

# Apuntes de Libreta

Cinemática de Robots

Jesús Jail Avalos Lupercio

Ing. Mecatrónica

8º A



## Cinematica de Robots

**¿Qué es un robot?**

Es una máquina controlada por un ordenador y programada para moverse, manipular objetos y realizar trabajos a la vez que interacciona con su entorno. Es capaz de efectuar diversas tareas complejas cuando se les indica.

Mencione algunas aplicaciones típicas de un robot industrial.

Se encuentran en procesos de pintado de carrocerías automotrices, accesorios, cubetas, tijeras, clips, soldadura de punto y por arco en carrocerías automotrices, puertas y diversas piezas industriales; traslado de herramientas, estibado y empaquetado de materiales, etc.

**¿Cuáles son las diferencias entre un robot industrial y una máquina-herramienta CNC?**

Que un robot industrial permite realizar trabajos que requieren mayor fuerza y precisión, son requeridos en diversas tareas que mejoran el tiempo de trabajo y un CNC permite diseñar y programar la fabricación de diversas piezas.

**¿Cómo debe decidirse el tipo de robot para un determinado trabajo?**

Se deben considerar las características con las cuales encajen para realizar dicha actividad como pueden ser:

Características Geométricas:

Área de trabajo  
Grados de libertad  
errores de posicionamiento.

Características Cinemáticas:

Velocidad nominal máxima  
Aceleración y desaceleración

Características dinámicas:

Fuerza.  
Frecuencia de resonancia.  
Movimiento punto a punto  
Movimientos coordinados  
Trajetorias continuas.

Tipos de Movimientos:

- Movimiento punto a punto
- Movimientos coordinados
- Trajetorias continuas.

**Modo Programación: Enseñanza (o) de controles (o) Textual**

Tipo accionamiento: Eléctrico

Hidráulico

Hidráulico

**¿Qué es R.U.R?**

Es una obra teatral de Ciencia ficción. Escrita por el director Karel Čapek en 1920.

Es conocida por contener la primera aparición del término "robot". Dicha palabra habría sido ideada por el hermano del autor, Josef Čapek a partir de la palabra checa «robota» que significa «trabajo».

Ante las diferencias entre robots seriados y paralelos.

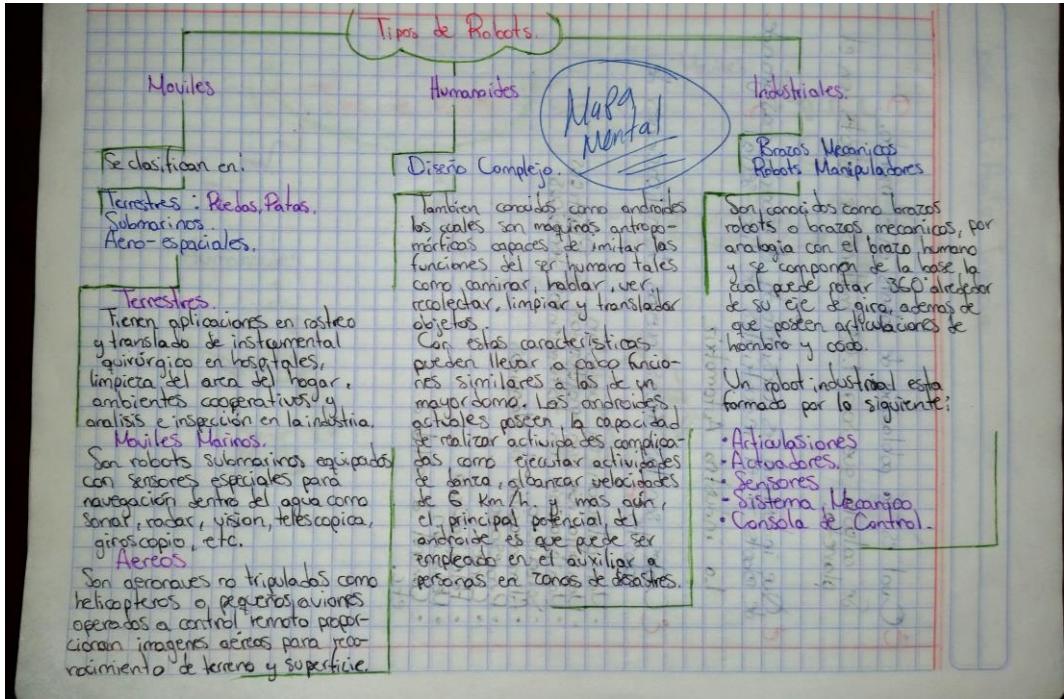
Que los robots seriados se basan en varios subsistemas y por lo general son tres, en cambio los robots paralelos se basan en cadenas cinemáticas cerradas cuya terminal está sujetada a la base mediante cadenas cinemáticas seriadas independientes.

**¿Cuáles son los problemas de seguridad en el uso de robots?**

- Riesgo de Colisión entre el operario y el robot.
- Riesgo de atrapamiento y aplastamiento del operario entre el robot y un obstáculo fijo u otro componente móvil.
- Riesgo de alcance al operario por piezas que el robot tiene poder o proyecte.

**¿Cómo se especifica un robot industrial?**

Podría decirse que es una máquina multifuncional, capaz de mover materiales u objetos, manipular herramientas y piezas.



¿Cuál es la población de robots en el mundo?

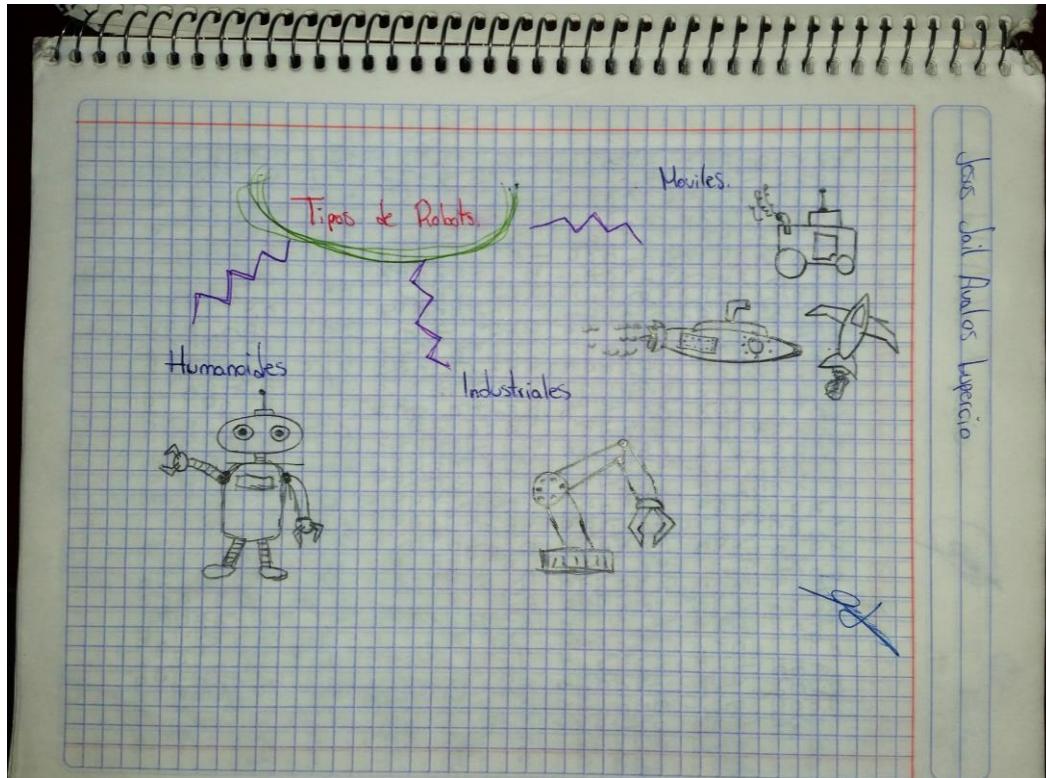
Se calcula que son 1.63 millones de robots en el planeta.

