CÁLCULO E ANÁLISE NUMÉRICA
Bitácora 06

Escola Superior Técnica de Enxeñaría

Clase expositiva do martes, 20 de febreiro de 2024

Número de asistentes: 67

Universidade de Santiago de Compostela

Autores

Marta Basalo González

Lúa Gil Gómez

Carlos Moldes Peña

ÍNDICE

1. REVISIÓN DA BITÁCORA 05

1.1. Semiesfera de radio R. Signo positivo.

Pasamos agora ao estudo da semiesfera de radio R como exemplo ilustrativo dunha función con dúas variables. Unha das correccións que deben realizarse refírese á definición do dominio da función. A expresión correcta non debe incluír unha coma despois da y, e ademais debe corrixirse o sentido da desigualdade:

$$D(f) = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, R^2 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} \Rightarrow D(f) = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

Ademais, na imaxe da función, mesturouse a R referida ao radio da circunferencia centrada na orixe, e a $\mathbb{R}$ referida ao conxunto dos números reais. Polo tanto, a imaxe da función correcta é $Im(f) = [0,\ R]$.

1.2. Semiesfera de radio R. Signo negativo.

Seguindo coa corrección da semiesfera, no caso do signo negativo tamén habería que cambiar correctamente o sentido da desigualdade:

$$D(f) = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, R^2 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} \Rightarrow D(f) = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

Como última corrección, na imaxe da función, mesturouse a R referida ao radio da circunferencia centrada na orixe, e a $\mathbb{R}$ referida ao conxunto dos números reais. Polo tanto, a imaxe da función correcta é $Im(f) = [-\ R,\ 0]$.

1.3. Conxuntos de nivel.

A continuación, retomamos un exercicio que non se chegou a resolver na clase anterior sobre a función que mide a temperatura nun espazo. O que se quere calcular é a súa imaxe:

$$T(x,\ y,\ z) = 298 + \frac{500}{1+x^2+y^2+z^2}$$

Cando nos piden calcular os conxuntos de nivel para calquera valor de C, xorde a pregunta sobre a utilidade deste proceso. A resposta radica no feito de que os valores de C que xeran conxuntos de nivel distintos do baleiro son aqueles que pertencen á imaxe da función, como se discutiu na clase previa. Por tanto, ao calcular os conxuntos de nivel en xeral, obtemos unha perspectiva máis ampla dos L_C, que neste caso son os seguintes:

$$L_C = \left\{(x,\ y, z) \,/\, 298 + \frac{500}{1+\ x^2+y^2+z^2} = C\right\}$$

Se realizamos cálculos en xeral, o que obtemos é:

$$\frac{500}{1+\ x^2+y^2+z^2} = C - \ 298$$

E se desexamos establecer unha relación para identificar cales son as C sobre as que ten sentido falar, procedemos da seguinte maneira:

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{500}{C - 298}$$

Dado que sabemos que o primeiro membro da ecuación sempre é positivo ou cero, podemos establecer unha relación entre ambos os membros, co obxectivo de determinar os posibles valores de C. Para lograr isto, despexamos o seguinte e continuamos operando:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{500}{C - 298} - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{500 - C + 298}{C - 298}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{798 - C}{C - 298}$$

Para que, ao calcular o conxunto de nivel para calquera valor de C xérese un conxunto distinto do baleiro, o cociente da parte dereita da ecuación debe cumprir:

$$\frac{798 - C}{C - 298} \geq 0$$

Se se require que o cociente sexa maior ou igual a cero, tanto o numerador como o denominador deben cumprir esta condición. Desta premisa derívanse as relacións ás que chegou unha compañeira ao resolver o exercicio durante a clase anterior:

$$798 - C \geq 0 \,;\, C \leq 798$$

Ademais, para garantir que o denominador non sexa nulo:

$$C - 298 > 0 \,;\, C > 298$$

Finalmente, obtemos o intervalo da imaxe da función.

$$298 < C \leq 798 \,;\, Im(f) = (298, 798]$$

Se seleccionamos un valor C dentro deses intervalos, obteremos un conxunto de nivel onde os puntos (x, y, z) serán iguais a $\frac{798-C}{C-298}$, o cal resultará nunha cantidade positiva. Por tanto, o conxunto de nivel será unha esfera con radio $R = \sqrt{\frac{798-C}{C-298}}$.

Cando se nos pide un conxunto de nivel para un valor arbitrario de C, calcular valores significativos implica determinar o conxunto das imaxes, xa que este conxunto representa todos os C para os cales o seu conxunto de nivel non é o baleiro.

Outra forma de calcular o intervalo é considerar que, dado que o dominio abarca todo $\mathbb{R}^3$, podemos asignarlle calquera valor. Neste caso, asignamos o valor que minimiza o denominador, que é cando tende a cero. Canto menor sexa o denominador, maior será o cociente que nos leva a obter 798. Doutra banda, para atopar o valor máximo, facemos tender o denominador a infinito. Neste caso, o cociente tende a cero e o numerador alcanza o seu valor máximo.

