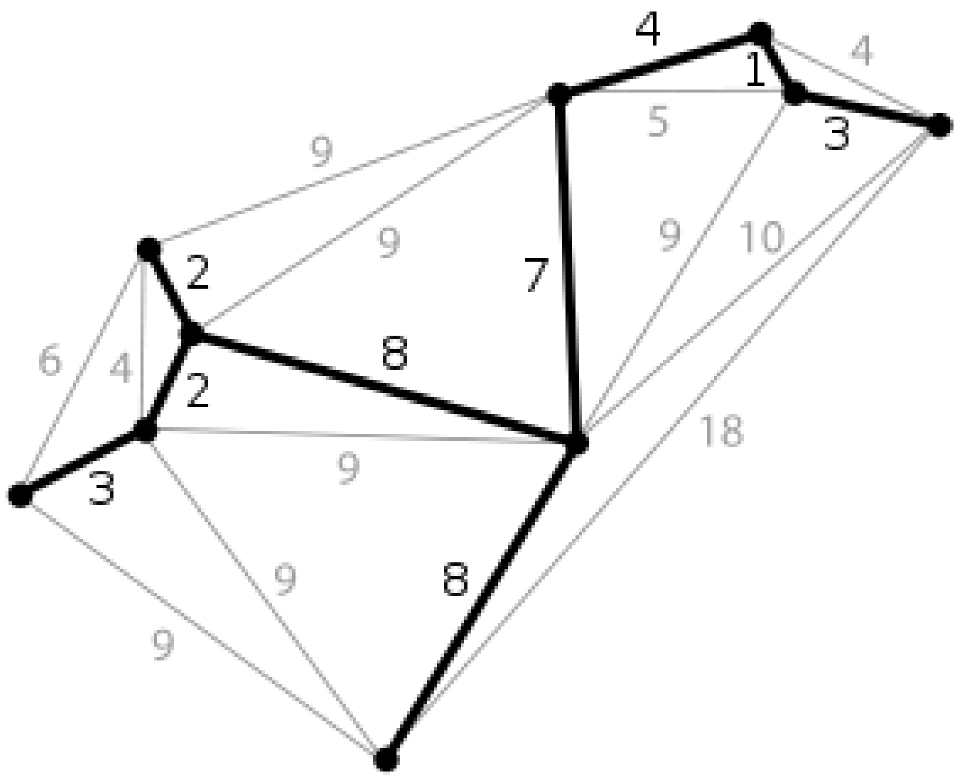
1 **MST** - Definizione

Dato un grafo pesato non orientato, il Minimum Spanning Tree (**MST**) è un sottoinsieme dei sui archi che **connette tutti i nodi senza cicli e con la somma dei pesi minima.**



La ricerca di un MST ha **applicazioni dirette in molti ambiti**, alcuni esempi possono essere: **path finding in reti, ottimizzazioni di reti di trasporto, reti elettriche**.
Il MST può essere ricercato anche come **subroutine** di altri problemi, come per esempio il **traveling salesman problem.**

2 MST - Algoritmi classici

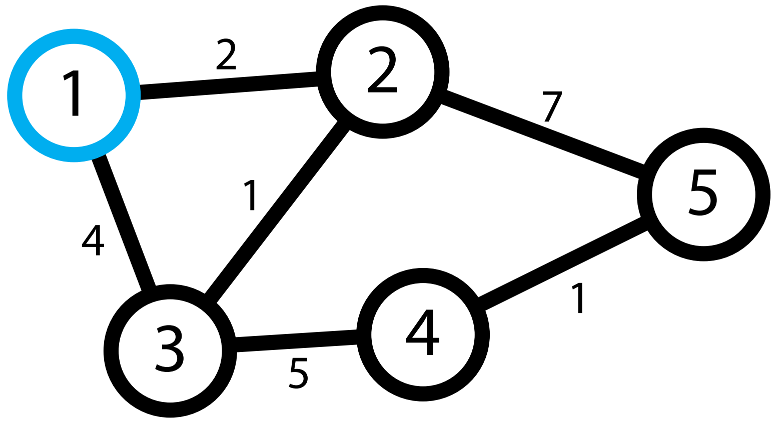
Gli **algoritmi più usati** per trovare il MST e le relative **complessità temporali** sono:

- **Prim** $O(|E| + |V| * \log|V|)$
- **Borůvka** $O(|E| * \log|V|)$
- **Kruskal** $O(|V| * \log|V|)$

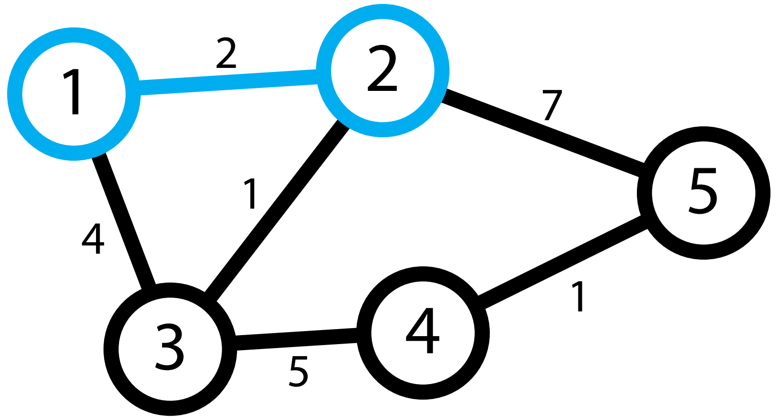
Dove **E è il numero di archi** nel grafo e **V è il numero di nodi** nel grafo.

3 MST - Prim

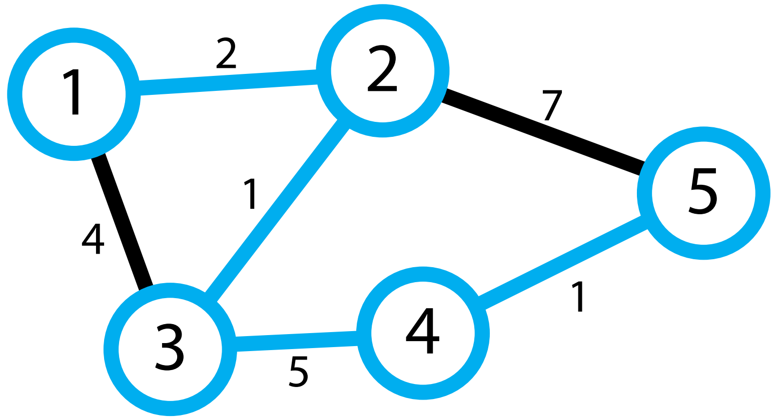
Selezioniamo un **vertice qualunque** del grafo e lo aggiungiamo al MST.



Aggiungiamo il vertice collegato al MST parziale con l'**arco di peso minore**. Questo nuovo vertice **non deve creare cicli**.

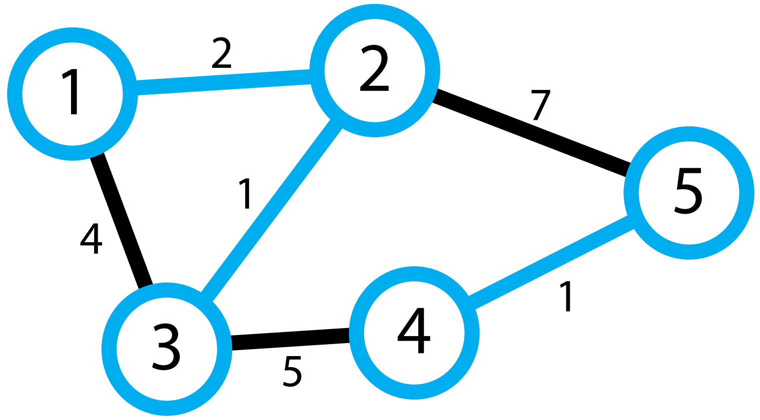


Iteriamo il secondo passaggio finché tutti i nodi non sono stati aggiunti al MST.

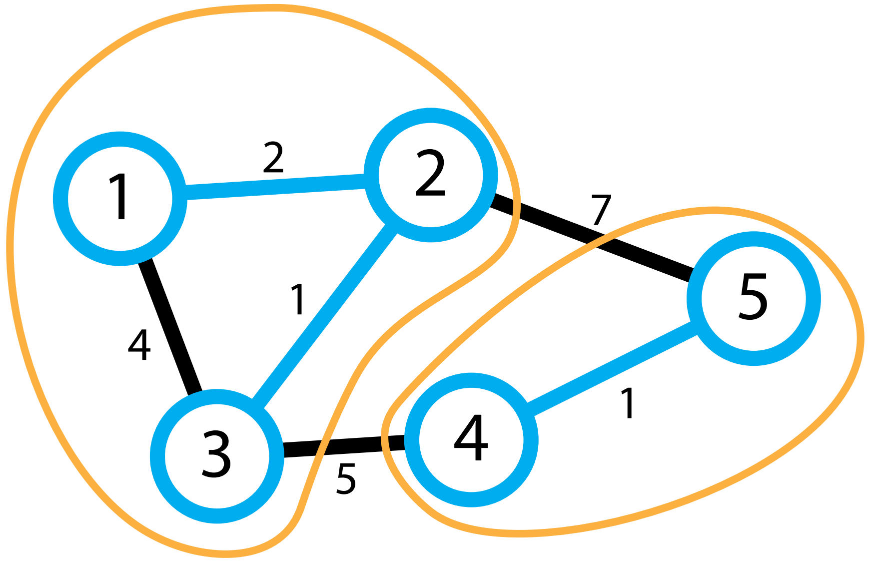


4 **MST** - Borůvska

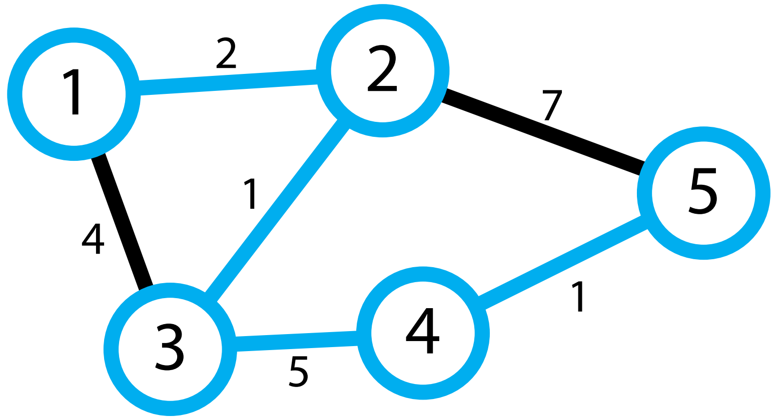
Per ogni nodo del grafo troviamo l’**arco uscente di minor peso** e lo aggiungiamo al MST.



