \Leftrightarrow p \to \Delta_1(p)$。因为若$p = 0$，则$p \to \Delta_1(p) = 1$。若$p = 1$，则$p \to \Delta_1(p) = 0$。 □

命题1.1.9 $\{\downarrow\}$和$\{\uparrow\}$都是完备联结词组。

证明: $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$， $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$。

$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$， $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$。
□

命题1.1.10 任何一个n元联结词$h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$都可以通过联结词$\neg, \rightarrow$表示出来。

证明: 一个含有n个命题变元的n元联结词$h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$实际上是一个含有n个变元的 n元真值函数（命题公式）。该公式的一个指派α相当于一个置换

$$\alpha = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \alpha(p_1) & \alpha(p_2) & \cdots & \alpha(p_n) \end{pmatrix}$$

其中的$\alpha(p_i)$或者是0或者是1。在这个指派之下公式$h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$的真值有如下的式子:

$$\alpha(h(p_1, p_2, \cdots, p_n)) = h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_n))$$

。

下面我们对n用归纳法。

当$n = 1, 2$的时候上面的得命题已经证明了结论。

假设$n = k$时成立。往证$n = k + 1$时也成立。

$h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})$和$h(1, p_2, \cdots, p_{k+1})$是两个$k$元命题联结词，由归纳假设，它们可以用联结词组$\{\neg, \rightarrow\}$来表示。

我们说

$$h(p_1, p_2, \cdots, p_{k+1}) \Leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_{k+1}))$$

对于$\forall \alpha$，如果$\alpha((\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_{k+1}))) = 0$，那么 $\alpha(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$， 或者 $\alpha(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$，

从$\alpha(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$我们知道$\alpha(\neg p_1) = 1$，$\alpha(h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$。即$\alpha(p_1) = 0$，$h(0, \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_{k+1})) = 0$。所以$\alpha(h(p_1, p_2, \cdots, p_{k+1})) = h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_{k+1})) = h(0, \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_{k+1})) = 0$。

从$\alpha(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$我们知道$\alpha(p_1) = 1$， $\alpha(h(1, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$。即$\alpha(p_1) = 1$，$h(1, \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_{k+1})) = 0$。所以$\alpha(h(p_1, p_2, \cdots, p_{k+1})) = h(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_{k+1})) = h(1, \alpha(p_2), \cdots, \alpha(p_{k+1})) = 0$。

这样，对于$\forall \alpha$，如果$\alpha((\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_{k+1})) \wedge (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_{k+1}))) = 0$，那么 $\alpha(h(p_1, p_2, \cdots, p_{k+1})) = 0$。

反之，如果$\alpha(h(p_1,p_2,\cdots,p_{k+1}))=0$。那么$h(\alpha(p_1),\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_{k+1}))=0$。

若$\alpha(p_1)=0$，则$\alpha(\neg p_1)=1$，这时$h(\alpha(p_1),\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_{k+1}))=h(0,\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_{k+1}))=\alpha(h(0,p_2,\cdots,p_{k+1}))=0$。必有$\alpha(\neg p1\to h(0,p_2,\cdots,p_{k+1}))=0$，从而$\alpha((\neg p_1\to h(0,p_2,\cdots,p_{k+1}))\land(p_1\to h(1,p_2,\cdots,p_{k+1})))=0$。

若$\alpha(p_1)=1$，则$\alpha(p_1)=1$，这时$h(\alpha(p_1),\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_{k+1}))=h(1,\alpha(p_2),\cdots,\alpha(p_{k+1}))=\alpha(h(1,p_2,\cdots,p_{k+1}))=0$。必有$\alpha(p1\to h(1,p_2,\cdots,p_{k+1}))=0$，从而$\alpha((\neg p_1\to h(0,p_2,\cdots,p_{k+1}))\land(p_1\to h(1,p_2,\cdots,p_{k+1})))=0$。

这样我们完成了这个命题的证明。□

§1.2 命题演算形式系统PC

我们在这一节介绍一个形式系统PC:

1. 语言部分的定义

首先有一个符号表（字母表）$\sum=\{(,),\neg,\to,p_1,p_2,p_3,\cdots\}$。

公式的定义如下：

1. $p_1,p_2,p_3,\cdots$为（原子）公式。
2. 如果A,B是公式，那么$(\neg A)$，$(A\to B)$也是公式。
3. 只有上述两条定义的表达式才是公式。

公式中最外层的括号可以省略。

2. 推理部分

公理集合包括三个元素：

$A1: A\to(B\to A)$

$A2: (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

$A3: (\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

推理规则只有一个，称为分离规则（modus ponens）：

$$r_{mp}:\frac{A,A\to B}{B}$$

定义1.2.1 称下列公式序列为公式A在PC中的一个证明：

$$A_1,A_2,\cdots,A_m(=A)$$

其中$A_i(i=1,2,\cdots,m)$或者是PC中的公理，或者是$A_j(j<i)$，或者是$A_j,A_k(j,k<i)$使用 分离规则导出的，A_m就是公式A。

定义1.2.2 称A是PC中的定理，记为$\vdash_{PC} A$，如果公式A有一个PC中的证明。

定义1.2.3 设Γ为一个公式的集合，称以下公式序列为公式A的以Γ为前提在PC中的一个演绎：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中$A_i(i = 1, 2, \cdots, m)$或者是PC中的公理，或者是Γ的成员，或者是$A_j(j < i)$，或者是$A_j, A_k(j, k < i)$使用分离规则导出的，A_m就是公式A。

定义1.2.4 称A是前提Γ在PC中的演绎结果，记为$\Gamma \vdash_{PC} A$，如果公式A有一个以Γ为 前提在PC中的演绎。如果$\Gamma = B$，则用$B \vdash_{PC} A$表示$\Gamma \vdash_{PC} A$， 如果$B \vdash_{PC} A$并且$A \vdash_{PC} B$则记为$A|||B$

§1.3 命题演算形式系统PC的定理

定理1.1 $\vdash A \to A$

证明: 1. $A \to ((B \to A) \to A)$

2. $A \to (B \to A)$

3. $A \to A$

□

定理1.2 如果$\vdash A \to (B \to C)$, 那么$\vdash B \to (A \to C)$。

证明: 1. $A \to (B \to C)$

2. $(A \to B) \to (A \to C)$

3. $B \to ((A \to B) \to (A \to C))$

4. $B \to (A \to B)$

5. $B \to (A \to C)$

□

定理1.3 $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$。

证明: 1. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

3. $B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$

4. $B \to (((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$

5. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

$\square$

定理1.4 $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$。

证明: 1. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

2. $(B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

3. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\square$

定理1.5 $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$。

定理1.6 $\vdash \neg A \to (A \to B)$。

证明: 1. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

2. $\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$

3. $\neg A \to (A \to B)$

$\square$

定理1.7 $\vdash A \to (\neg A \to B)$。

定理1.8 $\vdash (\neg A \to A) \to A$。

证明: 1. $\neg A \to (A \to (\neg(\neg A \to A)))$

2. $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$

3. $(\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)$

4. $(\neg A \to A) \to A$

$\square$

定理1.9 $\vdash \neg\neg A \to A$。

证明: 1. $\neg B \to (B \to A)$

2. $\neg\neg A \to (\neg A \to A)$

3. $((\neg A \to A) \to A) \to (\neg\neg A \to A)$

4. $\neg\neg A \to A$

□

定理1.10 $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$。

证明: 1. $\neg\neg A \to A$

2. $(A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)$

3. $(\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A$ 这是前面的定理。

4. $(A \to \neg A) \to \neg A$ 三段论

□

定理1.11 $\vdash A \to \neg\neg A$。

证明: 1. $A \to (\neg A \to \neg\neg A)$

2. $((\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A) \to (A \to \neg\neg A)$

3. $(\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A$ 前面的定理

4. $A \to \neg\neg A$

□

定理1.12 $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$。

证明: 1. $\neg\neg A \to A$

2. $((A \to B) \to (\neg\neg A \to B)$

3. $B \to \neg\neg B$

4. $(\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

5. $((A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

6. $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$

7. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

□

定理1.13 $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

证明: 1. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$

2. $(\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg B \to A)$

3. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

$\square$

定理1.14 $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

证明: 1. $(A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg A)$

2. $(\neg\neg B \to \neg A) \to (B \to \neg A)$

$\square$

定理1.15 $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

证明: 1. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

2. $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

3. $B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$

4. $\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$

5. $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$

6. $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

$\square$

定理1.16 $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

证明: 1. $(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$

2. $A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$

3. $A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$

4. $(A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B))$

5. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\square$

定理1.17 (三段论) 如果$\vdash (A \to B), \vdash (B \to C)$, 那么$\vdash (A \to C)$。

证明: 1. $(B \to C)$

2. $A \to (B \to C)$

3. $(A \to B) \to (A \to C)$

4. $A \to C$

□

定理1.18 $\vdash A \to A \vee B$

证明: $A \vee B$定义为$\neg A \to B$. □

定理1.19 $\vdash A \to B \vee A$

证明: $A \vee B$定义为$\neg A \to B$. 由定义和公理1即可得到次定理。 □

定理1.20 $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

证明: 这相当于证明$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

1. $(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$ ($A \to A$是一个定理)
2. $\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$ 前件互换
3. $((\neg A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$ 定理
4. $\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$
5. $\neg C \to (\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$
6. $(\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$ 公理2以及分离规则。
7. $(\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg(\neg A \to B)))$ 公理2
8. $(\neg C \to \neg A) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg(\neg A \to B)))$ 三段论
9. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

□

定理1.21 $\vdash A \wedge B \to C$当且仅当$\vdash A \to (B \to C)$

证明: 1. $A \wedge B \to C$

2. $\neg(A \to \neg B) \to C$

3. $\neg C \to (A \to \neg B)$

4. $A \to (\neg C \to \neg B)$

5. $A \to (B \to C)$

这个过程可以从反方向推回来。 □

定理1.22 $\vdash A \wedge B \to A$

证明: (1)

1. $\neg A \to (A \to \neg B)$

2. $\neg(A \to \neg B) \to A$

3. $A \wedge B \to A$

(2)

1. $A \to (B \to A)$ 公理1

2. $A \wedge B \to A$ 定理

□

定理1.23 $\vdash A \wedge B \to B$

证明: (1)

1. $\neg B \to (A \to \neg B)$

2. $\neg(A \to \neg B) \to B$

3. $A \wedge B \to B$

(2)

1. $B \to B$ 定理

2. $A \to (B \to B)$ 由公理1

3. $A \wedge B \rightarrow B$

□

定理1.24 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

证明: (1)

1. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
2. $A \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$
4. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

(2)

1. $(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B)$ 定理
2. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ 定理

□

定理1.25 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

证明:

1. $B \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C)$
2. $A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C))$ 由公理1
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C))$ 公理2与MP分离规则
4. $(A \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

□

定理1.26 $\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$

证明:

