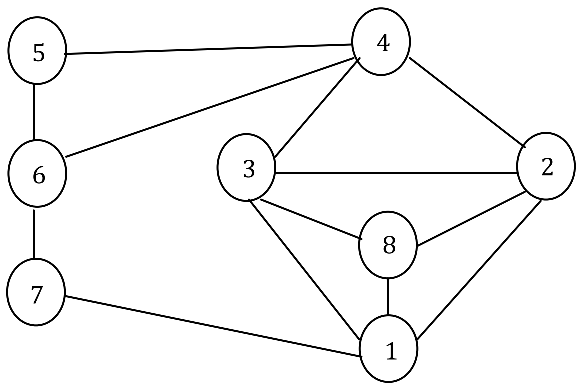
Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département des Mathématiques et Informatique (M&I)

Promotion : 2ème année Licence Informatique
Jeudi 11/03/2021
Durée : 1H30

Corrigé Examen - Théorie des graphes -

Exercice n°=1 : (5 pts)

1. Représentez cette situation par un graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les pays et les arêtes les frontières. **(1 pt)**

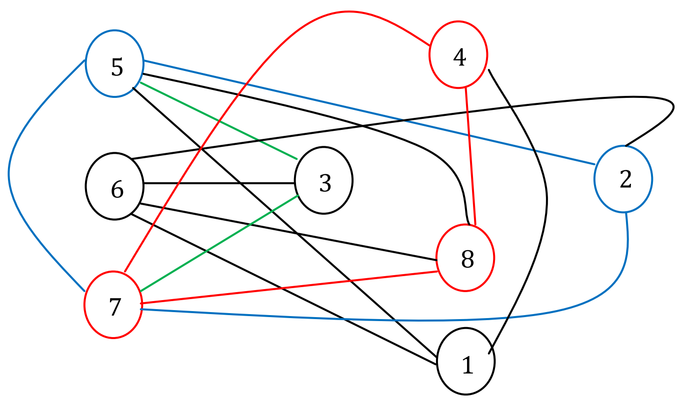


2.
   a. Ce graphe n'est pas complet car, par exemple les sommets 1 et 4 ne sont pas adjacents. **(0,75 pt)**
   Ce graphe est connexe car entre 2 sommets quelconques il existe une chaine les reliant. **(0,75 pt)**
   b. Le degré de chaque sommet : **(1 pt)**

sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
degré	4	4	4	4	2	3	2	3

Le nombre d'arêtes $= \frac{\sum d(x_i)}{2} = \frac{26}{2} = 13\ arêtes$ **(0,5 pt)**

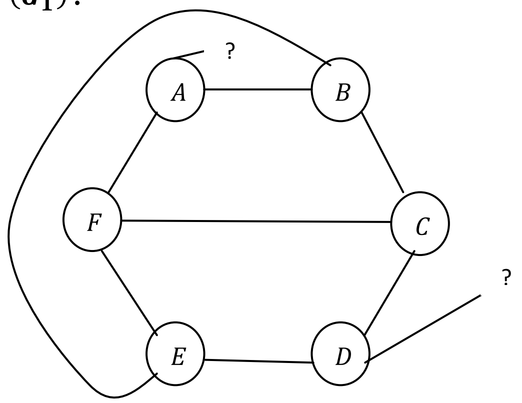
3. On construit le graphe complémentaire $\bar{G} = (X, \bar{U})$ correspondant :



Le plus grand sous-graphe complet de $\bar{G}$ a pour ordre égal à 3. Il s'agit des pays (4, 7, 8) et (2, 5, 7) et (3, 5, 7)
Le nombre de pays sans frontière commune est 3. **(1 pt)**

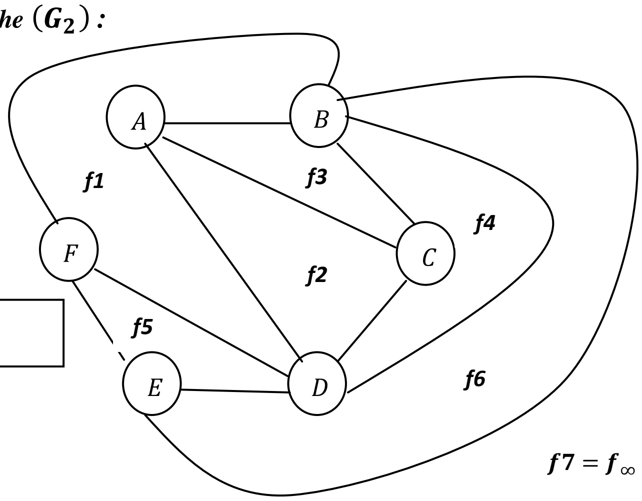
Exercice n°=2 : (5 pts)

