# atp=

# ALM i praksis - Dag 1

1. og 2. november 2016

### Indhold – Blok C

- Livscyklus-produkter
  - Rationale via nytteoptimering
  - Eksempler
  - Øvelse

### Levetidsrisiko

- Hvad er sandsynligheden for at overleve sit "nest egg"?
- Usystematisk (individuel) og systematisk levetidsrisiko
- Levetidsmodeller
- Case study: SAINT-modellen i ATP og årets opdatering

# atp=

# Livscyklus

# Livscyklus

- I det forrige så vi på én (ind)betaling, der blev investeret med en fast andel af formuen i aktier over en række perioder
- I praksis vil der som oftest være flere indbetalinger fordelt over tid, og common sense siger at i denne situation skal aktieandelen aftage over tid
  - Dette er blandt andet tilfælde i de såkaldte *livscyklusprodukter*, hvor opspareren har en individuel investeringsprofil med en aftagende aktieandel frem mod pensionering
  - I livscyklusprodukter vil der ofte være mulighed for at tilknytte garantier fx mod negative afkast op mod pensionering, eller mod at opsparingen falder under et vist niveau
     det ser vi bort fra her!
- Hvad er rationalet for en aftagende aktieandel?

# Eksempler på livscyklusprodukter

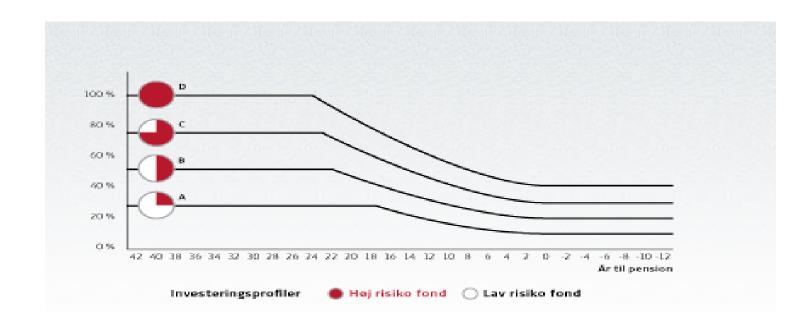
- Findes i mange varianter i hele verden
  - Der er store forskelle på hvad der opfattes som passende risiko for unge og gamle

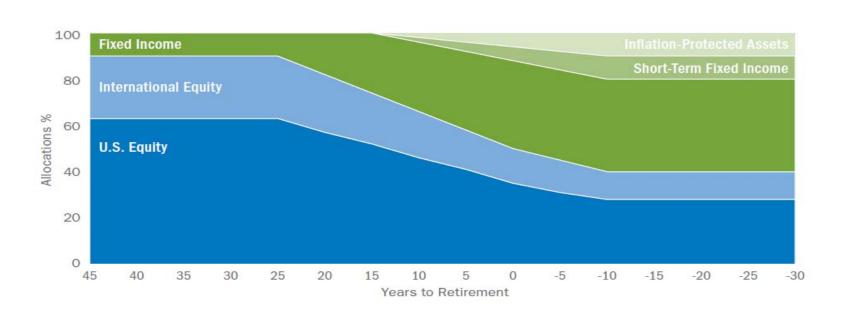
#### PFA Plus

- Kunden kan vælge mellem fire profiler, der adskiller sig ved andelen i 'Høj risiko fonden'
  - Profil A: Fra 25% til 10% i høj risiko fonden
  - Profil D: Fra 100% til 40% i høj risiko fonden

#### TIAA (Oprindeligt for lærere i USA)

- Fælles profil for alle
  - Aktieandelen nedtrappes fra 90% til 50% ved pensionering
  - Yderligere nedtrapning til 40% de første 10 år af udbetalingsfasen





ALM i praksis - Dag 1 1. og 2. november 2016 4

# Nytteoptimering – setup (Merton's problem)

- Antag, at vi er i en Black-Scholes verden
  - Bankkonto :  $dB_t = rB_t dt$
  - Aktieindeks:  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$
  - Parametre : rente (r), forventet afkast på aktier  $(\mu)$  og volatilitet på aktier  $(\sigma)$
- Du har en initial formue på  $X_0 = x_0$  til tid 0 og en investeringshorisont på T
  - Lad  $\pi(t)$  betegne aktieandelen til tid t, dvs. til tid t er  $\pi(t)X_t$  investeret i aktier og resten er i banken
  - Vi omtaler  $\pi$  som *investeringsstrategien*
  - Du ønsker at optimere din *nytte* på horisonten:  $sup_{\pi}E[u(X_T)]$
  - Løsningen til dette problem omtales som den optimale investeringsstrategi
- Antag yderligere, at du har *power utility:*  $u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  for x > 0
  - $\gamma > 0$  angiver risikoaversionen, jo højere  $\gamma$  des hårdere straffes tab og des mindre belønnes gevinst

# Nytteoptimering – løsning (Merton 1969, 1971)

- Antag, at der ikke indbetales yderligere på kontoen
  - Formue-dynamik:  $dX_t = (r + \pi(t)(\mu r))X_t dt + \sigma \pi(t)X_t dW_t$
  - Den optimale strategi er en *konstant* andel i aktier:  $\widehat{\pi}(t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu r}{\sigma^2}$ 
    - Andelen er stigende i merafkastet,  $\mu r$ , og aftagende i volatiliteten ,  $\sigma$ , og risikoaversionen,  $\gamma$ .
    - Det var denne situation vi så på tidligere
- Antag, at der løbende indbetales på kontoen
  - Formue-dynamik:  $dX_t = (r + \pi(t)(\mu r))X_tdt + c_tdt + \sigma\pi(t)X_tdW_t$ 
    - Til tid t indbetales der med (deterministisk) rate  $c_t$
  - Den optimale strategi er konstant i den *samlede* formue:  $\widehat{\pi}(t)X_t = \frac{1}{\gamma}\frac{\mu-r}{\sigma^2}\Big(X_t + \int_t^T e^{-(s-t)r}c_s ds\Big)$ 
    - Nutidsværdien af ens fremtidige indkomst (eller indbetalinger) kaldes human capital
    - Løsningen svarer til at man sælger sin fremtidige indkomst og investerer som om man har pengene i dag