Por tanto, despois de calcular o intervalo utilizando calquera dos dous métodos mencionados, o conxunto de nivel resultante é:

$$L_C = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 +\ y^2 +\ z^2 = \left(\sqrt{\frac{798-C}{C-298}}\right)^2 \}$$

É dicir, o conxunto de nivel consiste nunha esfera centrada na orixe con radio $R = \sqrt{\frac{798-C}{C-298}}$, e este valor sempre será positivo. Este tipo de exercicio, que acabamos de resolver, é un apartado común en exames de Cálculo e Análise Numérico, onde se require calcular o dominio, a imaxe e os conxuntos de nivel dunha función. Ás veces, solicítanse dous ou tres conxuntos de nivel.

1.4. Conxuntos de nivel. Exercicios de exame.

Seguindo coas correccións da bitácora, engadimos varios detalles que faltaban na resolución dun exercicio exemplo de exame. Neste exercicio dábase a función $f(x,\ y) = ln(1 - x^2 - y^2)$ e pedíase calcular o dominio de definición ademais de definir os conxuntos de nivel L_{-1}, L_0, L_1. A continuación, detállase a resolución do exercicio.

Para obter a máxima puntuación, ademais de identificar o dominio, neste caso débese especificar que o dominio é o interior da circunferencia centrada na orixe con radio $R = 1$. En situacións onde sinalar o dominio non resulte nunha esfera, elipse ou unha entidade matemática específica, non será necesario proporcionar detalles adicionais.

Logo, pídese calcular L_{-1}, e obtense a expresión $R = \sqrt{\frac{e-1}{e}} \approx 0,\ 795$. Despois dos cálculos, débese engadir que:

$$L_{-1} = \left\{(x,\ y) \in D(f) \ / \ x^2 +\ y^2 = \left(\sqrt{\frac{e-1}{e}}\right)^2\right\}$$

Ademais, precísase que é a circunferencia centrada na orixe con radio $R = \sqrt{\frac{e-1}{e}}$. A continuación, defínese L_0 e procédese de maneira similar a como se fixo con L_{-1}. Finalmente, calcúlase L_1.

Aínda que a función pode tomar valores negativos e mesmo cero, non pode alcanzar o valor 1. En realidade, ao considerar o caso xeral, é improbable que a función tome valores positivos. Isto débese a que ao aplicar o logaritmo neperiano a $1 - x^2 - y^2$ en puntos dentro da circunferencia, obteranse valores entre 0 e 1. Por tanto, o logaritmo neperiano de números nese intervalo sempre será negativo, cero ou tende a menos infinito, o que impide que a función produza valores positivos.

2. PRAZOS DE ENTREGA

Para a entrega da Tarefa 1, débese publicar o problema no foro designado "Foro de problemas da Tarefa 1". A entrega no foro require engadir un título e descrición do problema, seguindo as condicións especificadas nas instrucións. A data límite para esta entrega é o 25 de febreiro ás 23:55.

Ademais, indícase que se debe realizar unha entrega interna, onde se compartirá o problema con outro compañeiro asignado, antes do 4 de marzo. Os detalles sobre a asignación de compañeiros publicaranse nunha listaxe, e a xestión de compartir arquivos levará a cabo entre os compañeiros.

A data límite para a entrega externa a través do Campus Virtual é o 11 de marzo ás 23:50. Nesta entrega, débese incluír o problema proposto por un mesmo, así como o problema resolvido entregado polo compañeiro asignado, xunto coa avaliación correspondente. Se o compañeiro asignado non entrega o seu Tarefa 1, o problema presentado por un mesmo corrixirase sobre 0.9 en lugar de 0.6.

3. FUNCIÓNS DE VARIAS VARIABLES

3.1. Conxuntos de nivel do Paraboloide.

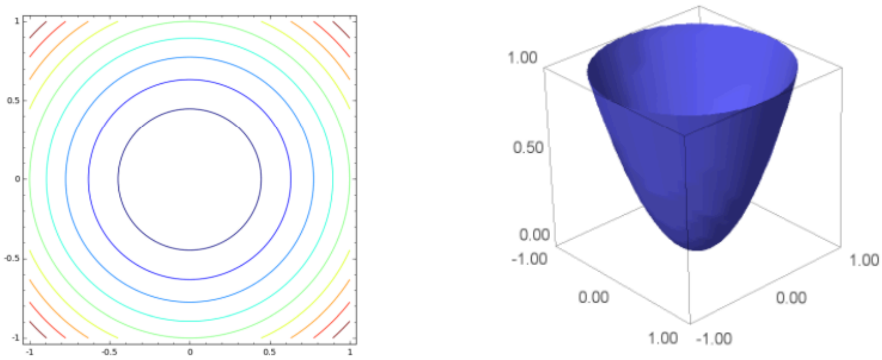
A función $f(x, y) = x^2 + y^2$, representa os conxuntos de nivel do paraboloide, xa que define a súa superficie $z = x^2 + y^2$. Estes conxuntos de nivel consisten en circunferencias centradas na orixe, con radio $R = \sqrt{C}$, onde C é a constante.

