

Physical implement:

符号与约定:

Symbol	描述	单位
$\rho$	介质密度	[kg/m <sup>3</sup> ]
$c$	介质中的声速	[m/s]
$p$	声压	[Pa]
$p_{in}$	传入声波振幅	[Pa]
$t$	时间	[s]
$X$	位置向量函数	[m]
$F$	可选的偶极子源	[N/m <sup>3</sup> ]
$Q$	可选单极源	[1/s <sup>2</sup> ]
$\lambda$	声波的波长	[m]
$\Omega$	模拟域	[m]
$w$	模拟域宽度	[m]
$h$	模拟域高度	[m]
$k$	波数	[rad/m]
$f$	波频	[Hz]
$\omega$	角速度	[rad/s]
$h$	网格间距	[m]
$X$	声源位置	[m]
$r_1$	圆柱形障碍物的半径	[m]
$r_2$	斗篷边界的半径	[m]
$\sigma$	PML 吸收系数	[rad/(s·m)]

Method: 声压模型理论

在此部分，考虑通过模拟入射到硬壁圆柱体上的水平方向上右行声波的 2D 行为。在有或没有斗篷的情况下分别进行，然后比较所得的声音散射模式以量化声学斗篷的有效性。为了描述谐波声波的传播，使用Helmholtz偏微分方程（PDE）。由于需要无限扩展的域，Helmholtz方程需要使用完美匹配层（PML）进行变换。

1. 引入Helmholtz方程:

Helmholtz方程用于模拟特定角频率 $\omega$ 下的谐波声压场:

$$\nabla \left( -\frac{1}{\rho} (\nabla p(X) + F) \right) - \frac{\omega^2}{\rho c^2} p(X) = Q$$

该方程的因变量是声压 $p$ 。声压波在有密度的介质中 $\rho$ 以声速传播 $c$ 。声压可以理解为与环境参考压力的局部压力偏差:  $p(X) = p_{medium}(X) - p_{reference}$ ，其中 $X$ 表示位置矢量。术语 $Q$ 和 $F$ 分别代表单极子和偶极子源。

2. PML 变换:

完美匹配层（PML）是一种对无限范围的模拟域进行建模的方法。要实施 PML，首先需要扩大

模拟域。该扩展是 PML 处于活动状态的区域。其次，完成偏微分方程的坐标变换。PML 坐标变换后的 2 维Helmholtz方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{s_y}{s_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{s_x s_y \omega^2}{\rho c^2} p = 0$$

$$s_x = 1 - i \frac{c \sigma_x}{\omega}$$

$$s_y = 1 - i \frac{c \sigma_y}{\omega}$$

这里 $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 是 PML 的吸收系数，引入两个辅助参数 $s_x$ 和 $s_y$ 来控制 PML 在各个维度上的衰减。部分代码如下，其中 FrequencyPML Model： 参数需要用于下文模拟使用（完整代码添加至附录）。

```
# Define variables
vars = ['p(x, y)', 'omega', ['x', 'y']]

# Define terms for the Frequency PML Model
diffusion_term = 1 / (rho * np.array([sx/sy, sy/sx])) * p(x, y)
reaction_term = (sx * sy * omega**2) / (rho * c**2) * p(x, y)

# Frequency PML Model
FrequencyPMLModel = diffusion_term - reaction_term

def getPMLparameters(var, pmlBoundary, pmlWidth, sigmaMax, c, omega):
    p1 = pmlBoundary[0]
    p2 = pmlBoundary[1]

    sigma = 0

    if var - p1 >= 0:
        sigma = ((var - p1) / pmlWidth) ** 2 * sigmaMax
    elif p2 - var >= 0:
        sigma = ((p2 - var) / pmlWidth) ** 2 * sigmaMax

    return 1 - 1j * c * sigma / omega
```

