

Løsning til mindstekravsopgaverne

Ask Madsen

December 12, 2024

1.1	Opgave 1	2
1.2	Opgave 2	3
1.3	Opgave 3	4
1.4	Opgave 4	5
1.5	Opgave 5	6
1.6	Opgave 6	7
1.7	Opgave 7	8
1.8	Opgave 8	9
1.9	Opgave 9	10
1.10	Opgave 10	11
1.11	Opgave 11	11
1.12	Opgave 12	13
1.13	Opgave 13	14
1.14	Opgave 14	15
1.15	Opgave 15	16
1.16	Opgave 16	17
1.17	Opgave 17	20
1.18	Opgave 18	21
1.19	Opgave 19	22
1.20	Opgave 20	23
1.21	Opgave 21	24
1.22	Opgave 22	25
1.23	Opgave 23	26
1.24	Opgave 24	27

Reduktion, procenregning og andre regneregler

1.1 Opgave 1

Nedenfor er et udtryk reduceret.

$$\begin{aligned}4 \cdot (5a - b) + b - 3a \\&= 20a - 4b + b - 3a \\&= 17a - 3b\end{aligned}$$

Forklar hvert trin i reduktionen

Løsning

I det første trin ganger vi 4 ind i parentesen på hvert led således

$$4 \cdot (5a - b) = 4 \cdot 5a - 4 \cdot b = 20a - 4b$$

I det næste trin samler vi ledene som indeholder a og ledene som indeholder b således

$$20a - 4b + b - 3a = 20a - 3a - 4b + b = 17a - 3b$$

1.2 Opgave 2

Nedenfor er en ligning løst.

$$\begin{aligned}3x + 2(x + 1) + 7 &= 5 \\3x + 2x + 2 + 7 &= 5 \\5x + 9 &= 5 \\5x &= -4 \\x &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Forklar, hvad der er gjort i hvert trin.

Løsning

I det første trin ganger vi 2 tallet ind i parentesen på hvert led således

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

I det næste trin lægger vi ledene som indeholder x sammen og ledene som ikke indeholder x sammen.

$$3x + 2x + 2 + 7 = 5x + 9$$

I det næste trin trækker vi 9 fra på begge sider

$$5x + 9 - 9 = 5 - 9 \iff 5x = -4$$

I det sidste trin dividerer vi med 5

$$\frac{5x}{5} = -\frac{4}{5} \iff x = -\frac{4}{5}$$

1.3 Opgave 3

Forklar, at værdien af $a^2 - (b + c)$ er 1, når $a = -3$, $b = 6$ og $c = 2$.

Løsning

Vi starter med at indsætte værdierne for a, b og c hvorefter vi beregner parentesen og potensen og trækker så resultaterne fra hinanden

$$(-3)^2 - (6 + 2) = 9 - 8 = 1$$

1.4 Opgave 4

Hvor mange procent udgør 30 ud af 260?

Løsning

For at bestemme hvor mange procent Tal1 udgør af Tal2 kan man bruge følgende formel

$$\frac{Tal1}{Tal2} \cdot 100\%$$

Hvis vi indsætter de kendte værdier Tal1= 30 og Tal2= 260 får vi

$$\frac{30}{260} \cdot 100 \approx 11.53\%$$

30 udgør altså ca 11.53 % af 260.

Løsning af ligninger

1.5 Opgave 5

Løs følgende to ligninger med to ubekendte

$$\begin{aligned}x &= 6 - y \\ 5y + x &= 14\end{aligned}$$

Løsning

Vi indsætter den første ligning $x = 6 - y$ på x 's plads i den anden ligning således

$$5y + (6 - y) = 14$$

I denne ligning isolerer vi så y

$$\begin{aligned}5y + (6 - y) &= 14 \\ \Downarrow \\ 5y - y + 6 &= 14 \\ \Downarrow \\ 4y + 6 &= 14 \\ \Downarrow \\ 4y &= 14 - 6 \\ \Downarrow \\ 4y &= 8 \\ \Downarrow \\ \frac{4y}{4} &= \frac{8}{4} \\ \Downarrow \\ y &= 2\end{aligned}$$

Indsætter nu $y = 2$ i den første ligning og får

$$x = 6 - 2 = 4$$

Løsningen til de 2 ligninger er derfor $x = 4$ og $y = 2$.

