Klausurvorbereitung Algebraische Topologie

Günthner

Winter 2024

1 Singuläre Homologie

$$C_{k+1}(X) \xrightarrow{d_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(X)$$

Definition 1.

$$H_k(X) = \ker(d_k)/\operatorname{img}(d_{k+1})$$

1.1 Homologie vom Punkt

$$C_k(*) = \mathbb{R} \cdot \text{konstante Abb.}$$

$$\operatorname{img}(d_k) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\ker(d_k) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Für $k \geq 1$:

$$H_k(*) = \ker(d_k)/\operatorname{img}(d_{k+1}) = 0$$

Für $k = 0$:

$$H_0(*) = \ker(d_k)/\operatorname{img}(d_{k+1}) = 0/0 = 0$$

1.2 Homotopie-Invarianz

Seien X, Y topologische Räume und $g : X \to Y, h : Y \to X$ mit

$$g \circ h \sim \text{id} \text{ and } h \circ g \sim \text{id}$$

Zeigen wir, dass

$$g \circ h \sim \text{id} \implies (g \circ h)_* = \text{id}$$

Sei hierfür $H : [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie zwischen $H(0)$ und $H(1)$, dann erhalten wir durch den Prismenoperator eine Kettenhomotopie.

$$
\begin{tikzcd}
C(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "{f,g}"] & C(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "{f,g}"] \arrow[dl, "H"'] & C(A) \arrow[d, "{f,g}"] \arrow[dl, "H"'] \\
C(B) \arrow[r, "d"] & C(B) \arrow[r, "d"] & C(B)
\end{tikzcd}
$$

Mit $f - g = dH + Hd$

1.3 Mayer-Vietoris

Sei $U \cup V$ ein topologischer Raum mit U, V offen. Versuchen wir folgende exakte Sequenz zu zeigen:

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U \cup V) \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \longrightarrow H_k(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

Hierfür werden wir folgende isomorphe Sequenz zeigen:

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U + V) \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \longrightarrow H_k(U + V) \longrightarrow \cdots$$

Dass können wir unter Verwendung des Schlangenlemmas (?) und folgender kurzen exakten Sequenz zeigen:

$$0 \longrightarrow C_k(U \cap V) \longrightarrow C_k(U) \oplus C_k(V) \longrightarrow C_k(U + V) \longrightarrow 0$$

2 De-Rahm Cohomologie

2.1 Poincaré Lemma

U sternförmig und offen in $\mathbb{R}^n$, zz. für $\omega \in \Omega_k(U)$ mit $d\omega = 0$:

$$\exists \eta \in \Omega_{k+1}(U) \text{ mit } d\eta = \omega$$

Definieren wir

$$\eta = \iota_X \int\limits_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt$$

Nun erhalten wir für $d\eta$:

$$\begin{aligned}
d\eta = d\iota_X \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t) * (\omega) dt &= (L_X - \iota_X d) \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt - \iota_X d \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{ds}|_{s=0} (\varphi_X^s)^* (\varphi_X^t)^*(\omega) dt - \iota_X \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(d\omega) dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{ds}|_{s=t} (\varphi_X^s)^*(\omega) dt - 0 \\
&= \omega - \lim_{x \to -\infty} (\varphi_X^x)^*(\omega) = \omega - 0 \qquad = \omega
\end{aligned}$$

2.2 Mayer-Vietoris

Vorgehen: gleich wie in *Abschnitt* 1.3
Wir versuchen also Exaktheit von folgender Kette zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\Omega_k(U \cup V) &\longrightarrow \Omega_k(U) \oplus \Omega_k(V) &&\longrightarrow \Omega_k(U \cap V) \\
\omega &\longmapsto (\omega, -\omega) \quad (\omega_U, \omega_V) &&\longmapsto \omega_U + \omega_V
\end{aligned}$$