Le graphe (G_1) :



Le graphe (G_1) est sans triangle, alors on applique la propriété 2 de la formule d'Euler :
$m \leq 2 \times n - 4 \Rightarrow 9 \leq 2 \times 6 - 4 \Rightarrow 9 \leq 8 \Rightarrow$ FAUX . Alors le graphe (G_1) n'est pas planaire. **(1 pt)**

Le graphe (G_2) :

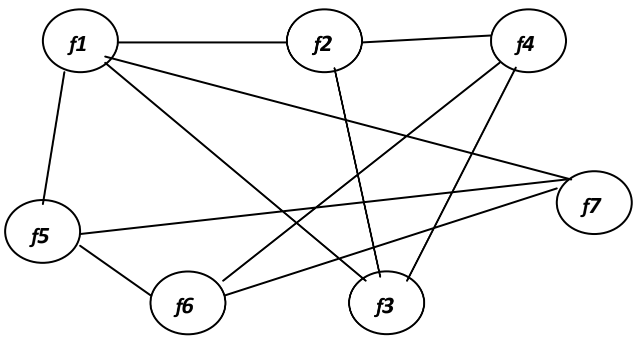


(1 pt)

a. Le graphe (G_1) est avec triangle, alors on applique la propriété 1 de la formule d'Euler :
$m \leq 3 \times n - 6 \Rightarrow 11 \leq 3 \times 6 - 6 \Rightarrow 11 \leq 12 \Rightarrow$ VRAI . Alors le graphe (G_2) est planaire. **(1 pt)**

b. Le nombre de face :
$n - m + f = 2 \Rightarrow f = 2 - n + m \Rightarrow f = 2 - 6 + 11 = \mathbf{7}\ \boldsymbol{faces}$ **(1 pt)**

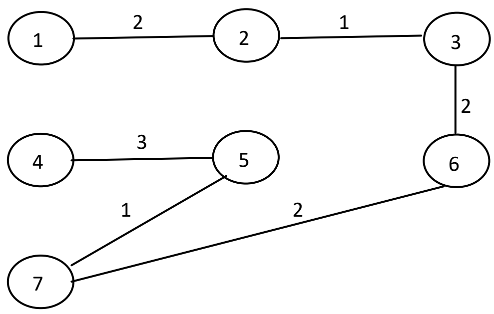
c. Le graphe Dual correspondant : **(1 pt)**



Exercice n°=3 : (4 pts)

1. On applique l'algorithme de Kruskal : **(2 pts)**

$e_1 = (2,3) = 1$	√
$e_2 = (5,7) = 1$	√
$e_3 = (6,7) = 2$	√
$e_4 = (3,6) = 2$	√
$e_5 = (1,2) = 2$	√
$e_6 = (4,5) = 3$	√
$e_7 = (1,4) = 3$	×
$e_8 = (4,7) = 4$	×
$e_9 = (5,3) = 6$	×
$e_{10} = (4,2) = 7$	×
$e_{11} = (5,6) = 8$	×



Retourner $T = (X, E')$ (0,5 pt)

$X = \{1,2, 3,4,5,6,7,8\}$

$E' = \{(2,3),(5,7),(6,7),(3,6),(1,2),(4,5)\}$

$c(T) = 1+1+2+2+2+3 = 11$ **(0,5 pt)**

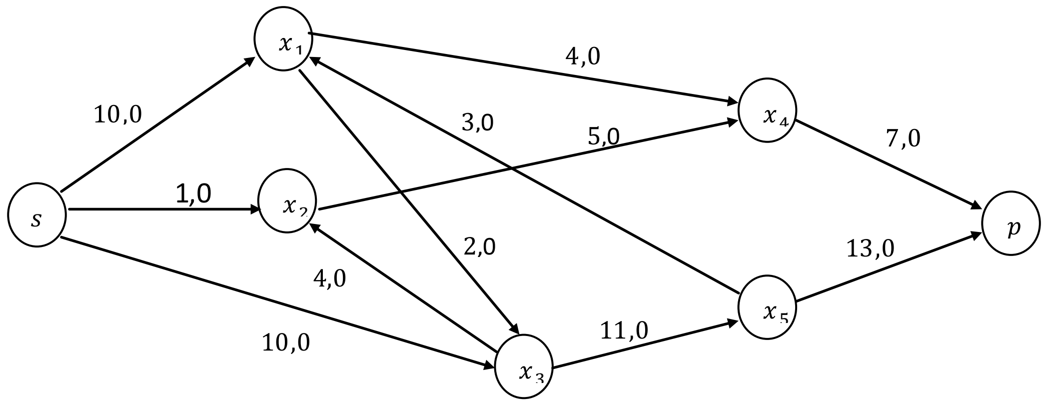
2. Que peut-on déduire ? c'est une chaine élémentaire qui passe par tous les sommets une et une seule fois et de poids minimum. **(1 pt)**

Exercice n°4 : (6 pts)

Spécifier la valeur du flot maximum et de la coupe minimum associée au réseau de transport ci -dessous.

