1 Introduction

Cette feuille d'exercices pour le TEA est une feuille de **prérequis**. Le contenu de cette feuille sert donc de base au cours de méthodes numériques.

2 Résolutions exactes

Objectifs :

- Réviser la formule du discriminant

Usages :

- Effectuer des tests unitaires

Exercice 1. Résolvez les équations suivantes :

1. $x^2 + x - 6 = 0$
2. $x^2 + 5x + 6 = 0$
3. $\dfrac{x+3}{x-1} = 3$
4. $\dfrac{3x+2}{x+2} = x$

3 Suites

Objectifs :

- Itérer une suite
- Représenter graphiquement
- Conjecturer son comportement

Usages (algorithmes itératifs) :

- Algorithme de Newton
- Algorithme du point fixe
- Algorithme de descence de gradient

Exercice 2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{4}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Sur une même graphique, représentez la droite d'équation $y = x$, la courbe représentative de f, et les premiers termes de la suite (escalier, colimaçon) pour $u_0 = -3$, $u_0 = -1$, $u_0 = 1$ et $u_0 = 3$.
2. Pour les quatre conditions initiales précécentes, calculez les termes u_1, u_2, u_3, u_4.
3. Résolvez l'équation $f(x) = x$.
4. Faites le lien entre les questions précédentes !

Exercice 3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 \geq -2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Sur une même graphique, représentez la droite d'équation $y = x$, la courbe représentative de f, et les premiers termes de la suite (escalier, colimaçon) pour $u_0 = -1$ et $u_0 = 3$.
2. Résolvez l'équation $F(x) = x$.

4 Dérivées

Objectifs :

- Réactiver les formules de dérivation
- Mener un calcul littéral

Vous pouvez obtenir les réponses à l'exercice suivant sur le site Wolfram Alpha

Usages :

- Méthode de Newton
- Interpolation par les splines
- Algorithme de descente de gradient
- Approximation avec des développements limités

Exercice 4. Calculer les dérivées et dérivées secondes des fontions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{3x-7} \quad x \mapsto x\ln(x-1) \quad x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1}-x) \quad x \mapsto e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$x \mapsto \frac{x+2}{e^x} \quad x \mapsto \frac{x^2+3}{e^x-1} \quad x \mapsto x-\ln(1-x)+2^x \quad x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

$$x \mapsto e^x\sin(2x) \quad x \mapsto \frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x} \quad x \mapsto 2\cos^2(3x+\tfrac{\pi}{3}) \quad x \mapsto \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$$

Simplifiez au mieux vos résultats !

5 Systèmes linéaires

Objectifs :

- Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss
- Représenter un ensemble de solutions

Usages :

- Résoudre un problème d'interpolation
- Résoudre un problème de moindres carrés
- Résoudre un problème d'optimisation linéaire

Exercice 5. Résolvez les systèmes linéaires suivant :

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = & 5 \\ 2x & -4y & +z & = & 5 \\ 3x & -5y & +2z & = & 8 \end{cases}, \begin{cases} x & +2y & -z & = & 5 \\ 2x & +y & +z & = & 10 \\ x & & +2z & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -y & +3z & = & 0 \\ -x & +4y & +z & = & 3 \\ & -3y & -4z & = & -3 \end{cases}, \begin{cases} 2x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ x & +2y & -3z & = & -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -y & -z & -t & = & 3 \\ 2x & & -z & +3t & = & 9 \\ 3x & +3y & +2z & & = & 4 \\ -x & -2y & +z & -t & = & 0 \end{cases}, \begin{cases} x & -y & +z & -t & = & 1 \\ x & +y & -z & -t & = & -1 \\ x & +y & +z & -t & = & 0 \\ x & -y & -z & +t & = & 2 \end{cases}$$

Exercice 6. Déterminez, selon les valeurs du paramètre a, l'ensemble des solutions des systèmes :

$$\begin{cases} x & -2y & = & 2 \\ x & -ay & = & a \end{cases}, \begin{cases} ax & +y & = & 2 \\ x & +ay & = & 2 \end{cases}$$