1. $A \rightarrow (A \vee B)$
2. $B \rightarrow (A \vee B)$
3. $(B \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow (A \vee B)))$ 定理

4. $(A \to (A \vee B)) \to ((B \vee A) \to (A \vee B))$ 分离规则

5. $(B \vee A) \to (A \vee B)$ 分离规则
同理可以证明$(A \vee B) \to (B \vee A)$。 □

定理1.27 $\vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

证明: 1. $(A \wedge B) \leftrightarrow B$

2. $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ 定理

3. $((A \wedge B) \to B) \to (((A \wedge B) \leftrightarrow A) \to ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)))$ 定理

4. $((A \wedge B) \leftrightarrow A) \to ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$

5. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$
同理可以证明$(B \wedge A) \to (A \wedge B)$。 □

定理1.28 如果$\vdash P \to Q$, $\vdash R \to S$, 那么$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$

证明: 1. $(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

2. $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$

3. $P \to Q$

4. $(Q \to R) \to (P \to R)$

5. $(P \to R) \to ((R \to S) \to (P \to S))$

6. $(R \to S) \to ((P \to R) \to (P \to S))$

7. $R \to S$

8. $(P \to R) \to (P \to S)$

9. $(Q \to R) \to (P \to S)$
□

定理1.29 $\vdash ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

证明: 只须证$\vdash (\neg(\neg A \to B) \to C) \leftrightarrow (\neg A \to (\neg B \to C))$

1. $(\neg(\neg A \to B) \to C) \to (\neg C \to (\neg A \to B))$

2. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg A \to (\neg C \to B))$
3. $(\neg A \to (\neg C \to B)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$
4. $(\neg(\neg A \to B) \to C) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$

同理可以证明$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$。 □

定理1.30 $\vdash ((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$

证明: 只须证$\vdash \neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \leftrightarrow \neg(A \to (B \to \neg C))$
只须证$\vdash (\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \leftrightarrow (A \to (B \to \neg C))$

1. $(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to (C \to (A \to \neg B))$
2. $(C \to (A \to \neg B)) \to (A \to (C \to \neg B))$
3. $(A \to (C \to \neg B)) \to (A \to (B \to \neg C))$
4. $(\neg(A \to \neg B) \to \neg C) \to (A \to (B \to \neg C))$

同理可以证明$(A \to (B \to \neg C)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg C)$。 □

定理1.31 $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

证明: 因为$\vdash A \wedge (A \vee B) \to A$， 所以只须证$\vdash A \to A \wedge (A \vee B)$ 即$\vdash A \to \neg(A \to \neg(\neg A \to B))$

1. $(A \to (\neg B \to A)) \to (A \to (\neg A \to B))$
2. $(A \to (\neg A \to B)) \to (((\neg A \to B) \to \neg A) \to (A \to \neg A))$
3. $(((\neg A \to B) \to \neg A) \to (A \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to \neg A) \to (((\neg A \to B) \to \neg A) \to \neg A)$
4. $((\neg A \to B) \to \neg A) \to \neg A$
5. $A \to \neg((\neg A \to B) \to \neg A)$

□

定理1.32 $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

证明: 因为$\vdash A \to A \vee (A \wedge B)$， 所以只须证$\vdash A \vee (A \wedge B) \to A$ 即$\vdash (\neg A \to \neg(A \to \neg B)) \to A$

1. $\neg A \to (A \to \neg B)$
2. $((A \to \neg B) \to A) \to (\neg A \to A)$
3. $((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to \neg B) \to A) \to A)$
4. $((A \to \neg B) \to A) \to A$
5. $(\neg A \to (A \to \neg B)) \to A$

□

定理1.33 $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

证明: 只须证$\vdash \neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \leftrightarrow (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C))$

先证$\vdash \neg(A \to \neg(\neg B \to C)) \to (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C))$

1. $(A \to \neg B) \to ((A \to \neg C) \to (A \to \neg B \wedge \neg C))$
2. $(A \to \neg B) \to ((A \to \neg C) \to (A \to \neg(\neg B \to \neg\neg C)))$
3. $(A \to \neg B) \to ((A \to \neg C) \to (A \to \neg(\neg B \to C)))$
4. $(A \to \neg B) \to (\neg(A \to \neg(\neg B \to C) \to \neg(A \to \neg C)))$
5. $\neg(A \to \neg(\neg B \to C) \to ((A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)))$
6. $\neg(A \to \neg(\neg B \to C) \to (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)))$

再证$\vdash (\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$

1. $\neg(A \to \neg C) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$
2. $\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$
3. $\neg(A \to \neg B) \vee \neg(A \to \neg C) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$
4. $\neg\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C) \to \neg(A \to \neg(\neg B \to C))$

□

定理1.34 $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

证明: 只须证$\vdash (\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \leftrightarrow \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$

先证$\vdash (\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to \neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$

1. $(\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to (\neg A \to B)$
2. $(\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to (\neg A \to C)$
3. $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to C) \to (\neg A \to B) \wedge (\neg A \to C))$
4. $(\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to ((\neg A \to C) \to (\neg A \to B) \wedge (\neg A \to C))$
5. $(\neg A \to \neg(B \to \neg C)) \to ((\neg A \to B) \wedge (\neg A \to C))$

再证$\vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

1. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (A \vee B)$
2. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (A \vee C)$
3. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (\neg A \to B)$
4. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (\neg A \to C)$
5. $\neg B \to (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to A)$
6. $\neg C \to (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to A)$
7. $(B \to \neg C) \to (\neg(((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to A) \to (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to A))$
8. $(B \to \neg C) \to (((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to A)$
9. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to ((B \to \neg C) \to A)$
10. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

□

§1.4 命题演算形式系统PC的基本理论

定理1.1 对PC中任意公式集合Γ和公式A, B，$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$当且仅当$\vdash_{PC} A \to B$。

以后用$\Gamma; A$简记$\Gamma \cup \{A\}$，用$\vdash$简记$\vdash_{PC}$。

证明: $\Leftarrow$:设

$$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A \to B)$$

是由Γ推出$A \to B$的演绎，那么

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, A, B$$

就是由$\Gamma; A$推出B的演绎。

从而$\Gamma \vdash_{PC} A \to B$蕴含$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$。 $\Rightarrow$:设$\Gamma; A \vdash B$，对这个演绎的长度n用归纳法。

当$n = 1$时，B或者是一个公理，或者$B \in \Gamma$，或者$B = A$。对于前两种情况可以构造由Γ 推出$A \to B$的演绎:

$$B, B \to (A \to B)(\text{公理}), A \to B$$

当$B = A$的时候，$A \to B$就是$A \to A$。$A \to A$为PC中的一个定理，因此 $A \to A$的证明就构成了一个从Γ到$A \to A$的一个演绎。

现在设从$\Gamma; A$推出B的演绎的长度$n > 1$。如果B或者是一个公里，或者$B \in \Gamma$，或者$B = A$。 仿照前面的方法可以构造出一个从Γ到$A \to B$的演绎。如果B是在演绎过程中由 $B_i, B_j (i, j < n)$通过推理规则MP推导出来的，那么B_i, B_j必为$C, C \to B$，由归纳假设 有从Γ导出$A \to C$和$A \to (C \to B)$的演绎。连结这两个演绎并继续

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(l) A \to C$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(m) A \to (C \to B)$

$(m+1) (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$

$(m+2) (A \to C) \to (A \to B)$

$(m+3) A \to B$

$\Gamma \vdash A$读作Γ演绎A，或者A是Γ的演绎结果，或者有以Γ为前提的A 的演绎。 □

定理1.2 PC是合理的，即对任意公式Γ和公式A，如果$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \Rightarrow A$。 特别是如果A为PC中的定理（$\vdash A$），则A永真（$\Rightarrow A$）。

证明: 设$\Gamma \vdash A$的演绎序列$A_1, A_2, \cdots, A_m = A$的长度为$m$。$\alpha$为弄真$\Gamma$ 中所有公式的指派，今对m用数学归纳法，证明α必弄真A。

当$m = 1$时，$A_m = A$或者是公理或者是Γ的成员，于是$\alpha(A) = 1$。

设$m = k, A_k = A$。如果A_m为公理或者Γ的成员或者$A_k = A_j (j < k)$，根据公理的永真性和归纳假设， 我们有$\alpha(A) = 1$；如果A_k是$A_i, A_j (i, j < k)$通过分离规则导出来的，由于$\alpha(A_i) = 1$， $\alpha(A_j) = 1$，所以$\alpha(A_k) = 1$。 □

定理1.3 PC是一致的，即不存在公式A，使得A与$\neg A$均为PC中的定理。

证明: 如果$\vdash A, \vdash \neg A$，那么$\Rightarrow A, \Rightarrow \neg A$，这是不可能的。 □

定理1.4 PC不是完全的，即存在公式A，使得$\vdash A, \vdash \neg A$均不能成立。

证明: 对于命题公式p_1，$\vdash p_1$和$\vdash \neg p_1$都不成立，否则如果$\vdash p_1$那么 $\Rightarrow p_1$，如果如果$\vdash \neg p_1$那么$\Rightarrow \neg p_1$。由于p_1为命题变元 所以上述两个式子都不能成立。 □

定义1.4.1 PC的理论（theory）指的是如下的集合:

$$Th(PC) = \{A| \vdash_{PC} A\}$$

PC基于前提Γ的扩充（extension）指的是:

$$Th(PC \cup \Gamma) = \{A|\Gamma \vdash_{PC} A\}$$

定理1.5 PC的不一致的扩充必定是完全的，但是至少有一个公式不是公式的一致扩充的定理。特别地， 当公式集合Γ不一致的时候，扩充$Th(PC \cup \Gamma)$是完全的；当Γ一致时，至少 有一个公式A使得

$$A \notin Th(PC \cup \Gamma)(\text{即}\Gamma \nvdash A)$$

证明: PC的不一致的扩充必定是完全的。由于$Th(PC \cup \Gamma)$不一致，所以有公式A，使得 $\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$，对于任意的公式$B$，

$$\cdots, \neg A \to (A \to B), \neg A, A \to B, B$$

是公式B的一个演绎。所以$Th(PC \cup \Gamma)$是完全的。

如果$Th(PC \cup \Gamma)$一致，则对于任意的公式$A \in Th(PC)$，$\Gamma \vdash \neg A$。 □

定理1.6 PC是完备的，即对任意公式集合Γ和公式A，如果$\Gamma \Rightarrow A$，那么 $\Gamma \vdash A$。特别地，如果$\Rightarrow A$，即A永真，那么$\vdash A$，即A是 PC中的一个定理。

命题1.4.1 如果Γ一致，$\Gamma \nvdash A$，那么$\Gamma \cup \{\neg A\}$是也一致的。

证明: 设$\Gamma \cup \{\neg A\}$不是一致的，那么有公式B，使得$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$并且$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$。