Tutti i vertici collegati da archi selezionati formeranno un **supernodo**.

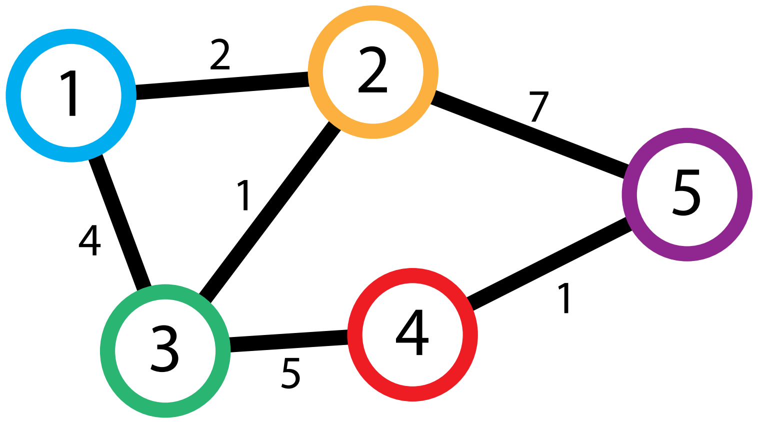


Iteriamo il primo passaggio sui supernodi finché l’algoritmo non converge

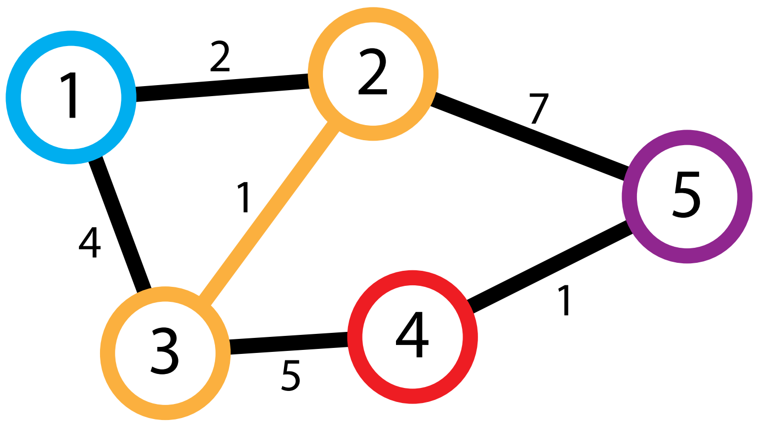


MST - Kruskal

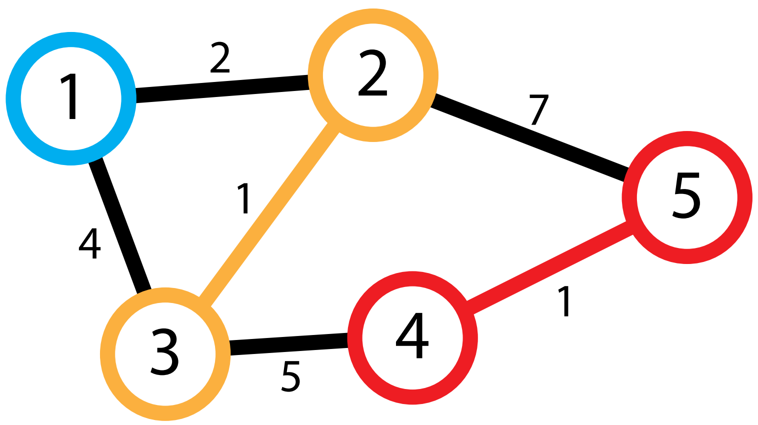
Consideriamo ogni **nodo come un albero.**



Selezioniamo dall’insieme degli **archi** quello con **peso minore**. Se questo unisce **due alberi distinti, allora viene aggiunto al MST**.
Il nuovo arco unisce due alberi in uno unico.

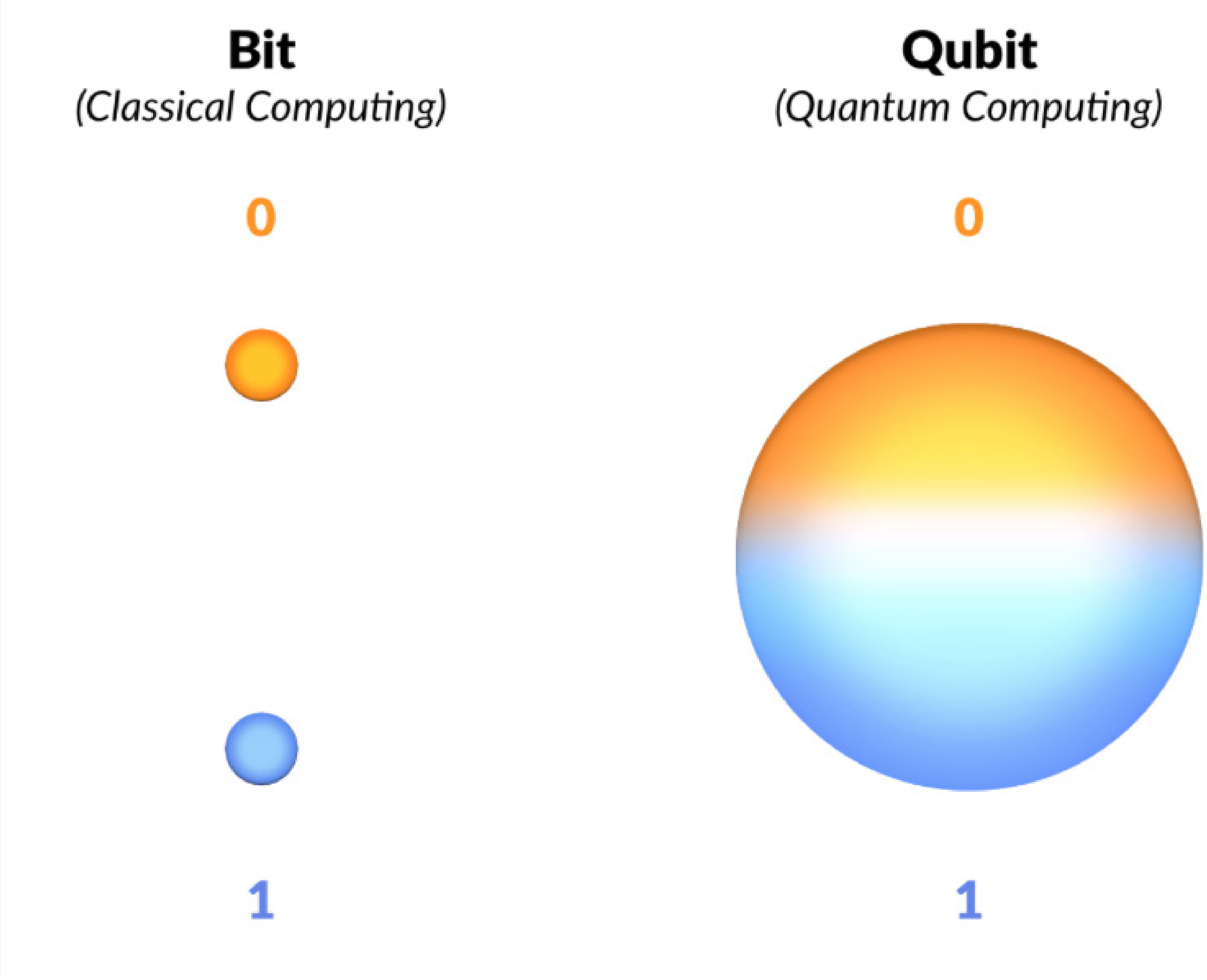


Iteriamo il secondo passaggio finché tutti i gli alberi sono stati fusi in uno unico.



1 Qubit - Definizione

Un bit quantistico, o **qubit**, è l'equivalente nella computazione quantum di un bit classico. Come un bit è l'**unità minima di informazione** nella computazione classica, il qubit lo è nel mondo quantum.



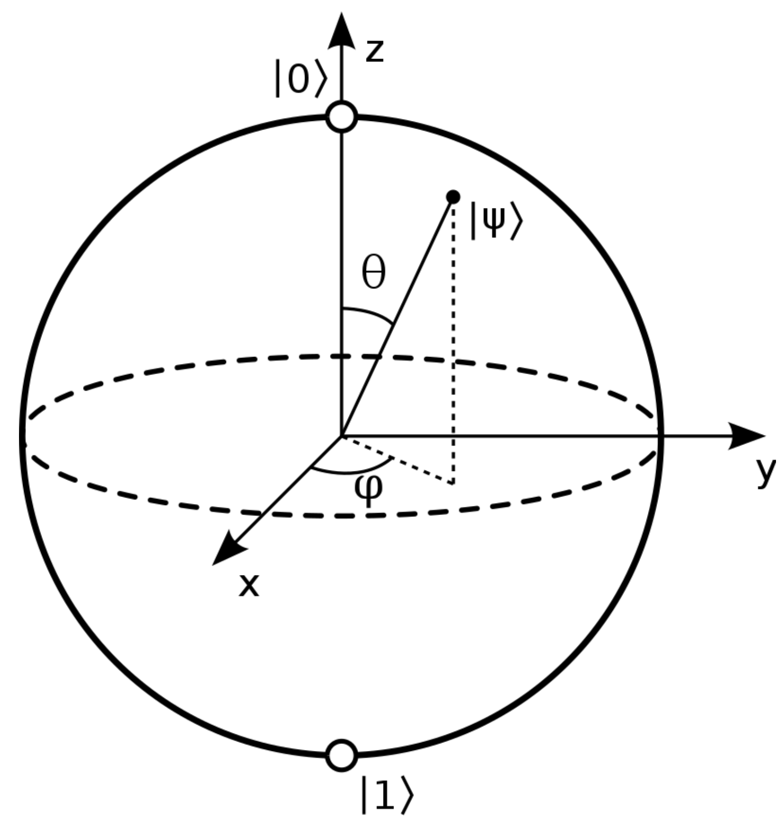
In un sistema classico, un bit può essere in uno stato solo. Al contrario, la meccanica quantistica permette ai qubit di essere in uno stato di **super-posizione**. Questa proprietà dà alla computazione quantum un nuovo strumento per sbloccare una **nuova classe di algoritmi più efficienti**.

2 Qubit - Rappresentazione

Braket notation
Un qubit può essere interpretato come un **vettore** le cui componenti sono una **sovrapposizione della sua base ortonormale**. La base, nel nostro caso, è composta dai **possibili valori del qubit** dopo la misurazione, 0 o 1.

