Opgaver fra timen d. 30 januar

Ask Madsen

December 12, 2024

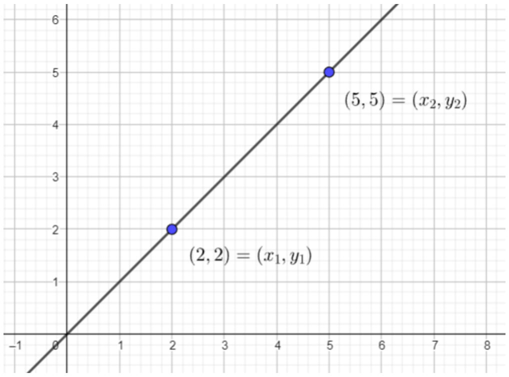
1 Træningsopgaver **2**
- 1.1 Opgave 1 . . . 2
- 1.2 Opgave 2 . . . 3
- 1.3 Opgave 3 . . . 3
- 1.4 Opgave 4 . . . 5

2 Opgaver fra kapitel 0 **9**
- 2.1 Opgave 1 . . . 9
- 2.2 Opgave 2 . . . 10
- 2.3 Opgave 5 . . . 11
- 2.4 Opgave 8 . . . 12

3 Opgaver fra testen **13**
- 3.1 Opgave 1 . . . 13
- 3.2 Opgave 2 . . . 13
- 3.3 Opgave 3 . . . 13
- 3.4 Opgave 4 . . . 13
- 3.5 Opgave 5 . . . 13
- 3.6 Opgave 6 . . . 16
- 3.7 Opgave 7 . . . 17
- 3.8 Opgave 8 . . . 17
- 3.9 Opgave 9 . . . 18
- 3.10 Opgave 10 . . . 18
- 3.11 Opgave 11 . . . 18
- 3.12 Opgave 12 . . . 19
- 3.13 Opgave 13 . . . 19
- 3.14 Opgave 14 . . . 19
- 3.15 Opgave 15 . . . 19
- 3.16 Opgave 16 . . . 20
- 3.17 Opgave 17 . . . 20

1 Træningsopgaver

1.1 Opgave 1



Find forskriften for linjen gennem 2 punkter som ses på billedet ovenfor: $y = ax + b$

For at finde forskriften for en ret linje skal vi først bestemme linjens hældning. Givet 2 punkter kan vi bestemme hældningen ved brug af følgende formel

Theorem 1 *Hældningen af ret linje givet 2 punkter*

Givet punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er hældningen, a, af den rette linje som går igennem disse punkter bestemt ved

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ud fra billedet kan vi aflæse punkternes koordinater og vi beregner hældningen til

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$$

Hældningen af den rette linje som går igennem punkterne på billedet er dermed $a = 1$.

Når vi har beregnet hældningen mangler vi at beregne linjens skæring med y-aksen, b. For at beregne skæringen med y-aksen bruger vi følgende formel

Theorem 2 *Den rette linjes skæring med y-aksen*

Givet et punkt (x, y) på en ret linje og den rette linjes hældning a, kan den rette linjes skæring med y-aksen beregned ved

$$b = y - ax$$

Vi beregner den rette linjes skæring med y-aksen ved brug af punktet $(x_1, y_1) = (2, 2)$, den rette linjes hældning $a = 1$ og formlen ovenfor

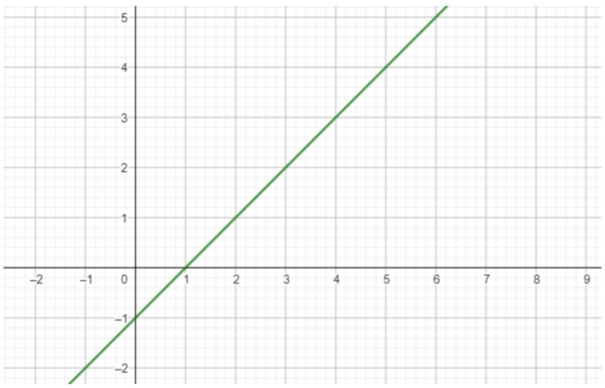
$$b = y - ax = 2 - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$$

Da vi både har den rette linjes hældning $a = 1$ og dens skæring med y-aksen $b = 0$ er forskriften for den rette linje som går gennem de 2 punkter på billeder givet ved

$$y = 1x + 0 = x$$

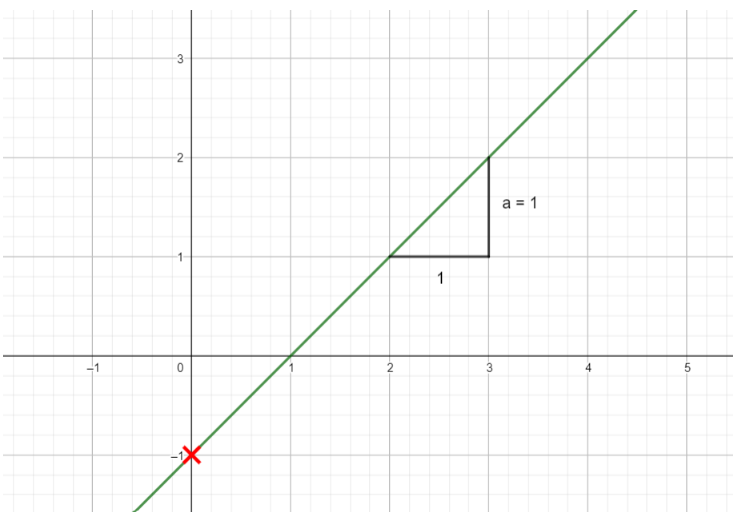
Vi kan altså både skrive $y = 1x + 0$ eller $y = x$.

