◇ Formulaire ◇

1. Nombres complexes

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'},\ \overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'},\ \overline{\overline{z}}=z,\ z=\overline{z}\iff z\in\mathbb{R},\ z=-\overline{z}\iff z\in i\,\mathbb{R}$$

$$|zz'|=|z|\,|z'|,\ \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|},\ ||z|-|z'||\leqslant|z\pm z'|\leqslant|z|+|z'|$$

$$\arg(\overline{z})=-\arg(z),\ \arg(-z)=\arg(z)+\pi,\ \arg(zz')=\arg(z)+\arg(z'),\ \arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$$

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta),\ \cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i\theta}\,e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')},\ \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$$

Si $z=x+iy, Z=a+ib$ avec $a,b,x,y\in\mathbb{R}$. Alors : $z^2=Z\iff\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\\x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$

2. Polynômes

$$\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\times\sum_{k=0}^{m}b_kX^k=\sum_{p=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{p}(a_k\,b_{p-k})X^p,\ (\sum_{k=0}^{n}a_kX^k)'=\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}$$

$\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)$, $\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$, $\deg(P\circ Q)=\deg P\times\deg Q$

Division euclidienne : Soit $A\in\mathbb{K}[X]$ et $B\in\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$. Il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que : $A=BQ+R$, $\deg R<\deg B$.

Racines multiples ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) : α est racine de multiplicité m du polynôme P
$\iff (X-\alpha)^m|P$ et $(X-\alpha)^{m+1}\nmid P$
$\iff P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(m)}(\alpha)\neq0$

Relations entre coefficients et racines : $P=(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)=a_nX^n+\cdots+a_0$ alors $(-1)^{n-j}\sigma_{n-j}=\frac{a_j}{a_n}$ où $\sigma_1=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $\sigma_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j,\dots,\sigma_n=\alpha_1\dots\alpha_n$

Irréductibilité :

−Tout polynôme se décompose de manière unique à l'ordre des facteurs près en un produit d'une constante et de polynomes irréductibles unitaires $P=\lambda Q_1^{\alpha_1}\dots Q_r^{\alpha_r}$.

−Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré un.

−Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux de degré un et ceux de degré deux dont le discriminant est strictement négatif.

3. Trigomométrie

$$\cos^2x+\sin^2x=1$$

$$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$$

$$\sin2x=2\sin x\cos x,\ \tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},\ \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$

4. Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x=e^x,\ \mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x=e^{-x},\ \mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$$

$$\mathrm{ch}\,(2x)=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=1+2\mathrm{sh}^2x=2\mathrm{ch}^2x-1\qquad\mathrm{sh}\,(2x)=2\mathrm{sh}\,(x)\mathrm{ch}\,(x)$$

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y),\ (\exp(x))^n=\exp(nx),\ \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)},\ \exp(x-y)=\frac{\exp x}{\exp y}$$

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\ \ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b,\ \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b,\ \ln(a^n)=n\ln a$$

$$a^b=\exp(b\ln a),\ \ln(a^b)=b\ln a$$

$$a^{b+b'}=a^ba^{b'},\ (a^b)^{b'}=a^{bb'},\ (aa')^b=a^ba'^b,\ a^{b-b'}=\frac{a^b}{a^{b'}},\ \left(\frac{a}{a'}\right)^b=\frac{a^b}{a'^b}$$

$$\mathrm{ch}\,(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}\,(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}\,(x)=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$$

$$\mathrm{argch}\,(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ \mathrm{argsh}\,(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ \mathrm{argth}\,(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

5. Limites

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty,\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$$

$$\alpha < 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0,\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0,\ \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} (\mathrm{sh}\, x - \frac{e^x}{2}) = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} (\mathrm{sh}\, x + \frac{e^{-x}}{2}) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} (\mathrm{ch}\, x - \frac{e^x}{2}) = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} (\mathrm{ch}\, x - \frac{e^{-x}}{2}) = 0$$

6. Dérivées

$$\sin' x = \cos x,\ \cos' x = -\sin x,\ \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ \ln' x = \frac{1}{x},\ \exp' x = \exp x$$

Si $f_a(x) = a^x$ alors $f_a'(x) = \ln a\, a^x$. Si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x),\ \mathrm{ch}\,'(x) = \mathrm{sh}\,(x),\ \mathrm{th}\,'x = \frac{1}{\mathrm{ch}\,^2 x} = 1 - \mathrm{th}\,^2 x$$

$$\mathrm{argth}\,'(x) = \frac{1}{1-x^2},\ \mathrm{argsh}\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \mathrm{argch}\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

7. Dérivation

$$(ku)' = ku',\ (u+v)' = u' + v',\ (uv)' = uv' + u'v,\ (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ (e^u)' = u'e^u,\ (\ln u)' = \frac{u'}{u},\ (u \circ v)' = v' \times u' \circ v$$

8. Développements limités

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\mathrm{ch}\,(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \cdots - \frac{1}{n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

9. Intégration

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

$$\forall t \in [a,b]\ f(t) \leqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2dt}$$

$$\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2}$$

Valeur moyenne de f sur $[a,b]$: $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx$$

10. Primitives

$$\alpha \neq -1,\ \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\ \int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

$$\int \cos x dx = \sin x,\ \int \sin x dx = -\cos x,\ \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x,\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x,\ \int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x,\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x,\ \int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$n \neq -1,\ \int u'(x)u^n(x)dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x),\ \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln u$$

$$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}dx = \sqrt{u},\ \int u'e^u dx = e^u,\ \int \frac{u'}{1+u^2}dx = \arctan(u),\ \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \arcsin(u)$$

$$\int u'(x)f' \circ u(x)dx = f \circ u(x)$$

11. Equations différentielles

Théorème : Les solutions de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont de la forme $y(t) = K\exp(-A(t))$ où K est une constante réelle et A est une primitive de a.

Théorème : Les solutions de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ sont de la forme $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ où y_h est une solution de l'équation homogène et y_p est une solution particulière de l'équation complète.

Théorème : Soit l'équation $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b, c sont trois nombres réels et $f(t)$ est une fonction régulière. On résout ces équations en commençant par résoudre l'équation caractéristique associée : $ar^2 + br + c = 0$. On note Δ le discriminant.
Lorsque $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1, r_2 et les solutions de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ sont $y(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$.
Lorsque $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une solution double réelle r et les solutions de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ sont $y(t) = (At + B)e^{rt}$.
Lorsque $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes $r = \alpha \pm i\beta$ et les solutions de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ sont $y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$.
Dans tous les cas, il reste ensuite à trouver une solution particulière.

Définition : Les équations automones sont des équations non-linéaires dans lesquelles la variable n'apparait pas. Elles ont la forme générale suivante :

$$y' = F(y)$$