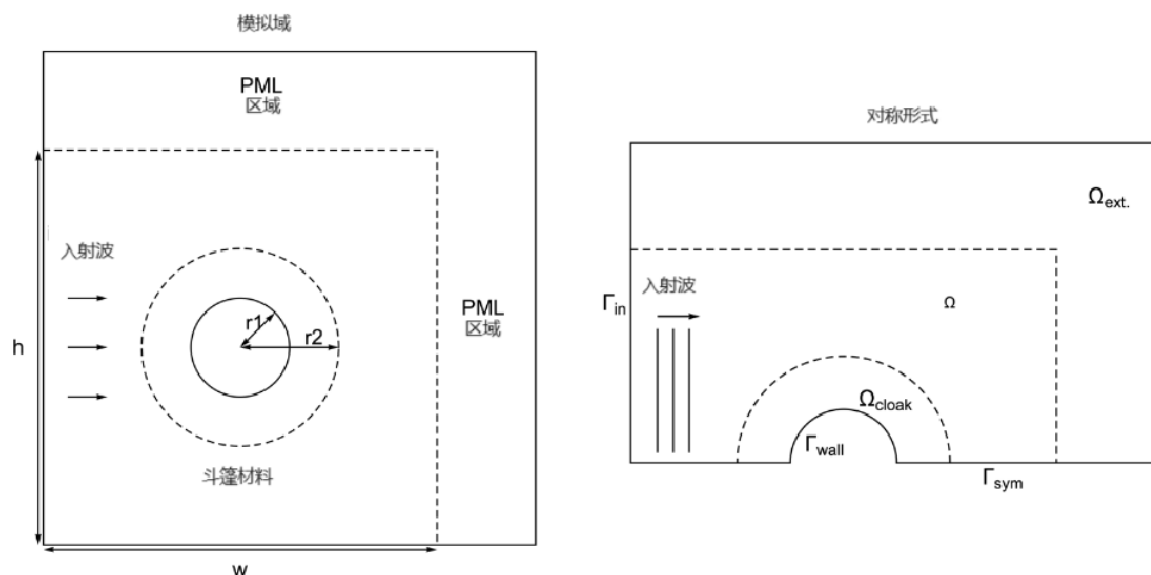
(Fig1)

Result:

### 1. 设计 PML 域和网格模拟

建立模拟几何模型：具有半径的刚性圆柱体  $r_l$  被声学隐身材料层包围，直到外半径  $r_l$ 。一时谐声波(time domain with the harmonic wave relation,亦即可以表示为时间的三角函数形式的解)从左侧进入域作为探测信号。在两个方向 $x$ 和 $y$ 上建立无限扩展的域，计算域被扩展为包括了吸收出射/散射波的 PML 区域。

由于沿着几何轴的对称性，仅使用圆柱体的上半部分 $x^x$ 构建模拟域是有效的。 $\Omega_{ext}$ 圆柱壁边界和对称边界分别表示为 $\Gamma_{wall}$ 和 $\Gamma_{sym}$ 。 $\Gamma_{in}$ 表示入口边界。



(Fig2)

设置参数如下(引入 Fig1 中的 Frequency PML Model 数据，完整代码添加至附录)：

```
# Define parameters
r1 = 1
r2 = 2
w = 8
h = 8
# Define rectangle
rectangle = Polygon(Point(-w/2, 0), Point(w/2, 0), Point(w/2, h/2), Point(-w/2, h/2))
# Define disk
disk = Circle(Point(0, 0), r1)
# Define region difference
omega = rectangle - disk
```

(Fig3)

## 2. 网格生成：

为了模拟隐形材料的薄层结构，默认的三角形网格将在整个域中生成超出所需数量的元素。一种方法在保持计算效率的同时适应斗篷结构是使用混合元素类型网格。

在该模型中，网格生成分为三个部分。首先，为声学斗篷的分层结构创建四元网格。在斗篷外部，使用较粗糙的三角形单元网格来降低计算成本。在最后一步中，通过组合两个预定义的子网格来构建完整网格。(Fig4)

