Løsning til mindstekravsopgaverne

Ask Madsen

December 12, 2024

Reduktion, procenregning og andre regneregler

1.1 Opgave 1

Nedenfor er et udtryk reduceret.

$$
\begin{aligned}
&4 \cdot (5a - b) + b - 3a \\
&= 20a - 4b + b - 3a \\
&= 17a - 3b
\end{aligned}
$$

Forklar hvert trin i reduktionen

Løsning

I det første trin ganger vi 4 ind i parentesen på hvert led således

$$4 \cdot (5a - b) = 4 \cdot 5a - 4 \cdot b = 20a - 4b$$

I det næste trin samler vi ledene som indeholder a og ledene som indeholder b således

$$20a - 4b + b - 3a = 20a - 3a - 4b + b = 17a - 3b$$

1.2 Opgave 2

Nedenfor er en ligning løst.

$$\begin{aligned} 3x + 2(x+1) + 7 &= 5 \\ 3x + 2x + 2 + 7 &= 5 \\ 5x + 9 &= 5 \\ 5x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Forklar, hvad der er gjort i hvert trin.

Løsning

I det første trin ganger vi 2 tallet ind i parentesen på hvert led således

$$2(x+1) = 2x + 2$$

I det næste trin lægger vi ledene som indeholder x sammen og ledene som ikke indeholder x sammen.

$$3x + 2x + 2 + 7 = 5x + 9$$

I det næste trin trækker vi 9 fra på begge sider

$$5x + 9 - 9 = 5 - 9 \iff 5x = -4$$

I det sidste trin dividerer vi med 5

$$\frac{5x}{5} = -\frac{4}{5} \iff x = -\frac{4}{5}$$

1.3 Opgave 3

Forklar, at værdien af $a^2 - (b + c)$ er 1, når $a = -3$, $b = 6$ og $c = 2$.

Løsning

Vi starter med at indsætte værdierne for a, b og c hvorefter vi beregner parentesen og potensen og trækker så resultaterne fra hinanden

$$(-3)^2 - (6 + 2) = 9 - 8 = 1$$

1.4 Opgave 4

Hvor mange procent udgør 30 ud af 260?

Løsning

For at bestemme hvor mange procent Tal1 udgør af Tal2 kan man bruge følgende formel

$$\frac{Tal1}{Tal2} \cdot 100\%$$

Hvis vi indsætter de kendte værdier Tal1= 30 og Tal2= 260 får vi

$$\frac{30}{260} \cdot 100 \approx 11.53\%$$

30 udgør altså ca 11.53 % af 260.

Løsning af ligninger

1.5 Opgave 5

Løs følgende to ligninger med to ubekendte

$$x = 6 - y$$
$$5y + x = 14$$

Løsning

Vi indsætter den første ligning $x = 6 - y$ på x's plads i den anden ligning således

$$5y + (6 - y) = 14$$

I denne ligning isolerer vi så y

$$\begin{aligned}
&5y + (6 - y) = 14 \\
\Updownarrow \\
&5y - y + 6 = 14 \\
\Updownarrow \\
&4y + 6 = 14 \\
\Updownarrow \\
&4y = 14 - 6 \\
\Updownarrow \\
&4y = 8 \\
\Updownarrow \\
&\frac{4y}{4} = \frac{8}{4} \\
\Updownarrow \\
&y = 2
\end{aligned}$$

Indsætter nu $y = 2$ i den første ligning og får

$$x = 6 - 2 = 4$$

Løsningen til de 2 ligninger er derfor $x = 4$ og $y = 2$.

1.6 Opgave 6

Bestem diskriminanten for andengradsligningen

$$3x^2 + 4x - 1 = 0$$

Løsning

Den generelle formel for diskriminanten er $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Vi ved at den generelle andengradsligning skrives på formen $ax^2 + bx + c = 0$. Vi aflæser nu a, b og c og får følgende $a = 3,\ b = 4,\ c = -1$. Diskriminanten bliver dermed

$$d = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 - (-12) = 16 + 12 = 28$$

1.7 Opgave 7

Løs denne ligning: $\dfrac{20}{x+2} = 4$

Løsning

Vi starter med at gange med $(x+2)$ på begge sider for at fjerne parentesen.

