Propriétés fondamentales d'un programme linéaire

Maria ZRIKEM

Ensa de Marrakech

Programme linéaire : problème d'optimisation de n variables de décision réelles où la fonction objectif est linéaire et où les contraintes sont également linéaires (équations ou inéquations).

Solution réalisable ou admissible : C'est un point $x=(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifie les contraintes du problème.

Domaine réalisable : C'est l'ensemble des solutions réalisables.

Solution optimale : c'est une solution réalisable qui minimise (ou maximise) la fonction objectif sur le domaine réalisable.

Programme linéaire : problème d'optimisation de n variables de décision réelles où la fonction objectif est linéaire et où les contraintes sont également linéaires (équations ou inéquations) :

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max (Min)} & z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i \in I \subseteq \{1,\ldots,m\} \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j & \geq & b_k & k \in K \subseteq \{1,\ldots,m\} \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j & = & b_r & r \in R \subseteq \{1,\ldots,m\}
\end{array}
$$

avec I, K, et R disjoints et $I \cup K \cup R = \{1,\ldots,m\}$.

Un programme linéaire (P.L.) est dit **canonique** s'il est de la forme

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{s.c.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & & i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

- Problème de maximisation
- Toutes les variables sont non négatives
- Toutes les autres contraintes sont des inéquations du type "$\leq$"

Formulation matricielle : $\left\{ \begin{array}{lll} \text{Max} & z = & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right.$

Un programme linéaire est **dit standard** s'il est de la forme

$$\begin{array}{llcll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- Problème de maximisation
- Toutes les variables sont **non négatives**
- Toutes les autres contraintes sont des équations

Formulation matricielle : $\left\{ \begin{array}{llcl} \text{Max} & z = & \mathbf{cx} & \\ \text{s.c.} & & \mathbf{Ax} & = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$

Règles de transformation

Propriété 1.1 Tout P.L. peut se « mettre » au choix sous forme canonique ou standard.

Quelques règles de transformation :

- Inéquation $\longrightarrow$ équation : ajouter une variable d'écart

$$ax \leq b \iff ax + s = b, s \geq 0$$

- **Inéquation→ équation : retrancher une variable de surplus**

$$ax \geq b \iff ax - s = b,\ s \geq 0$$

- Équation $\longrightarrow$ inéquations :

$$ax = b \iff \begin{cases} ax & \leq & b \\ ax & \geq & b \end{cases} \iff \begin{cases} ax & \leq & b \\ (-a)x & \leq & -b \end{cases}$$

- Variable libre :

$$x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Règles de transformation

- Min→ MAx :

$$\text{Max}\,(f(x)) = -\ \text{Min}\,(-f(x))$$

Pour le P.L. initial

$$\begin{array}{llrcrcl}
\text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 \\
& & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\
& & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
& & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

le P.L. canonique équivalent est

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Max} & w = & 3x_1^+ & - & 3x_1^- & - & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1^+ & - & x_1^- & + & x_2 & \leq & 6 \\
& & -x_1^+ & + & x_1^- & - & x_2 & \leq & -6 \\
& & -x_1^+ & + & x_1^- & + & 2x_2 & \leq & -4 \\
& & x_1^+ & , & x_1^- & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

avec $z = -w$ et $x_1 = x_1^+ - x_1^-$.

Polyèdres et points extrêmes

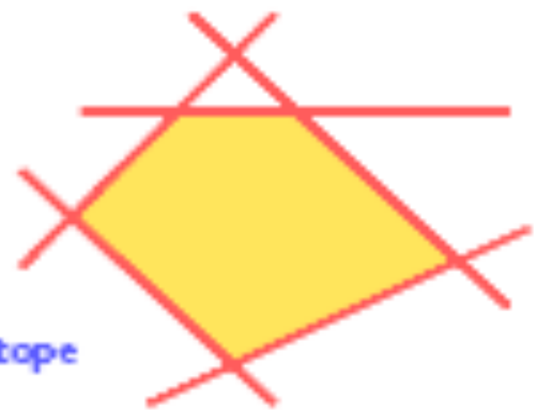
Un **polyèdre** $P \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

Un polyèdre est un ensemble convexe fermé et peut s'écrire :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}\}\,.$$

Un **polytope** est un polyèdre borné.

