# Klausurvorbereitung Algebraische Topologie

Günthner

Winter 2024

## Inhaltsverzeichnis



# 1 Singuläre Homologie

## 1.1 Definition

**Definition 1** (Simplex).

$$\Delta^k = \{\, (a_i) \in \mathbb{R}^{k+1} : 0 \leq a_i \leq 1 \text{ } \mathit{und} \text{ } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \,\}$$

**Definition 2** (Kettenkomplex).

$$C_k(X) = \operatorname{span}\{\, \Delta^k \to X \text{ } \mathit{stetig} \,\}$$

**Definition 3** (Randabbildung). *Wir definieren $d$ als linear und dann nur Basisvektoren $\varphi$:*

$$\begin{aligned} d_k : C_k &\to C_{k-1} \\ \varphi &\mapsto \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \underbrace{(p_i)^*}_{\mathit{pullback}} \varphi \end{aligned}$$

*mit*

$$\begin{aligned} p_i : \Delta_{k-1} &\to \Delta_k \\ (x_j) &\mapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, \ldots, x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$C_{k+1}(X) \xrightarrow{d_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(X)$$

**Definition 4** (Singuläre Homologie)**.**

$$H_k(X) = \ker(d_k)/\operatorname{img}(d_{k+1})$$

## 1.2 Homologie vom Punkt

$$C_k(*) = \mathbb{R} \cdot \text{konstante Abb.}$$

$$\operatorname{img}(d_k) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\ker(d_k) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Für $k \geq 1$:

$$H_k(*) = \ker(d_k)/\operatorname{img}(d_{k+1}) = 0$$

Für $k = 0$:

$$H_0(*) = \ker(d_k)/\operatorname{img}(d_{k+1}) = 0/0 = 0$$

## 1.3 Homotopie-Invarianz

Seien $X, Y$ topologische Räume und $g : X \to Y, h : Y \to X$ mit

$$g \circ h \sim \text{id} \text{ and } h \circ g \sim \text{id}$$

Zeigen wir, dass

$$g \circ h \sim \text{id} \implies (g \circ h)_* = \text{id}$$

Sei hierfür $H : [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie zwischen $H(0)$ und $H(1)$, dann erhalten wir durch den Prismenoperator eine Kettenhomotopie.

$$\begin{tikzcd} C(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f,g"] & C(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f,g"] \arrow[dl, "H"] & C(A) \arrow[d, "f,g"] \arrow[dl, "H"] \\ C(B) \arrow[r, "d"] & C(B) \arrow[r, "d"] & C(B) \end{tikzcd}$$

Mit $f - g = dH + Hd$

### 1.4 Mayer-Vietoris

Sei $U \cup V$ ein topologischer Raum mit $U, V$ offen. Versuchen wir folgende exakte Sequenz zu zeigen:

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U \cup V) \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \longrightarrow H_k(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

Hierfür werden wir folgende isomorphe Sequenz zeigen:

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U + V) \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \longrightarrow H_k(U + V) \longrightarrow \cdots$$

Dass können wir unter Verwendung des Schlangenlemmas (?) und folgender kurzen exakten Sequenz zeigen:

$$0 \longrightarrow C_k(U \cap V) \longrightarrow C_k(U) \oplus C_k(V) \longrightarrow C_k(U + V) \longrightarrow 0$$

## 2 De-Rahm Cohomologie

### 2.1 Definition

**Definition 5** (Alternierende $k$-Formen)**.**

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \{\, (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R} \textit{ alternierend und } k\textit{-linear} \}$$

Elemente von $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ lassen sich darstellen als Summen von sowas wie $r_{i,j,\ldots} \underbrace{dx_i \wedge dx_j \wedge \ldots}_{k\text{-Mal}}$ mit $r_{i,j,\ldots} \in \mathbb{R}$.

**Definition 6** (Differentialformen)**.** *Sei $M$ eine glatte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit:*

$$\Omega^k(M) = \{\, M \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \textit{ glatt} \}$$

**Definition 7** (Äußere Ableitung)**.**

$$\begin{aligned} d_k : \Omega^k(M) &\to \Omega^{k+1}(M) \\ d_0(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\ d_{k+l}(\omega \wedge \eta) &= d_k\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_l \eta \end{aligned}$$

Daraus können wir folgende Formel ableiten ($\alpha_i$ sind Multiindices):

$$\begin{aligned} d_{|\alpha_i|} \sum_{i=1}^{t} f_{\alpha_i} dx_{\alpha_i} &= \sum_{i=1}^{t} df_{\alpha_i} dx_{\alpha_i} \\ &= \sum_{i=1}^{t} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial x_j} dx_j) \wedge dx_{\alpha_i} \end{aligned}$$

