ALM i praksis - Dag 1

1. og 2. november 2016

Den Danske Aktuarforening

Indhold – Blok B

- **Kapitalmarkedsmodellen**
  - Baggrund og struktur
  - Kernen
  - Renter, inflation, aktier, valuta og modpartsrisiko
- **Moderne porteføljeteori**
  - Middelværdi-varians analyse
  - Med og uden et risikofrit aktiv
  - Tangentportefølje, risk parity og gearing
  - Akkumulerede afkast
  - Øvelse

Kapitalmarkedsmodellen

Kapitalmarkedsmodel vs model for aktiver

- **Kapitalmarkedsmodellen simulerer udviklingen på de finansielle markeder i månedlige eller kvartalsvise skridt**
  - **Rente- og inflationskurver (forventet inflation)**
  - **Aktieindeks …**

- **Aktivmodellen modellerer specifikke finansielle aktiver**
  - **Obligationer (statsgæld, realkredit, indeks) og rentederivater (renteswaps)**
  - **Aktier og aktieoptioner …**

- **Alle aktivers (og passivers) værdi beregnes ud fra de samme underliggende kapitalmarkedsdata**
  - **Sikrer konsistens i prissætning og afkast på tværs af aktiver (og passiver)**
  - **Eksempelvis indgår de samme (seks) rentekurver i værdifastsættelsen af statsobligationer, renteswaps og hensættelsen**

Hvilket mål simuleres der under?

- **Det risikoneutrale mål ("Q-målet")**
  - **Sikrer konsistent (arbitragefri) prissætning af finansielle aktiver**
  - **Kalibreres ud fra aktuelle priser på en række benchmark-aktiver**
  - **Anvendes til prisning, men siger *ikke* noget om hvordan prisen udvikler sig over tid**
- **Det fysiske mål ("P-målet")**
  - **Beskriver den observerbare dynamik på de finansielle markeder**
  - **Estimeres ud fra historiske tidsrækker**
  - **Anvendes til risikostyring og optimering (design); beskriver prisudviklingen over tid**
- **Pris på tid *t* af sikker betaling til tid *t* +*T*:** $p(t,T) = E^Q\left[exp\left(-\int_t^{t+T} r(s)ds\right)\right] = exp(-T\, r(t,T))$
  - I en Q-model udregnes prisen ud fra Q-dynamikken af den korte rente
  - I en P-model simuleres prisen, $r(t,T)$, direkte

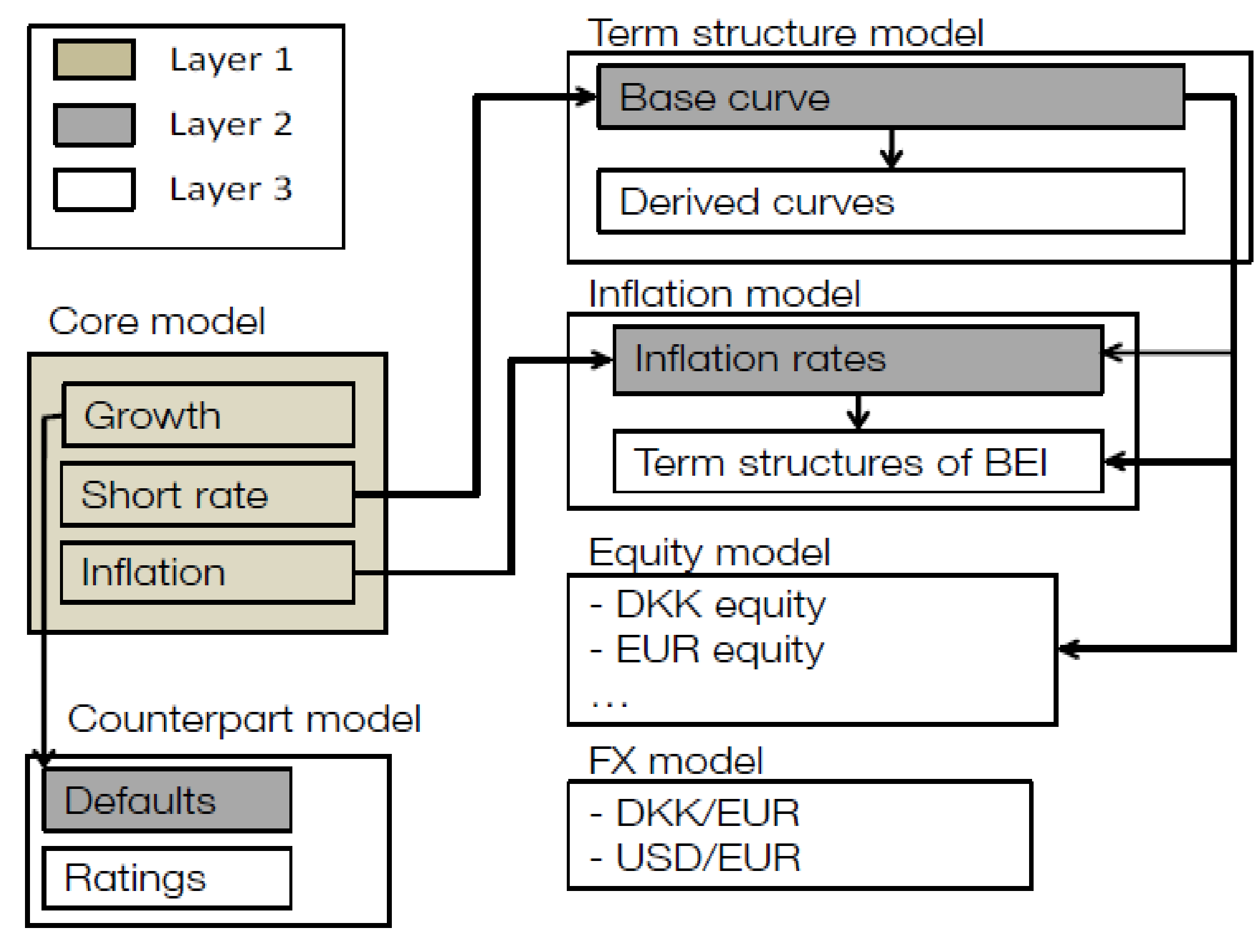
atp=

Struktur af kapitalmarkedsmodellen i Intern Model

- **Kapitalmarkedsmodellen er opdelt i tre lag**

1. **"Kernen" (eng. Core model)**
   - Stiliseret Taylor-regel: Centralbankerne fastsætter den korte rente under hensyntagen til mål for inflation og vækst
2. **Rentekurver, konkurssandsynligheder (eng. Defaults) og overgange mellem rating-klasser afhænger af kerneøkonomiens tilstand**
   - Fx: De lange renter afhænger af de korte renter, og der induceres dermed en afhængighed mellem lange renter og inflation og vækst
3. **Yderligere risikofaktorer afhænger af 1. og 2. lag**
   - Fx: Aktieafkast afhænger af renteniveauet
   - *Valutakurser er dog pt. uafhængige af resten af økonomien*

- **Den lagvise opbygning giver en (forholdsvis) sparsom parametrisering og gør det let at tilføje nye elementer**



Kapitalmarkedsmodellens bestanddele

- **Kernen**
  - Europæisk rente, vækst og inflation
- **Renter**
  - Euro swap, EONIA swaps, dansk swap, danske stater, tyske stater, amerikanske stater, samt kreditobligationer (high yield)
  - Desuden implicit volatilitet til prisning af rente-optioner, fx swaptioner (Vil ikke blive gennemgået)
- **Inflation**
  - Realiseret inflation, break-even inflation
- **Aktieindeks**
  - Dansk, europæiske og amerikanske børsnoterede aktier, samt private equity, ejendomme, olie og guld
  - Desuden implicit volatilitet til prisning af aktie-optioner, fx aktieputs (Vil ikke blive gennemgået)
- **Valutakurser**
  - Kroner, euro, dollars, yen
- **Modparter**
  - Ratings, fallit

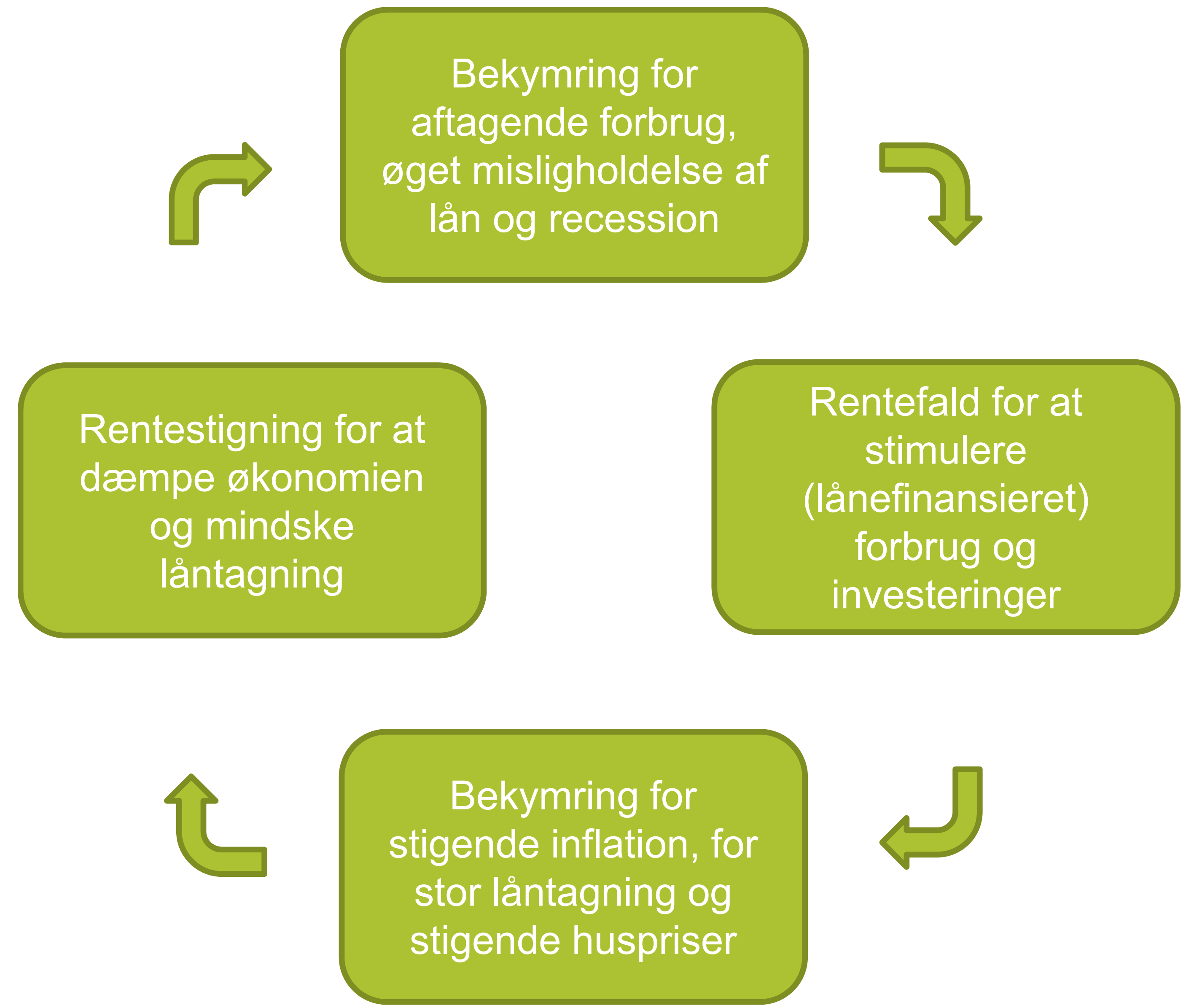
Kernen: Den (teoretiske) rente-inflations-cyklus