1.6 Opgave 6

Bestem diskriminanten for andengradsligningen

$$3x^2 + 4x - 1 = 0$$

Løsning

Den generelle formel for diskriminanten er $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Vi ved at den generelle andengradsligning skrives på formen $ax^2 + bx + c = 0$. Vi aflæser nu a, b og c og får følgende $a = 3$, $b = 4$, $c = -1$. Diskriminanten bliver dermed

$$d = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 - (-12) = 16 + 12 = 28$$

1.7 Opgave 7

Løs denne ligning: $\frac{20}{x+2} = 4$

Løsning

Vi starter med at gange med $(x+2)$ på begge sider for at fjerne parentesen.

$$\frac{20}{(x+2)} \cdot (x+2) = 4 \cdot (x+2)$$

Nu ganger vi de 4 ind i parentesen $(x+2)$ på højre siden.

$$20 = 4 \cdot x + 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 20 = 4x + 8$$

Nu trækker vi 8 fra på begge sider og får

$$20 - 8 = 4x + 8 - 8 \Leftrightarrow 12 = 4x$$

Vi dividerer nu med 4 på begge sider så x kommer til at stå alene.

$$\frac{12}{4} = \frac{4x}{4} \Leftrightarrow 3 = x$$

Bytter vi om på højre og venstre siden får vi

$$x = 3$$

1.8 Opgave 8

Undersøg om $x = 2$ er en løsning til denne ligning: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Løsning

For at undersøge om $x = 2$ er en løsning til ligningen indsætter vi 2 på x's plads og ser om venstresiden giver 0.

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 10 - 10 = 0$$

$x = 2$ er altså en løsning til ligningen.

1.9 Opgave 9

To linjer er givet ved $y = 4x - 1$ og $y = x + 5$. Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.

Løsning

For at bestemme skæringspunktets x-koordinat mellem de to linjer kan vi sætte dem lig med hinanden og isolere for x.

$$\begin{aligned}4x - 1 &= x + 5 \\ \Updownarrow \\ 4x - 1 + 1 &= x + 5 + 1 \\ \Updownarrow \\ 4x &= x + 6 \\ \Updownarrow \\ 4x - x &= x - x + 6 \\ \Updownarrow \\ 3x &= 6 \\ \Updownarrow \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\ \Updownarrow \\ x &= 2\end{aligned}$$

Herefter indsætter vi $x = 2$ i en af de to linjers forskrift og bestemmer skæringspunktets y-koordinat

$$y = 2 + 5 = 7$$

Skæringspunktet mellem de to linjer er derfor $(2, 7)$

1.10 Opgave 10

Isolér T i ligningen $a \cdot T = \frac{R-T}{Q+a}$.

Løsning

Vi starter med at gange med $(Q+a)$ på begge sider

$$a \cdot T \cdot (Q+a) = \frac{R-T}{Q+a} \cdot (Q+a) \implies aQT + a^2T = R - T$$

Vi lægger nu T til på begge sider

$$aQT + a^2T + T = R$$

Nu sætter vi T uden for en parentes så $(aQ + a^2 + 1)T = aQT + a^2T + T$

$$(aQ + a^2 + 1)T = R$$

Dividerer nu med $(aQ + a^2 + 1)$ på begge sider og får

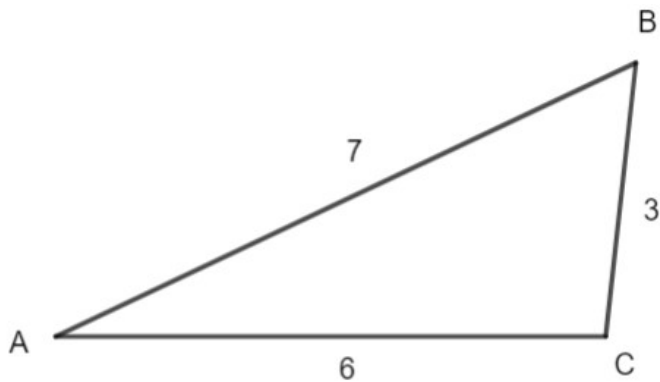
$$T = \frac{R}{aQ + a^2 + 1}$$

T er hermed isoleret i ligningen.