在声学斗篷内创建更精细的二次元素网格(Fig5)。

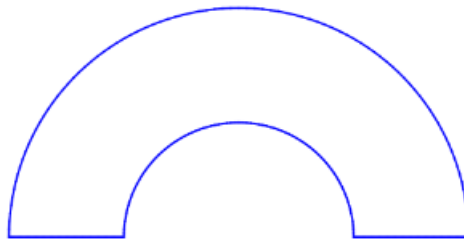
```
# Define parameters
nx = 91
ny = 101
r1 = 1
r2 = 2

# Generate coordinates
coordinates = np.array([[r*np.cos(theta), r*np.sin(theta)] for r in np.linspace(r1, r2, ny)
                        for theta in np.linspace(0, np.pi, nx)])

# Generate incidents
incidents = []
for i in range(1, nx):
    for j in range(1, ny):
        idx = (j-1)*nx + i
        incidents.extend([(idx, idx+1, idx+nx+1, idx+nx)])
```

(Fig4)

输出图像如下：



(Fig5)

内部网格的边界用于构造包括 PML 区域的外部区域的边界网格。可以从矩形的边界网格中提取外边界，然后仅选择不在重叠上的坐标(Fig6)。

在声学斗篷的外部创建边界并将其可视化(Fig7&Fig8)：

```

# Define parameters
w = 8
h = 8
pmlWidth = 2
r2 = 2

# Create rectangle boundary
rectangle = Rectangle((-w/2, 0), w/2 + pmlWidth, h/2 + pmlWidth)

# Get boundary coordinates
bmesh_coors = np.array(rectangle.get_path().vertices)

# Create inner mesh
inner_coors = np.array([[x, y] for x, y in innerMesh.points if np.linalg.norm([x, y]) >= r2])

# Combine inner and boundary mesh coordinates
coordinates = np.vstack([inner_coors, bmesh_coors])

# Find shortest tour
line = LineString(coordinates)
shortest_tour = np.array(line.minimum_rotated_rectangle.exterior.xy).T

```

(Fig6)

```

# Define the outer boundary coordinates
outer_boundary_coors = shortest_tour

# Create a mesh generator object
mesh_info = triangle.MeshInfo()
mesh_info.set_points(outer_boundary_coors)
mesh_info.set_facets([(i, i+1) for i in range(len(outer_boundary_coors)-1)] + [(len(outer_boundary_coors)-1, 0)])

# Generate the mesh
mesh = triangle.build(mesh_info, max_volume=0.01, min_angle=25)

# Extract mesh points and elements
points = np.array(mesh.points)
elements = np.array(mesh.elements)

```

(Fig7)



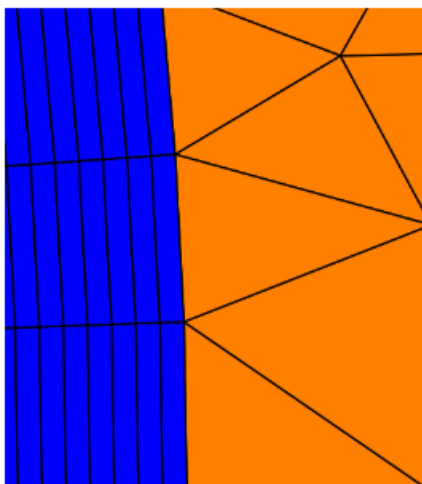
(Fig8)

合并上面的两个网格，使用预定义的子网络构建整个区域，可视化结果如下(Fig9)：



(Fig9)

检查合并后的网格(Fig10):



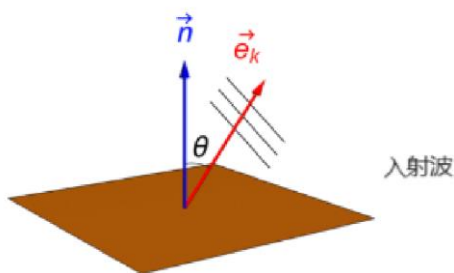
(Fig10)

### 3. 边界条件:

当边界 $\Gamma_b$ 上有指定的入射声压 $\hat{p}(t)$ 和波向矢量时, 辐射边界条件由 Neumann 边界条件推导下式给出:

$$\vec{n} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p(X) \right) = \frac{i\omega}{\rho c} ((1 + \vec{n} \cdot \vec{e}_k) \hat{p} - p(X)), X \in \Gamma_b$$

