# 4 Algebraické výrazy, rovnice

Tahle kapitola se bude věnovat **algebraickým výrazům** a **rovnicím**. Pro úspěšné řešení těchto úloh je třeba znát pár vzorců a pravidel. Pojďme si je ukázat.

## 4.1 Číselné výrazy

**Číselný výraz** je klasický matematický příklad tak, jak ho známe, tedy např. $8 + \sqrt{9} + 3$. U číselných výrazů je třeba dbát na **pořadí operací**, kde jako první odstraníme **závorky** (spočítáme to, co je v nich) a pokud máme více závorek v sobě počítáme první tu vnitřní, následně spočítáme **mocniny a odmocniny**, následně spočítáme operace **násobení a dělení** a nakonec **sčítáme či odčítáme**. Při nedodržení takového pořadí dojdeme ke špatným výsledkům.

## 4.2 Lineární rovnice

**Lineární rovnice** jsou vlastně dva výrazy, které mohou obsahovat **proměnnou** a mezi kterými je znak **rovná se** (tedy oba výrazy mají stejnou hodnotu po dosazení čísla za proměnnou), např. $5 + 4x = 13$. Pro vyřešení lineární rovnice chceme tedy najít takové číslo, které když dosadíme za proměnnou, tak bude platit rovnost. Těmto číslům řešení říkáme **kořeny** nebo **řešení rovnice**.

Lineární rovnice mají hezkou vlastnost v tom, že to, jestli jsme počítali správně či špatně, lze jednoduše ověřit **zkouškou**, kdy do původní rovnice dosadíme do **levé strany** náš výsledek, taktéž to **pravé strany** a pokud je náš výsledek správný, tak se obě vyčíslené strany **rovnají**.

### 4.2.1 Ekvivalentní úpravy rovnic

To jsou úpravy, při kterých se **nemění** řešení rovnice. Máme tři základní ekvivalentní úpravy a to:

1. **Přičtení či odečtení čísla či mnohočlenu** (více čísel spojených operátory) k oběma stranám rovnice. Tedy např. k $8x + 3 = 26$ přičteme 4 a dostaneme $8x + 7 = 30$
2. **Vynásobení či vydělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem**. Tedy např. $3x = 9$ vynásobíme číslem 3 a tedy dostaneme $9x = 27$
3. **Vyměnění pravé a levé strany**. Tedy např. z $5x = 20$ můžeme udělat $20 = 5x$

### 4.2.2 Popis postupu řešení lineárních rovnic

Postup řešení můžeme rozdělit na několik kroků a to typicky na:

1. **Odstranění zlomků**
2. **Odstranění závorek**
3. **Členy s neznámou převedeme na jednu stranu a ostatní členy na stranu druhou**
4. **Vypočteme neznámou**
5. Pro ověření je ideální provést i **zkoušku**, často bude i v zadání abyste ji provedli

## 4.3 Algebraické výrazy

**Algebraické výrazy** neboli **výrazy s proměnnou** jsou jednoduše výrazy, které obsahují kromě čísel a operací také nějaké písmena, říkáme jim **proměnné**. Tyhle výrazy lze spočítat tak, že **dosadíme** za jednotlivé proměnné a spočítáme výsledek.

## 4.4 Mnohočleny

Pro objasnění **mnohočlenů** si nejdřív řekněme, co to je **jednočlen**. Je to **číslo**, **proměnná**, **součin čísel a proměnných** či **dvou proměnných**. Tedy např. 4 je jednočlen stejně jako $-8x$ nebo $xy$. **Mnohočlen** je pak **součet** těchto jednočlenů, tedy z uvedených jednočlenů můžeme poskládat mnohočlen $4 - 8x + xy$, jiný jednočlen může vypadat následovně $2x + 8 - 13$. Oba tyto mnohočleny jsou **trojčleny**, obdobně máme i **dvojčleny** či **čtyřčleny** atd.

### 4.4.1 Sčítání a odčítání mnohočlenů

**Sčítat a odčítat mnohočleny** můžeme tak, že z nich odstraníme závorky a sečteme či odečteme koeficienty členů, které mají **stejné proměnné i se stejnými mocninami**. Tedy např. dvojčleny $2x^2 - 3$ a $5x^2 + 7$ sečteme na $7x^2 + 4$.