Geometri og trigonometri

1.11 Opgave 11

Figuren viser en trekant ABC .



Følgende sidelængder er kendte: $|AB| = 7$, $|BC| = 3$ og $|AC| = 6$.

Bestem vinkel A.

Løsning

Da trekanten ikke er retvinkel kan vi bruge cosinusrelationen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Her isolerer vi først $\cos(A)$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 &= -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \\ \Downarrow \\ \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} &= \cos(A) \\ \Downarrow \\ -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot b \cdot c} &= \cos(A) \end{aligned}$$

Nu indsætter vi sidelængderne på a,b og c's plads så $a = 3$, $b = 6$ og $c = 7$

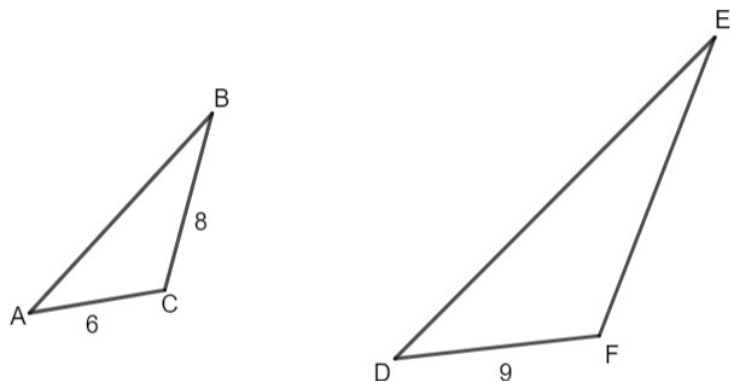
$$\begin{aligned} -\frac{3^2 - 6^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} &= \cos(A) \\ \Downarrow \\ -\frac{9 - 36 - 49}{84} &= \cos(A) \\ \Downarrow \\ -\frac{-76}{84} &= \cos(A) \\ \Downarrow \\ \frac{76}{84} &= \cos(A) \end{aligned}$$

Nu bruger vi den inverse funktion til \cos altså \arccos for at bestemme vinklen A

$$A = \arccos\left(\frac{76}{84}\right) \approx 25.2^\circ$$

1.12 Opgave 12

To ensvinklede trekanter er vist på figuren.



Størrelsesforholdene er ikke korrekte.

Følgende sidelængder oplyses: $|AC| = 6$, $|BC| = 8$ og $|DF| = 9$

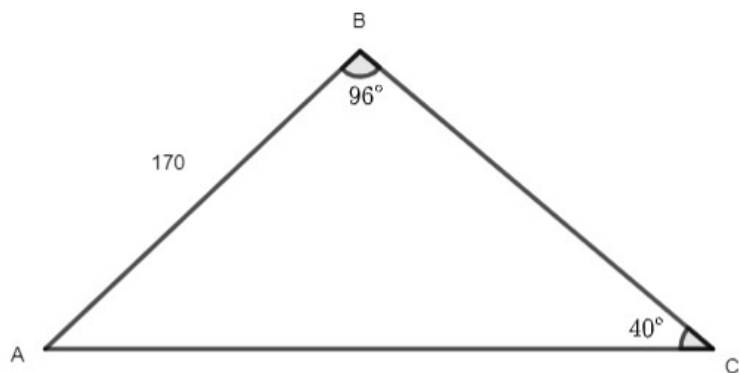
Bestem $|FE|$

Løsning

Da trekanterne er ensvinklede kan vi altså bestemme sidelængdernes størrelsesforhold. Hvis vi ser på sidelængderne $|AC|$ og $|DF|$ er den større trekants side 1.5 gange længere. Vi kan altså bestemme sidelængden $|FE| = 1.5 \cdot |BC| = 1.5 \cdot 8 = 12$.

1.13 Opgave 13

Figuren viser en trekant



Følgende størrelser i trekant ABC er kendte:

$$B = 96^\circ, \quad |AB| = 170 \quad \text{og} \quad C = 40^\circ$$

Bestem $|AC|$.

Løsning

For at bestemme længden af siden AC bruger vi sinusrelationen for en vilkårlig trekant

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Her svarer sidelængden AB til c og sidelængden AC som vi skal finde svarer til b . Vi betragter den sidste lighed i sinusrelationen og isolerer b .