1.2 Opgave 2



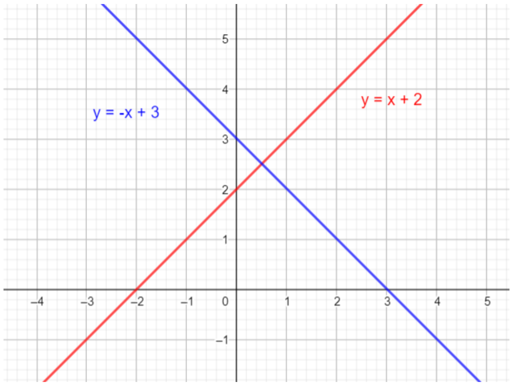
Givet ovenstående billede, aflæs hældningen, a og skærings med y-aksen, b.

For at aflæse hældningen, går vi 1 ud ad x-aksen, og bevæger os op eller ned ad y-aksen til vi støder på linjen. Det stykke vi har bevæget os op eller ned ad y-aksen før vi rammer linjen er hældningen. I dette tilfælde går vi altid 1 op ad y-aksen når vi går 1 hen ad x-aksen og hældnignen a er dermed $a = 1$. For at finde skæringen med y-aksen aflæser vi y-værdien i det punkt hvor linjen skærer y-aksen. I dette tilfælde skærer linjen i -1 dvs $b = -1$. Aflæsnignen af hældningen og skæringen med y-aksen kan ses på nedenstående billede.



1.3 Opgave 3

Bestem skæringspunktet mellem de to linjer på nedenstående figur



Vi bestemmer først skæringspunktet mellem de 2 linjer ved at aflæse på grafen. Kigger vi på figuren kan vi se at linjerne skærer hinanden i punktet $0.5, 2.5)$.

For at beregne skæringspunktet skal vi løse 2 ligninger med 2 ubekendte. For at løse 2 ligninger med 2 ubekendte gør vi følgende

Først sætter vi de 2 ligninger lig med hinanden

Derefter isolerer vi x for at finden x-værdien

Til sidst indsætter vi den fundne x-værdi i en af de 2 ligninger for at beregne y-værdien.

De fundende x og y værdier er dermed skæringsunktet (x, y) mellem de 2 linjer.

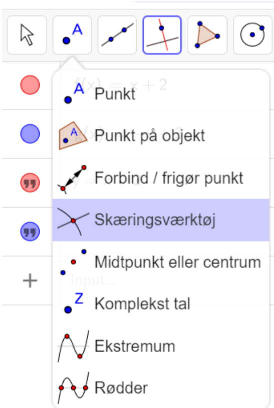
$$x + 2 = -x + 3$$
$$\Updownarrow$$
$$x + 2 - 2 = -x + 3 - 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -x + 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x + x = -x + 1 + x$$
$$\Updownarrow$$
$$2x = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Skæringspunktets x-kordinat er dermed $x = 0.5$. Vi finder y-koordinatet til skæringspunktet ved at indsætte x-værdien på x's plads i en af de 2 ligninger.

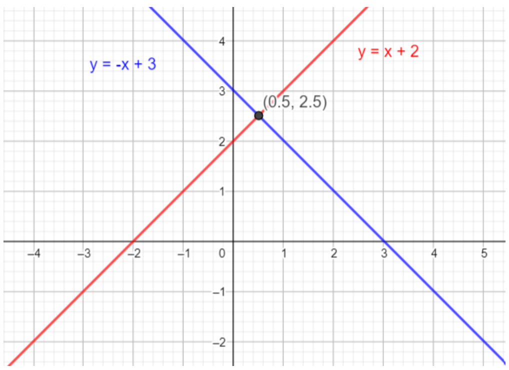
$$y = x + 2 = 0.5 + 2 = 2.5$$

Skæringspunktet mellem de 2 linjer er dermed $(0.5, 2.5)$, som var det vi aflæste på grafen.

For at tjekke om vi har aflæst og bergnet skæringspunktet korrekt, kan vi plotte de 2 ligninger i geogebra og bruge skæringsværktøjet som ses på billedet nedenfor



Herefter klikker man på de 2 linjer og skæringspunktet kommer frem som kan ses på nedenstående billede



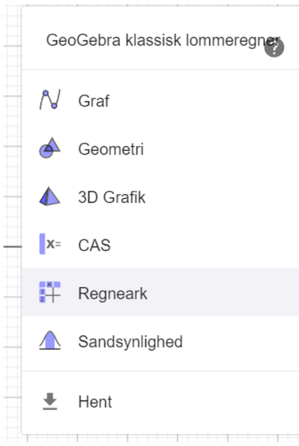
Som vi kan se på billedet giver skæringsværktøjet i geogebra det samme resultat som vi gar beregnet.

