Série 1 de TD

Exercice 1 : Composition d'aliments pou le bétail

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame.

L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indique ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	1	2	3	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,6%
Coût par tonne	25	41	39	

1. On note x_j (j=1, 2, 3) la fraction de tonne de produit j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.

2. Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème. Le résoudre géométriquement.

Exercice 2 :

Une fabrique de feux d'artifices produits trois types de fusées, des rosaces, des étoiles et des fontaines. Les prix de vente, les quantités requises de poudre et de carton ainsi que le nombre d'heures de construction sont différents pour chaque type de fusées et sont résumés dans le tableau suivant :

	Fusées de type rosaces	Fusées de type étoiles	Fusées de type fontaines
Tmps de construction en min	4	2	12
Quantité de poudre en g	100	150	100
Quantité de carton en g	20	10	40
Prix de vente	48	36	90

Pour la semaine à venir, la société dispose de 3000 min pour la construction, de 100kg de poudre et 12kg de carton.
Formuler le programme linéaire aidant la fabrique à déterminer une production maximisant son chiffre d affaire.

Exercice 3 : Produire à partir de lots

Une grande entreprise propose à un sous-traitant de fabriquer trois produits P1 ; P2 et P3. Elle s'engage par contrat à acheter au sous-traitant tout ce qu'il produira dans la limite d'au plus 100 unités de P1, 100 unités de P2 et 200 unités de P3 à un prix unitaire unique de 120 €. Ces produits sont fabriques à partir de trois composants A, B et C qui entrent en proportion variable dans chacun des produits. La composition des chacun des produits, exprimée en nombre d'unités de composant est donnée dans le tableau suivant :

	A	B	C
P1	3	5	2
P2	4	2	3
P3	1	2	5

Le sous-traitant ne peut acheter les composants que par lots. Deux types de lots sont disponibles, dont le nombre de composants et le prix d'achat unitaire sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

	A	B	C	Prix d'achat Unitaire (€)
Lot 1	3	2	3	50
Lot 2	2	3	3	60

Le sous-traitant souhaite définir un plan général lui permettant de dégager une marge maximale.

1. Modéliser ce problème comme un programme linéaire.

2. En utilisant un argument simple, montrer que le sous-traitant a intérêt à produire tout ce qui lui est demandé par l'entreprise.

3. En tenant compte de la remarque précédente, résoudre le programme linéaire et indiquer la valeur optimale de la marge.

Exercice 4

Chacune des m machines d'un atelier doit recevoir un opérateur. n personnes ont été présélectionnées. Chacune d'elles a subi un test de productivité sur chaque machine : désignons par P_{ij} la productivité en pièces par heure de la personne i sur la machine j.

Les machines sont ont parallèles, c'est-à-dire que la productivité totale de l'atelier est la somme des productivités des personnes affectés aux machines.

L'objectif est de déterminer une affectation des personnes aux machines permettant de maximiser la productivité totale.

Exercice 5

La compagnie aérienne SafeFlight utilise l'aéroport de Roissy-Charles-de-Gaulle comme hub pour minimiser le nombre de correspondances en Europe. Six vols de cette compagnie en provenance de Bordeaux, Clermon-Ferrand, Marseille, Nante, Nice et Toulouse atterrissent sur cette aéroport entre 11h et 12h30. Ils repartent vers Berlin, Berne, Bruxelles, Londres, Rome et Vienne entre 12h30 et 13h30. Le nombre de passagers en transfert entre les vols d'arrivée et les vols de départ sont donnés dans le tableau suivant :

Destinations							
Provenances		Berlin	Berne	Bruxelles	Londres	Rome	Vienne
	Bordeaux	35	12	16	38	5	2
	Clermont-Ferrand	25	8	9	24	6	8
	Marseille	12	8	11	27	3	2
	Nantes	38	15	14	30	2	9
	Nice	-	9	8	25	10	5
	Toulouse	-	-	-	14	6	7

Par exemple, si le vol en provenance de Bordeaux assure ensuite le vol à destination de Berlin, 35 passagers et leurs bagages peuvent rester dans leur avion à l'escale de Paris (l'aéroport de Roissy-Charles-de-Gaulle). Le vol en provenance de Nice arrive en retard pour être réemployé pour le vol vers Berlin, même chose pour le vol en provenance en Toulouse qui ne peut pas assurer les vols à destination de Berlin, Berne et Bruxelles (cases indiquées par un tiret dans le tableau).