由于$B \to (\neg B \to A)$是PC的一个定理，所以

$$\cdots, B \to (\neg B \to A), B, \neg B \to A, \neg B, A$$

就构成了一个以$\Gamma \cup \{\neg A\}$为前提的A演绎。所以$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$， 于是$\Gamma \vdash \neg A \to A$。由于$(\neg A \to A) \to A$是$PC$的一个定理，所以$\Gamma \vdash A$， 矛盾。 所以$\Gamma \cup \{\neg A\}$是也一致的。 □

命题1.4.2 如果Γ一致，那么存在公式集合Δ，使得$\Gamma \subseteq \Delta$，Δ是一致的并且Δ是完全的。

证明: 设$A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$是$PC$中所有公式的序列，构造公式集合序列如下：

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\} \text{如果} \Delta_n \vdash A_n$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\} \text{如果} \Delta_n \nvdash A_n$$

然后让$\Delta = \cup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$。这样的话由这种构造方式知道$\Delta$是完全的。（因为由$\Delta_i$的构造方式知 对每一个公式$A_i$，或者$A_i \in \Delta_i \subseteq \Delta$，或者$\neg A_i \in \Delta_i \subseteq \Delta$）

为了证明Δ也是一致的。我们首先说$\Delta_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$都是一致的。（用归纳法。首先$\Delta_0 = \Gamma$是一致的，其次，假设$\Delta_n$一致，如果$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\}$，这时$\Delta_n \nvdash A_n$。由前面的命题知$\Delta_{n+1}$是一致的。

如果$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\}$，这时$\Delta_n \vdash A_n$。我们必须有$\Delta_{n+1}$一致，否则，设有公式$B$，使得 $\Delta_{n+1} \vdash B, \Delta_{n+1} \vdash \neg B$，由于$\neg B \to (B \to A)$是一个定理，所以$\Delta_{n+1} \vdash A$对任意的公式$A$都成立，于是$\Delta_n \cup \{A_n\} \vdash \neg A_n$，所以$\Delta_n \vdash A_n \to \neg A_n$，但是$(A_n \to \neg A_n) \to \neg A_n$是$PC$的一个定理。所以$\Delta_n \vdash \neg A_n$， 从而$\Delta_n$是不一致的，矛盾。）

另外，对于任意公式A，如果$\Delta \vdash A$，则存在一个正整数n，使得$\Delta_n \vdash A$。

因为$\Delta \vdash A$，设$B_1, B_2, \cdots, B_m (= A)$是公式$A$的以$\Delta$为前提的演绎。对每个公式$B_i$，或者$B_i \in \Delta$,或者 B_i是一个公理，或者是前面的公式，或者是分离规则由前面公式得到的公式。假设这个序列中$B_{i_1}, \cdots, B_{i_p} \in \Delta$， 所以有整数$n_1, \cdots, n_p$，使得$B_{i_k} \in \Delta_{n_k} (k = 1, 2, \cdots, p)$，令$n$为这些$n_k$中最大的，即 $n = max\{n_1, \cdots, n_p\}$。于是由于$\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots$，所以$\Delta_n \vdash A$ （因为上面序列的每个公式B_i，或者$B_i \in \Delta_n$，或者 B_i是一个公理，或者是前面的公式，或者是分离规则由前面公式得到的公式）。

其次我们说Δ也是一致的，不然的话 设有A_i，使得$\Delta \vdash A_i$并且$\Delta \vdash \neg A_i$，由于A_i和$\neg A_i$的演绎均是有限长，所以只要n足够大 便有$\Delta_n \vdash A_i$并且$\Delta_n \vdash \neg A_i$，这是不可能的，因为Δ_j是一致的。（可以用归纳法证明。） □

命题1.4.3 上面构造的公式集合Δ，有如下性质： 对任一公式A，$A \in \Delta$当且仅当$\Delta \vdash A$

证明: 如果$A \in \Delta$则显然$\Delta \vdash A$。（书中用什么归纳法是证明不出来的）

设$\Delta \vdash A$，$B_1, B_2, \cdots, B_m (= A)$是$A$的以$\Delta$为前提的演绎，当$m = 1$时，$A \in \Delta$或者是公理，如果$A$是 公理（则$A \in \Delta$）。设它的枚举号为$k$（即它是$A_{k-1}$，

由于A_{k-1}是公理，所以$\Delta_{k-1} \vdash A_{k-1}$， 所以$A_{k-1} \in \Delta_k = \Delta_{k-1} \cap \{A_{k-1}\})$ ，那么$A \in \Delta_k$，于是$A \in \Delta$。

设$m > 1$,$B_m = A$由B_i和B_j通过MP得到，那么$B_i \in \Delta$和$B_j \in \Delta$,从而有m_1, m_2,使得 $B_i \in \Delta_{m_1}$和$B_j \in \Delta_{m_2}$，从而$B_i, B_j \in \Delta_{max\{m_1,m_2\}}$。于是$\Delta_{max\{m_1,m_2\}} \vdash B_m$，设$B_m = A$的枚举编号是$v$，即$A = A_{v-1}$。

如果$v > max\{m_1, m_2\}$，即$v-1 \geq max\{m_1, m_2\}$，所以$\Delta_{max\{m_1,m_2\}} \subseteq \Delta_{v-1}$，从而 $\Delta_{v-1} \vdash B_m(= A_{v-1})$，这样的话由$\Delta_v$ 的定义知$A_{v-1} = A = B_m \in \Delta_v \subseteq \Delta$。

如果$v \leq max\{m_1, m_2\}$，所以$\Delta_v \subseteq \Delta_{max\{m_1,m_2\}}$。我们说$A = A_{v-1} \in \Delta_v \subseteq \Delta$，否则$\neg A = \neg A_{v-1} \in \Delta_v$，从而$\Delta_v \vdash \neg A$，进而 $\Delta_{max\{m_1,m_2\}} \vdash \neg A(= B_m)$，与$\Delta_{max\{m_1,m_2\}}$的一致性矛盾。 □

命题1.4.4 设Γ是PC的一致公式集合，那么存在一个指派∂，使得对的任一公式A，都有$\partial(A) = 1$。

证明: 设Δ是上面命题构造的公式集合，因此$\Gamma \subseteq \Delta$，Δ一致并且完全。现在定义映射$\bar{\partial}$如下：

$$\bar{\partial}(A) = \{ \begin{array}{ll} 1 & \text{当} A \in \Delta \\ 0 & \text{当} A \notin \Delta \end{array}$$

1. 由于Δ是完全的，所以$\bar{\partial}$确实是公式集合到$\{0, 1\}$的映射。
2. 映射$\bar{\partial}$满足真值运算$\neg, \rightarrow$。我们要证明：

$$\bar{\partial}(\neg A) = \{ \begin{array}{ll} 0 & \text{当}\bar{\partial}(A) = 1 \\ 1 & \text{当}\bar{\partial}(A) = 0 \end{array}$$

$$\bar{\partial}(A \rightarrow B) = \{ \begin{array}{ll} 0 & \text{当}\bar{\partial}(A) = 1\text{并且}\bar{\partial}(B) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{array}$$

第一条很容易证明，如果$\bar{\partial}(A) = 1$，那么由定义$A \in \Delta$，由Δ的一致性知，$\neg A \notin \Delta$，于是 $\bar{\partial}(\neg A) = 0$。

第二条必须证明$\bar{\partial}(A \rightarrow B) = 0$当且仅当$\bar{\partial}(A) = 1$并且$\bar{\partial}(B) = 0$。

设$\bar{\partial}(A) = 1$并且$\bar{\partial}(B) = 0$，并且$\bar{\partial}(A \rightarrow B) = 1$， 由定义知$A \rightarrow B \in \Delta$，$A \in \Delta$，$B \notin \Delta(\neg B \in \Delta)$。从而 $\Delta \vdash A, \Delta \vdash A \rightarrow B, \Delta \vdash \neg B$，所以$\Delta \vdash B, \Delta \vdash \neg B$，与$\Delta$的 一致性矛盾。

反之，如果$\bar{\partial}(A \rightarrow B) = 0$，并且$\bar{\partial}(A) = 0$或者$\bar{\partial}(B) = 1$。那么$\neg(A \rightarrow B) \in \Delta, \neg A \in \Delta$或者$B \in \Delta$。即 $\Delta \vdash \neg(A \rightarrow B), \Delta \vdash \neg A$或者$\Delta \vdash B$。若$\Delta \vdash \neg A$，由于$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$为$PC$中的定理，所以$\Delta \vdash A \rightarrow B$，矛盾。若$\Delta \vdash B$，由于$B \rightarrow (A \rightarrow B)$为$PC$中的定理，所以$\Delta \vdash A \rightarrow B$，矛盾。

取$\bar{\partial}$在PC的原子公式集合上的限制而得到的指派∂。

我们说对于PC的任一公式A，$\partial(A) = 1$当且仅当$\bar{\partial}(A) = 1$。

用归纳法。如果A是原子公式，那么$\partial(A)=\bar{\partial}(A)$，结论成立。对于公式$A$，如果$A=\neg B$，那么 由归纳假设$\partial(B)=\bar{\partial}(B)$，于是$\partial(A)=\bar{\partial}(A)$。如果$A=C\rightarrow D$，由归纳假设 $\partial(C)=\bar{\partial}(C)$,$\partial(D)=\bar{\partial}(D)$。所以$\bar{\partial}(A)=0$当且仅当$\bar{\partial}(C)=1$，$\bar{\partial}(D)=0$当且仅当$\partial(C)=1$，$\partial(D)=0$，当且仅当$\partial(C\rightarrow D)=0$， 当且仅当$\partial(A)=0$。所以$\partial(A)=\bar{\partial}(A)$。 □

下面证明定理。

设A为PC中的任一公式，Γ为一个公式集合，$\Gamma\Rightarrow A$，那么$\Gamma\vdash A$。

如果Γ不是一致的，那么Γ演绎PC中的所有公式，所以$\Gamma\vdash A$。 如果Γ是一致的， 假设$\Gamma\nvdash A$，那么$\Gamma\cup\{\neg A\}$ 也是一致的，由上面的命题知道，存在一个指派∂，使得∂弄真集合$\Gamma\cup\{\neg A\}$中的所有公式。 从而这个指派弄真Γ中的所有公式，可是弄假A，这与Γ逻辑蕴含A相矛盾。

定理1.7 如果PC的公式集合Γ是一致的当且仅当它是可满足的。

证明: 如果PC的公式集合Γ是一致的，由命题4知存在一个指派∂，使得∂弄真 Γ中的所有公式。所以Γ是可满足的。

反之，如果Γ是可满足的，那么它一定是一致的。否则存在公式B使得$\Gamma\vdash B$，$\Gamma\vdash\neg B$，于是$\Gamma\Rightarrow B$，$\Gamma\Rightarrow\neg B$，这样的话，如果指派∂弄真Γ中的所有公式，那么∂弄真B和$\neg B$，这就矛盾了。所以Γ是不可满足的，矛盾。 □

