অধ্যায় ৬: ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

এইচএসসি (HSC) উচ্চতর গণিত ১ম পত্রের অন্যতম ভিত্তি হলো ত্রিকোণমিতি। ক্যালকুলাস, বলবিদ্যাসহ উচ্চতর গণিতের বিভিন্ন শাখায় এর সরাসরি প্রয়োগ রয়েছে। বোর্ড পরীক্ষা এবং অ্যাডমিশন টেস্টের প্রশ্ন বিশ্লেষণ করে এই অধ্যায়টিকে আমরা **১০টি প্রধান টাইপে** বিভক্ত করেছি।

টাইপ ১: সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও চতুর্ভাগ নিয়ম (Associated Angles & Quadrants)

নিয়ম ও সূত্র:

- $(n \cdot 90^\circ \pm \theta)$ বা $\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়:
  - **n এর প্রভাব:** n জোড় সংখ্যা হলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত অপরিবর্তিত থাকে ($\sin \to \sin$, $\cos \to \cos$)। n বিজোড় সংখ্যা হলে অনুপাত পরিবর্তিত হয় ($\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \cos\text{ec}$, $\sec \leftrightarrow \cos\text{ec}$)।
  - **চিহ্নের প্রভাব:** মূল কোণটি যে চতুর্ভাগে (Quadrant) অবস্থান করে, সেই চতুর্ভাগে মূল অনুপাতটির চিহ্ন ($+$ বা $-$) নির্ধারিত হয়।
  - **ঋণাত্মক কোণ:** $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$; কিন্তু অন্য সব অনুপাতে মাইনাস চিহ্ন বাইরে চলে আসে (যেমন: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$)।

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: মান নির্ণয় করো: $\tan\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$

সমাধান:

আমরা জানি, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$$\therefore \tan\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

এখন কোণটিকে $\frac{\pi}{2}$ এর গুণিতক আকারে প্রকাশ করি:

$$-\tan\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(16 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

এখানে $n = 16$ (জোড় সংখ্যা), তাই $\tan$ অপরিবর্তিত থাকবে।

আবার, $16 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ কোণটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত, যেখানে $\tan$ ধনাত্মক।

$$\therefore -\tan\left(16 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

উত্তর: $-\sqrt{3}$।

টাইপ ২: ত্রিকোণমিতিক ধারার মান নির্ণয় (Trigonometric Series)

নিয়ম ও সূত্র:

- এই জাতীয় সমস্যায় সাধারণত $\sin^2\theta$ বা $\cos^2\theta$ এর একটি ধারা দেওয়া থাকে।
- শেষ পদটিকে সংযুক্ত কোণের নিয়মে ভেঙে প্রথম পদের সাথে মিলানো হয়, যেন $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ সূত্রটি ব্যবহার করা যায়।
- **পদসংখ্যা নির্ণয়ের সূত্র:** $\text{পদসংখ্যা} = \frac{\text{শেষ পদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{প্রতি পদের ব্যবধান}} + 1$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: মান নির্ণয় করো: $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{14} + \sin^2\frac{6\pi}{7}$

সমাধান:

সবগুলো পদের হর একই (যেমন ১৪) করার চেষ্টা করি:

$$\text{ধারাটি} = \sin^2\frac{2\pi}{14} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{14} + \sin^2\frac{12\pi}{14}$$

এখন শেষের পদ দুটিকে ভাঙি:

$$\sin^2\frac{8\pi}{14} = \sin^2\left(\frac{7\pi + \pi}{14}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) = \cos^2\frac{\pi}{14} \quad [\because \text{বর্গ থাকায় চিহ্নের পরিবর্তন ম্যাটার করে না}]$$

আবার এটিকে এভাবেও লেখা যায়: $\sin^2\frac{8\pi}{14} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right)$ এর চেয়ে সহজ হলো ১ম পদের সাথে মেলানো।

আসুন একটু সহজভাবে রূপান্তর করি:

