Cálculo e análise numérica
Bitácora 11

Clase expositiva do luns 11 de marzo de 2024

Número de asistentes: 58

Autores:
Pablo Mouriño Lorenzo
Marcos Gutiérrez Peña
Martín González Dios
Jorge González Corbelle

Índice

1 Revisión da Bitácora 10

Comezamos a clase expositiva cunha breve revisión da bitácora anterior, concretamente a número 10. Faise énfase na realización dos exercicios propostos, que ademais, caeron en exames anteriores. A continuación, fíxose unha correción no exercicio 2, situado na páxina 4. O erro que este presentaba resúmese na presencia dun signo menos en tódalas derivadas parciais calculadas, o cal sobra. Quitándollo e colocando cada derivada parcial no seu respectivo sitio da matriz jacobiana, queda da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{9-y^2}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{xy}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{xy}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{9-x^2}{(9-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Ademais, menciónase a pouca optimización de Word á hora de usar teminoloxía matemática, como neste caso son os subíndices e superíndices que se puideron ver afectados na páxina 5. Por último, dísenos que para expresar o producto, neste caso de matrices, podemos aforrarmos o uso de símbolos como o asterisco, o "punto delgado"$(\cdot)$, e demais.

2 Regra da cadea

Retomando agora a clase na diapositiva donde quedáramos na anterior sesión, móstrasenos como non precisamos saber de memoria a regra da cadea se coñecemos a algoritmia e a notación detrás da mesma. Esta demostración faise a través do seguinte exercicio:

2.1 Exercicio 1

Dada $\mathrm{f}(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, con $x(u, v) = u \cos v$ e $y(u, v) = u \sin v$.
Se $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ y
$w(u, v) := (\mathrm{f} \circ r)(u, v) = \mathrm{f}(x(u, v), y(u, v))$, achar $\frac{\partial w}{\partial u}(u, v)$ y $\frac{\partial w}{\partial v}(u, v)$

$$\begin{array}{ccccc} R^2 & \longrightarrow & R^2 & \longrightarrow & R \\ (u, v) & \longmapsto & r(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) & \longmapsto & \mathrm{f}(x, y) \end{array}$$

$$Dr(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosv & -usenv \\ \\ senv & ucosv \end{pmatrix}$$

$$D\text{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2ucosv}{u^2} & \frac{2usenv}{u^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2ucosv}{u^2} & \frac{2usenv}{u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosv & -usenv \\ \\ senv & ucosv \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u,v) = \frac{2u\ cos^2 v}{u^2} + \frac{2u\ sen^2 v}{u^2} = \frac{2(cos^2 v + sen^2 v)}{u} = \frac{2}{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}(u,v) = \frac{-2u^2\ cosv\ senv}{u^2} + \frac{2u^2\ senv\ cosv}{u^2} = 0$$

Agora, se empregamos directamente a composición, quedaranos da seguinte forma:

$w(u,v) = Dr(u,v) = \text{f}(r(u,v)) = ln(u^2\ cos^2 v + u^2\ sen^2 v) = ln(u^2) = 2\ ln\ u$

E a continuación, facendo as derivadas parciales de w(u, v) con respecto de u e de v respectivamente, comprobamos que obtemos o mesmo resultado.

$\frac{\partial w}{\partial u}(u,v) = 2\frac{1}{u}$ $\quad$ $\frac{\partial w}{\partial v}(u,v) = 0$

3 Derivación implícita

Para unha gráfica f(x,y), a variable y pode estar definida de forma implícita como un conxunto de nivel de valor 0:

$F(x, y) = 0$

Se F permite derivadas parciais e estas son continuas, entón:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \text{ ; } \forall F_y(x, y) \neq 0$$

Este método é equivalente á derivación implícita, que consiste en:

1. Derivación de ambos membros da ecuación
2. Despexe de y'(x)

3.1 Exercicio 1

Calcular $\frac{dy}{dx}$ en: $y^5 - 2y - x = 0$

En primeiro lugar definimos a función: $F(x, y) = y^5 - 2y - x$, a partir de esta función calcúlanse as derivadas parciais:

$F_x(x, y) = -1$, $F_y(x, y) = 5y^4 - 2$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{-1}{5y^4-2} = \frac{1}{5y^4-2}$

Por outro lado, en vez de empregar a fórmula, podemos derivar implícitamente a ecuación, de xeito que, como era de esperar, obtemos os mesmos resultados, dado que ambas formas son válidas.

$y(x)^5 - 2y(x) - x = 0; \qquad 5y(x)^4\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} - 1 = 0$

$\frac{dy}{dx}(5y(x)^4 - 2) = 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4-2}$

3.2 Exercicio 2

Calcular $\frac{dy}{dx}$ en: $y^2 + \frac{2}{y} - x^2y^2 + 3x + 2 = 0$

$F(x,y) = y^2 + \frac{2}{y} - x^2y^2 + 3x + 2 = 0$

$F_x(x,y) = -2xy^2 + 3,\ F_y(x,y) = 2y - \frac{2}{y^2} - x^2y$

$F(x,y) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{-2xy^2+3}{2y-\frac{2}{y^2}-x^2y} = \frac{2xy^2-3}{2y-\frac{2}{y^2}-x^2y} = \frac{(2xy^2-3)y^2}{2y^3-2-x^2y^3};$

$F(x,y) = \frac{2xy^4-3y^2}{2y^3-2-x^3y^3}$ se $2y^3 - 2 - 2x^2y^3 \neq 0$

3.3 Exercicio 3

Achar a recta tanxente á circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ **no punto** $(1, \sqrt{2})$

Defínese F(x,y) = $x^2 + y^2 - 3$

Calcúlase $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$

Avaliamos no punto $(1, \sqrt{2})$: $\dfrac{dy}{dx}|_{x=1,y=\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

A ecuación da recta tanxente é:

$y - y_0 = \dfrac{dy}{dx}|_{x=1,y=\sqrt{2}}\ (x - x_0);$

$y - \sqrt{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - 1)$

Tamén podemos calcular a ecuación da normal:

$y - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x - 1)$