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,||1\rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Bloch sphere
Un qubit può essere interpretato come un **vettore unitario** in uno spazio 3D. Gli stati della base sono antipodali. Tutti gli **stati intermedi** sulla sfera unitaria sono una **superposizione degli stati della base**, 0 e 1.



3 Quantum gate - Definizione

I quantum gate possono essere considerati come un **equivalente quantum delle porte logiche classiche**. Questi gate cambiando lo **stato del sistema** manipolando la sua **distribuzione di probabilità** piuttosto che applicare una **funzione logica**.

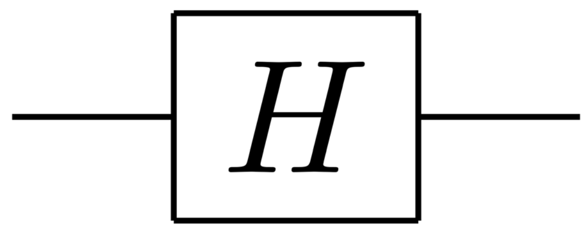
Questi gate devono essere **reversibili** in modo tale da preservare le proprietà della computazione quantistica. Quindi i gate saranno rappresentati da **matrici unitarie**.

$$U|a\rangle = \begin{bmatrix} u_{11} u_{12} \\ u_{21} u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Queste matrici unitarie possono agire su **uno o più qubit** alla volta. Se agiscono su **n qubit** avranno una dimensione di **2^n x 2^n**.

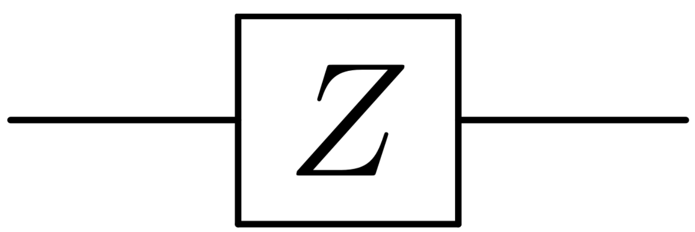
4 Quantum gate - Singolo qubit

Hadamart gate
Pone il qubit in ingresso in uno stato di superposizione



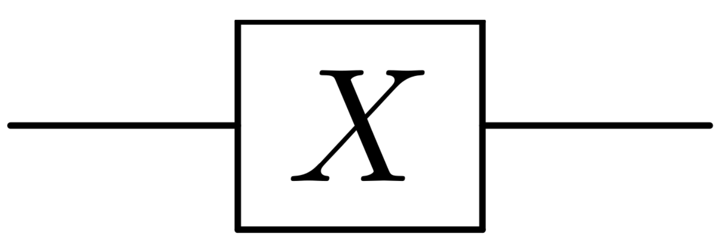
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pauli-Z
Ruota la fase del qubit in ingresso di 180°



$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

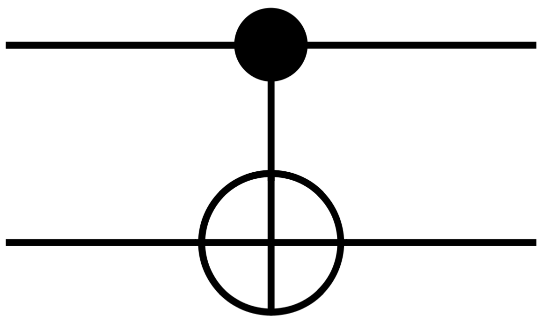
Pauli-X
Inverte lo stato del qubit in ingresso



$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

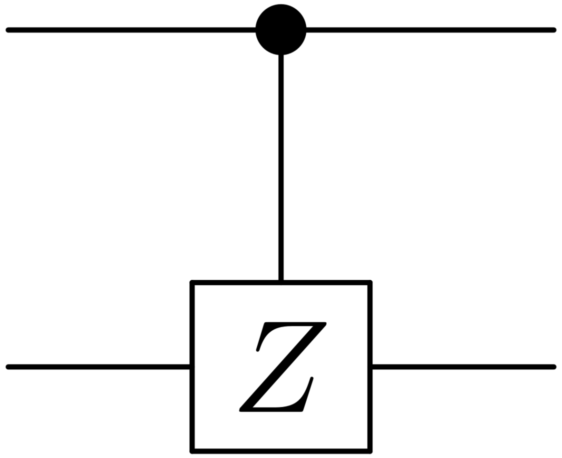
5 Quantum gate - Controllati

CNOT
Inverte il qubit in ingresso se il qubit di controllo è posto a 1



$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Controlled Z
Ruota la fase del qubit in ingresso di 180° se il qubit di controllo è posto a 1

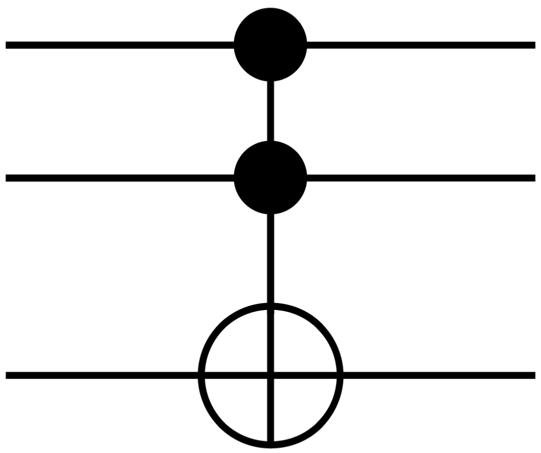


$$CZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6 Quantum gate - Controllati a più qubit

I gate controllati possono essere **estesi ad un numero arbitrario di qubit** di controllo.

CCNOT/ Toffoli gate
Inverte il qubit in ingresso se I qubit di controllo sono posti a 1.



$$CCNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pur di estrema utilità i gate controllati a più bit sono di **difficile realizzazione pratica** in quanto richiedono un **numero esponenziale di gate** per la loro realizzazione.
Da notare che il **CCNOT è un gate universale** per la computazione classica, il che vuol dire che ogni **gate calssico** come AND, OR, XOR, ecc... può essere **ricostruito dal CCNOT**.
Questo prova che i computer quantistici sono almeno **Touring completi**.

7 Quantum speed up - Parallelismo

Il vantaggio dei computer quantistici è la loro abilità di **parallelizzare la computazione**. Consideriamo una funzione computabile con k gate classici.

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$$

Questo circuito può essere implementato da **n CCNOT gate**. Chiameremo questo circuito U. Se **applichiamo l'operazione U** ad un ipotetico r**egistro posto in superposizione** avremo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + ... + |2^n - 1\rangle)$$

$$\Big\downarrow U$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|f(0)\rangle + |f(1)\rangle + |f(2)\rangle + ... + |f(2^n - 1)\rangle)$$

Quindi la computazione della funzione viene eseguita un **numero di volte esponenziale** (possibili combinazioni dei qubit) facendo lo stesso numero di operazioni per **elaborare un singolo valore**.

1 Grover - Definizione

L'algoritmo di Grover è un **algoritmo quantistico** che trova con alta **probabilità** l'input ad una **black box** che produce un particolare output.

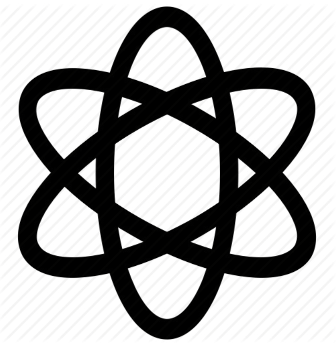
$$f : \{0, 1, ..., N-1\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad where \quad N = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq w \\ 1 & \text{if } x = w \end{cases}$$

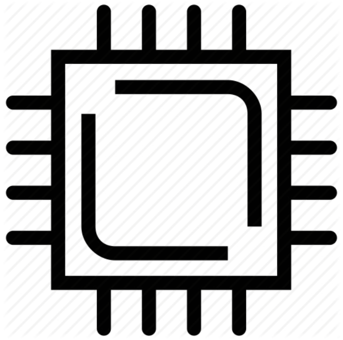
Per esempio si ipotizzi una funzione che mappa un insieme di interi all'insieme {0, 1}. La funzione sarà associata alla blackbox e Grover troverà quei input che avranno come risultato 1.

2 Grover - Vantaggi (complessità)

Il più grande vantaggio nell'utilizzo di Grover è la usa **complessità** rispetto ad un algoritmo classico.



$$O(\sqrt{N}) * k$$



$$O(N)$$

Da notare che la **complessità** deigli **algoritmi quantistici** viene misurata in **chiamate all'oracolo e non temporalmente**. Inoltre bisogna considerare anche la complessità della **creazione dell'oracolo,** la quale dipende dal problema che si sta affrontando.

3 Grover - Fasi dell’algoritmo

Super position setup

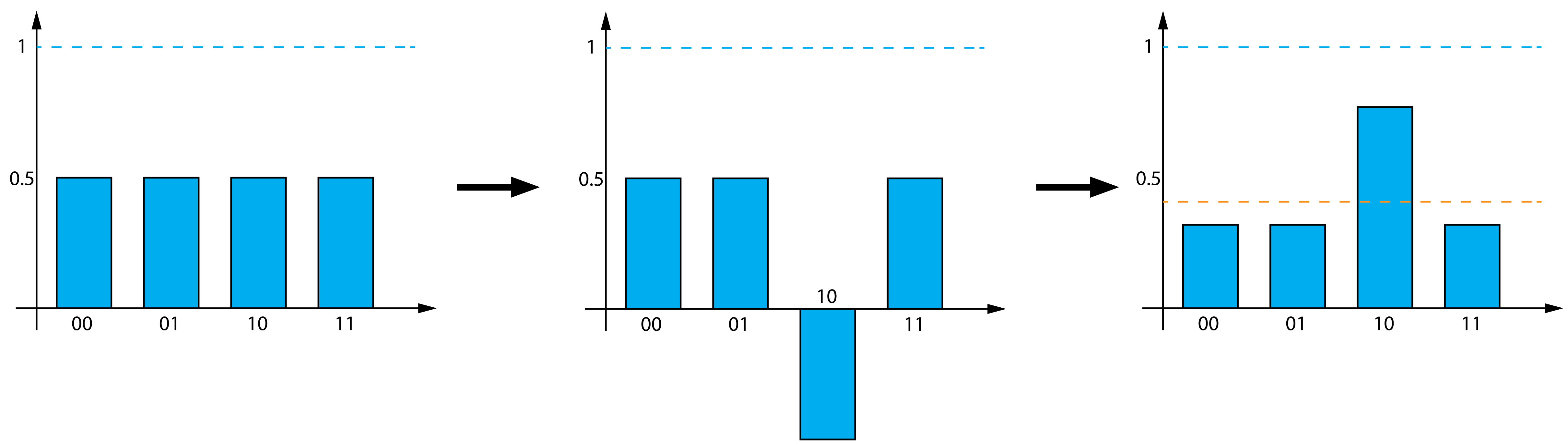
Il registro di input viene posto in **superposizione** attraverso i gate H. quindi ogni stato del registro sarà equiprobabile.