Human capital

## Illustration

#### Den samlede formue udvikler sig som GBM

• 
$$Y_t = X_t + \int_t^T e^{-(s-t)r} c_s ds =$$
finansiel formue + HC

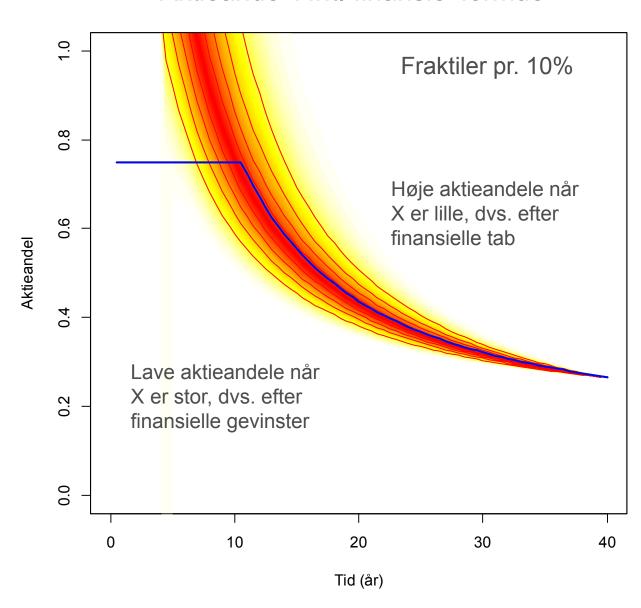
• 
$$Y_t = Y_0 exp\left\{\left(r + \alpha(\mu - r) - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\right)t + \alpha\sigma W_t\right\}, \alpha = \frac{1}{\gamma}\frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

• 
$$Y_0 = \int_0^T e^{-(s-t)r} c_s ds$$
 = Human Capial til tid 0

#### Illustration

- Aktieandel i fht. finansiel formue:  $\pi(t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu r}{\sigma^2} \frac{Y_t}{X_t} = \alpha \frac{Y_t}{X_t}$
- Antag: r = 1%,  $\mu = 4\%$ ,  $\sigma = 15\%$ , T = 40,  $c_t = 1$  for  $0 \le t \le T$
- Da er  $Y_0 = \frac{(1-e^{-40r})}{r} = 32.97$
- Figuren viser aktieandelen ( $\pi$ ) for  $\gamma = 5$ 
  - Den blå linje kunne bruges som profil = min(medianen, 75%)
- Baseret på 10.000 simulationer
  - Fraktilerne kan også let findes eksakt

#### Aktieandel i fht. finansiel formue



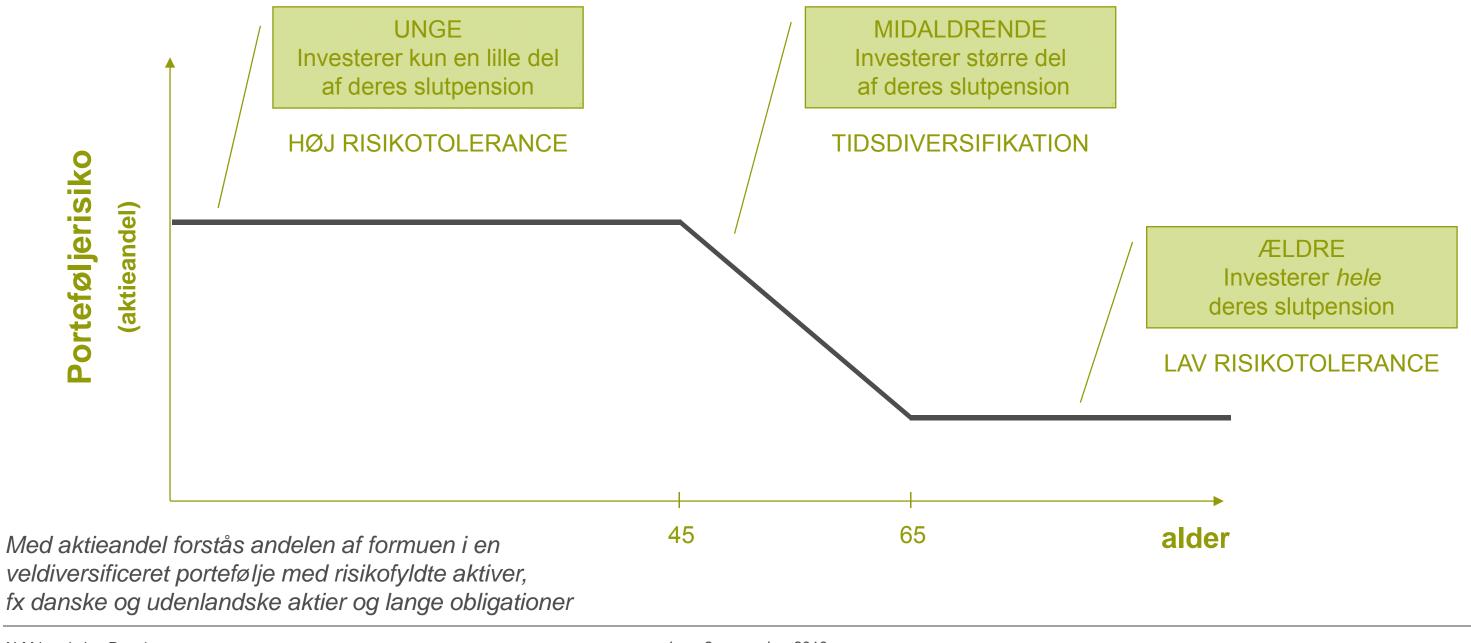
## Hvorfor skal aktieandelen aftage over tid?

- Den "klassiske" forklaring som her gennemgået
  - Det er optimalt i Merton's forstand, når værdien af fremtidige bidrag medtages
- Der er en lang investeringshorisont
  - Baserer sig på en antagelse om/tro på at aktier er mindre risikofyldte på lang sigt
  - J. Campbell & L. Viceira: "Strategic Asset Allocation"
  - Aktieafkast er tidsvarierende og "predictable" i større eller mindre grad
  - Mere uformel påstand: Aktier slår altid obligationer på passende lange horisonter!
- Andre nytte-funktioner eller optimeringskriterier
  - Fx rekursiv nytte, habit formation, real frem for nominel værdi, subsistens niveau etc.
  - Meget stor litteratur
  - Eksempel på "alternativ udledning" af aldersafhængig investeringsprofil: Pensionskurven

## Den Særlige Pensionsopsparing

- Den Særlige Pensionsopsparing (SP)
  - 1 pct. af bruttoløn indbetalt til SP fra 1998 til 2003 som dæmper på økonomien
  - Ultimo 2008 var der 48,6 mia. kr. i SP
  - Muligt at få udbetalt pengene siden 2009 for at booste økonomien
    - Medio 2015 blev SP helt lukket og de resterende penge blev udbetalt eller overført til andre konti
- ATP etablerede en elektronisk investeringsportal i 2005 kaldet Folkebørsen
  - Her kunne man vælge hvordan ens SP-midler skulle forvaltes
    - atpValg: fælles aldersafhængig investeringsprofil for alle (Pensionskurven)
    - medValg: ATP administrerer opsparingen på basis af individuel Pensionskurve og valgte fonde
    - fritValg : ATP forvalter op til 10 investeringsforeninger valgt på Folkebørsen, eller anden forvalter end ATP
  - Pensionskurven er beskrevet i Finana/Invest (2005)

