1 Celá čísla, zlomky, mocniny a odmocniny

V této kapitole si projdeme základní matematické operace s celými čísli a následně i se zlomky. Projdeme si také, jak se pracuje s mocninami a odmocninami.

1.1 Operace s celými čísli

Celá čísla jsou množina čísel obsahující **množinu přirozená čísla**, k těmto číslům **čísla opačné** (čísla záporná) a **nulu**. **Pozor**: při operacích s čísli dbejte na pořadí operací, tedy že první zpracujeme **závorky** a následně **násobení a dělení** má **přednost** před **sčítáním a odčítáním**.

1.1.1 Sčítání celých čísel

Číslům, která sčítáme říkáme **sčítance**. Výsledkem sčítání je **součet** a ten může být budťo **kladné číslo** (číslo větší než 0), **záporné číslo** (číslo menší než 0) a nebo **nula**.

Sčítání čísel je **komutativní**, což znamená, že **nezáleží** na pořadí sčítanců:

$$a + b = b + a$$

Sčítání čísel je i **asociativní**, což znamená, že **nezáleží** jak sčítance uzávorkujeme:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.1.2 Odčítání celých čísel

Číslům, která odečítáme říkáme **menšenec** (první číslo) a **menšitel** (druhé číslo), výsledkem odečítání je **rozdíl** těchto dvou čísel. Rozdíl může být budťo **kladné číslo**, **záporné číslo** nebo **nula**.

U odečítání **záleží** na pořadí čísel:

$$a - b \neq b - a$$

1.1.3 Násobení celých čísel

Číslům, která násobíme říkáme **činitelé**. Výsledkem násobení je **součin**.

Výsledky násobení dvou celých čísel:

první činitel	druhý činitel	součin
kladný	kladný	kladný
kladný	záporný	záporný
záporný	kladný	záporný
záporný	záporný	kladný
0	cokoli	0
cokoli	0	0
0	0	0

Násobení dvou čísel je **komutativní**, tedy **nezáleží** na pořadí činitelů (násobených čísel).

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Násobení dvou čísel je **asociativní**, tedy **nezáleží** jak činitele uzávorkujeme.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Násobení dvou čísel je **distributivní vzhledem ke sčítání**, tedy můžeme **roznásobit** závorku.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

1.1.4 Dělení celých čísel

Čislům, která dělíme říkáme **dělenec** (první číslo) a **dělitel** (druhé číslo). Výsledkem dělení je **podíl**. Při dělení **záleží** na pořadí čísel:

$$a \div b \neq b \div a$$

Výsledky dělení dvou celých čísel:

dělenec	dělitel	podíl
kladný	kladný	kladný
kladný	záporný	záporný
záporný	kladný	záporný
záporný	záporný	kladný
0	cokoli	0
cokoli	0	nelze

1.2 Zlomky

Zlomek je jinak zapsané dělení: $a \div b = \frac{a}{b}$. Každý zlomek má **čitatele** (horní číslo), **zlomkovou čáru** a **jmenovatele** (spodní číslo). **Pozor**: Jmenovatel zlomku nemůže být nula, jelikož nulou nelze dělit. Pojmem **zlomek v základním tvaru** máme na mysli zlomek, kdy jeho čitatel a jmenovatel jsou **nesoudělná čísla**, tedy jejich nejvyšší společný dělitel je číslo 1. Obecně **výsledky** příkladů se zlomky chceme převést na zlomek v základním tvaru.

1.2.1 Sčítání a odčítání zlomků

Zlomky sčítáme a odečítáme tak, že je nejdříve převedeme na **společného jmenovatele** a následně sečteme nebo odečteme **čitatele**: $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{10+6}{15} = \frac{16}{15}$.

1.2.2 Násobení a dělení zlomků

Pro určení znaménka násobení nebo dělení zlomků **platí stejná pravidla** jako při násobení celých čísel **Pozor**: Častou chybou u násobení zlomků je ignorování znaménka, hlavně mínuska, před jedním zlomkem. Zlomky **dělíme** tak, že násobíme zlomkem **převráceným** (tedy zlomkem, kde prohodíme čitatele a jemnovatele). Zlomky **násobíme** tak, že vynásobíme **mezi sebou** čitatele a jmenovatele. Při násobení můžeme **krátit** a to **pod sebou** či do **kříže**.

