Bitácora 07

Memoria da clase expositiva do luns 26 de febreiro

Cálculo e Análise Numérica

Autores

Guillermo Fernández Castro

Adrián Quiroga Linares

Iván Gutiérrez García

Hugo Coto Flórez

Número de asistentes: 69

Universidade de Santiago de Compostela

ÍNDICE

1.Resumo da bitácora 06.

Na anterior clase pechamos un novo tema dedicado a funcións de variables. A modo de resumo a anterior bitácora imos a falar sobre as funcións de varias variables e sobre o mapa de Fontán.

1.1 Conxuntos de nivel do paraboloide

Os conxuntos de nivel da función $f(x, y) = x^2 + y^2$ correspóndense coa superficie dun paraboloide cuxa ecuación é $z = x^2 + y^2$. Estes conxuntos de nivel exprésanse pola seguinte fórmula:

$$L_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = C\}$$

1.2 Conxuntos de nivel do Cono

Os conxuntos de nivel definidos pola función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ correspóndense coa superficie dun cono cuxa fórmula é: $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Estes conxuntos de nivel exprésanse pola seguinte fórmula:

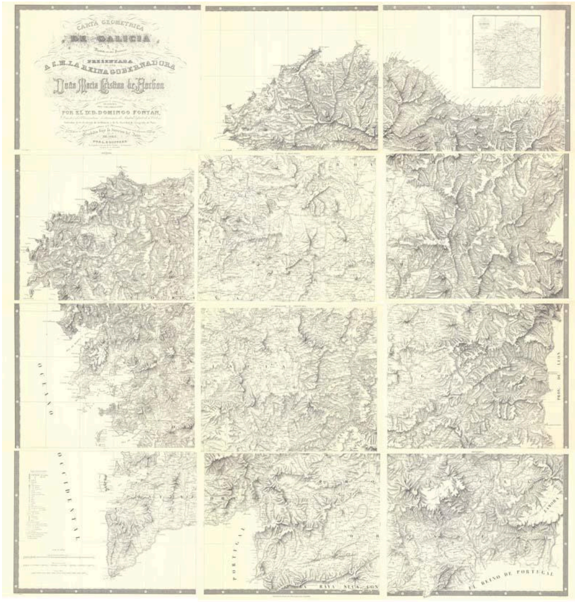
$$L_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = C\} \Rightarrow L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = C^2\}$$

1.3 Conxuntos de nivel da sela de montar

Os conxuntos de nivel da función $f(x, y) = x^2 - y^2$ correspóndense coa superficie da sela de montar cuxa función é: $z = x^2 - y^2$.

1.4 Mapa de Fontán

Domingo Fontán adicou máis de 17 anos da súa vida a realizar un labor moi adiantado ao seu tempo: unha carta xeométrica de Galicia, obra que non se puido perfeccionar ata que o ser humano enviou satélites a lúa. Para realizar este labor, Fontán dividiu o territorio galego en triángulos para axudarse da trigonometría como ferramenta para debuxar un mapa que aborda máis de 8.000 topónimos. Véxase o mapa de Fontán na *Imaxe 1.*



Imaxe 1
[Mapa de Fontán]

1.5 Representación de R^4

A modo de visión conceptual estableceuse o concepto de hipercubo para imaxinar o subespazo de R^4 como intersección de dous espazos de R^3. Véxase a *Imaxe 2.*

