

Задание №9

Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Пусть дана система вида

$$\dot{X} = f(t, X),$$

где X — некая вектор-функция $X = X(t)$, $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$. Дан вектор начальных условий $X(0) = X_0$. Требуется проинтегрировать систему с постоянным шагом интегрирования h .

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Расчетные формулы (здесь и далее $X_i = X(t_i) = X(i \cdot h)$ — вектор X на i -ом шаге интегрирования):

$$X_{i+1} = X_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(t_i, X_i) \\ k_2 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h \cdot f(t_i + h, X_i + k_3) \end{aligned}$$

Экстраполяционный метод Адамса

Вычислительная формула:

$$X_{i+1} = X_i + h \cdot \sum_{j=0}^{n-1} A_{nj} f(t_{i-j}, X_{i-j}),$$

где

$$A_{nj} = \frac{(-1)^j}{j!(n-1-j)!} \int_0^1 \frac{z(z+1) \dots (z+n-1)}{z+j} dz.$$

Поскольку для первых $n - 1$ шагов метод не позволяет получить значения непосредственно, для «запуска» следует использовать какой-либо другой метод интегрирования, позволяющий получить начальный набор X_i непосредственно (чаще всего для этой цели используется метод Рунге-Кутты).

Интерполяционный метод Адамса

Метод является неявным, поэтому на каждом шаге интегрирования необходимо решать систему алгебраических уравнений общего вида (используя для этого, например, метод Ньютона).

Вычислительная формула:

$$X_{i+1} = X_i + h \cdot \sum_{j=-1}^{n-2} B_{nj} f(t_{i-j}, X_{i-j}),$$

где

$$B_{nj} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(n-2-j)!} \int_0^1 \frac{(z-1)z(z+1)\dots(z+n-2)}{z+j} dz.$$

Этот вариант метода также необходимо «запускать» с помощью другого метода.

Задание

- Сформировать отдельный модуль, в котором заданы: конец интервала интегрирования, вектор начальных условий, функция, реализующая вычисление $f(t, X)$, порядок методов Адамса и шаг интегрирования.
- Написать три отдельные функции/подпрограммы, реализующие каждый из трех методов. Для методов Адамса функции должны сначала вычислить значения коэффициентов A_{nj} и B_{nj} (метод вычисления выберите сами, его также рекомендуется вынести в отдельные функции).
- Написать программу, тестирующую функции и организующую вывод результатов каждого метода в файлы *rk.dat*, *ae.dat* и *ai.dat* соответственно так, чтобы в каждой строке содержалось соответствующее значение t и компоненты вектора $X(t)$, разделенные пробелами.