C) Que industria es considerada el usuario mas grande de robots en el sector industrial de tipo serial?

## La industria Automotriz.

¿Cuáles son las áreas nuevas de aplicaciones de robots?

- Manipulación en fundición
  - Manipulación en moldesados de Plásticos
  - Manipulación en tratamientos térmicos
  - Coladura
  - Alimentación de Máquinas
  - Profesado
  - Corte
  - Paletización
  - Medición
  - Control de calidad



Jesús Jair Añelos Lopercio

*(Signature)* Fecha: 14/1/19

### Herramientas matemáticas para la localización espacial.

La manipulación de piezas llevada a cabo por un robot implica el movimiento, espacial, de su extremo. Asimismo, para que el robot pueda recoger una pieza, es necesario conocer la posición y orientación de ésta con respecto a la base del robot. Se aprecia que estas herramientas han de ser lo suficientemente potentes como para permitir obtener de forma sencilla relaciones espaciales entre distintos objetos y en especial entre estos y el manipulado.

Y los determinados cuaternios, al tratarse de una herramienta de uso más restringido, no son analizados con el suficiente detalle en la bibliografía existente. Se trata de un método de gran eficiencia computacional utilizando incluso por algunos robots comerciales para la representación de orientación y por ello se ha incluido un apartado dedicado a su estudio.

Para localizar un cuerpo rígido en el espacio es necesario contar con una herramienta que permita la localización espacial de sus puntos. En un plano el posicionamiento tiene dos grados de libertad, y por tanto la posición de un punto viene definida por dos componentes independientes. Normalmente, los sistemas de referencia se definen mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido. Estos se denominan sistemas cartesianos, y en el caso de trabajar en el plano (2 dimensiones).

Si sistema de referencia Oxy correspondiente queda definido por los vectores coordenadas  $Ox$  y  $Oy$  perpendiculares entre sí con un punto de intersección común O.

Si se trabaja en un plano, con un sistema coordenado Oxy de referencia asociado a un punto, a vendrá expresado por las componentes  $(x, y)$  correspondientes a los ejes coordenados del sistema Oxy. Estas matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso de álgebra matricial.

Un vector  $\mathbf{p}$  del plano se puede representar en ambos sistemas como:

$$\mathbf{p}_{xy} = [P_x, P_y]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y$$

$$\mathbf{p}_{uv} = [P_u, P_v]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v$$

Las matrices de rotación pueden combinarse para expresar la aplicación continua de varios giros. Así al sistema OUVW se le aplica una rotación de ángulo  $\alpha$  sobre OX, seguida de una rotación de ángulo  $\beta$  sobre OY y de una rotación de ángulo  $\gamma$  sobre OZ, la rotación global puede expresarse como:

$$T = R(z, \gamma) R(y, \beta) R(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \sin \gamma \sin \beta & \\ \sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \beta & \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

Para la representación de orientación en un espacio tridimensional mediante una matriz de rotación es necesario definir nueve elementos. Aunque la utilización de las matrices de rotación presente múltiples ventajas, como se vera en el siguiente epígrafe, existen otros métodos de definición de orientación que hacen únicamente uso de tres componentes para su descripción. Este es el caso de los ángulos Euler.

Es una de las representaciones más habituales entre las que realizan los giros sobre ejes previamente girados. Se le suele asociar con los movimientos básicos de un giroscopio. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los pasos.

- 1- Gira el sistema OUVW un ángulo  $\phi$  con respecto al eje Oz, convirtiéndose así en el OUV'W'.
- 2- Gira el sistema OUV'W' un ángulo  $\theta$  con respecto al eje OY, convirtiéndose así en el OUV''W''.
- 3- Gira el sistema OUV''W'' un ángulo  $\psi$  con respecto al

Jesús Dail Añorós Lisperchio.

eje OX convirtiéndose finalmente en el OUV'''W'''.

Roll, pitch and yaw (alabeo, cabeceo y giro)

Se trata de la representación utilizada generalmente en aerodinámica. Es también la más habitual de entre las que se aplican a los giros sobre los ejes del sistema trío. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, al igual que en el caso anterior, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos.

- 1- Gira el sistema OUVW un ángulo  $\psi$  con respecto al eje OX. Es el denominado yaw o giroada.

Cuaternios.

Pueden ser utilizados como herramienta matemática de gran versatilidad computacional para trabajar con imágenes y orientaciones, empleadas por la mayoría robots comerciales (ABB). Para comprender la verdadera utilidad de los cuaternios, es necesario analizar sus propiedades y ver la aplicación práctica de las mismas. Esto se realizará en un epígrafe posterior, exponiéndose aquí únicamente su definición.

Un cuaternion  $Q$  está constituido por cuatro componentes ( $q_0, q_1, q_2, q_3$ ) que representan las coordenadas del cuaternion en una base ( $i, j, k$ ). Es frecuente denominar parte escalar del cuaternion a la componente  $q_0$ , y parte vectorial al resto de componentes. De modo que un cuaternion se puede representar como:

$$Q = [q_0, q_1, q_2, q_3] = [S, V]$$

donde  $S$  representa la parte escalar, y  $V$  la parte vectorial.

En los capítulos anteriores se han estudiado distintos métodos de representar la posición o la orientación de un sólido en el espacio. Pero ninguno de estos métodos por sí solo permite una representación conjunta de la posición y de la orientación (localización). Para solventar este problema se introducen las denominadas coordenadas homogéneas.

Relación entre los distintos métodos de localización espacial.

Ya que a los métodos vistos para la representación espacial son equivalentes, es decir, expresan lo mismo de forma distinta, deberá existir un modo de pasar de un tipo de representación a otro. A través de ellas es posible pasar de una representación a cualquier otra, aunque en algunos casos sea más cómodo utilizar una representación auxiliar intermedia.

Par de rotación: Matriz de transformación homogénea

Al igual que en el caso de los gángulos de Euler, mediante un eje y ángulo de rotación, solo se puede representar orientación; de ahí que únicamente sea definida la submatriz de rotación  $R_{xz}$  de la matriz homogénea de transformación.

Herramientas matemáticas para la localización espacial.				
Representación de la posición	Representación de la orientación	Matrices de transformación homogénea	Aplicación de los cuaternios	Relación y comparación entre los distintos métodos de localización espacial.
Sistema cartesiano de referencia.  Se definen mediante ejes perpendiculars entre si con un origen definido.  (Coordenadas cartesianas)	Matrices de Rotación  Son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial.  Ángulos de Euler.	Coordenadas Matrices y Homogeneas  Se realiza a través de coordenadas de un espacio (eje) dimensional.	Algebra de cuaternios.  Aplicación de las matrices homogéneas.  Representación y posición de un sistema de referencia OXYZ.	Comparación de medios espaciales.  Esta formado por cuatro componentes que representan o (productos) los correspondientes del cuaternio por en una base.  Utilización de los representativos.
Si se trabaja en un plano, con un sistema coordenado OXY de referencia se usan los.  (Coordenadas polares y cilíndricas.)	En un espacio tridimensional mediante una matriz de rotación es necesario definir nueve elementos. Este es el caso de los llamados ángulos de Euler.			Relación entre los sistemas rotacionales de localización peridio espacial.
Es posible también caracterizar la localización de un punto o vector p.			Propiciar el uso de los representantes y compararlos con otros a distancia igual que los representantes.	Expresar lo mismo de forma cercana o distinta para mí.

