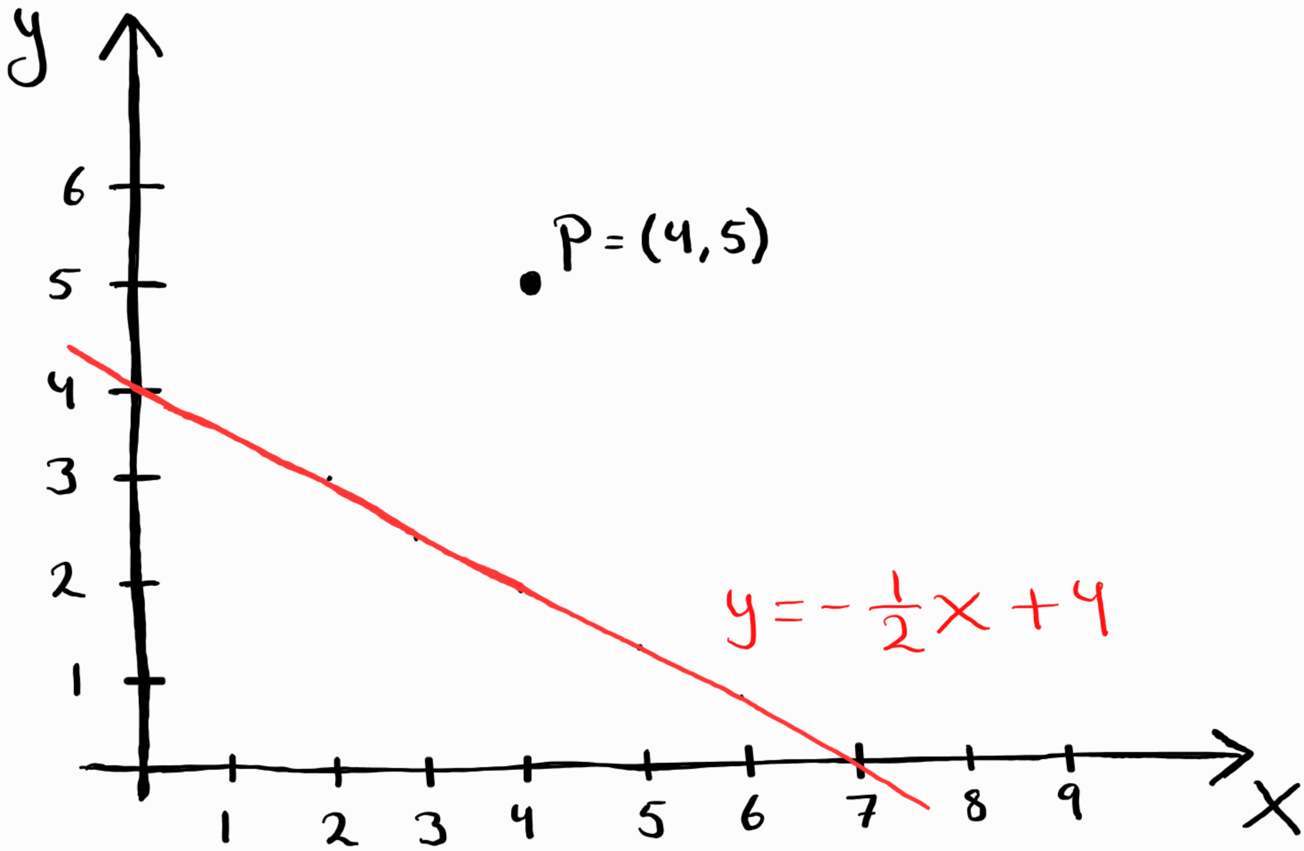
Projektion af punkt på linje

Her er der en step-by-step guide til hvordan man løser opgaver hvor man skal projektere et punkt ned på en linje.

I denne type opgave vil man oftest have en ret linje (også kendt som en *lineær funktion*) og et punkt, *P*, givet. Linjen og punktet er separeret og vi vil gerne "skubbe" punktet ned på linjen.