<table>
<tr><th>I_k</th><th>Le réseau de transport</th><th>φ^k</th></tr>
<tr><td>I_0</td><td>

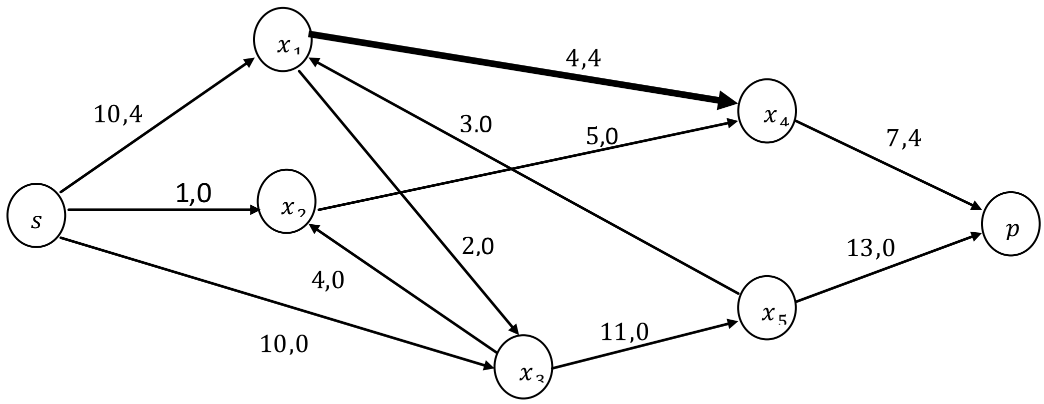
$C^+ = \emptyset$; $C^- = \emptyset$; $\varphi^k = 0$; $A = \{s\}$; $k = 0$ **(0,5 pt)**