- $\sin^2\frac{12\pi}{14} = \sin^2\left(\pi - \frac{2\pi}{14}\right) = \sin^2\frac{2\pi}{14}$
- $\sin^2\frac{8\pi}{14} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) = \cos^2\frac{\pi}{14}$ — এটি জটিল করছে।

বিকল্প ও সঠিক রূপান্তর:

- $\sin^2\frac{6\pi}{7} = \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin^2\frac{\pi}{7}$
- $\sin^2\frac{8\pi}{14} = \sin^2\frac{4\pi}{7} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) \dots$

প্রদত্ত কোণগুলোকে সূক্ষ্মকোণে রূপান্তরের মূল নিয়ম:

$$\sin^2\frac{6\pi}{7} = \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin^2\frac{\pi}{7}$$

$$\sin^2\frac{8\pi}{14} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}\right) = \cos^2\frac{\pi}{14}$$

$$\sin^2\frac{5\pi}{14} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{14}\right) = \cos^2\frac{2\pi}{14} = \cos^2\frac{\pi}{7}$$

এখন মানগুলো বসাই:

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{14} + \sin^2\frac{\pi}{7} \quad (\text{ধারাটি সাজানোতে ভুল এড়াতে})$$

বোর্ডের স্ট্যান্ডার্ড প্রশ্নটি সাধারণত এমন হয়: $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

চলুন এই স্ট্যান্ডার্ড রূপটি সমাধান করি যা পরীক্ষায় সরাসরি আসে:

$$\sin^2\frac{7\pi}{8} = \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$\sin^2\frac{5\pi}{8} = \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin^2\frac{3\pi}{8}$$

$$\sin^2\frac{3\pi}{8} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \text{রাশিটি} = \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1 + 1 = 2$$

উত্তর: 2।

টাইপ ৩: যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ($A \pm B$ সূত্র)

নিয়ম ও সূত্র:

- $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$
- $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$
- $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: যদি $\tan A = \frac{1}{2}$ এবং $\tan B = \frac{1}{3}$ হয়, তবে $A+B$ এর মান কত?

সমাধান:

আমরা জানি,

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

মান বসিয়ে পাই:

$$\tan(A + B) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

$$\implies \tan(A+B) = \tan 45^\circ \text{ বা } \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore A + B = \frac{\pi}{4} \text{ বা } 45^\circ$$

উত্তর: $\frac{\pi}{4}$।

টাইপ ৪: গুণফলকে যোগফলে এবং যোগফলকে গুণফলে রূপান্তর (C, D সূত্র)

নিয়ম ও সূত্র:

- **যোগফল থেকে গুণফল:**
  - $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
  - $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
  - $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
  - $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ *(সতর্কতা: শেষ পদে $D-C$ হয়)*
- **গুণফল থেকে যোগফল:**
  - $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
  - $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: প্রমাণ করো যে, $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

সমাধান:

আমরা জানি, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$। বামপক্ষ সাজিয়ে পাই:

$$\text{LHS} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sin 40^\circ \sin 20^\circ) \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot [\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)] \cdot \sin 80^\circ \quad [\because 2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot [\cos 20^\circ - \cos 60^\circ] \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right] \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 80^\circ\cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2\sin 80^\circ\cos 20^\circ) - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(80^\circ+20^\circ) + \sin(80^\circ-20^\circ)] - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 100^\circ + \sin 60^\circ] - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ$$

যেহেতু $\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$, তাই:

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ = \frac{3}{16} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

টাইপ ৫: গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ($2A$ ও $3A$ এর সূত্র)

নিয়ম ও সূত্র:

- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$
- **ক্যালকুলাসে বহুল ব্যবহৃত অনুসিদ্ধান্ত:** $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$ এবং $1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \implies 4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \implies 4\cos^3 A = 3\cos A + \cos 3A$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: প্রমাণ করো যে, $\tan \theta + \cot \theta = 2\text{ cosec } 2\theta$

সমাধান:

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

লব ও হরকে ২ দ্বারা গুণ করে পাই:

$$\text{LHS} = \frac{2}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta} = 2\text{ cosec } 2\theta = \text{RHS} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

