



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент

Морозов Александр Юрьевич

Группа

РК6-54Б

Тип задания

Лабораторная работа № 2

Тема лабораторной работы

Использование аппроксимаций для
численной оптимизации

Студент

подпись, дата **Морозов А.Ю.**
фамилия, и.о.

Преподаватель

подпись, дата **Соколов А. П.**
фамилия, и.о.

Москва, 2021 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу	3
Цель выполнения лабораторной работы	4
Выполненные задачи	4
1. Базовая часть	6
2. Продвинутая часть	12
Заключение.....	12
Список использованных источников	12

Задание на лабораторную работу

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки $(x, y) = (0, 0)$ достигнет точки $(x, y) = (a, y_a)$ под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось y направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая $y(x)$, которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx \quad (1)$$

Где g обозначает ускорение свободного падения, и $y'(x) = dy/dx$. Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Где $t \in [0, T]$ и C, T являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается $a = 2$ и $y_a = 1$. Константы циклоиды для этого граничного условия равны $C = 1.03439984$, $T = 1.75418438$.

Базовая часть

1. Написать функцию `composite_simpson(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию `composite_trapezoid(a, b, n, f)` численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитать интеграл (1) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте $\log - \log$ график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обоих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.

5. Для обеих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

Продвинутая часть

1. Используя кусочно-линейную интерполяцию с равноудаленными узлами, преобразовать задачу о минимизации функционала (1) к полудискретной форме, где аргументами минимизации будут параметры кусочно-линейной интерполяции.
2. Далее, используя составную формулу Симпсона, преобразовать задачу к полностью дискретной форме.
3. Решить полученную задачу минимизации, используя различные конфигурации дискретизации: с шагом интерполяции и шагом интегрирования от 10^{-3} до 1.
4. Используя $\log - \log$ графики и линии уровня, оценить зависимость погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования.
5. Опциональное задание №1. Использовать метод градиентного спуска и автоматическое дифференцирование для численного решения задачи оптимизации.
6. Опциональное задание №2. Использовать интерполяцию кубическими сплайнами (возможно, с модификациями) вместо кусочно-линейной интерполяции.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – на практике испытать метод интегрирования при помощи формулы Симпсона и метод интегрирования при помощи формулы трапеций. Определить порядки точности формул и сравнить их с аналитическими значениями. Написать программу для проведения этого исследования и проинтерпретировать полученные в результате работы программы графики функций.

Выполненные задачи

Базовая часть

1. Разработка функции для численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона
2. Разработка функции для численного интегрирования с помощью составной формулы трапеций
3. Численный расчёт интеграла (1) при помощи функций, написанных в предыдущих пунктах. Построение графиков абсолютной погрешности от шага интегрирования для каждой из формул.

4. Оценка зависимости погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования
5. Сравнение полученного порядка точности с аналитическим
6. Доказательство несуществования оптимального шага интегрирования для данной формулы, минимизирующего достижимую погрешность

Продвинутая часть

Не выполнял

1. Базовая часть

1.1.

Пусть $x_i = a + (i - 1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$, и $i = 1, \dots, n + 1$, где n – чётное число. Тогда существует такое $\xi \in (a, b)$ для $f(x) \in C^4[a, b]$, что составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) + f(x_{n+1}) \right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad (3)$$

Была написана функция `composite_simpson(a, b, n, f)` для реализации этой формулы численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам

```
def composite_simpson(a,b,n,f):
    if n%2 != 0:
        n += 1
    t = np.linspace(a, b, n + 1)
    h = (b - a) / n
    return h/3. * (f(t[0]) + 2*np.sum(f(t[2:-1:2])) + 4*np.sum(f(t[1::2])) + f(t[-1]))
```

1.2.

Пусть $x_i = a + (i - 1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$, и $i = 1, \dots, n + 1$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое $\xi \in (a, b)$ для $f(x) \in C^2[a, b]$, что составная формула трапеции имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=2}^n f(x_i) + f(x_{n+1}) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \quad (4)$$

Была написана функция `composite_trapezoid(a, b, n, f)` для реализации этой формулы численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам

```
def composite_trapezoid(a,b,n,f):
    t = np.linspace(a, b, n + 1)
    h = (b - a) / n
    return h/2. * (f(t[0]) + 2*np.sum(f(t[1:-1])) + f(t[-1]))
```

1.3.