## Coordenadas Esféricas

## Pas de Rotación.

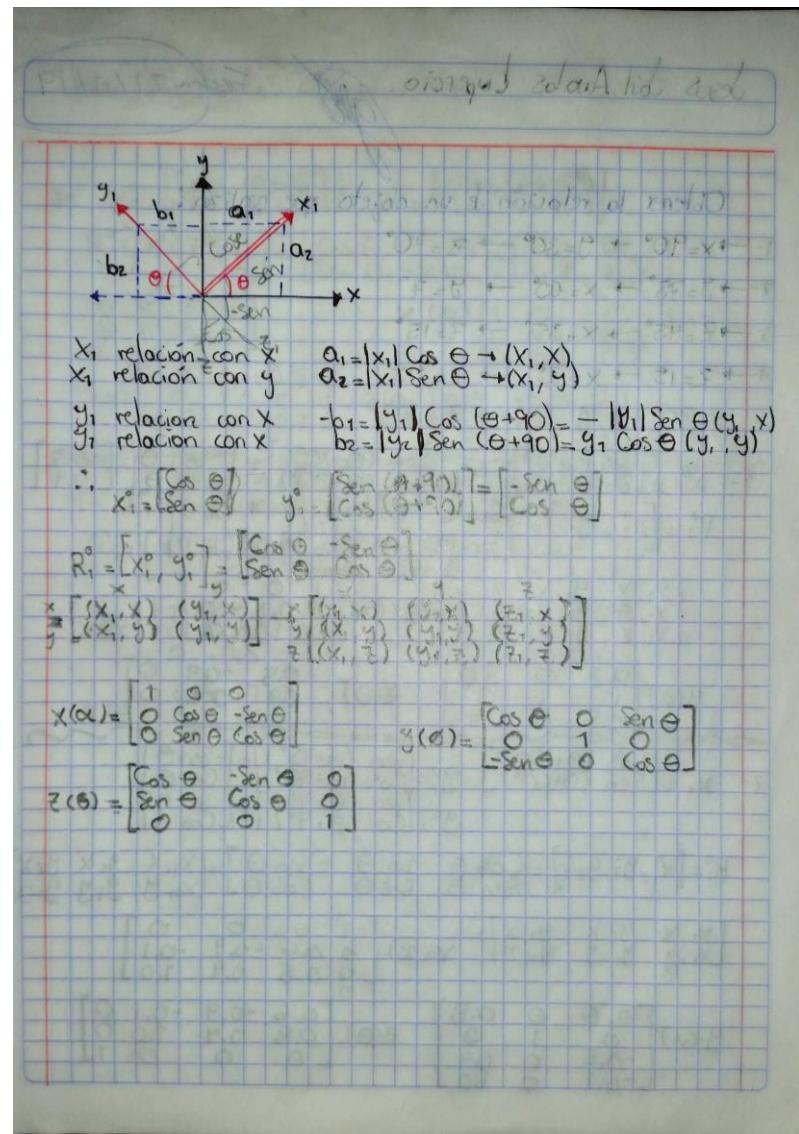
Si se puede utilizar coordenadas para realizar la localización de un vector en un espacio de 3 dimensiones.

Puede utilizarse mediante la dirección de un vector  $\vec{K}$  y un ángulo de giro  $\Theta$ , tal que el vector corresponde al sistema  $Oxyz$ .

## Catenarias.

Pueden ser utilizados como trampas para atrapar mariposas y gran versatilidad computacional (para transferencias bajar con gracia).

carlos.morano@uvanet.cu



Jesús Jair Avalos Lopercio.

Fecha 21/1/19

Obtener la relación de un objeto que realiza:

$$1 \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ \rightarrow z = 70^\circ$$

$$2 \rightarrow y = 70^\circ \rightarrow x = 60^\circ \rightarrow z = 7^\circ$$

$$3 \rightarrow z = 45^\circ \rightarrow x = 35^\circ \rightarrow z = 15^\circ$$

$$4 \rightarrow z = 15^\circ \rightarrow x = 35^\circ \rightarrow z = 45^\circ$$

$$5 \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ \rightarrow z = 70^\circ$$

$$1 - X_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta+90^\circ) \\ \sin(\theta+90^\circ) \end{bmatrix} \quad Y_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta+30^\circ) \\ \sin(\theta+30^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$R_i^o = \begin{bmatrix} x_i, y_i \\ z_i, z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i x & y_i x \\ x_i y & y_i y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_i, x & y_i, x & z_i, x \\ x_i, y & y_i, y & z_i, y \\ x_i, z & y_i, z & z_i, z \end{bmatrix} = x(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(\theta) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 1.0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad z(\theta) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.9 & 0 \\ 0.9 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 - X_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta+60^\circ) \\ \sin(\theta+60^\circ) \end{bmatrix} \quad Y_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta+75^\circ) \\ \sin(\theta+75^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} \sin(\theta+75^\circ) \\ \cos(\theta+75^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_i^o = \begin{bmatrix} x_i, y_i, z_i \\ x_i, y_i, z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i x & y_i x & z_i x \\ x_i y & y_i y & z_i y \\ x_i z & y_i z & z_i z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_i, x & y_i, x & z_i, x \\ x_i, y & y_i, y & z_i, y \\ x_i, z & y_i, z & z_i, z \end{bmatrix} = x(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & -0.9 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$y(\theta) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.4 \\ -0.1 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad z(\theta) = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.9 & -0.1 & 0 \\ 0.8 & 0.4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Jesús Jair Avalos Lopercio

$$3 - X_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta+35^\circ) \\ \sin(\theta+35^\circ) \end{bmatrix} \quad Z_i = \begin{bmatrix} -\cos(\theta+45^\circ) \\ \sin(\theta+45^\circ) \end{bmatrix}$$

$$R_i^o = \begin{bmatrix} x_i, z_i, z_i \\ x_i, z_i, z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i x & z_i x \\ x_i z & z_i z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_i x & z_i x & z_i x \\ x_i z & z_i z & z_i x \end{bmatrix} = x(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$y(\theta) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.8 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \quad z(\theta) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4 - X_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta+35^\circ) \\ \sin(\theta+35^\circ) \end{bmatrix} \quad Z_i = \begin{bmatrix} -\cos(\theta+45^\circ) \\ \sin(\theta+45^\circ) \end{bmatrix}$$

$$R_i^o = \begin{bmatrix} x_i, z_i, z_i \\ x_i, z_i, z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i x & z_i x \\ x_i z & z_i z \end{bmatrix}$$

$$x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & -1.0 \\ 0 & -0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \quad y(\theta) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$z(\theta) = \begin{bmatrix} 0.9 & -1.0 & 0 \\ 0.5 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

