

# Cirkels ligning

## Øvelse 2.2.5

Bestem centrum, C, og radius, r, for de cirkler, der er beskrevet ved nedenstående ligninger.

$$1. x^2 + y^2 - 12x + 2y - 106 = 0$$

$$2. x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$3. x^2 + y^2 + 36y = 0$$

$$4. 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 10$$

For at kunne aflæse centrum og radius skal cirkels ligning være på formen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Her er a og b x og y koordinaterne for cirkels centrum og r er radius. Da de ligninger vi får givet i opgaven ikke står så vi direkte kan aflæse centrum og radius skal vi derfor omskrive til vi kan aflæse centrum og radius.

Først vil vi omskrive ligningen til  $(x-a)^2 + (y-b)^2$  og derefter finder vi radius.

I den første opgave med ligningen

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y - 106 = 0$$

Kigger vi på tallene der står foran x og y altså -12 og 2. Vi skriver nu parenteserne op og indsætter halvdelen af værdien der står foran x og y på henholdsvis a og b plads.

halvdelen af de -12

$$(x-6)^2 = (x-6) \cdot (x-6)$$
$$= x^2 - 6x - 6x + (-6) \cdot (-6)$$
$$= x^2 - 12x + 36$$

↑  
de -12 fra den originale ligning

halvdelen af de 2

$$(y+1)^2 = (y+1) \cdot (y+1)$$
$$= y^2 + y + y + 1$$
$$= y^2 + 2y + 1$$

↑  
de 2 fra den originale ligning

Vi skal altså have udtrykket  $x^2 - 12x + 36$  for at omskrive til parenteser

$$(x-6)^2$$

Vi skal derudover også have udtrykket  $y^2 + 2y + 1$  for at omskrive til parenteser

$$(y+1)^2$$

Sammenligner vi med ligningen vi fik givet mangler vi at lægge 36 og 1 til på begge sider for at kunne omskrive til parenteserne

$$x^2 - 12x + 36 \quad y^2 + 2y + 1$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y - 106 = 0$$

$$\Updownarrow x^2 + y^2 - 12x + 2y - 106 + 36 + 1 = 0 + 36 + 1$$

Lægger de 36 og 1 til på begge sider

$$\Updownarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1 - 106 = 37$$

Samler x ledene og y ledene

$$\Updownarrow (x-6)^2 + (y+1)^2 - 106 = 37$$

omskriver  $x^2 - 12x + 36$  til  $(x-6)^2$  og  $y^2 + 2y + 1$  til  $(y+1)^2$

$$\Updownarrow (x-6)^2 + (y+1)^2 - 106 + 106 = 37 + 106$$

Lægger 106 til på begge sider

$$\Updownarrow (x-6)^2 + (y+1)^2 = 143$$

Vi har nu omskrevet ligningen til formen  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Vi aflæser nu cirkelens centrum og radius

$$C(6, -1) \text{ og } r = \sqrt{143} = 11,96$$

Vi bruger samme procedure til at omskrive ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

Vi aflæser halvdelen af de værdier der står foran x og y nemlig -2 og -2 og skriver dem op på i parenteserne

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= (x-2) \cdot (x-2) \\ &= x^2 - 2x - 2x + (-2) \cdot (-2) \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= (y-2) \cdot (y-2) \\ &= y^2 - 2y - 2y + (-2) \cdot (-2) \\ &= y^2 - 4y + 4 \end{aligned}$$

Vi sammenligner nu de nye udtryk fra parenteserne med ligningen for at se hvad vi mangler at lægge til for at kunne omskrive ligningen

$$x^2 - 4x + 4 \quad y^2 - 4y + 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$\Downarrow \quad x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

Som vi kan se så mangler vi kun at lægge 4 til for at vi kan omskrive til parenteserne

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Downarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0 + 4$$

Lægger 4 til på begge sider

$$\Downarrow \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

omskriver  $x^2 - 4x + 4$  til  $(x-2)^2$  og  
 $y^2 - 4y + 4$  til  $(y-2)^2$

Vi har nu omskrevet til formen For cirkelns ligning og aflæser nu centrum og radius

$$C(2,2) \text{ og } r = \sqrt{4} = 2$$

Vi følger nu samme procedure for ligningen

$$x^2 + y^2 + 36y = 0$$

Vi aflæser halvdelen af den værdi der står foran x og y. Halvdelen af værdien foran y er 18 og da ligningen ikke indeholder x må parenteserne bliver til

$$(x)^2 = x^2$$

$$\begin{aligned} (y+18)^2 &= (y+18) \cdot (y+18) \\ &= y^2 + 18y + 18y + 18^2 \\ &= y^2 + 36y + 324 \end{aligned}$$

Vi sammenligner nu med ligningen for at se hvad vi skal lægge til så vi kan omskrive ligningen

$$x^2 \quad y^2 + 36y + 324$$

$$x^2 + y^2 + 36y = 0$$

Vi kan se at lægger vi 324 til på begge sider kan vi omskrive ligningen

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + 36y = 0 \\
 \Downarrow & \\
 & x^2 + y^2 + 36y + 324 = 0 + 324 \\
 \Downarrow & \\
 & x^2 + (y+18)^2 = 324
 \end{aligned}$$

Lægger 324 til på begge sider

Omskriver  $y^2 + 18y + 324$  til  $(y+18)^2$

Vi kan nu aflæse centrum og radius for cirklen. Da vi kun har  $x^2$  ved vi at centrums x koordinat er 0.

$$C(0, -18) \text{ og } r = \sqrt{324} = 18$$

Vi udfører nu samme procedure for den sidste ligning

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 10$$

Først bruge vi et smart trick hvor vi dividerer med 2 i alle ledene. Dette trick kan vi bruge da alle tallene kan deles med 2.

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} - \frac{4x}{2} - \frac{8y}{2} = \frac{10}{2} \\
 \Downarrow & \\
 & x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5
 \end{aligned}$$

Vi aflæser nu halvdelen af de værdier der står foran x og y nemlig -1 og -2. Vi får nu følgende parenteser

$$(x-1)^2 = (x-1) \cdot (x-1)$$

$$= x^2 - x - x + (-1) \cdot (-1)$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$$(y-2)^2 = (y-2) \cdot (y-2)$$

$$= y^2 - 2y - 2y + (-2) \cdot (-2)$$

$$= y^2 - 4y + 4$$

Vi sammenligner nu med ligningen for at se hvad vi skal lægge til på begge sider for at kunne omskrive ligningen

$$x^2 - 2x + 1 \quad y^2 - 4y + 4$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$$

Vi mangler at lægge 1 og 4 til på begge sider for at kunne omskrive ligningen

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 + 4 = 5 + 1 + 4$$

Lægger 1 og 4 til på begge sider

⇓

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y-2)^2} = 10$$

Samler x og y ledene

⇓

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$$

Omskriver  $x^2 - 2x + 1$  til  $(x-1)^2$  og  
 $y^2 - 4y + 4$  til  $(y-2)^2$

Vi kan nu aflæse centrum og radius

$$C(1,2) \text{ og } r = \sqrt{10} = 3,16$$