Primera entrega de Álgebra Lineal

Asier Del Cid Pérez

Octubre 2024

1. Cuestión primera

La primera cuestión remite a la siguiente función programada en Python. A continuación se transcribe literalmente la función:

```python
def funcion(n):
    if n == 1:
        return a
    else:
        return 2*funcion(n-1) + b
```

El ejercicio pide demostrar que para un $n \geq 1$ entonces se verifica:

$$funcion(n) = a2^{n-1} + b(2^{n-1} - 1)$$

Por comodidad a lo largo de la demostración, se diferenciarán dos funciones, ambas son funciones de una variable natural $n \geq 1$:

$$Funcion(n) = a2^{n-1} + b(2^{n-1} - 1)$$

$$funcion(n) = \begin{cases} a, n = 1 \\ 2 \cdot funcion(n-1) + b, n \neq 0 \end{cases}$$

Entonces, la demostración tan solo se reduce a demostrar que $\forall n \geq 1$, $funcion(n)$ es igual que $Funcion(n)$.

Para proceder con la demostración usaremos la técnica de inducción. En primer lugar, evaluamos la función sobre el caso base $n = 1$.

$$funcion(1) = a$$

$$a \cdot 2^{1-1} + b(2^{1-1} - 1) = a$$

Por tanto, es posible inferir que en $n = 0$ nuestra fórmula (la fórmula a demostrar) se cumple. A partir de ahora, se ejecuta una **hipótesis de inducción** con un $k \in \mathbb{N}$ arbitrario tal que verifica que $funcion(k) = Funcion(k)$.

Inicialmente resulta obvio que solo contamos con $k = 0$, pero si somos capaces de demostrar que el hecho de que k verifique $funcion(k) = Funcion(k)$ implica que $k+1$ verifica $funcion(k+1) = Funcion(k+1)$ habremos probado por inducción que tal proposición o propiedad dependiente de k, $P(k)$: $funcion(k) = Funcion(k)$.

Dado que en k se cumple la proposición $P(k)$ (hipótesis de inducción) se verifica:

$$funcion(k) = Funcion(k)$$

$$funcion(k) = a2^{n-1} + b(2^{n-1} - 1)$$

Si se toma $k + 1$ entonces resulta obvio que:

$$funcion(k+1) = funcion(k+1)$$

$$funcion(k+1) = 2 \cdot funcion(k) + b$$

Observe que $k+1$ no puede ser 0, ya que de así ser $k < 0$ por lo que no cumple la hipótesis de inducción, por el simple hecho de que $funcion(n)$ no está definida en $n = -1$.

Por hipótesis de inducción se puede reducir tal afirmación a:

$$funcion(k+1) = 2 \cdot (a2^{k-1} + b(2^{k-1} - 1)) + b$$

A continuación se procede a reducir:

$$funcion(k+1) = a2^k + 2b(2^{k-1} - 1) + b$$

$$funcion(k+1) = a2^k + 2^k b - 2b + b$$

$$funcion(k+1) = a2^k + 2^k b - b$$

$$funcion(k+1) = a2^k + b(2^k - 1)$$

Entonces, efectivamente si calculamos $Funcion(k+1)$ observamos que coinciden:

$$Funcion(k+1) = a2^k + b(2^k - 1)$$

Es decir, $funcion(k+1) = Funcion(k+1)$. Por formalizar, podemos concluir de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{gathered} P(k) : funcion(k) = Funcion(k+1), \\ \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(k) \to P(k+1) \therefore funcion(k) = a2^{k-1} + b(2^{k-1} - 1) \end{gathered}}$$

$\blacksquare$

2. Cuestión segunda

Se pide determinar las ecuaciones implícitas del espacio vectorial de $V \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por:

$$V = \langle (0,1,0,1),(1,0,-1,0) \rangle$$

A simple vista se puede observar que los vectores son linealmente independientes y por tanto conforman una base de V, aun así se procede a demostrar sencillamente:

Por definición se dice que una lista finita $[\bar{v_i}]$ s linealmente independiente para $i = 1, 2, ..., n$ si además de ser un conjunto finito cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{v_i} = \bar{0} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ...\lambda_n = 0$$

Se entiende que $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

En cualquier otro caso, se dice que la lista es linealmente dependiente (por definición).

Necesariamente esto nos lleva hasta un teorema simplemente fascinante. Se dirá que un sistema $[\bar{v_i}]$ si y solo si $rg(\bar{v_1}|\bar{v_2}|...|\bar{v_n}) = n$, donde el $rg(A)$ con $A \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{K})$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo arbitrario se define como el total de pivotes de una matriz escalonada equivalente por operaciones elementales a A.

Entonces,

$$rg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Dado que entonces conforma una base podemos tomar un vector $\bar{x} \in V$ y definimos $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Necesariamente si $\bar{x} \in V$, esto implica que $\bar{x}$ se puede escribir como combinación lineal de la base de V (definición de base).

