



# Bachelorprojekt i matematik-økonomi

Ask Kristoffersen

## Economic Scenario Generators

Vejleder: Silas Friby

8. juni 2018

## Abstract

In this project we will show that Economic Scenario Generators(ESG) is a very useful tool for examining different kind of financial markets. We will use the Geometric Brownian Motion model to simulate the price of the stock, and see that the model can not capture the large jumps in the stock prices. Furthermore we will introduce Monte Carlo simulation and show that it is a useful tool for pricing different kind of options. We will also introduce the Black-Scholes formula, and see that the Monte Carlo simulation method gets the same prices as the Black-Scholes formula. We will show that Monte carlo simulations also can be used to price Aasian options even though Asian option do not have an closed-form expression. Furthermore we will show that Black-Scholes is a useful estimate for the observed prices on the market of European options, but also some American options. In the last section of the paper we will show how a life insurance company risk manage their assets and liabilities. Furthermore we will show how the company can reduce their risk of insolvency by hedging with zero coupon bonds, but also that a zero coupon swap does not work for all portfolios.

# Indhold

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modelantagelser</b>	<b>4</b>
2.1	Wiener proces . . . . .	5
2.2	Overordnede model antagelser . . . . .	5
2.3	Fortolkning af antagelser . . . . .	6
2.4	Arbitragefrie pris . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Geometrisk Brownian Motion</b>	<b>7</b>
3.1	Aktieprisen og dens egenskaber i vores model . . . . .	7
3.2	Fordelinger for aktiepriserne . . . . .	8
3.3	Maximum likelihood estimatorer . . . . .	9
3.4	Kontrol af antagelser på observerede priser på markedet . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Monte Carlo Simulation</b>	<b>12</b>
4.1	Forskellige metoder til Monte carlo simulation . . . . .	12
4.2	Simulation af aktier . . . . .	14
4.3	Simulation af Maximum Likelihood estimatorerne . . . . .	15
4.4	Variansreduktion . . . . .	15
4.5	Monte Carlo simulation af Europæisk option . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Prisfastsættelse af optioner</b>	<b>17</b>
5.1	Black-Scholes . . . . .	17
5.2	Prisfastsættelse ved Monte Carlo simulation . . . . .	18
5.3	Prisfastsættelse ved Black-Scholes . . . . .	20
5.4	Amerikanske Optioner . . . . .	21
5.5	Implied volatilitet . . . . .	22
5.6	Asiatiske optioner . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Asset Liability Management</b>	<b>24</b>
6.1	Vasicek rentemodel . . . . .	25
6.2	Investeringsmuligheder . . . . .	25
6.3	Simulation af aktiver . . . . .	26
6.4	Liability model . . . . .	28
6.5	Risiko for insolvens . . . . .	29
6.6	Nulkupon obligation hedging . . . . .	31
6.7	Nulkupon obligation swap hedge . . . . .	31
6.8	Fair pris og bonus rate . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Konklusion</b>	<b>34</b>
<b>8</b>	<b>Litteratur</b>	<b>35</b>

# 1 Indledning

Dette projekt er et praktisk orienteret projekt, hvor vi gennem Economic Scenario Generators(ESG) vil forsøge at efterligne og forudsige forskellige aktiver på det finansielle markeds udvikling og priser. En ESG, er en computerbaseret model, der gennem simulationer simluerer hvordan økonomiske variabler og det finansielle marked relaterer til hinanden.

ESG'en vi opbygger i projektet vil blandt andet blive brugt til at simulere udviklingen af aktier ved hjælp af en Geometrisk Brownian motion(GBM) model. Derudover vil ESG'en blive brugt til at prisfastsætte forskellige optioner, både ved hjælp af den kendte Black-Scholes model, men også ved at bruge en simulations metode der hedder Monte Carlo simulering. Til sidst vil vi undersøge en tilfældig pensionsvirksomhed, hvor vi vil kigge på risk management for denne. Dette vil vi gøre ved hjælp af en ESG, hvor vi vil simulere forskellige mulige investerings porteføljer af virksomhedens aktiver og prøve at minimere virksomhedens risiko for at blive insolvens. Dette vil vi blandt andet gøre ved at forsøge at hedge og dermed få en mindre sandsynlighed for at blive insolvens.

Før vi gør alt dette kræver det at vi har et godt grundlag at bygge vores ESG ud fra. Dette grundlag er vores modelantagelser. For at vi kan ramme virkeligheden godt, bliver vi nødt til at have styr på vores model antagelser først. Vores ESG vil bygge på Black-Scholes model, som er en model der bruges til at prisfastsætte europæiske optioner. Black-Scholes model bygger også på antagelsen om at aktiepriser følger en Geometrisk Brownian motion. Denne antagelse vil vi også kigge nærmere på og undersøge om dette er en god antagelse.

Til slut i projektet vil vi udvide vores ESG med stokastisk rente og ud fra artiklen *Risk analysis and valuation of life insurance contracts: Combining actuarial and financial approaches* af Stefan Graf, Alexander King og Jochen Russ, risk manage en pensionsvirksomheds Aktiver og passiver.

Hele projektet vil bygge på opgaver stillet af vejlederen Silas Friby og alle opgaver og grafer er gennemarbejdet med statistik programmet R.

## 2 Modelantagelser

En hver god finansiell model, bliver nød til at have nogen antagelser om virkeligheden. Målet med antagelserne er, at de kommer så tæt på virkeligheden som muligt, men samtidig gør det muligt, at sætte modellen op, inden for en matematisk ramme, som det er muligt at regne på. Dette er en fin balance, for modellen skal ramme virkeligheden så godt som muligt, men samtidig være mulig at regne på.

Der er ikke noget entydigt svar, på hvad der gør en model realistisk. En måde at teste det på er at kigge på observeret data fra virkeligheden, og se hvor tæt modellens forudsigelser rammer den observerede data. Black-Scholes modellen, som bruges til at prisfastsætte optioner, og som vil være grundstenen i dette projekt, er blevet så populær at alle bruger den til at prisfastsætte europæiske optioner. Men er modellen så god, fordi den har nogle gode modelantagelser, eller er den god, fordi alle bruger modellen til at forudsige virkeligheden og derved former virkeligheden sig efter modellen og ikke omvendt. For at finde ud af dette bliver man nødt til at kigge på data fra før modellen blev opfundet, for ellers ved man ikke om det er modellen, der er med til at forme markedets priser.

Vi vil igennem projektet løbende tilføje antagelser, så det passer til den givne situation, og der er nogle antagelser, som vil være gennemgående igennem hele projektet. Vi vil derfor starte for bunden og langsomt bygge op, og til sidst vil vi have en endelig model.

## 2.1 Wiener proces

For at forstå vores antagelser bliver vi nødt til at forstå hvad en Wiener proces er. En Wiener proces også kaldet en Brownian motion er en stokastisk proces, som både er en Gaussian proces og en Markov proces. Det vil sige at alle de endeligt dimensionelle fordelinger er normalt fordelte, og at det kun er den forrige observations værdi, der er relevant for den fremtidige bevægelse af Wiener processen. Dette vil specielt sige  $W_t$  er normalt fordelt. Derudover har en Wiener proces den egenskab at være alle steder kontinuert, men ingen steder differentiabel. En Wiener proces er defineret således:

### Definition af Wiener proces

En Wiener proces er en tidskontinuert stokastisk proces med følgende egenskaber

- 1)  $W(0) = 0$
- 2)  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$
- 3) Alle tidsskridt på ikke overlappende intervaller er uafhængige.
- 4)  $W(t)$  afhænger kontinuert af  $t$

I dette projekt vil vi bruge Wiener processen til, ved hjælp af en GBM, at approximere hvordan en aktie udvikler sig over tid. Da dette viser sig at passe godt med hvordan en aktie opfører sig i virkeligheden.

## 2.2 Overordnede model antagelser

Vi vil i projektet kigge på et finansielt marked, hvor vi antager at usikkerheden i markedet er modelleret af et filtreret sandsynlighedsrum med en Wiener proces  $(W(t))_{t \geq 0}$ . Sandsynlighedsrummet er givet ved:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$$

Hvor  $\Omega$  er udfaldsrummet,  $\mathcal{F}$  er en sigma algebra der repræsenterer alle de målelige begivenheder,  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq 0}$  er en filtration og  $P$  er et sandsynligheds mål. Vi tænker på sandsynligheds målet  $P$ , som målet for hvordan aktiverne opfører sig i den virkelige verden.

Vi antager at det eneste stokastiske er Wiener processen, og derfor er den eneste usikkerhed i modellen, hvordan Wiener processen opfører sig. Derfor har vi, at  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ , hvor  $\mathcal{F}_t^W$  er den naturlige filtrering af en Wiener proces, det vil sige, at vi kender alle tidligere punkter af filtreringen op til tidspunkt  $t$  og de er givet ved Wiener processen. Derfor har vi også at:

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s) : 0 < s < t\}$$

I den første del af projektet vil vi antage at markedet består af 2 aktiver, et risiko frit aktiv  $B$ , som vi tolker, som at have sine penge stående i banken, og et aktiv med risiko  $S$  som vi kan tolke som at investere sine penge i aktier. Dynamikkerne for aktiverne er under sandsynligheds målet  $P$  givet ved:

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{1}$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{2}$$

Hvor vi antager at  $r, \mu$  og  $\sigma$  er konstante og  $r, \mu \in \mathbb{R}$   $\sigma \in \mathbb{R}^+$ . En stokastisk proces med dynamik som  $S$  kaldes en Geometrisk Brownian Motion (GBM).  $r$  tolkes som renten,  $\mu$  tolkes som driften og  $\sigma$  tolkes som volatiliteten af den Geometriske Brownian Motion.

Det vil senere i opgaven blive vist, at prisen for aktien til tiden  $t$  for en GBM er givet ved:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \tag{3}$$

Vi antager derudover, at markedet er arbitragefrit og komplet. Hvilket medfører, at der eksisterer et unik ækvivalent martingal mål  $Q$ . Som vi kan tolke, som et mål der tager højde for markedets samlede

risiko profil. Dynamikken af banken er ikke ændret under  $Q$ , men dynamikken af aktierne under  $Q$  målet er givet ved:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t) \quad (4)$$

Vi ser, at det eneste der er ændret, er at driften  $\mu$  bliver skiftet ud med renten  $r$ . Dette vil vi ikke vise, men er et vigtigt resultat. Derudover er det ikke den samme Wiener proces, som under  $P$ .

Fra vores antagelse om et arbitragefrit og komplet marked, kan vi komme frem til en prisligning for et finansielt derivat. Hvis vi har et finansielt derivat med en fast udløbsdato  $T$ , der udbetaler  $g(S(T))$  til tiden  $T$ . Følger det fra antagelserne, at den arbitragefrie pris til tiden  $t$  er givet ved:

$$\Pi(t) = E^Q \left[ e^{-\int_t^T r du} g(S(T)) | \mathcal{F}_t \right] = e^{-r(T-t)} E^Q [g(S(T)) | S(t) = s] \quad (5)$$

Hvor  $E^Q$  er forventningen under  $Q$  målet. Det eneste stokastiske er indeholdt i aktien, da det eneste stokastiske er wienerprocessen, og derfor kan vi da den diskonterede rente er konstant givet vores antagelser, rykke renten ud fra forventningen. Derudover er det vi kender af filtreringen til tiden  $t$  er  $S(t)$  og derfor gælder det andet ulighedstegn.

## 2.3 Fortolkning af antagelser

Vi ser fra ligning (3) at vores antagelser giver, at aktieprisen altid er positiv og kontinuert. I den virkelige verden, giver det mening at aktieprisen altid er positiv, da en aktiepris på 0 vil betyde at ingen vil købe aktien. Det vil ikke give mening, at aktien bliver negativ og dem som ejer aktierne skal betale for at have dem. Derfor er det godt, at vores antagelser medfører en positiv aktiepris. At aktieprisen er kontinuert er måske ikke rigtigt matematisk, men da vi tager små tidsskridt  $dt$  i stedet for store diskrete skridt, siger vi, at det er kontinuert. Kontinuerte aktiepriser giver mening, da aktiepriserne ændrer sig konstant i forhold til hvordan der bliver handlet.

Når vi antager, at et marked er arbitragefrit, betyder det, at man ikke kan tjene penge, uden at påtage sig nogen risiko. Det giver god mening, at antage at der ikke er nogen arbitrage i markedet, for hvis man kunne tjene sikre penge, var der nogen, der ville have opdaget det og udnyttet det. Vi har dog set eksempler på markeder i den virkelige verden, hvor der har været arbitrage, som fx på markedet for odds på sport. At vi antager, at markedet er komplet, betyder at man kan handle alle varer med hinanden enten direkte eller indirekte. Dette er for det meste en god antagelse for virkeligheden da der er et marked for de fleste varer, men antagelsen er ikke altid god. Et komplet marked betyder at for alle steder og tidspunkter vil der være et marked for en varer. Dog kan man sagtens forestille sig steder og tidspunkter hvor der ikke er et marked for en varer. I en ørken kunne man f.eks. forestille sig at der ikke er et marked for en regnfrakke, eller at der ikke er et marked for shorts på nordpolen.

Når vi skal prisfastsætte finansielle derivater ved ligning (5), så prisfastsætter vi under vores  $Q$ -mål og ikke vores  $P$  mål, som er et mål for den virkelige verden. Hvis man skulle prisfastsætte under  $P$  målet og tog  $P$  forventningen ville man få det forventede afkast 50, da det ville være afkastet ganget med sandsynligheden for udfaldet. Når man prisfastsætter skal man tage højde for risikoprofilen i markedet og derfor bruger vi  $Q$  målet. For at forklare dette ser vi på et møntkasteksempel:

Hvis man spiller plat eller krone og antager at der er 50 procent chance for at vinde 100kr og 50 procent risiko for at have 0kr, hvor meget ville man så betale for at spille med. Svaret kommer an på hvilken risikoprofil man har. Hvis man er risikoelskende vil man betale mere end 50kr for at være med i spillet, hvis man er risikoavers vil man betale mindre end 50kr, mens hvis man er risikoneutral vil man betale netop 50kr. Det er her at  $Q$  målet kommer ind, da det tager højde for hvilken risikoprofil der er i markedet.

## 2.4 Arbitragefrie pris

For bedre at kunne forstå hvad den arbitragefrie pris er og hvordan P og Q målet fungerer, vil vi kort kigge på 4 tilfælde for den arbitragefrie pris.

Det første tilfælde er når alt er kendt i vores model og der ikke er noget stokastisk. Dette vil svare til at man kendte renten og så lagde sine penge i banken og vidste hvor meget man ville få over en tidsperiode. Det vil i dette tilfælde sige at den arbitragefrie til tiden  $t$  lig med det diskonteret pengestrøm.

Det andet tilfælde er det tilfælde vi har i dette projekt. Her antager vi at renten er konstant, men at aktieværdien er stokastisk. I dette tilfælde er den arbitragefrie pris til tiden  $t$  lig med det diskonteret forventet pengestrøm under Q målet.

I det tredje tilfælde er både renten og aktieprisen stokastiske, Derimod har vi at alle i markedet har en risikoneutral risikoprofil. I dette tilfælde vil den arbitragefrie pris til tiden  $t$  være den forventede diskonteret pengestrøm i markedet til tiden  $t$  under P målet. Dette skyldes at i dette tilfælde behøver man ikke tage højde for risikoprofilen.

I det sidste tilfælde, har vi igen både en stokastisk rente og en stokastisk aktiepris. Men i dette tilfælde tager vi højde for markedets risikoprofil og derfor er den arbitragefrie pris til tiden  $t$  lig med den forventede pengestrøm til tiden  $t$  under Q målet.