Polyedre



Polytope

Point extrême : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$

Le point $x^* \in C$ est une point extrême de C si x^* ne se trouve à l'intérieur d'aucun segment de C non réduit à un point.

Théorème: Soit la matrice $A : m \times n$ avec $rang(A) = m$

Soit X le polytope $X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geqslant 0\}$

x est point extrême de X ssi x est une solution de base réalisable du système $Ax = b, x \geqslant 0$.

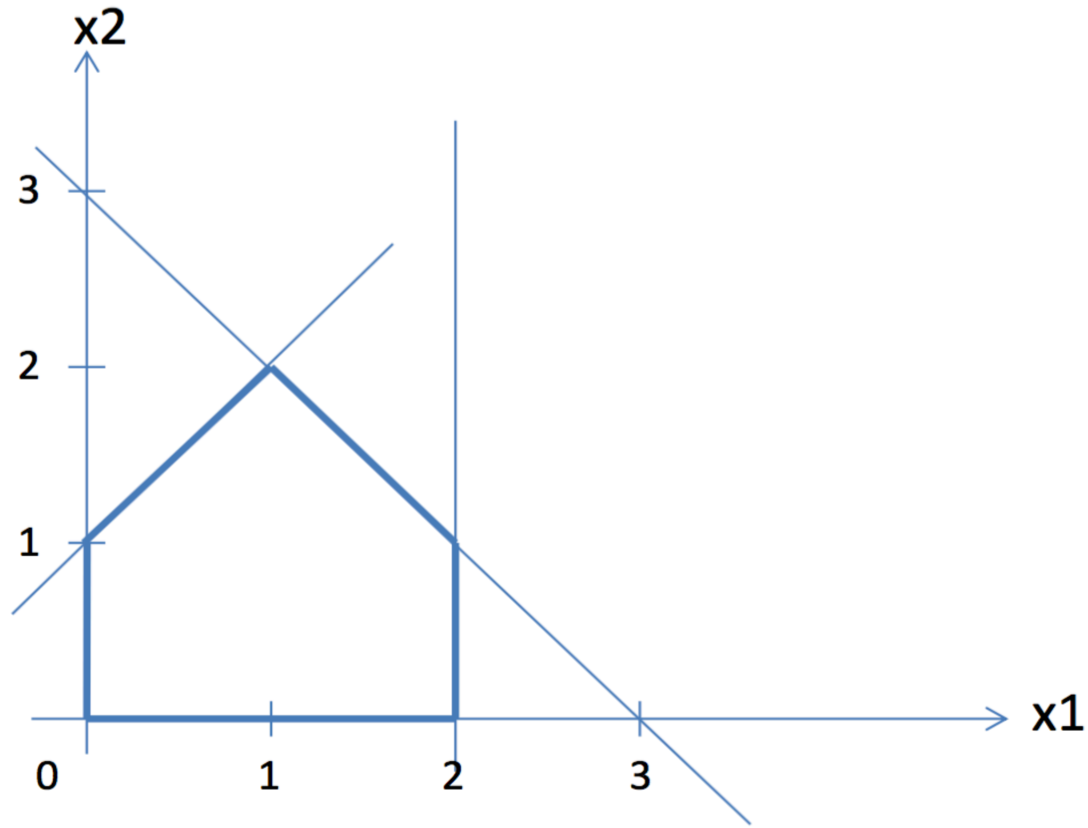
Corollaire :

S'il existe une solution réalisable pour un problème de programmation linéaire alors, il existe une solution optimale qu'est un point extrême du polytope associé.

