M2 : Algèbre Commutative et Effective

Contrôle Continu 2019

Durée : 2h.

Les documents et les feuilles de calcul `Jupyter` sont autorisés. Pas de téléphone.

Important : Ce devoir est à réaliser dans un notebook `Jupyter/SageMath`. Utilisez les cellules ordinaires pour faire les calculs et les cellules de texte (`Markdown`) pour ajouter vos commentaires et les réponses aux questions. Envoyez votre travail complet par mail à l'adresse `christina.boura@uvsq.fr` en l'exportant au format `.ipynb` (File → Download as → Notebook (`.ipynb`)).

Question 1

On cherche à trouver le point réel de la surface

$$x^4 + y^2 + z^2 = 1$$

le plus proche du point $(1, 1, 1)$.

(a) Montrer que ce problème est équivalent à trouver le minimum de $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ sous la contrainte $g = x^4 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

(b) On utilisera la méthode des *multiplicateurs de Lagrange* pour résoudre ce problème. Cette méthode dit que la (les) valeur(s) minimale(s) ou maximale(s) d'une fonction $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ vérifient l'équation $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$ où $\bigtriangledown f = (f_x, f_y, f_z)$ et $\bigtriangledown g = (g_x, g_y, g_z)$ sont les dérivées partielles de f et g respectivement.

Utiliser cette méthode afin de transformer le problème initial à un système d'équations dans $k[\lambda, x, y, z]$.

(c) Utiliser la théorie d'élimination pour résoudre le problème initial.

Question 2

On considère S la surface parametrée par

$$\begin{aligned} x &= uv \\ y &= uv^2 \\ z &= u^2. \end{aligned}$$

(a) Trouver l'équation de la plus petite variété V qui contient S.

(b) Montrer que $(0, 1, 0) \in V$ mais que $(0, 1, 0) \notin S$.

(c) Montrer que les points de V qui ne sont pas dans S sont :

$$V \setminus S = \{(0, b, 0) \in \mathbb{C}^3 | b \neq 0\}.$$

Question 3

On considère l'idéal
$$I = \langle x^3 - yz^2, y^4 - x^2yz\rangle \subset k[x, y, z],$$
où k est algébriquement clos.

(a) Calculer une base de $(LT(I))$ pour l'ordre `deglex`.

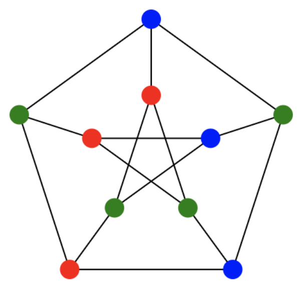
(b) Donner la liste de tous les monômes de degré $s \leq 10$ qui ne sont pas dans $(LT(I))$ pour l'ordre `deglex`.

(c) Calculer la fonction de Hilbert de $LT(I)$.

(d) Quelle est la dimension de la variété affine définie par l'idéal I ?

Question 4

Un graphe non-orienté est dit 3-*colorable* lorsque on peut colorer ses sommets avec 3 couleurs en sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Voici un exemple de 3-coloration d'un graphe :



Soit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ une racine cubique de l'unité (ç.-à-d. $\zeta^3 = 1$). On représente par $1, \zeta$ et ζ^2 les trois couleurs distincts tandis que les n sommets du graphe G sont représentés par n variables $x_1, \ldots, x_n$. Pendant le processus de coloration, chaque sommet du graphe sera assigné une parmi les trois couleurs. Ceci peut être représenté par les n équations

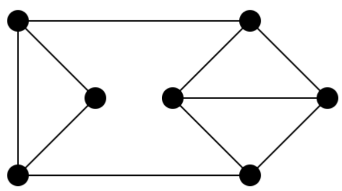
$$x_i^3 = 1, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1}$$

(a) Montrer que si deux sommets i et j, $i \neq j$ sont connectés par une arête alors il faut que
$$x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0. \tag{2}$$

On considère l'idéal I engendré par les 3 polynômes décrits par l'équation (1) et les polynômes de l'équation (2) pour les i et j, $i \neq j$ pour lesquels il existe une arête entre les sommets i et j.

(b) Prouver qu'à chaque point de la variété de I correspond une 3-coloration du graphe G.

(c) À l'aide d'une base de Gröbner, donner une 3-coloration du graphe ci-dessous.



(d) Combien de colorations différentes existent-ils pour ce graphe ?