♢ Dérivation ♢

1. Introduction

1.1. Exemple de la dette

Dans le tableau ci-dessous, se trouve la dette $D(t)$ des Etats-Unis, en milliards de dollars, au cours des dernières années.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2
2005	7932.7

Visiblement, la dette augemente ... On souhaite mesurer quantitativement cette augmentation afin de rendre cette étude plus rigoureuse.
Pour cela, nous calculons son taux d'accroissement.

t	$\frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

Remarque : Ce taux d'accroissement est en milliard de dollars par année.

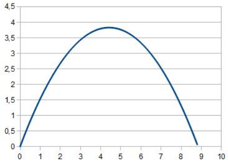
Sur l'observation de ce second tableau, on peut affirmer par exemple, qu'en moyenne, entre 1990 et 2000, la dette augmente de 244.09 millards par an.
Ce taux mesure la **vitesse moyenne** à laquelle la dette augmente.
Toujours à partir de ce tableau, en extrapolant, on peut estimer que l'augmentation **instantannée** de la dette en 1990 était de 303 milliards de dollar par an.

1.2. Exemple du ballon

Un ballon est lancé avec une vitesse initiale et un angle. On relève ses positions successives.

Vitesse initiale (en m/s) :	10
Angle de tir (en radians) :	1,047197551
Constante de pesanteur :	9,8

Temps	X	Y	Vitesse Y	Accélération Y
0	0	0		
0,02	0,1	0,171245081	8,562254038	
0,04	0,2	0,338570162	8,366254038	-9,8
0,06	0,3	0,501975242	8,170254038	-9,8
0,08	0,4	0,661460323	7,974254038	-9,8
0,1	0,5	0,817025404	7,778254038	-9,8
0,12	0,6	0,968670485	7,582254038	-9,8
0,14	0,7	1,116395565	7,386254038	-9,8
0,16	0,8	1,260200646	7,190254038	-9,8
0,18	0,9	1,400085727	6,994254038	-9,8
0,2	1	1,536050808	6,798254038	-9,8
0,22	1,1	1,668095888	6,602254038	-9,8
0,24	1,2	1,796220969	6,406254038	-9,8
0,26	1,3	1,92042605	6,210254038	-9,8
0,28	1,4	2,040711131	6,014254038	-9,8
0,3	1,5	2,157076211	5,818254038	-9,8
0,32	1,6	2,269521292	5,622254038	-9,8
0,34	1,7	2,378046373	5,426254038	-9,8
0,36	1,8	2,482651454	5,230254038	-9,8
0,38	1,9	2,583336534	5,034254038	-9,8



Entre deux mesures de position, on calcule le taux d'accroissement sur les ordonnées, ce qui nous donne une idée de la vitesse du ballon.
Puis à partir du résultat, on calcule le taux d'accroissement de la vitesse. On obtient ainsi une idée de la manière dont la vitesse évolue, c'est à dire que l'on connait l'accélération du ballon.

1.3. Bilan

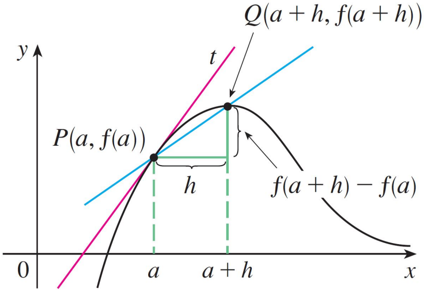
Le *taux d'accroissement* calculé sur un grand intervalle de temps, permet de comprendre la manière dont un phénomène va évoluer. Cela correspond à la notion de *vitesse moyenne*.
Lorsque l'intervalle de temps est suffisamment court, on obtient une idée de la *vitesse instantannée*.
Comme nousallons le voir, en termes mathématiques, il s'agit de la notion de *dérivée*.

