CÁLCULO E ANÁLISE NUMÉRICA

Bitácora 09

Clase expositiva do luns, 4 de marzo de 2024
Número de asistentes: 71

Autores
Antón Expósito Campo
Helena Franco López
África Franco Montero
Isabel Gude Gómez

Índice

1. Revisión da Bitácora 8

Á hora de revisar a bitácora anterior, que resumía os contidos sobre planos tanxentes e o método de Newton-Raphson, salientouse o bo traballo realizado. Unicamente sinaláronse algúns aspectos a mellorar:

1.1 Na realización das derivadas cómpre indicar en función de que variables estanse a facer:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

1.2 A revisión do exercicio 3 deu lugar a unha reflexión sobre o plano tanxente. Este plano é horizontal no punto (0,0) xa que se anulan as derivadas, e ademais indica puntos críticos como máximos ou mínimos.

1.3 Formalmente, os subíndices dun vector de incógnitas deben comezar en 1 e non en 0, empezariamos no 0 ao traballar en linguaxes de programación, como SageMath.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

2. Método de Newton

Continuando coa clase anterior, se a matriz $Df(x^k)$ é invertible, entón podemos aproximar a raíz α despexándoa da seguinte relación:

$$Df(x^k)(\alpha - x^k) \approx - f(x^k) \quad \Rightarrow \quad Df(x^k)(x^{k+1} - x^k) \approx - f(x^k)$$

A nosa nova incógnita é x^{k+1} que se corresponde co termo seguinte da ecuación.

$$x^{k+1} - x^k = - (Df^{-1}(x^k)f(x^k))$$

$$x^{k+1} = x^k - (Df^{-1}(x^k)\, f(x^k))$$

Esta ecuación final aseméllase coa ecuación do método de Newton para unha incógnita:

$$x^{k+1} = x^{k} - \frac{f(x^{k})}{f'(x^{k})}$$

Pero en vez de dividir pola derivada de $f(x)$, agora multiplicamos pola inversa da matriz Jacobiana. É por isto que $Df(x^{k})$ ten que ser unha matriz invertible.

No exemplo proposto nas transparencias da clase búscase calcular as solucións do sistema:

$$1 - x^2 - y^2 = 0,\ x^2 - y^2 = 0$$

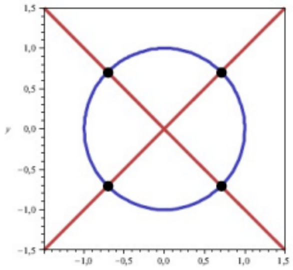

Fig.1: Representación do sistema

$$f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2}$$

f_1 representa unha circunferencia e f_2 as súas bisectrices. Aquí sería fácil atopar as solucións á man e sen ningunha complicación, pero os casos reais poderían ser máis sofisticados.

Na práctica, invertir a matriz $Df(x^{k})$ non é moi doado, por isto é mellor empregar un algoritmo para resolver en cada iteración o sistema lineal de ecuacións:

$$Df(x^{k})(x^{k+1} - x^{k}) = \ - f(x^{k})$$

Chamando $\delta x^{k} := \ x^{k+1} - x^{k}$, obtemos o seguinte algoritmo:

Dado $x^{0} \in \mathbb{R}^{n}$, para $k = 0, 1, 2...$ resolvemos:

$$Df(x^{k})\delta x^{k} = - f(x^{k}),$$

Este algoritmo ten como obxectivo achar δ e unha vez atopado este valor utilizalo para calcular o seguinte iterante:

$$x^{k+1} := x^k + \delta x^k$$

Para calcular a inversa dunha matriz ou resolver sistemas, existen varios métodos, como por exemplo o método de Gauss ou o de Cramer, pero implican un custo computacional moi elevado. Actualmente, SageMath xa contén métodos moito máis eficientes para levar a cabo estas operacións xerando así un menor consumo de enerxía. Este tipo de algoritmos que optimizan o consumo de enerxía denomínanse algoritmos verdes.

Durante a clase mencionouse o computador cuántico galego, chamado Qmio, que é capaz de realizar cálculos complexos con maior rapidez e eficiencia.

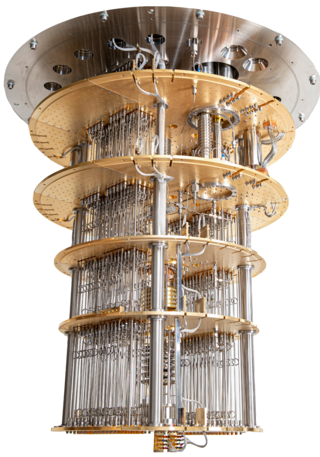

Fig.2: Qmio, o computador cuántico galego

3. Derivadas parciais de segunda orde

As derivadas parciais de segunda orde fanse con respecto as derivadas parciais de x e de y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = f_{yx}(x,y)$$

Danse así 4 opcións de derivadas parciais de segunda orde para funcións de dous variables.

