

## Opgaver til cosinusrelationen

I de følgende opgaver skal vi bruge cosinusrelationen som bruges til at beregne længden af sider eller vinkler i en vilkårlig trekant. Nedenfor ses formlerne til at beregne alle sidelængderne eller vinklerne i en vilkårlig trekant

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

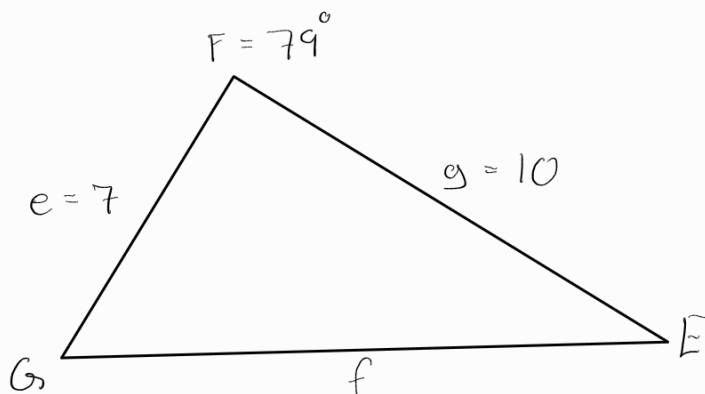
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

- a) I en trekant er  $e = 7$ ,  $g = 10$  og  $F = 79^\circ$ . Bestem de resterende sider og vinkler i trekanten.



Vi bestemmer først længden af side  $f$  ved brug af følgende formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A)$$

$$\Downarrow f^2 = e^2 + g^2 - 2eg \cdot \cos(F) \quad \text{bytter } a, b, c \text{ med } f, e, g$$

$$\Downarrow f^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(79^\circ) \quad \text{Indsætter de kendte værdier}$$

$$\Downarrow f^2 = 49 + 100 - 26,71 = 122,29$$

$$\Downarrow f = \sqrt{122,29} = 11,06 \quad \text{Tagr kvadratroden da } \sqrt{f^2} = f$$

Længden af side f er dermed 11,06.

Vi bestemmer nu de resterende 2 vinkler, E og G

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\Downarrow \cos(E) = \frac{f^2 + g^2 - e^2}{2fg} \quad \text{udskifter } a, b, c \text{ med } f, e, g$$

$$\Downarrow \cos(E) = \frac{11,06^2 + 10^2 - 7^2}{2 \cdot 11,06 \cdot 10} = \frac{173,32}{221,2}$$

Indsætter de kendte værdier

$$\Downarrow E = \cos^{-1}\left(\frac{173,32}{221,2}\right) = 38,41^\circ$$

Isolerer vinklen E ved at tage den omvendte cos nemlig  $\cos^{-1}$  på begge sider

Vinklen E er dermed  $38,41^\circ$ .

Vi bestemmer nu den sidste vinkel G

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Downarrow \cos(G) = \frac{f^2 + e^2 - g^2}{2fe} \quad \text{udskifter } a, b, c \text{ med } f, e, g$$

$\Downarrow$

$$\cos(G) = \frac{11,06^2 + 7^2 - 10^2}{2 \cdot 11,06 \cdot 7} = \frac{71,32}{154,84}$$

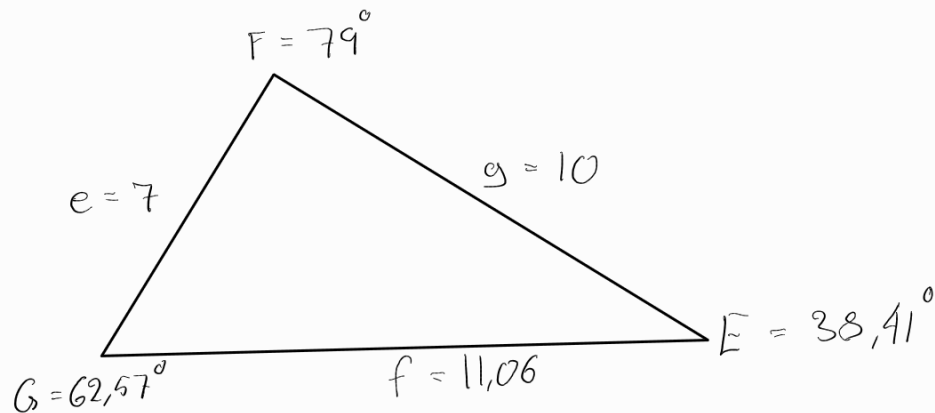
Indsætter de kendte værdier

$$\hat{=} \hat{=} G = \cos^{-1}\left(\frac{71,32}{154,84}\right) = 62,57^\circ$$

Isoler vinklen G ved at tage den omvendte cos på begge sider

Vinklen G er dermed  $62,57^\circ$ .