Chaque contrainte d'un P.L. définit un demi-plan de IR^2 (ou une droite s'il agit d'une équation) et l'ensemble des solutions du système de contraintes d'un P.L. définit une région polygonale de IR^2 appelée le domaine admissible du P.L.

$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

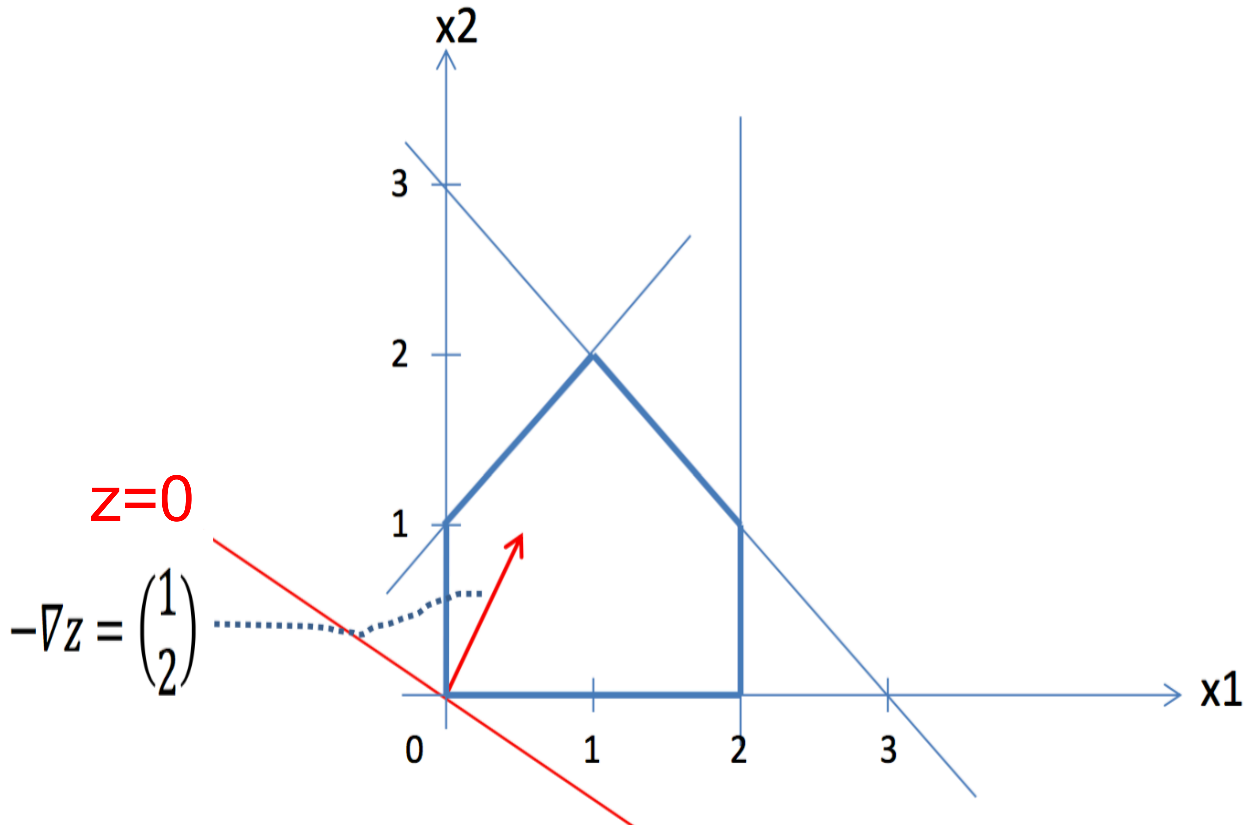


Résolution graphique dans le plan

On minimise l'objectif z sur le domaine tracé

$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

