Bitácora 08

Cálculo e Análise Numérica

Universidade de Santiago de Compostela

Autores:

Iago Mallo Pena
Asier Cabo Lodeiro
Martín Castro Vázquez
Samuel Albertuz Ribas

Nº Asistentes:
66

Data da clase expositiva:
Martes, 27 de febreiro de 2024

Índice

I. Revisión da bitácora anterior

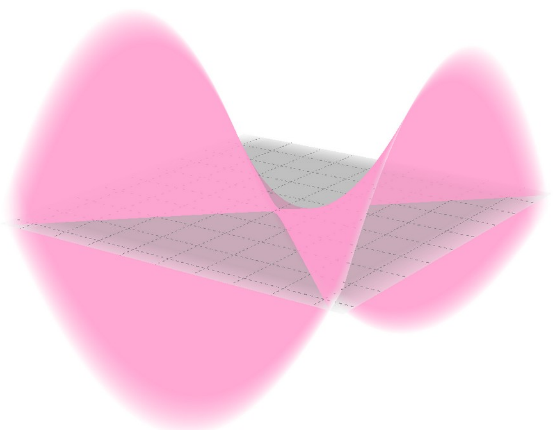
A clase iníciase coa corrección da bitácora número 7 realizada sobre a clase do luns 27 de febreiro, a cal recolle contidos sobre a derivación parcial e a súa interpretación xeométrica, xunto algúns exercicios.

Nesta bitácora realízanse unha serie de correccións. Estas abranguen dende correccións ortográficas, léxicas e sintácticas, como a maiúscula do nome propio "Fontán". Puntualízase a diferencia entre 'fórmulas matemáticas' e 'expresións matemáticas', e recálcase a importancia da nomenclatura clara e concisa nas matemáticas, como por exemplo, os asteriscos innecesarios á hora de sinalar un produto, xa que non estamos nun contexto onde sexa necesario (como nas matrices), a ausencia do subíndice na L_c , o cal indica que estamos a falar de conxuntos de nivel sen determinar, a ausencia da barra inclinada '/', que significa "tal que" e a matización de que estes conxuntos son expresións. Esta corrección sucede analogamente coa expresión do cono.

Outro erro do que se fala é unha raíz cadrada sobrante na función da sela de montar, erro que estaba presenta tanto na bitácora como nos apuntes da propia materia que fora corrixido antes da clase.

Na parte da representación en R4, coméntase que sería mellor anexar a imaxe do Arco da Defensa, en París, en vez do hipercubo, xa que é o que foi amosado na clase. Tamén se aprecia nos títulos dos apartados 2 e 3, que non se derivan variables, se non que se derivan funcións con variables.

Remárcase a importancia de adquirir unha serie de habilidades que están no currículo da materia como son a capacidade e o criterio de avaliar a lóxica das solucións as que se chega, ou ser capaz de discriminar aquelas que carezan de sentido (como pode ser un plano cunha compoñente ao cadrado), o cal será especialmente relevante no noso futuro rol de enxeñeiros informáticos. Tamén se recorda a importancia do traballo en grupo, sobre todo a nivel organizativo, e recoméndase activamente que un dos compoñentes do equipo adopte un rol de "supervisor", xa que pode resultar complicado a coordinación do traballo se cada un dos membros vai por un camiño diferente.



Sela de montar
$f(x,y) = x^2 - y^2$

II. Plano tanxente

Continuamos con novos exemplos de cálculo do plano tanxente a unha superficie dada, nun determinado punto.

a) Exercicio 1

No seguinte exemplo achamos o plano tanxente á superficie dada por $z=f(x,y)=-x^2-y^2$ no punto P = (1, 2, -5):

O primeiro paso é derivar f con respecto de cada variable. Estas derivadas parciais son:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-2y$$