其中  $\vec{n}$ ,  $\vec{e}_k$ ,  $\theta$  为边界法向量, 波向向量和入射角,  $\vec{n} \cdot \vec{e}_k = \cos\theta$  (Fig11)



(Fig11)

指定传入声音的振幅  $p_{in} = 1\text{Pa}$ , 并在声音入口处设置辐射边界条件, 默认 $\Gamma_{wall}$ 和 $\Gamma_{sym}$ 适用硬边界条件(sound hard boundary condition, 硬边界上, 声音粒子速度的法向分量为零, 因为不可能向前运动):

```
# Define parameters
pIn = 1
w = 8
c = 343 # Speed of sound in air (m/s)
rho = 1.2 # Density of air (kg/m^3)

# Define variables
vars = ['p(x, y)', 'omega', ['x', 'y']]

# Calculate acoustic radiation value
gamma_in = acoustic_radiation_value(-w/2, vars, {'MassDensity': rho, 'SoundSpeed': c},
                                       {'SoundIncidentPressure': pIn, 'BoundaryUnitNormal': [-1, 0, 0]})
```

### 4. 对比模拟结果:

(1) 无声学斗篷模型:

假以水为传播的介质，设置参数输入声音信号在任意处：f = 800hz，求解上文的声压 PDE 并将解转化为时域谐波：

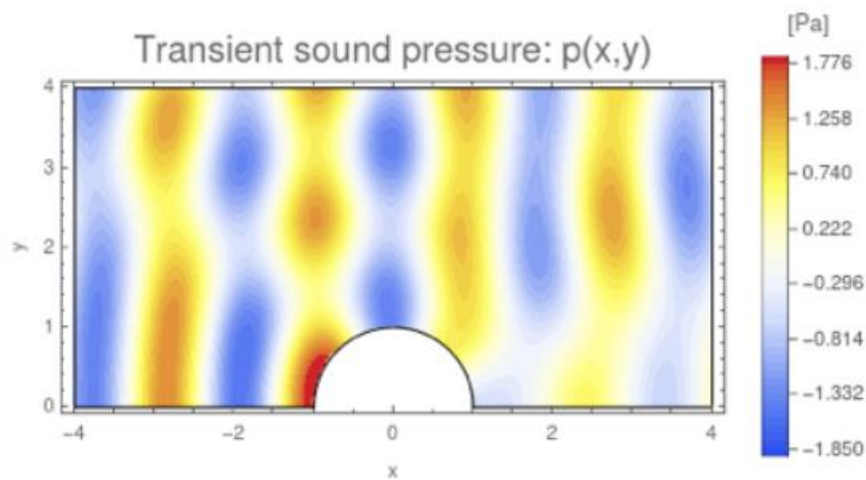
$$p(t, x, y) = p(x, y)e^{i\omega t}$$

属性设置为(Fig12)：

```
# Define parameters
c_water = 1482 # Speed of sound in water (m/s)
rho_water = 1000 # Density of water (kg/m^3)
f = 800 # Frequency (Hz)
omega = 2 * np.pi * f # Angular frequency
```

(Fig12)

可视化其结果，找到最大压力幅度 $|p(x, y)|_{max}$ 并设置图例栏和等值线图选项(Fig13)：



(Fig12)

查找最大值 $|p(x, y)|_{max}$ 约为 1.9Pa 远大于传入的 $p_{in} = 1\text{Pa}$ ，表明大量的波被圆柱体障碍物反射

(2)有声学斗篷模型：

假设声学斗篷的材料由 50 层两种交替的流体状材料组成，每种材料的厚度为 0.02m。圆柱轴的径向距离为上文已设置的 $r_1$ (Fig14 Fig15)：

```
# Define parameters
thickness = 2 / 100
r1 = 1
r2 = 2
w = 8
h = 8
c_water = 1482
rho_water = 1000
f = 800
omega = 2 * np.pi * f
```

