Итерационный метод решения систем линейных уравнений (Гаусс-Зейдель)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \tag{8.5}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \tag{8.6}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \tag{8.7}$$

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными (8.5), (8.6) и (8.7). Предположим, что $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, и перепишем систему в следующем виде:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \tag{8.32}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3), \tag{8.33}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2). \tag{8.34}$$

Теперь возьмем некоторое первое приближение к решению этой системы, обозначив его через x_1^0, x_2^0, x_3^0. Подставим это решение в (8.32) и вычислим новое значение x_1:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0).$$

Используя только что вычисленное значение $x_1^{(1)}$ и начальное значение x_3^0, вычислим из уравнения (8.33) новое значение x_2:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0).$$

Наконец, используя только что вычисленные значения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$, найдем из (8.34) новое значение x_3:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}).$$

Этим заканчивается первая итерация. Теперь можно заменить исходные значения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$ на $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ и вычислить следующее приближение. В общем случае k-е приближение определяется формулами

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}), \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}), \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}). \end{cases} \qquad (8.35)$$

Заметим, что текущие значения неизвестных сразу же используются для последующих вычислений и что, например, нельзя вычислять $x_2^{(k)}$, пока не получено $x_1^{(k)}$. Аналогично этому для вычисления $x_3^{(k)}$ необходимо сначала определить $x_1^{(k)}$ и $x_2^{(k)}$.

Только что описанный здесь метод известен как *итерационный метод Гаусса — Зейделя*. Этот метод исключительно удобен для использования на ЭЦВМ. Перед обобщением на случай n уравнений с n неизвестными и выводом условия сходимости метода рассмотрим простой численный пример

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 9, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что точное решение этой системы равно $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Положим $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$, как это обычно делается для начального приближения. Тогда, вычисляя согласно формулам

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2),$$

получаем следующее приближение:

$$x_1^{(1)} = 1,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{4}{3},$$

$$x_3^{(1)} = \frac{17}{15}.$$

Последовательные приближения, вычисленные каждый раз с точностью до четырех значащих цифр, приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Итерация	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	$0.1000\cdot10^1$	$0.1333\cdot10^1$	$0.1133\cdot10^1$
2	$0.1050\cdot10^1$	$0.9473\cdot10^0$	$0.9889\cdot10^0$
3	$0.9896\cdot10^0$	$0.1005\cdot10^1$	$0.9999\cdot10^0$
4	$0.1001\cdot10^1$	$0.9999\cdot10^0$	$0.1000\cdot10^1$
5	$0.1000\cdot10^1$	$0.1000\cdot10^1$	$0.1000\cdot10^1$

Рассмотрим теперь систему (8.13) из n уравнений с n неизвестными. Мы по-прежнему предполагаем, что диагональные коэффициенты a_{ij} отличны от нуля для всех i. Тогда k-е приближение к решению будет задаваться формулой

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{i,\,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,\,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots - a_{in}x_n^{(k-1)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все $x_i^{(k)}$ не станут достаточно близки к $x_i^{(k-1)}$. Критерий близости можно, например, задать в следующем виде:

$$M^{(k)} = \max|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon,$$

где определяется максимальное значение разности для всех i, а ε — некоторое положительное число. При выполнении критерия итерационный процесс следует остановить.

Сходимость метода

Теперь обратимся к вопросу сходимости метода. Перед обобщением на случай n уравнений подробно рассмотрим более простой пример — систему из двух уравнений. Запишем уравнения в виде

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1, \tag{8.36}$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2, \tag{8.37}$$

так что

$$x^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}y^{(k-1)}\right), \tag{8.38}$$

$$y^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x^{(k)}\right). \tag{8.39}$$

Если обозначить

$$\Delta x^{(k)} = x - x^{(k)},$$

$$\Delta y^{(k)} = y - y^{(k)},$$

то из (8.36) и (8.38) следует

$$\Delta x^{(k)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \Delta y^{(k-1)},$$

а из (8.37) и (8.39)

$$\Delta y^{(k)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \Delta x^{(k)}.$$

Сравнивая последние два уравнения, нетрудно получить, что

$$\Delta y^{(k)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \Delta y^{(k-1)}.$$

Аналогично

$$\Delta y^{(k-1)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \Delta y^{(k-2)},$$

так что

$$\Delta y^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^2 \Delta y^{(k-2)}.$$

Продолжая дальше таким же образом, получим

$$\Delta y^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}}\right)^{(k)} \Delta y^{(0)}.$$

Аналогично

$$\Delta x^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^{(k)} \Delta x^{(0)}.$$

Поэтому если

$$\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right| < 1, \tag{8.40}$$

то итерационный метод Гаусса — Зейделя сходится к решению уравнений (8.36) и (8.37).

