CÁLCULO E ANÁLISE NUMÉRICA
BITÁCORA 05

Escola Superior Técnica de Enxeñaría

Clase expositiva do luns, 19 de febreiro de 2024

Número de asistentes: 72

Universidade de Santiago de Compostela

Autores

Enrique García Couce
Manuel Fernández-Sande Lamigueiro
Pablo Collazo Fuentes
Víctor Caamaño Martínez

Índice

1. Revisión da Bitácora 04 **3**

1.1. Orde de converxencia de Newton-Raphson (Apartado 1) 3

1.2. Dominio da función $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ (Apartado 3) 3

1.3. Sela de montar (Apartado 3) 3

2. Semiesfera de radio R **4**

2.1. Signo positivo 4

2.2. Signo negativo 5

3. Conxuntos de nivel **6**

3.1. Exercicio de exame 8

1. Revisión da Bitácora 04

Como xa é costume, a primeira tarefa realizada ao comezo da clase foi a revisión da bitácora anterior, a cal tivo en xeral unha valoración moi positiva. Aínda así, fixéronse unha serie de correccións.

1.1. Orde de converxencia de Newton-Raphson (Apartado 1)

O método de Newton-Raphson é un algoritmo iterativo utilizado para atopar aproximacións sucesivas das raíces dunha función. Lémbrase que a expresión da orde de converxencia do método vén dada pola seguinte fórmula:

$$|\alpha - x_{k+1}| \leq C|(\alpha - x_k)|^p, \text{ sendo } p \text{ a orde de converxencia.}$$

Operando, acádase a expresión:

$$C_k = \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|(\alpha - x_k)|^p}$$

Cando o método converxe de maneira cuadrática, tense $p = 2$, e polo tanto:

$$C_k = \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|(\alpha - x_k)|^2}$$

1.2. Dominio da función $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ (Apartado 3)

Proporcionáronse instrucións detalladas sobre a correcta formulación do dominio da función en cuestión:

$$D(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \neq 0\right\}$$

Ou, de maneira equivalente:

$$D(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

1.3. Sela de montar (Apartado 3)

Recalcar que $f(x, y) = x^2 - y^2$ ten como dominio $D(f) = \mathbb{R}^2$ e como rango e imaxe $R(f) = \mathbb{R} = Im(f)$.

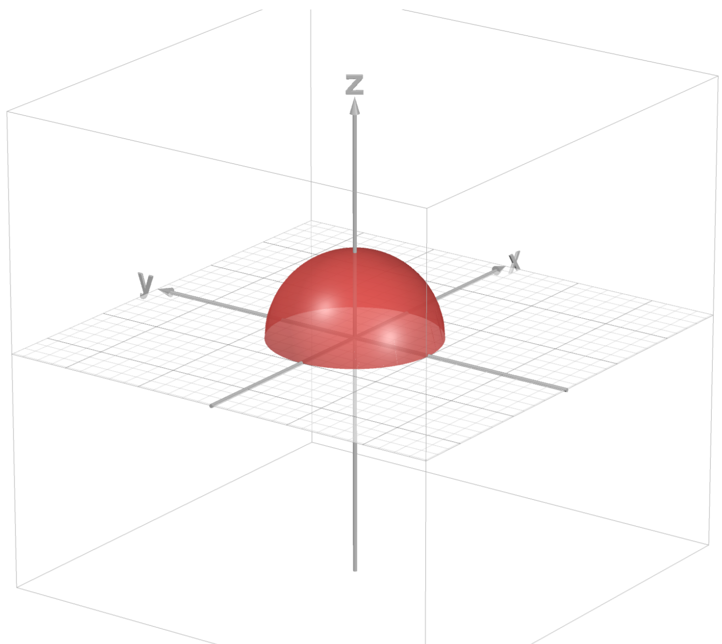
2. Semiesfera de radio R

Finalizada a revisión da bitácora anterior, a clase proseguiu co estudo da semiesfera de radio R como exemplo ilustrativo dunha función con dúas variables.