1.4 Opgave 4

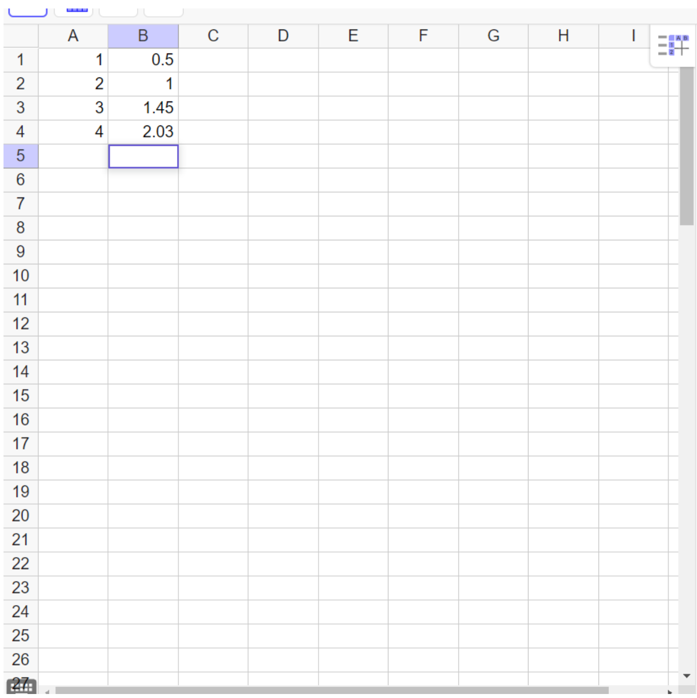
I denne opgave skal vi kigge på hvordan man laver regresionsanalyse i geogebra givet en række punkter. Vi er givet følgende punkter

x	y
1	0.50
2	1.00
3	1.45
4	2.03

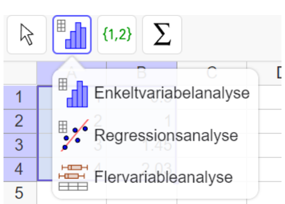
I geogebra vælger man regneark som kan ses på endenstående billede



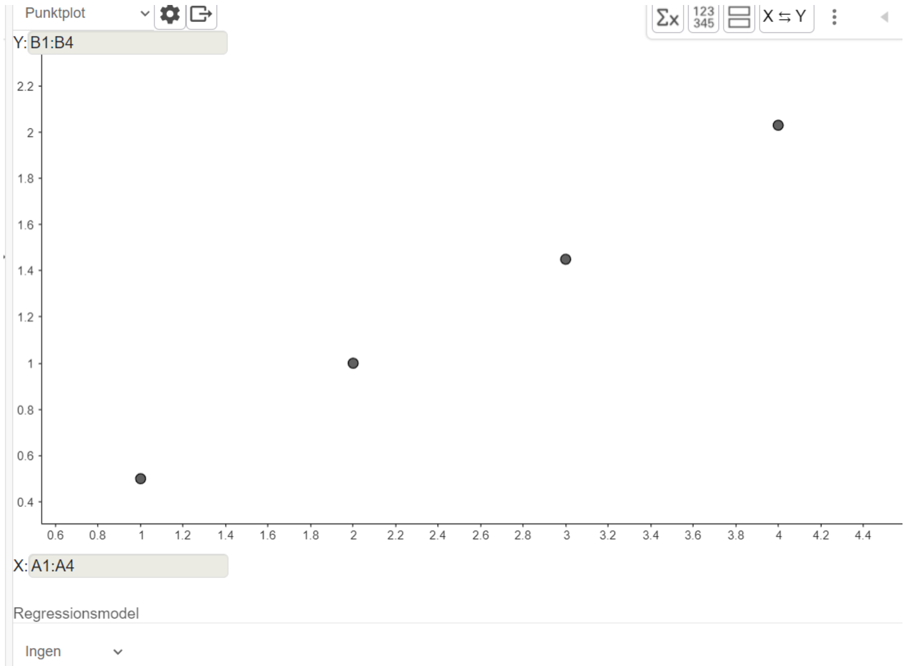
Derefter skriver man punkterne ind, x værdierne i den første kolonne, og y værdierne i den anden kolonne. Dette kan ses på nedenstående billede



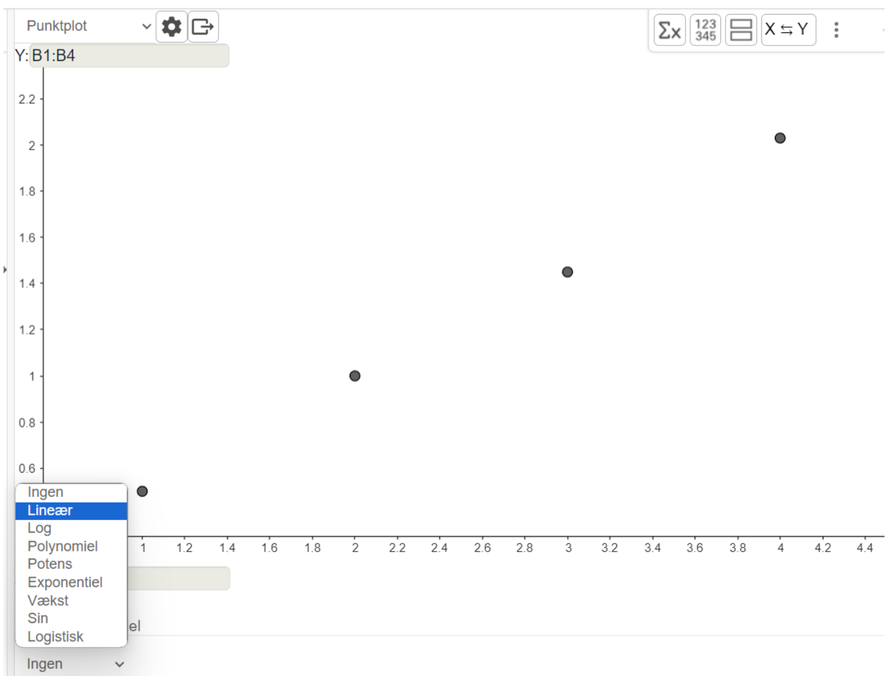
Vi markerer alle punkterne i regnearket og vælger regressionsanalysen.