- **Den lagvise modelopbygning er baseret på den empiriske observation, at de finansielle markeder reagerer nyheder om fundamentale makroøkonomiske variable**

- ***Kernen* udgøres af tre fundamentale økonomiske variable**
  - **Kort rente**
  - **Vækst**
  - **Inflation**

- **Teorien tilsiger at disse variable påvirker hinanden som vist på figuren**

  rentefald → øget vækst → øget inflation → rentestigning → mindre vækst → mindre inflation → rentefald → …



Kerne: Model

- **De tre fundamentale økonomiske variable i kernen**
  - **Real BNP-vækst, *g***
  - **Prisinflation, *h***
  - **Den korte rente, *r***

- **Den korte rente transformeres for at gøre modellen mere robust**
  - $\boldsymbol{\rho_i = c\log\left(e^{(r_i - m)/c} - 1\right)}$

- **De tre variable fremskrives ved den autoregressive proces**
  - $\boldsymbol{x_i = (g_i, h_i, \rho_i)^T}$
  - $\boldsymbol{x_i = Ax_{i-1} + b + Fz_i^{core}}$
  - **hvor z_i^{core} er 3-dim. vektor af uafhængige N(0,1) variable**

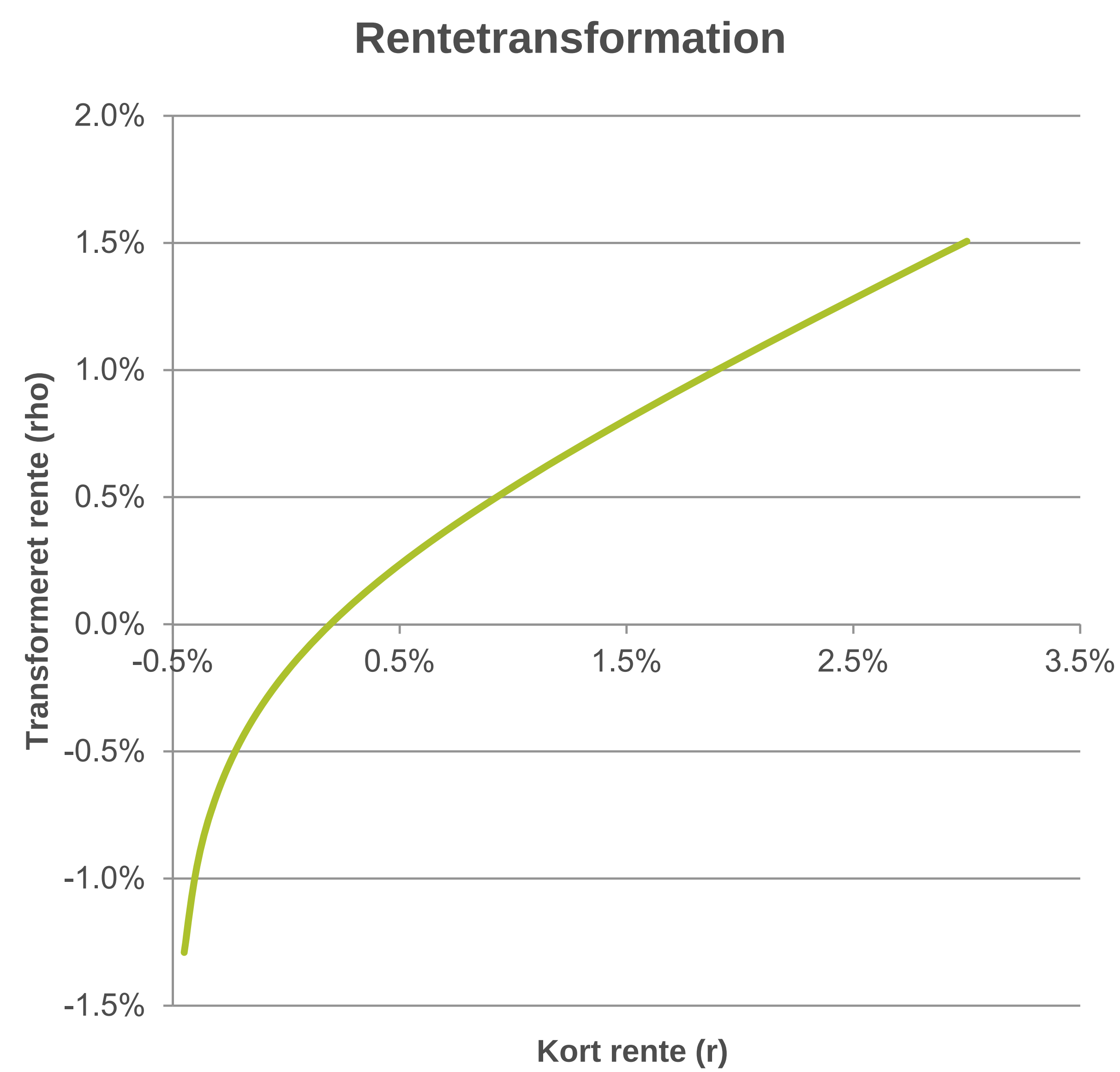
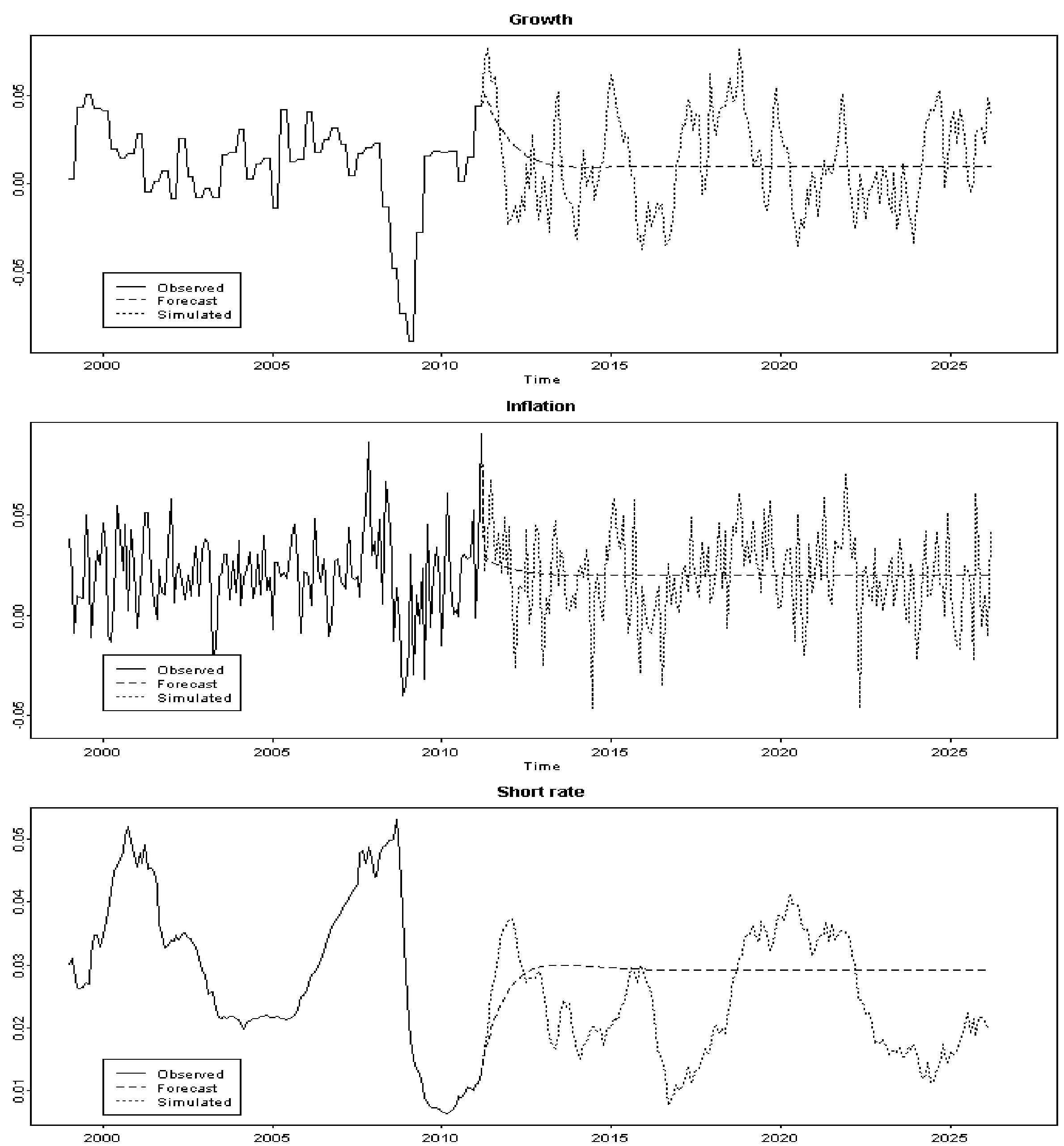