Phase invertion

Il registro di input viene elaborato dalla blackbox, detta anche **oracolo**, **invertendo la fase** dello stato ricercato dalla funzione codificata nell’oracolo.

Inversion about the mean

Tutti i possibili stati vengo **invertiti** rispetto all’**amplitudine media** degli stati. Così facendo si **aumenta la probabilità** che il registro si trovi nello stato ricercato



4 Grover - Iterazioni

Per ottenere un risultato migliore le ultime due fasi dell'algoritmo devono essere **iterate un numero preciso di volte.**

Numero iterazioni ottime singolo match

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{N}$$

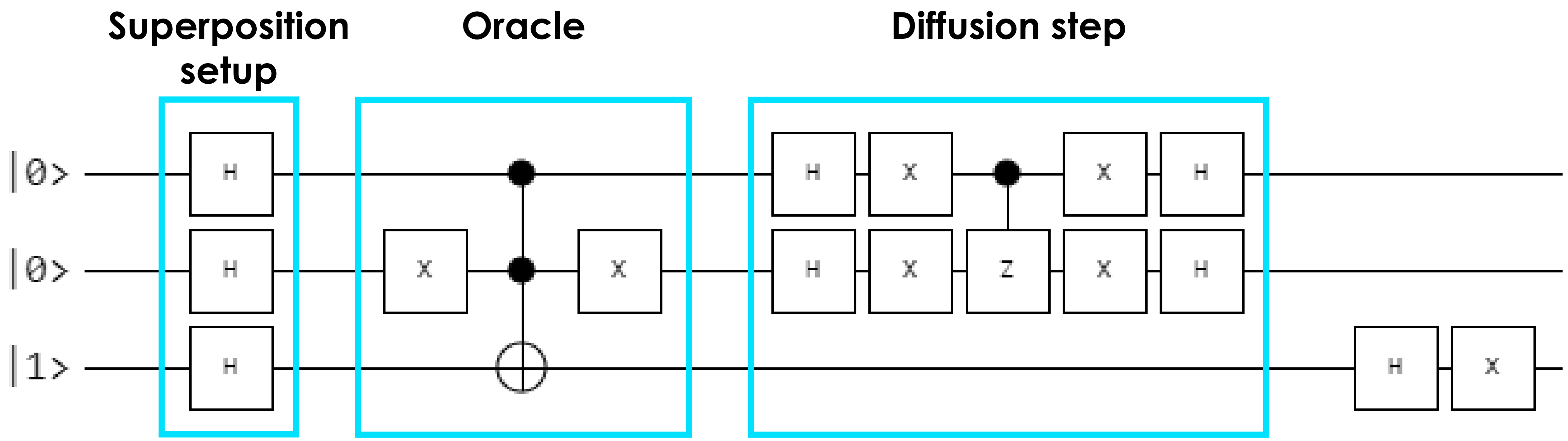
Numero iterazioni ottime m match

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}}$$

Il numero di iterazioni dipende da due fattori la **cardinalità** dei possibili stati del registro di input e il **numero di match**/stati ricercati. Spesso il numero di iterazioni ottime **non è un numero intero**. Questo porta ad una **minore probabilità di successo.**

5 Grover - Implementazione

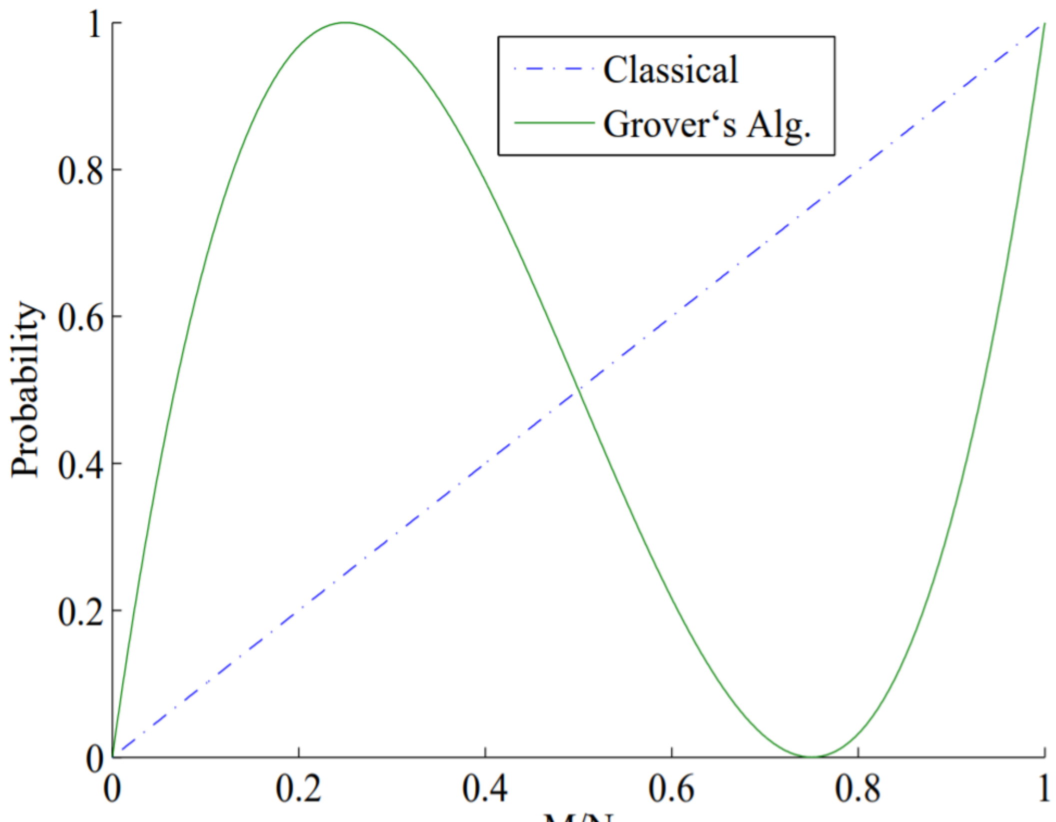
Prendendo in considerazione l'oracolo dell'esempio precedende, di seguito troviamo una possibile implementazione di Grover.



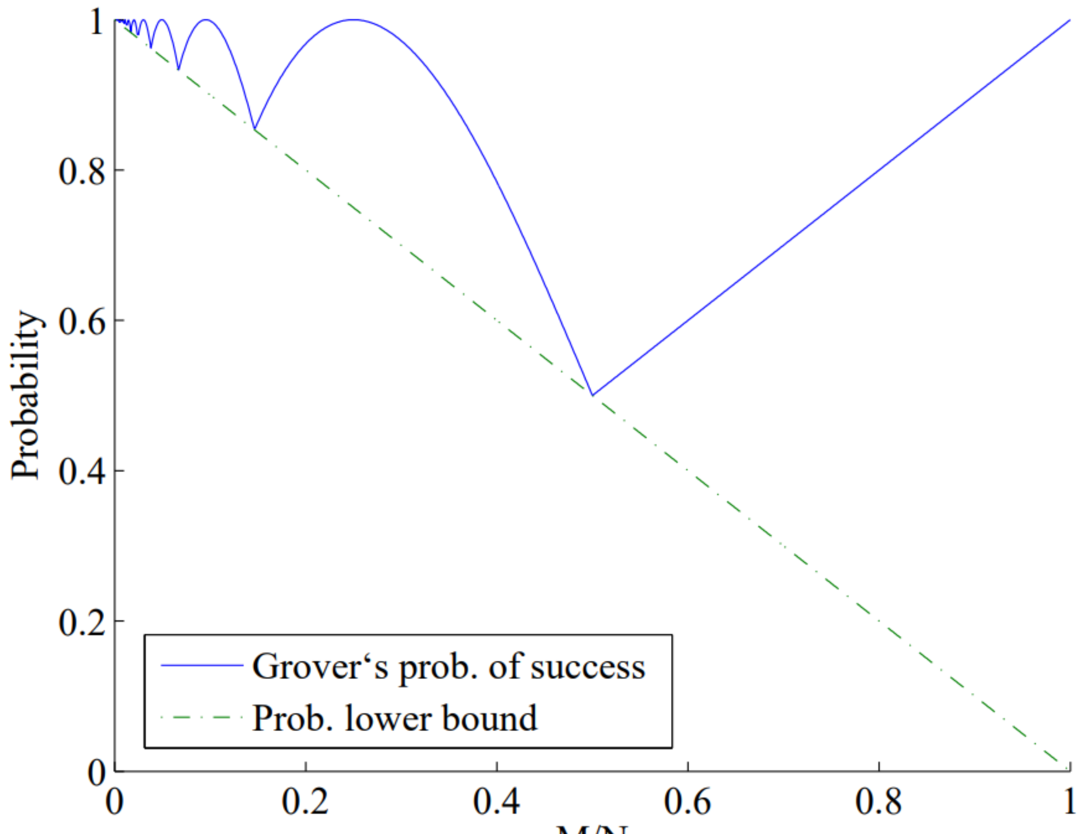
L'oracolo in questo caso codifica la funzione che ha come risultato 1 se l'input è 10. Quindi il compito dell'**oracolo** è quello di **evidenziare gli stati ricercati** e il **diffusion step aumenta la probabilità** che il registro sia nello stato ricercato.

6 Grover - Problematiche

Essendo un **algoritmo probabilistico** è bene aumentare il più possibile le possibilità di successo, ma non è sempre possibile. Infatti nel caso in cui **non si conoscono i numero di match**, l'algoritmo potrebbe essere iterato un numero errato di volte, portando ad un **risultato non attendibile** sistematicamente. Come si può vedere dai grafici sottostanti **all'aumentare dei match** Grover ha la **stessa probabilità di successo di un random guesser classico.**



Probabilità di successo di una singola iterazione
vs.
Random guesser classico



Probabilità di successo con iterazione ottime

7 Grover - Problema del phase shift

Classicamente Grover applica uno phase shift, però è **difficilmente implementabile in modo diretto**. Per ovviare a questo problema è utile **trasporre il problema** da un phase shift all'implementazione di una **funzione booleana** nel seguente modo.