(Fig14)

```

# Define functions
def r(x, y):
    return np.sqrt(x**2 + y**2)

def rho_1(x, y):
    return (r(x, y) + np.sqrt(2 * r1 * r(x, y) - r1**2
)) / (r(x, y) - r1) * rho_water

def c_1(x, y):
    return (r2 - r1) / r2 * r(x, y) / (r(x, y) - r1) * c_water

def rho_2(x, y):
    return (rho_water**2) / rho_1(x, y)

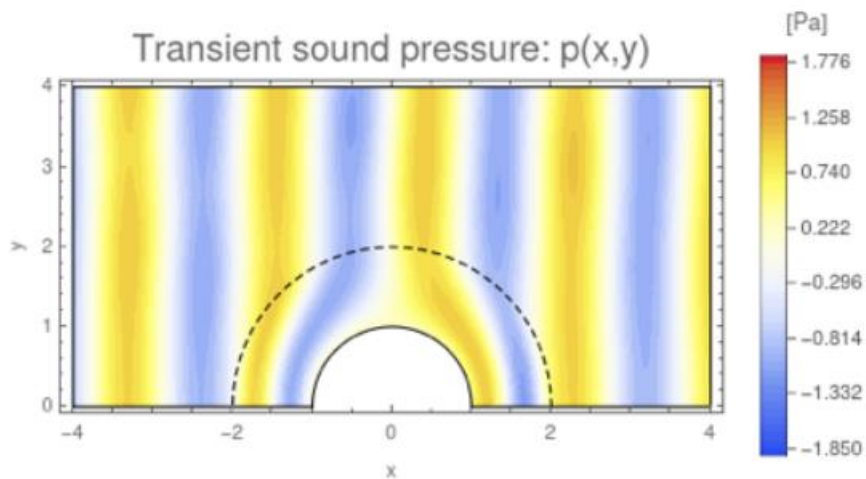
def c_2(x, y):
    return c_1(x, y)

def layer_number(x, y):
    r = np.sqrt(x**2 + y**2)
    if r <= r1:
        return 1
    elif r1 < r <= r2:
        return np.ceil((r - r1) / thickness)
    else:
        return 51

```

(Fig15)

同样的可视化其结果为(Fig16):

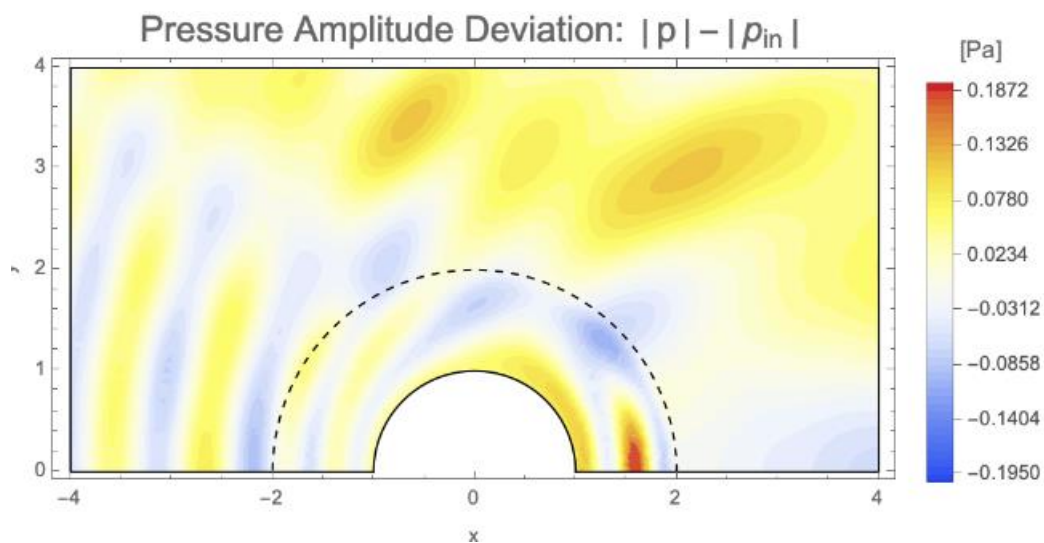


(Fig16)

