Bitácora 12
Cálculo e Análise Numérica

12 de marzo do 2024
72 asistentes

Ainhoa Fernández Fernández
Hugo Gilsanz Ortellado
Xián Núñez Carballido
Diego Pérez Álvarez

Índice

1. Revisión da Bitácora 11

A clase comeza coa revisión da bitácora do día anterior (Bitácora 11), salientando a súa calidade. Faise mención a pequenos erros no estilo de redacción do documento, tales coma o uso incorrecto das comiñas ou o empleo da conxunción castelá "y". Non obstante, en xeral conclúese que a súa calidade é moi boa.

Cabe destacar ademais a resolución dos exemplos e exercicios propostos na clase, extraídos de exames de anos anteriores, que serán de gran axuda para a preparación do exame deste curso.

2. Derivadas direccionais

Continuando coas explicacións de teoría, proséguese coas transparencias de *Derivación de varias variables*, introducindo as derivadas direccionais. Estas permiten analizar como varía a función nunha dirección determinada no plano xy (non necesariamente paralela ao eixo x ou y). Para marcar esta dirección utilízanse os vectores unitarios $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Segundo se avanza na dirección indicada, a recta tanxente, entendida como o límite de secantes, varía de certa forma, tal e como se mostra na figura 1. Esta recta pode definirse como a tanxente en dirección $\mathbf{u}$ mediante a seguinte derivada (derivada direccional en dirección $\mathbf{u}$).

$$D_u f(x_0, y_0) = \text{lím}_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s\mathbf{u}) - f(x_0, y_0)}{s}$$

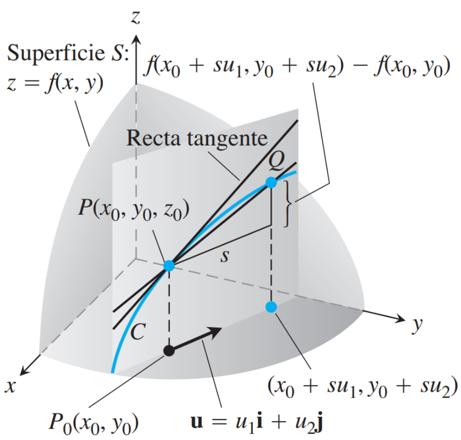

Figura 1: Figura tomada de Cálculo Varias Variables. Thomas-George (2010)

A derivada direccional tamén pode expresarse en función ao vector gradiente coa seguinte expresión: $D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$. Como recordatorio, o gradiente obtense coa fórmula:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Por definición, tamén podemos expresar a fórmula do seguinte xeito:

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \cos(\theta)$$

Así pódese observar que se a norma do gradiente é constante e sabendo que a norma do vector unitario **u** é 1, a magnitude da que depende o valor da derivada direccional é o $\cos(\theta)$. Este oscila no intervalo [-1,1] e vólvese 1 cando a dirección é paralela ao vector gradiente e o sentido é o mesmo, sendo a dirección na que crece a derivada, mentres que acada o valor máis pequeno, -1, cando a dirección é paralela pero en sentido oposto ao gradiente. Por outra parte, o crecemento de forma perpendicular corresponde co valor 0 da derivada.

Desta forma, para detectar mínimos debe seguirse a dirección oposta ao gradiente. Cómpre destacar que este método para encontrar mínimos ten aplicacións nas redes neuronais.

É importante destacar tamén que as derivadas parciais poden ser entendidas coma casos particulares das derivadas direccionais nos que se toman como vectores $(1,0)$ e $(0,1)$, o que equivalería a tomar como referencia os eixos x e y, respectivamente. Polo tanto,

$$D_{(1,0)}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ e } D_{(0,1)}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

3. Extremos de funcións de dúas variables

Se sabe que no caso de traballar con funcións dunha soa variable, o método empregado para detectar os extremos dunha función é a búsqueda dos puntos onde a recta tanxente á gráfica é horizontal, é dicir, que a súa pendente é cero.