Comment réemployer les avions arrivés pour les vols de départ pour minimiser le nombre de passagers changeant d'avion à Roissy ? Donner un modèle général en notant n le nombre d'avions et p_{ij} le nombre de passagers en transfert en i et j.

Indication : d'une part, les villes de destination doivent être desservies par un et un seul vol ; d'autre part, un vol et un seul doit quitter chaque ville d'origine.

Exercice 6 :

– Un fast-food vend des hamburgers et des cheeseburgers. Un hamburger utilise 125 g. de viande alors qu'un cheeseburger n'en utilise que 100 g.
– Le fast-food démarre chaque journée avec 10 kg de viande mais peut commander de la viande supplémentaire avec un coût additionnel de 2 EUR par kg pour la livraison.
– Le profit est de 0.02 EUR pour un hamburger et 0.015 EUR pour un cheeseburger.
– La demande ne dépasse pas 900 sandwiches / jour, et les surplus de viande sont donnés au Restos du Coeur.
Combien le fast-food doit-il produire de sandwiches de chaque type par jour ?

Exercice 7 :

Un boulanger a en réserve b_1 kilogramme de céréale de type 1 et b_2 kilogramme de céréale de type 2. En mélangeant ces céréales, il produit 3 types de farine. Les proportions respectives, en % des 2 types de céréales nécessaires à la fabrication des différentes farines sont données dans le tableau suivant :

farines

céréales		1	2	3
	1	75	50	25
	2	25	50	75

Le boulanger produit 4 types de pains à partir des différentes farines. Les quantités nécessaires en kg, de chaque sorte de farine pour produire un pain des différents types sont données dans le tableau suivant :

pains

farines		1	2	3	4
	1	0,2	0,25	0 ,1	
	2	0,3		0,1	0,1
	3		0,25	0,3	0,2

Les pains sont vendus à l'unité aux prix respectifs de p_1, p_2, p_3 et p_4.

Modéliser le problème de la recherche d'un plan de production de pains maximisant le chiffre d'affaires du boulanger (on suppose qu'il vend toute sa production quelle qu'elle soit) sous forme d'un programme linéaire. Préciser clairement les variables de décision, les contraintes et la fonction objectif.

Exercice 8 :

Trois étudiants doivent choisir un projet parmi trois proposés. Pour satisfaire tout le monde, le professeur demande à chacun de donner une note de préférence à chaque projet (de 3 à 1 : 3 pour le projet préféré, 1 pour le moins préféré). Le premier étudiant donne les notes1, 2 et 3 (il voudrait le projet 3 en priorité), le deuxième les notes 3, 2, 1, le troisième les notes 3, 1, 2. Pour choisir à qui attribuer quel projet, le professeur écrit un modèle de programmation linéaire maximisant la satisfaction totale des étudiants.

D'une façon générale, soit n le nombre total des étudiants et des projets, p_{ij} la note donnée par l'étudiant i au projet j. Désignant par x_{ij} la variable binaire valant 1 si l'étudiant i récupère le projet j, 0 sinon.

1. Etablir le programme linéaire qui permet de maximiser la satisfaction totale des étudiants.
2. Donner le programme linéaire pour le cas de n =3 cité ci-dessus.