I dette projekt vil vi oftest være i tilfælde 2, hvor vi har stokastisk aktiepris, og en konstant rente og volatilitet. I den sidste del af projektet vil vi introducere stokastisk rente ved Vassiceks rentemodell.

## 3 Geometrisk Brownian Motion

I denne del vil vi kigge nærmere på GBM. Vi vil kigge på hvilke egenskaber en GBM har, der gør at vores model bliver nemmere at regne på. Vi vil tjekke om GBM er en god antagelse for vores observerede aktiepriser  $\tilde{S}_{t_0}, \tilde{S}_{t_1}, \dots, \tilde{S}_{t_m}$ . Vi vil antage at alle vores observationer er lige lange:  $t_i - t_{i-1} = \Delta t$  for alle  $i = 1, \dots, m$

For at estimere vores aktieprismodell introducerer vi en statistisk model. Den statistiske model er givet ved  $(S, P)$ , hvor  $S$  er et observationsrum og  $P$  er et sæt af fordelinger, hvor  $P = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ .  $\Theta$  er et parameter set, som er en åben delmængde af  $\mathbb{R}$ . Vores model indeholder parametrene  $\mu$  og  $\sigma$ .

Forskellen på en sandsynlighedsmodell og en statistisk model er, at i en sandsynlighedsmodell har man kun en fordeling, mens i en statistisk model, kigger vi på et sæt af fordelinger. I en statistisk model er fordelingen og parametrene ukendte og det er dem man vil estimere, mens i en sandsynlighedsmodell, er de kendte. I vores tilfælde vil vi estimerer parametrene  $\mu \in \mathbb{R}$  og  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ .

$\mu$  er i vores GBM model et mål for driften af aktierne. Driften er et mål for ændringen af aktien i gennemsnit. Det vil sige, at hvis driften er negativ, vil aktieprisen i gennemsnit over den tidsperiode driften er estimeret i blive lavere, mens hvis den er positiv vil aktieprisen i gennemsnit blive højere.

$\sigma$  er i vores GBM model et mål for volatiliteten. Volatiliteten er et mål for hvor meget aktieprisen vil variere. Det vil sige, hvis  $\sigma$  er høj, vil aktieprisen variere meget og der vil være store udsving, mens hvis den er lav, vil der ikke være lige så store udsving i aktieprisen.

### 3.1 Aktieprisen og dens egenskaber i vores model

GBM er en stokastisk differentiell ligning givet ved (2). Vi vil vise at løsningen til den stokastiske differentielligning er (3). For at gøre dette skal man Itô calculus og specielt Itô's lemma. Itô's lemma kan man sige er den stokastiske kæderegell. Nu antager vi at  $S(t)$  er en strengt positiv løsning til (2)

og så sætter vi  $Y(t) = \log(S(t))$  og får fra Itô's lemma<sup>1</sup> at:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{1}{S(t)} dS(t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S(t)^2} \right) (dS)^2 \\ &= \frac{1}{S(t)} (\mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2} \right) \sigma^2 S(t)^2 dt \\ &= (\mu dt + \sigma dW(t)) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \end{aligned}$$

Hvor vi har brugt  $(dS)^2 = \sigma^2 S(t)^2 dt$ , Så skriver vi den nye stokastiske differentiel ligning om til Itô form<sup>2</sup>, men da højere siden ikke har  $Y(t)$  i sig, er den simpel og kan løses:

$$dY(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \Rightarrow Y(t) = Y(0) + \int_{t_0}^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_{t_0}^t \sigma dW(s) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \quad (6)$$

Da vi har at  $Y(t) = \log(S(t))$  og at  $\log(S(t)) - \log(S(0)) = \frac{\log(S(t))}{\log(S(0))}$ , får vi det ønskede resultat:

$$S(t) = S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

### 3.2 Fordelinger for aktiepriserne

En anden god egenskab ved vores model er, at vi kan finde fordelingen af vores aktiepriser. Det viser sig nemlig, at aktiepriserne er log-normal fordelt. For at aktieprisen skal være log-normalt fordelt skal logaritmen til aktieprisen være normalfordelt. Vi sætter  $X(t) = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W(t)$  så har vi:

$$S(t) = S(0) e^{X(t)} \Rightarrow \log(S(t)) = \log(S(0)) + X(t)$$

Da det eneste der er stokastisk er  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$  får vi at:

$$\log(S(t)) \sim \mathcal{N} \left( \log(S(0)) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (7)$$

Hvilket medfører at  $S(t)$  er log-normal fordelt.

Nu vil vi definere en ny variabel, som er log-afkastet for aktierne og den er givet ved  $\log(S(t_i)/S(t_{i-1}))$ . Denne nye variabel introducerer vi, da den viser sig at være normalfordelt med  $\log(S(t_i)/S(t_{i-1})) \sim \mathcal{N}((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ , hvilket er en god egenskab. Dette vil vi nu vise:

Vi starter med at kigge på log-afkastet og bruger vores udtryk for aktiepriserne under GBM:

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} \right) &= \log \left( \frac{S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t_i + \sigma W(t_i)}}{S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t_{i-1} + \sigma W(t_{i-1})}} \right) \\ &= (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t_i + \sigma W(t_i) - (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t_{i-1} - \sigma W(t_{i-1}) \\ &= (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)\Delta t + \sigma(W(t_i) - W(t_{i-1})) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>[2], side 52

<sup>2</sup>[2] side 49



Hvor vi har brugt vores antagelser om at observationerne er lige store og derfor er  $\Delta t = t_i - (t_{i-1})$ ,  $W(t_i) \sim \mathcal{N}(0, t_i)$  og  $W(t_{i-1}) \sim \mathcal{N}(0, t_{i-1})$ . Derfor har vi da Wiener processerne er det eneste stokastiske at:

$$\log\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right) \quad (8)$$

Det ønskede er dermed vist.

### 3.3 Maximum likelihood estimatorer

I dette afsnit vil vi finde en lukketform løsning for Maximum likelihood estimatorerne (MLE) for  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$  af  $\mu$  og  $\sigma$ . Til at gøre dette vil vi bruge fordelingen af log-afkastet.

Vi sætter  $a = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$ ,  $b = \sigma^2\Delta t$  og  $\xi_i = \log(S(t_i)/S(t_{i-1}))$ , vi bruger den kendte MLE for normal fordelingen og får:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{\log(S(T))/\log(S(0))}{n}$$

Dette skyldes at:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i &= \frac{\log(S(1))}{\log(S(0))} + \frac{\log(S(2))}{\log(S(1))} + \dots + \frac{\log(S(T))}{\log(S(T-1))} \\ &= \log(S(1)) - \log(S(0)) + \log(S(2)) - \log(S(1)) + \dots + \log(S(T)) - \log(S(T-1)) \\ &= \log(S(T)) - \log(S(0)) = \frac{\log(S(T))}{\log(S(0))} \end{aligned}$$

Vi bruger igen den kendte MLE for normal fordelingen og får:

$$\hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \hat{a})^2$$

Hermed får vi let at:

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{b}}{\Delta t} \quad (9)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \frac{\hat{a}}{\Delta t} \quad (10)$$

Nu vil vi finde variansen af  $\mu$  og  $\sigma$ . Dette vil vi gøre ved at bruge deltametode<sup>3</sup> på  $\hat{a}$  og  $\hat{b}$ . Da vi har at  $\hat{a}$  og  $\hat{b}$  er i.i.d har vi fra Cramérs sætning<sup>4</sup> at:

$$(\hat{a}, \hat{b}) \stackrel{as}{\sim} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \frac{1}{n}i^{-1}(\hat{a}_0, \hat{b}_0)\right)$$

Den inverse fisher information for normalfordelingen er givet ved<sup>5</sup>:

$$i^{-1}(\hat{a}_0, \hat{b}_0) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Nu definerer vi funktionen  $f: (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R})$  til at være:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\Delta t} + \frac{y}{2\Delta t}, \sqrt{\frac{y}{\Delta t}}\right)$$

<sup>3</sup>[6]. Sætning 5.15, side 184

<sup>4</sup>[6] Sætning 5.23, side 193

<sup>5</sup>[6] Sætning 5.23, side 113

Da denne funktion er differentiabel med:

$$Df(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} & \frac{1}{2\Delta t} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{b\Delta t}} \end{pmatrix}$$

Så vil vi bruge deltametoden da vi har at  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = f(\hat{a}, \hat{b})$  vi bruger deltametoden<sup>6</sup> og får følgende:

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = f(\hat{a}, \hat{b}) \sim \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}, \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\Delta t} + \frac{\sigma^4}{2} & \frac{\sigma^3}{2} \\ \frac{\sigma^3}{2} & \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

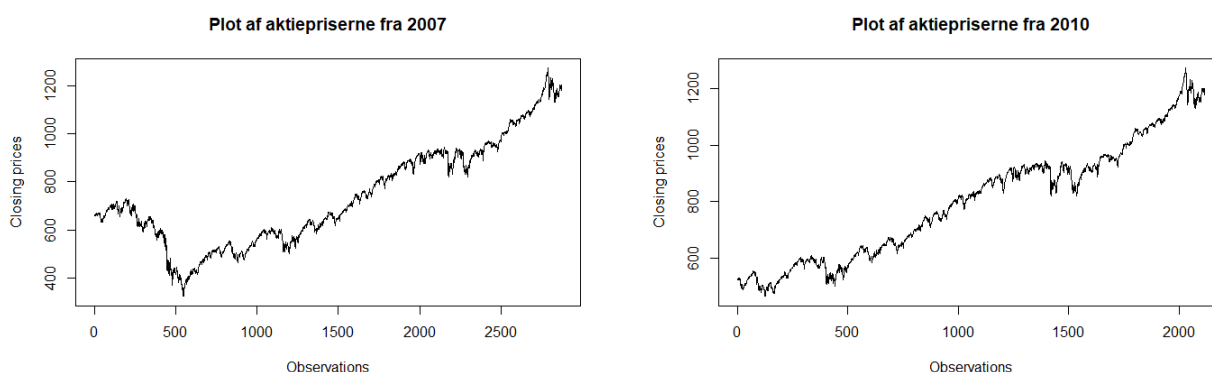
Hvor vi har at  $\mu$  og  $\sigma$  er de sande middelværdier. Hermed får vi at variansen af de 2 estimatorer er givet ved:

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sigma^2}{\Delta t} + \frac{\sigma^4}{2} \right) \quad (12)$$

$$Var(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{2n} \quad (13)$$

### 3.4 Kontrol af antagelser på observerede priser på markedet

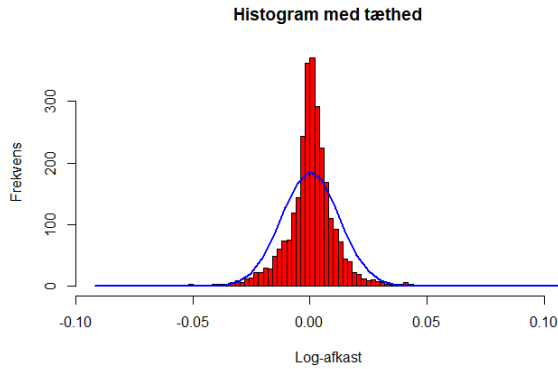
Vi vil nu kontrollere om vores antagelser om at GBM modellen er en god approximation af hvordan aktiepriserne bevæger sig. For at få et overblik over hvordan priserne bevæger sig har vi plottet aktiepriserne for S&P 100 indexet både fra 2007 til nu og fra 2010 til nu. Dataen er hentet fra r pakken quantmod.



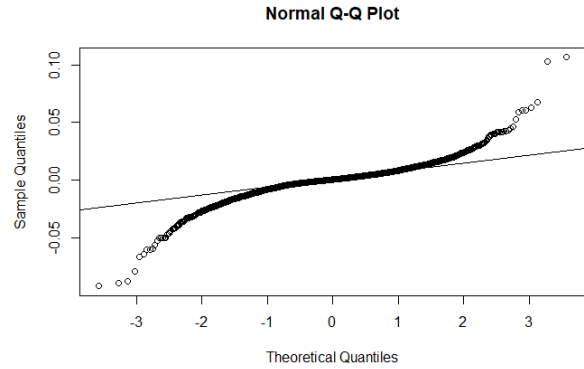
Som vi ser på plottet var der et stort dyk i aktiepriserne fra 2007 til 2010, dette skyldes finanskrisen. Derudover ser vi at aktiepriserne svinger en del og en gang i mellem er der nogen store spring. Umiddelbart kunne aktiepriserne godt ligne en GBM, men hvor godt passer GBM antagelsen. Dette vil vi kontrollere ved at kontrollere vores normalfordelings antagelser af log-afkastet. Hvis disse er normalfordelte kan vi gå ud fra at GBM modellen er en god model. Vi henter data fra Yahoo med pakken quantmod i R. Dataen vi henter på aktierne S&P 100.

Vi laver et histogram, for at tjekke om tætheden passer med normalfordelings antagelsen, derudover laver vi et qqplot:

<sup>6</sup>Statbog sætnign 5.15



(a) Histogram af log-afkastet af aktiepriserne med fittet normalfordelings tæthed



(b) qq-plot til kontrol af normalfordelings antagelse

Figur 1: Kontrol af normalfordelings antagelser

Vi ser på begge grafer at normalfordelingsantagelsen ikke er fejlfri. Dette skyldes at der ligger for meget sandsynlighed i halerne i forhold til hvad, der ville gøre hvis de var perfekt normalfordelte. Dette skyldes at der ligger en del værdi, som ligger langt ud fra det forventede. Det er svært at modellere netop disse store spring i aktiekursen med vores model. Da vi i vores model tager kontinuerte tidsskridt. En udvidelse af modellen kunne være at lave en model med diskrete skridt, som fx en jump model med en poisson proces, men dette vælger vi ikke gøre i dette projekt.

Selvom vores normalfordelingsantagelse ikke er fejlfri, fortsætter vi med antagelsen om, at aktiepriserne følger en GBM model. Vi vil nu estimere  $\mu$  og  $\sigma$  ud fra de teoretiske MLE, vi fandt tidligere. Derudover vil vi også forsøge, at estimere, ved at optimere loglikelihoodfunktionen numerisk. Loglikelihoodfunktionen er fundet ved, at tage minuslogaritmen til Likelihoodfunktionen. Loglikelihoodfunktionen er givet ved:

$$l(\mu, \sigma^2, \xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{n}{2} \log(\sigma^2 \Delta t) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^n \xi_i + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta t \quad (14)$$

Vi har estimeret fra årene 2007 og 2010 til 2018. Det har vi gjort for at se hvordan vores model opfører sig ved en krise, som finanskrisen. Vi har fået følgende værdier:

	2007-2018	2010-2018
MLE	0.0558954	0.1075392
Loglikelihood	0.0706637	0.1085179

Tabel 1: Estimation af  $\mu$

	2007-2018	2010-2018
MLE	0.1729435	0.1449143
Loglikelihood	0.1933052	0.1448849

Tabel 2: Estimation af  $\sigma$

Vi ser, at i de fleste tilfælde ligger begge estimationsmetoder tæt på hinanden. Estimerne ligger dog et stykke fra hinanden både for  $\mu$  og  $\sigma$  i estimerne fra 2007 af.

Vi ser at  $\mu$  bliver estimeret højere, når vi estimerer fra 2010 til 2018. Dette giver god mening, da der i finanskrisen er et stort dyk i aktiekursen, og derfor vil driften over hele perioden være mindre, da dette er et mål for, hvor meget aktiekursen stiger i gennemsnit.