# Pensionskurven – aldersafhængig investeringsprofil

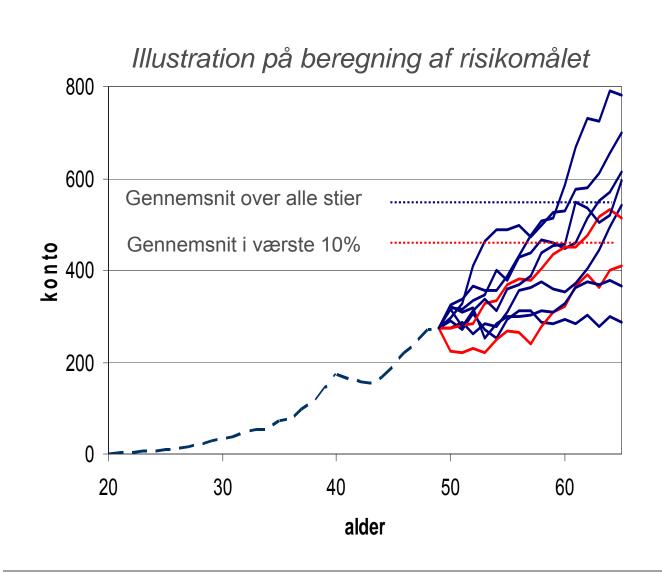


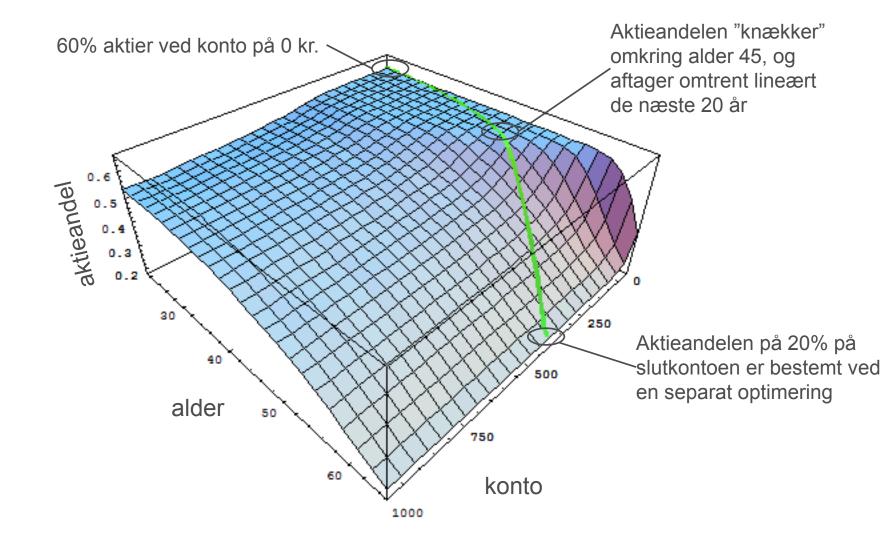
# Optimering for atpValg

- 1. Fastlæg slutaktieandelen (langsigtet risikotolerance)
  - Effektiv rand for pensionen i udbetalingsperioden
- 2. Fastlæg maksimal aktieandel (kortsigtet risikotolerance)
- 3. Beregn nedtrapningsprofilen (Pensionskurven)
  - Ideen er at holde risikoen på slutpensionen konstant over tid
    - $risikomål = \frac{gennemsnitlig\ slutkonto\ i\ 10\%\ scenarier\ med\ dårligst\ afkast\ næste\ år}{gennemsnitlig\ slutkonto\ over\ alle\ scenarier}$
  - Værdien af risikomålet ved pensionering er givet af slutaktieandelen fra trin 1\*
  - Herefter vælges den aktieandel, der gør at risikomålet har samme værdi ét år før pensionering
  - Herefter beregnes aktieandelen to år før pensionering og så fremdeles
  - Der kan dog aldrig vælges en aktieandel der overstiger den kortsigtede risikotolerance fra trin 2

# Beregning af Pensionskurven

Den optimale aktieandel afhænger af alder og konto - Pensionskurven er medianforløbet (grøn kurve)

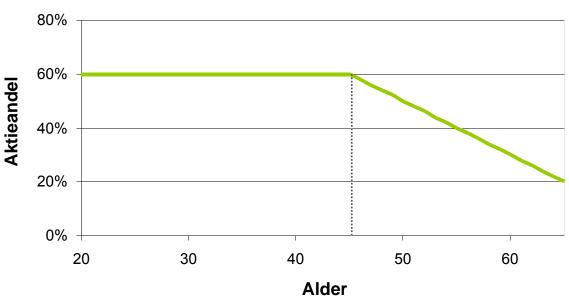


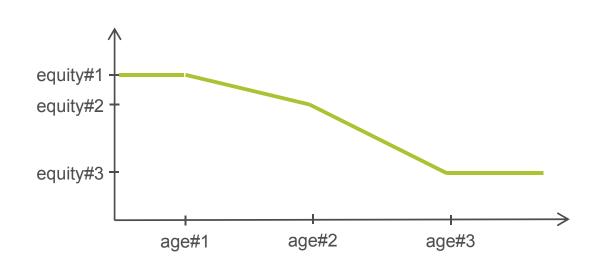


## **Øvelse**

- I medValg kunne medlemmerne bestemme deres egen pensionskurve ud fra forskellige spørgsmål til afdækning af deres risikotolerance og præference
- Sammensæt jeres egen "pensionskurve"
  - Sammensæt den portefølje af aktier og obligationer, som for en 20-årig giver
    - A. Det højeste medianafkast over en 45-års periode
    - B. Den højeste 5 pct. fraktil over en 45-års periode
  - Angiv for hver portefølje "jeres" pensionskurve i tre punkter
    - A. Angiv hvilke aldre kurven skal "knække". Kurven ekstrapoleres vandret før og efter hhv. den laveste og den højeste alder
    - B. Angiv hvilke aktieandel, som skal være gældende i hvert punkt