2. Dérivation en un point

2.1. Nombre dérivée

Etant donnée une fonction f, un réel a et $h > 0$. Une équation de la droite joignant les deux points de la courbe d'abscisse a et $a + h$ est :

$$y = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) + f(a)$$


Q(a + h, f(a + h))
y
t
P(a, f(a))
h
f(a + h) − f(a)
0
a
a + h
x

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction définie sur I.

Définition : On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et appelée *nombre dérivée* de f en a.

Remarque : –Dans la définition ci-dessus, la limite est prise pour h tendant vers 0, par valeurs distinctes.

–Le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé *taux d'accroissement*.

–Pour qu'une fonction soit dérivable en un point, il faut que deux propriétés soient vérifiées : la limite du taux d'accroissement existe d'une part et d'autre part cette limite est finie.

–En notant $x = a + h$, la définition et la limite précédentes peuvent se réécrire :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemple : Pour la fonction $x \mapsto x^2$ en un réel a quelconque, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$$

On peut préciser un peu cette définition de dérivation en un point, de la manière suivante :

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

– On dit que f est *dérivable à gauche* en a lorsque :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'_g(a)$ cette limite et on l'appelle *nombre dérivée à gauche* de f en a.

– On dit que f est *dérivable à droite* en a lorsque :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'_d(a)$ cette limite et on l'appelle *nombre dérivée à droite* de f en a.

Proposition : La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

2.2. Tangentes

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in]a,b[$ et h un nombre réel suffisamment petit pour que $x_0 + h \in]a,b[$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_h(x_0 + h, f(x_0 + h)$ sont deux points de $\mathcal{C}_f$.
La droite $(M_0 M_h)$ a pour équation :

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$$

Regardez le fichier `animation.gif`
Lorsque h tend vers 0, ces droites (M_0M_h) tendent vers une droite limite, appelée *tangente* à $\mathcal{C}_f$ en x_0, d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque : – Lorsque $f'(x_0) = 0$, la courbe représentative de f admet une *tangente horizontale* en x_0.

Comme pour les nombres dérivées, on peut étudier la fonction f de manière plus précise, de la façon suivante :

–Si f admet un nombre dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une *demi-tangente* à gauche en x_0 dont une équation est :

$$y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

–Si f admet un nombre dérivée à droite $f'_d(x_0)$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une *demi-tangente* à droite en x_0 dont une équation est :

$$y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

– Lorsque la limite (par valeurs distinctes, à gauche, à droite) du taux d'accroissement en x_0 existe et est infinie, alors la fonction f n'est pas dérivable en x_0, mais $\mathcal{C}_f$ admet une *(demi-)tangente verticale* en x_0.

Proposition : La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en x_0 si et seulement si elle admet deux demi-tangente à gauche et à droite en x_0 de même pente.
Lorsque $\mathcal{C}_f$ admet en x_0 deux demi-tangente à gauche et à droite de pentes distinctes, on dit que x_0 est un *point anguleux*.

Exemple :

– La fonction $x \mapsto |x|$ a un point anguleux en $x_0 = 0$.

– La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a une demi-tangente verticale en $x_0 = 0$.

2.3. Approximation affine

Proposition : La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe un réel A et une fonction ε tels que :

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On a alors $A = f'(a)$.

Remarque :

– C'est un développement limité à l'ordre 1.

– On dit également que $f(x_0)+f(x_0)h$ est une *approximation affine* de f au voisinage de x_0. En posant $x = x_0 + h$, lorsque x est proche de x_0, on trouve :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$$

On reconnaît alors l'équation de la tangente.

Exemple : Pour la fonction $x \mapsto x^2$ on a :

$$(a+h)^2 = a^2 + (2a)h + h\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) = h$$

Exemple : Utilisons cette approximation affine pour la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ au voisinage de $a = 1$ pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{3.98}$ et $\sqrt{4.05}$ (qui soit plus précise que 2 of course !).