Lad os illustrere det med en figur:

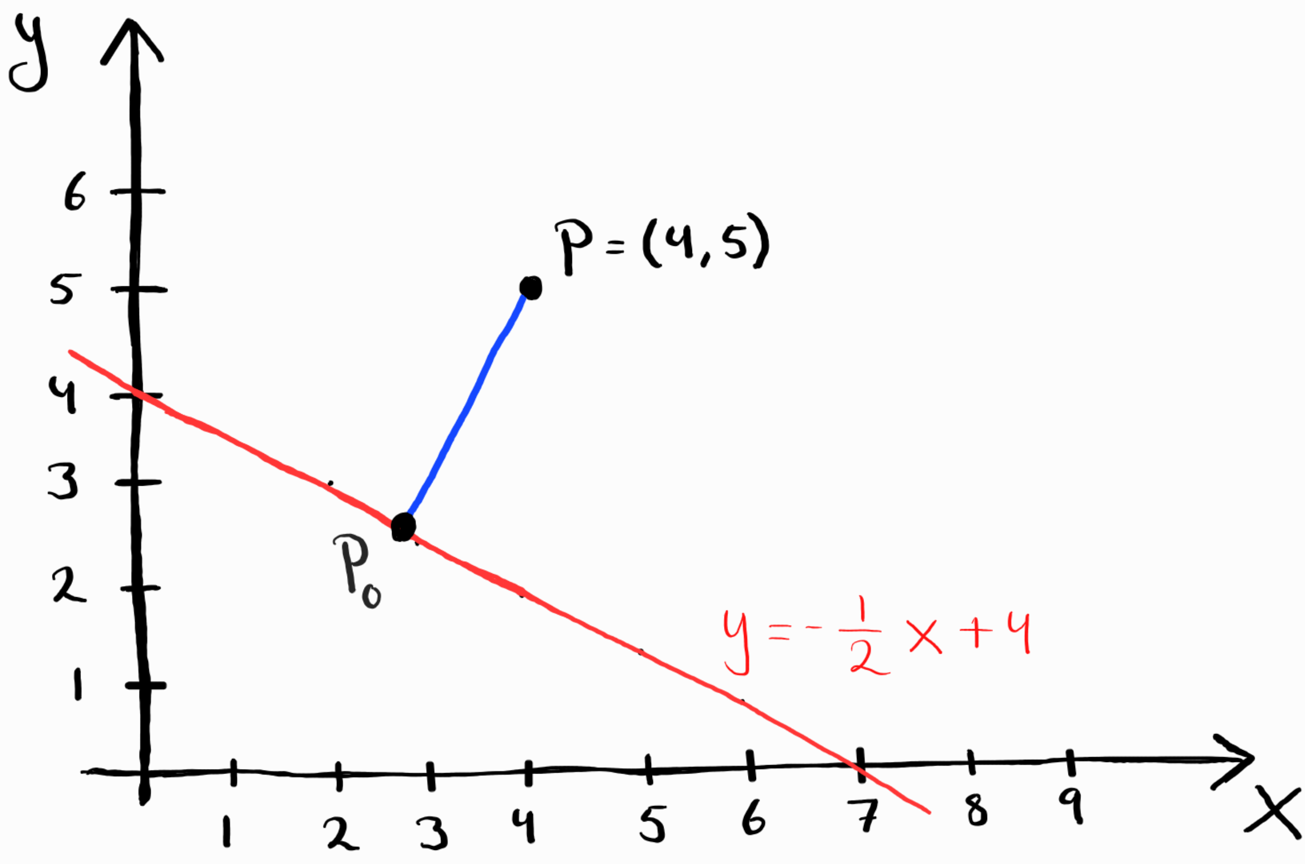


Ovenstående figur viser punktet *P* og den rette linje med forskriften;

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Men hvordan rykker vi P ned på den røde linje? Først skal vi indtegne en ret linje mellem punktet P og den røde linje. Den nye linje skal være ret (altså bare en lineær funktion) OG den skal stå vinkelret på den røde linje (det er den blå linje på figuren). Den nye linje rammer den røde linje i et punkt P_0, som så er det projekterede P på den røde linje. Vi vil derfor finde P_0.

Lad os lige gå 2 skridt tilbage, og optegne den nye linje som skulle være ret og vinkelret, samt indskrive punktet P_0.