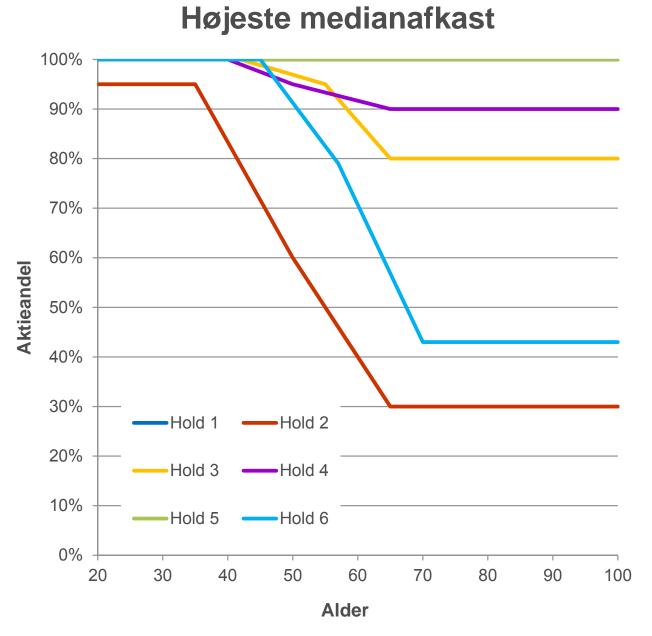
### Pensionskurven i atpValg



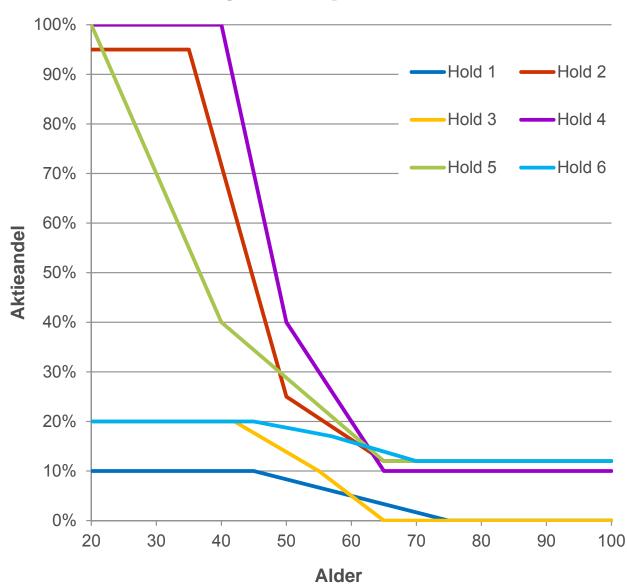


# Illustration af de valgte kurver





#### Højeste 5 pct. fraktil



# atp=

# Levetidsrisiko

## Levetidsrisiko

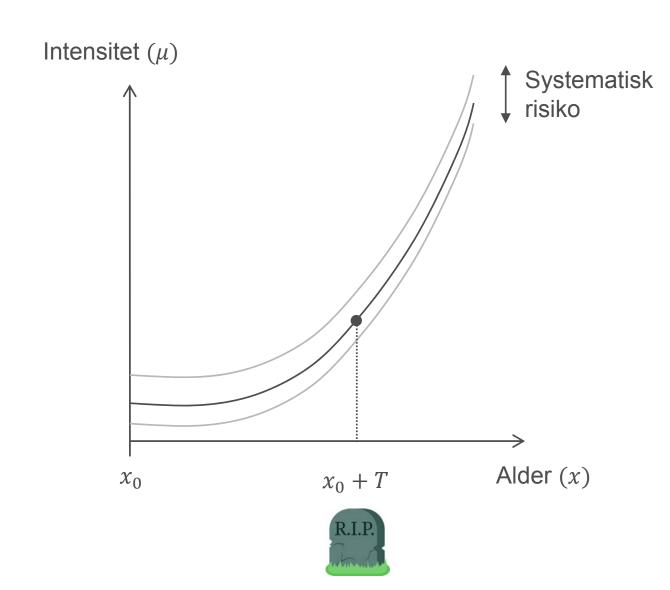
- Betragt en person i dag af alder  $x_0$ 
  - Antag at hans dødelighed i alder y er  $\mu(y)$
  - Lad T betegne hans (rest)levetid
  - Givet  $\mu$  gælder  $S(t) = P(T > t) = exp\left(-\int_{x_0}^{x_0+t} \mu(y)dy\right)$

#### Usystematisk risiko

- Den risiko der knytter sig til at dødstidspunktet er stokastisk (givet  $\mu$ )
- "Personlig risiko"

#### Systematisk risiko

- Den risiko der knytter sig til at selve dødeligheden i praksis er stokastisk
- "Selskabets risiko"

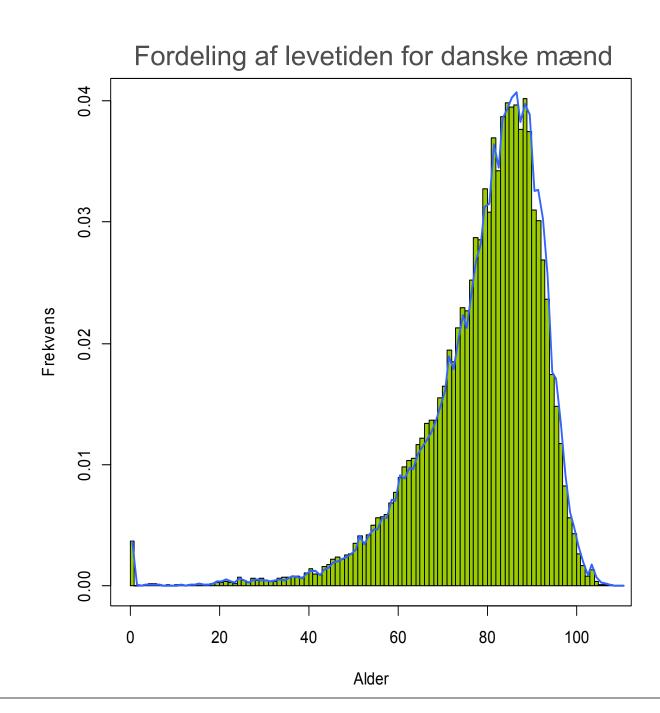


## Simulation af restlevetid

- Antag  $\mu$  er givet og er strengt positiv
  - Hvad er fordelingen af T og kan vi simulere fra den?
- Tætheden er givet ved

• 
$$p(t) = -\frac{dP(T>t)}{dt} = \mu(x_0 + t)exp\left(-\int_{x_0}^{x_0+t} \mu(y)dy\right)$$

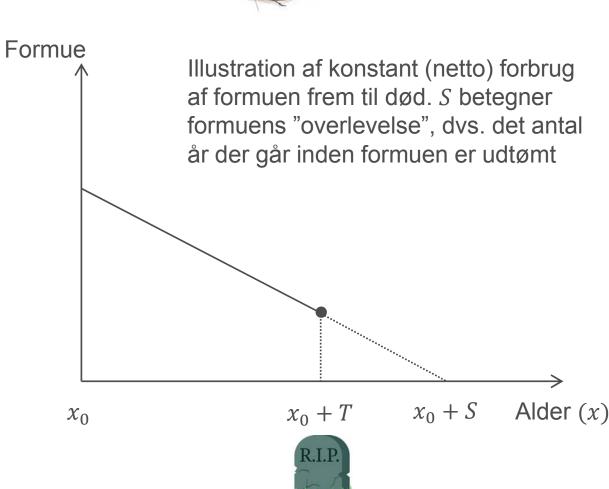
- Ikke så anvendeligt til at simulere fra
- Invertering af overlevelsesfunktionen
  - Hvis  $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$ , da er  $S^{-1}(U)$  fordelt som T
  - Algoritme
    - 1. Simuler u fra Uniform(0,1)
    - 2. Sæt T = t, hvor t løser  $\int_{x_0}^{x_0+t} \mu(y) dy = -log(u)$
  - Figuren viser histogram med empirisk tæthed overlejret
    - 50.000 simulationer med DK2015 dødelighed for mænd