3.1 Calcular as derivadas parciais segundas:

$$f(x, y) = xcos\, y + ye^{x}$$

$Dom(f) = \mathbb{R}^{2}$; xa que tanto o dominio do coseno como de e^{x} é todo $\mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$; se $x = 0$ quedaría que $f(x, y) = y$, polo que a imaxe abrangue todo $\mathbb{R}$

Primeiro calculamos as derivadas primeiras en función de x e de y, coas que poderíamos calcular o plano tanxente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = cos\, y + ye^{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =- xsen\, y + e^{x}$$

Tras isto, podemos calcular as derivadas parciais segundas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(cos\, y + ye^{x}) = ye^{x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(- xsen\, y + e^{x}) =- xcosy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(cos\, y + ye^{x}) =- sen\, y + e^{x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(- xsen\, y + e^{x}) =- sen\, y + e^{x}$$

Neste caso as derivadas cruzadas dan o mesmo resultado, isto é o esperado sempre que se cumpran certas hipóteses que veremos no seguinte teorema.

4. Teorema das derivadas parciais mixtas e Matriz Hessiana

Se $f(x, y)$ e as súas derivadas parciais $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ están definidas nunha rexión aberta que conteña ao punto (a, b) e son continuas en (a, b), entón cúmprese o dito anteriormente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$$

A partir das derivadas segundas da función f, podemos construír a Matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Durante este momento da clase propuxéronse dous exercicios para resolver:

1) Sexa $f(x, y) = ln(1 - x^2 - y^2)$. Calcular as derivadas parciais segundas da función f : $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ e a matriz Hessiana de f.

2) Sexa $f(x, y) =- \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Calcular as derivadas parciais segundas da función f : $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ e a matriz Hessiana de f.

5. Vector gradiente

Sexa $f(x, y)$ unha función para a que existen as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ e son continuas, o vector gradiente defínese como:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

5.1 <u>Exemplo de vector gradiente:</u>

$$T(x,y) = 100 - x^2 - y^2$$

$$\nabla T(x,y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,y), \frac{\partial T}{\partial y}(x,y)\right) = (-2x, \ -2y)$$

A continuación veremos unha representación da función exposta no exemplo anterior.

Na Fig.3 vemos o paraboloide correspondente á gráfica da función, así como os seus conxuntos de nivel, representados por circunferencias no eixo X. Na orixe, pódese ver como a función vale 100.

Na Fig.4 represéntanse os conxuntos de nivel e os gradientes, estes vense como frechas perpendiculares aos conxuntos de nivel que sinalan cara o punto onde hai mas crecemento da función, que neste caso coincide co centro.

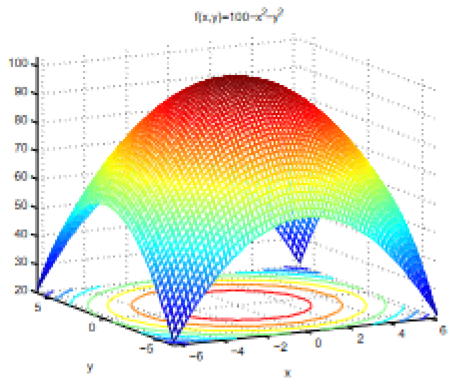

Fig.3: Paraboloide de $T(x,y)$

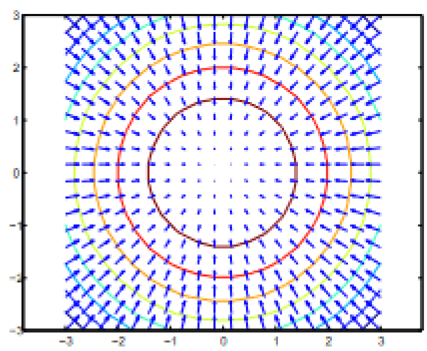

Fig.4: Conxuntos de nivel de $T(x,y)$

5.2 Mapa de Fontán

Neste mapa, xa tratado en anteriores clases, matizamos agora que non se pintaron os conxuntos de nivel para representar a altura, senón que a sensación de elevación deuse debuxando as rectas normais aos conxuntos de nivel, é dicir, os gradientes. Isto supuxo unha gran innovación.

6. Función vectorial

Cando temos máis variables, en vez de ter un vector gradiente, temos unha función vectorial que sigue a seguinte definición:

$$f: x \in Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

6.1 Exemplo 1:

$$f(x, y, z) = (2x - yz,\ ycos(x) + z)$$

$Dom(f) = \mathbb{R}^3$; xa que non hai problema para definir a función en ningún punto.

$Im(f) = \mathbb{R}^2$

Gráfica en $\mathbb{R}^5$

É unha función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, Neste caso, a función vectorial é de tres variables (n = 3) e ten dúas funcións compoñentes (m = 2):

$$f_1(x, y, z) = 2x - yz, \quad f_2(x, y, z) = y\,cos(x) + z$$

6.2 Exemplo 2:

$$f(t) = (cos(t), sen(t), t)$$

$Dom(f) = \mathbb{R}$; xa que non hai problema para definir a función en ningún punto.

$Im(f) = \mathbb{R}^3$

Gráfica en forma de espiral

É unha función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, Neste caso, a función vectorial é de unha variables (n = 1) e ten tres funcións compoñentes (m = 3):

$$f_1(t) = cos(t), \quad f_2(t) = sen(t), \quad f_3(t) = t$$

7. Matriz Jacobiana

Aínda que xa vimos esta matriz anteriormente cando dimos o método de Newton, agora imos estudala de forma xeral.

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathrm{m\ x\ n}}$$

Esta matriz caracterízase por ter tantas filas como compoñentes da imaxe e tantas columnas como variables independentes.

No caso particular de funcións escalares (m = 1), a matriz jacobiana coincide co vector gradiente, como por exemplo:

$$f(x,y) = ln(x^2 + y^2)$$
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \nabla f(x,y)$$