Gli insiemi numerici principali sono i seguenti:

$$Z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm n$$

$$Q = \frac{m}{n} | m \in Z, n \in Z, n \neq 0$$

$$R = M, C_1, C_2 \ldots . C_\infty | M \in Z, C_i \in Z, 0 \leq C_i \leq 9$$

Noi sappiamo che su questi insiemi possiamo fare due operazioni:

- SOMMA -> $2 + 3 = 5$
- PRODOTTO -> $2 \times 3 = 6$
  Quindi, un'operazione è una funzione che ad una coppia di numeri associa un altro numero.

DEFINIZIONE (PRODOTTO CARTESIANO)

siano A e B due insiemi; si chiama prodotto cartesiano di A per B, L'insieme:
$A \ X \ B \ = \{(a, b) | \ a \in A, \ b \in B\}$

ESEMPIO

sia $A = \{1, 2\}, \ B = \{2, 3, 4\}$
$A \ X \ B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

DEFINIZIONE (OPERAZIONE BINARIA INTERNA)

sia A un insieme qualunque.

si chiama operazione binaria interna su A una funzione
$A \ X \ A \rightarrow A$

NOTAZIONE

sia $(a, b \in A \ X \ A; \ f((a, b)) \in A)$
indicheremo l'operazione con $*$ e scriveremo:
$a * b = f((a, b))$

DEFINIZIONE (STRUTTURA ALGEBRICA)

si chiama struttura algebrica un insieme su cui sono definite una o più operazioni

DEFINIZIONE (GRUPPOIDE)

si chiama Gruppoide una struttura algebrica costituita da un insieme A e da una operazione binaria interna su A, e scriviamo $(A, *)$

DEFINIZIONE (PROPRIETA' ASSOCIATIVA)

sia $(A, *)$ un gruppoide.
diremo che l'operazione $*$ gode della proprietà associativa se
$(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in A$

ESEMPIO

$(2 \times 3) \times 4 = 6 \times 4 = 24 \equiv 2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$
$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9 \equiv 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

DEFINIZIONE (SEMIGRUPPO)

sia $(A, *)$ un gruppoide.
diremo che $(A, *)$ è un semigruppo se l'operazione è associativa.

DEFINIZIONE (ELEMENTO NEUTRO)

sia $(A, *)$ un gruppoide.
sia $\epsilon \in A$, diremo che che ϵ è un elemento neutro se
$a * \epsilon = \epsilon * a = a, \forall a \in A$

PROPOSIZIONE

sia $(A, *)$ un gruppoide.
siano ϵ ,$\epsilon^I \in A$.
elementi neutri $\to \epsilon = \epsilon^I$

DIMOSTRAZIONE

$\epsilon * \epsilon^I = \epsilon \, \epsilon^I * \epsilon = \epsilon^I$
quindi $\epsilon = \epsilon^I$

DEFINIZIONE (MONOIDE)

sia $(A, *)$ un semigruppo.
diremo che esso è un monoide se esiste l'elemento neutro.

ESEMPIO

$(Z, +)$ è un monoide con elemento neutro 0.
$(Z, \times)$ è un monoide con elemento neutro 1.

DEFINIZIONE (INVERTIBILITA')

sia $(A, *)$ un monoide, con elemento neutro ϵ .
sia $a \in A$ diremo che a è invertibile se $\exists a^* \in A$, tale che
$a * a^* = a^* * a = \epsilon$
in questo caso diremo che a^* è un inverso di a.

ESEMPIO

(1) consideriamo il monoide $(Z, +)$ sia $2 \in Z$
2 è invertibile.
infatti $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$
(2) consideriamo il monoide $(Z, \times)$ sia $2 \in Z$
2 non è invertibile.
(3) consideriamo il monoide $(Q, \times)$, sia $2 \in Q$
2 è invertibile.
infatti $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

PROPOSIZIONE

sia $(A, *)$ un monoide. sia $a \in A$, a invertibile $\rightarrow a$ ha solo un inverso.

DIMOSTRAZIONE

siano $a^* \in A$ e $a^{**} \in A$ due inversi di A.