Illustration med $m = -0.5\%$ og $c = 1\%$

Kerne: Eksempel på scenarie



Kvartalsvise data for vækst

Estimation af månedlig core-model via formulering som State Space Model med manglende data

Både vækst- og inflationsdata er sæsonkorrigerede inden estimation af core-modellen

Renten er mere persistent end udviklingen i vækst og inflation

Samme mønster i historiske og simulerede data

Renter: Base curve

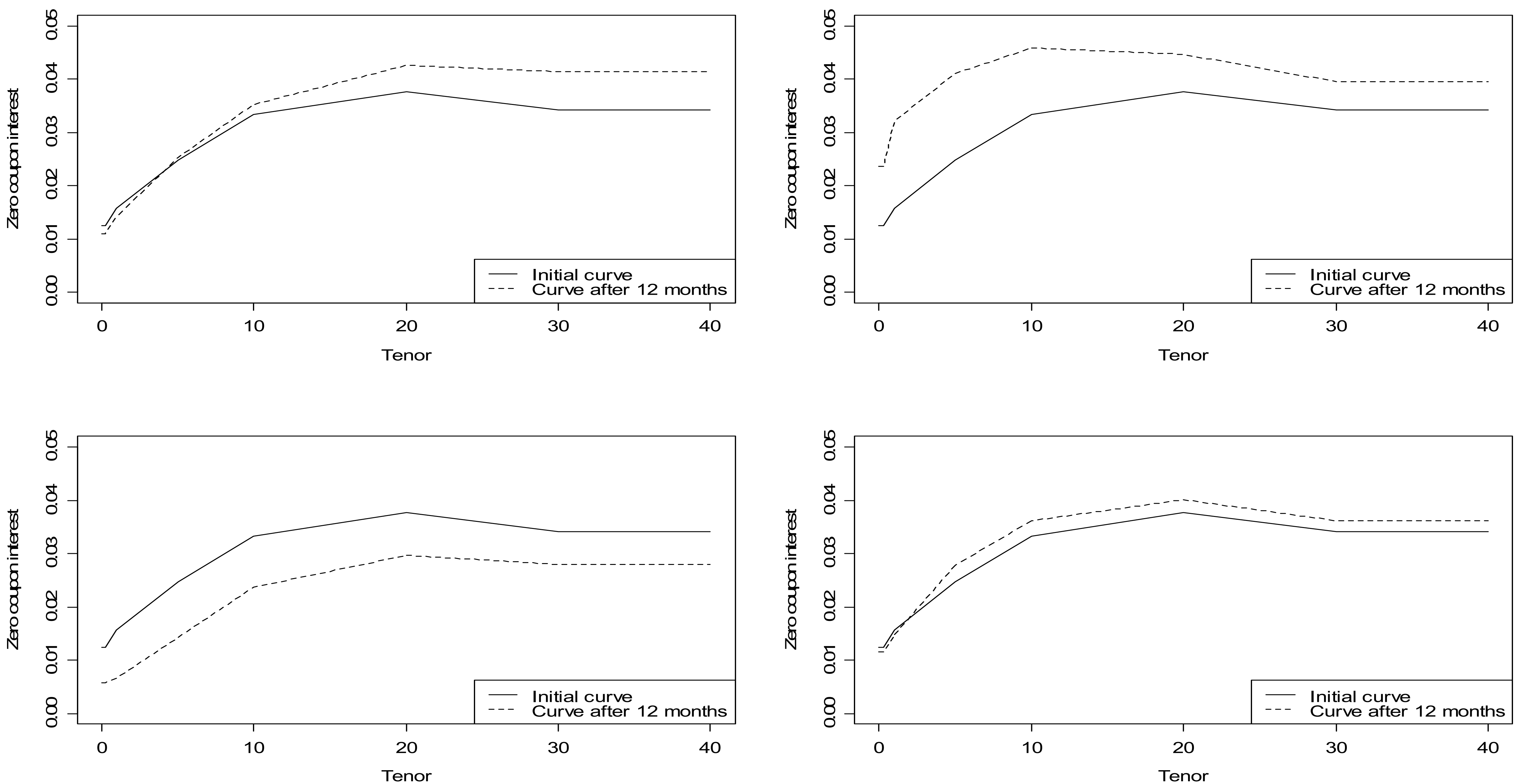
- **Empiri fortæller, at rentekurver …**
  - **… er *begrænset negative* og typisk voksende**
  - **… varierer omkring et middelniveau**
  - **… udviser høj korrelation mellem renter med næsten samme løbetid**
- **Disse stiliserede fakta ligger til grund for en model med**
  - **middel-reverterende, korrelerede, samt nedadtil begrænsede renter**
- **Rentekurve-universet er bygget op om en ”base curve”**
  - **Base curve beskriver en fundamental rentekurve i de finansielle markeder**
  - **Vi benytter euro swap-kurven som base curve**
  - **Øvrige kurver, fx den dansk swap-kurve, modelleres ved deres spænd til base curve**

Renter: Base curve model

- **Kurven modelleres ved en VAR(1)-proces for M (transformerede) nøglerenter**
  - $\rho_{i,j} = c\log\left(e^{(r_{i,j}-m)/c} - 1\right)$, for $j = 1, \ldots, M$
  - $$\begin{pmatrix} \rho_{i,1} \\ \vdots \\ \rho_{i,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{i-1,1} \\ \vdots \\ \rho_{i-1,M} \end{pmatrix} + \Phi\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{i-1,1} \\ \vdots \\ \rho_{i-1,M} \end{pmatrix}\right) + A\begin{pmatrix} z_{i,1}^{base} \\ \vdots \\ z_{i,M}^{base} \end{pmatrix}$$
  - μ beskriver middel-niveauet for de transformerede renter, og Φ bestemmer tilpasningshastigheden
  - μ sættes således, at de langsigtede middelrenter stemmer overens med dagens rentekurve
  - Løbetiderne for nøglerenterne er 3M, 1Y, 5Y, 10Y, 20Y og 30Y
  - Kurven interpoleres lineært imellem de simulerede nøglerenter
  - Renterne er i kontinuert konvention, dvs. prisen i dag for 1 kr. om fx 20Y er $p_{0,20Y} = exp(-r_{0,20Y} \times 20)$

- ***Den første koordinat sættes lig den korte rente fra kernen og de øvrige (transformerede) renter trækkes fra den betingede fordeling givet den korte rente*** atp=

Renter: Eksempel på rentekurveudviklinger over et år



Tenor er blot et fancy ord for løbetid!

Renter: Derived curve

- Base curve beskriver euro swap kurve

- Kapitalmarkedsmodellen har forskellige andre rentekurver
  - Danske og EONIA* swaprenter
  - Danske og tyske statsrenter
  - Kreditobligationer
  - Amerikanske statsrenter

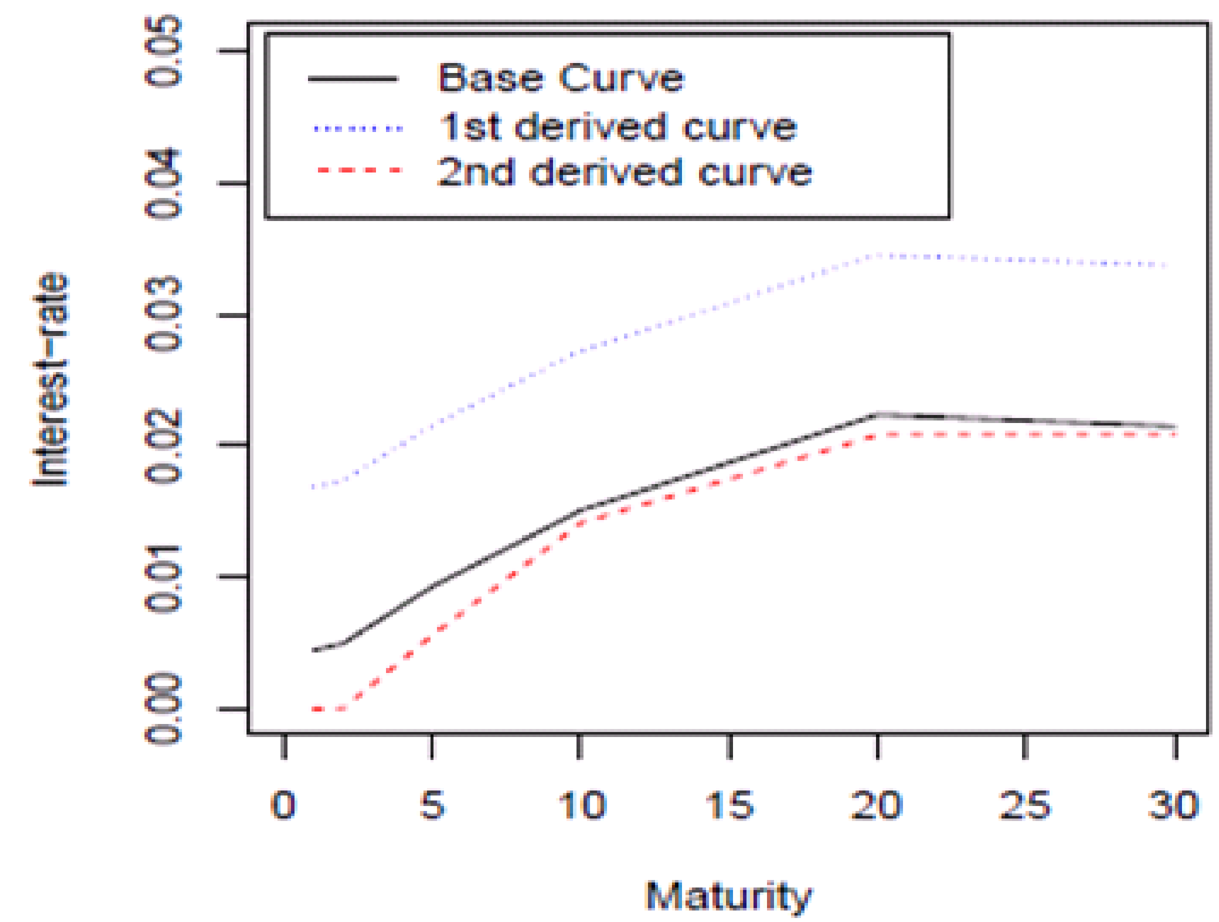
- Modellen for disse kurver skal tage højde for …
  - … at kurverne hver især opfylder samme krav som base curve
  - … at kurverne er indbyrdes afhængige
  - … samt undgå at antallet af parametre eksploderes (base curve modellen alene har 30+ parametre)

