BITÁCORA 2

Manuel Pereiro, Rubén Blanco, Marcos Brandón, Pablo Freijeiro

---

Asistentes: 86 persoas (incluíndo profesorado)

Materiais empregados:

- Bitácora 1
- Simulacións de neve da película Frozen
- Presentación de resolución numérica de ecuacións non lineares

---

1. Corrección de Bitácora 1

No comezo da clase realizouse unha revisión do contido da bitácora realizada sobre o día 29/01/2024 da clase. Destacouse que o primeiro traballo é individual, e que a primeira parte do exame consiste en 2 problemas. Ademais recalcouse a preferencia polo uso de linguaxe inclusiva nas Bitácoras.

Tras isto, revisáronse os **criterios de avaliación** e comentouse que na sesión anterior o alumnado alegrárase ao coñecer o dato de que non existe nota mínima nin no exame final nin na avaliación continua, e por iso destacouse a importancia de procurar calificacións elevadas no canto de só intentar aprobar a asinatura.

2. Análise de animación de *Frozen*

Preguntouse se alguén accedera ao enlace do Campus Virtual co título *Disney's Frozen: A Material Point Method For Snow Simulation*, e como a inmensa maioría da clase non accedera, proxectouse na clase.

Neste vídeo, explícanse os distintos algoritmos numéricos e as simulación numéricas empregadas para realizar a animación de partículas de neve empregadas na película de *Frozen*, de Disney.

Empregando o **algoritmo MPM** e modificando os parámetros empregados pódense representar distintos tipos de neve con distintos efectos gráficos. No vídeo, ademais, pódense observar as distintas probas reais que se realizaron e gravaron para tomar como referencia no proceso de animación.

Grazas a este video podemos observar como aplicar os conceptos matemáticos de análise e cálculo en ámbitos cotiás, coma o cinematográfico.

3. Localización de raíces nunha ecuación ou sistema

Unha **función lineal** é unha función polinómica de primeiro grao, cuxa gráfica se corresponde cunha recta. Unha función lineal correspóndese coa ecuación y = mx + b. Entón, unha **función non lineal** será aquela que non cumpre esta definición.

Para analizar funcións, un proceso moi útil será atopar as súas **raíces:** os puntos x_i do dominio para os cales $f(x_i) = 0$.

Antes de nada tratamos o caso *base*, unha función lineal. De ser unha función de este tipo, sería posible despexar a *x* e resolver a ecuación resultante.

- Por exemplo, sexa $mx + x_0 = 0 \rightarrow x = \frac{-x_0}{m}$

Se fose non linear, por exemplo, unha parábola, de novo despexamos a *x* e atopamos as raíces.

- Por exemplo, sexa $f(x) = x^2-2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

Se no canto de tratarse dunha ecuación consideramos un sistema de n ecuacións ($f: R^n \rightarrow R^n$), procuramos unha serie de solucións, $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ tal que f(x) = 0. Os sistemas de ecuacións serán estudados máis adiante.

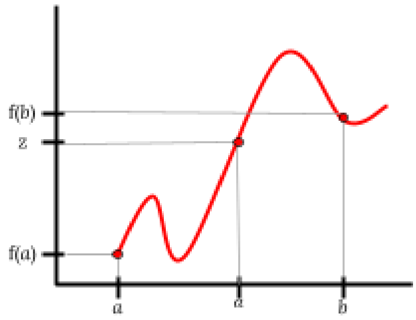
Podemos atopar problemas para atopar as raíces cando a solución resulta ser un número complexo, ao estar tratando con funcións cuxo dominio e codominio son os números reais. Se unha parábola $f(x)= ax^2 + bx + c$ non ten raíces reais, isto significará que a gráfica de f(*x*) non corta ao eixo x. Isto ocorre, por exemplo, coa parábola $f(x) = x^2+2$.

No canto de procurar o 0, noutros casos intentaremos procurar cando unha función acada un valor dado, sexa **v**. Para resolver isto poderíamos reconverter este problema para transformalo no caso anterior. Por exemplo, se queremos calcular cando g(*x*)=v, poderíamos tomar una función f(*x*) = g(*x*)-*v*, da cal calcularíamos cando f(*x*) = 0.

4. Métodos de converxencia garantida

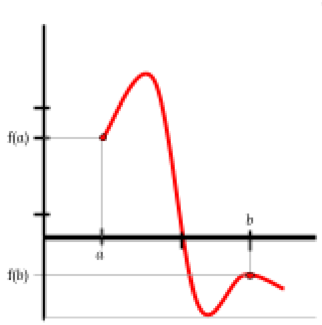
Dispoñemos dunha serie de ferramentas que se poden empregar para atopar raíces con maior facilidade, para aproximar a súa posición ou para demostrar a súa existencia.

- **Teorema do Valor Intermedio**: Sexa $f:[a,b] \to R$ unha función continua no intervalo $[a,b]$, e sexa $f(a)<f(b)$. Entón, para cada valor intermedio z tal que $f(a)<z<f(b)$, existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $\mathbf{f(\alpha)=z}$. O teorema é análogo para $f(a)>f(b)$.