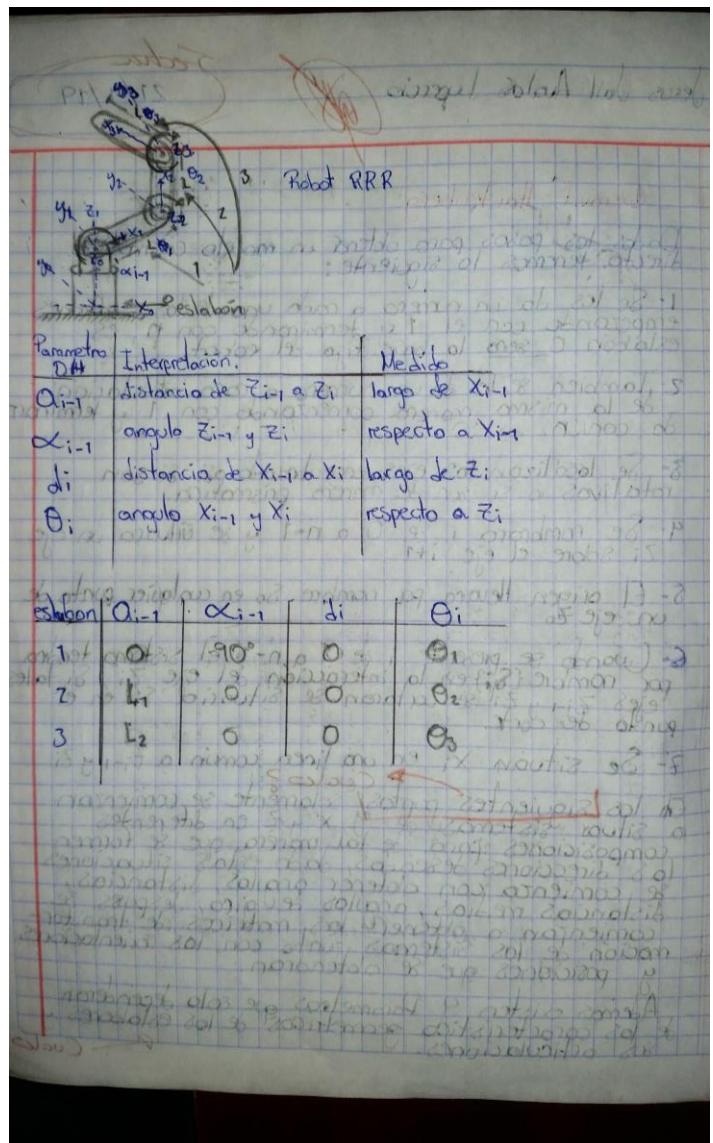
Jesús Jait Ávalos Lepercio

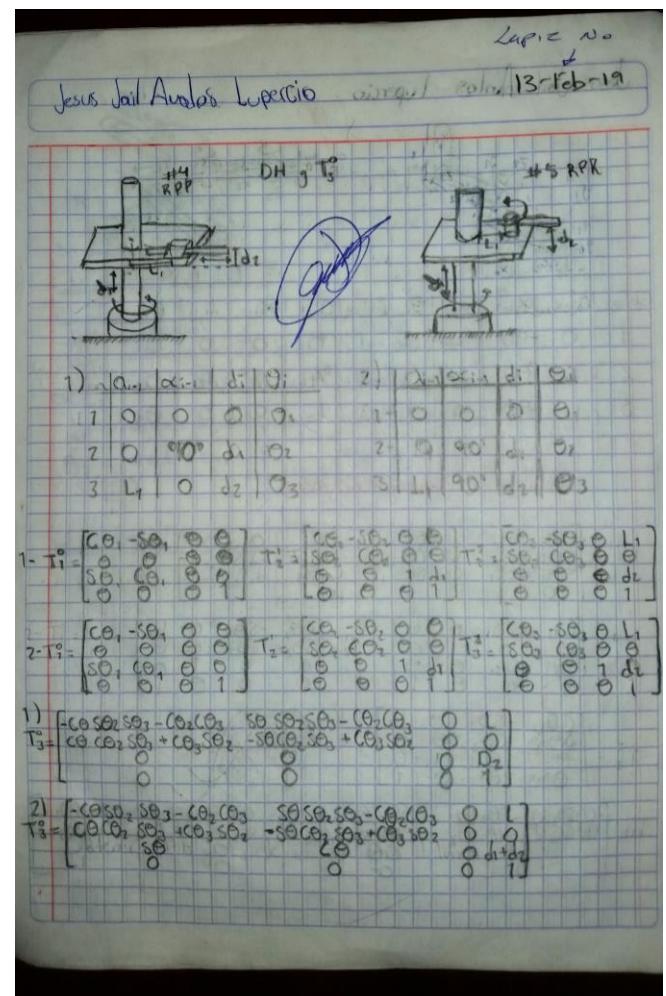
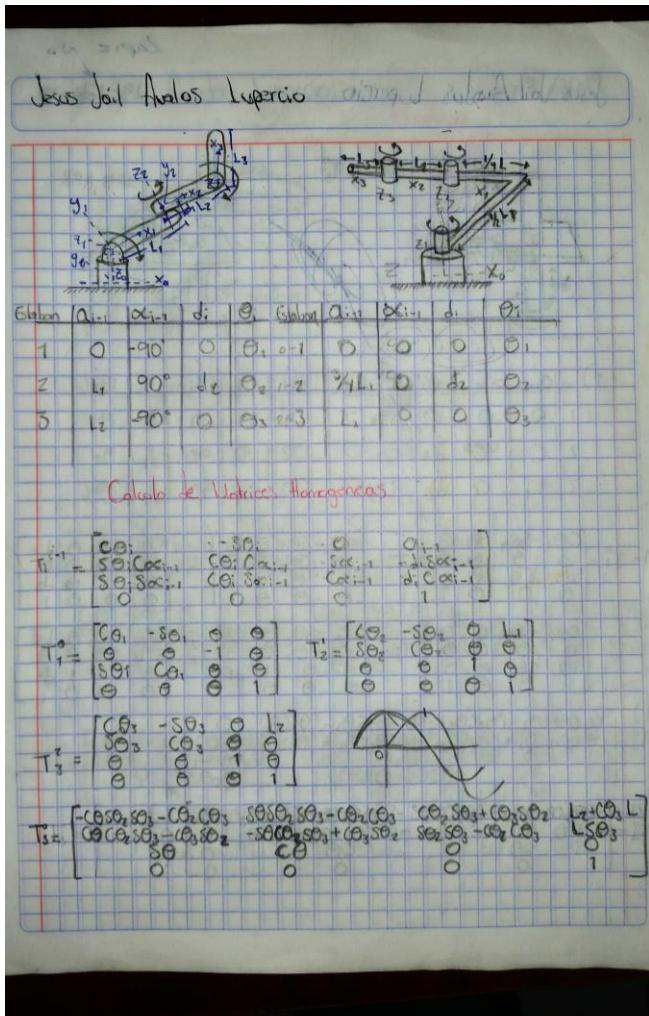
Fecha  
21/1/19

### Dennavit-Hartenberg

Dados los pasos para obtener un modelo cinemático directo, tenemos lo siguiente:

- 1- Se les da un numero a cada uno de los estabones empezando con el 1 y terminando con n, es estabón 0 sera la base fija del robot.
- 2- Tambien se le da un numero a cada articulación de la misma manera comenzando con 1 y terminando con n.
- 3- Se localizan los ejes encontrando pse si son rotativos o si son de marcha prismática.
- 4- Se nombrara  $z_i$  de 0 a n-1 y se situara un eje  $z_i$  sobre el eje  $z_{i+1}$
- 5- El origen llevara su nombre  $x_0$  en cualquier punto de un eje  $z_0$ .
- 6- Cuando se presente  $i$  de 1 a n-1 el sistema tendrá por nombre ( $S_i$ ) en la interacción del eje  $z_i$ , si tales ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  se cortaran se situaria si en el punto de corte.
- 7- Se sitúan  $x_i$  en una linea común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$   
En las siguientes páginas solamente se comienzan a situar sistemas de  $x$  y  $z$  en diferentes composiciones para de tal manera que se formen las direcciones deseadas, dado estas situaciones se comienza con obtener ángulos, distancias, distancias medios, ángulos de giro, despues se comienzan a obtener las matrices de transformación de los sistemas juntas con las orientaciones y posiciones que se obtendrán.  
*Cuadros*
- Ademas existen q. Tablas q. solo dependerán de las características geométricas de los estabones y sus articulaciones.  
*R. Cuadros*





Jesús Saúl Ávalos Lupercio.

11/2/2019

Práctica 1



Eslabón	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$L_1$	$90^\circ$	0	$\theta_2$
3	$L_2$	0	0	$\theta_3$

$$T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & L_1 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & 0 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 - C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - C\theta_2 C\theta_3 & S\theta_3 & L_1 + C\theta_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_3 & L_2 S\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_2 + C\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 C\theta_1 - S\theta_2 S\theta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jesús Saúl Ávalos Lupercio.

18/2/19

### Cinematismo inverso.

Consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados, de modo del usuario computadora, para obtener la n-upla de valores articulares  $q$  que posicionan y orientan su extremo.

A la hora de resolver el problema cinemático inverso, es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada.

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\ k = 1, \dots, n$$

Este tipo de solución presenta, entre otros, las siguientes ventajas:

1- En muchas aplicaciones, el problema cinemático inverso ha de resolverse en tiempo real.

2- La solución del problema cinemático inverso no es única; existiendo diferentes n-uplas  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  que posicionan y orientan el extremo del robot del mismo modo.