2.1. Signo positivo

$$z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow f(x, y) = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

A función depende das variables x e y, sendo R un parámetro que denota o radio. A súa representación gráfica é:



Cal será o dominio da función? Obsérvase que é imperativo que a expresión contida na raíz cadrada sexa positiva. É dicir:

$$D(f) = \left\{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 / R^2 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} \Rightarrow D(f) = \left\{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq R^2\right\}$$

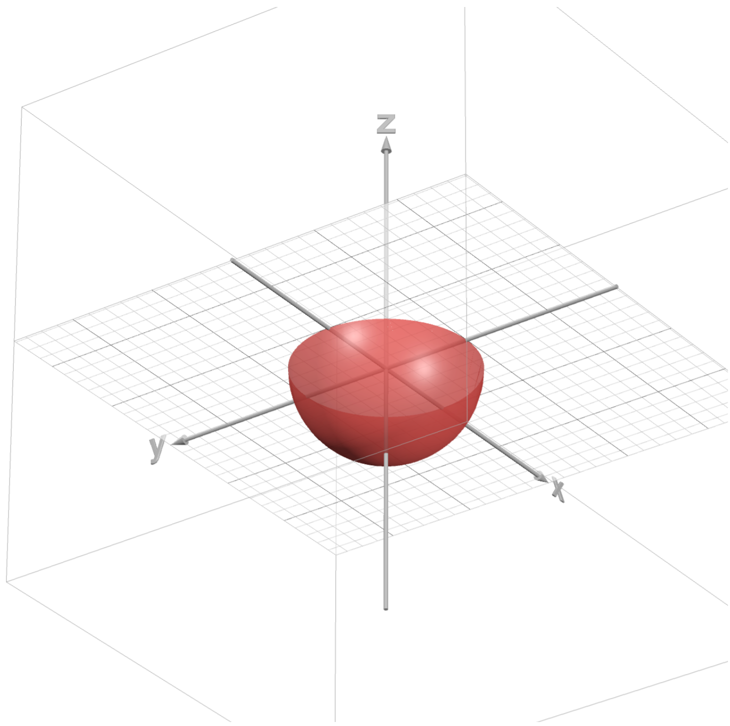
É importante destacar que a expresión da desigualdade $x^2 + y^2 \geq R^2$ correspóndese coa do círculo de radio R. Se o punto estivese no borde do círculo, teríase $x^2 + y^2 = R^2$, é dicir, a función valería 0.

A imaxe da función é $Im(f) = [0, \mathbb{R}]$.

2.2. Signo negativo

Continúese coa análise dunha función moi parecida:

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow f(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



Que cambios sofren as súas características? Tense a mesma condición para expresar o seu dominio:

$$D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / R^2 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} \Rightarrow D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq R^2\right\}$$

Pola contra, a súa imaxe si varía:

$$Im(f) = [-\mathbb{R}, 0]$$

3. Conxuntos de nivel

Dada unha función:

$$f : D(f) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

O subconxunto do seu dominio de definición onde a función toma un valor constante defínese como conxunto de nivel, L_c.

$$L_c = \{(x_1, ..., x_n) \in D(f)/f(x_1, ..., x_n) = c\}$$

Se $n = 2$, L_c chámase curva de nivel ou isoliña. Se $n = 3$, L_c chámase superficie de nivel ou isosuperficie. No caso da semiesfera, o conxunto de nivel de valor 0 é o borde do círculo co que se corresponde a súa ecuación:

$$f(x, y, z) = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$L_0 = \left\{(x, y) \in D(f)/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = 0\right\} \Rightarrow L_0 = \left\{(x, y) \in D(f)/x^2 + y^2 = R^2\right\}$$

que é unha circunferencia centrada na orixe e de radio R. No caso de querer atopar L_R:

$$L_R = \left\{(x, y) \in D(f)/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = R\right\}$$

Elevando ao cadrado ambos términos da condición, tense:

$$R^2 - x^2 - y^2 = R^2 \Rightarrow -x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow L_R = \{(0, 0)\}$$