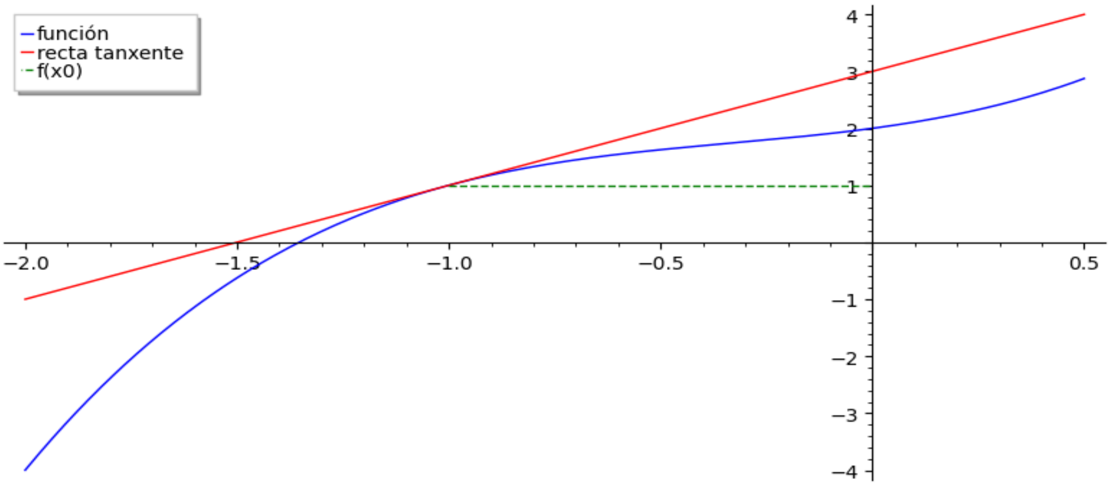
Imaxe 2
[Arco da Defensa]

2. Derivación de funcións dunha variable

A modo de introdución do novo tema, a derivación entorno dunha soa variable $f'(x)$, correspóndese co cálculo da pendente da recta tanxente á gráfica no punto x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Un exemplo disto podémolo ver na *Imaxe 3,* que amosa a recta tanxente á función no punto $x_0 =- 1$.



Imaxe 3

A función ca que se traballa na imaxe correspóndese con $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ e a recta tanxente correspóndese con $g(x) = 2x + 3$. Derivando $f(x)$ quedaría $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Unha vez obtida a derivada, $f'(-1) = 3 - 2 + 1 = 2$ dato que se corresponde coa pendente da recta $g(x)$.

3.Derivación de funcións de dúas variables

3.1 Cidade da Cultura de Santiago

Na clase expoñeuse que as seccións da Cidade da Cultura de Santiago, deseñada polo arquitecto estadounidense Peter Eisenman, podían ser vistas como unha representación dunha función de dúas variables. Desta forma podemos apreciar unha aplicación á vida cotiá destas funcións, tal e como podemos ver na Imaxe 4.

Imaxe 4
[Cidade da Cultura]

3.2 Derivación parcial respecto a x

A función f é derivable respecto á variable x, ou á primeira variable, no punto (x_0, y_0) se existe e é un número real o seguinte límite: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$.

Denomínase derivada parcial de f respecto á variable x no punto $P(x_0, y_0)$ e denótase por: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $D_1 f(x_0, y_0)$ ou $f_x(x_0, y_0)$.

De acordo coa definición, a derivada parcial respecto a x e o número que se obtén ao derivar a función $f(x, y)$ respecto á variable independente x, considerando a outra variable independente y como se fose unha constante.

Pode considerarse a función derivada parcial de f respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}$: $(x, y) \in A \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

3.3 Derivación parcial respecto a y

Analogamente, a función f é derivable respecto a y, ou á segunda variable, no punto (x_0, y_0), se existe e é un número real o seguinte límite: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$.

Denomínase derivada parcial de f respecto á variáble x no punto $P(x_0, y_0)$ e denótase por: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $D_2 f(x_0, y_0)$ ou $f_y(x_0, y_0)$.

Pode considerarse a función derivada parcial de f respecto a y, $\frac{\partial f}{\partial y}$: $(x, y) \in A \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

3.4 Interpretación xeométrica

Sexa f unha función de dúas variables definida nun rectángulo aberto $A = (a,\ b)\ \times\ (c,\ d)\ \subset\ \Re^2$:

$f_x(x_0,\ y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é a pendente da recta tanxente no punto $P(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ á curva obtida como intersección da superficie $z = f(x, y)$ co plano $y = y_0$. Así mesmo, dita pendente é a taxa de variación de $z = f(x,\ y)$ respecto de x.