Der er overordnet 2 dele til denne type opgave

1. Find forskriften til den blå linje
2. Find koordinatsættet til punktet P_0

Punkt 1:

Vi vil finde forskriften på den blå linje. Det gør vi ved at udnytte information om det givne Punkt og funktions forskriften på den røde linje. Da den blå linje er vinkelret på den røde linje, er der lidt steps vi skam igennem for at kunne finde forskriften for den blå linje;

1. Træk y-koordinaten (fra punktet *P)* fra y_2. Det er venstre-siden af lighedstegnet.

2. Hældningen skal gøre modsat (plus bliver til minus, minus bliver til plus) og gøres reciprok ($\frac{1}{c}$ bliver til c, og c bliver til $\frac{1}{c}$).

3. Den nye hældning skal ganges på en parentes. I parentesen skal der være 'x minus x-koordinaten fra punktet *P* '.

I skulle gerne ende op med en ligning med følgende form:

$$y_2 - y_{koor} = a_{ny}\,(x - x_{koor})$$

Hvor (x_{koor}, y_{koor}) er hhv. X- og y- koordinaterne for punktet *P*. a_{ny} Er den nye hældningskoefficient efter at man har gjort den modsat og reciprok (se ovenstående parenteser i punkterne). For at få forskriften skal man isolere for y_2

Punkt 2:

Nu når vi har to linjer som skærer hinanden OG vi kender deres forskrifter, så kan vi finde deres skæringspunkt som er P_0 .

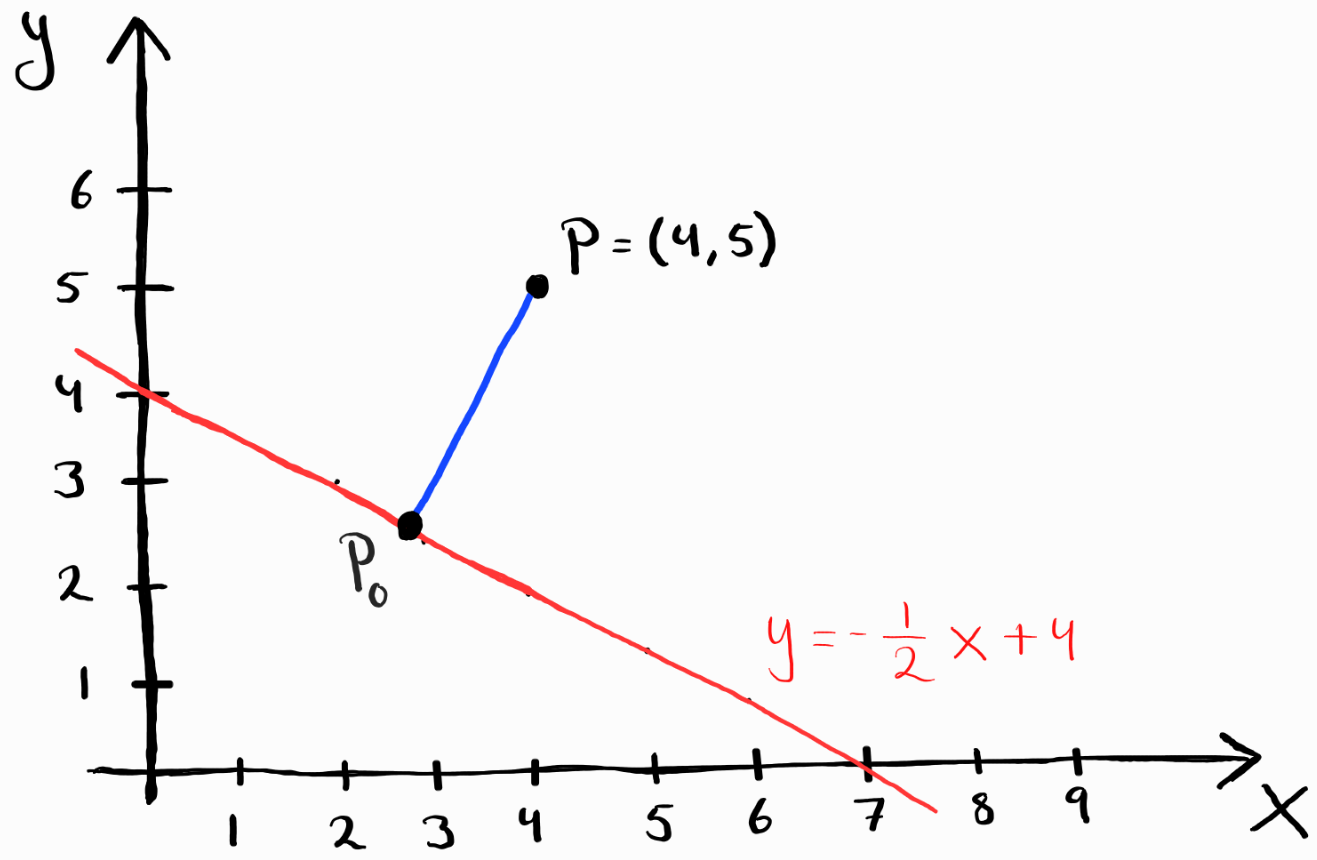
Det kan gøres på forskellige måder. Først finder vi X
Dette gøres ved $y_1 = y_2$. Det gælder kun i punktet P_0