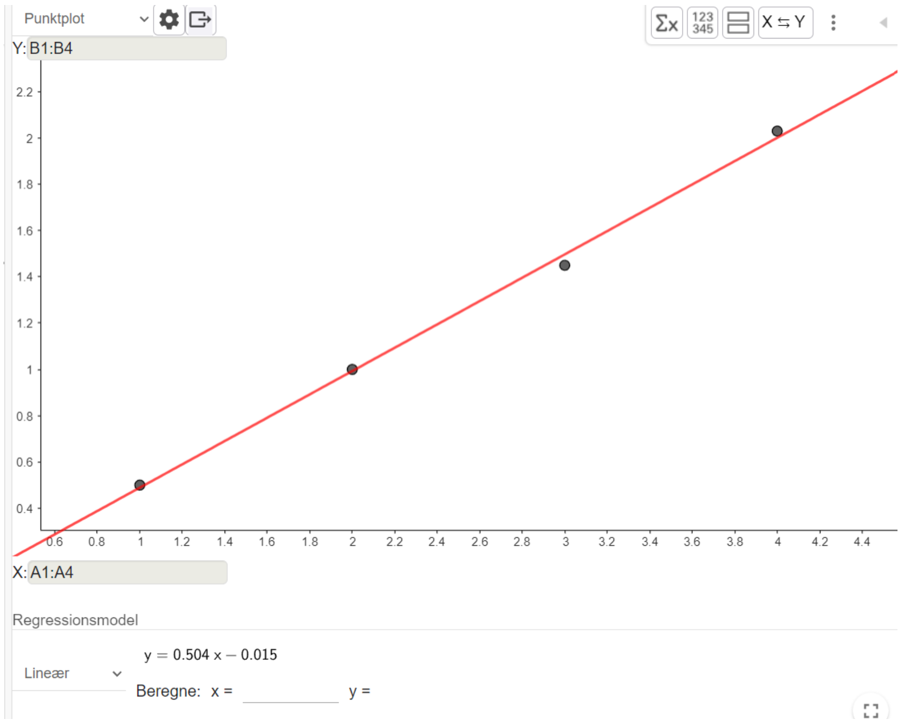
Nu ser vi et vindue med vores punkter indtegnet.



Nu klikker vi på boksen hvor der står regressionsmodel og vælger lineær.



Geogebra laver nu en ret linje som rammer de 4 punkter bedst muligt som kan ses nedenfor.



Punktplot
Y: B1:B4
X: A1:A4
Regressionsmodel
Lineær
y = 0.504 x − 0.015
Beregne: x = y =

2 Opgaver fra kapitel 0

2.1 Opgave 1

Bestem den lineære sammenhæng $y = ax + b$, når vi kender to punkter A(1,3) og B(2,4) på den rette linje.

For at bestemme den lineære sammenhæng når vi kendet 2 punkter på den rette linje skal vi altså bestemme forskriften for den linje som går igennem disse punkter. Når vi bestemmet forskriften af en ret linje der går igennem 2 punkter bestemmer vi først hældningen ud fra Theorem 1. Vi vælger punktet A(1,3) som vores (x_1, y_1) og B(2,4) som vores (x_2, y_2) og får hældningen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

Hældningen af den rette linje der går gennem punkterne A og B er dermed $a = 1$.

Det sidste man skal bruge for at bestemme forskriften af en ret linje der går gennem 2 punkter er at beregne linjens skæring med y aksen, b. Vi bestemmer skæringen med y-aksen ved brug at Theorem 2. Vi vælger punktet A(1,3) som vores (x, y) og får

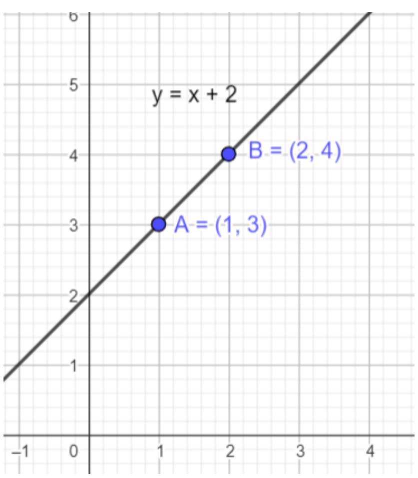
$$b = y - ax = 3 - 1 \cdot 1 = 2$$

Den rette linje der går gennem punkterne A og B skærer dermed y-aksen ved 2.

Forskriften for den rette linje som går igennem punterne A og B er dermed

$$y = 1x + 2 = x + 2$$

Vi kan eftertjekke ved at indtegne den rette linje med forskriften $y = x + 2$ i geogebra samt punkterne A(1,3) og B(2,4) og se om punkterne ligger på den rette linje. Som vi kan se på billedet nedenfor ligger punkterne A(1,3) og B(2,4) på den rette linje med forskriften $y = x + 2$ så vi ved at vi har bestemt forskriften korrekt.



2.2 Opgave 2

Bestem den lineære sammenhæng $y = ax + b$, når vi kender to punkter A(1,-3) og B(2,4) på den rette linje.