Los métodos geométricos permiten obtener normalmente los valores de las primeras variables articulares, que son los que consiguen posicionar el robot, puesto que este establece la relación:

$$\begin{bmatrix} n & o & \theta & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$$

donde los elementos  $t_{ij}$  son función de las coordenadas articulares  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ . Ciertas combinaciones de las 12 ecuaciones planteadas se pueden despejar las n variables articulares  $q_i$  en función de las componentes de los vectores  $n, o, \theta$  y  $p$ .

P113181

2023/1/10 10:41:10

## Resolución del problema cinemático inverso por métodos geométricos

Este procedimiento es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren sólo los primeros grados de libertad, dedicados a posicionar al extremo.

Para tratar el procedimiento a seguir se va a aplicar el método a la resolución del problema cinemático inverso de un robot con 3 D.O.F. de rotación. El dato de partida son las coordenadas ( $P_x, P_y, P_z$ ).

Comúnmente, se ve, este robot posee una estructura planar, quedando este plano definido por el ángulo de la primera articulación  $q_1$ . El valor de  $q_1$  se obtiene inmediatamente como:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

Considerando únicamente los elementos 2 y 3 y teorema del coseno,

$$r^2 = P_x^2 + P_y^2$$

$$r^2 = \phi_2^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos q_3$$

$$\cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

$$\cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

Jesús Jait Fuentes Lupercio

18/2/19

## Resolución del Problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea.

Es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo cinemático inverso de un robot o a partir del conocimiento de su modelo directo.

El primer paso a dar para obtener el problema cinemático inverso es obtener la expresión correspondiente a ese robot. Es decir, obtener la matriz  $T$  que relaciona el sistema de referencia asociado a la base del sistema,  $\{S_b\}$ , asociado a su extremo.

### Desarrollo Cinemático.

No basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que casi siempre es preciso también conseguir que la herramienta que agarrará porta se oferte de una manera determinada. El mejor tipo de desarrollo cinemático saca partido de este hecho, separando ambos problemas: posición y orientación.

### Matriz Jacobiana

En esta relación no se tiene en cuenta las fuerzas o pares que actúan sobre el robot y que pueden originar el movimiento del mismo. Además de las relaciones entre las coordenadas articulares y del extremo, la relación entre sus respectivas derivadas.

Para este y otros fines, es de gran utilidad disponer de la relación entre las velocidades de las coordenadas articulares y las de posición y orientación del extremo del robot.

La matriz Jacobiana permite conocer las velocidades del extremo del robot a partir de los valores de las velocidades articulares necesarias.

17/11/2021

cálculo Jacobiano

### a) Jacobiana Inversa

La relación directa que permite obtener las velocidades del extremo o partir de las velocidades articulares.

En la obtención de la relación inversa pueden emplearse diferentes procedimientos. Supuestamente conocida la relación directa dada por la matriz jacobiana.

Suponiendo que la matriz J sea cuadrada, la inversión simbólica de una matriz  $6 \times 6$ , cuyos elementos son funciones trigonométricas, es de gran complejidad, siendo este procedimiento inviable.

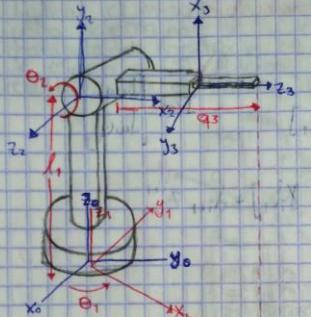
Por ello en las inmediaciones de las configuraciones singulares se pierde alguno de los grados de libertad del robot, siendo imposible que su extremo se mueva en esa determinada dirección cartesianas. Las diferentes configuraciones singulares del robot pueden ser clasificadas como:

- Singularidades en los límites
- Singularidades en el interior

$\cos = 0 \quad \sin = 1$

i	$\alpha_{ii}$	$\alpha_{i-1,i}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	0	$l_1$	$\theta_2$
3	0	90	$q_3$	90

$(\alpha, \gamma, \beta) = (0, 0, 0)$



$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 & 0 \\ \cos \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_3 \sin \theta_2 & -\cos \theta_3 \sin \theta_2 - \sin \theta_3 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \quad \frac{T_0^3}{T_2^3} = T_0^1 T_1^2 \quad \frac{T_0^3}{T_2^2 T_3^1} = T_0^1 \Rightarrow (T_0^3)^{-1} (T_1^2)^{-1} (T_0^1)^{-1} = T_0^2$$

## Método de propagación de velocidades.

Rotacional.

$$\dot{\omega}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \dot{\omega}_i^i + \dot{\theta}_{i+1}^{i+1}$$

$$V_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} V_i^i + R_i^{i+1} [\dot{\omega}_i^i \times r_{i+1}^i]$$

$$I(q) = \begin{bmatrix} J_V(q) \\ J_W(q) \end{bmatrix}$$

Prismática.

$$V_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} V_i^i + R_i^{i+1} [\dot{\omega}_i^i \times \gamma_{i+1}^i] + d_{i+1} \dot{z}_{i+1}^{i+1}$$

$$\dot{w}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \dot{w}_i^i$$

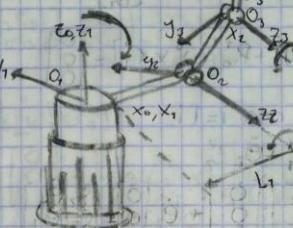
$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & f \\ a_x & a_y & a_z & -a_f \\ a_x & a_y & a_z & -a_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & s_0 & -q_2 \\ 0 & -s_0 & c_0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & l-q_1 \\ -c_0 & 0 & s_0 & -q_3 \\ s_0 & 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicar el método de propagación de velocidades para determinar la velocidad angular y lineal del manipulador mostrado en la figura para el sistema de referencia (3). Además expresar los mismos resultados en el sistema de referencia (0).



En el análisis realizado en la unidad de cinemática directa, se obtuvieron los parámetros DH mostrados.

i	a_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Empleando los valores DH del manipulador se obtienen los siguientes matrices de transformación homogénea:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & L_1 C_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & C_1 & L_1 S_1 \\ C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 S_3 & -C_1 S_2 S_3 & S_1 & L_1 C_1 + L_2 S_1 C_2 \\ S_1 C_2 S_3 & -S_1 S_2 S_3 & -C_1 & L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2 \\ C_2 S_3 & C_2 S_3 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se cuenta con toda la información necesaria para aplicar el método de propagación de velocidad des. Para ello, comenzando con  $i=0$ , se obtiene:

$$\dot{w}_1 = R'_0 \dot{w}_0 + \dot{\theta}_1 z_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1^1 = R'_0 V_0^0 + R'_0 [\dot{w}_0 \times r_1^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se prosigue con  $i=1$ :

$$\dot{w}_2^1 = R_1^2 \dot{w}_1^1 + \dot{\theta}_2 z_2^1$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2^1 = R_1^2 V_1^1 + R_1^2 [\dot{w}_1^1 \times r_2^1]$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notese que el cálculo anterior se hizo uso de la matriz antisimétrica para obtener el producto cruzado, es decir, se empleó  $S(w_1) r_2^1 = w_1 \times r_2^1$ . Finalmente, para  $i=2$ :

$$\dot{w}_3^2 = R_2^3 \dot{w}_2^2 + \dot{\theta}_3 z_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 S_3 & C_3 C_3 & 0 \\ -S_3 C_3 & -S_3 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_3^2 = R_2^3 V_2^1 + R_2^3 [w_2^1 \times r_3^2]$$

$$= \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 S_3 & C_3 C_3 & 0 \\ -S_3 C_3 & -S_3 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \dot{\theta}_1 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 S_3 & C_3 C_3 & 0 \\ -S_3 C_3 & -S_3 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 S_3 & L_2 \dot{\theta}_2 C_3 & 0 \\ -L_2 \dot{\theta}_2 C_3 & L_2 \dot{\theta}_2 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 + L_2 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 S_3 \\ -L_2 \dot{\theta}_2 C_3 \\ L_1 + L_2 C_2 \end{bmatrix}$$

