Université Nazi BONI

Ecole Supérieure d'Informatique

L3-SI

TD de Compilation

Exercice N°1

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.
1. Donnez tous les mots de longueur 2 que l'on peut écrire sur Σ.
2. Donnez tous les mots de longueur 4 que l'on peut écrire sur Σ, et qui contiennent le sous-mot *cab*.

Exercice N°2

Soit $\omega \in \Sigma^*$ un mot. On appelle

$\boxed{\textbf{sous-mot}}$ de ω tout mot $\xi = \omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_{|\xi|}} \in \Sigma^*$, où $\left(i_1, \ldots, i_{|\xi|}\right) \in [1, |\omega|]^{|\xi|}$, et $\forall j \in [1, |\xi| - 1]\,, i_j < i_{j+1}$.

$\boxed{\textbf{facteur}}$ de ω tout mot $\xi \in \Sigma^*$ qui vérifie $\exists\,(\mu, \nu) \in (\Sigma^*)^2$ tel que $\omega = \mu\xi\nu$.

$\boxed{\textbf{préfixe}}$ de ω tout mot $\xi \in \Sigma^*$ qui vérifie $\exists\mu \in \Sigma^*$ tel que $\omega = \xi\mu$.

$\boxed{\textbf{suffixe}}$ de ω tout mot $\xi \in \Sigma^*$ qui vérifie $\exists\mu \in \Sigma^*$ tel que $\omega = \mu\xi$.

1. Donnez les facteurs du mot *abc*. Ceux du mot *abcba*.
2. Donnez les préfixes du mot *abcba*.
3. Donnez les suffixes du mot *abcba*.
4. Donnez les sous-mots du mot *abc*.

Exercice N°3

On rappelle qu'un morphisme[3] ϕ de $(E, +)$ dans $(F, \times)$ est une application qui vérifie $\phi(a + b) = \phi(a)\times\phi(b)$. On note . la concaténation. On se donne l'alphabet Σ : $\{a, b, c\}$, et on définit le morphisme ϕ de $(\Sigma^*, .)$ vers $(\mathbb{N}, +)$ de la façon suivante : $\phi(a) = 1$, $\phi(b) = 0$, $\phi(c) = 0$.
1. Calculez les images par ϕ des mots *abababb*, *aaaaa* et *ccbcbcc*.
2. Si vous deviez donner un nom à ϕ, comment l'appeleriez vous ?
3. On considère maintenant le morphisme ψ (également défini de $(\Sigma^*, .)$ vers $(\mathbb{Z}, +)$), défini par $\psi(a) = 1$, $\psi(b) = 0$, $\psi(c) = -1$. Pour un mot ω, on sait que $\psi(\omega)$=-3. Quelle information cela amène-t-il ? Quelle utilisation peut-on faire d'un tel morphisme ?

Exercice N°4

Donnez une phrase, en français, qui explique comment sont construits les mots correspondant à chacune des expressions rationnelles suivantes :

- $\{a, b\}^*$
- a^*b^*
- $a^*b^* \cup b^*a^*$
- $a\{a, b\}^*b$
- $a^*bb^* \cup b^*aa^* \cup abaabb^*a^*$

Exercice N°5

Écrivez des expressions rationnelles qui représentent les ensembles de mots décrits (sur l'alphabet $\{a, b\}$) par les phrases suivantes :

- Les mots de 4 lettres contenant exactement 3 a
- Les mots contenant au moins une fois le motif aba
- Les mots d'au plus 4 lettres
- Les mots qui contiennent le motif aab, mais pas le motif aaa

Exercice N°6

Dessinez des automates finis d'acceptation pour les expressions rationnelles suivantes (Σ est l'alphabet sur lequel on construit nos mots : $\{a, b, c\}$) :

- $\Sigma^*abc\Sigma^*$
- $aa^*b\Sigma^* \cup b\,(b^* \cup ab)^*\,aaa^*b\Sigma^*$
- $(b^*a\,(bba)^*\,aa)^*\,b^*a\,(bba)^*\,ab\,(b \cup ab^*a)^*$
- $\left(a \cup b\,(b\,(bb^*a)^*\,a)^*\,a\right)^*$

Exercice N°7

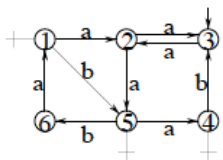
On considère l'automate A, présenté en Figure 3.2, et on se propose de calculer le langage $L(A)$ qui lui est associé.