Vi gør præcis som i opgave 1 hvor vi først bestemmer hældningen af den rette linje som går igennem punkterne A(1,-3) og B(2,4) og derefter bestemmer den rette linjes skæring med y-aksen.

Vi vælger A(1,-3) til (x_1, y_1) og B(2,4) til (x_2, y_2) og bruger formlen i Theorem 1 til at beregne hældningen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-3)}{2 - 1} = \frac{4 + 3}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Hældningen af den rette linje som går gennem punkterne A og B er dermed $a = 7$.

Vi vælger punktet A(1,-3) som (x, y) og bruger formlen fra Theorem 2 til at beregne den rette linjes skæring med y-aksen.

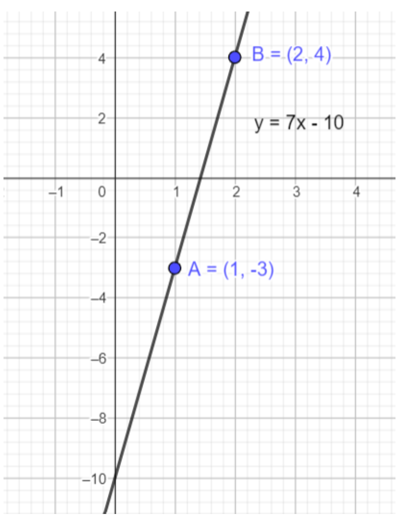
$$b = y - ax = -3 - 7 \cdot 1 = -3 - 7 = -10$$

Den rette linje som går igennem punkterne A og B skærer altså y-aksen i -10.

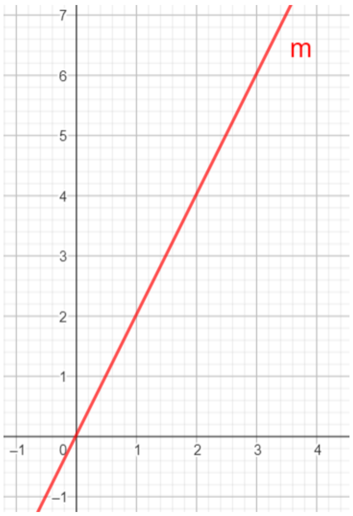
Forskriften for den rette linje bliver dermed

$$y = 7x - 10$$

Vi kan eftertjekke ved at indtegne den rette linje med forskriften $y = 7x - 10$ i geogebra samt punkterne A(1,-3) og B(2,4) og se om punkterne ligger på den rette linje. Som vi kan se på billedet nedenfor ligger punkterne A(1,-3) og B(2,4) på den rette linje med forskriften $y = 7x - 10$ så vi ved at vi har bestemt forskriften korrekt.



2.3 Opgave 5

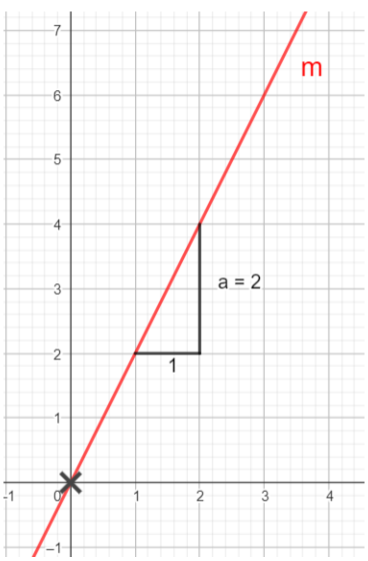


Bestem ved aflæsning af grafen a og b for den rette linje m.

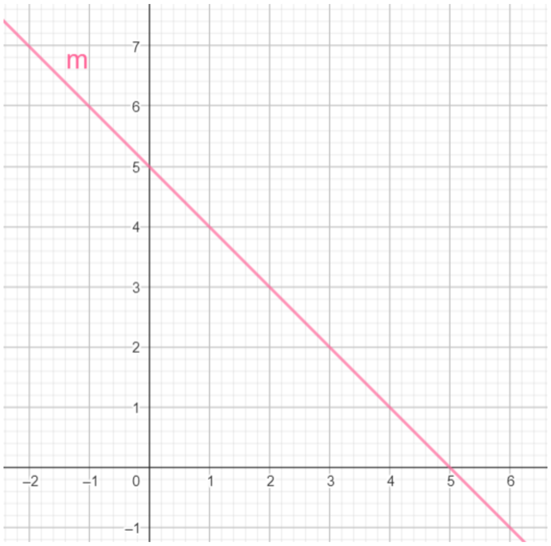
Vi bestemmer hældningen a ved at gå 1 ud ad x-aksen og derefter gå op eller ned til vi støder på den rette linje m. Det stykke vi har bevæget os op eller ned indtil vi støder på linjen er hældningen a. Vi aflæser hældningen til $a = 2$.

For at bestemme b så aflæser vi y-værdien der hvor den rette linje skærer y-aksen. I dette tilfælde aflæser vi $b = 0$.

Svarene er illustreret på nedenstående billede.



