TEO Grundmængde G

Hvilke x-værdier der er tilladt at indsætte i en ligning.

Løsningsmængde L

Værdier af x, der gør ligningen sand

Ex: $2x = 4$ $G = R$ dvs vi kan indsætte alle tal på x's plads uden at gøre noget ulovligt (fx at dividere med 0)

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$\Updownarrow$

$x = 2$ $L = \{2\}$ dvs den eneste værdi af x som gør ligningen sand er $x = 2$

Ex: $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ $G = R/2$ dvs det er tilladt at indsætte alle tal bortset fra 2 på x's plads

$$\frac{1}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x-2)} \cdot 3 = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot (x-2) \cdot \cancel{3}$$

Ganger med (x-2) og 3 på begge sider

$\Updownarrow$

$1 \cdot 3 = 1 \cdot (x-2)$

$\Updownarrow$

$3 = x-2$

$\Updownarrow$

$3+2 = x-2+2$

$\Updownarrow$

$5 = x$

$L = \{5\}$ dvs den eneste værdi af x som gør ligningen sand er $x = 5$

TEO To ligninger med 2 ubekendte

Ex: $2x + 4y = 10$
$5x - 2y = 1$

Metode I: Erstatningsmetoden

$2x + 4y = 10$

$5x - 2y = 1$

① Isoler x i den ene ligning

$$2x + 4y = 10$$
$$\Updownarrow$$
$$2x + 4y - 4y = 10 - 4y$$

Trækker 4y fra på begge sider af =

$$\Updownarrow$$
$$2x = 10 - 4y$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{10-4y}{2}$$

Dividerer med 2 på begge sider af =

$$\Updownarrow$$
$$x = 5 - 2y$$

Da $\frac{10}{2} = 5$ og $\frac{4y}{2} = 2y$

② Indsæt udtrykket for x i den anden ligning

$$5x - 2y = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$5(\underbrace{5-2y}_{x}) - 2y = 1$$

Indsætter $x = 5 - 2y$

$$\Updownarrow$$
$$5 \cdot 5 - 5 \cdot 2y - 2y = 1$$

Ganger 5 ind i parentesen så
$5(5-2y) = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2y = 25 - 10y$

$$\Updownarrow$$
$$25 - 10y - 2y = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$25 - 12y = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$25 - 12y - 25 = 1 - 25$$

Trækker 25 fra på begge sider

$$\Updownarrow$$
$$-12y = -24$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{-12y}{-12} = \frac{-24}{-12}$$

Dividerer med -12 på begge sider

$$\Updownarrow$$
$$y = 2$$

③ Indsæt y-værdien ind i ligningen hvor vi havde isoleret x.

$x = 5 - 2y$

$\Updownarrow$

$x = 5 - 2 \cdot 2$ Indsætter $y = 2$

$\Updownarrow$

$x = 5 - 4 = 1$

Løsningen til de 2 ligninger er dermed

$x = 1$ og $y = 2$

Metode II: De lige store koeficienters metode

$2.5 \cdot$ $2x + 4y = 10$

$5x - 2y = 1$

① Ganger med et tal i den ene ligning så der bliver lige mange x'er i begge ligninger.

$2.5 \cdot 2x + 2.5 \cdot 4y = 2.5 \cdot 10$

$\Updownarrow$

$5x + 10y = 25$

$5x - 2y = 1$

② Trække de 2 ligninger fra hinanden

$5x + 10y - \underbrace{(5x - 2y)}_{\text{venstre siden af ligningen vi trækker fra}} = 25 - \underbrace{1}_{\text{højre siden af ligningen vi trækker fra}}$

$5x + 10y - 5x + 2y = 24$

$\Updownarrow$

$12y = 24$

$\Updownarrow$

$\frac{12y}{12} = \frac{24}{12}$

$\Updownarrow$

$y = 2$

③ Indsæt den fundne y-værdi i en af ligningerne

$2x + 4y = 10$

$\Updownarrow$

$2x + 4 \cdot 2 = 10$ Indsætter $y = 2$

$\Updownarrow$

$2x + 8 = 10$

$\Updownarrow$

$2x + 8 - 8 = 10 - 8$

$\Updownarrow$

$2x = 2$

$\Updownarrow$

$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$

$\Updownarrow$

$x = 1$

Så løsningen er igen $X = 1$ og $Y = 2$

Metode III: Determinant metoden

$2x + 4y = 10$
$a_1 x + b_1 y = c_1$

$5x - 2y = 1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

① $\boxed{x = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}}$ ② $\boxed{y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}}$

Vi aflæser

$a_1 = 2 \quad a_2 = 5$

$b_1 = 4 \quad b_2 = -2$

$c_1 = 10 \quad c_2 = 1$

Vi beregner x og y

$$X = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} = \frac{10 \cdot (-2) - 1 \cdot 4}{2 \cdot (-2) - 5 \cdot 4} = \frac{-20 - 4}{-4 - 20} = \frac{-24}{-24} = \underline{1}$$

$$Y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} = \frac{2 \cdot 1 - 5 \cdot 10}{2 \cdot (-2) - 5 \cdot 4} = \frac{2 - 50}{-4 - 20} = \frac{-48}{-24} = 2$$

Løsningen til ligningerne er igen

$X = 1$ og $Y = 2$