Bitácora 13

Carla Giráldez Fandiño
Inés Vilariño Lema
Lucía Dávila García
Pablo García Lijó

24 de marzo de 2024

63 asistentes

Índice

1. Revisión da bitácora 12

A clase comeza co repaso da bitácora anterior, dispoñible no repositario de bitácoras do campus virtual. Non se destacan erros nesta bitácora, a excepción do Hessiano dunha función f no punto (x_0, y_0). O Hessiano correcto é o seguinte:

$$\left|Hf(x_0,y_0)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

O erro implicaría unha alteración nos máximos e mínimos resultantes. Polo tanto, é importante a súa corrección.

Ademáis, destacouse que faltaba un exercicio mencionado na clase na bitácora anterior. Este consistía en buscar os extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 25$

Por outro lado, en relación coa tarefa 1, recalcouse a importancia de entregar as tarefas dentro do plazo establecido. Así mesmo, comunicouse que as clases de prácticas da primeira semana despois da volta de Semana Santa serán impartidas por Elena. Nelas resolveremos exercicios de funcións de dúas variables, dominios, imaxes, máximos, mínimos...

2. Introdución ao método de descenso rápido

Menciónase que a presentación do Método de Descenso Rápido que se atopa no Campus Virtual da materia presenta algunhas equivocacións que se correxirán proximamente.

É importante saber onde se anula o gradiente, que é o noso detector de candidatos a puntos críticos. O método de Newton trata de resolver sistemas non lineares, que formalizaremos como:
"Atopar α tal que $f(\alpha) = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^2$, $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na formalización inicial e, xeneralizando, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$."

Estamos entendendo que vamos a traballar con funcións de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Isto permitiríanos xeralizar estes métodos para traballar de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Co método de Newton somos capaces de deseñar un algoritmo que nos ache ese α que nos anule a función. O método do descenso rápido é outra forma para resolver sistemas non lineais. Este método está relacionado coas redes neuronais, tal e como se indica na bitácora anterior.

3. Método de descenso rápido

Definimos unha función a minimizar:

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

Redefinimos a función f a unha función G que nos permita empregar o concepto de que a dirección oposta ao gradiente é de máximo decrecemento:

$$G(x_1, x_2) = \|f(x_1, x_2)\|^2 = (f_1(x_1, x_2))^2 + (f_2(x_1, x_2))^2$$

G representa a lonxitude do vector $(f(x_1, x_2))^2$.
G é unha función que sempre acada valores positivos: $ImG \subset [0, +\infty)$. Polo tanto, buscar o valor 0 desta función coincide co seu mínimo absoluto, que é o punto onde tanto o valor da función f_1 como f_2 é cero.
O protagonista para isto é o oposto ao vector gradiente: $-\nabla G(x_1, x_2)$.

3.1. Cálculo de $-\nabla G(x_1, x_2)$ en termos de f e da matriz Jacobiana de f

A definición da función G coincide coa composición das seguintes funcións:

$$(x_1, x_2) \to \left(\underbrace{f_1(x_1, x_2)}_{z_1}, \underbrace{f_2(x_1, x_2)}_{z_2} \right) \to z_1^2 + z_2^2 = \|f(x_1, x_2)\|^2 = G(x_1, x_2)$$

Polo tanto podemos determinar que $-\nabla G(x_1, x_2)$ coincide con:

$$-\nabla G(x_1, x_2) = -2\,(f_1(x_1, x_2)\, f_2(x_1, x_2))\; Df((x_1, x_2))$$

3.2. Definición dos iterantes do método do descenso rápido

O vector gradiente é protagonista porque necesitamos un detector de mínimos. Pola súa interpretación xeométrica e analizando as súas propiedades, sabemos que a dirección de máximo decrecemento dunha función é a oposta á dirección do gradiente: $-\nabla G(x_1, x_2)$. Para achegarnos ao punto onde G vale 0, debemos seguir a dirección do vector.

A ecuación da recta que pasa polo iterante inicial $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ na dirección unitaria de máximo decrecemento $Z = -\nabla G(x_1^0, x_2^0)/||\nabla G(x_1^0, x_2^0)||$:

$$X^1 := X^0 - a\nabla G(x_1^0, x_2^0)/||\nabla G(x_1^0, x_2^0)|| = X^0 - a\nabla G(X^0)/||\nabla G(x^0)||$$

Agora temos un novo problema. Debemos achar quen é a, que representa canto debemos movernos nesa dirección. Para resolvelo, iteramos tendo en conta que agora queremos calcular o mínimo da función. (Se o noso problema requerise calcular o máximo da función, como temos o método para calcular o mínimo, podemos "darlle a volta"á nosa función).

Temos que partir dun iterante inicial e movernos da dirección Z, pero debemos saber canto movernos.