Vi ser at estimatet for  $\sigma$  er markant mindre. Det giver god mening, da der er et stort udsving ved finanskrisen og derfor vil volatiliteten selvfølgelig også være højere, da der er større usikkerhed.

## 4 Monte Carlo Simulation

I denne del af projektet, vil vi kigge nærmere på Monte Carlo simulation. Monte Carlo simulation er en metode, til at estimere integraler. Metoden er bygget på store tals lov og bliver bedre jo flere simulationer man laver. Monte Carlo simulation kan bruges til at estimere forventninger, da forventninger er et integrale. Monte Carlo simulation bruges ved at simulere  $n$  forskellige i.i.d prøver af  $X$  og så sætte Monte Carlo estimatoren til gennemsnittet af de  $n$  prøver. Monte Carlo simulation er specielt interessant inden for matematisk finansiering, fordi den kan bruges til at estimere arbitragefri priser, da de er givet ved en  $Q$  forventning. Vi vil simulere forskellige stier af vores underliggende aktier ved hjælp af vores antagelse om en Geometrisk Brownian motion model, og dermed estimerer hvordan aktierne opfører sig.

Vi lader  $\tilde{S}_i = (\tilde{S}_{1,i}, \dots, \tilde{S}_{m,i})$  være en simuleret sti af aktiekursen ved tidspunktet  $t_1, \dots, t_m = T$ , givet ved en begyndelses aktie pris  $S_0$ . Vi antager derudover at tidsskridtne er lige store, sådan at  $t_1 = \Delta t, \dots, t_m = m\Delta t$ . Monte Carlo estimatoren  $\hat{\theta}$  for forventningen af den stokastiske variabel  $X$  findes ved følgende metode:

1. Simulér  $n$  uafhængige stier  $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n$
2. For hver sti udregn  $\tilde{\theta}_i = X(\tilde{S}_i | S_0)$
3. Udregn Monte Carlo estimatoren ved  $\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i$  Variansen af Monte Carlo kan approximeres til at være proportional til  $\frac{1}{n}$ . Dette skyldes at da  $\tilde{\theta}_i$  er i.i.d har vi fra Central limit theorem (CLT)<sup>7</sup> at:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i \stackrel{as}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2) \quad (15)$$

hvor  $\mu$  og  $\sigma^2$  er den faktiske middelværdi og varians af estimatoren.

Vi har at standard erroren er approximativt proportional med  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , det kommer direkte fra CLT, da standard deviation fra CLT er asymptotisk givet ved  $\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma$ .

Når man vil estimere, hvordan en aktiekurs vil opføre sig, vil man aldrig kunne estimere det helt præcist. Dette skyldes at man gør sig forskellige antagelser på virkeligheden, men derudover er der nogle andre fejl, når man arbejder statistisk. Et eksempel kan være en diskretiserings fejl. En diskretiserings fejl betyder, at man estimerer en kontinuert funktion med en diskret funktion.

En anden fejl ved generelt statistiske metoder er "sampling error", som betyder at når man tager en delmængde af et statistisk rum og modellerer denne delmængde og prøver at generaliserer sine konklusioner fra delmængden til hele det statistiske rum. Så vil der være en fejl, da det er umuligt at tage en fuldstændig repræsentativ delmængde af det statistiske rum.

### 4.1 Forskellige metoder til Monte carlo simulation

Nu vil vi kigge på 3 forskellige metoder, der simulerer vores stier i vores Monte Carlo simulation. Vi vil kigge på 2 metoder, der er brugbare og en der ikke er brugbar. Psuedokoden for de 3 metoder er givet således:

$\hat{S}_0 = 100$

Method A:

for  $i \in (1, \dots, n)$

---

<sup>7</sup>[7] side 87

$$Z = \text{rnorm}(1, 0, 1)$$

$$\Delta S = \mu \hat{S}_{i-1} \Delta t + \hat{S}_{i-1} \sigma \sqrt{\Delta t} Z$$

$$\hat{S}_i = \hat{S}_{i-1} + \Delta S,$$

Method B:

for  $i \in (1, \dots, n)$

$$Z = \text{rnorm}(1, 0, 1)$$

$$\hat{S}_i = \hat{S}_{i-1} \exp((\mu - 0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z),$$

Metode C:

for  $i \in (1, \dots, n)$

$$Z = \text{rnorm}(1, 0, 1)$$

$$\hat{S}_i = \hat{S}_0 \exp((\mu - 0.5\sigma^2)t_i + \sigma\sqrt{t_i}Z),$$

Hvor vi har estimeret  $W(t_i) - W(t_{i-1}) \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ <sup>8</sup> ved  $\sqrt{\Delta t}Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$  hvor  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Vi starter med at kigge på metode A og B. I Metode A vil man prøve at simulere ved hjælp af dynamikken i den underliggende stokastiske differentielle ligning. Denne metode kaldes også Eulers metode.

I metode B bruger vi løsningen til den stokastiske differentielle ligning til at simulere hver sti. Begge metoder kan bruges til at simulere aktiepriserne.

Dermed er metode A en metode til at approximere metode B med en diskret funktion og derfor vil der være en diskretiseringsfejl når man bruger metode A, men når  $\Delta t$  bliver mindre vil fejlen blive mindre. Dette skyldes at når vi gør  $\Delta t$  mindre, vil der være flere tidsskridt og derfor vil det blive tættere og tættere på en kontinuert funktion.

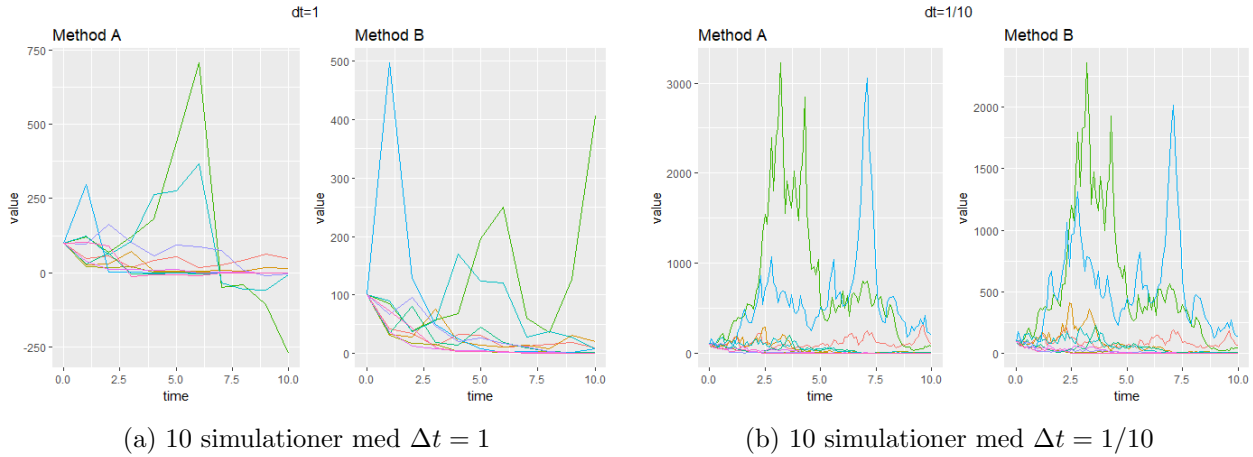
Metode C er en ikke brugbar metode til at simulere stier for aktieprisen. Der er flere fejl i metoden, da man bruger den samme startværdi for hvert step i stien, og derfor vil aktien ikke udvikle sig ud fra værdien før, men hele tiden ligge omkring startværdien. Derudover skal man i Monte Carlo simulation, bruge længden af tidsskridtet og i metode C bruger man i stedet, hvor langt man er fremme i tiden fra starttidspunktet. Hvilket vil gøre at aktiekursen bevæger sig i større intervaller, jo længere fremme i tiden, simulationen er.

---

<sup>8</sup>Rüdiger U. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer, 4. udgave, 2009. side 28

## 4.2 Simulation af aktier

Vi vil simulere 10 stier under P sandsynligheds målet, som er vores mål for den virkelige verden. Dette gøres ved både metode 1 og 2. Vi har brugt at  $S(0)=100$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\sigma = 0.85$  og sluttidspunktet er 10. Vi har plottet ved 2 forskellige tidsintervaller  $\Delta t = 1$  og  $\Delta t = 1/10$  og har brugt samme seed for de 2 metoder:



Figur 2: Sammenligning af Metode A og Metode B af simulation af aktiepriserne

Som vi ser på graferne, kan metode A godt blive negativ, mens metode B ikke kan blive negativ. At aktiekursen bliver negativ, stemmer ikke overens med virkeligheden, da en aktie i virkeligheden aldrig kan blive negativ. Det skyldes at alle ville sælge aktierne, og firmaet vil gå konkurs inden aktien ville gå ned i 0. I vores opgave vil vi dog ikke beskæftige os med en volatilitet, der er så høj at aktien bliver negativ. Vi antager i vores model, at aktien ikke kan være negativ, da den analytiske løsning ikke kan blive negativ. Vi ser at allerede ved  $\Delta t=1/10$  så ligner de 2 metoder hinanden meget, og vi vil ikke arbejde med tidskridt større end dette og derfor gør det ikke nogen forskel, hvilken metode vi bruger, da fejlen bliver meget lille.

For at se præcis, hvor stor vores fejl fra metode A, til metode B er, vil vi definere den absolutte fejl ved  $\epsilon(\Delta t) = E(|S(T) - \tilde{S}_i(T)|)$ .

Hvor  $S(T)$  er den analytiske løsning til differentialligningen og  $\tilde{S}_i(T)$  er den i'de simulerede sti ved Metode A. Vi estimerer den absolutte fejl ved:

$$\hat{\epsilon}(\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |S(T) - \tilde{S}_i(T)| \quad (16)$$

Vi har simuleret 50 stier både ved metode A og metode B, vi har simuleret ved parametrene  $S(0)=100$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\sigma = 0.2$  og med sluttidspunkt  $T$  på 5. Dette har vi gjort for forskellige  $\Delta t$  for at se om fejlen bliver mindre når vi tager mindre tidskridt:

Tabel 3: Absolutte fejl

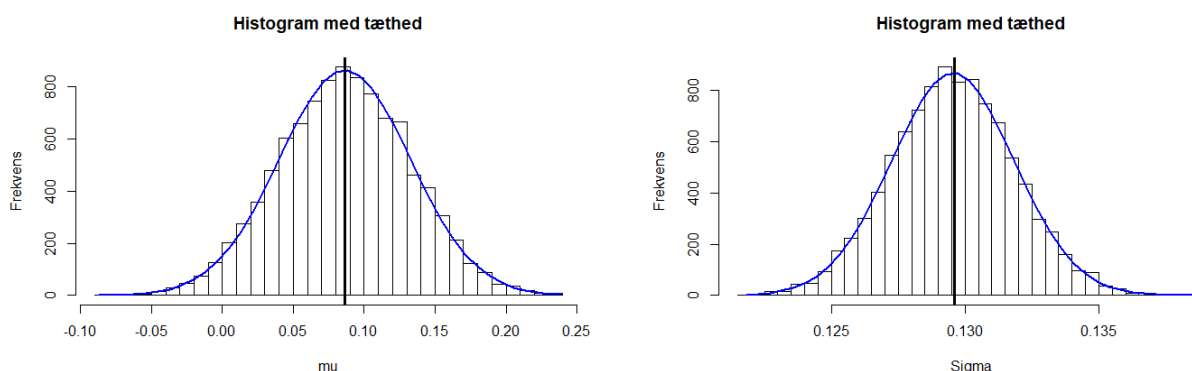
$\Delta t$	1	1/10	1/100	1/1000	1/5000
Fejl	1.695938	0.265959	0.016077	0.002341	0.000322

Som forventet bliver fejlen mindre, når vi tager mindre tidskridt. Som vi ser vil det for tidskridt på mindre end 1/100 vil fejlen være så lille at man ikke ligger mærke til den.

### 4.3 Simulation af Maximum Likelihood estimatorerne

I dette afsnit vil vi ved hjælp af simulation, se om det passer, at MLE er asymptotisk normalfordelte. Dette gør vi ved at tage observeret data på aktiekursen for SP 100. Vi vil ud fra vores analytiske resultater for  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$  regne den sande værdi for estimatorerne. Derefter vil vi simulere 10000 forskellige stier af GBM ved den analytiske løsning. Ud fra hver sti vil vi beregne  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$  og se om fordelingen af vores MLE er normalfordelte med den sande middelværdi og den forventede varians.

Vi har brugt observeret data fra den 4 januar 2010 til den anden juni 2018, og får de sande værdier for  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$ , ved at bruge estimatorerne på det observerede data. Ud fra disse, simulerer vi 10000 stier og får følgende fordeling af  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$ .



(a) Histogram af  $\mu$  med fittet normalfordelings tæthed og den sande  $\mu=0.0874$   
(b) Histogram af  $\sigma$  med fittet normalfordelings tæthed og den sande  $\sigma=0.1296$

Figur 3: Histogrammer med fordelingen af  $\mu$  og  $\sigma$  for 10000 simulationer

Vi ser at, MLE for  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$  er flot normalfordelte rundt om strengen i midten, som markerer de sande værdier, som er beregnet ud fra det observerede data. Når vi regner vores varians ud fra det udtryk, vi har beregnet tidligere, og ud fra de simulerede værdier af  $\mu$  og  $\sigma$ , ligger de meget tæt op af hinanden:

Tabel 4: Varians af estimatorer

	$\mu$	$\sigma$
Teoretisk varians	0.002098791	0.000005246758
Simuleret varians	0.002125074	0.000005276011

Dermed kan vi konkludere, at vores estimatorer er asymptotiske normalfordelte, med den teoretiske varians vi forventer.

### 4.4 Variansreduktion

I dette afsnit vil vi kigge på, hvordan man kan reducere variansen af Monte Carlo simulation. Der er to grunde til at man er interesseret i at varians reducerer, den ene er, at man bliver mere præcis, den anden er, at det bliver hurtigere. Vi vil introducere to måder at reducere variansen af en Monte Carlo simulation på, *antithetic variates* og *control variates*.

#### Antithetic variates

Når vi estimerer en Wiener proces, bruger vi en normalfordelt stokastisk variabel  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Det vi gør, når vi simulerer med antithetic variates er, at for hver sti vi simulerer med  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , simulerer

vi en parrallel sti med  $-Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Dette gør at for hver sti, har vi en partner sti, som løber parallelt med den originale. Når vi bruger antithetic variates tager vi gennemsnittet af de 2 stier. Lad  $V$  være den reelle værdi af en option, lad så  $\hat{V}$  være Monte Carlo estimeret af options værdien. Så for en sti  $\hat{V}$ , har vi en sti  $\hat{V}^-$ , så defineres antithetic variates(AV) stien til:

$$V_{AV} = \frac{1}{2}(\hat{V} + \hat{V}^-) \quad (17)$$

Dette vil i mange tilfælde være en bedre approximation af virkeligheden, da variansen vil være mindre, hvilket vi ser her:

$$Var(\hat{V}_{AV}) = Var(\frac{1}{2}(\hat{V} + \hat{V}^-)) = \frac{1}{4}(Var(\hat{V}) + Var(\hat{V}^-)) \quad (18)$$

$$= \frac{1}{4}Var(\hat{V}) + \frac{1}{4}Var(\hat{V}^-) + \frac{1}{2}Cov(\hat{V}, \hat{V}^-) \quad (19)$$

Da vi har at  $|Cov(\hat{V}, \hat{V}^-)| \leq \frac{1}{2}(Var(\hat{V}) + Var(\hat{V}^-))$ <sup>9</sup> får vi let at:

$$Var(\hat{V}_{AV}) \leq \frac{1}{2}(Var(\hat{V}) + Var(\hat{V}^-)) = Var(\hat{V}) \quad (20)$$

Hvor vi har brugt at variansen af de 2 partner stier er ens og dermed har vi mindsket variansen ved at bruge antithetic variates. Dette gælder kun hvis covariansen er positiv, men er den derimod negativ, ser vi fra (19) at variansen bliver meget mindre end variansen af  $\hat{V}$ .

