CÁLCULO E ANÁLISE NUMÉRICA

<u>BITÁCORA 10</u>

Clase teórica do martes 5 de marzo de 2024

Nº de asistentes: 57

Autores:

Iago Formoso Blanco

Nicolás Franco Souto

Aldán Lodeiro Castelao

Víctor Fraga Izquierdo

ÍNDICE

1. Revisión da bitácora 9

Ao inicio da clase levouse a cabo a revisión da bitácora 9 a cal estaba ben realizada, aínda que habería algún aspecto a mellorar como: Cambiar a expresión “No punto da orixe” por “Na orixe”.

Tamén se recorda durante este período de repaso, que baixo certas condicións, as derivadas parciais de segunda orde cruzadas (f_{xy} e f_{yx}) dan o mesmo resultado ($f_{xy} = f_{yx}$).

Por outra parte, alentouse a realizar unha serie de exercicios de exames doutros anos:

Sexa $f(x,y) = ln(1 - x^2 - y^2)$. Calcular as derivadas parciais segundas da función f: $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ e a matriz Hessiana de f.

$$f(x,y) = ln(1 - x^2 - y^2)$$

$$f_{xx}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{-2x^2+2y^2-2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = -\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$f_{yx}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = -\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$f_{yy}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{2x^2-y^2-2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y^2-2}{(1-x^2-y^2)^2} & -\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} \\ -\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} & \frac{2x^2-y^2-2}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Sexa f(x,y) = $-\sqrt{9-x^2-y^2}$*. Calcular as derivadas parciais segundas da función f:* $f_{xx}(x,y)$*,* $f_{xy}(x,y)$*,* $f_{yy}(x,y)$*,* $f_{yx}(x,y)$ *e a matriz Hessiana de f.*

$$f(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{9-y^2}{(9-x^2-y^2)\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$f_{xy}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{xy}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yx}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{xy}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{9-x^2}{(9-x^2-y^2)\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{9-y^2}{(9-x^2-y^2)\sqrt{9-x^2-y^2}} & \frac{xy}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{xy}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{9-x^2}{(9-x^2-y^2)\sqrt{9-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

1.1 Aspectos a recordar

Á hora de derivar parcialmente, debese ter en conta, como xa se facía cas derivadas coñecidas ata agora, á regra da cadea. Esta utilizase coas funcións vectoriais, xa explicadas na bitácora anterior. Cómpre lembrar que son antes de poder utilizar esta regra.

Función vectorial:

Unha función f de n variables, tal que ás variables pertencen ao dominio da función, realízase unha transformación desas mesmas variables mediante a propia función, ás que chamaremos “imaxes” das n variables. Para definilas matemáticamente:

$$f: x \in Dom(f) \subseteq R^{n} \rightarrow f(x) = (f1(x), \ldots, fm(x)) \in R^{m}$$

Tamén necesitamos a matriz Jacobiana para así obter correctamente a derivada:

Matriz Jacobiana:

Dada a función vectorial

$f: x \in Dom(f) \subseteq R^{n} \rightarrow f(x) = (f1(x), \ldots, fm(x)) \in R^{m}$ con derivadas parciais continuas:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x1} & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

É importante recordar que na matriz Jacobiana, as m filas que a compoñene son os gradientes das m componentes de f, é dicir, cada fila é o gradiente da i-ésima variable.

2. Regra da cadea:

2.1 Definición da regra da cadea

Supoñendo dúas funcións tal que:

$$g: \; Dom(g) \subseteq R^n \rightarrow R^m$$
$$f: \; Dom(f) \subseteq R^m \rightarrow R^p$$

pódense compoñer ás dúas funcións [$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p$] tendo todas derivadas parciais continuas. Verifícase entón:

$$D(f \; o \; g)(x) \; = \; Df(g(x)) \, Dg(x)$$

2.2 Explicación do caso 1.

Poderíase poñer entón o exemplo dunha formiga que se move. Neste caso, mediante a variable t obteríamos a posición no eixo de abscisas (x) mentres que coa súa imaxe no de ordenadas (y), e coa última transformación lineal obteríamos un dato como, por exemplo, a temperatura que ten a formiga nese punto. Se a variable depende do tempo:

$$\mathbb{R}^1 \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) \rightarrow f(x(t), y(t))$$