Matematicamente, estes conxuntos de nivel exprésanse como:

$$L_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = C\}$$

Isto representa todas as coordenadas (x, y) que cumpren coa ecuación do círculo de radio $R = \sqrt{C}$.

A imaxe da función, denotada como $Im(f)$, comprende os valores que poden obterse ao avaliar a función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Se se calculan os conxuntos de nivel para valores positivos, non hai problemas; con todo, para valores negativos, por exemplo -3, a función non está definida (resultando no conxunto baleiro). Por tanto, a imaxe da función defínese como $Im(f) = [0, +\infty)$, como se pode apreciar na Imaxe 1.



Imaxe 1: *Representación gráfica do Paraboloide.*

Departamento de Matemática Aplicada. Universidade de Santiago de Compostela. Grao en Enxeñaría Informática. Cálculo e Análise Numérico. Tema 2: Conceptos básicos de funcións de varias variables: Dominio, imaxe, conxuntos de nivel, gráfica dunha función de varias variables.

O paraboloide da Imaxe 1, é un paraboloide elíptico. O paraboloide elíptico presenta seccións distintivas: en cortes verticais, as súas seccións son parábolas, mentres que en cortes horizontais son elipses. Neste caso, as seccións toman a forma particular de circunferencias, sendo un caso especial das elipses.

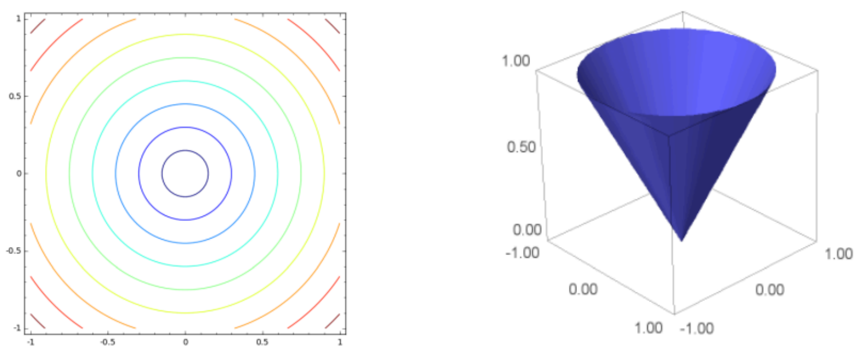
3.1. Conxuntos de nivel do Cono.

Os conxuntos de nivel da función $f(x,\ y)\ =\sqrt{x^2\ +\ y^2}$ corresponden á superficie do cono, cuxa ecuación é $z\ =+\ \sqrt{x^2\ +\ y^2}$. Do mesmo xeito que no caso do paraboloide, se se considera o dominio, este é idéntico debido a que a función implica a suma de dous termos positivos ao cadrado, o que sempre resulta nun número positivo.

Matemáticamente, os conxuntos de nivel exprésanse como:

$$L_C = \{(x,\ y)\ \in \mathbb{R}^2/\ \sqrt{x^2\ +\ y^2}\ =\ C\}\ \Rightarrow L_C = \{(x,\ y)\ \in \mathbb{R}^2/\ x^2\ +\ y^2\ =\ C^2\}$$

Do mesmo xeito que no caso do paraboloide, a imaxe da función é $Im(f)\ =\ [0,\ +\infty)$, é dicir, sempre se poden calcular os conxuntos de nivel cando C está entre 0 e $+\infty$. Con todo, a gráfica da función difire, como se pode observar na Imaxe 2.

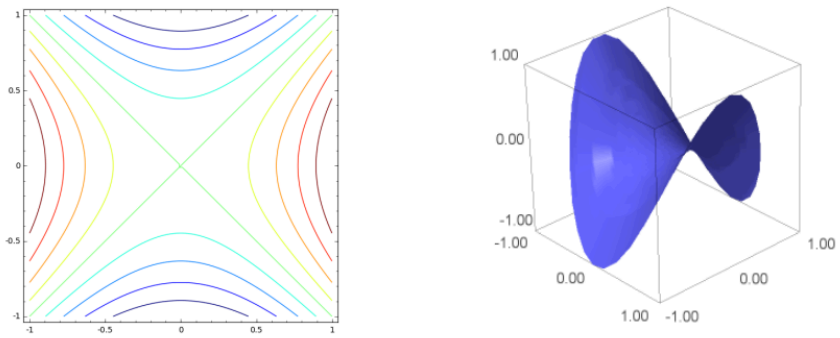


Imaxe 2: Representación gráfica do Cono.