# Hvad er sandsynligheden for at overleve sit "nest egg"?

- "Nest egg" betegner en opsparing med et bestemt formål – typisk en pensionsopsparing
- I mange lande er den herskende opfattelse at man skal finansiere sin egen pension af sin opsparing
  - I fx USA er der udbredt mistillid til annuiteter
  - Man diskuterer i stedet hvordan man skal investere sin formue og i hvilken hastighed man skal forbruge af den; se fx artikler og bøger af Moshe Milevsky
  - Et af de centrale spørgsmål bliver da at beregne sandsynligheden for at overleve sin opsparing, eller med andre ord "ruinsandsynligheden": P(T > S)
  - Man kunne også være interesseret i at beregne, hvor mange penge man "risikerer" at efterlade, eller hvor mange år man skal leve efter at formuen er brugt
  - Man interesserer sig generelt ikke for hvad der sker, hvis man overlever sin formue!







# Én mand og hans formue

### Et simpel eksempel

- 65-årig mand der går på pension i dag (tid 0)
  - Initial formue:  $F(0) = 1.000.000 \, kr$ .
- Populationsdødeligheden i 2015
  - Hans forventede restlevetid er E(T) = 17.9 år
- Han forbruger sin formue med en fast (netto) rate på c kr. om året
  - Formuedynamik:  $dF(t) = -1_{\{F(t)>0\}}cdt$
  - Formuen er opbrugt efter S = F(0)/c år
- Tabellen viser for forskellige valg af c
  - Ruinsandsynlighed : P(T > S)
  - Efterladt formue ved død: E(F(T))
  - Baseret på 100.000 simulationer

Årligt forbrug i kr. (c)	Antal år til formuen er opbrugt (S)	Ruinsand- synlighed, P(T > S)	Formue ved død, $E(F(T))$
10.000	100	0%	821.000
25.000	40	0%	552.000
50.000	20	44%	223.000
55.555	18	53%	190.000
60.000	16,7	58%	170.000
100.000	10	81%	85.000
200.000	5	92%	37.000

# Flere mænd og deres formuer

### En simpel tontine

- En gruppe 65-årige med samme dødelighed
  - Antal 65-årige til tid t: N(t)
  - Initial formue:  $F(0) = N(0) \times 1.000.000 \, kr$ .
- De modtager hver en (netto) rate på c kr. om året indtil deres død
  - Formuedynamik:  $dF(t) = -1_{\{F(t)>0\}}N(t)cdt$
  - Fonden løber tør hvis de *til sammen* lever længerede end F(0)/c år:  $c\sum_i T_i > F(0)$
- Tabellen viser for forskellige valg af  $c \circ N(0)$ 
  - Ruinsandsynlighed :  $P(F(\hat{T}) = 0)$
  - Efterladt formue ved død:  $E(F(\hat{T}))/N(0)$
  - hvor  $\hat{T} = max\{T_1, ..., T_{N(0)}\}$  (den længstlevende)

Årligt forbrug i kr. (c)	Antal 65- årige til tid 0, N(0)	Ruinsand- synlighed, $P(F(\widehat{T}) = 0)$	Efterladt formue, $E(F(\widehat{T}))/N(0)$
50.000	10	22%	119.000
60.000	10	69%	32.000
50.000	100	1%	103.000
60.000	100	95%	1.000
50.000	1000	0%	104.000
55.555	1000	39%	8.000
60.000	1000	100%	0

# Håndtering af levetidsrisiko i ugaranterede ordninger

- Ét individ kan ikke (effektivt) håndtere sin egen levetidsrisiko
  - Der vil enten være stor risiko for at overleve sin formue, eller stor risiko for at efterlade mange penge eller endda stor risiko for begge dele!
  - Med mindre man er meget rig og har et stort ønske om at efterlade sig penge, kan man ikke effektiv forbruge sin formue på egen hånd
  - I praksis vil man selvfølgelig kunne tilpasse sit forbrug undervejs og måske begynde at arbejde igen...
- Det er en (stor) fordel at dele sin levetidsrisiko med andre
  - Richard (1975) løser Merton's problem for 'an uncertain lived individual' og udleder i en teoretisk ramme ønsket om et livsforsikringsmarked (også selv om prisen ikke nødvendigvis er fair)
  - Grupper kan effektiv håndtere den usystematiske levetidsrisiko ...
  - ... men er stadig eksponeret for den systematiske levetidsrisiko
  - Selv i ugaranterede ordninger er det derfor af interesse at modellere levetiden så godt som muligt

# Levetiden stiger

#### • Hundrede års stigning i levetiden

- Ingen tegn på at stigningen er ved at stoppe
- Samme billede i alle andre udviklede lande

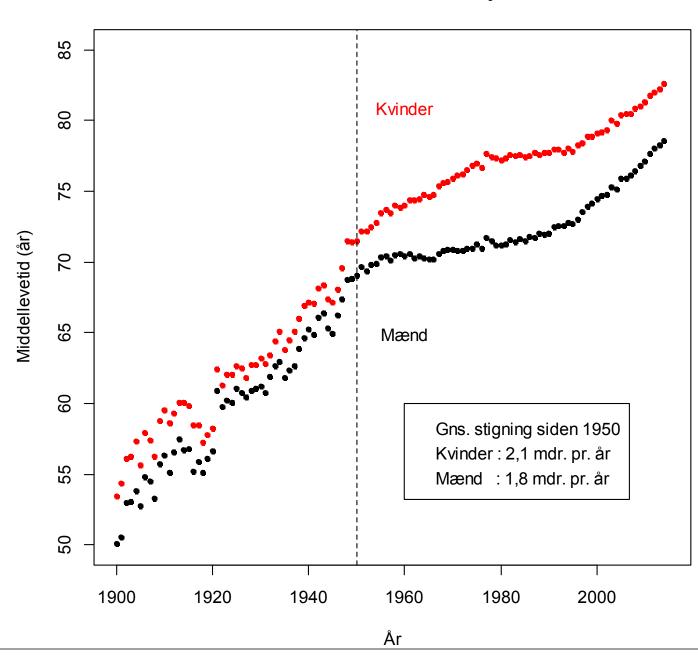
#### • Finanstilsynets levetidsbenchmark

- Siden 2011 har det været et krav at pensionskasser indregner *forventede* fremtidige levetidsforbedringer ved opgørelse af hensættelsen
- Finanstilsynets offentliggør årligt deres bud på de fremtidige forbedringer baseret på den såkaldte Lee-Carter model