Dernæst Indsætter vi de kendte udtryk for y_1 (rød linje) og y_2 (blå linje). Tilsidst isolerer vi for .

Godt nu når vi har X , så kan vi finde y . Det gøres bare ved at indsætte den fundne X -værdi i den ene af forskrifterne. Nu kender vi koordinat sættet til punktet P_0 , og altså derfor punktet *P* projekteret ned på den røde linje.

Eksempel:

Lad os nu gøre alt dette for eksemplet vist på figurerne. I får lige figuren igen



1. Punkt: find forskriften for den blå linje. Vi aflæser koordinaterne på punktet *P* fra ovenstående figur.

$$x_{koor} = 4 \quad , \quad y_{koor} = 5$$

Vi skal nu finde den nye hældningskoefficient. Det gøres ved at tage hældningen for den røde linje, gøre den modsat og reciprok. Lad os først bare skrive hældningen op som den er, uden at ændre noget.

$$a_{rød} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{MODSAT} = +\frac{1}{2} \\ &\text{RECIPROK} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}}$$

Det modsatte af 'minus' er 'plus' og det reciprokke (eller tænk omvendte) af $\frac{1}{2}$ er 2. Derfor bliver hældningen af

Den blå linje

$$a_{ny} = 2$$

Nu kan vi bruge formlen jeg skrev op tidligere:

$$y_2 - y_{Koor} = a_{ny}(x - x_{Koor})$$

$$\Updownarrow$$

$$y_2 - 5 = 2 \cdot (x - 4)$$

$$\Updownarrow$$

$$y_2 - 5 + 5 = 2x - 2 \cdot 4 + 5$$

$$\Updownarrow$$

$$y_2 = 2x - 8 + 5$$

$$= 2x - 3$$

Altså er forskriften for den blå linje :

$$\boxed{y_2 = 2x - 3}$$

Super! Så kan vi finde koordinatsættet til punktet P_0 .
Vi starter med at finde X . Det gør vi ved

$$y_1 = y_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y_2 = 2x - 3 \end{array}}$$

$$-\frac{1}{2}x+4=2x-3$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{2}x+4+3+\frac{1}{2}x=2x-3+3+\frac{1}{2}x$$

$$\Updownarrow$$

$$4+3=2x+\frac{1}{2}x$$

$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow \quad 7=\left(2+\frac{1}{2}\right)x$$

$$7=\left(\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1}{2}\right)x$$

FORLÆNG BRØK

$$=\left(\frac{4+1}{2}\right)x$$

$$=\frac{5}{2}x$$

$$\Updownarrow$$

ISOLÉR x

$$\frac{7\cdot 2}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{14}{5}=x$$

Altså er x-koordinaten:

$$\boxed{x=\frac{14}{5}}$$

Lad os nu finde y-koordinaten og så er vi færdige😁. Vi vælger bare en af de 2 forskrifter, og Indsætter x-værdien. Et godt trick er bare at vælge den simpleste af de 2 forskrifter, så jeg vælger forskriften for y_2 og kalder nu bare y_2 for y

$$y = 2x - 3$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 2 \cdot \frac{14}{5} - 3$$

$$= \frac{28}{5} - \frac{3 \cdot 5}{5}$$

FORLÆNGER BRØK
(FÆLLES NÆVNER)

$$= \frac{28 - 15}{5}$$

$$= \frac{13}{5}$$

Altså er koordinatsættet for P_0 :

$$\boxed{P_0 = \left(\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)}$$

OPGAVEN ER LØST