Pour ce faire, pour tout état $i \in Q$, on calcule le langage L_i associé à l'état i, c'est à dire accepté par l'automate $\langle \Sigma_A, Q_A, i, T_A, \delta_A \rangle$: il s'agit du même automate que A, à ceci près que l'état initial est i. Si $i \in T$, on a évidemment $\epsilon \in L_i$. Par ailleurs, pour tout couple (j, k) d'états de A, si $(j, a, k) \in \delta$, on a $aL_k \subset L_j$. On construit ainsi le système d'équation suivant (1 note ϵ, et + note l'union de langages) : $\forall i \in Q, L_i = \chi_T(i) + \sum_{(i,a,j)\in\delta} aL_j$, où χ_T est une fonction qui associe 1 à tout état de T, et 0 à tout état de $Q \backslash T$. On résoud le système par toute méthode classique (par exemple la substitution), en faisant attention au fait que la concaténation est une opération non commutative. Lors de cette résolution, on remarque que

$$\frac{1}{1-a} \overset{\substack{\textit{Dével.}\\ \textit{en}\\ \textit{série}\\ \downarrow}}{=} 1 + a + a^2 + \ldots + a^i + \ldots \overset{\substack{\textit{Avec les}\\ \textit{opér.}\\ \text{"langage"}\\ \downarrow}}{=} \{\epsilon\} \cup \{a\} \cup \{aa\} \cup \ldots \cup \{\overbrace{aaaa\ldots a}^{i\ termes}\} \cup \ldots$$

et donc que $\frac{1}{1-a} = a^*$.

1. Établir le système d'équations associé à l'automate A présenté en Figure 3.2.
2. Déterminer comment utiliser ce système pour calculer $L(A)$.
3. Résoudre ce système, et en déduire une expression rationnelle de $L(A)$.



Exercice N°8

On[1] considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ des symboles utilisés dans l'écriture binaire des nombres entiers, et on se donne l'application ϕ sur Σ^*, définie de la façon suivante : $\phi : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}, \omega \mapsto \sum_{i=1}^{i=|\omega|} \omega_i \times 2^{|\omega|-i}$.

Cette fonction ϕ permet donc de calculer la valeur entière associée à un mot binaire. Par exemple, le mot 1101 est associé à $\phi(1101) = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$. On remarquera que, selon cette définition, $\phi(\epsilon) = 0$ (ϵ symbolise le mot vide).

1. Calculez $\phi(10010101)$.

On se donne maintenant $\omega \in \Sigma^*$ tel que $\phi(\omega)$ est divisible par 3. Cela signifie notamment que le reste de la division de $\phi(\omega)$ par 3 est nul, c'est à dire que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(\omega) = 3k$. On appelle ξ le mot $\omega 0$ (c'est à dire le mot obtenu en concaténant le symbole 0 derrière le mot ω), et χ le mot $\omega 1$ (même chose, mais en concaténant le symbole 1, cette fois).

2. En vous servant du fait que $\phi(\omega) = 3k$, déterminez le reste de la division de $\phi(\xi)$ par 3. Même question pour $\phi(\chi)$.
3. Reprenez la même question dans le cas où $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(\omega) = 3k + 1$, puis dans le cas où $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(\omega) = 3k + 2$. Résumez l'ensemble des résultats sous la forme d'un tableau.

Remarque (Question 4) : Étant donnée la question posée, il ne faut pas chercher à obtenir les résultats demandés en traduisant les nombres ω_i en base 10. Une bonne façon de montrer qu'on a compris le procédé consiste à expliquer **comment** on utilise les résultats obtenus en question 3 pour répondre à la question 4.

4. Utilisez ces résultats pour calculer les restes de la division par 3 des images $\phi(\omega_i)$ lorsque[2]

$\omega_1 = 1$	$\omega_4 = 1001$	$\omega_7 = 1001010$
$\omega_2 = 10$	$\omega_5 = 10010$	$\omega_8 = 10010101$
$\omega_3 = 100$	$\omega_6 = 100101$	

5. On appelle L le langage $\{\omega \in \Sigma^*$ tel que $\phi(\omega)$ est divisible par 3 $\}$. Déduisez de vos réponses aux questions précédentes un automate fini d'acceptation pour L.
6. Si vous estimez que votre automate est minimal, dites pourquoi. Si vous ne pensez pas qu'il soit minimal, calculez l'automate minimal d'acceptation de L.