Desta forma definese a función vectorial w:

$$w := \; f(r(t)) \; = \; f(x(t), y(t))$$

Coa súa derivada:

$$w'(t) \; = \frac{dw(t)}{dt} = D(f \; o \; r) \; = \; Df(r(t)Dr(t)$$

Os elementos desarrollados por separado quedan:

$Dr(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ = velocidade da formiga

$Df(r(t)) = (\ f_x(x(t), y(t)) \quad f_y(x(t), y(t))\ ) = \nabla f(r(t))$

Para ao final e según a definición da súa derivada:

$Df(r(t)Dr(t) = (\ f_x(x(t), y(t))\, f_y(x(t), y(t))\ ) \qquad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$= f_x(r(t))x'(t) + f_y(r(t))y'(t)$

Isto, extrapólase a funcións con máis variables, no caso de ter unha función tal que $f(x, y, z)$, terase:

$$w'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(r(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(r(t)) \cdot z'(t)$$

2.2.1 Exemplo caso 1.

$Dada\, f\,(x,\ y\,) = x^2 + y^3,\ onde\ x(t) = e^t\ e\ y\,(t) = e^{-t},$
$w\,(t) := f\,(x(t),\ y\,(t))\ achar\ \frac{dw}{dt}$.

Solución:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$
$\frac{dx}{dt} = x'(t) = e^t, \frac{dy}{dt} = y'(t) =- e^{-t}$

Seguindo a regra da cadea: $w'(t) = Df(r(t))Dr(t)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(r(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),\ y\,(t)) = 2\,x(t) = 2e^t$
$\frac{\partial f}{\partial y}(r(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),\ y\,(t))) = 3(y\,(t))^2 = 3e^{-2t}$
$Df(r(t)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(r(t)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r(t))) = (2e^t \quad 3e^{-2t})$

$Dr(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

$w'(t) = (2e^t \quad 3e^{-2t}) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = 2\, e^t e^t + 3e^{-2t}(-\, e^{-t}) = 2e^{2t} - 3e^{-3t}$

Neste exemplo tamén primeiro realizar a composición e a continuación derivar a expresión directamente.

<u>2.3 Caso 2:</u>

No caso 2, volvese ter unha función $f\,(x,\ y\,)$ de dúas variables, pero estas en vez de depender dunha única variable, dependen de 2: $x = x(u,\ v\,),\ y = y\,(u,\ v\,)$.

A continuación móstrase o diagrama para unha mellor comprensión do problema:

$$R^2 \xrightarrow{r} R^2 \xrightarrow{f} R^1$$

$$(u,\ v\,) \ \rightarrow \ (x(u,\ v\,),\ y\,(u,\ v\,)) \ \rightarrow \ f(x(u,\ v\,),\ y\,(u,\ v\,))$$

A composición:

$$w(u,\ v\,) := \ (f \circ r)(u,\ v\,) \ = \ f\,(r(u,\ v\,)) \ = \ f\,(x(u,\ v\,),\ y\,(u,\ v\,))$$

É unha función de dúas variables que ten como derivadas parciais:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(r(u,\ v\,))\frac{\partial x}{\partial u} \ + \frac{\partial f}{\partial y}\,(r(u,\ v\,))\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(r(u,\ v\,))\frac{\partial x}{\partial v} \ + \frac{\partial f}{\partial y}\,(r(u,\ v\,))\frac{\partial y}{\partial v}$$

Que compoñen a matriz resultante da derivada da composición:

$D(f \circ r) \ = \ Df\,(r(u,\ v\,))\,Dr(u,\ v\,) = (\frac{\partial w}{\partial u} \quad \frac{\partial w}{\partial v})$

2.3.1 Exemplo caso 2:

$Dada\ f(x, y) = x^2 + y^2, con\ x(u, v) = u - v\ e\ y(u, v) = u + v$
$Se\ r(u, v) = (x(u, v), y(u, v))\ e\ w(u, v) := (f \circ r)(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$Achar\ \frac{\partial w}{\partial u}\ e\ \frac{\partial w}{\partial v}$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, e \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = -1, \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

Pola regra da cadea:

$$Dw(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) * \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$Dw(u, v) = \begin{pmatrix} 2(u - v) & 2(u + v) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u, v) = 2(u)(1) + 2(u)(1) = 4u$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}(u, v) = 2(-v)(-1) + 2(v)(1) = 4v$$