Интерполяция и приближение функций

Постановка задачи

Одной из основных задач численного анализа является задача об интерполяции функций. Часто требуется восстановить функцию $f(x)$ для всех значений x на отрезке $a \le x \le b$, если известны ее значения в некотором **конечном** числе точек этого отрезка. Эти значения могут быть найдены в результате наблюдений (измерений) в каком-то натурном эксперименте, либо в результате вычислений. Кроме того, может оказаться, что функция $f(x)$ задается формулой и вычисления ее значений по этой формуле очень трудоемки, поэтому желательно иметь для функции более простую (менее трудоемкую для вычислений) формулу, которая позволяла бы находить приближенное значение рассматриваемой функции с требуемой точностью в любой точке отрезка. В результате возникает следующая математическая задача.

Пусть на отрезке задана сетка $\omega = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$ и в ее узлах заданы значения функции y(x), равные $y(x_0) = y_0, ..., y(x_i) = y_i, \dots , y(x_n) = y_n$. Требуется построить **интерполянту** — функцию $f(x)$, совпадающую с функцией y(x) в узлах сетки:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, ..., n. \quad (1)$$

Основная цель интерполяции — получить быстрый (экономичный) алгоритм вычисления значений $f(x)$ для значений x, не содержащихся в таблице данных.

Интерполирующие функции $f(x)$, как правило, строятся в виде линейных комбинаций некоторых элементарных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \text{ где}$$

$\{\Phi_k(x)\}$ — фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, ..., C_n$ — не определенные пока коэффициенты.

Из условий (1) получим систему n + 1 уравнений относительно коэффициентов $\{C_k\}$

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x_i) = y_i, \text{ где } i = 0, 1, ..., n.$$

Предположим, что система функций $\Phi_k(x)$ такова, что при любом выборе узлов $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ отличен от нуля определитель системы:

$$\Delta(\Phi) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & ... & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & ... & \Phi_n(x_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & ... & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

Тогда по заданным y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) однозначно определяются коэффициенты C_k ($k = 0, 1, \dots , n$). В качестве системы линейно независимых функций $\{\Phi_k(x)\}$ чаще всего выбирают: степенные функции $\Phi_k(x) = x^k$ (в этом случае $f = P_n(x)$ — полином степени n).

Итак, будем искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k, \quad (2)$$

где C_k — неопределенные коэффициенты. Полагая $f(x_i) = y_i$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &C_0 + C_1 x_0 + \ldots + C_n {x_0}^n = y_0 \\ &C_0 + C_1 x_1 + \ldots + C_n {x_1}^n = y_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_0 + C_1 x_n + \ldots + C_n {x_n}^n = y_n \end{aligned}$$

Определителем этой системы является отличный от нуля определитель Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \ldots {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots {x_1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots {x_n}^n \end{vmatrix} = \prod_{n \ge k > m \ge 0} (x_k - x_m) \ne 0$$

Отсюда следует, что интерполяционный полином (2) существует и единственен (форм записи его существует много). В качестве базиса $\{\Phi_k(x)\}$ мы взяли базис из одночленов 1, x, x^2, ..., x^n.

Метод решения задачи, при котором коэффициенты C_i находятся из решения системы (2) называется методом **неопределенных коэффициентов**.

Однако практическое построение интерполяционного полинома таким образом мало эффективно. Непосредственное нахождение коэффициентов C_i при решении (2) приводит к большим погрешностям, поэтому на практике применяют другие формы записи многочлена.

Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Определим

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases} \quad \text{i, j = 0, 1, …, n (символ Кронекера)}$$

Задача интерполирования будет решена, если мы построим такие многочлены $\Phi_i(x)$ степени не выше n, что

$$\Phi_i(x_j) = \delta_i^j, \text{ i, j = 0, 1, …, n}$$

Тогда полином

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x)$$

будет искомым интерполяционным полиномом.

Действительно

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_i^j = y_j$$

P_n — полином степени n.

Так как $\Phi_i(x_j)=0, i \neq j$ обращается в 0 в n точках x_0, x_1, …, x_n (корни), то $\Phi_i(x)$ делится на $(x - x_j)$ $i \neq j$.

$$\Phi_i(x) = const \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j) = const(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)$$

Из условия $\Phi_i(x_i)=1, i=j$ находим, что

$$const = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

И тогда

$$\Phi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)},$$

тогда искомый многочлен имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = L_n(x)$$ — интерполяционный полином Лагранжа.

Частные случаи интерполяционного полинома Лагранжа

При n = 1имеем 2 узла и L_n — уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки.

$$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_o-x_1} + y_1 \frac{x-x_o}{x_1-x_0}$$

При n = 2 уравнение параболы, проходящей через 3 точки.

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$L_1(x)$ и $L_2(x)$, называют соответственно формулами линейной и квадратичной интерполяции.

Задание

Дана таблица значений функции $y = f(x)$:

x	y
321.0	2.50651
322.8	2.50893
324.2	2.51081
325.0	2.51188

Вычислить значение $f(323.5)$.