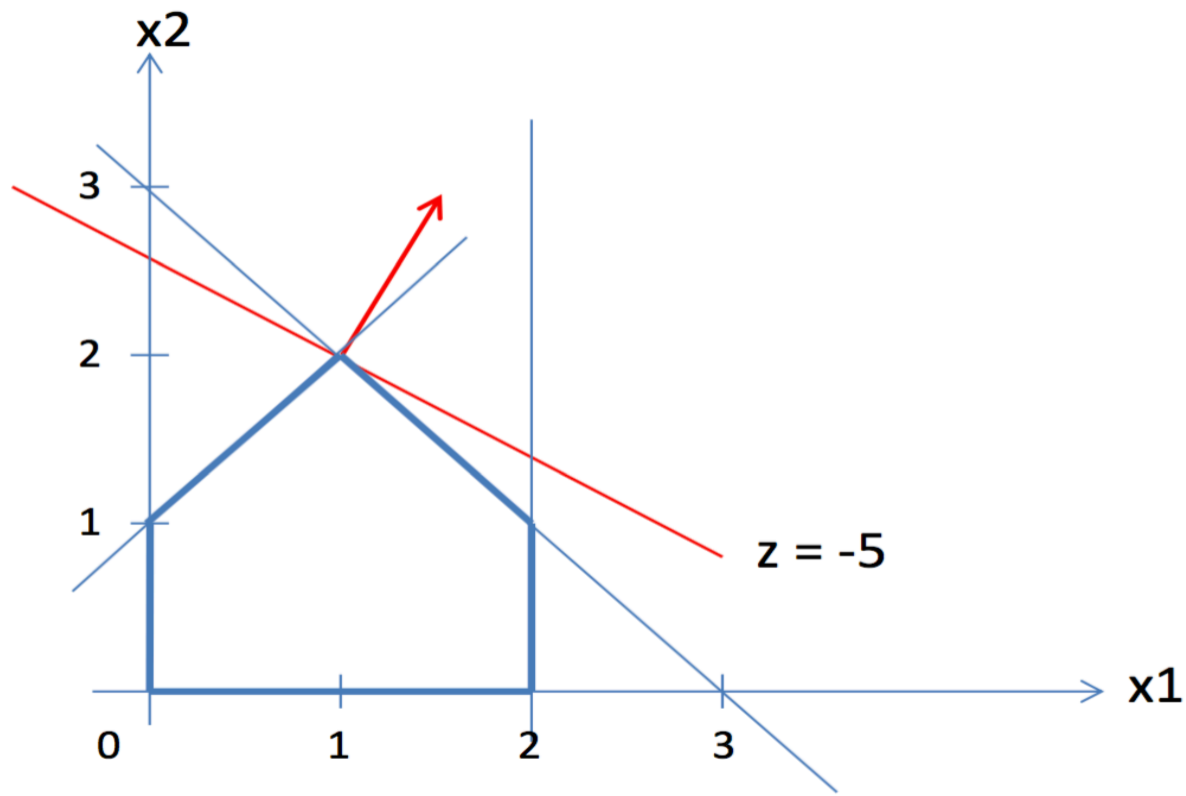


Pousser au maximum en restant dans le domaine

Le dernier point atteint = (1 , 2)   avec z = -5

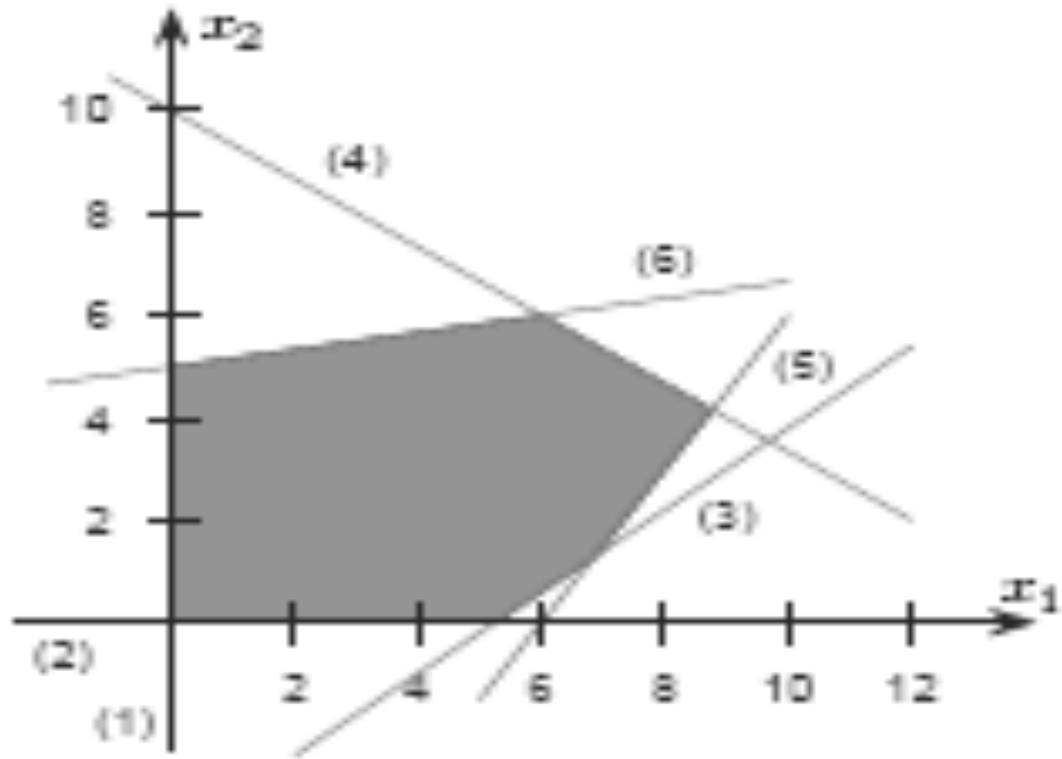
$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Résolution graphique dans le plan

$$
\begin{array}{rcrcrl}
4x_1 & - & 5x_2 & \leq & 21 & (3) \\
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (4) \\
3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 18 & (5) \\
-\frac{1}{2}x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 & (6) \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (1,2)
\end{array}
$$



Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles du plan.
Pour déterminer la valeur maximale d'une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens de son gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste le domaine admissible.

Fonction objectif (à maximiser) :