### 4.4.2 Násobení mnohočlenů

Násobení mnohočlenu provádíme podle toho, jestli jej násobíme jednočlenem nebo dvojčlenem, tedy:

1. Při násobení mnohočlenu jednočlenem **vynásobíme jednočlenem všechny členy mnohočlenu.** Tedy např. násobení $(5x + 4) \cdot 2x$ bude $4x^2 + 8x$
2. Při násobení mnohočlenu mnohočlenem vynásobíme **každý člen prvního mnohočlenu s každým členem druhého mnohočlen**u a následně co jde sečteme. Tedy např. $(2x - 3) \cdot (4 - x)$ bude $8x - 4x^2 - 12 + 3x$ a když sečteme co jde tak dostaneme $11x - 4x^2 - 12$.

Všimněte si, že je zvyklostí psát mnohočleny tak, že zleva píšeme první ty členy, které mají **vyšší mocniny proměnné.**

### 4.4.3 Násobení pomocí vzorců

Teď už se dostáváme k vzorcům, které je dobré znát:

1. Druhá mocnina součtu: $\boldsymbol{(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
2. Druhá mocnina rozdílu: $\boldsymbol{(a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
3. Součin součtu a rozdílu: $\boldsymbol{(a + b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2}$

### 4.4.4 Rozklad mnohočlenů na součin

**Rozklad mnohočlenů** na součin můžeme dělat **pomocí vzorců** uvedených výše nebo **vytýkáním před závorku**, tedy např. $8x + 4$ by bylo jako součin $4 \cdot (2x + 1)$.

## 4.5 Příklady k procvičení

1. Upravte výrazy:

   (a) $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x}{4} - 1 =$

   (b) $\dfrac{m-3}{3} + 2 - \dfrac{2m}{2} =$

(c) $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x}{4} - 1 =$

(d) $4 \cdot (3x) - 5 \cdot (2 \cdot x \cdot x) =$

(e) $(3x-5)^2 =$

(f) $\left(\dfrac{3}{2}x + 4\right)^2 =$

(g) $2(x-3) - (2x+2) - 5(-x-5) =$

2. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

(a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = x - 1$

(b) $x = -\dfrac{x}{3}$

(c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{2} = 6 + x$

(d) $x = 4 + 0.6x$

(e) $-y + 4 = \dfrac{9-2y}{2}$

(f) $\frac{1}{2}(x+3)+\frac{1}{4}(3x+2)=\frac{x}{4}$

(g) $(x+1)^2-(x-1)^2=x-3$

(h) $3y-(2-3y)=4+(y-1)$

(i) $\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{3}(x-3)=\frac{1}{4}(x+8)$

(j) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y=\frac{y}{4}\cdot\frac{2}{5}$

(k) $\frac{8+3x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{13}{12}x-1\frac{1}{6}$

3. Rozložte na součin:

   (a) $4b^2 + 12ab + 9b^2 =$

   (b) $0.09c^2 + 6c + 100^2 =$

   (c) $16d^2 + 48de + 36e^2 =$

   (d) $(x+1)^2 + 2(x+1)^2 =$

   (e) $2(x-1)^2 - 4(1-x)^2 =$

4. Upravte:

   (a) $3x(4-x) + 3(x-2)^2 =$

   (b) $(x-2y)^2 - 2(x+y) =$

   (c) $(b-2) + b - (b-2) =$

   (d) $(3x-2y)^2 =$

   (e) $(2-3) \cdot (2c-1) - (2c-c) \cdot (-d) =$

   (f) $[x - 2(1-x)]^2 =$

5. Rozhodněte, zda pro výraz $z = (x+y)^2 - (2x-y)^2$ platí:

   (a) Hodnota výrazu z pro $x = 1$ a $y = -2$ je rovna -16.

   (b) Hodnota výrazu z pro $x = -1$ a $y = 2$ je kladná.

   (c) Hodnota výrazu z pro $x = 0$ a $y = -2$ je rovna nule.

6. Dvě třídy o různém počtu žáků pojedou na exkurzi. Při objednání jednoho většího autobusu pro 50 cestujících by 3 místa chyběla. Pokud by každá třída jela sama v menším autobusu pro 33 cestujících, v prvním autobusu bude 8 volných míst. Místa pro učitele nepočítáme. Vypočítejte počet volných míst v druhém autobuse.

7. Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

   (a) $\frac{2}{5}x - 3 \cdot \left(\frac{1}{10x} - 4\right) = 8 - 0.4x$

   (b) $(0.36x - 0.6) \div 0.5 = (0.6x - 0.36) \cdot 2$