- $(a^* * a) * a^{**} = a^* * (a * a^{**})$
- $(a^* * a) * a^{**} = \epsilon * a^{**} = a^{**}$
- $(a^{**} * a) * a^* = \epsilon * a^* = a^*$
  si ricava che $a^* = a^{**}$

PROPOSIZIONE

sia $(A, *)$ un monoide. siano $a \in A, b \in A$, due elementi invertibili.
siano a^{-1} e b^-1 gli inversi di a e b rispettivamente.
allora $a * b$ è invertibile e
$(a * b)^-1 = b^{-1} * a^{-1}$

DIMOSTRAZIONE

vogliamo dimostrare che $b^{-1} * a^-1$ è l'inverso di $a * b$.
infatti:

- $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} \ = (a * \epsilon) * a^-1 = a * a^-1 = \epsilon$
- $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = (b^{-1} * \epsilon) * b = b^{-1} * b = \epsilon$

NOTAZIONE

sia $(A, *)$ un monoide, sia $a \in A$ invertibile.
denoteremo l'inverso di a con il simbolo a^{-1}

DEFINIZIONE (GRUPPO)

si chiama gruppo un monoide nel quale ogni elemento è invertibile.

DEFINIZIONE (PROPRIETA' COMMUTATIVA)

sia $(A, *)$ un gruppoide.
diremo che l'operazione $*$ gode della proprietà commutativa se
$a * b = b * a \, \forall a, b \in A$

DEFINIZIONE (GRUPPO ABELIANO)

un gruppo $(A, *)$ si dice Abeliano se l'operazione è commutativa.

ESEMPIO

- $(Z, +)$ è un gruppo abeliano
- $(Z, \times)$ è un monoide, ma non un gruppo
- $(Q, \times)$ è un monoide, ma non è un gruppo
- $(Q\{0\}, \times)$ è un gruppo abeliano
- $(R\{0\}, \times)$ è un gruppo abeliano
- $(Q, +)$ è un gruppo abeliano
- $(R, +)$ è un gruppo abeliano

DEFINIZIONE (ANELLO)

sia $(A, *, \times)$ una struttura algebrica.
diremo che essa è un anello se valgono le seguenti proprietà:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano

- $(A, \times)$ è un semigruppo
- proprietà distributiva rispetto alla somma

NOTAZIONE

sia $(A, +, \times)$ un anello.
l'elemento neutro della somma lo indichiamo con 0 e lo chiamiamo zero.
$\forall a \in A$, il suo inverso rispetto alla somma lo indichiamo con $-a$ e lo chiamiamo opposto.
quindi $a + (-a) = (-a) + a = 0$

DEFINIZIONE (ANELLO UNITARIO)

un anello $(A, +, \times)$ si dice unitario se esiste l'elemento neutro rispetto al prodotto.
lo indichiamo con il simbolo 1 e lo chiamiamo unità.
l'inverso di un elemento $a \in A$, se esiste lo indichiamo con il simbolo a^-1.

DEFINIZIONE (ELEMENTO NEUTRO +)

sia $(A, +, \times)$ un anello.
ricordiamo che con 0 indichiamo l'elemento neutro della somma.

PROPOSIZIONE

sia $(A, +, \times)$ un anello.
$a \times 0 = 0 \times a = 0 \, \forall a \in A$

DIMOSTRAZIONE

$a \times 0 = a \times (0 + 0) = a \times 0 + a \times 0$
$a \times 0 = a \times 0 + a \times 0 \rightarrow$
$a \times 0 + (-a \times 0) = a \times 0 + (a \times 0 + (-a \times 0)) \rightarrow$
$0 = a \times 0 + 0 \rightarrow$
$0 = a \times 0$
quindi si prova che $0 \times a = 0$

NOTAZIONE

sia $(A, +, \times)$ un anello unitario
sia $a \in A$ invertibile rispetto al prodotto.
denoteremo il suo inverso con a^-1, quindi
$a \times a^-1 = a^-1 \times a = 1$

ESEMPIO

$(Z, +, \times)$ è un anello unitario.
gli unici elementi invertibili rispetto al prodotto sono 1 e -1.
ovviamente $1^-1 = 1 \quad (-1)^-1 = -1$

OSSERVAZIONE

sia $(A, +, \times)$ un anello unitario.
0 è invertibile rispetto al prodotto?

$0 \times x = 1 \rightarrow 0 = 1$ può accadere solo se i due elementi neutri coincidono.
ma quando $0 = 1$? $a \in A$, se $0 = 1$, $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a \rightarrow$
$\rightarrow a \times 0 = a \rightarrow a = 0 \equiv a \times 1 = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow A = \{0\}$
quindi l'elemento neutro della somma è invertibile rispetto al prodotto solo se A contiene solo 0

DEFINIZIONE (CORPO E CAMPO)

un anello unitario si chiama corpo se tutti i suoi elementi non nulli sono invertibili rispetto al prodotto .
un corpo si chiama campo se il prodotto è commutativo.