Para expresar los vectores anteriores en el sistema de referencia  $\{0\}$  se utiliza la matriz de rotación  $R_3$ , con lo que se obtiene:

$$V_3^0 = R_3^0 V_3^2 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 S_{23} & -C_1 \\ S_{23} & C_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 S_3 \\ -L_2 \dot{\theta}_2 C_3 \\ L_1 + L_2 C_2 \end{bmatrix}$$

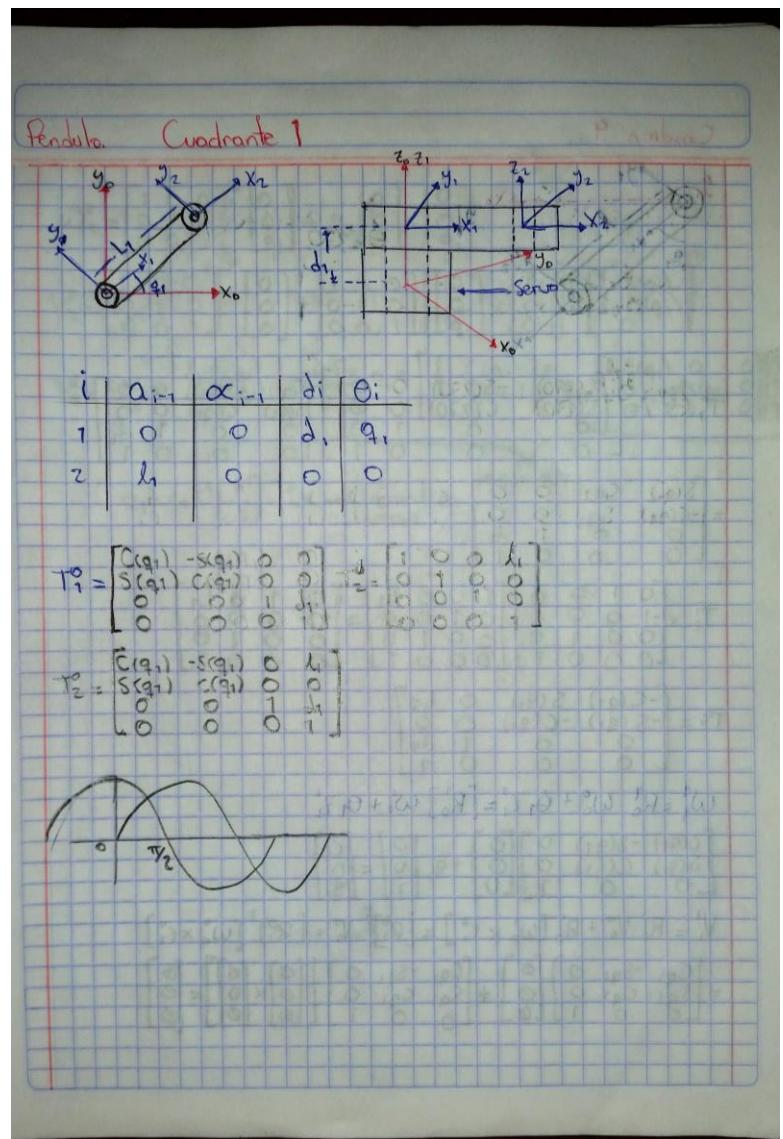
$$= \begin{bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 C_1 [S_3 C_{23} - C_3 S_{23}] - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_1 [L_2 C_3 - S_2 C_{23}] + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_3 S_{23} + L_2 \dot{\theta}_2 C_3 C_{23} \end{bmatrix}$$

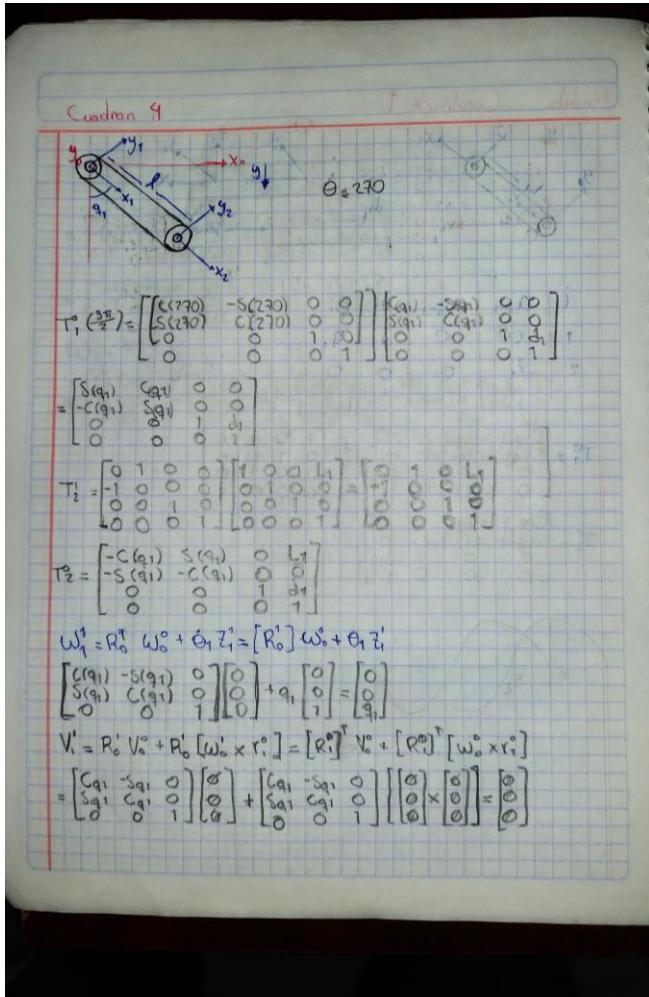
$$= \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ -L_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_{23} + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 S_3 S_{23} + L_2 \dot{\theta}_2 C_3 C_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -L_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 - \dot{\theta}_1 [L_1 S_1 + L_2 S_1 C_2] \\ -L_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_{23} + \dot{\theta}_1 [L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2] \\ L_2 \dot{\theta}_2 C_3 C_{23} \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 = P_3^* \omega_3$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 S_{23} \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & 0 & \dot{\theta}_1 \\ S_{23} & C_{23} & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 S_1 + \dot{\theta}_3 S_1 \\ -\dot{\theta}_2 C_1 + \dot{\theta}_3 C_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$



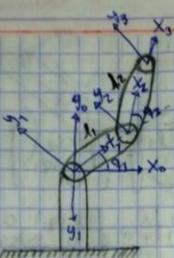


$$\omega_2^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_0^i = V_2^i = \begin{bmatrix} l_1 S(q_1) \\ l_1 C(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{- \frac{\partial r_2^i}{\partial q_1} q_1}_{\text{Jacobiano}} \begin{bmatrix} l_1 C(q_1) \\ l_1 S(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} y q_1 = \begin{bmatrix} l_1 S(q_1) & 0 \\ l_1 C(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

$q_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{x}{y} \right] = \text{Inversa Circunferencia}$



i	a <sub>i-1</sub>	α <sub>i-1</sub>	d <sub>i</sub>	θ <sub>i</sub>
1	0	0	0	q <sub>1</sub>
2	l <sub>1</sub>	0	0	q <sub>2</sub>
3	l <sub>2</sub>	0	0	0

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_1 \cos q_2 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_1 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \cos(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagram of the 2-GDL robot arm in a coordinate system (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>). The end effector is at position (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) relative to the base.

