# Approximation au sens des moindres carrés

## 1. Introduction

– C'est une méthode très générale, presque une philosophie.

– Nous ne traiterons pas les moindres carrés non-linéaires.

*Algorithmes de Gauss-Newton et de Levenberg-Marquardt*

– Nous allons tout de même faire de bonnes approximations.

## 2. Droite de régression

Il s'agit du cas le plus simple d'usage de la méthode.

– Les **données** sont $(t_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ où $t_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, on se donne $m$ points du plan.
C'est un nuage de points qui n'est pas dans le cloud.

– On **choisit** des fonctions de référence $(\phi_j(t))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ pour approximer notre nuage.

Comme nous sommes dans le paragraphe *Droite*, nous choisissons $\phi_1(t) = t$ & $\phi_2(t) = 1$.

– Nous **cherchons** des réels $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tels que ...

Remarque : Il y a autant de réels $x$ que de fonctions $\phi$; par contre, en général, le nombre de points du nuage est différent (et bien plus grand).

Remarque : Les $t_i$ sont supposés réels, mais il pourrait s'agit de $p$-uplets. D'autre part, on peut toujours se ramener à des $y_i$ réels.

– On note :

$$\phi_x(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t)$$

Dans le cas actuel, on a $\phi_x(t) = x_1 t + x_2$. Il s'agit d'une équation de droite.

– On cherche les $(x_j)$ de manière à ce qu'ils minimisent :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} ||y_i - \phi_x(t_i)||^2$$

Remarque : La fonction d'erreur $E$ est la somme des écarts au carré. Comme on la minimise, on fait des « moindres carrés ». Dans le cas de la régression linéaire de ce paragraphe, on veut $x_1$ et $x_2$ de manière à minimiser :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} ||y_i - (x_1 t_i + x_2)||^2$$

Autrement dit, la droite $y = x_1 t + x_2$ doit minimiser la somme des écarts au carré; elle doit donc passer « au plus près » du nuage.

**Exercice** 1 : On considère les trois points du plan $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ et l'on cherche la droite d'équation $y = x_1 t + x_2$ qui résout le problème des moindres carrés.

**1-** Trouvez une expression de l'erreur $E(x_1, x_2)$.

**2-** En dérivant par rapport à chacune des variables, trouvez le minimum d'erreur.

*Les dérivées sont nulles aux minima.*

La réponse est $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

**3-** Visualisez !

## 3. Améliorations possibles

– Au lieu de prendre des $t_i$ réels, on peut prendre des $p$-uplets. Par exemple dans le cas où $t = (t_1, t_2)$, on peut chercher un plan, c'est à dire des $(x_1, x_2, x_3)$ tels que :

$$y = x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3$$

passe au plus près du nuage. On cherche donc un plan dans l'espace qui approxime nos données.

– Au lieu de prendre juste deux réels et deux fonctions, on peut en prendre plus :

$$\phi_k(t) = t^{k-1}$$

Dans ce cas, on cherche par exemple $x_1, x_2, x_3, x_4$ tels que la fonction $\phi_x$ suivante passe au plus près du nuage.

$$\phi_x(t) = x_4 t^3 + x_3 t^2 + x_2 t + x_1$$

Remarque : Il s'agit toujours de moindres carrés linéaires. Car le problème est linéaire en les inconnues $x_j$ même si les fonctions ne le sont pas.

– Au lieu d'approximer par des droites, paraboles, polynômes, on peut utiliser des modèles exponentieles :

$$\phi_k(t) = e^{kt}$$

ou faire à la façon de Fourier :

$$\phi_k(t) = \sin kt$$

ou plein d'autres modèles encore !

Remarque : C'est toujours linéaire.

## 4. Formulation matricielle

On note : $A = (\phi_j(t_i))$, $X = (x_j)$ et $Y = (y_i)$.
De sorte que l'on a :

$$\begin{pmatrix} \phi_x(t_1) \\ \vdots \\ \phi_x(t_m) \end{pmatrix} = AX$$

$$E = ||AX - Y||^2$$

**Exercice** 2 : On considère à nouveau les trois points du plan $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$ et l'on cherche à nouveau la droite d'équation $y = x_1 t + x_2$ qui résout le problème des moindres carrés.
Ecrivez la matrice $A$ correspondante.

## 5. Résolution du problème

**Théorème :** Pour $\tilde{X}$ soit solution il faut que

$$^tAA\tilde{X} = \,^tAY$$

Remarque : C'est une condition nécessaire

– Si le rang de $A$ est $n$ alors il y a unicité. C'est le cas sauf lorsque l'on fait n'importe quoi !

– Si $n = m$, c'est de l'interpolation. En général, $m > n$.

**Exercice** 3 : Utilisez le théorème ci-dessus pour retrouver la droite correspondant aux trois points $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

## 6. Enfin des exemples

Exemple : Approximation linéaire. Mesures de la résistance d'un fil de platine en fonction de la température

$$R(10) = 104.1 \quad R(15) = 105.9 \quad R(20) = 108.1 \quad R(25) = 109.9$$
$$R(30) = 111.8 \quad R(35) = 113.8 \quad R(40) = 116.0$$