

Klausurvorbereitung Algebraische Topologie

Günthner

Winter 2024

1 Singuläre Homologie

$$C_{k+1}(X) \xrightarrow{d_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(X)$$

Definition 1.

$$H_k(X) = \ker(d_k) / \operatorname{img}(d_{k+1})$$

1.1 Homologie vom Punkt

$$C_k(*) = \mathbb{R} \cdot \text{konstante Abb.}$$

$$\operatorname{img}(d_k) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\ker(d_k) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Für $k \geq 1$:

$$H_k(*) = \ker(d_k) / \operatorname{img}(d_{k+1}) = 0$$

Für $k = 0$:

$$H_0(*) = \ker(d_0) / \operatorname{img}(d_{k+1}) = 0/0 = 0$$

1.2 Homotopie-Invarianz

Seien X, Y topologische Räume und $g : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow X$ mit

$$g \circ h \sim \operatorname{id} \text{ and } h \circ g \sim \operatorname{id}$$

Zeigen wir, dass

$$g \circ h \sim \operatorname{id} \implies (g \circ h)_* = \operatorname{id}$$

Sei hierfür $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen $H(0)$ und $H(1)$, dann erhalten wir durch den Prismenoperator eine Kettenhomotopie.

$$\begin{array}{ccccc}
C(A) & \xrightarrow{d} & C(A) & \xrightarrow{d} & C(A) \\
\downarrow f, g & \nearrow H & \downarrow f, g & \nearrow H & \downarrow f, g \\
C(B) & \xrightarrow{d} & C(B) & \xrightarrow{d} & C(B)
\end{array}$$

Mit $f - g = dH + Hd$

1.3 Mayer-Vietoris

Sei $U \cup V$ ein topologischer Raum mit U, V offen. Versuchen wir folgende exakte Sequenz zu zeigen:

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U \cup V) \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \longrightarrow H_k(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

Hierfür werden wir folgende isomorphe Sequenz zeigen:

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U + V) \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \longrightarrow H_k(U + V) \longrightarrow \cdots$$

Dass können wir unter Verwendung des Schlangenlemmas (?) und folgender kurzen exakten Sequenz zeigen:

$$0 \longrightarrow C_k(U \cap V) \longrightarrow C_k(U) \oplus C_k(V) \longrightarrow C_k(U + V) \longrightarrow 0$$

2 De-Rahm Cohomologie

2.1 Poincaré Lemma

U sternförmig und offen in \mathbb{R}^n , zz. für $\omega \in \Omega_k(U)$ mit $d\omega = 0$:

$$\exists \eta \in \Omega_{k+1}(U) \text{ mit } d\eta = \omega$$

Definieren wir

$$\eta = \iota_X \int_{-\infty}^0 (\varphi_X^t)^*(\omega) dt$$

Nun erhalten wir für $d\eta$:

$$\begin{aligned}
d\eta &= d\iota_X \int_{-\infty}^0 (\varphi_X^t)^*(\omega) dt = (L_X - \iota_X d) \int_{-\infty}^0 (\varphi_X^t)^*(\omega) dt \\
&= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{-\infty}^0 (\varphi_X^t)^*(\omega) dt - \iota_X d \int_{-\infty}^0 (\varphi_X^t)^*(\omega) dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\varphi_X^s)^*(\varphi_X^t)^*(\omega) dt - \iota_X \int_{-\infty}^0 (\varphi_X^t)^*(d\omega) dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (\varphi_X^s)^*(\omega) dt - 0 \\
&= \omega - \lim_{x \rightarrow -\infty} (\varphi_X^x)^*(\omega) = \omega - 0 = \omega
\end{aligned}$$