定义1.4.2 称形式系统FS具有紧致性，如果对于FS的任一公式集合Γ，如果Γ的任一有穷子集可满足，则Γ也可满足。

如果Γ不可满足，则由上面的定理知它不一致，从而存在公式A,使得$\Gamma\vdash A,\Gamma\vdash\neg A$。设这两个演绎中 属于$\Gamma$的公式分别是$\Gamma_1,\Gamma_2$，从而$\Gamma_1\cup\Gamma_2$是$\Gamma$有穷子集，并且$\Gamma_1\cup\Gamma_2\vdash A,\Gamma_1\cup\Gamma_2\vdash\neg A$。矛盾。

§1.5 命题演算形式系统ND

ND也是一个命题逻辑的演算系统，和PC相比，它更注重实用性，推理也更加自然，并且采用了五个真值联结词。

1. 语言部分的定义

首先有一个符号表（字母表）$\sum=\{(,),\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,p_1,p_2,p_3,\cdots\}$。

公式的定义如下：

1. $p_1,p_2,p_3,\cdots$为（原子）公式。

2. 如果A, B是公式，那么$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$也是公式。

3. 只有上述两条定义的表达式才是公式。

公式中最外层的括号可以省略。

2. 推理部分

公理集合包括一个元素：

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$$

推理规则模式有14个：

（1）假设引入规则，它出自于重言式$B \rightarrow (A \rightarrow B)$：

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}$$

（2）假设消除规则，它出自于重言式$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

（3）析取$\vee$引入规则，它出自于重言式$A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$：

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

或者改成更强的形式，因为$(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow A \vee B$:

$$\frac{\Gamma; \neg B \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

（4）析取$\vee$消除规则，它出自于重言式$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$：

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

（5）合取$\wedge$引入规则，它出自于重言式$A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$：

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

（6）合取$\wedge$消除规则，它出自于重言式$A \wedge B \rightarrow A, A \wedge B \rightarrow B$：

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

（7）蕴含$\rightarrow$引入规则：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

（8）蕴含→消除规则，这是分离规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

（9）¬引入规则：这是数学中的反证法。

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

（10）¬消除规则，这条规则源于重言式$A \to (\neg \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

（11）¬¬引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}$$

（12）¬¬消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

（13）↔引入规则：

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B, \Gamma \vdash B \to A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}$$

（14）↔消除规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B}, \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A}$$

定义1.5.1 在ND中称A为Γ的演绎结果，记为$\Gamma \vdash_N DA$， 如果存在一个序列

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots, \Gamma_m \vdash A_m (\Gamma \vdash A)$$

使得$\Gamma_i \vdash A_i$或者公理，或者是$\Gamma_j \vdash A_j$，或者是对$\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \cdots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, j_2, \cdots, j_k < i)$使用推理规则 导出的公式。称$A$为$ND$的定理，如果$\Gamma \vdash A$，并且$\Gamma = \phi$。

例1.5.1 证明对于任一公式A，$A \vee \neg A$为ND的定理。

证明: 1. $A \vdash A \vee \neg A$

2. $\neg A \vdash A \vee \neg A$

3. $\vdash A \vee \neg A$

□

例1.5.2 证明对于任意公式A, B，$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$为$ND$的定理。

证明: 1. $\neg(A\vee B), A\vdash A\vee B$

2. $\neg(A\vee B), A\vdash \neg(A\vee B)$

3. $\neg(A\vee B)\vdash \neg A$

这是证明的最关键的一步，如果$\neg(A\vee B)$，并且A，那么就会出现矛盾。这与人们的思维习惯是一致的，想从$\neg(A\vee B)$，证明$\neg A$，我就可以把$\neg A$否定，变成A，与$\neg(A\vee B)$一起推出矛盾就可以了。而由A就知道$A\vee B$是对的，与$\neg(A\vee B)$矛盾。上面的证明是人们思考过程的符号化处理。

同理

4. $\neg(A\vee B)\vdash \neg B$

5. $\neg(A\vee B)\vdash \neg A\wedge\neg B$

6. $\vdash \neg(A\vee B)\to(\neg A\wedge\neg B)$

7. $\neg A\wedge\neg B, A\vee B, A\vdash A\wedge\neg A$

8. $\neg A\wedge\neg B, A\vee B, B\vdash B$

9. $\neg A\wedge\neg B, A\vee B, B\vdash \neg B$

10. $\neg A\wedge\neg B, A\vee B, B\vdash A\wedge\neg A$

为了从$\neg A\wedge\neg B$证明$\neg(A\vee B)$，将$\neg(A\vee B)$否定。这样就出现了$\neg A\wedge\neg B$和$A\vee B$同时成立，我们找出矛盾就可以了。遇到$A\vee B$推矛盾，往往要分开讨论，就是推出A成立的时侯有矛盾并且B成立的时候也有矛盾就可以了。由于$\neg A\wedge\neg B$即可以推出$\neg A$又可以推出$\neg B$。两种情况的矛盾都出来了。这段话用符号写出来就构成了上面的证明。

11. $\neg A\wedge\neg B, A\vee B\vdash A\wedge\neg A$

12. $\neg A\wedge\neg B\vdash \neg(A\vee B)$

13. $\vdash \neg A\wedge\neg B\to\neg(A\vee B)$

14. $\vdash \neg A\wedge\neg B\leftrightarrow\neg(A\vee B)$

$\square$

例1.5.3 证明对于任意公式A, B，$\neg A\to B\vdash A\vee B$,$A\vee B\vdash\neg A\to B$.

证明: 1. $\neg A\to B, \neg A\vdash B$

2. $\neg A\to B, \neg A\vdash A\vee B$

3. $\neg A \to B, A \vdash A \vee B$

4. $\neg A \to B \vdash A \vee \neg A$

5. $\neg A \to B \vdash A \vee B$

1. $\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash \neg A$

2. $\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash B$

3. $\neg A \to B, \neg(A \vee B) \vdash \neg B$

4. $\neg A \to B \vdash \neg\neg(A \vee B)$

5. $\neg A \to B \vdash (A \vee B)$

1. $(A \vee B) \vdash \neg A \to B$

2. $A \vee B, \neg A \vdash B$

3. $A \vee B, B, \neg A \vdash B$

4. $A \vee B, A, \neg A \vdash B$

□

PC中的公理都是ND的定理。

例1.5.4 证明对于任意公式A, B, C，都有

1. $\vdash A \to (B \to A)$

2. $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3. $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明: 1. $A, B \vdash A$

2. $A \vdash B \to A$

3. $\vdash A \to (B \to A)$

1. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A$

2. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to B$

3. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to (B \to C)$
4. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B$
5. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B \to C$
6. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$
7. $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$
8. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
9. $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

1. $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash B$
2. $\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg B$
3. $\neg A \to \neg B, B \vdash \neg\neg A$
4. $\neg A \to \neg B, B \vdash A$
5. $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$
6. $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

□

第二章 一阶谓词演算

一阶谓词演算是最重要的符号逻辑系统，其它的逻辑系统都被看作是它和命题演算系统的扩充、 推广和归约。一阶谓词演算是程序设计理论、语义形式化以及程序逻辑研究的重要基础。还是程序验证、 程序分析、综合以及自动生成、定理证明和知识表示技术的有力工具。

§2.1 一阶谓词演算的基本概念

一个引子，叙述命题演算系统的不足。例如：

$$\frac{\text{所有是输的平方是非负的，} -\sqrt{3}\text{是实数}}{-\sqrt{3}\text{的平方是非负的}}$$

由于这一推理的逻辑关系并不反映在逻辑的联结词上面，所以在命题逻辑里面便不能完成这一推理过程。 分析上述推理过程，我们可以分析出如下的逻辑成分：

（1）表示客体性质和关系的语言成分——谓词（predicates）:

$\cdots\cdots$是实数 (表示性质的一元谓词)

$\cdots\cdots$是非负的 (表示性质的一元谓词)

$\cdots\cdots$是$\cdots\cdots$的平方 (表示关系的二元谓词)

（2）表示运算的语言部分——函词（functions）:

$\cdots\cdots$的平方 (表示一元运算的一元函词)

（3）表示判断特性的语言成分——量词（quanlifiers）:

所有$\cdots\cdots$ (表示全称判断的全称量词)

2.1.1 谓词和函词

谓词是表示客体性质和关系的语言成分。 它附带着可以放置所讨论对象的位置称为空位。 只有当空位上添入适当的对象后谓词才能成为关于所添对象的一个完整的语句。 谓词携带空位的数目称为谓词的元数。谓词常用大写的拉丁字母或者字母串表示，其空位 则用$e_1, e_2, e_3, \cdots$表示，一律放在它们的后面，例子如下：

“$\cdots\cdots$是实数”为一元谓词，可以表示为Re_1。

“$\cdots\cdots$是非负的”为一元谓词，可以表示为NNe_1。

“$\cdots\cdots$是$\cdots\cdots$的平方 ”为二元 谓词，可以表示为Ee_1e_2。

“$\cdots\cdots$小于$\cdots\cdots$”为二元 谓词，可以表示为Le_1e_2。

“$\cdots + \cdots = \cdots$”为三元谓词，可以表示为$Ae_1e_2e_3$。

当论域U确定以后，一元谓词对应于论语中对象的性质，这样的话就确定了论域中的一个子集。 $n(n \geq 2)$元谓词确定了论域中n个对象之间的关系，确定论域U的笛卡尔集合U^n的一个子集，对于U^n 中的任意一个元素，它具有某一性质当且仅当属于表示此性质的谓词所确定的U^n的子集。 因此对于任意一个谓词$Pe_1e_2\cdots e_n$和任意的对象序列$a_1, a_2\cdots, a_n(n \geq 1)$，可以对语句$Pa_1a_2\cdots a_n$自然的赋予一个真值。如果$\bar{P}$表示$P$确定的$P^n$的子集，那么

$$Pa_1a_2\cdots a_n\text{为真当且仅当}a_1, a_2, \cdots, a_n\text{有关系}P\text{当且仅当} < a_1, a_2, \cdots, a_n > \in \bar{P}$$

例2.1.1 当论域U为复数域时，$R(-5)$为真， 因为$-5 \in \bar{R} \subseteq U$（$R$确定实数集合$\bar{R}$）；$NN(-5)$为假， 因为$-5 \notin \bar{NN} \subseteq U$（$NN$确定非负实数集合$\bar{NN}$）；$L(-3)(+2)$为真，因为$-3 < +2, < -3, +2 > \in \bar{L} \subseteq U^2$（$L$确定$U$上的小于关系$\bar{L}$）；$A(-2)(+2)(+5)$则为假，因为$(-2)+(+2) \neq (+5), < -2, +2, +5 > \notin \bar{A} \subseteq U^3$（$A$确定$U$上的三元 关系$\bar{A}$）；