$f_y(x_0,\ y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é a pendente da recta tanxente no punto $P(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ á curva obtida como intersección da superficie $z = f(x, y)$ co plano $x = x_0$. Dita pendente é a taxa de variación de $z = f(x,\ y)$ respecto de y.

Cabe destacar que a partir da derivación de dúas variables, podemos calcular derivadas de funcións con máis variables empregando o mesmo razoamento (hai un exemplo no punto 5.2).

4. Plano Tanxente

Para superficies $z = f(x, y)$, as dúas rectas tanxentes anteriormente explicadas definen un plano tanxente á gráfica da función no punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ que queda definido pola ecuación.

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Este plano constitúe unha primeira aproximación lineal da superficie $z = f(x, y)$ na contorna do punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

5.Exercicios

A modo de recomendación, para realizar estes exercicios, cómpre dominar o calculo de derivadas, en caso de non dominalo recomendouse practicar con exercicios ata comprendelos.

5.1 Cálculo de derivadas parciais e plano tanxente

Calcular as derivadas parciais da función $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$. Para iso comezamos por calcular a derivada parcial de f respecto de x:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 2y$

Posteriormente calculamos a derivada parcial de f respecto de y:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = - 2x - 6y$

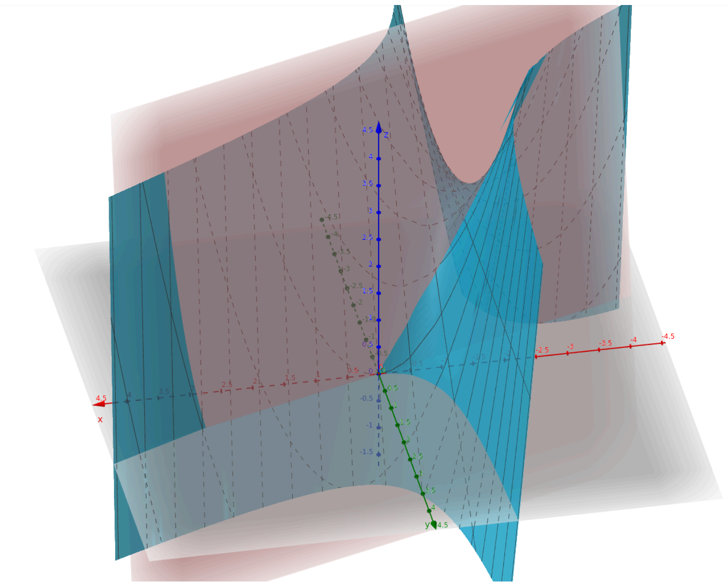
Ademais propoñemos o calculo do plano tanxente desta función no punto (3,1), polo que empregamos a fórmula anteriormente explicada:

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$z = 0 + 4(x - 3) - 12(y - 1)$

$z = 4x - 12y$

Na *Imaxe 5* podemos apreciar a representación da función e o seu correspondente plano tanxente no punto (3,1). Onde a función está representada pola cor azul e o seu plano tanxente polo punto (3,1) é o plano vermello. Pode resultar complexo ver onde se atopa a tanxencia debido a que ao ter forma de sela de montar, o plano corta á figura.



Imaxe 5

5.2 Exemplo de tres variables

Tamén se propuxo un exemplo con 3 variables, onde empregamos o método aprendido anteriormente, derivado primeiro respecto de x, posteriormente de y e finalmente de z:

$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5xz + 6yz$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x + 4y + 5z$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 4y + 4x + 6z$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 6z + 5x + 6y$