  - Cabe destacar que isto só se aplica para <u>funcións continuas</u>. Se poñemos por exemplo a lista de notas nunha materia, non terán que existir necesariamente todos os valores intermedios entre dúas notas.
  - En resumo, o que obtemos deste teorema é que se f é continua en $[a,b]$, logo acadará todos os valores que se atopen entre $f(a)$ e $f(b)$.

- En particular, se $f(a)$ e $f(b)$ teñen <u>signos distintos</u>, entón existirá o valor intermedio $\mathbf{z=0}$, e polo tanto a función terá <u>polo menos unha raíz α no intervalo (a,b)</u>.



- Unha forma sinxela de comprobar se o signo de $f(a)$ é distinto do de $f(b)$ é comprobar se $\mathbf{f(a) \cdot f(b)<0}$.
- Ademais, se coñecemos que existe polo menos unha raíz en (a,b), e a súa derivada $\mathbf{f'(x) \neq 0}$ neste intervalo, coñecemos que a raíz será **única**. Isto é porque se a derivada non se anula, o crecemento da función será constante.
- Desta forma, se $f(a) \cdot f(b)<0$, f é continua en $[a,b]$ e $f'(x) \neq 0$ para todo o intervalo (a,b), entón existe unha **única** $\boldsymbol{\alpha}$ no intervalo (a,b) tal que $\mathbf{f(\alpha)=0}$.
- **Exemplo:** $f(x) = x^2-2$ no intervalo $[0,2]$.
  - $f(0)=-2$ e $f(2)=2$, polo que teñen signos distintos.
  - Ademais, $f'(x)=2x$, polo que a derivada é distinta de 0 en todo o intervalo $(0,2)$. Anularíase para $x=0$, pois $f'(0)=0$, pero este punto non se atopa no intervalo $(0,2)$.
  - Concluímos que a función $f(x)$ ten unha única raíz en $(0,2)$.

5. Método de bisección

- Unha vez coñecemos que existe unha raíz nun intervalo, debemos procurar localizar o punto concreto no que se atopa, ou aproximalo o máximo posible. Para isto empregaremos distintos métodos de aproximación.
- O **método de bisección** pódese aplicar cando $f \in C([a,b])$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, sendo $x_a := a$ e $x_b := b$.
    - Tomamos $x_r := \frac{x_a + x_b}{2}$, é dicir, o <u>punto intermedio</u> entre x_a e x_b. Existen tres posibilidades:
        - **$f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$**: Entón a raíz será x_r, finalizando o proceso, pois sabemos que $f(x_a) \neq 0$, e para que o anterior sexa 0, $f(x_r)$ terá que ser igual a 0.
        - **$f(x_a) \cdot f(x_r) < 0$**: A función ten unha raíz en (x_a, x_r). Repetimos o método neste intervalo, redefinindo x_b como x_r. E así reducimos o intervalo á primeira metade.
        - **$f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$**: A función ten unha raíz en (x_r, x_b), dado que $f(x_a) \cdot f(x_r) > 0$ implica que $f(x_b) \cdot f(x_r) < 0$. Repetimos o método neste intervalo, redefinindo x_a como x_r. Redúcese o intervalo á segunda metade.
    - Sendo k o número de pasos realizados e o valor $x_k = x_r$ calculado en cada paso:
        - A cota de error deste método será $e_k = |\alpha - x_k| \leq (½)^k \cdot (b-a)$.
        - Entón, sendo α a raíz que procuramos, $\alpha = \lim_{k \to \infty} x_k$
        - O proceso repetirase reducindo o erro cometido á metade en cada paso. Entón, podemos repetir este método ata que o valor do erro, $e_k \leq (½)^k \cdot (b-a)$, sexa menor que unha cota máxima pedida (a cal será distinta segundo a precisión que requiramos) ou cando $f(x_k)$ sexa moi próximo a 0.
    - Un tipo de exercicio posible sería atopar o k necesario para que o erro cometido sexa menor que un valor dado, por exemplo, ε.
        - Para resolver este exercicio, resolveríamos a inecuación $\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^k$.
        - Aplicamos logaritmo neperiano en ambos lados da inecuación. Isto pódese realizar debido a que o logaritmo neperiano é unha función crecente no seu dominio, así que a

desigualdade mantense. De ser unha función decrecente, cambiaríase o < por un >.

    - Obtemos que k > ln ($\frac{b-a}{\varepsilon}$) / ln 2.
    - Cabe destacar que sería posible neste caso empregar, por exemplo, logaritmo en base 2 para facilitar os cálculos, mais polo xeral a maioría de linguaxes operan en función de logaritmos neperianos de maneira xenérica.

- Este método é máis lento ca outros, mais a converxencia con el está garantida. Ademais, é só aplicable ao caso de unha soa ecuación.