Так как функция (2) задана параметрически и не может быть выражена как зависимость $y(x)$, перейдём к интегрированию по переменной t :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2} C [2dt - 2\cos(2t)dt] = C [1 - \cos(2t)]dt \\ dy &= \frac{1}{2} C [0 - \sin(2t)2dt] = C \sin(2t)dt \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{C \sin(2t)dt}{C [1 - \cos(2t)]dt} = \frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)} \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (1):

$$\mathcal{F}[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}\right)^2}{\frac{1}{2}C[1 - \cos(2t)]}} C[1 - \cos(2t)] dt \quad (5)$$

Интегрирование будем проводить по выражению (5).

Также из выражения (5) вычислим аналитическое значение интеграла:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}\right)^2}{\frac{1}{2}C[1 - \cos(2t)]}} C[1 - \cos(2t)] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \sqrt{\frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t) + \sin^2(2t)}{1 - \cos(2t)}} 2C dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \sqrt{\frac{2(1 - \cos(2t))}{1 - \cos(2t)}} 2C dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} \int_0^T dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} T \quad (6) \end{aligned}$$

Заметим, что если взять нижний предел интегрирования равным нулю, то знаменатель выражения (5) обращается в ноль. Соответственно, для проведения численного интегрирования необходимо взять такое достаточно близкое к нулю число, чтобы интеграл вычислялся корректно.

В связи с этим изменением точное значение интеграла будет выглядеть:

$$\sqrt{\frac{2C}{g}} \int_{T_0}^T dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} (T - T_0)$$

Если брать нижний предел интегрирования равным 10^{-9} или меньше, то при запуске программы появляется ошибка деления на ноль, как и при запуске с нулевым нижним пределом.

Если взять значение 10^{-8} , то получаем следующий график:

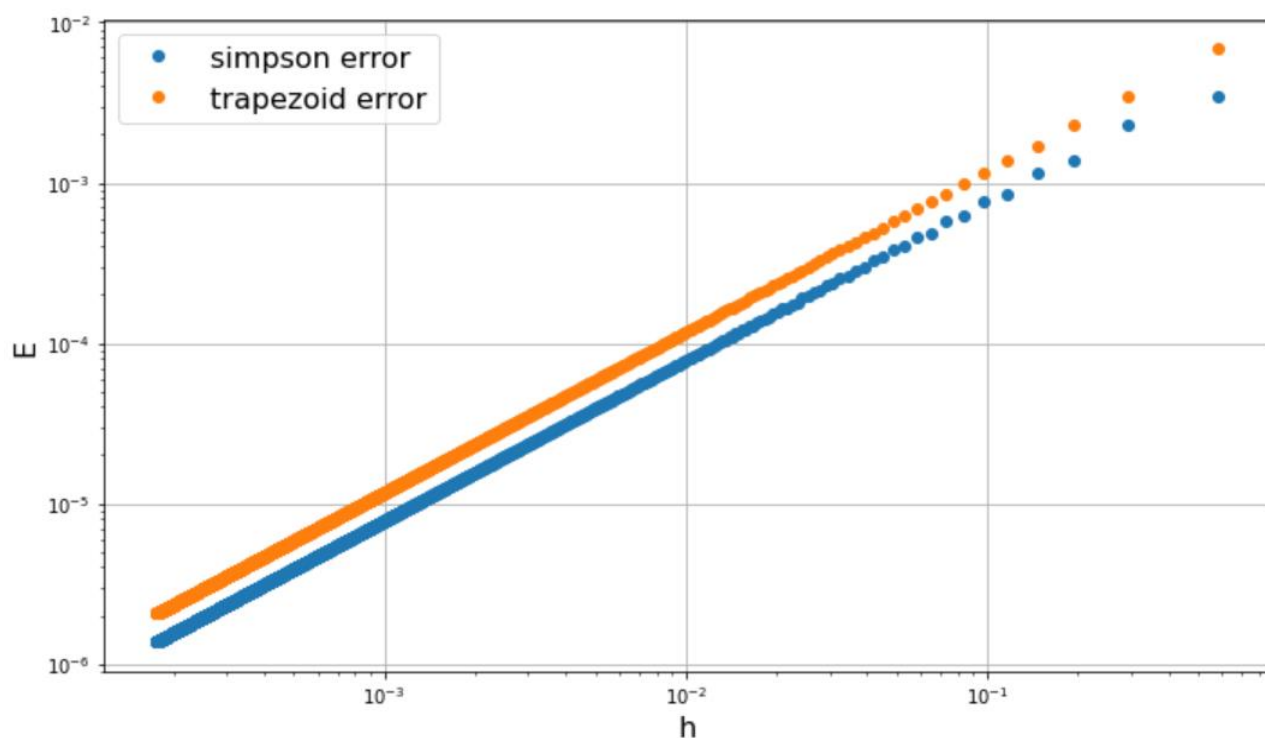


Рис. 1. График зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования при значении нижнего предела интегрирования равным 10^{-8}

Если взять значение 10^{-7} , то получаем следующий график:

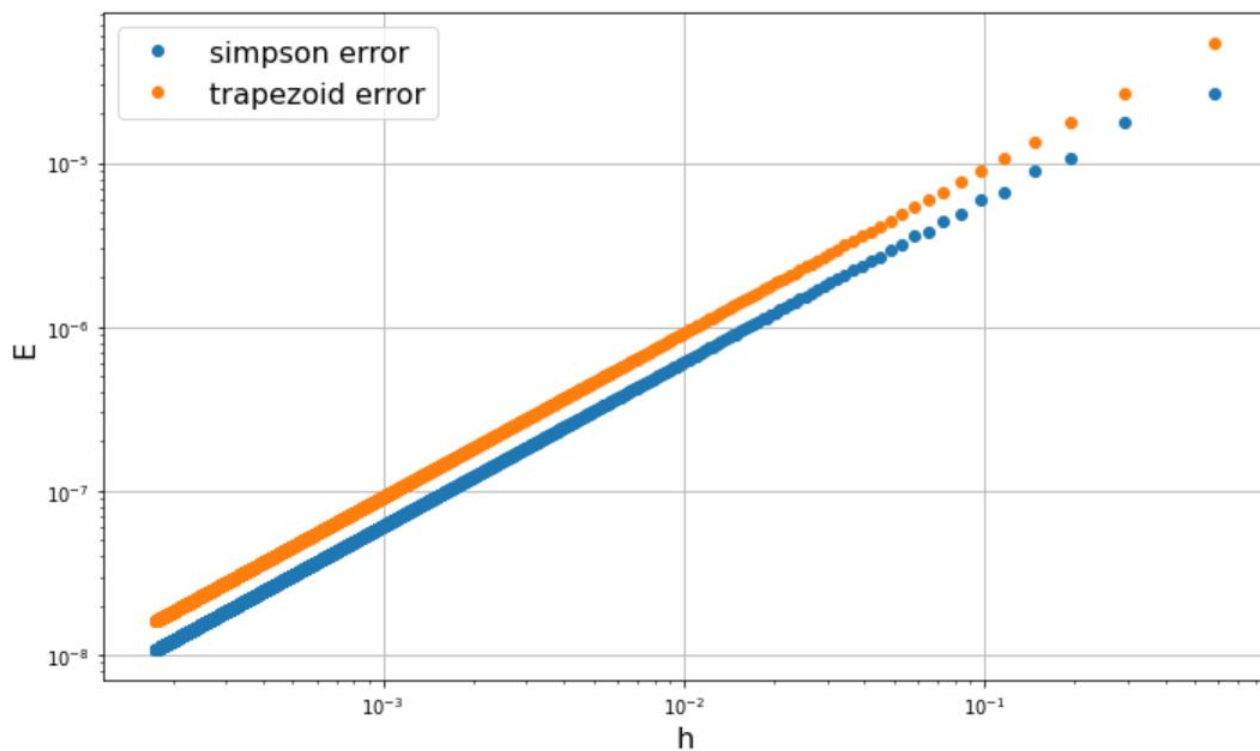


Рис. 2. График зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования при значении нижнего предела интегрирования равным 10^{-7}