**) EONIA står for Euro OverNight Index Average, og EONIA swaps er swaps baseret på disse helt korte renter*

Renter: Derived curve model

- **Der er flere forskellige modeller til derived curves**

- **Den simpleste er en 1-faktor model for spreadet**
  - **Spread til base curve til tid 0:** $s_{0,j} = r_{0,j} - r_{0,j}^{base}$ **for** $j = 1, \dots, M$
  - **Den J'te spread-komponent (svarende til 10-årspunktet) modelleres som en AR(1)-proces**
  - $s_{i,J} = s_{i-1,J} + \alpha(\gamma - s_{i-1,J}) + \sigma z_i^{der}$
  - **De øvrige komponenter er fuldt korrelerede med den J'te**
  - $s_{i,j} = s_{0,j} + (s_{i,J} - s_{0,J})$ **for** $j \neq J$
  - **Rentekurven til tid i er** $r_{i,j} = max\{r_{i,j}^{base} + s_{i,j}, m\}$



- **Amerikanske statsrenter har en særstatus, og modelleres mere detaljeret end de øvrige (europæiske) kurver**

Inflation: Baggrund

- **Inflationsmodellen omfatter**
  - **Realiseret inflation i EU og Danmark (forbrugerprisindeks)**
  - **Break-even inflationskurver i EU og Danmark**
    - Break-even inflation (BEI) er prisen på realiseret inflation

- **Stiliserede empiriske fakta**
  - **Realiseret inflation og break-even inflation er afhængige**
  - **Inflation er persistent og afhængig af renteniveauet (kort rente)**
  - **Europæisk og dansk prisudvikling er forbundet pga. international samhandel m.v.**

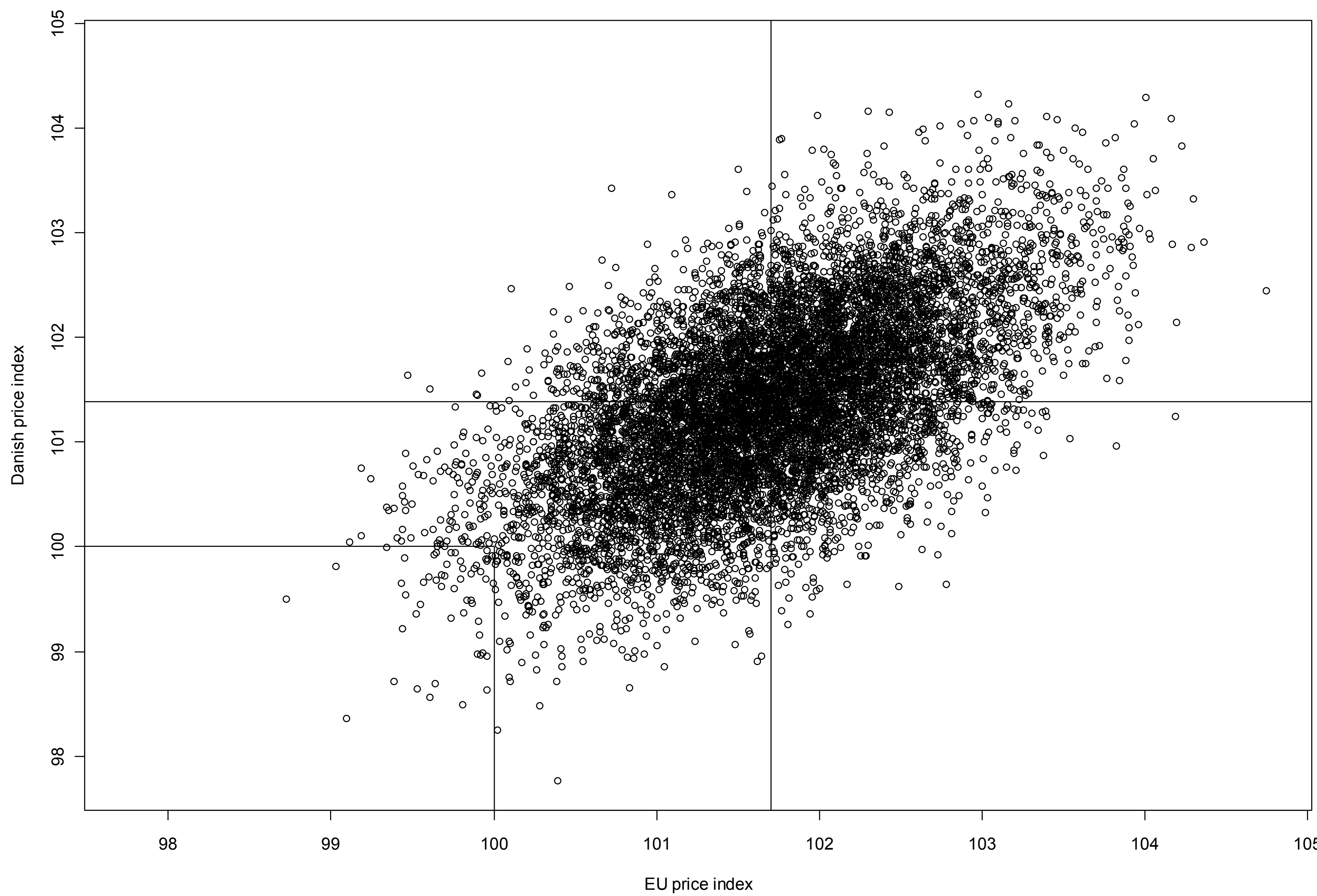
Inflation: Model for realiseret inflation

- **Akkumuleret prisindeks for region l til tid i betegnes: $H_{i,l}$**
  - **"Year-on-year" inflationsraterne for region l til tid i betegnes: $h_{i,l} = log\left(\frac{H_{i,l}}{H_{i-"12M",l}}\right)$**

- **Inflationsraterne modelleres simultant for EU og Danmark ($L = 2$)**
  - $\begin{pmatrix} h_{i,1} \\ \vdots \\ h_{i,L} \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} h_{i-1,1} \\ \vdots \\ h_{i-1,L} \end{pmatrix} + (I - \Pi)\Lambda \begin{pmatrix} r_{i,3M}^{base} \\ \vdots \\ r_{i,3M}^{base} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} z_{i,1}^{infl} \\ \vdots \\ z_{i,L}^{infl} \end{pmatrix}$
  - **Inflationsraterne er således en kombination af den forrige inflationsrate og den korte rente**
  - **Π og Λ er diagonale matricer, der beskriver hhv. graden af persistens og renteafhængighed**
  - **Bemærk, at der benyttes den samme korte rente fra base curve i begge regioner, $r_{i,3M}^{base}$**

- ***Euro-inflationsraten sættes lig inflationen fra kernen og den danske inflationsrate trækkes fra den betingede fordeling givet eure-inflationsrate***
  - **Samme ide som ved konstruktionen af base curve**

Inflation: Dansk og europæisk prisindeks efter 1 år $(H_0 = 100)$



Break-even inflation (BEI) er prisen for inflation

- **Realiseret inflation kan købes via inflationsindekserede obligationer eller swaps**
- **Den mest direkte eksponering mod realiseret inflation er via en zero coupon inflation-indexed swap (ZCIIS). I en ZCIIS udveksler to parter en fast fremtidig betaling for en real betaling**
  - **Inflationsindeks til tid t betegnes $H(t)$**
  - **Fast rente ved indgåelse til tid t for en swap med udløb til tid $t + T$ betegnes $k_t(T)$**
  - **For en swap indgået til tid 0 med løbetid T og hovedstol N udveksler parterne ved udløb følgende**

$$
\begin{tikzcd}
\text{Part A} \arrow[r, shift left, "{N[\exp(k_t(T) \times T) - 1]}"] & \text{Part B} \arrow[l, shift left, "{N\left[\frac{H(T)}{H(0)} - 1\right]}"]
\end{tikzcd}
$$