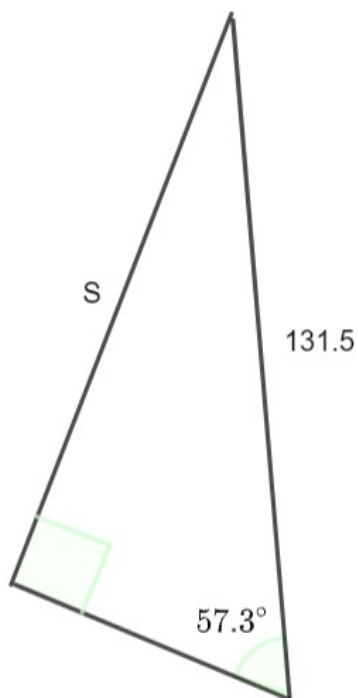
$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \iff b = \frac{c}{\sin(C)} \cdot \sin(B)$$

Indsætter nu $c = 170$, $C = 40^\circ$, $B = 96^\circ$ og får

$$b = \frac{170}{\sin(40^\circ)} \cdot \sin(96^\circ) \approx 224.4$$

1.14 Opgave 14

En retvinklet trekant er skitseret på figuren.



Bestem længden S.

Løsning

For retvinklede trekanter gælder formlen

$$\sin(B) = \frac{c}{b}$$

Her er B vinklen $B = 57.3^\circ$, c er længden af hypotenusen dvs $c = 131.5$ og b er siden som i vores tilfælde svarer til s. Vi isolerer altså b og indsætter tallene

$$\sin(B) = \frac{b}{c} \iff b = \sin(B) \cdot c = \sin(57.3^\circ) \cdot 131.5 \approx 89.76$$

1.15 Opgave 15

Et punkt har koordinatsættet $A(8, 6)$.

En linje l har ligningen $y = -x + 7$.

Bestem afstanden mellem A og l .

Løsning

Her bruger vi formelen for afstand mellem et punkt og en linje som siger at afstanden fra et punkt (x_1, y_1) til en linje $y = ax + b$ kan bestemmes ved

$$\text{dist}(P, m) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Vi indsætter tallene og får

$$\text{dist}(P, m) = \frac{|(-1) \cdot 8 + 7 - 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 1}} = \frac{|-8 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|-7|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4.95$$

1.16 Opgave 16

En cirkel C og en linje l er bestemt ved ligningerne

$$C : (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$$

$$l : y = x - 2$$

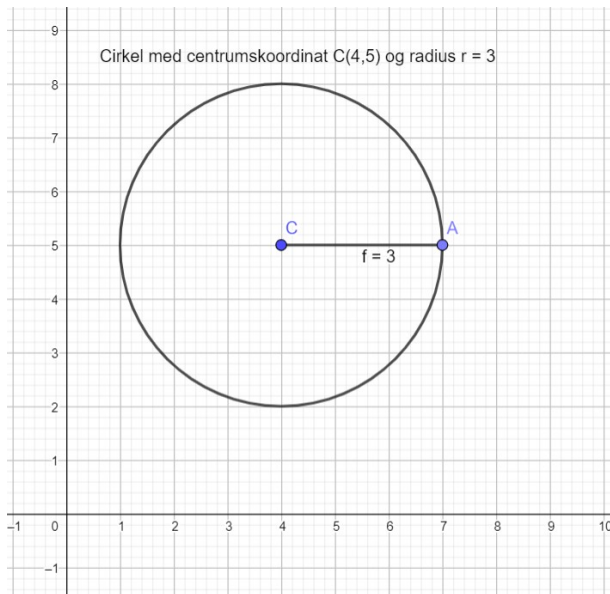
a) Tegn cirklen og linjen i samme koordinatsystem.