Para atopar o valor de a debemos seguir un procedemento iterativo.

$$h(a) := G(X^0 - a\nabla G(X^0)/\|\nabla G(X^0)\|)$$

1. Partimos do punto X^0, que corresponde coa elección de $a = 0 \to a_1$. Chamaremos a este punto g_1.

$$g_1 = G(X^0 - a_1\nabla G(X^0)/\|\nabla G(X^0)\|) = G(X^0)$$

2. O seguinte valor que tomamos é $a = 1 \to a_3$, que denotaremos como g_3.

$$g_3 = G(X^0 - a_3\nabla G(X^0)/\|\nabla G(X^0)\|)$$

   Para comprobar se a elección a_3 é correcta, debemos ter en conta:

   - Se $g_3 > g_1$, estámonos pasando de largo o mínimo. Definimos un novo valor de a_3 que coincidirá coa metade do anterior. Seguiremos este paso reiteradamente ate que $g_3 < g_1$. Tras cumplirse esto, debemos comprobar se o valor para o que se cumple é menor que a metade da tolerancia. De ser este o caso, concluimos que seguimos preto de X^0 e non hay mellora do iterante, polo que rematamos o procedemento.
   - Se $g_3 < g_1$, a_3 é o valor de X^1 máis próximo ao mínimo, polo que consideramos correcta a elección.

3. Se a_3 está por riba do criterio de tolerancia, estaríamos no caso de que $g_3 < g_1$

   - Definimos $a_2 = \frac{a_3}{2}$ para obter un valor óptimo de a e elaboramos o polinomio de interpolación que pasa polos puntos correspondentes a a_1, a_2 e a_3 nos que a función acada os valores g_1, g_2 e g_3. A fórmula de Newton permítenos obter a expresión deste polinomio:

$$P(a) = g_1 + h_1 a + h_3(a - a_1)(a - a_2)$$

Onde $h_1 = \frac{g_2 - g_1}{a_2}$, $\quad h_2 = \frac{g_3 - g_2}{a_3 - a_2}$ $\quad$ e $\quad h_3 = \frac{h_2 - h_1}{a_3}$

- Calculamos o punto a_0 onde o polinomio de interpolación de grao 2 ten un mínimo:

$$a_0 = \frac{a_2 - \frac{h_1}{h_3}}{2}$$

  e o seu correspondente valor de G:

$$g_0 = G\left(X^0 - a_0 \nabla G(X^0)/\|\nabla G(X^0)\|\right)$$

4. Na dirección Z de máximo decremento temos deste xeito catro candidatos a mínimo (os correspondentes cos valores de a_0, a_1, a_2 e a_3). Entre eles debemos seleccionar o valor de a que proporciona o menor valor de G. Este valor elexido definirá o novo iterante X^1.

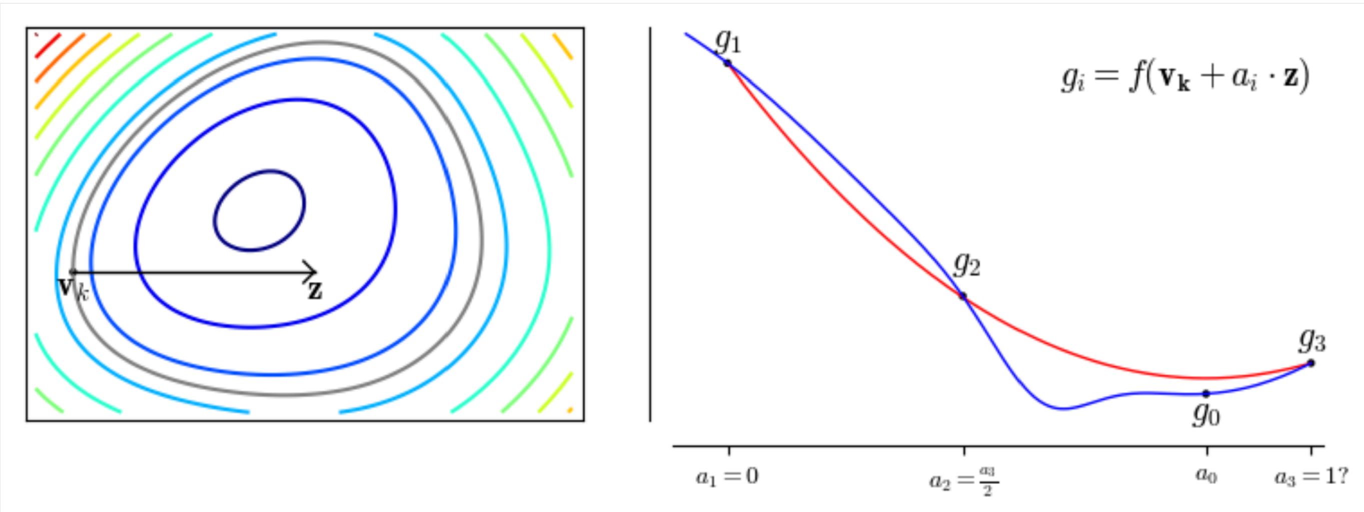
5. A sucesión do método de descenso rápido ven dado por:

$$X_{n+1} := X_n - a\frac{\nabla G(X_n)}{\|\nabla G(X_n)\|}$$

   onde o valor de a en cada iteración segue o procedemento exposto nos pasos anteriores.