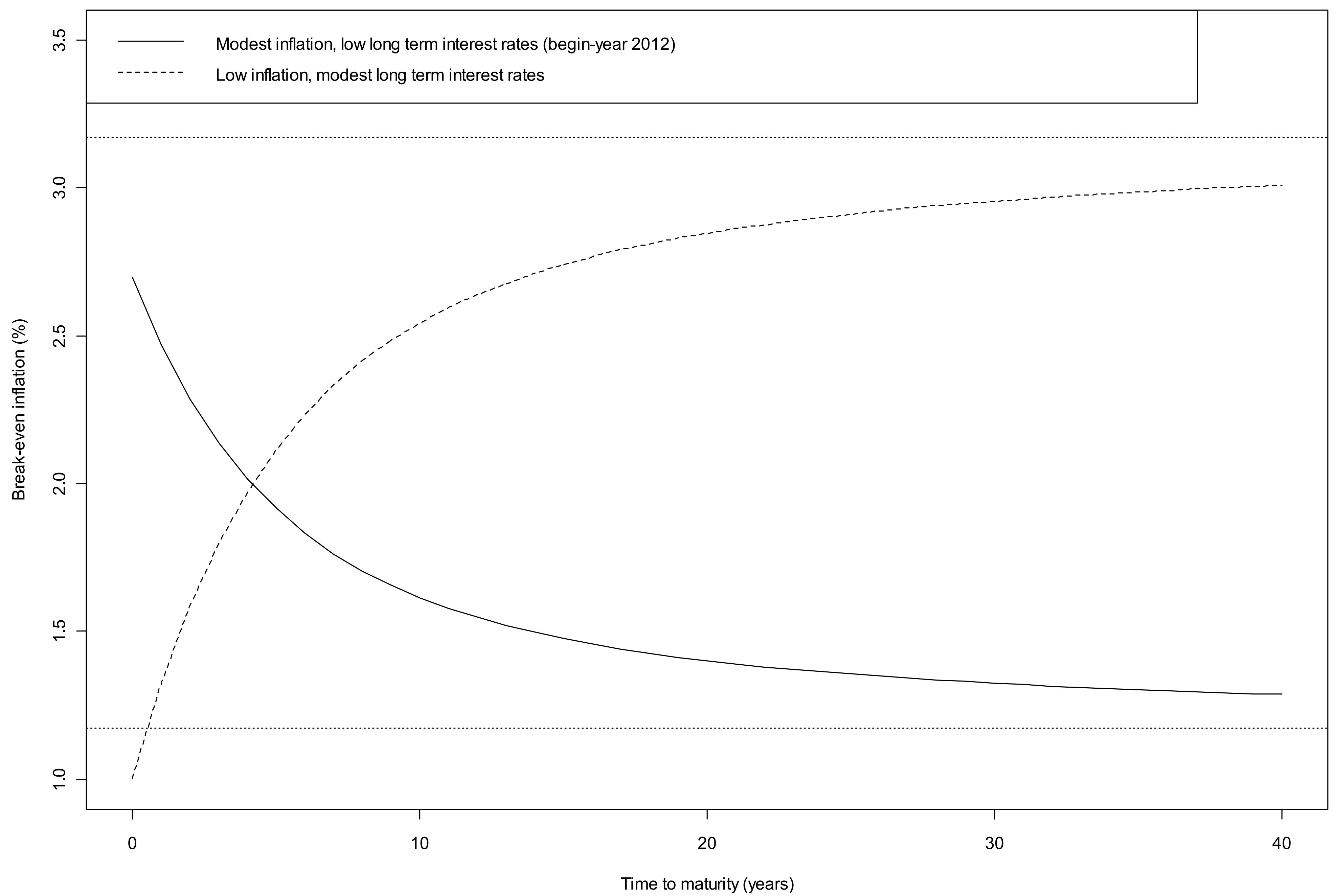
  - **Den faste rente, k, der betales for inflationen betegnes break-even inflation (for løbetid T)**

Inflation: Model for break-even inflation

- **Stiliserede empiriske fakta**
  - **Den korte BEI rente forventes at følge den realiserede inflation**
  - **Den lange BEI rente forventes at samvariere med de lange nominelle renter**

- **BEI-kurverne modelleres med en Nelson-Siegel funktion**
  - **Der er en europæisk og en dansk BEI-kurve (vi ser kun på en af dem her)**
  - **Kurven til tid $\boldsymbol{i}$ har formen:** $\boldsymbol{k_i(T) = \beta_{i,0} + \beta_{i,1}\frac{1-exp(-T/\tau)}{T/\tau} + \beta_2\left(\frac{1-exp(-T/\tau)}{T/\tau} - exp(-T/\tau)\right)}$
  - **Kurven er beskrevet ved de tre $\boldsymbol{\beta}$-parametre og $\boldsymbol{\tau}$**
  - $\boldsymbol{\beta_2}$ **og $\boldsymbol{\tau}$ er faste, mens $\boldsymbol{\beta_{i,0}}$ og $\boldsymbol{\beta_{i,1}}$ udvikler sig stokastisk**
  - **Den korte BEI rente: $\boldsymbol{k_i(0) = \beta_{i,0} + \beta_{i,1}}$ er linket til den realiserede inflation (i den givne region), $\boldsymbol{h_i}$**
  - **Den lange BEI rente: $\boldsymbol{k_i(\infty) = \beta_{i,0}}$ er linket til den længste nominelle rente på base curve, $\boldsymbol{r_{i,30Y}^{base}}$**

Inflation: Illustration af BEI-kurver



Aktier: Baggrund

- **Stiliserede empiriske fakta**
  - **Aktier giver et *forventet* merafkast i forhold til obligationer (equity premium)**
  - **Aktieafkast i forskellige markeder er korrelerede**
  - **Aktiekursen påvirkes af renten og renteændringer**
- **Total return indeks (TRI)**
  - **Fremskrives som sum af: Rentekomponent, risikopræmie, varighedskomponent og korreleret støj**
- **Der modelleres seks aktieindeks**
  - **Danske, europæiske og amerikanske børsnoterede aktier**
  - **Unoterede aktier (private equity), ejendomme, olie og guld**
- **Der modelleres endvidere implicit volatilitet til prisning af optioner**

Aktier: Model

- **Total return indeks til tid i**
  - $S_{i,n} = S_{i-1,n} exp(e_{i,n})$ for $n = 1, \dots, N$

- **Aktieafkastene for de N indeks modelleres ved**
  - $\begin{pmatrix} e_{i,1} \\ \vdots \\ e_{i,N} \end{pmatrix} = \eta r_{i-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} - (r_i - r_{i-1}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} z_{i,1}^{eq} \\ \vdots \\ z_{i,N}^{eq} \end{pmatrix}$
  - hvor $r_i = r_{i,3M}^{base}$ er den korte rente fra base curve, α er risikopræmien og β beskriver varigheden, dvs. følsomheden over for renteændringer

- **”Aktieindeks” skal forstås bredt**
  - Samme model bruges til at modellere indeks for unoterede aktier, ejendomme, olie og guld

Valuta: Baggrund

- **Kapitalmarkedsmodellen simulerer også valutakurser**
  - **DKK/EUR: Værdien af EUR i DKK**
  - **USD/EUR: Værdien af EUR i USD**
  - **JPY/EUR: Værdien af EUR i JPY**
- **Kursen mellem DKK og EUR modelleres som varierende omkring centralkursen, på grund af dansk fastkurspolitik**
- **Kurserne USD/EUR og JPY/EUR modelleres ved random walks, da disse valutaer flyder frit i forhold til hinanden**
- **Valutamodellen er ikke forbundet til andre modelkomponenter**

Valuta: Model

- Værdien af én euro i andre valutaer til tid i betegnes $y_{i,v}$ for $v = 1, \ldots, V$

- VAR(1)-model for logaritmen til valutakursen
  - $$\begin{pmatrix} log(y_{i,1}) \\ \vdots \\ log(y_{i,V}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} log(y_{i-1,1}) \\ \vdots \\ log(y_{i-1,V}) \end{pmatrix} + K\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} log(y_{i-1,1}) \\ \vdots \\ log(y_{i-1,V}) \end{pmatrix}\right) + \mathbf{M}\begin{pmatrix} z_{i,1}^{FX} \\ \vdots \\ z_{i,V}^{FX} \end{pmatrix}$$
  - c angiver middelniveauet for log-valutakurserne
  - $K = diag(k_1, \ldots, k_V)$ bestemmer driften mod middelniveauet
  - M bestemmer volatiliteten og korrelationen mellem log-valutakurserne

- For DKK/EUR sættes middelniveauet til (log) centralkursen for DKK/EUR

- For USD/EUR og JPY/EUR sættes $k_v = c_v = 0$, svarende til en random walk

Modpartsrisiko: Baggrund

- Default-modellen benyttes til at simulere fallithændelser blandt ATP's modparter

- Modparters fallitsandsynlighed modelleres ved en stokastisk proces, som afhænger af
  - Niveau for økonomisk vækst (fra kernen)
  - Modparters rating (kreditvurdering); denne udvikler sig over tid