Соотношение (8.40) можно удовлетворить, если

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}|, \\ |a_{22}| \geqslant |a_{21}|, \end{cases} \tag{8.41}$$

или если

$$\begin{cases} |a_{11}| \geqslant |a_{12}|, \\ |a_{22}| > |a_{21}|. \end{cases} \tag{8.42}$$

Иными словами, диагональные члены должны преобладать в уравнении, т. е. они должны быть по абсолютной

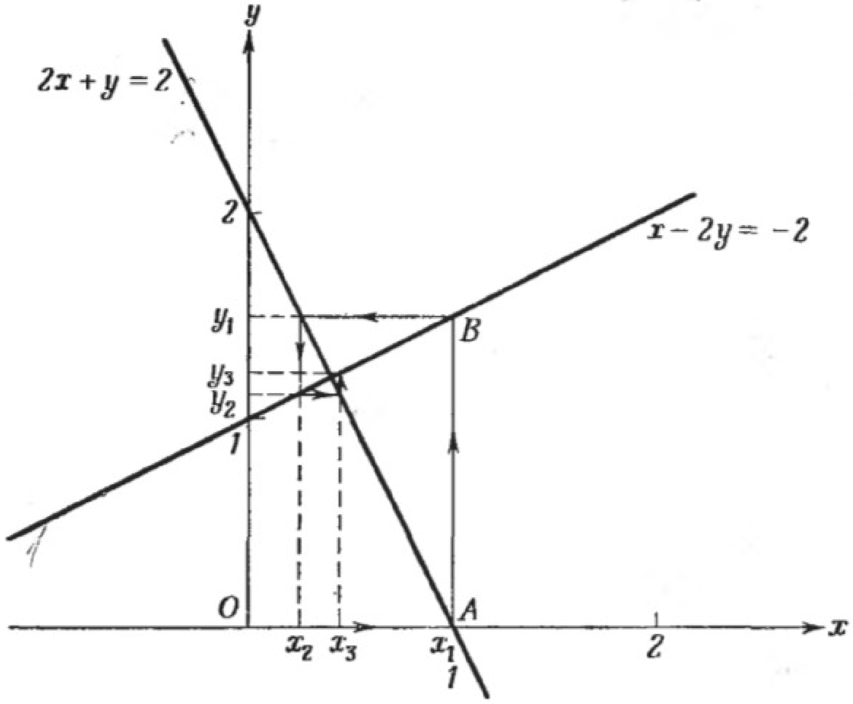

Рис. 8.10. Геометрическое представление итерационного метода Гаусса — Зейделя для случая сходимости.

величине не меньше, а по крайней мере в одном случае больше недиагональных членов.

Рассмотрим простой пример

$$2x + y = 2,$$
$$x - 2y = -2.$$

Полезно представить себе процесс решения геометрически. Мы начинаем искать решение от начала координат (0, 0). Так как при вычислении x мы сохраняем неизменным значение y, то геометрически это соответствует движению по горизонтали до пересечения ее с прямой, соответствующей первому уравнению ($2x + y = 2$). Затем, сохраняя неизменным только что найденное значение x, мы начинаем двигаться по вертикали, пока не пересечем прямую, соответствующую второму уравнению ($x - 2y = -2$). На рис. 8.10 такому процессу соответствует путь OAB. На этом заканчивается одна итерация.

Дальнейшие итерации производятся точно таким же образом; на рис. 8.10 их последовательность представлена горизонтальными и вертикальными линиями со стрелками.

На рис. 8.10 видно, что процесс сходится к решению системы уравнений.

Посмотрим теперь, что случиться, если мы поменяем местами уравнения. На рис. 8.11 видно, что процесс расходится.