### Kontrol variates

Ideen med Kontrol variates er, at hvis man vil prisfastsætte en option ved Monte Carlo simulation, så kan man bruge en anden option der ligner den man vil prisfastsætte, som en kontrol. Dette gør man, ved at regne, Monte Carlo estimationen for kontrol optionen. Dette vil man bruge, da fejlen fra Monte Carlo estimatoren til den reelle værdi, er den samme, som fejlen for kontrol optionen. Kontrol variates bedre jo mere optionerne ligner hinanden. Hvis vi igen lader  $V$  være den reelle værdi af optionen, og  $\hat{V}$  være Monte Carlo estimationen af optionen. Så lader vi  $V^*$  være den reelle værdi af kontrol option, og  $\hat{V}^*$  være Monte Carlo estimationen af dens værdi, så er Kontrol variates defineret som:

$$\hat{V}_{CV} = \hat{V} + V^* - \hat{V}^* \quad (21)$$

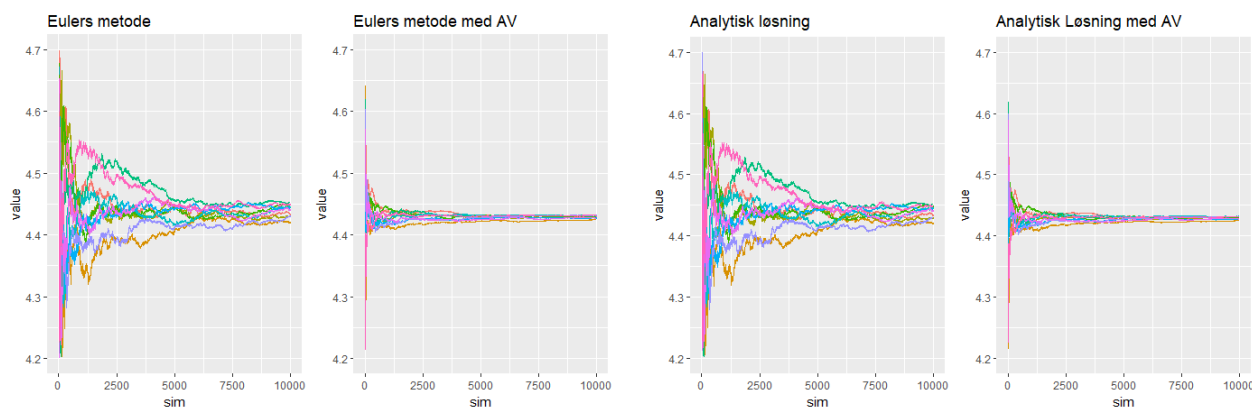
Man bruger normalt Kontrol variates, når man har 2 optioner med det samme underliggende aktie, da de vil ligne hinanden meget.

## 4.5 Monte Carlo simulation af Europæisk option

Nu vil vi implementere Monte Carlo simulation på en Europæisk option. Vi vil simulere under det risiko-neutrale arbitragefrie  $Q$ -mål og derfor er dynamikken givet ved (4). Parametrene vi vil bruge i vores Monte Carlo simulation er  $S(0)=5$ ,  $K=10$ ,  $r=0.06$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T=1$  og tidsskridtet vi tager er  $1/50$ . Vi vil simulere ved at simulere 10000 stier, så tage  $S(T)$  og udregne options værdien. Til slut diskonteres vi tilbage, og Monte Carlo værdierne udregnes, det gøres 10 gange. Det har vi gjort både ved Eulers metode(metode A) og ved den analytiske løsning(metode B). Derudover har vi implementeret antithetic variates på begge metoder. Vi har brugt samme seed for alle metoderne og får følgende grafer:

<sup>9</sup>Rüdiger U. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer, 4. udgave, 2009. side 121





(a) 10 Monte Carlo stier med Eulersmetode med og uden antithetic variates (b) 10 Monte Carlo stier med den analytiske metode med og uden antithetic variates

Figur 4: Sammenligning af antithetic både med Eulersmetode og den analytiske metode, med samme seeds

Vi ser, som forventet at variansen i begge tilfælde, bliver reduceret gevaldigt, når vi bruger antithetic variates. Derudover ser vi at metoderne ligner hinanden meget, hvilket skyldes at discretisations fejlen er lille når vi har små tidskridt.

## 5 Prisfastsættelse af optioner

I denne del af projektet vil vi fokusere på prisfastsættelse af optioner. Vi vil stadig have vores modelantagelser fra tidligere, og vi vil aktivt bruge Monte Carlo simulation i vores prisfastsættelse af de forskellige optioner. Vi vil til at starte med kigge på prisfastsættelse af europæiske optioner, hvor Black-Scholes formel er det førerende paradigme.

En Europæisk call eller put option giver ejeren af option retten til at købe/sælge det underliggende aktie til udløbsdatoen  $T$ . Man er ikke tvunget til at købe, derfor er udbytte funktionen givet ved:

$$\begin{aligned} \max(S(T) - K, 0) & \quad (call) \\ \max(K - S(T), 0) & \quad (put). \end{aligned} \quad (22)$$

Hvor  $S(T)$  er værdien af det underliggende aktie til udløbsdatoen  $T$ , og  $K$  kaldes striken for optionen. Man siger at en call option er *in the money*, hvis  $S(T) > K$  og *Out of the money* hvis  $K > S(T)$ , og lige omvendt for en put option. Både call og put optioner er *at the money* hvis  $S(T) = K$ .

### 5.1 Black-Scholes

Black-Scholes formel er bredt anderkendt, som en god metode til at prisfastsætte Europæiske option. Ved vores modelantagelser gælder Black-Scholes formel og giver et analytisk udtryk for den arbitragefrie pris af en Europæisk call option. Black-Scholes formel er givet ved:

$$\begin{aligned} C(t, S(t), K, r, \sigma) &= E^Q \left[ e^{-\int_t^T r \, du} \max(S(T) - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left( S(t) e^{(r-q)(T-t)} \phi(d_1) - K \phi(d_2) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Med

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left( \log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Hvor vi har at  $S(t)$  er prisen af det underliggende aktie,  $K$  er strikekursen,  $r$  er markeds short rate,  $\sigma$  er aktiens volatilitet og  $q$  er aktiens dividender.

Derudover gælder følgende put-call paritet:

$$P(t, S(t), K, r, \sigma) = C(t, S(t), K, r, \sigma) - e^{-q(T-t)}S(t) + Ke^{-r(T-t)} \quad (24)$$

Put-call pariteten giver en måde at finde prisen for en put option ud fra prisen på en call option. Vi vil vise put-call pariteten uden dividender:

Vi laver en replicerende portefølje af en put option. Dette gøres med en call option, det underliggende aktie og en bank konto. Vi laver en portefølje, hvor vi køber en call option, sælger det underliggende aktie og ligger  $K$  i banken.

Hvis vi sælger en put option til tiden  $T$ , vil den have en værdi på  $K - S(T)$ . Hvis vi vælger at sælge aktien med vores put optionen vil  $K > S(T)$ . Derfor vil vi ikke vælge at købe aktien med en call option, og værdien af call optionen til tiden  $T$  være 0.

Derimod hvis værdien af put optionen er 0, må  $K < S(T)$  og derfor vil værdien af call optionen være  $S(T) - K$ .

Værdien af at sælge det underliggende aktie til tiden  $T$  er  $-S(T)$ , mens værdien af at ligge  $K$  i banken er  $K$ . Dermed vil værdien til alle tidspunkter af de 2 porteføljer til tiden  $T$  altid være den samme da værdien er:

Hvis  $K > S(T)$  er værdien af de 2 porteføljer:

$$K - S(T) = 0 - S(T) + K$$

Hvis  $K < S(T)$  er værdien af de 2 porteføljer:

$$0 = S(T) - K - S(T) + K$$

Dermed er værdien af de 2 porteføljer altid den samme. Og da vi har antaget et arbitragefrit marked, må 2 porteføljer der har den samme værdi til tiden  $T$ , altid have den samme værdi til alle tider. Dette skyldes at hvis den ene var billigere end den anden, ville man til tiden  $t$  kunne købe den billige og sælge den dyre, men til tiden  $T$  ville de 2 have den samme værdi og de penge vi tjente til tiden  $t$  ville være uden risiko og dermed ville der være arbitrage. Men da vi har et arbitragefrit marked, har vi vist det ønskede, da prisen for putten er givet ved  $P(t, S(t), K, r, \sigma)$ , prisen for call er givet ved  $C(t, S(t), K, r, \sigma)$ , aktieprisen uden dividender er givet ved  $S(t)$  og værdien af at have  $K$  i banken til tiden  $t$  er givet ved  $Ke^{-r(T-t)}$ . Dermed har vi:

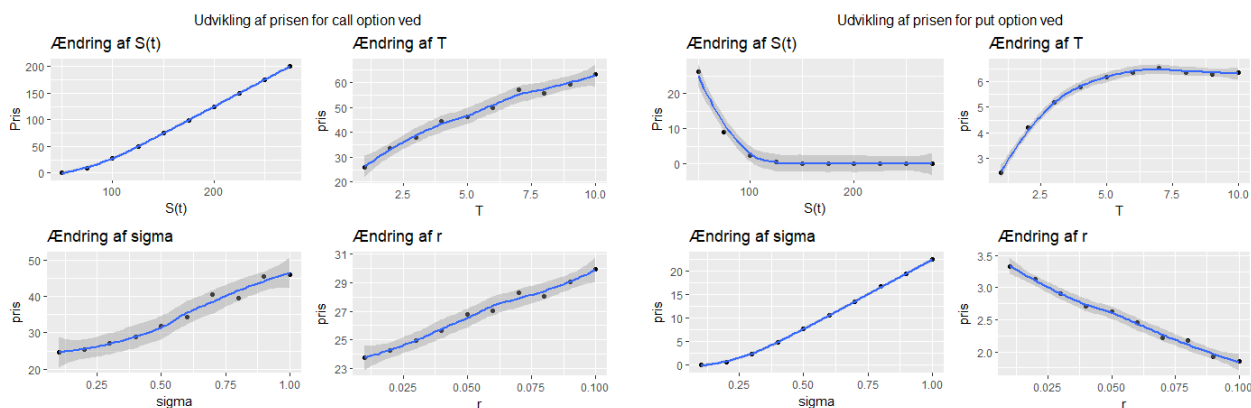
$$P(t, S(t), K, r, \sigma) = C(t, S(t), K, r, \sigma) - S(t) + Ke^{-r(T-t)} \quad (25)$$

## 5.2 Prisfastsættelse ved Monte Carlo simulation

I dette afsnit vil vi forsøge, at prisfastsætte Europæiske call og put optioner ved hjælp af Monte Carlo simulation. Vi vil kigge på, hvordan priserne udvikler sig, hvis man ændrer på de forskellige parametre i vores model. Derudover vil vi se på hvor godt vores Monte Carlo priser stemmer overens med prisfastsættelse af europæiske optioner ved Black-Scholes formel.

I Monte Carlo simulation, simulerer vi 10000 stier ved den analytiske metode med antithetic variates, tager slutværdien, beregner henholdsvis put og call værdien og til slut beregnes Monte Carlo estimatoren og diskonterer tilbage.

Vi har følgende startværdier;  $S=100$ ,  $r=0.06$ ,  $K=80$ ,  $T=1$ ,  $\sigma=0.3$  og et tidsstep på  $1/50$ . Vi får følgende, hvis vi ændrer på de forskellige parametre:



Figur 5: Udvikling af prisen på europæiske call og put optioner ved forskellige parametre ændringer

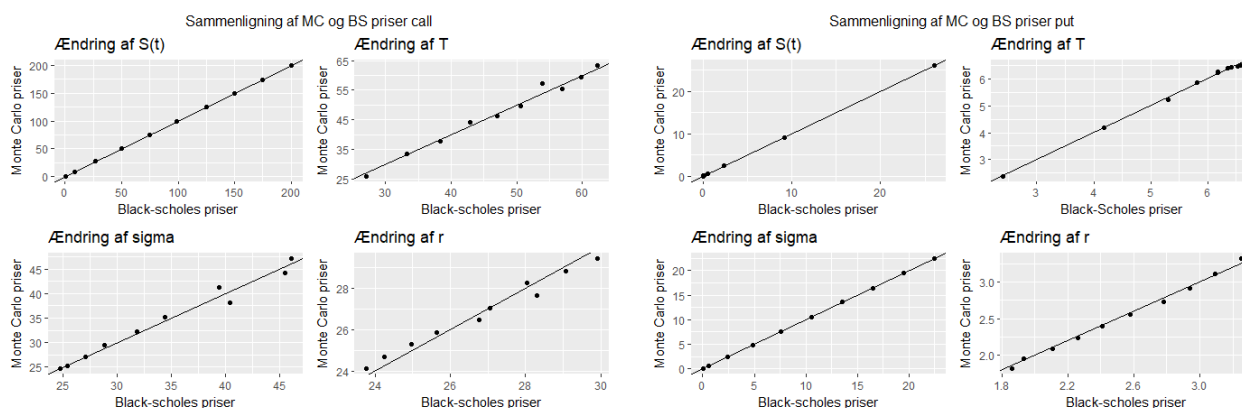
Vi ser at når startprisen for aktien stiger, så vil prisen for call optionen stige, mens prisen for en put option vil falde. Dette giver også god mening, da prisen i forhold til striken bliver højere og derfor vil værdien for en call stige og put falde.

Vi ser, at når sluttidspunktet  $T$  bliver længere ude i fremtiden, vil prisen både call og put optionerne stige. Dette skyldes at man betaler for muligheden for at når udnyttelsesdatoen er længere ude i fremtiden, er der større mulighed for, at optionen er meget in the money.

Vi ser, at når volatiliteten bliver højere, stiger prisen på både på en put og call option. Dette skyldes, at aktien varierer mere for europæiske optioner, da der er større chance for at få et stort afkast, mens man ikke kan tabe så meget, da man kan lade være med at udnytte optionen.

Til sidst ser vi, at når renten stiger vil call-optionens pris stige, mens put-optionens pris vil falde. Dette giver også god mening, da det vil være mere attraktivt, at købe en call option og beholde nogen penge i banken, end at købe en aktie, hvis renten er høj, mens det er omvendt for en put. Vi ser også at renten ikke ændrer særlig meget i prisen, hvis man kigger på værdierne på akserne.

Nu vil vi kigge på hvordan vores Monte carlo simulerede priser passer overens med priserne fundet ved Black-Scholes formel. Vi har de samme startværdier som før og får følgende.