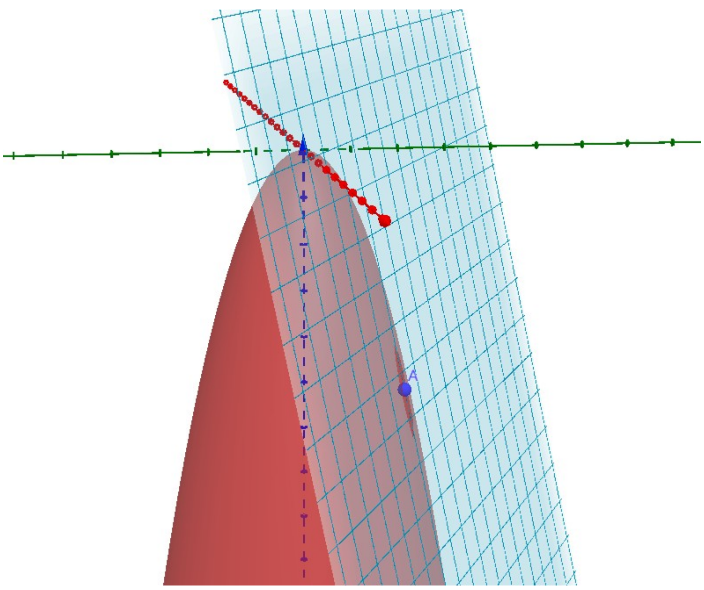
Avaliamos cada unha delas no punto $(x_0,y_0)=(1,2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=-2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=-4$$

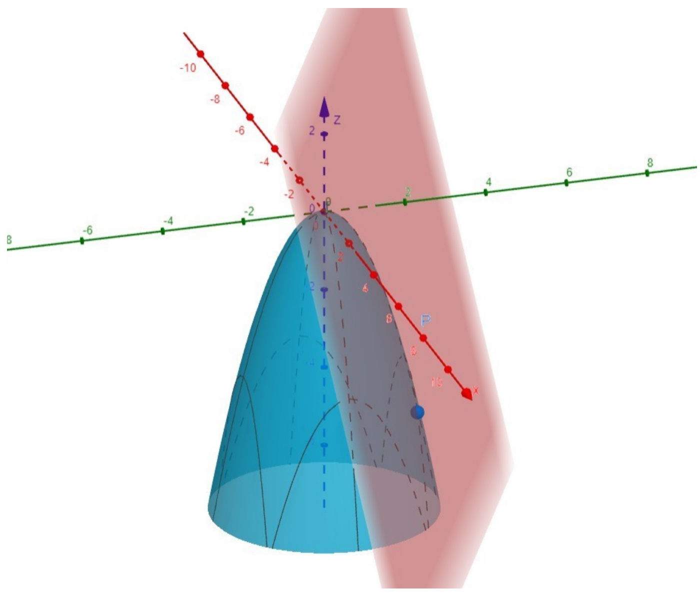
Polo tanto, o plano tanxente é: $z=-5-2(x-1)-4(y-2)=-2x-4y+5$.

Destacar neste caso a importancia de entender os resultados que obtemos. Ao ver este resultado é importante identificar que é unha ecuación dun plano, se por exemplo obtivésemos unha ecuación na que unha das variables ten un expoñente, temos que ser capaces de ver que non é un resultado válido, xa que a ecuación dun plano non pode ter variables con expoñente.

Nas Imaxes 1 e 2 podemos observar tanto a superficie como o plano calculados neste caso.



Imaxe 1



Imaxe 2

b) Exercicio 1

O seguinte exercicio apareceu nun exame do ano 2014. Sexa $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$. Pídesenos calcular o plano tanxente á gráfica da función f no punto (x_0,y_0), neste exame estableceuse este punto como $(x_0,y_0)=(0,1/2)$. Procederemos a resolvelo da mesma forma que o exercicio anterior:

Sabemos que a ecuación do plano tanxente é a seguinte:

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Polo tanto comezaremos por calcular as derivadas parciais, para facelo aplicamos as mesmas regras que ao derivar con unha variable. Neste caso a derivada do logaritmo neperiano é o que está dentro do logaritmo no denominador, e a súa derivada no numerador, neste caso teño en conta con respecto a que variable se fa. Facendo este procedemento obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-2x}{1-x^2-y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2y}{1-x^2-y^2}$$

Avaliamos as derivadas parciais no punto (0, ½) obtendo os seguintes valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{1}{2}\right)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{-4}{3}$$