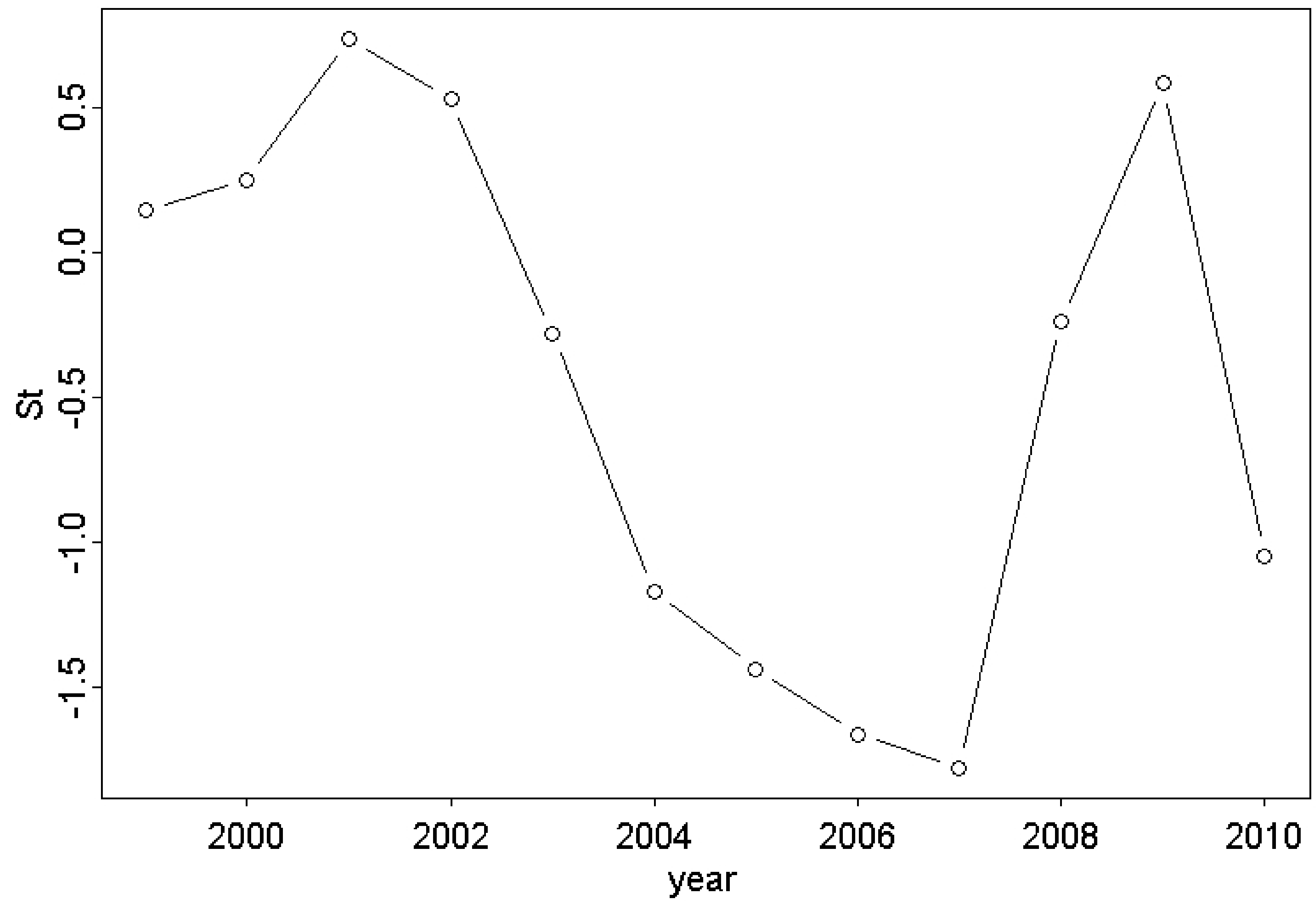
- Ved en fallithændelse ombyttes derivaterne med den pågældende modpart til det tilhørende kollateral
  - Aktier mister hele deres værdi og obligationer mister ca. halvdelen af deres værdi

- Tabene opgøres samlet pr. modpart

Modpartsrisiko: Model

- **Sandsynligheden for default (fallit) i en periode af længde τ efter tid i for en modpart med rating r er givet ved**
  - $p_{i,r} = 1 - exp(-\tau\, \lambda_{i,r})$
- **Den (annualiserede) default rate modelleres ved**
  - $\lambda_{i,r} = log(1 + exp(b_r + s_i))$
  - **hvor b_r er et rating-afhængigt niveau og s_i er en fælles tidsafhængig komponent**
  - **Den fælles komponent afhænger af den økonomiske vækst (g fra kernen) og det tidligere niveau**
  - $s_i = \alpha g_i + \beta s_{i-1} + \gamma + \sigma z_i^{default}$
- **Modpartens rating, r, følger en tidshomogen Markov proces med tilstandsrum**
  - **AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC/C**

Modpartsrisiko: Stærk tidsafhængighed i antallet af defaults



Moderne porteføljeteori

Moderne porteføljeteori

- Den klassiske teori dateres som oftest til Markowitz (1952, 1959)
- Antag du kan investere i n risikofyldte aktiver over den næste periode, fx ét år
- Afkastet over perioden betegnes $X = (X_1, \dots, X_n)'$ med middelværdi og varians
  - $E(X) = \mu$ og $Var(X) = \Sigma$
- Antag endvidere at der er et risikofrit aktiv med afkast r over perioden
- Sharpe ratio for det i'te risikofyldte aktiv defineres som
  - $S_i = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}$
  - Merafkastet (afkastet over den risikofri rente) i forhold til volatiliteten (standardafvigelsen)

Investering

- Der investeres i de n risikofyldte aktiver med (relative) porteføljevægte $w = (w_1, \dots, w_n)'$
  - Vægtene kan som udgangspunkt være både positive og negative
- Det resterende beløb investeres i det risikofri aktiv: $w_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i$
- Der investeres én krone i én periode
- Middelværdi og varians er givet ved
  - $E(w'X + w_0 r) = E(w'X + (1 - \sum_i w_i)r) = E(r + \sum_i w_i(X_i - r)) = r + w'\lambda$
  - $Var(w'X + w_0 r) = Var(w'X) = w'\Sigma w$
  - med $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, hvor $\lambda_i = \mu_i - r$ er risikopræmien for det i'te risikofyldte aktiv

Middelværdi-varians analyse

- Målet er at finde porteføljevægte således at variansen er minimeret for en given værdi af middelværdien, det vil sige
  - Minimér $w'\Sigma w$ for givet værdi af $r + w'\lambda$
- Middelværdi-varians optimering kan rationaliseres, hvis afkastene er (simultant) normalfordelt, idet det samlede afkast dermed bliver normalfordelt, og al optimering da kan skrives som funktion af middelværdi og varians
- Der er (med rette) mange kritikpunkter af middelværdi-varians analyse, fx
  - Der optimeres kun over én periode
  - Der er ingen mulighed for at omlægge porteføljen undervejs
  - Normalitetsantagelsen holder ikke i praksis
- Ikke desto mindre har tankegangen haft stor gennemslagskraft

Kun risikofyldte aktiver

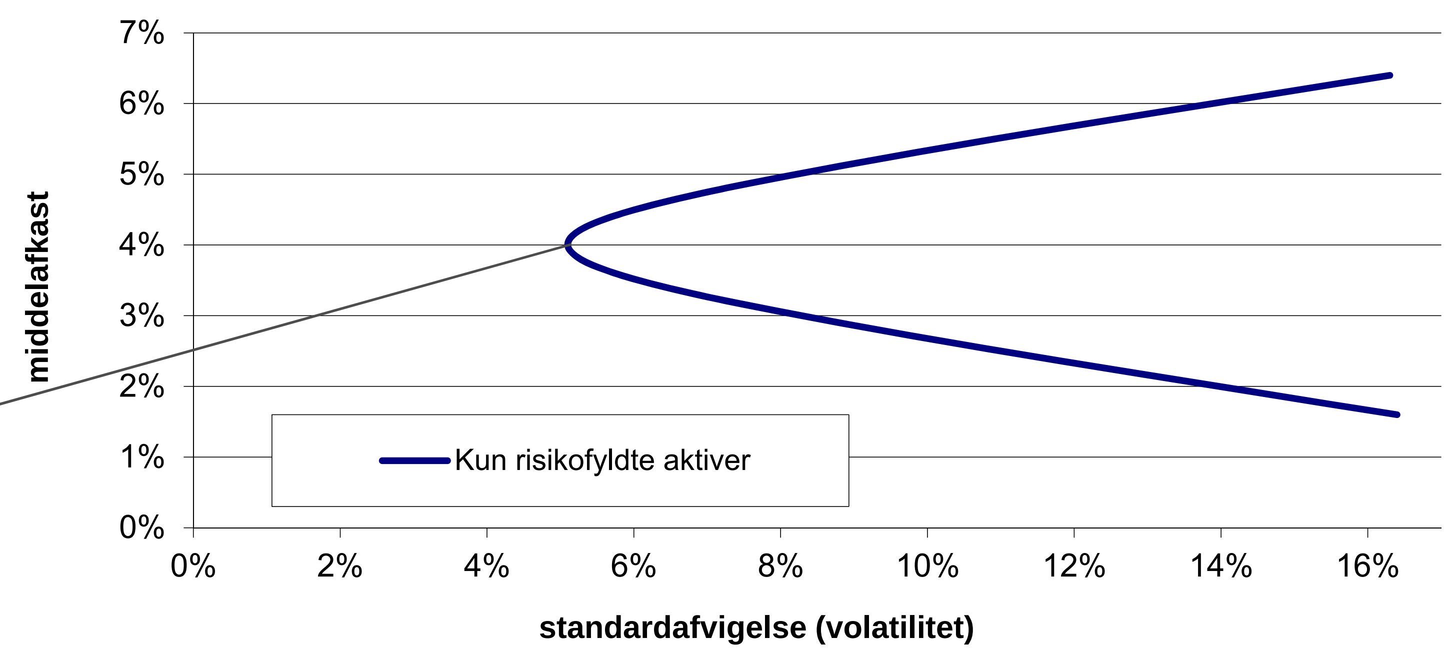
- **Antag først at der investeres udelukkende i risikofyldte aktiver, det vil sige $w_o = 0$**
  - **Den lavest opnåelige varians afhænger kvadratisk af middelafkastet**
  - **De resulterende porteføljer kaldes middelværdi-varians efficiente**

- **Two-Fund Separation Theorem I (Merton):**
  - **Alle efficiente porteføljer fremkommer som linearkombinationer af to faste efficiente porteføljer**

Fuldt investeret portefølje med mindst varians:

$$w = \Sigma^{-1}e \,/\, e'\Sigma^{-1}e$$

hvor $e = (1,..,1)'$



$$r = 3\%$$
$$\lambda = (1\%,\ 4\%)'$$
$$B = \begin{pmatrix} 5\% & 1\% \\ 1\% & 20\% \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = BB'$$
$$korr \sim 24\%$$