Phase shift diretto

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{f(x)} |x\rangle$$

Phase shift attraverso funzione booleana

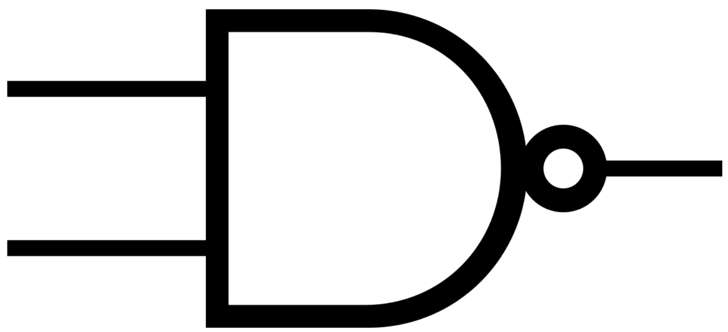
$$|x\rangle |0\rangle \rightarrow |x\rangle |f(x)\rangle \xrightarrow{Z} (-1)^{f(x)} |x\rangle |f(x)\rangle$$

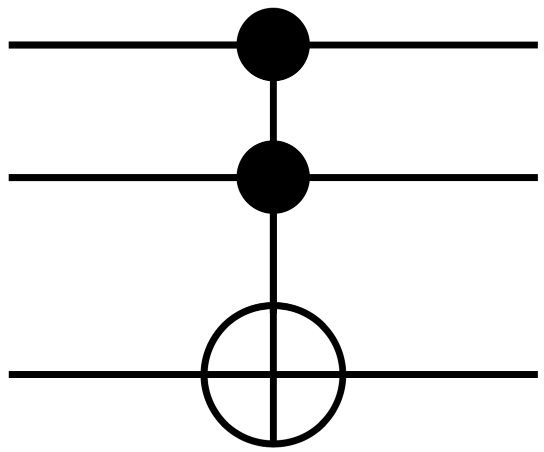
La funzione viene applicata direttamente per poi invertirla attraverso un gate Z

1 Funzioni bool - Costruzione

Per poter implementare la ricerca in Kruskal avremo bisogno di poter rappresentare **funzioni booleane attraverso quantum gate**. Sapendo che nel mondo classico il **CCNOT è un gate universale**, possiamo costruire funzioni booleane arbitrarie.

Gate universali (computazione classica)

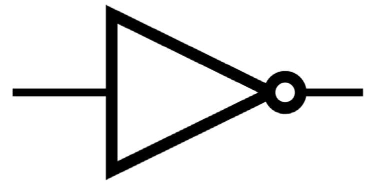


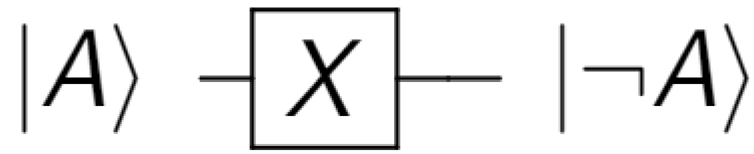


Come per il NAND gate, una combinazione di CCNOT gate può descrivere una **qualunque funzione booleana**.

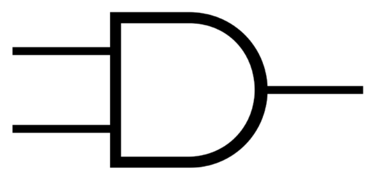
2 Funzioni bool - Porte logiche classiche

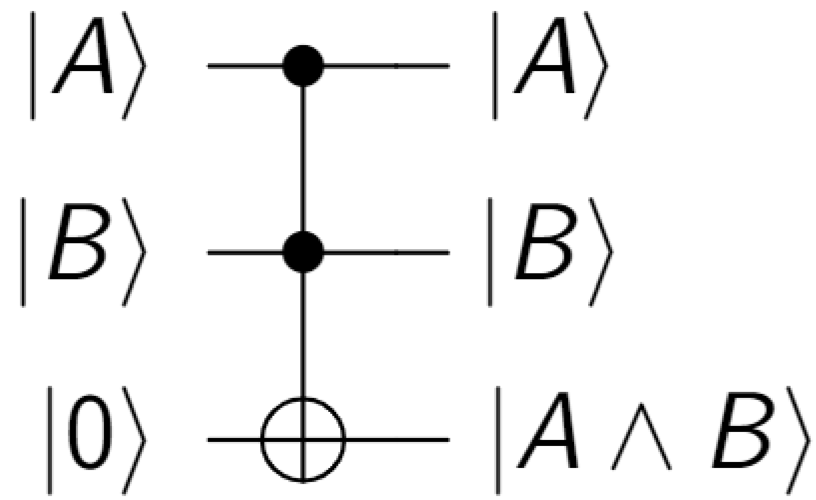
NOT gate



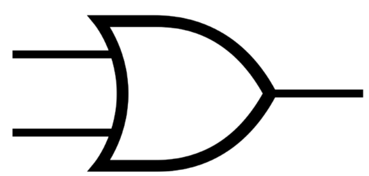


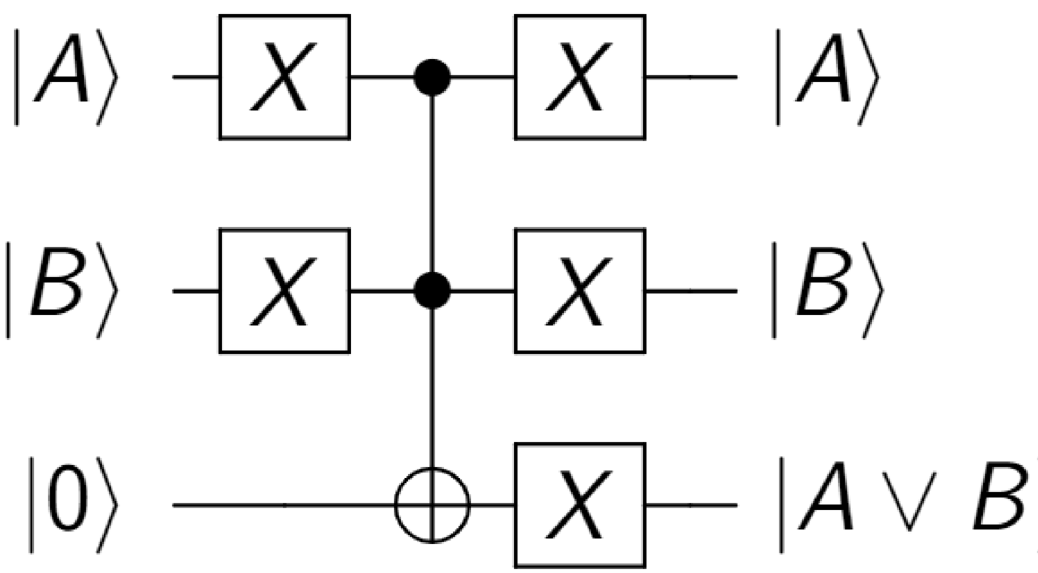
AND gate





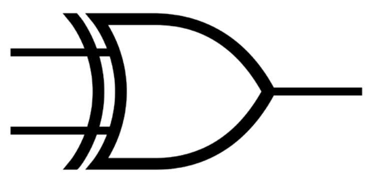
OR gate

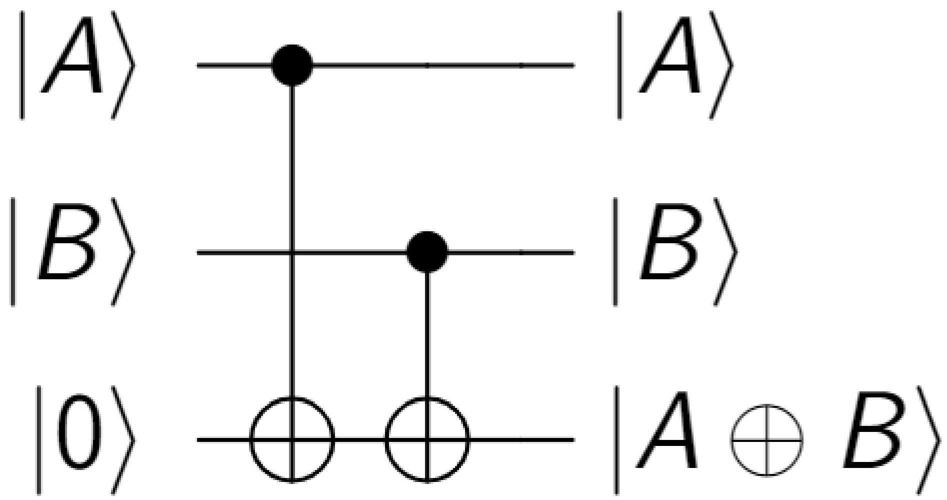




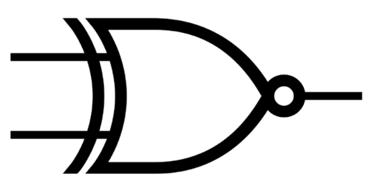
3 Funzioni bool - Porte logiche classiche