Jacobián del Robot de 2 GDL

$$J(q) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1+q_2) \\ l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1+q_2) \\ p_1 + l_2 \end{bmatrix}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1+q_2) & -l_2 \sin(q_1+q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) & l_2 \cos(q_1+q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1+q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) \\ p_1 + l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \sin(q_1+q_2) \\ l_2 \cos(q_1+q_2) \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_1+q_2)}{l_1 \cos(q_1+q_2)}\right)$$

Teniendo los ángulos q<sub>1</sub>+q<sub>2</sub> dentro del triángulo y la hipotenusa  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  se cumple la singularidad q<sub>1</sub>+q<sub>2</sub>=atan(x<sub>0</sub>/y<sub>0</sub>) entonces:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \theta = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

∴ La cinemática del robot de 2 GDL

$$q_2 = \arctan\left(\frac{y_0 + l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)$$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

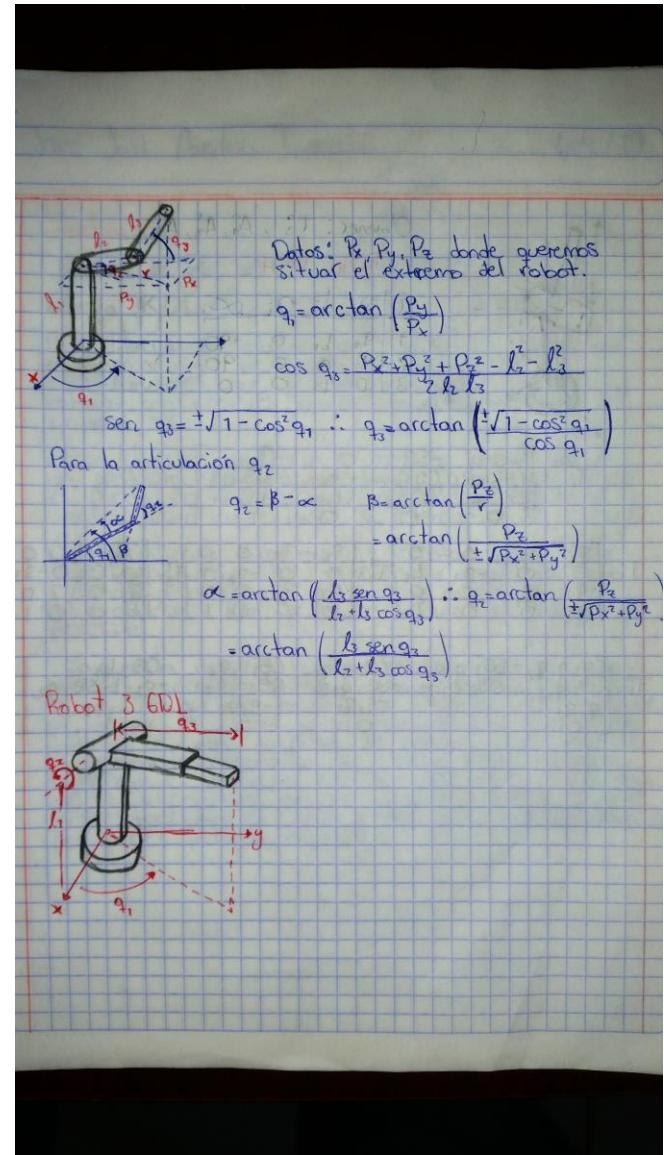
### Práctica 2.

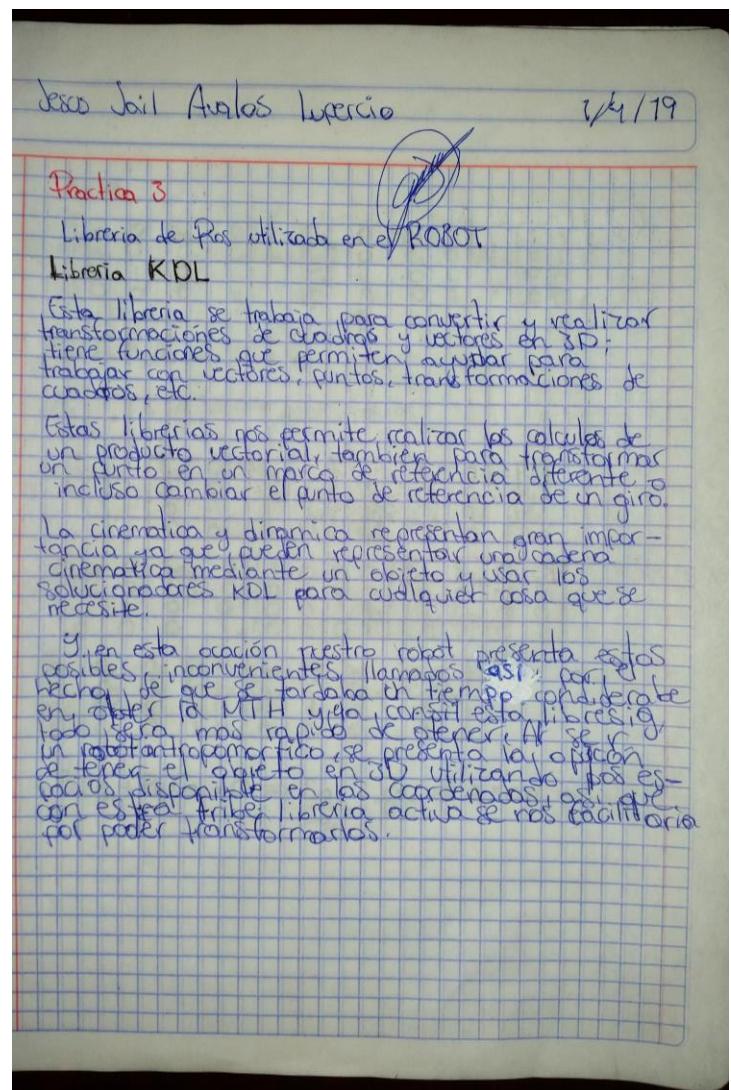
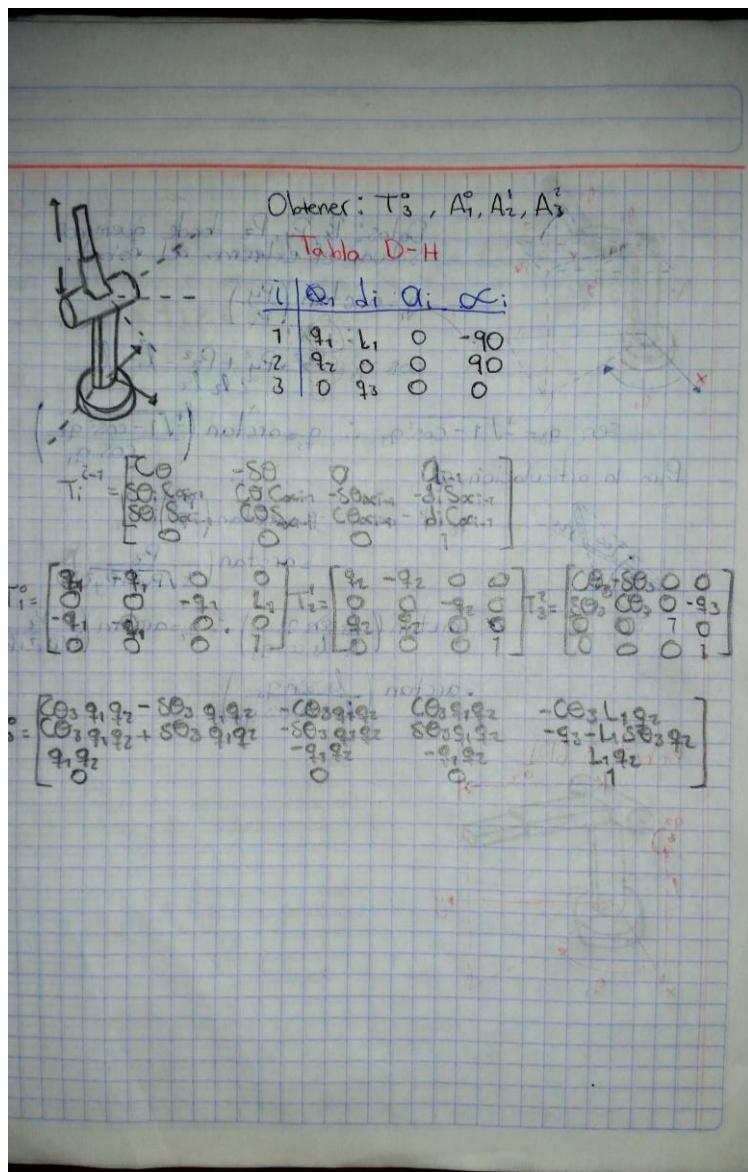
Obtener  $q_1$  y  $q_2$  del robot de 2 GDL con  $l_1=30$   $l_2=20$  con punto en el origen en  $(4, 4)$  para los puntos.

$$z \cdot (z-7)(8-z)(-4-7)$$

### Práctica 3

Investigar y explicar las librerías de ROS en su Robot.