#### I ATP anvendes SAINT-modellen

- SAINT-modellen har været anvendt siden 2008
- Benyttes til tarif, hensættelse og risikostyring

#### Dansk middellevetid for nyfødte



## Der findes et væld af levetidsmodeller og metoder

- Lee-Carter (1992) og varianter heraf
  - Log-bilineær model for aldersspefikke dødelighedsrater:  $\log m(x,t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{t,x}$
  - Kohorte-effekter tilføjet af Renshaw & Haberman (2006); model for flere populationer i Li & Lee (2005)
- Parametriske tidsrækkemodeller
  - Antager en given funktionel form, fx logistisk:  $m(x,t) = \frac{\exp(\theta_t^1 + \theta_t^2 x)}{1 + \exp(\theta_t^1 + \theta_t^2 x)}$
  - Lang række af artikler med modeller af denne type, fx Cairns et al. (2006, 2007, 2011)
- Kontinuert tidsmodeller, fx Dahl (2004), Dahl og Møller (2006), Bauer et al. (2010)
- ... og mange, mange flere metoder
  - frailty, kointegration, hidden markov models, cluster modeller, Compositional Data (CoDa), splines

### Lee-Carter modellen

#### Model introduceret af Lee & Carter (1992)

#### • Log-bilineær regression af dødsrater m

- $\log m(x,t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{t,x}$
- I den oprindelige artikel estimeres først a, og derefter (b, k) ved Singular Value Decomposition (SVD)

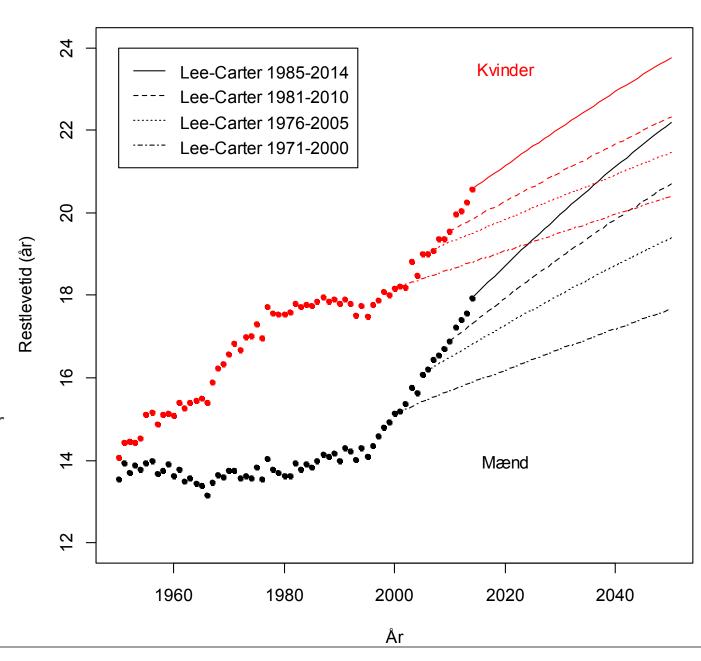
#### • Levetidsindekset modelleres ofte som random walk

- $k_t = k_{t-1} + \mu + \eta_t$
- hvor innovationerne er i.i.d.  $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$

#### • LC-modellen er simpel og meget udbredt

- Modellen forlænger historiske trends uden mulighed for at tage højde for ændrede forbedringsmønstre
- I Danmark har trenden varieret meget gennem tiden
- I dette tilfælde bliver modellens fremskrivning meget afhængig af den valgte estimationsperiode
- Finanstilsynet bruger 30 års rullende estimationsperiode