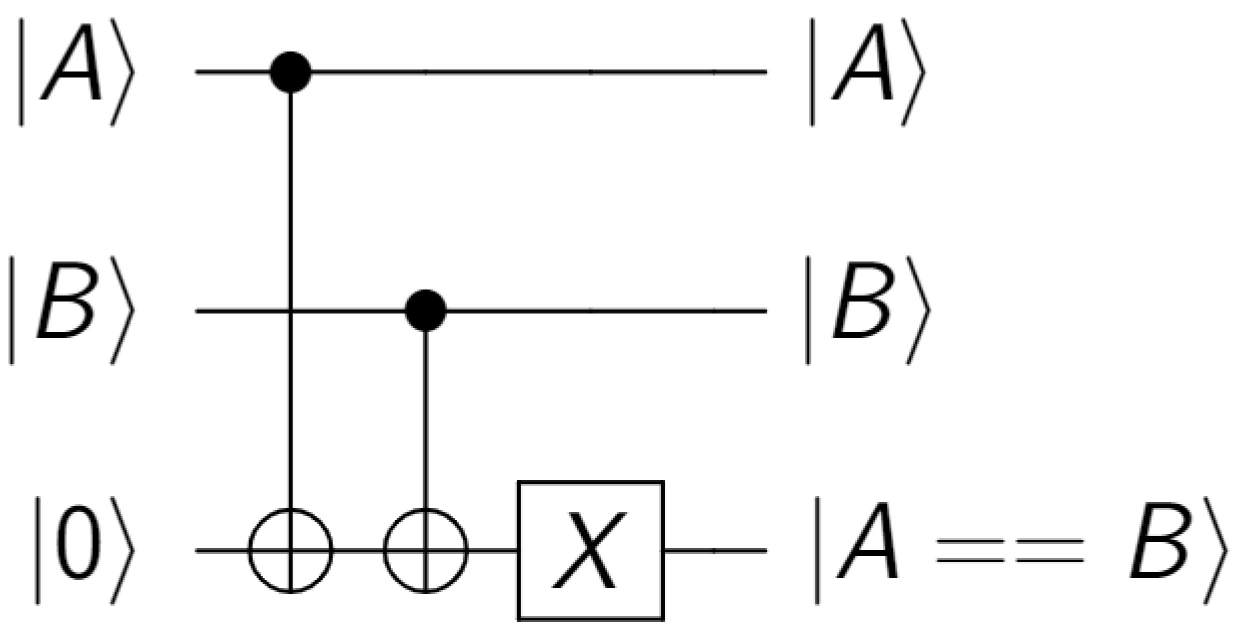
XOR gate





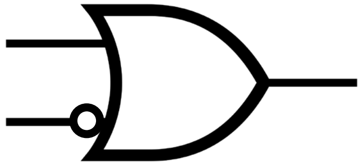
XNOR gate
Uguaglianza

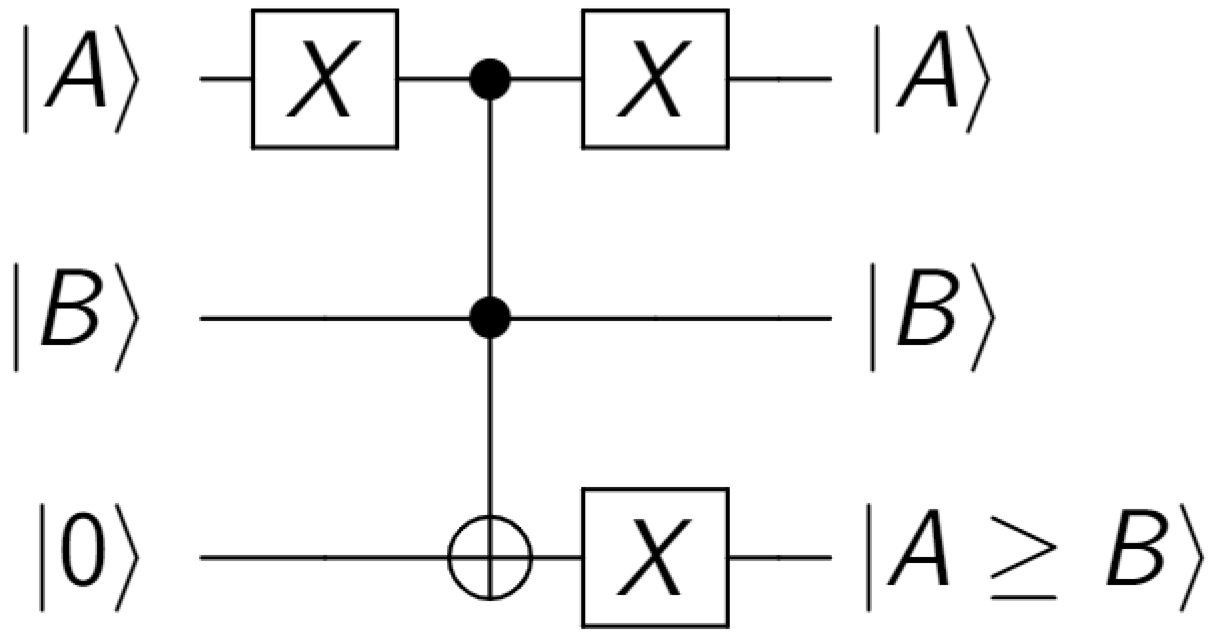




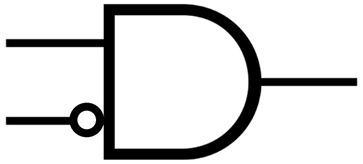
4 Funzioni bool - Porte logiche classiche