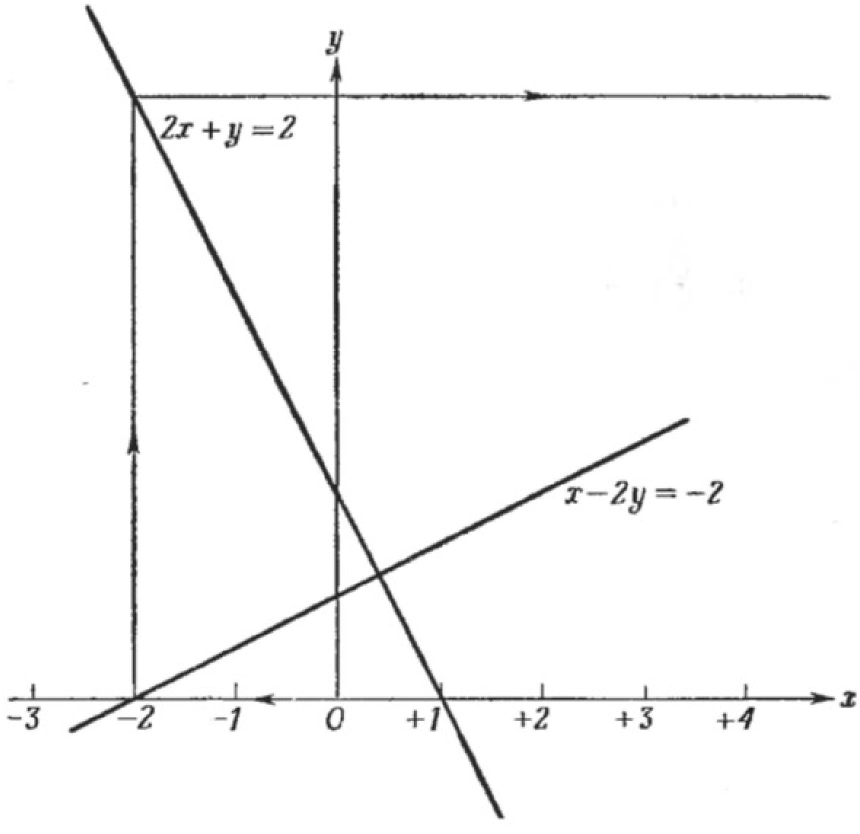

Рис. 8.11. Геометрическое представление итерационного метода Гаусса — Зейделя для случая расходимости.

Теперь мы приведем без доказательства достаточные условия сходимости итерационного метода Гаусса — Зейделя для системы из n уравнений с n неизвестными.

Если система уравнений неприводима[1]), если

$$|a_{ii}| \geqslant |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,\,i-1}| + |a_{i,\,i+1}| + \ldots + |a_{in}|$$

для всех i и если по крайней мере для одного i

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,\,i-1}| + |a_{i,\,i+1}| + \ldots + |a_{in}|,$$

[1]) Система уравнений называется неприводимой, если нельзя вычислить какие-либо неизвестные, решая меньше чем n уравнений.

то итерационный метод Гаусса — Зейделя сходится к решению системы уравнений (8.13).

Выполнение этих условий обеспечивает сходимость метода. Мы еще раз подчеркиваем, что эти условия ни в коем случае не являются необходимыми. Они выведены путем соответствующего обобщения условий (8.41) и (8.42).

8.7. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

Мы рассмотрели два основных метода решения систем линейных алгебраических уравнений — метод исключения и итерационный метод Гаусса — Зейделя. Естественно, возникает вопрос, какой из этих методов предпочтительнее.

Метод исключения имеет то преимущество, что он конечен и теоретически с его помощью можно решить любую невырожденную систему уравнений. Итерационный метод Гаусса — Зейделя сходится только для специальных систем уравнений. Для некоторых систем метод исключения является единственно возможным[1]).

Однако когда итерационный метод сходится, они обычно предпочтительнее.

1. Меньше операций, меньше затрат машинного времени.

2. Ошибки округления при итерационном методе меньше.

Многие системы уравнений, возникающие на практике, имеют среди коэффициентов большой процент нулей. В этих случаях итерационный метод – если он сходится в высшей степени предпочтительнее, так как при использовании метода исключения получается треугольная система уравнений, которая обычно не имеет нулей в качестве коэффициентов.

Наконец, некоторые системы уравнений настолько велики, что их не только нельзя точно решить методом исключения, но даже нельзя поместить целиком в оперативную память. Это затруднение можно обойти, используя итерационный метод.

Задание

Реализовать на C++ итерационный метод Гаусса-Зейделя. Размерности, коэффициенты и свободные члены должны быть получены из файла. Программа должна выводить на экран исходную систему и решение, если оно есть. Вывод должен быть в экспоненциальном виде.

Схема реализации метода

Проверить наличие 0-ей на диагонали. Если они есть, то необходимо переставить строки, стремясь при перестановке добиться выполнения достаточного условия сходимости (ДУС). Возможно, что для исходной системы такой перестановки нет. Тогда необходимо найти перестановку, при которой на диагонали не будет нулей. Если и такой перестановки нет, то выводим: «Систему этим методом решить нельзя». Важно выполнять поиск один раз! Результат поиска – перестановка (с выполнением ДУС или без него) или выяснение невозможности избавиться от 0-ей на диагонали. Процесс поиска не должен сопровождаться реальной перестановкой строк системы! Переставить их надо только перед непосредственным решением системы итерационным методом. Если для решаемой системы есть перестановка, для которой выполняется ДУС, программа ее должна обязательно найти!

Для исходной системы (не было 0-ей на диагонали) или системы после перестановки строк необходимо проверить выполнение ДУС. Если ДУС выполнено, то находим решение методом Гаусса-Зейделя. Если же ДУС не выполнено, то необходимо при решении системы методом Гаусса-Зейделя контролировать его сходимость. Для этого надо выполнить 10 итераций, находя каждый раз разность между максимумами текущей и предыдущей итерации. Если последние, как минимум 5 итераций, монотонно убывают, то считаем, что метод сходится, и пытаемся найти решение системы методом Гаусса-Зейделя без контроля. Иначе предполагаем, что метод расходится, о чем сообщаем, выводя на экран: «Вероятно, метод расходится».