$$\frac{20}{(x+2)} \cdot (x+2) = 4 \cdot (x+2)$$

Nu ganger vi de 4 ind i parentesen $(x+2)$ på højre siden.

$$20 = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 20 = 4x + 8$$

Nu trækker vi 8 fra på begge sider og får

$$20 - 8 = 4x + 8 - 8 \Leftrightarrow 12 = 4x$$

Vi dividerer nu med 4 på begge sider så x kommer til at stå alene.

$$\frac{12}{4} = \frac{4x}{4} \Leftrightarrow 3 = x$$

Bytter vi om på højre og venstre siden får vi

$$x = 3$$

1.8 Opgave 8

Undersøg om $x = 2$ er en løsning til denne ligning: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Løsning

For at undersøge om $x = 2$ er en løsning til ligningen indsætter vi 2 på x's plads og ser om venstresiden giver 0.

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 10 - 10 = 0$$

$x = 2$ er altså en løsning til ligningen.

1.9 Opgave 9

To linjer er givet ved $y = 4x - 1$ og $y = x + 5$. Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.

Løsning

For at bestemme skæringspunktets x-koordinat mellem de to linjer kan vi sætte dem lig med hinanden og isolere for x.

$$
\begin{aligned}
&4x - 1 = x + 5 \\
\Updownarrow& \\
&4x - 1 + 1 = x + 5 + 1 \\
\Updownarrow& \\
&4x = x + 6 \\
\Updownarrow& \\
&4x - x = x - x + 6 \\
\Updownarrow& \\
&3x = 6 \\
\Updownarrow& \\
&\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \\
\Updownarrow& \\
&x = 2
\end{aligned}
$$

Herefter indsætter vi $x = 2$ i en af de to linjers forskrift og bestemmer skæringspunktets y-koordinat

$$y = 2 + 5 = 7$$

Skæringspunktet mellem de to linjer er derfor $(2, 7)$

1.10 Opgave 10

Isolér T i ligningen $a \cdot T = \frac{R-T}{Q+a}$.

Løsning

Vi starter med at gange med $(Q+a)$ på begge sider

$$a \cdot T \cdot (Q+a) = \frac{R-T}{Q+a} \cdot (Q+a) \Longrightarrow aQT + a^2T = R - T$$

Vi lægger nu T til på begge sider

$$aQT + a^2T + T = R$$

Nu sætter vi T uden for en parentes så $(aQ + a^2 + 1)T = aQT + a^2T + T$

$$(aQ + a^2 + 1)T = R$$

Dividerer nu med $(aQ + a^2 + 1)$ på begge sider og får

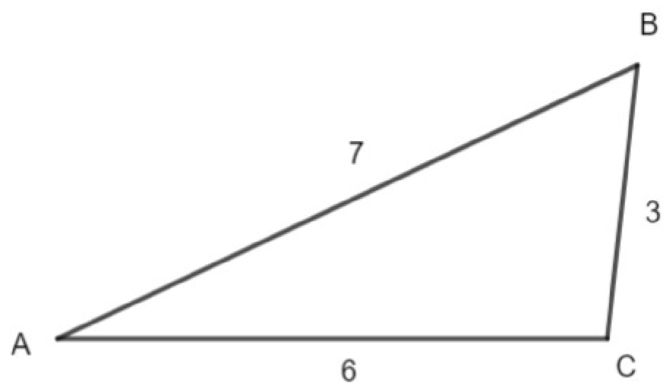
$$T = \frac{R}{aQ + a^2 + 1}$$

T er hermed isoleret i ligningen.

Geometri og trigonometri

1.11 Opgave 11

Figuren viser en trekant ABC.



Følgende sidelængder er kendte: $|AB| = 7$, $|BC| = 3$ og $|AC| = 6$.

Bestem vinkel A.