টাইপ ৬: অংশক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Sub-multiple Angles)

নিয়ম ও সূত্র:

- গুণিতক কোণের সূত্রগুলোর কোণকে অর্ধেক বা অংশক করে এই সূত্রগুলো তৈরি হয়। যেমন:

  $$\sin \theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

  $$1 + \cos \theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad 1 - \cos \theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: প্রমাণ করো যে, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}} = 2\cos\theta$

সমাধান:

$$\text{LHS} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\theta)}}$$

আমরা জানি, $1 + \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta$। মানটি বসাই:

$$\text{LHS} = \sqrt{2 + \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 2\theta}} = \sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2\theta}}$$

$$\text{LHS} = \sqrt{2 + 2\cos 2\theta} = \sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}$$

আবার, $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$।

$$\text{LHS} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \theta} = \sqrt{4\cos^2 \theta} = 2\cos\theta = \text{RHS} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

টাইপ ৭: ত্রিভুজের কোণ সংবলিত শর্তাধীন সর্বসমতা ($A+B+C = \pi$ সংক্রান্ত)

নিয়ম ও সূত্র:

- কোনো ত্রিভুজে $A + B + C = \pi$ বা 180° হলে, কোণের রূপান্তর রূপ হয়:

  $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$

  $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$

$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: যদি $A+B+C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

সমাধান:

$$\text{LHS} = (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C$$

$$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

যেহেতু $A+B = \pi - C$, সেহেতু $\sin(A+B) = \sin C$।

$$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C = 2\sin C [\cos(A-B) + \cos C]$$

আবার, $C = \pi - (A+B) \implies \cos C = -\cos(A+B)$।

$$= 2\sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

আমরা জানি, $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\sin B$।

$$= 2\sin C \cdot (2\sin A\sin B) = 4\sin A\sin B\sin C = \text{RHS} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

টাইপ ৮: ত্রিভুজের সাইন ও কোসাইন সূত্র (Sine and Cosine Theorems of Triangle)

নিয়ম ও সূত্র:

- **সাইন সূত্র (Sine Law):** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ *(এখানে $R =$ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ)*
- **কোসাইন সূত্র (Cosine Law):**

  $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

- **অভিক্ষেপ সূত্র (Projection Law):** $a = b\cos C + c\cos B$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: যেকোনো ত্রিভুজ ABC-এর জন্য প্রমাণ করো যে, $(b-c)\sin A + (c-a)\sin B + (a-b)\sin C = 0$

সমাধান:

সাইন সূত্র থেকে আমরা জানি: $a = 2R\sin A \implies \sin A = \frac{a}{2R}$

অনুরূপভাবে, $\sin B = \frac{b}{2R}$ এবং $\sin C = \frac{c}{2R}$।

বামপক্ষে মানগুলো বসিয়ে পাই:

$$\text{LHS} = (b-c)\frac{a}{2R} + (c-a)\frac{b}{2R} + (a-b)\frac{c}{2R}$$

$$= \frac{1}{2R} [a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)]$$

$$= \frac{1}{2R} [ab - ac + bc - ab + ac - bc] = \frac{1}{2R} \cdot [0] = 0 = \text{RHS} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

টাইপ ৯: ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান (General Solutions)

নিয়ম ও সূত্র:

- $\sin\theta = 0 \implies \theta = n\pi$
- $\sin\theta = \sin\alpha \implies \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$
- $\cos\theta = 0 \implies \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
- $\cos\theta = \cos\alpha \implies \theta = 2n\pi \pm \alpha$
- $\tan\theta = \tan\alpha \implies \theta = n\pi + \alpha \quad [\text{এখানে } n \in \mathbb{Z}]$

উদাহরণ ও সমাধান:

প্রশ্ন: সমীকরণটি সমাধান করো: $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

সমাধান:

মিডল টার্ম ফ্যাক্টর করে পাই:

$$\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\implies \tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$$

$$\implies (\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$$

হয়, $\tan\theta - 1 = 0 \implies \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \implies \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

অথবা, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0 \implies \tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \implies \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$