MTH

$$A_1^o = \begin{bmatrix} C_{q_1} & 0 & S_{q_1} & 0 \\ S_{q_1} & 0 & -C_{q_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2^o = \begin{bmatrix} C_{q_2} & 0 & -S_{q_2} & 0 \\ S_{q_2} & 0 & C_{q_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = A_1^o A_2^o A_3^o \therefore \alpha^o = \frac{1}{\alpha}$$

$$(A_1^o)^{-1} T_3 = {}^o A_3^o A \rightarrow \text{despejamos } q_3$$

$$({}^o A)^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & 0 & -S_{q_1} & 0 \\ S_{q_1} & 0 & C_{q_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & p_x \\ n_y & 0 & 0 & p_y \\ n_z & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{q_2} & 0 & S_{q_2} & 0 \\ S_{q_2} & 0 & -C_{q_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{q_1} & S_{q_1} & 0 & 0 \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & p_x \\ n_y & 0 & 0 & p_y \\ n_z & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q_2} & 0 & S_{q_2} & S_{q_2} q_3 \\ S_{q_2} & 0 & -C_{q_2} & -C_{q_2} C_{q_3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-P_x S_{q_1} + P_y C_{q_1} = 0 \Rightarrow S_{q_1} = \frac{P_y}{P_x} \Rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{P_x}{P_y}\right)$$

HII  
 $(A_2^o)^{-1} (A_1^o)^{-1} {}^o T_3 = {}^o A \rightarrow \text{despejamos } q_1, q_2, q_3$

$$(A_2^o)^{-1} ({}^o A)^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} C_{q_2} & S_{q_2} & 0 & 0 \\ S_{q_2} & C_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{q_1} & S_{q_1} & 0 & 0 \\ S_{q_1} & C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & p_x \\ n_y & 0 & 0 & p_y \\ n_z & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{q_2} C_{q_1} & S_{q_2} S_{q_1} & S_{q_1} & -L_1 C_{q_2} \\ -S_{q_2} C_{q_1} & C_{q_2} S_{q_1} & C_{q_1} & L_1 S_{q_2} \\ -S_{q_2}^2 C_{q_1} & -S_{q_2}^2 S_{q_1} & C_{q_2} & -L_1 C_{q_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & p_x \\ n_y & 0 & 0 & p_y \\ n_z & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Práctica 2

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$$

$$m = \frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \times l_1 \times l_2}$$

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \times \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$

Para el primer caso tenemos las puntos ubicados en las coordenadas P(2,7).

Para este caso m toma el valor de:

$$m = \frac{2^2 + 7^2 - 30^2 - 20^2}{2 \times 20 \times 30} = \frac{-1144}{1200} = -0.953333333$$

Se empieza por obtener  $q_2$ :

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-(-0.953333333)^2}}{-0.953333333}\right)$$

Como en este caso particular se da un raíz negativa no se puede obtener el valor de  $q_2$  por lo que se puede interpretar que no se pueden colocar las puntos del robot en esa coordenada.

Para el segundo caso tenemos las puntos P(8,-7)

$$m = \frac{8^2 + (-7)^2 - 30^2 - 20^2}{2 \times 20 \times 30} = \frac{-1187}{1200} = -0.989166667$$

Con el valor de m

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{-0.989166667^2}}{-0.989166667}\right)$$

se utilizará el signo positivo

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-0.989166667^2}}{-0.989166667}\right)$$

$$q_2 = \arctan(-0.1484045307)$$

El valor de  $q_2$  es:

$$q_2 = -0.1484045307$$

Lo siguiente es calcular  $q_1$ :

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{20 \times \sin(-0.1484045307)}{20 + 20 \cos(-0.1484045307)}\right)$$

$$q_1 = -47.18572573 - (-3.377069245)$$

$$q_1 = -47.31085693$$

En el último caso se tienen los puntos P(4,-7)

$$m = \frac{(4)^2 + (-7)^2 - 30^2 - 20^2}{2 \times 20 \times 30} = \frac{-728}{1200} = -0.607333333$$

Se obtiene  $q_2$ :

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{-0.607333333^2}}{-0.607333333}\right)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-0.607333333^2}}{-0.607333333}\right)$$

Como en este caso particular tambien se da una raíz negativa no se puede obtener el valor de  $q_2$  por lo que se puede interpretar que no se pueden colocar las puntos del robot en esa coordenada.

**REGISTRO**

**UPZMG**  
ACADEMIA DE ELECTRÓNICA

NOMBRE ALUMNO	Jesus Soil Aviles Luperio.			
ASIGNATURA	Cinemática de	NOMBRE PROFESOR	Carlos Enrique Moran Garabito	
RECIBÍ INFORMACIÓN AL INICIO DEL CUATRIMESTRE SOBRE EVALUACIÓN Y				
REGLAS DE CLASE				
FIRMA DEL ALUMNO				
No. PRACTICA	PRACTICA	FECHA SOLICITADA	FECHA DE ENTREGA	FIRMA DE ENTREGA
1	Otención D-H y TH Antropometria.	11/2/2019	18/2/19	
2	Otener gggz del Robot de ZGDZ	25/3/19	1/4/19	
3	Investigar y explicar las libreria ROS	25/3/19	1/4/19	
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
AVANCE	PROYECTO	SEMANA DE ENTREGA	ENTREGA	
1/Anual				
1/Robot				

**UPZMG**  
Continuación

No DE TAREA	TAREA	TEC	SOLICITAD	FECHA DE ENTREGA	FIRMA DE ENTREGA
1	Introducción a la robótica	7/1/19	9/1/19		
2	Herramientas matemáticas para la localización especial	9/1/19	14/1/19		
3	Matrices de rotación	16/1/19	21/1/19		
4	D-H	21/1/19	23/1/19		
5	Parametros D-H y TH Matriz 4x5	11/2/19	13/2/19		
6	Cinemática inversa y hacer la otra inversa	13/2/19	18/2/19		
7					
8					
9					

10 min. Tolerancia  
Vocabulario adecuado  
Las prácticas y Tareas no se firman incompletas, No se reciben tareas fuera de fecha.  
-10% por semana de retraso en prácticas  
30%: Funcionalidad - el circuito hace lo que queríamos que hiciera, y han hecho lo que pido en el trabajo  
15%: Código con anotaciones - hay que entregar código bien documentado  
10%: Eficiencia - el código no utiliza más recursos del Micro de lo que es necesario  
10%: Fiabilidad - el código está escrito en manera fiable  
10%: Modularidad - el código está escrito en manera modular  
10%: Legibilidad - el código está escrito legiblemente y limpiamente, y es claro cual hardware sintetiza  
15%: Presentación oral en la clase (todo el grupo debe estar presente y participar!)  
+15% - Bono de creatividad - Hagan cosas originales más allá de lo requerido y reciban hasta 15% bono!  
-10% - Por semana en caso de no entregar reporte, se debe entregar una semana después de haber finalizado la tarea o la práctica,  
En prácticas y Tareas, si no está algún integrante cuando se realicen las firmas, no se realizará la firma en forma posterior  
No está permitido en clase:  
Short. Gorras. Prendas desgarradas. Chanclas. Aretes (solo hombres). Celulares. Comer