2.4 Opgave 8

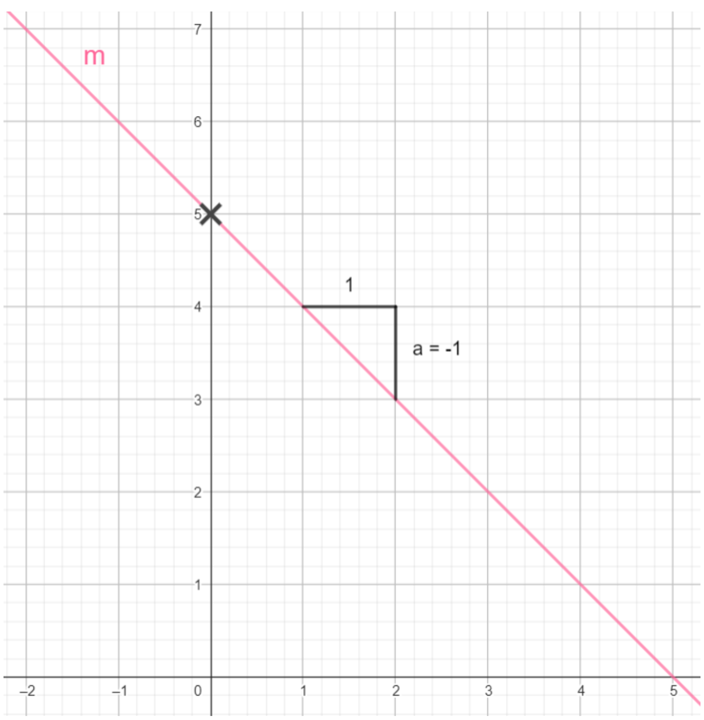


Bestem ved aflæsning af grafen a og b for den rette linje m.

Vi bestemmer hældningen a ved at gå 1 ud ad x-aksen og derefter gå op eller ned til vi støder på den rette linje m. Det stykke vi har bevæget os op eller ned indtil vi støder på linjen er hældningen a. Vi aflæser hældningen til $a = -1$.

For at bestemme b så aflæser vi y-værdien der hvor den rette linje skærer y-aksen. I dette tilfælde aflæser vi $b = 5$.

Svarene er illustreret på nedenstående billede.



3 Opgaver fra testen

3.1 Opgave 1

$$3 + 2 = 5$$

3.2 Opgave 2

$$7 - 4 = 3$$

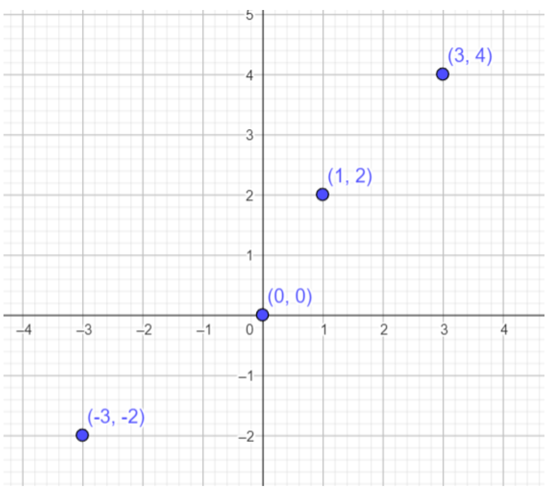
3.3 Opgave 3

$$3 - 11 = -8$$

3.4 Opgave 4

Tegn et koordinatsystem og indsæt punkterne (0,0) (1,2) (3,4) (-3,-2)

Et punkts første koordinat beskriver hvor vi befinder os på x-aksen mens et punkts andet koordinat beskriver hvor vi befinder os på y-aksen. Det første punkt (0,0) fortæller os at vi befinder os på x-aksen ved $x = 0$ og på y-aksen ved $y = 0$. Punkterne kan ses indtegnet på nedenstående koordinatsystem



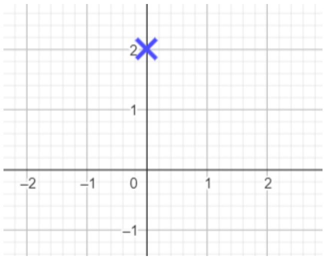
3.5 Opgave 5

Tegn et koordinatsystem og indtegn følgende rette linjer

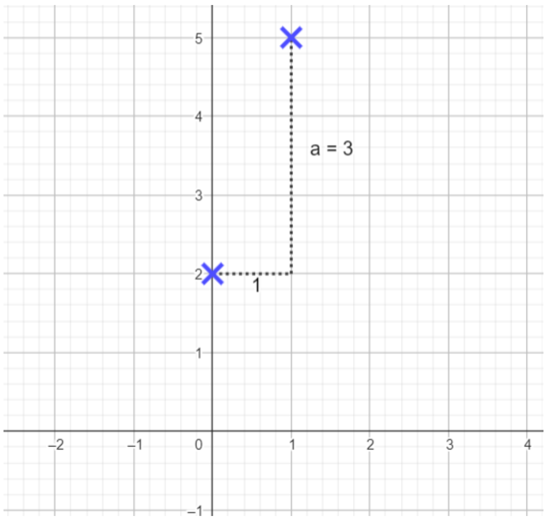
$y = 3x + 2$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$