我们把$Re_1, NNe_1, Le_1e_2, Ae_1e_2e_3$等等叫做谓词命名式（简称谓词）；把谓词的空位中填入对象后 得到的形式叫做谓词填式。有的时候用谓词泛指这两者。用$R^{(1)}, NN^{(1)}, L^{(2)}, A^{(3)}$等简单的 表示上述谓词。

函词是表示某种操作的语言成分，对给定的若干对象，一个操作产生一个并且只产生一个新的对象。因此它 也携带有安置操作对象的空位（也就是变目），空位填入对象以后函词表示的操作就产生唯一确定的一个 对象。函词携带的空位的数目称为函词的元数。函词常用小写的拉丁字母或者字母串表示，它的空位也用$e_1, e_2, e_3\cdots$来表示。写在函词的右边。例子：

“$\cdots\cdots$的平方”为一元函词，可以表示为sqe_1。

“$\cdots\cdots$和$\cdots\cdots$的和”为二元函词可以表示为$adde_1e_2$。

我们把$sqe_1, adde_1e_2$（或者简单的记为$sq^{(1)}, add^{(2)}$）这样的函词的表达形式称为 函词的命名式，或者简称函词。而把$sqt_1, addt_1t_2$（其中t_1, t_2是填入空位的对象）称为函词 $sq^{(1)}, add^{(2)}$在t_1, t_2处的值，t_1, t_2称为它们的变目值。

为了改善可读性，我们经常对谓词填式的对象和函词的变目值用逗号和括号，例如 用$L(x, y), add(x, y)$来代替$Lxy, addxy$。

谓词和函词之间的关系：

谓词确定了一个函词（语句函词），它作用于若干个对象，得到的值是一个新的语句。

而函词确定了一个关系，n元函词f确定了一个$n+1$元的关系$\bar{f}$，使得$ft_1t_2\cdots t_n = t$ 当且仅当$< t_1, t_2, \cdots, t_n, t \in \bar{f} >$。于是函词和谓词可以相互表示。

但是我们在理论的展开过程中仍然将这两者进行严格的区分。与谓词有关的是语句以及它的真值，而与 函词有关的是所讨论的对象或者论域中的个体。

谓词填式可以用真值联结词联结成更加复杂的语句，而函词的值可以作为新的对象填在谓词和函词的空位中。

2.1.2 变元和常元

为了表示论域中的任意一个对象，常常使用变元，它以该论域作为变化域，它可以是论域中的任意一元。例如：

（1）$x+y$表示任意两个实数的和。

（2）$x+y=0$表示一个二元谓词填式，填入的是两个任意取的实数。（x和y互为相反数的时候为真， 否则为假）

（3）$x+y=y+x$表示一个四元谓词填式，填入的是四个任意取的实数。但是要求第一空位和第四空位 以及第二空位和第三空位分别填相同的数（无论x和y取什么数，语句都真，这表示加法的交换律）。

这里的变元的作用是：

1. 表示表达式中变元所在位置对于所讨论对象的任意性。

2. 表示表达式中各变元可取对象的独立性和相关性。（1）（2）（3）中x和y相互独立，（2）中 两处x和y应分别取相同的对象。

3. 取代空位表示表达式的形式结构。

（4）$\sum_{i=1}^{n} f(i)$表示$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$，这里的变元i是为了简化和式而引入的一个记号。和式不依赖于i. $\sum_{i=1}^{n} f(i)$和$\sum_{j=1}^{n} f(j)$表示的意义完全相同。

（5）对所有x, y，有$x+y=y+x$表示加法的交换律。这里语句的真假，不依赖于x, y,换成 对所有u, v，有$u+v=v+u$也表示加法的交换律。

我们把（1）（2）（3）中的变元称为自由变元， 我们把（4）（5）中的变元称为约束变元，

区别：自由变元可以做代入，约束变元不能。约束变元可以改名，自由变元不能。常常会有语义的变化。

常元：表示确定个体的符号。-5表示-5，$Zhang_san$表示张三等等。

2.1.3 量词

$x>0 \vee x=0 \vee x<0$表示“凡是数或者大于零、或者等于零、或者小于零” 这里的x表示全称性的变元。

用$F(x_0)=0$表示“方程$F(x)=0$有解，并且它的解是x_0”

$\neg Px$表示并非所有的x都有性质P,所有的x都没有性质P。到底是哪一个？

量词的引入：$\forall x$表示对任意的x，$\exists x$表示存在x。 $\forall xPx$表示对于所有的x，x都有性质P。$\exists xPx$表示存在x，使得x有性质P。

给出$\neg\forall xPx, \forall x\neg Px, \neg\exists xPx, \exists x\neg Px$的解释。

有了谓词、函词、量词、常元和变元便可以定义项和公式。

变元和常元是项，如果$f^{(n)}$是一个n元函词，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是项，那么$ft_1\cdots t_n$也是项。

谓词填式是公式，对于任何变元x和公式A, B，表达式$\forall xA, \exists xB$，以及A, B由联结词组成的表达式都是公式。这样我们就可以表达几乎所有的命题。

例如：

$$\frac{\forall x(Rx \to NNsqx), R(-\sqrt(3))}{NNsq(-\sqrt(3))}$$

对任意的实数，均有实数使得它们的和为零，可以表示为$\forall x(Rx \to \exists y(Ry \wedge addxy=0))$。

诗歌“生命诚可贵，爱情价更高，若为自由故，两者皆可抛。”表示如下：

$\forall x(Mx \to P(life, x))$

$\forall x(Mx \to V(love, x))$

$F(i, free) \to G(i, lifei) \wedge G(i, lovei)$

这里Me表示“$\cdots$是人”，Pe表示“$\cdots$是宝贵的” ，Ve表示“$\cdots$是有价值的”，Fe_1e_2表示“$\cdots$为$\cdots$ 而斗争”，Ge_1e_2表示“$\cdots$愿意舍弃$\cdots$”，这些都是谓词。 $lifee$表示“$\cdots$的生命”，$lovee$表示“$\cdots$的爱情”，它们都是函数。i和$free$为常元，表示我和自由。

如果想表示论域U的一个子集P中的所有元素，可以用$\forall x(Px \to \cdots)$来表示。如果想表示论域U的一个子集P中有一个元素，可以用$\forall x(Px \wedge \cdots)$来表示。

例2.1.2 *“每个整数都有一个相反的数”这句话，在限定论域为整数集合时可以表示为$\forall x\exists y(y=-x)$。如果在实数域上讨论问题，则用Ie表示整数，那么这句话就写成 $\forall x(Ix \to \exists y(Iy \wedge y=-x))$*

量词的意义：

$\forall xA$为真当且仅当$\neg(\exists x(\neg A))$为真。

$\exists xA$为真当且仅当$\neg(\forall x(\neg A))$为真。

$\neg(\forall xA)$为真当且仅当$\exists x(\neg A)$为真。

$\neg(\exists xA)$为真当且仅当$\forall x(\neg A)$为真。

$\forall x\forall yA$为真当且仅当$\forall y\forall xA$为真。

$\exists x\forall yA$为真当且仅当$\exists y\forall xA$为真。

§2.2 一阶谓词演算形式系统

这里介绍的是一个简明的一阶谓词演算形式系统，称为FC。

2.2.1 一阶语言

一阶谓词演算形式系统称为一阶语言，用$\mathcal{L}$表示一阶语言，FC的语言记为$\mathcal{L}(FC)$。

$\mathcal{L}(FC)$的字母表由以下的符号组成：

$$\begin{array}{rl}
\text{个体变元}v_1, v_2, v_3\cdots & \text{（简称变元）}\\
\text{个体常元}a_1, a_2, a_3\cdots & \text{（简称常元）}\\
\text{函词}f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}\cdots & \text{（一元函词）}\\
f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}\cdots & \text{（二元函词）}\\
\cdots\ \cdots & \\
f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}\cdots & \text{（}n\text{元函词）}\\
\cdots\ \cdots & \\
\text{谓词}P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}\cdots & \text{（一元谓词）}\\
P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}\cdots & \text{（二元谓词）}\\
\cdots\ \cdots & \\
P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}\cdots & \text{（}n\text{元谓词）}\\
\cdots\ \cdots & \\
\text{真值联结词：}\rightarrow, \neg & \\
\text{量词：}\forall & \\
\text{括号：（，）} &
\end{array}$$

我们用L_v表示个体变元集合，L_a表示个体常元集合，L_f表示函词符号的 集合，L_p表示谓词符号的集合，L_l表示逻辑联结词和量词构成的集合。

于是$\mathcal{L}(FC)$的字母表$\sum = L_v \cup Ł_a \cup Ł_f \cup Ł_p \cup Ł_l$。令$\sum^* = \{x_1x_2\cdots x_n | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \sum, n = 0, 1, 2, \cdots\}$，注意，$\sum^*$中含有一个空字符串$\epsilon$。在$\sum^*$上；定义代数运算 $\circ$如下：对$\forall x_1x_2\cdots x_n, y_1y_2\cdots y_m \in \sum^*$，

$$(x_1x_2\cdots x_n)\circ(y_1y_2\cdots y_m) = x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m$$

不难验证，代数系$(\sum^*, \circ, \epsilon)$构成一个幺半群，$\epsilon$是这个幺半群的幺元。

$\mathcal{L}(FC)$的项定义如下：

(1)变元和常元是项。

(2)对任意正整数n，如果$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$f^{(n)}$为n元函词，那么$f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$也为项。

(3)除了有限次的使用(1)(2)得到的表达式以外，其余的都不是项。

$\mathcal{L}(FC)$的公式定义如下：

(1)对任意正整数n，如果$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$P^{(n)}$为n元谓词符号，那么$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$也为公式，并称之为原子公式。

(2)如果A, B为公式，v为任意一个变元符号，那么$(\neg A), (A \to B), (\forall v A)$ 都是公式。

(3)除了有限次的使用(1)(2)得到的表达式以外，其余的都不是公式。

关于$\mathcal{L}(FC)$的说明：

(1)这里的符号是抽象的。并无特别的意义。

(2)其它的联结词被看成是缩写符号。

(3)$\mathcal{L}(FC)$中没有等词=，带有等词的以后展开。

(4)不含有任何函词的系统称为纯谓词演算系统。

(5)在$\mathcal{L}(FC)$中引入命题符号，或者0元函数符号作为命题符号，这样命题演算系统PC就成为 FC的一个子系统。

约定：

(1)为了增加可读性，用$f^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$代替$f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$，用$P^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$代替$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$。

(2)和PC中一样，最外层的括号可以省略。并且$\forall v(\exists v)$的优先级高于所有的二元联结词，和$\neg$同级。

定义2.2.1 公式A称为量词$\forall v(\exists v)$的辖域，如果$\forall v(\exists v)$与A毗连并且A的任何真截断（如果$A = ww', w' \neq \epsilon$，那么我们称$w$为$A$的真截断）都不是公式。