On commence par calculer la dérivée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

On a alors $f(1) = 2$ et $f'(1) = \frac{1}{4}$. Donc l'approximation affine est la droite d'équation :

$$y = \frac{1}{4}(x-1) + 2$$

Avec cette approximation on trouve $\sqrt{3.98} \simeq 1.995$ et $\sqrt{4.05} \simeq 2.0125$.

	x	From $L(x)$	Actual value
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 ...
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 ...
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 ...
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 ...
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 ...
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 ...
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 ...

2.4. Continuité & dérivabilité

Proposition : Un fonction dérivable en x_0 en continue en x_0.

Remarque : – La réciproque est fausse, par exemple la valeur absolue en 0.

3. Dérivation

3.1. Fonction dérivée

Définition : On dit que f est *dérivable sur I* si elle est dérivable en tout point de I. On définit la fonction dérivée de f par :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Lorsque f est dérivable en tout point x de l'intervalle $]a, b[$, on définit sa *fonction dérivée*, comme étant la fonction qui à x associe le nombre dérivée de f en x, c'est à dire $f'(x)$. On définit donc :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Remarque : Etant donnée une fonction f définissant une courbe $y = f(x)$, on rencontre les notations suivantes :

$$f'(x) = y' = \dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

Et pour la dérivée en un point a :

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

3.2. Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
λ, réel	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_*^+$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^+$
$\exp x$	$\exp x$	$\mathbb{R}$

Exemple : La dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$
La dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^3}$ est $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

Exercice 1 : L'équation du mouvement d'une particule est donnée par $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ où s est en centimètre et t en seconde.

1- Calculez l'accélération instantannée.

2- Calculez l'accélération à l'instant $t = 2$.

3.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition : Soit u et v deux fonction dérivables sur $]a, b[$ et k un réel. Alors :

- ku est dérivable et $(ku)' = ku'$.
- $u + v$ est dérivable et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si u ne s'annule pas, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
- Si v ne s'annule pas, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple : La dérivée de $f(x) = 3x^2$ est $f'(x) = 6x$.
La dérivée de $f(x) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$ est $f'(x) = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$.
La dérivée de $f(x) = (6x^3)(7x^4)$ est $f'(x) = 294x^5$.
La dérivée de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ est $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$.
La dérivée de $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3+6}$ est $f'(x) = \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$
La dérivée de $f(x) = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$ est $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$.
La dérivée de $f(x) = \frac{2x^2+2\sqrt{x}}{x}$ est $f'(x) = 3 - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Proposition : Si u est dérivable sur I, f est dérivable sur J, et si pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$ alors $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$$

Exemple :

–Si u est dérivable sur I et strictement positive, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

–Si u est dérivable sur I alors e^u aussi et $(e^u)' = u'e^u$

–Si u est dérivable et est strictement positive sur I alors $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

– Soit α un réel. Si u est dérivable et est strictement positive sur I alors u^α est dérivable sur I et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

– La dérivée de $x \mapsto \cos(ax+b)$ est $x \mapsto -a\sin(ax+b)$.

– La dérivée de $x \mapsto \sin(ax+b)$ est $x \mapsto a\cos(ax+b)$.

Exemple : La fonction f définie par $f(x) = \ln(x + e^{x^2})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}}$$

En effet, en posant $u(x) = x + e^{x^2}$ et $v(x) = x^2$, on trouve que :

$$u'(x) = 1 + v'(x)e^{v(x)} = 1 + 2xe^{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}}$$

Exemple : On suppose que l'on gonfle un ballon sphérique, alors son rayon et son volume augmentent conjointement.
Ces derniers sont également liés par la relation $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
En dérivant cette relation, on obtient :

$$V' = 4\pi r^2 r'$$

4. Applications de la dérivation

4.1. Sens de variation

Proposition : Soit f une fonction définie et dérivable sur $]a,b[$.
On a les équivalences suivante :

- f croissante sur $]a,b[\Longleftrightarrow$ pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f constante sur $]a,b[\Longleftrightarrow$ pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$.
- f décroissante sur $]a,b[\Longleftrightarrow$ pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \leqslant 0$.