Løsning

Da trekanten ikke er retvinkel kan vi bruge cosinusrelationen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Her isolerer vi først cos(A)

$$\begin{aligned}
&a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \\
&\Updownarrow \\
&\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} = \cos(A) \\
&\Updownarrow \\
&-\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot b \cdot c} = \cos(A)
\end{aligned}$$

Nu indsætter vi sidelængderne på a,b og c's plads så $a = 3,\ b = 6$ og $c = 7$

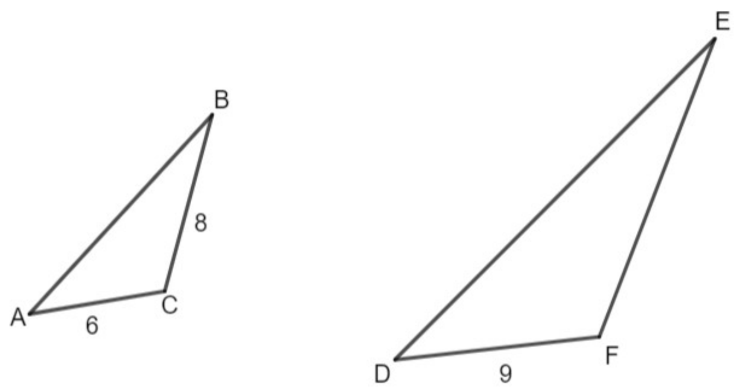
$$\begin{aligned}
&-\frac{3^2 - 6^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \cos(A) \\
&\Updownarrow \\
&-\frac{9 - 36 - 49}{84} = \cos(A) \\
&\Updownarrow \\
&-\frac{-76}{84} = \cos(A) \\
&\Updownarrow \\
&\frac{76}{84} = \cos(A)
\end{aligned}$$

Nu bruger vi den inverse funktion til cos altså arccos for at bestemme vinklen A

$$A = \arccos\left(\frac{76}{84}\right) \approx 25.2^\circ$$

1.12 Opgave 12

To ensvinklede trekanter er vist på figuren.



Størrelsesforholdene er ikke korrekte.

Følgende sidelængder oplyses: $|AC| = 6,\ |BC| = 8$ og $|DF| = 9$

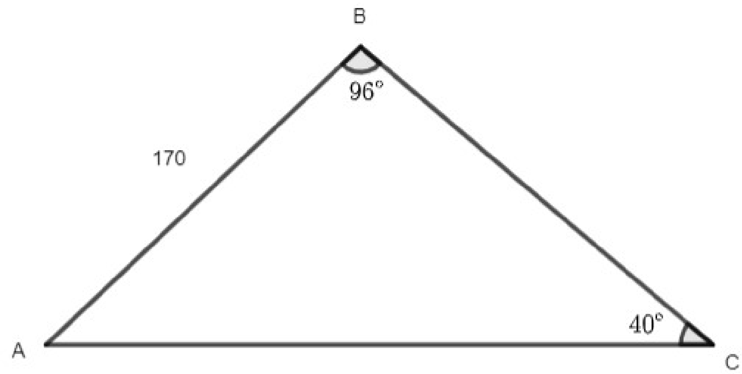
Bestem $FE|$

Løsning

Da trekanterne er ensvinklede kan vi altså bestemme sidelængdernes størrelsesforhold. Hvis vi ser på sidelængderne $|AC|$ og $|DF|$ er den større trekants side 1.5 gange længere. Vi kan altså bestemme sidelængden $|FE| = 1.5 \cdot |BC| = 1.5 \cdot 8 = 12$.

1.13 Opgave 13

Figuren viser en trekant



Følgende størrelser i trekant ABC er kendte:

$B = 96°, \quad |AB| = 170 \quad \text{og} \quad C = 40°$

Bestem $|AC|$.

Løsning

For at bestemme længden af siden AC bruger vi sinusrelationen for en vilkårlig trekant

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Her svarer sidelængen AB til c og sidelængden AC som vi skal finde svarer til b. Vi betragter den sidste lighed i sinusrelationen og isolerer b.