Agora, traballando con funcións de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, da forma:

$$f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \text{ con } (x_0, y_0) \in Dom(f)$$

pódense definir os seguintes conceptos:

- Extremos absolutos
  - (x_0, y_0) presenta un máximo absoluto de $f(x,y)$ se $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$, $\forall(x,y) \in Dom(f)$.
  - (x_0, y_0) presenta un mínimo relativo de $f(x,y)$ se $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$, $\forall(x,y) \in Dom(f)$.
- Extremos relativos
  - $f(x_0, y_0)$ é un máximo relativo da función $f(x,y)$ se $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ para todo (x,y) dun círculo con centro (x_0,y_0).
  - $f(x_0, y_0)$ é un mínimo relativo da función $f(x,y)$ se $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ para todo (x,y) dun círculo con centro (x_0,y_0).

Como pode darse o caso de ter dous máximos globais ou locais con igual valor, por definición utilízase o *maior ou igual* ($\geq$) e *menor ou igual* ($\leq$).

Se nun punto da gráfica hai un extremo no que ademais existen as derivadas parciais, cúmprese que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, levando a que o detector de extremos da función sexa o plano tanxente da forma:

$$z = f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Este será horizontal se a expresión é constante (cando o segundo sumando sexa cero) nos puntos onde o vector gradiente sexa nulo (o que non implica o recíproco, xa que a existencia dun plano horizontal pode detectar a existencia dun punto crítico).

4. Puntos críticos

En referencia ao mencionado no apartado anterior, un punto crítico dunha función f é un punto (x_0, y_0) que pertence ao dominio da función no que se verifica unha das seguintes condicións:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
- Polo menos unha das dúas derivadas parciais no punto non existe.

Se (x_0, y_0) é un punto crítico dunha función $f(x, y)$ pero non é un extremo relativo, é posible que sexa considerado o que se denomina como punto de sela. Por isto, unha función diferenciable $f(x, y)$ ten un punto de sela nun punto crítico (x_0, y_0) se en cada disco aberto con centro en (x_0, y_0) existen uns puntos do dominio onde $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ e outros onde $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

5. Hessiano

Tamén foi explicado o concepto de Hessiano de f no punto (x_0, y_0), que equivale ao determinante da matriz Hessiana (sempre que exista). Así, para as funcións $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$:

$$|Hf(x_0, y_0)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Suponse que $f(x, y)$ ten un punto crítico en (x_0, y_0) e ten derivadas parciais segundas continuas nun círculo centrado en (x_0, y_0). Pódese afirmar que:

- Se $|Hf(x_0, y_0)| > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, hai un máximo relativo en (x_0, y_0) da función f.
- Se $|Hf(x_0, y_0)| > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, hai un mínimo relativo en (x_0, y_0) da función f.
- Se $|Hf(x_0, y_0)| < 0$, f ten un punto sela.
- Se $|Hf(x_0, y_0)| = 0$, o criterio non decide.

6. Exemplos

6.1. Determinar os extremos relativos de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Paso 1: calcular os puntos críticos

$$f_x(x, y) = 2x,\ f_y(x, y) = 2y$$

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0) \Rightarrow x = 0, y = 0$$

O único punto crítico neste caso concreto é $(0, 0)$.

Paso 2: calcular o Hessiano no punto crítico

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Paso 3: aplicar o criterio da derivada segunda

$$|Hf(0,0)| = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$$

Polo tanto, a función ten en (0, 0) un mínimo relativo.

6.2. Determinar os extremos relativos de $f(x,y) = x^2 - y^2$

Paso 1: calcular os puntos críticos

$$f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = -2y$$

$$(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0) \Rightarrow x = 0,\ y = 0$$

O único punto crítico neste caso é o $(0,0)$

Paso 2: calcular o Hessiano no punto crítico.

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Paso 3: aplicar o criterio da derivada segunda.

$$|Hf(0,0)| = -4 < 0$$

A función ten un punto de sela no punto (0,0).