简单地说，辖域就是量词的作用范围。

定义2.2.2 公式A中，变元v的某个出现叫做约束的出现，如果该变元为$\forall v(\exists v)$的指导变元，并且出现在$\forall v(\exists v)$的辖域内。否则该变元的出现为自由的出现。A中约束出现的变元称为约束变元，自由出现的变元 称为自由变元。

定义2.2.3 称项t是对A中自由变元v可代入的，如果A中v的任何自由出现都不在$\forall u(\exists u)$的辖域内，这里u是t中的任意一个变元。

定义2.2.4 对公式A中变元v的所有自由出现都代换为项t（t对A中的v是可代入的）的过程称为代入。代换后得到的公式称为A的代入实例，记为A^v_t。如果A中没有v的自由的出现则A^v_t就是A。

用记号$A^{v_1, v_2, \cdots, v_n}_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$表示对$A$中的变元$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 同时做代入，v_i代为t_i。它与$(\cdots((A^{v_1}_{t_1})^{v_2}_{t_2})^{v_3}_{t_3}\cdots)^{v_n}_{t_n}$是不同的。

定义2.2.5 对公式B称为公式A的子公式，如果A为形如wBw'的符号串，其中w, w'是符号串，B是公式。当w和w'中有一个不是空串，我们就把B称为A的真子公式。

定义2.2.6 设$v_1, v_2, \cdots, v_n$为公式A的所有的自由变元，那么公式$\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \cdots \forall v_{i_r} A$称为$A$的全称化。其中$1 \leq r \leq n, 1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_r \leq n$，公式$\forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n A$称为公式$A$的全称封闭式。当$A$无自由变元时，$A$的全称封闭式就是它本身。

不含自由变元的公式称为命题，FC中的公式是命题当且仅当它是一个全称封闭式。

2.2.2 一阶逻辑

一阶谓词演算系统中的理论部分称为一阶逻辑，用$\mathcal{J}$表示。FC的理论部分用$\mathcal{J}(FC)$表示。

公理部分，由下列公式及其所有的全称化组成：

A1: $A \to (B \to A)$

A2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A4: $\forall v A \to A^v_t$(t对A中的变元v可代入)

A5: $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$

A6: $A \to \forall v A$(v在A中无自由出现)。

推理规则：

$$r_{mp} : \frac{A, A \to B}{B}$$

FC中的定理、证明以及演绎、演绎结果的定义与PC中是一样的。下面举例说明FC中定理的证明。

例2.2.1 证明：对于FC中的任何公式A，变元v，$\vdash_{FC} \forall v A \to A$

证明: 由于项v对A中的自由变元v总是可以代入的，而$\forall v A \to A^v_v$是公理，并且$A^v_v = A$，所以$\forall v A \to A$。 □

例2.2.2 证明：对于FC中的任何公式A，变元v，$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v \neg A$，也就是$\vdash_{FC} A \to \exists v A$

证明: (1)$(\forall v \neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\forall v \neg A)$（重言式）

(2)$\forall v \neg A \to \neg A$（公理）

(3)$A \to \neg\forall v \neg A$（分离规则） □

定理2.1 对于FC中的任何公式A，变元v，如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

证明: 对A的证明序列的长度用归纳法。
$m=1$时A是公理，如果v是A中的一个自由变元，那么$\forall vA$是一个全称化所以是公理；如果v不是A中的一个自由变元，那么由公理$A\to\forall vA$(v在A中无自由出现)以及A的证明就构成了$\forall vA$的证明。总之有$\vdash\forall vA$。
设$A_1,A_2,\cdots,A_k(=A)$是A的证明序列，如果A为公理，那么和前面的讨论一样可以有$\vdash\forall vA$，否则A是$A_i,A_j(i,j<k)$通过推理规则MP得到的，设$A_j=A_i\to A$，由归纳假设知$\vdash\forall vA_i,\vdash\forall v(A_i\to A)$，由公理$\vdash\forall v(A_i\to A)\to(\forall vA_i\to\forall vA)$和分离规则有$\vdash\forall vA_i\to\forall vA$，再由分离规则知$\vdash\forall vA$。 □

不出现在Γ的 任意一个
，那么$\Gamma\vdash A(v_1)$，$\Gamma\vdash$
$\Gamma\cdots$，$\Gamma\vdash A(v_n)$可
$\Gamma\vdash A(v_1)\wedge A(v_2)\wedge$
(v_n)，从而$\Gamma\vdash\forall vA$。

定理2.2 对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由 出现的变元v，如果$\Gamma\vdash A$，那么$\Gamma\vdash\forall vA$

证明: 对A的演绎序列的长度用归纳法。
$m=1$时A是公理，或者$A\in\Gamma$，对于A是公理的情况，如果v是A中的一个自由变元，那么$\forall vA$是一个全称化所以是公理；如果v不是A中的一个自由变元，那么由公理$A\to\forall vA$(v在A中无自由出现)以及A的证明就构成了$\forall vA$的证明。如果$A\in\Gamma$，那么由于v不在A中自由出现，于是由公理$A\to\forall vA$(v在A中无自由出现)以及A得到$\forall vA$，总之有$\vdash\forall vA$。
设$A_1,A_2,\cdots,A_k(=A)$是A的Γ为前提的演绎序列，如果A为公理，或者$A\in\Gamma$，那么和前面的讨论一样可以有$\vdash\forall vA$，否则A是$A_i,A_j(i,j<k)$通过推理规则MP得到的，设$A_j=A_i\to A$，由归纳假设知$\Gamma\vdash\forall vA_i,\Gamma\vdash\forall v(A_i\to A)$，由公理$\vdash\forall v(A_i\to A)\to(\forall vA_i\to\forall vA)$和分离规则有$\Gamma\vdash\forall vA_i\to\forall vA$，再由分离规则知$\Gamma\vdash\forall vA$。 □

定理2.3 对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里出现的常元c， 存在不在A中出现的变元v，使得$\Gamma\vdash A$，蕴含$\Gamma\vdash\forall vA_v^c$，并且在$\Gamma$推出$\forall vA_v^c$的演绎中无$c$的出现。

证明: 设由Γ推出A的演绎序列是$A_1,A_2,\cdots,A_m(=A)$，v是不在诸$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 中出现的第一个变元。那么我们说$(A_1)_v^c,(A_2)_v^c,\cdots,(A_m)_v^c(=(A)_v^c)$是由$\Gamma$推出$(A)_v^c$的演绎序列。

因为由$A_1,A_2,\cdots,A_m(=A)$是A的演绎序列，所以对每个公式$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ A_i或者是公理，或者是Γ的一个成员，或者是应用分离规则通过前面的公式得到的公式。

如果A_i是公理，那么$(A_i)_v^c$也是公理（公理中的公式是公理模式可以代入任意的公式）； 如果A_i是Γ的一个成员，那么由于c不出现在Γ的任意一个公式里，所以$(A_i)_v^c=A$，这样$(A_i)_v^c\in\Gamma$；如果A_i是应用分离规则通过前面的公式得到的公式，

不妨设是应用$A_j, A_j \to A_i$得到的公式，那么显然$(A_i)^c_v$是$(A_j)^c_v, (A_j \to A_i)^c_v$应用分离规则得到的公式。于是$(A_1)^c_v, (A_2)^c_v, \cdots, (A_m)^c_v (= (A)^c_v)$是 由$\Gamma$推出$(A)^c_v$的演绎序列。并且这个演绎序列中每个$c$都替换成了$v$，所以序列中没有$c$ 的出现。 □

定理2.4 设Γ为FC中的任一公式集合，A, B为FC中的任意两个公式，那么

$$\Gamma; A \vdash B \text{当且仅当} \Gamma \vdash A \to B$$

证明: $\Gamma \vdash A \to B$蕴含$\Gamma; A \vdash B$很容易证明。
我们看相反的方向。
(1) 当$A = B$的时候。$\Gamma \vdash A \to B$显然成立。
(2) 当B为公理或者Γ的成员时候。我们有$\Gamma \vdash B$。而$B \to (A \to B)$ 是一个公理，所以我们有$\Gamma \vdash A \to B$成立。
(3) 当B由公式C以及$C \to B$用分离规则得到，由归纳假设$\Gamma \vdash A \to C$,$\Gamma \vdash A \to (C \to B)$成立。又由公理 $(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$得到$(A \to C) \to (A \to B)$，从而有公式$A \to B$。于是得到了$A \to B$以$\Gamma$为前提的演绎序列。于是$\Gamma \vdash A \to B$。 □

定理2.5 设Γ为FC中的任一公式集合，A, B为FC中的任意两个公式，那么

$$\Gamma; A \vdash \neg B \text{当且仅当} \Gamma; B \vdash \neg A$$

证明: 设$\Gamma; A \vdash \neg B$，由演绎定理有$\Gamma \vdash A \to \neg B$，而 $(A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A)$为一个重言式，从而是一个 定理,即$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$，这样的话 $\Gamma \vdash B \to \neg A$，从而又由演绎定理知$\Gamma; B \vdash \neg A$。
很容易证明它的逆。 □

定理2.6 如果FC中的公式集合$\Gamma \cup A$是不一致的，那么$\Gamma \vdash \neg A$。

证明: 由于$\Gamma \cup A$是不一致的，所以存在公式B，使得$\Gamma \cup A \vdash B$，并且$\Gamma \cup A \vdash \neg B$，由演绎定理知$\Gamma \vdash A \to B$，并且$\Gamma \vdash A \to \neg B$，由于$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$为一个重言式，所以是定理，因此得到$\Gamma \vdash \neg A$。 □

定理2.7 设Γ为FC中的任一公式集合，A, B为FC中的任意两个公式，并且变元v不在Γ的 任何公式里面自由出现，那么$\Gamma; A \vdash B$蕴含$\Gamma; \forall v A \vdash B$和$\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$。

证明: 设$\Gamma; A \vdash B$，由演绎定理有$\Gamma \vdash A \to B$，因为变元v不在Γ的 任何公式里面自由出现，所以由前面的定理知$\Gamma \vdash \forall v(A \to B)$，由公理5知$\Gamma \vdash \forall v A \to \forall v B$。所以$\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$。 又由前面的例子知 $\Gamma; \forall v A \vdash \forall B$。 □

定理2.8 设Γ为FC中的任一公式集合，A,B为FC中的任意两个公式，并且变元v不在Γ的 任何公式以及公式B里面自由出现，那么由$\Gamma\vdash\exists vA$以及$\Gamma;A\vdash B$可以推出$\Gamma\vdash B$。

证明: 设$\Gamma;A\vdash B$，由演绎定理有$\Gamma\vdash A\to B$，所以$\Gamma\vdash\neg B\to\neg A$，$\Gamma\vdash\forall v(\neg B\to\neg A)$，进而有 $\Gamma\vdash\forall v\neg B\to\forall v\neg A$以及$\Gamma\vdash\neg\forall v\neg A\to\neg\forall v\neg B$。这就是$\Gamma\vdash\exists vA\to\exists vB$，由$\Gamma\vdash\exists vA$，知道$\Gamma\vdash\exists vB$，由于$v$在$B$中没有自由的出现，所以$\neg B\to\forall v\neg B$为公理，于是$\Gamma\vdash\neg\forall v\neg B\to B$，即$\Gamma\vdash\exists vB\to B$，这样有$\Gamma\vdash B$。
□