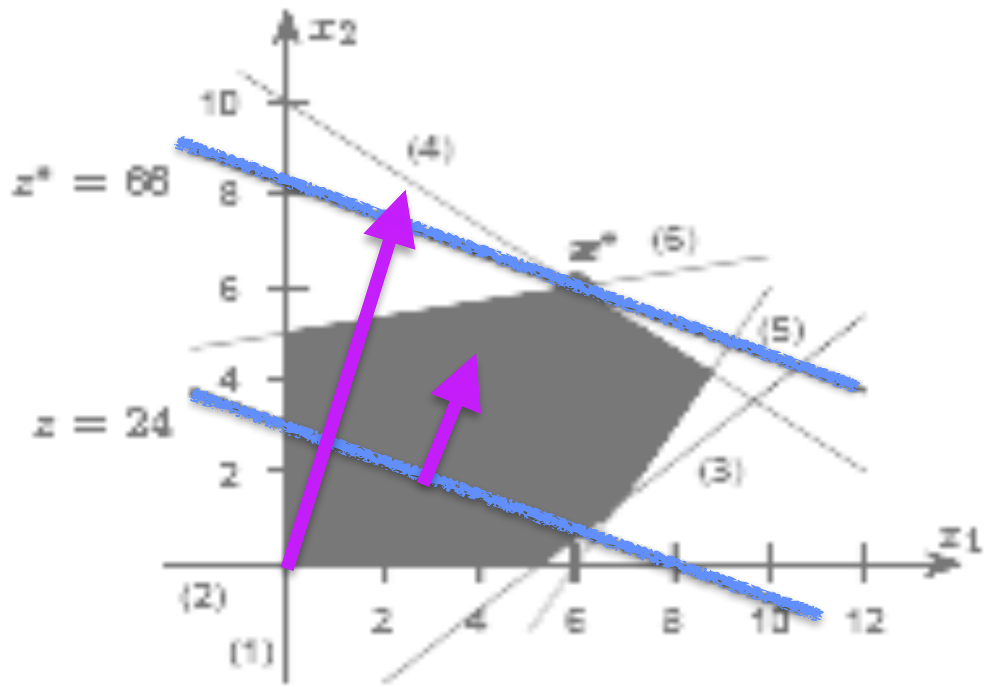
$$z = 3x_1 + 8x_2$$

Solution optimale :

$$x_1^* = 6, \qquad x_2^* = 6$$

de valeur optimale

$$z^* = 66$$



Base et solution de base

Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires avec $A : m \times n$ et $rang(A) = m$ (donc $m \leq n$)

- Toute sous-matrice régulière $B : m \times m$ de A est une base du système.

- Toute Base B du système est donc formée de m colonnes linéairement indépendantes de A.

- Par extension , on appelle également base la liste des variables, ou des indices de variables, associées aux colonnes de B.

- Deux bases sont voisines si elles ne diffèrent que par une seule colonne (variable) : les bases B1 =(1, 3, 7, 5) et B2 =(3, 2, 5, 7) sont voisines.

Soit B une base du système $Ax = b$. Après permutation des colonnes de A de telle sorte que celles B soient en premier, le système devient : $Bx_B + Nx_N = b$

Si on multiplie chaque côté par B^{-1}, le système devient :

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

D'ou :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Toutes les solution su système $Ax = b$ s'obtient en fixant arbitrairement les valeurs de x_N et en calculant les valeurs résultantes des x_B

Bases et solutions de base d'un P.L. standard

Soit $\{Ax = b, x \geqslant 0\}$ le systèmes de contraintes d'u PL standard avec, $A : m \times n$ et $rang(A) = m$

- Une base B du PL dest une base du système $Ax = b, x \geqslant 0$
- La solution particulière $x_B = B^{-1}b$ et $x_N = 0$ est appelée solution de base associée à la base B.
- Dans la base B, les variable x_B sont dites basiques alors que celles de x_N sont dites hors base.
- La solution de base associée à B s'obtient en fixant à zéro les variable hors base (x_N)
- Une base est admissible si sa solution de base est admissible des contraintes.
- Une base est admissible si est seulement si $x_B = B^{-1}b \geqslant 0$

Exemple : Soit le systèmes de contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

et la base $B = (a^3, a^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $x_B = (x_3, x_4)$ et $x_N = (x_1, x_2)$ est la solution de base associée à B est $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3$.

Dictionnaires et pivotages

Base initiale pour un P.L. canonique

En partant d'un P.L. canonique

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Max} & z = & c_D x_D & \\
\text{s.c.} & & A x_D & \leq & b \\
& & x_D & \geq & 0
\end{array}
$$

et en ajoutant des variables d'écart x_E, on obtient le P.L. standard

$$
\begin{array}{lrcccl}
\text{Max} & z = & c_D x_D & & & \\
\text{s.c.} & & A x_D & + & I x_E & = & b \\
& & x_D & , & x_E & \geq & 0
\end{array}
$$

Les colonnes associées aux variables d'écart forment une base de ce P.L. : les variables de base sont les variables d'écart ($x_B = x_E$) et les variables hors base sont les variables de décision ($x_N = x_D$). La solution de base (pas forcément admissible) associée est $x_E = b$ et $x_D = 0$.