(a) Sammenligning mellem Black-Scholes og Monte Carlo call priser  
(b) Sammenligning mellem Black-Scholes og Monte Carlo put priser

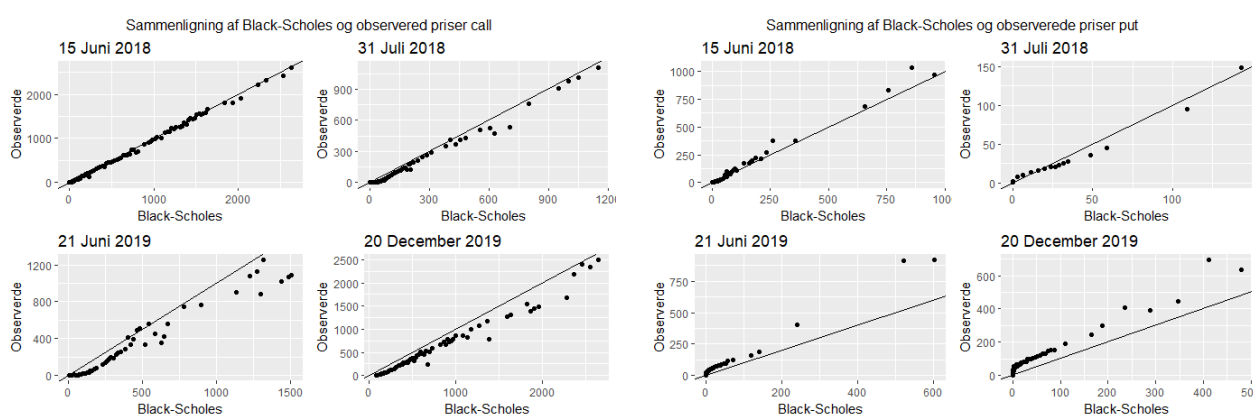
Figur 6: Sammenligninger mellem priser fundet ved Monte Carlo, og priser fundet ved Black-Scholes formel

Vi ser at priserne for både put og call optioner regnet ved Monte Carlo simulation ligger meget tæt op af priserne ved Black-Scholes formel.

### 5.3 Prisfastsættelse ved Black-Scholes

I dette afsnit vil vi tjekke, hvordan priser for optioner, der er fundet ved Black-Scholes formel, stemmer overens med de observerede priser på markedet. I dette afsnit gør vi det for europæiske optioner, men vi vil også gøre det for amerikanske optioner.

De observerede priser på SP 500 indexet for Europæiske optioner og Amerikanske optioner, er hentet ved pakken quantmod i R, som henter priserne fra yahoo. Vi har kigget på beregning af  $\mu$  og  $\sigma$  ved forskellig datastørrelse og har konkluderet at de er cirka lige gode til at ramme de observerede værdier og bruger derfor bare en datastørrelse på 6 måneder. Vi har valgt fire udløbsdatoer og beregnet  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$  ud fra de analytiske (9) og (10). Vi har fået følgende sammenhæng, på Europæiske optioner, mellem de observerede priser og dem vi har regnet med Black-Scholes, hvor der er en dividende yield på 1.82%.



(a) Sammenligning mellem Black-Scholes og observerede call priser  
(b) Sammenligning mellem Black-Scholes og observerede put priser

Figur 7: Sammenligninger mellem priser på europæiske optioner observeret på markedet, og priser fundet ved Black-Scholes formel

Vi ser at Black-Scholes rammer markedspriserne rimelig godt, da de ligger tæt op af de observerede

priser på markedet, både for call og put optioner. Graferne til venstre er for call optionen og graferne til højre er for put optioner. Vi ser at ved de 2 sidste datoer har Black-Scholes udfordringer ved at estimere de helt lave priser for put optionerne. Derudover ser vi at Black-Scholes estimerer den 15 juni 2018 bedst. Alle udregningerne er lavet fra den 4 juni af.

## 5.4 Amerikanske Optioner

Amerikanske optioner ligner meget en Europæisk option, ud over at man har retten til at købe/sælge det underliggende aktie til alle tider i perioden  $[t, T]$ . Givet et optimalt udnyttelsestidspunkt  $\tau$ , er udbytte funktionen givet ved:

$$\begin{aligned} \max(S(\tau) - K, 0) & \quad (call) \\ \max(K - S(\tau), 0) & \quad (put). \end{aligned} \tag{26}$$

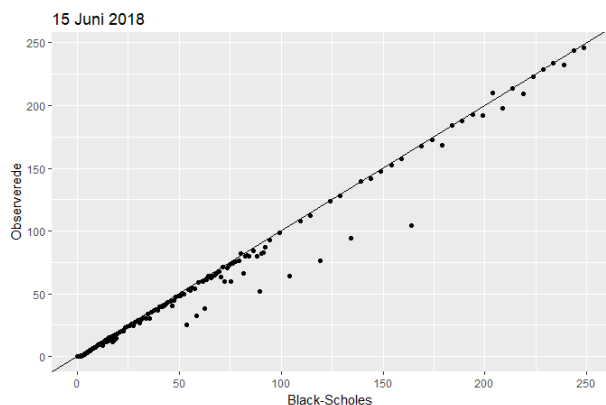
Hvor  $S(\tau)$  er værdien af det underliggende aktie til udnyttelsestidspunktet  $\tau$  og  $K$  igen er striken.

I dette afsnit vil vi se på prisfastsættelse af amerikanske optioner. Amerikanske optioner kan modsat europæiske optioner blive udnyttet før sluttidspunktet. Derfor ville man tro at amerikanske optioner ikke kunne prisfastsættes med Black-Scholes, da dette ikke falder inden for Black-Scholes model antagelser. Hvis amerikanske optioner først bliver udnyttet til sluttidspunktet, burde prisen være det samme for en amerikansk option, som for europæiske. Derfor burde man kunne prisfastsætte amerikanske optioner med Black-Scholes, når det ikke kan betale sig at udnytte de amerikanske optioner før udløbstidspunktet.

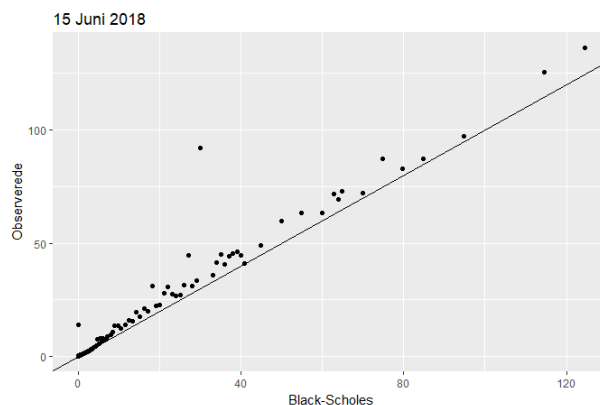
Det viser sig faktisk at hvis en amerikansk option ikke har dividender kan det ikke betale sig, at udnytte en amerikansk option tidligt. Dette skyldes at hvis den amerikanske option er *Out of the money*, altså aktiekursen er mindre en striken, så vil man aldrig udnytte optionen, da man så vil have tabt penge og kun kan vinde ved at beholde optionen. Men når optionen er *in the money*, vil det heller ikke kunne betale sig at udnytte optionen før udløbsdatoen. Dette skyldes at markedsprisen vil være højere end den *intrinsic value*, som er den værdi man får ved at udnytte optionen, og derfor vil det kunne betale sig at sælge optionen i stedet for at udnytte den. Dette skyldes at markedsprisen udover den intrinsic value også tager højde for *time value*, som er værdien for at udløbsdatoen ligger længere ude i fremtiden, og dermed har mulighed for at få en højere intrinsic value. Dette argument gælder både for en amerikansk call og put option.

Hvis en amerikansk option har dividender, kan det i nogen tilfælde betale sig at udnytte optionen før udløbsdatoen. Det eneste tidspunkt det kan betale sig, er dagen før ex-dividend, som er dagen, hvor at sælger kan få den seneste dividende i stedet for køber. Det skyldes at efter ex-dividend dato vil prisen på optionen falde med dividende prisen. Hvis man så udnytter optionen dagen før ex-dividend dato, kan man hvis dividenderne er højere end time value, få en højere profit ved at udnytte optionen, fremfor at sælge den.

Vi har i dette eksempel prisfastsat amerikanske optioner på S&P 500 ved Black-Scholes formel. Den observerede strike og pris på optionerne er fundet ved R pakken quantmod. Der er brugt data for 6 måneder tilbage og ud fra dem regnet  $\hat{\mu}$  og  $\hat{\sigma}$ . Der er en dividende yield på 1.61 procent, hvilket der er taget højde for i Black-Scholes formlen. Vi har fået følgende for sammenligning mellem de observerede og priser fundet ved Black Scholes, hvor vi har valgt den 15. Juni 2018 ud.



(a) Sammenligning mellem Black-Scholes og observerede call priser for amerikanske optioner



(b) Sammenligning mellem Black-Scholes og observerede put priser for amerikanske

Figur 8: Sammenligninger mellem priser observeret på markedet for amerikanske optioner, og priser fundet ved Black-Scholes formel

Vi ser, at Black-Scholes faktisk priser de amerikanske optioner godt, selvom der er dividender. Dette må betyde, at dividenderne ikke er høje nok, til at det kan betale sig at udnytte optionerne før tid og derfor kan de amerikanske optioner prisfastsættes med Black-Scholes, som om de er europæiske optioner.

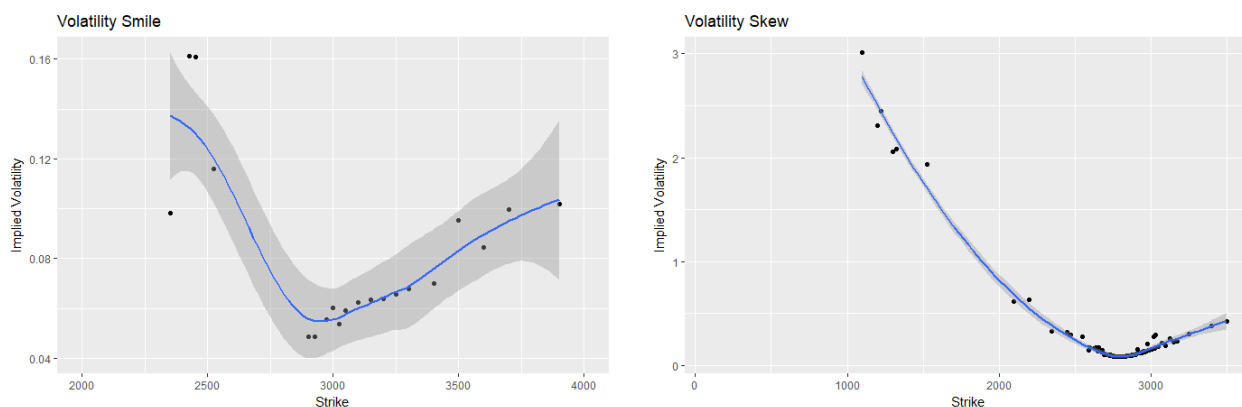
## 5.5 Implied volatilitet

Implied volatilitet er den volatilitet, der når vi sætter den ind i Black-Scholes modellen giver netop den observerede pris. Grunden til, at man interesserer sig for implied volatilitet, er at den er et godt mål for, hvor meget en option er værd. Det skyldes, at når volatiliteten er høj, så er en option mere værd, mens når volatiliteten er lav, er en option mindre værd. Dette ses også direkte på Black-Scholes formelen (23), hvor vi ser at prisen på en call afhænger positivt af volatiliteten.

Implied volatilitet beregnes ud fra Black-Scholes formel, som er en arbitragefri pris givet under  $Q$  sandsynligheds målet. Det er derfor et mål for volatiliteten givet markedets risikoprofil.

Den historiske volatilitet, som vi har brugt igennem opgaven til vores beregninger af Black Scholes priser, er bygget på historisk data og er derfor en volatilitet der er bygget på virkeligheds sandsynligheds målet  $P$ . Den er et mål for hvordan volatiliteten har været over en bestemt tidsperiode.

Den historiske volatilitet er et mål for, volatiliteten og en bestemt periode, mens implied volatilitet er et mål for, hvordan volatiliteten er på markedet nu. I Black-Scholes modellen og i vores model, antager vi volatiliteten er konstant. Derfor burde implied volatilitet være konstant givet en strike pris, men dette er en af vores antagelser, som ikke stemmer overens med virkeligheden. For at illustrere dette, har vi plottet striken mod den implied volatilitet for europæiske call optioner. Dette har vi gjort for europæiske optioner på S&P 500 med udløbsdato 21 juni 2019 og 15 juni 2018



(a) Implied volatilitet fundet for optioner på S&P 500 med udløb 21 juni 2019 (b) Implied volatilitet fundet for optioner på S&P 500 med udløb 15 juni 2018

Figur 9: Implied volatilitet fundet ud fra europæiske call optioner på S&P 500 indexet

Som vi ser på de 2 grafer, så er volatiliteten ikke helt konstant. Men derimod ser vi tilgængelig en tendens til at der enten er et volatility smile eller skew, som vi med lidt god vilje ser på de to grafer. For volatilitets smilet betyder det, at optioner der er længere *in the money* eller *out of the money* har en højere implied volatilitet end optioner der ligger tættere på at være *at the money*. For volatility skew ser vi at implied volatility bliver højere jo mere *in the money* optionerne er.

## 5.6 Asiatiske optioner

En Asiatiske option afhænger ikke som Europæiske og Amerikanske option af det underliggende akties kurs ved udnættelstidspunktet, men af gennemsnitsprisfastsættelsen over et bestemt tidsinterval. Lad tidsintervallet være givet  $[t, T]$  og gennemsnittet være det aritmetiske gennemsnit, så er udytte funktionen givet ved:

$$\begin{aligned} \max \left( \frac{1}{T-t} \int_t^T S(u) du - K, 0 \right) & \quad (call) \\ \max \left( K - \frac{1}{T-t} \int_t^T S(u) du, 0 \right) & \quad (put). \end{aligned} \quad (27)$$

Grunden til at man overhovedet er interesseret i at kigge på finansielle derivater, er at man gerne vil minimere sin risiko for tab eller minimere risikoen for at tabet bliver stort. Dette vil optioner hjælpe til med, da det gør det muligt at lave porteføljer på et underliggende aktie, så risikoen ikke bliver så stor, som hvis man bare havde købt en del af aktien. Det giver altså en mulighed for at hedge, hvilket vil sige at man minimerer risikoen eller gør risikoen større for at få større profit. En anden grund til at man interesserer sig for option er at man forventer at en aktie vil stige, dette kaldes speculation. Så kan man ved optioner fx købe retten til at købe en aktie til en bestemt pris i fremtiden.

I dette afsnit vil vi prisfastsætte asiatiske optioner ved hjælp af Monte Carlo simulation og sammenligne disse priser med priserne for europæiske optioner med samme parametreværdier. Monte Carlo simulation er specielt nyttigt i prisfastsættelse af asiatiske optioner, da der ikke findes nogen lukket løsning for hvordan man kan prisfastsætte dem.

Vi finder Monte Carlo priserne for de asiatiske optioner, ved at simulere 1000 GBM stier ved den analytiske metode med antithetic variates. Til hver af disse stier estimerer vi integralet ved en Riemann sum og derefter finder vi Monte Carlo estimatet til hver af disse og tager gennemsnittet af de 1000 Monte Carlo estimater. Vi har brugt parametrene  $S(0)=100$ ,  $r=0.02$ ,  $\sigma = 0.2$  og  $T=1$ .

Tabel 5: Asiatiske call priser

Strike	75	100	125	150	175	200
Europæiske priser	101.48513	76.99435	52.91051	31.35825	15.6031	6.56604
Asiatiske priser	99.672110	75.25807	50.78469	26.87215	8.85342	1.64440

Tabel 6: Asiatiske put priser

Strike	75	100	125	150	175	200
Europæiske priser	0.45849	6.93591	24.30904	47.27847	71.56259	96.04249
Asiatiske priser	0.01248	4.04364	23.67192	48.04869	72.51400	97.10058

Vi ser at prisen for en asiatisk call option i alle vores tilfælde og i langt de fleste tilfælde, er mindre end prisen for en Europæisk call option. Dette giver intuitiv god mening, da volatiliten er mindre for en asiatisk call. Det skyldes, at asiatiske optioner afhænger af gennemsnittet af det underliggende aktie, og intuitivt vil gennemsnittet af aktien variere mindre, end bare værdierne for aktien. Når der er lavere volatilitet, er prisen generelt også lavere, da man i optioner betaler for en høj volatilitet, og betaler for chancen for at gå meget in the money. Når der er højere volatilitet, vil man have mulighed for at aktiekursen på det underliggende aktie, bliver højere end med lavere volatilitet.