Løsning

Vi starter med at aflæse cirkelns centrumskoordinat og cirkelns radius. Vi ved at cirkelns generelle ligning er givet ved

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

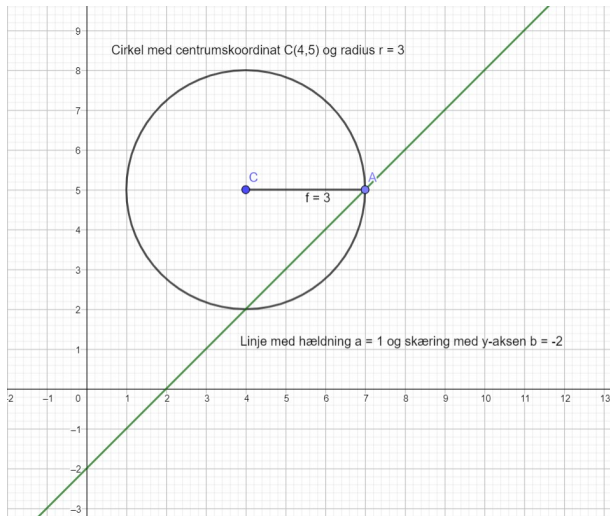
Her er $C(a, b)$ cirkelns centrumskoordinat og r er cirkelns radius. Hvis vi bruger dette kan vi aflæse centrumskoordinatet til $C(4, 5)$ og radius til $r = 3$. Vi kan nu indtegne cirklen i et koordinatsystem



For at indtegne linjen skal vi aflæse linjens hældning, a og linjens skærings med y-aksen, b . Vi ved at en ret linje har den generelle form

$$y = ax + b$$

Aflæser vi nu den givne linje får vi hældningen $a = 1$ og skæringen med y-aksen $b = -2$. Ud fra disse oplysninger kan vi nu indtegne vores linje i koordinatsystemet



b) Bestem skæringspunkterne mellem cirklen og linjen

Løsning

Ud fra koordinatsystemet i opgave 16a kan vi se at cirklen og linjen skærer hinanden i 2 punkter. For at bestemme disse skæringspunkter sætter vi linjens ligning $y = x - 2$ ind på y's plads i cirkelns ligning

$$(x - 4)^2 + (x - 2 - 5)^2 = 3^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(x - 4)^2 + (x - 7)^2 = 9$$

Vi beregner nu de 2 parenteser ved at bruge reglen $(a - b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2$

$$(x - 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-4) + (-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$(x - 7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-7) + (-7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

Indsætter vi dette får vi nu

$$(x - 4)^2 + (x - 7)^2 = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 14x + 49 = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + x^2 - 8x - 14x + 16 + 49 = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - 22x + 65 = 9$$

Vi trækker nu 9 fra på begge sider

$$2x^2 - 22x + 65 - 9 = 9 - 9$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - 22x - 56 = 0$$

Nu findes vi løsningerne til det ovenstående andengradsligning ved først at beregne determinanten

$$d = b^2 - 4ac = (-22)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 56 = 36$$

Nu bestemmer vi løsningerne altså x-koordinatet til skæringen mellem cirklen og linjen

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{22 + \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{22 + 6}{4} = \frac{28}{4} = 7 \\x_2 &= \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{22 - \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{22 - 6}{4} = \frac{16}{4} = 4\end{aligned}$$

For at finde de tilsvarende skæringer med y-aksen indsætter vi de fundne x-værdier i linjens ligning

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - 2 = 7 - 2 = 5 \\y - 2 &= x_2 - 2 = 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

Vi har altså følgende skæringspunkter mellem linjen og cirklen

$$\begin{aligned}S_1 &= (x_1, y_1) = (7, 5) \\S_2 &= (x_2, y_2) = (4, 2)\end{aligned}$$

Hvis vi sammenligner med tegningen vi får fra opgave 16a kan vi se at skæringspunkterne stemmer.

1.17 Opgave 17

En cirkel C er givet ved ligningen

$$C : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

Bestem cirkelns centrum og radius

Løsning

Hvis vi benytter os af den generelle formel for cirkelns ligning fra opgave 16 kan vi aflæse cirkelns centrum til $C(2, 3)$ og cirkelns radius til $r = 5$