§2.3 一阶谓词演算形式系统的语义

一阶谓词演算形式系统的语义是对一阶谓词语言赋予的含义，即对每个个体常元，函词和谓词的指称，以及 对变元的指派，对量词和联结词意义的规定。

定义2.3.1 FC的一阶语言$\mathcal{L}(FC)$的一个语义是一个结构，该结构包括:
(1)非空集合U，称为论域或者个体域。
(2)一个称为解释的映射I，$I:L_a\cup Ł_f\cup Ł_p\to U\cup U_f\cup U_p$，其中$U_f$是$U$ 上的所有函数符号（一元，二元等等）构成的集合。U_P是U 上的所有关系（0元，1元等等）构成的集合。
对于任一常元a，$I(a)\in U$。记为$\bar{a}$。
对于每一个n元函词$f^{(n)}$，$I(f^{(n)})$为U上的一个n元函数，记为$\bar{f}^{(n)}$，即 $\bar{f}^{(n)}:U^n\to U$。
对于每一个n元谓词$P^{(n)}$，$I(P^{(n)})$为U上的一个n元关系 ，记为$\bar{P}^{(n)}$，即 $\bar{P}^{(n)}\subseteq U^n$。当$n=1$时$\bar{P}^{(1)}$为$U$的一个子集，当$n=0$时$\bar{P}^{(0)}$为0或者1。

这样的话一个结构包括两个部分，一个是论域U，一个是解释映射I，于是用$\mathcal{U}=<U,I>$表示 这样一个结构。结构的全体用T表示。

定义2.3.2 一阶谓词演算中，一个指派（在确定了系统的语义的前提下）是指一个映射$s:L_v\to U$。这个映射可以扩展到项的集合L_t到U的映射。对于任意的项t

$$\bar{s}(t)=\begin{cases} s(v) & \text{当}t\text{为变元}v\text{时}\\ \bar{a} & \text{当}t\text{为常元}a\text{时}\\ \bar{f}^{(n)}\bar{s}(t_1)\cdots\bar{s}(t_n) & \text{当}t\text{为}f^{(n)}s(t_1)\cdots s(t_n)\text{时}\end{cases}$$

这里的映射s与解释I是相对独立的，而$\bar{s}$依赖于I。

我们把“公式A在结构$\mathcal{U}$和指派s下取值真”记为$\models_{\mathcal{U}}A[s]$，反之记为 $\not\models_{\mathcal{U}}A[s]$。
$\models_{\mathcal{U}}A$表示在结构中，对于一切指派s，A为真值T，即$\models_{\mathcal{U}}A[s]\forall s$。
$\models_T A$或者$\models A$表示公式A在任意的结构中都取真值T。这时我们说A永真。

定义2.3.3 公式A在结构$\mathcal{U}$和指派s下取真值T，也就是$\models_{\mathcal{U}} A[s]$定义如下:
(1)A为原子公式$P^{(n)}t_1\cdots t_n$时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当} <\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \cdots, \bar{s}(t_n)>\in \bar{P}^{(n)}$$

(2)A为公式$\neg B$时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当} \not\models_{\mathcal{U}} B[s]$$

(3)A为公式$B\to C$时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当} \not\models_{\mathcal{U}} B[s] \text{或者} \models_{\mathcal{U}} C[s]$$

(4)A为公式$\forall vB$时

$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当对每一个} d\in U \text{有} \models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$$

其中$s(v|d)$也是一个指派，它的定义如下：对于L_v中的任何一个元素u

$$s(v|d)(u)=\begin{cases} s(u) & \text{当} u\neq v \\ d & \text{当} u=v \end{cases}$$

如果使用联结词$\vee,\wedge$和量词$\exists$的时候，我们可以进一步的定义

$$\begin{array}{lll} \models_{\mathcal{U}} B\vee C[s] & \text{当且仅当} & \models_{\mathcal{U}} B[s]\text{或者} \models_{\mathcal{U}} C[s] \\ \models_{\mathcal{U}} B\wedge C[s] & \text{当且仅当} & \models_{\mathcal{U}} B[s]\text{并且} \models_{\mathcal{U}} C[s] \\ \models_{\mathcal{U}} \exists vB[s] & \text{当且仅当} & \text{存在} d\in U \text{使得} \models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)] \end{array}$$

很容易的证明 $\models_{\mathcal{U}} \exists vB[s]$ 当且仅当$\models_{\mathcal{U}} \neg\forall v\neg B[s]$。
因为$\models_{\mathcal{U}} \neg\forall v\neg B[s]$当且仅当$\not\models_{\mathcal{U}} \forall v\neg B[s]$ 即对于任意的$d\in U$，$\models_{\mathcal{U}} \neg B[s(v|d)]$是不对的。也就是对于任意的$d\in U$，$\not\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$是不对的。 也就是对于任意的$d\in U$，$\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$都不成立 是不对的。所以存在一个$d\in U$，使得$\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$，从而$\models_{\mathcal{U}} \exists vB$。

例2.3.1 考虑以下的结构，它赋予只含有一个函词、一个谓词和一个常元的一阶谓词系统。
$U=\{0,1,2,3,4\cdots\}$，即自然数集合。
$\bar{P}^{(2)}$为N上的leq关系。
$\bar{f}_1^{(1)}$为N上的后继函数$\bar{f}_1^{(1)}(x)=x+1$。
$\bar{a}_1=0$。

我们说$\models P_1^{(2)}a_1f_1^{(1)}v_1$。但是$\models P_1^{(2)}f_1^{(1)}v_1a_1[s]$对任何指派$s$都不成立。
我们还有$\models \forall v_1P_1^{(2)}a_1v_1$。

在证明FC中的公理α在T中的所有语义结构里均为真。即α永真或者$\models_T \alpha$。
公理1，2，3，显然成立。
现在说明公理4。对于任何结构$\mathcal{U}$和指派s，有$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$蕴含$\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$，其中$t$对于$v$是可代入的。因为$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$意味着对于任意的$d \in U$，有$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$，令$d = \bar{s}(t)$，于是$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$蕴含$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$，而$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$ 就是$\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$，如果$t$对于$v$是可代入的话。于是$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$蕴含$\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$，所以$\models_{\mathcal{U}} (\forall vA \to A_t^v)[s]$。

现在证明公理5。为了证明$\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$，只需证明由$\models_{\mathcal{U}} \forall v(A \to B)[s]$和$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$可以推出$\models_{\mathcal{U}} \forall vB[s]$成立即可。设$d \in D$，那么$\models_{\mathcal{U}} A \to B[s(v|d)]$，所以$\not\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$或者$\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$。因为$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$，所以$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$，从而$\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$对$\forall d \in D$。所以$\models_{\mathcal{U}} \forall vB[s]$。

现在证明公理6。为了证明$A \to \forall vA$永真，只需证明对于任意的$\mathcal{U}$和s，只要$\models_{\mathcal{U}} A[s]$就有$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$。
设$\models_{\mathcal{U}} A[s]$，$d$为$U$中的任意一个元素，由于$A$中没有自由出现的$v$，指派$v$ 是U中的什么元素对公式A没有影响，所以$\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$，从而$\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$。

§2.4 关于FC的重要元定理

2.4.1 FC的合理性

定理2.1 对于FC中的任意一个公式A，如果$\vdash_{FC} A$，那么$\models_T A$。

证明: 对于FC中的，每一个公理α，均有$\models_T \alpha$，我们可以证明推理规则r_{mp}的保真性，即从$\models_T A$和$\models_T A \to B$，可以推出$\models_T B$。
因为$\models_T A$和$\models_T A \to B$，所以对于任意的结构$\mathcal{U}$和指派$s : L_v \to U$，均有$\models_{\mathcal{U}} A[s]$和$\models_{\mathcal{U}} A \to B[s]$，而由$\models_{\mathcal{U}} A \to B[s]$的定义知或者 $\not\models_{\mathcal{U}} A[s]$或者$\models_{\mathcal{U}} B[s]$。 由于$\models_{\mathcal{U}} A[s]$成立，所以必有$\models_{\mathcal{U}} B[s]$。
另外，我们可以归纳的证明：由$\vdash_{FC} A$可以推出$\models_T A$。 □

定理2.2 对于FC中的任意一个公式集合Γ，任意一个公式A，如果$\Gamma \vdash_{FC} A$，那么$\Gamma \models_T A$（使Γ为真的解释也使A为真）。

证明: 设$\Gamma \vdash_{FC} A$，我们对A的演绎长度用归纳法。如果A是公理，那么上面的定理说明 $\models_T A$，从而$\Gamma \models_T A$。当$A \in \Gamma$时，显然$\Gamma \models_T A$。
当A是由B和$B \to A$推出的时候，由于B和$B \to A$具有比A更短的演绎。所以$\Gamma \models_T B \to A$，$\Gamma \models_T B$，从而$\Gamma \models_T A$。 □

定理2.3 对于FC中的任意公式A, B，若$\vdash A \to B$并且$\vdash B \to A$,那么A, B逻辑等价。即$A \Leftrightarrow B$。

由上面的讨论知$\models_T A \to B$，$\models_T B \to A$，从而必有$\models_T A$，$\models_T B$。

作为这个；定理的一个推论，我们有

定理2.4 设A为FC中的任一公式，A'是A的改名式，并且A'改用的变元在A中无任何出现，A与A'等价。即$A \Leftrightarrow A'$。

定理2.5 对于FC中的任意公式A, B，若$\vdash A \to B$并且$\vdash B \to A$，并且A为公式C的子公式，D为将公式C中的子公式A的若干出现替换为B得到的公式，那么$C \Leftrightarrow D$，$D \Leftrightarrow C$。

定理2.6 FC是一致的，即不存在公式A，使得$\vdash A$并且$\vdash \neg A$。

如果那样的话，对于任意的一个结构$\mathcal{U}$，有$\models_{\mathcal{U}} A$和$\models_{\mathcal{U}} \neg A$，矛盾。

定理2.7 FC不是完全的，即存在FC的公式A，使得$\vdash A$和$\vdash \neg A$都不成立。

证明: 对于原子公式$P_1^{(1)}v_1$，$\vdash P_1^{(1)}v_1$和$\vdash \neg P_1^{(1)}v_1$都不成立。否则将有$\models_T P_1^{(1)}v_1$或者$\models_T \neg P_1^{(1)}v_1$之一成立。例如$\models_T P_1^{(1)}v_1$成立，那么做一个结构$\mathcal{U} =< U, I >$，使得$I(P_1^{(1)}) \neq \phi$，并且$s(v_1) \notin I(P_1^{(1)})$，于是$\not\models_{\mathcal{U}} P_1^{(1)}v_1$。同理$\vdash \neg P_1^{(1)}v_1$也不成立。□

