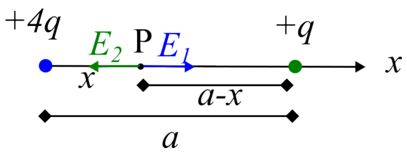
# Løsning øving 8

## Oppgave 1




Figuren viser et punkt P med koordinat $x$ (med origo ved ladningen $+4Q$), hvor de elektriske feltene fra de to ladningene er like store, slik at nettofeltet blir null. Ut i fra Coulombs lov som gir oss elektrisk felt fra en punktladning, gjelder det altså i dette punktet at

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{k \cdot 4Q}{x^2} &= \frac{k \cdot Q}{(a-x)^2} \\ \frac{4}{x^2} &= \frac{1}{(a-x)^2} \\ 4(a-x)^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Her kan vi enten gange ut kvadratet, eller vi kan ta kvadratrot på begge sider - vi må da huske på ±-tegn på én av sidene:

$$\begin{aligned} \sqrt{4(a-x)^2} &= \pm\sqrt{x^2} \\ 2(a-x) &= \pm x \\ 2a - 2x &= \pm x \\ 2x \pm x &= 2a \\ x(2 \pm 1) &= 2a \\ x &= \frac{2a}{2 \pm 1} \end{aligned}$$

De to løsningene blir

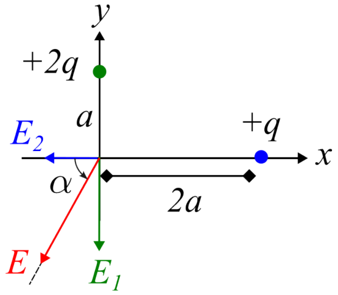
$$x = \frac{2a}{2+1} = \frac{2}{3}a \vee x = \frac{2a}{2-1} = 2a$$

Etter kun én av disse er i samsvar med at punktet ligger mellom de to ladningene, blir den eneste akseptable løsningen

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3}a}}$$

## Oppgave 2

Figuren under viser bidragene til det elektriske feltet i origo fra de to ladningene:



Det totale feltet i origo blir lik vektorsummen av bidragene fra de to ladningene. Ladningen $+2q$ bidrar kun i $y$-retning, mens $+q$ bidrar kun i $x$-retning. Størrelsen på bidragene er gitt ved Coulombs lov:

$$E_1 = E_{1y} = k \cdot \frac{2q}{a^2}$$
$$E_2 = E_{2x} = k \cdot \frac{q}{(2a)^2} = k \cdot \frac{q}{4a^2}$$

a) Verdien av verdien av det elektriske feltet $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$:

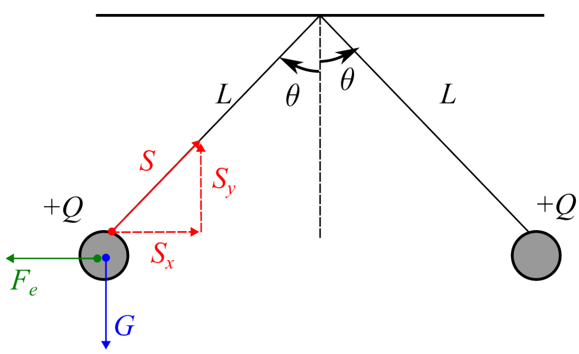
$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{E_{1y}^2 + E_{2x}^2} \\
&= \sqrt{\left(k \cdot \frac{2q}{a^2}\right)^2 + \left(k, \frac{q}{4a^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{4k^2 \cdot \frac{q^2}{a^4} + k^2 \cdot \frac{q^2}{16a^4}} \\
&= \sqrt{\frac{65}{16}k^2 \cdot \frac{q^2}{a^4}} \\
&= \sqrt{\frac{65}{16}} \cdot \frac{kq}{a^2} \\
&= \underline{\underline{\frac{\sqrt{65}}{4} \cdot \frac{kq}{a^2}}}
\end{aligned}$$

b) Retningen er bestemt av vinkelen $\alpha$ på figuren (dvs. vinkel under negativ $x$-akse):

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{E_{1y}}{E_{2x}} = \frac{k \cdot \frac{2q}{a^2}}{k \cdot \frac{q}{4a^2}} = 8 \\
\alpha &= \arctan 8 \\
&= 82,9^\circ \\
&\approx \underline{\underline{83^\circ}}
\end{aligned}$$

## Oppgave 3

a) Vi tegner inn kreftene som virker på de to ladde kulene som henger i tynne tråder:




På begge kulene virker snordraget $S$ (langs snora); en elektrisk, gjensidig frastøtende kraft $F_e$, samt tyngden $mg$.