1.18 Opgave 18

Undersøg om punktet $(2, 3)$ ligger på linjen bestemt ved $2x + y - 7 = 0$

Løsning

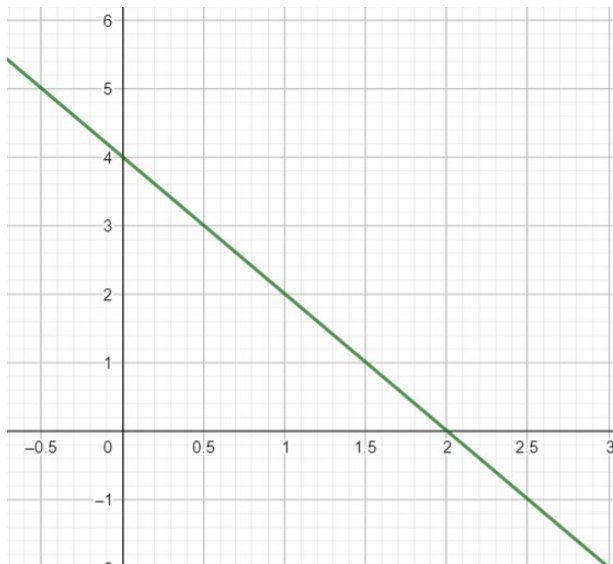
For at tjekke om et punkt ligger på en bestemt linje indsætter vi punktets x-koordinat på x'plads og punktets y-koordinat på y's plads.

$$2 \cdot 2 + 3 - 7 = 4 + 3 - 7 = 7 - 7 = 0$$

Da venstresiden af vores beregning stemmer med højresiden altså 0 kan vi konkludere at punktet $(2, 3)$ ligger på linjen.

1.19 Opgave 19

På figuren ses en linje i et koordinatsystem.



Bestem en ligning for linjen.

Løsning

Vi ved at en linje som denne har den generelle form $y = ax + b$. Her er a hældningen og b er skæringen med y -aksen. Vi aflæser skæringen med y -aksen på grafen til $b = 4$. For at bestemme hældningen a skal vi benytte os af følgende formel

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Her er (x_1, y_1) og (x_2, y_2) to vilkårlige punkter på vores linje. For nemhedens skyld vælger vi punkterne til at være

$$(x_1, y_1) = (0, 4)$$

$$(x_2, y_2) = (2, 0)$$

Indsætter vi disse punkter i formelen bestemmer vi nu a

$$a = \frac{0 - 4}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

Linjens ligning er derfor

$$y = -2x + 4$$

Vektorer

1.20 Opgave 20

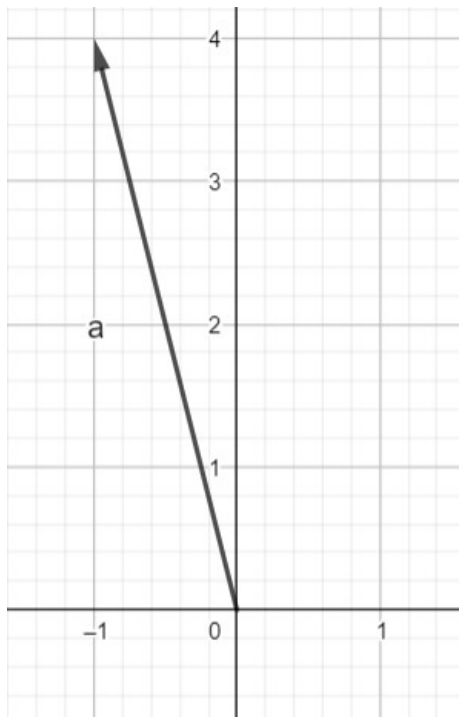
En vektor \vec{a} er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Indtegn vektoren i et koordinatsystem, og bestem $|\vec{a}|$

Løsning

Hvis vi lader vores vektor starte i punktet $(0,0)$ så fortæller vektorens koordinater os at vi skal bevæge os -1 hen ad x-aksen og 4 op ad y-aksen. Forbinder vi disse punkter og tegner en pil op for enden af strengen får vi følgende graf



1.21 Opgave 21

To vektorer \vec{a} og \vec{b} er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestem vektor \vec{c} , når $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

Løsning

Vi kan bestemme vektor c ved følgende

$$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1.22 Opgave 22

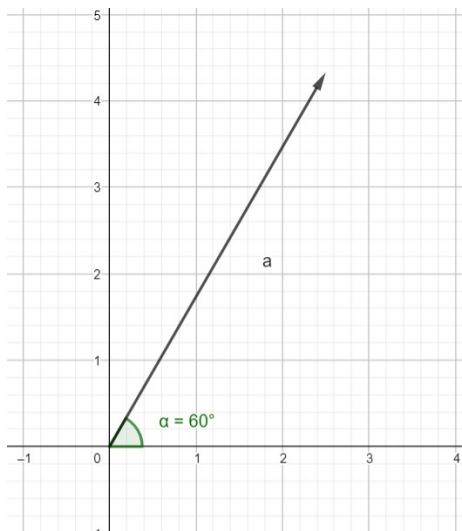
En vektor \vec{a} er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(60^\circ) \\ 5 \cdot \sin(60^\circ) \end{pmatrix}$$