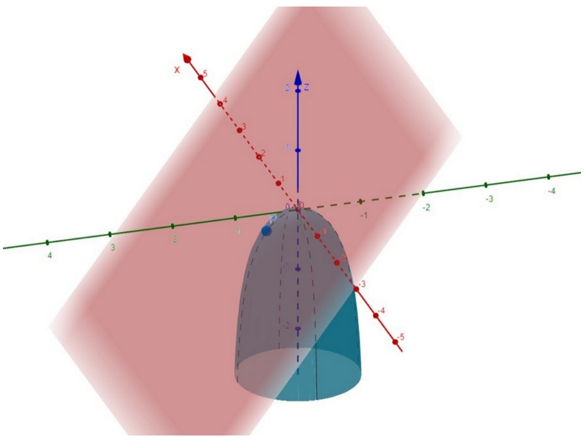
A continuación ao avaliar a función no punto (0, ½), obtemos o seguinte:

$$f\left(0,\frac{1}{2}\right)=\ln\left(1-0-\frac{1}{4}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 3-\ln 4$$

Polo tanto só falta substituír todos os valores calculados para obter a ecuación do plano tanxente:

$$z=\ln 3-\ln 4-\frac{4}{3}\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

Observamos na Imaxe 3 a solución gráfica ao determinado problema.



Imaxe 3

c) Exercicio 3

Na clase propúxose o seguinte exercicio, similar ao anterior que tamén caeu nun exame de anos anteriores, a modo de práctica. Sexa $f(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$, que representa a semiesfera de abaixo dunha esfera centrada na orixe, de radio 3. Calcula o plano tanxente á gráfica da función f nun punto (x_0, y_0) que elixas. Imos ver como se resolvería co punto.

Empregando o mesmo procedemento que no exercicio anterior calcularíamos o seguinte:

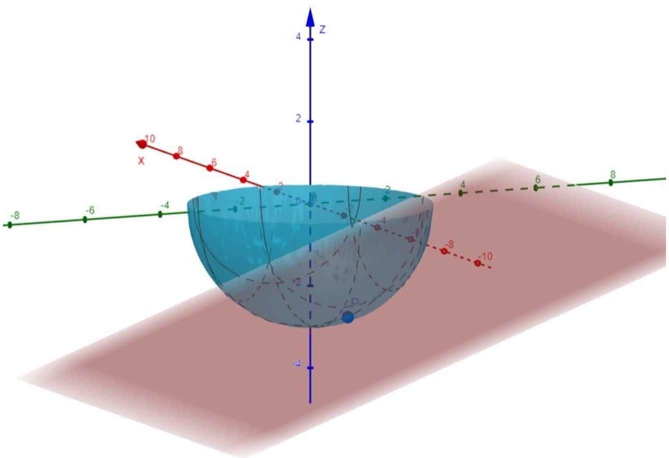
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2}(9-x^2-y^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \; , \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 \; , \; \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad f(0,1) = -\sqrt{9-1} = -2\sqrt{2}$$

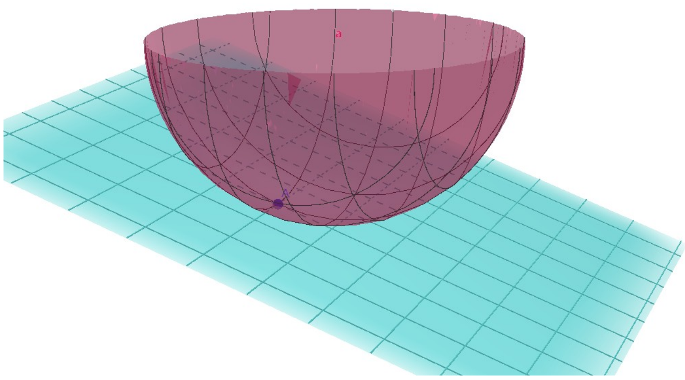
Substituíndo obtemos a ecuación do plano tanxente:

$$z = -2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$$

Nas Imaxes 4 e 5 vemos unha vez máis unha representación gráfica do plano e da superficie.



Imaxe 4



Imaxe 5

III. Método de Newton

Supoñamos que temos unha función non lineal $f : D \subseteq R \longrightarrow R$ diferenciable en D e queremos achar os valores de α tales que $f(\alpha) = 0$.