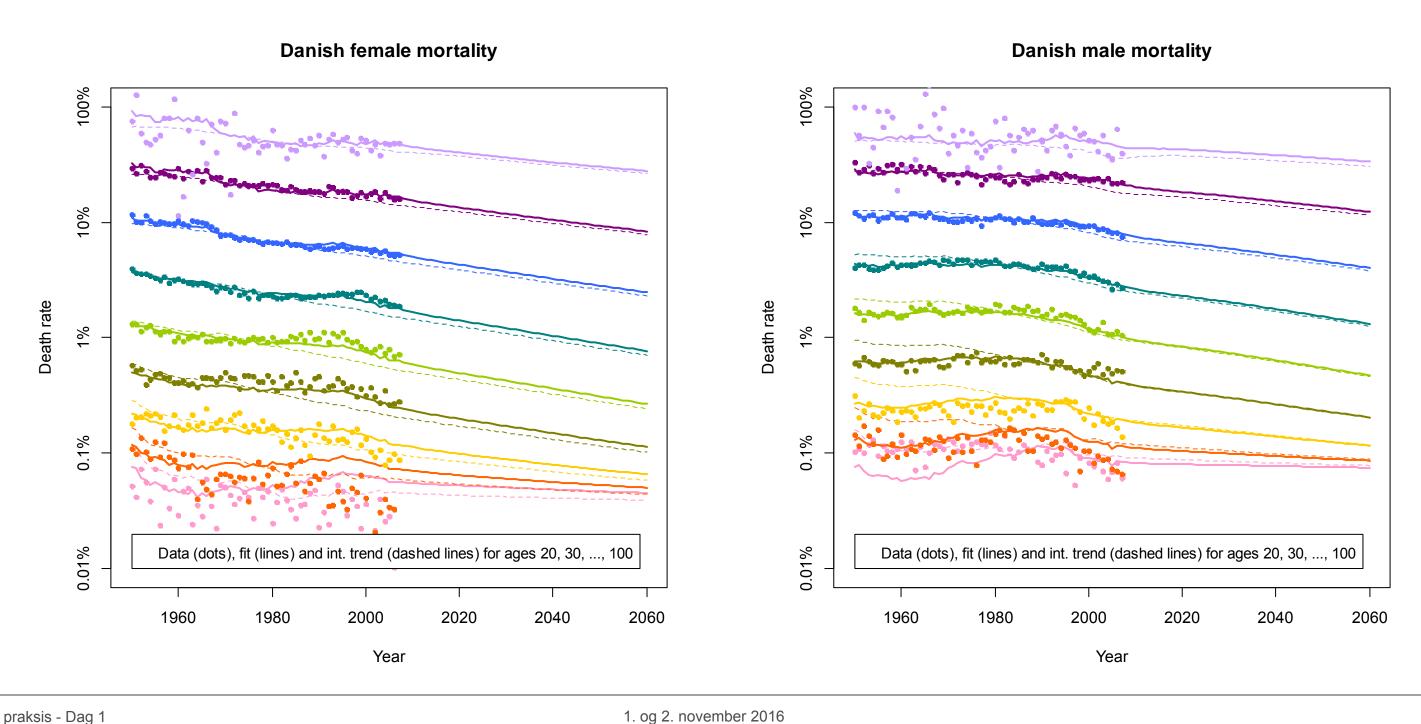
#### Dansk periodelevetid for 65-årige



# SAINT-modellen (Spread Adjusted InterNational Trend)

- SAINT udnytter at levetiden udvikler sig mere stabilt internationalt end i DK/ATP
  - Internationalt er levetiden siden 1950 steget støt år for år
  - I Danmark/ATP har der været lange perioder uden levetidsforbedringer
    - Dette gør fremskrivning baseret udelukkende på danske data meget følsom over for estimationsperioden
- Fremskrivning af levetiden i Danmark/ATP opdeles i to trin
  - 1. Fremskriv den internationale levetid baseret på en lang estimationsperiode, pt. 1950-2012
    - Der benyttes et stort internationalt datasæt bestående af 18 industrialiserede lande, primært Europa og USA
    - Der benyttes en såkaldt error correction model til at sikre sammenhæng mellem mænd og kvinders levetid
    - Der benyttes en frailty-model til at modellere udviklingen i de ældstes dødelighed
  - 2. Fremskriv "afstanden" (spreadet) mellem Danmark/ATP og den internationale trend
    - Det antages at Danmark/ATP f
      ølger den internationale trend på lang sigt

# SAINT giver en robust fremskrivning af dansk dødelighed



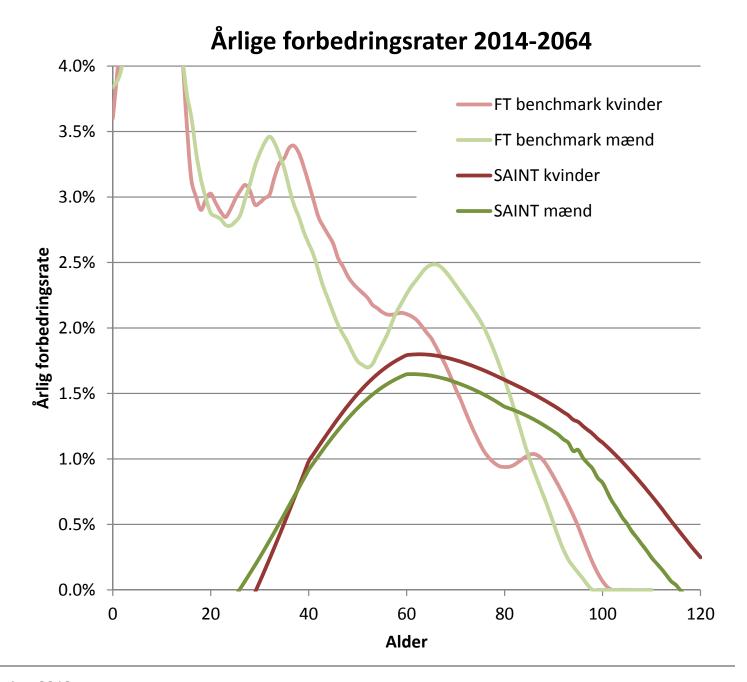
# Aldersspecifikke forbedringsrater

- Figuren viser de gennemsnitlige, årlige aldersspecifikke forbedringsrater over 50 år
  - Finanstilsynets (FSA) rater er meget ujævne
  - SAINT-forbedringsraterne er meget "glatte"
- Højere levetid for de ældre
  - Frailty-metodikken medfører højere fremtidige forbedringer for de ældre end LC metodikken
    - Specifikt, er SAINT-raterne større end Finanstilsynets rater for kvinder over alder 70 og for mænd over alder 80
    - Anvendes raterne på den samme udgangsdødelighed:

• 
$$\mu_{SAINT}(x,t) = \mu_{obs}(x,2014) \times (1 - R_{SAINT}(x))^{t-2014}$$

• 
$$\mu_{FSA}(x,t) = \mu_{obs}(x,2014) \times (1 - R_{FSA}(x))^{t-2014}$$

 medfører SAINT-forbedringerne en højere levetid for de økonomisk set vigtigste aldersgrupper



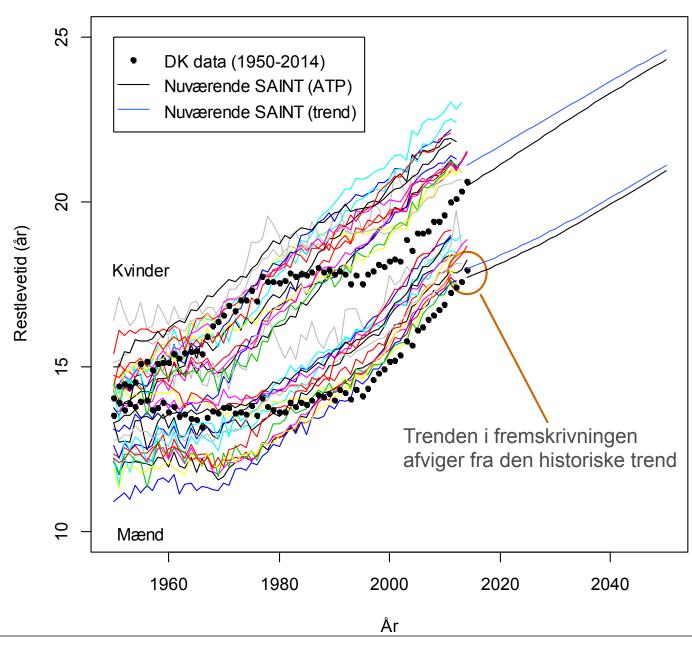
## Levetidsrisiko i garanterede ordninger

- Regulatorisk: Under Solvens 2 indgår levetidsrisikoen i solvenskapitalkravet
  - Generelt skal Solvens 2 stress repræsentere 0,5% hændelser på ét års sigt
  - Fortolkning: Reserverer kapital skal dække effekten af et skift i forventninger, der sker 1 ud af 200 år
    - Standardformlen i Solvens 2 benytter et uniformt stød på alle intensiteter på 20%
    - Videreudviklingen af den Partielle Interne Model fra Jarner og Møller (2013) svarer ca. til et uniformt stød på 10%
    - Alternativt kan man benytte en fuld Intern Model, hvor effekten simuleres direkte (i ATP svarer det til et stød på ca. 9%)
- Finansielt: Selskabet er eksponeret over for forskellen ml. modelleret og faktisk levetid
  - Uagtet hensættelse og kapitalkrav vil selskaber med garanterede, livslange ydelser over tid mærke effekten af flere end forventede udbetalinger
  - Der findes mange modeller for levetid uanset model er estimationsperioden meget afgørende
  - Uanset hvor omhyggelig man er i sin modellering vil virkeligheden (med meget stor sandsynlighed)
     udvikle sig anderledes end modellen det er derfor nødvendigt løbende at følge udviklingen
  - Case study: Årets levetidsopdatering i ATP