</td><td>0</td></tr>
<tr><td>I_1</td><td>

$A = \{s, x_1, x_4, p\}$ **(0,5 pt)**

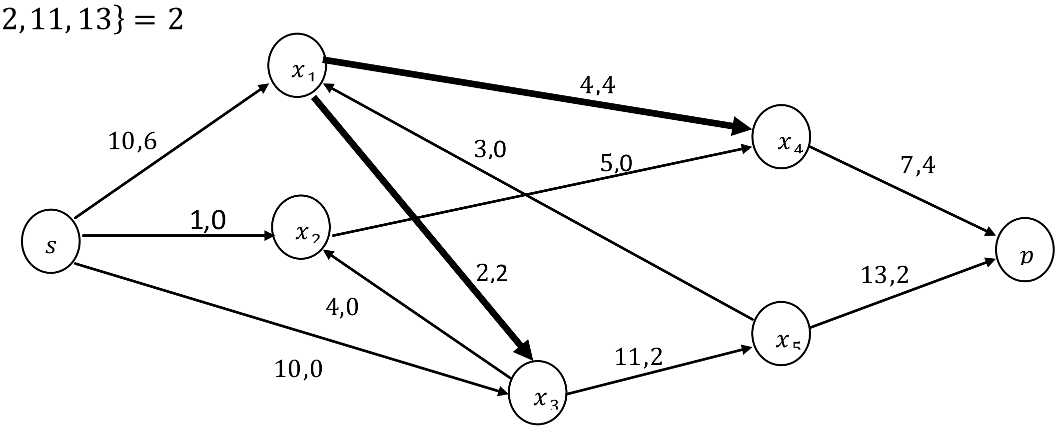
$\varepsilon = min\{10, 4, 7\} = 4$



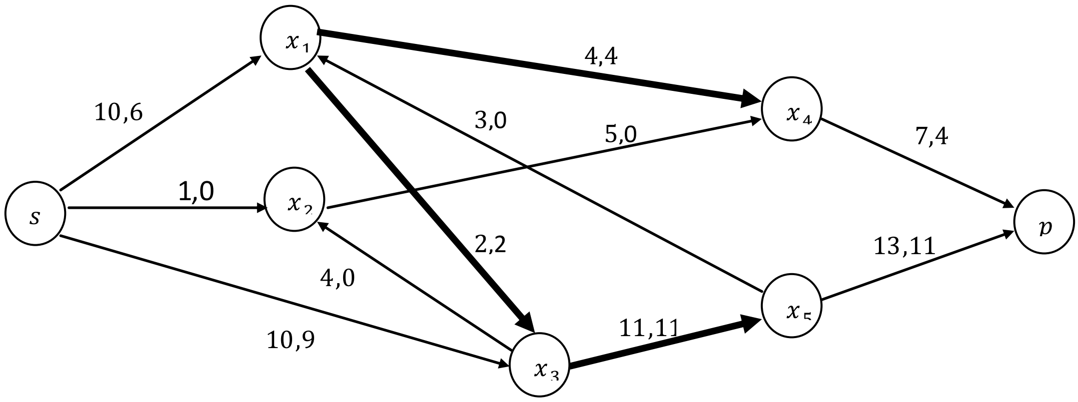
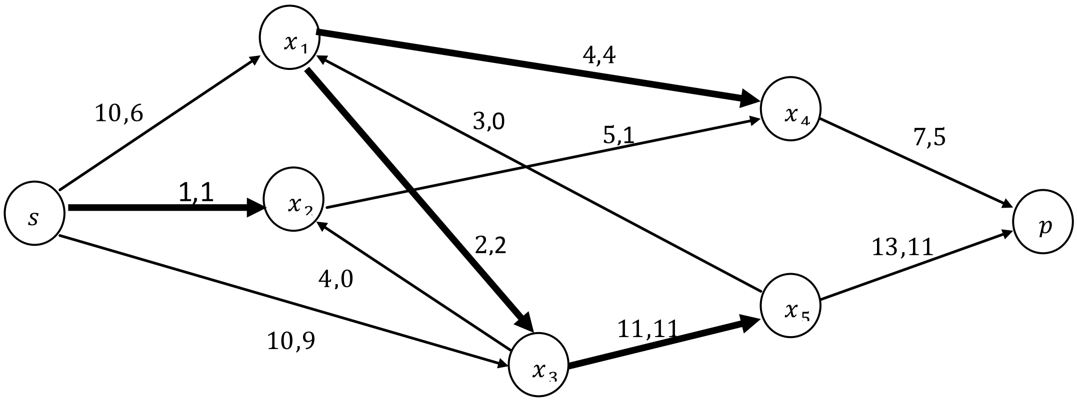
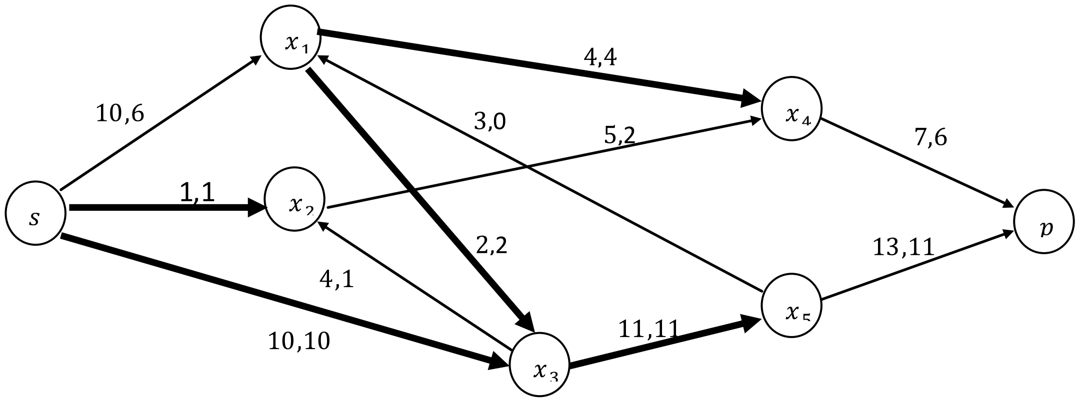
</td><td>4</td></tr>
<tr><td>I_2</td><td>