Как можно заметить максимально достижимая абсолютная погрешность увеличилась при неизменном шаге интегрирования. Продолжим эксперименты

Если взять значение 10^{-3} , то получаем следующий график:

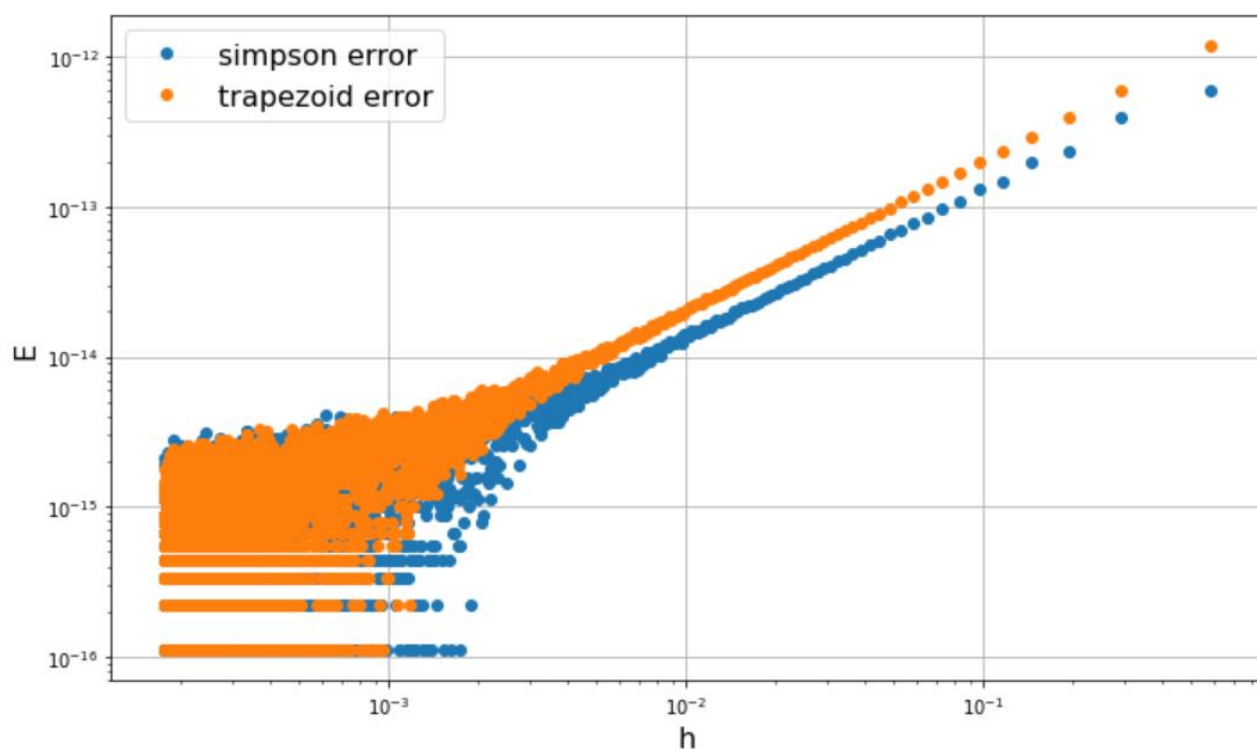


Рис. 3. График зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования при значении нижнего предела интегрирования равным 10^{-3}

Здесь абсолютная погрешность интегрирования стала принимать значения меньше, чем значение машинного эпсилон. Поэтому получен подобный график.

Путём простого перебора получаем оптимальное значение нижнего предела интегрирования - 10^{-4} :