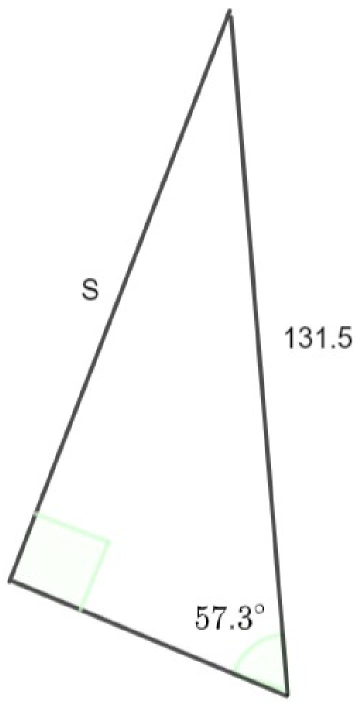
$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \Longleftrightarrow b = \frac{c}{\sin(C)} \cdot \sin(B)$$

Indsætter nu $c = 170, \quad C = 40°, \quad B = 96°$ og får

$$b = \frac{170}{\sin(40°)} \cdot \sin(96°) \approx 224.4$$

1.14 Opgave 14

En retvinklet trekant er skitseret på figuren.



Bestem længden S.

Løsning

For retvinklede trekanter gælder formlen

$$\sin(B) = \frac{c}{b}$$

Her er B vinklen $B = 57.3°$, c er længden af hypotinusen dvd $c = 131.5$ og b er siden som i vores tilfælde svarer til s. Vi isolerer altså b og indsætter tallene

$$\sin(B) = \frac{b}{c} \iff b = \sin(B) \cdot c = \sin(57.3°) \cdot 131.5 \approx 89.76$$

1.15 Opgave 15

Et punkt har koordinatsættet $A(8,6)$.

En linje l har ligningen $y = -x + 7$.

Bestem afstanden mellem A og l.

Løsning

Her bruger vi formlen for afstand mellem et punkt og en linje som siger at afstanden fra et punkt (x_1, y_1) til en linje $y = ax + b$ kan bestemmes ved

$$\text{dist}(P, m) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Vi indsætter tallene og får

$$\text{dist}(P, m) = \frac{|(-1) \cdot 8 + 7 - 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 1}} = \frac{|-8+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-7|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4.95$$

1.16 Opgave 16

En cirkel C og en linje l er bestemt ved ligningerne

$$C : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 3^2$$
$$l : y = x - 2$$

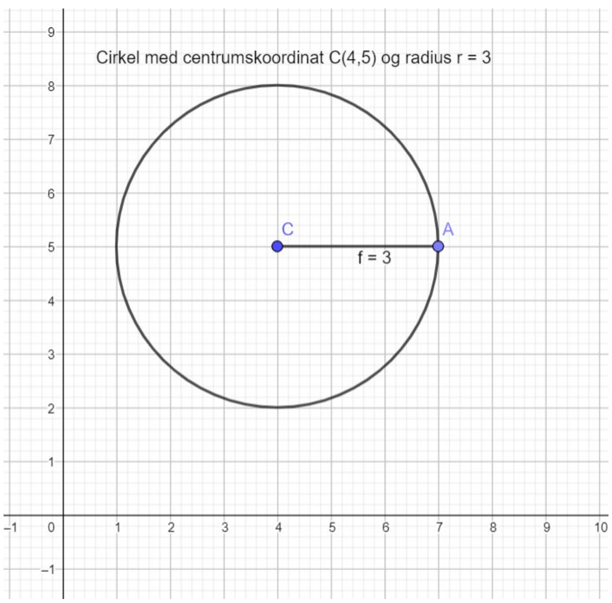
a) Tegn cirklen og linjen i samme koordinatsystem.

Løsning

Vi starter med at aflæse cirklens centrumskoordinat og cirklens radius. Vi ved at cirklens generelle ligning er givet ved

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

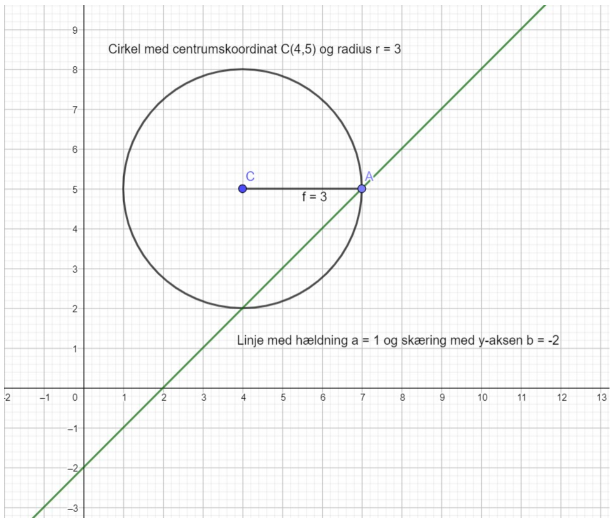
Her er $C(a,b)$ cirklens centrumskoordinat og r er cirklens radius. Hvis vi bruger dette kan vi aflæse centrumskoordinatet til $C(4,5)$ og radius til $r = 3$. Vi kan nu indtegne cirklen i et koordinatsystem