Dictionnaire initial pour un P.L. canonique

La fonction objectif et le système de contraintes du programme précédent peuvent s'écrire

$$\begin{array}{rcccccccc} z & = & 0 & + & c_D x_D & = & 0 & + & -c_D(-x_D) \\ x_E & = & b & - & A x_D & = & b & + & A(-x_D) \end{array}$$

et on leur associe le **dictionnaire** (aussi appelé tableau réduit ou, simplement, tableau) :

$$\begin{array}{rc|c|c|} & & & -x_D \\ \hline z & = & 0 & -c_D \\ \hline x_E & = & b & A \\ \hline \end{array}$$

Pour le programme linéaire

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
\text{Max} & z = & x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 5 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

le dictionnaire initial, associé à la base définie par les variables d'écart x_3, x_4 et x_5 est

		$-x_1$	$-x_2$
z =	0	-1	-4
x_3 =	2	1	-1
x_4 =	5	2	1
x_5 =	3	0	1

P.L. standard dans une base B

Soit le P.L. standard :
$$\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & cx & & \\ \text{s.c.} & & Ax & = & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

avec A : $m \times n$ et rang$(A) = m$.

Soit, encore, B une base de $Ax = b$. Dans la base B, le système $Ax = b$ s'écrit (à une permutation près de ses colonnes)

$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

ou, encore,

$$x_B = B^{-1}b + B^{-1}N(-x_N)$$

et la fonction objectif devient

$$\begin{aligned} z &= cx = c_Bx_B + c_Nx_N \\ &= \underbrace{c_BB^{-1}b}_{z_0} + \underbrace{(c_BB^{-1}N - c_N)}_{-\gamma_N}(-x_N). \end{aligned}$$

Le **dictionnaire** associé à la base B est alors :

$$
\begin{array}{rcc|c|c|}
 & & & & -x_N \\
\cline{4-5}
z & = & & c_B B^{-1} b & c_B B^{-1} N - c_N \\
\cline{4-5}
x_B & = & & B^{-1} b & B^{-1} N \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

ou, avec $z_0 = c_B B^{-1} b$ et $-\gamma_N = c_B B^{-1} N - c_N$,

$$
\begin{array}{rcc|c|c|}
 & & & & -x_N \\
\cline{4-5}
z & = & & z_0 & -\gamma_N \\
\cline{4-5}
x_B & = & & B^{-1} b & B^{-1} N \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

Pour le programme linéaire

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
\text{Max} & z = & x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 5 \\
& & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

et la base $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \boldsymbol{a}^4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$\boldsymbol{x_B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x_N} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{a}^3\ \boldsymbol{a}^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{c_B} = (1\ \ 4\ \ 0)$ et $\boldsymbol{c_N} = (0\ \ 0)$

De plus $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_B} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{B^{-1}N}(-\boldsymbol{x_N}) \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$z_0 = \boldsymbol{c_B B^{-1} b} = (1 \;\; 4 \;\; 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = 17$$

et

$$
\begin{aligned}
-\gamma_N &= c_B B^{-1} N - c_N \\
&= (1 \ \ 4 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - (0 \ \ 0) \\
&= (1 \ \ 5) - (0 \ \ 0) = (1 \ \ 5)
\end{aligned}
$$

Le dictionnaire associé à B est

$$
\begin{array}{rc|c|cc|}
 & & & -x_3 & -x_5 \\
\cline{3-5}
z & = & 17 & 1 & 5 \\
\cline{3-5}
x_1 & = & 5 & 1 & 1 \\
x_2 & = & 3 & 0 & 1 \\
x_4 & = & -8 & -2 & -3 \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

Dictionnaire admissible

Rappelons que, pour une base B, la solution de base s'obtient en fixant à zéro les variables hors base x_N. Les valeurs de variables basiques se lisent donc dans la première colonne du dictionnaire associé. Ce dernier est **admissible** si et seulement si cette solution de base l'est, c.-à-d. si et seulement si

$$x_B = B^{-1}b \geq 0.$$

Signature d'un dictionnaire admissible

$$\begin{array}{rc|c|ccc|}
 & & & & -x_N & \\
\hline
z & = & * & * & \cdots & * \\
\hline
 & & \oplus & & & \\
x_B & = & \vdots & & & \\
 & & \oplus & & & \\
\hline
\end{array}$$

NOTATION. $\oplus$: élément non négatif, $+$: élément positif,
$\ominus$: élément non positif, $-$: élément négatif,
$*$: élément de signe quelconque.