Exercice 9 :

La compagnie Mouliseb doit fabriquer 1000 exemplaires de son grille-pain et peut le faire manuellement, de manière semi-automatisée ou entièrement automatisée. La fabrication manuelle demande 1 mn d'ouvrier qualifié, 40 mn d'ouvrier non-qualifié, et occupe 3 mn de la chaine d'assemblage. La fabrication semi-automatisée demande respectivement 4 mn, 30 mn et 2 mn des mêmes ressources et la fabrication automatisée demande 8 mn, 20 mn et 4 mn. On dispose de 4500 mn d'ouvrier qualifié, de 36000 mn d'ouvrier non-qualifié et de 2700 mn sur la chaine d'assemblage. Le coût de production d'un grille-pain est 7 Euros pour la production manuelle, 8 Euros pour la semi-automatisée et 8, 50 Euros pour la production automatisée.

1. Etablir le programme linéaire qui permet de trouver le plan de production minimisant le coût de production.
2. Les minutes de chaines d'assemblages non-utilisées peuvent être vendues à une autre entreprise au prix de 0, 50 Euros. Modifier la formalisation précédente pour tenir compte de cette possibilité.

Exercice 10 :

Présentation du problème de sac à dos : Étant donné plusieurs objets possédant chacun un poids et une valeur et étant donné un poids maximum pour le sac, quels objets faut-il mettre dans le sac de manière à maximiser la valeur totale sans dépasser le poids maximal autorisé pour le sac ?

Dans notre cas, nous avons un sac à dos de poids maximal P et n objets. Chaque objet i, a un poids p_i et une valeur v_i.

1. Formuler le problème du sac à dos sous la forme d'un programme linéaire.
2. Pour n = 4 et un sac à dos d'un poids maximal de 30 kg (*P* = 30), nous avons les données suivantes :

Objet i	1	2	3	4
pi	7	4	3	3
vi	13	12	8	10

Donner le programme linéaire associé.

Exercice 11 :

Un agriculteur veut mettre en valeur un espace de 40 hectares, il dispose d'un montant annuel de 63000 u.m.(unités monétaires), de 840 journées de travail et se propose de semer du maïs, du blé et du soja. La préparation à la culture coûte 1500 u.m. par ha pour le maïs, 1800 u.m. par ha pour le blé et enfin 1050 u.m. par ha pour le soja. La culture d'un ha nécessite : 18 journées de travail pour le maïs, 27 journées pour le blé et 15 journées pour le soja Les gains espérés sont respectivement proportionnels à : 420 u.m. pour le maïs, 510 u.m. pour le blé et 360 u.m. pour le soja.

1. Formuler ce problème à l'aide d'un programme linéaire pour aider l'agriculteur à faire ces choix et à dégager un gain maximal.

2. L'agriculteur apprend que la prime d'encouragement à la culture du soja est susceptible d'être modifiée. Il désire savoir à quel taux de prime p il devrait changer la distribution de ces cultures (si p est le taux de la prime alors le gain espéré pour le soja sera 360+p*360).

   Reprendre la formulation du problème.
3. Résoudre ce PL par la méthode du simplexe en discutant suivant la valeur de p.

Exercice 12 :

Un atelier mécanique produit des pièces de 2 types A et B en utilisant 3 machines I, II et III. Chaque pièce doit passer sur les trois machines. On connaît le temps de passage t_{ij} d'une dizaine de pièces de type i sur la machine j. La machine j est disponible pendant a_j heures par jour.

La production de 10 pièces de type i procure une recette de c_i K€.

1. Exprimer le problème sous forme d'un programme linéaire.
2. Donner le programme linéaire pour l'application numérique suivante :

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad a = (10 \quad 8 \quad 15) \quad c = (3 \quad 2)$$

Exercice 13 :

Un fabricant de fils téléphoniques produit trois types de fils, F1, F2 et F3 obtenus à l'aide de cuivre enrichi de cadnium et d'étain.

Le tableau donne la masse de cuivre (en kg), de cadnium et d'étain (en d´décagrammes, dag) nécessaires pour fabriquer 100 m de chacun de ces fils.