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

1.2.3 Převody

Převod **zlomku** na **desetinné číslo** provádíme buďto přímo **dělením** čitatele jmenovatelem dokud zbytek po dělení není nula a nebo se cifry nezačnou opakovat: $\frac{13}{5} \to 13 \div 5 = 2.6$, nebo **převedeme** zlomek na **desetinný zlomek** (což je zlomek, který má ve jmenovateli mocniny desítky) a jednoduše převedeme na desetinné číslo: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0.6$.

Převod **desetinného čísla** na **zlomek** provedeme jednoduše převedením na **desetinný zlomek**: $0.7 = \frac{7}{10}$ nebo třeba $0.123 = \frac{123}{1000}$.

Porovnávání zlomků provádíme převedením na společného jmenovatele, pak je větší zlomek ten, co má většího čitatele: $\frac{2}{3}?\frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12}?\frac{9}{12} \rightarrow \frac{8}{12} < \frac{9}{12} \rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Smíšené číslo nebo i **smíšený zlomek** je označení pro číslo zapsané pomocí **celého čísla** a zlomku **menšího** než 1:

$$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$$
$$\frac{16}{3} = \frac{15 + 1}{3} = 5\frac{1}{3}$$

1.3 Mocniny a odmocniny

1.3.1 Druhá mocnina

Druhá mocnina čísla a je číslo $a \cdot a = a^2$. Číslu a říkáme **základ mocniny** a dvojka je **mocnitel** (jinak exponent).

Druhá mocnina je vždy nezáporné číslo. **Pozor**, poslední příklad vyjde záporně (-9), protože mínus je před celou mocninou:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$
$$0^2 = 0$$
$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$$

Druhé mocniny čísel 1-20:

$1^2 = 1$	$5^2 = 25$	$9^2 = 81$	$13^2 = 169$	$17^2 = 289$
$2^2 = 4$	$6^2 = 36$	$10^2 = 100$	$14^2 = 196$	$18^2 = 324$
$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$11^2 = 121$	$15^2 = 225$	$19^2 = 361$
$4^2 = 16$	$8^2 = 64$	$12^2 = 144$	$16^2 = 256$	$20^2 = 400$

Druhá mocnina čísla **končící nulou** má **dvojnásobný počet nul** než dané mocněné číslo:

$$10^2 = 100$$
$$400^2 = 160\,000$$
$$5000^2 = 25\,000\,000$$

Druhá mocnina **desetinného čísla** má dvojnásobný počet desetinných míst než dané mocněné číslo:

$$0.1^2 = 0.01$$
$$0.001^2 = 0.0001$$
$$0.008^2 = 0.000\,064$$

Druhou mocninu **zlomku** získáme tak, že **umocníme čitatele i jmenovatele zvlášť**:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Druhou mocninu součinu můžeme "rozložit" na: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

1.3.2 Mocniny s přirozeným mocnitelem

Přirozený mocnitel je **kladné celé číslo**, můžeme jít tedy dále než jen k druhé mocnině. Často používání jsou ale jen malí mocnitelé, např. čísla 3, 4, ...

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}}$$

1.3.3 Druhá odmocnina

Druhá odmocnina nezáporného čísla a je takové nezáporné číslo b, které splňuje: $b^2 = a$, tedy $\sqrt{a} = b^2$. Druhá odmocnina ze záporného čísla **neexistuje** (v množině reálných čísel). Často si pamatujeme mocniny nějakých čísel, když tuhle mocninu někde vidíme tak si rovnou uvědomíme i základ této mocniny a tedy víme i odmocninu.