ESEMPI

- (1) CAMPO DEI NUMERI RAZIONALI
  $(Q, +, \times)$ è un campo
- (2) CAMPO DEI NUMERI REALI
  $(R, +, \times)$ è un campo
- $(Z, +, \times)$ è un anello unitario, ma non è un corpo.

DEFINIZIONE (CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI)

sia $C = R^2 = R\ X\ R$
definiamo su C le due operazioni

- SOMMA
  $siano\ (a, b), (c, d) \in C$
  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- PRODOTTO
  $siano(a, b), (c, d) \in C$
  $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

ESEMPIO

$(1,3)+(2,5)=(3,8)$
$(1,3)\times(2,5)=(1\times 2-3\times 5, 1\times 5+3\times 2=(-13,11)$

- (1) $(C,+)$ è un gruppo abeliano
  con elemento neutro $(0,0)$; $\forall(a,b)\in C \quad -(a,b)=(-a,-b)$
- (2) il prodotto è associativo (DA VERIFICARE)
- (3) valgono le proprietà distributive (DA VERIFICARE)
- (4) $(1,0)$ è l'elemento neutro del prodotto
  $(a,b)\times(1,0)=(a\times 1-b\times 0, a\times 0+b\times 1)=(a,b)$
  $(1,0)\times(a,b)=(1\times a-0\times b, 1\times b+0\times a)=(a,b)$
- (5) sia $(a,b)\in C$, $(a,b)\neq(0,0)$
  dobbiamo risolvere l'equazione $(a,b)\times(x,y)=(1,0)\rightarrow$
  $(ax-by+ay-bx)=(1,0)$

  $$\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} ax-by=1 \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} ax-b\left(-\frac{b}{a}x\right)=1 \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}$$
  $$\begin{cases} ax-\frac{b^2}{a}x=1 \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} a^2x-b^2x=a \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} (a^2+b^2)x=1 \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}$$
  $$\begin{cases} x=\frac{a}{(a^2+b^2)} \\ y=-\frac{b}{a}x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\frac{a}{(a^2+b^2)} \\ y=-\frac{b}{a}\frac{a}{(a^2+b^2)} \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\frac{a}{(a^2+b^2)} \\ y=-\frac{b}{(a^2+b^2)} \end{cases}\rightarrow$$
  abbiamo dimostrato che $(a,b)^-1=\left(\frac{a}{(a^2+b^2)},\frac{b}{(a^2+b^2)}\right)$

  - (6) la moltiplicazione è commutativa

FORMA ALGEBRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

poniamo $i=(0,1)$

PROPOSIZIONE

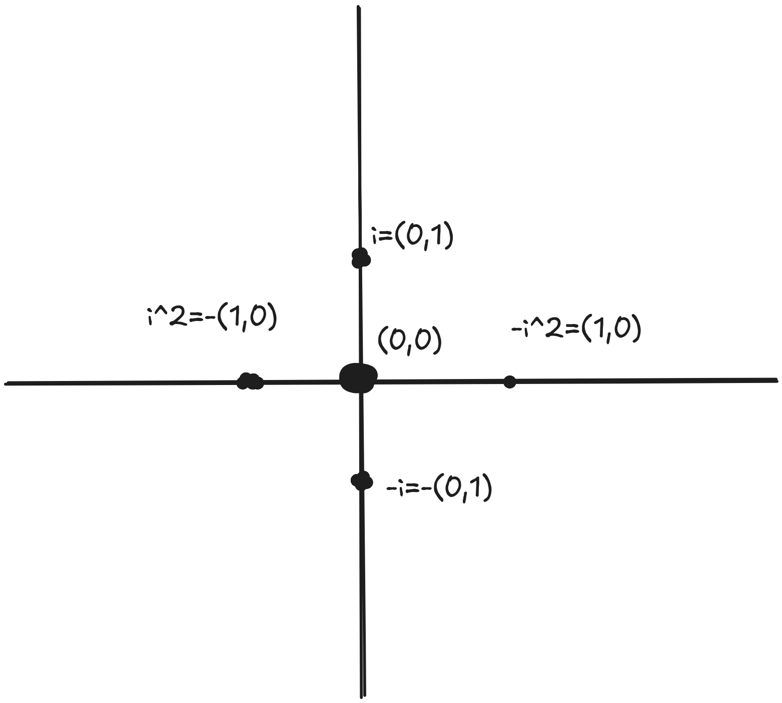
$i^2=-(1,0)$

DIMOSTRAZIONE

$(0,1)\times(0,1)=(0-1,0+0)\rightarrow$
$(-1,0)\rightarrow-(1,0)$

NOTAZIONE

i numeri complessi possono essere rappresentati sul piano cartesiano:



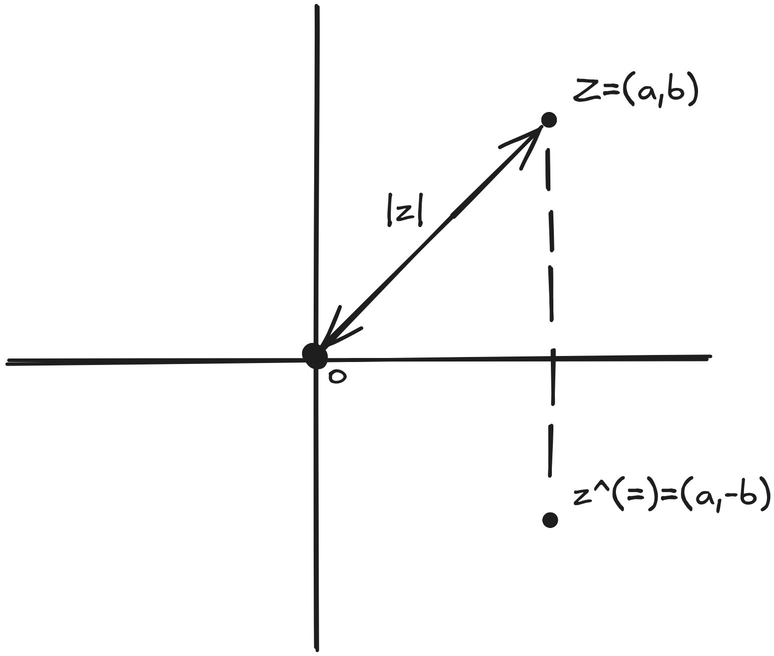
ogni elemento dell'asse x corrisponde ad un numero reale:
$(a, 0), a \in A\ R \subset C$

DEFINIZIONE (a+bi)

$a + bi$ si chiama forma algebrica del numero complesso

DEFINIZIONE

sia $z \in C, z = a + ib$, si chama coniugato di Z il numero
$z^{=} = a - ib$
si chiama modulo di z il numero
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
si chiama parte reale di z, il numero reale
$Re\ z = a$
si chiama parte immaginaria di z, il numero reale
$Im\ z = b$



PROPOSIZIONE

$sia\ z \in C$
$z \in R \longleftrightarrow z = z^{=}$

DIMOSTRAZIONE

sia $z = a + bi$ $z \in R \longleftrightarrow b = 0 \longleftrightarrow z = a \longleftrightarrow z^{=} = a = z$

PROPOSIZIONE

sia $z \in C$

- (1)
  $z \times z^{=} = |z|^2$
- (2)
  se $z \neq 0$, $z^-1 = \frac{z^{=}}{|z|^2}$

DIMOSTRAZIONE

- (1) sia $z = a + bi$; $z^{=} = a - bi$
  $z \times z^{=} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2i^2 = a^2 + b^2 \rightarrow z \times z^{=} = |.$

PROPOSIZIONE

sia $z \in C, z \notin R$
$z\ e\ z^{=}$ sono soluzioni di una equazione di secondo grado a coefficienti reali

DIMOSTRAZIONE

$(x-z)(x-z^{=}) = x^2-(z+z^{=})x+z\times z^{=}$
sia $z = a+bi$;
$x^2-(a+bi+a-bi)x+|z|^2 \rightarrow x^2-2(Re\ z)+|z|^2$

ESEMPIO

sia $z = 2+3i$
allora $x^2-2(2)x+13 \rightarrow x^2-4x+13=0$
quindi z è soluzione dell'equazione, infatti:
$\frac{\Delta}{4} = 4-13 = -9 \rightarrow \sqrt{-9} = \sqrt{(-1)\times 9} = \sqrt{-1}\times\sqrt{9} = 3i$
$x = \frac{4\pm 3i}{2} \rightarrow x = 2\pm 3i$