

Håndbog for matematik B niveau

Ask Madsen

January 29, 2024

1	Kapitel: Regneregler	2
1.1	Brøkrekneregler	3
1.2	Kvadratsætninger	6
1.3	Opgaver	8
1.4	Løsning til opgaver	10

1 Kapitel: Regneregler

I dette kapitel vil vi gennemgå en række regneregler som er essentielle at kunne benytte når man arbejder med matematik.

1.1 Brøkrekneregler

Det første emne vi kommer til at gennemgå er brøkrekneregler. Vi skal lære addition af brøker, subtraktion af brøker, hvordan vi ganger og dividerer brøker og til sidst hvordan vi forkorter brøker.

En brøk består af 2 tal, det øverste tal kaldes for tælleren og det nederste tal for nævneren. Når vi adderer 2 brøker gælder følgende regler

Theorem 1 *Addition og subtraktion af brøker*

Hvis 2 brøker har samme nævner b er additionen og subtraktionen af de 2 brøker givet ved

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Hvis 2 brøker ikke har samme nævner er deres addition givet ved

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

Vi vil nu gennemgå en række eksempler på hvordan vi laver addition og subtraktion af 2 brøker.

Eksempel 1: Addition med ens nævnere

Vi får givet følgende brøker $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{3}$ og bliver bedt om at bestemme $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$. Da de 2 brøker har fælles nævner siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

Resultatet af additionen er dermed $\frac{7}{3}$.

Eksempel 2: Subtraktion med ens nævnere

Vi får givet følgende brøker $\frac{2}{3}$ og $\frac{1}{3}$ og bliver bedt om at bestemme $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$. Da de 2 brøker har fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

Resultatet af subtraktionen er dermed $\frac{1}{3}$

Eksempel 3: Addition med forskellige nævnere

Vi får givet følgende brøker $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$ og bliver bedt om at bestemme $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$. Da de 2 brøker ikke har fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15}$$

Resultatet af additionen er dermed $\frac{22}{15}$

Eksempel 4: Subtraktion med forskellige nævnere

Vi får givet følgende brøker $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$ og bliver bedt om at bestemme $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$. Da de 2 brøker ikke har fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 - 4 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{10 - 12}{15} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$$

Når vi ganger et tal på en brøk, ganger 2 brøker sammen eller dividerer 2 brøker gælder følgende regler

Theorem 2 *Multiplikation og division af brøker Hvis vi ganger tallet a ind på en brøk ganger vi a ind i tælleren*

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Ganger vi 2 brøker med hinanden ganger vi deres tællere og nævnere sammen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Dividerer vi 1 brøk med en anden kan vi i stedet gange med den omvendte brøk (dvs vi bytter om på tælleren og nævneren i den ene brøk)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Vi vil nu gennemgå en række eksempler på hvordan vi kan bruge de ovenstående regler

Eksempel 5: Multiplikation af konstant og brøk

Vi får givet konstanten 4 og brøken $\frac{3}{5}$ og bliver bedt om at bestemme $4 \cdot \frac{3}{5}$. Når vi ganger et tal på en brøk siger theorem 2 at vi skal gøre følgende

$$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$$

Resultatet af multiplikationen er dermed $\frac{12}{5}$

Eksempel 6: Multiplikation af 2 brøker

Vi får givet de 2 brøker $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$ og bliver bedt om at bestemme $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$. Når vi ganger 2 brøker sammen siger theorem 2 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Resultatet af multiplikationen er dermed $\frac{8}{15}$

Eksempel 7: Division af 2 brøker

Vi får givet de 2 brøker $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$ og bliver bedt om at bestemme $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$. Når vi dividerer en brøk med en anden siger theorem 2 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}$$

Resultatet af divisionen er dermed $\frac{10}{12}$

Til sidst vil vi kort snakke om hvordan man forkorter brøker. Når vi forkorter en brøk gør vi tælleren og nævneren af brøken mindre uden af ændre på selve tallet brøken repræsenterer. Vi kigger nu på følgende eksempel.

Eksempel 8: Forkortelse af brøk

Hvis vi kigger på følgende brøk $\frac{2}{4}$ så repræsenterer brøkken decimaltallet 0,5. Hvis vi nu gør brøkens tæller og nævner 2 gange mindre har vi nu brøken $\frac{1}{2}$ som stadig repræsenterer decimaltallet 0,5. Vi har altså nu forkortet brøken $\frac{2}{4}$. Hvornår kan vi ikke forkorte en brøk mere og hvorfor forkorter vi brøker?

1.2 Kvadratsætninger

I dette delkapitel vil vi snakke om de 3 kvadratsætninger, hvorfor vi bruger dem og i hvilke tilfælde man ville benytte sig af dem. De 3 kvadratsætninger er som følgende

Theorem 3 *Første kvadratsætning*

Lad a og b være 1 tal og 1 bogstav eller 2 forskellige bogstaver så gælder det at

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Theorem 4 *Anden kvadratsætning*

Lad a og b være 1 tal og 1 bogstav eller 2 forskellige bogstaver så gælder det at

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Theorem 5 *Tredje kvadratsætning*

Lad a og b være 1 tal og 1 bogstav eller 2 forskellige bogstaver så gælder det at

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

For at snakke om i hvilke tilfælde vi benytter os af kvadratsætningerne er det lettest at snakke ud fra en række eksempler.