Para resolver este problema, podemos construír unha sucesión de puntos x^k de forma que x^k vaiase achegando a α.

$$x^k, \; k = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots \qquad x^k \longrightarrow \alpha$$

Entón, podemos definir un algoritmo para achar o valor de α para o que f(α) é suficientemente próximo a 0:

1. Consideramos unha **iterante inicial** x^0
2. Partindo de x^k, **construímos** x^{k+1} coa seguinte fórmula:

   $$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$
3. **Finalizamos** o algoritmo se:

   $$\left|x^{k+1} - x^*\right| < \varepsilon$$

   ou tamén se:

   $$\left|f(x^{k+1})\right| < \varepsilon$$

   Sendo ε unha tolerancia definida.
4. O algoritmo pode converxer ou non, polo que debemos considerar un **numero máximo de iteracións**.

IV. Método de Newton (2D)

Agora a situación cambia respecto á descrita no apartado III. Neste caso, contamos con dúas funcións $f_1 : D \subseteq R^2 \longrightarrow R$ e $f_2 : D \subseteq R^2 \longrightarrow R$ diferenciables en D. Igual que no caso anterior (pero estendido) queremos atopar valores α para os que:

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \text{ e } f_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

Unha forma de simplificar a nomenclatura é facer uso dunha función vectorial da forma $f(x_1, x_2) := (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, e así atopar os valores de α para os que:

$$f(\alpha_1, \alpha_2) := (f_1(\alpha_1, \alpha_2), f_2(\alpha_1, \alpha_2)) = (0, 0)$$

Unha vez máis, imos a empregar outra nomenclatura. Esta vez a sucesións de valores x^k será $\{(x_1^k, x_2^k)\}$, a cal vaise achegar á dupla (α_1, α_2):

$$\{(x_1^k, x_2^k)\} \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$$

Exercicio de exemplo (sen resolver):

Buscar as solucións do sistema: $1 - x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$

A primeira ecuación representa no plano unha circunferencia de radio 1, mentres que a segunda representa as bisectrices dos cuadrantes do plano. Polo que o que queremos atopar son os puntos que distan unha unidade da orixe e que teñen as compoñentes x e y iguais en valor absoluto.

Empregando o método de Newton, formularíamos as seguintes expresión:

$$f_1(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

V. Método de Newton-Raphson

Dada unha función $f: R^n \longrightarrow R^n$ de varias variables e non linear, se o noso obxectivo é achar os vectores de incógnitas $x=(x_0, x_1, \dots, x_n)^t \epsilon R^n$, tales que $f(x)=0$. Podemos empregar o Método de Newton-Raphson xeneralizándoo a varias variables para obter o coñecido como Método de Newton, que consta dos seguintes pasos:

Supoñemos que o vector $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t \epsilon R^n$ é unha solución do sistema, e que $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$ é dúas veces diferenciable.

Empregamos o desenvolvemento de Taylor para varias variables a función, na contorna do punto $x^k=(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ para obter:

$$0=f(\alpha)=f(x^k)+Df(x^k)(\alpha-x^k)+O\left(\left\|\alpha-x^k\right\|^2\right)$$

Onde $Df(x^k)$ é a matriz de derivadas parciais ou matriz Jacobiana:

$$Df(x^k) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^k) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^k) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^k) \end{pmatrix}$$

Se o número de incógnitas é 2, a matriz Jacobiana resultante é a seguinte:

$$Df(x^k) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^k) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^k) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^k) \end{pmatrix}$$

Cando o termo $\left\|\alpha-x^k\right\|$ é pequeno, o termo $O\left(\left\|\alpha-x^k\right\|^2\right)$ pode desperdiciarse no desenvolvemento de Taylor por ser moito máis pequeno. E para o caso das dúas variables o resultado sería o seguinte:

$$0=f_1(x^k)+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^k)(\alpha_1-x_1^k)+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^k)(\alpha_2-x_2^k)$$

$$0=f_2(x^k)+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^k)(\alpha_1-x_1^k)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^k)(\alpha_2-x_2^k)$$

Se a matriz $Df(x)$ tamén resulta ser invertible, pódese extraer o valor da raíz α de dito sistema linear. Sendo o resultado:

$$Df\left(x^k\right)\left(\alpha - x^k\right) \approx -f\left(x^k\right) \implies \alpha - x^k \approx -Df\left(x^k\right)^{-1} f\left(x^k\right) \implies \alpha \approx x^k - Df\left(x^k\right)^{-1} f\left(x^k\right)$$

Polo tanto o Método de Newton consiste na aproximación da solución x^{k+1}, dada a aproximación da solución x^k.

$$x^{k+1} := x^k - Df\left(x^k\right)^{-1} f\left(x^k\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$