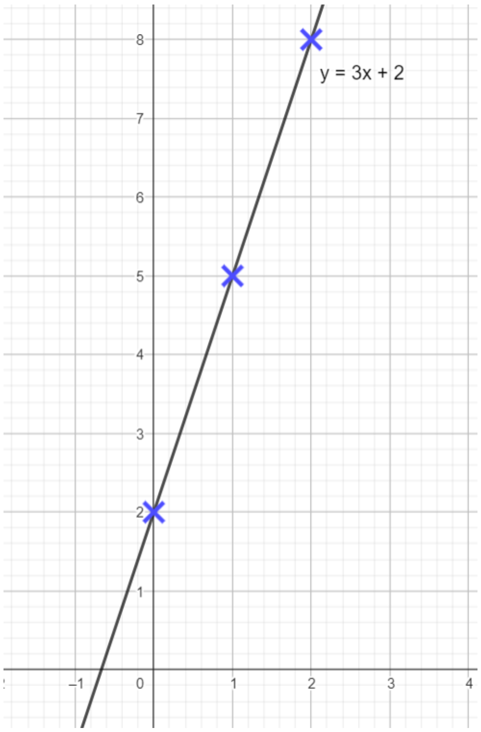
For at indtegne en ret linje i et koordinatsystem aflæser vi først linjens hældning og linjens skæring med y-aksen. Den første linje $y = 3x + 2$ har en hældning på 3 og skærer y-aksen i 2. Når vi har disse oplysninger, sætter vi først et punkt der hvor linjen skærer y-aksen. Dette kan ses på billedet nedenfor



Derefter bruger vi den aflæste hældning 3 til at sætte det næste punkt. Vi går 1 hen ad x-aksen og 3 op ad y-aksen da linjens hældning er 3 og sætter det næste punkt. Dette er illustreret på nedenstående billede

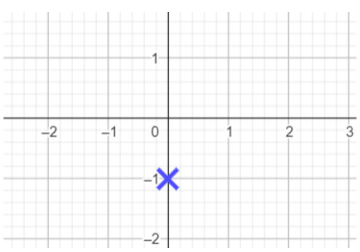


Ovenstående procedure gentages 1 gang mere hvorefter vi nu har 3 punkter i vores koordinatsystem. Forbinder vi disse 3 punkter med en ret linje har vi nu indtegnet vores rette linje i koordinatsystemet som kan ses nedenfor

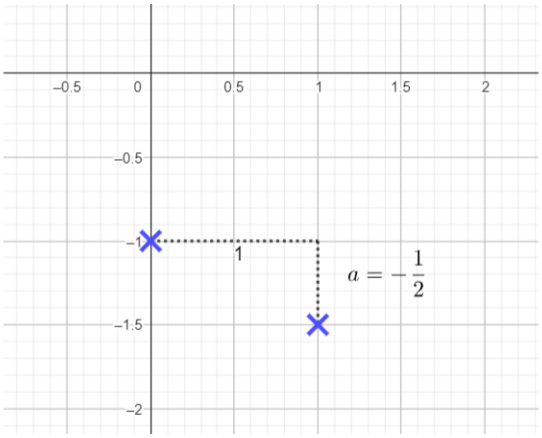


Som vi kan se på billedet stemme linjens ligning overens med den rette linje $y = 3x + 2$ som vi har indtegnet i koordinatsystemet.

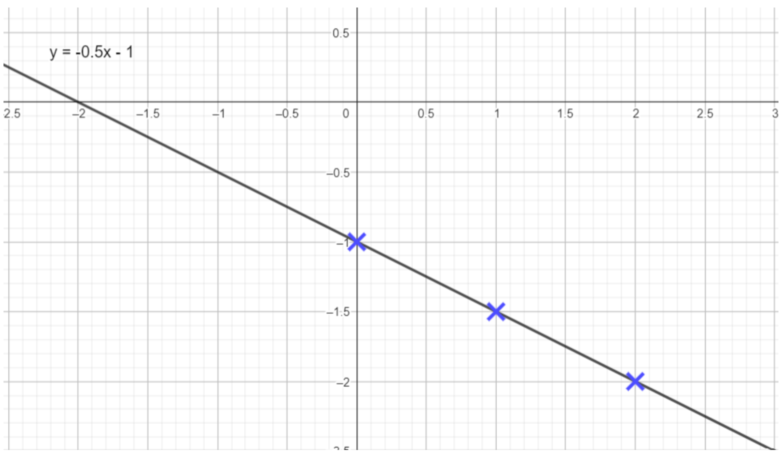
For at indtegne den anden rette linje $-\frac{1}{2}x - 1$ aflæser vi først linjens hældning og skæring med y-aksen. Linjens hældning er $-\frac{1}{2}$ og skærer y-aksen i -1. Vi indtegner det første punkt der hvor linjen skærer y-aksen. Dette kan ses på nedenstående billede.



Derefter bruger vi den aflæste hældning $-\frac{1}{2}$ til at sætte det næste punkt. Vi går 1 hen ad x-aksen og $\frac{1}{2}$ ned ad y-aksen da linjens hældning er $-\frac{1}{2}$ og sætter det næste punkt. Dette er illustreret på nedenstående billede



Ovenstående procedure gentages 1 gang mere hvorefter vi nu har 3 punkter i vores koordinatsystem. Forbinder vi disse 3 punkter med en ret linje har vi nu indtegnet vores rette linje i koordinatsystemet som kan ses nedenfor



Som vi kan se på billedet stemme linjens ligning overens med den rette linje $y = -\frac{1}{2}x - 1$ som vi har indtegnet i koordinatsystemet.

3.6 Opgave 6

Vi har en ret linje $y = 3x + 4$

Udfyld sildebenet

X	-1	0	1	2
Y				

og tegn punkterne ind i et koordinatsystem.