Departamento de Matemática Aplicada. Universidade de Santiago de Compostela. Grao en Enxeñaría Informática. Cálculo e Análise Numérico. Tema 2: Conceptos básicos de funcións de varias variables: Dominio, imaxe, conxuntos de nivel, gráfica dunha función de varias variables.

3.1. Conxuntos de nivel da Sela de montar.

Os conxuntos de nivel da función $f(x,\ y) = x^2 - y^2$ corresponden á superficie da Sela de montar, cuxa ecuación é $z =+ \sqrt{x^2 - y^2}$. Esta superficie tamén é coñecida como paraboloide hiperbólico, xa que ao realizar cortes na función, obtemos diferentes hipérbolas, como se pode ver na Imaxe 3.



Imaxe 2: *Representación gráfica da Sela de Montar.*

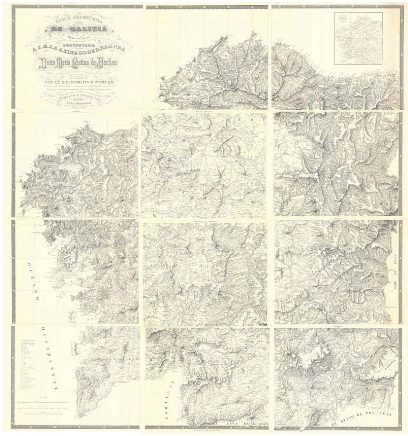
Departamento de Matemática Aplicada. Universidade de Santiago de Compostela. Grao en Enxeñaría Informática. Cálculo e Análise Numérico. Tema 2: Conceptos básicos de funcións de varias variables: Dominio, imaxe, conxuntos de nivel, gráfica dunha función de varias variables.

4. DOMINGO FONTÁN

Domingo Fontán Rodríguez, nacido en Porta do Conde, deixou un legado perdurable na historia de Galicia hai dous séculos. A Real Academia Galega de Ciencias recoñeceuno como Científico do Ano en 2018, e Foi discípulo de Matemático Rodríguez, que á súa vez, participou activamente na medición do meridiano de Greenwich.

Foi precisamente Matemático Rodríguez quen encomendou a Fontán a importante tarefa de elaborar o mapa científico de Galicia, un labor que ocupou a Fontán durante 17 anos da súa vida. Durante este extenso período, percorreu meticulosamente o territorio galego, triangulando a rexión e situando os puntos xeográficos con precisión astronómica. Utilizando o teorema do seo, Fontán puido calcular as lonxitudes dos lados do triángulo baseándose no coñecemento de dous ángulos e un lado.

Ademais da súa destreza en matemáticas, Fontán demostrou un profundo coñecemento da orografía de Galicia ao trazar un meticuloso mapa que incluía un detallado trazado de estradas e ferrocarrís. Este mapa, coñecido como a Carta Xeométrica de Galicia (Imaxe 4), contén ao redor de 8.000 topónimos, mostrando a dedicación e o coidado co que Fontán abordou o seu traballo cartográfico.

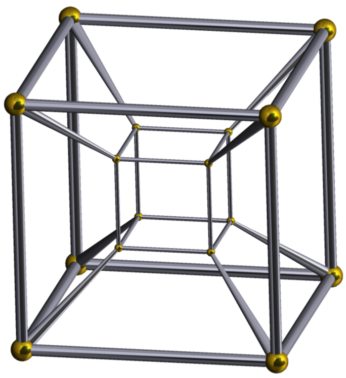


Imaxe 4: *Carta Xeométrica de Galicia.*

Instituto Geográfico Nacional. Catálogo de la Cartoteca. Galicia. Mapas generales. 1845
https://www.ign.es/web/catalogo-cartoteca/resources/html/002693.html

5. REPRESENTACIÓN DE $\mathbb{R}^4$

Unha maneira de conceptualizar $\mathbb{R}^4$ é consideralo como un hipercubo, representado na Imaxe 5. Visualmente, podemos imaxinar un hipercubo comezando cun cubo en tres dimensións e logo estendéndoo a dimensións superiores. Un exemplo práctico disto atópase no monumento á Constitución Española de 1978 en Madrid, o cal se asemella a un hipercubo no seu deseño arquitectónico.



Imaxe 5: *Proxección en perspectiva do hipercubo do espazo tetradimensional no espazo tridimensional.*

Cuaderno de Cultura Científica. Hipercubo, visualizando la cuarta dimensión.
https://culturacientifica.com/2015/09/09/hipercubo-visualizando-la-cuarta-dimension/