অধ্যায় ৪: বৃত্ত (Circles)

এইচএসসি (HSC) বোর্ড পরীক্ষায় জ্যামিতি অংশ থেকে এই অধ্যায়টি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। বিগত বছরের প্রশ্নপত্র বিশ্লেষণ করে বৃত্ত অধ্যায়টিকে আমরা মোট **১১টি প্রধান টাইপে** বিভক্ত করেছি।

টাইপ ১: কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ সংক্রান্ত (Standard & General Equations)

নিয়ম ও সূত্র:

- **বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ:** কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের সমীকরণ:

  $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- **বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ:** $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
  - কেন্দ্র: $(-g, -f)$
  - ব্যাসার্ধ: $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$
  - বৃত্তটি বাস্তব হওয়ার শর্ত: $g^2 + f^2 - c \geq 0$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 1 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

সমাধান:

প্রথমে সাধারণ সমীকরণের সাথে তুলনা করার জন্য x^2 ও y^2 এর সহগ 1 করতে হবে। সমীকরণটিকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{1}{2} = 0$$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই:

$$2g = -4 \implies g = -2$$

$$2f = 6 \implies f = 3$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

- **কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক:** $(-g, -f) = (2, -3)$
- **ব্যাসার্ধ:**

  $$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{4 + 9 + \frac{1}{2}} = \sqrt{13 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ একক।}$$

উত্তর: কেন্দ্র $(2, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{\frac{27}{2}}$ একক।

টাইপ ২: অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত ও খণ্ডিতাংশ (Axial Intercepts & Tangency)

নিয়ম ও সূত্র:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে:

- **x-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ (Intercept on x-axis):** $2\sqrt{g^2 - c}$
- **y-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ (Intercept on y-axis):** $2\sqrt{f^2 - c}$
- **x-অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত:** $g^2 = c$ (তখন কেন্দ্রের কোটি $=$ ব্যাসার্ধ, অর্থাৎ $|f| = r$)
- **y-অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত:** $f^2 = c$ (তখন কেন্দ্রের ভুজ $=$ ব্যাসার্ধ, অর্থাৎ $|g| = r$)
- **উভয় অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত:** $g^2 = f^2 = c$ (তখন $|g| = |f| = r$)

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান:

যেহেতু বৃত্তটি ১ম চতুর্ভাগের বিন্দু $(1, 2)$ দিয়ে যায় এবং উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তাই এর কেন্দ্র হবে (r, r) এবং ব্যাসার্ধ হবে r।

বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ অনুযায়ী:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

যেহেতু বৃত্তটি $(1, 2)$ বিন্দুগামী, বিন্দুটি সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$$(1 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$$

$$\implies 1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2$$

$$\implies r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\implies (r - 1)(r - 5) = 0 \implies r = 1 \quad \text{বা} \quad r = 5$$

- যদি $r = 1$ হয়, বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 \implies x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
- যদি $r = 5$ হয়, বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \implies x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

উত্তর: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$।

টাইপ ৩: নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং ব্যাসের প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট বৃত্ত (Diameter Form)

নিয়ম ও সূত্র:

- একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ হলে বৃত্তের সমীকরণ:

  $$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $A(3, 2)$ এবং $B(-1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান:

ব্যাসের প্রান্তবিন্দুবিশিষ্ট বৃত্তের সূত্র সরাসরি প্রয়োগ করে পাই:

$$(x - 3)(x - (-1)) + (y - 2)(y - 4) = 0$$

$$\implies (x - 3)(x + 1) + (y - 2)(y - 4) = 0$$

$$\implies (x^2 - 2x - 3) + (y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

উত্তর: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$।

টাইপ ৪: ৩টি বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ (Circle Through Three Points)

নিয়ম ও সূত্র:

- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ধরে তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসিয়ে g, f, c সংবলিত তিনটি সহ-সমীকরণ তৈরি করতে হবে। এরপর সমীকরণগুলো সমাধান করে g, f, c এর মান মূল সমীকরণে বসাতে হবে।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $(0, 0), (2, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান:

ধরি, বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (i)$

- $(0, 0)$ বিন্দুগামী হলে: $0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \implies c = 0$
- $(2, 0)$ বিন্দুগামী হলে: $2^2 + 0 + 2g(2) + 0 + 0 = 0 \implies 4 + 4g = 0 \implies g = -1$
- $(0, 4)$ বিন্দুগামী হলে: $0 + 4^2 + 0 + 2f(4) + 0 = 0 \implies 16 + 8f = 0 \implies f = -2$

g, f, c এর প্রাপ্ত মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$$x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2(-2)y + 0 = 0 \implies x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