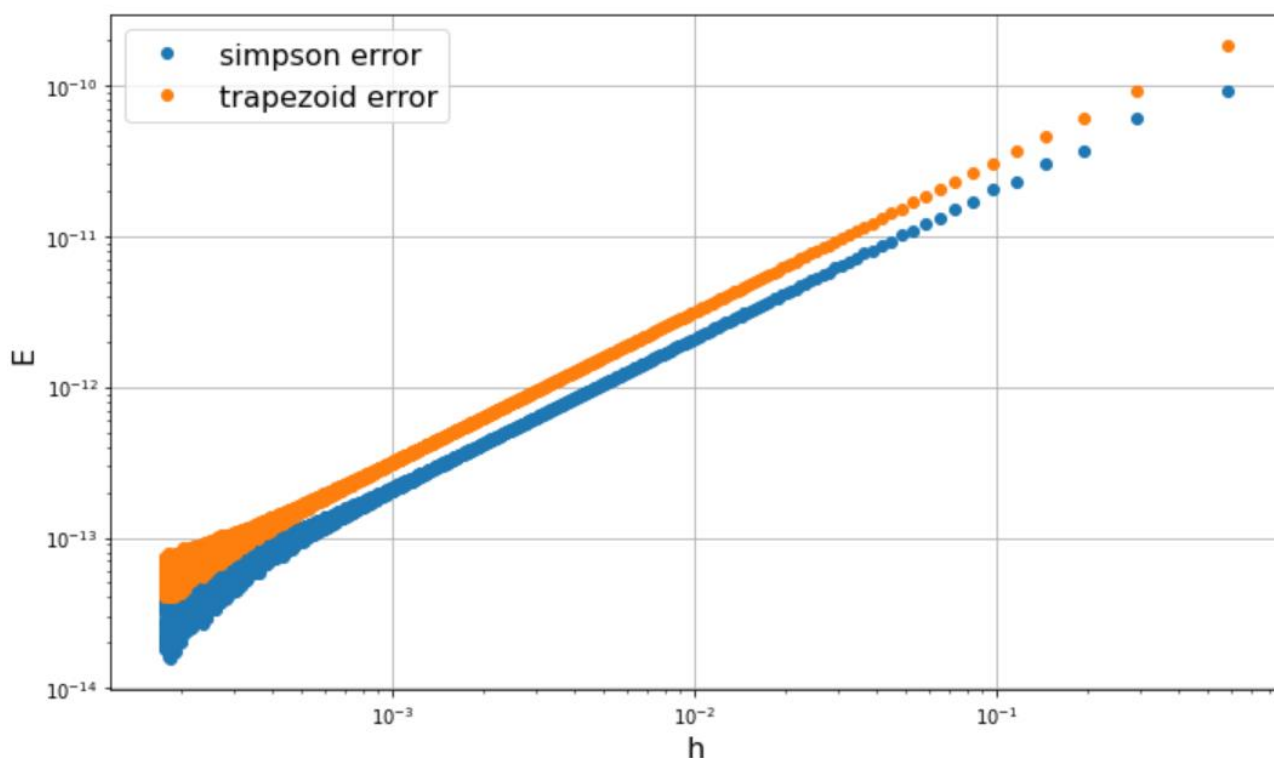


Рис. 4. График зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования при значении нижнего предела интегрирования равным 10^{-4}

На этом графике можно наблюдать минимальные значения абсолютной погрешности численного интегрирования вплоть до 10^{-13} , когда на вычисления начинает сильно влиять погрешность машинных вычислений.

1.4.

Порядок точности – наибольшая степень полинома, для которой численный метод дает точное решение. Порядок точности можно определить как тангенс угла наклона каждой из прямых. Для наглядности лучше вывести сетку.

Ещё более наглядный результат можно получить, если вывести на график зависимость пропорциональную шагу интегрирования при предполагаемом порядке точности 1. При предполагаемом порядке точности 2 следует вывести зависимость пропорциональную квадрату шага интегрирования и т.д..

Определим порядок точности для графика, полученного в предыдущем пункте:

