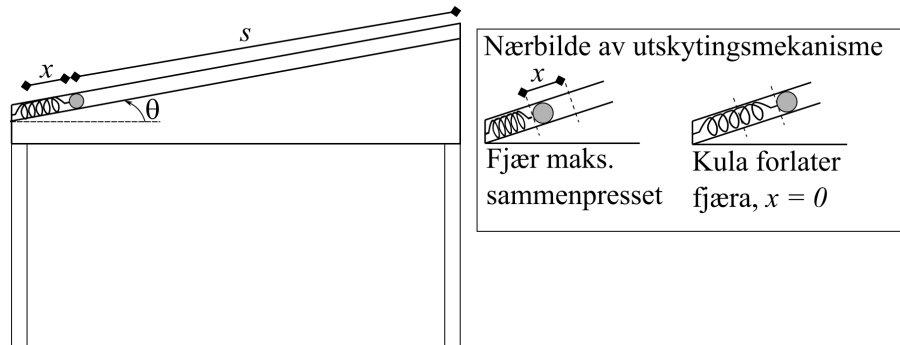


# Øving 4

## Oppgave 1

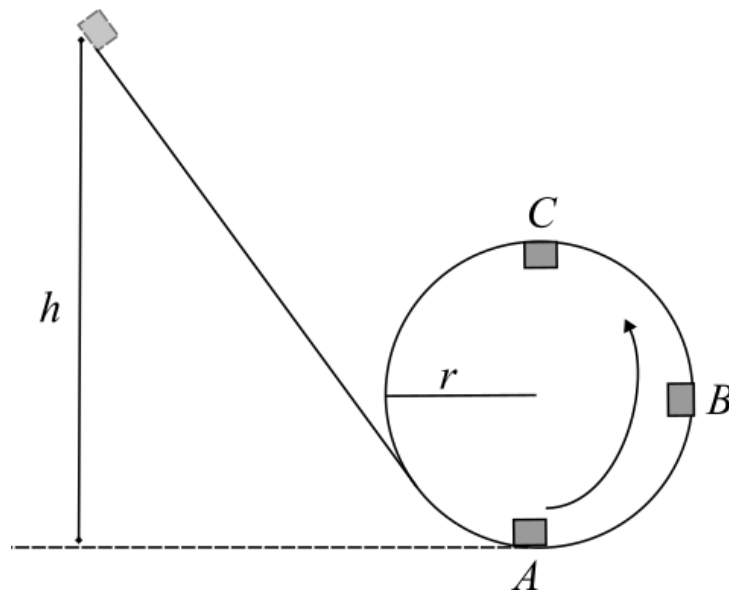
Kula i et flipperspill skytes ut fra en fjærbelastet avtrekker. Spilleren trekker i fjæra slik at den presses sammen en avstand  $x = 7,0 \text{ cm}$ . Massen til kula er  $80 \text{ g}$ , og flipperspillet har en helningsvinkel  $\theta = 15^\circ$ . Kula sklir friksjonsfritt mot underlaget. Se figuren under.



Hvor stor må fjærkonstanten  $k$  til fjæra være dersom kula akkurat skal nå toppen av flipperspillet, som ligger en avstand  $s = 78 \text{ cm}$  fra punktet der kula forlater fjæra (i punktet der fjæra er slapp)?

## Oppgave 2

En vogn i en berg-og-dalbane starter i en viss høyde  $h$  over det laveste punktet A i en sirkulær loop med radius  $r$ . To andre punkter i loopen er markerte: B er midtveis oppe, og C er det høyeste punktet. Se figuren under.



I denne oppgaven skal vi se bort fra friksjon og luftmotstand.

a) Fra hvilken høyde  $h$  over punkt A må vogna slippes for at den skal kunne fullføre en hel loop uten å miste kontakten med underlaget?