Remarque : – Il n'y a pas équivalence lorsque l'on parle de fonctions strictement monotones. Par exemple, le cube.

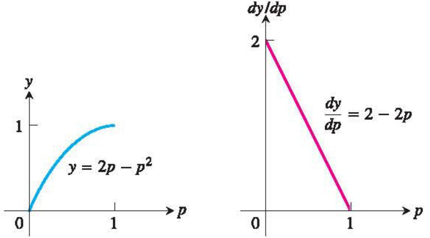
Preuve : Le sens direct découle de la définition. Pour la réciproque, on se donne $x, y \in]a, b[$ avec $x < y$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$ et il vient $f(y) = f(x) + (y - x)f'(c)$. Comme $f'(c) \geqslant 0$, on a $f(y) \geqslant f(x)$.

Remarque : – Le théorème des accroissements finis sera démontré ultérieurement.

Exemple : Le moine autrichien Gregor Mendel Johann (1822-1884), en travaillant sur les petits pois, a fournit la première explication scientifique de l'hybridization.
Ses relevés ont montré que si p (compris entre 0 et 1) est la fréquence du gène de la peau lisse dans les pois (dominant) et $1-p$ est la fréquence du gène pour la peau ridée dans les pois, alors la proportion de petits pois à peau lisse dans la prochaine génération sera :

$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

Le graphique ci-dessous suggère que la valeur de y est plus sensible à un changement en p si p est petit que lorsque p est grand. En effet, ce fait est confirmé par le dérivé qui montre que $\frac{dy}{dp}$ est proche de 2 lorsque p est proche de 0 et proche de 0 quand p est proche 1.



L'implication en génétique est que l'introduction de quelques gènes de peau lisse dans une population où la fréquence de pois peau ridée est grande aura un plus d'effet sur les générations postérieures qu'une augmentation similaire lorsque la population dispose d'une grande proportion de pois peau lisse.

4.2. Extrema

Définition : Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$.

– On dit que x_0 est un *maximum local* s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset]a,b[$ et pour tout $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

– On dit que x_0 est un *minimum local* s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset]a,b[$ et pour tout $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.

– On dit que x_0 est un *extremum local* si c'est un minimum local ou un maximum local.

Remarque : Le pluriel d'extremum est extrema; ce n'est ni extremums ni extremas.

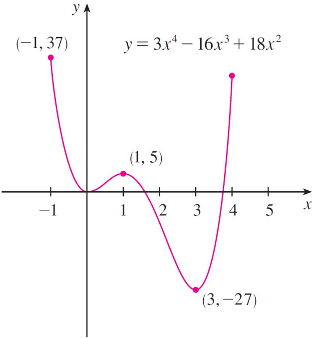
Proposition : Soit f une fonction définie et dérivable sur $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$.

– Si x_0 est un extrêmum local, alors $f'(x_0) = 0$

– Si f' s'annulle en changeant de signe de part et d'autre de x_0, alors x_0 est un extrêmum local.

Preuve : Elle est faite lors de la démonstration du théorème des accroissements finis.

Exemple : Sur l'intervalle $[-1;4]$, la fonction f définie par $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ admet un maximum global en $x = -1$ et deux maxima locaux en $x = 1$ et $x = 4$.
Elle admet un minimum local en $x = 0$ et un minimum global en $x = 3$.



y
(−1, 37)
y = 3x⁴ − 16x³ + 18x²
(1, 5)
−1
1
2
3
4
5
x
(3, −27)

Exercice 2 : Déterminez le point de la parabole $y^2 = x$, le plus près du point de coordonnées $(1; 4)$.
La réponse est le point de coordonnées $(2; 2)$.

Exercice 3 : Un magazin vend 200 lecteurs de Blu-ray par semaine à 350€ pièce. Une étude de marché montre qu'à chaque baisse de prix de 10€, les ventes augmentent de 20 unités par semaine.
Déterminez la demande et les revenus en fonctions de x. Quel est le prix optimal ?
Les réponses sont : $d(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200)$, $R(x) = xd(x)$ et le prix optimal est 225€.