Druhá odmocnina čísla **končíci nulami** má **poloviční** počet nul než dané číslo:

$$\sqrt{100} = 10$$
$$\sqrt{1\,000\,000} = 1000$$
$$\sqrt{9\,000\,000} = 3000$$

Druhá odmocnina **desetinného čísla** má **poloviční** počet desetinných míst než dané číslo:

$$\sqrt{0.01} = 0.1$$
$$\sqrt{0.0001} = 0.01$$
$$\sqrt{0.0009} = 0.03$$

Druhou odmocninu ze **zlomku** získáme odmocněním čitatele i jmenovatele zvlášť:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Druhou odmocninu ze **součinu** můžeme "rozložit" na:$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

1.3.4 Mocniny a odmocniny v geometrii

Pythagorova věta: Pro každý pravoúhlý trojúhelník s přeponou c (nejdelší strana) a odvěsnami a a b (dvě kratší strany) platí: $c^2 = a^2 + b^2$.

Obsah čtverce: $S = a^2 \rightarrow a = \sqrt{S}$.

Povrch krychle: $S = 6 \cdot a^2 \rightarrow a = \dfrac{S}{6}$.

Obsah kruhu: $S = \pi \cdot r^2 \rightarrow r = \dfrac{S}{\pi}$.

1.4 Příklady k procvičení:

1. Vypočtěte.
   $(3 - 2) \cdot (-4) + 2 - 5 \cdot (-2) =$

2. Vypočtěte.
   $\dfrac{5}{3} + \dfrac{8}{4} =$

3. Vypočtěte.
   $\dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{6} =$

4. Vypočtěte.
   $7 - 4 \cdot (-1) - [2 + 4 \div (-2)] =$

5. Vypočtěte.
   $5 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-6) =$

6. Vypočtěte
   $4 - 2 \cdot 5 - 2 + 3 \cdot (-4) =$

7. Vypočtěte.
$4 \div \frac{2}{5} - 0.5 =$

8. Vypočtěte.
$\frac{3}{5} \cdot 15 + 0.6 =$

9. Vypočtěte.
$\dfrac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{0.2 \cdot \frac{1}{3}} =$

10. Vypočtěte.
$\dfrac{\frac{4}{5}}{0.5 - \frac{1}{3}} =$

11. Vypočtěte.
$\frac{5^2}{\sqrt{16}} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

12. Vypočtěte
$\frac{\sqrt{4}}{2^2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{2^2}{3} \cdot \sqrt{1} =$

13. Vypočtěte.
$\sqrt{\frac{25}{16}} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

14. Vypočtěte
$\sqrt{5^2 - 3^2} =$

15. Vypočtěte a výsledek zapište desetinným číslem.
$\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} =$

16. Vypočtěte a výsledek zapište desetinným číslem.
$\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} =$

17. Rozhodněte zda platí či nikoli.
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < 0.3$

18. Rozhodněte zda platí či nikoli.
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$

19. Je dán výraz $z = \dfrac{x^2 - x}{2}$. Rozhodněte o každém z následujícíh tvrzeních jestli platí či nikoli.

    (a) Hodnota výrazu z pro $x = 3$ je rovna 3.

    (b) Hodnota výrazu pro z pro $x = -2$ je záporná.

    (c) Hodnota výrazu pro z pro $x = \dfrac{1}{2}$ je kladná.

20. Na parkovišti je 80 parkovacích míst, z nich je $\frac{1}{20}$ vyhrazena pro zdravotn postižené a další 4 místa pro rodiny s dětmi. Vyádřete zlomkem, jaká část parkoviště je volně dostupná pro vozidla bez uvedených specifikací.

21. Vypočtěte a zapište výsledek zlomkem v základním tvaru.

    (a) $\dfrac{2 - 3(-2) + 3(-1)}{3 + 2(-4) - 4(-5)} =$

    (b) $\dfrac{3(-4 - 2) - 2(3 - 6)}{6[2 - (-2)] - 3(3 - 7)} =$

22. Na disku o vleikosti 64 GB jsou uloženy soubory různého typu. Čtvrtina kapacity disku je obsazena soubory s videi, jedna osmina hudebními soubory, 10 GB soubory jiného typu a tbytek disku je prázdný. Jak velká je prázdá část disku (v GB)?

23. Máme papírovou krabici tvaru krychle. Najejí výrobu bylo spotřebováno 2400 cm^2. Ohyby při lepení stěn zanedbáme. Jaký je objem této krabice?