Vi ser også at asiatiske put optioner har en lavere pris end europæiske put optioner for lille strike, mens de har højere pris når striken bliver stor. Dette skyldes at Når put optionen er out of the money, vil den asiatiske pris være lavere fordi at volatiliteten er lavere, og dermed er der mindre chance for, at optionen kommer in the money. Men når striken bliver høj og put optionen kommer in the money, vil prisen på den asiatiske put option blive lavere end en europæisk put option, da vi har et positivt  $r$  og derfor vil aktien i gennemsnit stige, men gennemsnittet vil være mindre end værdien af aktien, da aktien er gået op og ned.

## 6 Asset Liability Management

I dette afsnit vil vi udvide vores model, ved at kigge på hvordan en pensionsvirksomhed skal håndtere deres aktiver og passiver. Vi vil blandt andet kigge på, hvordan det i vores set-up bedst kan betale sig at forvalte sine aktiver og hvordan man kan minimere sin risiko for at blive insolvens. Vi vil kigge på en virksomhed, der har følgende balance:

Tabel 7: Firma Balance

Aktiver	Passiver
$A(t)$	$L(t)$
	$B(t)$

Hvor  $A(t)$  er vores aktiver til tiden  $t$ ,  $L(t)$  er vores passiver til tiden  $t$  og  $B(t)$  er en Bonus kapital. Hvor vi har at  $A(t) = L(t) + B(t)$ .

Indtil videre i projektet har vi antaget at renten  $r$  har været konstant. Men dette er en antagelse der faktisk stemmer overens med virkeligheden, da vi i virkeligheden ser at renten varierer en del over tid. Så derfor vil vi introducere en ny model, som hedder Vasiceks rentemodel.



## 6.1 Vasicek rentemodel

Vasiceks rentemodel er en stokastisk rente model. Vasiceks rentemodel specificerer at renten følger følgende stokastisk differentialligning:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r dW(t) \quad (28)$$

Hvor  $\sigma_r$  er et mål for rentens volatilitet,  $\theta$  er et mål for rentens konvergens niveau og  $\kappa$  er et mål for hvor hurtigt renten konvergerer mod  $\theta$ .  $\theta$  skal ses, som et mål for hvordan renten vil konvergere i middelværdi mod  $\theta$  og jo større  $\kappa$  er jo hurtigere konvergerer renten mod  $\theta$ .

Den lukkede formeløsning for den stokastiske differentialligning er givet ved

$$r(t) = r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma_r e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa u} dW(u) \quad (29)$$

Vasiceks rente model er en brugbar rentemodel netop fordi renten ikke kan stige uendelig meget, da den konvergerer mod en middelværdi, hvilket ville være urealistisk. Da en høj rente ville stoppe aktiviteten på markedet, da det ville kunne betale sig at have pengene stående i banken og dermed ville renten falde igen, da alle havde deres penge stående i banken. Men dette konvergens niveau, har også en ulempe, da vi på markedet ikke ser en tendens til at renten ligger på et fast niveau.

I Vasiceks rentemodel, kan renten godt komme under 0. Det er i mange år blevet set, som en negativ egenskab. Derfor er der i mange år blevet brugt rente modellen Coss-Ingerslev-Ross(CIR), som netop har den egenskab at renten ikke kan komme under 0. I de seneste par år har vi dog set at renten kan komme under 0, og derfor er flere igen gået over til Vasiceks rentemodel.

## 6.2 Investeringsmuligheder

Et virksomheds aktiver forvaltes bedst ved at finde en god investerings portefølje. I vores model framework har virksomheden tre muligheder for at investere. Den ene mulighed er at investere i renten, hvilket vil svarer til at have sin penge i banken, da ens investering bare vil variere efter renten. Den anden mulighed er at investere i aktier, som giver en mulighed for at tabe en del af sin investering, men tilgængæld også giver mulighed for meget større gevinst. Den sidste mulighed er at investere i obligationer, som i vores tilfælde vil være at investere i nul kupon obligationer med forskellige udløbstidspunkter.

### Investerings dynamikker

Da vi har implementeret Vasicek rentemodel har vi nu en model med 2 Wiener processer og derfor har vores filtrering i sandsynlighedsmålet ændret sig til  $\mathcal{F}_t = \sigma((W_1(s), W_2(s), s \geq t)$ . Dette skyldes at vi nu i stedet for at have en Wiener proces, har 2 uafhængige Wiener processer. Derudover vil vi gerne modellere at der er en korrelation mellem Wiener processen i Vasicek modellen og GBM modellen. Derfor får vi følgende dynamikker under P sandsynlighedsmålet.

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma_r dW_1(t) \quad (30)$$

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma_s dW_3(t) \quad (31)$$

$$dW_3(t) = \rho dW_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2(t) \quad (32)$$

Hvor korrelationen  $\rho \in [-1, 1]$ . Det ses at når  $\rho = 1$  er de fuldt korreleret og  $dW_3(t) = dW_1(t)$ . Dynamikkerne under Q-målet vil være de samme bortset fra  $\theta$ , der vil skiftes ud med  $\theta^Q$ , hvor  $\theta^Q = \theta - \frac{\lambda \sigma_r}{\kappa}$ , hvor  $\lambda$  kaldes *Market price of risk* Derudover vil vi selvfølgelig også have at  $\mu$  skiftes ud med renten. til tidspunkt  $t$ .

Som sagt vil vi, når vi investerer i obligationer, investerer i nul kupon obligationer med forskellige udløbsdatoer. Dynamikken for prisen på en nul kupon obligation under P er givet ved

$$dp(t, T) = p(t, T)((r(t) - (t, T))dt - \sigma_r B(t, T)dW_1(t)) \quad (33)$$

Hvor  $p(t, T)$  er prisen på en nulkupon obligation med start tiden  $t$  og udløbstidspunkt  $T$ , og  $B(t, T) = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})$ . Vi ser at når prisen på en obligation ikke bliver negativ, har vi at  $\lambda$  bliver nød til at være negativ. Derudover kan det vises at prisen på en nulkupon under antagelse af en Vasicek rente er givet ved.

$$\begin{aligned} p(t, T) &= E_{\tilde{Q}} \left( e^{-\int_t^T r(u)du} | r(t) \right) \\ &= e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \end{aligned} \quad (34)$$

$$A(t, T) = \left( \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} - \theta^Q \right) ((T - t) - \beta(t, T)) - \frac{\sigma_r^2}{4a} \beta(t, T)^2$$

$B(t, T)$  er givet som tidligere.

Til slut er dynamikken for at investere i banken givet ved.

$$d\beta = r(t)\beta(t)dt \quad (35)$$

**Investerings strategi** Nu vil vi kigge på den samlede dynamik for alle investeringsstrategierne. Vi vil antage at virksomheden investerer med en portefølje, hvor de investerer med følgende andel af deres aktiver,  $w_\beta$  i banken,  $w_S$  i aktier og  $w_B$  i obligationer. Derudover antager vi at  $w_\beta + w_S + w_B = 1$ . ( $w_\beta, w_S, w_B$ ) er vores portefølje vægte. Vi antager også at der eksisterer nulkupon obligationer med udløb om henholdsvis  $1, 2, \dots, T$  år, ved hvert udløbsdato. Derudover lader vi  $x_{ij}$  være andelen der bliver holdt af de forskellige nulkupon obligationer, denne andel skal summere til 1. Det kan nu vises at dynamikken for assets under P målet er givet.

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{A(t)} &= w_\beta r(t)dt + w_S(\mu dt + \sigma_s dW_3(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^T x_{ij} w_B [(r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i + j))dt - \sigma_r B(t, i + j)dW_1(t)] \end{aligned} \quad (36)$$

10

### 6.3 Simulation af aktiver

Da vi gerne vil kende udviklingen af aktiverne i virkeligheden og ikke under det risiko-neutrale mål, så simulerer vi frem under P sandsynligheds målet. Vi simulerer rente dynamikken, og dynamikken for aktiverne ved Eulers metode. Vi har brugt følgende parameter værdier:

$$A(0) = 1000, \quad r(0) = 0.01, \quad \kappa = 0.15, \quad \theta = 0.042, \quad \lambda = -0.23, \quad \sigma_r = 0.01, \quad \rho = -0.15.$$

Derudover bruger vi de tidligere fundne drift og volatilitet for S&P 100 indexet, som er fundet til :

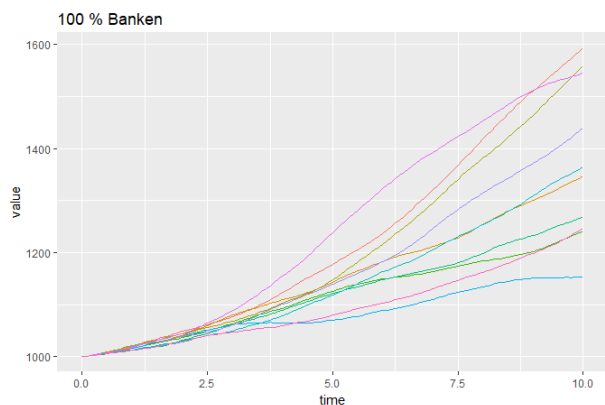
$$\hat{\mu} = \mu_s = 0.109, \quad \hat{\sigma} = \sigma_s = 0.145$$

Disse parametrer vil vi bruge som eksempel for vores udregninger i resten af opgaven.

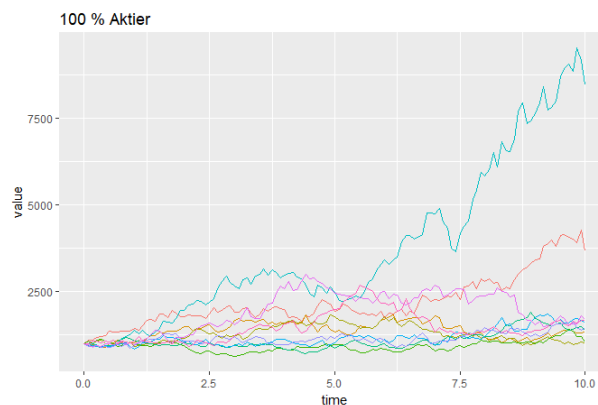
Derudover investerer vi  $1/10$  i hver af nulkupon obligationerne og kigger på en 10 årig periode med månedlige skridt. Vi simulerer 10 stier og får følgende grafer for henholdsvis for 100 procents investering i de 3 forskellige investerings muligheder.

---

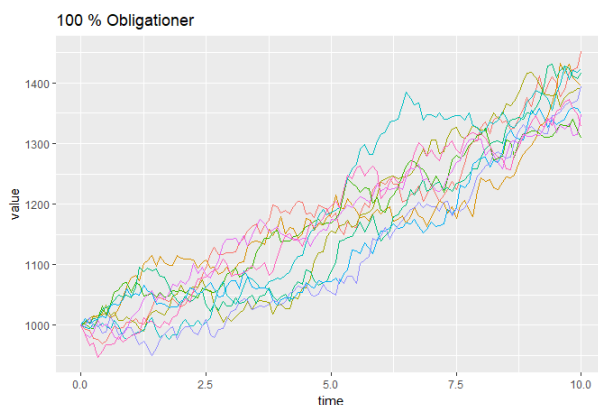
<sup>10</sup>[3] side 117



(a) 10 stier med 100% af sine aktiver i banken



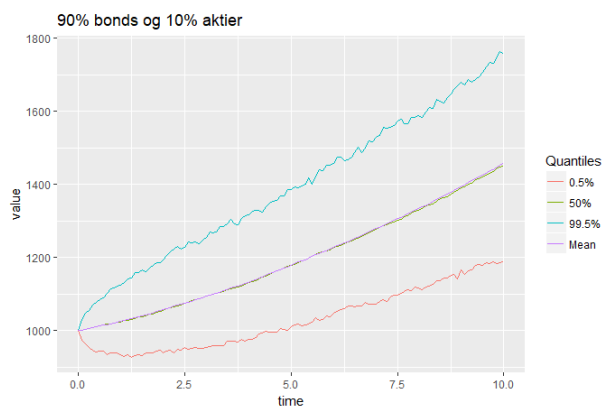
(b) 10 stier med 100% af sine aktiver i aktier



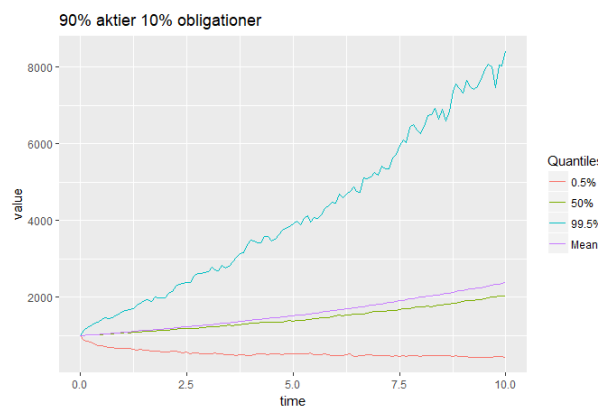
(c) 10 stier med 100% af sine aktiver i obligationer

Som forventet ser vi, at der er klart højest potentiel gevinst ved at investere alle sine aktiver i aktier, da en af stierne kommer helt op på over 7500. Derimod er både obligationer og banken et mere sikkert valg, hvor der ikke er stor variation i stierne.

Nu vil vi kigge på fraktilerne for forskellige mulige vægte af de forskellige investeringsmuligheder. Vi vil kigge på en risikofyldt portefølje hvor vi har 90 procent i aktier og 10 procent i obligationer, og så vil vi kigge på en lidt mere sikker portefølje hvor vi har 10 procent i aktier og 90 procent i obligationer. Vi vil kigge på 0.5 procent, 50 procent og 99.5 procent fraktilerne og derudover vil vi også kigge på gennemsnittet. Vi simulerer 1000 stier for hver portefølje og får følgende fraktil grafer:



(a) Fraktiler og gennemsnittet med en portefølje på 90% i obligationer og 10% i aktier

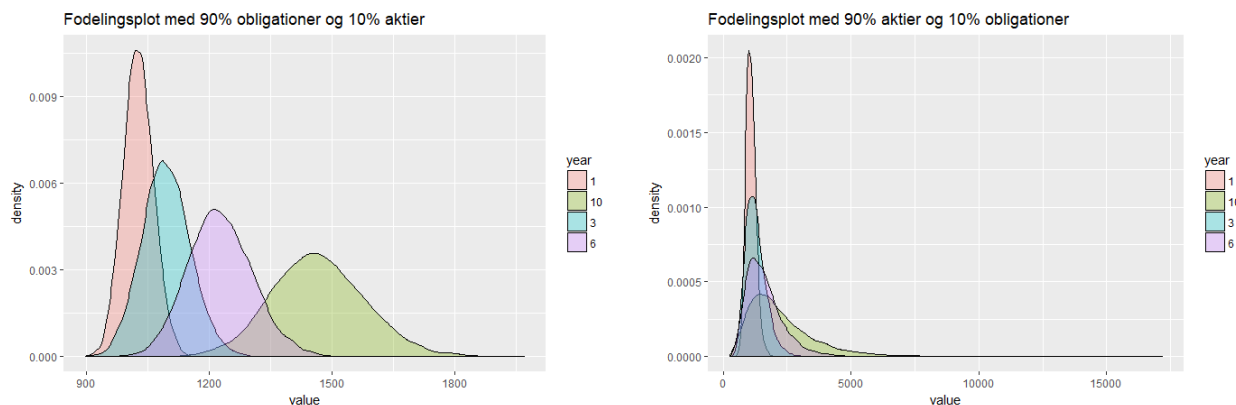


(b) Fraktiler og gennemsnittet med en portefølje på 90% i aktier og 10% i obligationer

Figur 11: Grafer med fraktilerne 0.5%, 50% og 99.5% og gennemsnittet

Vi ser at den risikable portefølje igen giver chance for en meget højt afkast, men også giver mulighed for et større tab. Derudover ser vi, at i den lidt mere sikre portefølje, kan vi ikke få et så stort afkast, men risikerer til gengæld ikke at tabe noget.