4.3. Calcul de limites

Une limite indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ peut souvent s'interpréter comme limite d'un taux d'accroissement. On résout alors l'indétermination avec un calcul de dérivée.

Exemple :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

En effet, si l'on pose $f(x) = \sin x$ et $a = 0$ alors la limite précédente peut se réécrire sous la forme :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

On trouve alors que la limite est $f'(0)$ c'est à dire $\cos 0 = 1$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \frac{1}{4}$$

On procède, de même en posant $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $a = 3$.

5. Dérivées d'ordre supérieur

5.1. Définitions

Soit f une fonction dérivable sur I. Si sa dérivée f' est elle même dérivable, on note f'' sa dérivée et on l'appelle *dérivée seconde* de f. La dérivée successives de f sont notées : f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $\ldots$

Exemple : si $y = x^3 - 3x^2 + 2$ alors $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, $y^{(3)} = 6$, $y^{(4)} = 0$, etc.

Remarque :

– Nous l'avons vu précédemment : la dérivée première correspont à la vitesse.

– Le phénomène naturel qui permet de comprendre comment la vitesse évolue, ce qui permet de faire changer la vitesse, la faire augmenter au diminuer est l'accélération.
La dérivée seconde correspond donc à la notion d'accélération.

– Enfin, car nous nous arrêterons là, le phénomène naturel qui permet de changer l'accélération, de la faire augmenter ou diminuer, bref de la faire évoluer est l'impulsion.
La dérivée troisième correspond donc à la notion d'impulsion.

Exemple : Lorsqu'un footballeur donne un coup de pied dans un ballon, il générère une impulsion. Autrement dit, tous les footballeurs pratiquent quotidiennement les dérivées troisièmes !

Exercice 4 : La position d'une particule dans le temps est donnée par :

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

où t est en seconde et s en mètre.

1- Quelle est la vitesse de la particule ?

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

2- Quelle est la vitesse de la particule au temps $t = 2$? $t = 4$?

$$v(2) = -3m/s,\ v(4) = 9m/s$$

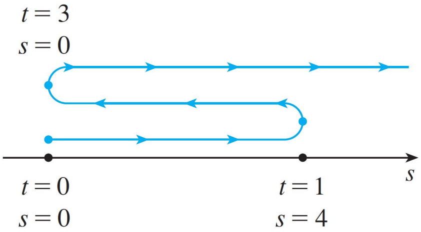
3- Quand la particule a-t-elle une vitesse nulle ?

$$v(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = 3$$

4- Quand la particule se déplace-t-elle dans le sens positif (a.k.a. elle avance) ?

$$v(t) > 0 \Longleftrightarrow t < 1 \text{ ou } t > 3$$

5- Représentez le mouvement de la particule.



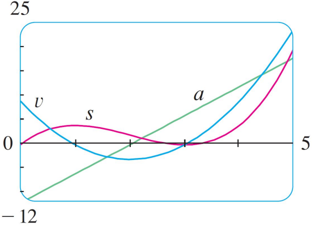
6- Déterminez la distance totale parcourrue par la particule pendant les cinq premières secondes.

$$|f(1) - f(0)| + |f(3) - f(1)| + |f(5) - f(3)| = 4 + 4 + 20 = 28m$$

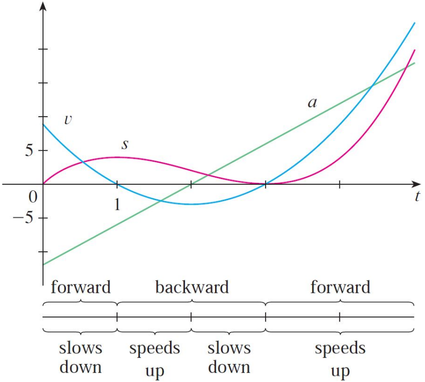
7- Calculez l'accélération. Quelle est l'accélération à $t = 4$?

$$a(t) = 6t - 12,\ a(4) = 12m.s^{-2}$$

8- Représentez la position, la vitesse et l'accélération.