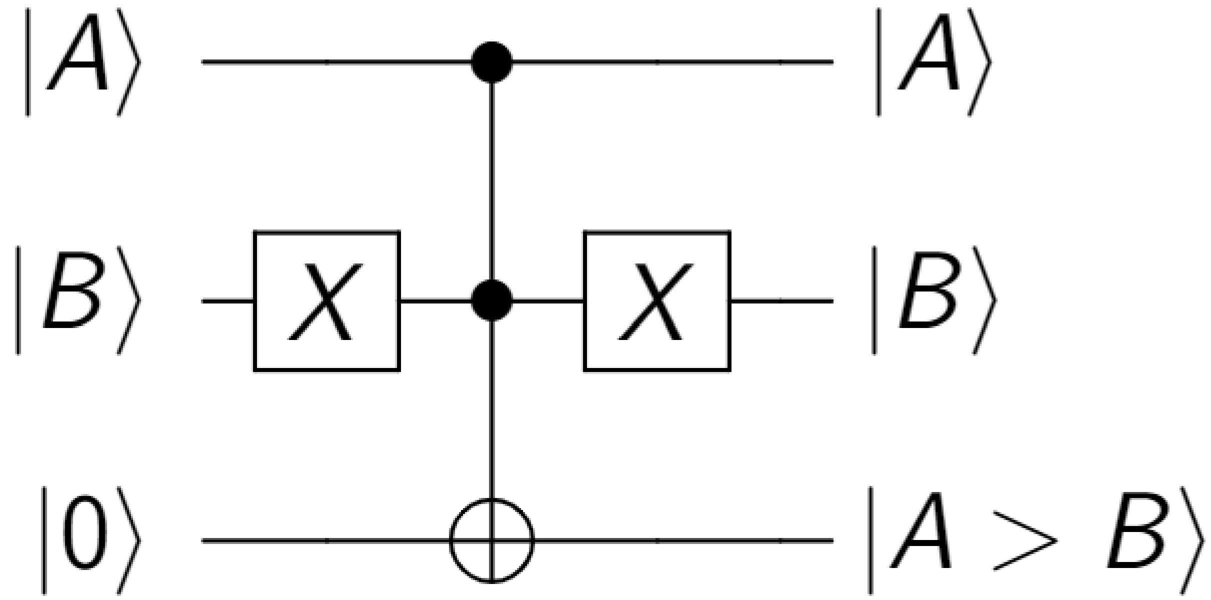
A OR NOT(B)
Maggiore uguale





A AND NOT(B)
Maggiore

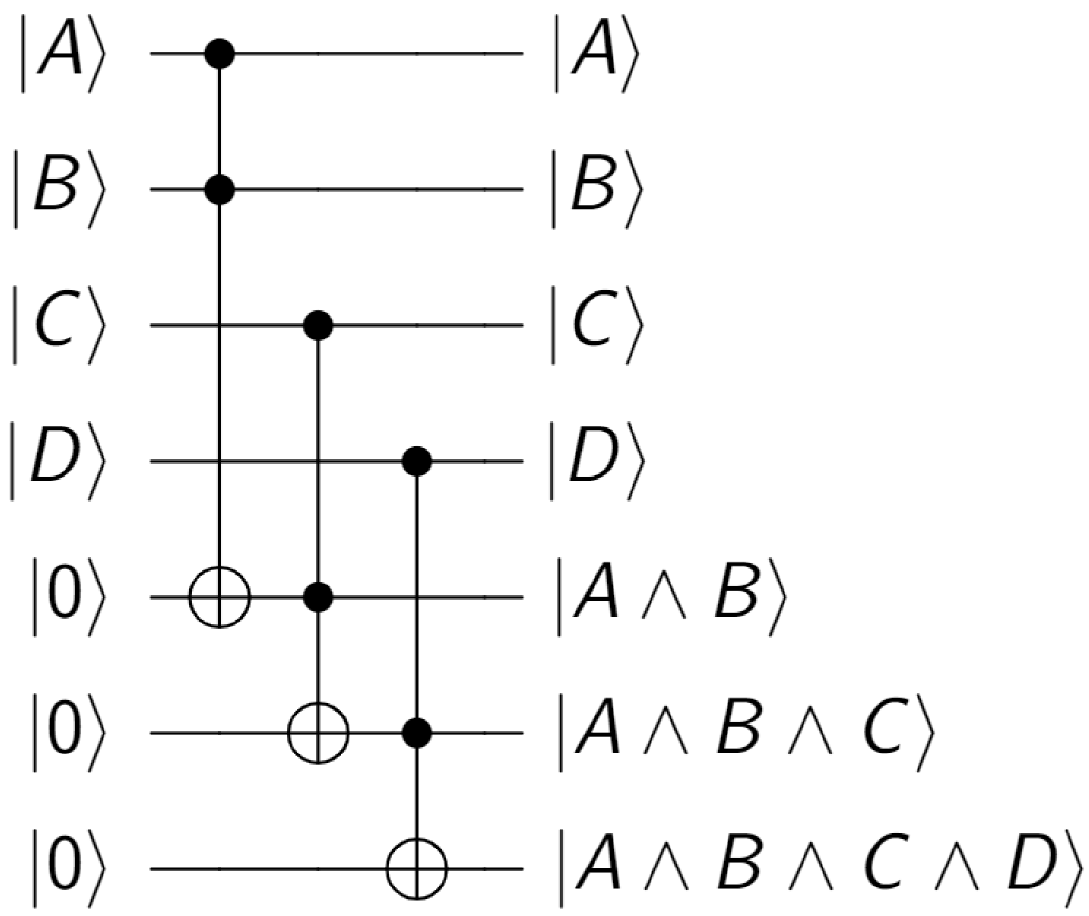




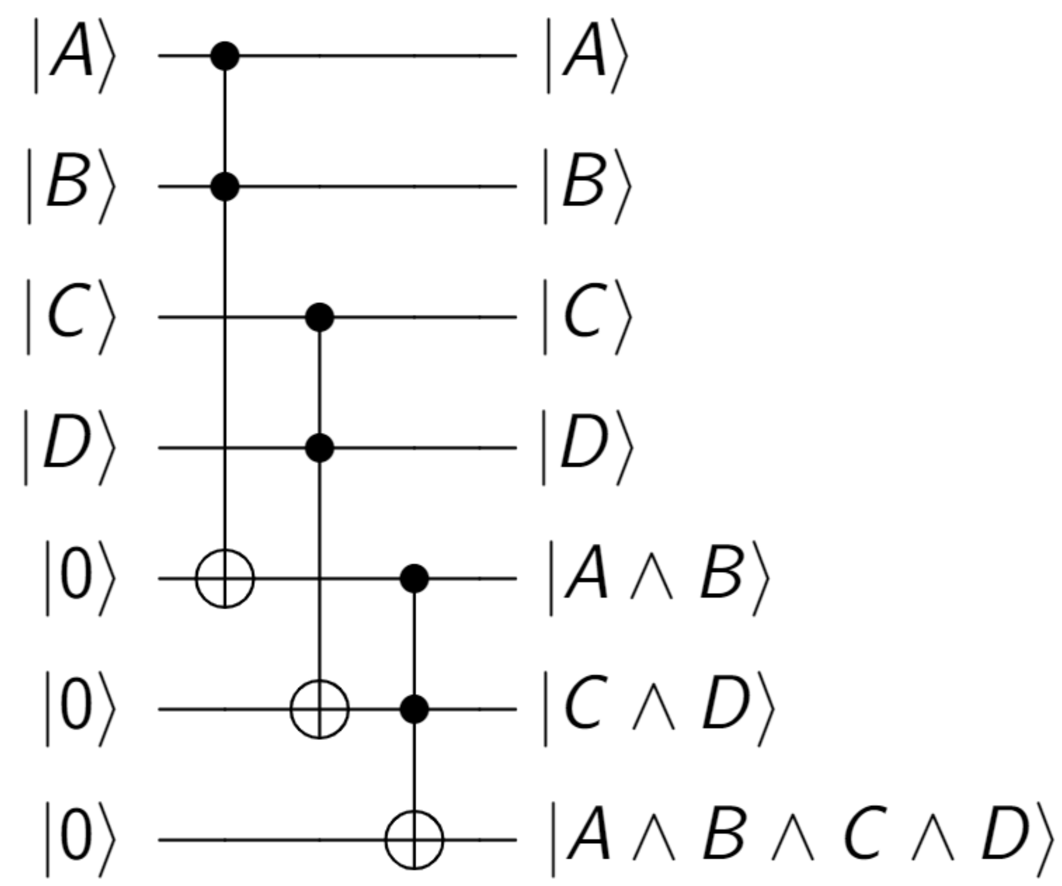
5 Funzioni bool - Porte logiche classiche

Nella nostra computazione avremo bisogno di **gate a N qubit**, ma attualmente **non ne esistono implementazioni fisiche**. Nonostante ciò, queste possono essere composte da gate più semplici. Alcune librerie **simulano queste porte** nei seguenti modi.

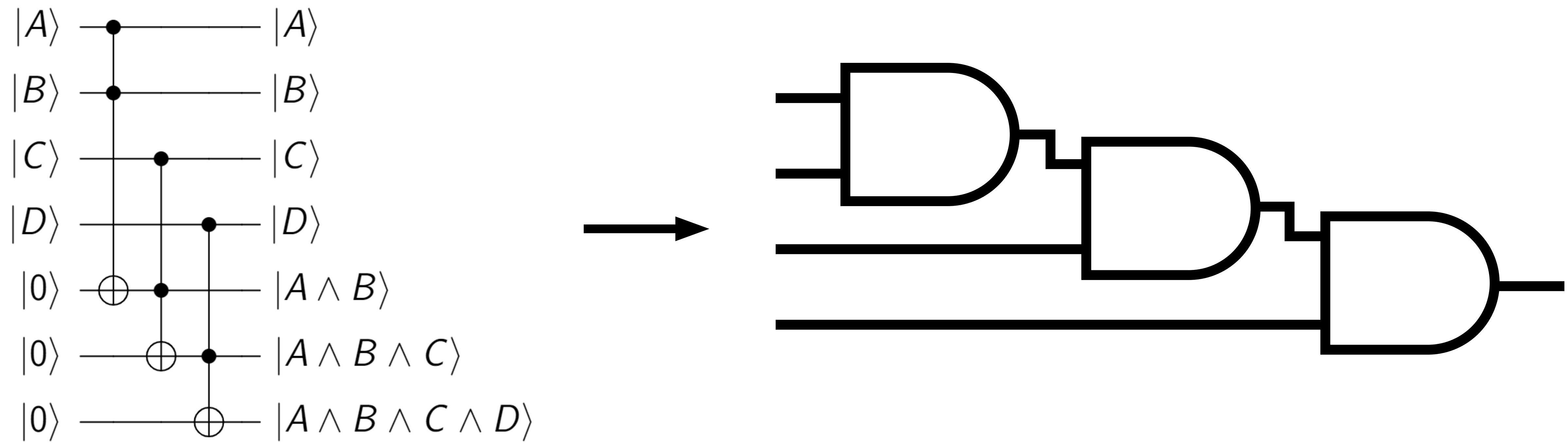
Ladder

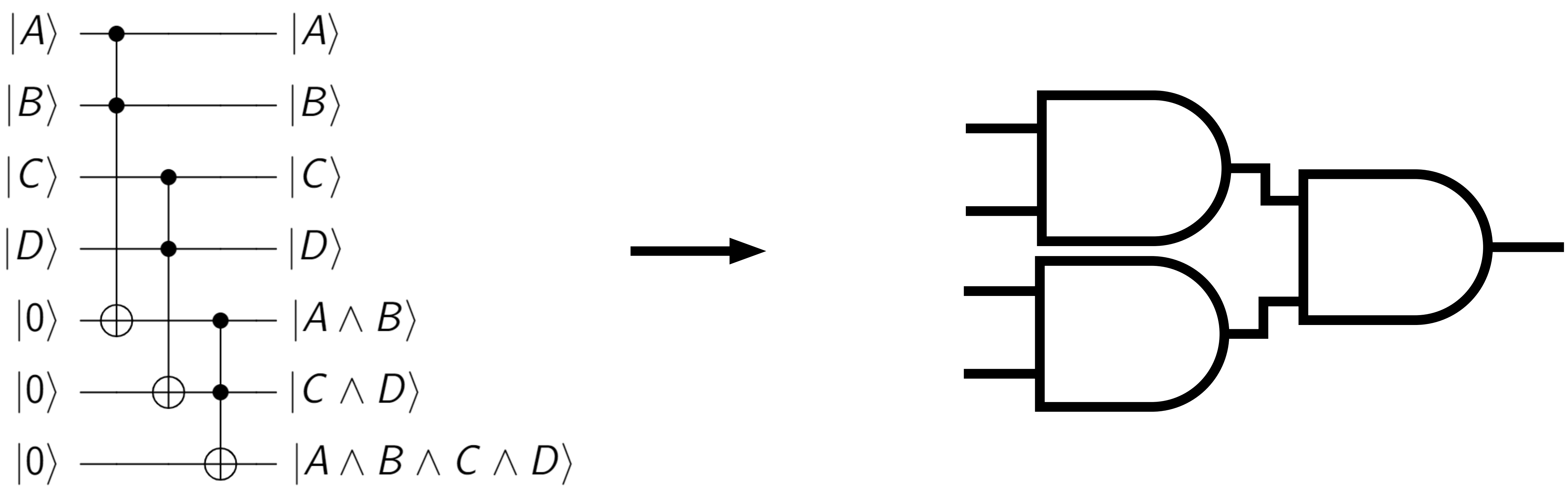


Tree



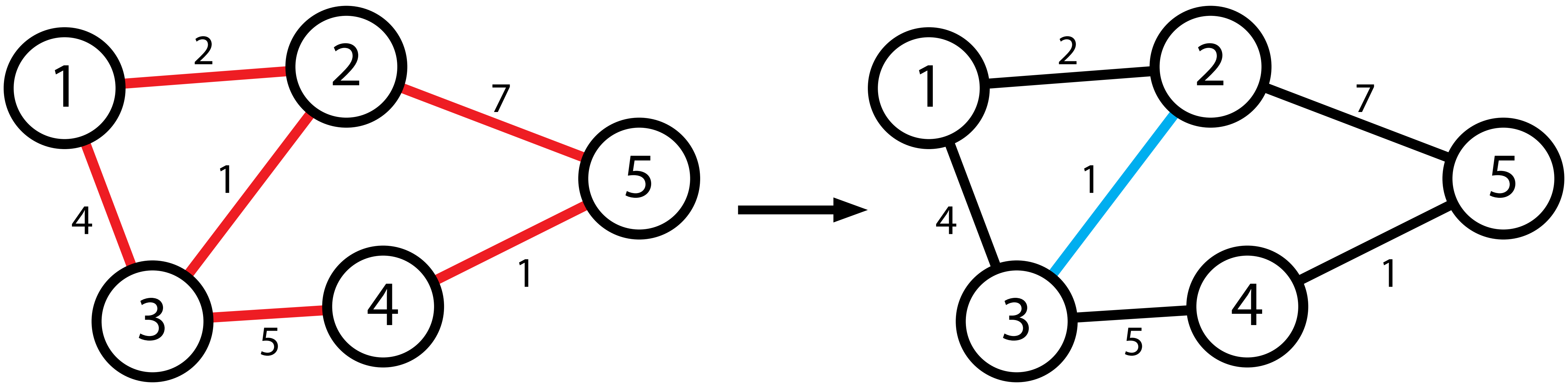
6 Funzioni bool - Porte logiche classiche





1 MST quantum - Kruskal quantum

Creiamo due insiemi: l'insieme degli **archi appartenenti al MST e l'insieme di nodi visitati**.