Derudover ser vi, også at gennemsnittet ligger noget højere end medianen, som er vores 50 procents fraktil. Faktisk ser vi, at den ligger næsten 500 højere end medianen gør. For at forklare dette har vi lavet et fordelingsplot af den risikofyldte portefølje, hvor vi har simuleret 10000 stier og set på fordelingen af disse.



Figur 12: Fordelingsplot af 2 porteføljer, efter henholdsvis 1, 3, 6 og 10 år

Den røde er fordelingen efter 1 år, den turkise er efter 3 år, den lilla er efter 6 år og den gule er fordelingen efter 10 år.

Som vi ser på fordelingsplotsne, har fordelingsplottet med 90 procent aktier en noget mere skæv fordeling mod højre. Hvilket vil sige, at der er nogle meget høje værdier, der trækker gennemsnittet højere op. Dette trækker ikke median lige så meget op, da medianen er et mål for, at der er 50 procent sandsynlighed for, at værdierne ligger over og under medianen. Derfor kan median i et tilfælde som dette, være et bedre mål for forventningen til ens portefølje, når fordelingen er skæv. Det giver mening at risikable porteføljer får en skæv fordelingen, da der er nogen få stier, som vil stige rigtig meget og trække fordelingen mod højre, mens langt størstedelen af stierne ligger meget lavere og derfor er medianen en bedre forventning end gennemsnittet. Vi ser også at fordelingsplottet for 90 procent obligationer ikke har den samme skæve fordelingen og derfor ligger gennemsnittet og median utrolig tæt på hinanden.

## 6.4 Liability model

Nu vil vi introducere vores model for passiverne, som er pensionsselskabets forpligtelser til dets medlemmer. Vi vil i vores tilfælde kigge på en simpel model, hvor virksomheden betaler et premium, derefter vil der hvert år blive krediteret en garanteret rente, dermed får vi at vores liabilities til tiden  $T$  er givet ved:

$$L(T) = P(1 + q)^T \quad (37)$$

Hvor  $P$  er vores premium og  $q$  er den garanteret rente.

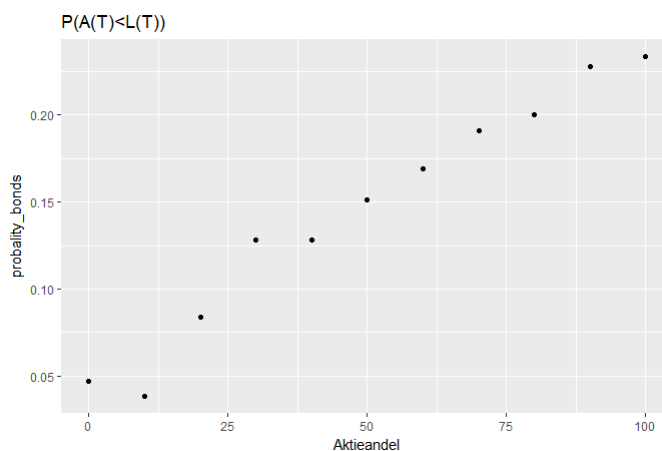
Værdien af passiverne, som vi betaler til tiden store  $T$ , er til tiden  $t$  givet ved at diskonterer tilbage, så vi får givet ved Vasicek rentemodell at:

$$L(t) = E_Q \left[ e^{\int_t^T r(s)ds} L(T) | \mathcal{F}_t \right] = E_Q \left[ e^{\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \right] L(T) = p(t, T) L(T) \quad (38)$$

Hvor  $p(t, T)$  igen er prisen på nul kupon obligationer under Vasicek rentemodell.

Nu vil vi kigge på sandsynligheden for at  $A(T) < L(T)$ . Det vil vi gøre numerisk ved at simulere  $A(T)$

for forskellige valg af vores portefølje vægte. Vi vælger, kun at kigge på porteføljer, der indeholder obligationer og aktier, da disse er de mest interessante, da de giver det største afkast. Vi får følgende sandsynligheder for de forskellige valgte portefølje vægte:



Figur 13: Plot af sandsynligheden for at aktiverne er mindre end passiverne efter 10 år

Vi har plottet for henholdsvis 0 til 100 procent af aktier og obligationer, hvor vi har lavet 10 punkter med et spring i fordelingen på 10 procent.

Vi ser at den mindste sandsynlighed  $P(A(T) < L(T))$  får vi, når vi har en fordeling af aktier og obligationer på 10 procent aktier og 90 procent obligationer. Derudover ser vi generelt, at jo mere vi investerer i aktier, jo højere bliver sandsynligheden. Hvilket giver mening da porteføljen bliver mere risikabel.

## 6.5 Risiko for insolvens

I denne sektion vil vi definere hvad det vil sige for virksomheden at være insolvens, derudover vil vi beregne sandsynligheden for at være insolvens for en bestemt portefølje. Her vælger vi portefølgen  $(w_B, w_S, w_B) = (0, \frac{1}{10}, \frac{9}{10})$ , som er den portefølje der gav den mindste sandsynlighed for at  $A(T) < L(T)$ . Efter finanskrisen kommer der flere krav, der skulle sikre at pensionsvirksomheder ikke gik konkurs. Disse krav blev kaldt Solvency II, og var primært et krav for hvor meget kapital et firma skulle holde. For at regne risikoen for insolvens definerer vi *solvency capital requirement* (SCR) og *coverage ratio* (CR). SCR kan tolkes, som den frie kapital eller bonuskapital, der er brug for i dag for at *the risk of default* gennem det næste år er mindre end 99.5 procent. Hvor *the risk of default* er risikoen for ikke kan kunne betale sine passiver over det næste år. Det vil sige at SCR er den bonuskapital virksomheden, skal holde for at sandsynligheden for at pensionsvirksomheden kan imødekomme sine forpligtelser er 99.5%. SCR defineres også som 99.5 procents fraktilen for tabet på 1 år ved tiden  $t$ , som er givet ved:

$$Tab(t) = B(t) - e^{-\int_t^{t+1} r(s)ds} B(t+1) \quad (39)$$

Tabet på 1 år tolkes, som den frie kapital  $B$  til tiden  $t$  minus den frie kapital et år ude i fremtiden diskonteret. Derudover definerer vi CR, som forholdet mellem bonus kapitalen og SCR:

$$CR(t) = \frac{B(t)}{SCR(t)} \quad (40)$$

Hvor vi siger at virksomheden er insolvens til tiden  $t$  hvis  $CR < 1$

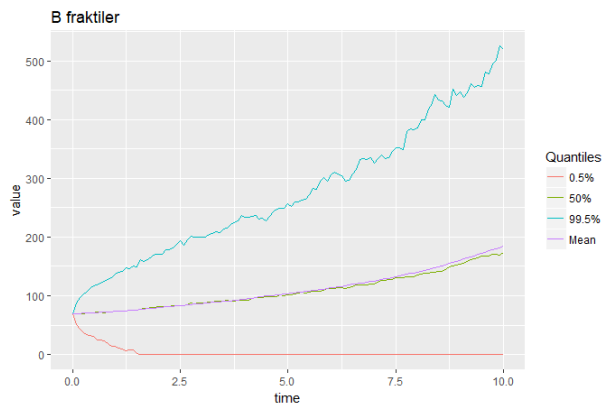
CR kan tolkes, som hvor mange gange virksomheden med deres frie kapital kan betale 99.5 procent fraktilen. Så hvis  $B$  er lavere end SCR vil virksomheden være insolvens.

Nu vil vi kigge på virksomheden med samme parametre som tidligere. Vi bruger de valgte porteføljevægte og ser på hvordan den frie kapital udvikler sig, hvordan SCR udvikler sig, hvordan CR udvikler sig og til sidst hvad sandsynligheden for insolvens er.

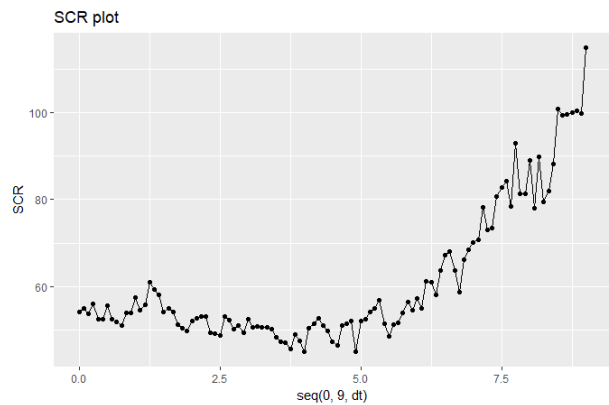
Bonus kapitalen eller den frie kapital er fundet ved:

$$B(t) = \max(A(t) - L(t), 0) \quad (41)$$

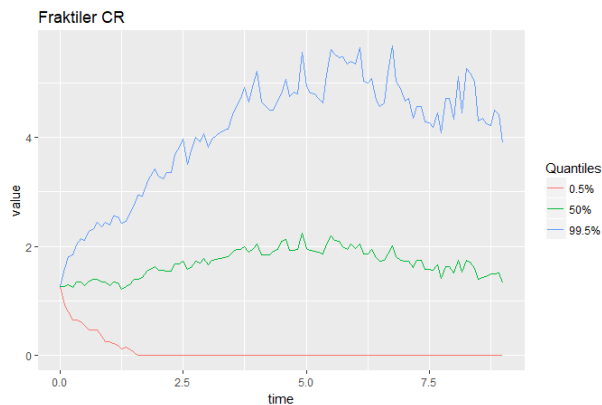
Derudover finder vi sandsynligheden for insolvens, ved at akkumulere sandsynligheden for at man er insolvens til tiden  $t$  med sandsynligheden for man har været insolvens tidligere. Det vil sige at den samme simulerede sti ikke kan blive insolvens 2 gange. Vi simulerer 1000 stier og får følgende grafer:



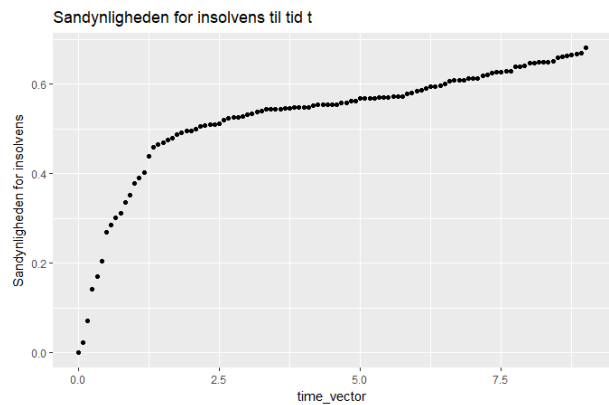
(a) Plot af fraktilerne for bonuskapitalen



(b) Plot af udviklingen af SCR



(c) Plot af fraktilerne af CR

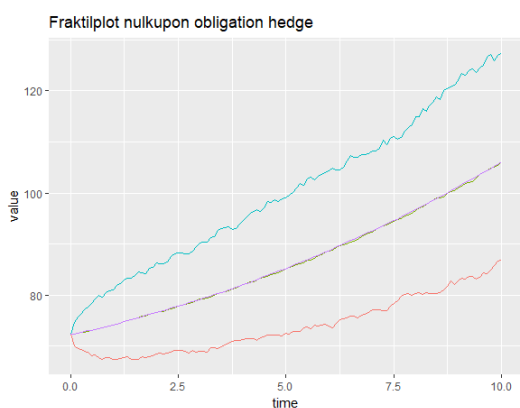


(d) Plot af sandsynligheden for at være insolvens

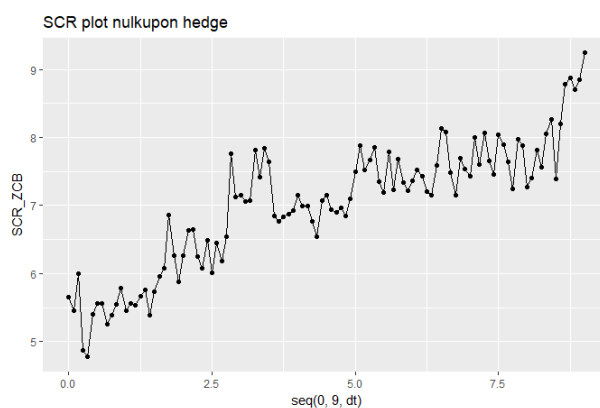
Vi ser, at risikoen for at virksomheden bliver insolvent gennem en periode på 9 år, ender op på lidt over 50 procent. Hvilket er en høj sandsynlighed for at blive insolvens, derfor vil vi kigge på to forskellige hedging metoder med det formål, at forsøge at formindske risikoen for at blive insolvens.

## 6.6 Nulkupon obligation hedging

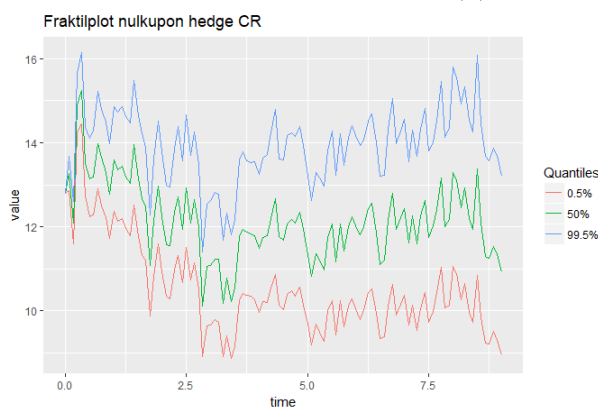
Ideen med et nulkupon hedge er, at til starttidspunktet køber man nulkupon obligationer, med værdien af de passiver man skal betale til tiden  $T$ . I vores tilfælde skal man betale  $L(T)$  til tiden  $T$ , dermed køber man nulkupon obligationer svarende til, at de har en værdi på  $L(T)$  til tiden  $T$ . Dermed sikrer man sig fuldstændig mod at kunne blive insolvens, da man altid vil have de penge man skal betale til tiden  $T$ . Værdien af nulkupon obligationerne til tiden  $t$  er givet ved  $p(t, T)L(T)$ . Ulempen ved at lave dette nulkupon hedge, er at man ikke har lige så mange penge at investere for, da man starter med at købe for omkring 927 nulkupon obligationer. og dermed kun har 63 af de 1000 i start kapital tilbage at investere for, og derfor ikke kan have en særlig stor potentiel gevinst. Vi får følgende grafer for den frie kapital, SCR og CR:



(a) Plot af fraktilerne for bonuskapitalen



(b) Plot af udviklingen af SCR



(c) Plot af fraktilerne af CR

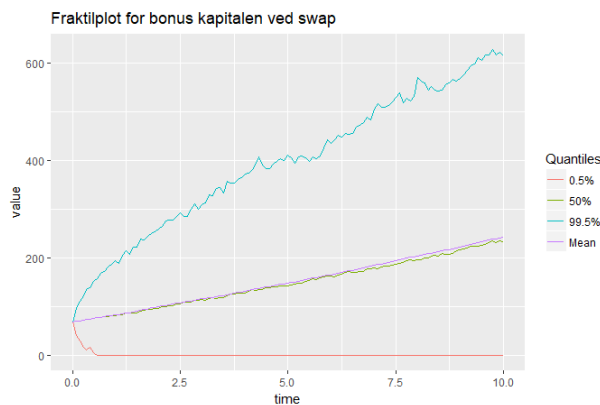
Vi ser, at bonus fraktilerne ligger på meget lavere værdier, da de ligger helt nede under 80 til at starte med. Bonus fraktilerne følger faktisk vores aktivers udvikling, da vi har hedget os fuldstændig og dermed er  $B(t)=A(t)$ . Derudover ser vi at CR altid er større end 1 og derfor er sandsynligheden for insolvens altid 0 og derfor har vi ikke plottet sandsynlighederne. Dermed må vi konkludere at vores hedge har virket hensynsmæssigt med hensyn til at sænke risikoen for insolvens. Men har ikke fået en særlig høj bonus eller frie kapital. Man kunne derfor overveje at hedge for noget af det man skal betale i stedet for det hele, og dermed stadig mindske risikoen, men samtidig have flere penge at investere.