3.3. Resumo do método

Seguindo a gráfica mostrada a continuación, realizaremos un resumo do procedemento do método do descenso rápido.



Neste caso, calculamos primeramente a partires de a_1 e a_3 g_1 e g_3. Vemos como $g_3 > g_1$, polo que, no tanto de atopar un mínimo da función, podemos determinar que eliximos un valor de a demasiado grande. Eliximos entón un valor medio, a_2, no que vemos que se cumple que $g_2 < g_1$.

O seguinte paso consiste en buscar un polinomio de interpolación que pasa por estos tres puntos. O mínimo deste polinomio, a_0, será, xunto cos tres puntos anteriores, un dos catro candidatos a mínimo.

Escolleríamos o menor deles, definindo así o seguinte itinerante X^1 e volvemos a comezar o proceso con el.

4. Presentación da tarefa 2

A clase rematou cunha explicación da tarefa 2. É un traballo que se pode realizar por parellas ou de xeito indivual, aínda que é preferíbel realizala en grupo. Deste xeito, prodúcese un intercambio de ideas e puntos de vista enriquecedor para ámbolos membros do equipo, facendo máis sinxela a corrección de erros e a resolución de dúbidas.

A tarefa consistirá nunha exposición oral apoiada dun recurso visual como un pdf ou Powerpoint. Estas exposicións estarán distribuidas na semana do 22 de abril. Terá que ser entregado ao profesor co remate da sesión. A entrega farase preferiblemente a través dunha memoria USB. A puntuación máxima é de 0.6 puntos, independentemente de se é realizada en parellas ou individual. Esta tarefa tamén será útil para entender os conceptos detrás da optimización de funcións e resolución de sistemas non lineares sobre o que haberá un exercicio de 1.5 puntos no exame final da asignatura.

Existen dúas posibles opcións para realizar a tarefa:

A Opción 1 consiste en formular un problema de optimización dunha función de dúas variables denotadas $h(x, y)$. Esta función ten que verificar que polo seu gradiente é unha función continua non linear nunha determinada rexión do espazo. Podemos asignar á función gradiente o nome de f.

A tarefa presenta os seguintes obxectivos:

1. Presentar o problema a resolver e representar a gráfica da función a optimizar. A función deberá ser unha función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. Empregar os métodos de Newton e o descenso rápido para resolver a f como o gradiente da función a optimizar e a función $G(x, y)$ como a norma ao cadrado da función f.
   - No método de Newton haberá que calcular a función f do problema elixido, o gradiente da función e pintar os conxuntos de nivel de f_1 e f_2. Tamén haberá que calcular a matriz Xacobiana de f, para posteriormente aplicar o método de Newton. A maiores haberá que proporcionar o iterante inicial e a solución aproximada da raíz de f.
   - No método do descenso rápido terase que calcular a función G do problema, indicar o cálculo do gradiente de G e proporcionar o iterante inicial e a solución aproximada do mínimo de G e o valor de h na solución proporcionada.
3. Discutir en termos do criterio da matriz Hessiana para a clasificación de puntos críticos segundo sexan máximo, mínimo ou punto de sela.
4. Interpretar coa solución obtida a resolución do problema de optimización.

Pola outra banda, a segunda opción consiste na formulación dun problema de optimización e a resolución dun sistema non linear requirido por este mediante o método de Newton, así como tamén un problema de minimización para o cal utilizaremos o método de descenso rápido. Da mesma forma que a primeira opción, definimos unha función de dúas variables $h(x, y)$ cuxo gradiente sexa unha función continua e non linear, é dicir, $\nabla h(x, y) = 0$ sexa non linear. Podemos definir o gradiente da función co nome de f.

Así pois, espéranse acadar os seguintes obxectivos:

1. Plantexar o problema e graficar a función.
2. Resolver, mediante o método de Newton:
   - Calcular a función f do problema, graficar os conxuntos de nivel de valor cero das compoñentes f_1 e f_2, e achar os candidatos a raíz, así como as interseccións dos conxuntos.
   - Calcular a matriz Xacobiana $J_f(x, y)$ asociada á función f e relacionala coa matriz Hessiana $H_h(x, y)$ da función h orixinal.
   - Indicar o iterante inicial e a solución aproximada da raíz de f.

3. Calcular o mínimo da función h ou $-h$ mediante o método de descenso rápido e o seu gradiente, indicando o iterante inicial e a solución aproximada do mínimo de h ou $-h$ e o valor de h nesa solución aproximada.
4. Discutir o criterio da matriz Hessiana para clasificar puntos críticos se a solución aproximada é un máximo, un mínimo ou un punto de sela.
5. Interpretar a solución ao problema de optimización.

Para ver a descrición completa da tarefa 2, ver no Campus Virtual da asignatura o documento correspondente.

Na clase vimos tres exemplos de traballos realizados outros anos. Entre eles, o estudo dun algoritmo de búsqueda, a función que modela o escenario dun videoxogo e a calidade dun asfalto. Todos estes traballos completos están subidos no campus virtual da asignatura para acceder a eles en calquera momento.