6 Polynôme

Objectifs :

- Réviser les opérations sur les polynômes
- Manipuler des expressions algébriques

Usages :

- Résoudre un problème d'interpolation
- Approximer une fonction

Exercice 7. On considère les couples (P, Q) de polynômes suivants :

- $P = X$, $Q = X^2 - 1$
- $P = X^2 - 2X + 1$, $Q = X^2 + X + 1$

Pour chacun des couples :

1. Ecrire les polynômes P' et Q'
2. Calculer PQ
3. Calculer $P'Q$ et PQ'
4. Vérifier que $(PQ)' = P'Q + PQ'$
5. Calculer les polyômes $P \circ Q$ et $Q \circ P$
6. Vérifier la formule $(P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$

Exercice 8. 1. Déterminer l'ensemble des polynômes de degré au plus deux, tels que :

$$P(X+1)P(X) = -P(X^2)$$

2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'unique polynôme P_n, tel que :

$$P_n - P_n' = X^n$$

7 Fonctions par morceaux

Objectifs :

- Découvrir les fonctions définies par morceaux
- Approfondir la notion de fonction

Usages :

- Résoudre un problème d'interpolation

Exercice 9. On considère les points $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(4;4)$ et $D(7;5)$.

1. Représentez sur un graphique ces quatres points et les trois segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$
2. Déterminez une équation des segments précédents.

Exercice 10. On considère les points $A(0;4)$, $B(3;3)$, $C(6;5)$ et $D(10;4)$.

On veut construire une courbe passant par ces points avec les contraintes suivantes :

1. Une parabole relie les points A et B.
2. Une droite relie les points B et C.
3. Une parabole relie les points C et D.
4. La tangente de la parabole en B coincide avec celle de la droite en B
5. La tangente de la parabole en C coincide avec celle de la droite en C

Déterminez les équations de ces paraboles et droites.

8 Intégration

Objectifs :

- Réviser le calcul de primitives et d'intégrales
- Pratiquer l'intégration par parties

Usages :

- Calculer des intégrales

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 x^2 + 1dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$
7. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$
8. $\displaystyle\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{4x+2}}$

Exercice 12. Soit $I = \int_0^\pi x\cos^2 xdx$ et $J = \int_0^\pi x\sin^2 xdx$.

1. Calculer I puis $I + J$
2. En déduire J

Exercice 13. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$

Exercice 14. A l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, calculez les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\ln(x)dx,\ \int_0^\pi x^2\cos(x)dx$$

9 Inéquations affines

Objectifs :

- Révoir les inéquations
- Partionner/Régionner le plan

Usages :

- Résoudre un problème d'optimisation linéaire

Exercice 15. Pour les deux systèmes suivant :

1. Représentez graphiquement la région solution.
2. Déterminez les coordonnées des sommets.

$$\begin{cases} x+y-3 & \geq & 0 \\ x-2y+2 & \geq & 0 \\ 4x-y-8 & \leq & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y+4 & \geq & 0 \\ 5x+7y-5 & \leq & 0 \\ x-y-3 & \leq & 0 \end{cases}$$

10 Fonctions de plusieurs variables

Objectifs :

- Formaliser les fonctions de plusieurs variables
- Acquérir du nouveau vocabulaire : gradient, hessienne

Usages :

- Algorithme de descente de gradient

Exercice 16. Pour chacune des applications f suivantes :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy, \; f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - (x+y)^4$$

1. Calculer le gradient ∇f de f défini par :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les points critiques de f, solutions de $\nabla f = 0$.
3. Calculer la matrice hessienne de f définie par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

11 Calculs matriciels

Objectifs :

- Transformer un système linéaire en écriture matricielle.
- Réviser les opérations matricielles, dont le produit.

Usages :

- Voir résolution de systèmes linéaires
- Approximation au sens des moindres carrés

Exercice 17. On considère les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la transposée de chacune de ces matrices.
2. Etant données deux matrices A et B appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer ceux des produits AB, ${}^tAB$, $A\,{}^tB$ et ${}^tA\,{}^tB$ qui sont définis.