Alle aktiver

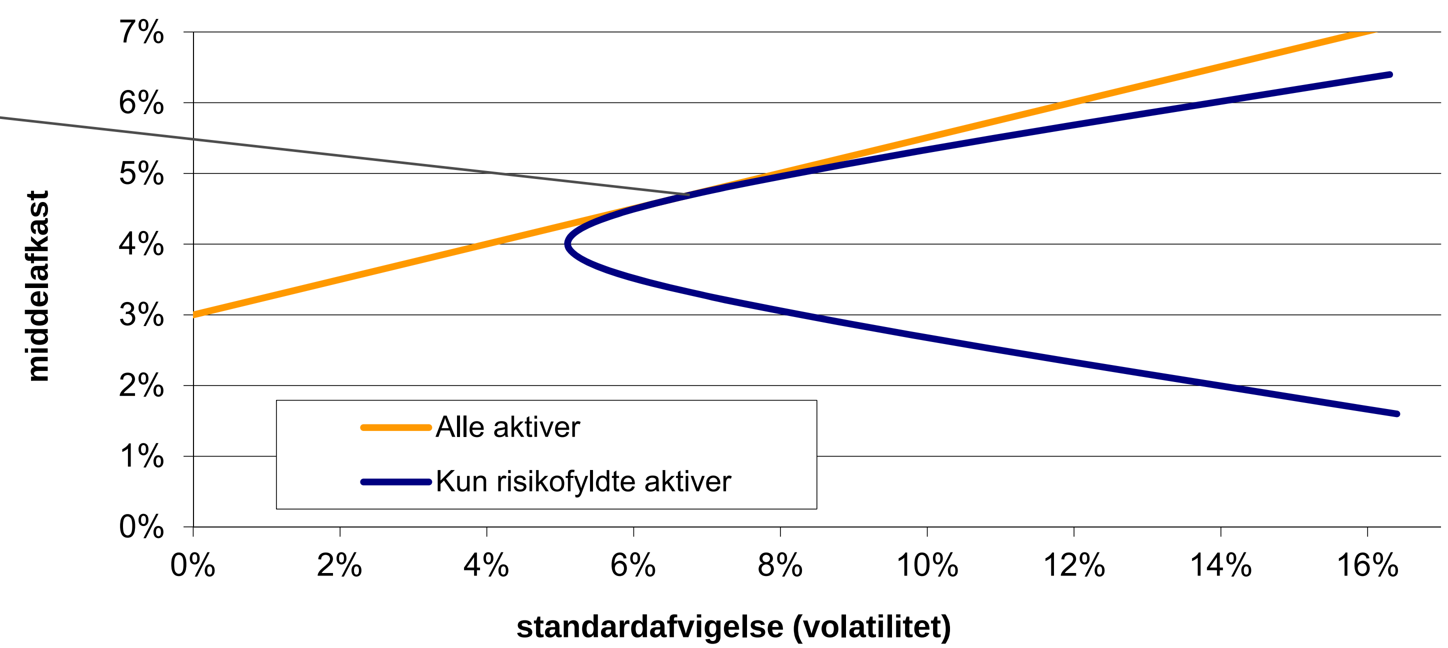
- **Antag at der investeres i både risikofyldte aktiver og det risikofri aktiv**
  - **Den lavest opnåelige varians afhænger kvadratisk af *merafkastet***
  - **Den lavest opnåelige standardafvigelse afhænger dermed lineært af merafkastet**

- **Two-Fund Separation Theorem II (Merton)**
  - **Alle efficiente porteføljer er linearkombinationer af det risikofri aktiv og tangentporteføljen**

Tangentporteføljen:

$$w = \Sigma^{-1}\lambda \,/\, \lambda'\Sigma^{-1}e$$

- den (eneste) fuldt investerede efficiente portefølje



$$r = 3\%$$

$$\lambda = (1\%,\ 4\%)'$$

$$B = \begin{pmatrix} 5\% & 1\% \\ 1\% & 20\% \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = BB'$$

$$korr \sim 24\%$$

Sharpe ratio

- **Alle efficiente porteføljer har samme Sharpe ratio, når det tillades at det risikofri aktive kan indgå i porteføljen**
  - **Sharpe ratio er merafkast delt med std.afv., det vil sige hældningen af linjen på forrige slide**

- **Den fælles værdi af (den optimale) Sharpe ratio kan skrives $\widehat{S} = \sqrt{\boldsymbol{S}'\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{S}}$**
  - $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S_1}, \dots, \boldsymbol{S_n})'$ **er vektoren af Sharpe ratios for de risikofyldte aktiver**
  - $\boldsymbol{C}$ **er korrelationsmatricen for fordelingen af** $\boldsymbol{X}$
    - Variansmatricen kan skrives $\Sigma = DCD$, hvor D er en diagonalmatrix med $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ i diagonalen

- **Specieltilfælde**
  - **Hvis afkastet på de risikofyldte aktiver er ukorrelerede er $\widehat{S} = \sqrt{\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}}$ (da $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$)**
  - **Hvis yderligere aktiverne har samme Sharpe ratio fås $\widehat{S} = \boldsymbol{S_1}\sqrt{\boldsymbol{n}}$**

Tangentporteføljen

- **Tangentporteføljen er den eneste portefølje som de to sæt af efficiente porteføljer (hhv. med og uden det risikofri aktiv) har til fælles**
  - **Den kan karakterises som den portefølje blandt de fuldt investerede, der har den højeste Sharpe ratio**

- **Porteføljevægtene i tangentporteføljen kan skrives**
  - $\boldsymbol{w_{tan}} = \boldsymbol{c\Sigma^{-1}\lambda} = \boldsymbol{cD^{-1}C^{-1}D^{-1}\lambda} = \boldsymbol{cD^{-1}C^{-1}S}$, **hvor** $\boldsymbol{c}$ **er en normeringskonstant**

- **Specialtilfælde**
  - **Hvis afkastet på de risikofyldte aktiver er ukorrelerede fås** $\boldsymbol{w_{tan}} = \boldsymbol{cD^{-1}S}$
    - Vægtene er således proportionale med Sharpe ratioen vægtet med den inverse standardafvigelse
  - **Hvis yderligere aktiverne har samme Sharpe ratio fås** $\boldsymbol{w_{tan}} \propto \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sigma_1}}, \dots, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sigma_n}}\right)$

Risk parity – alternativ fortolkning af tangentporteføljen

- **Dan n nye, gearede aktiver med afkast givet ved**
  - $Y_i = X_i\sigma_i^{-1} - (\sigma_i^{-1} - 1)r = r + (X_i - r)\sigma_i^{-1}$
  - **Det svarer til afkastet fra en strategi, hvor der for hver krone investeret lånes yderligere $\sigma_i^{-1} - 1$ kroner til den risikofri rente, r, hvorefter det hele investeres i aktiv i**

- **Middelværdi og varians**
  - $E(Y) = r + S$ **og** $Var(Y) = C$
  - ***Bemærk at alle Y-aktiver har en volatilitet på 1 (samt at Sharpe ratio er uændret)***

- **Tangentporteføljen (hvor w_Y angiver vægtningen af Y-aktiverne) $w_{tan,Y} = c_Y C^{-1} S$**
  - **Hvis aktiverne er ukorrelerede er vægtene proportionale med aktivets Sharpe ratio, $w_{tan,Y} \propto S$**
  - **Specielt vægter aktiver med samme Sharpe ratio lige meget**

Gearing

- **I tangentporteføljen vægtes aktiverne med deres inverse volatilitet**
  - **Alt andet lige, vil aktiver med lav volatilitet dermed vægte mere end aktiver med høj volatilitet**
  - **Tangentporteføljens volatilitet vil tilsvarende være forholdsvis lav**
  - **For at opnå den ønskede risiko tilsiger teorien, at man skal *geare* tangentporteføljen**
    - Det vil sige lånefinansiere en større position i risikofyldte aktiver end det oprindelige beløb
  - **Risikoen kan også øges uden gearing, men dette fører til en inefficient portefølje**

- **Eksempel**
  - **To aktiver (”obligationer” og ”aktier”) med en korrelation på ca. 24%**

$$r = 3\%,\ \lambda = (1\%,\ 4\%)'\ ,\ B = \begin{pmatrix} 5\% & 1\% \\ 1\% & 20\% \end{pmatrix},\ \Sigma = BB',\ S = (20\%,\ 20\%)'$$

  - **Tangentporteføljen med $\boldsymbol{w_{tan}} = (\mathbf{79\%, 21\%})$ har middelafkast på 4,6% og en volatilitet på 6,5%**
    - Geares porteføljen så volatiliteten svarer til en ren aktie fås et middelafkast på 8%
    - Alternativt kan man nøjes med at købe aktier og få et middelafkast på 7%

Akkumulerede afkast

- **Reinvesterer vi pengene efter samme strategi igen og igen vil det samlede afkast konvergere mod en log-normalfordeling som produkt af uafhængige gentagelser (det konvergerer også, hvis bare afhængigheden ikke er for stærk)**

- **På korte tidshorisonter vil middelværdien og medianen (”det typiske udfald”) være nogenlunde ens, men på lange horisonter vil de afvige markant, og det er ikke længere oplagt, hvad der skal optimeres over**

- **Effekten kan lettest studeres i den klassiske Black-Scholes model**
  - **Bankkonto med risikofri rente r**
    - $dB_t = rB_t dt$
  - **Aktieindeks (der kan fortolkes som ”tangentporteføljen”)**
    - $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$
    - hvor μ er middelafkastet, σ er volatiliteten og (W_t) er en Brownsk bevægelse