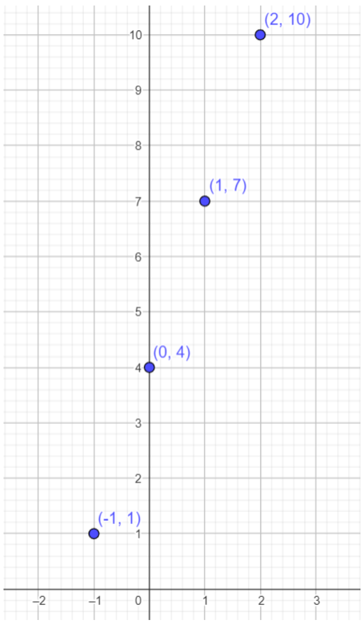
For at udfylde sildebenet skal vi altså beregne de tilsvarende y-værdier til de givne x-værdier. Dette gør vi ved at indsætte x-værdierne på x's plads i den rette linje $y = 3x + 4$. For x-værdierne får vi de følgende y-værdier.

$$Y = 3 \cdot (-1) + 4 = -3 + 4 = 1$$
$$Y = 3 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$$
$$Y = 3 \cdot 1 + 4 = 3 + 4 = 7$$
$$Y = 3 \cdot 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

Det færdige sildeben bliver derfor

X	-1	0	1	2
Y	1	4	7	10

For at indtegne punkterne i et koordinatsystem er hver x og y værdi par i sildebenet et koordinat, så vi har koordinaterne $(-1,1)$, $(0,4)$, $(1,7)$, $(2,10)$. Koordinaterne er indtegnet i koordinatsystemet på billedet nedenfor



3.7 Opgave 7

17% af 260kr

For at beregne 17% af 260kr skal vi tage vores procenttal og dele det med 100, hvorefter vi ganger med beløbet. Vi har

$$\frac{17}{100} \cdot 260 = 0.17 \cdot = 44.2$$

17% af beløbet 260kr er dermed 44.2kr.

3.8 Opgave 8

Hvor stor en procentdel er 20 ud af 270?

For at beregne hvor stor en procentdel 20 ud af 270 er, skal vi dividere de 20 med 270 og derefter gange med 100. Vi får

$$\frac{20}{270} \cdot 100 = 7.41$$

20 er altså 7.41% ud af 270.

3.9 Opgave 9

27 køer udgør 25% af besætningen. Hvor stor er besætningen.

For at finde ud af hvor stor den samlede besætning er hvis 25% af besætningen er 27 skal vi tage 100, dele det med procenttallet og gange det med besætningen. Vi har

$$\frac{100}{25} \cdot 27 = 108$$

Den samlede besætning er 108 køer.

3.10 Opgave 10

Løs ligningen $5 + x = 11$

For at løse ligningen skal vi isolere x dvs lade x stå alene på den ene side af lighedstegnet. Vi gør følgende

$$\begin{aligned} 5 + x &= 11 \\ &\Updownarrow \\ 5 + x - 5 &= 11 - 5 && \text{trækker 5 fra på begge sider} \\ &\Updownarrow \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Løsningen til ligningen er dermed $x = 6$.

3.11 Opgave 11

Løs ligningen $4x - 2 = 10$

For at løse ligningen skal vi isolere x dvs lade x stå alene på den ene side af lighedstegnet. Vi gør følgende

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 10 \\ &\Updownarrow \\ 4x - 2 + 2 &= 10 + 2 && \text{lægger 2 til på begge sider} \\ &\Updownarrow \\ 4x &= 12 \\ &\Updownarrow \\ \frac{4x}{4} &= \frac{12}{4} && \text{dividerer med 4} \\ &\Updownarrow \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Løsningen til ligningen er deremd $x = 3$.

3.12 Opgave 12

Udregn følgende $4(2+a)$.

For at udregne ovenstående udtryk skal vi gange 4 tallet ind i parentesen. Når vi ganger tal ind i parenteser skal vi gange tallet ind på alle ledene i parentesen, i dette tilfælde skal vi gange 4 tallet ind på både 2 og a. Vi får

$$4(2+a) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot a = 8 + 4a$$

3.13 Opgave 13

Udregn følgende $(4+a)(2+b)$

Når vi skal gange 2 parenteser sammen skal vi gange alle ledene i den første parenten sammen med alle ledene i den anden parentes. I dette tilfælde skal vi altså gange 4 sammen med 2 og b, samt a sammen med 2 og b. Vi får

$$(4+a)(2+b) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot b + a \cdot 2 + a \cdot b = 8 + 4b + 2a + ab$$

3.14 Opgave 14

Løs andengradsligningen $3x^2 + 2x + 2 = 0$

Vi aflæser først a, b og c værdierne ud fra formlen for den generelle andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$. Vi får

$$a = 3$$
$$b = 2$$
$$c = 2$$

Vi beregner dernæst diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ for at se om andengradsligningen har 2, 1 eller 0 løsninger.

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 24 = -20$$

Siden diskriminanten d er mindre end 0 altså $d < 0$ har andengradsligningen ingen løsning.

3.15 Opgave 15

Udregn $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

For at addere 2 brøker skal brøkerne først have fælles nævner. I vores tilfælde har vi en brøk med nævneren 2 og en brøk med nævneren 8. For at de får fælles nævneren 8 skal vi altså gange med 4 i tælleren og nævneren på den brøk der har nævneren 2.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8}$$

3.16 Opgave 16

Udregn $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$

For at gange 2 brøker sammen ganger vi deres tællere sammen og deres nævnere sammen. Vi får

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 8} = \frac{1}{16}$$

3.17 Opgave 17

Udregn $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$

For at dividere en brøk med en anden kan vi i stedet for gange med den omvendte brøk. Den omvendte brøk er brøkken hvor der er byttet om på tælleren og nævneren.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$