♢ Intégration et Primitives ♢

1. Introduction

L'opérateur intégral est un outil de mesure : de longueurs, d'aires, de volumes, de vitesses moyennes, de travaux de forces, etc.
Il existe plusieurs théories de l'intégration : théorie de Riemann, de Lebesgue.
L'opérateur présenté succintement et sans démonstration est celui de Riemann.

La notation $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'aire *algébrique* « sous » la courbe. Cette aire peut-être positive ou négative suivant le signe de $b-a$, suivant le signe de f.

Exemple : $\int_{-2}^{5} |x-3| + |x+1| dx = 33$

Théorème : Lorsque f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une fonction définie et dérivable sur $[a, b]$ telle que $F'(x) = f(x)$, on dit que F est une *primitive* de f.

2. Propritétés générales de l'opérateur intégral

Dans la suite, f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, λ et μ sont deux nombres réels.

Linéarité : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$

Positivité : $\displaystyle\forall t \in [a, b]\, f(t) \leqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Remarque : Si f est positive, son intégrale aussi. On peut en déduire une inégalité avec les valeurs absolues.

Propriété : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$

Remarque : Pour la démonstration, on utilise la positivité de l'intégrale, sachant que :

$$\forall t \in [a, b],\ -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$$

Donc, avec la linéarité :

$$-\int_a^b |f(t)|dt \int_a^b f(t)dt \int_a^b |f(t)|dt$$

D'où le résultat final.

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$$

Remarque : La démonstration consiste en une astuce relativement usuelle. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit : $\varphi(t) = f(t) + \lambda g(t)$. On a alors, avec la positivité :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b \varphi(t)^2 dt &= \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 + 2\lambda f(t) g(t) + \lambda^2 g(t)^2 dt \end{aligned}$$

Par linéarité :

$$0 \leqslant (\int_a^b g(t)^2 dt)\lambda^2 + (2\int_a^b f(t)g(t)dt)\lambda + \int_a^b f(t)^2 dt$$

Ce trinôme, en λ, doit donc garder un signe contant pour toute valeur réelle de λ; son discriminant doit donc être négatif ou nul

$$(2\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 - 4(\int_a^b g(t)^2 dt)(\int_a^b f(t)^2 dt) \leqslant 0$$

Ce qui entraine alors l'inégalité recherchée.

Inégalité de Minkowsky : $\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2}$

Remarque : Il s'agit d'un corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, avec la linéarité, on a :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt = \int_a^b f(t)^2 dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g(t)^2 dt$$

Puis avec Cauchy-Schwarz :

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt & \leqslant & \int_a^b f(t)^2 dt + \\ & & 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt} + \int_a^b g(t)^2 dt \\ & = & (\sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt})^2 \end{array}$$

Définition : La *valeur moyenne* d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Inégalité de la moyenne :

$$\forall t \in [a, b]\, m \leqslant f(t) \leqslant M \Longrightarrow m \leqslant \mu \leqslant M$$

Exemple : Si un mobile se déplace pendant deux heures à une vitesse comprise entre $80km/h$ et $100km/h$, alors sa vitesse moyenne est comprise entre $80km/h$ et $100km/h$.
Posons $f(t) = 1 + \frac{1}{2}(1 - e^{\frac{-t}{10}}) \sin t$, alors sa valeur moyenne sur $[0, 50]$ est comprise entre 0.5 et 1.5.

3. Primitives

3.1. Unicité

Sur un *intervalle*, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et la fonction F définie par $F(x) = \ln|x|$ sur les ensembles $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}^*$.

Parmi toutes les primitives F d'une fonction continue f sur $[a, b]$, il en existe une unique vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exemple : Pour $f(x) = x - 1$, on peut considérer $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$ ou $G(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

3.2. Notation

Si F est une primitive quelconque d'une fonction continue f sur $[a, b]$, on note :

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

De sorte que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Lorsque le symbole intégral est utilisé sans borne, $\int f$, il désigne une primitive quelconque de la fonction f.

3.3. Formules

$$\alpha \neq -1,\ \int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1},\ \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$\int \cos x dx = \sin x,\ \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x,\ \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x,\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x,\ \int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x,\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x,\ \int e^x dx = e^x$$

$$n \neq -1,\ \int u'(x) u^n(x) dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1}(x),\ \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u$$

$$\int u'(x) f' \circ u(x) dx = f \circ u(x)$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^2 3x^2 - 1dx = 6$

La valeur efficace d'une fonction périodique f de période T est $f_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f^2(t)dt}$. Si $f = f_{max}\cos(\omega t + \varphi)$, alors $f_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{max}$.

4. Techniques de calculs

4.1. Integration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables, dont la dérivée est continue, sur un intervalle $[a, b]$ alors :

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Exemple : A l'aide d'une intégration par parties, on trouve une primitive à $\ln x$.
A l'aide de plusieurs intégrations par parties successives, on peut calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

4.2. Changement de variable

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ dont la dérivée est continue, et une fonction φ dérivable sur $[c, d]$ dont la dérivée est continue, telle que $\varphi([c, d]) \subset [a, b]$. Alors, on a :

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx$$

Exemple : Utilisation dans les deux sens de l'égalité précédente.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4},\ x = \varphi(t) = \cos t$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3},\ t = \sin(x),\ x = \arcsin(t)$$

4.3. Les stratégies usuelles

– *Polynômes trigonométriques*

On cherche des primitives à $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$. Lorsque p est impair, on pose $x = \sin t$; lorsque q est impair, on pose $x = \cos t$; lorsque p et q sont pairs, on linéarise.

– *Fractions rationnelles*

On décompose en éléments simples; les termes délicats à gérer sont ceux de la forme $\frac{a}{(x^2+1)^n}$ pour lesquels on fait une ou plusieurs intégrations par parties.

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

– *Fractions rationnelles trigonométriques*

On utilise les règles de Bioche; si la quantité $F(\cos t, \sin t)dt$ est invariante par la transformation :

$t \mapsto -t$, alors on pose $u = \cos t$

$t \mapsto \pi - t$, alors on pose $u = \sin t$

$t \mapsto \pi + t$, alors on pose $u = \tan t$

Quand rien ne fonctionne, on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Exemple : Ces transformations sont utiles pour trouver une primitive à $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ ou encore $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$.

– *Fractions rationnelles trigonométriques hyperboliques*

On applique les règles de Bioche en faisant comme si les ch étaient des cos et les sh des sin.

– *Fractions rationnelles avec des* $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ *ou* $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Pour la première famille, on pose $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Pour la seconde famille, on met le trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique, puis on pose un changement de variable :

La racine est de la forme $\sqrt{1-x^2}$, on pose $x = \sin t$.
La racine est de la forme $\sqrt{1+x^2}$, on pose $x = \operatorname{sh} t$.
La racine est de la forme $\sqrt{x^2-1}$, on pose $x = \operatorname{ch} t$.

On est alors revenu à une fraction rationnelle trigonométrique, éventuellement hyperbolique.

Enfin, on a les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Exemple : On a :

$$\int \frac{1+\sqrt{2x+1}}{2x+2}dx = \sqrt{2x+1} - \arctan(\sqrt{2x+1}) + \frac{1}{2}\ln(2x+2)$$

On recherche la position du centre de gravité du demi-disque $\{x^2+y^2=R^2, x \geqslant 0\}$. L'ordonnée est nulle par symétrie, l'abscisse est :

$$x_G = \frac{\int x\, y\, dx}{\int y\, dx} = \frac{\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx}{\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx} = \frac{4R}{3\pi}$$