For at indtegne linjen skal vi aflæse linjens hældning, a og linjens skærings med y-aksen, b. Vi ved at en ret linje har den generelle form

$$y = ax + b$$

Aflæser vi nu den givne linje får vi hældningen $a = 1$ og skæringen med y-aksen $b = -2$. Ud fra disse oplysninger kan vi nu indtegne vores linje i koordinatsystemet



b) Bestem skæringspunkterne mellem cirklen og linjen

Løsning

Ud fra koordinatsystemet i opgave 16a kan vi se at cirklen og linjen skærer hinanden i 2 punkter. For at bestemme disse skæringspunkter sætter vi linjens ligning $y = x - 2$ ind på y's plads i cirklens ligning

$$(x-4)^2 + (x-2-5)^2 = 3^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-4)^2 + (x-7)^2 = 9$$

Vi beregner nu de 2 parenteser ved at bruge reglen $(a-b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2$

$$(x-4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-4) + (-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$
$$(x-7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-7) + (-7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

Indsætter vi dette får vi nu

$$(x-4)^2 + (x-7)^2 = 9$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 14x + 49 = 9$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 + x^2 - 8x - 14x + 16 + 49 = 9$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 - 22x + 65 = 9$$

Vi trækker nu 9 fra på begge sider

$$2x^2 - 22x + 65 - 9 = 9 - 9$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 - 22x56 = 0$$

Nu findes vi løsningerne til det ovenstående andengradsligning ved først at beregne determinanten

$$d = b^2 - 4ac = (-22)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 56 = 36$$

Nu bestemmer vi løsningerne altså x-koordinatet til skæringen mellem cirklen og linjen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{22 + \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{22 + 6}{4} = \frac{28}{4} = 7$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{22 - \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{22 - 6}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

For at finde de tilsvarende skæringer med y-aksen indsætter vi de fundne x-værdier i linjens ligning

$$y_1 = x_1 - 2 = 7 - 2 = 5$$
$$y - 2 = x_2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

Vi har altså føgende skæringspunkter mellem linjen og cirklen

$$S_1 = (x_1, y_1) = (7, 5)$$
$$S_2 = (x_2, y_2) = (4, 2)$$

Hvis vi sammenligner med tegningen vi får fra opgave 16a kan vi se at skærngspunkterne stemmer.

1.17 Opgave 17

En cirkel C er givet ved ligningen

$$C : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

Bestem cirklens centrum og radius

Løsning

Hvis vi benytter os af den generelle formel for cirklens ligning fra opgave 16 kan vi aflæse cirklens centrum til $C(2,3)$ og cirklens radius til $r = 5$

1.18 Opgave 18

Undersøg om punktet $(2,3)$ ligger på linjen bestemt ved $2x+y-7=0$

Løsning

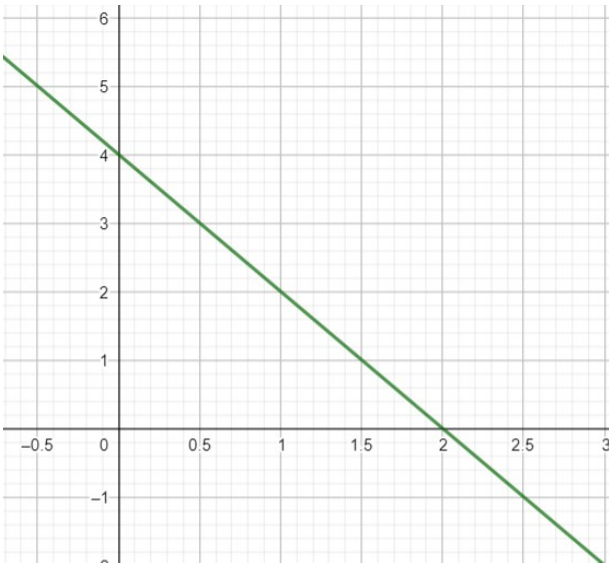
For at tjekke om et punkt ligger på en bestemt linje indsætter vi punktets x-koordinat på x'plads og punktets y-koordinat på y's plads.