Alle siderne og vinklerne kan ses nedenfor på skitsen af trekanten



b) Der er givet en trekant ABC med  $a = 8$ ,  $b = 5$  og  $c = 9$ . Beregn trekantens vinkler

Vi bruger her følgende formler til at beregne vinklerne A, B og C

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\hat{=} \hat{=} \cos(A) = \frac{5^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{42}{90}$$

Indsætter de kendte værdier

$$\hat{=} \hat{=} A = \cos^{-1}\left(\frac{42}{90}\right) = 62,18^\circ$$

Isolerer vinklen A ved at tage den omvendte cos på begge sider

Vinklen A er dermed  $62,18^\circ$ .

Vi benytter samme fremgangsmåde til at beregne vinklerne B og C

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

⇕

$$\cos(B) = \frac{8^2 + 9^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{120}{144}$$

Indsætter de kendte værdier

⇕

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{120}{144}\right) = 32,32^\circ$$

Isolerer vinklen B ved at tage den omvendte cos på begge sider

Vinklen B er dermed  $32,32^\circ$ .

Vi bestemmer nu vinkel C. Her udnytter vi at vinkelsummen i en trekant er  $180^\circ$ .

$$A + B + C = 180^\circ$$

⇕

$$62,18^\circ + 32,32^\circ + C = 180^\circ$$

⇕

$$62,18^\circ + 32,32^\circ + C - 62,18^\circ - 32,32^\circ = 180^\circ - 62,18^\circ - 32,32^\circ$$

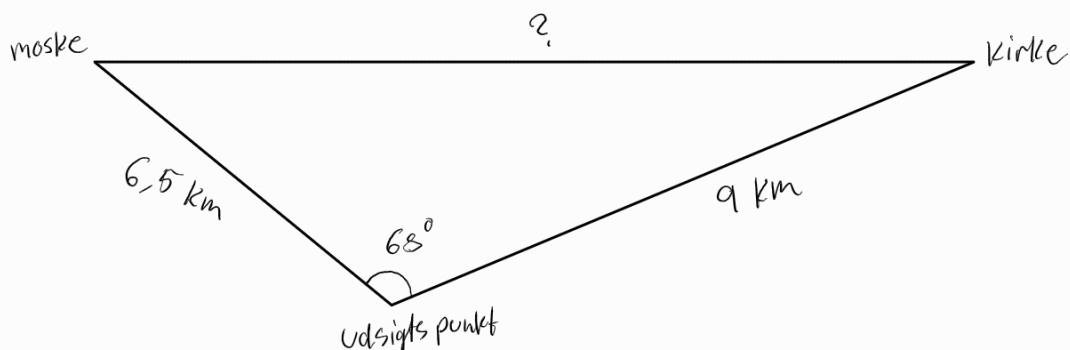
⇕

$$C = 85,5^\circ$$

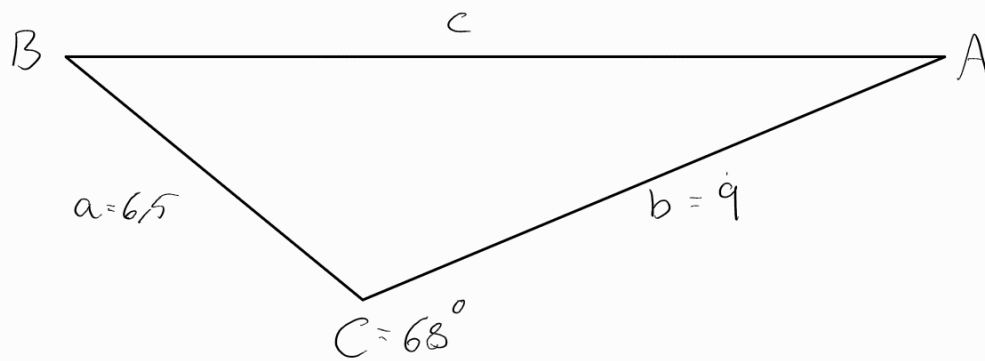
Vinklen C er dermed  $85,5^\circ$ .

- c) Fra et udkigspunkt er der 9 km til en kirke og 6,5 km til en moske. Sigtelinjerne til hhv. kirke og moske danner en vinkel på  $68^\circ$ . Hvor langt er der mellem kirke og moske?

Tegner vi en skitse af situationen får vi følgende vilkårlige trekant



Navngiver vi trekanten med a, b og c har vi følgende trekant



Vi bruger følgende cosinusrelation til at bestemme længden af side c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

⇕

$$c^2 = 6,5^2 + 9^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 9 \cdot \cos(68^\circ) = 123,25 - 43,83 = 79,42$$

*Indsætter de  
kendte værdier*

⇕

$$c = \sqrt{79,42} = 8,91$$

*Tager kvadratroden på begge sider da  $\sqrt{c^2} = c$*

Længden af side c er dermed 8,91 og dermed er der 8,91 km mellem kirken og moskeen.