## Case study: Levetidsudviklingen i de enkelte lande

- Figuren viser udviklingen i den observerede levetid (periodelevetiden) for 65-årige i de 18 lande, der indgår i estimationsgrundlaget
  - Data understøtter grundideen i SAINT om at landene udvikler sig parallelt, samtidig med at der kan være langvarige nationale afvigelser fra trenden
  - ... men "knækket" for mænd ser ikke plausibelt ud
- Levetidsudviklingen i Danmark
  - Stagnerende levetid i perioden 1980-1995
  - Siden 1995 har Danmark oplevet stigninger svarende til dem de øvrige lande har haft i en længere periode
  - Der er ikke tegn på at Danmark er ved at indhente de øvrige lande

#### Landespecifik periodelevetid for 65-årige



## Case study: Ændring af SAINT-modellen

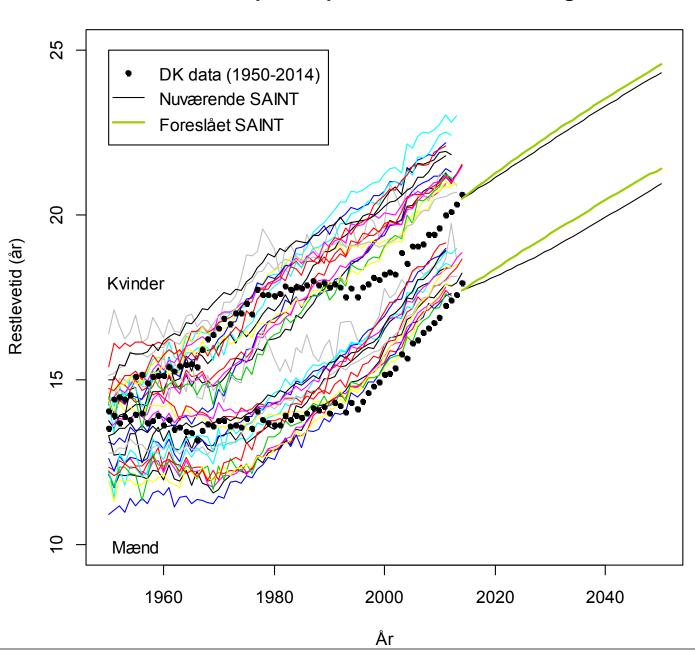
#### SAINT-modellen opdateres årligt

- Reestimation med nye international og danske data
- Det medfører en mindre justering af hensættelsen

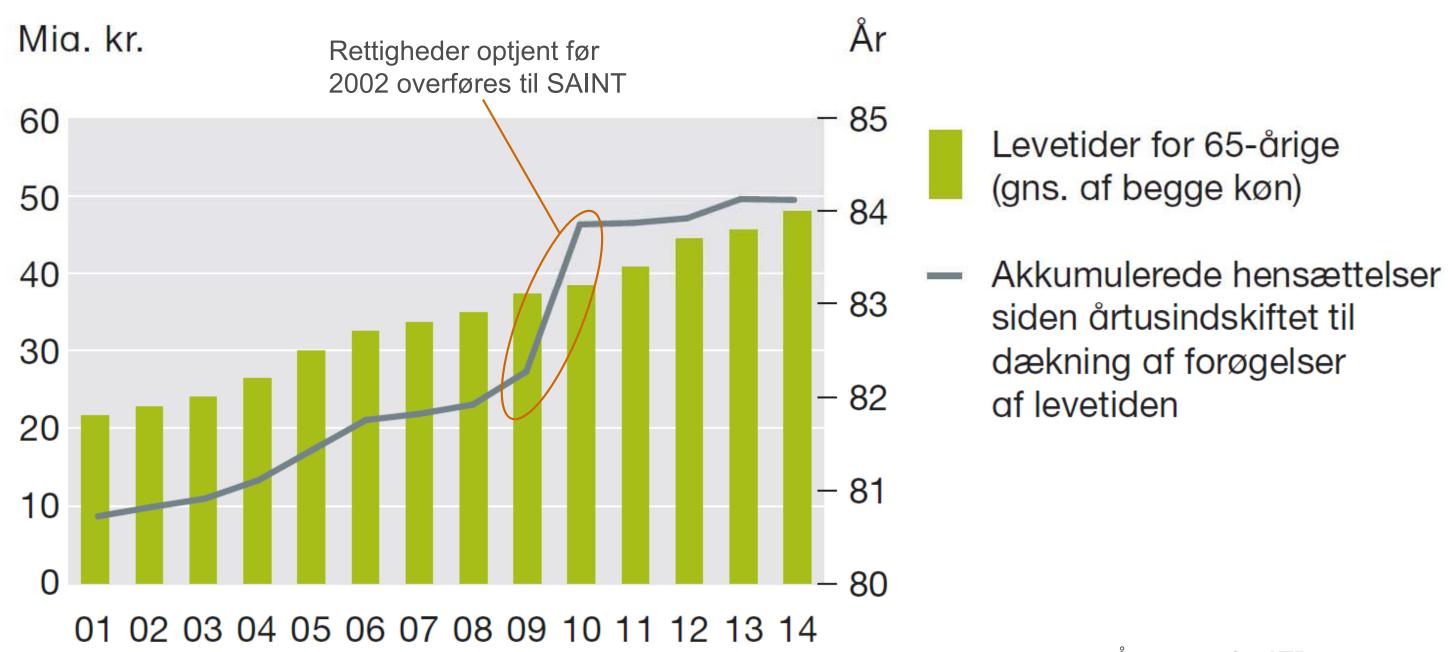
#### I 2016 blev SAINT-modellen revideret

- Omfattende analysearbejde, der udmøntede sig i en indstilling til bestyrelsen om at ændre modellen
- Indstillingen blev godkendt d. 21. juni 2016
- Ændringen medførte en opjustering af levetiden for 65-årige på ca. 2,5 måneder for kvinder og på ca. 5 måneder for mænd
  - Svarende til 1-2 års "ekstra" forbedringer
- Ændringen øgede hensættelsen med 10 mia. kr.
  - Garanterede ydelser (GY): 704 mia. kr. (august 2016)
  - Bonuspotentiale (BP) : 98 mia. kr. (august 2016)

#### Landespecifik periodelevetid for 65-årige



## Ekstra hensættelser som følge af stigning i levetid



Årsrapport for ATP 2014 p. 15

## SAINT – den korte historie

2007 2008 2011 2013 2016

Reserve baseret på årligt opdateret periodelevetid + "1/2 år"

SAINT-modellen udviklet som del af nyt pensionsprodukt Nyt pensionsprodukt lanceret:

Annuitet prissat på gældende markedsrente og årligt opdateret levetidsprognose fra SAINT Reserve for "gamle" pensionsrettigheder baseret på SAINTmodellen

Reservestigning på 18 mia. kr. SAINT-model benyttes til beregning af levetidsrisiko som del af Intern Model Revidering af de underliggende antagelser bag SAINT-modellen

ALM i praksis - Dag 1 1. og 2. november 2016 32