	F1	F2	F3
Cuivre	9	5	6
Cadnuim	2	1	2
Etain	0	0	1

L'entreprise dispose de 600 kg de cuivre, 150 décagrammes de cadnium et 60 décagrammes d'étain. Elle emploie en outre des ouvriers pour couler puis tréfiler les alliages : il faut une journée de travail pour fabriquer 100 m de fils F1, F2 ou F3. La force de travail disponible pour la production des fils s'élève à 90 jours. Enfin, les profits relatifs à la fabrication de 100m de fils s'élèvent resp. à 4200, 3900 et 5200 pour F1, F2 et F3.

1. Ecrire le PL correspondant au problème de maximisation de profit de l'entreprise.
2. L'entreprise décide de protéger les fils F2 et F3 en les gainant avec du polythène. Il faut 100 m de polythène pour gainer 100 m de F2 ou F3.

   Sachant que l'entreprise dispose de 80 hm (hectomètres) de gaine, reformuler le PL.

Exercice 14 :

On considère trois centrales électriques de capacité de production respectives 700, 400 et 500 megawatt. Ces centrales desservent deux villes dont les besoins en électricité sont de 800 megawatt chacunes. Chaque centrale peut fournir tout ou partie de sa production à chacune des villes.

Les coûts d'acheminement (par megawatt) dans le réseau électrique sont donnés par le tableau suivant :

	Ville 1	Ville 2
Centrale 1	20	25
Centrale 2	15	10
Centrale 3	10	15

Le problème est de subvenir aux besoins des villes à moindre coût.

1. Modéliser sous forme d'un programme linéaire.

Nous généralisons le problème de la façon suivante : on considère m centrales et n villes, avec a_i la capacité en megawatt de la centrale i, b_j le besoin megawatt de la ville j et c_{ij} le coûts d'acheminement de la centrale i à la ville j (nous supposons que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$).

2. Donner une modélisation en programme linéaire du problème sous sa forme générale.

Exercice 15 :

L'entreprise Sugar Donut Bakers, Inc. est reconnue pour ses beignes glacés; elle prépare aussi des beignes saupoudrés de sucre en poudre. Les beignes glacés lui rapportent un profit de 0,07$ l'unité et les beignes saupoudrés un profit de 0,05$ l'unité. Trois opérations principales sont nécessaires dans la préparation de ces beignes: la cuisson, le saupoudrage (beignes saupoudrés de sucre en poudre seulement) et le glaçage (beignes glacés seulement).

La production de l'entreprise est limitée quotidiennement comme suit:

Cuisson:	au plus 1400 beignes,
Saupoudrage:	au plus 1200 beignes,
Glaçage:	au plus 1000 beignes.

Le responsable de la production exige que la production de beignes glacés doive être d'au moins 600 quotidiennement.

Modéliser par un programme mathématique linéaire (P).

Exercice 16 :

Une entreprise produit et vend deux produits différents. La production de la société est soumise aux contraintes suivantes :

Il y a 20000 heures de temps machine dans le mois. Produire une unité prend 3 heures de temps machine pour le premier produit et 4 heures pour le second produit. Les coûts matériels et autres pour la fabrication d'une unité du premier produit s'élèvent à 3CHF, tandis que produire une unité du deuxième produit coûte 2CHF. Les produits sont vendus 6 CHF et 5 CHF par unité, respectivement. Le budget disponible pour la production est de 4000 CHF.

3. Modéliser sous forme d'un programme linéaire tenant compte des différentes contraintes.
4. Nous supposons maintenant qu'initialement le budget est 4000 CHF et que 25% des revenus de la vente du premier produit peuvent être utilisés immédiatement comme budget supplémentaire pour la production, de même que 28% des revenus de la vente du second produit.
   Modifier le programme linéaire du problème tenant compte de cette augmentation de budget.

Exercice 17 :

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux M_1 et M_2. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300 u.m. pour M_1 et de 200 u.m. pour M_2.