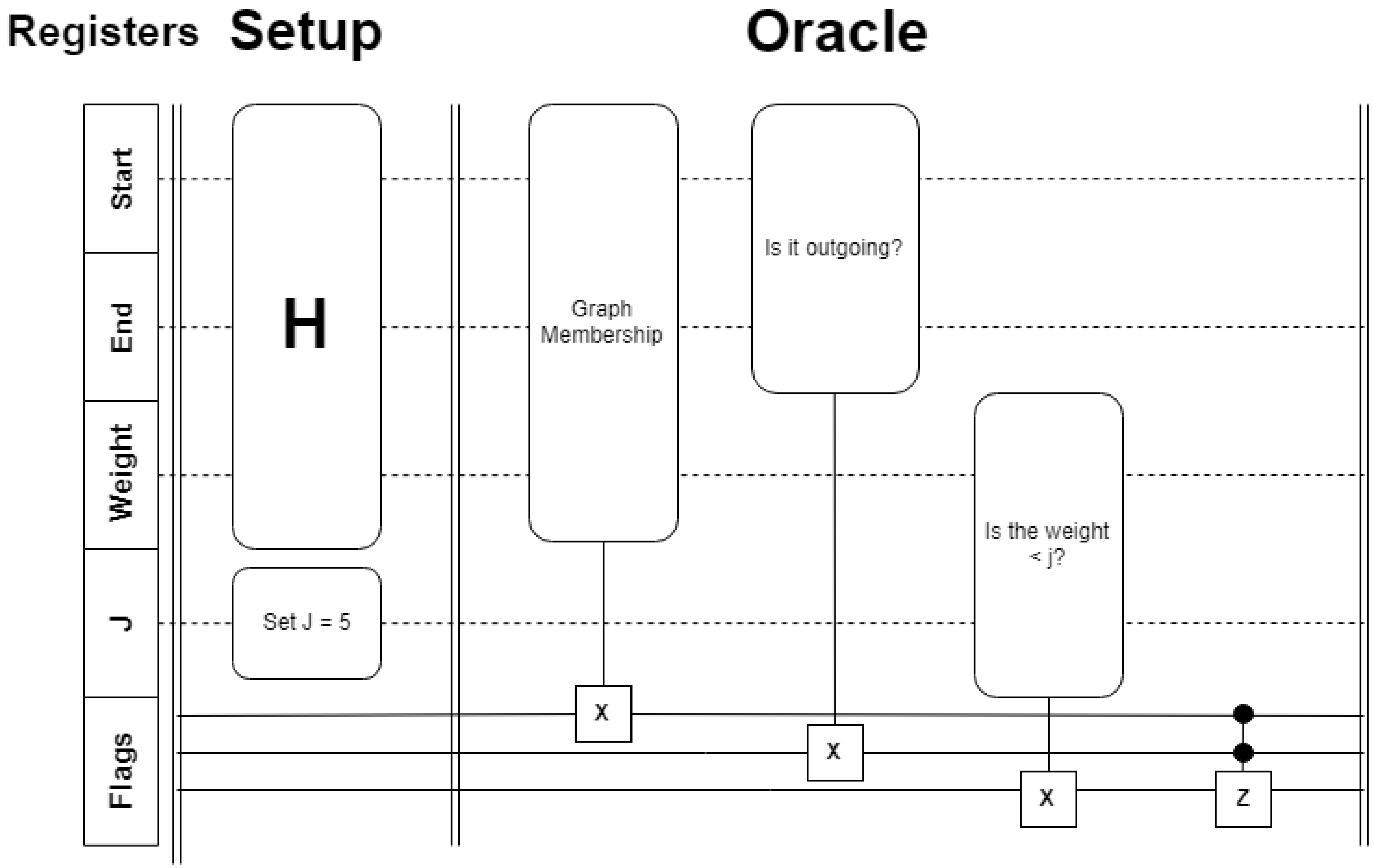


Per |V| - 1 volte selezioniamo l'**arco di minor peso incidendente** su un nodo che non appartiene al set di nodi già visitati. Ogni volta che si seleziona un **arco** questo viene aggiunto all'**insieme degli archi del MST** e il **nodo** appena visitato all'insieme de i **nodi visitati**.

Il mondo quantum può fornirci un **vantaggio nella fase di ricerca di un arco incidente**.
Un possibile algoritmo di ricerca quantum è **Grover**.

2 MST quantum - Circuito MST

Grover può essere utilizzato nel calcolo di un MST per la **ricerca di archi** e la **valutazione dei loro pesi.** L'oracolo sarà una funzione che avrà come parametri l'**appartenenza** di un arco al grafo, la sua **direzione** e il suo **peso**



1

QDK - Documentazione

QDK download

Tutorial per la configurazione del QDK

Reference su Q# e algoritmi quantum

Ricca libreria di esempi con algoritmi già implementati e esempi di utilzzo di alcune librerie

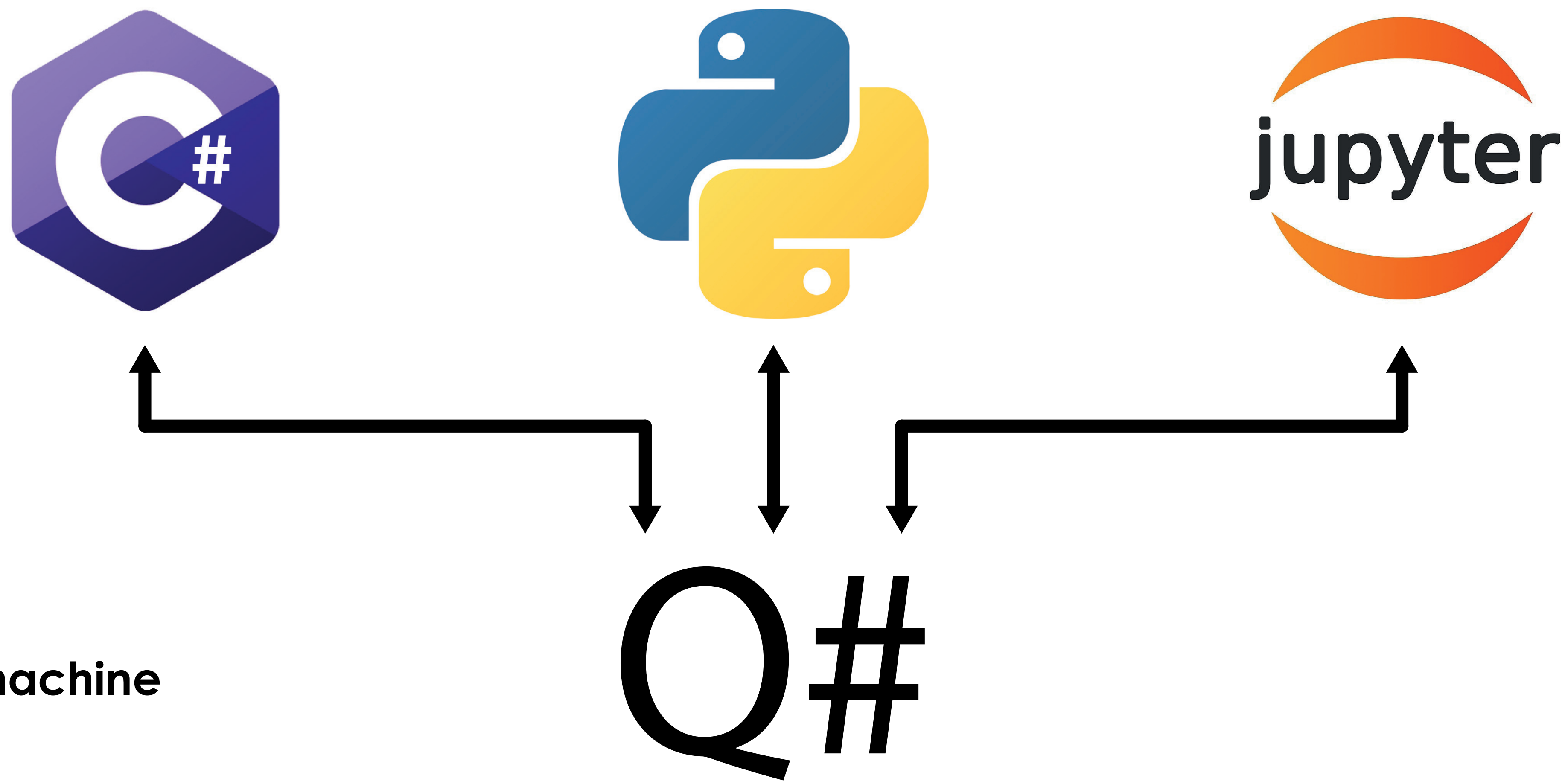
Tutorial di configurazione più approfonditi

La presenza di esempi su **Github** viene sfruttata al meglio nel momento in cui si utilizza Visual Studio, il quale permette di **importare repository direttamente dal IDE** così permettendo di avere un a**ccesso rapidissimo a una grande varietà di esempi.**

2 QDK - Caratteristiche (driver e Q#)

Driver

Quantum machine



Q# è un linguaggio di programmazione ideato appositamente **per sviluppare applicazioni quantum**. L'idea di base dietro la QDK è di avere un processo classico, chiamato **driver**, che **chiama le operazioni scritte in Q#**, le quali **restituiranno il risultato** dell'eseguzione

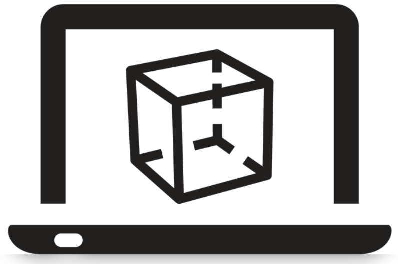
3

QDK - Caratteriestiche (librerie)

QDK mette a disposizione una grande **varietà di librerie** che implemenmtano la maggior parte dei **gate classici e gli algoritmi quantum più conosciuti**. Questa lista è in continua crescità e permette agli sviluppatori di **accelerare lo sviluppo del software**.

Microsoft.Quantum.diagnostic

Questa libreria permette di creare **test** per controllare lo stato della macchina, **quando possibile**. La sua struttura si basa sul concetto di **Assert.**



Microsoft.Quantum.Simulation.Simulator

Da accesso a una grande **varietà di simulatori con differenti proprietà**. Questo permette agli sviluppatori di utilizzare **simulatori specializzati** per alcune applicazioni.

4 QDK - Simulatori

Full state vector simulator

Questo è il simulatore più utilizzato e simula una **quantum machine completa**. Ha la possibilità di **simulare il rumore** e la capacità di sfruttare il **parallelismo per la simulazione**.

MAX qubit: 30 locale, 40 cloud

Resources estimator

Stima le risorse necessarie per eseguire l'algoritmo selezionato. Per far ciò **non esegue effettivvamente la simulazione**, così facendo può **simulare** algoritmi che **superano il limite massimo di qubit**.

MAX qubit: non allocati, indefinito

Toffoli simulator

Questo simulatore è una **versione semplificata** del full state vector simulator in cui si dispone solamente di **tre gate: X, CNOT e multi-qubit X.** Per la sua semplicità può **simulare molti più qubit**.

MAX qubit: milioni

Trace-based resources estimator

Simile allo stimatore semplice ma utilizza anche **assert probabilistici** per dare informazioni più specifiche sulle risorse necessarie

MAX qubit: non allocati, indefinito

5 QDK - Hardware

Al contrario di Rigetti e IBM che hanno costruito **quantum computer basati sulla tecnologia dei superconducting qubits, Microsoft sta scommenttendo su un nuovo tipo di qubits chiamati topological qubits**, basati su fermioni di Majorana.
Questi nuovi qubits dovrebbero garantire tempi di decoerenza migliori.

Superconducting qubits	**vs**	**Topological qubits**
	PRO	
Più facili da produrre		Dovrebbero garantire una decoherence migliore
	CONTRO	
Dechoerence più difficile da gestire		Non esistono ancora qubit di questo tipo

Da poco è possibile utilizzare QuantumExperience di IBM per eseguire codice scritto in Q#.