$A = \{s, x_1, x_3, x_5, p\}$ **(0,5 pt)**

$\varepsilon = min\{6, 2, 11, 13\} = 2$

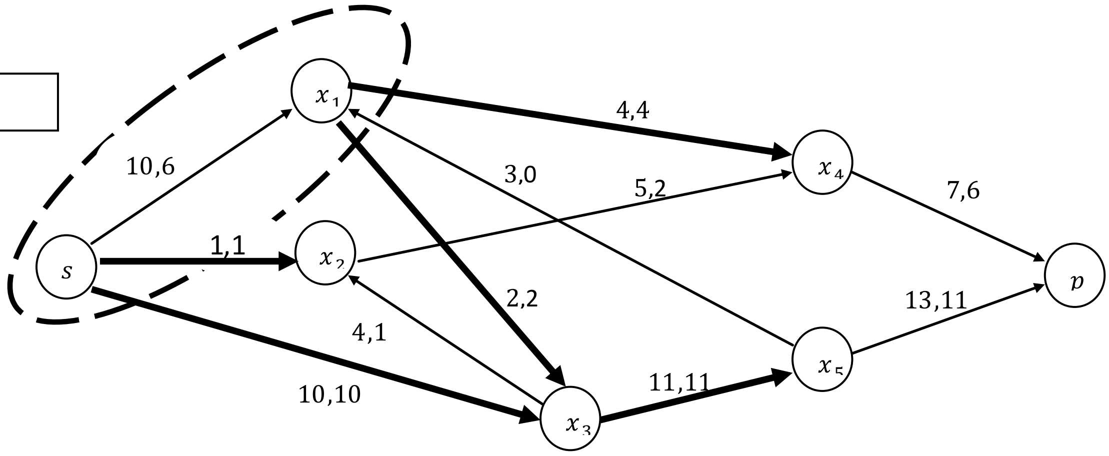


</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

I_k	**Le réseau de transport**	φ^k
I_3	$A = \{s, x_3, x_5, p\}$ **(0,5 pt)** $\varepsilon = min\{10,9,11\} = 9$ 	15
I_4	$A = \{s, x_2, x_4, p\}$ **(0,5 pt)** $\varepsilon = min\{1, 5, 3\} = 1$ 	16
I_5	$A = \{s, x_3, x_2, x_4, p\}$ **(0,5 pt)** $\varepsilon = min\{1, 4, 4, 2\} = 1$ 	17

I_k	Le réseau de transport
I_6	$A = \{s, x_1, \text{STOP}\}$ le sommet p n'est pas marqué alors TERMINE, le flot est Maximum : $\varphi_{max} = \varphi^5$ **(0,5 pt)** $\varphi_{max} = \sum \left(\varphi(s,x)/x \in \Gamma_R^+(s)\right) = \varphi^5(s,x_1) + \varphi^5(s,x_2) + \varphi^5(s,x_3) = 6 + 1 + 10 = 17$ ou $\varphi_{max} = \sum \left(\varphi(x,p)/x \in \Gamma_R^-(p)\right) = \varphi^5(x_4,p) + \varphi^5(x_5,p) = 6 + 11 = 17$ Alors : **(0,5 pt)** $\boxed{\boldsymbol{\varphi_{max} = 17}}$

La $(s-p)-coupe$:

Le réseau de transport
La (s, p) - coupe du réseau de transport est donnée par l'ensemble des sommets marqués $A = \{s, x_1\}$:   **(0,5 pt)**    $(s,p)-coupe = \{(s,x_2),(s,x_3),(x_1,x_3),(x_1,x_4)\}$ **(0,25 pt)** $C_p = S \cup P/S = \{s,x_1\}$ et $P = \{x_2,x_3,x_4,x_5,p\}$ avec $s \in S, p \in P$ et $S \cap P = \emptyset$. **(0,25 pt)** $C(C_p) = \sum_{\substack{x\in S \\ y\in P}} c(x,y) = c(s,x_2) + c(s,x_3) + c(x_1,x_3) + c(x_1,x_4) = 1 + 10 + 2 + 4 = \mathbf{17}$ **(0,25 pt)**   Cette coupe C_P est *minimale* car : **(0,5 pt)**   - Les arcs $(s,x_2),(s,x_3),(x_1,x_3),(x_1,x_4)$ sortant de la coupe sont saturés.   - L'arc (x_5,x_1) entrant dans la coupe a un flux $\varphi(x_5,x_1) = 0$.   Alors $\|\varphi_{max}\| = \| C_{p_{min}} \| = 17$ $\left\| \varphi_{C_{p_{min}}} \right\| = \varphi^+_{C_{p_{min}}}(S) - \varphi^-_{C_{p_{min}}}(S) = \sum_{\substack{x\in S \\ y\in P}} \varphi(x,y) - \sum_{\substack{x\in P \\ y\in S}} \varphi(x,y)$ $\left\| \varphi_{C_{p_{min}}} \right\| = \left(\varphi(s,x_2) + \varphi(s,x_3) + \varphi(x_1,x_3) + \varphi(x_1,x_4)\right) - \varphi(x_5,x_1)$ $\left\| \varphi_{C_{p_{min}}} \right\| = (1 + 10 + 2 + 4) - 0 = 17 - 0 = \mathbf{17}$ **(0,25 pt)**