Exercice N° 9

On considère ici les automates finis présentés en Figure 4.1. Calculez les automates suivants :

1. Automate d'acceptation du langage $L(A) \cup L(B)$.
2. Automate d'acceptation du langage $L(B) \cap L(C)$.
3. Automate d'acceptation du langage $\{a, b\}^* \backslash L(A)$.
4. Automate d'acceptation du langage $L(B) \cup (\{a, b\}^* \backslash L(C))$.
5. Automate d'acceptation du langage $L(A).L(B)$.
6. Automate d'acceptation du langage $L(A)^*$.

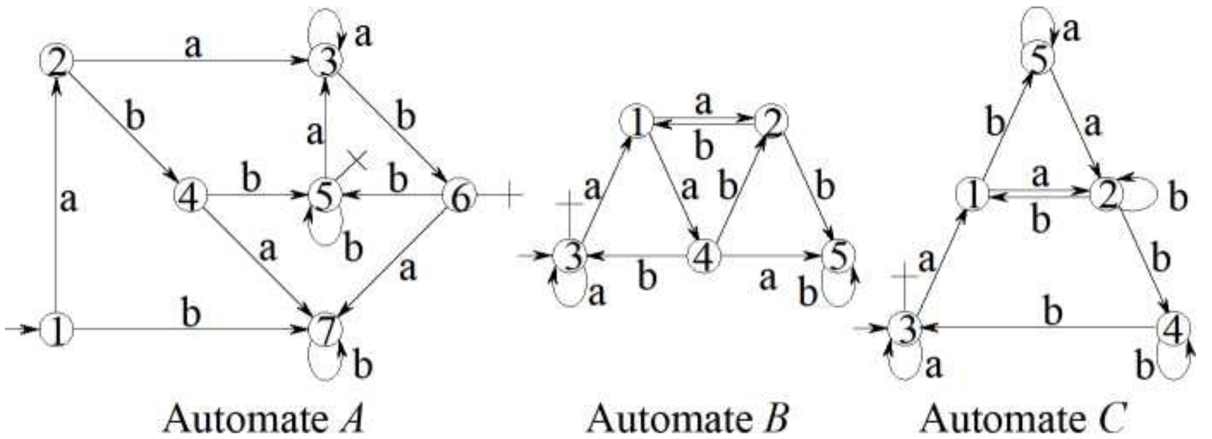
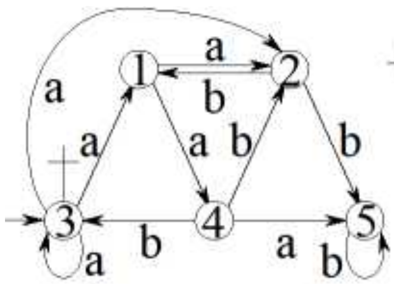


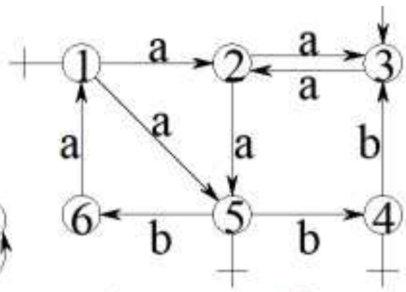
FIG. 4.1 – Automates finis

Exercice N°10

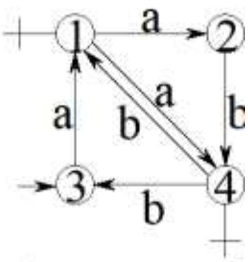
1. Determinisez les automates ci-dessous
2. En utilisant l'algorithme de minimisation, montrez que les automates déterministes obtenus en réponse à l'exercice 10.1 sont minimaux.



Automate *A*

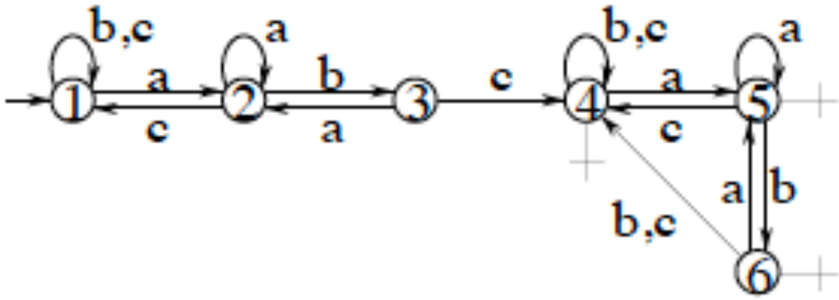


Automate *B*



Automate *C*

3. Minimisez l'automate ci-dessous



Nb: toujours rendre l'automate complet avant sa minimisation