$$2 \cdot 2 + 3 - 7 = 4 + 3 - 7 = 7 - 7 = 0$$

Da venstresiden af vores beregning stemmer med højresiden altså 0 kan vi konkludere at punktet $(2,3)$ ligger på linjen.

1.19 Opgave 19

På figuren ses en linje i et koordinatsystem.



Bestem en ligning for linjen.

Løsning

Vi ved at en linje som denne har den generelle form $y = ax + b$. Her er a hældningen og b er skæringen med y-aksen. Vi aflæser skæringen med y-aksen på grafen til $b = 4$. For at bestemme hældningen a skal vi benytte os af følgende formel

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Her er (x_1, y_1) og (x_2, y_2) to vilkårlige punkter på vores linje. For nemhedens skyld vælger vi punkterne til at være

$$(x_1, y_1) = (0, 4)$$
$$(x_2, y_2) = (2, 0)$$

Indsætter vi disse punkter i formlen bestemmer vi nu a

$$a = \frac{0 - 4}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

Linjens ligning er derfor

$$y = -2x + 4$$

Vektorer

1.20 Opgave 20

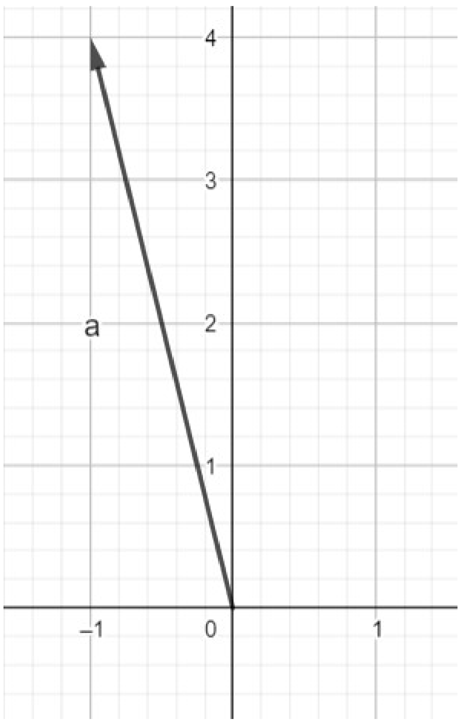
En vektor $\vec{a}$ er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Indtegn vektoren i et koordinatsystem, og bestem $|\vec{a}|$

Løsning

Hvis vi lader vores vektor starte i punktet (0,0) så fortæller vektorens koordinater os at vi skal bevæge os -1 hen ad x-aksen og 4 op ad y-aksen. Forbinder vi disse punkter og tegner en pil op for enden af stregen får vi følgende graf



1.21 Opgave 21

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestem vektor $\vec{c}$, når $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

Løsning

Vi kan bestemme vektor c bed følgende

$$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 4 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1.22 Opgave 22

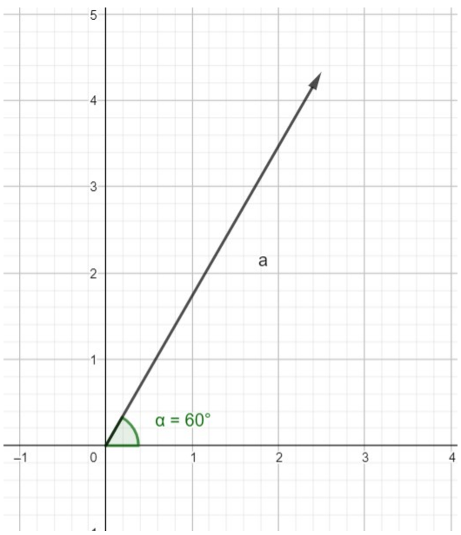
En vektor $\vec{a}$ er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(60^\circ) \\ 5 \cdot \sin(60^\circ) \end{pmatrix}$$

Forklar hvad tallene 5 og 60° fortæller om $\vec{a}$

Løsning

Tallet 5 fortæller os at $\vec{a}$ har længden 5. Tallet 60° er vektorens retningsvinkel altså den vinkel der er mellem vektoren og x-aksen. Dette kan ses illustreret på følgende graf



1.23 Opgave 23

En vektor $\vec{c}$ har længden 6 og retningsvinklen 127°

Bestem koordinaterne for $\vec{c}$.