反之， 上述定理说明如果存在FC的公式A，使得$\Gamma \vdash A$和$\Gamma \vdash \neg A$，也就是Γ不一致，那么Γ完全。所以有下面的定理：

定理2.8 FC的不一致的扩充必是完全的，但至少有一个公式不是FC的一致扩充的定理。特别的，当公式集合Γ 不一致的时候，扩充$FC \cup \Gamma$是完全的；当Γ一致的时候，至少有一个公式A不是$FC \cup \Gamma$ 的定理， 即$\Gamma \not\vdash A$。

如果扩充是一致的，那么就不是完全的，所以如果$\Gamma \vdash A$那么$\Gamma \not\vdash \neg A$，所以至少有一个公式不是一致扩充的定理。下面的说法顺理成章。当Γ一致的时候，扩充$FC \cup \Gamma$ 也一致，所以有一个公式不是（演绎）定理。

这里，FC的不一致的扩充指的是公式集合$Th(FC \cup \Gamma)$不一致，但是这样的话就有公式B，使得$Th(FC \cup \Gamma) \vdash B, Th(FC \cup \Gamma) \vdash \neg B$，由于$Th(FC \cup \Gamma)$中的每个公式都有以$\Gamma$为前提的演绎，所以$\Gamma \vdash B, \Gamma \vdash \neg B$，这反而说$\Gamma$不一致。

什么逻辑，逻辑就是要研究人们的思维规律。将人们日常的思维形式化，科学化。 从ND这个系统就足以看到形式化和符号化的过程。而PC是一个简捷的系统，数学中 强调的是简捷。用最少的语言完成最多的功能。所以看起来PC在证明过程中要 麻烦一些，多走了几个圈子。这也是很正常的，因为他强调的是系统性。

2.4.2 FC的完备性和其他

定义2.4.1 FC^*是FC的一个扩充，当且仅当，FC^*是一个通过改变和扩大FC的公理集而得的形 式系统，并且使得FC的定理仍保持为FC^*的定理。

定义2.4.2 对某个一阶语言来说，所谓一阶 系统是指FC的一个扩充。

定义2.4.3 一阶系统S是一致的，如果不存 在任何合式公式A，使得A和$\neg A$皆为S的定理。

定义2.4.4 一阶系统S是完全的，如果对于 每个闭公式A，或者$\vdash A$，或者$\vdash \neg A$。

据此，显然可知FC是不完全的。

命题2.4.1 令S是一致的一阶系统，A为一 闭公式且不是S的定理。如果S^*是通过对S补加$\neg A$为新公理而得的扩充，那么S^*也一致。

命题2.4.2 令S是一致的一阶系统，那么S 存在完全的一致扩充。

命题2.4.3 如果S是FC的一致扩充，那么 S^+也是一致的。

命题2.4.4 如果S是FC的一致扩充，那么存 在(L)的一个解释，S的每个定理对该解释皆真。

前三个引理的证明比较简单，引理2．32的证明十 分复杂，但是它却又是完备性定理证明的关键.

定理2.9 对于FC的任何公式A有，如果$\models_T A$，那么$\vdash A$。

定理2.10 对于FC的任一公式集合Γ和任一公式A有，如果$\Gamma \models_T A$，那么$\Gamma \vdash A$。

这里只要$\Gamma = \phi$，这一定理就变成了上面的定理。

设Γ是一个一致的公式集合（否则必有Γ完全，从而$\Gamma \vdash A$）。设$\mathcal{L}'$是一阶语言$\mathcal{L}$中新添入可数多个常元$c_1, c_2, \cdots$所得到的新的一阶语言。

命题2.4.5 那么Γ作为一阶语言 $\mathcal{L}'$中的公式集合也是一致的。

证明: 否则，设Γ在$\mathcal{L}'$中不一致，并且Γ推出α和$\neg\alpha$的演绎分别是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l(=\alpha)$，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m(=\neg\alpha)$，这些公式当中至多包含有限多个新的常元。由定理3.3知在$\mathcal{L}'$中 存在不在α中出现的变元v（只要不出现在$\Gamma \vdash \alpha$的证明序列中

即可），有$\Gamma \vdash \forall v \alpha_v^c$。同理在$\mathcal{L}'$中 存在不在$\neg\alpha$中出现的变元$v$（只要不出现在$\Gamma \vdash \neg\alpha$的证明序列中即可），有$\Gamma \vdash \forall v \neg\alpha_v^c$。由于这两个证明序列只有有限多个变元，所以必有一个变元v使得$\Gamma \vdash \forall v \alpha_v^c$和 $\Gamma \vdash \forall v \neg\alpha_v^c$同时成立。于是$\Gamma \vdash \alpha_v^c$和$\Gamma \vdash \neg\alpha_v^c$同时成立。如果$\alpha_v^c$中还有新的常元出现继续实施这一过程。最终我们证明在$\mathcal{L}$中有 $\Gamma \vdash \alpha_{v_1,v_2,\cdots,v_k}^{c_1,c_2,\cdots,c_k}$和 $\Gamma \vdash \neg\alpha_{v_1,v_2,\cdots,v_k}^{c_1,c_2,\cdots,c_k}$同时成立。这与$\Gamma$在$\mathcal{L}$中一致矛盾。

□

设公式和变元的序偶排序为$<\alpha_1, u_1>, <\alpha_2, u_2>, <\alpha_3, u_3>, <\alpha_4, u_4>, \cdots$。 θ_1是$\neg\forall u_1\alpha_1 \to \neg{\alpha_1}_{c_1}^{u_1}$（$c_1$是$\alpha_1$中不出现的第一个新常元）。$\theta_2$是$\neg\forall u_2\alpha_2 \to \neg{\alpha_2}_{c_2}^{u_2}$（$c_2$是$\alpha_2$和$\theta_1$中不出现的第一个新常元）。 θ_2是$\neg\forall u_3\alpha_3 \to \neg{\alpha_3}_{c_3}^{u_3}$（$c_3$是$\alpha_3$和$\theta_1, \theta_2$中不出现的第一个新常元）。 等等。。。

令$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \}$。

命题2.4.6 $\Gamma \cup \Theta$是一致的。

证明: 假设$\Gamma \cup \Theta$不一致，那么存在公式A使得$\Gamma \cup \Theta \vdash A$和$\Gamma \cup \Theta \vdash \neg A$成立。 由于这两个演绎的长度有限，所以必存在有限的公式集合$\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m+1}\} \subseteq \Theta$使得$\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m+1}\}$不一致。不妨假定这里的$m$是最小的。即 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\}$一致，所以由定理3.6知 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$。 设$\theta_i = \neg\forall u_i\alpha_i \to \neg\alpha_{c_i}^{u_i}$，即$\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \vdash \neg(\neg\forall u_{m+1}\alpha_{m+1} \to \neg\alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}})$。 可以推得$\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \vdash \neg\forall u_{m+1}\alpha_{m+1}$。 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \vdash \alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}$。 （这是因为$\neg(\neg\forall u_{m+1}\alpha_{m+1} \to \neg\alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}) \vdash \neg\forall u_{m+1}\alpha_{m+1}$和$\neg(\neg\forall u_{m+1}\alpha_{m+1} \to \neg\alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}) \vdash \alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}$都是定理）。

由$\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \vdash \alpha_{c_{m+1}}^{u_{m+1}}$和定理3.3知 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\} \vdash \forall u_{m+1}\alpha_{m+1}$。这说明 $\Gamma \cup \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\}$不一致，矛盾。所以$\Gamma \cup \Theta$是一致的。 □

扩充$\Gamma \cup \Theta$为公式集合Δ如下。设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \}$是全体公式的一个枚举，令$\Delta_0 = \Gamma \cup \Theta$，

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\alpha_n\} & \text{当}\Delta_n \vdash \alpha_n \\ \Delta_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{当}\Delta_n \nvdash \alpha_n \end{cases}$$

$$\Delta = \cup_{i=0}^{\infty}\Delta_i$$

命题2.4.7 Δ是一致的、完全的并且对于任意公式α，$\Delta \vdash \alpha$当且仅当$\alpha \in \Delta$。

可以参看命题逻辑的证明。

我们构造一个结构$\mathcal{U}^* = <U^*, I*>$。 U^*是$\mathcal{L}$中所有项的集合，在I^*下，对于任意函数符号f和常元c，$\bar{f}\bar{t}_1 \cdots \bar{t}_n$就是$ft_1 \cdots t_n$

$\bar{c}$就是c。而对任意的谓词符号P：$<\bar{t}_1 \cdots, \bar{t}_n> \in \bar{P}$当且仅当$Pt_1 \cdots t_n \in \Delta$。令指派$s^*$如下 $s^*(v) = v$对于任意变元v成立。可以证明$\bar{s^*}(t) = t$对于任意的项t成立。

我们证明

$$\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]\text{当且仅当}\alpha \in \Delta$$

对α的结构用归纳法。（1）α为原子公式$Pt_1 \cdots t_n$时，$\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$当且仅当$< \bar{t}_1 \cdots, \bar{t}_n > \in \bar{P}$当且仅当$Pt_1 \cdots t_n \in \Delta$。

（2）α为公式$\neg\beta$时，$\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$当且仅当 $\not\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*]$当且仅当$\beta \notin \Delta$当且仅当$\neg\beta \in \Delta$。

（3）α为公式$\beta \to \gamma$时，$\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$当且仅当 $\not\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*]$或者$\models_{\mathcal{U}^*} \gamma[s^*]$当且仅当$\beta \notin \Delta$或者 $\gamma \in \Delta$当且仅当$\neg\beta \in \Delta$或者$\gamma \in \Delta$当且仅当$\Delta \vdash \neg\beta$或者 $\Delta \vdash \gamma$当且仅当$\Delta \vdash \beta \to \gamma$ 当且仅当$\beta \to \gamma \in \Delta$

（4）α为公式$\forall v\beta$时，$\models_{\mathcal{U}^*} \alpha[s^*]$蕴含 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*(v|c)]$（这里的$c$取那个特殊的$c$，不在$\beta$中出现）,于是蕴含 $\models_{\mathcal{U}^*} \beta^v_c[s^*]$ 蕴含 $\beta^v_c \in \Delta$蕴含 $\neg\beta^v_c \notin \Delta$ 蕴含 $\neg\forall v\beta \notin \Delta$（因为$\neg\forall v\beta \to \neg\beta^v_c \in \Delta$） 蕴含 $\forall v\beta \in \Delta$。

反之$\forall v\beta \in \Delta$蕴含$\beta^v_d \in \Delta$（对任意的$d$成立，因为$\forall v\beta \to \beta^v_d$是一个公理）， 从而$\models_{\mathcal{U}^*} \beta^v_d[s^*]$ 从而$\models_{\mathcal{U}^*} \beta[s^*(v|d)]$从而$\models_{\mathcal{U}^*} \forall v\beta[s^*]$。

正文待续...............