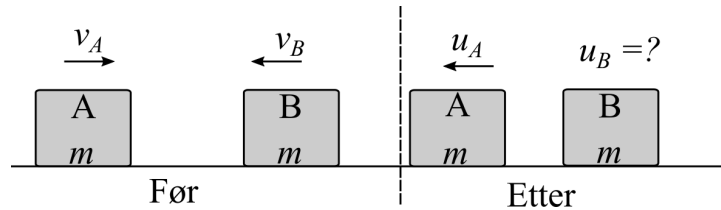
I de to neste oppgavene slippes vogna fra en starthøyde  $h = 3r$ . Bestem normalkrafta på vogna, uttrykt ved vognas tyngde  $G$ , i

b) Punkt C (toppen)

c) Punkt B (midtveis til toppen)

## Oppgave 3

To curlingsteiner A og B med identisk masse  $m = 19 \text{ kg}$  kolliderer i et rett, sentralt støt. Før støtet har stein A fart  $v_A = 3,0 \text{ m/s}$  mot høyre og stein B fart  $v_B = 5,0 \text{ m/s}$  mot venstre, og etter støtet har stein A fart  $u_A = 4,5 \text{ m/s}$  mot venstre. Se figuren under.



a) Finn farten til stein B etter støtet.

b) Var støtet elastisk?

## Oppgave 4

To fallskjermhoppere A og B med identiske masser  $m = 70 \text{ kg}$  faller vertikalt fra samme startshøyde med null startfart. A faller med hodet først og har frontareal  $A = 0,17 \text{ m}^2$  og "drag-koeffisient"  $C_d = 0,70$ ; B faller liggende og har  $A = 1,0 \text{ m}^2$  og  $C_d = 1,0$ . Vi forutsetter kvadratisk luftmotstand  $F_D = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$  med  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ , og tyngdeakselerasjonen  $g$  kan antas konstant over fallhøyden.

a) Finn ved regning terminalhastighetene for A og B.

I de to siste oppgavene skal vi bruke Python til å løse bevegelseslikningene numerisk.

b) Gitt følgende Python-funksjon som beregner luftmotstanden (drag) som funksjon av frontareal  $A$ , drag-koeffisient  $C_d$  og fart  $v$ , for en gitt (konstant) verdi av luftas massetetthet  $\rho$ :

```
def drag(A,C,v):
    """Input:
    A: Frontareal [m^2]
    C: Drag-koeffisient []
    v: Fart [m/s]
    """
    rho=1.29
    k=0.5*rho*A*C
    ?
```

Hvilken Python-kode skal stå i linja markert med ? for at funksjonen skal gi luftmotstanden i newton som funksjon av inndataene?

A. `return k*v**2` B. `return k*(v/3.6)**2` C. `return k*(v/3,6)**2` D. `return k*(v*3.6)**2` E. `return k*(v*3,6)**2`

c) Ta utgangspunkt i den ferdige rutinen for Eulers metode med tidssteg  $\Delta t = 0,10 \text{ s}$  til å beregne tiden  $t$  det tar det før hopperne har nådd 98 % av sine terminalhastigheter, og den vertikale høyden  $h$  hopperen har falt på dette tidspunktet (målt fra startpunktet).

[Hint: Numpy-funksjonen `argmax` kan brukes til å finne den laveste/første indeksen der elementene i en NumPy-array oppfyller en viss betingelse. Eksempel: for `a=np.array([0.1,2.4,4.0,9.4])` vil `np.argmax(a>3)` returnere `2`, dvs. `a[2]=4.0` er det første elementet som oppfyller `a>3`. I denne oppgaven: Dersom terminalfarten er `v_terminal`, og `v_liste` er en array med fartsverdiene, dvs.  $v(t)$ , og man vil finne ut hvilken  $t$ -verdi som tilsvarer 98 % av terminalfarten, blir syntaksen `np.argmax(v>0.98*v_terminal)` ("første/laveste indeks som oppfyller at farten er **større** enn 98 % av