这里考虑输入和输出信号的波形如果保持相同，那么硬壁圆柱体在声压场中几乎不可见。如果整个压力幅度场保持与传入声音幅度相同，则圆柱体是完全不可见的 $|p| = |p_{in}| = 1 \text{ Pa}$



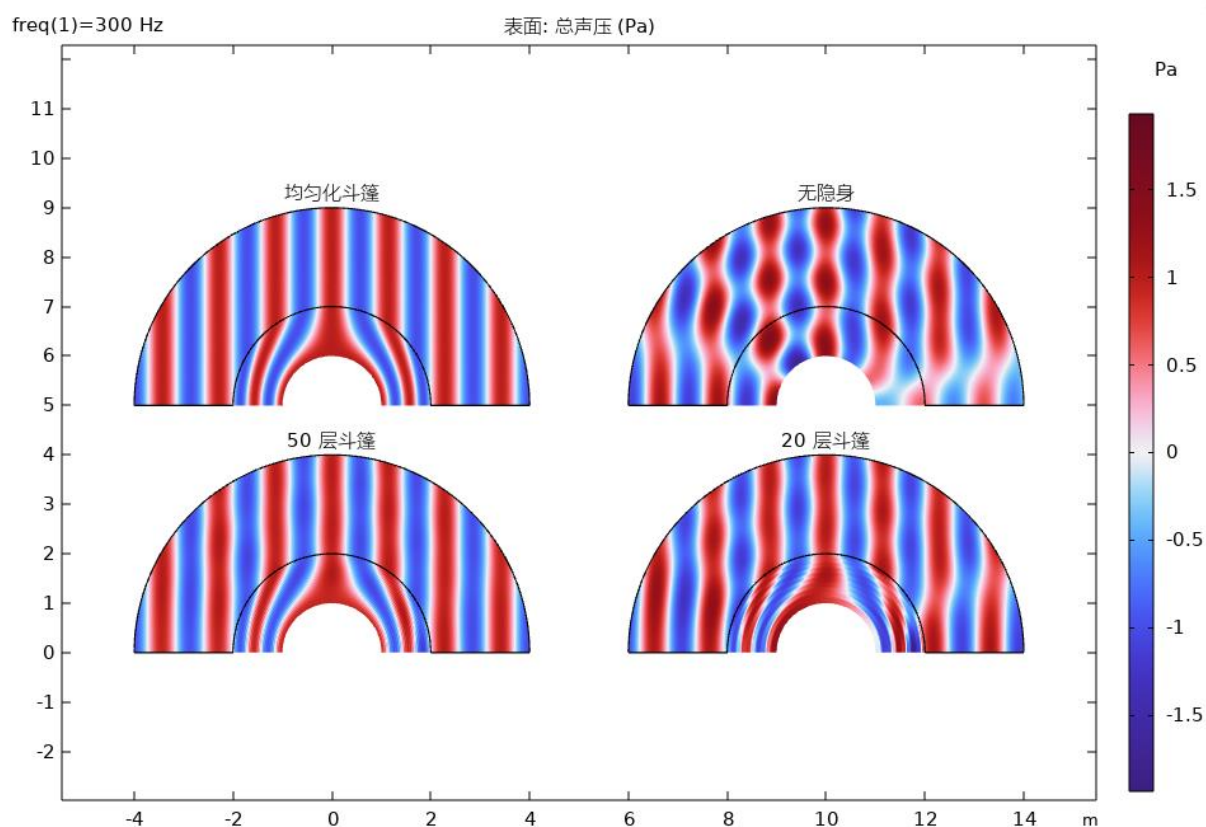
计算这里的 $|p| - |p_{in}|$  (Fig17):



(Fig17)

容易看出声波斗篷之外，振幅偏差一直保持在 $-0.1Pa < |p| - |p_{in}| < 0.1Pa$ 的范围内，这使得圆柱体在域内很难被检测到。因此表明了声学斗篷的隐身性。

通过增加复合层数可以进一步提高斗篷性能。其对比结果如下(Fig18):



(Fig18)

Reference:

1. D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. *Acoustic cloaking in two dimensions: a feasible approach*. New Journal of Physics. 10 063015 (2008).