Eksempel 9: Brug af første kvadratsætning

Hvis vi i en opgave støder på følgende parentes $(x + 3)^2$ kan vi her benytte os af første kvadratsætning til at ophæve parentesen. Vi kan bruge første kvadratsætning så længe parentesen indeholder 2 led adskilt af et plus hvor de 2 led enten består af 1 tal og 1 bogstav eller 2 forskellige bogstaver. I vores tilfælde består de 2 led af 1 bogstav x og et tal 3. Bruger vi første kvadratsætning får vi

$$(x + 3)^2 = x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 9 + 6x$$

Hvis vi ikke havde brugt første kvadratsætning kunne vi ophæve parentesen på følgende måde

$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Da dette både er mere besværgeligt og tager længere tid benytter man i stedet for kvadratsætningerne.

Eksempel 10: Brug af anden kvadratsætning

Hvis vi i en opgave støder på følgende parentes $(x - 3)^2$ kan vi her benytte os af anden kvadratsætning da de 2 led i parentesen er adskilt af et minus. Vi får

$$(x - 3)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 9 - 6x$$

Eksempel 11: Brug af tredje kvadratsætning

Hvis vi i en opgave støder på følgende parentes $(x+3) \cdot (x-3)$ kan vi her benytte os af den tredje kvadratsætning da de 2 parenteser indeholder de samme led, men i den ene parentes er de adskilt af plus og i den anden af minus. Vi får

$$(x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

1.3 Opgaver

Dette delkapitel vil indeholde en række opgaver til at træne den viden i har lært fra kapitel 1.

Opgave 1: Addition af brøker med ens nævnere

Beregn $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

Opgave 2: Addition af brøker med ens nævnere

Beregn $\frac{5}{7} + \frac{2}{7}$

Opgave 3: Addition af brøker med forskellige nævnere

Beregn $\frac{3}{4} + \frac{4}{6}$

Opgave 4: Addition af brøker med forskellige nævnere

Beregn $\frac{4}{5} + \frac{3}{7}$

Opgave 5: Subtraktion af brøker med ens nævnere

Beregn $\frac{3}{4} - \frac{2}{4}$

Opgave 6: Subtraktion af brøker med ens nævnere

Beregn $\frac{4}{6} - \frac{5}{6}$

Opgave 7: Subtraktion af brøker med forskellige nævnere

Beregn $\frac{4}{5} - \frac{3}{2}$

Opgave 8: Subtraktion af brøker med forskellige nævnere

Beregn $\frac{5}{7} - \frac{3}{5}$

Opgave 9: Multiplikation af konstant og brøk

Beregn $4 \cdot \frac{3}{5}$

Opgave 10: Multiplikation af konstant og brøk

Beregn $-2 \cdot \frac{3}{5}$

Opgave 11: Multiplikation af 2 brøker

Beregn $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}$

Opgave 12: Multiplikation af 2 brøker

Beregn $\frac{-2}{7} \cdot \frac{3}{4}$

Opgave 13: Division af 2 brøker

Beregn $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

Opgave 14: Divison af 2 brøker

Beregn $\frac{4}{5} : \frac{1}{3}$

Opgave 15: Brug af kvadratsætningerne

Ophæv parentesen $(x - 4) \cdot (x + 4)$

Opgave 16: Brug af kvadratsætningerne

Ophæv parentesen $(x - 5)^2$

Opgave 17: Brug af kvadratsætningerne

Ophæv parentesen $(x + 6)^2$

Opgave 18: Brug af kvadratsætningerne

Ophæv parentesen $(x - 2)^2$

Opgave 19: Brug af kvadratsætningerne

Ophæv parentesen $(x - 3) \cdot (x + 3)$

Opgave 20: Brug af kvadratsætningerne

Ophæv parentesen $(x + 8)^2$

1.4 Løsning til opgaver

Dette delkapitel vil indeholde udførlige løsninger til opgaverne fra det foregående delkapitel.

Løsning til opgave 1

For at addere 2 brøker med fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Resultatet af additionen er dermed 1.

Løsning til opgave 2

For at addere 2 brøker med fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5+2}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

Resultatet af additionen er dermed 1.

Løsning til opgave 3

For at addere 2 brøker med forskellige nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 4}{4 \cdot 6} = \frac{18 + 16}{24} = \frac{34}{24}$$

Resultatet af additionen er dermed $\frac{34}{24}$.

Løsning til opgave 4

For at addere 2 brøker med forskellige nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{28 + 15}{35} = \frac{43}{35}$$

Resultatet af additionen er dermed $\frac{43}{35}$.

Løsning til opgave 5

For at subtrahere 2 brøker med fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

Resultatet af subtraktionen er dermed $\frac{1}{4}$.

Løsning til opgave 6

For at subtrahere 2 brøker med fælles nævnere siger theorem 1 at vi skal gøre følgende

$$\frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4-5}{6} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Resultatet af subtraktionen er dermed $-\frac{1}{6}$.

Løsning til opgave 7
Løsning til opgave 8
Løsning til opgave 9
Løsning til opgave 10
Løsning til opgave 11
Løsning til opgave 12
Løsning til opgave 13
Løsning til opgave 14
Løsning til opgave 15
Løsning til opgave 16
Løsning til opgave 17
Løsning til opgave 18
Løsning til opgave 19
Løsning til opgave 20
Løsning til opgave 21
Løsning til opgave 22