Por el teorema anterior se puede deducir entonces que si $\bar{x}$ es combinación lineal de la base, entonces es imperante que:

$$rg(\bar{v_1}|\bar{v_2}|...|\bar{v_n}) = dim(V) = rg(\bar{v_1}|\bar{v_2}|...|\bar{v_n}|\bar{x})$$

Para que se verifique esta condición es necesario que:

$$rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & x_1 \\ 1 & 0 & | & x_2 \\ 0 & -1 & | & x_3 \\ 1 & 0 & | & x_4 \end{pmatrix}$$

Circulamos (permutaciones cíclicas) la matriz por filas en 1 hacia arriba:

$$rg\begin{pmatrix}1 & 0 & | & x_2\\ 0 & -1 & | & x_3\\ 1 & 0 & | & x_4\\ 0 & 1 & | & x_1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & | & x_2\\ 1 & 0 & | & x_4\\ 0 & -1 & | & x_3\\ 0 & 1 & | & x_1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & | & x_2\\ 1 & 0 & | & x_4\\ 0 & -1 & | & x_3\\ 0 & 0 & | & x_3+x_1\end{pmatrix} =$$

$$rg\begin{pmatrix}1 & 0 & | & x_2\\ 0 & -1 & | & x_3\\ 1 & 0 & | & x_4\\ 0 & 0 & | & x_3+x_1\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & | & x_2\\ 0 & -1 & | & x_3\\ 0 & 0 & | & x_4-x_2\\ 0 & 0 & | & x_3+x_1\end{pmatrix}$$

Entonces, como debe ser el rango igual a 2, se debe cumplir que:

$$V : \begin{cases} x_4 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Para ir aprendiendo Sage, revisamos dicho resultado con la calculadora programable de Sage:

```
sage: M = Matrix([[0,1,0,1], [1,0,-1,0]])
sage: M.right_kernel_matrix()
[-1  0 -1  0]
[ 0  1  0 -1]
```

No entraremos en detalle de por qué hemos calculado el kernel de la matriz (pero ciertamente por su definición resulta obvio), porque no es nuestra intención. El hecho, es que si tomamos a Sage como la verdad incuestionable, podríamos asustarnos porque los resultados parecen no coincidir, pero evidentemente tras deternerte 5 segundos a observarlos verás que son combinación lineal.

3. Cuestión tercera

Para la cuestión tercera nos piden, en primer lugar, determinar si tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes (LD) o linealmente independientes (LI).

Por definición (anteriormente dada) serán LI $[\bar{v_i}]$ para $i = 1, 2, ..., n$ si y solo si:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{v_i} = \bar{0} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Se entiende que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (en esta cuestión).

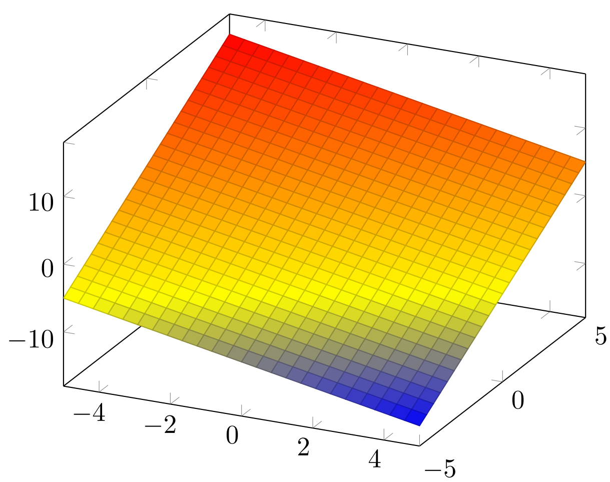
Entonces, dados los vectores $\bar{v_1} = (1, 2, 3)$, $\bar{v_2} = (4, 5, 6)$, $\bar{v_3} = (7, 8, 9)$ como ya se ha visto serán LI si $rg(\bar{v_1}|\bar{v_2}|\bar{v_3})$ es 3. Lo comprobamos, para hacerlo más rápido y no aburrir al lector con pasos innecesarios se calcula con Sage:

```
sage: A = Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
sage: A = A.transpose()
sage: A
[1 4 7]
[2 5 8]
[3 6 9]
sage: A.echelon_form()
[1 1 1]
[0 3 6]
[0 0 0]
```

Observa que dos veces la columna 2 menos la columna 1 es la columna 3. Y dado que el número de pivotes es 2, el rango es 2, y por tanto no es 3 y por tanto es LD. Observe además que las columnas que tienen pivotes corresponden a vectores LI. Por tanto, podríamos quedarnos con $(1, 2, 3)$ y $(4, 5, 6)$ que son vectores LI, lo que de manera equivalente puedes observar haciendo el rango de estos vectores (pero es de manera redundante, lo mismo que acabamos de hacer).

Entonces, si nos dijesen que los tres vectores que nos han dado generan o engendran un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, entonces una base sería $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$.

Para visualizar un poco este subespacio vectorial (que **no** es la finalidad del álgebra lineal, pues el dibujo de variedades impone una limitación que el álgebra lineal no tiene) se propone tratar cada vector $\vec{x} \in V$ donde $V = \langle (1, 2, 3), (4, 5, 6) \rangle$, se puede expresar como un punto de un plano de $\mathbb{R}^3$ (existe un isomorfismo evidente entre ambos conjuntos).



El plano dibujado en $\mathbb{R}^3$ es $z = -x + 2y$.