	M1	M2	Temps libre de l'atelier
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	3	30
Sablage	2	1	12

Modéliser sous forme d'un programme linéaire pour aider la direction de l'usine à bien utiliser les temps libres des ateliers et réaliser le meilleur profil.

Exercice 18 : Planification de personnel

Une grande société souhaite élaborer son plan d'évolution du personnel pour les trois année à venir. Ce plan concerne trois catégories de personnel de niveau N1, N2 et N3 (par niveau hiérarchique décroissant). L'effectif présent pour l'année en cours (année 0) et les besoins prévus pour les 3 années suivantes sont indiqués dans le tableau ci-après :

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3
N1	200	150	200	200
N2	500	700	500	500
N3	3000	2000	3000	3000

L'évolution naturelle des effectifs de l'année i-1 (i=1, 2,3), compte tenu d'une part des départs volontaires en retraite, d'autre part des promotions, est indiquée dans la matrice suivante :

	N1	N2	N3
N1	0,95		
N2	0,02	0,90	
N3	1	0,01	0,80

Cette matrice signifie, par exemple, que si l'on considère l'effectif présent lors de l'année i-1 au niveau N3, 80% restera au niveau N3 lors d'année i, 1% sera promu au niveau N2, les 19% restant quittant l'entreprise (départ volontaire ou retraite)

Il existe deux possibilités d'influer sur l'évolution naturelle du personnel :

3. Recruter du personnel. Les recrutements sont possibles pour les catégories N2 et N3 et engendrent des coûts de recrutement identiques pour chaque année considérée
4. Licencier du personnel. Les licenciements concernent toutes les catégories de personnel et engendrent des coûts de licenciement identiques pour chaque année considérée.

Les recrutements et licenciements s'effectuent en fin d'année i-1 et deviennent effectifs dés le début de l'année i (i=1, 2, 3)

	Coûts salariaux (k€/an)	Coûts de recrutement k€	Coûts de licenciement k€
N1	100	--	50
N2	70	10	35
N3	50	5	25

1. Déterminer l'évolution naturelle (hors recrutement et licenciement) du personnel lors des trois années à venir.
2. Formuler un programme linéaire permettant de planifier l'évolution du personnel sur trois ans à coûts total minimum.
   a. Définir les variables de décision.
   b. Ecrire les différentes contraintes
   c. Ecrire la fonction objectif.

3. Le problème modélisé en question 2 admet une solution optimale de coût 606 489K€. (cette solution est $y_{12} = 220$; $y_{23} = 20$; $y_{32} = 1400$; $y_{33} = 600$; $z_{11} = 4$; $z_{22} = 150$; $z_{31}=400$; toutes les autres variables y_{ij} et z_{ij} sont nulles, les variables x_{ij} se déduisent des valeurs précédentes). Cette politique entraîne 554 licenciements. Le directeur du personnel, des licenciements occasionnés, souhaite étudier l'impact d'une augmentation du coût de gestion du personnel sur le nombre de licenciements.

a. Il s'intéresse d'abord à une formulation du problème qui imposerait un nombre maximal L de personnes licenciées sur l'horizon de planification. Modifier le problème linéaire formulé en 2 afin de modéliser ce nouveau problème.

b. Il considère ensuite une formulation du problème visant à minimiser le nombre total de personnes licenciées durant les trois années, tout en limitant le coût total à un montant maximum B. Modifier le programme linéaire formulé en 2 afin de modéliser ce nouveau problème.

Exercice 20

Un bucheron a 100 hectares de bois de feuillus. Couper un hectare de bois et laisser la zone se régénérer naturellement coûte 10 u.m. par hectare, et rapporte à terme 50 u.m. Alternativement, couper un hectare de bois, et replanter avec des pins coûte 50 u.m par hectare, et rapporte à terme 120 u.m. Le bucheron n'a que 4000 u.m en caisse au début de l'opération.

1. Modéliser sous forme d'un programme linéaire pour pour aider le bucheron à déterminer la meilleure stratégie à adopter