5.3 Exercicio proposto

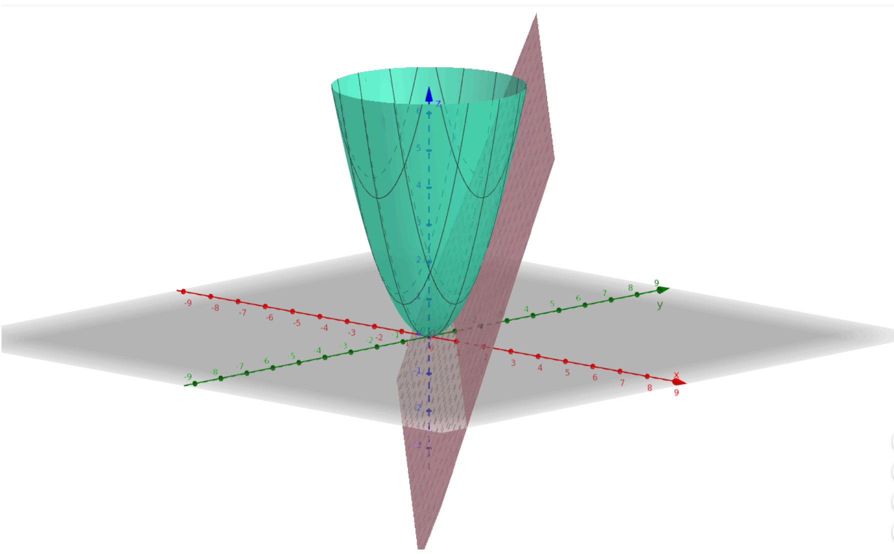
A maiores propoñemos este exercicio para practicar o visto na clase:

Calcular as derivadas parciais e a ecuación do plano tanxente da función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Esta ecuación correspóndese ao paraboloide visto na bitácora 4, que volve a ser mencianado na bitácora 6 para o estudo das curvas de nivel. O plano será avaliado no punto (1,1). Para realizar o exercicio procedemos de igual forma que o anterior:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$z = 0 + 2(x - 1) - 2(y - 1)$$
$$z = 2x - 2y$$

Aquí temos a correspondente gráfica que representa tanto a función como o seu plano tanxente polo punto (1,1)

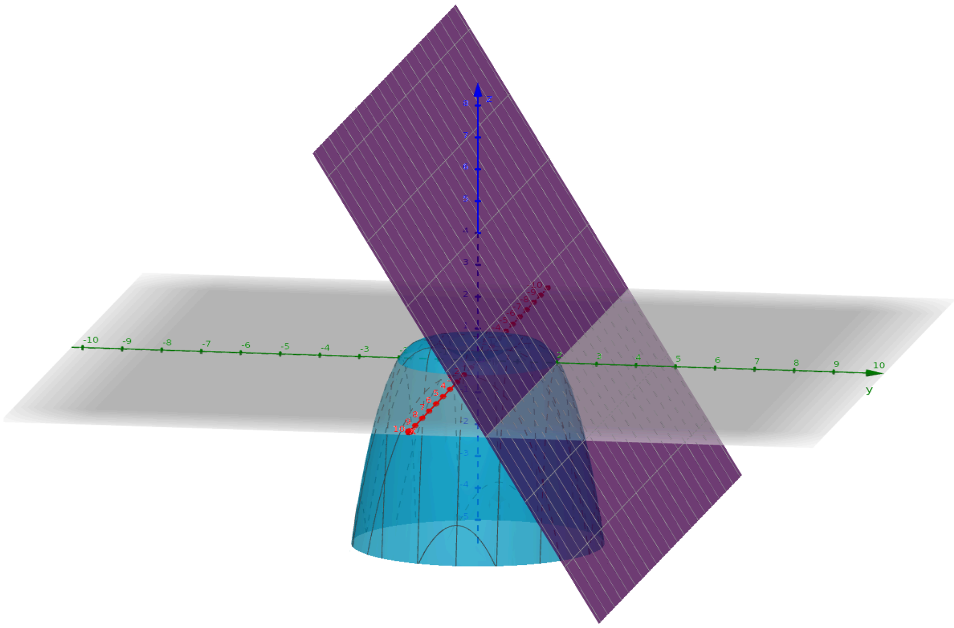


Imaxe 6

5.4 Exemplo gráfico visto na clase

Ao final da clase, para amosar que unha figura en 3D posúe infinitos planos tanxentes dentro dos puntos do dominio da función, propúxose como exemplo un pucho, polo que amosamos unha representación dun deses posibles planos, concretamente o que pasa polo punto (0,2):

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$
$$z = 4 - 2y$$



Imaxe 7