Løsning

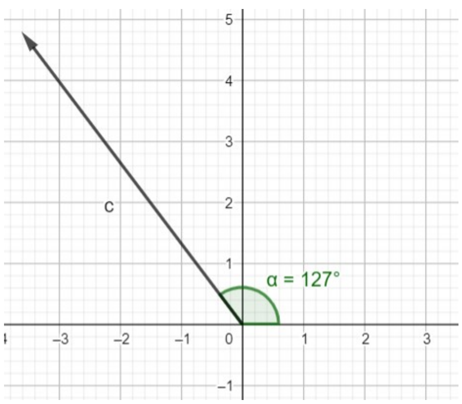
For at bestemme vektor c's koordinaterne gør vi bruge af følgende formel

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} l \cdot \cos(v) \\ l \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Her er l vektorens længde og v er vektorens retningsvinkel. Indsætter vi de givne værdier får vi

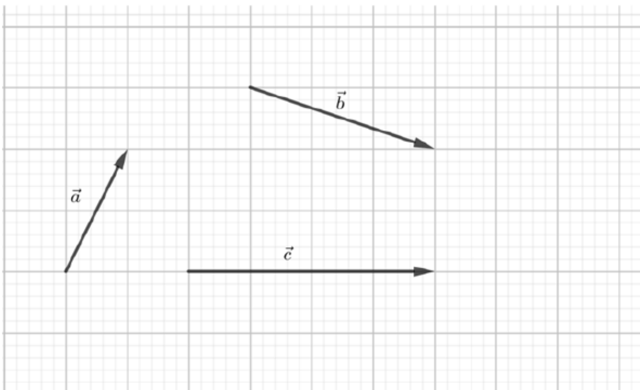
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos(127°) \\ 6 \cdot \sin(127°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.61 \\ 4.79 \end{pmatrix}$$

Vektoren er illustreret nedenfor



1.24 Opgave 24

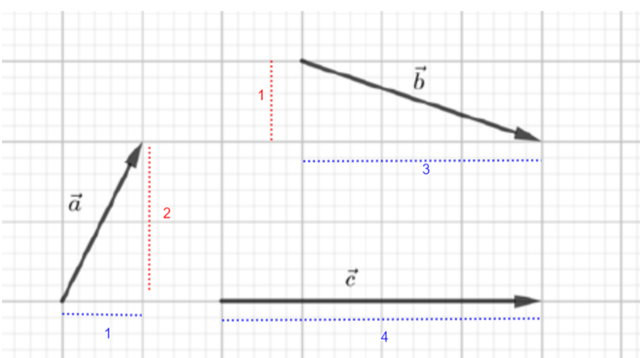
På figuren nedenfor ses repræsentanter for vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.



Indtegn en repræsentant for vektoren $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Løsning

Først aflæser vi vektorernes x og y komponenter. X komponenten af en vektor er hvor meget vi går hen ad x - aksen, og y komponent er hvor meget vi går op ad y aksen. Nedenstående figur illustrerer hvordan man kan aflæse en vektors x og y komponenter ud fra figuren.



De blå linjer er vektorernes x komponenter og de røde linjer er vektorernes y komponenter.

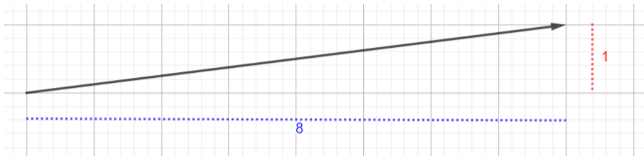
Vi har nu

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

Vi kan nu beregne summen af de 3 vektorer

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3+4\\2-1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$$

Nu indtegner vi vektoren $\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ ind i et koordinatsystem.


1
8