Fast aktieandel

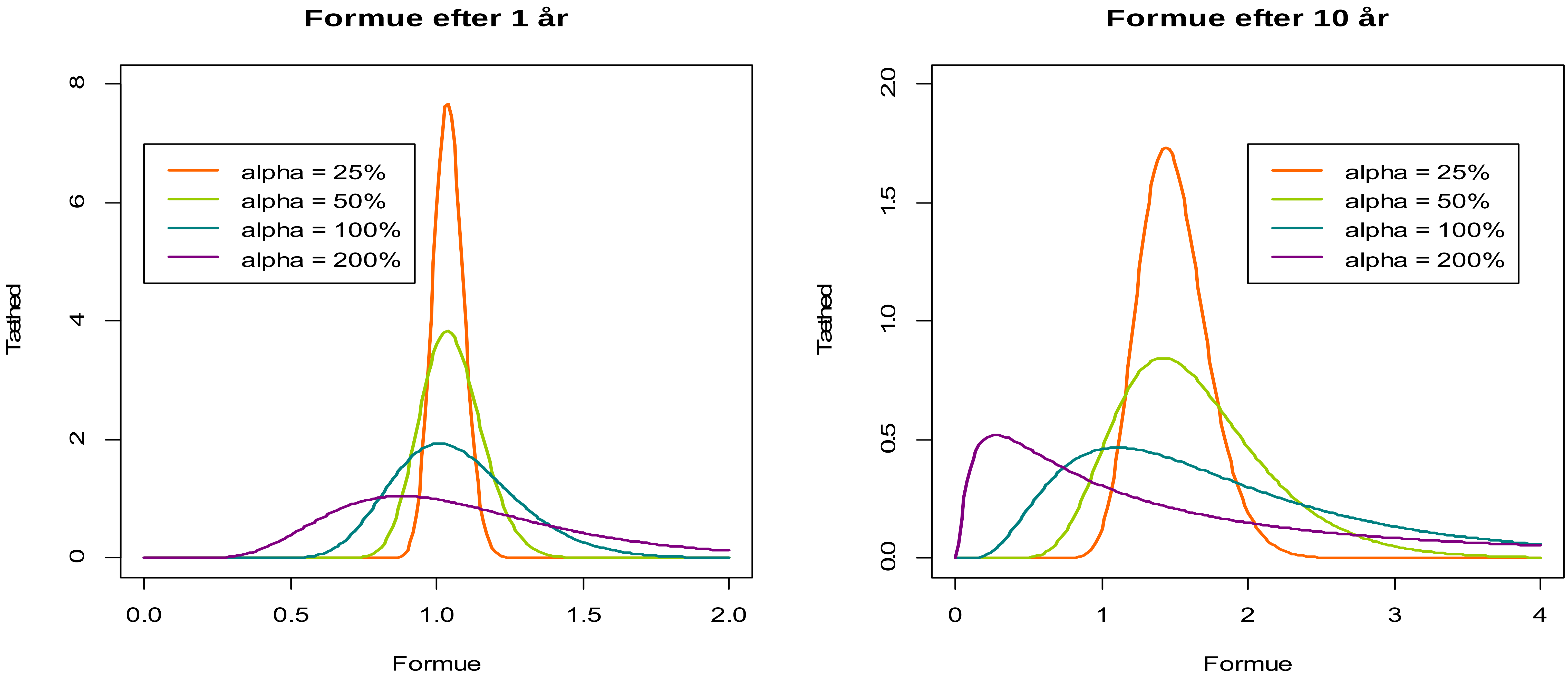
- **Antag, at der investeres én krone til tid 0 med en fast andel, α, i aktier og resten i penge**
  - **Ved kontinuert rebalancering bliver formuedynamikken**
  - $\frac{dX_t}{X_t} = \alpha\frac{dS_t}{S_t} + (1-\alpha)\frac{dB_t}{B_t} = \alpha(\mu dt + \sigma dW_t) + (1-\alpha)rdt = \big(r + \alpha(\mu - r)\big)dt + \alpha\sigma dW_t$, **med** $X_0 = 1$
- **Formuen udvikler sig som en geometrisk Brownsk bevægelse (GBM)**
  - $X_t = X_0 exp\left\{\left(r + \alpha(\mu - r) - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\right)t + \alpha\sigma W_t\right\}$, **med** $X_0 = 1$
  - **Formuen er positiv uanset værdien af α!**
  - **Dette skyldes at aktieeksponering reduceres i takt med at aktier falder (og stiger)**
- **Middelformuen er eksponentielt voksende i tid og aktieeksponering**
  - $E(X_t) = exp\{\big(r + \alpha(\mu - r)\big)t\}$

Fraktiler

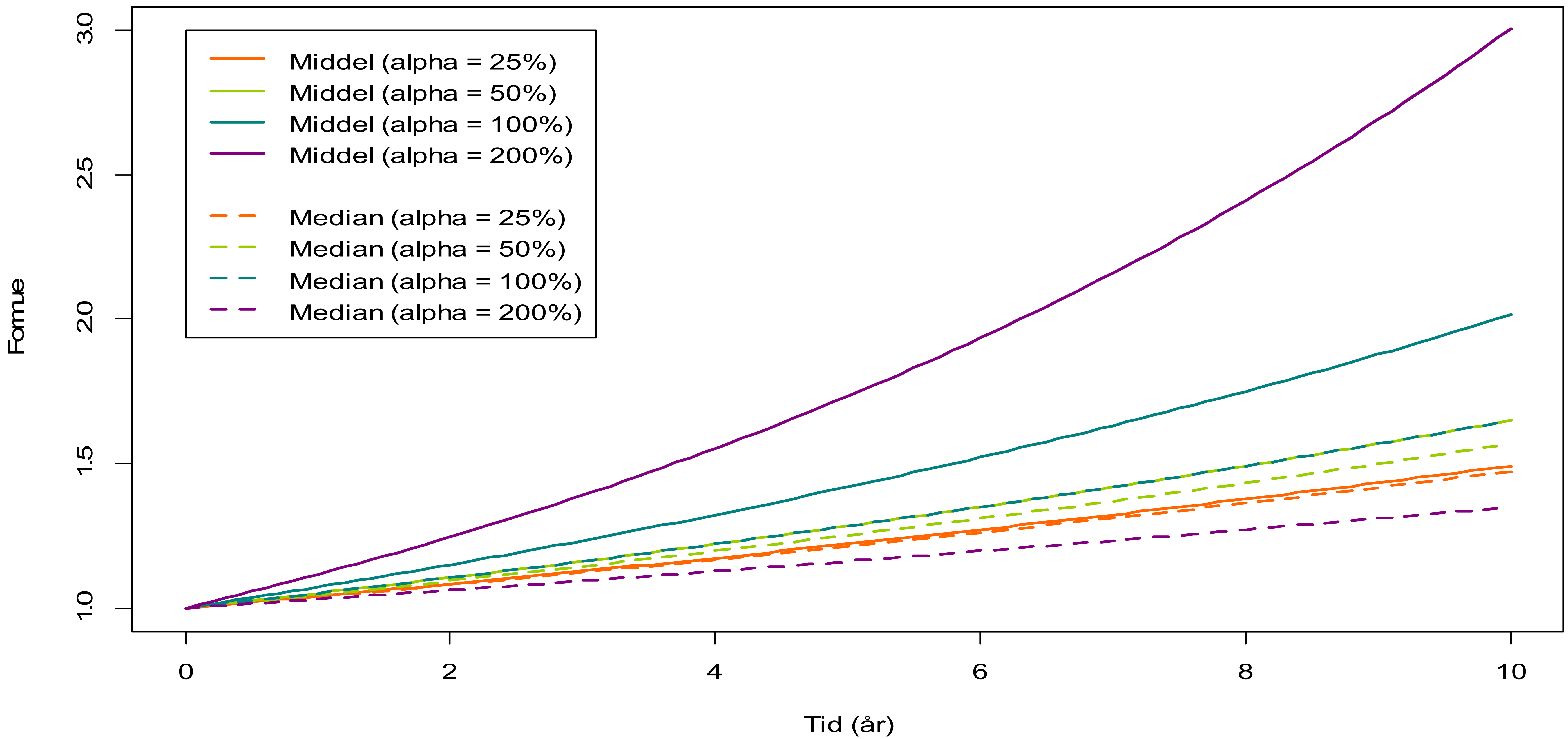
- **Ud fra repræsentationen på forrige slide fås umiddelbart at fraktilerne er givet ved**
  - $q_\gamma = exp\left\{\left(r + \alpha(\mu - r) - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\right)t + \alpha\sigma\sqrt{t}d_\gamma\right\}$,
  - **hvor d_γ er γ-fraktilen i en standard normalfordeling**

- **Specielt fås at medianen er givet ved**
  - $m_\gamma = exp\left\{\left(r + \alpha(\mu - r) - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\right)t\right\}$
  - **I forhold til udtrykket for middelværdien er der et ekstra, negativt kvadratisk led**
  - **For α tilstrækkelig stor er medianen dermed aftagende i t!**
  - **For fastholdt t vil medianen begynde at aftage, når α overstiger $(\mu - r)/\sigma^2$**
    - I det gennemgående eksempel har aktier en risikopræmie på 4% og en volatilitet på 20%
    - Medianen er dermed aftagende, når α er større end $\frac{4\%}{(20\%)^2} = 100\%$!

Akkumuleret afkast efter 1 år og 10 år



Udviklingen i middel- og medianformue de første 10 år



Øvelse

- **Diskutér de grundlæggende antagelser bag ”moderne” porteføljeteori**
  - **Er det realistisk med ubegrænset lånemuligheder?**
  - **Er man kun interesseret i middelværdi og varians?**
  - **Er den underliggende i.i.d. antagelse rimelig?**

- **Langsigtet investering**
  - **I modellen er investering i aktier hhv. obligationer kendetegnet ved**
    - Aktieafkast: 6,2 pct. i gnst. 19 pct. std.afv.
    - Obliationsafkast: 3,3 pct. i gnst, 4,2 pct. std.afv.
    - Korrelation mellem aktier og obligationer (afkast): -15 pct.
  - **Sammensæt den portefølje af aktier og obligationer, som giver**
    A. Det højeste medianafkast over en tiårs periode
    B. Den højeste 5 pct. fraktil over en tiårs periode