Tableaux et pivotages

Tableau initial pour un P.L. canonique

Un **tableau** est une matrice augmentée associée à un PL sous forme standard.

PL standard initial

$$\text{Max} \quad (z, \ \text{s.c. } \boldsymbol{x_D}, \boldsymbol{x_E} \geq \mathbf{0})$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_D} & + & \boldsymbol{I}\boldsymbol{x_E} & & & = & \boldsymbol{b} \\
\hline
-\boldsymbol{c_D}\boldsymbol{x_D} & - & \mathbf{0}\boldsymbol{x_E} & + & z & = & 0
\end{array}$$

Tableau initial associé

$$\boldsymbol{T}_0 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccc}
\boldsymbol{x_D} & \boldsymbol{x_E} & z & \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\boldsymbol{A}} & \multicolumn{1}{c|}{\boldsymbol{I}} & \multicolumn{1}{c||}{\mathbf{0}} & \multicolumn{1}{c|}{\boldsymbol{b}} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{-\boldsymbol{c_D}} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c||}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\
\hline
\end{array}$$

Tableau associé à une base B

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c^T_B B^{-1}A$	$-c^T_B B^{-1}b$

Tableau associé à une base B

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Min } z = & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{Min } z = & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 20 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 20 \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 20 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B(1)=4, B(2)=5, B(3)=6

$B=B^{-1}=I$

$B^{-1}A$ $\qquad$ $B^{-1}b$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$c^T - c^T_B B^{-1}A$ $\qquad$ $-c^T_B B^{-1}b$

Sous forme standard, l'exemple d'allocation de ressources est

$$
\begin{array}{llcccccccccccc}
\text{Max} & \multicolumn{13}{l}{(z, \ \text{s.c. } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0)} \\
\text{avec} & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 21 \\
& -4x_1 & + & 6x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 0 \\
& x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 15 \\
\hline
& -50\,000x_1 & - & 200\,000x_2 & & & & & & & + & z & = & 0
\end{array}
$$

et $\boldsymbol{T}_0 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
1	4	1	0	0	0	21
−4	6	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	15
−50 000	−200 000	0	0	0	1	0

Le tableau initial de l'exemple d'allocation de ressources est admissible.

$$\boldsymbol{T}_0 = \begin{array}{cc|ccc|c||c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline -50\,000 & -200\,000 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

La solution basique associée est

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{x_E} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{x_D} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Le pivotage

Dans un sytème Ax=b, un pilotage est ensemble d'opérations de ligne élémentaires permettant de rendre y) une ligne basique (passer du tableau d'une base B au tableau d'associé à une base voisine de B).

Plus précisément, pivoter autour du pivot a_{ir} (non nul),consiste à :

- La ligne i du pivot est divisée par le pivot a_{ir} (pour isoler la variable x_r dans la $i^{ième}$ ligne)
- Eliminer x_r des autres équations par substitution : Pour toute ligne k autre que la ligne du pivot, on soustrait de ligne k la nouvelle ligne du pivot (après division par le pivot) multipliée par le coefficient de cette ligne sur la ligne r du pivot. (i' = i - k'*coef)
- La ligne ayant un 0 sur la colonne du pivot, ne change pas.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	3/2	1	1	-1/2	0	10
1	1/2	1	0	1/2	0	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	-7	-2	0	5	0	100

Interprétation géométrique d'un pivotage

Considérons le PL canonique

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Max} & z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

de tableau initial

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{T}_0 = \end{array} \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Si x_1 entre dans la base, la solution se déplace sur Ox_1 (x_2 reste nulle).

- Si x_1 remplace x_3 (pivot α_{11})

  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -1.$

- Si x_1 remplace x_4 (pivot α_{21})

  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0.$