Opgaver i analytisk plangeometri

Opgave 2.1.3

Vi ser på linjen l, der er givet ved ligningen y = -4x + 3

1. Bestem hældningskoefficienten for l.

Hældningskoefficienten aflæses som tallet der står foran x I ligningen. I vores tilfælde er hældningskoefficienten -4.

2. Bestem en ligning for den linje, der er vinkelret på l og går gennem punktet (6, -4).

Da vi ved at linjen er vinkelret på l gælder det at produktet af hældningerne af linjen og linjen l skal give -1. Hvis linjen vi skal bestemme er på formen $y = ax + b$ beregner vi hældningen til

hældningen for linjen vi vil finde

$$-4 \cdot a = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-4 \cdot a}{-4} = \frac{-1}{-4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Hældningen for linjen er dermed $\frac{1}{4}$

Vi mangler nu at finde b værdien i linjens ligning. Da den går gennem punktet $(6, -4)$ og vi kender hældningen kan vi bruge følgende formel til at bestemme b

$$b = y_1 - ax_1$$

Her er x_1 og y_1 koordinaterne til punktet $(\underset{x_1}{6}, \underset{y_1}{-4})$

Vi beregner nu b til

$$b = y_1 - ax_1 = -4 - \frac{1}{4} \cdot 6 = -4 - \frac{6}{4} = -5{,}5$$

Linjens ligning bliver dermed

$$y = ax + b = \frac{1}{4}x - 5{,}5$$

Øvelse 2.1.4

En ret linje l har hældningskoefficienten $-\frac{1}{2}$ og går gennem punktet $(\overset{x_1}{2}, \overset{y_1}{1})$.

En anden ret linje m står vinkelret på l og går gennem punktet $(\underset{x_1}{-1}, \underset{y_1}{-10})$

1. Bestem en ligning for l.

Ligningen for l kommer til at være på formen $y = ax + b$
Da vi allerede kender hældningskoefficienten $a = -\frac{1}{2}$ skal vi bare beregne værdien for b.
Vi bruger følgende formel og beregner b

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$

Ligningen for linjen l er dermed

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

2. Bestem hældningskoefficienten for m.

Da linjerne l og m er vinkelrette på hinanden gælder det at produktet af deres hældninger er -1. Hvis m har ligningen $y = ax + b$ kan vi bestemme den hældning a ved

$$-\frac{1}{2} \cdot a = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{2} \cdot a \cdot (-2) = -1 \cdot (-2)$$

$$\Updownarrow$$

$a = 2$

Linjen m har dermed hældningen a = 2.

3. Bestem en ligning for m.

Da vi allerede kender hældningen a for linjen m mangler vi kun at bestemme linjens b værdi. Vi bruger følgende formel og punkt som linjen m går igennem.

$$b = y_1 - a x_1 \qquad P(\underset{x_1}{-1}, \underset{y_1}{-10})$$

Vi bestemmer nu b

$$b = -10 - 2 \cdot (-1) = -10 + 2 = -8$$

Ligningen for linjen m er dermed

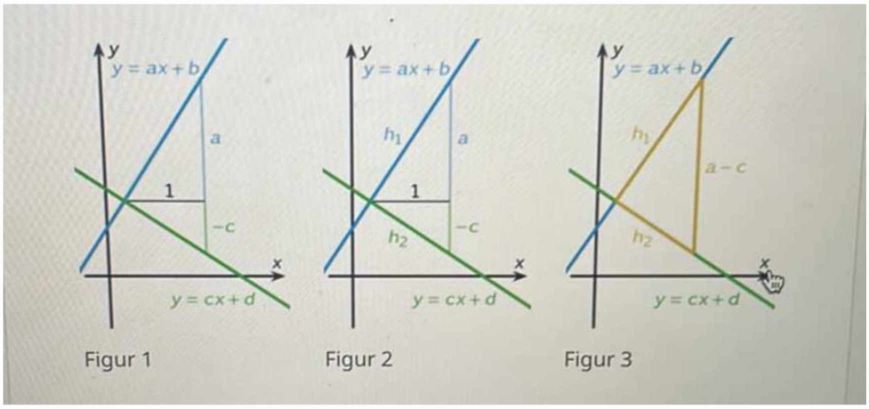
$$y = 2x - 8$$

Øvelse 2.1.5

I denne øvelse skal du argumentere for at hvis to linjer givet ved

$y = ax + b$ og $y = cx + d$

er vinkelrette, så er $a \cdot c = -1$



Vi går i nedenstående ud fra at linjen med ligningen $y = cx + d$ har negativ hældningskoefficient, dvs c er negativ.

1. Argumenter ud fra figur 1 at vi har to retvinklede trekanter med kateter på 1 og a samt 1 og - c.

Starter vi med at kigge på den blå trekant på figur 1 er vi først gået 1 ud af x aksen fra skæringen mellem den blå og grønne linje. Derefter går vi op indtil vi rammer den blå linje igen. Vi er her gået a op ad y aksen. Dette skyldes definitionen af en linjens hældning. Står man på linjen og går 1 hen ad x aksen er der a op ad y aksen til man rammer linjen igen. Det samme gør sig gældende for den grønne trekant. Går man 1 hen ad x aksen går man c ned af y aksen. Derfor består den blå trekant af kateterne 1 og a og den grønne trekant består af kateterne 1 og -c.

2. Skriv pythagoras sætning op for hver af de to retvinklede trekanter.

Pythagoras er givet ved $c^2 = a^2 + b^2$ hvor a og b er kateterne og c er hypotenusen. I vores tilfælde får vi

hypotenusen i blå trekant

$$h_1^2 = a^2 + 1^2$$

$$h_2^2 = (-c)^2 + 1^2$$

hypotenusen i grøn trekant

3. Argumenter for at den store trekant i figur 3 er retvinklet og brug pythagoras sætning til at vise at $a \cdot c = -1$

Da den store trekant dannes af de 2 linjer som er retvinklede på hinanden er den store trekant en retvinklet trekant. Vi omskriver nu pythagoras for den store trekant

$$(a-c)^2 = h_1^2 + h_2^2$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 + c^2 - 2ac = h_1^2 + h_2^2$$ Udregner parentesen $(a-c)^2$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 + c^2 - 2ac = a^2 + 1 + c^2 + 1$$ Indsætter værdierne for h_1^2 og h_2^2

$$\Updownarrow$$

$$a^2 + c^2 - 2ac - a^2 - c^2 = a^2 + c^2 + 2 - a^2 - c^2$$ Trækker a^2 og c^2 fra på begge sider

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-2ac}{-2} = \frac{2}{-2}$$ Dividerer med -2 på begge sider for at isolere ac

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{ac = -1}$$

Vi har nu vist at $ac = -1$