## 6.7 Nulkupon obligation swap hedge

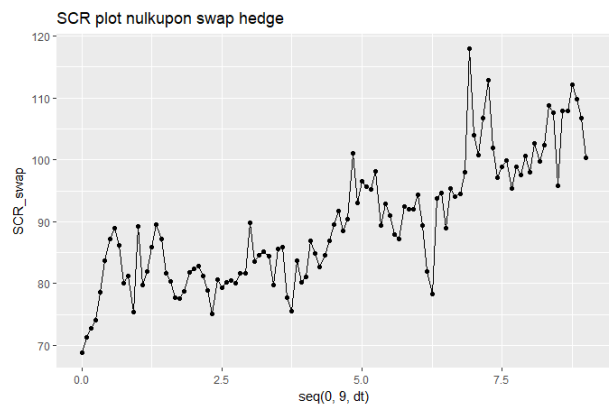
Nu vil vi kigge på en anden form for hedge, der hedder Nulkupon obligations swap hedge. Som der ligger i ordet swap, handler det om at bytte, i dette tilfælde bytter man en fast rente med en variabel rente. En swap består af et fast ben og et flydende ben. Det faste ben er ligesom i nulkupon hedgen,

at vi ved starttidspunktet køber nulkupon obligationer med udløbsdato  $T$  og som har værdien  $L(T)$  til tiden  $T$ . Forskellen er at i stedet for at betale med det samme, betaler man ved et flydende ben. Det flydende ben fungerer på den måde at man til hvert tidspunkt betaler  $r(t)dt * \text{hovedstol}$ , hvor hovedstolen vil være værdien af det fasteben. Hovedstolen betaler man selvfølgelig også til tiden  $T$ . En fordel ved dette hedge er, at man har flere penge at investere, da man først betaler det store beløb til tiden  $T$ . Både vores investeringer og betalinger afhænger af renten, så ved dette hedge er vi meget eksponeret overfor den variable rente.

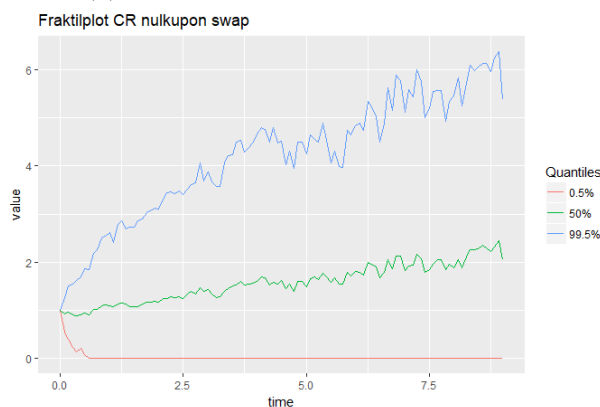
Dette har vi simuleret, hvor vi har antaget at renten vi diskonterer med, er den rente man får på det flydende ben og derfor er nutidværdien af fremtidige betalinger lig med hovedstolen. Dermed er vores passiver til tiden  $t$  lig med  $L(t) + \text{hovedstol}$  for flydende ben. Vi får følgende grafer efter simulering:



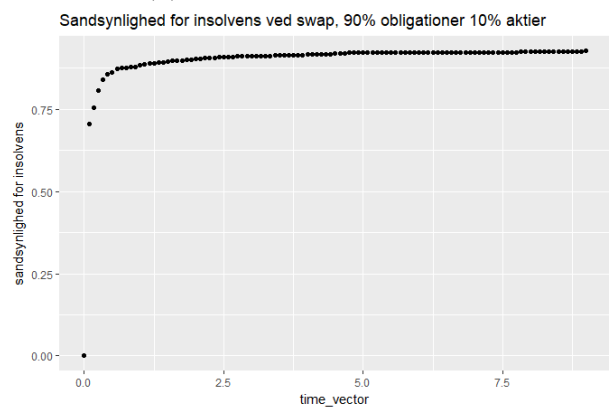
(a) Plot af fraktiler for bonuskapitalen



(b) Plot af udvikling af SCR



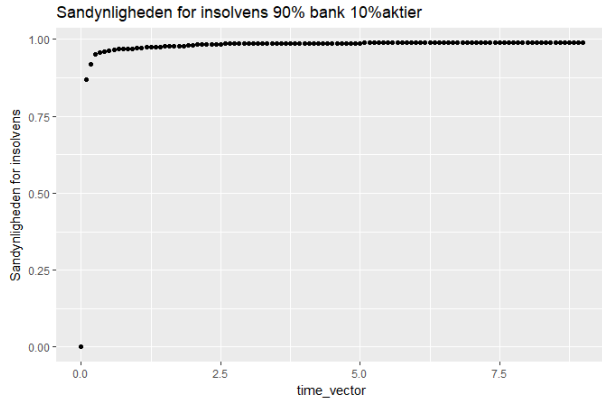
(c) Plot af fraktilerne af CR



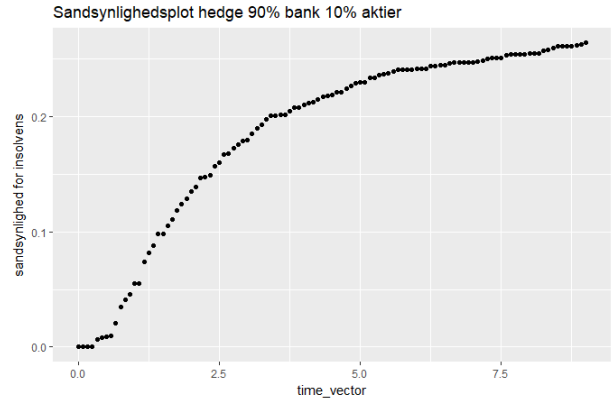
(d) Plot af sandsynligheden for at være insolvens

Som vi kan se på graferne så virker vores swap ikke efter planen, da vi får en højere sandsynlighed for insolvens end da vi ikke lavet nulkupon swap hedget. Dette skyldes at i vores portefølje er alt for udsat for rente variation. Derfor kunne man overveje at lave en portefølje med mere i banken i stedet for obligationer. Da obligationerne er mere følsomme overfor renten end banken er. For at se dette har vi lavet en portefølje med 90 procent i banken og 10 procent i aktier. I dette tilfælde ser vi at sandsynligheden for insolvens bliver reduceret gevaldigt med et swap hedge.





(a) Sandsynligheden for insolvens uden hedge



(b) sandsynligheden for insolvens med hedge

Figur 17: Sandsynligheden for insolvens med og uden hedge med en investering på 90% i banken og 10% i aktier

Vi ser at i dette tilfælde vil nul kupon swap hedge være et godt hedge, men selvom det er et godt hedge i dette tilfælde, vil man for det meste ikke investere så stor andel i banken, da det ikke giver lige så gode afkast, som aktier og obligationer. Det er også derfor man får så stor sandsynlighed for insolvens uden hedge.

## 6.8 Fair pris og bonus rate

Nu vil vi kigge på en situation, hvor der er en anden virksomhed, der er interesseret i at købe pensionsvirksomheden vi har arbejdet med indtil videre. Men virksomheden er i tvivl om pensionsmedlemmerne er blevet lovet en garanteret rente eller en garanteret ydelse. Derfor regner vi den fair pris af passiverne, som er forskellen mellem ens aktiver og passiver til tiden store  $T$  i begge tilfælde det kan man også kalde bonus eller den frie kapital.

I tilfældet med garanteret ydelse, har man lovet at betale  $L(T)$  og man har aktiver  $A(T)$ . Hvis aktiverne er lavere end passiverne vil man ikke købe virksomheden og derfor kan vi se det som en europæisk call option med strike  $L(T)$  og hvor det underliggende aktie er aktiverne. Dermed er værdien af optionen givet ved  $\max(A(T) - L(T), 0)$ . Dette kan vi prise ved Monte Carlo simulation, hvor vi simulerer aktiverne frem under martingal målet  $Q$  og diskonterer tilbage med nutidsværdien af prisen på en nul kupon obligation.  $Q$ -dynamikkerne for vores model er givet ved:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa(\theta^Q - r(t))dt + \sigma_r dW_1^Q(t) \\ dS(t) &= S(t)r(t)dt + S(t)\sigma_s dW_3^Q(t) \\ dW_3^Q(t) &= \rho dW_1^Q(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2^Q(t) \\ dp(t, T) &= p(t, T)r(t)dt - \sigma_r B(t, T)dW_1^Q(t) \\ d\beta &= r(t)\beta(t)dt \end{aligned} \tag{42}$$

Vi har stadig de samme parametre og en portefølje med 0 procent i banken 10 procent i aktier og 90 procent i obligationer og får en fair pris til at være 80.73174.

Ved den garanteret rente skal man betale årligt, hvor man hvert år ser det som udløbet. Så til år 1 betaler man  $L(1) = P(1 + q)^1$  o.s.v op til år 10, som er slut året i vores tilfælde. Så vi får i alt 10 optioner, som bliver betalt løbende, disse bliver diskonteret tilbage med den garanteret rente.

Værdien af den garanteret rente er altså givet ved summen af værdien af de 10 optioner:

$$\max(A(1) - L(1), 0), \dots, \max(A(T) - L(T))$$

Prisen for disse europæiske bonusoption kan regnes med Monte Carlo simulation ligesom ved den garanteret ydelse. Vi får en samlet værdi af optionerne til at være 300.9295.

Vi ser at den fair pris for vores passiver bliver noget højere ved garanteret rente end ved garanteret ydelse og det er derfor vigtig hvad man skriver i kontrakten med medlemmerne.

Indtil nu har alt den frie kapital  $B$  gået til pensionsmedlemmerne, men normalt vil noget af den frie kapital gå til pensionsvirksomheden. Dette skyldes, at pensionsvirksomheden tager risikoen for at blive insolvens og derfor skal have noget af den frie kapital. Den fair bonus rate  $\eta$  er defineret ved:

$$\begin{aligned} E_Q \left[ e^{\int_0^T -r(s)ds} (L(T) + B(T)) \right] &= P \Leftrightarrow \\ E_Q \left[ e^{\int_0^T -r(s)ds} \right] (L(T) + B(T)) &= P \Leftrightarrow \\ p(0, T)(L(T) + B(T)) - P &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Hvor  $B(T) = \eta \cdot \max(A(T) - L(T), 0)$  og  $\eta \in [0, 1]$ .

Den fair bonusrate er fundet i  $r$  ved en bisection metode til at finde rodden.

Bonusraten er fundet til 0.89 Det vil sige at pensionsvirksomheden for næsten hele den frie kapital.

## 7 Konklusion

Som vi har set igennem hele projektet, er en ESG et stærkt værktøj til at beskrive, forudsige og modellere finansielle markeder. Vi har gjort os nogen antagelser på virkeligheden, der har gjort at vi har kunnet regne og simulere hvordan virkeligheden opfører sig. Selvom vi har gjort os disse antagelser, har vi kunne ramme virkeligheden godt. Vi har set at vi med vores modelantagelser, har kunnet simulere udviklingen af forskellige aktier, prisfastsætte både europæiske, amerikanske og asiatiske option og udregne insolvens sandsynligheder for en pensionsvirksomhed. Vi har set at Monte Carlo simulation er et godt værktøj til at prisfastsætte optioner, og faktisk giver de samme resultater, som den kendte Black-Scholes formel. Samtidig er Monte Carlo simulation også mere alsidig, da man f.eks. kan prisfastsætte asiatiske optioner, som der ikke findes nogen lukket formløsning for. Derudover har vi set at man ved at hedge kan sænke sin sandsynlighed for insolvens, men vi har også set, at man skal tænke sig om da det ikke er alle hedges der virker, efter hensigten, som var tilfældet ved nulkupon swap hedget.

Selvom vi kunne en masse ting med ESG, så er der også plads til forbedringer. Som vi så, er det ikke en ufejlbarlig antagelse at aktiepriserne var lognormalt fordelte. Dette skyldes, at der lå for meget sandsynlighed i halerne. Disse høje og lave værdier kunne vores modelantagelser ikke registrere. En mulig udvidelse kunne, som tidligere nævnt være en jumpmodel hvor man brugte diskrete tidsskridt i stedet for de små kontinuerte vi bruger. I den sidste del af projektet fik vi også tilføjet stokastiske renter, hvilket var en tilpasning, der vil gøre modellen mere virkeligheds nær. Men som vi så med implied volatilitet, så er volatiliteten heller ikke konstant, som vi har antaget. En mulig udvidelse ville også være at implementere stokastisk volatilitet. Derudover har vi i vores ESG for Asset liability management en passiv side der er meget forsimplet og derfor kunne en udvidelse være at gøre den mere virkelighedsnær.

## Bilag

Alt R kode for projektet, kan findes på Github, som kan findes på følgende link:  
[https://github.com/AskKristoffersen/simulating\\_reality](https://github.com/AskKristoffersen/simulating_reality)

## 8 Litteratur

### Litteratur

- [1] Rüdiger U. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer, 4. udgave (2009)
- [2] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous time*. Oxford, 3.udgave (2009)
- [3] Stafan Graf, Alexander Kling, Jochen Russ. *Insurance: Mathematics and economics*. Elsevier(2011) side 115-125
- [4] Phelim Boyle, Mark Broadie, Paul Glasserman. *Monte Carlo methods for security pricing*. Elsevier(1997)
- [5] Rolf Poulsen. *IV Leaks*. University of copenhagen,(2017)
- [6] Ernst Hansen *Intorduktiion til Matematisk Statistik*. Københavns Universitet, 3.udgave(2012)
- [7] Alexander Sokol, Anders Rønn-Nielsen. *Advanced Probability*. University of Copenhagen, 4.udgave(2016)
- [8] Lando, D., Poulsen, R., *Lecture Notes for Finance 1 (and More)*, University of Copenhagen (2015)
- [9] Rolf Poulsen. *Economic Scenario Generator slides*( 2018)
- [10] ATP. *ATP slides om Asset Liability Management*(2016)
- [11] <https://www.r-bloggers.com/fun-with-the-vasicek-interest-rate-model/>
- [12] <https://www.r-bloggers.com/the-only-thing-smiling-today-is-volatility/>
- [13] [http://stevenlillywhite.com/papers/option\\_estimation.pdf](http://stevenlillywhite.com/papers/option_estimation.pdf)