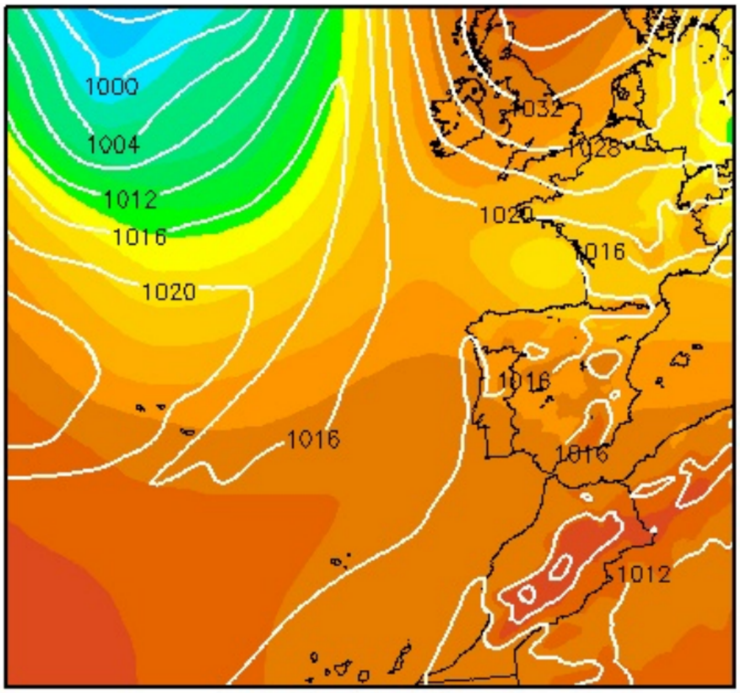
Polo que a función só acada o valor R na orixe, $(0, 0)$. Como pequena anécdota, resaltar que en exames de anos anteriores, cometeuse o erro de afirmar que dita ecuación ten infinitas solucións.

Os conxuntos de nivel permiten facilitar a comprensión do comportamento das funcións. Poderíase dicir que informan sobre cales son os *inputs* que levan a un *output* determinado.

$$L_9 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/f(x, y) = 9\right\} \Rightarrow L_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 = 9\}$$

Trátase da circunferencia de centro na orixe e radio $r = 3$.

Exemplos de isoliñas son as isotermas e as isobaras: se $f(x, y)$ representa a temperatura, estase a falar de isotermas. Se $f(x, y)$ representa a presión, estase a falar de isobaras. Por exemplo, na seguinte imaxe, as liñas que aparecen son isobaras que acadan valores dende 1000 ata 1032.



Téñase agora unha función que mide a temperatura nun espacio:

$$T(x, y, z) = 298 + \frac{500}{1+x^2+y^2+z^2} \Rightarrow D(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Achar as isotermas da distribución da temperatura, L_c, para $c = 548$.

$$L_{548} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 298 + \frac{500}{1+x^2+y^2+z^2} = 548\right\}$$

Operando, tense:

$$L_{548} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

a superficie de esfera de centro no orixe e $r = 1$.

3.1. Exercicio de exame

Sexa $f(x, y) = ln(1 - x^2 - y^2)$. Detalla o dominio de definición de *f*. Define os conxuntos de nivel L_{-1}, L_0, L_1.

Obtense a expresión do dominio:

$D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x^2 - y^2 > 0\right\} \Rightarrow D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 > x^2 + y^2\right\} \Rightarrow D(f) =$

$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\right\}$.

Defínese L_{-1}:

$L_{-1} = \left\{(x, y) \in D(f) / ln(1 - x^2 - y^2) = -1\right\}$

Por propiedades dos logaritmos:

$e^{-1} = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{e-1}{e} > 0 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{e-1}{e}} \approx 0,795$

Defínese L_0:

$L_0 = \left\{(x, y) \in D(f) / ln(1 - x^2 - y^2) = 0\right\}$

Análogamente con L_{-1}:

$e^0 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

Polo tanto, $L_0 = \{(0, 0)\}$.

Por último, L_1:

$L_1 = \left\{(x, y) \in D(f) / ln(1 - x^2 - y^2) = 1\right\}$

Unha vez máis, ao realizar o mesmo razoamento, tense que:

$e^1 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow 1 - e = x^2 + y^2$

O cal é unha contradición, pois non é posíbel sumar dous números positivos e obter un número negativo. Polo tanto, $L_1 = \emptyset$.