Ettersom kulene henger i ro, er summe nav kreftene i både $x$- og $y$-retning lik null:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \Rightarrow S_y = mg \\ \Sigma F_x &= 0 \Rightarrow F_e = S_x \end{aligned}$$

Ut i fra figuren er

$$\begin{aligned} S_x &= S_y \tan\theta \\ &= mg\tan\theta \text{ (fordi } S_y = mg\text{)}, \end{aligned}$$

som kombinert med det overstående gir:

$$F_e = S_x = mg\tan\theta$$

Coulombs lov gir den elektrostatiske kraften mellom kulene, som begge har ladning $Q$:

$$F_e = \frac{kQ^2}{r^2},$$

der $k$ er Coulombs konstant og $r$ er avstanden mellom kulene. Alt dette gir:

$$\begin{aligned} F_e &= mg\tan\theta \\ \frac{kQ^2}{r^2} &= mg\tan\theta \\ Q^2 &= \frac{mg\tan\theta r^2}{k} \\ Q &= \sqrt{\frac{mg\tan\theta r^2}{k}} \end{aligned}$$

Når lengden av snorene er $L = 1,2$m og vinkelen mellom hver snor og vertikalen er $\theta = 25\,^\circ$, er avstanden mellom kulene lik

$$r = 2L_1\sin\theta,$$

som gir følgende ladning på kulene:

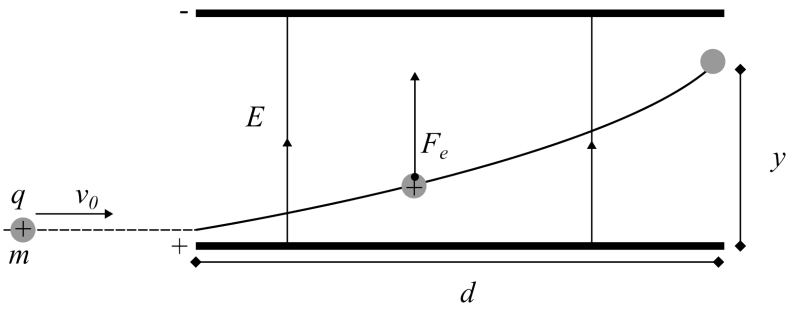
$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{mg\tan\theta\,(2L\sin\theta)^2}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{15\cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot\tan 25\,^\circ\,(2\cdot 1,2\,\text{m}\cdot\sin 25\,^\circ)^2}{8,99\cdot 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2}} \\ &= \underline{\underline{2,8\cdot 10^{-6}\,\text{C}}} \end{aligned}$$

b) Det elektriske potensialet $V$ i opphengingspunktet får bidrag fra to like ladninger $Q$ i lik avstand $l$,

$$V = \underline{\underline{2\cdot\frac{kQ}{l}}}$$

## Oppgave 4

Figuren under viser kreftene som virker på blekkdråpen mens den beveger seg i det homogene elektriske feltet mellom platene (tyngden kan neglisjeres):




Den elektriske kraften på dråpen via det elektriske feltet virker i vertikalretning ($y$-retningen på figuren), og er gitt ved

$$F_y = F_e = qE,$$

der $E$ er den elektriske feltstyrken. Newtons 2. lov i $y$-retning gir

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= ma_y \\ qE &= ma_y \Rightarrow a_y = \frac{qE}{m} \end{aligned}$$

Ser at akselerasjonen i $y$-retning blir konstant, fordi $E$-feltet er homogent.

I $x$-retningen er det ingen krefter som virker, slik at farten der er konstant. Vi skal få til en avbøyning slik at $y = 0,30\,\text{mm} = 0,30 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$ idet dråpen har beveget seg $x = 2,0\,\text{cm} = 0,020\,\text{m}$ i $x$-retning. Tiden vi har "til rådighet" finner vi fra

$$x = v_{0x} t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{0,020\,\text{m}}{20\,\text{m/s}} = \underline{0,0010\,\text{s}}$$

Avbøyningen i $y$-retning, som altså skjer med konstant akselerasjon, er gitt ved

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} a_y t^2 \text{ (fordi } v_{0y} = 0) \\ y &= \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \text{ (setter inn } a_y) \end{aligned}$$

Finner ladningen som blekkdråpen må ha:

$$\begin{aligned} \frac{qE}{m} &= \frac{2y}{t^2} \\ q &= \frac{m}{E} \cdot \frac{2y}{t^2} \\ q &= \frac{1,4 \cdot 10^{-8}\,\text{kg}}{8,0 \cdot 10^{4}\,\text{N/C}} \left( \frac{2 \cdot 0,30 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{(0,0010\,\text{s})^2} \right) \\ &= \underline{\underline{1,1 \cdot 10^{-10}\,\text{C}}} \end{aligned}$$