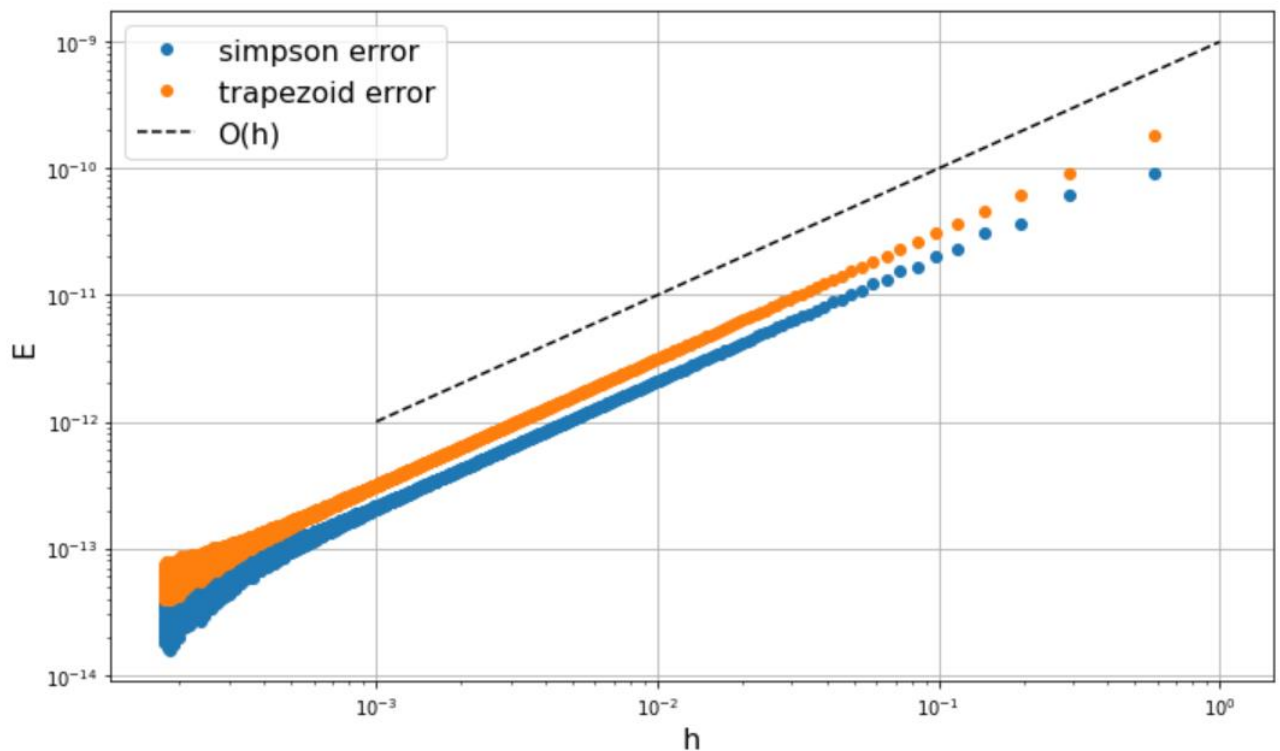


Рис. 5. График из п. 3 и зависимость пропорциональная шагу интегрирования

Как можно заметить из графика выше, порядок точности в нашем случае будет равен 1 и для формулы Симпсона, и для формулы трапеции.

1.5.

Из формул (3) и (4) можно определить, что аналитический порядок точности формулы Симпсона равен 4, а формулы трапеции – 2. Соответственно, полученные на практике порядки точности меньше, чем из аналитические значения. Это связано с тем подынтегральная функция недостаточно гладкая, поскольку является константой на интервале $(0, T]$. Этот вывод можно сделать, взглянув на выражение (6)

1.6.

Численное интегрирование вычислительно устойчивая операция, поэтому оптимального шага интегрирования, минимизирующего достижимую погрешность, нет. Это можно увидеть на полученных графиках - они линейны в логарифмической системе координат. Поэтому получаем простую зависимость: чем меньше шаг интегрирования, тем меньше абсолютная погрешность вычислений.

2. Продвинутая часть

Не выполнял

Заключение

1. В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены и программно реализованы методы численного интегрирования при помощи формулы Симпсона и формулы трапеций.
2. Эти методы были применены для решения задачи о брахистохроне, т.е. кривой наискорейшего спуска. По ходу решения было принято решение об интегрировании исходного функционала (1) по t . При переходе к интегрированию по t выяснилось, что интегрирование от нуля невозможно, и в связи с этим был экспериментально получен оптимальный нижний предел интегрирования.
3. В ходе решения были получены и проинтерпретированы графики зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования. По этим графикам можно сделать вывод о том, что порядок точности, полученный на практике, меньше аналитического порядка точности и то, что не существует оптимального шага интегрирования для данной формулы, минимизирующего достижимую погрешность.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021.
2. Першин А.Ю., Соколов А.П. Вычислительная математика, лабораторные работы (учебное пособие), МГТУ им. Баумана, Москва, 2018-2021.