## 2.2 Poincaré Lemma

$U$ sternförmig und offen in $\mathbb{R}^n$, zz. für $\omega \in \Omega_k(U)$ mit $d\omega = 0$:

$$\exists \eta \in \Omega_{k+1}(U) \text{ mit } d\eta = \omega$$

Definieren wir

$$\eta = \iota_X \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt$$

Nun erhalten wir für $d\eta$:

$$\begin{aligned}
d\eta = d\iota_X \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t) * (\omega) dt &= (L_X - \iota_X d) \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt - \iota_X d \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(\omega) dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{ds}|_{s=0} (\varphi_X^s)^* (\varphi_X^t)^*(\omega) dt - \iota_X \int_{-\infty}^{0} (\varphi_X^t)^*(d\omega) dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{ds}|_{s=t} (\varphi_X^s)^*(\omega) dt - 0 \\
&= \omega - \lim_{x \to -\infty} (\varphi_X^x)^*(\omega) = \omega - 0 \qquad = \omega
\end{aligned}$$

## 2.3 Mayer-Vietoris

Vorgehen: gleich wie in *Abschnitt* 1.4
Wir versuchen also Exaktheit von folgender Kette zu zeigen:

$$\Omega_k(U \cup V) \xrightarrow{\alpha} \Omega_k(U) \oplus \Omega_k(V) \xrightarrow{\beta} \Omega_k(U \cap V)$$

$$\omega \longmapsto (\omega, -\omega) \quad (\omega_U, \omega_V) \longmapsto \omega_U + \omega_V$$

$\alpha$ ist injektiv, denn sei $\omega$ im Kern von $\alpha$, dann folgt schon, dass $\omega$ null auf $U$, $V$ und somit auch auf $U \cup V$ ist.
TODO

## 2.4 Homologie vom Torus

Definieren wir den $n$-Torus als $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Wir wollen nun mit Hilfe von De-Rahm Cohomologie zeigen, dass $b_k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}$. Dass machen wir in drei Schritten:

1. Wenn wir Differentialformen verschieben, dann bleibt die Homologieklasse gleich
2. Wenn wir dann eine Differentialform mittlen, dann bleibt die Homologieklasse wieder gleich
3. Nun gibt es für jede Homologieklasse immer einen konstanten Repräsentanten und wir können nun die Homologie mit dem Zielraum der Differentialformen identifizieren: $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Und das hat Dimension $\binom{n}{k}$

### 2.4.1 Verschieben lässt Homologieklasse gleich

Was wollen wir zeigen? Sei $v \in \mathbb{T}^n$, dann definieren wir $\varphi_v : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, x \mapsto x + v$, nun hätten wir gerne, dass für $\omega \in H^k(\mathbb{T}^n)$ gilt: $[\omega] = [(\varphi_v)^*\omega]$.

Hierfür definieren wir das Vektorfeld $v$, dass einfach überall konstant gleich $v$ ist. Der Fluss darüber ist dann einfach $\varphi_v^t$.

Nun, wir wollen zeigen, dass $[\omega] = [(\varphi_v^1)^*\omega]$, also dass $(\varphi_v^1)^*\omega - (\varphi_v^0)^*\omega \in \operatorname{img} d$.

Als erstes erkennen wir, dass diese Differenz das gleiche ist wie das Integral über lokale Differenzen entlang einem bestimmten Pfad:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 L_v(\varphi_v^t)^*\omega dt \\
&= \int_0^1 (d\iota_v + \iota_v d)(\varphi_v^t)^*\omega dt \\
&= d\int_0^1 \iota_v(\varphi_v^t)^*\omega dt + \underbrace{\int_0^1 \iota_v(\varphi_v^t)^* d\omega dt}_{0}
\end{aligned}
$$

□

### 2.4.2 Mitteln lässt Homologieklasse gleich

Definieren wir Mitteln in eine Richtung:

$$
\begin{aligned}
M_i : \Omega^k(\mathbb{T}^n) &\to \Omega^k(\mathbb{T}^n) \\
\omega &\mapsto \int_0^1 (\varphi_{x_i}^t)^*\omega dt
\end{aligned}
$$

Nun können wir insgesamtes Mitteln können wir definieren als

$$M = M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_n$$

$M_i$ lässt die Homologieklasse gleich warum? Naja, es ist ein Integral über etwas wie $(\varphi_{x_i}^t)^*\omega$ und die haben ja alle die gleiche Homologieklasse. Also integrieren wir über Elemente eines Untervektorraums und das Resultat ist dann auch in diesem Vektorraum.

Nun lässt $M$ die Homologieklasse gleich, da es die Verknüpfung von Abbildungen mit dieser Eigenschaft.

$\square$

### 2.4.3 Isomorphie $H^k(\mathbb{T}^n) \cong \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

Nehmen wir ein Element $[\omega] \in H^k(\mathbb{T}^n)$. Nun nehmen wir $[\omega] = [M(\omega)]$, d.h. jede Homologieklasse hat einen gemittelten Repräsentanten, also einen konstanten. D.h. wir können $H^k(\mathbb{T}^n)$ mit $\Omega_c^k(\mathbb{T}^n)$—den konstanten Differentialformen—identifizieren.

Die konstanten Differentialformen können wir natürlich mit $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ identifizieren, indem wir die Differentialform irgendwo auswerten $M(\omega)(x)$.

$\square$