9- Quand est-ce que la vitesse augmente ? diminue ?



Définition :

– On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, lorsque les fonctions f',…,$f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.

– On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Les fonctions exponentielles, cosinus et sinus sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.2. Formule de Leibniz

Proposition : Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction fg est n fois dérivable et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

Exemple : Pour $n \geqslant 2$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $x \ln x$ est $\frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$.

Preuve : On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la formule est vraie. Puis on a $(fg)' = f'g + fg'$ et l'on dérive n fois cette égalité : $(fg)^{(n+1)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)}$. On utilise alors la formule au rang n :

$$\begin{array}{rcl} (fg)^{(n+1)} & = & \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{(n+1-k)} \\ & = & \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{(n+1-k)} \\ & = & C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ & & + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} \end{array}$$

Or $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$ et $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, donc $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

6. Propriétés des fonctions dérivables

6.1. Théorème de Rolle et conséquences

Théorème : *de Rolle* Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ avec $a<b$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Remarque : – Il existe une tangente horizontale à la courbe représentative de f.

Preuve : Si f est constante alors sa dérivée est nulle et tout $x \in]a, b[$ convient.
Sinon, on note $f([a, b]) = [m, M]$. Alors, ou bien $m \neq f(a)$ ou bien $M \neq f(a)$ car sinon on aurait $m = M = f(a) = f(b)$ et f serait constante.

Remarque : Il s'agit ici d'une propriété des fonctions continues, le théorème de Weierstrass.

Par exemple $M \neq f(a)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$ et M est maximum de la fonction f. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]c-\alpha, c+\alpha[$, on a $f(x) \leqslant f(c)$. Ainsi pour $x \in]c-\alpha, c[$ on a : $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$ et pour $x \in]c, c+\alpha[$ on a : $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$. Donc, comme f est dérivable :

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geqslant 0, \ \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leqslant 0$$

Donc $f'(c) = 0$

6.2. Théorème des accroissement finis

Théorème : *des accroissements finis* Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ avec $a<b$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve : Soit $A(a,f(a)),\ B(b,f(b))$. La doite (AB) a pour équation :

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

Sur $[a,b]$, on définit φ par $\varphi(x)=f(x)-(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a})$. Et on applique le théorème de Rolle à φ.

Théorème : *Inégalité des accroissements finis* Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose de plus que f' est majorée sur $]a, b[$ par M. Alors, pour tous $x, y \in [a, b]$,avec $x \neq y$, on a $\mid f(y) - f(x) \mid \leqslant M \mid y - x \mid$.

6.3. Formule de Taylor

Théorème : *Formule de Taylor-Lagrange* Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, avec $a<b$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et telle que la dérivée $(n+1)^{ieme}$ existe sur $]a,b[$, alors il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a)+\tfrac{b-a}{1!}f'(a)+\tfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+ \\ &\quad \tfrac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$

La quantité $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelée *reste de Taylor-Lagrange*.

Preuve : Comme $a \neq b$, il existe un unique réel A déterminé par l'équation :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \tfrac{b-a}{1!} f'(a) + \tfrac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \\ &\quad \tfrac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A \end{aligned}$$

Il s'agit en effet d'une équation affine en A.
On définit alors l'application $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(b) - \Big(f(x) + \tfrac{b-x}{1!} f'(x) + \tfrac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \\ &\quad \tfrac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \tfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A \Big) \end{aligned}$$

Alors φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et l'on a :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(x))$$

Comme de plus $\varphi(a) = \varphi(b)$, on applique le théorème de Rolle à φ et il existe $c]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ c'est à dire $A = f^{(n+1)}(c)$.

Remarque : – La formule de Taylor au rang 0 est le théorème des accroissements finis