terminalfarten"). Hvis denne returnerer f.eks. 199 (verdi av indeks), kan man hente ut  $t$ -verdien fra tids-arrayet med `t_liste[199]`.

```

In [ ]: #Rutiner for simulering av vertikalt fall med luftmotstand. I dette eksemplet er
# positiv retning nedover.

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Globale konstanter
m=70 #Legemets masse i kg
g=9.81 #Tyngdeakselerasjonen i m/s^2

def drag(A,C,v):
    rho=1.29
    k=0.5*rho*A*C
    #? Her må du legge inn riktig kode for at funksjonen skal returnere
    #Luftmotstanden (drag) i newton

def dXdt(X):
    """Funksjonen dXdt beregner høyresiden f(X) i differensiallikningssystemet;  $dx/dt=f(X)$ .
    Input:
    X: X=[y,v] en vektor som inneholder posisjon y og (vertikal) fart v. Med positiv retning
    nedover er  $v > 0$  og  $y < 0$  for et legeme som faller vertikalt mot bakken, der  $y = 0$ .

    Output:
    [dydt,dvdt]: Array med nye verdier for hastighet (dydt) og akselerasjon (dvdt)
    """
    y , v =X          #Koordinater y og v hentes fra inndatavektor X
    f=drag(A,C,v)      #Luftmotstand i N
    dydt=v             #Sammenhengen mellom y og v er at  $v = dy/dt$ 
    dvdt=-f/m+g        #Akselerasjonen  $a=dv/dt$ , fra Newtons 2. lov
    return np.array([dydt,dvdt])

def euler(t0,y0,v0,dt):
    """Funksjon som bruker Eulers metode til å løse et system av differensiallikninger,
     $dx/dt = f(X)$ , der  $X = [y,v]$  er
    en vektor som inneholder posisjons- og hastighetsvariable.
    Input:
    t0: Starttid [s]
    y0: Startverdi for y [m]
    v0: Vertikal startfart [m/s]
    dt: Tidssteg [s]

    Output:
    t_liste: array med t-verdier, [t0,...,tn]
    y_liste: array med y-verdier, [y0,...,yn]
    v_liste: array med v-verdier, [v0,...,vn]
    """

    X0=np.array([y0,v0]) #X0 er en vektor med posisjon og fart ved  $t=t0$ 
    t_liste=[0.0]# Liste med t-verdier
    y_liste=[y0]# Liste med y-verdier
    v_liste=[v0] # Liste med v-verdier
    X=X0 # initierer loop
    t=t0
    y=y0
    while y<=0: #Loop kjøres inntil Legemet treffer bakken; pos. retning nedover gir  $y0 < 0$ 
        Xn=X+dt*dXdt(X) #Beregner neste steg Xn i Euler-metoden
        y=Xn[0] #Henter ut y-koordinat fra array
        v=Xn[1] #Henter ut fart v fra array
        t_liste.append(t) # t-verdi legges til liste
        y_liste.append(y)# y-verdi legges til liste
        v_liste.append(v)# v-verdi legges til liste
        t=t+dt #Ny tidsverdi
        X=Xn #Ny verdi for X
    return t_liste,y_liste,v_liste

```

```

In [ ]: #Eksempel på bruk av rutinene
#Initialiserer variable
t0=0.0 #t = 0 i startpunktet
v0=0 #Startfart
y0=-2000 #Med positiv retning nedover, er y-verdier negative over bakken.

```

```

#Her starter fallet 2,0 km over bakken.
dt=0.1 #Tidssteg
A=0.9 #Frontareal
C=0.8 #Drag-koeffisient

#Bruker Eulers metode til å generere sammenhengende verdier for t, y og v
t_liste,y_liste,v_liste=euler(t0,y0,v0,dt)

#Plotter fartsgraf v(t)
plt.figure(figsize = (10, 8))
#Diagrammet angir hvilke verdier for A og C som er tilhører grafen
plt.plot(t_liste,v_liste,color="red",label='A = '+str(A)+' , C = '+str(C))
plt.xlabel("Tid [s]")
plt.ylabel("Fart [m/s]")
plt.legend()
plt.show()

```