Forklar hvad tallene 5 og 60° fortæller om \vec{a}

Løsning

Tallet 5 fortæller os at \vec{a} har længden 5. Tallet 60° er vektorens retningsvinkel altså den vinkel der er mellem vektoren og x-aksen. Dette kan ses illustreret på følgende graf



1.23 Opgave 23

En vektor \vec{c} har længden 6 og retningsvinklen 127°

Bestem koordinaterne for \vec{c} .

Løsning

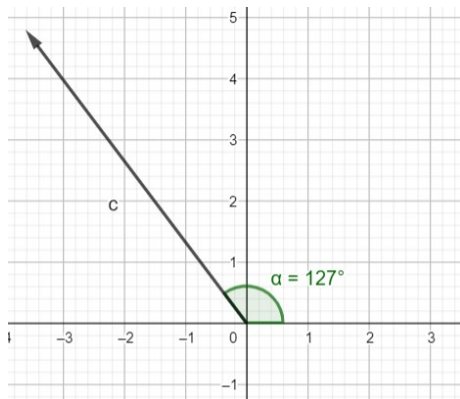
For at bestemme vektor \vec{c} 's koordinaterne gør vi brug af følgende formel

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} l \cdot \cos(v) \\ l \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Her er l vektorens længde og v er vektorens retningsvinkel. Indsætter vi de givne værdier får vi

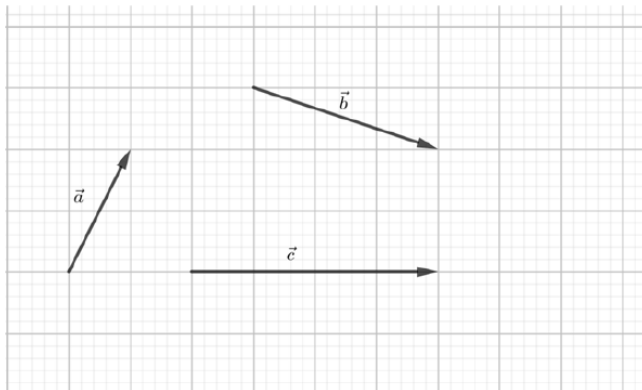
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos(127^\circ) \\ 6 \cdot \sin(127^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.61 \\ 4.79 \end{pmatrix}$$

Vektoren er illustreret nedenfor



1.24 Opgave 24

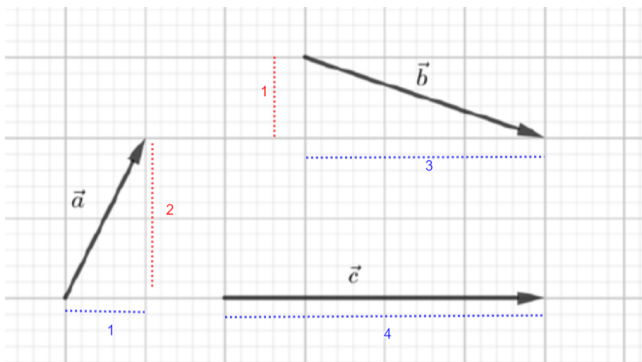
På figuren nedenfor ses repræsentanter for vektorerne \vec{a} , \vec{b} og \vec{c} .



Indtegn en repræsentant for vektoren $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Løsning

Først aflæser vi vektorernes x og y komponenter. X komponenten af en vektor er hvor meget vi går hen ad x -aksen, og y komponent er hvor meget vi går op ad y-aksen. Nedenstående figur illustrerer hvordan man kan aflæse en vektors x og y komponenter ud fra figuren.



De blå linjer er vektorernes x komponenter og de røde linjer er vektorernes y komponenter.

Vi har nu

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vi kan nu beregne summen af de 3 vektorer

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3+4 \\ 2-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu indtegner vi vektoren $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ ind i et koordinatsystem.