উত্তর: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$।

টাইপ ৫: কেন্দ্র কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর অবস্থিত (Center on a Given Line)

নিয়ম ও সূত্র:

- যদি বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখা $ax + by + d = 0$ এর ওপর অবস্থিত হয়, তবে কেন্দ্রটি দ্বারা রেখাটি সিদ্ধ হবে। অর্থাৎ, $a(-g) + b(-f) + d = 0 \implies -ag - bf + d = 0$। এই সমীকরণটি ব্যবহার করে অন্য শর্তের সাহায্যে g ও f বের করতে হয়।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যা $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র $x - 2y - 10 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত।

সমাধান:

ধরি, বৃত্তটি: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (i)$

এর কেন্দ্র $(-g, -f)$ দেওয়া আছে $x - 2y - 10 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত।

$$\therefore -g - 2(-f) - 10 = 0 \implies -g + 2f = 10 \quad \dots (ii)$$

বৃত্তটি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী হওয়ায়:

$$9 + 25 + 6g + 10f + c = 0 \implies 6g + 10f + c = -34 \quad \dots (iii)$$

$$36 + 16 + 12g + 8f + c = 0 \implies 12g + 8f + c = -52 \quad \dots (iv)$$

সমীকরণ (iv) থেকে (iii) বিয়োগ করে পাই:

$$6g - 2f = -18 \quad \dots (v)$$

এখন সমীকরণ (ii) এবং (v) যোগ করি:

$$(-g + 2f) + (6g - 2f) = 10 + (-18) \implies 5g = -8 \implies g = -\frac{8}{5}$$

g এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই:

$$6\left(-\frac{8}{5}\right) - 2f = -18 \implies -\frac{48}{5} + 18 = 2f \implies 2f = \frac{42}{5} \implies f = \frac{21}{5}$$

g ও f এর মান (iii) নং এ বসিয়ে $c = -\frac{102}{5}$ পাওয়া যায়। মানগুলো (i) এ বসিয়ে চূড়ান্ত সমীকরণ পাওয়া যায়:

$$5(x^2 + y^2) - 16x + 42y - 102 = 0$$

উত্তর: $5(x^2 + y^2) - 16x + 42y - 102 = 0$।

টাইপ ৬: বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ ও স্পর্শ করার শর্ত (Tangent & Condition of Tangency)

নিয়ম ও সূত্র:

- **স্পর্শ করার শর্ত (সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ):** একটি সরলরেখা $ax + by + c = 0$ কোনো বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ঐ রেখার লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হয়।

  $$\text{লম্ব দূরত্ব} = \text{ব্যাসার্ধ} (d = r)$$

- **নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক:** $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $xx_1 + yy_1 = r^2$।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: দেখাও যে, $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ হয়।

সমাধান:

প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 = a^2$, যার কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= a$।

প্রদত্ত রেখা: $mx - y + c = 0$

স্পর্শক হওয়ার শর্তানুযায়ী, কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে রেখার লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে:

$$\frac{|m(0) - 0 + c|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = a$$

$$\implies \frac{|c|}{\sqrt{m^2 + 1}} = a$$

বর্গ করে পাই:

$$\frac{c^2}{m^2 + 1} = a^2 \implies c^2 = a^2(1 + m^2)$$

$$\therefore c = \pm a\sqrt{1 + m^2} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

টাইপ ৭: বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ (Normal to a Circle)

নিয়ম ও সূত্র:

- **অভিলম্বের ধর্ম:** বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব (Normal) সর্বদা বৃত্তের **কেন্দ্রগামী** হয়।
- (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বের করে তার লম্ব রেখা যা (x_1, y_1) বিন্দুগামী, তা-ই অভিলম্ব। অথবা সরাসরি কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণই অভিলম্ব।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের $(3, 4)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান:

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $O(0, 0)$।

যেহেতু বৃত্তের অভিলম্ব সর্বদা কেন্দ্রগামী, তাই $(3, 4)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দুগামী সরলরেখা হবে।

দ্বি-বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ সূত্র থেকে পাই:

$$\frac{x - 0}{0 - 3} = \frac{y - 0}{0 - 4}$$

$$\implies \frac{x}{-3} = \frac{y}{-4} \implies -4x = -3y \implies 4x - 3y = 0$$

উত্তর: $4x - 3y = 0$।

টাইপ ৮: স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (Length of Tangent)

নিয়ম ও সূত্র:

- কোনো বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য L:

  $$L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

- **সতর্কতা:** এই সূত্রে মান বসানোর আগে সমীকরণে x^2 ও y^2 এর সহগ অবশ্যই 1 করে নিতে হবে।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $(5, 6)$ বিন্দু থেকে $3x^2 + 3y^2 - 6x + 9y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান:

প্রথমে বৃত্তের সমীকরণটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে আদর্শ আকারে আনি:

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{4}{3} = 0$$

এখন স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের সূত্রে $(x_1, y_1) = (5, 6)$ বসিয়ে পাই:

$$L = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5) + 3(6) - \frac{4}{3}}$$

$$L = \sqrt{25 + 36 - 10 + 18 - \frac{4}{3}} = \sqrt{69 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{207 - 4}{3}} = \sqrt{\frac{203}{3}} \text{ একক।}$$

উত্তর: $\sqrt{\frac{203}{3}}$ একক।

টাইপ ৯: দুটি বৃত্তের পারস্পরিক অবস্থান ও সাধারণ জ্যা (Intersection & Common Chord)

নিয়ম ও সূত্র:

দুটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে C_1, C_2 এবং ব্যাসার্ধ r_1, r_2 হলে:

- **বহিঃস্পর্শ করার শর্ত:** $C_1C_2 = r_1 + r_2$
- **অন্তঃস্পর্শ করার শর্ত:** $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$
- **সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ (Common Chord):** দুটি বৃত্তের সমীকরণ $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ হলে, সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ হবে:

  $$S_1 - S_2 = 0 \quad [\text{শর্ত: } x^2, y^2 \text{ এর সহগ সমজাতীয়}]$$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান:

১. সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ ($S_1 - S_2 = 0$):

$$(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12) - (x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12) = 0$$

$$\implies -10x + 10y = 0 \implies x - y = 0 \implies y = x \quad \dots (i)$$

২. ১ম বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(2, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - (-12)} = \sqrt{4 + 9 + 12} = 5$।

৩. কেন্দ্র $C_1(2, -3)$ থেকে জ্যা $x - y = 0$ এর লম্ব দূরত্ব d:

$$d = \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

৪. জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r_1^2 - d^2}$:

$$\text{দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{25 - \frac{25}{2}} = 2\sqrt{\frac{25}{2}} = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ একক।}$$

উত্তর: সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $5\sqrt{2}$ একক।

টাইপ ১০: বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান (Position of a Point)

নিয়ম ও সূত্র:

- কোনো বিন্দু $P(x_1, y_1)$ বৃত্ত $S(x,y) = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর:
  - **বাইরে থাকবে:** যদি $S(x_1, y_1) > 0$ হয়।
  - **ওপর অবস্থিত হবে:** যদি $S(x_1, y_1) = 0$ হয়।
  - **ভিতরে থাকবে:** যদি $S(x_1, y_1) < 0$ হয়।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $(2, -1)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ বৃত্তের ভেতরে, বাইরে নাকি ওপরে অবস্থিত?

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষে বিন্দুটির মান বসিয়ে পাই:

$$S(2, -1) = 2^2 + (-1)^2 - 4(2) + 2(-1) + 1$$

$$= 4 + 1 - 8 - 2 + 1 = -4$$

যেহেতু $S(2, -1) = -4 < 0$ (ঋণাত্মক), সেহেতু বিন্দুটি বৃত্তের ভেতরে অবস্থিত।

উত্তর: বিন্দুটি বৃত্তের ভেতরে অবস্থিত।

টাইপ ১১: বৃত্তের জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দেওয়া থাকলে জ্যা-এর সমীকরণ

নিয়ম ও সূত্র:

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $转化 P(x_1, y_1)$ হলে জ্যা-এর সমীকরণ বের করার শর্টকাট হলো:

  $$T = S_1$$

  যেখানে $T \equiv xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c$ এবং $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ বৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(1, 2)$, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান:

এখানে $g = -2, f = -3, c = -3$ এবং $(x_1, y_1) = (1, 2)$।

$T = S_1$ সূত্রটি ব্যবহার করি:

$$x(1) + y(2) - 2(x + 1) - 3(y + 2) - 3 = 1^2 + 2^2 - 4(1) - 6(2) - 3$$

$$\implies x + 2y - 2x - 2 - 3y - 6 - 3 = 1 + 4 - 4 - 12 - 3$$

$$\implies -x - y - 11 = -14$$

$$\implies -x - y + 3 = 0 \implies x + y - 3 = 0$$

উত্তর: $x + y - 3 = 0$।